

Physique statistique des surfaces aléatoires et combinatoire bijective des cartes planaires

Jérémie Bouttier

▶ **To cite this version:**

Jérémie Bouttier. Physique statistique des surfaces aléatoires et combinatoire bijective des cartes planaires. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT : . tel-00010651

HAL Id: tel-00010651
https://theses.hal.science/tel-00010651

Submitted on 17 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 6 — Pierre et Marie Curie
et
Service de Physique Théorique, Commissariat à l'Énergie Atomique

Thèse de doctorat

Spécialité : Physique Théorique

présentée par :

Jérémie BOUTTIER

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 6

Sujet :

Physique statistique des surfaces aléatoires et combinatoire bijective des cartes planaires

Soutenue le vendredi 10 juin 2005 devant le jury composé de MM.

Édouard Brézin	Examinateur
Philippe Di Francesco	Directeur de thèse
Emmanuel Guitter	Directeur de thèse
Vladimir Kazakov	Président du jury
Gilles Schaeffer	Rapporteur
Matthias Staudacher	Rapporteur

Physique statistique des surfaces aléatoires et combinatoire bijective des cartes planaires

Résumé :
Les cartes sont des objets combinatoires apparaissant en physique comme discrétisation naturelle des surfaces aléatoires employées pour la gravité quantique bidimensionnelle ou la théorie des cordes, ainsi que dans les modèles de matrices. Après rappel de ces relations, nous établissons des correspondances entre diverses classes de cartes et d'arbres, autres objets combinatoires de structure simple. Un premier intérêt mathématique de ces constructions est de donner des preuves bijectives, élémentaires et rigoureuses, de plusieurs résultats d'énumération de cartes. Par ailleurs, nous accédons ainsi à une information fine sur la géométrie intrinsèque des cartes, conduisant à des résultats analytiques exacts grâce à une propriété inattendue d'intégrabilité. Nous abordons enfin la question de l'existence d'une limite continue universelle.

Mots-clés : gravité quantique, modèles de matrices, géométrie aléatoire, systèmes intégrables, combinatoire énumérative, théorie des graphes

Statistical physics of random surfaces and bijective combinatorics of planar maps

Abstract :
Maps are combinatorial objects arising in physics as the natural discretization of random surfaces used in two-dimensional quantum gravity or string theory, as well as in matrix models. After recalling these relations, we establish correspondences between various classes of maps and trees, that are other combinatorial objects with a simple structure. A first mathematical outcome of these constructions are bijective, elementary and rigorous proofs of several results in map enumeration. Moreover, we access to some fine information on the intrinsic geometry of maps, leading to analytical exact results thanks to an unexpected integrability property. Finally we address the question of the existence of a universal continuum limit.

Keywords : quantum gravity, matrix models, random geometry, integrable systems, enumerative combinatorics, graph theory

Service de Physique Théorique
CEA/DSM/SPhT, URA CNRS, CEA/Saclay
F-91191 Gif-sur-Yvette Cédex

Articles de référence

Ce mémoire reprend des résultats publiés dans les articles suivants :

I. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Critical and tricritical hard objects on bicolourable random lattices : exact solutions. *J. Phys. A : Math. Gen.* **35** 3821–3854, 2002. arXiv:cond-mat/0201213.

II. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Counting colored random triangulations. *Nucl. Phys. B* **641** 519–532, 2002. arXiv:cond-mat/0206452.

III. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Census of planar maps : from the one-matrix model solution to a combinatorial proof. *Nucl. Phys. B* **645** [PM] 477–499, 2002. arXiv:cond-mat/0207682.

IV. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Combinatorics of hard particles on planar graphs. *Nucl. Phys. B* **655** [FS] 313–341, 2003. arXiv:cond-mat/0211168.

V. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Geodesic distance in planar graphs. *Nucl. Phys. B* **663** [FS] 535–567, 2003. arXiv:cond-mat/0303272.

VI. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Random trees between two walls : exact partition function. *J. Phys. A : Math. Gen.* **36** 12349–12366, 2003. arXiv:cond-mat/0306602.

VII. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Statistics of planar graphs viewed from a vertex : a study via labeled trees. *Nucl. Phys. B* **675** [FS] 631-660, 2003. arXiv:cond-mat/0307606.

VIII. J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter. Planar maps as labeled mobiles. *Electron. J. Combin.* **11**(1) #R69. arXiv:math.CO/0405099.

Ces articles de référence seront évoqués tout au long du texte avec la numérotation ci-dessus. Les autres notes bibliographiques sont groupées à la fin du mémoire et appelées entre crochets.

Remerciements

Que soient remerciées ici toutes les personnes ayant contribué, de quelque manière que ce soit, à la réalisation de cette thèse.

En premier lieu viennent Emmanuel et Philippe, ou Philippe et Emmanuel selon que l'ordre alphabétique porte sur le prénom ou le nom. Je fis leur connaissance par un jour d'hiver 2001, alors que comme tout bon étudiant de DEA, j'entamais ma prospection d'un directeur de thèse. Cette prospection ne me prit pas trop de temps, puisque je trouvai là immédiatement non pas un, mais deux directeurs pleins de dynamisme et d'enthousiasme, me proposant un sujet original tout à fait conforme à mes intérêts. Par la suite, j'eus le plaisir d'être très vite considéré non comme un simple étudiant mais comme un collaborateur à part entière. Nos interactions furent nombreuses et enrichissantes : de Philippe, je retiendrai l'extraordinaire habileté au calcul qui nous amenait sans cesse de nouveaux résultats parfois inattendus, d'Emmanuel, la remarquable pertinence de ses analyses qui nous mirent maintes fois sur une piste fructueuse. Je les remercie de tout coeur pour ce qu'ils m'ont apporté.

Je suis très reconnaissant à MM. Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer et Matthias Staudacher qui ont accepté de lire en détail ma thèse, d'en écrire un rapport, suffisamment favorable pour me permettre de la soutenir, et de me suggérer avec bienveillance diverses améliorations. Je suis aussi très honoré que MM. Édouard Brézin et Vladimir Kazakov aient bien voulu faire partie de la commission d'examen.

Mon travail de thèse a été effectué au Service de Physique Théorique du Commissariat à l'Énergie Atomique, qui a mis à ma disposition tous les moyens nécessaires dans un cadre propice au travail. Je le remercie en la personne de ses directeurs successifs, Jean-Paul Blaizot et Henri Orland. Merci également au secrétariat et en particulier à Sylvie Zaffanella ; au groupe informatique qui a toujours répondu patiemment à mes diverses questions ; à Michel Bauer qui m'initia aux logiciels libres, employés pour la rédaction de cette thèse ; enfin à tous les membres du laboratoire avec qui j'ai pu avoir de multiples interactions enrichissantes, scientifiques ou non, notamment lors d'une pause en salle café ou pendant le repas de midi à la fameuse cantine du CEA.

Après une première année de thèse effectuée pendant la fin de ma scolarité à l'École normale supérieure, je décidai d'entrer au Corps des Télécommunications. Je souhaite ainsi remercier MM. Marc Oberlé et Christophe Digne pour leur bienveillance, m'ayant permis de poursuivre mes recherches dans les meilleures conditions, et MM. Dominique Ventre et Dominique Kremmer, pour m'avoir accordé un allègement substantiel de scolarité à l'ENST. La rédaction de ma thèse fut achevée à Amsterdam, et je sais gré à Bernard Nienhuis de sa patience. Je salue en passant David, Naveen, Raoul, Srdjan, désormais plus amis que collègues.

En dernier lieu, je loue le soutien prodigué par mon entourage familial et amical. Tout particulièrement, je dois la possibilité même de commencer une thèse à l'appui sans faille de mes parents et mes grands-parents tout au long de mon parcours. Et je rends grâces à Sophie qui a partagé ma vie pendant ces dernières années.

Table des matières

Résumé — Abstract . . . 3
Articles de référence . . . 5
Remerciements . . . 7

Introduction **11**
Un bref historique . . . 11
Organisation du mémoire . . . 13
Définitions générales . . . 14

1 Les cartes en physique **19**
1.1 Intégrales de matrices . . . 20
1.1.1 Diagrammes de Feynman pour les intégrales matricielles . . . 20
1.1.2 Solution planaire du modèle à une matrice . . . 26
1.1.3 Intégrales multimatricielles . . . 31
1.2 Gravité quantique 2D et mécanique statistique sur surfaces dynamiques . . . 32
1.2.1 Concepts . . . 32
1.2.2 Approche par discrétisation . . . 34
1.3 Particules dures sur cartes aléatoires . . . 40
1.3.1 Particules dures sur cartes tétravalentes . . . 40
1.3.2 Particules dures sur cartes biparties trivalentes . . . 44
1.3.3 Généralisations du modèle . . . 47

2 Cartes planaires et arbres bourgeonnants **51**
2.1 Prémisses : le comptage bijectif des cartes planaires à n arêtes . . . 52
2.1.1 Arbres bourgeonnants quartiques . . . 52
2.1.2 Des arbres aux cartes : la clôture . . . 53
2.1.3 Des cartes aux arbres : le découpage . . . 55
2.1.4 Application au comptage des cartes . . . 56
2.2 Cartes arbitraires et arbres bien chargés . . . 57
2.2.1 Généralisation du découpage et de la clôture . . . 58
2.2.2 Arbres bien chargés : définition . . . 62
2.2.3 Arbres bien chargés : énumération . . . 64
2.2.4 Arbres équilibrés, application au comptage . . . 67
2.2.5 Le cas particulier des degrés pairs . . . 71
2.3 Cartes biparties, arbres bicolores et applications . . . 72
2.3.1 Des cartes biparties aux arbres bicolores bien chargés . . . 73
2.3.2 Cartes bicubiques et triangulations tricoloriables . . . 79
2.3.3 Particules dures sur cartes tétravalentes . . . 83

2.4 Un modèle à trois couleurs 85
2.4.1 Des cartes aux arbres tricolores bien chargés 86
2.4.2 Comparaison avec le modèle à trois matrices en chaîne 88

3 Cartes planaires et arbres étiquetés 91
3.1 Triangulations eulériennes et arbres très bien étiquetés 92
3.1.1 Des cartes aux arbres 92
3.1.2 Des arbres aux cartes 96
3.1.3 Application à l'énumération 101
3.1.4 Analogie : quadrangulations et arbres bien étiquetés 105
3.2 Cartes eulériennes et mobiles 110
3.2.1 Des cartes eulériennes pointées aux mobiles 110
3.2.2 Construction inverse : des mobiles aux cartes 116
3.2.3 Décomposition et énumération des mobiles 122
3.2.4 Quelques cas particuliers d'intérêt 127

4 Distance et intégrabilité 133
4.1 La fonction à deux points 133
4.1.1 Motivations physiques 133
4.1.2 Définition discrète 135
4.1.3 Le cas des quadrangulations 136
4.1.4 Généralisation au cas des degrés bornés 143
4.2 Autour du rayon des quadrangulations 154
4.2.1 Solution exacte discrète 154
4.2.2 Limite continue 157
4.3 Le profil des quadrangulations 158
4.3.1 Séries génératrices 158
4.3.2 Profil des cartes infinies : première approche 160
4.3.3 Profil des cartes infinies : schéma général 162

Conclusion et perspectives 167

Bibliographie 169

Introduction

Un thème à l'origine de cette thèse est l'étude de la physique et de la géométrie des *surfaces aléatoires*. Par surface, nous entendons un objet géométrique de structure bidimensionnelle, modélisant par exemple une interface entre phases fluides ou solides, ou bien une membrane biologique. Cependant, dans ces situations, la surface apparaît comme sous-partie d'un espace plus grand, à trois dimensions. Ici, nous considérons plutôt des surfaces abstraites, sans référence à un espace environnant, et nous nous intéressons à leurs propriétés intrinsèques (métriques). Nos motivations proviennent de développements relativement récents de la physique théorique : la gravité quantique et la théorie des cordes. Pour la première, la notion de géométrie aléatoire apparaît au croisement des intuitions d'Einstein (la gravité résulte de la géométrie intrinsèque de l'espace-temps) et de Feynman (l'évolution d'un système quantique correspond à une superposition de toutes les trajectoires possibles). Pour la seconde, bien qu'une corde soit un objet unidimensionnel, la trajectoire qu'elle balaie au cours du temps forme une surface, qui constitue l'espace fondamental de la théorie.

La formalisation mathématique d'une surface est généralement, dans le continu, une variété différentielle et plus particulièrement une variété riemannienne. Cependant, la description du caractère aléatoire d'une surface continue est encore un sujet délicat. Une approche courante en physique, que nous suivrons, consiste à passer plutôt par une modélisation discrète, pour retrouver in fine des résultats continus, universels, en s'intéressant à des propriétés à grande échelle où les détails microscopiques influent peu. Les objets mathématiques correspondant aux surfaces aléatoires discrètes sont connus en combinatoire sous le nom de *cartes* : de façon informelle il s'agit de graphes tracés sans croisement d'arêtes sur une surface de référence fixée (la sphère ou le plan dans le cas des cartes *planaires*), découpant celle-ci en faces. La structure de graphe est en effet bien adaptée pour modéliser une géométrie discrète, en attribuant par exemple une même longueur-unité à chaque arête. Cependant cette notion à elle seule ne suffit pas à représenter une surface, car un graphe peut aussi bien modéliser une géométrie de dimension arbitraire (penser en particulier aux réseaux réguliers à d dimensions). Le plongement dans une surface de référence permet de pallier ce problème, en définissant de façon naturelle une unité discrète d'aire associée aux faces.

Nous rejoignons ainsi la combinatoire, domaine a priori disjoint de la physique. Le lien entre ces disciplines n'est toutefois pas nouveau : en effet l'étude des propriétés statistiques d'un modèle discret se ramène typiquement à un problème d'énumération. Ainsi, la notion de fonction de partition en physique statistique est très proche de celle de série génératrice en combinatoire. Cette analogie est l'un des fils conducteurs de cette thèse : s'il fallait donner un qualificatif au domaine de nos travaux, nous choisirions celui de *physique statistique combinatoire*.

Un bref historique

Les cartes furent introduites dans les années 1960 par le mathématicien W.T. Tutte dans sa fameuse série d'articles « A census of ... » [1, 2, 3, 4], qui jettent les bases de leur théorie énumérative. La motivation principale était alors de prouver le célèbre théorème des quatre couleurs (que l'on peut formuler ainsi : les faces de toute carte planaire peuvent être coloriées à l'aide de quatre couleurs, de telle sorte que deux faces adjacentes soient toujours de couleurs différentes). Si cet objectif n'a pas été atteint[1], il n'en reste pas moins que l'approche novatrice et intuitive de Tutte a stimulé de nombreux développements en combinatoire : en effet la structure simple des cartes planaires se prête bien à une « décomposition récursive », se traduisant immédiatement en un système d'équations satisfaites par leurs séries génératrices. Les tentatives de résolution de ces équations, dites de Tutte, aboutirent à de nombreux résultats généraux en théorie des séries génératrices : méthode quadratique, théorèmes d'élimination de variables catalytiques...[2] Parallèlement, l'étude des cartes s'enrichit d'aspects algébriques et algorithmiques via un codage naturel par des permutations[3]. Celui-ci aboutit aux premières preuves bijectives d'énumération de cartes par Cori *et al* [5, 6].

Le lien avec la physique vient, quant à lui, dans les années 1970, et – comme nombre d'avancées en physique théorique voire généralement en recherche – de manière inattendue, sans rapport a priori avec l'étude des surfaces aléatoires. C'est en effet par la théorie quantique des champs, domaine alors en pleine effervescence, que la connexion s'établit. Plus précisément, dans la chromodynamique quantique (QCD) à N couleurs[4] aussi nommée théorie de jauge ou de Yang-Mills $U(N)$, les « diagrammes de Feynman », qui représentent de manière graphique et compacte les différents termes intervenant dans le calcul des grandeurs physiques, possèdent une structure spéciale, les assimilant de notre point de vue aux cartes. En particulier, 't Hooft nota que lorsque N devient grand, les diagrammes ayant une contribution prépondérante sont de topologie planaire, les autres topologies apparaissant comme corrections successives [7]. Si cette remarque eut un impact limité en QCD, l'application la plus importante de cette relation se fit dans le sens inverse, c'est-à-dire que les méthodes de théorie des champs purent alors être utilisées pour l'énumération de cartes : par des techniques asymptotiques exploitant l'invariance $U(N)$, Brézin, Itzykson, Parisi et Zuber parvinrent en 1978 à retrouver certaines formules de Tutte [8]. Cette approche suscita un véritable engouement dans la communauté physicienne quelques années plus tard, lorsqu'il fut enfin suggéré d'employer les diagrammes planaires comme modèles discrets de surfaces aléatoires [9, 10, 11]. Si le cheminement paraît aujourd'hui bien indirect, la méthode dite des modèles de matrices, introduite par Brézin *et al*, fut cependant une étape essentielle, amenant de multiples généralisations et permettant la solution exacte (i.e. le calcul de la fonction de partition) de plusieurs modèles dont l'emblématique modèle d'Ising sur surfaces aléatoires [12, 13].

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit au confluent de l'approche des combinatoristes et des physiciens, peu exploré jusqu'ici en raison de grandes différences de méthode et de terminologie. Une grande part des résultats obtenus relève de la *combinatoire bijective*, consistant à rechercher des codages (si possible biunivoques) des objets étudiés – ici les cartes – en termes d'objets plus simples – notamment les arbres – dont l'énumération est facile. Comme mentionné plus haut, la combinatoire bijective des cartes fut initiée par Cori *et al* en utilisant le codage des cartes par des permutations. Cependant, le premier véritable développement du sujet vint durant la thèse de G. Schaeffer [14], qui parvient à retrouver plusieurs résultats de Tutte par des constructions plus géométriques. Par rapport aux précédentes, l'approche bijective a de multiples

[1] Une preuve assistée par ordinateur fut trouvée quelques années plus tard par Appel et Haken [15, 16].
[2] Voir par exemple le livre de Goulden et Jackson [17], ou l'article [18] et références incluses.
[3] Cf. [19, 20] et références incluses.
[4] Qui se trouve être pour $N = 3$ couleurs la description correcte des interactions fortes en physique des particules.

avantages. En premier lieu, elle conduit à des preuves à la fois élémentaires et rigoureuses, toujours satisfaisantes sur un plan esthétique. De plus, elle préserve une information fine sur la géométrie des cartes, permettant d'en saisir certaines propriétés statiques de manière analytique. Ces deux points seront illustrés abondamment au cours de cette thèse. Enfin, elle possède d'intéressantes applications en informatique, en fournissant des algorithmes efficaces de génération aléatoire. Ce dernier sujet n'étant pas du ressort de ce mémoire, nous renvoyons le lecteur intéressé à la thèse de G. Schaeffer, par exemple.

Organisation du mémoire

L'organisation du mémoire est la suivante. Afin d'introduire une fois pour toutes la terminologie nécessaire, nous commençons par donner ci-dessous les définitions de notions utilisées tout au long de cette thèse, en particulier la notion même de carte.

Le premier chapitre est consacré à la motivation de ce travail, le lien entre les cartes et la physique théorique. Nous dégageons deux axes majeurs, certes intimement connectés : d'une part à la section 1.1, la théorie des intégrales de matrices initiée par l'article « BIPZ » [8] ; d'autre part à la section 1.2, la gravité quantique bidimensionnelle et son pendant, la mécanique statistique sur surfaces dynamiques. Ces deux sections ne représentent pas un travail original, mais cherchent à donner un aperçu synthétique de thèmes désormais classiques. Nos premiers résultats propres viennent à la section 1.3, discutant des modèles de particules dures sur cartes aléatoires introduits dans la publication I. Cette dernière contient une discussion élaborée de la riche physique de ces modèles, que nous ne reprendrons pas complètement ici, puisque notre propos est avant tout d'illustrer par un exemple concret les idées des sections précédentes.

Le second chapitre présente une hiérarchie de bijections entre familles de cartes planaires et d'arbres, qualifiables généralement d'arbres bourgeonnants. Ces constructions s'apparentent à la méthode de la conjugaison d'arbres de Schaeffer [14]. La construction primordiale de la section 2.1, que nous voulons la plus élémentaire possible, lui est empruntée. Les sections suivantes, 2.2, 2.3, 2.4, vont par ordre croissant de généralité. Les constructions qui y sont présentées donnent des preuves bijectives, rigoureuses, de résultats également dérivables par les modèles de matrices (à savoir, successivement le modèle à une matrice, le modèle à deux matrices, et le modèle à trois matrices en chaîne). Toutes tournent autour du concept unificateur de *charge*, qui reflète combinatoirement les contraintes de degrés apparaissant dans la méthode de solution des modèles de matrices par polynômes (bi-)orthogonaux. Ce chapitre constitue une synthèse des publications II, III, IV, de l'article proche de Bousquet-Mélou et Schaeffer [21], ainsi que de résultats non-publiés.

Le troisième chapitre est dédié à un autre de type de bijections géométriques entre cartes et arbres, qualifiables à présent d'arbres étiquetés. À nouveau, le premier exemple d'une telle construction est notamment dû à Schaeffer. Nous présentons à la section 3.1 une construction analogue, reliant les triangulations eulériennes aux arbres très bien étiquetés, et reprise de la publication VII. La section 3.2 est consacrée à une généralisation, qui apparaît comme « duale » de la section 2.3. Nous y introduisons une nouvelle famille d'arbres, baptisés mobiles dans l'article VIII. De façon générale, les arbres étiquetés ont l'intérêt d'avoir une structure relativement simple, familière des probabilistes. Aussi ont-ils été repris dans de multiples travaux, et fournissent une transition naturelle vers le dernier chapitre.

Le quatrième et dernier chapitre emploie les résultats des chapitres précédents pour l'étude de propriétés géométriques des cartes et surfaces aléatoires. De façon intéressante et inattendue, la statistique de la distance est liée aux systèmes intégrables. La section 4.1 discute de la notion de fonction à deux points dans les théories de gravité quantique et reprend pour l'essentiel l'article V. La section 4.2 donne la solution générale d'une équation discrète intégrable, liée au rayon

des quadrangulations. Elle correspond à la publication VI. La section 4.3 propose enfin une dernière application à l'étude de la statistique des quadrangulations infinies, comme discuté dans l'article VII. Ce chapitre est une illustration, non exhaustive, des intéressantes applications de nos constructions bijectives.

Définitions générales

Cette section sert à définir l'essentiel des notions de théorie des graphes et des cartes qui seront utiles par la suite.

Graphes

Un graphe est habituellement défini par la donnée d'un ensemble de sommets, d'un ensemble d'arêtes, et des relations d'incidence, que l'on peut voir comme une application qui à toute arête associe deux sommets, ses extrémités. Nous considérerons ici des graphes non-orientés, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de distinction entre les deux extrémités d'une arête (pour une arête orientée, nous distinguons l'origine et l'extrémité de l'arête). Nous permettons aussi a priori l'existence d'arêtes multiples – plusieurs arêtes ayant la même paire d'extrémités – et de boucles – une arête ayant un même sommet à ses deux extrémités –[5].

Le degré (ou la valence) d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, avec multiplicité (une boucle est comptée deux fois). Pour tout entier $k \geq 3$, un graphe est dit k-valent (ou k-régulier) si chaque sommet a degré k. Pour k petit, nous parlons respectivement de graphe trivalent, tétravalent, etc.

Plongements cellulaires

Un plongement d'un graphe dans une surface (supposée compacte, connexe, orientable et sans bord) est une application qui envoie chaque sommet du graphe sur un point de la surface, et chaque arête sur un arc simple ouvert, de telle sorte que :

- les images d'éléments du graphe (sommets et arêtes) différents sont deux à deux disjoints,
- les relations d'incidence sont préservées, i.e. les extrémités de l'arc image d'une arête sont les points images des extrémités de celle-ci.

Le complémentaire de l'image du graphe peut être décomposé en ses composantes connexes, appelées faces. La notion d'incidence se généralise naturellement : deux « éléments » d'un graphe plongé (sommet, arête ou face) sont dits incidents si l'un est inclus dans la frontière de l'autre. Ainsi, une arête est incidente à deux sommets (ses extrémités au sens du graphe sans plongement) et à deux faces (une pour chaque « bord »). Comme les extrémités, les deux faces incidentes à une arête peuvent être confondues, on parle alors d'arête séparante (ou aussi isthme). La notion de degré s'étend aux faces : le degré d'une face est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, avec multiplicité (un isthme est compté deux fois).

Le plongement d'un graphe dans une surface est dit cellulaire s'il vérifie la propriété supplémentaire suivante :

- chaque face est un domaine simplement connexe.

On parle aussi de décomposition cellulaire de la surface, car le plongement définit une partition de celle-ci en 0-cellules (les sommets), 1-cellules (les arêtes) et 2-cellules (les faces). Notons que l'existence d'un plongement cellulaire impose que le graphe plongé est connexe.

[5] Dans certaines terminologies, les graphes pouvant avoir des arêtes multiples et des boucles sont appelés multigraphes.

Cartes

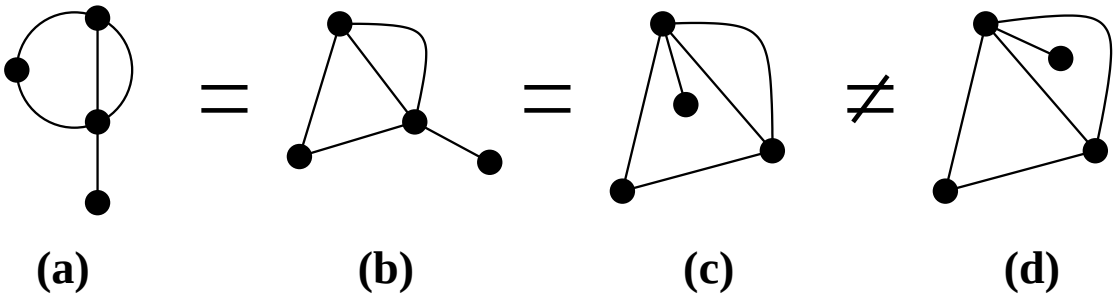


FIG. 1 – Identifications de représentations de cartes planaires. (a) et (b) diffèrent par une simple déformation du plan, (c) est obtenu pour un autre choix de face externe : il s'agit de trois représentations d'une même carte planaire, dont les faces ont degrés 2, 3, 5. (d) correspond à une carte planaire différente, de faces de degrés 3, 3, 4, bien que le graphe planaire sous-jacent soit identique.

Nous pouvons alors identifier les plongements cellulaires ne différant que par une transformation continue (homéomorphisme) de la surface. Ceci définit une relation d'équivalence, dont les classes sont les cartes. Les déformations continues préservent les sommets, les arêtes, les faces, les relations d'incidence et les degrés : toutes ces notions restent définies dans les cartes.

De plus, il est bien connu que les surfaces compactes, connexes, orientables et sans bord sont complètement caractérisées à déformation continue près par un entier positif g appelé genre. Cette notion s'étend immédiatement aux cartes, puisque deux plongements cellulaires équivalents ont des surfaces-cibles de même genre. Le genre est lié à la caractéristique d'Euler χ par :

$$\chi = 2 - 2g. \tag{1}$$

Toute carte satisfait la relation :

$$\chi = \#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\}. \tag{2}$$

Lorsque le genre est nul, la surface est la sphère, et on parle alors de carte planaire. Toute carte planaire peut être représentée sans croisement d'arêtes dans le plan, par exemple par projection stéréographique en choisissant un point à l'infini dans l'une des faces, appelée face externe. La figure 1 illustre les identifications possibles entre représentations de cartes planaires.

La notion de carte planaire diffère légèrement de celle de graphe planaire : un graphe (connexe) est dit planaire s'il possède un plongement dans la sphère ; il se peut qu'il possède en fait plusieurs plongements inéquivalents, comme dans l'exemple de la figure 1 [6].

Ainsi, une carte possède une structure plus riche qu'un graphe. Outre la notion de face, nous voyons que l'ordre cyclique des (demi-)arêtes autour d'un sommet importe. Une telle remarque permet de définir un codage des cartes par permutations[7]. Nous parlerons de graphe sous-jacent à une carte, pour désigner le graphe obtenu en « oubliant » les faces.

Une carte est dite k-valente si le graphe sous-jacent est k-valent (tout sommet a degré k). En particulier pour $k = 3, 4$ nous parlons respectivement de cartes trivalentes, tétravalentes. Si, au

[6] Un même graphe peut également avoir des plongements cellulaires dans des surfaces inéquivalentes, comme dans les deux derniers cas de la figure 1.3 du chapitre 1.

[7] On parle alors de cartes combinatoires, par opposition aux cartes topologiques introduites par notre approche.

contraire, les contraintes de degré portent sur les faces, nous parlons de triangulations (toutes les faces ont degré 3), quadrangulations (toutes les faces ont degré 4).

Définitions liées aux cartes

Une carte enracinée est une carte où une arête, la racine, est marquée et orientée. Ceci revient à marquer un sommet (l'origine), et une arête qui y est incidente. Une carte où seul un sommet est marqué est dite pointée. La plupart des résultats connus en énumération des cartes portent sur les cartes enracinées, car le choix d'une racine lève l'ambiguïté liée aux possibles symétries internes (ou automorphismes). Nous ne discuterons pas plus ici de ce sujet, nécessitant d'introduire les notions de carte étiquetée et de carte non-étiquetée. Par convention, une carte enracinée sera représentée dans le plan avec la face externe à gauche de la racine.

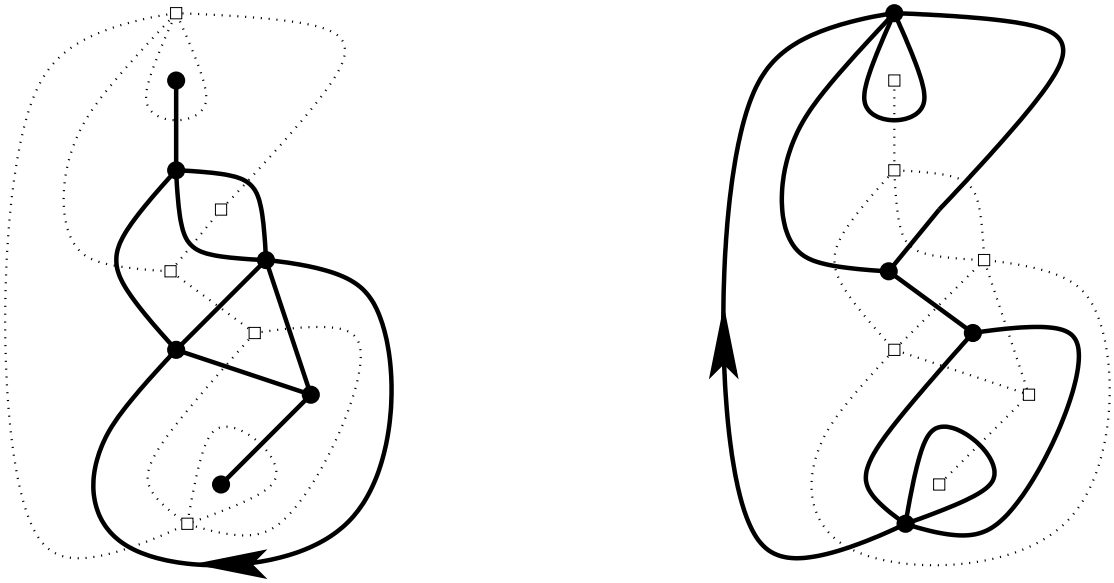


FIG. 2 – Une carte planaire enracinée et sa carte duale.

Nous pouvons ensuite remarquer que, dans une carte, les sommets et les faces jouent un rôle symétrique : il existe en effet une transformation de dualité qui à toute carte associe sa carte duale. Cette transformation revient très précisément à échanger les notions de sommet et de face, en préservant les relations d'incidence. Une illustration est donnée à la figure 2. La transformation de dualité est involutive, à l'orientation de la racine près pour une carte enracinée. Les cartes trivalentes sont les duales des triangulations, les cartes tétravalentes les duales des quadrangulations, etc.

Définitions communes aux graphes et aux cartes

Un chemin sur un graphe ou une carte est une suite d'arêtes orientées consécutives, c'est-à-dire que chaque arête reçoit une orientation telle que l'extrémité d'une arête est l'origine de l'arête suivante. La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le constituent, son origine est l'origine de la première arête, son extrémité est l'extrémité de la dernière arête. Un cycle est

un chemin fermé (i.e. son origine et son extrémité sont identiques) et simple (i.e. il ne passe pas deux fois par le même sommet).

Un graphe ou une carte est dit biparti(e) si chaque sommet peut être colorié en noir ou en blanc, de telle sorte que chaque arête relie un sommet noir à un sommet blanc. Remarquons qu'il est nécessaire et suffisant que tout cycle soit de longueur paire. Plus généralement, pour tout entier $k \geq 2$, un graphe ou une carte est dit k-coloriable si chaque sommet peut être colorié d'une de k couleurs, de telle sorte que chaque arête relie deux sommets de couleurs différentes.

Un graphe ou une carte est dit eulérien(ne) s'il existe un chemin eulérien, c'est-à-dire fermé et empruntant chaque arête exactement une fois[8]. Il est nécessaire et suffisant que chaque sommet soit de degré pair et, pour un graphe, que celui-ci soit connexe. Les cartes planaires biparties sont les duales des cartes planaires eulériennes ; cette propriété n'est toutefois vraie qu'en genre zéro.

Arbres

Un arbre est un graphe ne contenant pas de cycle. Un arbre plan est une carte ne contenant pas de cycle, qui ne compte alors qu'une face et est nécessairement planaire.

Nous considérons ici essentiellement des arbres plans, la notion d'enracinement étant celle des cartes (les dénominations sont ici très ambiguës, car « arbre enraciné » désigne souvent un arbre non plan avec un sommet marqué). Un arbre planté est un arbre plan avec un sommet marqué de degré un.

[8] Par contraste, un chemin hamiltonien est fermé et passe par chaque sommet exactement une fois.

Chapitre 1

Les cartes en physique

Les cartes sont régulièrement apparues en physique depuis les années 70, bien qu'étant rarement nommées ainsi. En premier lieu, dans l'étude de la chromodynamique quantique à N couleurs (ou théorie de jauge $U(N)$), 't Hooft [7] a remarqué que les diagrammes de Feynman ayant une contribution dominante dans la limite $N \to \infty$ sont les diagrammes planaires, identifiables à des cartes planaires, tandis que le terme sous-dominant correspond aux cartes de genre 1, etc. Ce développement est appelé développement topologique de 't Hooft. De façon surprenante, il eut un impact marqué dans un domaine différent de son domaine originel, par l'article [8] fondateur de Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber (« BIPZ »). En effet, un champ de jauge $U(N)$ se réduit, lorsque la dimension d'espace est nulle, à une matrice de taille N. Ceci établit une connexion entre les cartes et la théorie des matrices aléatoires, autre sujet intensément étudié. À l'aide de techniques asymptotiques, Brézin *et al.* purent obtenir de façon exacte plusieurs résultats d'énumération de cartes, retrouvant certaines formules de Tutte par une méthode radicalement différente.

Parallèlement, les triangulations aléatoires furent considérées comme possible discrétisation des surfaces employées pour la gravité quantique bidimensionnelle : la littérature à ce sujet étant abondante, nous citons ici les articles fondateurs de Kazakov [9], David [10], Ambjørn, Durhuus et Fröhlich [11], la revue de Di Francesco, Ginsparg et Zinn-Justin [22] (donnant de nombreuses autres références) ainsi que le livre de Ambjørn, Durhuus et Jonsson [23]. Par une analogie bien connue en physique théorique, cette étude peut être traduite dans le langage de la mécanique statistique, en termes de modèles définis sur des surfaces fluctuantes. Les résultats exacts fournis par les modèles (intégrales) de matrice furent alors largement utilisés, et les prédictions ainsi obtenues présentent un accord presque miraculeux avec l'approche continue par les théories conformes couplées au champ de Liouville [24, 25, 26]. Citons en particulier la solution du modèle d'Ising sur les cartes tri- et tétravalentes, obtenue par Kazakov et Boulatov [12, 13], qui met en évidence l'existence d'une transition de phase et d'un point critique comme sur réseau bidimensionnel régulier. Par la suite, de nombreux autres modèles ont pu être résolus, et leurs comportements critiques classifiés, voir la revue [22]. Enfin, de surprenantes connexions furent découvertes avec des sujets fondamentaux des mathématiques : citons les relations intimes entre modèles de matrices et systèmes différentiels intégrables [27, 28, 29, 30], et les applications inattendues de la gravité quantique à l'étude du mouvement brownien [31, 32], ou au problème combinatoire de l'énumération des méandres [33].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Nous commençons par introduire les intégrales de matrices, en présentant tout d'abord leur relation avec les cartes via la technique des diagrammes de Feynman, puis en utilisant des arguments liés à la théorie des grandes matrices aléatoires pour

en déduire la solution du modèle à une matrice, correspondant au problème de l'énumération des cartes arbitraires pour des nombres prescrits de sommets de chaque degré (« selon les degrés des sommets »). Quelques aspects des intégrales multimatricielles seront enfin évoqués. Nous passerons ensuite à une présentation conceptuelle de la gravité quantique et de la physique statistique des surfaces aléatoires, dans le but de motiver le passage à une théorie discrète où la surface est modélisée par une carte. Enfin, nous illustrerons ces différentes idées par une application à l'étude des modèles de particules dures sur les cartes aléatoires, introduits dans la publication I.

1.1 Intégrales de matrices

Dans cette section, nous présentons la relation unissant les cartes à la théorie des matrices aléatoires. Plus précisément certaines intégrales portant sur une ou plusieurs matrices hermitiennes peuvent se réexprimer via un développement en diagrammes de Feynman – technique courante issue de la physique des particules – en terme de séries génératrices de cartes. Une situation particulièrement intéressante, dite *limite planaire*, est obtenue quand la taille des matrices tend vers l'infini : les diagrammes ayant une contribution dominante dans le développement asymptotique des quantités étudiées correspondent précisément aux cartes planaires. Cette relation se révèle en outre une méthode de calcul très puissante, puisque dans de nombreux cas il est possible d'exploiter les propriétés de symétrie des intégrales matricielles pour en déduire des expressions explicites (souvent de nature algébrique).

Un avertissement est toutefois nécessaire : la plupart des intégrales, des développements en série et des passages à la limite considérés ici auront un sens analytique mal défini, voire présentent un caractère divergent. Nous n'aborderons pas ces problèmes ici, car cette question est relativement indépendante de l'application au comptage des cartes (notre approche pouvant être traduite en termes de manipulations de séries formelles), et nous souhaitons conserver une présentation heuristique sachant que les prédictions obtenues sont prouvables par des approches purement combinatoires, comme nous le verrons dans les chapitres 2 et 3.

La section est organisée comme suit : nous commençons par rappeler la technique du développement en diagrammes de Feynman pour les intégrales matricielles ; nous présentons ensuite la solution du problème dit modèle à une matrice, lié au comptage des cartes arbitraires selon les degrés des sommets ; enfin nous discutons brièvement de la généralisation aux intégrales multimatricielles, dont un exemple explicite sera traité plus loin (objets durs sur cartes planaires).

1.1.1 Diagrammes de Feynman pour les intégrales matricielles

Modèle gaussien, théorème de Wick

Le développement en diagrammes de Feynman est, de façon générale, une méthode systématique de développement d'une intégrale à plusieurs paramètres autour d'un point « gaussien ». Dans le cas des intégrales matricielles, nous considérons donc tout d'abord une matrice hermitienne aléatoire M de taille N, distribuée selon une densité gaussienne proportionnelle à $e^{-(\lambda/2)\,\mathrm{Tr}\,M^2}$ (*modèle gaussien*). Plus précisément, la mesure gaussienne s'écrit :

$$\mathcal{N}^{-1}\, e^{-(\lambda/2)\,\mathrm{Tr}\,M^2}\, \mathcal{D}M \tag{1.1}$$

où λ est un paramètre arbitraire, $\mathcal{N}$ un facteur de normalisation ou *fonction de partition*, et $\mathcal{D}M$ est la mesure de Lebesgue (invariante par translation) sur l'espace des matrices hermitiennes de

taille N :

$$\mathcal{D}M = \prod_i dM_{ii} \prod_{i<j} dM_{ij} d\bar{M}_{ij}, \tag{1.2}$$

qui n'est autre que la mesure-produit sur les *éléments de matrice* indépendants de M. Notons que la mesure de Lebesgue, ainsi que la mesure gaussienne (1.1), sont invariantes par conjugaison par une matrice unitaire, c'est-à-dire par la transformation :

$$M \mapsto \Omega M \Omega^{-1}, \qquad \Omega \in U(N). \tag{1.3}$$

Cette invariance sera véritablement exploitée plus loin. En attendant, un calcul simple montre que la fonction de partition est :

$$\mathcal{N} \equiv \int e^{-(\lambda/2)\,\mathrm{Tr}\,M^2} \mathcal{D}M = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{N^2/2} \tag{1.4}$$

tandis que la valeur moyenne du produit (ou *corrélation*) de deux éléments de matrice M_{ij}, M_{kl} est :

$$\langle M_{ij} M_{kl} \rangle \equiv \frac{\int e^{-(\lambda/2)\,\mathrm{Tr}\,M^2} M_{ij} M_{kl} \mathcal{D}M}{\mathcal{N}} = \frac{\delta_{il}\delta_{jk}}{\lambda}. \tag{1.5}$$

On peut alors exprimer les corrélations d'un nombre pair[1] arbitraire d'éléments de matrice à l'aide du *théorème de Wick* (s'appliquant généralement à toute mesure gaussienne) :

> La valeur moyenne du produit de $2n$ éléments de matrice est égale à la somme, portant sur tous les appariements deux à deux des éléments, du produit des corrélations des éléments appariées.

Par exemple, pour 4 éléments de matrice, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} M_{i_3 j_3} M_{i_4 j_4} \rangle &= \langle M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \rangle \langle M_{i_3 j_3} M_{i_4 j_4} \rangle \\ &+ \langle M_{i_1 j_1} M_{i_3 j_3} \rangle \langle M_{i_2 j_2} M_{i_4 j_4} \rangle \\ &+ \langle M_{i_1 j_1} M_{i_4 j_4} \rangle \langle M_{i_2 j_2} M_{i_3 j_3} \rangle. \end{aligned} \tag{1.6}$$

et pour $2n$ éléments la somme porte sur :

$$(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 \tag{1.7}$$

termes (nombre d'appariements de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$).

Notons dès maintenant que l'ensemble de ces résultats peut être étendu sans peine à un modèle gaussien à plusieurs matrices hermitiennes $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(p)}$ (ayant même taille N). En effet considérons la mesure gaussienne généralisée :

$$\mathcal{N}^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} Q_{\alpha\beta}\, \mathrm{Tr}\, M^{(\alpha)} M^{(\beta)}\right) \mathcal{D}M^{(1)} \mathcal{D}M^{(2)} \cdots \mathcal{D}M^{(p)} \tag{1.8}$$

où Q est une matrice $p \times p$ réelle symétrique. La fonction de partition généralisée est :

$$\mathcal{N} = \left(\frac{(2\pi)^p}{\det Q}\right)^{N^2/2} \tag{1.9}$$

[1] Par parité la valeur moyenne du produit d'un nombre impair d'éléments de matrice est nulle.

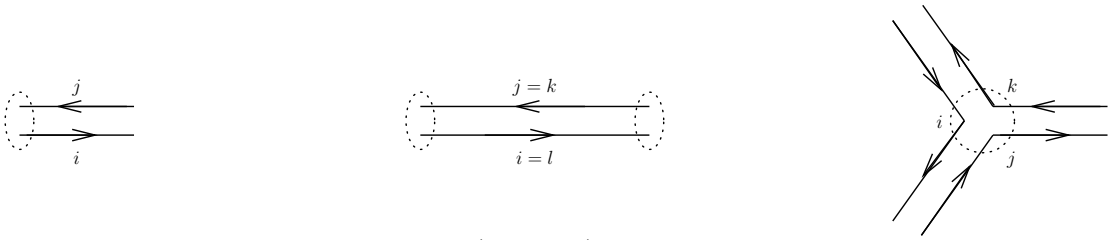
tandis que les corrélations de deux éléments de matrice sont :

$$\langle M_{ij}^{(\alpha)} M_{kl}^{(\beta)} \rangle = (Q^{-1})_{\alpha\beta} \delta_{il} \delta_{jk}. \tag{1.10}$$

Enfin, le théorème de Wick s'applique toujours en tenant compte de l'indice supplémentaire, par exemple pour 4 éléments :

$$\begin{aligned} \langle M_{i_1 j_1}^{(\alpha_1)} M_{i_2 j_2}^{(\alpha_2)} M_{i_3 j_3}^{(\alpha_3)} M_{i_4 j_4}^{(\alpha_4)} \rangle &= \langle M_{i_1 j_1}^{(\alpha_1)} M_{i_2 j_2}^{(\alpha_2)} \rangle \langle M_{i_3 j_3}^{(\alpha_3)} M_{i_4 j_4}^{(\alpha_4)} \rangle \\ &+ \langle M_{i_1 j_1}^{(\alpha_1)} M_{i_3 j_3}^{(\alpha_3)} \rangle \langle M_{i_2 j_2}^{(\alpha_2)} M_{i_4 j_4}^{(\alpha_4)} \rangle \\ &+ \langle M_{i_1 j_1}^{(\alpha_1)} M_{i_4 j_4}^{(\alpha_4)} \rangle \langle M_{i_2 j_2}^{(\alpha_2)} M_{i_3 j_3}^{(\alpha_3)} \rangle. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Diagrammatique du modèle à une matrice



M_{ij} $\langle M_{ij} M_{kl} \rangle$ $M_{ij} M_{jk} M_{ki}$

(a) (b) (c)

FIG. 1.1 – Éléments constitutifs des diagrammes de Feynman pour le modèle à une matrice hermitienne : (a) un élément de matrice, (b) deux éléments appariés formant une arête, (c) un sommet de degré 3 provenant de $\operatorname{Tr} M^3$.

Revenons à présent au modèle à une matrice hermitienne aléatoire, et considérons l'expression formelle suivante :

$$\Xi_N(t, V) \equiv \left\langle e^{N \operatorname{Tr} V(M)} \right\rangle = \frac{\int e^{N \operatorname{Tr}\left(-M^2/2t + V(M)\right)} \mathcal{D}M}{\int e^{-N \operatorname{Tr} M^2/2t} \mathcal{D}M} \tag{1.12}$$

comme fonction de V, un polynôme ou une série formelle :

$$V(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n \tag{1.13}$$

(le changement de paramètre $\lambda = N/t$ s'avérera commode par la suite). $\Xi_N(t, V)$ peut s'interpréter comme fonction de partition pour un modèle de matrice aléatoire soumis à une « perturbation » non-gaussienne. De façon générale nous parlons de la fonction de partition du *modèle à une matrice*, le modèle gaussien en étant un cas particulier pour $V = 0$. Les diagrammes de Feynman apparaissent lorsque nous considérons le développement formel en les v_n :

$$\Xi_N(t, V) = \left\langle \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(N v_1 \operatorname{Tr} M)^{k_1}}{k_1!} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(N v_2 \operatorname{Tr} M^2)^{k_2}}{2^{k_2} k_2!} \cdots \right\rangle. \tag{1.14}$$

Comme indiqué plus haut, nous ne discuterons pas ici de la convergence d'un tel développement, qui peut être considéré comme une définition de $\Xi_N(t,V)$ en tant que série formelle. Le coefficient d'un monôme donné $v_1^{k_1}v_2^{k_2}v_3^{k_3}\dots$ (où seul un nombre fini d'entiers k_n sont non nuls) est, à un facteur près, la valeur moyenne dans le modèle gaussien d'un produit arbitraire de traces de puissances de M :

$$\left\langle (\operatorname{Tr} M)^{k_1}(\operatorname{Tr} M^2)^{k_2}(\operatorname{Tr} M^3)^{k_3}\cdots\right\rangle \tag{1.15}$$

Chacune des traces peut alors être réécrite comme somme de produits d'éléments de M, par exemple :

$$\operatorname{Tr} M^3 = \sum_{i,j,k=1}^{N} M_{ij}M_{jk}M_{ki}. \tag{1.16}$$

ce qui nous amène à une somme (finie) de corrélations d'éléments de M, que nous devons enfin apparier deux à deux de toutes les façons possibles, en vertu du théorème de Wick. Par la relation (1.5), un grand nombre de termes sont nuls, et les autres sont tous égaux à :

$$\lambda^{-\sum_n nk_n/2} = (t/N)^{\sum_n nk_n/2} \tag{1.17}$$

(tous les termes sont nuls si $\sum nk_n$ est impair). Chacun de ces termes non-nuls peut être mis en correspondance avec un *diagramme* constitué des éléments illustrés sur la figure 1.1 :

- chaque élément de matrice M_{ij} est représentée par une double ligne issue d'un point, ou *patte*, chaque ligne portant un indice et une orientation comme indiqué sur figure 1.1-a,
- un appariement de deux éléments, donnant une contribution non-nulle d'après (1.5), peut être représenté en connectant ensemble deux pattes pour former une *arête*, de telle sorte que les indices et orientations soient compatibles (figure 1.1-b)
- les différentes pattes provenant d'une même trace (équation 1.16) forment un cycle, représenté en un *sommet* illustrant les conservations d'indices (figure 1.1-c).

Le développement de l'expression (1.15) fait intervenir tous les diagrammes constitués de $\sum nk_n$ pattes, appariées en $\sum nk_n/2$ arêtes, et répartis en $\sum k_n$ sommets (avec respectivement k_n sommets de n pattes) ; elle est donc égale au nombre de tels diagrammes, multiplié par (t/N) élevé à la puissance du nombre d'arêtes. Notons qu'en toute rigueur, le comptage doit se faire en considérant que les pattes/éléments sont étiquetées, par exemple par l'ordre dans lequel ils apparaissent dans le développement de (1.15). Cependant, on identifiera par la suite les diagrammes équivalents par réétiquetage, ce qui nécessite de compter avec un facteur de multiplicité, que nous ne discuterons pas en détail ici.

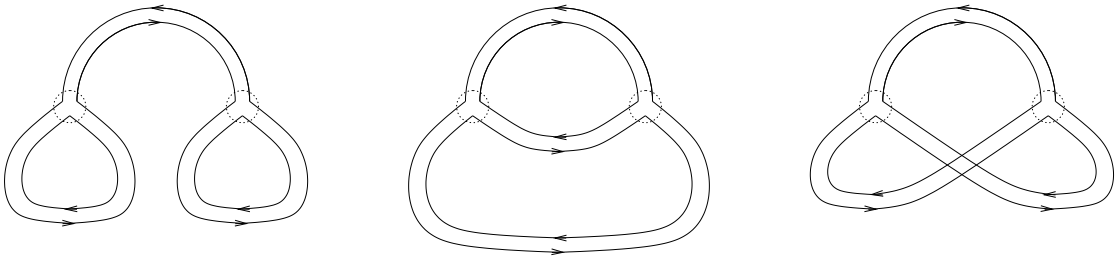


FIG. 1.2 – Les trois diagrammes de Feynman apparaissant dans $\langle \operatorname{Tr} M^3 \cdot \operatorname{Tr} M^3\rangle$.

À titre d'exemple, considérons la valeur moyenne $\langle \operatorname{Tr} M^3 \cdot \operatorname{Tr} M^3\rangle$ qui apparaît comme coefficient de v_3^2 : les diagrammes associés contiennent trois arêtes et deux sommets à trois pattes, et

sont de l'un des trois types illustrés sur la figure 1.2. Nous devons en principe placer les indices matriciels sur les lignes de chaque diagramme, de toutes les façons possibles d'après les règles illustrées sur la figure 1.1 : le nombre de choix possibles est de N élevé à la puissance du nombre de « boucles » formées par les lignes d'indice. Sur la figure 1.2 les deux premiers diagrammes ont trois boucles, tandis que le dernier n'en a qu'une. Cette différence est liée à la planarité des deux premiers diagrammes, qui peuvent être dessinés sans croisement d'arêtes dans le plan, à la différence du troisième. Nous verrons plus bas l'importance de cette remarque. Nous devons enfin tenir compte de la multiplicité de chaque diagramme : par un calcul (pédestre), les multiplicités sont respectivement de 9, 3, 3, ce qui aboutit à la formule :

$$\langle \operatorname{Tr} M^3 \cdot \operatorname{Tr} M^3 \rangle = (9N^3 + 3N^3 + 3N)(t/N)^3 = \left(12 + \frac{3}{N^2}\right) t^3. \tag{1.18}$$

Si nous revenons à présent au développement formel (1.14), nous voyons que celui-ci peut se réécrire généralement comme une somme sur **tous** les diagrammes (non indicés) avec :

- un poids t/N par arête,
- un poids $N v_n$ par sommet de degré n,
- un poids N par boucle,
- un *facteur de symétrie* égal à $1/\prod_n (n^{k_n} k_n!)$ fois la multiplicité du diagramme.[2]

Par un argument combinatoire standard, l'*énergie libre* $F_N(t,V) \equiv \log \Xi_N(t,V)$ possède un développement formel similaire, mais où la somme porte uniquement sur les diagrammes **connexes** (non-vides). Ce sont ces diagrammes qui correspondent précisément aux cartes, en identifiant les boucles d'indices comme contours des faces. Ceci est illustré sur la figure 1.3 représentant de façon plus explicite les cartes correspondant aux diagrammes de la figure 1.2 : les deux premières sont des cartes planaires (de genre 0), la troisième est torique (de genre 1).

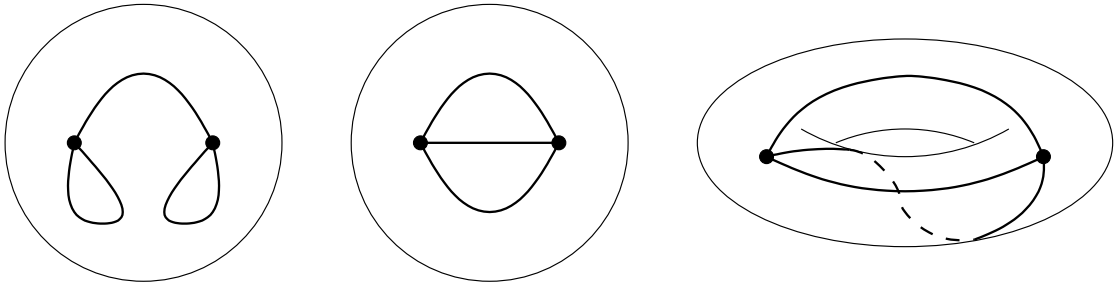


FIG. 1.3 – Les cartes correspondant aux diagrammes de la figure 1.2 : les deux premières sont de genre 0, la dernière de genre 1.

Si nous considérons le facteur global associé à une carte quelconque dans le développement de $F_N(t,V)$, nous voyons que sa dépendance en N est égale à N^χ avec :

$$\chi \equiv \#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{faces}\} \tag{1.19}$$

qui n'est autre que la caractéristique d'Euler de la carte, liée au genre g par la relation $\chi = 2-2g$. Il reste par ailleurs un poids v_k par sommet de degré k, un poids t par arête[3], et le facteur de

[2] On peut montrer que le facteur de symétrie est l'inverse d'un nombre entier, correspondant au « nombre d'automorphismes » du diagramme.

[3] En toute rigueur, ce poids est redondant car il peut être absorbé dans une redéfinition des poids par sommet $v_k \to v_k t^{k/2}$ (ce qui correspond à un simple changement de variable $M \to M\sqrt{t}$ dans les intégrales matricielles). Cependant il assure que le développement formel reste fini à tout ordre en t, car il n'y a qu'un nombre fini de cartes d'un nombre d'arêtes fixé.

symétrie. Ceci aboutit au résultat suivant :

L'énergie libre du modèle à une matrice a le développement suivant dit *topologique* :

$$F_N(t,V) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F^{(g)}(t,V) \tag{1.20}$$

où $V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$, et $F^{(g)}(t,V)$ est la série génératrice des cartes de genre g comptées avec un poids v_n par sommet de degré n, un poids t par arête, et facteur de symétrie.

La notion de développement topologique a été introduite par 't Hooft dans le cadre général de l'étude des théories de jauge $SU(N)$ [7]. Donner un sens analytique à ce développement est un sujet délicat (bien qu'il soit juste comme identité entre séries génératrices en V), mais si nous ne nous encombrons pas de telles considérations, nous déduisons le corollaire important :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_N(t,V)}{N^2} = F^{(0)}(t,V) \tag{1.21}$$

qui est la série génératrice des cartes planaires selon les degrés des sommets. La limite $N \to \infty$ est appelée *limite planaire*.

Nous terminons cette section en remarquant que la dérivée d'énergie libre

$$E_N(t,V) \equiv 2t \frac{\partial F_N(t,V)}{\partial t} \tag{1.22}$$

correspond à une somme sur les cartes enracinées (l'opérateur $2t\frac{\partial}{\partial t}$ s'interprétant comme le marquage et l'orientation d'une arête), ce qui a pour effet de rendre tous les facteurs de symétrie égaux à 1. Nous avons le développement topologique :

$$E_N(t,V) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} E^{(g)}(t,V), \tag{1.23}$$

où $E^{(g)}(t,V)$ est la séries génératrice des cartes enracinées de genre g selon les degrés des sommets. Nous verrons plus loin comment exploiter les propriétés de symétrie du modèle à une matrice pour en déduire $E^{(0)}(t,V)$.

Généralisation aux modèles à plusieurs matrices

De façon générale, nous pouvons considérer une perturbation formelle du modèle gaussien à plusieurs matrices, défini par la mesure (1.8), par un facteur $U(N)$-invariant de la forme $e^{N \operatorname{Tr} V(M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(p)})}$, où $V(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est un polynôme ou une série à p variables. Par une généralisation simple des arguments de la section précédente (en utilisant le théorème de Wick pour les intégrales multimatricielles), le développement de la fonction de partition ou de l'énergie libre fait apparaître des diagrammes de Feynman analogues aux précédents, mais dans lesquels les pattes portent une *couleur* parmi p possibles, correspondant à l'indice $\alpha = 1, \ldots, p$ supplémentaire des matrices.

Dans le cas particulier où :

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^{(\alpha)}}{n} x_\alpha^n, \tag{1.24}$$

les pattes issues d'un même sommet portent toutes la même couleur. L'énergie libre correspond à une somme sur toutes les cartes dont les sommets sont coloriés en p couleurs, comptées avec :

- un poids $N v_n^{(\alpha)}$ par sommet de couleur α et degré n,
- un poids $Q^{-1}_{\alpha,\beta}$ par arête reliant un sommet de couleur α à un sommet de couleur β,
- un poids N par face.

Après le changement de paramètre $Q \to N\,Q$, l'exposant de N dans le poids global d'une carte est égal à la caractéristique d'Euler de celle-ci, et l'énergie libre possède un développement topologique comme précédemment.

À titre d'exemple, l'énergie libre du *modèle à deux matrices* :

$$\log \frac{\int \exp\left(-\frac{N}{t}\operatorname{Tr} M_\circ M_\bullet + \sum_n \frac{N v_n^\circ}{n}\operatorname{Tr} M_\circ^n + \sum_n \frac{N v_n^\bullet}{n}\operatorname{Tr} M_\bullet^n\right)\mathcal{D}M_\circ \mathcal{D}M_\bullet}{\int \exp\left(\frac{N}{t}\operatorname{Tr} M_\circ M_\bullet\right)\mathcal{D}M_\circ \mathcal{D}M_\bullet} \tag{1.25}$$

a un développement topologique en N faisant intervenir les séries génératrices des cartes biparties de genre donné, avec un poids par sommet fonction du degré et de la couleur.

1.1.2 Solution planaire du modèle à une matrice

Dans cette section, nous montrons comment exploiter l'invariance $U(N)$ du modèle à une matrice pour en déduire la série génératrice $E^{(0)}(t,V)$ des cartes planaires enracinées selon les degrés des sommets. En un premier temps, nous passons d'une intégrale sur les matrices hermitiennes de taille N (soit un espace à N^2 dimensions réelles) à une intégrale sur les valeurs propres dont le nombre n'est « que » de N. Nous effectuons ensuite le passage à la limite $N \to \infty$, par un argument heuristique de type « méthode du col », avant de présenter brièvement l'approche par polynômes orthogonaux.

Réduction à une intégrale sur les valeurs propres

Considérons à nouveau l'énergie libre du modèle à une matrice :

$$F_N(t,V) \equiv \log\left\langle e^{N\operatorname{Tr} V(M)}\right\rangle = \log\frac{\int e^{N\operatorname{Tr}\left(-M^2/2t+V(M)\right)}\mathcal{D}M}{\int e^{-N\operatorname{Tr} M^2/2t}\mathcal{D}M} \tag{1.26}$$

dont le comportement dominant à N grand correspond aux cartes planaires. Chaque intégrale matricielle est invariante par conjugaison par une matrice unitaire Ω, c'est-à-dire le changement de variable $M \mapsto \Omega M \Omega^{-1}$. En particulier l'intégrande ne dépend que des valeurs propres (réelles) $m_1, m_2, \ldots, m_N$ de M : nous souhaitons nous ramener à des intégrales sur ces quantités, qui ne sont qu'en nombre N par rapport aux N^2 composantes réelles indépendantes de M.

Soient m le vecteur $(m_1, m_2, \ldots, m_N)$ et $\mathrm{Diag}(m)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les m_i : l'application $(m,\Omega) \mapsto M = \Omega \cdot \mathrm{Diag}(m) \cdot \Omega^{-1}$ parcourt l'ensemble des matrices hermitiennes lorsque les m_i décrivent $\mathbb{R}$ et Ω le groupe de matrices unitaires $U(N)$. Ceci ne fait que traduire le fait bien connu que toute matrice hermitienne peut être diagonalisée dans une base orthonormale. En termes de mesures, ceci se traduit par la relation :

$$\mathcal{D}M = J(m)\mathcal{D}\Omega \prod_{i=1}^{N} dm_i. \tag{1.27}$$

Ici $\mathcal{D}\Omega$ désigne la mesure de Haar sur $U(N)$, i.e. la mesure invariante pour la structure de groupe. $J(m)$ est le jacobien de la transformation, qui ne dépend que de m par invariance $U(N)$, et est

proportionnel au carré du *déterminant de Vandermonde* :

$$\Delta(m) \equiv \det_{1\leq i,j\leq n}(m_i^{j-1}) = \prod_{i<j}(m_j - m_i). \tag{1.28}$$

Cette propriété est bien connue en théorie des matrices aléatoires et est généralement attribuée à Dyson. En terme d'intégrales, si nous considérons généralement une fonction $f(M)$ qui ne dépend que des valeurs propres, alors :

$$\int f(M)\mathcal{D}M = C_N \int f(\mathrm{Diag}(m))\Delta^2(m)\prod_{i=1}^{N} dm_i. \tag{1.29}$$

La constante de proportionnalité C_N, sans importance ici car nous considérons le rapport de deux intégrales, traduit l'intégration sur le groupe $U(N)$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} F_N(t,V) &= \log \frac{\int \Delta^2(m)\prod_i e^{N\left(-m_i^2/2t+V(m_i)\right)}dm_i}{\int \Delta^2(m)\prod_i e^{-Nm_i^2/2t}dm_i} \\ &= \log \frac{\int e^{N^2\mathcal{S}_N[m]}d^Nm}{\int e^{N^2\mathcal{S}_N^{(0)}[m]}d^Nm} \end{aligned} \tag{1.30}$$

avec :

$$\mathcal{S}_N[m] \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{m_i^2}{2t} + V(m_i)\right) + \frac{2}{N^2}\sum_{i<j}\log|m_i - m_j| \tag{1.31}$$

et $\mathcal{S}_N^{(0)}[m] \equiv \mathcal{S}_N[m]|_{V=0}$. Notons enfin que par symétrie nous pouvons restreindre l'intégration au domaine où $m_1 < m_2 < \cdots < m_N$.

La limite planaire : méthode du col

Cette réécriture permet d'appréhender le comportement dans la limite planaire $N \to \infty$. De façon heuristique, la quantité $\mathcal{S}_N[m]$ reste d'ordre 1, et la contribution dominante à l'énergie libre est donnée par le maximum de cette quantité :

$$\frac{\log\int e^{N^2\mathcal{S}_N[m]}d^Nm}{N^2} \sim \max_m \mathcal{S}_N[m]. \tag{1.32}$$

Cette hypothèse s'apparente à la méthode de Laplace et à la méthode du col, bien connues en analyse ; toutefois, à la différence de celles-ci, la dimension de l'intégrale est ici également une grandeur tendant vers l'infini. Une explication physique peut être donnée comme suit : l'intégrale $\int e^{N^2\mathcal{S}_N[m]}d^Nm$ correspond à la fonction de partition (statique) d'un gaz unidimensionnel de N particules classiques (les valeurs propres), de positions m_i, avec :

- un potentiel à un corps $V_1(m_i) = m_i^2/2t - V(m_i)$,
- un potentiel à deux corps $V_2(m_i, m_j) = -\frac{2}{N}\log|m_i - m_j|$

et pris à température $1/N$. En l'absence de V_2, et dans l'état fondamental à température nulle ($N \to \infty$), toutes les valeurs propres sont à l'équilibre mécanique au minimum du potentiel V_1 (proche de 0 si V est une perturbation supposée petite). Cependant, le potentiel répulsif V_2, bien que d'ordre $1/N$, modifie l'équilibre mécanique de façon finie, car sa contribution totale au potentiel vu par une particule est d'ordre 1. La température, infinitésimale également, n'induit

par contre pas de perturbation à l'ordre dominant. L'état fondamental, pour N fini, est donné par les conditions d'équilibre mécanique : $\partial \mathcal{S}_N[m]/\partial m_i = 0$ (pour tout i), soit :

$$\frac{m_i}{t} - V'(m_i) = \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{m_i - m_j} \tag{1.33}$$

où $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$. Dans la limite $N \to \infty$, les particules se répartissent selon une distribution continue[4] : le nombre de particules dans un intervalle infinitésimal $[x, x+dx]$ est équivalent à $N\rho(x)dx$, où $\rho(x)$ est la densité au point x (nous avons donc $\rho(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$). L'équation (1.33) a alors la limite continue :

$$\frac{x}{t} - V'(x) = 2 \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(y)dy}{x-y}, \tag{1.34}$$

où $\fint$ désigne la valeur principale de l'intégrale. Cette équation n'est valable que pour x dans le support de ρ. De même, la limite continue de $\mathcal{S}_N[m]$ est :

$$\mathcal{S}(\rho) \equiv \int \left(-\frac{x^2}{2t} + V(x) \right) \rho(x)dx + \iint \log|x-y| \rho(x)\rho(y)dxdy \tag{1.35}$$

et cette quantité est maximale lorsque ρ vérifie (1.34)[5], ce qui donne l'énergie libre planaire.

La suite de cette partie est consacrée à une « résolution » de l'équation (1.34) afin d'en déduire la série génératrice des cartes planaires enracinées $E^{(0)}(t, V)$. Ceci est expliqué en plus grand détail dans l'appendice A de l'article III.

Plutôt que de travailler avec la densité ρ, il s'avère commode de considérer la *résolvante* :

$$\omega(z) = \int \frac{\rho(x)dx}{z-x} \tag{1.36}$$

qui est une fonction analytique possédant une coupure le long du support de ρ, et que l'on peut relier à l'énergie libre planaire par :

$$\omega(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} \frac{\partial F^{(0)}(t,V)}{\partial v_n} \tag{1.37}$$

(on rappelle que $V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$). L'équation (1.34) peut se réécrire comme :

$$\omega(z)^2 - \left(\frac{z}{t} - V'(z) \right) \omega(z) + P(z) = 0 \tag{1.38}$$

avec $P(z) = \frac{1}{t} - \int \frac{V'(z)-V'(x)}{z-x} \rho(x)dx$, qui est un polynôme lorsque V en est un : cette remarque nous permet de déterminer complètement $\omega(z)$ si nous supposons que le support de ρ est constitué d'un unique intervalle $[a, b]$ (« one-cut hypothesis »). Cette hypothèse est physiquement motivée par le fait que le potentiel à un corps V_1 mentionné plus haut ne possède qu'un seul minimum (pour V traité comme une petite perturbation), autour duquel s'accumulent les valeurs propres. Dans ce cas, ω possède exactement deux points de branchement d'ordre 2 en a et en b, et la solution de l'équation quadratique (1.38) est nécessairement de la forme :

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{t} - V'(z) + G(z) \sqrt{(z-a)(z-b)} \right) \tag{1.39}$$

[4] Cette distribution s'interprète le spectre continu d'une grande matrice aléatoire.

[5] Cette assertion peut être vérifiée en calculant la dérivée fonctionnelle de $S(\rho)$, mais nous devons tenir compte des multiplicateurs correspondant aux contraintes $\int \rho = 1$ et $\rho \geq 0$.

où $G(z)$ est un polynôme. a, b et $G(z)$ sont entièrement déterminés par la condition $\omega(z) \sim \frac{1}{z}$ lorsque $z \to \infty$. Comme expliqué en détail dans l'appendice de l'article III, la solution peut être simplifiée en introduisant les quantités auxiliaires :

$$S \equiv \frac{a+b}{2}, \qquad R \equiv \left(\frac{b-a}{4}\right)^2, \qquad Q(\sigma) \equiv \sigma + S + \frac{R}{\sigma} \tag{1.40}$$

où σ est une variable formelle. En effet, en posant $z = Q(\sigma)$, l'expression sous la racine dans l'équation (1.39) devient un carré parfait. En écrivant alors la condition $\omega(z) \sim \frac{1}{z}$ quand $z \to \infty$ (équivalant à une condition sur le développement en $\sigma = 0$ pouvant s'exprimer via des intégrales de contour), nous obtenons des relations déterminant R et S, et nous pouvons poursuivre ordre par ordre le développement asymptotique de la relation (1.37) afin d'exprimer les dérivées de l'énergie libre planaire. En notant enfin que la série génératrice des cartes enracinées $E^{(0)}$ est liée à $\frac{\partial F^{(0)}}{\partial v_2}$, nous aboutissons au résultat final suivant :

La série génératrice des cartes planaires enracinées selon les degrés des sommets vérifie :

$$E^{(0)}(t,V) = \frac{R + S^2 - \frac{1}{2i\pi}\oint_{C_0} V'(Q(\sigma))(\sigma^2 + 2S\sigma)d\sigma - t}{t} \tag{1.41}$$

avec $Q(\sigma) \equiv \sigma + S + \frac{R}{\sigma}$, R et S étant déterminés par les équations :

$$\begin{aligned} S &= \frac{t}{2i\pi}\oint_{C_0} V'(Q(\sigma))\frac{d\sigma}{\sigma} \\ R &= t + \frac{t}{2i\pi}\oint_{C_0} V'(Q(\sigma))d\sigma \end{aligned} \tag{1.42}$$

et les conditions $R, S \to 0$ quand $t \to 0$. C_0 désigne un contour positif autour de 0 arbitraire.

Il convient de mieux expliquer pourquoi ces identités constituent bien une « solution » du modèle à une matrice. Les intégrales de contour reviennent à extraire certains coefficients dans $V'(Q(\sigma))$, vu comme une série de Laurent. Lorsque V est polynômial, ces coefficients sont des polynômes en R et S, et les équations (1.42) constituent un système de deux équations algébriques en R, S dépendant des paramètres t et V. Les conditions $R, S \to 0$ permettent de sélectionner la bonne détermination de la solution dans un voisinage de $t = 0$. $E^{(0)}$ est à son tour un polynôme en R et S.

Plus généralement, $V(x)$ peut être une série formelle en x. Dans ce cas, les équations (1.42) déterminent le développement de R, S ordre par ordre en t et les coefficients de V. Nous pouvons ainsi calculer le nombre de cartes pour des nombres arbitraires de sommets de chaque degré.

Présentons enfin une application simple ce résultat au cas des cartes *trivalentes*, c'est-à-dire dont tous les sommets ont degré 3. Ceci revient à prendre $V(x) = x^3/3$, dans ce cas les équations (1.41) et (1.42) se simplifient en :

$$E^{(0)} = \frac{R + S^2 - 2R^2S - t}{t} \qquad S = t(S^2 + 2R) \qquad R = t + 2tRS \tag{1.43}$$

$E^{(0)}$ peut être exprimé en fonction de S seul, qui est solution d'une équation cubique dépendant de t. Par la formule d'inversion de Lagrange[6], nous pouvons déduire le nombre de cartes planaires

[6] Une application plus explicite de cette formule importante est donnée au chapitre 3 (cf. équations (3.38) et suivantes).

trivalentes enracinées de $3n$ arêtes, bien connu [34] :

$$t_n = \frac{2^{2n+1}(3n)!!}{(n+2)!n!!}. \tag{1.44}$$

Polynômes orthogonaux

Une autre méthode courante dans l'étude des matrices aléatoires est celle dite des polynômes orthogonaux, que mentionnons brièvement ici car elle sera généralisée à certaines intégrales multi-matricielles dans la section suivante. Rappelons qu'après réduction à une intégrale sur les valeurs propres, la fonction de partition du modèle à une matrice s'écrit :

$$\Xi_N(t,V) = \frac{\int \Delta^2(m) \prod_i e^{N\left(-m_i^2/2t + V(m_i)\right)} dm_i}{\int \delta^2(m) \prod_i e^{-N m_i^2/2t} dm_i}. \tag{1.45}$$

La méthode consiste à remarquer que le déterminant de Vandermonde de taille N peut se réécrire, par des manipulations de lignes, comme :

$$\Delta(m) = \det_{1\leq i,j\leq N} p_{j-1}(m_i) \tag{1.46}$$

pour toute famille de polynômes à une variable $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que p_n est unitaire de degré n. Il s'ensuit, par un calcul simple, que la fonction de partition peut se réécrire comme :

$$\Xi_N(t,V) = C_N(t) \det_{1\leq i,j\leq N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{i-1}(x) p_{j-1}(x) e^{N\left(-x^2/2t + V(x)\right)} dx \right) \tag{1.47}$$

où C est tel que $\Xi_N(t, V=0) = 1$ (pour alléger les notations, nous omettrons les dépendances possibles en N, t, V). Cette égalité est simplifiée si nous introduisons le produit scalaire :

$$(p,q) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(x) q(x) e^{N\left(-x^2/2t + V(x)\right)} dx, \tag{1.48}$$

et choisissons les p_n égaux aux *polynômes orthogonaux* par rapport à ce produit : $(p_i, p_j) = h_i \delta_{ij}$, h_i étant le carré de la norme de p_i. L'équation (1.47) devient alors :

$$\Xi_N(t,V) = C \prod_{n=0}^{N-1} h_n. \tag{1.49}$$

Les polynômes orthogonaux peuvent être construits explicitement par la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. En utilisant les contraintes d'orthogonalité des p_n, nous pouvons obtenir des relations de récurrence les reliant, et par là même des relations de récurrence entre les h_n. Il est alors possible de retrouver la limite planaire en étudiant la forme asymptotique de ces équations : nous nous contenterons de mentionner ici que la quantité $Q(\sigma) = \sigma + S + R\sigma^{-1}$, introduite à la section précédente (équation (1.40)), trouve une nouvelle interprétation comme limite de l'opérateur de multiplication par une valeur propre [28] :

$$(Q.p_n)(x) \equiv x p_n(x) = p_{n+1} + S_n p_n + R_n p_{n-1} \tag{1.50}$$

avec $S_n \to S$, $R_n \to R$ lorsque n, N tendent vers l'infini avec $n/N \to 1$.

Nous concluons par quelques remarques cette section consacrée à la solution du modèle à une matrice dans la limite planaire. Notons tout d'abord que l'équation (1.49) est valable pour tout

N : ceci permet de calculer le développement de l'énergie libre au-delà de la contribution planaire (en pratique les calculs deviennent rapidement inextricables au-delà du genre 1), et d'extraire certaines informations « non-perturbatives » dans la dite *double limite d'échelle* [35, 36, 37]. Nous ne présenterons pas ici une troisième approche dite des *équations de boucles*[7], qui s'apparente dans le langage des cartes à la décomposition récursive de Tutte. Cette approche permet de justifier rigoureusement notre solution du modèle à une matrice : considérant $\omega(z)$ comme une série formelle multivariée en z, t, V (z est une variable « catalytique »), l'équation (1.38) peut être obtenue, la suite du calcul s'apparentant à des manipulations de séries formelles.

1.1.3 Intégrales multimatricielles

Considérons à présent une intégrale sur p matrices hermitiennes de taille N, de la forme :

$$\int e^{N \operatorname{Tr}\left(-\frac{1}{2} q(M^{(1)},\dots,M^{(p)}) + V(M^{(1)},\dots,M^{(p)})\right)} \mathcal{D}M^{(1)} \cdots \mathcal{D}M^{(p)} \tag{1.51}$$

où $q(x^{(1)},\dots,x^{(p)}) \equiv \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta} x^{(\alpha)} x^{(\beta)}$ est la forme quadratique associée à la matrice réelle symétrique définie positive Q, et V un polynôme de la forme (1.24). Nous avons vu que cette intégrale est liée, par développement en diagrammes de Feynman, aux séries génératrices de cartes dont les sommets sont coloriés en p couleurs. Nous souhaitons, comme pour le modèle à une matrice, nous ramener à une intégrale sur les valeurs propres $m_i^{(\alpha)}$ grâce à la formule de Dyson :

$$\mathcal{D}M^{(\alpha)} \propto \Delta^2(m^{(\alpha)}) \mathcal{D}\Omega^{(\alpha)} d^N m^{(\alpha)}. \tag{1.52}$$

Nous sommes confrontés à la difficulté suivante : si, d'après (1.24), nous avons bien :

$$V(M^{(1)},\dots,M^{(p)}) = V(m^{(1)},\dots,m^{(p)}), \tag{1.53}$$

la partie quadratique dépend des variables unitaires $\Omega^{(\alpha)}$, sauf dans le cas trivial où Q est diagonale (ce qui nous ramènerait à p modèles à une matrice découplés, c'est-à-dire un produit de série génératrices de cartes sans couleurs). Il est donc impossible de factoriser les intégrations sur $U(N)$ comme nous avons pu le faire pour le modèle à une matrice. Cependant, dans un certain nombre de cas, il est possible de surmonter cette difficulté à l'aide de la formule dite de *Harish-Chandra–Itzykson–Zuber* (HCIZ) [40, 41][8] : pour $\Omega \in U(N)$, et A, B des matrices diagonales d'éléments diagonaux respectifs a_i, b_i ($i = 1,\dots,N$) :

$$\int e^{\operatorname{Tr} A\Omega B\Omega^{-1}} \mathcal{D}\Omega = \frac{\det_{i,j} e^{a_i b_j}}{\Delta(a)\Delta(b)}. \tag{1.54}$$

Cette formule peut être exploitée comme suit. Nous définissons le *graphe des interactions* $\mathcal{G}$ du modèle de matrice comme le graphe simple dont les sommets sont $1,\dots,p$, et où les sommets α et β (distincts) sont reliés par une arête si et seulement si $Q_{\alpha,\beta} \neq 0$. Chaque arête (α,β) de $\mathcal{G}$ correspond dans l'intégrale à un facteur $e^{N \operatorname{Tr}(Q_{\alpha,\beta} M^{(\alpha)} M^{(\beta)}/2)}$ qui ne dépend des variables unitaires que via la variable d'arête $\Omega^{(\alpha)}(\Omega^{(\beta)})^{-1}$. Nous voyons que, lorsque $\mathcal{G}$ ne contient pas de boucle, les variables d'arête peuvent être intégrées sur $U(N)$ indépendamment[9] à l'aide de la formule HCIZ, et nous pouvons réécrire l'intégrale (1.51) comme portant sur les $m^{(\alpha)}$ seuls [45, 46].

[7] Voir par exemple les notes de cours de B. Eynard [38] ou la thèse de G. Bonnet [39].

[8] Nous n'évoquons pas ici les autres méthodes utilisant une décomposition sur les caractères du groupe symétrique [42, 43, 44].

[9] En présence de boucles dans le graphe des interactions, les variables d'arête $\Omega^{(\alpha)}(\Omega^{(\beta)})^{-1}$ doivent avoir pour produit 1 le long de chaque boucle.

Après cette réduction à une intégrale sur les valeurs propres, nous devons en étudier le développement à $N \to \infty$. Étudier ce problème dans toute sa généralité est trop difficile (malgré quelques succès notables [47, 48, 49]), nous nous restreindrons ici au cas où le graphe des interactions est une *chaîne*, ce qui revient à la condition $Q_{\alpha,\beta} = 0$ si $|\alpha - \beta| > 1$. Le modèle à deux matrices (1.25) correspond au cas $p = 2$. Un calcul simple montre que l'intégrale (1.51) se réécrit :

$$\int e^{N\left(-\frac{1}{2}Q(m^{(1)},m^{(2)},\ldots,m^{(p)})+V(m^{(1)},m^{(2)},\ldots,m^{(p)})\right)}\Delta\left(m^{(1)}\right)\Delta\left(m^{(p)}\right)\prod_{\alpha=1}^{p} d^N m^{(\alpha)}. \tag{1.55}$$

Nous pouvons alors généraliser la méthode des polynômes orthogonaux à ce cas : introduisons la famille des *polynômes bi-orthogonaux* $(p_n, q_n)_{n\geq 0}$ définis par les contraintes que, pour tout n, p_n et q_n sont des polynômes unitaires à une variable de degré n, et vérifiant la relation de dualité $(p_i, q_j) = h_i \delta_{i,j}$, où le produit bilinéaire est :

$$(p_i, q_j) \equiv \int p_i(x_1) q_j(x_p) e^{N\left(-\frac{1}{2}Q(x_1,x_2,\ldots,x_p)+V(x_1,x_2,\ldots,x_p)\right)} dx_1 dx_2 \ldots dx_p. \tag{1.56}$$

Les polynômes bi-orthogonaux peuvent être construits par une généralisation de la procédure de Gram-Schmidt. En écrivant les déterminants de Vandermonde en termes de ces polynômes, nous voyons que l'intégrale (1.55) est proportionnelle à $\prod_{n=0}^{N-1} h_n$. Comme dans le cas du modèle à une matrice, la limite $N \to \infty$ s'étudie via les relations de récurrence sur les h_n induites par la contrainte de biorthogonalité. Nous verrons un exemple d'une telle étude dans la dernière section de ce chapitre.

1.2 Gravité quantique bidimensionnelle et mécanique statistique sur surfaces dynamiques

Dans cette section, nous introduisons la gravité quantique bidimensionnelle, et la mécanique statistique sur surfaces dynamiques, de manière essentiellement conceptuelle et heuristique, dans le but d'en présenter le lien avec les problèmes d'énumération de cartes.

1.2.1 Concepts

Relativité générale et mécanique quantique

Nous savons, depuis la théorie de la relativité générale d'Einstein, que la gravité correspond à une déformation de l'espace-temps. Mathématiquement, celui-ci est décrit comme une variété (pseudo-)Riemannienne, c'est-à-dire une variété différentielle munie d'une métrique. Classiquement, la métrique obéit à un principe de moindre action, où l'action comprend un terme de gravité pure dit *action de Einstein–Hilbert* :

$$\mathcal{S}_{\mathrm{EH}} = \int (\kappa R(x) + \Lambda) \sqrt{|\det G(x)|}\, d^n x \tag{1.57}$$

où κ, Λ sont des constantes[10], x est une paramétrisation de la variété de dimension n, $G(x)$ est le tenseur métrique en x, $R(x)$ la courbure scalaire associée et $\sqrt{|\det G(x)|}d^n x$ la forme

[10] Dans la relativité générale à quatre dimensions, κ s'exprime en fonction des constantes usuelles c (vitesse de la lumière) et G_N (constante de Newton) par $\kappa = c^4/16\pi G_N$, tandis que Λ est la constante cosmologique, dont l'existence est permise par les symétries.

de volume invariante, de telle sorte que $\mathcal{S}_{\rm EH}$ est invariant par reparamétrisation. Un éventuel couplage à la matière est décrit généralement par une action invariante $\mathcal{S}_{\rm mat}$ dépendant à la fois du champ-métrique G, et d'autres champs externes que nous noterons globalement Φ. Le principe de moindre action s'écrit en annulant la dérivée fonctionnelle de l'action respectivement par rapport au champ local $\Phi(x)$, ce qui donne les équations du mouvement de la matière, et par rapport à $G(x)$, ce qui donne les équations dites d'Einstein. Si nous considérons à présent la quantification de la théorie, dans un cadre s'inspirant du formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman, nous devons considérer une « moyenne » sur toutes les trajectoires possibles : en particulier, la *fonction de partition* (appelée aussi « amplitude du vide connexe ») de la gravité quantique s'écrit informellement comme :

$$Z_{\rm QG} = \sum_{\rm topologies} \int [DG][D\Phi] e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{S}_{\rm EH}+\mathcal{S}_{\rm mat})}. \tag{1.58}$$

Cette expression comprend une « intégration fonctionnelle » sur les champs G et Φ à topologie[11] fixée, mais celle-ci peut également fluctuer, et pour le calcul de Z nous sommons sur les différentes topologies de variétés compactes orientables sans bord.

Considérons à présent le cas de la dimension $n = 2$, et d'une métrique Euclidienne (définie positive). Il est bien connu que la topologie des surfaces compactes orientables sans bord est caractérisée par un invariant entier positif g : le genre. L'intégrale est la courbure scalaire y est liée par la relation de Gauss-Bonnet : $\int R\sqrt{\det G} = 4\pi\chi = 4\pi(2-2g)$ (χ est la caractéristique d'Euler de la surface). L'action de Einstein-Hilbert s'écrit ainsi :

$$\mathcal{S}_{\rm EH} = 4\pi\kappa\chi + \Lambda A[G] \tag{1.59}$$

où $A \equiv \int \sqrt{\det G}$ est l'aire de la surface. Les équations d'Einstein ne comprennent pas de dérivées du tenseur métrique G, qui n'est donc pas un degré de liberté dynamique ; pour cette raison la gravité bidimensionnelle classique est dite triviale. La théorie quantifiée, en revanche, est non triviale en raison des fluctuations de topologie[12]. En l'absence de matière, la théorie est dite de *gravité pure*, et la fonction de partition prend la forme :

$$Z_{\rm 2DQG} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \int dA e^{-\lambda A} V_g(A). \tag{1.60}$$

N, λ sont des constantes, et $V_g(A)$ est le « volume » de l'ensemble des métriques d'aire A sur une surface de genre g. Ce facteur est a priori infini, et comme pour toute théorie de champs, une *régularisation* doit être introduite pour donner un sens à l'expression (1.60). Notons dès maintenant l'analogie qualitative entre cette expression et le développement de l'énergie libre du modèle à une matrice (1.20) : nous avons une même somme sur les topologies, où le genre est couplé à une constante N (introduite toutefois par des raisonnements différents) ; l'intégration sur l'aire A est un analogue continu à la notion de série génératrice. Nous verrons plus loin comme pousser cette analogie au-delà du qualitatif.

Mécanique statistique

Il est bien connu qu'il existe une équivalence entre la mécanique quantique et la mécanique statistique, via l'identification formelle :

$$\frac{\hbar}{i} \Longleftrightarrow \beta^{-1} \equiv k_B T \tag{1.61}$$

[11] On entend par topologie la classe de la variété considérée à déformation près.

[12] On notera que ce cadre est également celui de la *théorie des cordes*, où la surface bidimensionnelle correspond à la feuille d'univers de la corde, tandis que des champs externes Φ décrivent le plongement dans l'espace-temps.

où $\hbar$ est la constante de Planck, β la température inverse, k_B la constante de Boltzmann permettant de donner une unité usuelle à la température T. Cette identification s'assimile ainsi à une continuation analytique. Ici, l'intégration sur la métrique bidimensionnelle s'apparente à une moyenne sur l'ensemble des surfaces de genre fixé, et la fonction de partition en présence de champs externes s'écrit généralement :

$$Z_{\text{surfaces}} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \int [DG][D\Phi] e^{-\lambda A[G]} e^{-\beta \mathcal{H}[\Phi,G]}. \tag{1.62}$$

$\mathcal{H}[\Phi, G]$ désigne le hamiltonien (énergie) d'une *configuration* donnée du champ Φ dans la métrique G, cette notion étant l'équivalent de l'action $\mathcal{S}_{\text{mat}}$ dans le langage de la mécanique statistique. Pour une métrique G fixée, les configurations sont distribuées selon une loi de Boltzmann, avec une probabilité proportionnelle à $e^{-\beta\mathcal{H}}$.

La fonction de partition (1.62) correspond donc à un modèle de mécanique statistique sur une surface aléatoire. Notons les remarques importantes suivantes :

- la moyenne sur la surface étant effectuée dans la fonction de partition, la géométrie est une variable *dynamique* (« annealed »), par opposition à une variable gelée (« quenched ») pour laquelle la moyenne serait effectuée sur l'énergie libre. La situation est donc différente de celle étudiée en physique des systèmes désordonnés, bien qu'il soit possible en principe de s'y ramener par la méthode des répliques.
- Le genre et l'aire de la surface peuvent fluctuer, mais sont couplés aux variables N et λ : ceci est semblable au formalisme *grand canonique*, et il est possible de se ramener à une fonction de partition à genre et/ou aire fixés par une transformation de Laplace inverse.
- La surface est un espace abstrait. Si nous souhaitons étudier une surface plongée dans l'espace, avec éventuellement des auto-interactions, nous devons le faire par l'introduction de champs externes et de leur hamiltonien idoine.

Les résultats à venir pourront aussi bien s'exprimer dans le langage de la gravité quantique que celui de la mécanique statistique. Nous choisirons celui qui nous semble le plus approprié.

1.2.2 Approche par discrétisation

Comme intégration fonctionnelle, l'intégration sur toutes les métriques, même à topologie fixée, est une opération mathématiquement mal définie. Il est plus commode de travailler avec une somme discrète : le but de cette section est de montrer qu'il est naturel de considérer une somme portant sur une famille de cartes.

Nous nous intéressons tout d'abord à des modèles discrets de gravité pure, avant de discuter de l'extension aux modèles couplés à la matière.

Modèles discrets de gravité pure

Soit une carte arbitraire dessinée sur une surface de genre g : nous pouvons définir une métrique sur la surface, en identifiant par exemple chaque face de la carte avec un polygone plat régulier de côté unité. L'aire s'exprime immédiatement en fonction des nombres de faces de chaque degré. De plus, par recollement, la métrique est plate partout sauf aux sommets de la carte, où une courbure singulière est localisée : ce fait peut être vérifié par exemple en considérant le transport parallèle d'un vecteur, comme illustré sur la figure 1.4. Plus précisément, dans le cas d'une triangulation, à chaque sommet s de degré k_s est associée une *courbure discrète* $r_s \equiv 4\pi(1 - k_i/6)$. Si nous sommons la courbure discrète sur tous les sommets, en notant les identités :

$$\sum_s 1 = \#\{\text{sommets}\} \qquad \sum_s k_i = 2\#\{\text{arêtes}\} = 3\#\{\text{triangles}\} \tag{1.63}$$

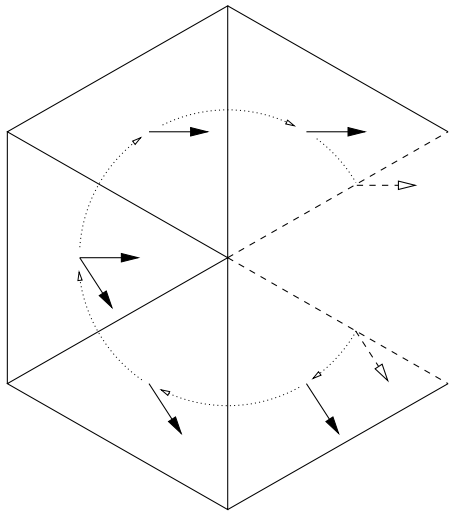


FIG. 1.4 – Transport parallèle autour d'un sommet de degré 5 d'une triangulation (les triangles sont équilatéraux et les éléments en pointillés doivent être identifiées). Le vecteur revient au point de départ tourné de 60°, ce qui est la manifestation d'une courbure (singulière) localisée au sommet.

nous identifions la caractéristique d'Euler de la triangulation :

$$\chi = \#\{\text{sommets}\} - \#\{\text{arêtes}\} + \#\{\text{triangles}\}. \tag{1.64}$$

Ceci donne un équivalent discret de la relation de Gauss-Bonnet :

$$\int R\sqrt{\det G} \to \sum_s r_s. \tag{1.65}$$

Cette identité reste valable pour une carte arbitraire, la courbure discrète étant alors égale à deux fois le déficit d'angle autour du sommet. Au final, l'action de Einstein-Hilbert s'exprime naturellement dans le langage des cartes, comme combinaison linéaire de χ et des nombres de faces de chaque degré.

Nous voyons donc que la donnée d'une carte définit une surface ayant des propriétés métriques simples. Il reste à se convaincre que la sommation sur une classe de cartes de genre fixé peut remplacer une intégration fonctionnelle sur la métrique à topologie fixée, ce qui nécessite quelque discussion à défaut d'une preuve formelle. De façon heuristique, toute métrique continue sur une surface peut être discrétisée sous forme d'une carte (triangulation ou autre) dont toutes les arêtes auraient une longueur de l'ordre d'un pas de discrétisation a : lorsque ce pas a tend vers 0, on s'attend à ce que la métrique discrète induite par la carte converge (en un sens à définir) vers la métrique continue. Plus précisément, nous voyons que le passage à une telle « géométrie discrète » revient à discrétiser deux grandeurs physiques :

– la longueur, dont le pas correspond à une arête de la carte,
– l'aire, dont le pas correspond à une face de la carte.

La limite continue est obtenue lorsque ces deux pas tendent conjointement vers zéro, tandis que les échelles « macroscopiques » d'observation restent fixées. Ceci revient à considérer des cartes de grande taille (nombres de faces, d'arêtes et de sommets tendant vers l'infini).

Illustrons ceci par un exemple : le nombre de triangulations planaires enracinées de $3n$ arêtes, soit $2n$ triangles, est donné par dualité par l'équation (1.44), d'où nous tirons l'équivalent asymptotique :

$$t_n \sim (12\sqrt{3})^n n^{-5/2}\sqrt{6/\pi}. \tag{1.66}$$

En terme de la série génératrice $T \equiv \sum t_n x^n$ (x correspond à un poids par paire de triangles), cette information se traduit, au voisinage du rayon de convergence $x_c \equiv (12\sqrt{3})^{-1}$ (*point critique*), par le comportement singulier dominant[13] suivant :

$$T|_{\text{sing}} \propto \sum_n (x/x_c)^n n^{-5/2} \propto (x_c - x)^{3/2}. \tag{1.67}$$

Nous pouvons donner un sens plus physique à cette équation en introduisant une unité d'aire ϵ pour chaque triangle, de sorte que l'aire totale est $A \equiv n\epsilon$. La limite continue est obtenue en approchant le point critique comme $x = x_c e^{-\lambda\epsilon}$, puis en faisant tendre ϵ vers 0 à A, λ fixés : nous voyons que la somme sur n dans (1.67) peut être remplacée par une intégrale sur A :

$$T|_{\text{sing}} \propto \epsilon^{3/2} \int_\epsilon^\infty dA e^{-\lambda A} A^{-5/2} \propto (\lambda\epsilon)^{3/2}. \tag{1.68}$$

Cette expression est à comparer avec la forme (1.60) pour la fonction de partition de la gravité pure : nous avons ici le terme dominant de genre 0 correspondant à une somme sur toutes les surfaces planaires. Comme nous considérons ici des cartes enracinées, le marquage d'une arête équivaut à celui d'un point dans la surface : la contribution planaire à (1.60) est de la forme :

$$Z^{(0)}_{\text{2DQG}} \propto \int dA e^{-\lambda A} A^{-7/2} \propto \lambda^{2-\gamma}. \tag{1.69}$$

λ joue le rôle d'une constante cosmologique renormalisée, et ϵ apparaît comme échelle de coupure (*cut-off*) à petite aire. Le point critique $\lambda = 0$ est invariant d'échelle, et est caractérisé par *l'exposant critique* dit *de susceptibilité de corde*[14] $\gamma = -1/2$.

Nous voyons donc que l'énumération des triangulations planaires de grande taille présente les aspects de la gravité quantique bidimensionnelle pure pour la topologie sphérique. La contrainte de triangularité des faces n'est pas cruciale, et nous obtenons la même limite continue pour d'autres familles de cartes (quadrangulations, cartes biparties, etc). Ceci est un exemple manifeste du principe *d'universalité* des phénomènes critiques. Considérons par exemple un modèle de cartes planaires quelconques, dans lequel nous associons à chaque face une aire positive arbitraire fonction de son degré : le comptage des cartes d'aire donnée est, par dualité, une spécialisation de la solution planaire du modèle à une matrice donnée à la section 1.1.2. La série génératrice $E^{(0)}$ correspond à une somme sur toutes les cartes, avec un paramètre x conjugué à l'aire. Il résulte de la solution planaire du modèle à une matrice que, pour tout choix[15] des aires des faces, $E^{(0)}$ possède un rayon de convergence fini x_c, et au voisinage du point critique, nous avons le comportement singulier dominant :

$$E^{(0)}\Big|_{\text{sing}} \propto (x_c - x)^{3/2}. \tag{1.70}$$

[13] Le comportement singulier dominant correspond au premier terme singulier dans un développement limité au voisinage de x_c. Ici deux termes réguliers, l'un constant, l'autre proportionnel à $x_c - x$, apparaissent auparavant dans le développement ; en prenant deux dérivées par rapport à x nous obtenons un véritable équivalent asymptotique divergent.

[14] Un exposant critique est souvent défini comme celui donnant la singularité d'une susceptibilité, c'est-à-dire une dérivée seconde d'énergie libre. Il s'agit ici de la dérivée seconde par rapport à λ.

[15] On imposera toutefois que le nombre de cartes d'aire inférieure à une valeur fixée est fini, par exemple en imposant que les degrés des faces sont bornés.

Nous pouvons alors suivre le même raisonnement que pour les triangulations, en renormalisant l'unité d'aire par un facteur ϵ : la limite continue est identique et gouvernée par le même exposant critique $\gamma = -1/2$ universel pour la gravité pure, alors que les modèles discrets diffèrent.

Le développement topologique des modèles de matrices permet en principe de pousser le raisonnement au-delà du genre 0. Ainsi, si nous parvenons à calculer l'énergie libre du modèle à une matrice au-delà de la limite planaire, ou ne serait-ce que déterminer son comportement singulier au voisinage d'un point critique générique, nous pouvons en déduire des informations sur la fonction de partition de la gravité quantique bidimensionnelle pure pour des topologies non-sphériques. L'exercice peut être mené pour les « petits » genres $g = 1, 2, \ldots$, au prix de complications supplémentaires par rapport à la solution planaire. Citons également l'astucieuse méthode de la *double limite d'échelle*, permettant d'envisager une formulation « non-perturbative » de la gravité quantique, via une relation avec la théorie des équations différentielles intégrables ; ce programme semble malheureusement se heurter à des obstacles techniques fondamentaux (séries non-sommables au sens de Borel, voir la revue [22]). Cependant, nous ne serons pas confrontés ici à ces difficultés, car nous nous intéresserons par la suite presque exclusivement aux cartes et surfaces planaires. En théorie des cordes, ceci correspond à une « limite semi-classique » ; la chose est plus naturelle dans le langage de la mécanique statistique, que nous préférerons dorénavant.

Modèles couplés à la matière

Nous avons jusque ici montré comment la structure de carte permet de donner un sens à l'intégration fonctionnelle sur la métrique, et son application pour une théorie de gravité pure. Un éventuel couplage à la matière n'a été introduit que de manière abstraite sous forme de champs externes gouvernés par une action ou un hamiltonien. Il est très naturel d'étendre notre discrétisation pour la description de la matière : de la même manière que les modèles discrets sur réseau régulier sont fréquemment introduits pour régulariser les théories de champs dans un espace plat, nous pouvons considérer des modèles discrets de matière définis sur une carte, vue comme réseau bidimensionnel irrégulier.

De façon générale, étant donné un réseau bidimensionnel quelconque (régulier ou irrégulier), un *modèle discret* est défini en associant des variables (« degrés de libertés ») prenant des valeurs dans un ensemble donné, souvent fini, à des éléments du réseau : sites, liens ou plaquettes – correspondant dans le langage des cartes respectivement aux sommets, arêtes et faces. Une configuration $\mathcal{C}$ est la donnée des valeurs prises par tous les degrés de libertés, et apparaît avec une probabilité :

$$p(\mathcal{C}) = \frac{1}{Z_{\text{reseau}}} e^{-\beta H(\mathcal{C})}. \tag{1.71}$$

$H(\mathcal{C})$ est l'énergie de la configuration, analogue discret du hamiltonien ; prendre $H(\mathcal{C}) = +\infty$ revient à interdire la configuration $\mathcal{C}$. La fonction de partition Z_{reseau} permet de normaliser la somme (discrète) des probabilités à 1.

Illustrons immédiatement ceci par un exemple : considérons des particules classiques « vivant » sur les sites d'un réseau fini. Si les particules sont indiscernables, une configuration du modèle est entièrement spécifiée par la donnée du nombre d'occupation n_s pour chaque site s, c'est-à-dire le nombre de particules présentes en s. n_s est un entier naturel, arbitraire pour des « bosons », égal à 0 ou 1 pour des « fermions ». En l'absence de contraintes supplémentaires, nous avons un gaz parfait dont la statistique est triviale. Une contrainte très simple aboutissant à une physique non-triviale est la *règle d'exclusion* suivante : sur les deux sites aux extrémités d'un lien se trouve un total d'au plus une particule. Ainsi, pour chaque site s, $n_s = 0$ ou 1, et si $n_s = 1$ alors, pour tous les sites s' voisins de s, $n'_s = 0$. L'énergie d'une configuration peut

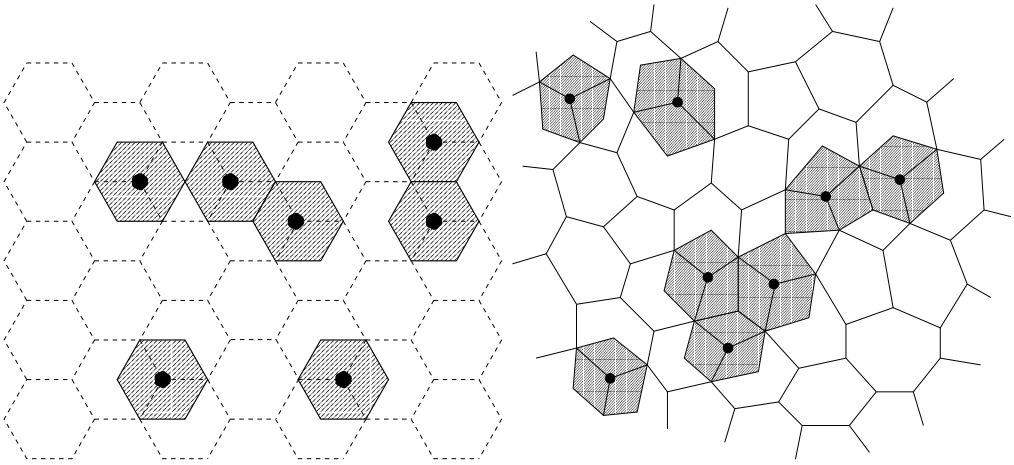


FIG. 1.5 – Exemples de configurations d'un gaz de particules dures sur un réseau régulier (réseau hexagonal) et un réseau irrégulier (trivalent). La règle d'exclusion stipule que deux particules (points noirs) ne peuvent pas occuper des sites adjacents ou, ce qui est équivalent, que les zones exclues (grisées) autour de chaque particule ne se chevauchent pas.

s'écrire :

$$H(\mathcal{C}) = \sum_{<s,s'>} \delta(1 - n_s n_{s'}) + \mu \sum_s n_s \tag{1.72}$$

où la première somme, portant sur tous les liens du réseau, assure la règle d'exclusion ($\delta(x)$ vaut $+\infty$ si $x = 0$, 0 sinon), tandis que la seconde couple le nombre total de particules à un « potentiel chimique » μ. La règle d'exclusion correspond à une interaction à deux corps de type « coeur dur », et nous appelons le modèle sur réseau ainsi défini un modèle de *particules dures*. La fonction de partition du modèle peut se réécrire comme :

$$Z_{\mathrm{HP}} = \sum_{\mathcal{C}} z^{n(\mathcal{C})} \tag{1.73}$$

où la somme porte sur l'ensemble (fini) des configurations satisfaisant la règle d'exclusion, $n(\mathcal{C}) \equiv \sum_s n_s$ est le nombre total de particules dans la configuration $\mathcal{C}$, et $z \equiv e^{-\beta\mu}$, appelé *activité* d'une particule, est l'unique paramètre du modèle. Deux configurations de particules dures, l'une sur réseau régulier, l'autre sur réseau irrégulier, sont représentées sur la figure 1.5. La prochaine section sera consacrée à l'étude de modèles de particules dures sur les cartes planaires. Nous concluons cet exemple en mentionnant une variante du modèle, où les particules occupent non plus les sites mais les liens du réseau : la règle d'exclusion stipule alors que deux liens partant d'un même site ne peuvent être simultanément occupés. On parle alors de *dimères durs*.

Revenons à présent sur la relation entre modèles discrets sur réseaux, et les modèles continus. Pour le calcul de la fonction de partition, nous effectuons dans le premier cas une somme discrète $\sum_{\mathcal{C}}$ sur l'ensemble des configurations, ce qui correspond à l'intégration fonctionnelle sur les champs externes $\int [D\Phi]$ présente dans l'équation (1.62). Cependant, la somme à réseau fixé équivaut dans le continu à considérer une métrique donnée. L'analogue discret de la fonction de partition (1.62) est obtenu en effectuant une sommation supplémentaire sur le réseau, pris dans une famille de cartes comme vu précédemment pour la gravité pure.

À nouveau, nous expliciterons cette procédure sur un exemple particulier : considérons le modèle des dimères durs sur une carte planaire tétravalente aléatoire (i.e. dont tous les sommets

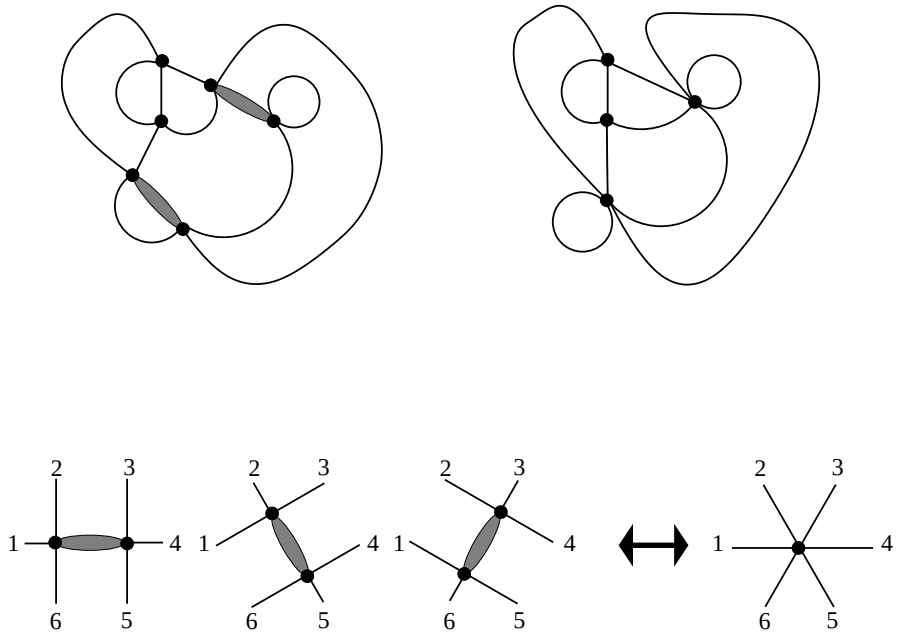


FIG. 1.6 – Le modèle des dimères durs sur les cartes tétravalentes : un exemple de carte munie de dimères durs, et la carte obtenue après contraction des dimères. Pour l'opération inverse, chaque sommet hexavalent peut être éclaté de 3 façons.

ont degré 4). La fonction de partition grand canonique s'écrit :

$$Z_{\text{ddct}} = \sum y^{\#\{\text{sommets}\}} z^{\#\{\text{dimères}\}} \tag{1.74}$$

où la somme porte sur l'ensemble des cartes planaires tétravalentes munies de dimères durs (cf figure 1.6). Une activité y et z est attachée respectivement à chaque sommet et chaque dimère. Il s'avère que cette fonction de partition peut être évaluée à l'aide du modèle à une matrice : chaque arête occupée par un dimère peut en effet être contractée, en fusionnant les deux sommets incidents de degré 4 en un sommet de degré 6. La règle d'exclusion assure que cette construction est non-ambiguë, et les sommets non environnés de dimères sont inchangés. Nous obtenons ainsi une carte constituée de sommets de degrés 4 et 6. Réciproquement, nous pouvons éclater chaque sommet de degré 6 de 3 façons. La fonction de partition se réexprime comme la série génératrice des cartes « tétrahexavalentes » comptées avec des poids y et $3zy^2$ par sommet de degré respectivement 4 et 6 (ceux-ci comptant pour deux sommets de degré 4 et un dimère). Il s'agit bien d'un cas particulier du modèle à une matrice (1.12), avec un polynôme $V(x) = yx^4/4 + 3zy^2x^6/6$ [50].

Nous avons jusque ici présenté des arguments qualitatifs montrant comment les modèles discrets sur cartes aléatoires permettent de donner un sens concret aux intégrations fonctionnelles considérées pour la mécanique quantique ou statistique des surfaces. D'autres approches sont possibles : citons en particulier l'approche continue fructueuse par les théories conformes couplées au champ de Liouville [24, 25, 26]. Un accord quantitatif spectaculaire existe entre théories discrètes et continues, au voisinage des points critiques, ce qui peut être vu comme une manifestation du principe d'universalité. Il est en effet bien connu que le comportement critique des modèles sur réseaux bidimensionnels réguliers peut être décrit par un petit nombre de paramètres, dont l'un

des plus importants est la *charge centrale*, notée c. La théorie de Liouville prédit, notamment, que le modèle correspondant sur réseau aléatoire possède un exposant de susceptibilité de corde γ dépendant de c via :

$$\gamma(c) = \frac{c - 1 - \sqrt{(1-c)(25-c)}}{12}. \tag{1.75}$$

Le cas de la gravité pure correspond à la théorie conforme triviale $c = 0$ et on retrouve ainsi $\gamma(0) = -1/2$. Le point critique du modèle d'Ising correspond à $c = 1/2$, d'où $\gamma(1/2) = -1/3$, en accord avec la solution exacte sur réseaux dynamiques [12, 13]. Mentionnons que d'autres exposants critiques peuvent être également prédits, et que l'identification avec les modèles discrets est plus délicate dans le cas des théories conformes non-unitaires (comme pour la singularité de Yang-Lee [50], rencontrée dans la section suivante). Une discussion plus poussée de ce sujet est donnée par exemple dans l'appendice A dans la publication I.

1.3 Particules dures sur cartes aléatoires

Cette section est consacrée à la présentation de résultats sur les modèles de particules dures sur les cartes aléatoires planaires dynamiques, introduits dans la publication I. Il s'agit d'une illustration des idées présentées dans les sections précédentes : nous verrons comment les intégrales matricielles permettent de trouver des solutions explicites pour ces modèles inspirés de la mécanique statistique.

Les modèles de particules dures sur un réseau ont été introduits plus haut. Rappelons que les configurations sont définies par la donnée de l'état (vide ou occupé) de chaque site, la règle d'exclusion stipulant que deux sites adjacents ne peuvent être occupés simultanément. Un poids z est attaché à chaque site occupé.

Ces modèles ont été très étudiés sur les réseaux bidimensionnels réguliers [51, 52, 53]. En particulier, dans le cas du réseau triangulaire, le modèle possède une solution exacte, découverte par Baxter, à l'aide de techniques de type « matrice de transfert » [54, 55, 56]. D'un point de vue physique, ces modèles présentent des propriétés critiques remarquables, avec une transition de phase vers un état cristallin lorsque l'activité z par particule dépasse un seuil critique.

Nous considérons ici l'extension aux cartes planaires vues comme réseaux irréguliers. Il convient de préciser la famille de cartes planaires choisies : nous étudierons successivement le cas des cartes tétravalentes, puis des cartes biparties trivalentes. Ce choix est guidé à la fois par des questions de simplicité technique, et d'intérêt physique : en effet le caractère biparti joue un rôle crucial dans le comportement critique du modèle sur carte aléatoire. À l'opposé, bien qu'il soit techniquement possible de considérer des cartes avec des sommets de degrés arbitraires, il n'en résulterait pas de physique nouvelle. Ceci est discuté de façon détaillée dans la publication I. Nous nous contenterons de présenter ici l'esprit de la solution exacte par intégrales de matrices.

1.3.1 Particules dures sur cartes tétravalentes

Au vu de la section 1.1.1, il est facile de construire une intégrale matricielle exprimant la fonction de partition des particules dures sur les cartes tétravalentes. Les sommets de la carte étant tétravalents et dans deux états (occupé ou vide), nous devons considérer un modèle à deux matrices hermitiennes, notées A et B, de la forme :

$$I_N = \log \int e^{N \operatorname{Tr}\left(-\frac{q(A,B)}{2} + v_A \frac{A^4}{4} + v_B \frac{B^4}{4}\right)} \mathcal{D}A\mathcal{D}B. \tag{1.76}$$

Le développement en diagrammes de Feynman de I_N fait apparaître des cartes dont les sommets sont étiquetés A ou B. La partie quadratique $q(A,B) \equiv Q_{AA}A^2 + 2Q_{AB}AB + Q_{BB}B^2$ détermine

les poids par arêtes du modèle par le biais des éléments de la matrice inverse Q^{-1}, tandis que les termes quartiques engendrent des sommets de degré 4. La règle d'exclusion peut être réalisée en prenant :

$$Q^{-1}_{AA} = 0 \qquad Q^{-1}_{AB} = Q^{-1}_{BA} = 1 \qquad Q^{-1}_{BB} = 1. \tag{1.77}$$

Le poids nul attachés aux arêtes de type $A - A$ revient de fait à les interdire, nous voyons donc que les sommets A correspondent aux sites occupés. Pour les autres arêtes, la règle d'exclusion est satisfaite, et nous les comptons avec un poids 1. Par inversion, nous avons ainsi :

$$q(A, B) = -A^2 + 2AB \tag{1.78}$$

Pour les poids par sommets, nous prenons $v_A = yz$, $v_B = y$: y est une activité par sommet, contrôlant la taille des cartes, tandis que z est l'activité par particule. La fonction de partition des particules dures sur cartes planaires tétravalentes est égale à la limite de I_N/N^2 pour $N \to \infty$.

Cette fonction de partition peut s'exprimer en termes de polynômes bi-orthogonaux, comme expliqué à la section 1.1.3. Considérons l'espace des polynômes à une variable x, que nous munissons du produit bilinéaire formel :

$$(p, q) \equiv \int p(a)q(b)e^{N\left(\frac{a^2}{2} - ab + yz\frac{a^4}{4} + y\frac{b^4}{4}\right)} dadb \tag{1.79}$$

déterminant une famille unique de polynômes bi-orthogonaux par les contraintes suivantes :

- $(p_i, q_j) = h_i \delta_{ij}$
- p_n et q_n sont des polynômes unitaires de degré n.

Cette dernière propriété implique que les familles $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ constituent chacune une base graduée de l'espace des polynômes. Le développement d'un polynôme arbitraire r dans ces bases est donné par :

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r, q_n)p_n}{h_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p_n, r)q_n}{h_n} \tag{1.80}$$

où les coefficients s'annulent dès que n dépasse le degré de r. Notons enfin qu'en raison de la parité de la mesure, p_n et q_n ne contiennent que des monômes dont le degré a même parité que n.

La contrainte de bi-orthogonalité permet d'écrire de nombreuses identités satisfaites par les polynômes, pour in fine déterminer la fonction de partition. Considérons par exemple les dérivées des polynômes : par la définition du produit bilinéaire (1.79) et une intégration par parties, nous avons les identités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}(p_i', q_j) &= -(xp_i, q_j) + (p_i, xq_j) - zy(x^3 p_i, q_j) \\ \frac{1}{N}(p_i, q_j') &= (xp_i, q_j) - y(p_i, x^3 q_j). \end{aligned} \tag{1.81}$$

Considérons la quantité (xp_i, q_j) : xp_i étant de degré $i + 1$, elle est nulle pour tout $j > i + 1$. De plus, en vertu de la seconde identité ci-dessus, nous avons également une annulation pour $i > j+3$ en raison des degrés ; enfin, par parité, la quantité est nulle pour i et j de parité opposée. Il en résulte que xp_i a une décomposition dans la base p de la forme :

$$xp_i = p_{i+1} + r_{i-1}p_{i-1} + s_{i-3}p_{i-3}, \tag{1.82}$$

le premier coefficient étant fixé par unitarité. De même, xq_j se développe comme :

$$xq_j = q_{j+1} + \tilde{r}_{j-1}q_{j-1} + \tilde{s}_{j-3}q_{j-3}. \tag{1.83}$$

Par convention, les coefficients $r_i, s_i, \tilde{r}_i, \tilde{s}_i$ sont nuls pour $i < 0$. Les polynômes dérivés possèdent une décomposition finie similaire, de terme de plus haut degré fixé : $p'_i = ip_{i-1} + O(x^{i-2})$, $q'_i = iq_{i-1} + O(x^{i-2})$. Nous pouvons alors écrire des relations de récurrence satisfaites par les suites $h, r, s, \tilde{r}, \tilde{s}$, en écrivant les identités (1.81) pour divers choix de i et j. Par exemple, pour $j = i + 3$, la première identité donne :

$$\tilde{s}_i h_i = zyh_{i+3}. \tag{1.84}$$

Les autres relations[16] sont plus lourdes, mais aisément calculables et simplifiables par un logiciel de calcul formel ; nous nous contenterons de mentionner qu'elles fixent de façon unique les suites $h, r, s, \tilde{r}, \tilde{s}$ à partir des conditions initiales. La fonction de partition est alors déterminée par la relation vue à la section 1.1.3 :

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \log \frac{h_n}{h_n^{(0)}}, \tag{1.85}$$

où $h_n^{(0)} \equiv h_n|_{y=0}$, ce qui assure l'annulation de la série lorsque le poids par sommet est nul. Il est à noter que les h_n possèdent également une dépendance en N en raison de la définition du produit bilinéaire (1.79).

Considérons à présent la limite planaire $N \to \infty$. Nous faisons l'hypothèse que le comportement dominant de la somme (1.85) correspond aux valeurs de n du même ordre de grandeur que N, et que h_n possède une limite d'échelle de la forme :

$$\log h_n = N\alpha\left(\frac{n}{N}\right) + o(N), \tag{1.86}$$

où $\alpha(\nu)$ est une fonction continue de $\nu \equiv n/N$ avec $\alpha(0) = 0$. Cette hypothèse peut être motivée par des arguments de type méthode du col, mais suppose en particulier $\log h_n$ ne présente pas de comportement oscillant périodiquement en n. Nous voyons en particulier que $v_n \equiv h_{n+1}/h_n$ possède une limite finie $v(\nu) \equiv e^{\alpha'(\nu)}$. De manière similaire, les coefficients $r_n, s_n, \tilde{r}_n, \tilde{s}_n$ dans les équations (1.82) et (1.83) possèdent des limites continues $r(\nu), s(\nu), \tilde{r}(\nu), \tilde{s}(\nu)$. Les relations de récurrence sur ces quantités, portant sur un intervalle fini d'indices, se réduisent dans cette limite à des équations algébriques :

$$\begin{aligned}
\nu &= v - r - 3zy(r^2 + s) \\
\tilde{r} &= v(1 + 3zyr) \\
\tilde{s} &= zyv^3 \\
r &= 3yv\tilde{r} \\
s &= yv^3.
\end{aligned} \tag{1.87}$$

Ce système de 5 équations fixe les quantités $v, r, s, \tilde{r}, \tilde{s}$ en fonction de ν et des poids y et z du modèle. Par élimination, le système se réduit à une équation $y\nu = \varphi_z(V)$, où $V \equiv yv$, et $\varphi_z(V)$ est une fraction rationnelle, de forme donnée plus bas, avec $\varphi_z(0) = 0$ et $\varphi'_z(0) = 1$. Ceci détermine implicitement $V(y\nu) = ye^{\alpha'(\nu)}$ dans un voisinage de 0. Par notre hypothèse d'échelle, la limite de l'équation (1.85) s'écrit :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{I_N}{N^2} = \int_0^1 \Big(\alpha(\nu) - \alpha^{(0)}(\nu)\Big)\, d\nu = \int_0^1 (1-\nu) \log\left(\frac{V(y\nu)}{y\nu}\right) d\nu \tag{1.88}$$

[16] Un système complet d'équations est obtenu en écrivant la première identité (1.81) pour $j = i+3, i+1, i-1$, et la seconde pour $j = i+1, i-1, i-3$.

(avec $\alpha^{(0)}(\nu) \equiv \alpha(\nu)|_{y=0}$). La dernière réécriture est obtenue par intégration par partie, et s'annule bien lorsque $y \to 0$. Nous identifions en cette limite une série génératrice de cartes planaires décorées, qui est la fonction de partition de notre modèle. Par un changement de variable $\nu \to V$, nous aboutissons au résultat suivant :

La fonction de partition du modèle des particules dures sur les cartes planaires tétravalentes aléatoires, avec activités y par sommet et z par particule, est donnée par :

$$Z_{\mathrm{HP4}} = \int_0^{\varphi_z^{-1}(y)} \frac{\varphi_z'(V)}{y} \left(1 - \frac{\varphi_z(V)}{y}\right) \log\left(\frac{V}{\varphi_z(V)}\right) dV \tag{1.89}$$

avec

$$\varphi_z(V) \equiv V(1 - 3zV^2) - \frac{3V^2}{(1 - 9zV^2)^2} \tag{1.90}$$

et en choisissant la détermination de φ_z^{-1} s'annulant en 0.

Comme pour le modèle à une matrice, il n'est pas forcément clair que ces équations sont plus explicites que le modèle de matrice initial. Un logiciel de calcul formel permet de calculer l'intégrale pour obtenir une expression fonction de V, qui est déterminé implicitement par une équation algébrique. Nous pouvons également considérer un développement ordre par ordre en y et/ou z : les petits ordres peuvent être comparés avec un comptage « manuel », et une expression pour le terme général de la série peut être obtenu par inversion de Lagrange (équation (3.25) de [57]).

Notons de plus que, pour une valeur de z fixée, la fonction de partition Z_{HP4} possède un développement analytique autour de $y = 0$ avec un rayon de convergence $y_c(z)$ fini. La quantité $\log y_c(z)$ peut être interprétée comme l'énergie libre thermodynamique par site, pour des cartes de grande taille fixée. Le rayon de convergence est déterminé par la première singularité de φ_z^{-1}, caractérisées par les équations algébriques :

$$y_c = \varphi_z(V_c), \qquad \varphi_z'(V_c) = 0. \tag{1.91}$$

Nous renvoyons à l'article I pour une discussion détaillée des solutions de ces équations. Mentionnons que pour une valeur de z générique (telle que $\varphi_z''(V_c) \neq 0$), le comportement singulier au voisinage du point critique est $V_c - V \propto (y_c - y)^{1/2}$, qui se traduit par un exposant critique $\gamma = -1/2$ pour la singularité de la fonction de partition : $Z_{\mathrm{HP4}}|_{\mathrm{sing}} \propto (y_c - y)^{2-\gamma}$. Ceci correspond au comportement critique de la gravité pure, discuté à la section précédente. Pour une valeur particulière de z :

$$z_- \equiv -\frac{25}{8192}(11\sqrt{5} + 25) = -0,151\ldots \tag{1.92}$$

nous obtenons cependant un comportement non-générique, multicritique, lié à l'annulation de $\varphi_z''(V_c)$. Nous avons $V_c - V \propto (y_c - y)^{1/3}$, d'où un exposant critique $\gamma = -1/3$. Un autre exposant critique décrit l'approche du point multicritique en fixant $y = y_c(z)$ et en faisant tendre z vers z_- : le comportement singulier de l'énergie libre thermodynamique est : $\log g_c(z)|_{\mathrm{sing}} \propto (z - z_-)^{2-\alpha}$, où $\alpha = 1/2$ est appelé *exposant thermique*. Ce point multicritique est non-physique, car l'activité par particule est négative. Il correspond cependant à une classe d'universalité bien connue sous le nom de singularité de Yang-Lee, ici dans une métrique fluctuante [50]. Nous noterons enfin que, contrairement aux modèles de particules dures sur réseau bidimensionnel régulier, il n'existe pas de point critique de cristallisation.

1.3.2 Particules dures sur cartes biparties trivalentes

Considérons à présent le modèle des particules dures sur une carte bipartie : les sommets sont coloriés de deux couleurs, par exemple noir et blanc, de telle sorte que chaque arête est incidente à un sommet de chaque couleur. Ceci vient en plus de l'état vide ou occupé par une particule : au total, il existe 4 types de sommets, d'où l'idée d'introduire un modèle à 4 matrices. Celui-ci s'écrit :

$$J_N = \log \int \exp N \operatorname{Tr} \left(-A_1 A_2 + A_2 A_3 - A_3 A_4 + y \frac{A_1^3 + A_4^3}{3} + yz \frac{A_2^3 + A_3^3}{3} \right) \mathcal{D}A_1 \mathcal{D}A_2 \mathcal{D}A_3 \mathcal{D}A_4. \tag{1.93}$$

En effet, la partie quadratique dans l'exponentielle a pour respectivement matrice et matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.94}$$

La matrice inverse donne les poids pour chaque type d'arête : une arête de poids 0 est interdite, une arête de poids 1 est autorisée. Les règles d'exclusion et de bicoloriabilité sont simultanément réalisées, avec les identifications :

- $A_1 \leftrightarrow$ noir vide
- $A_2 \leftrightarrow$ blanc occupé
- $A_3 \leftrightarrow$ noir occupé
- $A_4 \leftrightarrow$ blanc vide.

Les termes cubiques engendrent les sommets trivalents, avec un poids y par sommet et z par particule.

De façon remarquable, ce modèle appartient à la classe des modèles de matrice en chaîne, introduite à la section (1.1.3). J_N peut ainsi être exprimé en terme de polynômes bi-orthogonaux, où le produit bilinéaire est :

$$(p, q) \equiv \int p(a_1) q(a_4) e^{NH(a_1,a_2,a_3,a_4)} da_1 da_2 da_3 da_4 \tag{1.95}$$

avec $H(a_1, a_2, a_3, a_4) \equiv -a_1 a_2 + a_2 a_3 - a_3 a_4 + y\frac{a_1^3+a_4^3}{3} + yz\frac{a_2^3+a_3^3}{3}$. Ce produit est symétrique, et nous avons affaire à des polynômes orthogonaux : $(p_i, p_j) = h_i \delta_{ij}$. Comme précédemment, nous cherchons à écrire des identités satisfaites par les dérivées des polynômes, cependant la présence de 2 intégrations supplémentaires empêche de « fermer » le système. Suivant l'approche de Douglas [28], nous introduisons les opérateurs Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$, dont l'action sur un polynôme p est définie par :

$$\forall q, (Q_i p, q) = \int a_i p(a_1) q(a_4) e^{NH(a_1,a_2,a_3,a_4)} da_1 da_2 da_3 da_4. \tag{1.96}$$

Q_1 est l'opérateur de multiplication par la variable, mais l'action des trois autres opérateurs dépend intrinsèquement de la définition du produit scalaire. Par symétrie, $(Q_i p, q) = (p, Q_{5-i} q)$, d'où la dualité $Q_i = Q_{5-i}^\dagger$. Ajoutons l'opérateur P de dérivation par rapport à la variable, nous obtenons alors un système d'équation pour les opérateurs en écrivant que pour $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\int \frac{d}{da_i} \left(p(a_1) q(a_4) e^{NH(a_1,a_2,a_3,a_4)} \right) da_1 da_2 da_3 da_4 = 0. \tag{1.97}$$

Par dualité, celles-ci se réduisent aux équations pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{P}{N} &= Q_2 - yQ_1^2 \\ Q_1 &= Q_2^\dagger + yzQ_2^2. \end{aligned} \tag{1.98}$$

Ces équations sont précisément les analogues des relations (1.81) du modèle précédent, mais sont exprimées ici indépendamment du choix d'une base. Par un raisonnement similaire au précédent, nous pouvons étudier la décomposition de $Q_1 p_i$ et $Q_2 p_i$ dans la base des p_j. Par des considérations de degré et de symétrie[17], nous obtenons le développement suivant :

$$\begin{aligned} Q_1 p_i &= p_{i+1} + r^{(1)}_{i-2} p_{i-2} + r^{(2)}_{i-5} p_{i-5} + r^{(3)}_{i-8} p_{i-8} \\ Q_2 p_i &= y p_{i+2} + s^{(1)}_{i-1} p_{i-1} + s^{(2)}_{i-4} p_{i-4}. \end{aligned} \tag{1.99}$$

À nouveau, nous prenons la convention que les différents coefficients sont nuls dès que leur indice est négatif. Ces décompositions donnent les éléments de la matrice semi-infinie de Q_1 et Q_2 dans la base des polynômes orthogonaux : nous voyons que les seuls éléments non-nuls sont à une distance bornée de la diagonale, ce qui est une propriété générale des modèles de matrice en chaîne dont les degrés des sommets sont bornés. Dans un langage opératoriel, introduisons l'opérateur de décalage σ défini par son action sur la base : $\sigma p_i = p_{i+1}$, et son pseudo-inverse à gauche $\sigma^{-1} p_i = p_{i-1}$ (avec $\sigma^{-1} p_0 = 0$). Les équations (1.99) se réécrivent alors :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sigma + r^{(1)}\sigma^{-2} + r^{(2)}\sigma^{-5} + r^{(3)}\sigma^{-8} \\ Q_2 &= y\sigma^2 + s^{(1)}\sigma^{-1} + s^{(2)}\sigma^{-4}. \end{aligned} \tag{1.100}$$

$r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}, s^{(1)}, s^{(2)}$ sont les opérateurs diagonaux dont l'action sur p_i est, naturellement, la multiplication par respectivement $r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, r_i^{(3)}, s_i^{(1)}, s_i^{(2)}$. L'opérateur de dérivation P possède un développement analogue « triangulaire inférieur » : $P/N = \nu\sigma^{-1} + \ldots$, avec $\nu p_i \equiv \frac{i+1}{N} p_i$. Nous avons la relation de dualité $\sigma^\dagger = v\sigma^{-1}$, où v est un opérateur diagonal lié aux normes h des polynômes : $v p_i \equiv (h_{i+1}/h_i) p_i$. Les opérateurs diagonaux sont auto-duaux. Nous pouvons alors substituer dans les équations (1.98) et développer « ordre par ordre[18] » en σ. Nous aboutissons en particulier au système suivant de 4 équations pour les 4 opérateurs inconnus $v, r^{(1)}, s^{(1)}, s^{(2)}$:

$$\begin{aligned} s^{(2)} &= -y^3 z \sigma^4 \left(v\sigma^{-1}\right)^4 \\ v &= s^{(1)} + y^2 z v \left(\sigma s^{(1)} \sigma^{-1} + \sigma^{-1} s^{(1)} \sigma\right) \\ r^{(1)} &= y v \sigma^{-1} v \sigma + y z s^{(1)} \sigma^{-1} s^{(1)} \sigma + y^2 z \left(s^{(2)} + \sigma^2 s^{(2)} \sigma^{-2}\right) \\ \nu &= s^{(1)} - y \left(r^{(1)} + \sigma r^{(1)} \sigma^{-1}\right) \end{aligned} \tag{1.101}$$

On peut se ramener à de plus traditionnelles relations de récurrence en projetant ces relations sur la base p_i. Cependant cette forme permet de lire immédiatement la limite planaire $N \to \infty$: dans celle-ci, les opérateurs diagonaux deviennent des fonctions continues de ν, et σ devient un opérateur commutant, s'éliminant des équations (1.101). Par élimination, nous obtenons une équation $y^2 z \nu = \varphi_z(V)$, analogue au cas précédent avec ici $V \equiv y^2 z v$. Par application au calcul de la fonction de partition, nous aboutissons au résultat suivant :

[17] On notera en particulier que $H(\omega a_1, \omega^2 a_2, \omega^2 a_3, \omega a_4) = H(a_1, a_2, a_3, a_4)$ pour ω racine troisième de l'unité, ce qui implique que p_n ne contient que des monômes dont le degré a même résidu que n modulo 3.

[18] Quelque attention doit être prise à la non-commutativité de σ avec les opérateurs diagonaux, et au fait que $\sigma^{-1}\sigma = 1$ mais $\sigma\sigma^{-1} \neq 1$. Une méthode sûre est de multiplier les équations (1.98) à droite par σ^k (avec $k \geq 0$), ou bien à gauche par $(\sigma^{-1})^k$, et d'extraire la partie diagonale.

La fonction de partition du modèle des particules dures sur les cartes planaires biparties trivalentes aléatoires, avec activités y par sommet et z par particule, est donnée par :

$$Z_{\mathrm{HP3B}} = \int_0^{\varphi_z^{-1}(y)} \frac{\varphi_z'(V)}{y^2 z} \left(1 - \frac{\varphi(V)}{y^2 z}\right) \log\left(\frac{V}{\varphi(V)}\right) dV \tag{1.102}$$

avec

$$\varphi_z(V) \equiv \frac{V}{(1+2V)^2} - \frac{2}{z} V^2 (1-2V)^2 \tag{1.103}$$

et en choisissant la détermination de φ_z^{-1} s'annulant en 0.

Comme pour le modèle précédent, l'intégrale peut être explicitée comme fonction de V qui est déterminé implicite. Le terme général du développement en série en y peut être calculé par inversion de Lagrange (équation (3.38) de [57]).

Nous pouvons aussi considérer le développement analytique de Z_{HP3B} autour de $y = 0$, pour z fixé. À nouveau, le rayon de convergence, donnant l'énergie libre thermodynamique, est déterminé par les singularités de φ_z^{-1}, et les équations $y_c = \varphi_z(V_c)$, $\varphi_z'(V_c) = 0$. Le comportement critique générique est celui de la gravité pure, avec un exposant critique $\gamma = -1/2$. Cependant, nous observons un phénomène nouveau : le modèle sur carte bipartie possède non pas un, mais deux points multicritiques, où $\varphi_z''(V_c)$ s'annule. Ces points sont obtenus en :

$$z_- \equiv -\frac{512}{3125} = -0.16384 \qquad z_+ \equiv 32 \tag{1.104}$$

et donnent un même exposant critique $\gamma = -1/3$. Le premier, pour $z_- < 0$, est comme pour le modèle précédent dans la classe d'universalité de la singularité de Yang-Lee avec un exposant thermique $\alpha = 1/2$. D'un point de vue analytique, $y_c(z)$ devient complexe pour $z < z_-$, z_- apparaissant comme un « cusp » dans le graphe de $y_c(z)$ (rebroussement sur une branche non-physique).

Le second est de nature différente, et possède l'intérêt d'être dans une région physique de l'espace des paramètres, puisque $z_+ > 0$. Analytiquement, il apparaît comme un changement de détermination de $y_c(z)$, au croisement de deux branches de solutions réelles de $\varphi_z'(V_c) = 0$. Ceci ne fait apparaître de discontinuité de $y_c(z)$ qu'à la dérivée troisième, qui s'interprète comme un exposant thermique $\alpha = -1$. La classe d'universalité est celle du modèle d'Ising sur métrique fluctuante [12, 13], et correspond à une transition de cristallisation, que nous pouvons expliquer physiquement comme suit. Pour une activité par particule élevée, les configurations à nombre élevé de particules sont favorisées, mais ceci entre en compétition avec la règle d'exclusion. Sur un réseau biparti, il existe deux états « fondamentaux » maximisant naturellement le nombre de particules : ceux-ci sont obtenus lorsque tous les sites d'une couleur donnée sont occupés (les autres devant être vides par exclusion). Pour $z \to \infty$, le système devra choisir entre ces deux états fondamentaux. Il s'agit d'un phénomène de brisure spontanée de symétrie, et nous pouvons définir un paramètre d'ordre comme la différence entre le nombre d'occupation moyen sur un site noir et celui sur un site blanc. Le point critique z_+ correspond au seuil en-dessous duquel le paramètre d'ordre est nul, et au-dessus duquel il possède une valeur non-nulle[19], le système

[19] Ce fait n'est pas rigoureusement exact, car le paramètre d'ordre doit être nul en raison de la symétrie noir-blanc. Il conviendrait d'introduire une perturbation favorisant l'un des états fondamentaux par rapport à l'autre. Ceci peut être fait par exemple par une légère extension de notre modèle, en mettant un poids différent aux sites occupés selon qu'ils sont noirs ou blancs. Dans ce cas nous verrions que le paramètre d'ordre possède une valeur finie même pour une perturbation infinitésimale, le signe du paramètre d'ordre dépendant du sens de la perturbation.

étant alors à une transition de phase du premier ordre. L'absence de transition de cristallisation dans le modèle précédent peut se justifier par le fait que sur une carte générique non-bipartie, il n'existe pas d'état fondamental naturel pour z grand.

1.3.3 Généralisations du modèle

Les deux modèles précédents ont pu être résolus à l'aide d'un modèle de matrices en chaîne, à deux et quatre matrices respectivement. Une question naturelle est alors de déterminer si d'autres modèles de matrices en chaîne, comportant un nombre arbitraire de matrices, possèdent une interprétation en tant que modèles de particules dures.

Considérons par exemple un modèle à trois matrices en chaîne :

$$\log \int e^{N \operatorname{Tr}\left(-\frac{A_1^2}{2}+A_1A_2-A_2A_3+V_1(A_1)+V_2(A_2)+V_3(A_3)\right)}. \tag{1.105}$$

Le choix particulier de la forme quadratique $\frac{A_1^2}{2} - A_1A_2 + A_2A_3$ est destiné à assurer que la matrice de celle-ci est inversible, et que son inverse n'a que des éléments de matrice positifs, pour une interprétation comme poids par arête dans le développement en cartes. Précisément, nous obtenons la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.106}$$

Les poids par arête sont 1, sauf pour les arêtes de type A_1–A_2 et A_2–A_2 qui sont interdites. Nous pouvons interpréter ces contraintes en terme de particules vivant sur les sommets de la carte, en introduisant la règle d'exclusion étendue suivante : sur deux sommets adjacents se trouve un total d'au plus deux particules. Deux particules peuvent se trouver sur un même sommet, mais ceci impose que les sommets adjacents sont vides. A_2 correspond ainsi aux sommets doublement occupés, A_1 aux sommets simplement occupés, et A_3 aux sommets vides. Les polynômes $V_1(A_1), V_2(A_2), V_3(A_3)$ donnent les poids par sommets de chaque type et degré, et nous pouvons résoudre le modèle pour de tels poids arbitraires à l'aide de polygones bi-orthogonaux.

Cette règle d'exclusion étendue peut être également considérée sur une carte bipartie, et il apparaît que le modèle peut être relié à un modèle à six matrices en chaînes, où la forme quadratique est $A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - A_4A_5 + A_5A_6$, et possède la matrice inverse :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.107}$$

L'identification des types de sites se fait avec la correspondance :

- $A_1 \leftrightarrow$ site noir vide,
- $A_2 \leftrightarrow$ site blanc doublement occupé,
- $A_3 \leftrightarrow$ site noir simplement occupé,
- $A_4 \leftrightarrow$ site blanc simplement occupé,
- $A_5 \leftrightarrow$ site noir doublement occupé,
- $A_6 \leftrightarrow$ site blanc vide.

Les poids par arête réalisent alors simultanément la règle d'exclusion étendue et la bicoloriabilité. Nous pouvons à nouveau considérer des poids arbitraires par sommet de chaque type et degré. Ce

modèle a été étudié dans I dans le cas des cartes biparties trivalentes. La solution par polynômes orthogonaux a été obtenue, et nous pouvons en déduire de façon exacte le comportement critique très riche du modèle. En particulier, nous mettons en évidence l'existence d'un point dans la classe d'universalité dite du modèle d'Ising tricritique, à la rencontre d'une ligne de transition du premier ordre et d'une ligne critique du second ordre (dont chaque point est de type Ising).

Au-delà de cette règle d'exclusion étendue à deux particules, nous pouvons considérer une version généralisée, définie pour tout entier k positif : la règle d'exclusion étendue d'ordre k stipule que le nombre total de particules sur deux sites adjacents est au plus k. Dans ce cas, le nombre d'occupation sur un site est un entier compris entre 0 et k. Le modèle peut être considéré sur les cartes aléatoires, arbitraires ou biparties, et il est facile d'écrire un modèle de matrice exprimant sa fonction de partition. Pour le cas des cartes arbitraires, il convient d'introduire $k+1$ matrices $A_0, A_1, \ldots, A_k$, A_i est la matrice associée aux sommets ayant un nombre d'occupation i. La règle d'exclusion étendue se traduit, dans le langage des matrices, par une forme quadratique, dont la matrice inverse a pour éléments :

$$Q_{ij}^{-1} = \theta(k-i-j), \quad i,j = 0,\ldots,k \tag{1.108}$$

où $\theta(n) = 1$ si $n \geq 0$, 0 sinon. L'inverse de la matrice est alors donnée par :

$$Q_{ij} = \delta_{i+j,k} - \delta_{i+j,k+1} \tag{1.109}$$

d'où la forme quadratique :

$$q(A_0, A_1, \ldots, A_k) = \sum_{i=0}^{k} A_i A_{k-i} - \sum_{i=1}^{k} A_i A_{k+1-i}. \tag{1.110}$$

Cette forme peut être réécrite pour mettre en évidence une structure de graphe d'interactions en chaîne :

$$q(A_0, A_1, \ldots, A_k) = 2\sum_{i=0}^{k} (-1)^i A_{\sigma(i)} A_{\sigma(i+1)} + (-1)^k A_{\sigma(k)}^2 \tag{1.111}$$

où σ est la permutation de $\{0, 1, \ldots, k\}$ définie par :

$$\begin{cases} \sigma(2i) = i \\ \sigma(2i+1) = k-i \end{cases}, \qquad i = 0,\ldots,\lfloor \frac{k}{2} \rfloor. \tag{1.112}$$

Le modèle est donc soluble par polynômes bi-orthogonaux, pour des poids arbitraires par sommet de chaque type et degré, exprimant la fonction de partition en termes de fonctions déterminée par un système d'équations algébriques.

De façon intéressante, le modèle sur cartes biparties possède une forme très similaire. Les sommets peuvent être de $2k+2$ types, selon le nombre d'occupation et la couleur : nous considérons donc un modèle à $2k+2$ matrices $B_1, B_2, \ldots, B_{2k+2}$, dans lequel la forme quadratique est :

$$q(B_1, B_2, \ldots, B_{2k+2}) = 2\sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^i B_i B_{i+1}. \tag{1.113}$$

La matrice de cette forme est inversible, et les éléments de la matrice inverse Q^{-1} valent toutes 0 ou 1 selon l'équivalence :

$$Q_{ij}^{-1} = 1 \Leftrightarrow (i \text{ pair et } j \text{ impair et } i > j) \text{ ou } (j \text{ pair et } i \text{ impair et } j > i) \tag{1.114}$$

pour $i, j = 1, 2, \ldots 2k+2$. Ceci définit les types d'arêtes autorisées. L'interprétation en terme de règle d'exclusion sur réseau bicoloriable se fait en identifiant chaque matrice à un type de sommet, selon :

– $B_{2i+1} \leftrightarrow$ site noir à i particules
– $B_{2i+2} \leftrightarrow$ site blanc à $k - i$ particules

où i prend les valeurs $0, 1, \ldots, k$. Nous pouvons, à nouveau, attacher un poids arbitraire à chaque sommet dépendant de son type et son degré, et déterminer la fonction de partition du modèle à l'aide de polynômes bi-orthogonaux.

Chapitre 2

Cartes planaires et arbres bourgeonnants

La plupart des familles de cartes énumérables, tant par l'approche originale de Tutte que par les modèles de matrices vus au chapitre 1, possèdent des séries génératrices de nature algébrique. Dans un certain nombre de cas, il est possible d'obtenir une formule explicite pour le terme général de la série, correspondant au nombre de cartes ayant des nombres prescrits d'arêtes, de sommets ou de faces de chaque type. Dans d'autres cas, nous pouvons exprimer la série génératrice à partir de fonctions déterminées implicitement par un système fini d'équations algébriques (comme pour les cartes énumérées selon les degrés des sommets, en imposant une borne sur ceux-ci). Enfin, les cas les plus généraux (pour des degrés arbitraires) apparaissent comme limites des précédents, et la série génératrice en tant que série formelle peut être vue comme le point fixe unique d'une certaine application contractante. Ces différents aspects évoquent l'énumération d'autres objets combinatoires : les arbres. En effet, un arbre (enraciné) peut être décomposé récursivement en d'autres arbres : dans le langage des séries génératrices, ceci se traduit immédiatement par une équation de point fixe. Dans de nombreux cas, les équations obtenues sont algébriques. Enfin, certaines familles d'arbres sont énumérables par des formules explicites, pouvant souvent être obtenues par des arguments de combinatoire bijective.

Au-delà de ces similarités qualitatives, certaines familles de cartes possèdent **exactement** la même énumération que des familles d'arbres (éventuellement définies de manière *ad hoc*). Il existe donc en principe une bijection entre elles, et il est naturel de se demander si une telle bijection peut être construite explicitement. Une approche systématique de ce sujet a été amorcée par Schaeffer [14, 58, 59, 60, 61], qui parvint à redémontrer de nombreux résultats d'énumération de cartes de manière purement bijective, via des correspondances entre cartes et arbres. De façon générale, les arbres considérés peuvent être qualifiés *d'arbres bourgeonnants* (en anglais : *blossom trees*) : il s'agit d'arbres plans, dont les sommets externes (de degré un) peuvent être de deux types particuliers : les feuilles et les bourgeons.

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les arbres bourgeonnants selon un raisonnement dû à Schaeffer [14], afin de retrouver de manière bijective le nombre de cartes planaires à n arêtes. Nous montrerons ensuite comment étendre la construction pour retrouver la série génératrice des cartes enracinées en fonction des degrés des sommets, calculée au chapitre 1 par le modèle à une matrice, et obtenue par Bender et Canfield [62] via une décomposition récursive à la Tutte. Ceci reprend les résultats de la publication III. Nous passerons ensuite au cas des cartes biparties, correspondant au modèle à deux matrices : nous commencerons par présenter la construction générale donnée par Bousquet-Mélou et Schaeffer [21] avant de nous concentrer

sur deux cas particuliers intéressants, discutés dans les publications II et IV. Dans une dernière section, nous proposerons une extension à un modèle de cartes à trois couleurs, correspondant au modèle à trois matrices en chaîne [63].

La méthode des arbres bourgeonnants s'avère donc un outil puissant pour retrouver de manière combinatoire et bijective les résultats des modèles de matrices solubles par polynômes (bi-)orthogonaux. Nous effectuons ici le programme pour les modèles à une, deux et trois matrices. Les résultats récents [64] sur le modèle des particules dures sur cartes bicubiques, correspondant à un modèle à quatre matrices, sont au-delà de la perspective de ce texte. Nous n'évoquons pas non plus les variantes pour l'énumération de cartes ayant des propriétés de non-séparabilité ou de connexité forte [59, 61].

2.1 Prémisses : le comptage bijectif des cartes planaires à n arêtes

2.1.1 Arbres bourgeonnants quartiques

Afin de motiver l'introduction des arbres bourgeonnants, suivons le raisonnement original de Schaeffer. Depuis Tutte [4], il est connu que le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est :

$$e_n \equiv \frac{2 \cdot 3^n}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n}. \tag{2.1}$$

Peut-on retrouver ce résultat de manière bijective ? L'approche de Schaeffer consiste à d'abord « deviner » des objets combinatoires simples comptés par une formule analogue, puis de chercher à les relier aux cartes. Pour ce faire, réécrivons :

$$e_n = \frac{2}{n+2} \cdot 3^n \cdot c_n \tag{2.2}$$

où $c_n \equiv \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ est le *nombre de Catalan* d'ordre n.

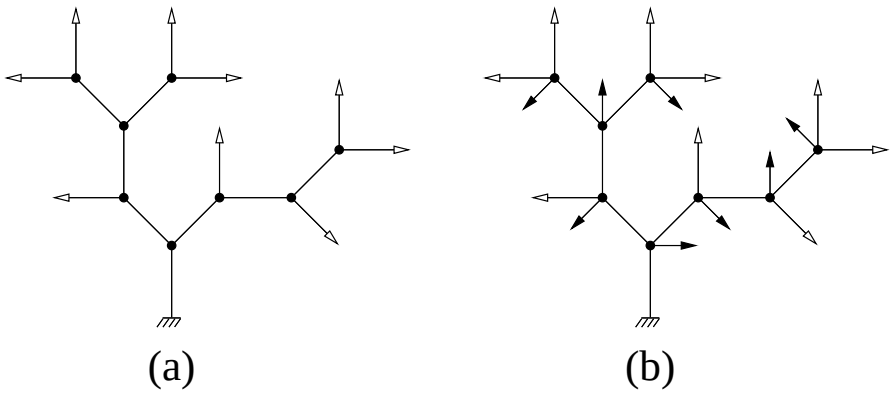


FIG. 2.1 – Un arbre binaire complet planté (a), et un arbre bourgeonnant quartique associé (b). Les sommets internes (ou noeuds) sont représentés par des ronds, les feuilles (distinctes de la racine) par des flèches blanches, les bourgeons par des flèches noires, la racine par une « masse ». Ces conventions seront gardées pour toutes les figures de cette section.

Parmi les nombreuses interprétations combinatoires classiques des nombres de Catalan [65, 66], on retiendra celle-ci : c_n est le nombre d'*arbres binaires complets plantés* à n noeuds[1], la figure 2.1-a montrant un tel arbre ayant $n = 8$ *noeuds*, ayant tous degré 3[2], ainsi que $n + 1 = 9$ *feuilles*, de degré 1. La racine, de degré 1, est considérée comme une feuille supplémentaire.

À partir d'un arbre binaire complet planté à n noeuds, construisons à présent *un arbre bourgeonnant* en connectant un bourgeon à chaque noeud. Plus précisément, pour chaque noeud de l'arbre, sélectionnons l'un des trois secteurs délimités par les arêtes incidentes, et plaçons-y une arête menant à un sommet de degré un d'un type nouveau, appelé *bourgeon*, comme illustré sur la figure 2.1-b. Chaque noeud a désormais degré 4 et est adjacent à exactement un bourgeon : un arbre bourgeonnant ayant ces propriétés est dit *quartique*. Comme il y a 3^n façons de placer les bourgeons, le nombre d'arbres bourgeonnants quartiques à n noeuds est $3^n \cdot c_n$.

Nous voyons que le nombre d'arbres bourgeonnants quartiques diffère seulement d'un facteur $(n + 2)/2$ de e_n. L'idée de Schaeffer est alors d'associer une carte planaire à tout arbre bourgeonnant, en reliant les bourgeons aux feuilles. Cette construction, appelée clôture, est présentée dans la section suivante. Ensuite, nous verrons comment en déduire une énumération bijective des cartes planaires, et comprendre le facteur manquant.

2.1.2 Des arbres aux cartes : la clôture

L'opération de clôture d'un arbre bourgeonnant consiste à considérer celui-ci comme le « squelette » d'une carte planaire, les positions des feuilles et bourgeons étant l'information nécessaire pour construire les arêtes et faces manquantes de la carte. Plus précisément nous relions chaque bourgeon à une feuille par une nouvelle arête, suivant la procédure d'*appariement* définie comme suit.

Étant donné un arbre bourgeonnant quartique à n noeuds, on parcourt le contour externe (bord de la face) de l'arbre dans le sens direct : on rencontre successivement les $2n + 2$ sommets externes de l'arbre (i.e. $n + 2$ feuilles dont la racine, et n bourgeons). On commence par relier chaque bourgeon suivi immédiatement d'une feuille à celle-ci. Comme illustré sur la figure 2.2-a, on peut placer les nouvelles arêtes de telle façon qu'il n'y ait pas de croisement d'arêtes, et que tous les bourgeons et feuilles non appariés soient adjacents à la face externe. La procédure est itérée sur les sommets externes restants : à chaque étape, on considère les sommets externes non encore appariés, dans leur succession sur le contour de l'arbre, et on relie parmi eux chaque bourgeon précédant immédiatement une feuille à celle-ci. Ce choix permet d'assurer qu'à chaque étape, il n'y ait pas de croisement d'arêtes, et que les sommets non appariés soient adjacents à la face externe. De plus, comme il reste à chaque étape exactement deux feuilles de plus que de bourgeons parmi les sommets externes non encore appariés, la procédure s'arrête lorsque tous les bourgeons ont été appariés, laissant deux feuilles libres (figure 2.2-b).

On obtient la *clôture partielle* de l'arbre bourgeonnant initial en effaçant à présent les bourgeons et les feuilles appariées, et en fusionnant les arêtes qui leur sont adjacentes (figure 2.2-c) : il s'agit d'une carte planaire dont tous les sommets ont degré 4 hormis les deux feuilles non appariées qui ont degré un.

Cependant cette construction n'est pas bijective : étant donné un arbre bourgeonnant quartique, ses *conjugués*, obtenus par *réenracinement*, c'est-à-dire en marquant une feuille quelconque et en considérant celle-ci comme nouvelle racine (figure 2.3-a), ont même clôture partielle. En effet l'appariement des feuilles et bourgeons est indépendant du choix de la racine parmi les feuilles (figure 2.3-b).

[1] Ce fait peut être prouvé bijectivement via le codage des arbres binaires par les chemins de Dyck.

[2] On parle d'arbre binaire car, en remontant l'arbre depuis la racine, chaque noeud a exactement deux « fils » (noeud ou feuille).

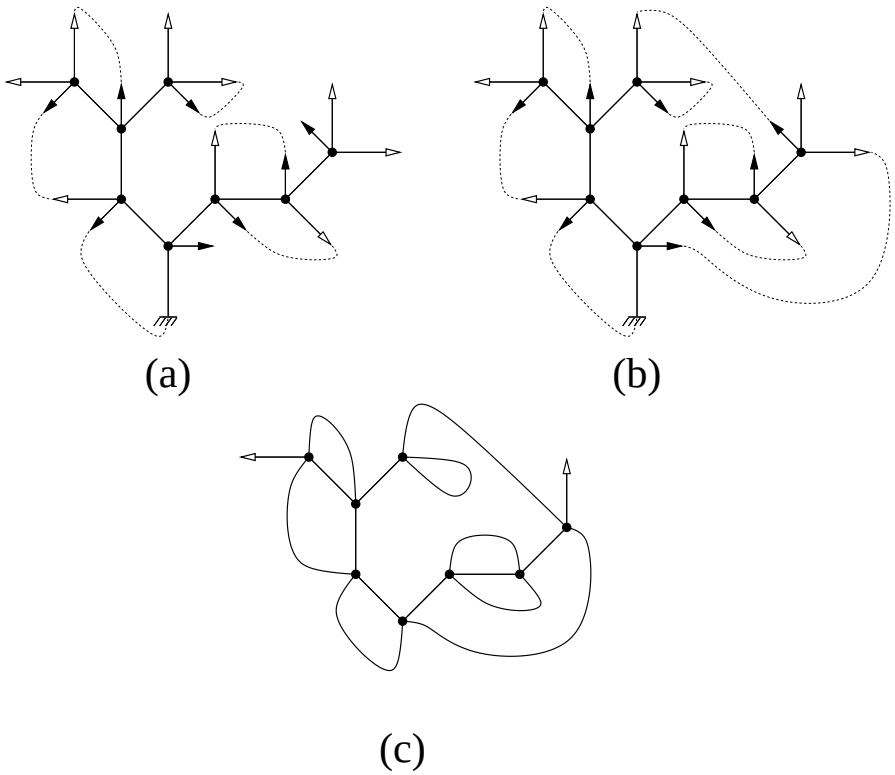


FIG. 2.2 – La clôture partielle de l'arbre bourgeonnant de la figure 2.1-b. (a) Première étape de la procédure d'appariement. (b) Seconde et dernière étape de la procédure d'appariement. (c) La clôture partielle obtenue par effacement des bourgeons et feuilles appariés.

Il se peut toutefois que la racine soit l'une des deux feuilles non appariées, auquel cas l'arbre est dit *équilibré*. Dans ce cas on achève l'appariement en reliant ensemble les deux feuilles libres, via une arête orientée en direction de la racine. Ceci définit la *clôture complète* de l'arbre équilibré (figure 2.3-c), qui est une carte planaire enracinée tétravalente (c'est-à-dire une carte planaire avec une arête marquée et orientée, et dont tous les sommets ont degré/valence 4). Pour la représentation dans le plan, nous mettons par convention le point à l'infini dans la face à gauche de la racine. Ce raffinement conduit au résultat suivant :

L'opération de clôture complète définit une bijection entre l'ensemble des arbres bourgeonnants quartiques équilibrés à n noeuds, et l'ensemble des cartes planaires tétravalentes enracinées à n sommets.

Nous prouverons plus loin un résultat plus général, mais décrivons dès maintenant la construction inverse associant un arbre bourgeonnant quartique équilibré à toute carte planaire tétravalente enracinée, qui se généralisera aisément.

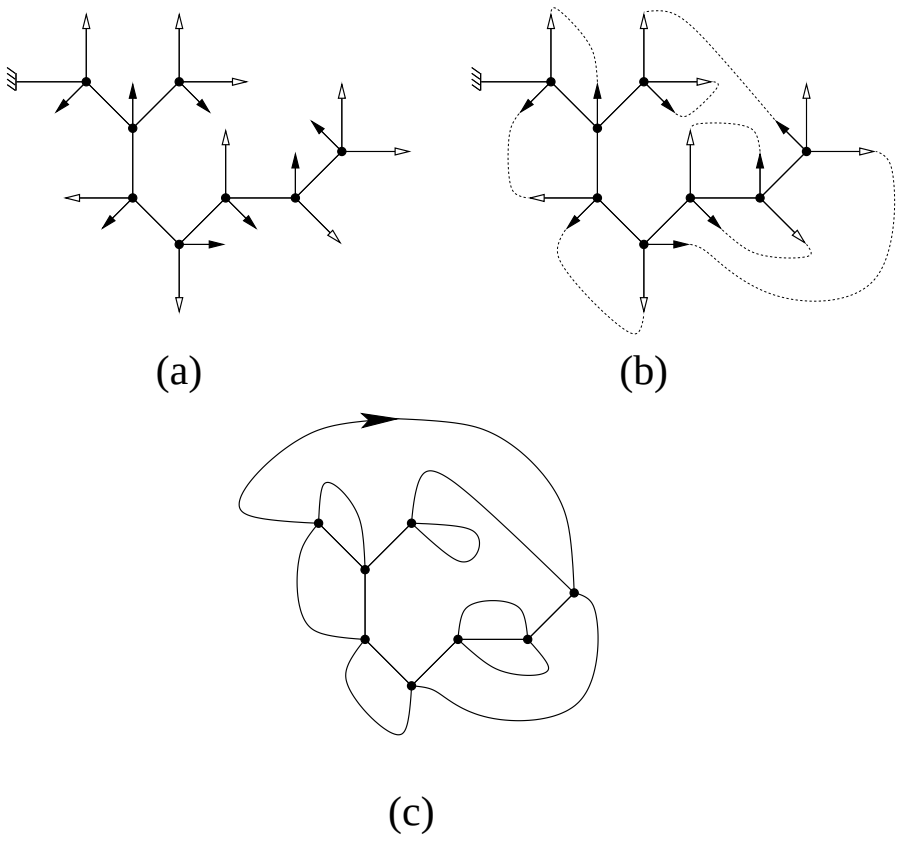


FIG. 2.3 – (a) Un conjugué équilibré de l'arbre de la figure 2.1-b. (b) Appariement des feuilles et bourgeons. (c) La clôture complète correspondante.

2.1.3 Des cartes aux arbres : le découpage

Partant d'une carte planaire tétravalente enracinée à n sommets, on obtient un arbre en en coupant certaines arêtes, de façon à supprimer tout cycle (ce qui revient à réunir toutes les faces). On commence par couper l'arête-racine en deux, en plaçant une feuille au bout de chaque demi-arête. La feuille placée à l'origine de l'arête-racine est marquée, et sera la racine de l'arbre final.

Dans la carte résultante, les deux feuilles sont adjacentes à la même face externe. On parcourt alors successivement les arêtes adjacentes à cette face externe, dans le sens direct en partant de la racine : à chaque étape, on coupe l'arête courante en deux si et seulement si elle est *non-séparante*, c'est-à-dire si sa coupure laisse connexe le graphe sous-jacent courant. On place alors respectivement un bourgeon au bout de la première demi-arête et une feuille au bout de la seconde, dans le sens de parcours. Lorsqu'on revient au point de départ, la face externe a été réunie avec toutes les faces qui lui étaient précédemment adjacentes. On répète alors la procédure en coupant les arêtes non-séparantes le long du contour de la nouvelle face externe, toujours en préservant la connexité, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les faces aient été réunies, c'est-à-dire qu'il ne reste plus d'arête non-séparante susceptible d'être coupée.

La construction est illustrée sur la figure 2.4 : sur l'exemple présenté, deux tours de la face externe sont nécessaires pour supprimer tous les cycles. En admettant pour l'instant que le

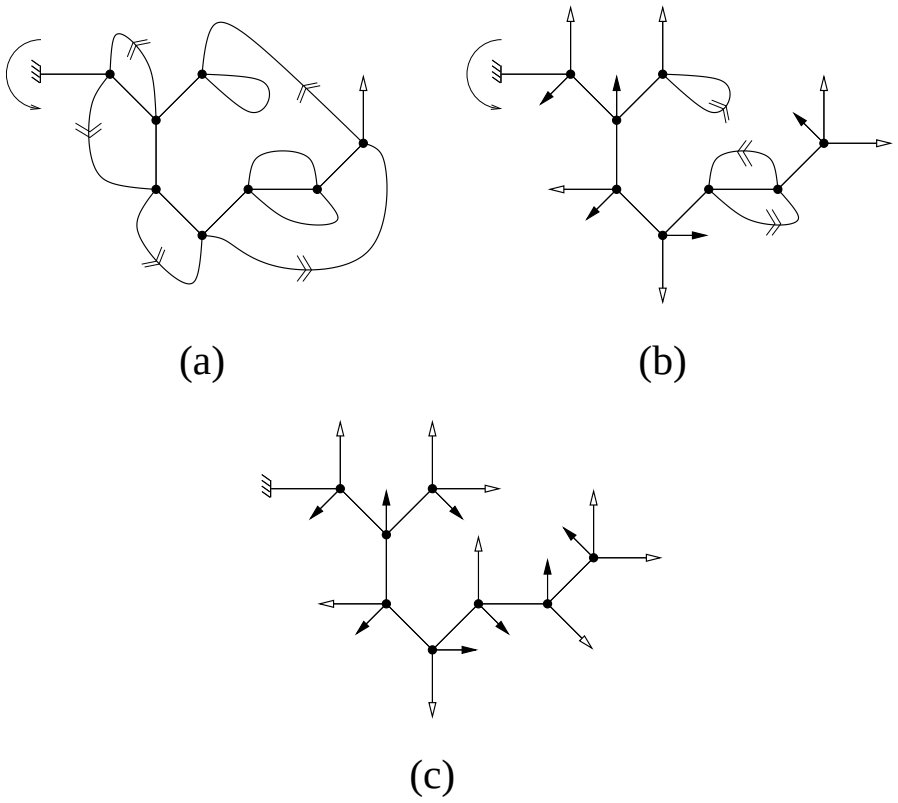


FIG. 2.4 – Découpage en arbre de la carte planaire tétravalente de la figure 2.3-c.

résultat du découpage est bien un arbre bourgeonnant équilibré (il n'est notamment pas évident a priori que chaque noeud est connecté à exactement un bourgeon) et que ces deux constructions constituent bien des bijections inverses l'un de l'autre, montrons à présent comment retrouver la formule (2.1) de Tutte.

2.1.4 Application au comptage des cartes

Clôture et découpage relient bijectivement les arbres bourgeonnants quartiques équilibrés à n noeuds aux cartes planaires tétravalentes enracinées à n sommets. À leur tour celles-ci sont en bijection avec les cartes planaires arbitraires enracinées à n arêtes, via une construction classique toujours due à Tutte, illustrée sur la figure 2.5 :

- toute carte planaire tétravalente enracinée est bicoloriable des faces, mettons en noir et blanc : en supposant que la face située à droite de l'arête-racine est blanche, on place un nouveau sommet dans chaque face blanche ; les nouvelles arêtes sont définies par les contacts entre faces blanches au niveau des coins (figure 2.5-a). Ces nouveaux sommets et arêtes définissent une carte arbitraire dont les faces contiennent chacune exactement une face noire de la carte tétravalente. Enfin on transfère naturellement le marquage de l'arête-racine.
- réciproquement à toute carte planaire enracinée on associe sa carte radiale : lorsque deux arêtes se succèdent autour d'une face, on relie ensemble leurs milieux (figure 2.5-b).

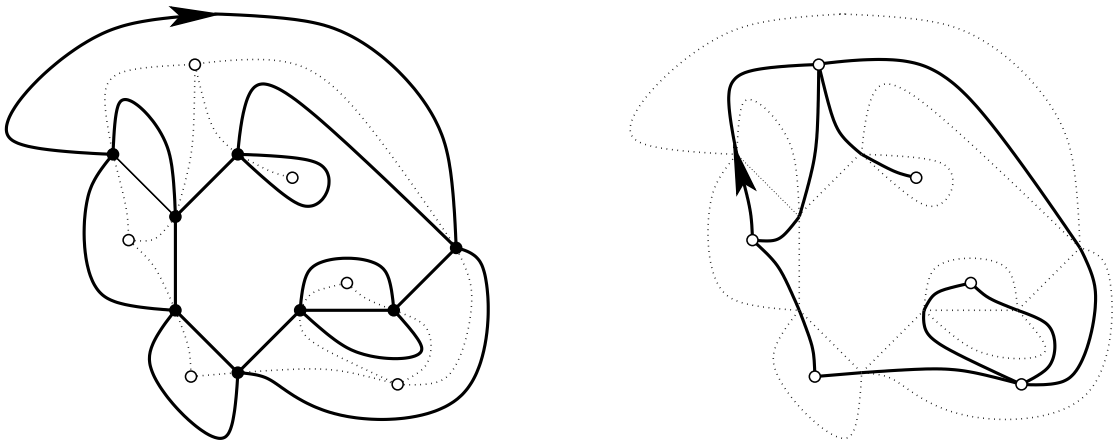


FIG. 2.5 – Équivalence de Tutte entre cartes tétravalentes enracinées à n sommets et cartes arbitraires enracinées à n arêtes.

Il reste à montrer que les arbres bourgeonnants quartiques équilibrés à n noeuds est bien e_n comme défini par la formule (2.1). Pour ce faire, on remarque que, par réenracinement, on a une bijection entre :

- l'ensemble des arbres bourgeonnants quartiques **équilibrés** à n noeuds avec marquage d'une feuille **quelconque** (pouvant coïncider avec la racine),
- l'ensemble des arbres bourgeonnants quartiques **quelconques** à n noeuds avec marquage d'une feuille **libre**.

Un arbre bourgeonnant quartique à n noeuds ayant $n+2$ feuilles dont deux libres, on en déduit la relation :

$$(n+2) \cdot e_n = 2 \cdot 3^n \cdot c_n \tag{2.3}$$

qui donne l'identité voulue.

2.2 Cartes arbitraires et arbres bien chargés

Nous souhaitons à présent étendre ce type de preuve bijective à des résultats plus fins de la combinatoire énumérative des cartes planaires. Ici, nous cherchons à retrouver bijectivement la série génératrice des cartes planaires enracinées selon les degrés des sommets, calculée au chapitre 1 via le modèle à une matrice, et qui a été également obtenue via une méthode de décomposition récursive par Bender et Canfield [62]. Il semble assez clair que la bijection de la section précédente entre cartes planaires arbitraires et arbres bourgeonnants quartiques ne suffit pas : en effet le degré d'un sommet dans une carte arbitraire devient le degré d'une face dans la carte tétravalente radiale associée, qui n'est pas lisible de façon simple dans l'arbre bourgeonnant après découpage.

Par contre, appliquer la procédure de clôture-découpage directement à une carte arbitraire semble une voie plus prometteuse : en effet, la construction précédente consiste à remplacer des paires bourgeon-feuille d'un arbre bourgeonnant par des arêtes, les noeuds de l'arbre devenant des sommets de la carte et leur degré étant bien évidemment inchangé. Nous procéderons en plusieurs étapes : tout d'abord nous étendrons de façon assez naturelle l'algorithme de découpage présenté à la section 2.1.3 à des cartes non tétravalentes. Une description plus précise du procédé sera donnée. La difficulté est de caractériser ensuite les objets obtenus : nous introduirons la notion

importante de charge, permettant de définir les arbres bourgeonnants bien chargés. Nous explorerons les propriétés des arbres bourgeonnants bien chargés et de leurs séries génératrices, avant de revenir à l'étude des conditions de bijectivité de l'opération de découpage, pour l'application au comptage des cartes.

2.2.1 Généralisation du découpage et de la clôture

Cartes enracinées, à une patte, à deux pattes

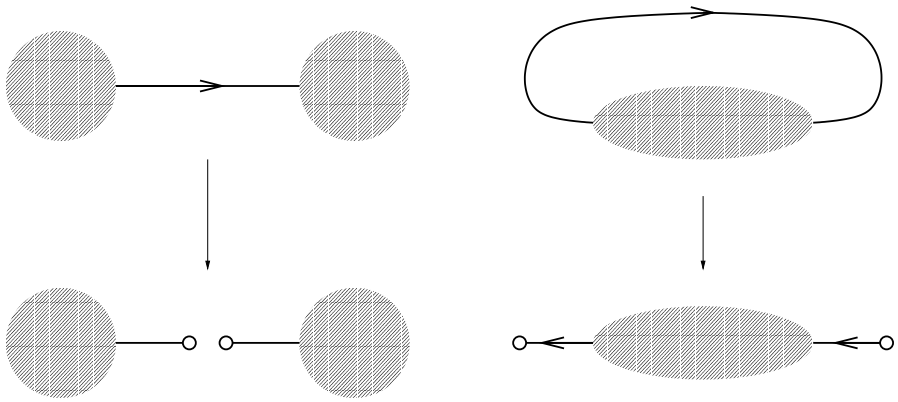


FIG. 2.6 – Schéma de la décomposition d'une carte enracinée en un couple de cartes à une patte ou en une carte à deux pattes.

Nous souhaitons généraliser l'algorithme de découpage de la section 2.1.3 aux cartes enracinées arbitraires, non nécessairement tétravalentes. La première étape du découpage consiste à couper l'arête-racine, mais dans une carte non tétravalente cela peut rendre le graphe sous-jacent non-connexe, ce qui distingue deux cas, schématisés sur la figure 2.6 :

- si l'arête-racine est *séparante*, chacune des deux composantes connexes obtenues est une *carte à une patte* (figure 2.7-a), i.e. une carte planaire avec marquage d'un sommet de degré un,
- si l'arête-racine est *non-séparante*, on obtient une *carte à deux pattes* (figure 2.7-b), i.e. une carte planaire avec marquage de deux sommets discernables (appelés respectivement entrant et sortant) ayant chacun degré un et adjacents à une même face.

Réciproquement, étant donné un couple de cartes à une patte, ou une carte à deux pattes (non réduite à une arête), on retrouve une carte planaire enracinée en reliant les pattes. Ceci établit une bijection, et nous noterons que le nombre total de sommets d'un degré donné est conservé, sauf pour le degré un en raison de l'ajout des deux pattes. Notre convention sera toutefois de ne pas comptabiliser les pattes dans le comptage des sommets. L'intérêt de cette décomposition est que le découpage itératif en arbre bourgeonnant de la section 2.1.3 s'adapte aisément aux cartes à une patte ou à deux pattes.

Cas des cartes à une patte

Dans une carte à une patte, la face externe est définie comme celle adjacente au sommet marqué, qui est remplacé par une feuille-racine. On coupe alors, en suivant même la procédure qu'à la section 2.1.3, les arêtes non-séparantes le long de la face externe, à partir de la racine, en plaçant une paire bourgeon-feuille à chaque coupure. La figure 2.8 illustre ceci sur un exemple.

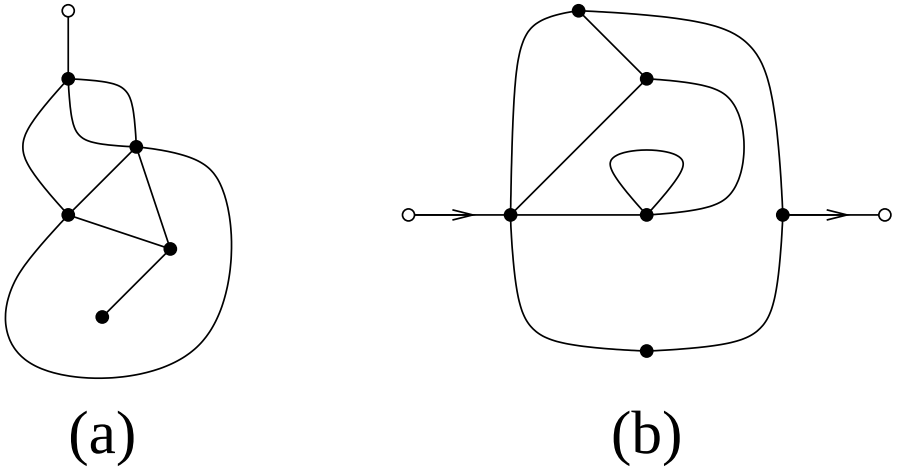


FIG. 2.7 – Exemples de carte à une patte (a) et de carte à deux pattes (b).

Après un certain nombre de tours, on obtient ainsi un arbre bourgeonnant, comportant une feuille de plus que de bourgeon. À la différence du cas tétravalent, la carte peut comporter des sommets de degré un (autres que la patte), qui subsistent dans l'arbre bourgeonnant. Distincts des bourgeons et des feuilles, ceux-ci sont considérés comme des sommets au même titre que les noeuds internes de l'arbre. Ainsi, le nombre de sommets de chaque degré est conservé (on rappelle que le sommet marqué n'est pas comptabilisé par convention).

Il est instructif de considérer l'effet de la procédure de découpage sur la carte duale, comme illustré sur la figure 2.9. Les arêtes duales aux arêtes coupées constituent un sous-graphe de la carte duale, qui est un *arbre couvrant*. En effet, celui-ci est connexe et visite tous les sommets (puisque le découpage fusionne toutes les faces avec la face externe) et ne comporte pas de boucle (car le découpage préserve la connexité). Cet arbre couvrant n'est pas choisi arbitrairement, et peut être caractérisé comme la réunion des *chemins minimaux à gauche*, définis comme suit. Nous rappelons qu'un chemin sur un graphe ou une carte est usuellement défini comme une suite finie d'arêtes orientées consécutives, i.e. l'extrémité d'une arête est l'origine de l'arête suivante. La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes qui le constituent, son origine est l'origine de la première arête, son extrémité l'extrémité de la dernière arête. Un chemin est dit minimal s'il n'existe pas de chemin de longueur inférieure ayant mêmes origine et extrémité. Nous considérons ici des chemins sur la carte duale, ayant pour origine le dual de la face externe : les chemins minimaux menant au dual d'une face donnée sont évidemment tous de même longueur (appelée distance de la face à la face externe). Ils sont de plus en nombre fini, et nous pouvons les ordonner « de gauche à droite » en fonction de leur position par rapport à la patte externe[3]. Nous appelons finalement chemin minimal à gauche l'élément le plus à gauche de l'ensemble des chemins minimaux menant au dual d'une face donnée. La procédure de découpage se caractérise alors en notant qu'un arête est découpée si et seulement si sa duale appartient à un chemin minimal à gauche. Ce fait peut être vérifié sur la figure 2.9, et nous notons de plus que les bourgeons et feuilles sont placés respectivement à gauche et à droite des chemins minimaux à gauche (selon leur orientation depuis la face externe). Nous utiliserons abondamment ces caractérisations, et nous mentionnons que l'arbre couvrant des chemins minimaux à gauche être également construit

[3]Plus précisément, pour deux tels chemins, nous définissons la notion de gauche et droite en examinant les positions relatives de la première arête non-commune aux deux chemins, par rapport à l'arête précédente. Lorsque les deux chemins diffèrent dès la première arête, c'est la patte externe qui permet de trancher.

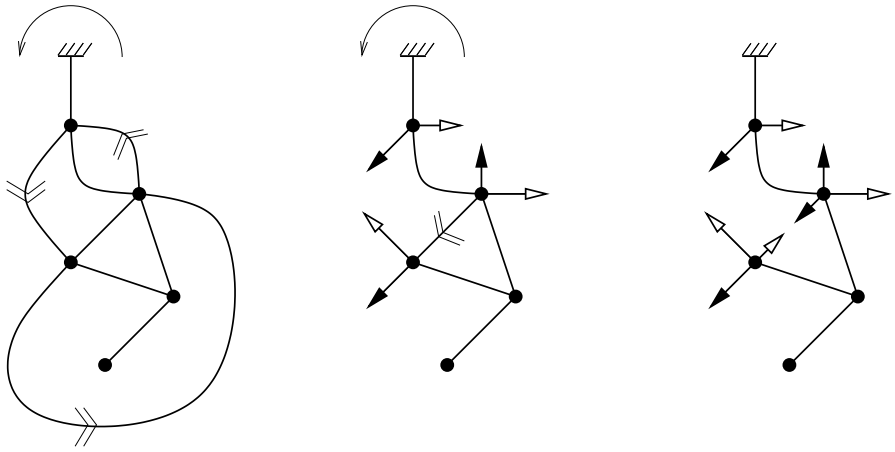


FIG. 2.8 – Découpage d'une carte à une patte en arbre bourgeonnant. Ici, deux tours de la face externe sont nécessaires.

par un algorithme appelé « parcours en largeur » (cf lemme 2.10 de [14]).

Considérons à présent l'arbre bourgeonnant obtenu après découpage : la carte à une patte initiale peut être reconstruite par une simple application du procédé de clôture partielle introduit à la section 2.1.2 : nous apparions récursivement chaque bourgeon à la première feuille disponible dans le sens direct autour de l'arbre, de telle sorte que nous pouvons tracer sans croisement les arêtes reliant les paires ainsi formées. On constate immédiatement sur la figure 2.9 que les appariements reconstituent précisément les arêtes coupées, duales aux arêtes des chemins minimaux à gauche. Ce fait peut être justifié plus précisément à l'aide de l'arbre couvrant : les bourgeons immédiatement suivis de feuilles correspondent aux arêtes « terminales » de l'arbre couvrant, la première étape de l'appariement revient alors à effacer ces arêtes, et nous itérons sur les arêtes terminales de l'arbre couvrant ainsi réduit. Nous reconstituons alors les arêtes coupées par fusion des paires bourgeon–feuille. Ici, il reste à la fin de la procédure une unique feuille non appariée, qui redonne la patte externe de la carte, et correspond à la racine de l'arbre. Nous voyons donc que l'arbre est *équilibré*, au même sens qu'à la section 2.1.2.

Ainsi, le découpage et la clôture constituent des bijections mutuellement inverses entre l'ensemble des cartes à une patte, et une famille d'arbres bourgeonnants équilibrés. Cependant, cette bijection est encore peu exploitable, car nous n'avons pas caractérisé cette famille autrement qu'en tant qu'ensemble image par le découpage. Nous verrons plus loin les contraintes très particulières sur ces arbres bourgeonnants, mais voyons à présent l'extension immédiate au cas des cartes à deux pattes.

Cas des cartes à deux pattes

Le traitement des cartes à deux pattes est presque en tout point analogue à celui des cartes à une patte. Les deux sommets marqués, tous deux adjacents à la face externe, sont également remplacés par des feuilles. La procédure de découpage nécessite cependant de partir de l'une des pattes, et nous choisissons de partir de la patte entrante. Nous obtenons après découpage un arbre bourgeonnant comportant deux feuilles de plus que de bourgeons. De même que précédemment, le nombre de sommets de chaque degré est conservé. Nous décidons par convention de placer la racine de l'arbre sur la feuille à la patte sortante, ce qui simplifiera la caractérisation de la section suivante. À nouveau, la procédure de découpage revient sur la carte duale à construire un

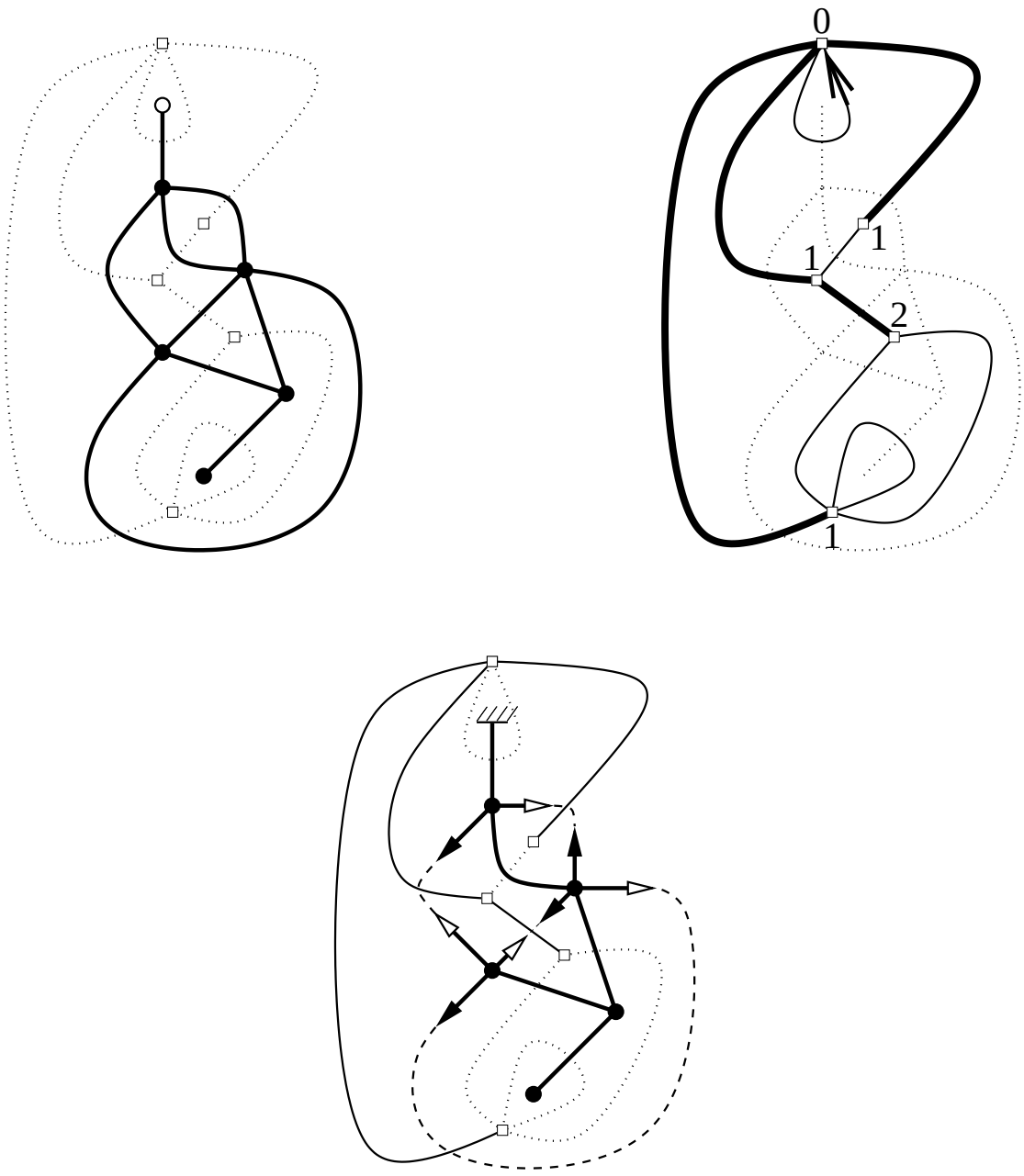


FIG. 2.9 – La procédure de découpage vue sur la carte duale. Cette procédure revient à sélectionner un arbre couvrant, qui est la réunion des chemins minimaux à gauche. Les entiers sur la figure en haut à droite désignent les distances à la face externe. On notera qu'il existe plusieurs chemins minimaux menant à la face à distance 2, et que nous sélectionnons le plus à gauche par rapport à la patte externe (flèche).

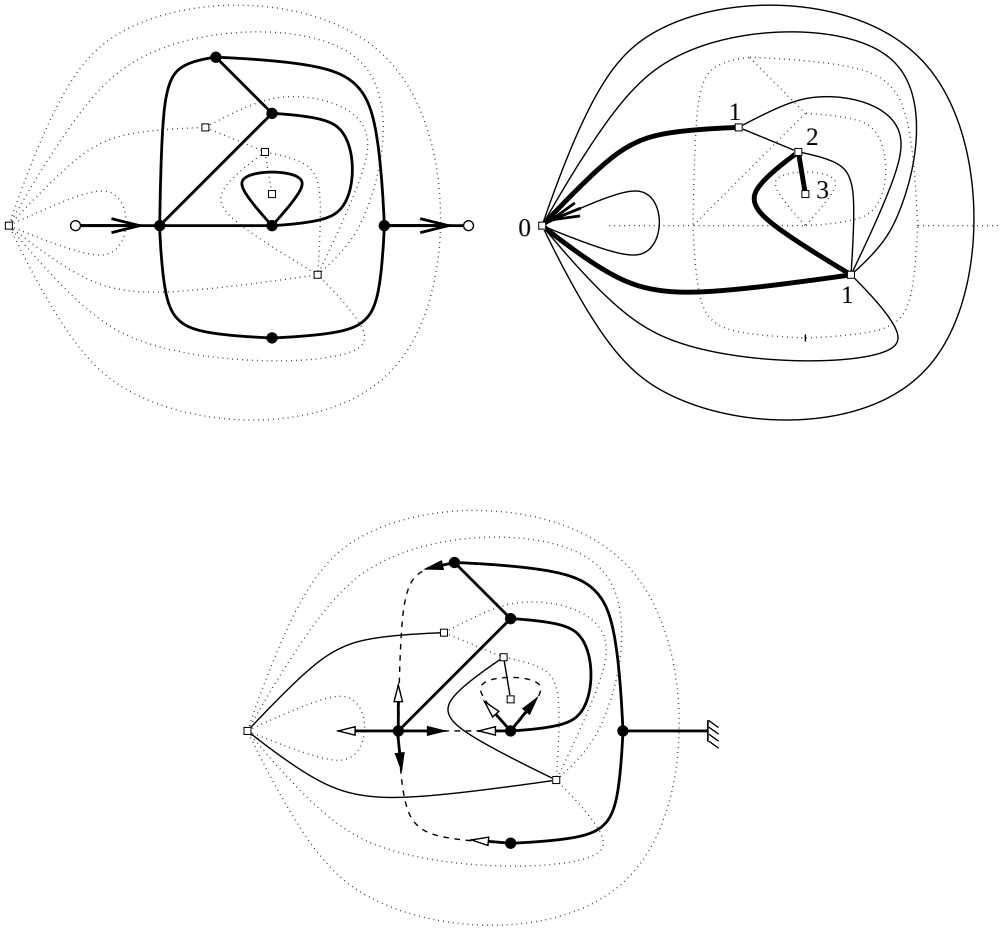


FIG. 2.10 – Le découpage d'une carte à deux pattes, à partir de l'arbre couvrant des chemins minimaux à gauche.

arbre couvrant par réunion des chemins minimaux à gauche (minimaux depuis la face externe, à gauche par rapport à la patte entrante). Ceci est illustré sur la figure 2.10.

Réciproquement, partant de l'arbre bourgeonnant obtenu par découpage, nous reconstruisons la carte initiale par appariement des feuilles et bourgeons, puis fusion des paires ainsi formées en arêtes, ce qui reconstitue précisément les arêtes coupées. Il reste à présent deux feuilles non appariées, dont la racine de l'arbre ; l'arbre est donc équilibré. Ces feuilles non appariées deviennent les pattes de la carte à deux pattes, et par la convention ci-dessus la racine indique la patte sortante.

Comme précédemment, découpage et clôture constituent une bijection entre l'ensemble des cartes à deux pattes et une famille d'arbres bourgeonnants équilibrés, qu'il convient de caractériser.

2.2.2 Arbres bien chargés : définition

Dans cette section, nous cherchons à caractériser les arbres bourgeonnants obtenus par le découpage des cartes à une patte et à deux pattes. Nous verrons que ces arbres satisfont des

contraintes très fortes, dites contraintes de charge. De façon générale, la *charge* est définie comme la différence algébrique entre le nombre de feuilles et le nombre de bourgeons. Ainsi les feuilles et les bourgeons sont des charges élémentaires de +1 et -1 respectivement. La notion de charge joue un rôle crucial dans l'étude des arbres bourgeonnants, nous verrons plus loin qu'elle apparaît tout au long des généralisations de la construction à des familles plus générales. Dans cette section, nous étudierons successivement les arbres associés aux cartes à une patte, puis ceux associés aux cartes à deux pattes.

Cartes à une patte et arbres de type $\mathcal{S}$

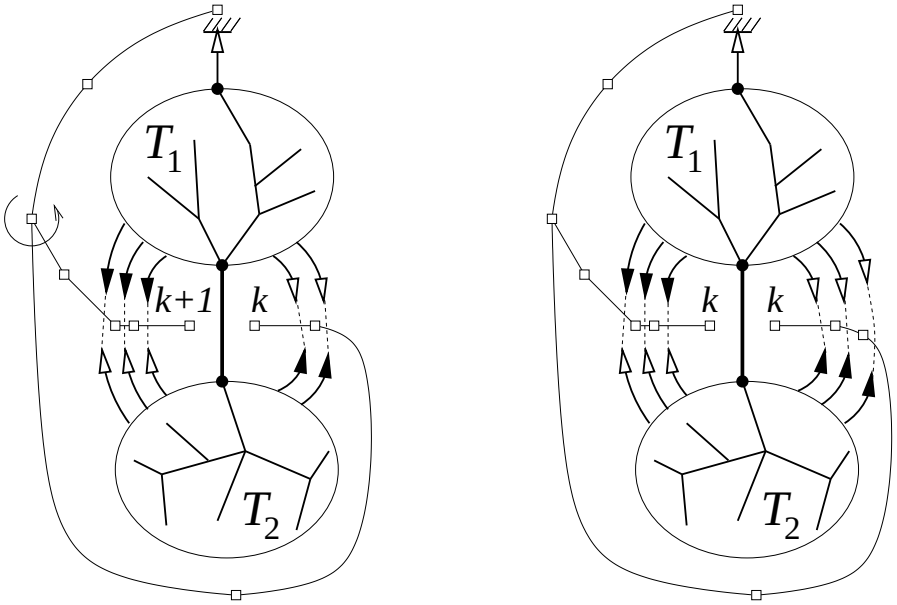


FIG. 2.11 – Les deux configurations possibles d'une arête non-coupée (en gras), séparant deux sous-arbres T_1 et T_2. Les chemins minimaux à gauche menant aux deux faces incidentes sont représentés, ainsi que les paires bourgeon-feuille correspondant aux deux chemins privés de leur partie commune. Seules ces paires et la racine contribuent à la charge de T_1 et T_2, les propriétés des chemins minimaux à gauche impliquant que les charges valent 0 ou 1.

Considérons une arête non-coupée dans le découpage d'une carte à une patte. Cette arête est incidente à deux faces : la caractérisation du découpage par les chemins minimaux à gauche impose des contraintes sur les distances de ces faces à la face externe, comme illustré sur la figure 2.11. En effet, la différence entre ces deux distances est au plus de un, puisque les faces sont adjacentes, et, lorsque la différence est de un, le chemin plus long doit être à gauche par rapport à la patte externe/racine (car ajouter la duale de l'arête considérée au chemin plus court définit un chemin minimal).

L'arête considérée sépare deux parties de l'arbre bourgeonnant, qui sont deux sous-arbres T_1 et T_2 (T_1 contenant la racine de l'arbre). La charge de T_1 et T_2 est entièrement fixée par la différence des distances : en effet les seuls appariements de bourgeons de T_1 aux feuilles de T_2 (ou vice-versa) correspondent aux arêtes des deux chemins minimaux au-delà de leur préfixe commun, tandis que les appariements internes à T_1 ou T_2 ont une contribution globalement nulle. En tenant compte des orientations des chemins minimaux, la charge de T_2 correspond à la

différence (positive) des distances, celle de T_1 à son opposé auquel nous devons ajouter la charge 1 de la racine. Nous obtenons finalement que la charge de T_1 peut prendre les valeurs 0 ou 1, celle de T_2 étant alors respectivement de 1 ou 0.

Les arêtes non-coupées correspondent aux arêtes *internes* de l'arbre, c'est-à-dire plus précisément une arête reliant deux sommets « ordinaires » (pouvant être un sommet de degré un, distinct d'une feuille ou d'un bourgeon). Nous voyons qu'un arbre bourgeonnant obtenu par découpage d'une carte à une patte a la propriété suivante : chaque arête interne sépare deux parties ayant l'une charge 0, l'autre charge 1. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des arbres bourgeonnants enracinés sur une feuille ayant cette propriété (nous parlerons couramment « d'arbres de type $\mathcal{S}$ »). Soit de plus $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des arbres de type $\mathcal{S}$ étant par ailleurs équilibrés au sens de la clôture (l'appariement des feuilles et bourgeons laisse la racine libre). Alors l'arbre obtenu par découpage d'une carte à une patte appartient à $\mathcal{S}_0$, et nous verrons plus loin que ceci établit une bijection entre les deux ensembles. Cependant, étudions à présent le cas des cartes à deux pattes pour aboutir à une forme commune.

Cartes à deux pattes et arbres de type $\mathcal{R}$

Le cas des cartes à deux pattes peut-être étudié très simplement à partir des cartes à une patte. Nous pouvons en effet considérer la patte sortante d'une carte à deux pattes comme un simple sommet de degré un. Dans ce cas, nous appliquons la procédure de découpage des cartes à une patte pour obtenir un arbre de type $\mathcal{S}$, où la feuille-racine correspond à la patte entrante. Ensuite, suivant la convention pour le découpage des cartes à deux pattes, nous réenracinons l'arbre sur le sommet de degré un correspondant à la patte sortante (qui est alors transformé en une feuille). Cette construction est complètement équivalente à celle vue à la section 2.2.1, puisque les pattes externes influent uniquement sur le choix des arêtes coupées via le point de départ de la procédure itérative, qui est dans les deux cas la patte entrante.

Du point de vue des charges, une différence est toutefois présente, selon que la patte externe sortante est considérée comme un sommet de degré un (de charge 0) ou une feuille (de charge 1). Considérons une arête interne de l'arbre, donc une arête non-coupée pendant le découpage. Celle-ci sépare l'arbre en deux sous-arbres T_1 et T_2, T_1 contenant la patte externe sortante. Alors, en utilisant la caractérisation des arbres associés aux cartes à une patte, nous voyons que T_2 a charge 0 ou 1 quelle que soit la charge de la patte externe. Par complémentarité, T_1 a respectivement pour charge 2 ou 1, lorsque nous respectons la convention de prendre la patte externe comme une feuille-racine de l'arbre. T_2, ne contenant pas la racine, est le *sous-arbre descendant* de l'arête interne considérée. Ainsi un arbre associé à une carte à deux pattes possède la propriété que tout sous-arbre descendant d'une arête interne a charge 0 ou 1. De plus, la charge totale est de 2, en comptant la charge de la feuille-racine. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des arbres bourgeonnants enracinés sur une feuille ayant ces deux propriétés (« arbres de type $\mathcal{R}$ »), $\mathcal{R}_0$ le sous-ensemble des arbres étant de plus équilibrés. Alors l'ensemble des cartes à deux pattes est envoyé par le découpage dans $\mathcal{R}_0$, et nous verrons plus loin qu'il s'agit d'une bijection. La caractérisation des arbres de type $\mathcal{R}$ semble a priori plus faible que celle des arbres de type $\mathcal{S}$, nous montrons à présent qu'il est possible de les reformuler sous une forme unifiée, correspondant à une définition récursive facilitant l'énumération.

2.2.3 Arbres bien chargés : énumération

Caractérisation récursive des arbres de types $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$

Les arbres de types $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ possèdent la propriété suivante : **tout sous-arbre descendant d'une arête interne a charge 0 ou 1** (rappelons qu'une arête interne relie par définition deux

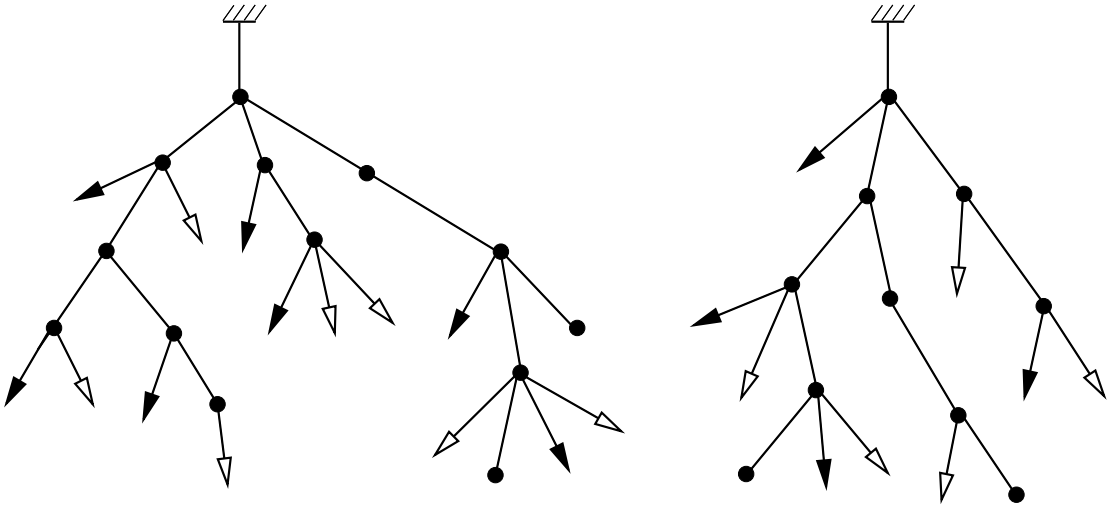


FIG. 2.12 – Exemples d'arbres bien chargés de type $\mathcal{S}$ (charge 0) et de type $\mathcal{R}$ (charge 1). Les charges sont portées par les feuilles ($\triangleright \to +1$) et les bourgeons ($\blacktriangleright \to -1$). En coupant n'importe quelle arête, on obtient un sous-arbre descendant ayant charge 0 ou 1, ou réduit à un bourgeon.

sommets n'étant ni des feuilles ni des bourgeons, mais pouvant être égaux à des sommets de degré un ordinaires). Un arbre bourgeonnant enraciné ayant cette propriété est dit *bien chargé*. Les arbres de types $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ sont des arbres bien chargés, enracinés sur une feuille, et possédant respectivement une charge de 0 ou 1, où par convention la *charge* d'un arbre enraciné est comptée en excluant la racine (lorsqu'on souhaitera inclure explicitement la charge de la racine, on parlera de *charge totale*). On vérifie aisément qu'il s'agit de définitions équivalentes des arbres de types $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$.

En considérant alors les sous-arbres descendants d'un arbre bien chargé comme des arbres enracinés à part entière, nous constatons que ceux-ci sont eux-mêmes bien chargés et de charge 0 ou 1, et sont ainsi identifiables à des arbres de types $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{R}$. Plus précisément, ceci n'est le cas que pour les sous-arbres descendant d'une arête interne, et nous devons aussi considérer les cas « triviaux » :

- f l'arbre réduit à une feuille reliée à la racine (qui est dans $\mathcal{R}_0$, correspondant à la carte à deux pattes réduite à une arête)
- b l'arbre réduit à un bourgeon relié à la racine (qui est le seul sous-arbre descendant possible de charge négative, et peut être considéré comme bien chargé)
- l'arbre entier, mais nous exclurons ce cas en considérant des sous-arbres descendants *propres*.

Nous pouvons alors écrire la caractérisation « récursive » suivante :

> Un arbre bourgeonnant enraciné est bien chargé si et seulement si tous ses sous-arbres descendants propres sont soit égaux à b (i.e. réduits à un bourgeon), soit de type $\mathcal{S}$, soit de type $\mathcal{R}$.
> Un arbre bourgeonnant enraciné est de type $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{R}$) si et seulement si il est bien chargé et de charge 0 (resp. 1).

Notons qu'il s'agit d'une définition possible des arbres bien chargés, car l'ensemble des arbres

bien chargés ayant un nombre d'arêtes donné peut être construit récursivement à partir des ceux correspondant à des nombres d'arêtes strictement inférieur. Introduisons la notation $\mathcal{B}$ pour l'ensemble des arbres bien chargés, et $\mathcal{B}^{(k)}$ pour l'ensemble des arbres bien chargés de charge k ($\mathcal{S} = \mathcal{B}^{(0)}$, $\mathcal{R} = \mathcal{B}^{(1)}$). Considérons alors un arbre bien chargé, distinct de f ou b. La racine est alors connectée à un sommet, soit n son degré. L'arbre possède alors $n-1$ sous-arbres descendants issus de ce sommet, pouvant être ordonnés par exemple de gauche à droite par rapport à la racine. Ces sous-arbres sont soit égaux à b, soit de type $\mathcal{S}$, soit de type $\mathcal{R}$. Réciproquement étant donné un $(n-1)$-uplet d'arbres de $\{b\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R}$, nous pouvons reconstruire par « recollement » un arbre bien chargé dont la racine est connecté à un sommet de degré n. Cette décomposition établit une bijection, que nous pouvons écrire formellement comme :

$$\mathcal{B} \cong \{f\} \cup \{b\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n\} \times (\{b\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R})^{n-1}. \tag{2.4}$$

V_n désigne un sommet de degré n isolé, de telle sorte que la bijection préserve le nombre total de sommets de chaque degré. Nous pouvons spécifier une charge 0 ou 1, pour obtenir les identités :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\cong \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n\} \times (\{b\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R})_{c=0}^{n-1} \\ \mathcal{R} &\cong \{f\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n\} \times (\{b\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R})_{c=1}^{n-1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

où la notation $(\{b\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R})_{c=k}^{n-1}$ désigne les $(n-1)$-uplets d'éléments de $\{b\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ dont la somme des charges vaut k.

Application au calcul de séries génératrices

Un intérêt des identités ensemblistes (2.4) et (2.5) est de pouvoir immédiatement se traduire dans le langage des séries génératrices. Attachons en effet un poids v_n à chaque sommet de degré n. Nous souhaitons de plus attacher un poids t à chaque arête dans le langage des cartes, ce qui, après découpage, peut s'exprimer dans le langage des arbres par un poids t par arête ne menant pas à un bourgeon. Soient B, S, R les séries génératrices respectivement de $\mathcal{B}, \mathcal{S}, \mathcal{R}$ avec de tels poids. L'identité (2.4) se réécrit alors :

$$B = t + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t v_n (1 + S + R)^{n-1}. \tag{2.6}$$

Les identités (2.5) nécessitent quand à elle de tenir compte de la charge. Ceci peut se faire en constatant que la série génératrice des $(n-1)$-uplets d'éléments de $\{b\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ dont la somme des charges vaut k peut est $[\sigma^{-k}]Q(\sigma)^{n-1}$, où $Q(\sigma) \equiv \sigma + S + \frac{R}{\sigma}$, et $[\sigma^i]$ désigne l'opérateur donnant le coefficient de σ^i dans une série de Laurent en σ. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} S &= t[\sigma^0] \sum_{n=1}^{\infty} v_n Q(\sigma)^{n-1} \\ R &= t + t[\sigma^{-1}] \sum_{n=1}^{\infty} v_n Q(\sigma)^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ces équations sont identiques aux équations (1.42) du chapitre 1, avec $V(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n$, et en notant que $[\sigma^i]$ équivaut formellement à une intégrale de contour. Elles déterminent de façon

unique une série formelle en t et les v_n, et trouvent ici une interprétation combinatoire. De façon générale, pour la série génératrice $B^{(k)}$ de $\mathcal{B}^{(k)}$, nous avons l'identité :

$$B^{(k)} = t\delta_{k,1} + \delta_{k,-1} + t[\sigma^{-k}] \sum_{n=1}^{\infty} v_n Q(\sigma)^{n-1}. \tag{2.8}$$

Ces équations seules ne permettent pas de calculer les séries génératrices des cartes à une patte ou à deux pattes, car elles comptent des arbres non nécessairement équilibrés. Nous pallierons ce problème dans la section suivante.

2.2.4 Arbres équilibrés, application au comptage

Nous avons jusqu'ici exploré les conséquences des contraintes de charges, et leurs conséquences pour l'énumération des arbres bien chargés. Nous revenons à présent sur leur relation avec les cartes, afin d'en déduire des expressions pour les séries génératrices de celles-ci. Ceci nécessite une étude de la notion d'arbre équilibré.

Cartes à une patte et arbres de type $\mathcal{S}$ équilibrés

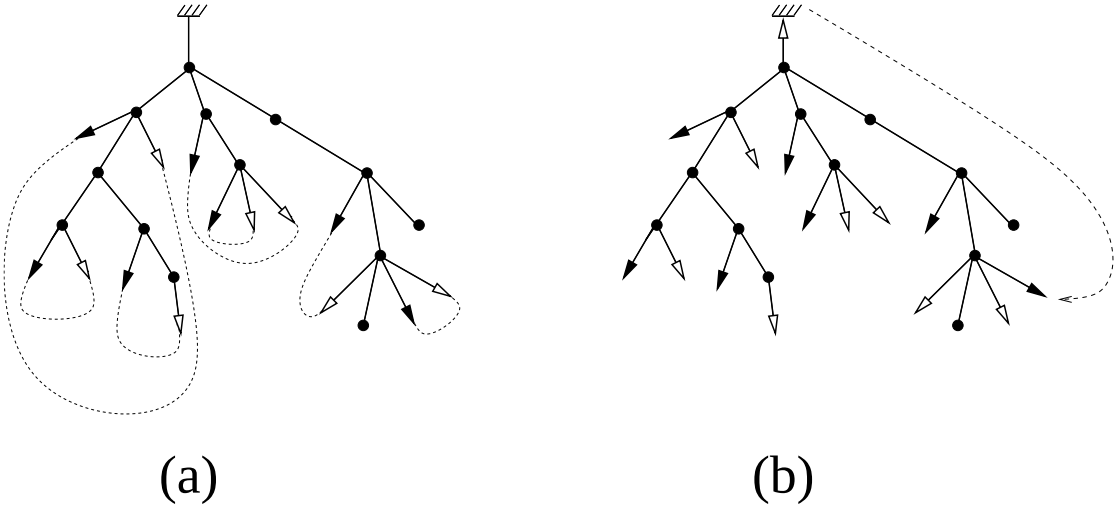


FIG. 2.13 – Deux arbres de type $\mathcal{S}$: (a) le premier est équilibré et en correspondance biunivoque avec une carte à une patte par clôture ; (b) le second est non-équilibré et en correspondance biunivoque avec un arbre bien chargé de charge 2 par réenracinement sur le bourgeon apparié à la racine.

Nous avons vu plus haut que le découpage d'une carte à une patte lui associe un arbre de type $\mathcal{S}$, étant de plus équilibré, c'est-à-dire que l'appariement des bourgeons et des feuilles laisse la feuille-racine non appariée (cf figure 2.13-a). $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des arbres de type $\mathcal{S}$ équilibrés.

Considérons un arbre de type $\mathcal{S}$ non équilibré (cf figure 2.13-b) : sa racine est alors appariée à un bourgeon. Si nous réenracinons l'arbre sur ce bourgeon, nous obtenons un arbre bourgeonnant de charge 2 (la charge totale reste de 1), et nous observons que celui-ci est bien chargé, car tout sous-arbre descendant est un sous-arbre (non nécessairement descendant) de l'arbre de type $\mathcal{S}$ initial, donc soit réduit à un bourgeon, soit égal à un arbre de charge 0, soit enfin égal à un

arbre de charge 1, en vertu de la première définition des arbres de type $\mathcal{S}$. Réciproquement étant donné un arbre bien chargé, enraciné sur un bourgeon, et de charge 2, nous obtenons un arbre de type $\mathcal{S}$ par réenracinement sur la feuille appariée à la racine. Ceci établit donc une bijection entre $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0$ et $\mathcal{B}^{(2)}$, préservant les degrés des sommets. Ceci aboutit à l'expression de la série génératrice de $\mathcal{S}_0$, employant les conventions et notations de la section précédente :

$$S_0 = S - [\sigma^{-2}] \sum_{n=1}^{\infty} v_n Q(\sigma)^{n-1} \tag{2.9}$$

(un facteur t diffère par rapport à l'expression de $B^{(2)}$, car ici la racine est un bourgeon).

Il s'avère que S_0 correspond à la série génératrice des cartes à une patte, comptées avec poids v_n par sommet de degré n et poids t par arête. Ce fait peut être vérifié à l'aide du modèle à une matrice, par une simple extension du calcul du chapitre 1[4]. Ici, il s'agit d'une manifestation d'une bijection entre l'ensemble des cartes à une patte et $\mathcal{S}_0$, que nous avions évoquée précédemment. Voyons comment achever de prouver l'existence de cette bijection : nous avons montré que par le découpage associe à toute carte à une patte un arbre de type $\mathcal{S}$ équilibré, et que la clôture de celui-ci redonne la carte initiale. Il reste à vérifier qu'étant donné un arbre de type $\mathcal{S}$ équilibré, sa clôture donne une carte à une patte – ce qui est évident – dont le découpage redonne l'arbre initial, ce qui nécessite quelque justification.

Considérons donc un arbre de type $\mathcal{S}$ équilibré, auquel nous associons une carte à une patte par clôture. Le découpage de cette carte redonne bien l'arbre initial si la propriété suivante est vérifiée : **les appariements de bourgeons et feuilles constituent les arêtes duales des chemins minimaux à gauche dans la carte à une patte** (les bourgeons étant à gauche par rapport à l'orientation des chemins minimaux). Considérons une face f de la carte à une patte, nous pouvons alors définir deux chemins sur la carte duale menant au sommet dual à f :

- le chemin minimal à gauche $M(f)$, dont la longueur est la distance $d(f)$ depuis (le dual de) la face externe,
- le chemin $P(f)$ constitué des arêtes duales aux paires bourgeons-feuilles emboîtés séparant f de la face externe. $P(f)$ est orienté avec les bourgeons à sa gauche, et la longueur $p(f)$ de ce chemin est appelée *profondeur* (cette notion dépendant explicitement de l'arbre considéré).

Il convient de montrer que, pour toute face f, les deux chemins $M(f)$ et $P(f)$ sont identiques, et en particulier que $d(f) = p(f)$ (de façon immédiate, $d(f) \leq p(f)$).

Supposons, pour une preuve par l'absurde que non. Soit X l'ensemble des faces f telles que $M(f) \neq P(f)$, par hypothèse $X \neq \emptyset$. Considérons alors une face f dans X telle que $d \equiv d(f)$ soit minimal (i.e, pour tout f' dans X, $d(f') \geq d$). Le chemin minimal à gauche $M \equiv M(f)$ vérifie les propriétés suivantes :

- d est strictement positif car la face externe n'est pas dans X
- les $d-1$ premières arêtes de M sont chacune duale à une paire bourgeon-feuille, car elles forment un chemin minimal à gauche menant à une face f' à distance $d-1$ de la face externe, n'appartenant donc pas à X,
- la d-ième arête n'est donc pas duale à une paire bourgeon-feuille, et est ainsi duale à une arête interne de l'arbre.

Cette arête sépare deux sous-arbres T_1 et T_2, où nous supposons T_1 à gauche par rapport à l'orientation $f' \to f$. Nous devons distinguer plusieurs cas, illustrés sur la figure 2.14 :

1. T_1 a charge 0 et contient la feuille-racine,
2. T_1 a charge 0 et ne contient pas la feuille-racine,
3. T_1 a charge 1 et contient la feuille-racine,

[4] La série génératrice des cartes à une patte n'est autre que $\frac{\partial F^{(0)}}{\partial v_1}$ exprimable selon l'équation (1.37).

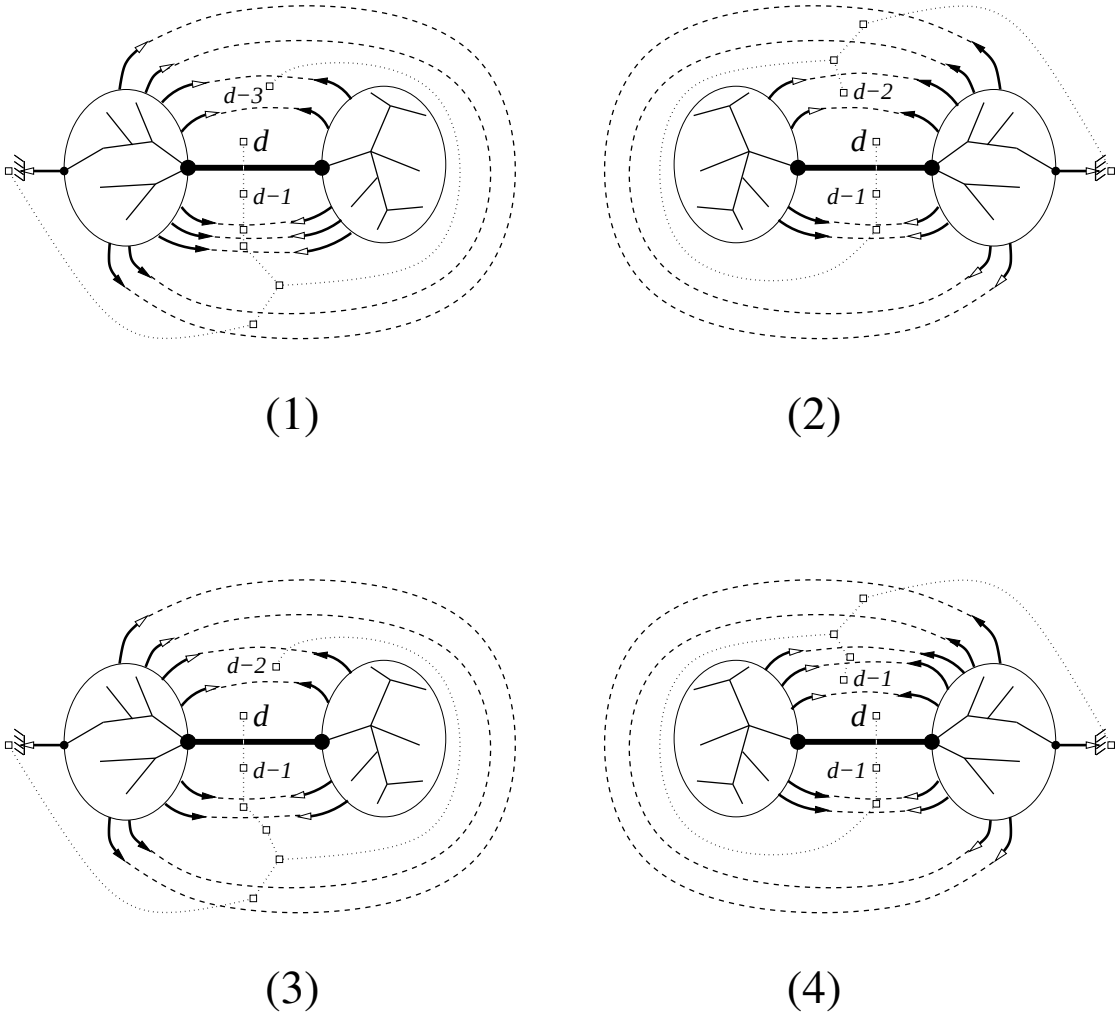


FIG. 2.14 – Schéma de la preuve par l'absurde que les paires bourgeon-feuille constituent sont duales aux arêtes des chemins minimaux à gauche (voir texte). Nous considérons une face telle que le chemin minimal à gauche M menant à son dual coupe une arête interne de l'arbre, et nous supposons la longueur d de ce chemin minimale : nécessairement, la d-ième arête du chemin est duale à une arête interne (en gras) , tandis que les précédentes sont duales à des paires bourgeon-feuille (en pointillés). L'arête interne sépare deux sous-arbres : selon leur charge (0 ou 1) et la position de la racine, nous distinguons les cas 1,2,3,4. Dans tous les cas, nous en déduisons une contradiction par l'existence d'un chemin menant à la face étiquetée d, plus court ou plus à gauche que M.

4. T_1 a charge 1 et ne contient pas la feuille-racine.

Ces propriétés de charge se traduisent par des relations sur les profondeurs $p(f)$ et $p(f')$, et les positions relatives des chemins $P(f)$ et $P(f')$. Dans tous les cas ci-dessus, nous obtenons une contradiction :

1. $p(f) = p(f') - 1$, donc $d(f) \leq p(f) = p(f') - 1 = d(f') - 1 = d(f) - 2$,
2. $p(f) = p(f')$, donc $d(f) \leq p(f) = p(f') = d(f') = d(f) - 1$,
3. $p(f) = p(f')$, donc $d(f) \leq p(f) = p(f') = d(f') = d(f) - 1$,
4. $p(f) = p(f') + 1$, donc $d(f) \leq p(f) = p(f') + 1 = d(f') + 1 = d(f)$, et $P(f)$ est de même longueur et à gauche de M.

Ceci impose $X = \emptyset$, et achève de prouver que les opérations de découpage et de clôture sont des bijections mutuellement inverses entre l'ensemble des cartes à une patte, et $\mathcal{S}_0$.

Cartes à deux pattes et arbres de type $\mathcal{R}$ équilibrés

La discussion pour les cartes à deux pattes est très similaire à la précédente. Nous avons vu en effet que, par découpage, une carte à deux pattes donne un arbre de type $\mathcal{R}$ équilibré. Par une simple extension de la preuve ci-dessus, nous pouvons montrer qu'il s'agit d'une bijection. Cependant, une difficulté nouvelle se pose pour exprimer la série génératrice des arbres de type $\mathcal{R}$ équilibrés en terme de celles d'arbres bien chargés sans contrainte d'équilibrage : en effet, pour un arbre de type $\mathcal{R}$ non-équilibré, le réenracinement sur le bourgeon apparié à la racine ne donne pas nécessairement un arbre bien chargé. Il est possible de pallier cette difficulté par une étude plus précise de la structure d'un arbre de type $\mathcal{R}$, et l'introduction de la notion de *coeur*. Nous ne présenterons pas ici de le détail de cette discussion technique, qui peut être trouvée dans la publication III. Le résultat est l'existence d'une bijection entre $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$ et $\mathcal{B}^{(3)} \cup (\mathcal{B}^{(2)})^2$, qui se traduit dans le langage des séries génératrices par :

$$R_0 = R - [\sigma^{-3}] \sum_{n=1}^{\infty} v_n Q(\sigma)^{n-1} - \left([\sigma^{-2}] \sum_{n=1}^{\infty} v_n Q(\sigma)^{n-1} \right)^2 . \tag{2.10}$$

La série génératrice des cartes enracinées

Nous pouvons enfin réunir les résultats précédents, afin d'obtenir de façon bijective la série génératrice des cartes enracinées en fonction des degrés des sommets. L'ensemble est récapitulé dans le résultat suivant, dont on notera l'accord avec la solution du modèle à une matrice :

Soient respectivement $\mathcal{E}, \Gamma_1, \Gamma_2$ l'ensemble des cartes planaires enracinées, l'ensemble des cartes à une patte, l'ensemble des cartes à deux pattes. Soit m la carte à deux pattes réduite à une arête.
$\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{R}$) est l'ensemble des arbres bourgeonnants bien chargés de charge 0 (resp. 1), et $\mathcal{S}_0$ (resp. $\mathcal{R}_0$) le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{R}$) constitué des arbres équilibrés. $\mathcal{B}^{(k)}$ est généralement l'ensemble des arbres bourgeonnants bien chargés de charge k.

Nous avons les bijections suivantes, préservant le nombre de sommets de chaque degré (en excluant pattes, feuilles, bourgeons) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\cong \Gamma_1^2 \cup \Gamma_2 \setminus \{m\} \qquad & \Gamma_1 &\cong \mathcal{S}_0 \qquad & \Gamma_2 &\cong \mathcal{R}_0 \\ \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 &\cong \mathcal{B}^{(2)} \qquad & \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0 &\cong \mathcal{B}^{(3)} \cup (\mathcal{B}^{(2)})^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pour les séries génératrices associées, avec un poids v_n par sommet de degré n et un poids t par arête (ne menant pas à un bourgeon), nous avons les identités :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2 - t}{t} \\ \Gamma_1 &= S_0 = S - [\sigma^{-2}]v(Q) \\ \Gamma_2 &= R_0 = R - [\sigma^{-3}]v(Q) - \left([\sigma^{-2}]v(Q)\right)^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

où S, R sont déterminés récursivement par :

$$\begin{aligned} S &= t[\sigma^0]v(Q) \\ R &= t + t[\sigma^{-1}]v(Q) \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec les notations $Q \equiv \sigma + S + \frac{R}{\sigma}$, $v(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^{n-1}$, $[\sigma^i]\sigma^j \equiv \delta_{ij}$.

Nous retrouvons les mêmes résultats qu'à la section 1.1.2, et en particulier les équations (1.41) et (1.42). Nous avons ici une interprétation combinatoire claire des équations algébriques intervenant dans la solution.

2.2.5 Le cas particulier des degrés pairs

Nous concluons cette section consacrée à l'étude des arbres bourgeonnants associés aux cartes planaires arbitraires par une discussion du cas particulier des cartes eulériennes, c'est-à-dire dont les sommets ont tous un degré pair. La bijection entre cartes tétravalentes et arbres bourgeonnants quartiques en est une spécialisation supplémentaire.

Du point de vue des cartes, la contrainte de parité des degrés apporte la simplification supplémentaire : il n'existe pas de carte à une patte dont tous les degrés des sommets internes sont pairs, comme vu par un simple argument de comptage. Les cartes enracinées sont donc en bijection avec les cartes à deux pattes, en excluant la carte à deux pattes triviale à une arête.

Du point de vue des arbres, nous notons l'absence d'arbres de type $\mathcal{S}$: en effet pour un arbre bourgeonnant dont tous les sommets ont un degré pair, la somme des nombres de feuilles et de bourgeons, racine exclue, est impaire, ce qui implique que leur différence, égale à la charge, est également impaire. Plus généralement, il n'existe pas d'arbre bien chargé dont la charge est impaire. Les arbres de type $\mathcal{R}$, quant à eux, peuvent être caractérisés plus simplement : de chaque sommet de degré $2n$ partent $2n-1$ sous-arbres descendants, soit réduits à un bourgeon (charge -1), soit de type $\mathcal{R}$ (charge +1), et la somme des charges doit être 1. Il y a donc exactement $n-1$ bourgeons et n sous-arbres de type $\mathcal{R}$. Ceci est une condition suffisante, et un arbre bourgeonnant dont tous les sommets ont degré pair est de type $\mathcal{R}$ si et seulement si :

- il n'est pas réduit à un bourgeon,
- chaque sommet de degré $2n$ est attaché à exactement $n-1$ bourgeons.

Ceci correspond à la définition des *arbres eulériens* donnée par Schaeffer [58].

Du point de vue des séries génératrices, il suffit d'imposer $v_{2n+1} = 0$ pour tout n, et R est déterminé récursivement par l'équation :

$$R = t + t \sum_{n=1}^{\infty} v_{2n} \binom{2n-1}{n-1} R^n, \tag{2.14}$$

le facteur $\binom{2n-1}{n-1}$ s'interprétant comme le nombre de positionnements possibles des $n-1$ bourgeons autour du sommet de degré $2n$ relié à la racine. Par la formule d'inversion de Lagrange[5], ou un raisonnement combinatoire, il est possible de calculer explicitement le terme général du développement en série. Celui-ci correspond au nombre d'arbres de type $\mathcal{R}$ ayant, pour tout $n \geq 1$, k_n sommets de degré $2n$, égal à :

$$\frac{1}{\ell}\binom{\ell-1+k_1+k_2+\ldots+k_n+\ldots}{\ell-1,k_1,k_2,\ldots,k_n,\ldots}\prod_{n=1}^{\infty}\binom{2n-1}{n-1}^{k_n} \tag{2.15}$$

où $\ell \equiv \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)k_n$ est le nombre de feuilles, le coefficient multinomial pouvant être tronqué au degré maximal. De même, pour de mêmes nombres de sommets de chaque degré, nous pouvons calculer le nombre d'arbres de type $\mathcal{R}$ équilibrés, égal au nombre de cartes enracinées :

$$\frac{2}{\ell(\ell+1)}\binom{\ell-1+k_1+k_2+\ldots+k_n+\ldots}{\ell-1,k_1,k_2,\ldots,k_n,\ldots}\prod_{n=1}^{\infty}\binom{2n-1}{n-1}^{k_n}. \tag{2.16}$$

Ces expressions diffèrent uniquement d'un facteur $2/(\ell+1)$, ce fait remarquable pouvant être justifié par un argument de conjugaison étendant celui présenté à la section 2.1 pour le comptage des arbres bourgeonnants quartiques.

Nous concluons en indiquant qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de formule fermée analogue étendant la formule (2.16) pour le nombre de cartes planaires enracinées ayant un nombre fixé de sommets de chaque degré (non nécessairement pair).

2.3 Cartes biparties, arbres bicolores et applications

Dans cette section, nous mentionnons comment la correspondance entre cartes planaires et arbres bourgeonnants peut être adaptée aux cartes biparties, c'est-à-dire dont les sommets sont coloriés en noir ou blanc, de telle sorte que chaque arête est incidente à un sommet de chaque couleur. L'objectif est d'énumérer bijectivement les cartes biparties en fonction des nombres de sommet de chaque degré et couleur (« selon les degrés et couleurs des sommets »). Ceci est équivalent au calcul de la série génératrice des cartes biparties avec un poids par sommet fonction du degré et de la couleur, qui peut être obtenue par ailleurs via un modèle à deux matrices soluble par polynômes bi-orthogonaux. Bien que le caractère biparti semble induire une contrainte supplémentaire sur les cartes, il s'agit d'une généralisation du problème de l'énumération des cartes planaires arbitraires selon les degrés des sommets, car il existe une bijection évidente entre celles-ci et les cartes biparties dont tous les sommets d'une couleur, par exemple noire, sont de degré 2.

Bien que la procédure de découpage vue à la section précédente puisse s'appliquer indépendamment des couleurs des sommets, cette construction est peu exploitable : en effet une arête peut être coupée en une paire bourgeon-feuille à des positions quasi-arbitraires dans l'arbre, induisant des contraintes de nature non-locale. Nous verrons que la procédure de découpage doit être modifiée, pour introduire une dépendance en la couleur qui assurera la « localité » des règles dans l'arbre bourgeonnant.

Nous commençons par présenter quelques aspects de la construction la plus générale, proposée par Bousquet-Mélou et Schaeffer [21] qui étendent la notion d'arbre bourgeonnant bien chargé vue à la section précédente, et introduite dans la publication III. Nous considérerons ensuite

[5] Nous verrons une application explicite de cette formule au cas plus général des constellations dans le chapitre 3.

deux cas particuliers, qui correspondent à des publications propres indépendantes : les cartes bicubiques duales aux triangulations tricoloriables, pour l'article II, et les particules dures sur cartes tétravalentes, pour l'article IV. Notre but est ici de présenter ces résultats dans un cadre relativement unifié.

2.3.1 Des cartes biparties aux arbres bicolores bien chargés

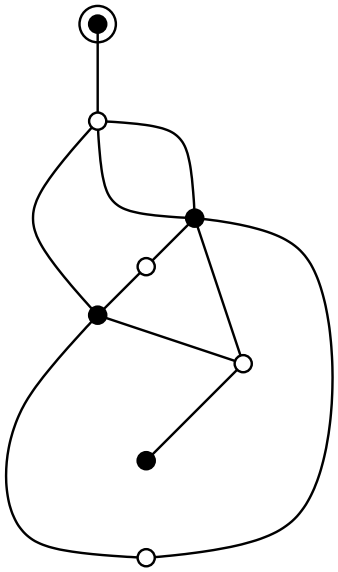


FIG. 2.15 – Une carte bipartie à une patte. Le sommet externe (entouré) est supposé noir.

Dans cette section, nous montrons comment associer à toute carte bipartie un arbre bourgeonnant. Comme mentionné plus haut, la procédure de découpage de la section 2.2 doit être modifiée puisque la contrainte de coloriage deviendrait alors non-locale sur l'arbre. La solution à ce problème paraît simple : il suffit d'adapter le découpage pour aboutir à des arbres bourgeonnants dont les sommets sont coloriés en noir et blanc en alternant le long des arêtes internes, et tels qu'un bourgeon est toujours relié à un sommet noir, et une feuille toujours reliée à un sommet blanc. Un arbre bourgeonnant ayant ces propriétés est dit *arbre bicolore*[6]. Ainsi, par la procédure inverse de clôture, un sommet noir est toujours relié à un sommet blanc, et la carte résultante est bien bipartie.

Nous traiterons ici principalement du cas des cartes à une patte, c'est-à-dire avec un sommet de degré un marqué. Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer que ce sommet est noir (figure 2.15).

Découpage des cartes biparties à une patte

Le découpage itératif introduit à la section 2.1.3 peut être adapté de la façon suivante. Partant d'une carte bipartie à une patte, on commence par remplacer le sommet noir de degré un marqué par une feuille-racine. Nous effectuons alors un ou plusieurs tours successifs de la face externe

[6]Dans nos conventions graphiques représentant les feuilles comme des flèches blanches, et les bourgeons comme des flèches noires, il convient de considérer les flèches comme des « excroissances » des noeuds adjacents pour apprécier pleinement la dénomination d'arbre bicolore.

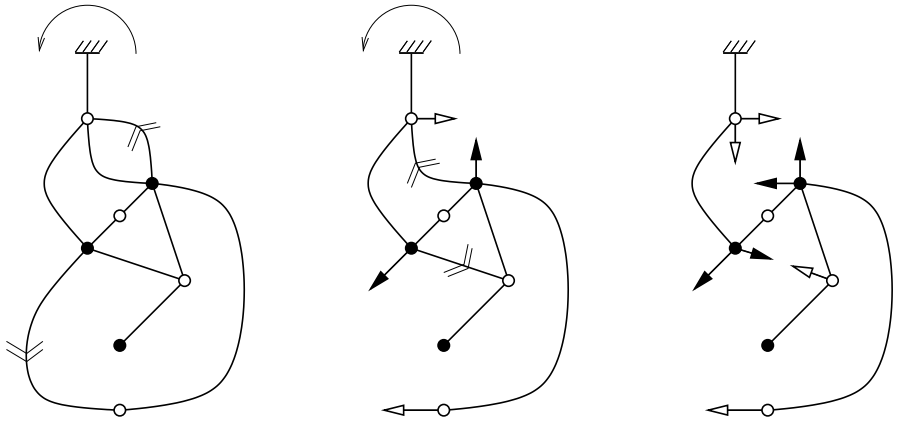


FIG. 2.16 – Le découpage itératif d'une carte bipartie à une patte. En tournant autour de la face externe, nous ne coupons une arête non-séparante que si elle est orientée dans le sens noir → blanc. Ici, deux tours sont nécessaires pour réunir toutes les faces.

dans le sens direct, en partant de la racine : nous coupons alors certaines arêtes rencontrées en une paire bourgeon-feuille, avec les règles suivantes : une arête est coupée si et seulement si elle possède simultanément les propriétés suivants :

– elle est non-séparante,
– dans le sens de parcours, son origine est noire et son extrémité blanche.

Cette dernière contrainte est la seule différence par rapport au cas des cartes arbitraires, et assure qu'un bourgeon sera toujours relié à un sommet noir, et une feuille à un sommet blanc. On voit facilement que la procédure s'arrête lorsque toutes les faces sont réunies, puisque par la contrainte de bicoloriabilité, il existe toujours une arête susceptible d'être coupée tant qu'il reste au moins une face interne. L'objet final est un arbre bicolore, et la procédure est illustrée sur la figure 2.16. Les degrés et couleurs de chaque sommet sont préservés, et la carte à une patte peut être reconstruite par clôture de l'arbre bourgeonnant, les appariements de feuilles et bourgeons reconstituant les arêtes coupées en laissant la racine libre.

À nouveau, il est utile de considérer l'effet du découpage sur la carte duale (cf figure 2.17). Les arêtes de la carte duale d'une carte bipartie peuvent être canoniquement orientées en imposant que leur face à gauche est duale à un sommet noir. Nous aboutissons à la caractérisation suivante du découpage : les duales des arêtes coupées forment un arbre couvrant, constitué par les *chemins orientés minimaux à gauche*. Un chemin orienté est un chemin sur la carte duale respectant l'orientation des arêtes. Nous considérons toujours des chemins partant du dual de la face externe, et pour une face donnée, nous sélectionnons le chemin orienté de longueur minimale, le plus à gauche par rapport à la patte externe.

Cette caractérisation nous permet alors d'étudier les propriétés de charge des arbres obtenus.

Propriétés des arbres résultants

La caractérisation du découpage par les chemins orientés minimaux à gauche peut se traduire aisément en terme de contraintes de charges dans l'arbre bourgeonnant obtenu. Étant donnés une carte bipartie à une patte, et l'arbre bicolore associé par découpage, considérons une arête interne de l'arbre séparant deux sous-arbres T_1 et T_2, T_1 contenant la feuille-racine, comme illustré sur la figure 2.18. Nous distinguons deux cas selon les configurations des couleurs autour de l'arête choisie : dans le premier cas illustré, T_1 est appelé le *sous-arbre noir* et T_2 le *sous-arbre blanc*,

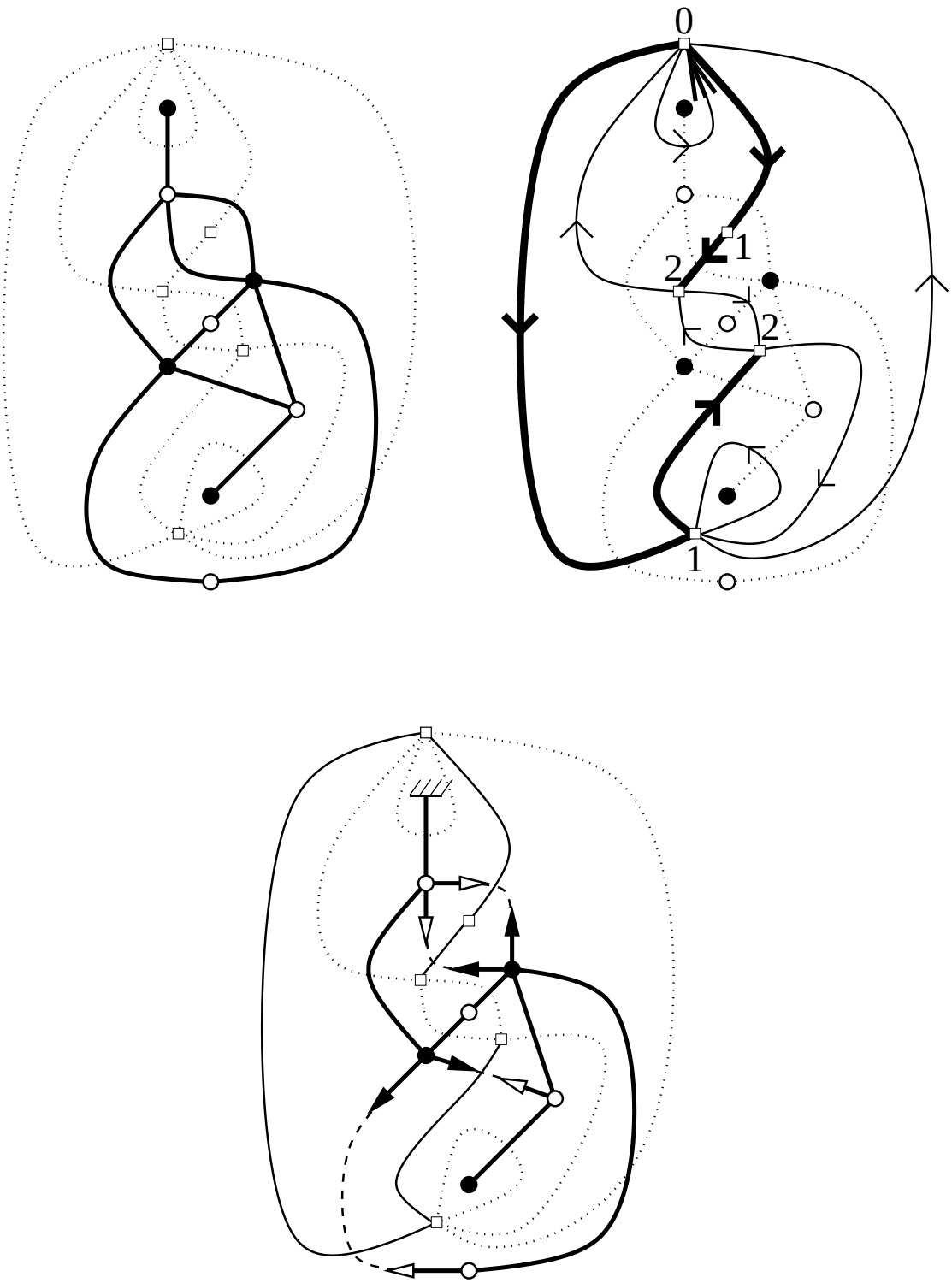


FIG. 2.17 – La procédure de découpage vue sur la carte duale. Nous sélectionnons un arbre couvrant, comme la réunion des chemins orientés minimaux à gauche. Sur la figure du milieu, nous indiquons les orientations canoniques des arêtes duales, obtenues en imposant que la face à gauche est duale à un sommet noir. Les entiers désignent les distances orientées depuis la face externe.

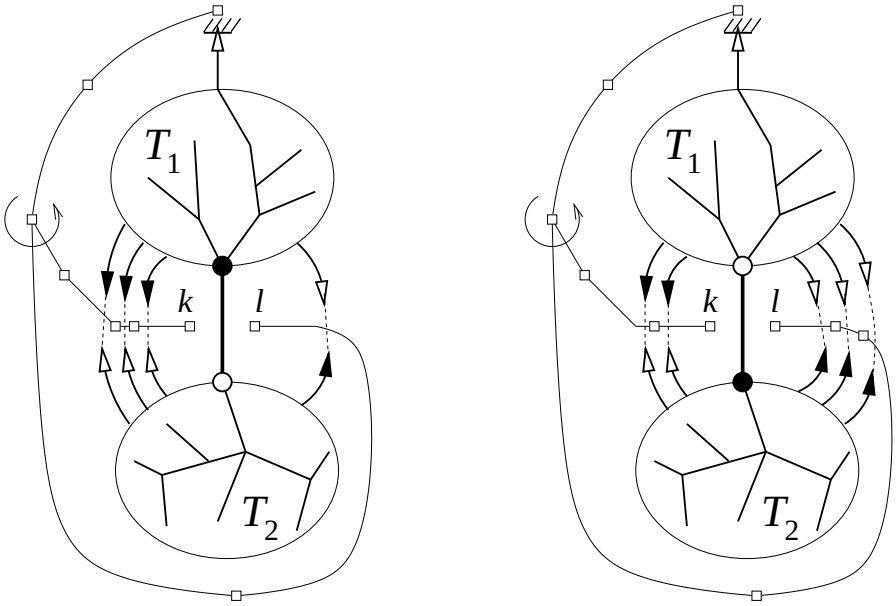


FIG. 2.18 – Les contraintes de charge autour d'une arête interne de l'arbre obtenu par découpage d'une carte bipartie à une patte. Les sous-arbres T_1 et T_2 sont dits noir ou blanc selon la couleur de leur sommet incident à l'arête. Les chemins orientés minimaux à gauche menant aux faces incidentes sont représentés, avec leurs longueurs respectives k et l. Les paires bourgeons-feuilles représentées correspondent aux parties non-communes aux deux chemins, et sont les seules à contribuer aux charges de T_1 (de charge $1 + l - k$) et T_2 (de charge $k - l$). L'arête considérée n'appartenant pas à un chemin orienté minimal à gauche, nous avons respectivement $k \geq l$ sur la première figure, et $k \leq l + 1$ sur la seconde figure. Nous constatons que dans les deux cas, la charge du sous-arbre noir est ≤ 1 tandis que la charge du sous-arbre blanc est ≥ 0.

et inversement dans le second cas. Par ailleurs, l'arête considérée est incidente à deux faces de la carte, et nous introduisons les longueurs respectives k et l des chemins orientés minimaux à gauche y menant, selon la convention de la figure 2.18. Ces longueurs sont liées aux charges des sous-arbres (la charge étant toujours définie comme différence des nombres de feuilles et de bourgeons) : T_1 a pour charge $1 + l - k$ en comptant la racine, et T_2 a pour charge $k - l$, la charge totale valant bien 1. Nous exploitons alors le fait que l'arête considérée, interne à l'arbre, n'appartient pas à un chemin orienté minimal à gauche : nous obtenons selon le cas illustré la contrainte respective $k \geq l$, ou $k \leq l + 1$ [7]. Un arbre bourgeonnant obtenu par découpage d'une carte bipartie possède ainsi les propriétés de charge suivantes :

- tout sous-arbre blanc a une charge positive ou nulle,
- tout sous-arbre noir a une charge inférieure ou égale à 1.

Il est de plus équilibré au sens de la clôture. On peut montrer que l'ensemble des arbres bourgeonnants bicolores vérifiant ces propriétés est précisément l'image de l'ensemble des cartes biparties à une patte par l'application injective de découpage, et que la clôture constitue la bijection inverse.

[7] Dans le cas contraire, nous obtiendrions sur la première figure un chemin orienté strictement plus court, ou de même longueur et plus à gauche, menant à la face « l » en traversant l'arête interne, et sur la seconde figure un chemin orienté strictement plus court menant à la face « k ».

Arbres bicolores bien chargés

Comme pour le cas des cartes arbitraires, il est utile de mettre un temps la contrainte d'équilibre de côté, et considérer la famille des arbres définis uniquement par les contraintes de charges. Nous considérons ici des arbres bicolores enracinés, un tel arbre étant dit blanc ou noir selon la couleur du sommet relié à la racine (mais les autres sommets sont bien bicoloriés !). À nouveau, la charge de l'arbre est par convention comptée en excluant la racine, la charge totale en l'incluant. Nous introduisons alors la définition suivante :

Un arbre bicolore enraciné est dit bien chargé si et seulement si tous ses sous-arbres descendants propres sont de l'un des types suivants :
- f l'arbre réduit à une feuille reliée à la racine,
- b l'arbre réduit à un bourgeon relié à la racine,
- un sous-arbre blanc et de charge positive ou nulle,
- un sous-arbre noir et de charge inférieure ou égale à 1.

b et f sont considérés comme des arbres bien chargés, de telle sorte que tout sous-arbre d'un arbre bien chargé est lui-même bien chargé. Nous introduisons les notations suivantes :
- $\mathcal{B}_\circ^{(k)}$ est l'ensemble des arbres blancs bien chargés de charge k,
- $\mathcal{B}_\bullet^{(k)}$ est l'ensemble des arbres noirs bien chargés de charge k.

Par décomposition d'un arbre noir ou blanc bien chargé autour du sommet lié à la racine, nous obtenons les bijections suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\circ^{(k)} &\cong \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n^\circ\} \times \left(\{f\} \cup \bigcup_{k'\leq 1} \mathcal{B}_\bullet^{(k')} \right)_{c=k}^{n-1} \\ \mathcal{B}_\bullet^{(k)} &\cong \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n^\bullet\} \times \left(\{b\} \cup \bigcup_{k'\geq 0} \mathcal{B}_\circ^{(k')} \right)_{c=k}^{n-1}\end{aligned} \tag{2.17}$$

La notation $X_{c=k}^{n-1}$ désigne l'ensemble des $(n-1)$-uplets d'éléments de l'ensemble d'arbres bourgeonnants X, dont la somme des charges vaut k. $\{V_n^\circ\}$ et $\{V_n^\bullet\}$ désignent respectivement un sommet noir ou blanc de degré n isolé, de telle façon que le nombre total de sommets de degré et couleur donnés est conservé. En introduisant un poids v_n° (resp. $v_n^\bullet$) par sommet blanc (resp. noir) de degré n, et un poids supplémentaire t par arête ne menant pas à un bourgeon (ce qui correspond à un poids par arête dans le langage des cartes), nous en déduisons les identités pour les séries génératrices associées :

$$\begin{aligned}B_\circ^{(k)} &= t[\sigma^k] \sum_{n=1}^{\infty} v_n^\circ \left(t\sigma + \sum_{k'\leq 1} B_\bullet^{(k')} \sigma^{k'} \right)^{n-1} \\ B_\bullet^{(k)} &= t[\sigma^k] \sum_{n=1}^{\infty} v_n^\bullet \left(\sigma^{-1} + \sum_{k'\geq 0} B_\circ^{(k')} \sigma^{k'} \right)^{n-1}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ces équations déterminent de manière unique les $B_\circ^{(k)}$ et $B_\bullet^{(k)}$ en tant que séries formelles en t et les v_n° et $v_n^\bullet$. Nous noterons que comme les sommes sur la charge k' sont tronquées d'un côté, si nous prenons les v_n° et $v_n^\bullet$ nuls à partir d'un certain rang $n_{\max}$ (degrés bornés), les membres

de droite des équations (2.18) sont polynômiaux en les $B_\circ^{(k)}$ et $B_\bullet^{(k)}$ et nous pouvons extraire un sous-ensemble fini et fermé d'équations.

À titre d'exemple, nous retrouvons les arbres bourgeonnants bien chargés de la section précédente en prenant un poids par sommet noir $v_n^\bullet = t^{-1}\delta_{n,2}$, et nous pouvons identifier les séries génératrices R et S définies par les équations (2.7) par :

$$S = B_\bullet^{(0)} = B_\circ^{(0)} \qquad R - t = B_\bullet^{(1)} = B_\circ^{(1)} \qquad v_n = v_n^\circ \tag{2.19}$$

(le paramètre formel σ étant changé en σ^{-1}).

Arbres équilibrés, application au comptage

Revenons à présent à la contrainte d'équilibre. Nous avons vu que les cartes biparties à une patte sont en correspondance biunivoque avec les arbres bicolores, blancs (la racine est une feuille), bien chargés, de charge nulle (racine exclue), et équilibrés (la racine est non-appariée). Considérons un arbre blanc bien chargé, de charge nulle, mais non-équilibré, c'est-à-dire que la feuille-racine est appariée à un bourgeon. Par réenracinement sur celui-ci, nous obtenons un arbre noir bien chargé de charge 2, et cette correspondance est bijective. Nous aboutissons au résultat suivant, énoncé dans [21] :

Soit $\mathit{\Gamma}_\bullet$ l'ensemble des cartes biparties à une patte noire. $\mathcal{B}_\circ^{(k)}$ (resp. $\mathcal{B}_\bullet^{(k)}$) est l'ensemble des arbres bicolores, blancs (resp. noirs), bien chargés, de charge k. Nous avons alors une bijection :

$$\mathcal{B}_\circ^{(0)} \cong \mathit{\Gamma}_\bullet \cup \mathcal{B}_\bullet^{(2)} \tag{2.20}$$

qui préserve les nombres de sommets de chaque degré et couleur.

Pour les séries génératrices associées selon les degrés et couleurs des sommets, nous avons :

$$\Gamma_\bullet = B_\circ^{(0)} - t^{-1} B_\bullet^{(2)} \tag{2.21}$$

où $B_\circ^{(0)}$ et $B_\bullet^{(2)}$ sont déterminés via les équations (2.18).

Au prix d'une certaine complication technique, il est également possible d'étendre la construction à des cartes à deux pattes [21] :

Soit $\mathit{\Gamma}_{\bullet\bullet}$ l'ensemble des cartes biparties à deux pattes noires (dans une même face). Nous avons une bijection :

$$\mathcal{B}_\circ^{(1)} \cong \mathit{\Gamma}_{\bullet\bullet} \cup \mathcal{B}_\bullet^{(3)} \cup \left(\mathcal{B}_\bullet^{(2)}\right)^2 \tag{2.22}$$

qui préserve les nombres de sommets de chaque degré et couleur.

Cette identité peut être vue comme une extension de la dernière bijection (2.11). D'autres identités bijectives peuvent être obtenues dans le cas particulier où tous les sommets ont des degrés multiples d'un même entier $k \geq 1$ [21]. Cependant, pour les cartes planaires biparties, ces relations ne suffisent pas à exprimer en tout généralité, par un raisonnement bijectif, la série génératrice des cartes enracinées selon les degrés et couleurs des sommets. Il n'est notamment pas clair que celle-ci puisse s'écrire sous une forme qui serait manifestement algébrique lorsque les degrés sont bornés.

Nous refermons à présent cette discussion très générale pour nous consacrer à quelques cas particuliers intéressants.

2.3.2 Cartes bicubiques et triangulations tricoloriables

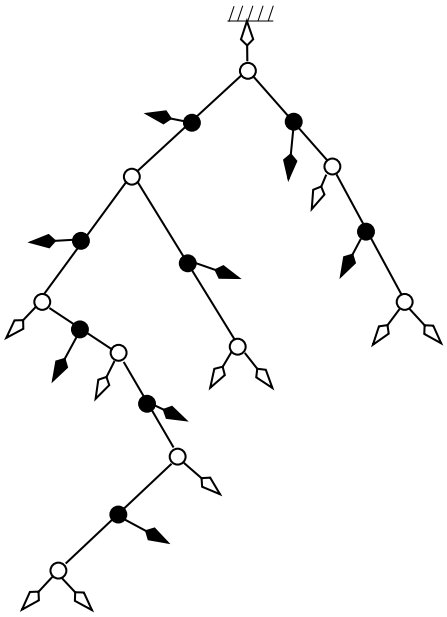


FIG. 2.19 – Un arbre bourgeonnant bicubique.

Considérons à présent les *cartes bicubiques*, c'est-à-dire les cartes biparties dont tous les sommets ont degré 3. Du point de vue des arbres bicolores bien chargés, cette contrainte de degré impose une structure très particulière : en effet à chaque sommet noir est attaché exactement un bourgeon (en excluant le cas de l'arbre réduit à un sommet noir et trois bourgeon). Un arbre bicolore, enraciné sur une feuille, dont tous les sommets ont degré trois, et vérifiant cette propriété, est appelé *arbre bourgeonnant bicubique*. La figure 2.19 en propose un exemple.

Les arbres bourgeonnants bicubiques sont très similaires aux arbres bourgeonnants quartiques considérés à la section 2.1. Ils peuvent être vus comme des arbres binaires complets plantés, sur lesquels nous ajoutons des bourgeons, non pas sur les noeuds, mais au milieu des arêtes internes (donc avec deux positions possibles). Par conséquent, pour un nombre fixé n de sommets blancs, le nombre d'arbres bicubiques est $2^{n-1} \cdot c_n$ où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n. La charge totale d'un arbre bourgeonnant bicubique est de 3, et par appariement des bourgeons aux feuilles et clôture partielle nous obtenons une carte à 3 pattes (cf figure 2.20). En raison des contraintes de degré, il ne peut y avoir de cartes à une patte comme dans le cas général précédent.

Lorsque l'arbre est équilibré, nous définissons sa clôture complète en ajoutant un sommet noir externe que nous relions aux trois pattes. Ceci donne une carte bicubique enracinée, comme illustré sur la figure 2.21. Réciproquement, étant donné une carte bicubique, en effaçant le sommet à l'origine de la racine, puis en appliquant le découpage itératif des cartes biparties vu plus haut (caractérisable en terme des chemins minimaux orientés à gauche), nous obtenons un arbre bourgeonnant bicubique équilibré. Ceci établit une bijection. Le comptage des arbres équilibrés peut se faire à l'aide d'un argument de conjugaison similaire à celui de la section 2.1 : un arbre bourgeonnant bicubique à n sommets blancs ayant $n+2$ feuilles dont 3 non appariées, le nombre

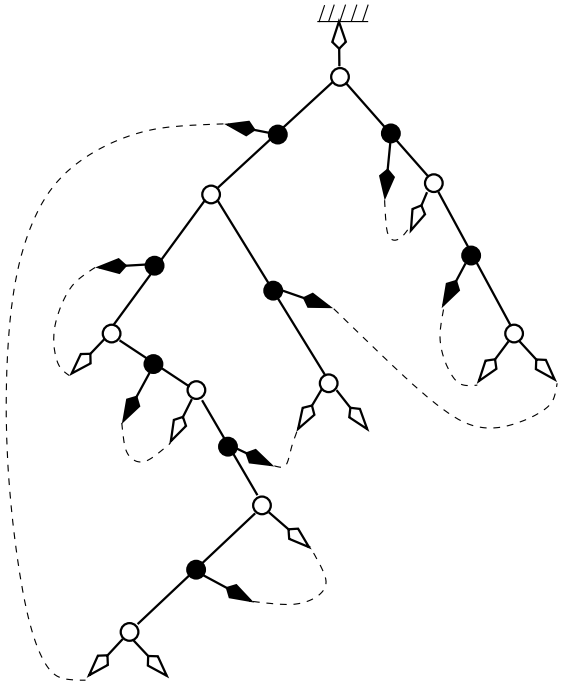


FIG. 2.20 – Appariement des bourgeons aux feuilles. Trois feuilles restent libres (dont ici la racine), ce qui donne par clôture partielle une carte à trois pattes.

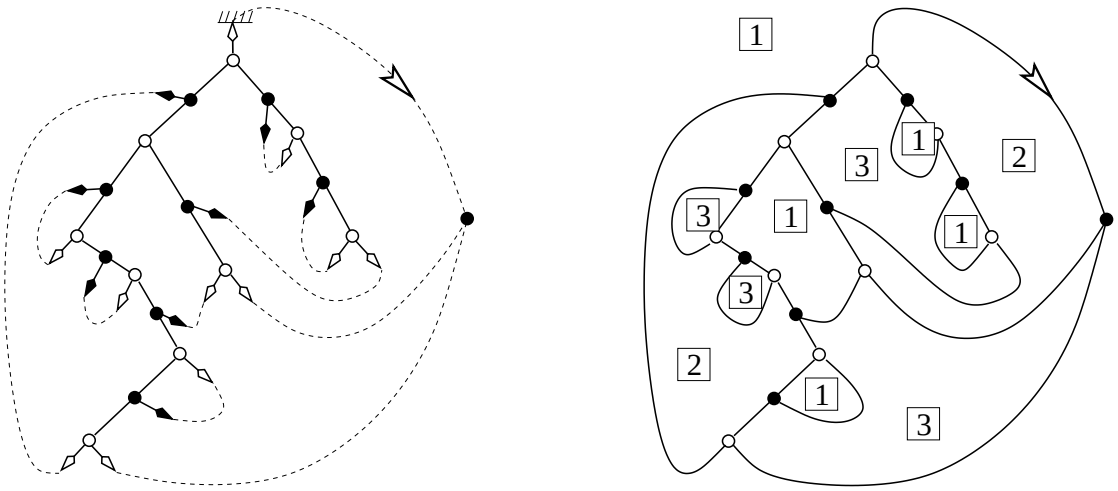


FIG. 2.21 – La clôture complète d'un arbre bourgeonnant bicubique équilibré, qui établit une bijection avec l'ensemble des cartes bicubiques enracinées. Les cartes bicubiques enracinées possèdent un tricoloriage canonique des faces (ici représenté avec des entiers 1,2,3).

d'arbres équilibrés parmi eux est :

$$\frac{3}{n+2} \cdot 2^{n-1} \cdot c_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{(n+2)(n+1)} \binom{2n}{n} \tag{2.23}$$

ce qui correspond au nombre de cartes bicubiques enracinées à $3n$ arêtes.

Par dualité, les cartes bicubiques correspondent aux *triangulations tricoloriables*, c'est-à-dire les triangulations dont les sommets peuvent être coloriés de trois couleurs de telle sorte que deux sommets adjacents sont de couleurs différentes. Sur la carte bicubique, il s'agit d'un tricoloriage des faces, représenté sur la figure 2.21. Celui-ci est canonique à une permutation des couleurs près, en effet si nous fixons les couleurs autour de la racine (ici, « 1 » à gauche et « 2 » à droite), toutes les couleurs sont déterminées de proche en proche autour de chaque sommet. Avec nos conventions, les couleurs $1, 2, 3$ apparaissent successivement dans le sens direct autour des sommets blancs, et dans le sens indirect autour des sommets noirs.

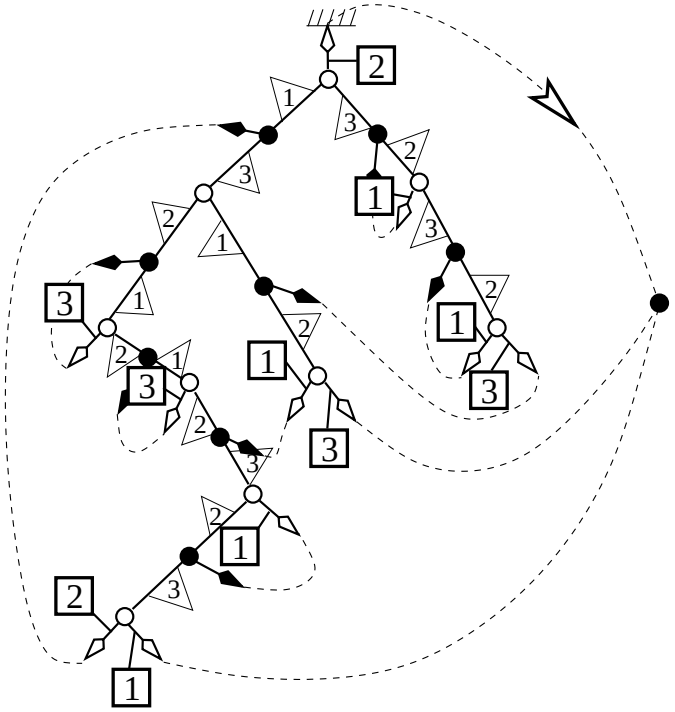


FIG. 2.22 – Étiquetage des arêtes internes et des feuilles de l'arbre bourgeonnant bicubique par les couleurs des faces de la carte : nous associons la couleur de la face à droite en tournant autour des sommets blancs. Les étiquettes sont entièrement déterminées par la structure de l'arbre bourgeonnant, selon des règles simples.

Nous souhaitons alors énumérer plus finement les cartes bicubiques, en fixant le nombre de faces de chaque couleur, ou de façon équivalente calculer la série génératrice des cartes bicubiques enracinées avec un poids x_i par face de couleur $i = 1, 2, 3$. Pour ce faire, observons comment l'information de couleur peut être lue sur les arbres bourgeonnants bicubiques. Comme illustré sur la figure 2.22, nous pouvons associer à chaque arête interne ou feuille d'un arbre bourgeonnant équilibré une *étiquette* portant la couleur de la face à droite en tournant autour des sommets blancs. De même, un bourgeon peut être étiqueté par la couleur de sa face à gauche, cette

étiquette étant identique celle de la feuille appariée. Les étiquettes obéissent aux règles locales suivantes :

- les étiquettes $1, 2, 3$ apparaissent successivement dans le sens direct autour des sommets blancs,
- elles apparaissent successivement dans le sens indirect autour des sommets noirs.

Ceci permet de fixer de proche en proche toutes les étiquettes à partir de celle de la racine, qui est 2 par nos conventions.

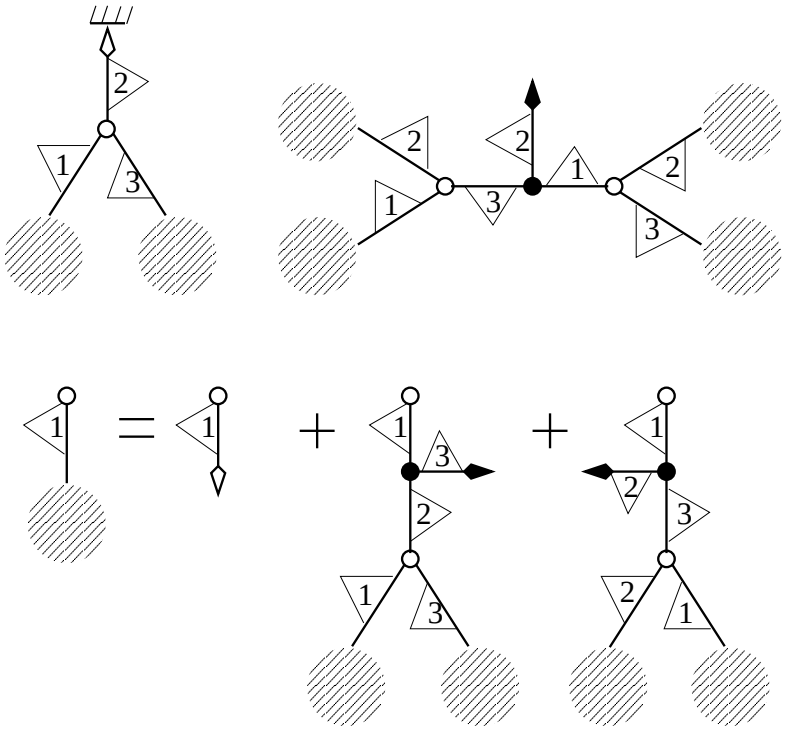


FIG. 2.23 – Décomposition d'un arbre bourgeonnant bicubique autour de la racine, et au voisinage d'un bourgeon. Les étiquettes sont fixées par les règles locales. Les sous-arbres partant d'un sommet blanc (en hachuré) peuvent alors être décomposés récursivement, nous illustrons ici le cas des sous-arbres avec une étiquette 1, les autres cas étant obtenus par permutation circulaire des indices.

Considérons à présent un arbre bourgeonnant bicubique, non nécessairement équilibré. Nous pouvons alors étiqueter les arêtes, feuilles et bourgeons selon les règles ci-dessus. La racine est reliée à un sommet blanc, d'où partent deux sous-arbres descendants. Ceux-ci sont soit réduits à une feuille, soit sont constitués d'un sommet noir, relié d'une part à un bourgeon, d'autre part à un autre sommet blanc. Ceci constitue une décomposition récursive illustrée sur la figure 2.23. Notons que les configurations des étiquettes sont entièrement fixées par les règles locales autour des sommets. La décomposition récursive se traduit immédiatement dans le langage des séries génératrices par les équations :

$$\begin{aligned} U_1 &= x_1 + U_1U_3 + U_2U_1 \\ U_2 &= x_2 + U_2U_1 + U_3U_2 \\ U_3 &= x_3 + U_3U_2 + U_1U_3 \end{aligned} \tag{2.24}$$

où U_i est la série génératrice des sous-arbres descendants d'un sommet blanc, avec une étiquette i sur la racine (cf figure 2.23), comptés avec un poids x_i par feuille étiquetée i. La série génératrice des arbres bourgeonnants bicubiques, enracinés sur une feuille étiquetée 2 selon nos conventions, est alors :

$$x_2 U_1 U_3 = U_1 U_2 U_3 (1 - U_1 - U_3). \tag{2.25}$$

Nous comptons ainsi tous les arbres bicubiques, non nécessairement équilibrés. Les arbres non-équilibrés peuvent être réenracinés sur le bourgeon apparié à la racine, ce qui donne une bijection. D'après la figure 2.23 donnant la décomposition au voisinage d'un bourgeon, la série génératrice des arbres non-équilibrés est ainsi $U_1 U_2^2 U_3$. Par soustraction, nous obtenons la série génératrice des arbres équilibrés avec un poids x_i par feuille étiquetée i, qui correspond en termes de cartes bicubiques par un poids x_i par face de couleur i. Nous aboutissons au résultat suivant :

La série génératrice des cartes bicubiques enracinées (duales aux triangulations tricoloriées), tricoloriées canoniquement avec un poids x_i par face de couleur i, vaut :

$$U_1 U_2 U_3 (1 - U_1 - U_2 - U_3) \tag{2.26}$$

où U_1, U_2, U_3 sont déterminés en tant que séries formelles par :

$$\begin{aligned} U_1 &= x_1 + U_1 U_3 + U_2 U_1 \\ U_2 &= x_2 + U_2 U_1 + U_3 U_2 \\ U_3 &= x_3 + U_3 U_2 + U_1 U_3. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ce résultat est proposé dans la publication II, et avait été obtenu auparavant via une solution technique d'un modèle de matrice [67]. À notre connaissance, il n'existe pas de formule explicite pour le terme général de la série, correspondant au nombre de cartes bicubiques ayant des nombres fixés de faces de chaque couleur.

Une extension aux cartes biparties k-valentes coloriées cycliquement est également proposée dans la publication II, et se généralise pour à des familles de cartes appelées constellations [60].

2.3.3 Particules dures sur cartes tétravalentes

Le modèle des particules dures sur les cartes planaires tétravalentes, introduit à la section 1.3.1, apparaît comme cas particulier de cartes biparties. Considérons en effet une configuration de particules dures sur une carte tétravalente : comme illustré sur la figure 2.24, nous pouvons lui associer une carte bipartie en ajoutant un sommet occupé (noir) bivalent au milieu de chaque arête reliant deux sites vides (blancs). Nous obtenons ainsi une carte bipartie dont les sommets blancs ont degré 4, et les sommets noirs degré 2 ou 4. Réciproquement, étant donné une telle carte, il suffit d'effacer les sommets noirs bivalents pour retrouver une configuration de particules dures sur carte tétravalente. Notons que cette équivalence se manifeste également dans le modèle de matrice introduit à la section 1.3.1, puisque le terme $-A^2$ de la partie quadratique (1.78) peut être également traité comme « perturbation », engendrant les sommets de degré 2.

D'un point de vue combinatoire, la fonction de partition calculée à la section 1.3.1 possède l'inconvénient de compter les configurations avec un facteur de symétrie. Nous préférons prendre une dérivée par rapport au nombre d'arêtes, ce qui correspond à considérer des cartes enracinées ou, par découpage de l'arête racine, des cartes à deux pattes. Plus précisément, nous introduisons

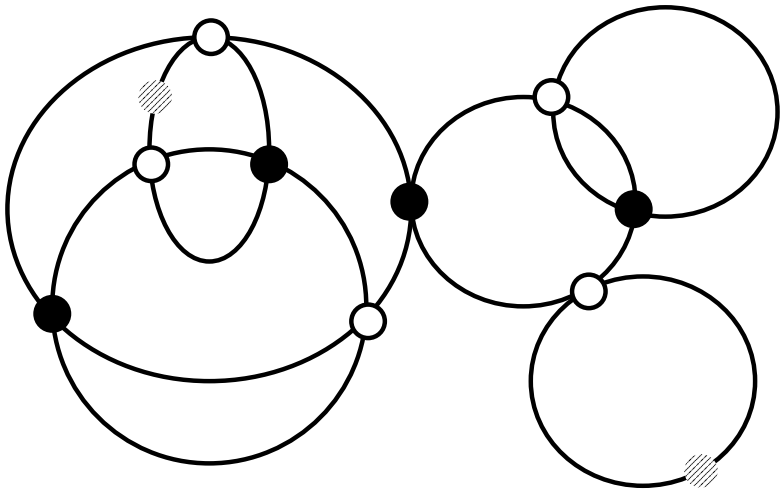


FIG. 2.24 – Une configuration de particules dures sur cartes tétravalentes. Par ajout d'un sommet occupé bivalent (en hachuré) au milieu de chaque arête de type vide-vide, nous obtenons une carte bipartie dont les sommets blancs (vides) ont degré 4, et les sommets noirs (occupés) ont degré 2 et 4.

la série génératrice $\Gamma_{\bullet\bullet}$ (resp. $\Gamma_{\substack{\bullet\bullet\\\bullet\bullet}}$) des cartes planaires biparties à deux pattes externes[8] noires (resp. à quatre pattes externes noires) dont les sommets (internes) sont de l'un des types suivants :

- sommets blancs de degré 4, de poids y,
- sommets noirs de degré 4, de poids yz,
- sommets noirs de degré 2, de poids 1.

Dans le langage des particules dures, nous parlerons de « fonction de corrélation à deux particules » (resp. « quatre particules »). Ceci permet d'obtenir la série génératrice E des cartes planaires tétravalentes enracinées, munies d'une configuration de particules dures, avec un poids y par sommet et z par particule, selon la relation :

$$E = \Gamma_{\bullet\bullet} + 2yz\Gamma_{\substack{\bullet\bullet\\\bullet\bullet}}. \tag{2.28}$$

Cette relation résulte d'une décomposition de la racine : pour une carte enracinée sur une arête vide-vide, la décomposition se fait au niveau du sommet noir bivalent ajouté au milieu, d'où le terme $\Gamma_{\bullet\bullet}$, tandis que pour une carte enracinée sur une arête vide-occupé ou occupé-vide, nous décomposons au niveau du sommet noir (occupé) tétravalent, d'où le terme $\Gamma_{\substack{\bullet\bullet\\\bullet\bullet}}$.

La procédure de découpage des cartes biparties indiquée à la section 2.3.1 s'applique aux cartes à deux pattes, en remplaçant les sommets noirs marqués par des feuilles. L'arbre résultant est un arbre bicolore bien chargé de charge totale 2, dont les sommets internes sont de l'un des types indiqués. Il est de plus équilibré au sens de la clôture. Nous pouvons alors utiliser les résultats de la section 2.3.1 : par nos contraintes de degrés, les équations (2.18) se réduisent au

[8] On rappelle que les pattes sont supposées adjacentes à une même face, dite externe.

système fermé suivant :

$$\begin{aligned} B_{\circ}^{(3)} &= y\left(t + B_{\bullet}^{(1)}\right)^3 \\ B_{\circ}^{(1)} &= 3yB_{\bullet}^{(-1)}\left(t + B_{\bullet}^{(1)}\right)^2 \\ B_{\bullet}^{(1)} &= B_{\circ}^{(1)} + 3yz\left(B_{\circ}^{(3)} + (B_{\circ}^{(1)})^2\right) \\ B_{\bullet}^{(-1)} &= 1 + 3yzB_{\circ}^{(1)} \end{aligned} \tag{2.29}$$

On vérifie facilement que ce système est équivalent aux équations (1.87) obtenues par le modèle de matrice. En posant $R \equiv yB_{\circ}^{(1)}$, $V \equiv y\left(t + B_{\bullet}^{(1)}\right)$, $\theta \equiv y$, nous obtenons les notations de l'article IV.

Nous pouvons alors utiliser la bijection (2.22) pour obtenir une expression de $\Gamma_{\bullet\bullet}$. La publication IV propose de plus une discussion – technique – des cartes à quatre pattes. Nous résumons les résultats sous la forme suivante :

Les fonctions de corrélation à deux et quatre particules du modèle des particules dures sur les cartes tétravalentes sont données par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bullet\bullet} &= R - \frac{V^3 + zR^3 + 6zRV^3}{y} \\ \Gamma_{\substack{\bullet\bullet\\\bullet\bullet}} &= V^3 + 2R^2 - 3\frac{zV^6 + RV^3 + zR^4 + 7R^2V^3}{y} \end{aligned} \tag{2.30}$$

où y est l'activité par site, z l'activité par somment, et R, V déterminés par :

$$\begin{aligned} R &= 3V^2 + 9zRV^3 \\ V &= y + R + 3zR^2 + 3zV^3. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Nous avons pu à nouveau donner une interprétation combinatoire aux équations algébriques apparaissant dans la solution par intégrales matricielles, ici un modèle à deux matrices.

Le modèle des particules dures sur réseau biparti, plus intéressant sur le plan de la physique, ne peut être pas être ramené à un problème d'énumération de cartes biparties. En effet, il existe quatre types de sommets, correspondant à un modèle à 4 matrices. Une solution combinatoire de ce modèle nécessite d'introduire des arbres bourgeonnants comptés avec des signes, se simplifiant *in fine* en vertu d'un principe d'« inclusion-exclusion » [64]. Ce principe semble pouvoir s'étendre à un modèle général de matrices en chaîne.

2.4 Un modèle à trois couleurs

Considérons à présent un modèle de carte à 3 couleurs, dont les sommets sont coloriés par exemple en *noir, blanc et gris* (que nous symboliserons dans le texte par $\bullet, \circ, *$). Nous ne considérerons pas ici une contrainte de tricoloriabilité, mais seulement une règle plus faible : **il n'existe pas d'arête reliant deux sommets noirs, ni d'arête reliant deux sommets blancs**. Il manque ainsi une contrainte analogue pour les sommets gris pour définir un tricoloriage des sommets. Cependant, ceci nous permettra d'obtenir une correspondance avec des

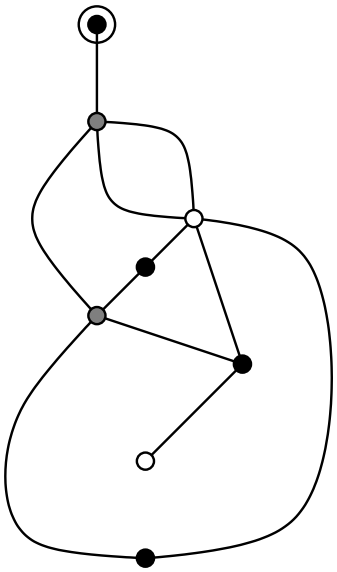


FIG. 2.25 – Exemple de carte à trois couleurs. Un sommet noir de degré un (patte) est distingué. Les arêtes à deux extrémités noires, et celles à deux extrémités blanches, sont interdites.

arbres bourgeonnants. Notons également que les cartes arbitraires (resp. biparties) apparaissent naturellement comme des cas particuliers de ces cartes, en imposant que tous les sommets sont gris (resp. noirs ou blancs). Nous traitons ici du cas des cartes à une patte noire (cf figure 2.25), qui forment un ensemble $\Gamma_\bullet$.

2.4.1 Des cartes aux arbres tricolores bien chargés

Le découpage est une adaptation supplémentaire du procédé itératif introduit à la section 2.1.3 et étendu aux cartes biparties à la section 2.3.1. Le sommet externe est remplacé par une feuille-racine, et nous effectuons ensuite un ou plusieurs tours de la face externe à partir de cette racine, en coupant lors du parcours une arête en une paire bourgeon-feuille si et seulement si elle possède simultanément les propriétés suivantes :

- elle est non-séparante,
- dans le sens de parcours, son origine n'est pas blanche,
- dans le sens de parcours, son extrémité n'est pas noire.

La procédure est illustrée sur la figure 2.26, et s'arrête lorsque toutes les faces sont réunies : on se convainc en effet aisément que, en raison des contraintes de coloriage, il existe toujours une arête susceptible d'être coupée tant qu'il reste au moins une face interne. On notera que lorsque tous les sommets distincts de la patte sont gris, on retrouve la procédure pour les cartes arbitraires, et lorsque tous les sommets sont noirs ou blancs, il s'agit de la procédure pour les cartes arbitraires. Le découpage peut toujours être caractérisé en terme de chemins minimaux à gauche sur la carte duale, sous des contraintes d'orientation particulières :

- les arêtes sont orientées dans le sens direct autour des faces duales aux sommets noirs,
- les arêtes sont orientées dans le sens indirect autour des faces duales au sommets blancs,
- les arêtes duales aux arêtes entre sommets gris sont non-orientées (ou de façon équivalente, possèdent une orientation dans chaque sens).

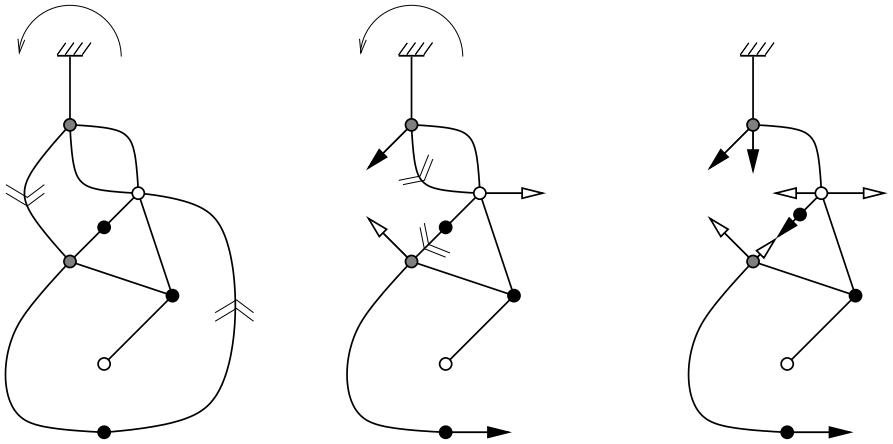


FIG. 2.26 – Le découpage itératif d'une carte tricolore à une patte noire. En tournant autour de la face externe, nous coupons une arête si et seulement si elle est non-séparante, son origine n'est pas blanche, et son extrémité n'est pas noire.

Par construction, les bourgeons sont attachés aux sommets noirs ou gris, et les feuilles (y compris la racine) aux sommets gris ou blancs. Comme pour la carte, il n'existe pas d'arête de l'arbre reliant deux sommets noirs, ou deux sommets blancs. Un arbre ayant ces propriétés est dit *tricolore*.

Comme pour les cas précédents, nos règles de découpage induisent des contraintes supplémentaires, sur les charges des sous-arbres séparés par toute arête interne. Un sous-arbre sera dit noir, gris, ou blanc selon la couleur de son sommet incident à l'arête considérée. Par examen des différents cas, nous aboutissons aux règles suivantes :

- la charge de tout sous-arbre noir est inférieure ou égale à 1,
- la charge de tout sous-arbre blanc est positive ou nulle,
- une arête reliant deux sommets gris sépare deux sous-arbres gris ayant charge 0 ou 1 (ce qui n'est autre que l'intersection des deux contraintes ci-dessus).

Remarquons à nouveau que la restriction aux cartes arbitraires (gris) ou biparties (noir et blanc) apparaît clairement. Enfin, l'arbre obtenu par découpage d'une carte est équilibré au sens de la clôture, qui redonne la carte initiale.

Considérons à présent la famille plus générale des arbres définis uniquement par les contraintes de charge :

Un arbre tricolore enraciné est dit bien chargé si et seulement si tous ses sous-arbres descendants d'une arête interne sont de l'un des types suivants :
- un sous-arbre blanc de charge positive ou nulle,
- un sous-arbre noir de charge inférieure ou égale à 1,
- un sous-arbre gris, qui a une charge de 0 ou 1 si l'arête dont il est issu est reliée à un autre sommet gris.

Introduisons les notations suivantes, désormais usuelles :
- f l'arbre réduit à une feuille relié à la racine,
- b l'arbre réduit à un bourgeon relié à la racine,

– $\mathcal{B}_\circ^{(k)}$, $\mathcal{B}_\bullet^{(k)}$, $\mathcal{B}_*^{(k)}$ les ensembles des arbres respectivement blancs, noirs et gris, bien chargés de charge k.

Par décomposition d'un arbre non réduit à une feuille ou un bourgeon autour du sommet relié à la racine, nous obtenons les bijections suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\circ^{(k)} &\cong \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n^\circ\} \times \left(\{f\} \cup \bigcup_{k'\leq 1} \mathcal{B}_\bullet^{(k')} \cup \bigcup_{k'} \mathcal{B}_*^{(k')} \right)_{c=k}^{n-1} \\
\mathcal{B}_\bullet^{(k)} &\cong \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n^\bullet\} \times \left(\{b\} \cup \bigcup_{k'\geq 0} \mathcal{B}_\circ^{(k')} \cup \bigcup_{k'} \mathcal{B}_*^{(k')} \right)_{c=k}^{n-1} \\
\mathcal{B}_*^{(k)} &\cong \bigcup_{n=1}^{\infty} \{V_n^*\} \times \left(\{f\} \cup \{b\} \bigcup_{k'\geq 0} \mathcal{B}_\circ^{(k')} \cup \bigcup_{k'\leq 1} \mathcal{B}_\bullet^{(k')} \cup \mathcal{B}_*^{(0)} \cup \mathcal{B}_*^{(1)} \right)_{c=k}^{n-1}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Ces identités peuvent immédiatement se traduire en termes d'équations récursives pour les séries génératrices des arbres associés, avec un poids $v_n^\circ, v_n^\bullet, v_n^*$ par sommet de degré n respectivement blanc (V_n°), noir ($V_n^\bullet$), gris (V_n^*).

Par un raisonnement standard, nous pouvons montrer que les arbres tricolores bien chargés, enracinés sur une feuille, équilibrés, de charge nulle, sont en bijection avec les cartes à une patte[9]. De plus, les arbres non-équilibrés jouissant des mêmes autres propriétés sont en bijection avec les arbres tricolores bien chargés, enracinés sur un bourgeon, de charge 2. On obtient ainsi la relation :

$$\mathcal{B}_\circ^{(0)} \cup \mathcal{B}_*^{(0)} \cong \Gamma_\bullet \cup \mathcal{B}_\bullet^{(2)} \cup \mathcal{B}_*^{(2)} \tag{2.33}$$

qui permet d'exprimer la série génératrice $\Gamma_\bullet$.

2.4.2 Comparaison avec le modèle à trois matrices en chaîne

L'énumération de notre modèle de carte à trois couleurs peut se faire par une intégrale à trois matrices avec interaction en chaîne. En ordonnant les couleurs dans l'ordre noir, gris, blanc, nous voyons en effet que la matrice des poids par arêtes, et son inverse la matrice de la forme quadratique du modèle, sont données respectivement par :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

La fonction de partition du modèle de matrice associé s'écrit ainsi :

$$\int e^{N \operatorname{Tr}\left(-\frac{1}{2} q(M_\bullet, M_*, M_\circ) + V_\bullet(M_\bullet) + V_*(M_*) + V_\circ(M_\circ)\right)} \mathcal{D}M_\bullet \mathcal{D}M_* \mathcal{D}M_\circ \tag{2.35}$$

avec $q(x_\bullet, x_*, x_\circ) = 2x_\bullet x_* + 2x_* x_\circ - x_\bullet^2 - x_*^2 - x_\circ^2$, tandis que $V_\bullet$, V_*, $V_\circ$ engendrent les poids des sommets de chaque couleur et de chaque degré[10]. La forme de l'interaction en chaîne est

[9] Il est évident qu'un arbre tricolore équilibré donne par clôture une carte à trois couleurs respectant les contraintes. Montrer que découpage et clôture sont des bijections mutuellement inverses se fait par une extension des arguments proposés pour les cartes arbitraires.

[10] On constatera que lorsque $V_\bullet = V_\circ = 0$ (resp. $V_* = 0$), les intégrales sur les matrices $M_\bullet$ et $M_\circ$ (resp. M_*) sont gaussiennes et peuvent être calculées explicitement, ce qui ramène au modèle à une (resp. deux) matrices.

manifeste, et permet d'exprimer la fonction de partition à l'aide de polynômes bi-orthogonaux. Nous introduisons le produit bilinéaire :

$$(p_\bullet, q_\circ) \equiv \int p_\bullet(x_\bullet) p_\circ(x_\circ) e^{N\left(-\frac{1}{2}q(x_\bullet,x_*,x_\circ)+V_\bullet(x_\bullet)+V_*(x_*)+V_\circ(x_\circ)\right)} dx_\bullet dx_* dx_\circ \tag{2.36}$$

ainsi que les opérateurs de dérivation $P_\bullet, P_\circ$, et de multiplication par une variable $Q_\bullet, Q_*, Q_\circ$, agissant par convention à gauche sur le polynôme $p_\bullet$. Par intégration par parties, nous aboutissons aux identités opératorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{P_\bullet}{N} &= Q_* - Q_\bullet - V'_\bullet(Q_\bullet) \\ 0 &= Q_\bullet + Q_\circ - Q_* - V'_*(Q_*) \\ \frac{P_\circ}{N} &= Q_* - Q_\circ - V'_\circ(Q_\circ) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Les identités peuvent alors être exprimées dans la base des polynômes bi-orthogonaux unitaires $p_{\bullet_n}, p_{\circ_n}$, ou plus précisément via un développement en puissance de l'opérateur de décalage σ agissant comme $\sigma p_{\bullet_n} \equiv p_{\bullet_{n-1}}$. Pour un opérateur Ω ayant un développement $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \sigma^n$ (les ω_n sont des opérateurs diagonaux dans la base $p_{\bullet_n}$), introduisons la notation $\Omega|_{\leq k} \equiv \sum_{n=-\infty}^{k} \omega_n \sigma^n$, et de manière analogue $\Omega|_{\geq k}$ et $\Omega|_{=k}$[11]. Nous savons par exemple que :

$$Q_\bullet|_{\leq -1} = \sigma^{-1} \tag{2.38}$$

(car $Q_\bullet p_{\bullet_n} = p_{\bullet_{n+1}} + O(x_\bullet^n)$), tandis que :

$$P_\circ|_{\geq 0} = 0 \tag{2.39}$$

(car dualement $P_\circ^\dagger p_{\circ_n} = p'_{\circ_n} = O(x_\circ^n)$). Ainsi en combinant ces deux identités, et les deuxième et troisième lignes du système (2.37), nous trouvons :

$$Q_\bullet = \sigma^{-1} + V'_*(Q_*)|_{\geq 0} + V'_\circ(Q_\circ)|_{\geq 0} \tag{2.40}$$

De façon similaire, nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} Q_\circ &= \sigma\nu + V'_\bullet(Q_\bullet)|_{\leq 1} + V'_*(Q_*)|_{\leq 1} \\ Q_* &= \sigma\nu + \sigma^{-1} + V'_\bullet(Q_\bullet) + V'_\circ(Q_\circ) + V'_*(Q_*)|_{=0} + V'_*(Q_*)|_{=1} \end{aligned} \tag{2.41}$$

où ν est l'opérateur diagonal $\nu p_{\bullet_n} \equiv (n/N) p_{\bullet_n}$. Dans la limite planaire, σ devient un opérateur commutant aux opérateurs diagonaux. Les identités ci-dessus correspondent précisément aux décompositions récursives (2.32) via l'identification des séries génératrices :

$$B_\bullet^{(k)} \sigma^k = V'_\bullet(Q_\bullet)|_{=k} \qquad B_*^{(k)} \sigma^k = V'_*(Q_*)|_{=k} \qquad B_\circ^{(k)} \sigma^k = V'_\circ(Q_\circ)|_{=k}\,. \tag{2.42}$$

ν apparaît comme un poids par feuille distincte de la racine.

Nous pouvons enfin exprimer la série génératrice $\Gamma_\bullet$. Par un raisonnement standard, $\Gamma_\bullet$ est la moyenne de $N^{-1} \operatorname{Tr} M_\bullet$ dans le modèle de matrices aléatoires, et peut s'exprimer en terme des polynômes bi-orthogonaux :

$$\Gamma_\bullet = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(Q_\bullet p_{\bullet_n}, p_{\circ_n})}{(p_{\bullet_n}, p_{\circ_n})} \tag{2.43}$$

[11] Cette notation $\Omega|_{=k}$ diffère de la notation précédente, plus usuelle, $[\sigma^k]\Omega$, d'une part car σ n'est pas ici nécessairement une variable commutante, d'autre part car, même pour σ commutant, un facteur σ^k est ajouté.

soit dans la limite planaire :

$$\Gamma_\bullet = \int_0^1 \left(B_*^{(0)} + B_\circ^{(0)} \right) d\nu. \tag{2.44}$$

$B_*^{(0)} + B_\circ^{(0)}$ est la série génératrice des arbres tricolores bien chargé, enracinés sur une feuille, de charge 0. Par un argument combinatoire simple, l'intégrale sur ν donne la série génératrice des arbres étant de plus équilibrés : les arbres non-nécessairement équilibrés sont en effet en bijection avec les arbres équilibrés avec une feuille quelconque marquée (ce qui s'assimile à l'action de l'opérateur $\frac{d}{d\nu}(\nu\cdot)$ sur la série génératrice). On retrouve finalement :

$$\Gamma_\bullet = B_*^{(0)} + B_\circ^{(0)} - B_\bullet^{(2)} + B_*^{(2)} \tag{2.45}$$

avec un poids par feuille $\nu = 1$.

Nous concluons en indiquant que le modèle à trois matrices en chaîne le plus général peut être ramené à celui-ci : le modèle le plus général a, à permutation des matrices près, une fonction de partition de la forme (2.35) où la forme quadratique q a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{\bullet\bullet} & a_{\bullet *} & 0 \\ a_{\bullet *} & a_{**} & a_{*\circ} \\ 0 & a_{*\circ} & a_{\circ\circ} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Par un changement de variable $M_i \to \lambda_i M_i$ pour $i = \bullet, *, \circ$, nous pouvons ramener les termes non-diagonaux à 1, puis fixer les termes diagonaux à -1 au prix d'une redéfinition de $V_\bullet, V_*, V_\circ$. Du point de vue des cartes, ceci revient à absorber les poids par arêtes par une redéfinition des poids par sommets, en introduisant éventuellement des sommets bivalents supplémentaires. Le modèle de particules sur cartes arbitraires, avec la règle d'exclusion à deux particules indiquée à la section 1.3.3, peut être résolu ainsi.

Chapitre 3

Cartes planaires et arbres étiquetés

L'un des premiers résultats en combinatoire bijective des cartes est la bijection de Cori et Vauquelin entre les cartes planaires enracinées et les arbres bien étiquetés [5], suivie par la bijection d'Arquès entre hypercartes (cartes eulériennes) planaires enracinées et arbres très bien étiquetés [6]. Ces bijections sont obtenues par une décomposition des permutations associées aux cartes, et sont peu lisibles en termes des cartes topologiques.

Une autre bijection plus élémentaire entre cartes planaires enracinées et arbres bien étiquetés a été trouvée plus récemment par Schaeffer *et al.* [68, 69]. Plus précisément, la construction est effectuée sur les *quadrangulations* planaires enracinées ayant un nombre fixé k de faces, duales aux cartes planaires tétravalentes enracinées de k sommets, elles-mêmes en bijection avec les cartes planaires enracinées de k arêtes via la correspondance de Tutte. Les sommets de la quadrangulation sont alors étiquetés par leur distance à l'origine de la racine et, par l'application de règles locales très simples sur les faces de la quadrangulation, nous construisons un arbre de k arêtes. Outre ses conséquences pour l'énumération de cartes, cette construction possède un intérêt immédiat puisque les étiquettes s'interprètent comme les distances à l'origine de la carte : une information fine sur la géométrie des cartes est ainsi directement lisible sur les arbres associés. De multiples applications ont été proposées [69, 70, 71], et certaines seront présentées dans le chapitre 4.

Cette bijection présente certaines analogies avec la bijection entre cartes tétravalentes et arbres bourgeonnants quartiques vue au chapitre 2. Nous notons tout d'abord que ces bijections s'appliquent sur des ensembles de cartes liés par dualité. L'étiquetage des sommets de la quadrangulation par la distance à l'origine rappelle la caractérisation du découpage par les chemins minimaux à gauche. Cependant, les algorithmes diffèrent : l'arbre bien étiqueté est construit par l'application d'une construction indépendante dans chaque face, tandis que les chemins minimaux à gauche dépendent non seulement du choix de l'origine, mais également du choix de l'arête-racine incidente.

Dans ce chapitre, nous proposons une généralisation de cette bijection à d'autres classes de cartes, introduite dans la publication VIII. Le cas le plus général est celui des cartes eulériennes, énumérées selon les degrés et couleurs des faces ; ce problème correspond par dualité à l'énumération des cartes biparties selon les degrés et couleurs des sommets, abordée au chapitre 2. Dans un souci de simplicité, nous commençons par présenter une première construction simple, très analogue à celle de Schaeffer, reliant les triangulations eulériennes et les arbres très bien

étiquetés[1], introduite notamment dans la publication VII (d'autres résultats de cette publication seront discutés dans le chapitre 4). Nous donnons au passage un rappel de la bijection de Schaeffer. Nous passons ensuite au cas le plus général de cartes eulériennes, en correspondance avec des arbres étiquetés appelés mobiles, avant de présenter les simplifications de la construction dans quelques cas particuliers remarquables. Mentionnons que cette construction a été reprise par Marckert et Miermont [72].

3.1 Triangulations eulériennes et arbres très bien étiquetés

Dans cette section, nous montrerons essentiellement l'existence d'une correspondance entre triangulations eulériennes planaires enracinées, et les arbres dits très bien étiquetés, qui peut se résumer par le résultat suivant :

> Un *arbre très bien étiqueté* est un arbre plan enraciné sur une arête, dont les sommets portent des *étiquettes* vérifiant les propriétés suivantes :
> – les étiquettes sont des entiers strictement positifs,
> – les étiquettes sur deux sommets reliés par une arête diffèrent de 1 en valeur absolue,
> – l'étiquette à l'origine de la racine est 1.
>
> Il existe une bijection entre l'ensemble des triangulations eulériennes planaires enracinées à $3k$ arêtes, et les arbres très bien étiquetés à k arêtes.

Nous verrons que la bijection peut être construite de façon purement géométrique, ce qui amènera un certain nombre de résultats auxiliaires, qui trouveront application dans le chapitre 4.

3.1.1 Des cartes aux arbres

Considérons une *triangulation eulérienne* planaire enracinée, c'est-à-dire une carte planaire enracinée dont toutes les faces ont degré trois (triangulation) et tous les sommets un degré pair (existence d'un cycle « eulérien »). Ces contraintes permettent de définir un étiquetage des sommets, qui à son tour peut être employé pour introduire des règles élémentaires de construction, aboutissant à un arbre. Nous présentons tour à tour ces différentes étapes.

Nous notons $3k$ le nombre d'arêtes de la triangulation, $2k$ correspondant au nombre de faces par un simple argument de comptage, et $k+2$ correspondant au nombre de sommets par la relation d'Euler.

Couleurs, orientations et étiquettes

Pour une carte planaire, la contrainte de parité des degrés des sommets est équivalente à la bicoloriabilité des faces. Pour une triangulation planaire, ceci équivaut également à l'existence d'un tricoloriage des sommets, unique à permutation des couleurs près. On notera que les triangulations eulériennes sont duales aux cartes bicubiques considérées au chapitre 2, mais la construction présentée ici est a priori différente.

Par convention, nous supposons que la face à gauche de l'arête-racine est blanche, et nous la prenons comme face externe pour la représentation dans le plan. Les autres faces sont coloriées

[1] Cette bijection est donc à la bijection d'Arquès ce que la bijection de Schaeffer est à la bijection de Cori et Vauquelin.

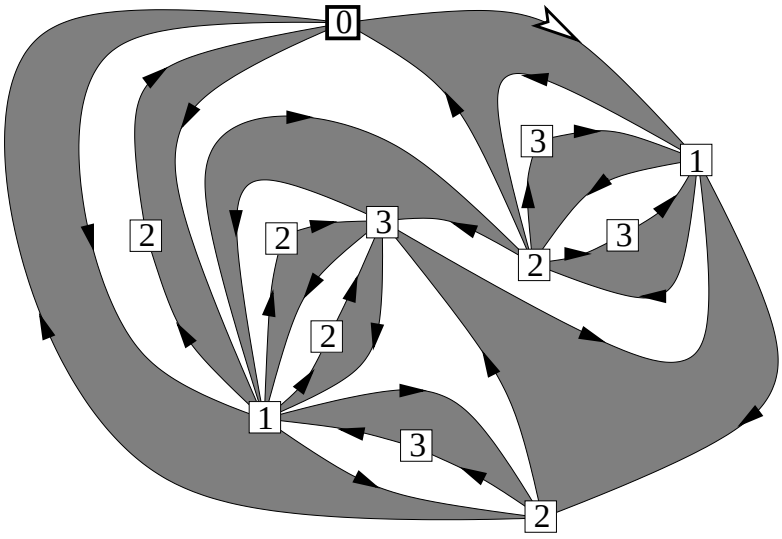


FIG. 3.1 – Exemple de triangulation eulérienne planaire enracinée. Les faces peuvent être bicoloriées en noir et blanc, avec la convention que la face à gauche de la racine est blanche et prise comme face externe. Les autres arêtes peuvent alors être orientées en demandant que leur face à gauche soit blanche, et chaque sommet peut être étiqueté par la longueur du plus court chemin orienté depuis l'origine. Le résidu de l'étiquette modulo 3 constitue un tricoloriage des sommets.

alternativement en noir et blanc, comme illustré sur la figure 3.1. Le nombre de faces blanches est égal au nombre de faces noires, donc à k. Les arêtes peuvent être orientées canoniquement en imposant que, comme pour la racine, la face à gauche de chaque arête soit blanche. Nous pouvons alors étiqueter chaque sommet de la triangulation par la longueur minimale d'un chemin orienté (i.e. une suite d'arêtes orientées consécutives) y menant depuis l'origine de la racine. Cette dernière est appelée tout simplement *origine* de la carte, et est le seul sommet d'étiquette 0, les autres ayant des étiquettes strictement positives.

Règles de transformation locale

Considérons alors une face blanche de la triangulation eulérienne. Par définition des étiquettes comme longueur des chemins orientés minimaux depuis l'origine, celles-ci augmentent d'au plus de un dans le sens d'une arête orientée. Par ailleurs, la tricoloriabilité des sommets implique que l'étiquette augmente toujours de 1 modulo 3 [2]. Il s'ensuit que les étiquettes autour de la face sont nécessairement de la forme $n \to n+1 \to n+2$ dans le sens direct. Dans une telle configuration, illustrée sur la figure 3.2, nous définissons la *transformation locale* par les opérations suivantes :

– conserver l'arête $n+1 \to n+2$,
– effacer les arêtes $n \to n+1$ et $n+2 \to n$.

Cette procédure est effectuée indépendamment dans les k faces blanches (n'ayant pas d'arêtes incidentes communes), ce qui définit ainsi un sous-ensemble de k arêtes, de la carte constituant un graphe. La figure 3.3 illustre cette procédure, appliquée à la triangulation eulérienne de la figure 3.1. Il apparaît que dans le graphe obtenu, l'origine est un sommet isolé, que nous excluons, et les autres sommets sont dans une même composante connexe, qui est un arbre plan (repris

[2] C'est d'ailleurs ainsi que l'on construit explicitement un tricoloriage, en notant que tous les chemins orientés allant de l'origine à un sommet fixé possèdent une même longueur modulo 3.

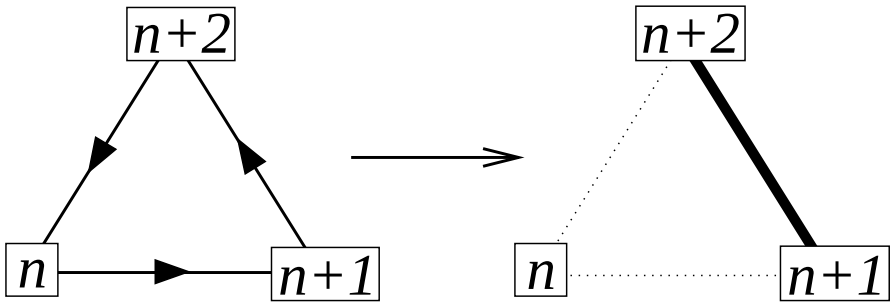


FIG. 3.2 – Transformation locale d'une face blanche d'une triangulation eulérienne. Les étiquettes des sommets incidents sont nécessairement de la forme $n \to n+1 \to n+2$, dans le sens de l'orientation (pour la face externe, le sens apparaît inversé). On conserve alors l'arête $n+1 \to n+2$ (marquée en gras) en effaçant les deux autres (en pointillés).

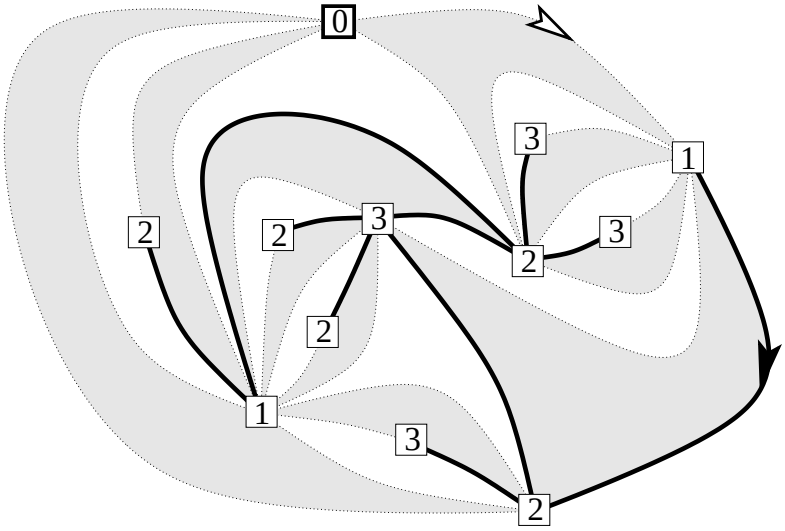


FIG. 3.3 – Application de la transformation locale à chaque face blanche d'une triangulation eulérienne. Il apparaît que le graphe obtenu (formé par les arêtes en gras) est un arbre, qui peut être naturellement enraciné sur l'unique arête adjacente à la face externe. Les étiquettes aux extrémités de chaque arête diffèrent de un : l'arbre est très bien étiqueté.

sur la figure 3.5). Ce fait sera justifié par la suite. La face externe étant blanche, une unique arête de l'arbre y est incidente et peut être prise comme racine en conservant son orientation. Par construction, les sommets de l'arbre portent des étiquettes, ayant les propriétés suivantes :

- la différence des étiquettes le long de chaque arête de l'arbre est de ± 1,
- toutes les étiquettes sont strictement positives,
- la racine part d'un sommet d'étiquette 1.

Nous obtenons donc un arbre très bien étiqueté à k arêtes.

Justification de la construction

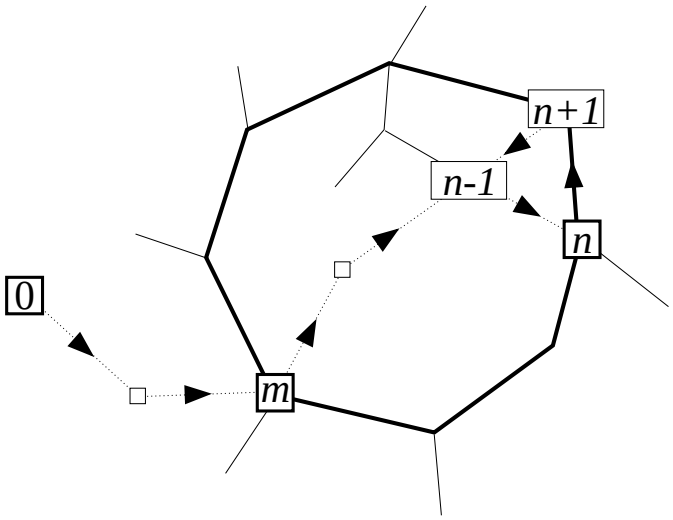


FIG. 3.4 – Schéma de la preuve de l'absence de boucle dans le graphe obtenu par les règles de la figure 3.2 (voir texte).

Une fois la transformation locale écrite, il est facile de voir pourquoi la procédure construit bien un arbre. Supposons, en raisonnant par l'absurde, que le graphe contient un *cycle*. Ce cycle passe par un certain nombre de sommets étiquetés : notons n le minimum des étiquettes rencontrées, et considérons un sommet sur le cycle ayant étiquette n. Comme illustré sur la figure 3.4, la minimalité de n implique que les sommets adjacents sur le cycle ont une étiquette $n+1$ et, par la définition de la transformation locale, nous concluons à l'existence d'un sommet étiqueté $n-1$ dans *l'intérieur* du cycle (c'est-à-dire dans la région délimitée par le cycle ne contenant pas l'origine), ou éventuellement sur le cycle lui-même. Ceci est absurde, car il existe alors un chemin orienté de longueur $n-1$ menant à ce sommet, qui rencontre le cycle en un sommet d'étiquette $m \leq n-1$, en contradiction avec l'hypothèse de minimalité de n.

Nous avons ainsi montré que le graphe ne peut contenir de cycle, ce qui implique qu'il s'agit d'une *forêt* (réunion d'arbres disjoints). Un simple argument de comptage permet de conclure : rappelons tout d'abord que, par construction, aucune arête du graphe n'est adjacente à l'origine, et celle-ci est alors enlevée. La triangulation comptant $k+2$ sommets (dont l'origine), la forêt compte $k+1$ sommets pour k arêtes : il s'ensuit que celle-ci est constituée d'un arbre unique, la différence des nombres de sommets et d'arêtes comptant le nombre d'arbres (composantes connexes).

Ceci achève de prouver que l'application de la transformation locale sur chaque face blanche

d'une triangulation eulérienne de $3k$ arêtes définit un arbre très bien étiqueté de k arêtes. Cette construction établit une bijection, ce que nous prouvons en exhibant l'application inverse.

3.1.2 Des arbres aux cartes

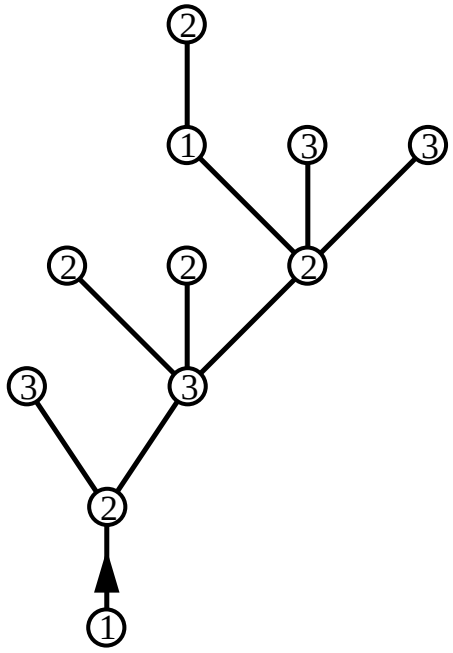


FIG. 3.5 – Un arbre très bien étiqueté. Il s'agit d'un arbre enraciné (la racine étant indiquée par une flèche) dont les sommets peuvent avoir des degrés arbitraires. Les sommets portent des étiquettes qui sont des entiers strictement positifs, variant de ± 1 le long de chaque arête, et le sommet à l'origine de la racine a pour étiquette 1.

Considérons à présent un arbre très bien étiqueté, comme illustré sur la figure 3.5. Rappelons que dans un arbre très bien étiqueté, les sommets portent des étiquettes strictement positives, différant de ± 1 le long de chaque arête, et l'arête-racine part d'un sommet d'étiquette 1. Notons qu'il n'existe aucune contrainte sur les degrés des sommets. Nous commençons par présenter la construction avant de justifier qu'elle aboutit bien à une triangulation eulérienne.

Cordes, coins et triangles

Les arêtes d'un arbre très bien étiqueté peuvent être naturellement orientées dans le sens des étiquettes croissantes. Pour chaque arête de l'arbre, mettons de type $n \to n+1$ ($n \geq 1$), nous traçons une *corde* partant du milieu de l'arête, par la gauche de celle-ci, et menant à un sommet d'étiquette $n-1$. Le cas $n = 1$ est traité également, en ajoutant un nouveau sommet isolé, d'étiquette 0, dans la face externe. Il s'avère que, à déformation (de la sphère) près, il existe une manière unique de tracer les cordes sans croisement : en parcourant le contour de l'arbre dans le sens indirect, chaque arête de l'arbre de type $n \to n+1$ avec $n \geq 2$ doit être connectée à son *coin successeur*, c'est-à-dire le premier secteur incident à un sommet $n-1$ rencontré sur la suite du parcours. La validité de cette construction repose sur les propriétés des étiquettes de l'arbre, et la figure 3.6 en présente une illustration.

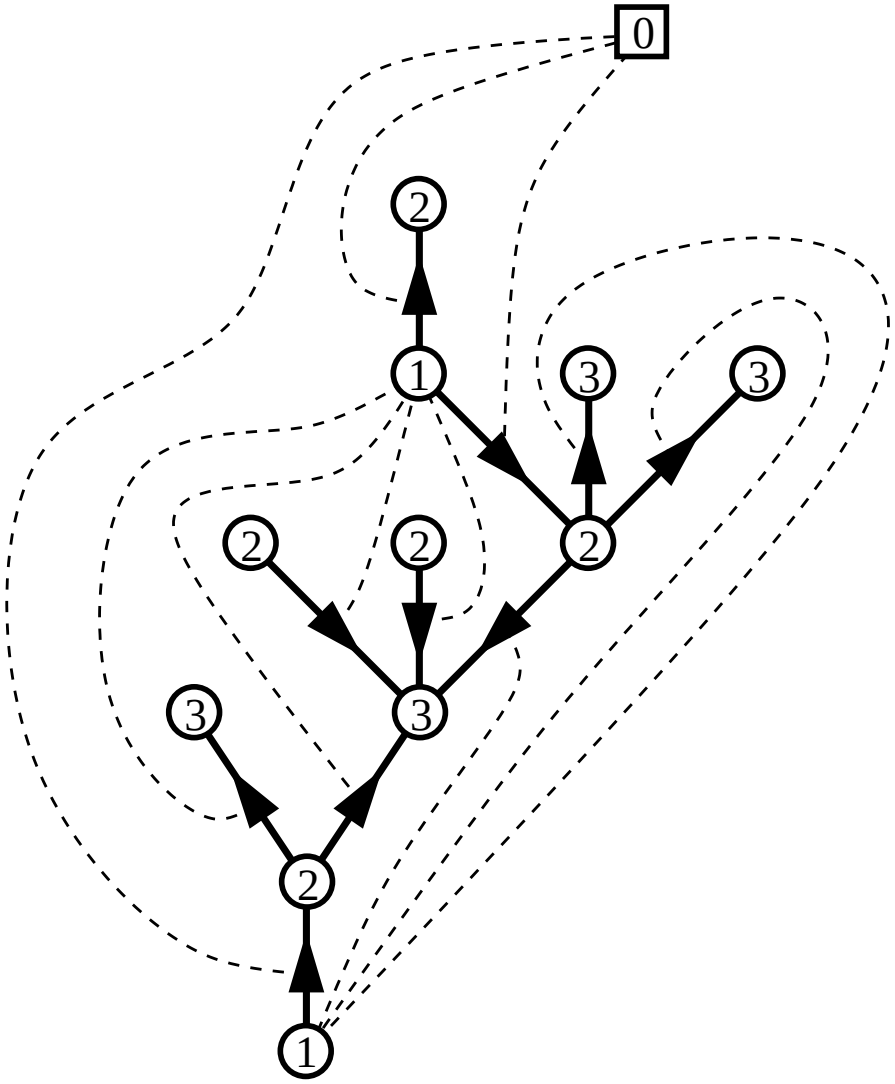


FIG. 3.6 – Positionnement des cordes sur un arbre très bien étiqueté : chaque arête de l'arbre est naturellement orientée dans le sens $n \to n+1$, et de son milieu part à gauche une corde menant au premier coin $n-1$ rencontré en parcourant le contour de l'arbre dans le sens indirect. Les arêtes $1 \to 2$ sont reliées à un nouveau sommet isolé d'étiquette 0. Les contraintes sur les étiquettes de l'arbre assurent que les cordes peuvent être tracées sans croisement par emboîtement.

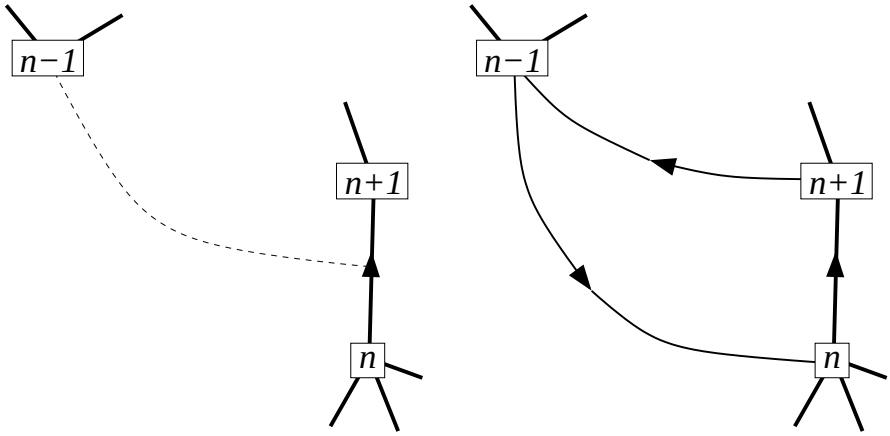


FIG. 3.7 – Les cordes tracées autour de l'arbre permettent de définir de nouvelles arêtes, formant un triangle orienté dans le sens direct.

À partir des cordes, nous pouvons définir de nouvelles arêtes selon la construction illustrée sur la figure 3.7 : pour chaque arête $n \to n+1$, d'où part une corde menant à un sommet $n-1$, nous ajoutons deux arêtes afin d'obtenir un triangle $n-1 \to n \to n+1$ (en effaçant la corde), orienté dans le sens direct. Les cordes ne se croisant pas, nous obtenons une carte planaire. Dans le cas de la racine de l'arbre, nous plaçons les deux nouvelles arêtes de telle façon que le triangle ainsi formé soit la face externe.

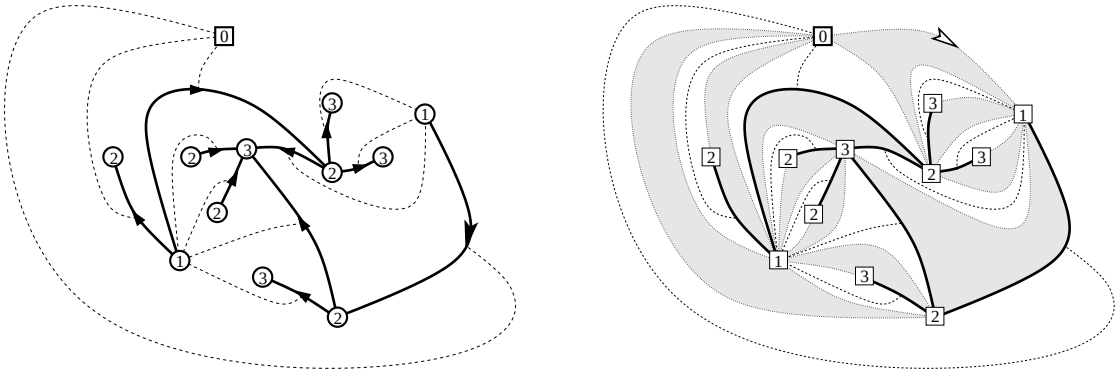


FIG. 3.8 – Construction de la triangulation eulérienne associée à un arbre très bien étiqueté. Nous traçons les cordes sur l'arbre, correspondant à celui de la figure 3.5 après déformation. Par la règle de la figure 3.7, chaque corde donne une face (blanche) triangulaire, autour de laquelle les orientations des arêtes (non représentées ici) tournent dans le sens direct. Le complémentaire est constitué de faces (noires) ayant une orientation opposée, qui sont également triangulaires.

Cette procédure est illustrée sur la figure 3.8. Nous obtenons une carte planaire, ayant par construction un certain nombre de propriétés :

- Toutes les arêtes sont orientées, et leur face à gauche est triangulaire, orientée uniformément dans le sens direct.
- Par complémentarité, les faces à droite des arêtes sont orientées uniformément dans le sens indirect. Ceci définit une bicoloration des faces en blanc (sens direct) ou noir (sens indirect).

- L'étiquette des sommets, positive, augmente de 1 ou diminue de 2 le long d'une arête orientée. Tout sommet étiqueté $n \geq 1$ est adjacent à au moins un sommet étiqueté $n-1$, et il existe un unique sommet étiqueté 0, l'origine. Ceci assure que l'étiquette correspond à la longueur minimale des chemins orientés depuis l'origine.
- La carte peut être réenracinée sur l'unique arête $0 \to 1$ incidente à la face externe.
- Si k est le nombre d'arêtes de l'arbre, la carte en compte $3k$.

Il apparaît de plus sur la figure 3.8 que les faces noires sont également triangulaires. De plus, nous notons immédiatement que, en appliquant la construction de la section précédente à la triangulation eulérienne ainsi obtenue, nous retrouvons l'arbre initial de départ. Pour achever d'établir la bijection entre cartes eulériennes enracinées à $3k$ arêtes et arbres très bien étiquetés à k arêtes, il reste donc à justifier les points suivants :

- les faces noires obtenues par la présente construction sont triangulaires,
- partant d'une triangulation eulérienne planaire enracinée, l'application de la construction de la section précédente, suivie de celle-ci, restaure la carte initiale.

Justification de la construction inverse

Considérons une face noire de la carte eulérienne associée à un arbre très bien étiqueté. Par construction, les arêtes sont orientées dans le sens indirect autour de la face, et les étiquettes des sommets augmentent de 1 ou diminuent de 2 dans ce sens. Par cyclicité, il existe nécessairement une arête incidente de type $n+1 \to n-1$, pour $n \geq 1$. D'après la règle illustrée sur la figure 3.7, une telle arête est incidente à gauche à un triangle blanc $n-1 \to n \to n+1$, provenant d'une corde issue de l'arête $n \to n+1$ appartenant à l'arbre original. Nous pouvons alors distinguer plusieurs cas, discutés sur la figure 3.9 : suivons le contour de l'arbre dans le sens direct, à partir de l'arête $n \to n+1$:

- si l'arête suivante est de type $n+1 \to n+2$ (cas a et b sur la figure 3.9), une corde en part à gauche, et mène à un sommet n. Suivons alors le contour à partir de ce sommet :
  - si l'arête suivante est de type $n \to n+1$ (cas a), une nouvelle corde part à gauche, vers un sommet $n-1$ qui est nécessairement le même que celui initialement considéré. Ceci résulte de la caractérisation des cordes par les coins successeurs.
  - si l'arête suivante est de type $n \leftarrow n-1$ (cas b), ce dernier sommet $n-1$ est nécessairement celui initialement considéré.
- si l'arête suivante est de type $n+1 \leftarrow n$ (cas c et d), nous poursuivons le long du contour :
  - si l'arête suivante est de type $n \to n+1$ (cas c), une corde part à gauche, nécessairement vers le sommet $n-1$ initial.
  - si l'arête suivante est de type $n \leftarrow n-1$ (cas d), ce dernier est nécessairement sommet $n-1$ initial.

Dans tous les cas, les arêtes de l'arbre, ou celles construites à partir des cordes, délimitent une face triangulaire noire. Ceci achève de justifier que la carte associée à un arbre très bien étiqueté est une triangulation eulérienne.

Montrons enfin que, partant d'une triangulation eulérienne planaire enracinée, à laquelle nous associons un arbre très bien étiqueté par transformation locale des faces blanches, nous retrouvons la triangulation initiale par construction des cordes et faces blanches. En fait, il suffit de montrer que, pour toute face blanche $n-1 \to n \to n+1$ de la carte ($n \geq 1$), donnant une arête $n \to n+1$ dans l'arbre, la corde issue de cette arête est nécessairement connectée au sommet $n-1$ considéré. Lorsque $n-1=0$, ceci est automatiquement le cas. Lorsque $n \geq 2$, tous les sommets considérés sont sur l'arbre, et nous sommes dans l'une des situations illustrées sur la figure 3.10 :

- En ajoutant à l'arbre les arêtes $n-1 \to n$, $n+1 \to n-1$, nous obtenons une carte comprenant trois faces : la face blanche considérée, et deux régions qui sont réunion de

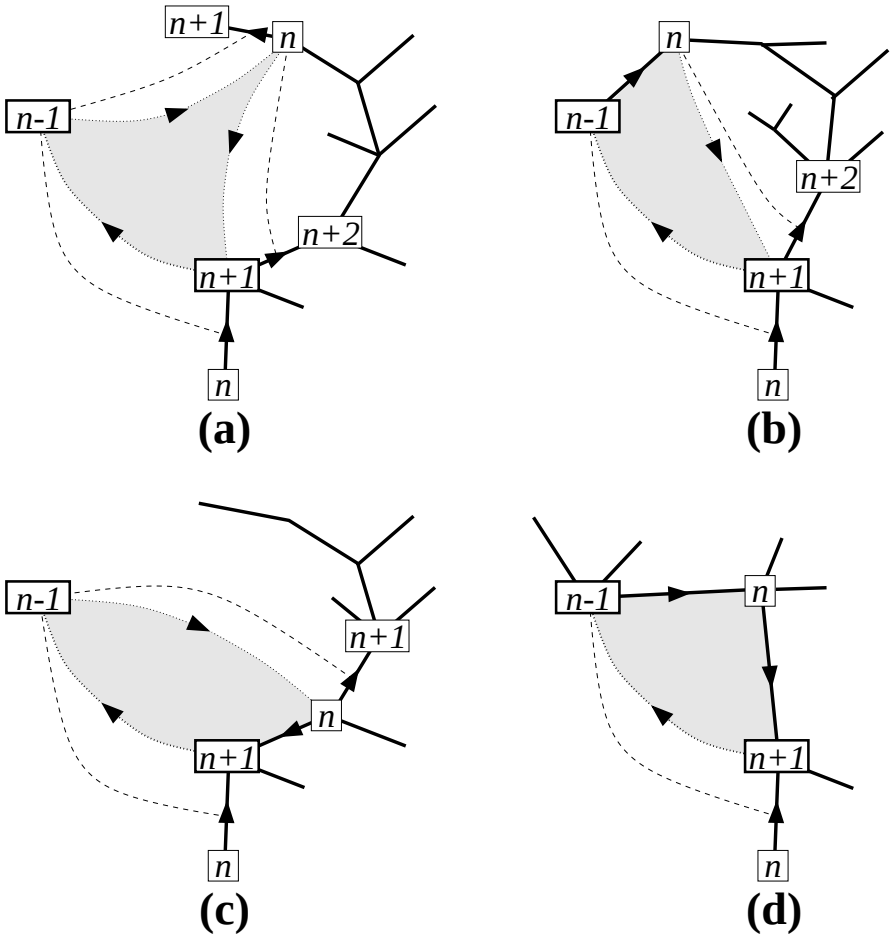


FIG. 3.9 – Configurations possibles d'une face noire de la carte eulérienne associée à un arbre très bien étiqueté. Cette face est nécessairement incidente à une arête $n+1 \to n-1$ pour $n \geq 1$, provenant d'une corde issue d'une arête $n \to n+1$ de l'arbre (en bas). Plusieurs cas peuvent être distingués selon les étiquettes environnantes dans l'arbre, mais, comme expliqué dans le texte, la caractérisation des cordes assure que, dans tous les cas, la face noire est triangulaire.

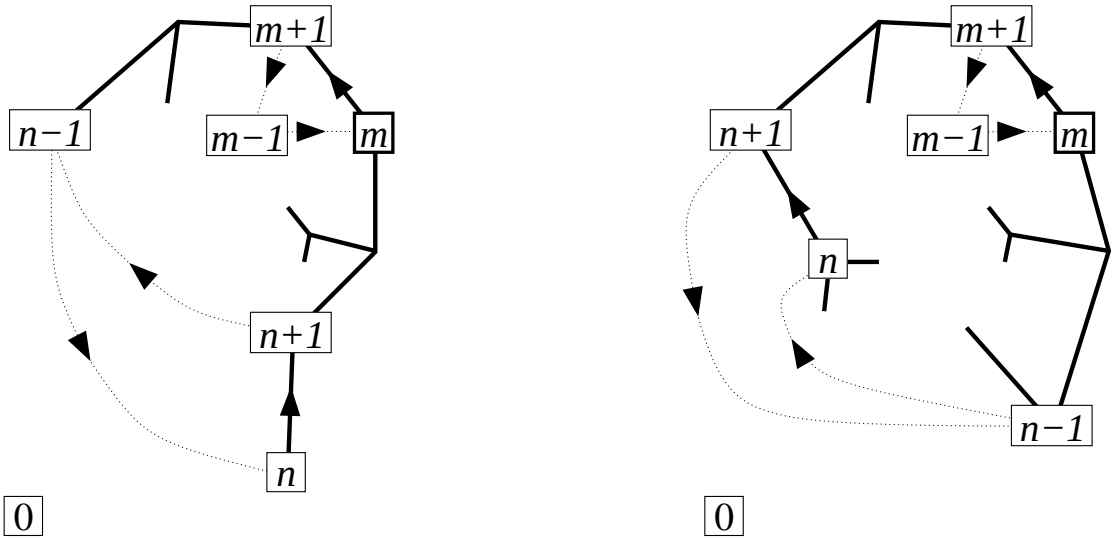


FIG. 3.10 – Configurations possibles a priori d'une face blanche $n-1 \to n \to n+1$ ($n \geq 2$) d'une triangulation eulérienne, par rapport à l'arbre très bien étiqueté associé. Comme expliqué dans le texte, la seconde situation est impossible, et dans la première nous avons nécessairement $m \geq n$. Ainsi, la corde issue de l'arête $n \to n+1$ mène au sommet $n-1$, et la face est restaurée par la construction de la figure 3.7.

faces de la triangulation eulérienne originale.
- L'une de ces deux régions, dite *intérieure*, ne contient pas l'origine : les deux situations illustrées sont possibles a priori.
- Sur le contour de l'arbre inclus dans la région intérieure, orienté dans le sens direct, considérons une arête arbitraire de type $m \to m+1$: selon les règles de transformation locale définissant l'arbre (cf figure 3.2), nous en déduisons l'existence d'un triangle blanc $m-1 \to m \to m+1$ inclus dans la région intérieure, celle-ci étant réunion de faces de la triangulation originale). Le sommet $m-1$ est nécessairement sur le contour car l'arbre visite tous les sommets distincts de l'origine.

Nous voyons alors que nécessairement $m \geq n$, et que la seconde situation illustrée est impossible. Supposons en effet, pour un raisonnement par l'absurde, que $m < n$: en suivant le contour à partir du sommet $m-1$ (distinct du dernier sommet $n-1$), nous rencontrons nécessairement une arête $m' \to m'+1$ avec $0 < m' < m$, car les étiquettes varient de ± 1. En itérant le raisonnement pour cette arête, nous pouvons alors construire une suite infinie strictement décroissante d'entiers positifs, ce qui est absurde. La seconde situation est impossible, car il y existe nécessairement une arête $m \to m+1$ sur le contour avec $m \leq n-1$. Ainsi, la première situation est la seule possible, et toutes les étiquettes sur le contour sont supérieures à n, hormis la dernière : le coin successeur de l'arête $n \to n+1$ est incident au sommet $n-1$ et, par la construction de la figure 3.7, la face blanche est restaurée. Par bicoloriabilité, l'ensemble des arêtes de la triangulation sont restaurées, ce qui achève de prouver la bijection.

3.1.3 Application à l'énumération

Voyons maintenant les conséquences de cette correspondance pour l'énumération des triangulations eulériennes et des arbres très bien étiquetés. Nous savons déjà, depuis le chapitre 2, que

les triangulations eulériennes planaires enracinées de $3k$ arêtes sont duales aux cartes bicubiques planaires enracinées de $3k$ arêtes, en nombre :

$$\frac{3 \cdot 2^{k-1}}{(k+2)(k+1)} \binom{2k}{k}. \tag{3.1}$$

Il s'avère cependant instructif de chercher à retrouver cette formule via la bijection avec les arbres très bien étiquetés.

Décomposition récursive des arbres très bien étiquetés

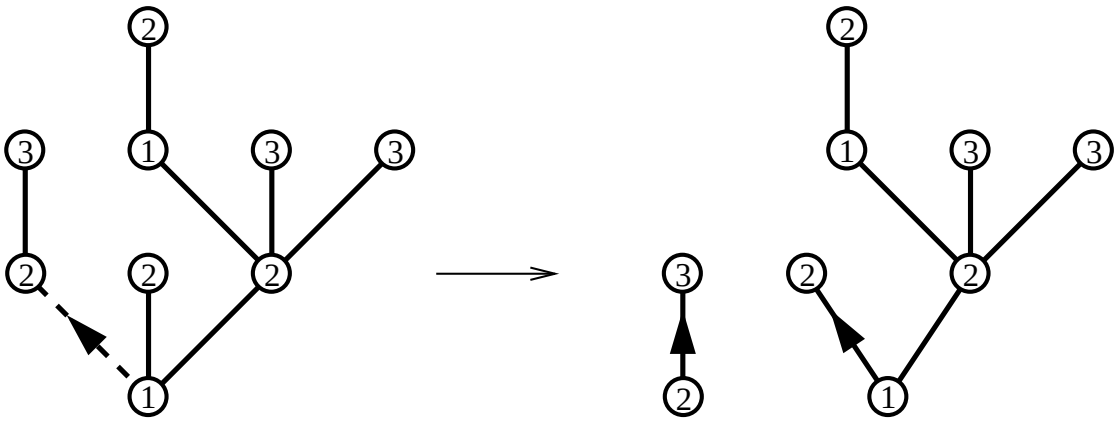


FIG. 3.11 – Décomposition d'un arbre très bien étiqueté par effacement de la racine. Lorsque les composantes séparées ne sont pas réduites à un sommet isolé, elles peuvent être identifiées à des arbres enracinés.

Considérons un arbre très bien étiqueté : l'arête-racine relie deux sommets étiquetés respectivement 1 et 2. En effaçant l'arête-racine, nous obtenons deux composantes connexes, contenant chacune l'un de ces sommets. Ces composantes peuvent être réduites aux sommets isolés, ou bien peuvent être elles-mêmes vues comme des arbres enracinés, comme illustré sur la figure 3.11. Cependant, l'un d'entre eux n'est pas un arbre enraciné, puisque l'arête-racine part d'un sommet 2.

Nous pouvons « fermer » cette décomposition récursive en introduisant, pour tout n entier, l'ensemble $\mathcal{L}_n$ des arbres plans enracinés dont les sommets portent des étiquettes vérifiant les propriétés suivantes :

- les étiquettes sont des entiers strictement positifs,
- les étiquettes sur deux sommets reliés par une arête diffèrent de 1 en valeur absolue,
- l'étiquette à l'origine de la racine est n.

Il s'avère commode d'inclure de plus l'arbre réduit à un sommet isolé d'étiquette n, formant un singleton noté $\langle n \rangle$. Ainsi $\mathcal{L}_1 \setminus \langle 1 \rangle$ n'est autre que l'ensemble des arbres très bien étiquetés, et par convention nous posons $\mathcal{L}_n = \langle n \rangle = \emptyset$ pour $n \leq 0$.

Nous pouvons alors immédiatement étendre la décomposition de l'arête-racine vue plus haut : étant donné un arbre de $\mathcal{L}_n \setminus \langle n \rangle$ ($n \geq 1$), par effacement de la racine, nous obtenons d'une part un élément de $\mathcal{L}_n$, d'autre part un élément de $\mathcal{L}_{n+1} \cup \mathcal{L}_{n-1}$. Cette décomposition récursive est une bijection, valable pour tout $n \geq 1$:

$$\mathcal{L}_n \cong \langle n \rangle \cup \mathcal{L}_n \times (\mathcal{L}_{n+1} \cup \mathcal{L}_{n-1}). \tag{3.2}$$

Notons que le nombre de sommets ayant un étiquette donnée est conservé.

Le comptage des arbres très bien étiquetés

La bijection (3.2) se traduit immédiatement par une équation pour les séries génératrices L_n associées, avec un poids t par arête :

$$L_n = \begin{cases} 1 + tL_n(L_{n+1} + L_{n-1}) & \text{si} \quad n \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \leq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Le facteur t correspond à l'arête-racine, et assure que cette équation détermine les L_n en tant que séries formelles en t. Notons que l'équation pour $n \geq 1$ peut s'écrire aussi :

$$L_n = \frac{1}{1 - t(L_{n+1} + L_{n-1})} \tag{3.4}$$

et s'interprète alors comme une décomposition par effacement de l'origine de la racine, et de toutes ses arêtes incidentes.

L'équation (3.3) peut être interprétée comme une équation de récurrence non-linéaire en n, à deux termes, valable pour tout $n \geq 1$. Cependant, nous n'avons a priori qu'une condition initiale $L_0 = 0$, ce qui ne suffit pas à déterminer la solution. Il convient en fait d'ajouter la condition $L_n \to L$ pour $n \to \infty$, où L est solution de :

$$L = 1 + 2tL^2 \tag{3.5}$$

Cette équation détermine L en tant que série formelle en t, sous la forme :

$$L = \frac{1 - \sqrt{1 - 8t}}{4t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} (2t)^k. \tag{3.6}$$

La convergence $L_n \to L$ peut être justifiée, au sens des séries formelles, en notant que par itérations de l'équation (3.3), nous obtenons $L = L_n + O(t^n)$. D'un point de vue combinatoire, cette limite peut se comprendre en notant que, par une translation globale des étiquettes, $\mathcal{L}_n$ est en bijection avec l'ensemble des arbres plans enracinés, à sommets étiquetés, tels que :

- les étiquettes sont des entiers, augmentant de ± 1 le long de chaque arête,
- l'origine de la racine a pour étiquette 0,
- toutes les étiquettes sont strictement supérieures à $-n$.

Ainsi, lorsque $n \to \infty$, $\mathcal{L}_n$ a pour « limite » l'ensemble $\mathcal{L}$ des arbres définis comme ci-dessus, sans la dernière contrainte. Le développement de l'équation (3.6) s'interprète immédiatement en notant que le nombre de Catalan $c_k \equiv \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ est le nombre d'arbres plans enracinés à k arêtes (sans étiquettes) : un élément de $\mathcal{L}$ est alors obtenu en choisissant la différence ± 1 des étiquettes pour chaque arête de l'arbre (par exemple dans le sens montant depuis la racine), soit un total de 2^k choix.

Revenons à présent à l'équation (3.3) : nous verrons dans le chapitre 4 que, de façon remarquable, une expression exacte de L_n peut être obtenue, ce qui est une manifestation d'une profonde propriété d'intégrabilité. Nous nous contentons de mentionner ici que l'équation possède une *intégrale première discrète* :

$$\Phi(L_n, L_{n+1}) \equiv (1 - tL_n)(1 - tL_{n+1})(1 + tL_nL_{n+1}). \tag{3.7}$$

On vérifie aisément que l'équation (3.3) implique que pour $n \neq 0$:

$$\Phi(L_{n-1}, L_n) = \Phi(L_n, L_{n+1}). \tag{3.8}$$

Ainsi la quantité $\Phi(L_n, L_{n+1})$ est *conservée* (constante) sur $n = 0, 1, 2, \ldots$. En particulier, si nous prenons $n = 0$ puis $n \to \infty$, nous obtenons l'équation $\Phi(0, L_1) = \Phi(L, L)$, qui se réduit via l'équation (3.6) à :

$$\begin{aligned} L_1 - 1 &= \frac{(1-8t)^{3/2} - 1 + 12t - 24t^2}{32t^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{(k+2)(k+1)} \binom{2k}{k} t^k \end{aligned} \tag{3.9}$$

$L_1 - 1$ n'est autre que la série génératrice des arbres très bien étiquetés avec un poids t par arête, et également la série génératrice des triangulations eulériennes planaires enracinées avec un poids t par face blanche. On notera enfin que tant L que L_1 ont un rayon de convergence en t de $1/8$.

Autres résultats d'énumération

Dans la construction associant à toute triangulation eulérienne planaire enracinée un arbre très bien étiqueté, le choix de la racine influe des façons suivantes :

- l'origine de la racine sert de point de référence pour l'étiquetage des sommets (il est le seul sommet d'étiquette 0),
- la face à gauche de la racine est supposée blanche, prise comme face externe pour la représentation planaire, et permet d'enraciner naturellement l'arbre sur son arête incidente de type $1 \to 2$.

Il s'avère que, si le premier point est crucial, le second ne joue qu'un rôle marginal : nous pouvons, au prix d'une légère modification de la bijection, adapter la bijection au cas des triangulations eulériennes planaires *pointées*, c'est-à-dire avec un simple sommet marqué qu'on appellera *origine* (l'enracinement revenant à choisir, de plus, une arête lui étant incidente). On suppose de plus qu'un bicoloriage des faces en blanc et noir est fixé. Ainsi, les arêtes peuvent être orientées canoniquement, en imposant qu'elles tournent dans le sens direct autour des faces blanches ; l'étiquetage des sommets, par la longueur minimale des chemins orientés depuis l'origine, est bien défini. Nous pouvons alors effectuer la transformation locale de la figure 3.2 dans chaque face triangulaire blanche : le graphe obtenu est constitué de l'origine 0 isolé (que l'on efface), et d'un arbre. Cet arbre est **non-enraciné**, tous ses sommets sont étiquetés par des entiers, variant de ± 1 le long d'une arête, et **il existe nécessairement un sommet d'étiquette 1** (car il existe au moins un triangle blanc $0 \to 1 \to 2$). Cette construction est une bijection, et la construction inverse est obtenue à nouveau en traçant les cordes, la contrainte d'existence d'un sommet d'étiquette 1 assure qu'une corde au moins lui est reliée à l'origine.

Cette bijection s'avère peu exploitable telle quelle pour l'énumération, car tant les cartes pointées que les arbres non-enracinés peuvent posséder des symétries internes rendant leur énumération difficile, en plus de l'absence de décomposition récursive évidente. Nous pouvons toutefois considérer une triangulation eulérienne planaire pointée **et** enracinée, où l'arête-racine ne part pas nécessairement de l'origine (mais est supposée orientée de manière cohérente avec une face blanche à gauche). Dans ce cas, la racine fournit une manière naturelle d'enraciner l'arbre associé à la carte (construit en fonction de l'origine seule), mais quelque attention doit être portée au fait que cette arête-racine peut, selon le cas, être ou ne pas être dans l'arbre :

1. si la racine est de type $n \to n+1$ et incidente à une face blanche $n-1 \to n \to n+1$, elle est dans l'arbre et l'enracine naturellement,
2. si la racine est de type $n \to n+1$ et incidente à une face blanche $n \to n+1 \to n+2$, elle n'est pas dans l'arbre mais celui-ci peut être enraciné sur l'arête $n+1 \to n+2$,

3. si la racine est de type $n \to n-2$, nécessairement incidente à une face $n-2 \to n-1 \to n$, elle n'est pas dans l'arbre mais celui-ci peut être enraciné sur l'arête $n-1 \to n$.

Nous pouvons alors décomposer récursivement les arbres enracinés pour en déduire l'expression des séries génératrices en fonction des L_n, mais il faut de plus tenir compte de la contrainte d'existence d'un sommet étiqueté 1. Cette dernière contrainte est facilement traitée en notant, par exemple, que le sous-ensemble de $\mathcal{L}_n$ correspondant aux arbres n'ayant pas de sommet étiqueté 1 est en bijection évidente avec $\mathcal{L}_{n-1}$. Nous aboutissons *in fine* à l'expression suivante pour les séries génératrices des triangulations eulériennes pointées et enracinées avec un poids t par arête, selon les cas discutés ci-dessus :

1. $t(L_nL_{n+1} - L_{n-1}L_n)$,
2. $t(L_{n+1}L_{n+2} - L_nL_{n+1})$,
3. $t(L_{n-1}L_n - L_{n-2}L_{n-1})$.

En sommant sur ces différents cas disjoints, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, nous obtenons une série télescopique de somme $3tL^2 = \frac{3(L-1)}{2}$, qui n'est autre que la série génératrice des triangulations eulériennes planaires pointées et enracinées. De façon similaire, $L_n - 1$ peut s'interpréter comme la série génératrice des triangulations eulériennes planaires pointées et enracinées sur une arête de type $m \to m+1$ avec $m < n$.

Au-delà de ces résultats, qui trouveront plus ample application dans le chapitre 4, il serait intéressant de parvenir à une interprétation combinatoire simple de la propriété d'intégrabilité, c'est-à-dire de la relation $\Phi(L_{n-1}, L_n) = \Phi(L_n, L_{n+1})$, où Φ est donné par l'équation (3.7).

3.1.4 Analogie : quadrangulations et arbres bien étiquetés

Nous terminons cette section par une présentation très analogue de la bijection originale de Schaeffer *et al.* [68, 69] entre les quadrangulations planaires enracinées et les arbres dits bien étiquetés. Rappelons qu'une quadrangulation est une carte dont toutes les faces ont degré 4. La bijection est résumée dans le résultat suivant :

> Un arbre *bien étiqueté* est un arbre plan enraciné sur une arête, dont les sommets portent des étiquettes vérifiant les propriétés suivantes :
> – les étiquettes sont des entiers strictement positifs,
> – les étiquettes sur deux sommets reliés par une arête diffèrent de 1, 0 ou -1,
> – l'étiquette à l'origine de la racine est 1.
>
> Il existe une bijection entre l'ensemble des quadrangulations planaires enracinées à $2k$ arêtes, et les arbres bien étiquetés à k arêtes.

On notera qu'un arbre très bien étiqueté est un arbre bien étiqueté dans lequel aucune arête ne relie deux sommets de même étiquette. Comme précédemment, la bijection peut être obtenue par une construction géométrique, que nous résumons comme suit.

Bijection

Partant d'une quadrangulation planaire enracinée à k faces, nous pouvons étiqueter chaque sommet par sa *distance* à l'origine (de la racine), qui est la longueur minimale d'un chemin depuis l'origine. Par rapport au cas des triangulations eulériennes, il n'y a plus d'orientation des arêtes, ce qui est lié à l'absence générique de bicoloriage des faces. Par leur définition comme distance,

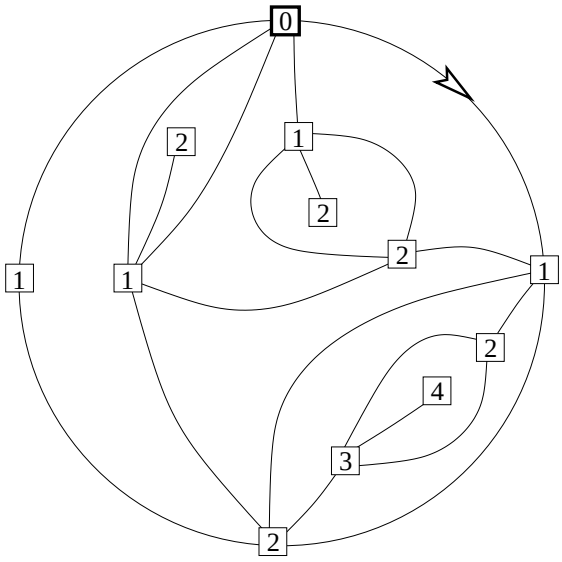


FIG. 3.12 – Exemple de quadrangulation eulérienne enracinée. Les faces sont étiquetées par la longueur du plus court chemin depuis l'origine. Le résidu de l'étiquette modulo 2 constitue un bicoloriage des sommets.

les étiquettes sur deux sommets adjacents diffèrent au plus de un. De plus, par parité des degrés des faces, la quadrangulation est bipartie (bicoloriable des sommets), et les étiquettes sur deux sommets adjacents diffèrent donc exactement de un en valeur absolue.

Ceci permet de classifier les faces de la quadrangulation selon les étiquettes des sommets incidents, comme illustré sur la figure 3.13 :

1. les faces *simples*, de la forme n — $n+1$ — $n+2$ — $n+1$,
2. les faces *confluentes*, de la forme n — $n+1$ — n — $n+1$.

Nous introduisons alors les règles de transformation locale des faces, analogues à celle pour les triangulations eulériennes, selon le type de face :

1. pour une face simple, sélectionnons l'arête $n+1$ — $n+2$ ayant la face considérée à gauche,
2. pour une face confluente, sélectionnons une nouvelle arête diagonale $n+1$ — $n+1$.

Les arêtes sélectionnées forment un graphe, plongé dans le plan sans croisement d'arêtes. Notons qu'il y a autant d'arêtes sélectionnées que de faces dans la quadrangulation, soit k, car une arête ne peut être sélectionnée que dans l'une au plus de ses faces incidentes. Par construction, l'origine 0 est un sommet isolé, que nous enlevons, et il apparaît que le reste du graphe est un arbre couvrant tous les autres sommets, comme illustré sur la figure 3.14. Ce fait peut être justifié par une preuve analogue à celle de la section précédente : le graphe ne contient pas de boucle (ce qui résulte des règles de transformation locale, car pour toute arête de l'arbre incidente à deux sommets, il existe un sommet immédiatement à gauche ayant une étiquette strictement inférieure) ; il s'agit donc d'une forêt comptant $k+1$ sommets (la quadrangulation en comptant $k+2$ dont l'origine par la relation d'Euler) pour k arêtes, donc ne compte qu'une composante connexe. L'arbre est enraciné sur l'arête sélectionnée dans la face externe, et est bien étiqueté par construction.

Réciproquement, partant d'un arbre bien étiqueté, nous construisons une quadrangulation enracinée par une construction similaire à la précédente. Ici, nous traçons des cordes non pas

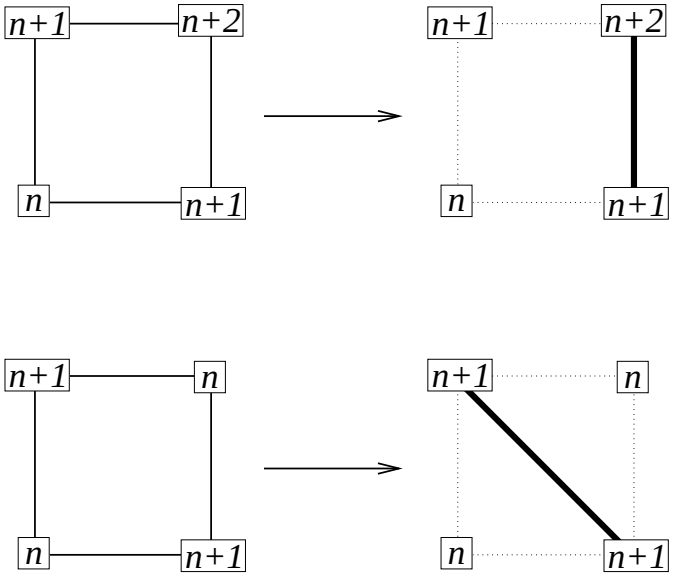


FIG. 3.13 – Transformations locales d'une face d'une quadrangulation. Les étiquettes des sommets incidents sont nécessairement de la forme n — $n+1$ — $n+2$ — $n+1$ (face simple) ou n — $n+1$ — n — $n+1$ (face confluente). Pour une face simple, nous sélectionnons l'arête $n+1$ — $n+2$ ayant la face à sa gauche (marquée en gras) ; pour une face confluente, nous sélectionnons une nouvelle arête diagonale $n+1$ — $n+1$.

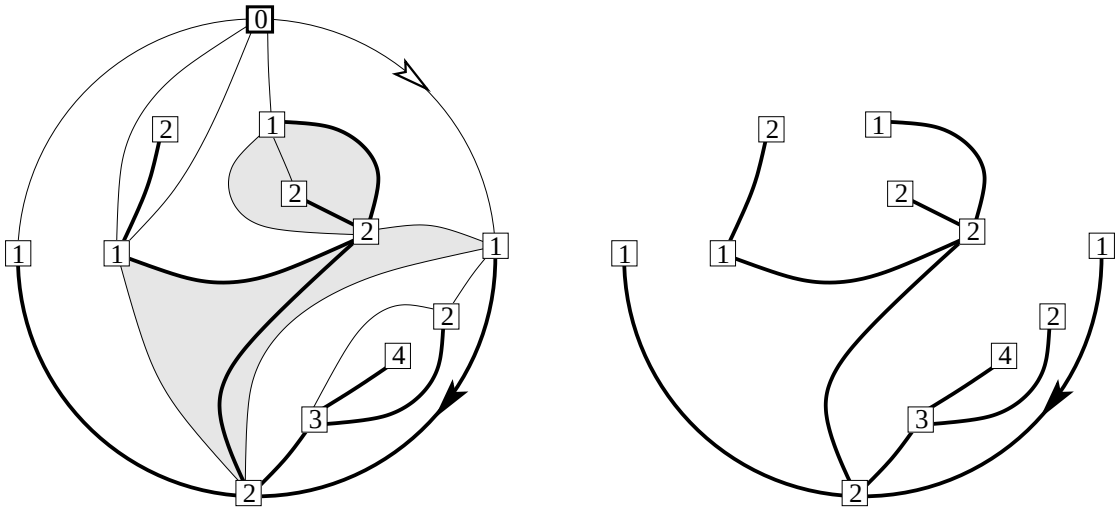


FIG. 3.14 – Application des transformations locales à chaque face d'une quadrangulation (les faces confluentes sont représentées grisées). Les arêtes sélectionnées (en gras) forment un arbre bien étiqueté, enraciné sur l'arête sélectionnée dans la face externe.

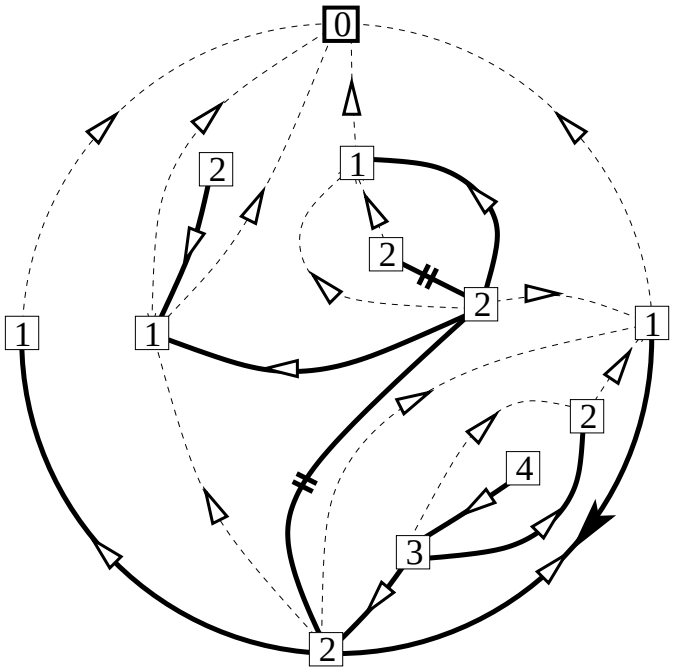


FIG. 3.15 – Construction des cordes sur un arbre bien étiqueté : chaque coin n de l'arbre est relié à son successeur, le premier coin $n-1$ rencontré après lui sur le contour de l'arbre dans le sens direct (ou un sommet externe 0 pour $n = 1$). Les flèches blanches sont dirigées vers le successeur. D'un sommet part un nombre de cordes égal à son degré dans l'arbre. Lorsqu'un coin n est immédiatement suivi d'un coin $n-1$, la corde est assimilée à l'arête de l'arbre les reliant. On obtient une quadrangulation en transformant chaque corde en une nouvelle arête, et en effaçant les arêtes reliant deux sommets de même étiquette.

entre les milieux des arêtes et coins mais, comme illustré sur la figure 3.15 entre chaque coin et son coin successeur (défini comme le premier coin rencontré sur le contour de l'arbre, dans le sens direct, ayant une étiquette immédiatement inférieure). Les cordes triviales reliant deux coins consécutifs sont assimilées aux arêtes de l'arbre. Les propriétés des arbres bien étiquetés assurent que :

- le successeur est bien défini pour tout coin, les coins étiquetés 1 étant reliés à un sommet externe 0,
- les cordes peuvent être tracées sans croisement.

Chaque corde est alors transformée en une nouvelle arête, et les arêtes de l'arbre reliant deux sommets de même étiquette sont effacées, ce qui aboutit à une quadrangulation enracinée sur l'arête menant à la racine de l'arbre. La vérification de cette construction, inverse de la précédente, se fait selon des arguments similaires au cas des triangulations eulériennes.

Énumération

Comme précédemment, nous cherchons à énumérer les arbres bien étiquetés par décomposition récursive de la racine. Nous introduisons plus généralement, pour entier n, l'ensemble $\mathcal{M}_n$ des arbres plans enracinés dont les sommets portent des étiquettes vérifiant les propriétés suivantes :

- les étiquettes sont des entiers strictement positifs,

– les étiquettes sur deux sommets reliés par une arête diffèrent de 1, 0 ou -1.
– l'étiquette à l'origine de la racine est n.

Nous incluons de plus l'arbre réduit à un sommet isolé d'étiquette $\langle n\rangle$, de telle sorte que $\mathcal{M}_1 \setminus \langle 1\rangle 1$ est l'ensemble des arbres bien étiquetés, et par convention $\mathcal{M}_n = \langle n\rangle = \emptyset$ pour $n \leq 0$. Par décomposition de la racine, nous aboutissons à la bijection suivante pour $n \geq 1$:

$$\mathcal{M}_n \cong \langle n\rangle \cup \mathcal{M}_n \times (\mathcal{M}_{n+1} \cup \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n-1}) \tag{3.10}$$

car en effet la racine relie un sommet n à un sommet $n+1$, n ou $n-1$. Pour les séries génératrices associées avec un poids t par arête, nous obtenons :

$$M_n = \begin{cases} 1 + tM_n(M_{n+1} + M_n + M_{n-1}) & \text{si} \quad n \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \leq 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Cette équation détermine les M_n comme séries formelles en t, et peut être vue comme une équation de récurrence non-linéaire à deux termes. Les conditions aux limites sont $M_0 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} M_n = M$, avec M solution de :

$$M = 1 + 3tM^2 \tag{3.12}$$

soit :

$$M = \frac{1 - \sqrt{1-12t}}{6t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}(3t)^k \tag{3.13}$$

s'interprétant comme série génératrices d'arbres sans contrainte de positivité des étiquettes (le facteur 3 correspondant alors aux 3 différences possibles des étiquettes sur chaque arête, en comparaison du 2 précédent). La récurrence discrète (3.11) possède une intégrale première :

$$\psi(M_n, M_{n+1}) \equiv (1 - tM_n - tM_{n+1})(1 + tM_nM_{n+1}). \tag{3.14}$$

En écrivant l'équation $\psi(0, M_1) = \psi(M, M)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} M_1 - 1 &= \frac{(1-12t)^{3/2} - 1 + 18t - 54t^2}{54t^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k}{(k+2)(k+1)}\binom{2k}{k}t^k \end{aligned} \tag{3.15}$$

qui n'est autre que la série génératrice des arbres très bien étiquetés, donc des quadrangulations avec un poids t par face. Le rayon de convergence est $1/12$.

Comme précédemment, nous pouvons considérer plus généralement des cartes pointées (en correspondance avec des arbres non-enracinés), dans lesquelles nous marquons une arête non-nécessairement incidente à l'origine. Par une discussion similaire au cas des triangulations eulériennes, nous pouvons montrer que $M - 1$ est la série génératrice des quadrangulations pointées avec marquage d'une arête quelconque, tandis que $M_n - 1$ correspond au marquage d'une arête de type m — $m+1$ avec $m < n$.

En conclusion, les correspondances entre triangulations eulériennes et arbres très bien étiquetés d'une part, et quadrangulations eulériennes et arbres bien étiquetés d'autre part, présentent une analogie profonde. Nous verrons dans la section suivante qu'elles apparaissent comme deux cas particuliers d'une construction générale plus complexe. Ces deux cas particuliers simples sont à rapprocher des correspondances « duales » du chapitre 2 entre cartes planaires et arbres bourgeonnants : les arbres bourgeonnants quartiques ou bicubiques en sont assurément les deux cas les plus simples.

3.2 Cartes eulériennes et mobiles

Dans cette section, nous présentons une construction générale reliant les cartes eulériennes enracinées ou pointées à des arbres ayant une structure particulière, appelés mobiles. Cette construction a été introduite dans l'article VIII. Nous verrons que cette construction préserve l'information sur les degrés des faces, ce qui permet une application à l'énumération.

3.2.1 Des cartes eulériennes pointées aux mobiles

Considérons donc une carte planaire eulérienne pointée, et voyons comment lui associer un arbre. Les degrés des sommets sont pairs, ce qui équivaut à la bicoloriabilité des faces. En l'absence d'arête-racine, nous supposons qu'une bicoloration des faces en noir et blanc (parmi deux) est donnée.

Règles de transformation locale

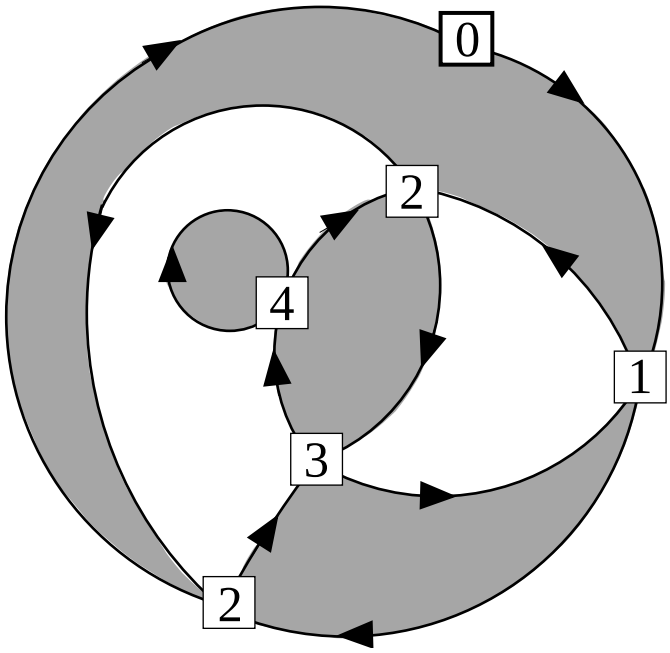


FIG. 3.16 – Exemple de carte eulérienne pointée. Les arêtes sont orientées canoniquement en imposant que la face à gauche de chaque arête est blanche. Chaque sommet peut être étiqueté par la longueur minimale d'un chemin orienté y menant depuis l'origine (qui est l'unique sommet d'étiquette 0). Chaque arête orientée relie un sommet d'étiquette m à un sommet d'étiquette $n \leq m + 1$.

Comme pour les triangulations eulériennes, les couleurs des faces déterminent une orientation pour chaque arête, en imposant que la face à gauche de chaque arête est blanche. La donnée d'une origine (le sommet marqué) permet d'étiqueter chaque sommet de la carte par la longueur minimale d'un chemin orienté de l'origine au sommet considéré, comme illustré sur la figure 3.16. Cette définition implique que :

– tous les sommets ont une étiquette strictement positive, sauf l'origine qui a étiquette 0,

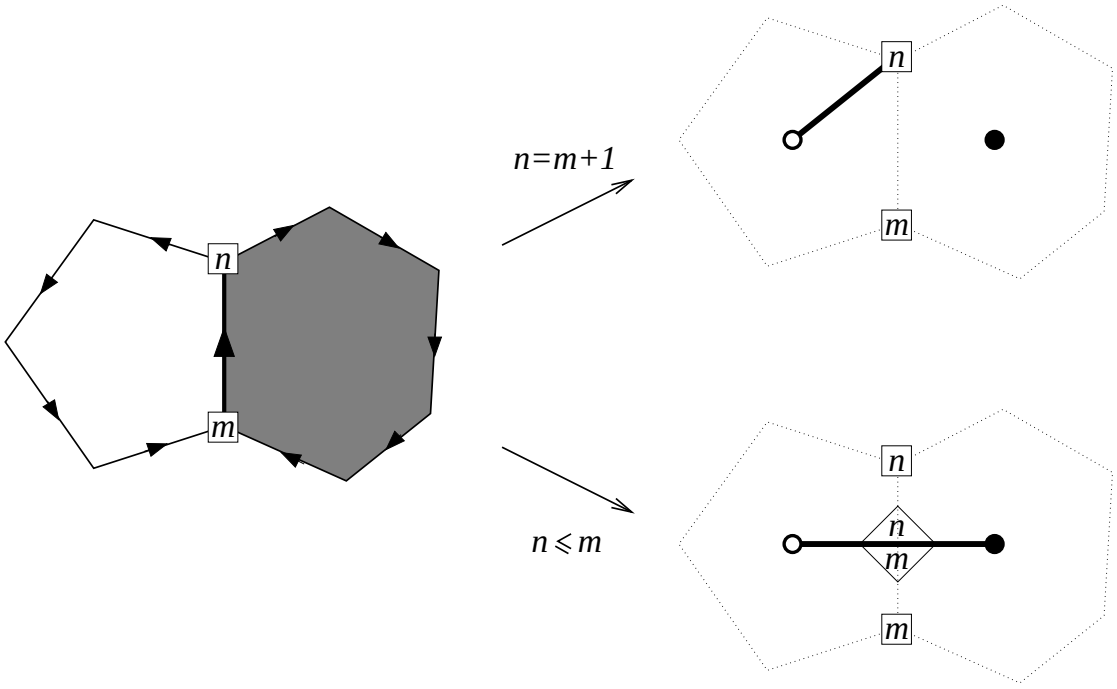


FIG. 3.17 – Règles de transformation locale pour une carte eulérienne pointée. Dans chaque face noire ou blanche, nous ajoutons un nouveau sommet respectivement noir ou blanc. Pour une arête de la carte (marquée en gras), reliant un sommet d'étiquette m à un sommet d'étiquette $n \leq m+1$, nous effectuons la construction suivante : si $n = m+1$ nous traçons une nouvelle arête reliant le sommet n au sommet dans la face blanche, sinon nous avons $n \leq m$ et nous traçons une arête reliant les sommets dans les deux faces incidentes, portant de part et d'autre des drapeaux m et n.

– pour toute arête orientée allant d'un sommet d'étiquette m à un sommet d'étiquette n, nous avons $n \leq m+1$.

Nous introduisons à présent des règles de transformation locale, généralisant celles pour les triangulations eulériennes, de la façon suivante. À l'intérieur de chaque face de la carte, nous ajoutons un nouveau sommet, ne portant pas d'étiquette, mais colorié en noir ou blanc selon la couleur de la face. Considérons alors une arête de la carte : notons m l'étiquette de son origine, n l'étiquette de son extrémité. Nous distinguons alors les deux cas suivants, illustrés sur la figure 3.17 :

– si $n = m+1$, nous traçons une nouvelle arête reliant le sommet n au sommet blanc dans la face blanche à gauche de l'arête,
– sinon, nous avons nécessairement $n \leq m$, et nous traçons une nouvelle arête *étiquetée* reliant les sommets noir et blanc dans les deux faces incidentes, portant des *drapeaux* m et n respectivement à gauche et à droite dans le sens noir $\rightarrow$ blanc.

Une telle construction s'assimile à la sélection de certaines arêtes dans la *carte dérivée* au sens de Tutte [4], qui est la carte dont les sommets sont donnés par les sommets, arêtes et faces de la carte originale, et les arêtes définies par les relations d'incidence. Cette transformation locale est effectuée séparément pour chaque arête de la carte eulérienne originale, et les nouvelles arêtes tracées constituent un graphe plongé dont les arêtes sont en correspondance biunivoque avec les

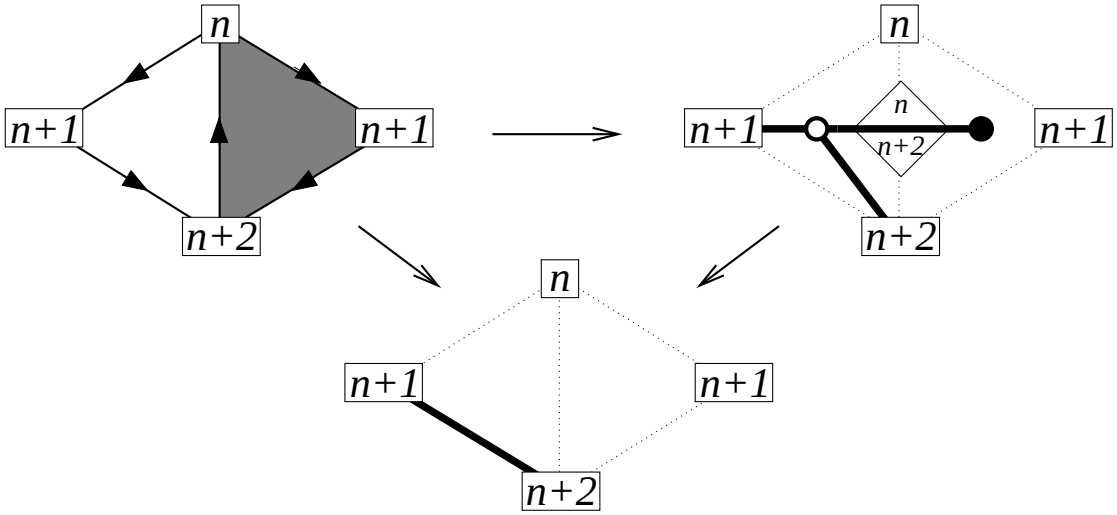


FIG. 3.18 – Comparaison avec la construction pour les triangulations eulériennes : par les règles de la figure 3.17, chaque face noire donne un sommet noir de degré un, tandis que chaque face blanche donne un sommet blanc de degré 3. Nous pouvons simplifier le graphe obtenu en supprimant les sommets noirs et blancs, et les arêtes étiquetées, tout en préservant la connectivité entre sommets étiquetés. Nous retrouvons alors la règle de transformation locale pour les faces blanches d'une triangulation eulérienne.

arêtes de la carte.

Il apparaît une différence par rapport au cas des triangulations eulériennes : ici, les transformations locales sont effectuées de façon indépendante pour chaque arête, et de nouveaux sommets et arêtes sont ajoutés par rapport à la carte originale (pour les quadrangulations, nous avons déjà vu la nécessité d'ajouter de nouvelles arêtes). Les triangulations eulériennes étant un cas particulier de cartes eulériennes, comparons les règles ci-dessus à celles de la section précédente. Comme illustré sur la figure 3.18, les étiquettes autour de chaque face d'une triangulation eulérienne pointée sont de type $n \to n+1 \to n+2$, tournant dans le sens direct autour des faces blanches et indirect autour des faces noires. Par application des règles ci-dessus :

- chaque sommet dans une face noire $n \to n+1 \to n+2$ est de degré un et relié par une arête étiquetée $n+2|n$ à un sommet blanc,
- chaque sommet dans une face blanche $n \to n+1 \to n+2$ est relié aux sommets $n+1$, $n+2$ et au sommet dans la face noire incidente à l'arête $n+2 \to n$.

Nous pouvons alors supprimer les sommets noirs et blancs, et arêtes étiquetées, tout en préservant la connectivité entre sommets étiquetés : il apparaît que cette simplification correspond aux règles de la section précédente.

Si nous appliquons les règles de transformations locales à une carte eulérienne générale (cf figure 3.19), il apparaît que par construction, l'origine devient un sommet isolé dans le graphe résultant, tandis que les autres sommets appartiennent tous à une même composante connexe qui est un arbre.

Ce fait peut encore être justifié par une généralisation des arguments de la section précédente. Supposons, en raisonnant par l'absurde, que le graphe contient un cycle : nous sommes alors dans l'un des cas suivants, schématisés sur la figure 3.20 :

1. Si le cycle passe par au moins un sommet étiqueté, considérons un tel sommet ayant

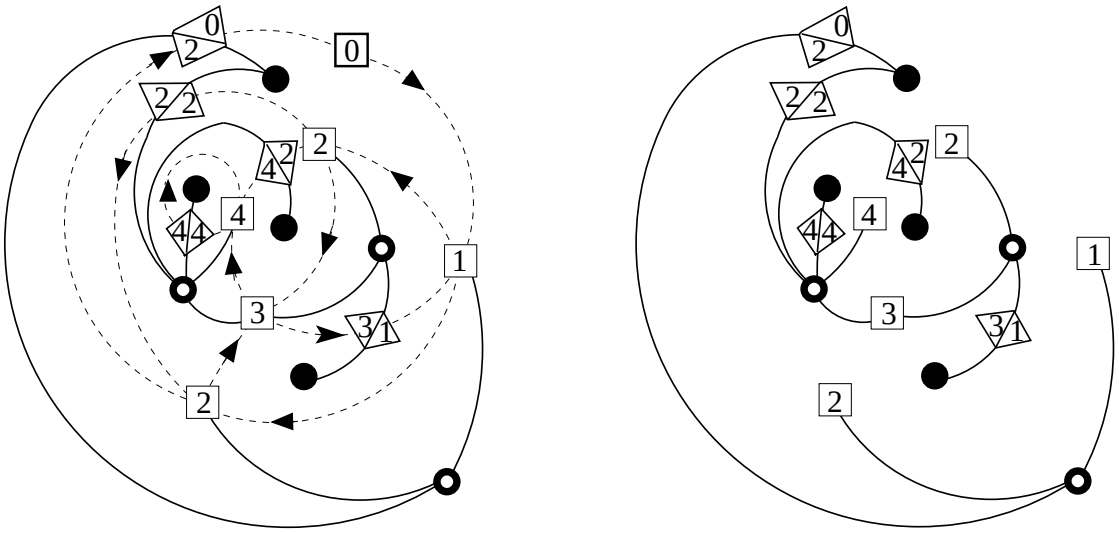


FIG. 3.19 – Application des transformations locales à chaque arête de la carte eulérienne pointée de la figure 3.16. Il apparaît que, en excluant l'origine qui est un sommet isolé par construction, le graphe résultant est un arbre.

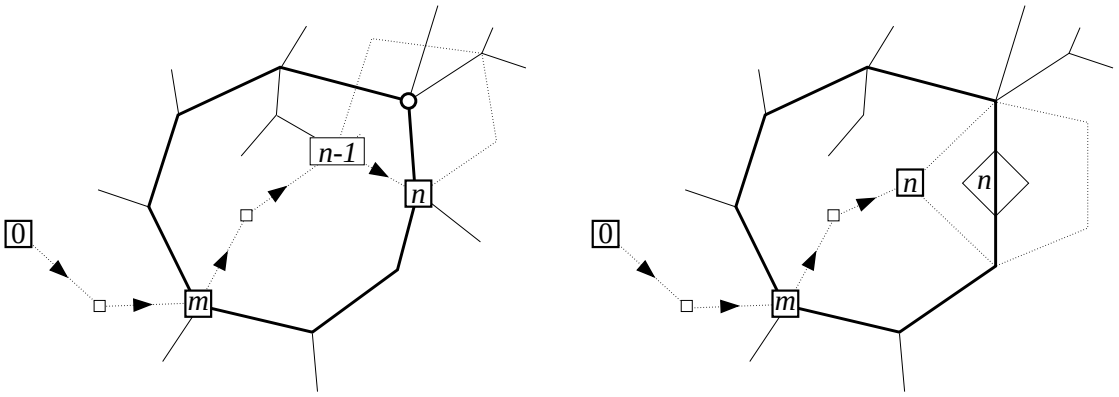


FIG. 3.20 – Schéma de la preuve de l'absence de boucle dans le graphe obtenu par les règles de la figure 3.17 (voir texte).

une étiquette n minimale sur le cycle. Par les règles de la figure 3.17, nous en déduisons l'existence d'un sommet d'étiquette $n-1$ dans l'intérieur du cycle[3] ou sur le cycle lui-même. Ceci est une contradiction : en effet un chemin minimal orienté depuis l'origine vers ce sommet $n-1$ rencontre le cycle en un sommet étiqueté $m \leq n-1$.

2. Si le cycle ne contient pas de sommet étiqueté, celui-ci est constitué d'arêtes étiquetées, et il existe au moins un drapeau n dans l'intérieur du cycle. Par les règles de la figure 3.17, il existe un sommet d'étiquette n dans l'intérieur du cycle, donc distinct de l'origine, et un chemin orienté depuis l'origine y menant rencontre le cycle en un sommet étiqueté, ce qui est aussi une contradiction.

Ainsi, le graphe est une forêt. On montre qu'il ne contient qu'une composante connexe, en plus de l'origine isolée, par un argument de comptage :
- il y a autant d'arêtes que dans la carte eulérienne originale,
- les sommets correspondent à l'un des trois types suivants :
  - les sommets étiquetés (dont l'origine) en correspondance avec les sommets de la carte originale,
  - les sommets blancs en correspondance avec les faces blanches,
  - les sommets noirs en correspondance avec les faces noires.

Par la relation d'Euler appliquée à la carte originale, la forêt compte deux arêtes de moins que de sommets, et est donc constitué d'un seul arbre en plus de l'origine.

Caractérisation des arbres obtenus : les mobiles

Les règles de transformation locale ci-dessus permettent d'associer à toute carte eulérienne un arbre de structure particulière :
- ses sommets sont de trois types : noirs, blancs ou étiquetés (par un entier),
- ses arêtes sont de deux types : non étiquetées ou étiquetées (par une paire d'entiers). Les arêtes non-étiquetées relient un sommet blanc à un sommet étiqueté, et les arêtes étiquetées un sommet blanc à un sommet noir.

Les étiquettes des sommets sont des entiers strictement positifs, tandis que les étiquettes des arêtes sont des entiers positifs. Il existe nécessairement une étiquette 0 sur une arête, car dans la carte originale il existe au moins une arête de type $n \to 0$. D'autres contraintes sont héritées de celles sur les étiquettes autour des faces de la carte.

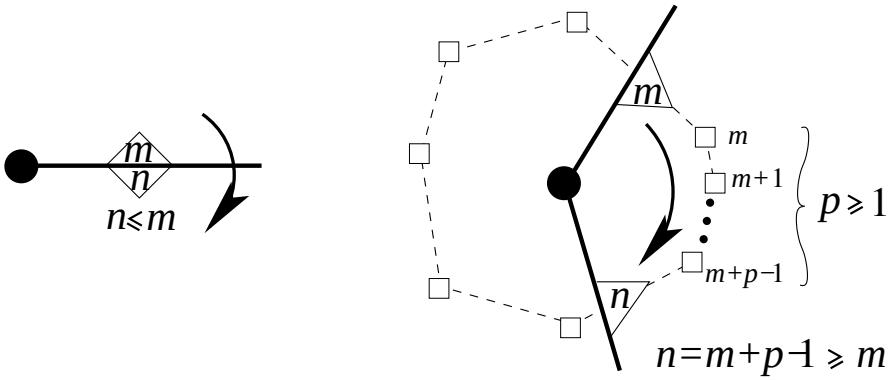
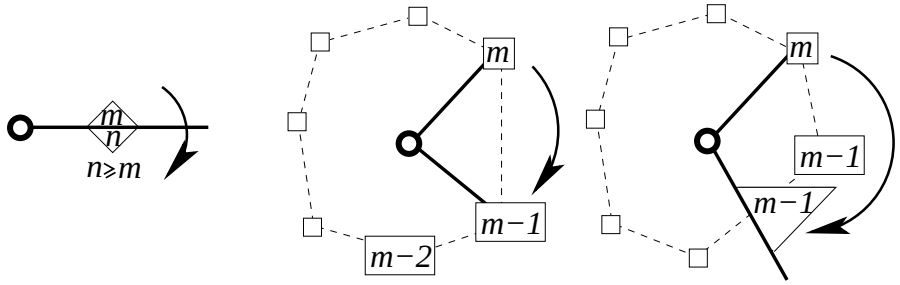


FIG. 3.21 – Contraintes sur les étiquettes autour d'un sommet noir.

[3] L'intérieur est la région délimitée par le cycle ne contenant pas l'origine.

Considérons un sommet noir de l'arbre, provenant d'une face noire de la carte. Les arêtes incidentes à ce sommet sont toutes étiquetées, et par les règles de la figure 3.17, les drapeaux m et n de part et d'autre d'une arête (lus dans le sens indirect autour du sommet noir) vérifient $m \geq n$. Considérons à présent deux arêtes incidentes successives, délimitant un *coin noir* contenant deux drapeaux m et n (toujours dans le sens indirect) : ce coin recouvre un certain nombre $p \geq 1$ de sommets de la carte originale, dont les étiquettes sont nécessairement de la forme $m \to m+1 \to \cdots \to m+p-1$. Nous en déduisons que $n \geq m$. Ceci achève de caractériser les contraintes sur les étiquettes autour d'un sommet noir, illustrées sur la figure 3.21.



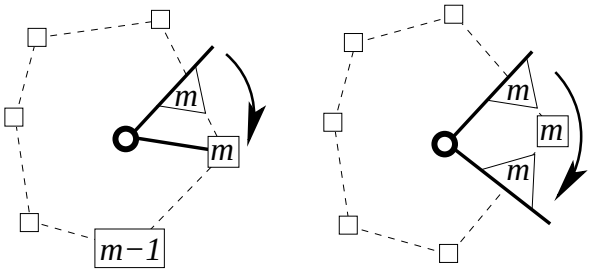


FIG. 3.22 – Contraintes sur les étiquettes autour d'un sommet blanc.

Considérons maintenant un sommet blanc de l'arbre, provenant d'une face blanche de la carte. Les arêtes incidentes à ce sommet peuvent être soit non étiquetées et mener à un sommet étiqueté, soit étiquetées et mener à un sommet noir. Par les règles de la figure 3.17, les deux drapeaux m et n sur une arête étiquetée (dans le sens indirect) vérifient $m \leq n$. Considérons à présent deux arêtes incidentes successives, délimitant un *coin blanc* : comme illustré sur la figure 3.22, différents cas peuvent être distinguées selon les types des arêtes incidentes. Nous pouvons récapituler ces différents cas en considérant le contour de l'arbre, suivi dans le sens indirect, sur lequel nous rencontrons des coins (noirs, blancs ou étiquetés) ainsi que des drapeaux. Nous avons alors les contraintes suivantes :

- un coin blanc, précédé d'un coin étiqueté m, est suivi d'un coin étiqueté $m-1$ ou d'un drapeau $m-1$,
- un coin blanc, précédé d'un drapeau m, est suivi d'un coin étiqueté m ou d'un drapeau m.

La contrainte sur les coins noirs se réécrit sous une forme similaire :

- un coin noir, précédé d'un drapeau m, est suivi d'un drapeau $n \geq m$.

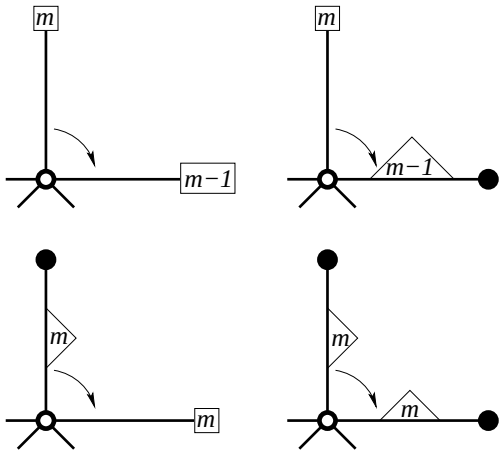
Nous définissons les mobiles bien étiquetés comme l'ensemble des arbres obéissant aux contraintes ci-dessus, que nous récapitulons comme suit :

Un *mobile* (eulérien) est un arbre plan dont les sommets peuvent être blancs, noirs ou étiquetés par un entier, et dont les arêtes peuvent porter deux drapeaux contenant des entiers, vérifiant les contraintes suivantes :
– les arêtes sont de l'un des types suivants :



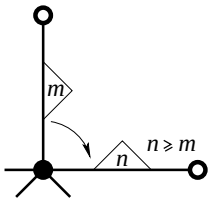
(3.16)

– les coins incidents à un sommet blanc sont de l'un des types suivants :



(3.17)

– les coins incidents à un sommet noir sont du type suivant :



(3.18)

Un mobile eulérien est dit *bien étiqueté* si les étiquettes des sommets sont strictement positives, les étiquettes des drapeaux sont positives ou nulles, et il existe un drapeau d'étiquette 0.
Il existe une bijection entre cartes eulériennes pointées et mobiles bien étiquetés.

L'un des sens de la bijection a été vu : par application des règles de transformation locale de la figure 3.17, nous associons un mobile bien étiqueté à toute carte eulérienne pointée. Exhibons à présent l'application inverse.

3.2.2 Construction inverse : des mobiles aux cartes

Considérons un mobile bien étiqueté, comme illustré sur la figure 3.23. Nous voyons ici comment lui associer une carte eulérienne pointée, par une construction généralisant celles de la section précédente.

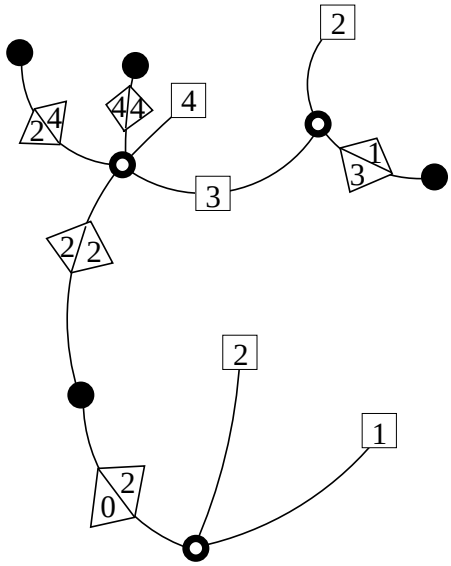


FIG. 3.23 – Exemple de mobile bien étiqueté.

Coins, drapeaux et cordes

Par rapport aux cas précédent, un mobile comporte des étiquettes sur certains sommets, mais également sur les drapeaux. Nous généralisons alors la notion de corde de la façon suivante :

- chaque coin étiqueté n est relié par une corde à son coin successeur, c'est-à-dire le premier coin $n-1$ rencontré sur le contour de l'arbre dans le sens indirect,
- chaque drapeau n est relié par une corde à son coin successeur, c'est-à-dire le premier coin n rencontré sur le contour de l'arbre dans le sens indirect.

Les coins étiquetés 1, et les drapeaux 0, sont reliés à un sommet externe isolé 0.

Cette construction est illustrée sur la figure 3.24, et peut être justifiée comme suit. Il résulte de la définition des mobiles bien étiquetés que le successeur est bien défini, et que, à déformation de la sphère près, les cordes peuvent être tracées sans croisement. En effet, par les contraintes (3.17) et (3.18), la suite des étiquettes des coins ou drapeaux rencontrés sur le contour de l'arbre possède la propriété suivante : **un coin étiqueté m est suivi d'un coin ou drapeau d'étiquette $m-1$, et un drapeau étiqueté m est suivi d'un coin ou drapeau d'étiquette $\geq m$.** Considérons d'abord un sommet d'étiquette n :

- si $n = 1$, son successeur est le sommet externe,
- si $n \geq 2$, suivons le contour de l'arbre dans le sens direct, et considérons la première étiquette $\leq n-2$ rencontrée (portée par un coin ou un drapeau) : celle-ci existe, puisqu'il y a au moins un drapeau 0, et par la propriété ci-dessus, elle est immédiatement précédée d'un coin $n-1$ qui est le successeur du sommet n.

Pour un drapeau n, l'argument est similaire :

- si $n = 0$, son successeur est le sommet externe,
- si $n \geq 1$, la première étiquette $\leq n-1$ rencontrée sur le contour de l'arbre est immédiatement précédée d'un coin n qui est le successeur du drapeau n.

On peut vérifier alors que les cordes peuvent être tracées sans croisement : étant donné deux coins ou drapeaux a et b, de successeurs respectifs a' et b', il résulte de la caractérisation ci-dessus que leurs positions correspondent à l'un des cas suivants :

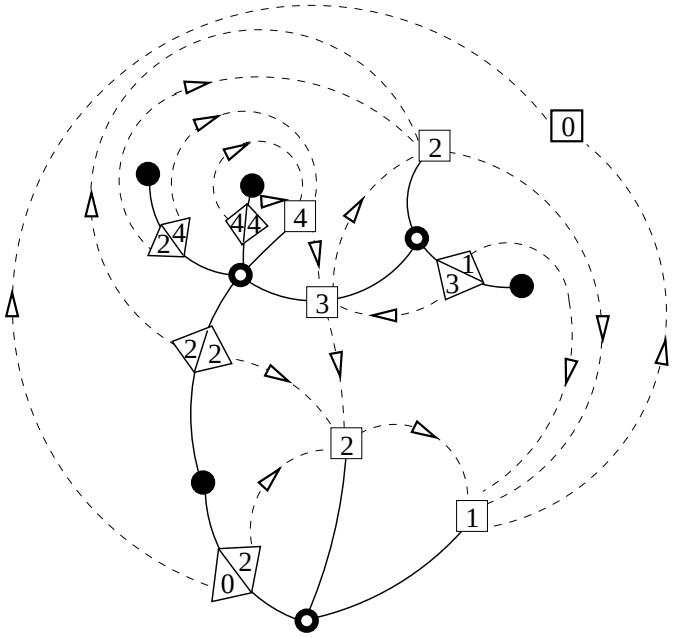


FIG. 3.24 – Les cordes dessinées sur le mobile bien étiqueté de la figure 3.23. Chaque coin (resp. drapeau) étiqueté n est relié à son successeur, qui est le premier coin rencontré sur le contour de l'arbre dans le sens indirect portant une étiquette $n-1$ (resp. n) ; pour $n=1$ (resp. $n=0$) le successeur est un sommet externe isolé 0.

- a, b, a', b' sont tous sur le contour de l'arbre et apparaissent dans l'un des ordres cycliques suivants :
  - $a \to a' \to b \to b'$
  - $a \to b \to b' \to a'$ (les cordes $a-a'$ et $b-b'$ sont dites *emboîtées*)
- b' est le sommet 0, a, a', b sont sur le contour de l'arbre et apparaissent dans l'ordre cyclique $a \to a' \to b$ (ou vice-versa en échangeant a et b)
- a' et b' sont tous deux le sommet 0.

Dans tous les cas, il est possible de tracer les cordes $a-a'$ et $b-b'$ sans croisement. Ceci reste vrai globalement pour toutes les cordes, par exemple en construisant celles-ci itérativement le long du contour. Le graphe constitué par le mobile et ses cordes constitue une carte planaire.

Des cordes aux arêtes

Nous obtenons alors une carte en effaçant **toutes** les arêtes du mobile, et en ne gardant que les cordes.[4] Plus précisément, les deux cordes issues d'une même arête étiquetée sont fusionnées en une seule arête de la nouvelle carte. Les sommets noirs et blancs deviennent isolés, et sont supprimés. Il s'avère que ces sommets sont en correspondance biunivoque avec les faces de la nouvelle carte, qui est eulérienne. Nous pouvons en effet facilement voir que chaque face de la carte contient au plus un sommet noir ou blanc.

Considérons tout d'abord un sommet noir du mobile. La configuration des cordes environnantes est illustrée sur la figure 3.25 : pour un coin incident au sommet noir, contenant deux

[4] Il est clair que la connexité est préservée, car les successions de cordes issues des coins étiquetés amènent au sommet 0.

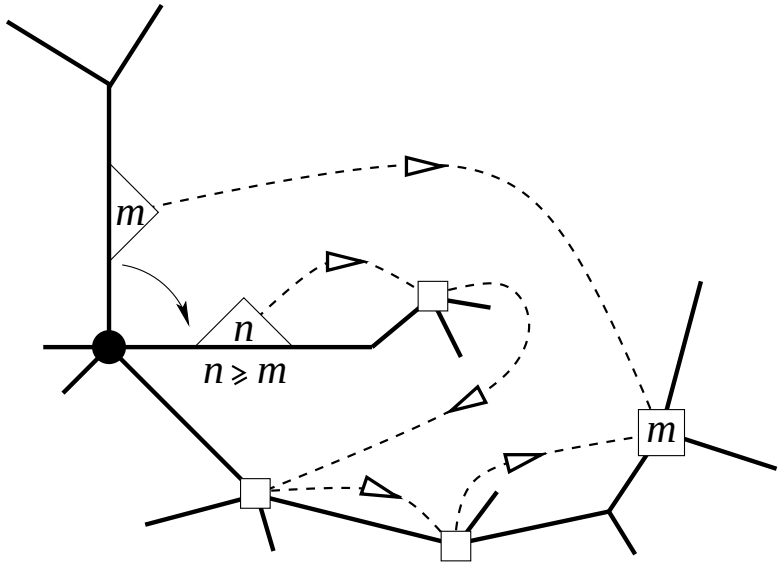


FIG. 3.25 – Configuration des cordes au voisinage d'un coin noir.

drapeaux m et n ($n \geq m$), le successeur du drapeau m est nécessairement le $(n-m)$-ième successeur du drapeau n. L'ensemble des cordes ainsi constituées, avec le coin, délimite une région ne contenant aucun autre sommet noir ou blanc. En réunissant ces régions pour les différents coins incidents au sommet noir, puis en effaçant les arêtes du mobile, nous obtenons une face ne contenant que le sommet noir.

La situation est analogue pour les sommets blancs. Pour un coin incident à un sommet blanc, divers cas sont à distinguer, comme illustré sur la figure 3.26. Par réunion, nous voyons que le sommet blanc est contenu dans une face ne contenant pas d'autre sommet noir ou blanc.

Nous avons ainsi montré que chaque face de la carte contient au plus un sommet noir ou blanc. En fait, chaque face en contient **exactement** un, comme vu par un argument de comptage :

- les sommets de la nouvelle carte sont les sommets étiquetés du mobile, et l'origine 0,
- les arêtes de la nouvelle carte sont en correspondance biunivoque avec les arêtes du mobile (les arêtes non étiquetées étant en correspondance avec les coins étiquetés, et les arêtes étiquetées donnant chacune deux cordes réunies en une nouvelle arête).

Par la relation d'Euler exprimée dans le mobile et la nouvelle carte, nous voyons que le nombre de faces de la carte est nécessairement égal à la somme des nombres de sommets noirs et blancs.

Nous vérifions enfin aisément, en examinant les différents types de cordes, que :

- la carte est bicoloriable des faces, donc eulérienne,
- en orientant chaque arête de la carte avec la face blanche à gauche[5], les étiquettes à l'origine m et à l'extrémité n vérifient $n \leq m+1$.

La carte eulérienne est pointée au sommet 0, et nous voyons que les étiquettes des sommets coïncident avec la longueur minimale des chemins orientés depuis l'origine. Par application des règles de transformations locales, nous retrouvons le mobile original. Pour achever d'établir la bijection, il reste à montrer qu'étant donné une carte eulérienne pointée, et son mobile associé par les transformations locales, par construction des cordes nous retrouvons la carte originale. Ceci peut être fait par une extension naturelle de l'argument pour les triangulations eulériennes,

[5]On notera que cette orientation ne coïncide pas nécessairement avec le sens naturel des cordes.

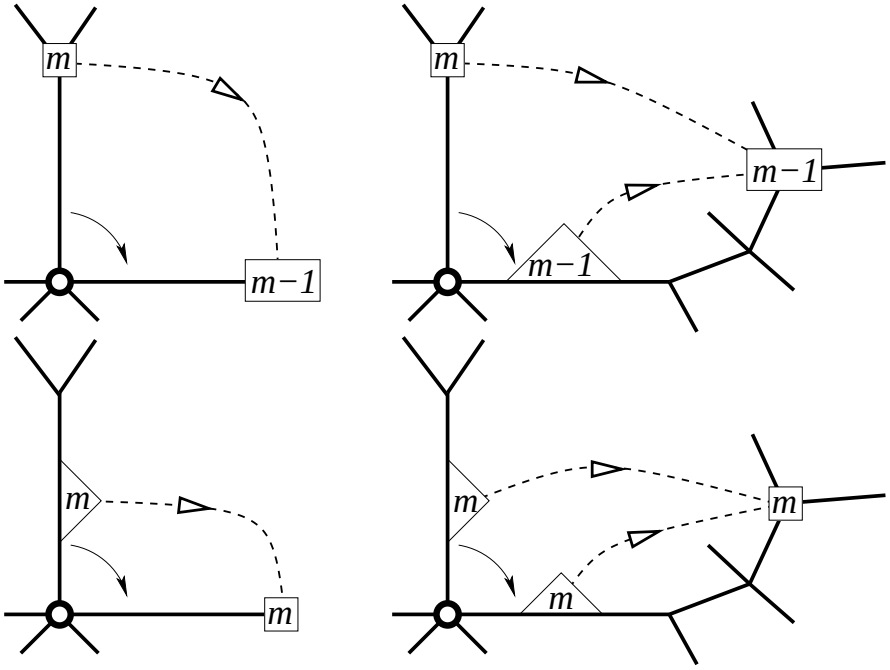


FIG. 3.26 – Configuration des cordes au voisinage d'un coin blanc.

que nous présentons comme suit.

Justification finale de la bijection

Considérons une carte eulérienne pointée, et son mobile associé par les transformations locales de la figure 3.17. Nous souhaitons montrer que la construction des cordes reconstruit la carte initiale. Il suffit en fait de montrer que les cordes redonnent précisément les arêtes de la carte initiale. Dans l'orientation canonique, une arête de la carte eulérienne est de l'un des types suivants :

1. une arête $n \to n+1$, reliant deux coins étiquetés n et $n+1$ (en considérant l'origine comme coin étiqueté pour $n = 0$),
2. une arête $n \to n'$, $n' \leq n$, coupée en deux par une arête étiquetée $n|n'$ du mobile, et reliant ainsi un coin étiqueté n au drapeau n, et un coin étiqueté n' au drapeau n'.

Dans le premier cas, il s'agit de montrer que le successeur du coin $n+1$ est le coin n ; dans le second cas, il s'agit de montrer que le successeur du drapeau n est le coin n (la preuve étant identique pour n'). Ceci est automatique pour les coins 1 et les drapeaux 0. Sinon, nous sommes a priori dans l'un des cas illustrés sur la figure 3.27 :

- En ajoutant au mobile l'arête $n \to n+1$ (cas 1) ou la demi-arête $n \to n'$ menant au drapeau n (cas 2), nous obtenons une carte comprenant deux faces.
- Nous considérons la région *intérieure*, ne contenant pas l'origine, ce qui distingue les cas 1-a, 1-b, 2-a, 2-b.
- Sur le contour de l'arbre inclus dans la région intérieure, orienté dans le sens direct, considérons un sommet étiqueté m (supposé distinct du dernier sommet dans les cas 1-a, 1-b, 2-b), nécessairement suivi d'un sommet blanc : selon les règles de transformation

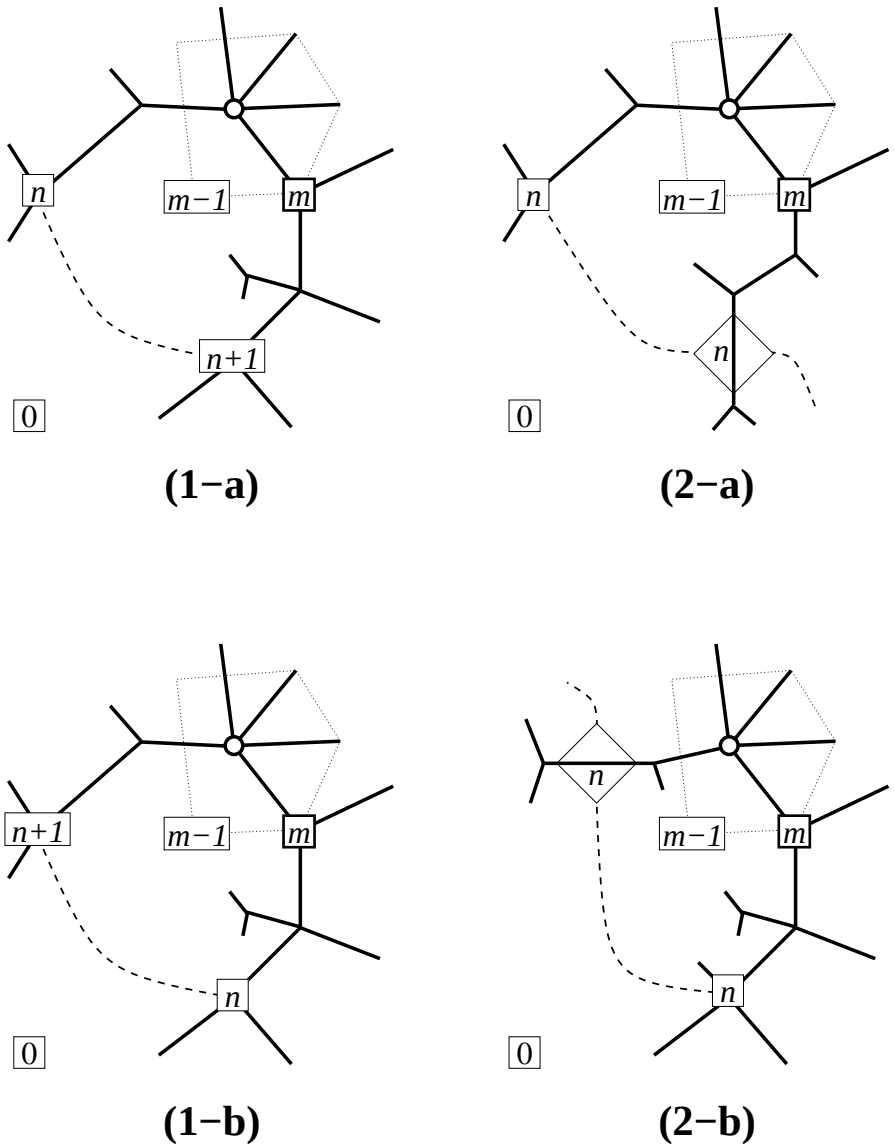


FIG. 3.27 – Schéma de la preuve du fait que, pour une carte eulérienne pointée, les cordes dans le mobile associé reconstituent les arêtes originales de la carte (voir texte).

locale définissant le mobile (cf figure 3.17), nous en déduisons l'existence d'un sommet $m-1$ dans la région intérieure, donc nécessairement sur le contour car le mobile visite tous les sommets distincts de l'origine.

Nous voyons alors que nécessairement $m > n$, et les cas 1-b et 2-b sont impossibles. Supposons en effet, pour un raisonnement par l'absurde, que $m \leq n$: le sommet $m-1$ est distinct du dernier sommet sur le contour, et est donc suivi d'un sommet blanc. En itérant le raisonnement pour ce sommet $m' = m-1$, nous pouvons construire une suite infinie strictement décroissante d'entiers positifs, ce qui est absurde. Les cas 1-b et 2-b sont impossibles, car le raisonnement s'applique au premier sommet $m \equiv n$. Dans le cas 1-a (resp. 2-a), le successeur du coin $n+1$ (resp. du drapeau n) est bien le coin n et la corde ainsi créée reconstitue bien l'arête (resp. la demi-arête) de la carte initiale.

3.2.3 Décomposition et énumération des mobiles

Nous souhaitons étudier les propriétés de décomposition récursive des mobiles pour une application à l'énumération des mobiles et cartes eulériennes. Il est utile de commencer par discuter plus précisément de la correspondance entre les faces d'une carte eulérienne pointée et les sommets (blancs ou noirs) du mobile associé.

Faces, étiquettes et mots cycliques

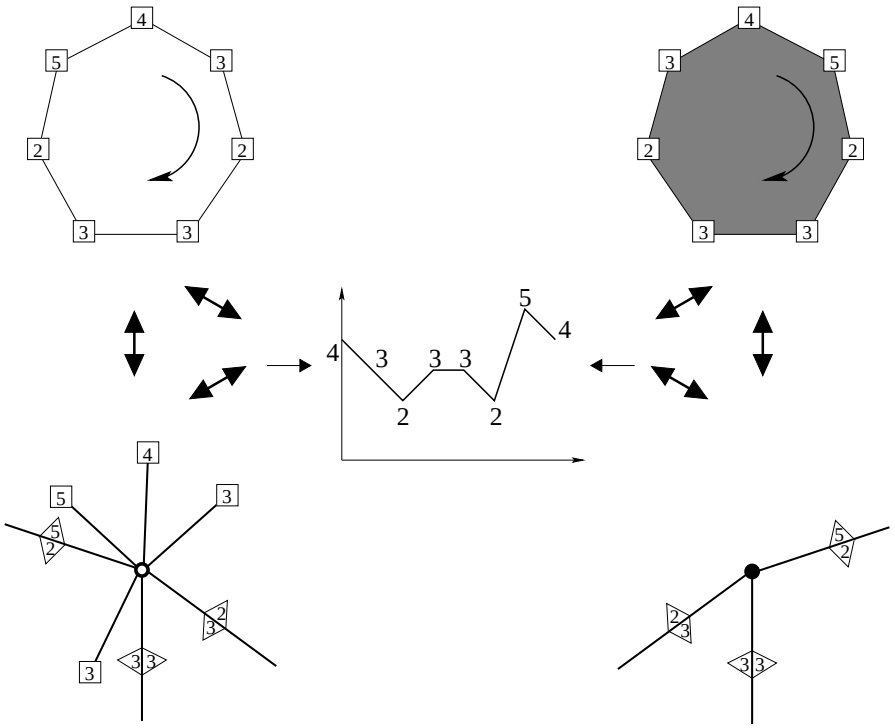


FIG. 3.28 – Relation entre les étiquettes autour des faces d'une carte eulérienne pointée, et les arêtes incidentes aux sommets non-étiquetés du mobile associé.

Considérons tout d'abord une face blanche de degré k d'une carte eulérienne pointée (cf figure

3.28), et les étiquettes des sommets incidents lues dans le sens indirect : il s'agit d'un mot cyclique $[n_1 n_2 \dots n_k]$ constitué d'entiers strictement positifs tels que, pour tout $i = 1, 2, \dots, k$, nous avons $n_{i+1} \geq n_i - 1$ (en identifiant $n_{k+1} \equiv n_1$). Chaque arête incidente donne une arête incidente au sommet blanc dans le mobile associé :

- si $n_{i+1} = n_i - 1$, il s'agit d'une arête non étiquetée menant au sommet étiqueté n_i,
- sinon $n_{i+1} \geq n_i$, il s'agit d'une arête étiquetée de type $n_i|n_{i+1}$ menant au sommet noir associé à la face noire adjacente.

Le sommet blanc est donc de degré k.

Pour une face noire de degré k, les étiquettes des sommets incidents lues dans le sens indirect forment un mot cyclique $[n_1 n_2 \dots n_k]$ tels que, pour tout i, $n_{i+1} \leq n_i + 1$ (en bijection naturelle avec les mots cycliques précédents par réflexion). Les arêtes incidentes reliant deux sommets n_i et n_{i+1}, avec $n_{i+1} \leq n_i$, correspondent, dans le mobile, à une arête étiquetée $n_i|n_{i+1}$ incidente au sommet noir associé. Ce sommet a donc sur le mobile un degré ℓ inférieur à k. Cependant, étant donné un sommet noir d'un mobile bien étiqueté, le degré de la face noire associée peut être facilement retrouvé à partir des étiquettes sur les arêtes incidentes : dans un ordre cyclique, celles-ci sont de la forme $n_1|n'_1, n_2|n'_2, \dots, n_\ell|n'_\ell$ avec pour tout $j = 1, 2, \dots, \ell$, $n_j \geq n'_j$ et $n'_j \leq n_{j+1}$, et le degré de la face est :

$$k = \sum_{j=1}^{\ell} (n_j - n'_j + 1). \tag{3.19}$$

Nous voyons donc que les configurations des étiquettes autour des faces d'une carte eulérienne, ou bien des arêtes incidentes aux sommets noirs ou blancs d'un mobile bien étiqueté, sont codées par des mots cycliques (le codage étant légèrement différent entre les cas noir et blanc). La longueur du mot cyclique correspond au degré de la face, et les contraintes sur deux éléments successifs du mot traduisent exactement les contraintes (3.16), (3.17) et (3.18). Pour les mobiles non nécessairement bien étiquetés, les configurations des arêtes incidentes sont codées par des mots cycliques constitués d'entiers non nécessairement positifs, mais vérifiant les mêmes contraintes sur deux éléments successifs.

Notons qu'il n'existe pas de caractérisation similaire au niveau des sommets étiquetés : il ne semble pas y avoir de relation simple entre les degrés (arbitraires) de ces sommets dans la carte et dans le mobile.

Les demi-mobiles

Considérons une arête d'un mobile : celle-ci sépare deux sous-arbres. Comme illustré sur la figure 3.29, ces sous-arbres peuvent être de types différents en fonction de l'arête considérée. Il est commode de conserver l'arête et ses deux sommets incidents, en marquant celui de degré un : les sous-arbres s'assimilent à des arbres plantés. Notons que les contraintes définissant les mobiles restent valables dans les sous-arbres, sauf éventuellement au niveau du sommet distingué. Ceci amène la définition suivante :

Un *demi-mobile* est un arbre planté dont les sommets peuvent être blancs, noirs, ou étiquetés par un entier, et dont les arêtes peuvent porter deux drapeaux contenant des entiers, vérifiant les contraintes (3.16), (3.17) et (3.18) au niveau de chaque arête et chaque sommet noir ou blanc distinct du sommet-racine.
Un demi-mobile est dit bien étiqueté si les étiquettes des sommets sont strictement positives, les étiquettes des drapeaux sont positives ou nulles.

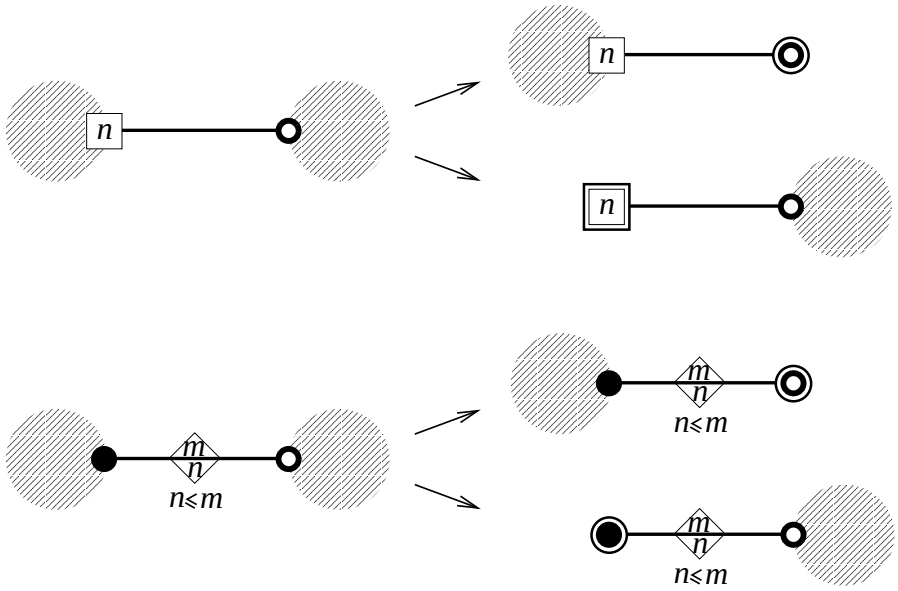


FIG. 3.29 – Décomposition d'un mobile autour d'une arête en demi-mobiles.

D'après la figure 3.29, les demi-mobiles bien étiquetés peuvent être classifiés selon les ensembles suivants :

- $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des demi-mobiles bien étiquetés plantés sur un sommet blanc relié à un sommet étiqueté n,
- $\tilde{\mathcal{V}}_n$ l'ensemble des demi-mobiles bien étiquetés plantés sur un sommet étiqueté n,
- $\mathcal{W}_{n|m}$ l'ensemble des demi-mobiles bien étiquetés plantés sur un sommet blanc incident à une arête $n|m$ $(n \leq m)$,
- $\tilde{\mathcal{W}}_{m|n}$ l'ensemble des demi-mobiles bien étiquetés plantés sur un sommet noir incident à une arête $m|n$ $(m \geq n)$.

Nous prenons les conventions $\mathcal{V}_n = \tilde{\mathcal{V}}_n = \emptyset$ pour $n \leq 0$, et $\mathcal{W}_{n|m} = \tilde{\mathcal{W}}_{m|n} = \emptyset$ pour $m < 0$, $n < 0$ ou $m < n$.

Les demi-mobiles peuvent être décomposés récursivement autour du sommet relié à la racine. Considérons tout d'abord un élément de $\mathcal{V}_n$: le sommet étiqueté n est incident à un nombre arbitraire $k \geq 0$ d'arêtes descendantes, ce qui se traduit par la bijection suivante :

$$\mathcal{V}_n \cong \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{\mathcal{V}}_n\right)^k. \tag{3.20}$$

Le cas des autres demi-mobiles est plus délicat, en raison des contraintes sur les arêtes incidentes aux sommets noirs ou blancs. Nous pouvons cependant utiliser le codage par les mots cycliques vu ci-dessus. Considérons par exemple un élément de $\tilde{\mathcal{V}}_n$: le mot codant le sommet blanc relié à la racine est de la forme $[n_1 n_2 \cdots n_k]$ avec $n_1 = n-1$, $n_2 = n$. Chaque $i = 1, \ldots, k-1$ correspond à une arête descendante, délimitant un demi-mobile appartenant à $\mathcal{V}_{n_i}$ si $n_{i+1} = n_i - 1$, $\mathcal{W}_{n_i|n_{i+1}}$ si $n_{i+1} \geq n_i$. Cette décomposition établit une bijection, que nous exprimons dans le langage des séries génératrices.

Séries génératrices des demi-mobiles

Attachons un poids v_k° à chaque sommet blanc de mot de code de longueur k, et un poids $v_k^\bullet$ à chaque sommet noir de mot de code de longueur k (qui se traduisent naturellement dans le langage des cartes par des poids par face fonction de la couleur et du degré), et introduisons les séries génératrices $V_n, \tilde{V}_n, W_{n|m}, \tilde{W}_{m|n}$ associées respectivement à $\mathcal{V}_n, \tilde{\mathcal{V}}_n, \mathcal{W}_{n|m}, \tilde{\mathcal{W}}_{m|n}$ (avec $V_n = \tilde{V}_n = 0$ pour $n \leq 0$, $\mathcal{W}_{n|m} = \tilde{\mathcal{W}}_{m|n}$ pour $m < 0$, $n < 0$ ou $m < n$). La décomposition récursive de $\tilde{\mathcal{V}}_n$ se traduit par :

$$\tilde{V}_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{[n_1 n_2 \cdots n_k] \in \mathbb{N}^k \\ n_1 = n-1,\ n_k = n}} v_k^\circ \prod_{i=1}^{k-1} \left(V_{n_i} \delta_{n_{i+1}, n_i - 1} + W_{n_i | n_{i+1}} \right) \tag{3.21}$$

où la seconde somme porte sur tous les mots $[n_1 n_2 \cdots n_k]$ dont les éléments sont des entiers naturels, de premier élément $n_1 = n - 1$ et de dernier élément $n_k = n$ (ce qui brise la cyclicité). Les mots ayant une contribution non nulle sont ceux codant un sommet blanc d'un mobile.

De façon similaire, pour $m \geq n$, $\tilde{\mathcal{W}}_{m|n}$ possède la décomposition récursive :

$$\tilde{W}_{m|n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{[n_1 n_2 \cdots n_k] \in \mathbb{N}^k \\ n_1 = m,\ n_k = n}} v_k^\circ \prod_{i=1}^{k-1} \left(V_{n_i} \delta_{n_{i+1}, n_i - 1} + W_{n_i | n_{i+1}} \right). \tag{3.22}$$

Un élément de $\mathcal{W}_{n|m}$ peut, quant à lui, être décomposé autour du sommet noir relié à la racine. Dans le mot codant $[n_1 n_2 \cdots n_k]$ (avec $n_1 = n$, $n_k = m$), les successions $n_i \to n_{i+1} = n_i + 1$ ne correspondent pas à des arêtes incidentes, et doivent être comptées avec un poids 1 (car il n'y a pas de sous-arbre descendant), ce qui se traduit par la relation :

$$W_{n|m} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{[n_1 n_2 \cdots n_k] \in \mathbb{N}^k \\ n_1 = n,\ n_k = m}} v_k^\bullet \prod_{i=1}^{k-1} \left(\delta_{n_{i+1}, n_i + 1} + \tilde{W}_{n_i | n_{i+1}} \right) \tag{3.23}$$

(pour $m \geq n$). Enfin, la bijection (3.20) se traduit par la relation :

$$V_n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{V}_n \right)^k = \frac{1}{1 - \tilde{V}_n}. \tag{3.24}$$

Ces relations déterminent de manière unique les séries génératrices en tant que séries formelles en les $v_k^\circ, v_k^\bullet$, et peuvent être réexprimées de manière plus compacte de la façon suivante. Introduisons les *matrices de transfert* $T^\circ, T^\bullet$, semi-infinies dont les éléments sont donnés pour tous $n, n' \geq 0$ par :

$$T^\circ_{n,n'} \equiv V_{n'+1} \delta_{n,n'+1} + W_{n|n'} \qquad T^\bullet_{n,n'} \equiv \delta_{n,n'-1} + \tilde{W}_{n|n'} \tag{3.25}$$

(on notera que $T^\circ_{n,n'} = 0$ pour $n > n' + 1$, $T^\bullet_{n,n'} = 0$ pour $n < n' - 1$). Nous avons alors les

équations :

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{1-\tilde{V}_n} \\ \tilde{V}_n &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{\circ}(T^{\circ})^{k-1}\right)_{n-1,n} \\ \tilde{W}_{m|n} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{\circ}(T^{\circ})^{k-1}\right)_{m,n} \\ W_{n|m} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{\bullet}(T^{\bullet})^{k-1}\right)_{n,m} \end{aligned} \tag{3.26}$$

À titre d'exemple, montrons comment ces identités se réduisent dans le cas des triangulations eulériennes, c'est-à-dire en prenant $v_k^{\circ} = t\,\delta_{k,3}$, $v_k^{\bullet} = \delta_{k,3}$. Nous voyons tout d'abord aisément que, par les contraintes $W_{n|m} = \tilde{W}_{m|n} = 0$ pour $m < n$ et les identités ci-dessus, que :

$$W_{n|m} = \tilde{W}_{m|n} = 0 \text{ si } m > n+2. \tag{3.27}$$

Nous pouvons ensuite montrer par récurrence que $W_{n|n}, W_{n|n+1}, \tilde{W}_{n|n}, \tilde{W}_{n+1|n}$ sont nuls : d'après les identités récursives vérifiées par ces quantités, ce sont des $O(t)$, et par itération, des $O(t^k)$ pour tout k, donc égales à la série nulle. Nous voyons par contre que $W_{n|n+2} = 1$ et $\tilde{W}_{n+2|n} = tV_{n+2}V_{n+1}$, et nous déduisons enfin pour tout $n > 0$:

$$\tilde{V}_n = V_{n+1} + V_{n-1} \tag{3.28}$$

Nous retrouvons l'équation (3.3) avec l'identification $L_n \equiv V_n$, et les simplifications vues ci-dessus traduisent dans le langage des séries génératrices la discussion illustrée à la figure 3.18.

Revenons au cas général : dans la limite $m, n \to \infty$ avec la différence $p \equiv m - n$ fixée, les séries génératrices $V_n, \tilde{V}_n, W_{n|m}, \tilde{W}_{m|n}$ tendent vers des limites respectives $V, \tilde{V}, W_{-p}, \tilde{W}_p$, qui constituent la solution invariante par translation des équations (3.26), et s'interprètent comme séries génératrices de demi-mobiles généraux (sans contrainte de positivité des étiquettes). Pour des poids $v_k^{\circ}, v_k^{\bullet}$ nuls à partir d'un certain rang, les équations se réduisent à un système fini d'équations algébriques, dont on peut montrer l'équivalence avec celui dérivant des équations (2.18) pour les séries génératrices d'arbres bicolores bien chargés.

Enfin, notons que les équations (3.26) présentent une forme très proche de la solution par polynômes bi-orthogonaux du modèle à deux matrices [28], défini par l'énergie libre (1.25). Plus précisément, les opérateurs « Q » agissant sur les polynômes par la multiplication par une variable, rencontrés à de multiples occasions dans le chapitre 1, possèdent une décomposition dont les coefficients obéissent des relations équivalentes aux équations (3.26), sauf la première qui se réécrit sous la forme :

$$V_n = \frac{n}{N} \cdot \frac{1}{1-\tilde{V}_n}. \tag{3.29}$$

Ceci revient à compter les mobiles avec un poids supplémentaire n/N par sommet étiqueté n. Il serait intéressant de savoir si cette analogie est la manifestation d'une relation plus profonde, intrigante car N apparaît comme paramètre permettant d'énumérer les cartes par leur genre.

Séries génératrices de cartes eulériennes

Montrons maintenant comment appliquer les résultats ci-dessus à la détermination de séries génératrices de cartes : nous avons vu que les cartes eulériennes pointées sont en bijection avec

les mobiles bien étiquetés (qui sont des arbres non-enracinés). Chaque face de degré k, donnant un sommet blanc ou noir dans le mobile, est codée par un mot de longueur k, et comptée avec un poids $v_n^\circ, v_n^\bullet$ selon la couleur. Pour se ramener au cas des demi-mobiles, il est nécessaire d'introduire un marquage d'arête (transférable de la carte au mobile) pour « amorcer » la décomposition récursive.

Considérons par exemple une arête de la carte de type $n-1 \to n$: celle-ci correspond dans le mobile à une arête reliant un sommet étiqueté n à un sommet blanc, séparant deux demi-mobiles appartenant respectivement à $\mathcal{V}_n$ et $\tilde{\mathcal{V}}_n$. Cependant, un mobile bien étiqueté contient par définition au moins un drapeau 0 (nous n'avons pas inclus cette contrainte dans la définition des demi-mobiles bien étiquetés, pour simplifier leur décomposition récursive). Cette subtilité peut être contournée par un simple argument de translation, et nous obtenons la série génératrice des cartes eulériennes pointées avec marquage d'une arête $n-1 \to n$ sous la forme :

$$V_n \tilde{V}_n - V_{n-1}\tilde{V}_{n-1} = V_n - V_{n-1} - \delta_{n,0}. \tag{3.30}$$

De même, la série génératrice des cartes eulériennes pointées avec marquage d'une arête $m \to n$, avec $m \geq n$, est :

$$W_{n|m}\tilde{W}_{m|n} - W_{n-1|m-1}\tilde{W}_{m-1|n-1}. \tag{3.31}$$

Par sommation, nous obtenons la série génératrices des cartes pointées enracinées :

$$V - 1 + \sum_{p=0}^{\infty} W_{-p}\tilde{W}_p \tag{3.32}$$

tandis que celles des cartes enracinées est :

$$V_1 - 1 + \sum_{m=0}^{\infty} W_{0|m}\tilde{W}_{m|0}. \tag{3.33}$$

3.2.4 Quelques cas particuliers d'intérêt

Dans cette section, nous montrons comment la construction générale pour les cartes eulériennes se simplifie pour certains cas particuliers.

Cartes arbitraires

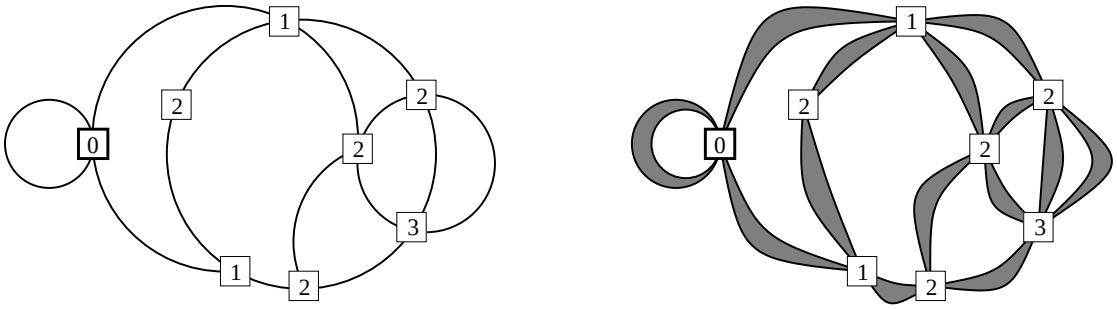


FIG. 3.30 – Une carte arbitraire pointée et sa carte eulérienne associée, en transformant chaque arête en une face noire de degré 2. Les sommets sont étiquetés par la distance depuis l'origine, correspondant à la longueur minimale d'un chemin non-orienté.

Les cartes arbitraires sont en bijection avec les cartes eulériennes dont toutes les faces noires ont degré 2, obtenues en « épaississant » les arêtes, comme illustré sur la figure 3.30. Ceci induit une simplification importante des étiquettes des sommets : celles-ci correspondent, pour les sommets de la carte arbitraire, à la longueur minimale des chemins non-orientés, ou *distance*, depuis l'origine. En effet, les chemins non-orientés sur une carte arbitraire sont en bijection avec les chemins orientés sur la carte bipartie associée (obtenus en contournant chaque face noire par la droite).

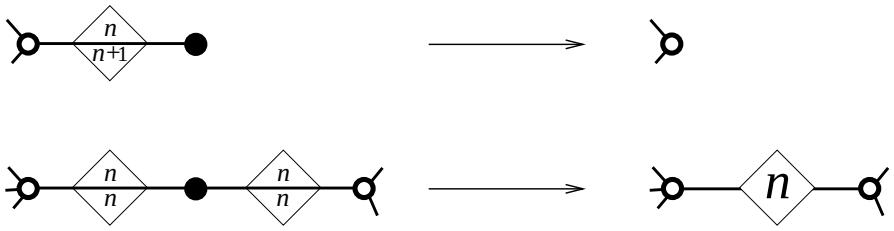


FIG. 3.31 – Simplification des mobiles associés aux cartes arbitraires.

Il s'ensuit que les étiquettes sur deux sommets adjacents diffèrent au plus de un. Les faces noires, ayant degré deux, donnent dans le mobile eulérien associé des sommets de degré au plus 2 : les deux situations possibles sont illustrées sur la figure 3.31 :

1. un sommet noir de degré un, incident à une arête étiquetée $n+1|n$,
2. un sommet noir de degré deux, incident à deux arêtes étiquetées $n|n$.

Nous effectuons alors les simplifications suivantes, selon le cas :

1. chaque sommet noir de degré un est supprimé, ainsi que son arête incidente,
2. chaque sommet noir de degré deux est supprimé, en fusionnant les deux arêtes incidentes en une seule portant un drapeau unique n.

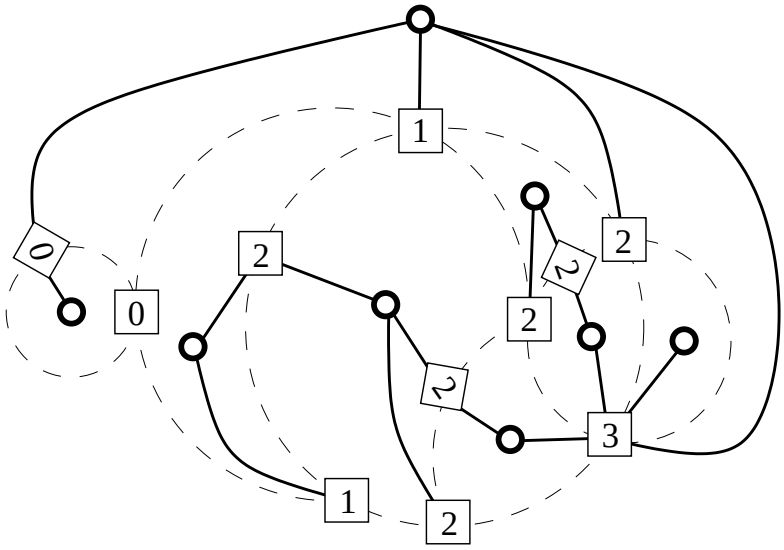


FIG. 3.32 – Le mobile simplifié associé à la carte de la figure 3.30.

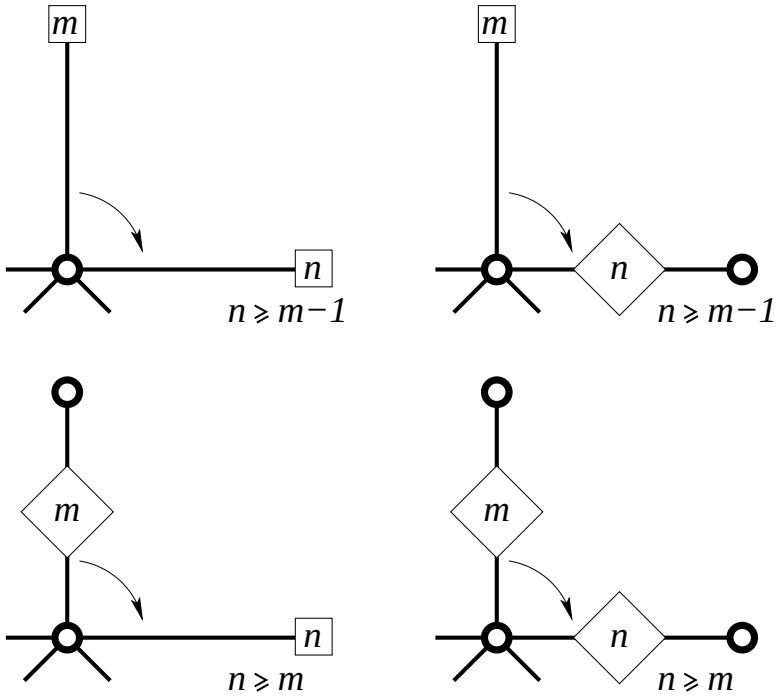


FIG. 3.33 – Contraintes sur les coins non-étiquetés des mobiles simplifiés.

Comme illustré sur la figure 3.32, nous obtenons ainsi un mobile simplifié, qui est un arbre constitué de sommets étiquetés, et de sommets non-étiquetés, correspondant aux sommets blancs du mobile eulérien. Les contraintes (3.17) se traduisent dans les mobiles simplifiés par celles illustrées sur la figure 3.33. Réciproquement, étant donné un mobile vérifiant ces contraintes, nous pouvons reconstruire de manière unique un mobile eulérien dont les sommets noirs ont un mot de code de longueur 2, associé ainsi à une carte eulérienne dont toutes les faces noires ont degré 2. On peut aisément caractériser la correspondance entre cartes arbitraires et mobiles simplifiés de manière directe, à l'aide de règles de transformation locale :

- chaque arête de type $n \to n+1$ d'une carte arbitraire est transformée en une arête reliant le sommet $n+1$ au sommet non-étiqueté dans la face à gauche,
- chaque arête de type $n \to n$ d'une carte arbitraire est transformée en une arête portant un drapeau n, reliant les sommets non-étiquetés dans les deux faces incidentes.

Du point de vue des séries génératrices, il suffit de prendre $v_k^\bullet = \delta_{k,2}$, et $v_k \equiv v_k^\circ$ est un poids par face de degré k dans la carte arbitraire. En posant, pour tout $n \geq 0$, $R_n \equiv V_{n+1}$ et $S_n \equiv W_{n|n}$, et en introduisant la matrice de transfert semi-infinie :

$$T_{n,n'} \equiv \delta_{n+1,n'} + S_{n'}\delta_{n,n'} + R_{n'}\delta_{n-1,n'} \tag{3.34}$$

(avec $n, n' \leq 0$), nous pouvons écrire la décomposition récursive des demi-mobiles sous la forme :

$$R_n = \frac{1}{1 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k T^{k-1}\right)_{n,n+1}}$$
$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k T^{k-1}\right)_{n,n} \tag{3.35}$$

La première identité peut se réécrire $R_n = 1 + \left(\sum v_k T^{k-1}\right)_{n+1,n}$. Dans la limite $n \to \infty$, R_n et S_n ont respectivement pour limite R et S, quantités vérifiant les équations (1.42) et (2.7) des chapitres 1 et 2, avec $t = 1$.

Toutes ces quantités s'interprètent en tant que séries génératrices des cartes planaires arbitraires avec un poids v_k par face de degré k, de la manière suivante :

- $R_n - 1$ est la série génératrice des cartes planaires pointées, enracinées sur une arête marquée de type $m \to m+1$ avec $m \leq n$,
- S_n est la série génératrice des cartes planaires pointées, enracinées sur une arête marquée de type $m \to m$ avec $m \leq n$,
- $2(R-1) + S^2$ est la série génératrice des cartes planaires pointées et enracinées,
- $R_0 - 1 + S_0^2$ est la série génératrice des cartes planaires enracinées.

Par ailleurs, R_0 et S_0 coïncident avec les séries génératrices des arbres bourgeonnants bien chargés équilibrés respectivement de charge 1 et 0, comme vu au chapitre 2.

Les constellations

Pour un entier $p \geq 2$, une (p-)constellation [60] est une carte eulérienne vérifiant les propriétés suivantes :

- chaque face noire a degré p,
- chaque face blanche a un degré multiple de p.

Pour une constellation pointée, dont les sommets sont étiquetés, les contraintes ci-dessus induisent la propriété suivante : **la différence des étiquettes le long de chaque arête orientée est congrue à 1 modulo p**. Ceci est une conséquence facile du fait que tout chemin orienté fermé sur une constellation a une longueur multiple de p, comme vu par un argument de comptage. En particulier, les étiquettes lues dans le sens indirect autour des faces noires sont nécessairement de la forme $n \to n+1 \to n+2 \to \cdots \to n+p-1$. Par les règles de transformation locale, le mobile eulérien associé ne compte que des sommets noirs de degré 1, avec une arête incidente de type $n+p-1|n$. Nous pouvons alors simplifier le mobile en supprimant tous les sommets noirs et leurs arêtes incidentes : nous obtenons un p-mobile, qui est un arbre constitué de sommets étiquetés, et de sommets non-étiquetés issus des sommets blancs du mobile eulérien. Les arêtes sont non-étiquetées, et nous voyons aisément que les coins non-étiquetés sont de la forme de la figure 3.34, où l'entier q correspond au nombre d'arêtes $n+p-1|n$ supprimées.

Du point de vue des séries génératrices, nous attachons, pour tout $k \geq 1$, un poids w_k à chaque face blanche de degré kp. La série génératrice des demi-mobiles V_n vérifie :

$$V_n = \frac{1}{1 - \left(\sum_{k=0}^{\infty} w_k (T_p)^{kp-1}\right)_{n-1,n}} \tag{3.36}$$

où T_p est la matrice de transfert ayant, pour tous $n, n' \geq 0$, les éléments :

$$(T_p)_{n,n'} = V_n \delta_{n-1,n'} + \delta_{n+p-1,n'}. \tag{3.37}$$

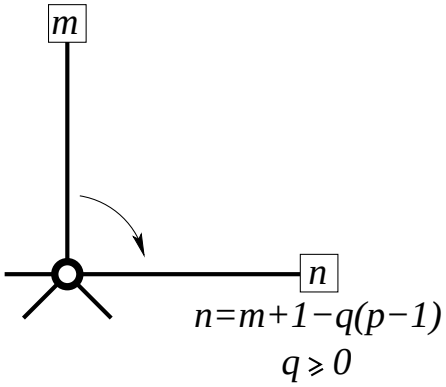


FIG. 3.34 – Contrainte sur les coins non-étiquetés d'un p-mobile.

$V_n - 1$ correspond à la série génératrice des p-constellations pointées enracinées sur une arête de type $m \to m+1$, avec $m < n$. Dans la limite $n \to \infty$, V_n a une limite V vérifiant :

$$V = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} w_k \binom{pk-1}{k} V^{(p-1)k}. \tag{3.38}$$

V peut être développé en série par la formule d'inversion de Lagrange, comme suit. Considérons la fonction :

$$\varphi(v) \equiv \frac{v}{1 + \sum_{k=0}^{\infty} w_k \binom{pk-1}{k} v^{(p-1)k}} \tag{3.39}$$

et son inverse implicite $\varphi^{-1}(t)$ fixé par la condition $\varphi^{-1}(0) = 0$ (qui assure l'existence d'un développement en série formelle en 0). Alors $V = \varphi^{-1}(1)$ peut être exprimé par la formule de Cauchy sous la forme :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} \frac{\varphi^{-1}(t)}{t^{n+1}} dt \tag{3.40}$$

où C_0 est un contour positif autour de 0. Par un changement de variable $t = \varphi(v)$ suivi d'une intégration par partie, nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} V - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} \frac{dv}{n\varphi(v)^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} w_k \binom{pk-1}{k} v^{(p-1)k}\right)^n \frac{dv}{nv^n}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Nous pouvons développer l'intégrande à l'aide de la formule du multinôme : l'intégrale de contour impose que seuls les termes de degré total -1 en v contribuent. Nous obtenons ainsi :

$$V - 1 = \sum_{\{n_k\}_{k\geq 1}} \frac{\left(\sum_{k\geq 1}(pk-k)n_k\right)!}{\left(1 + \sum_{k\geq 1}(pk-k-1)n_k\right)!} \prod_{k\geq 1} \frac{1}{n_k!} \binom{pk-1}{k}^{n_k} (w_k)^{n_k}. \tag{3.42}$$

où la somme porte sur toutes les suites $\{n_k\}_{k\geq 1}$ d'entiers positifs non tous nuls. $V-1$ correspond à la série génératrice des constellations pointées enracinées sur une arête de type $m \to m+1$. Le

terme général correspond au nombre de telles constellations ayant, pour tout $k \geq 2$, un nombre n_k de faces blanches de degré pk. Nous pouvons en déduire une formule fermée pour le nombre de constellations enracinées, grâce aux remarques suivantes :

- le nombre total d'arêtes est $\sum_k pkn_k$, et le nombre d'arêtes de type $m \to m+1$ est $(p-1)\sum_k kn_k$,
- le nombre de sommets est $2 + \sum(pk-k-1)n_k$,
- les constellations pointées enracinées sur une arête quelconque sont en bijection avec les constellations enracinées avec un sommet marqué.

Le nombre de p-constellations enracinées est ainsi :

$$p(p-1)^{\sum_k n_k} \frac{(\sum_k (pk-k)n_k)!}{(2+\sum_k (pk-k-1)n_k)!} \prod_k \frac{1}{n_k!} \binom{pk-1}{k-1}^{n_k}. \tag{3.43}$$

Cette forme coïncide avec celle obtenue via les arbres bourgeonnants [60], et est l'une des formules fermées connues les plus générales en énumération de cartes.

Cartes biparties

Les cartes biparties forment « l'intersection » de la classe des cartes arbitraires et des constellations : ce sont des cartes arbitraires n'ayant que des faces de degré pair, et sont en bijection avec les 2-constellations. Les mobiles associés sont ainsi constitués de sommets étiquetés et non-étiquetés, chaque arête reliant un sommet de chaque type. Les coins non-étiquetés vérifient la contrainte de la figure 3.34 avec $p = 2$ (revenant à celles de la figure 3.33 en l'absence d'arêtes étiquetées).

Il s'ensuit que leur énumération est simplifiée, par rapport au cas des cartes arbitraires de l'équation (3.35), par la relation $S_n = 0$. $R_n - 1$ est la série génératrice des cartes planaires biparties pointées enracinées sur une arête $m \to m+1$, avec $m \leq n$, et vérifie l'identité récursive :

$$R_n = \frac{1}{1 - (\sum_{k=0}^{\infty} v_{2k} T^{2k-1})_{n,n+1}} \tag{3.44}$$

avec la matrice de transfert $T_{n,n'} \equiv \delta_{n+1,n'} + R_{n'}\delta_{n-1,n'}$.

Pour $v_k = t\delta_{k,2}$, nous retrouvons le cas des quadrangulations, c'est-à-dire l'équation (3.11) avec $M_n \equiv R_{n+1}$. Au niveau des mobiles, tous les sommets non-étiquetés ont degré 2, et peuvent être supprimés pour retrouver les arbres bien étiquetés.

Chapitre 4

Distance et intégrabilité

Ce chapitre est consacré à l'application des bijections présentées dans les chapitres 2 et 3 pour l'étude de propriétés statistiques des cartes planaires. Les résultats obtenus sont exacts, de nature analytique, et reflètent l'existence d'une surprenante relation avec la théorie des systèmes intégrables. Une telle connexion avait été observée dans les modèles de matrices (voir la revue [22]), mais est sans rapport connu avec ce qui est présenté ici.

Nous commençons par étudier la fonction à deux points dans le contexte des cartes aléatoires : comme proposé par Ambjørn et Watabiki [73], cette quantité est un indicateur physique pertinent de la structure des théories de gravité quantique, et en particulier des propriétés d'invariance d'échelle. Ici, nous partons d'une formulation naturelle du problème dans le cadre discret des cartes aléatoires : nous montrons que la fonction à deux points peut être calculée de manière exacte. Nous considérons ensuite la limite continue, obtenue selon un procédé analogue à celui évoqué au chapitre 1. Le cas des quadrangulations, plus simple techniquement, est traité en premier lieu, avant une extension au cas des cartes biparties. Les résultats présentés sont en majeure partie ceux de la publication V.

Notre approche technique peut ensuite être adaptée pour le calcul d'autres propriétés statistiques des cartes aléatoires. Ces propriétés sont généralement liées au « profil » des cartes pointées, selon la terminologie de Chassaing et Schaeffer [69]. Nous étudions le rayon, qui est la distance maximale d'un sommet à l'origine : nous obtenons une paramétrisation des séries génératrices des quadrangulations de rayon prescrit en terme de fonctions elliptiques, subsistant dans la limite continue. Ces résultats sont repris de la publication VI. Enfin, suivant la publication VII, nous étudions la distribution du profil d'une quadrangulation aléatoire, notamment dans la limite des cartes de taille infinie, où nous observons le profil « local », c'est-à-dire à une échelle finie.

4.1 La fonction à deux points

4.1.1 Motivations physiques

Informellement, la fonction à deux points désigne en physique la valeur moyenne du produit de deux « observables » (variables aléatoires) locales, c'est-à-dire mesurant une propriété en deux points donnés de l'espace-temps. Dans le langage de la théorie des champs, on parle aussi de propagateur (les observables sont alors des opérateurs). Pour une théorie invariante par translation et rotation, la fonction à deux points ne dépend que de la distance entre ceux-ci. L'étude de cette dépendance fournit une information non-triviale sur la physique du système : à

grande distance, la fonction à deux points décroît normalement de manière exponentielle, avec une échelle caractéristique appelée *longueur de corrélation* (ou masse inverse). Cependant, à un point critique, la fonction à deux points décroît plus lentement, comme une puissance de la longueur ; la divergence de la longueur de corrélation est interprétée comme manifestation d'un comportement invariant d'échelle.

Dans le contexte de la gravité quantique et des surfaces aléatoires, une subtilité provient du fait que la distance est également une grandeur fluctuante. Une façon naturelle de procéder consiste à fixer la *distance géodésique* entre les deux points, c'est-à-dire la longueur du plus court chemin entre eux par rapport à la métrique aléatoire. Selon les mêmes notations informelles qu'au chapitre 1, nous écrivons la corrélation de deux opérateurs Φ_1 et Φ_2 dans une théorie continue comme :

$$\mathcal{G}_{\Phi_1\Phi_2}(r) = \frac{1}{Z_{\mathrm{QG}}} \sum_{\text{topologies}} \int [DG][D\Phi] e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{S}_{\mathrm{EH}}+\mathcal{S}_{\mathrm{mat}})} \int \sqrt{|\det G(x_1)|} d^n x_1 \times \int \sqrt{|\det G(x_2)|} d^n x_2 \; \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2) \; \delta\left(r_G(x_1,x_2) - r\right) \quad (4.1)$$

où Z_{QG} est la fonction de partition (1.58) et $r_G(x_1, x_2)$ est la distance géodésique entre x_1 et x_2 :

$$r_G(x_1,x_2) \equiv \inf_{\gamma(x_1,x_2)} \int_0^1 \sqrt{G_{\mu\nu}(\gamma(t))\gamma^{\mu\prime}(t)\gamma^{\nu\prime}(t)} dt \quad (4.2)$$

la borne inférieure portant sur tous les arcs (différentiables) $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$ tels que $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$. Il s'agit bien d'une quantité invariante par reparamétrisation de la variété. En particulier, contrairement au cas d'une métrique fixe, une fonction à deux points non-triviale est obtenue lorsque Φ_1 et Φ_2 sont pris égaux à l'opérateur identité $\mathbb{I}$ (c'est-à-dire $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = 1$ quel que soit x), et nous définissons la fonction à deux points $\mathcal{G}(r)$ de la gravité quantique comme :

$$\mathcal{G}(r) \equiv \mathcal{G}_{\mathbb{I}\mathbb{I}}(r). \quad (4.3)$$

Cette quantité possède un sens même pour une théorie de gravité pure, et contient une information géométrique non-triviale, comme discuté par Ambjørn et Watabiki [73]. Nous en présentons ici les principales propriétés, dans le cas de la dimension $n = 2$, pour des surfaces à topologie sphérique, avec une constante cosmologique λ (c'est-à-dire que l'intégration sur les métriques comporte un poids de Boltzmann $e^{-\lambda A}$ où A est l'aire) gouvernant l'approche au point critique $\lambda = 0$.

– Par intégration sur r nous obtenons le second moment de l'aire :

$$\int_0^\infty \mathcal{G}(r) dr = \langle A^2 \rangle \propto \lambda^{-\gamma} \quad (4.4)$$

où l'exposant critique γ (« de susceptibilité de corde ») vaut $-1/2$ dans le cas de la gravité pure, comme vu au chapitre 1.

– À grande distance ($r \to \infty$) hors du point critique ($\lambda > 0$) la fonction à deux points décroît exponentiellement comme :

$$\mathcal{G}(r) \propto e^{-r/\xi(\lambda)} \quad (4.5)$$

où $\xi(\lambda)$ est la longueur de corrélation, divergeant au voisinage du point critique comme :

$$\xi(\lambda) \propto \lambda^{-\nu}. \quad (4.6)$$

Nous verrons plus loin que $\nu = 1/4$ pour la gravité pure.

– À petite distance ($r \ll \xi(\lambda)$), la fonction à deux points se comporte comme :

$$\mathcal{G}(r) \propto r^{1-\eta} \tag{4.7}$$

η est appelée *dimension anormale* de la fonction à deux points car η vaudrait 0 en l'absence d'intégration sur la métrique à l'équation (4.1). Cet exposant est relié aux précédents par la *loi de Fisher* :

$$\gamma = \nu(2-\eta) \tag{4.8}$$

Nous pourrons ainsi vérifier $\eta = 4$ pour la gravité pure.

Après ces définitions, usuelles en théorie des champs, voyons comment définir une notion de fonction à deux points dans la discrétisation des modèles de surfaces sphériques aléatoires à l'aide des cartes planaires.

4.1.2 Définition discrète

Comme discuté au chapitre 1, nous considérons un modèle discret où la surface est une carte planaire, la mesure sur les cartes étant définie en attachant un poids à chaque face, dépendant éventuellement de caractéristiques de cette face comme son degré ou sa couleur (pour une carte coloriée). Un analogue discret de la fonction à deux points (4.1) consiste en une somme sur toutes les cartes avec deux « points » marqués soumis une contrainte de distance.

Nous considérons ici le cas des cartes biparties avec un poids v_{2n} par face de degré $2n$: par les résultats du chapitre 3, la série génératrice des cartes planaires biparties pointées (i.e. avec un sommet distingué appelé origine) avec marquage d'une arête de type n—$n+1$ (n et $n+1$ désignent les distances à l'origine des sommets incidents) est :

$$G_n \equiv R_n - R_{n-1} - \delta_{n,0} \tag{4.9}$$

où R_n est déterminé par l'équation (3.44) qui se réécrit :

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k} \left(T^{2k-1}\right)_{n+1,n}. \tag{4.10}$$

T est la matrice de transfert semi-infinie ayant pour coefficients :

$$T_{n,n'} = \delta_{n+1,n'} + R_{n'}\delta_{n-1,n'} \tag{4.11}$$

(pour $n, n' \geq 0$), et les premiers termes apparaissant dans le membre de droite de l'équation (4.10) sont :

$$\begin{aligned}
\left(T\right)_{n+1,n} &= R_n \\
\left(T^3\right)_{n+1,n} &= R_n(R_{n+1} + R_n + R_{n-1}) \\
\left(T^5\right)_{n+1,n} &= R_n(R_{n+2}R_{n+1} + R_{n+1}^2 + 2R_{n+1}R_n + R_{n+1}R_{n-1} \\
&\qquad + R_{n-2}R_{n-1} + R_{n-1}^2 + 2R_{n-1}R_n)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

(avec la convention $R_n = 0$ pour $n < 0$). De façon générale $\left(T^{2k-1}\right)_{n+1,n}$ est un polynôme homogène de degré k en les R_i tels que $|i-n| < k$. La somme de ses coefficients est $\binom{2k-1}{k-1}$.

L'équation (4.10) résulte de la bijection du chapitre 3 entre cartes planaires et mobiles (dans le cadre simplifié des cartes biparties) ; G_n s'interprète alors comme une série génératrice de mobiles bien étiquetés, enracinés sur un sommet $n+1$. Notons qu'il est également possible d'interpréter

G_n dans le langage des arbres bourgeonnants, vus au chapitre 2 : il s'agit de la série génératrice des arbres bourgeonnants eulériens bien chargés, enracinés sur une feuille à profondeur n. Nous ne discuterons pas ici de cette interprétation, qui est présentée en détail dans la publication V.

G_n constitue un candidat à la définition d'une fonction à deux points discrète, où n est la distance entre les points. Pour être précis, les deux points ne jouent pas un rôle symétrique, puisque nous avons d'une part marquage d'un point, d'autre part d'une arête (ce qui assure l'absence de facteurs de symétrie). Nous nous attendons cependant à ce que cette distinction ne joue aucun rôle dans la limite continue, que nous discuterons plus loin. Remarquons les deux faits suivants :

- pour $n = 0$, les points sont confondus, et $G_0 = R_0 - 1$ est la série génératrice des cartes enracinées (i.e. avec un seul « point » marqué)
- par somme sur tous les $n \geq 0$, $R - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} G_n$ est la série génératrice des cartes avec un sommet et une arête marqués (i.e. avec deux « points » marqués sans contrainte).

Nous avons vu que R vérifie l'équation :

$$R = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k} \binom{2k-1}{k-1} R^k \tag{4.13}$$

permettant d'obtenir une formule fermée pour le terme général de R vu comme série formelle. R_0 est alors déterminé en fonction de R par :

$$R_0 = R - \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k} \binom{2k-1}{k-2} R^{k+1}. \tag{4.14}$$

Nous nous intéressons ici à la détermination d'une expression générale pour R_n, que nous appelons *fonction à deux points intégrée* (car elle correspond au marquage de deux points à une distance inférieure ou égale à n). La fonction à deux points G_n en résulte par l'équation (4.9). Nous commençons par le cas plus simple des quadrangulations, correspondant à $v_{2k} \equiv t\delta_{k,2}$ (t est un poids par carré, ou paire d'arêtes).

4.1.3 Le cas des quadrangulations

La fonction à deux points intégrée pour les quadrangulations vérifie l'équation :

$$R_n = 1 + tR_n(R_{n+1} + R_n + R_{n-1}) \tag{4.15}$$

(pour $n \geq 0$ et $R_{-1} = 0$), que nous pouvons identifier à l'équation (3.11), avec $M_n \equiv R_{n+1}$ (nous conservons cette dernière notation pour cette section). Cette équation détermine R_n comme série formelle en t, tendant vers une limite R quand $n \to \infty$.

Il s'avère que R_n peut être exprimé par une formule fermée, que nous donnons immédiatement sous la forme suivante :

La fonction à deux points intégrée pour les quadrangulations est :

$$R_n = R\frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+4})}{(1-x^{n+2})(1-x^{n+3})} \tag{4.16}$$

où x est solution de :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1-4tR}{tR}. \tag{4.17}$$

et :

$$\lim_{n\to\infty} R_n = R = \frac{1-\sqrt{1-12t}}{6t}. \tag{4.18}$$

On vérifie aisément que l'équation (4.17) détermine une unique solution $x = t + O(t^2)$ et, par substitution, que R_n vérifie l'équation (4.15). De façon plus constructive, nous expliquons ci-dessous comment une telle formule peut être « devinée ». Nous explorerons ensuite les propriétés analytiques et asymptotiques de cette fonction à deux points.

Construction de la solution exacte

L'origine de cette formule peut être vue de la façon suivante : nous cherchons à déterminer la solution de la récurrence non-linéaire (4.15) vérifiant $R_n \to R$, où R est la solution invariante par translation de l'équation (donc n'a pas le bon comportement en $n = -1$). Une méthode courante en physique est de rechercher d'autres solutions par un « développement perturbatif ». Ici, nous écrivons :

$$R_n = R(1 - \rho_n) \tag{4.19}$$

où ρ_n est la perturbation, développable comme :

$$\rho_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^n \rho_n^{(i)}. \tag{4.20}$$

α est le paramètre du développement perturbatif, et nous déterminons les $\rho_n^{(i)}$ par récurrence en imposant que l'équation (4.15) est satisfaite à tout ordre du développement en α.

Au premier ordre, $\rho_n^{(1)}$ vérifie l'équation linéarisée :

$$\rho_n^{(1)} = tR(\rho_{n+1}^{(1)} + 4\rho_n^{(1)} + \rho_{n-1}^{(1)}) \tag{4.21}$$

La solution générale de cette équation est a priori combinaison linéaire de x^n et x^{-n}, où x vérifie l'équation (4.17), qui n'est autre que l'équation caractéristique de la récurrence ci-dessus. En fait, nous devons prendre $\rho_n^{(1)} \propto x^n$ pour avoir une série formelle (i.e. ne comportant que des puissances positives de t), et une convergence pour $n \to \infty$. Quitte à redéfinir α, nous pouvons supposer $\rho_n^{(1)} = x^n$.

Pour un ordre plus élevé $i \geq 2$, l'équation (4.15) développée à l'ordre i permet de déterminer itérativement $\rho_n^{(i)}$:

$$\rho_{n+1}^{(i)} - \left(x + \frac{1}{x}\right)\rho_n^{(i)} + \rho_{n-1}^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} \rho_n^{(i-j)} \left(\rho_{n+1}^{(j)} + \rho_n^{(j)} + \rho_{n-1}^{(j)}\right). \tag{4.22}$$

Cette équation est satisfaite lorsque la dépendance en n est de la forme :

$$\rho_n^{(i)} = \beta_i x^{ni} \tag{4.23}$$

et β_i vérifie la récurrence :

$$\beta_{i+1}\left(x^{i+1} + \frac{1}{x^{i+1}} - x - \frac{1}{x}\right) = \sum_{j=1}^{i} \beta_j \beta_{i+1-j}\left(x^j + \frac{1}{x^j} + 1\right) \tag{4.24}$$

(avec $\beta_1 = 1$). A priori, la forme (4.23) ne constitue qu'une solution particulière de l'équation (4.22), cependant la solution générale est obtenue en ajoutant une solution de l'équation homogène $\propto \rho^{(1)}$, qui peut être absorbée ordre par ordre par une redéfinition $\alpha \to \alpha + C\alpha^i$. En calculant alors les premiers β_i par l'équation (4.24), nous reconnaissons la forme générale :

$$\beta_i = \left(\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}\right)^{i-1} \frac{1-x^i}{1-x} \tag{4.25}$$

qui peut être justifiée par récurrence. Par sommation nous obtenons la solution générale de l'équation (4.15) tendant vers R pour $n \to \infty$:

$$R_n = R\frac{(1-\lambda x^{n+1})(1-\lambda x^{n+4})}{(1-\lambda x^{n+2})(1-\lambda x^{n+3})} \tag{4.26}$$

avec $\lambda = \alpha/(x(1-x)(1-x^2))$. La condition $R_{-1} = 0$ fixe $\lambda = 1$, d'où nous tirons enfin l'expression (4.16).

À titre d'illustration, nous pouvons retrouver pour $n = 0$ la série génératrice des cartes enracinées $G_0 = R_0 - 1 = R - tR^3 - 1$ (après élimination de x), et pour les petites valeurs de n, nous pouvons calculer explicitement les premiers termes du développement en t :

$$\begin{aligned} G_0 &= 2t + 9t^2 + 54t^3 + 378t^4 + 2916t^5 + \cdots \\ G_1 &= t + 8t^2 + 65t^3 + 554t^4 + 4922t^5 + \cdots \\ G_2 &= t^2 + 15t^3 + 179t^4 + 1995t^5 + \cdots \end{aligned} \tag{4.27}$$

Les premiers nombres peuvent être vérifiés par comptage « manuel ».

Notons enfin que nous pouvons retrouver l'intégrale première (3.14) à partir de la forme générale (4.26) : posant en effet $\lambda_n \equiv \lambda x^n$, nous pouvons en effet effectuer une élimination algébrique de x et λ_n entre les expressions de R_n, R_{n+1} et l'équation (4.17). En utilisant l'identité $R = 1 + 3tR^2$, nous aboutissons à l'équation :

$$\psi(R_n, R_{n+1}) = \psi(R, R) \tag{4.28}$$

avec $\psi(R_n, R_{n+1}) \equiv (1 - tR_n - tR_{n+1})(1 + tR_nR_{n+1})$.

Propriétés asymptotiques à distance finie

Explorons à présent les propriétés asymptotiques de la fonction à deux points. Notons d'abord que toutes les séries formelles considérées (R, x, et par conséquent R_n pour tout n) possèdent un rayon de convergence analytique $t^{(c)} \equiv 1/12$. Ceci est relié au fait que le nombre de quadrangulations à k faces a une croissance exponentielle dominante en 12^k, quels que soient les marquages (qui induisent des facteurs en puissance de n, sous-dominants).

Nous pouvons donc considérer R, x et les R_n comme des fonctions analytiques sur le domaine $|t| < t^{(c)}$. Ces fonctions possèdent une valeur finie en $t = t^{(c)}$:

$$R^{(c)} = 2 \qquad x^{(c)} = 1 \qquad R_n^{(c)} = 2\frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)}. \tag{4.29}$$

Cependant, une singularité sous-dominante est présente : en paramétrisant l'approche au point critique par $t = t^{(c)}e^{-\epsilon}$, nous avons par exemple :

$$R = 2\left(1 - \epsilon^{1/2} + O(\epsilon)\right). \tag{4.30}$$

Nous retrouvons l'exposant critique $\gamma = -\frac{1}{2}$ de la gravité pure, vu au chapitre 1 : la singularité principale est en $\epsilon^{-\gamma}$, comme il se doit pour une susceptibilité (le marquage de deux points s'apparentant à une dérivée seconde par rapport au paramètre couplé à l'aire).

Il est bien connu en analyse que le développement d'une série au voisinage du rayon de convergence est lié au comportement asymptotique de son terme général, en l'occurrence ceci correspond à l'énumération asymptotique des quadrangulations pour un nombre k de faces grand mais fixé. Considérons d'abord le cas de R, donnant le nombre $[t^k]R$ de quadrangulations à k arêtes avec un sommet et une arête marqués :

$$[t^k]R = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} \frac{R\,dt}{t^{k+1}} \tag{4.31}$$

C_0 étant un contour positif autour de 0, inclus dans le domaine $|t| < t^{(c)}$. Nous effectuons le changement de variable $t \to v \equiv tR$ (soit $t = v - 3v^2$, $R = 1/(1-3v)$) :

$$\begin{aligned}[t^k]R &\equiv \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0'} \frac{1-6v}{1-3v} \frac{dv}{(v-3v^2)^{k+1}} \\ &\sim 12^k k^{-3/2} \pi^{-1/2}.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Ce dernier équivalent est obtenu par la classique méthode du col [74], appliquée au voisinage de $v^{(c)} = 1/6$ [1] ; nous pouvons aussi employer l'équivalent de Stirling dans la formule $[t^k]R = \frac{3^k}{k+1}\binom{2n}{n}$.

Le cas de R_0, donnant le nombre de quadrangulations enracinées à k arêtes, est traité de manière analogue :

$$[t^k]R_0 \sim 12^k k^{-5/2} 2\,\pi^{-1/2}. \tag{4.33}$$

Pour cet équivalent, nous pouvons procéder de manière pédestre par la méthode du col (en utilisant la relation $R_0 = R - tR^3$), ou bien nous rappeler la relation $[t^k]R_0 = \frac{2}{k+2}[t^k]R$.

Considérons à présent R_n, pour une valeur de n fixée (mais finie) : nous exprimons $[t^k]R_n$ comme une intégrale de contour, en utilisant l'expression (4.16) et en effectuant le changement de variable $t \to v$. Nous pouvons alors appliquer à nouveau la méthode du col[2], ce qui donne le résultat rigoureux suivant :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{[t^k]R_n}{[t^k]R_0} = B_n \equiv \frac{3}{280} \frac{(n+1)(n+4)}{(n+2)(n+3)} (5n^4 + 50n^3 + 179n^2 + 270n + 140) \tag{4.34}$$

B_n est proportionnel au nombre moyen d'arêtes de type m—$m+1$, avec $m \leq n$, dans une quadrangulation pointée de taille « infinie » (i.e. avec un nombre total k de faces grand) tirée au hasard de manière « uniforme ». Nous aboutissons au résultat suivant :

La valeur moyenne du nombre s_n d'arêtes de type $(n-1)$—n dans une quadrangulation pointée de k faces tend quand $k \to \infty$ vers :

$$\langle s_n \rangle = \frac{6}{35} \frac{(n^2+2n-1)(5n^4+20n^3+27n^2+14n+4)}{n(n+1)(n+2)}. \tag{4.35}$$

[1] On notera que le facteur $(1-6v)$ du numérateur s'annule au col, et est responsable du comportement sous-dominant $k^{-3/2}$ remplaçant le comportement « générique » $k^{-1/2}$.

[2] Notons que x vu comme fonction de v n'est pas analytique au col $v^{(c)} = 1/6$, mais la combinaison de l'équation (4.16) l'est par la symétrie $x \leftrightarrow 1/x$.

Cette quantité n'est autre que $4(B_{n-1} - B_{n-2})$, où le facteur 4 peut être obtenu simplement par comparaison avec la valeur connue $\langle s_1 \rangle = 4$. De manière similaire, le coefficient $[t^k] \log R_n$ est proportionnel au nombre moyen de sommets à distance $\leq n+1$ de l'origine :

La valeur moyenne du nombre r_n d'arêtes de sommets à distance n de l'origine dans une quadrangulation pointée de k faces tend quand $k \to \infty$ vers :

$$\langle r_n \rangle = \frac{3}{35} \left((n+1)(5n^2+10n+2) + \delta_{n,1} \right) \tag{4.36}$$

D'autres propriétés statistiques des quadrangulations infinies seront discutées à la section 4.3.

Observons que tant $\langle s_n \rangle$ que $\langle r_n \rangle$ croissent asymptotiquement comme n^3 : ces quantités mesurent en un sens le volume moyen de la « coquille sphérique » centrée en l'origine, de rayon n et d'épaisseur unité. Par sommation sur n, nous obtenons le volume de la sphère de rayon n centrée en l'origine, qui croît asymptotiquement comme n^4 : à grande échelle, une quadrangulation « ressemble » à un espace (métrique) de dimension 4. Bien évidemment, les limites $n \to \infty$ et $k \to \infty$ ne commutent pas, un comportement non-trivial étant obtenu dans le régime $k \propto n^4$, que nous présentons maintenant.

Propriétés asymptotiques à grande distance : limite continue

La discussion ci-dessus suggère qu'une limite continue non-triviale est obtenue lorsque nous renormalisons l'unité d'échelle de distance par un facteur α, tout en renormalisant l'échelle de taille par un facteur α^4. Cet exposant 4 est la *dimension fractale* : celle-ci caractérise la relation anormale entre les unités de longueur et d'aire dans une théorie de gravité pure [3].

De manière plus précise, nous voyons que $[t^k]R_n$ est a priori du même ordre de grandeur que $[t^k]R$ lorsque $k \to \infty$ avec le rapport $n/k^{1/4}$ fixé (en effet $[t^k]R \propto k[t^k]R_0$ tandis que $[t^k]R_n \propto n^4 R_0|_k$). Nous faisons l'hypothèse que le rapport de ces quantités possède une *limite d'échelle* :

$$\frac{[t^k]R_n}{[t^k]R} \sim \Phi\left(\frac{n}{k^{1/4}}\right). \tag{4.37}$$

Φ est une *fonction d'échelle*, que nous pouvons interpréter comme la fonction de distribution de la distance entre deux points dans une surface aléatoire continue d'aire fixée. En effet, le rapport $\frac{[t^k]R_n}{[t^k]R}$ correspond à la probabilité qu'un sommet tiré aléatoirement dans une quadrangulation enracinée aléatoire (tirée uniformément) soit à une distance inférieure à n de la racine. Nous prenons la limite continue de cette quantité en introduisant la *distance renormalisée* r et l'*aire renormalisée* A par :

$$r = n\epsilon^{1/4} \qquad A = k\epsilon \tag{4.38}$$

puis en prenant la limite $\epsilon \to 0$ à r et A finis. Nous avons ainsi $\frac{[t^k]R_n}{[t^k]R} \to \Phi(r/A^{1/4})$. L'invariance d'échelle est manifeste. Φ doit être une fonction croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, avec les propriétés suivantes :

$$\Phi(u) \sim \frac{3}{28} u^4 \text{ pour } u \to 0 \qquad \Phi(u) \to 1 \text{ pour } u \to +\infty. \tag{4.39}$$

[3] Un tel exposant peut être également caractérisé par les « corrélateurs de boucles » calculables par modèles de matrice.

Le premier équivalent provient de l'identification avec l'équivalent asymptotique de B_n dans l'équation (4.34), correspondant au régime $1 \ll n \ll k^{1/4}$.

Nous cherchons maintenant à traduire l'hypothèse d'échelle dans le langage des séries génératrices. Le comportement asymptotique de $[t^k]R_n$ traduit le comportement singulier de la fonction analytique R_n au voisinage du rayon de convergence ($t \to t^{(c)} = 1/12$). Par l'équivalent (4.32) nous avons :

$$[t^k]R_n \sim \frac{12^k}{\pi^{1/2}k^{3/2}}\Phi\left(\frac{n}{k^{1/4}}\right) \tag{4.40}$$

(pour $1 \ll n \propto k^{1/4}$). Ceci se traduit par le comportement singulier principal pour $t \to t^{(c)}$ et $n \propto \left(1 - t/t^{(c)}\right)^{1/4}$:

$$R_n|_{\text{sing}} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(t/t^{(c)}\right)^k}{\pi^{1/2}k^{3/2}}\Phi\left(\frac{n}{k^{1/4}}\right) \tag{4.41}$$

Comme pour l'équation (1.67) du chapitre 1, nous pouvons remplacer la somme sur k par une intégrale, en paramétrisant l'approche au point critique par $t = t^{(c)}e^{-\lambda\epsilon}$:

$$R_n|_{\text{sing}} \sim \frac{\epsilon^{1/2}}{\pi^{1/2}} \int_{\epsilon}^{\infty} dA e^{-\lambda A} A^{-3/2} \Phi\left(\frac{r}{A^{1/4}}\right). \tag{4.42}$$

Une telle expression peut être comparée à celle obtenue à l'aide de la forme exacte (4.16) : notant que $x = 1 - \sqrt{6}(\lambda\epsilon)^{1/4} + O(\epsilon^{1/2})$, nous obtenons le développement :

$$R_n = 2\left(1 - \left(1 + \frac{3}{\sinh^2(\sqrt{3/2}\, r\lambda^{1/4})}\right)\lambda^{1/2}\epsilon^{1/2} + O(\epsilon)\right). \tag{4.43}$$

Une meilleure identification est obtenue en notant que :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{R - R_n}{\epsilon^{1/2}} &= \frac{3\lambda^{1/2}}{\sinh^2(\sqrt{3/2}\, r\lambda^{1/4})} \\ &= \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda A} A^{-3/2} \left(1 - \Phi\left(\frac{r}{A^{1/4}}\right)\right) dA \end{aligned} \tag{4.44}$$

Cette dernière intégrale est convergente à condition que $1 - \Phi(u)$ tende assez vite vers 0 quand $u \to \infty$.

L'équation (4.44) permet en principe d'exprimer Φ. Une telle relation suppose la validité de l'hypothèse d'échelle (4.37), voyons maintenant comment justifier celle-ci par un calcul direct. Nous partons de la formule de Cauchy :

$$[t^k]R_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_0} \frac{R_n\, dt}{t^{k+1}} \tag{4.45}$$

Nous effectuons alors le changement de variable $t \to v = tR$: le comportement asymptotique de $[t^k]R_n$ est donné par le développement autour du col $v^{(c)} = 1/6$, dans lequel nous pouvons substituer le développement (4.43) [4], pour retrouver la forme (4.40) (équivalant à l'hypothèse

[4]Celui-ci correspond au développement autour du col $v/v^{(c)} = 1 - \epsilon^{1/2} + O(\epsilon)$, avec $\lambda = 1$, $d = n\epsilon^{1/4}$. En posant $\epsilon^{1/2} = -ik^{1/2}\alpha$, l'intégrale de contour sur v se comporte à l'ordre dominant comme une intégrale sur α de $-\infty$ à $+\infty$. On peut vérifier que le terme d'ordre 1 dans le développement (4.43) donne une contribution nulle pour des raisons de parité.

d'échelle) avec :

$$\Phi(u) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha} \alpha^{1/2} \left(1 + \frac{3}{\sinh^2 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, u\, e^{i\pi/4} \alpha^{1/4} \right)} \right) d\alpha. \tag{4.46}$$

Cette expression peut être vue comme inverse de la transformée de Laplace présente dans l'équation (4.44), dont nous pouvons justifier la convergence en vérifiant que pour $u \to \infty$, $1 - \Phi(u)$ a une décroissance exponentielle en $e^{-Cu^{4/3}}$.

L'étude ci-dessus concerne la fonction à deux points intégrée R_n, mais le cas de la fonction à deux points G_n s'en déduit aisément :

Dans la limite continue, définie par $t = (1/12)e^{-\lambda\epsilon}$, $n = r\epsilon^{-1/4}$, $\epsilon \to 0$, la fonction à deux points $G_n = R_n - R_{n-1} - \delta_{n,0}$ pour les quadrangulations possède le comportement singulier :

$$G_n = 3\sqrt{6}\ \mathcal{G}\left(\sqrt{3/2}\, r \lambda^{1/4} \right) \lambda^{3/4} \epsilon^{3/4} + O(\epsilon^{5/4}) \tag{4.47}$$

où $\mathcal{G}$ est la fonction à deux points **universelle** de la gravité pure :

$$\mathcal{G}(u) \equiv \frac{\cosh u}{\sinh^3 u}. \tag{4.48}$$

La forme (4.48) a été également obtenue par Ambjørn et Watabiki [73] dans un modèle de triangulations, via une approche différente reposant sur un formalisme de matrice de transfert [75]. λ est la constante cosmologique renormalisée gouvernant l'approche au point critique $\lambda = 0$, et nous voyons que la longueur de corrélation définie par l'équation (4.5) est $\xi(\lambda) \equiv 6^{-1/2} \lambda^{-1/4}$. Nous identifions l'exposant critique $\nu \equiv 1/4$, inverse de la dimension fractale, ainsi que l'exposant $\eta = 4$ en accord avec la loi de Fisher.

Pour une aire renormalisée $A = k\epsilon$ fixée, les résultats sont alors :

Pour $n \propto k^{1/4} \gg 1$, nous avons l'équivalent :

$$[t^k] G_n \sim \frac{12^k}{\pi^{1/2} k^{5/4}} \rho\left(\frac{n}{k^{1/4}} \right) \tag{4.49}$$

où ρ s'interprète comme densité de la loi de la distance entre deux points aléatoires d'une surface continue d'aire unité, liée à $\mathcal{G}$ par :

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda A} A^{-5/4} \rho\left(\frac{r}{A^{1/4}} \right) dA = 3\sqrt{6\pi}\, \mathcal{G}\left(\sqrt{3/2}\, d\lambda^{1/4} \right). \tag{4.50}$$

Le moment d'ordre k de cette loi est donné par :

$$\int_0^{\infty} r^k \rho(r) dr = 24\sqrt{\pi} \frac{k!\, \zeta(k-1)}{6^{k/2} \Gamma\left(\frac{k-2}{4} \right)}. \tag{4.51}$$

L'équation (4.50) et les moments (4.51) coïncident avec les expressions obtenues pour la loi du minimum du support de l'excursion superbrownienne intégrée unidimensionnelle (ISE), calculée par Delmas [76]. Cette relation n'est pas surprenante, étant donné que G_n/R s'interprète comme la loi du minimum pour un modèle discret d'arbre plongé, dont la limite continue est décrite par l'ISE (via le « serpent brownien » [69]). Mentionnons également les résultats récents liés de Bousquet-Mélou [77].

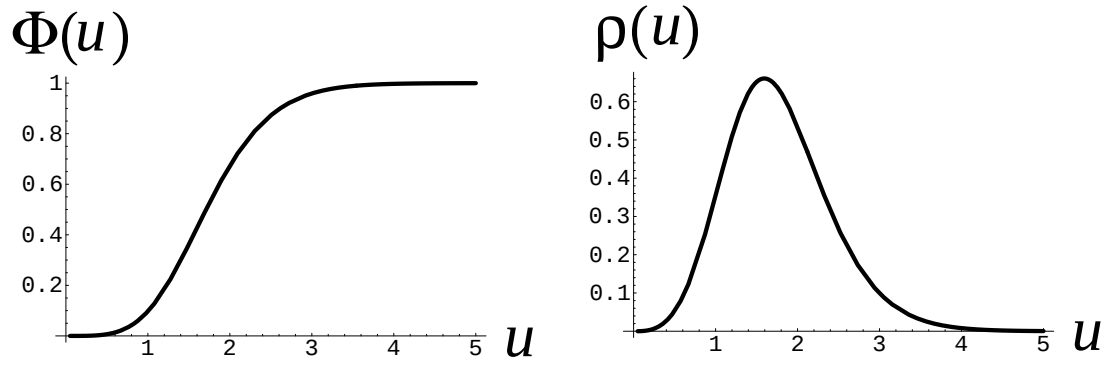


FIG. 4.1 – La fonction de distribution cumulée Φ et la densité ρ pour la distance entre deux points aléatoires d'une surface continue d'aire fixée, dans une théorie de gravité pure.

La relation (4.46) permet d'obtenir une forme intégrale pour $\rho = \Phi'$:

$$\rho(u) = \frac{4}{\pi^{1/2} u} \int_0^\infty t^2(2t^2-3)e^{-t^2} \times \frac{\cosh(2u\sqrt{3t}) + \cos(2u\sqrt{3t}) + 8\cosh(u\sqrt{3t})\cos(u\sqrt{3t}) - 10}{\left(\cosh(2\sqrt{3t}) - \cos(u\sqrt{3t})\right)^2} dt. \quad (4.52)$$

Cette intégrale peut être évaluée numériquement pour une valeur donnée de u. La figure 4.1 donne une représentation graphique de Φ et ρ.

Nous terminons cette section en remarquant que le développement (4.43) peut être obtenu directement en prenant la limite continue de l'équation (4.15), sans connaissance de la solution exacte discrète. Plus précisément, un comportement non-trivial est obtenu avec l'ansatz :

$$R_n = 2\left(1 - F(n\epsilon^{1/4})\epsilon^{1/2} + O(\epsilon)\right) \quad (4.53)$$

où $F(u)$ est une fonction d'échelle. L'équation (4.15) est satisfaite à l'ordre $\epsilon^{1/2}$ si :

$$\frac{F''(u)}{3} - F(u)^2 = \lambda. \quad (4.54)$$

Nous vérifions que la fonction d'échelle du développement (4.43) satisfait cette relation, avec les conditions aux limites $F(u) \to 1$ pour $u \to \infty$ (afin de retrouver le développement de R) et $F(u) \propto u^{-2}$ pour $u \to 0$ (pour obtenir le bon comportement dans le régime $n \ll \epsilon^{1/4}$).

4.1.4 Généralisation au cas des degrés bornés

Revenons à l'équation générale (4.10) pour les cartes planaires biparties. Lorsque les degrés sont bornés, c'est-à-dire qu'il existe $m \geq 1$ tel que v_{2k} est nul pour $k > m$ (et $v_{2m} \neq 0$), cette équation ne fait intervenir que les R_i tels que $|i-n| < m$.

Le cas $m = 1$ est trivial ($R_n = \frac{1}{1-v_2}$, ce qui correspond aux cartes duales aux cycles). Le cas $m = 2$ est celui des quadrangulations, quitte à redéfinir les poids pour éliminer v_2 (ce qui revient à « absorber » les faces de degré 2). Nous nous intéressons donc surtout au cas $m \geq 3$, et nous discuterons plus particulièrement le cas $m = 3$ équivalant au modèle des dimères durs sur cartes tétravalentes.

Solution exacte générale

L'équation (4.10) est valable pour $n \geq 0$, avec la convention $R_n = 0$ pour $n < 0$. Elle détermine les R_n comme séries formelles en les v_{2k}, et pour $n \to \infty$ R_n tend vers R qui est solution de l'équation (4.13), à présent algébrique de degré m. La convergence peut être justifiée en notant par exemple que, dans $R - R_n$, le coefficient de tout monôme $\underline{v}^{\underline{\ell}} \equiv v_2^{\ell_1} v_4^{\ell_2} \cdots v_{2m}^{\ell_m}$ est nul dès que $n > \sum_{k=1}^{m}(k-1)\ell_k$.

Il est naturel de chercher à généraliser l'approche précédente par développement perturbatif. Nous écrivons à nouveau :

$$R_n = R(1 - \rho_n) \tag{4.55}$$

et nous exprimons la perturbation ρ_n comme :

$$\rho_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^n \rho_n^{(i)} \tag{4.56}$$

en imposant que l'équation (4.10) est satisfaite à tout ordre en α.

Le premier ordre $\rho_n^{(1)}$ vérifie l'équation linéarisée, qui peut se réécrire comme :

$$\rho_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} v_{2k} R^{k-1} \sum_{j=-k+1}^{k-1} \left(\sum_{l=0}^{k-1-|j|} \binom{2k-1}{l} \right) \rho_{n+j}^{(1)} \tag{4.57}$$

La solution générale de cette récurrence linéaire est combinaison linéaire des solutions exponentielles en x^n, où x est solution de l'équation caractéristique :

$$1 = \sum_{k=1}^{m} v_{2k} R^{k-1} \sum_{j=-k+1}^{k-1} \left(\sum_{l=1}^{k-|j|} \binom{2k-1}{l-1} \right) x^j \tag{4.58}$$

qui se réécrit :

$$0 = \chi_m(x) \equiv 1 - \sum_{k=1}^{m} v_{2k} R^{k-1} \sum_{l=1}^{k} \binom{2k-1}{l-1} U_{2k-2l}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \tag{4.59}$$

où U_i est le polynôme de Chebychev de seconde espèce d'ordre i (vérifiant $U_i(2\cosh\theta) = \sinh(i+1)\theta / \sinh\theta$). $\chi_m(x)$ est un polynôme de degré $m-1$ en $x + x^{-1}$, et l'équation (4.59) détermine $m-1$ solutions $x_1^{(m)}, \ldots, x_{m-1}^{(m)}$ qui sont des séries formelles en les v_{2k} (pour $1 \leq k \leq m$). Ce fait peut être justifié par une récurrence sur m : le cas $m = 2$ correspond aux quadrangulations discutées précédemment, et nous vérifions l'hypothèse d'induction en étudiant la dépendance en v_{2m} : l'équation (4.59) définit de manière unique $m-1$ séries formelles en v_{2m} à partir des « germes » :

$$\begin{aligned} \left(x_p^{(m)} \right)_{v_{2m} \to 0} &= x_p^{(m-1)} \text{ pour } p = 1, \ldots, m-2 \\ \left(x_{m-1}^{(m)} \right)_{v_{2m} \to 0} &= 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

À partir de là, nous notons plus simplement $x_p \equiv x_p^m$. Le premier ordre est ainsi :

$$\rho_n^{(1)} = \sum_{p=1}^{m-1} \alpha_p x_p^n \tag{4.61}$$

où les α_p sont des constantes indéterminées a priori, redondantes avec le paramètre de développement α. La suite du développement peut être calculée ordre par ordre. Nous observons que les premiers termes coïncident avec ceux de la forme générale :

$$R_n = R\frac{u_n^{(m)}u_{n+3}^{(m)}}{u_{n+1}^{(m)}u_{n+2}^{(m)}} \tag{4.62}$$

avec :

$$u_n^{(m)} \equiv \sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l \sum_{1\le p_1<\cdots<p_l\le m-1} \prod_{i=1}^{l} \lambda_{p_i} x_{p_i}^{n+m-1} \prod_{1\le i<j\le l} c_{p_i,p_j} \tag{4.63}$$

$$c_{p,p'} \equiv \frac{(x_p - x'_p)^2}{(1-x_p x'_p)^2}. \tag{4.64}$$

Cette formule, conjecturale, peut être vérifiée pour les petites valeurs de m et les premiers ordres du développement. Les constantes λ_p sont reliées aux coefficients α_p de l'ordre linéaire (4.61) par $\alpha_p = x_p(1-x_p)(1-x_p^2)\lambda_p$. Lorsque tous les λ_p sont nuls sauf un, nous retrouvons l'expression (4.26) pour R_n.

L'expression (4.63) est inspirée de la théorie des systèmes intégrables : elle apparaît comme cas particulier de la « fonction tau à N solitons de la hiérarchie KP » [78]. Plus précisément, la forme (4.26) correspond à un « soliton » : pour x solution de l'équation $\chi_m(x) = 0$, il s'agit d'une solution particulière de l'équation non-linéaire (4.10), où la dépendance en n est entièrement contenue dans le paramètre x^n (x joue le rôle d'une « rapidité »). Pour $m \geq 2$, ceci conduit à $m-1$ solutions distinctes, et la solution générale est combinaison de celles-ci. Par non-linéarité, il ne peut s'agir d'une combinaison linéaire, mais l'expression (4.63) montre que l'interaction entre solitons s'exprime comme combinaison des interactions à deux solitons. Cette propriété est une caractéristique des systèmes intégrables. Cette relation reste néanmoins mystérieuse, et il serait intéressant d'en obtenir une meilleure compréhension. En particulier, le passage d'un nombre infini de « temps » continus dans la hiérarchie KP à une simple variable discrète n n'est pas élucidé.

Comme expliqué dans la publication V, l'expression (4.63) peut être réécrite sous forme d'un déterminant :

$$u_n^{(m)} = \det_{1\le p,p'\le m-1}\left(\delta_{p,p'} - \lambda_p x_p^{n+m-1}\frac{1-x_p^2}{1-x_p x_{p'}}\right) \tag{4.65}$$

et la compatibilité avec les conditions $R_n = 0$ pour $n < 0$ fixe :

$$\lambda_p = \prod_{p'\neq p}\frac{1-x_p x_{p'}}{x_p - x_{p'}} \tag{4.66}$$

pour $p = 1, ..., m-1$. Par une dernière réécriture, nous aboutissons au résultat suivant.

La fonction à deux points intégrée pour les cartes biparties dont les faces ont degré maximal $2m$, avec un poids v_{2k} par face de degré $2k$, est :

$$R_n = R\frac{\tilde{u}_n^{(m)}\tilde{u}_{n+3}^{(m)}}{\tilde{u}_{n+1}^{(m)}\tilde{u}_{n+2}^{(m)}} \tag{4.67}$$

avec :

$$\tilde{u}_n^{(m)} = \det_{1\leq p,p'\leq m-1}\left(U_{n+2p-2}(w_{p'})\right) \tag{4.68}$$

où U_i est le polynôme de Chebychev de seconde espèce d'ordre i, et les w_p sont les $m-1$ solutions indépendantes de :

$$1 = \sum_{k=1}^{m} v_{2k} R^{k-1} \sum_{l=1}^{k} \binom{2k-1}{l-1} U_{2k-2l}(w_p) \tag{4.69}$$

et R est la série formelle solution de :

$$R = 1 + \sum_{k=1}^{m} v_{2k} \binom{2k-1}{k-1} R^{k+1}. \tag{4.70}$$

Notons que $\tilde{u}_n^{(m)}$ diffère de $u_n^{(m)}$ par une simple normalisation, et $w_p = \sqrt{x_p} + 1/\sqrt{x_p}$.

Intéressons nous enfin à l'existence d'intégrales premières généralisant l'expression (4.28) pour les quadrangulations. Réécrivons l'équation (4.10) sous la forme :

$$R_n = 1 + \sum_{n=1}^{m} v_{2k}\, \phi_n^{(k)} \tag{4.71}$$

où $\phi_n^{(k)} \equiv \left(T^{2k-1}\right)_{n+1,n}$ est un polynôme homogène de degré k en les R_p tels que $|p-k| < n$. Nous avons $\phi_n^{(1)} = R_n$ et nous posons par convention $\phi_n^{(0)} = 1$. Alors nous conjecturons que pour tous $i, j \geq 0$, la quantité $(\phi_{n+1}^{(i)} - \phi_{n-1}^{(i)})\phi_n^{(j)}$ est une *dérivée discrète*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\psi_n^{(i,j)}$ des R_p telle que :

$$(\phi_{n+1}^{(i)} - \phi_{n-1}^{(i)})\phi_n^{(j)} = \psi_n^{(i,j)} - \psi_{n-1}^{(i,j)}. \tag{4.72}$$

Nous voyons immédiatement que nous pouvons prendre pour tout $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \psi_n^{(0,i)} &= 0 \\ \psi_n^{(i,0)} &= \phi_n^{(i)} + \phi_{n+1}^{(i)} \\ \psi_n^{(i,i)} &= \phi_n^{(i)}\phi_{n+1}^{(i)} \end{aligned} \tag{4.73}$$

tandis que les premiers cas non triviaux sont :

$$\begin{aligned}
\psi_n^{(1,2)} &= R_n R_{n+1} \left(R_n + R_{n+1}\right) \\
\psi_n^{(2,1)} &= R_n R_{n+1} \left(R_{n-1} + R_n + R_{n+1} + R_{n+2}\right) \\
\psi_n^{(1,3)} &= R_n R_{n+1} \left(R_{n-1}R_n + R_{n+1}R_{n+2} - R_{n-1}R_{n+2} + \left(R_n + R_{n+1}\right)^2\right) \\
\psi_n^{(2,3)} &= R_n R_{n+1} \left(R_{n-1} + R_n + R_{n+1} + R_{n+2}\right) \times \\
&\qquad \left(R_{n-1}R_n + R_{n+1}R_{n+2} + \left(R_n + R_{n+1}\right)^2\right).
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Pour une valeur de i et j donnée, $\psi_n^{(i,j)}$ peut être calculé par un algorithme simple, aboutissant à un polynôme homogène de degré $i + j$ ($i \neq 0$) en les R_p tels que $n - \max(i, j-1) < p \leq n + \max(i, j-1)$.

Les $\psi^{(i,j)}$ permettent de définir une hiérarchie d'intégrales premières associées à l'équation (4.71) : pour tout $i \geq 1$, nous voyons que la quantité :

$$\psi_n^{(i,0)} + (v_2 - 1)\psi_n^{(i,1)} + \sum_{k=2}^{m} v_{2k}\psi_n^{(i,k)} \tag{4.75}$$

est identique aux rangs $n-1$ et n si l'équation (4.71) est satisfaite. Pour une valeur de m fixée, seules les intégrales premières obtenues pour $i = 1, \ldots, m-1$ sont a priori indépendantes (nous voyons aisément que l'intégrale première pour $i = m$ est combinaison linéaire des précédentes modulo l'équation (4.71)). L'existence de $m-1$ intégrales premières indépendantes est cohérent avec la solution générale convergente donnée par les équations (4.62) et (4.63) : par élimination algébrique des $2(m-1)$ quantités x_p et $\lambda_p x_p^n$ ($p = 1, \ldots, m-1$) entre les $3(m-1)$ équations correspondant aux expressions de $R_{n-m+2}, \ldots, R_n, R_{n+m-1}$ (soit $2(m-1)$ équations) et l'équation caractéristique exprimée pour chaque x_p (soit $m-1$ équations), nous obtenons $m-1$ contraintes liant les R_i ($n-m+1 < i \leq n+m-1$) à R. Dans l'espace des solutions de la récurrence (4.71), de dimension $2(m-1)$, ces contraintes déterminent une variété de dimension et codimension $m-1$.

Le cas des cartes à faces de degré 4 ou 6

Comme illustration des résultats ci-dessus, considérons le cas $m = 3$, correspondant aux cartes dont les faces ont degré 2, 4, 6. Ce modèle est équivalent au modèle des dimères durs sur cartes tétravalentes, évoqué au chapitre 1 : comme illustré sur la figure 1.6, le modèle équivaut à un problème d'énumération de cartes « tétrahexavalentes », duales aux cartes ici considérées (les faces de degré 2 étant aisément « absorbées » par une redéfinition des poids).

La fonction à deux points R_n vérifie pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
R_n = 1 + v_2 R_n + v_4 R_n (R_{n+1} + R_n + R_{n-1}) + \\
v_6 R_n \left(R_{n+2}R_{n+1} + R_{n+1}^2 + 2R_{n+1}R_n + R_{n+1}R_{n-1} + \right. \\
\left. 2R_n R_{n-1} + R_{n-1}^2 + 2R_{n-1}R_{n-2}\right)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

tandis que $R_n = 0$ pour $n < 0$. La solution exacte de cette récurrence prend la forme :

$$R_n = R \frac{\tilde{u}_n^{(3)} \tilde{u}_{n+3}^{(3)}}{\tilde{u}_{n+1}^{(3)} \tilde{u}_{n+2}^{(3)}} \tag{4.77}$$

où R correspond à la limite quand $n \to \infty$, vérifiant :

$$R = 1 + v_2 R + 3v_4 R^2 + 10 v_6 R^3 \tag{4.78}$$

tandis que la correction prend la forme :

$$\tilde{u}_n^{(3)} = U_n(w_1) U_{n+2}(w_2) - U_{n+2}(w_1) U_n(w_2) \tag{4.79}$$

et $w_i \equiv \sqrt{x_i} + 1/\sqrt{x_i}$ $(i = 1, 2)$ correspondent aux solutions indépendantes de :

$$1 = v_2 + v_4 R \left(x + 4 + \frac{1}{x} \right) + v_6 R^2 \left(x^2 + 6x + 16 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} \right). \tag{4.80}$$

L'équation (4.76) implique que les quantités :

$$\begin{array}{l} \psi_n^{(1,0)} + (v_2 - 1)\psi_n^{(1,1)} + v_4 \psi_n^{(1,2)} + v_6 \psi_n^{(1,3)} \\ \psi_n^{(2,0)} + (v_2 - 1)\psi_n^{(2,1)} + v_4 \psi_n^{(2,2)} + v_6 \psi_n^{(2,3)} \end{array} \tag{4.81}$$

sont constantes sur $n = -1, 0, \ldots$ (l'expression des $\psi_n^{(i,j)}$ étant donnée plus haut). La première quantité suffit à exprimer R_0, en écrivant l'égalité des quantités pour $n = -1$ et $n \to \infty$, et se ramène à l'intégrale première pour les quadrangulations pour $v_2 = v_6 = 0$.

Comme expliqué au chapitre 1, l'identification avec le modèles des dimères durs revient à prendre :

$$v_2 = 0 \qquad v_4 = y \qquad v_6 = 3zy^2 \tag{4.82}$$

où y est l'activité par site (tétravalent) et z est l'activité par dimère. Notre solution exacte peut être vérifiée pour les premiers ordres du développement en y et les premières valeurs de n :

$$\begin{array}{l} G_0 = 2y + 3(3 + 5z)y^2 + 18(3 + 10z)y^3 + 18(21 + 105z + 50z^2)y^4 + \cdots \\ G_1 = y + 4(2 + 3z)y^2 + (65 + 201z)y^3 + 2(277 + 1305z + 585z^2)y^4 + \cdots \\ G_2 = (1 + 3z)y^2 + 3(5 + 21z)y^3 + (179 + 1005z + 531z^2)y^4 + \cdots \end{array} \tag{4.83}$$

(avec $G_n = R_n - R_{n-1} - \delta_{n,0}$). L'ordre y^2 est en accord avec un comptage exhaustif (cf les figures 4 et 7 de l'article V[5]).

Voyons maintenant les propriétés asymptotiques de la fonction à deux points : la discussion présente du cas $m = 3$ sera étendue dans la section suivante. Nous utilisons la paramétrisation (4.82) : dans toutes les séries considérées (R, R_n, x_1, x_2), la variable formelle z peut être remplacée par un nombre fixé, donnant une série en une variable y dont chaque terme est bien fini. Posant $v \equiv yR$, l'équation (4.78) se réécrit :

$$y = v - 3v^2 - 30zv^3 \tag{4.84}$$

déterminant la série $v = O(y)$. Celle-ci possède un rayon de convergence analytique fini $|y_0|$ fixé par la condition :

$$0 = \left(\frac{dy}{dv} \right)_{y=y_0} = 1 - 6v_0 - 90 z v_0^2 \tag{4.85}$$

correspondant à la singularité y_0 de la fonction analytique implicite $v(y)$ sur la branche telle que $v(0) = 0$. Nous aboutissons à l'expression de $y_0(z)$ sous la forme paramétrique suivante :

$$y_0 = \frac{2}{3} v_0 - v_0^2 \qquad z = \frac{1 - 6v_0}{90 v_0^2}. \tag{4.86}$$

[5] Nous y employons une définition équivalente de la fonction à deux points via les cartes à deux pattes.

Pour z réel supérieur à $z_c \equiv -\frac{1}{10}$, v_0 est un réel tel que $0 < v_0 < \frac{1}{3}$ [6], tandis que pour $z < z_c$, v_0 (donc y_0) a deux déterminations complexes conjuguées. On peut vérifier alors que toutes les séries considérées possèdent le même rayon de convergence.

Pour une valeur de z donnée, générique (distincte de z_c), nous retrouvons un comportement asymptotique analogue à celui des quadrangulations : pour $y = y_0 e^{-\epsilon}$, nous avons le comportement singulier :

$$R = R_0 \left(1 - C\epsilon^{1/2} + O(\epsilon)\right) \tag{4.87}$$

d'où un exposant $\gamma = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la série en y (correspondant dans l'interprétation des dimères durs à la fonction de partition pour un nombre fixé de sommets) possède ainsi l'équivalent :

$$[y^k]R \propto (y_0)^{-k} k^{-3/2}. \tag{4.88}$$

Comme pour le cas des quadrangulations, nous pouvons ensuite étudier le comportement singulier de R_n (ou de façon équivalente le comportement asymptotique de $[t^k]R_n$) : nous mettons en évidence la même dimension fractale 4, ainsi que la même limite d'échelle (aux facteurs près). Ceci résulte du fait que, dans notre solution exacte, l'une des solutions x de l'équation caractéristique présente un comportement singulier de la forme :

$$x = 1 - C\epsilon^{1/4} + O(\epsilon^{1/2}) \tag{4.89}$$

ce qui redonne le comportement d'échelle $n \propto \epsilon^{-1/4}$ pour avoir $U_n(w) \propto 1 - x^n$ d'ordre 1. Ces multiples observations corroborent le fait qu'à $z \neq z_c$, le point critique atteint pour $y = y_0(z)$ est dans la classe d'universalité de la gravité pure.

Considérons à présent le cas (plus intéressant) $z = z_c$, correspondant à la classe d'universalité de la gravité quantique couplée à la théorie conforme décrivant la singularité de Lee-Yang [50]. Nous avons déjà rencontré cette classe d'universalité dans les modèles de particules dures au chapitre 1. Ici, les valeurs critiques sont :

$$z_c = -\frac{1}{10} \qquad y_c = \frac{1}{9} \qquad R_c = 3 \tag{4.90}$$

et le comportement singulier non-générique pour $y = y_c e^{-\epsilon}$ est :

$$R = 3\left(1 - \epsilon^{1/3} + O(\epsilon^{2/3})\right). \tag{4.91}$$

Ceci résulte de la détermination implicite (4.84) pour R, où nous avons l'annulation supplémentaire de la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dv^2}$ pour $y = y_c$. L'exposant critique γ vaut ici $-1/3$, et nous avons :

$$[y^k]R \propto 9^k k^{-4/3} \tag{4.92}$$

Nous observons ensuite que :

$$\begin{aligned} &[y^k]R_0 \propto 9^k k^{-7/3} \\ &\lim_{k\to\infty} \frac{[y^k]R_n}{[y^k]R_0} = B_n^{(3)} \qquad B_n^{(3)} \propto n^6 \text{ pour } n \to \infty. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Par un raisonnement analogue à celui pour les quadrangulations, nous obtenons une limite d'échelle pour $n \propto k^{1/6}$ grand :

$$\frac{[y^k]R_n}{[y^k]R} \sim \Phi_3\left(\frac{n}{k^{1/6}}\right) \tag{4.94}$$

[6] La détermination $\frac{1}{3} < v_0 < \frac{2}{3}$ correspond à la singularité de $v(y)$ sur une branche ne vérifiant par $v(0) = 0$.

où Φ_3 peut être relié au comportement singulier de R_n :

$$R_n = 3\left(1 - F_3(n\epsilon^{1/6})\epsilon^{1/3} + O(\epsilon^{2/3})\right) \tag{4.95}$$

par les identités :

$$\begin{aligned} F_3(u) - 1 &= \frac{1}{3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^\infty e^{-a} a^{-4/3} \left(1 - \Phi_3(ua^{-1/6})\right) da \\ \Phi_3(u) &= \frac{3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi} \int_0^\infty e^{-a} a^{1/3} \mathrm{Im}\left(e^{i\pi/3} F_3\left(ue^{i\pi/6}a^{1/6}\right)\right) da. \end{aligned} \tag{4.96}$$

F_3 peut être évalué à partir de la solution exacte : les **deux** solutions indépendantes de l'équation caractéristique tendent simultanément vers 1 avec le comportement singulier :

$$x = 1 - 2a_\pm \epsilon^{1/6} + O(\epsilon^{1/3}) \qquad a_\pm \equiv \frac{1}{2}\sqrt{5 \pm i\sqrt{5}} \tag{4.97}$$

d'où nous tirons pour $u = n\epsilon^{1/6}$:

$$\begin{aligned} F_3(u) &= 1 - 2\frac{d^2}{du^2} \log \mathcal{W}\left(\sinh(a_+ u), \sinh(a_- u)\right) \\ &= 1 - 2\frac{\left(a_+^2 - a_-^2\right)\left(a_+^2 \sinh^2(a_- u) - a_-^2 \sinh^2(a_+ u)\right)}{\left(a_+ \cosh(a_+ u)\sinh(a_- u) - a_+ \cosh(a_+ u)\sinh(a_- u)\right)^2} \end{aligned} \tag{4.98}$$

où $\mathcal{W}(f_1, f_2)$ désigne le Wronskien $f_1 f_2' - f_1' f_2$. En prenant la limite continue de l'équation (4.76), nous observons que F_3 est la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{F_3''''}{10} - F_3 F_3'' - \frac{(F_3')^2}{2} + (F_3)^3 = 1 \tag{4.99}$$

vérifiant $F_3(u) \propto u^{-2}$ pour $u \to 0$ et $F_3(u) \to 1$ pour $u \to \infty$. Jusque ici, l'approche au point critique a été effectuée à $z = z_c$ fixé : nous pouvons montrer, comme expliqué dans la publication V que, dans l'espace des paramètres (y, z) du modèle, toute approche générique au point critique (y_c, z_c) donne la même limite continue (le cas non-générique concerne l'approche le long de la ligne $y = y_0(z)$). F_3 est un candidat pour la fonction à deux points de la gravité quantique couplée à la théorie conforme décrivant la singularité de Lee-Yang, et Φ_3 la grandeur associée pour une aire fixée. Cependant, cette identification est rendue délicate par les faits suivants :

- le point critique est dans une région non-physique de l'espace des paramètres, car l'activité par dimère (ou le poids par face de degré 6) est négative,
- dans l'interprétation des dimères durs sur cartes tétravalentes, la distance correspond à la longueur du plus court chemin sur la carte duale ne coupant aucun dimère (la « matière »), il ne s'agit donc pas d'une notion intrinsèque à « l'espace-temps ».

Une conséquence du premier point est que, contrairement au cas des quadrangulations, Φ_3 n'est pas une fonction croissante sur $[0, +\infty[$ (cf figure 4.2), et ne peut donc être interprétée comme distribution d'une variable aléatoire. Le second point pose la question de l'universalité de la fonction à deux points, ce qui rejoint le problème de l'ambiguïté de la notion de dimension fractale dans la gravité quantique couplée à une théorie conforme non-triviale (voir [79] et références incluses).

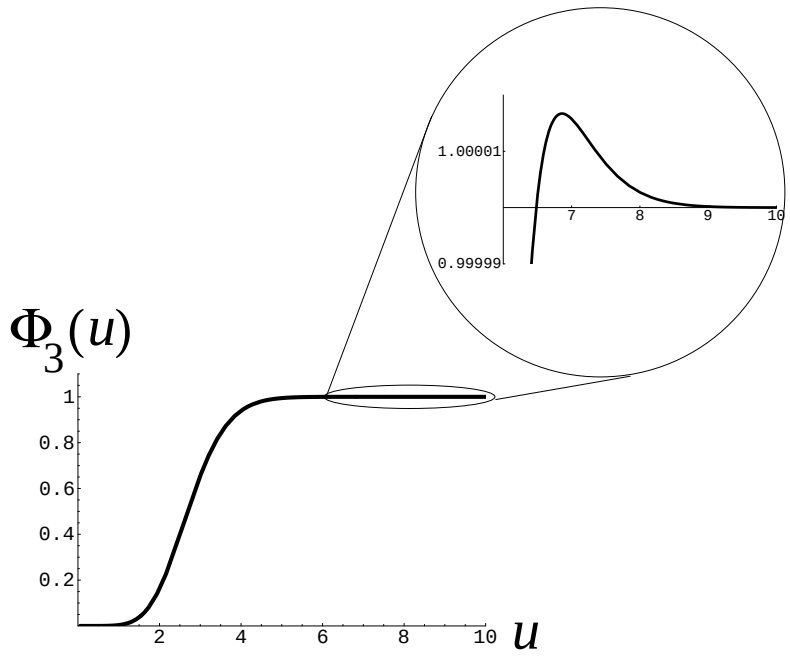


FIG. 4.2 – La fonction à deux points Φ_3 à aire fixée de la gravité quantique couplée à la théorie conforme décrivant la singularité de Lee-Yang. Il apparaît que Φ_3 n'est pas une fonction croissante, et ne peut être interprétée comme fonction de distribution cumulée d'une variable aléatoire.

Points multicritiques généraux

Pour une valeur de $m \geq 3$ donnée, il est possible d'atteindre un point multicritique d'ordre m, défini comme suit. Il est commode de prendre les poids par faces sous la forme suivante :

$$v_2 = 0 \qquad v_4 = y \qquad v_{2k} = y^{k-1} z_k \text{ pour } 3 \leq k \leq m \tag{4.100}$$

que nous pouvons interpréter, par une construction analogue à celle de la figure 1.6, comme un modèle de « multimères » sur cartes tétravalentes, avec un poids z_k/k par multimère de longueur $k-1$, et y par sommet. À nouveau, chaque ordre en y est un polynôme en les z_k, ce qui permet de substituer à ceux-ci n'importe quel nombre. Posant $v \equiv yR$, l'équation (4.13) donne :

$$y = v - 3v^2 - \sum_{k=3}^{m} \binom{2k-1}{k-1} z_k v^k \tag{4.101}$$

ce qui détermine la série $v = O(y)$. Celle-ci possède un rayon de convergence analytique fini $|y_0|$, correspondant à la singularité y_0 de la fonction analytique implicite $v(y)$ vérifiant $v(0) = 0$. y_0 satisfait la condition :

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)_{y=y_0} = 0. \tag{4.102}$$

Pour des z_k génériques, la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dv^2}$ est non nulle et nous retrouvons le comportement critique de la gravité pure :

$$R = R_0 \left(1 - C\epsilon^{1/2} + O(\epsilon)\right) \tag{4.103}$$

pour $y = y_0 e^{-\epsilon}$, l'exposant critique étant $\gamma = -1/2$. On vérifie alors que la fonction à deux points R_n possède, aux facteurs près, la même limite d'échelle que pour les quadrangulations, obtenue pour $n \propto \epsilon^{-1/4}$.

Cependant, pour certaines valeurs particulières des z_k, certaines dérivées successives de $y(v)$ peuvent s'annuler en v_0 : plus précisément, il existe un entier $p \leq m$ tel que :

$$\left(\frac{d^i y}{dv^i}\right)_{y=y_0} = 0 \text{ pour } 1 \leq i < p \qquad \left(\frac{d^p y}{dv^p}\right)_{y=y_0} \neq 0 \tag{4.104}$$

ce qui implique que pour $y = y_0 e^{-\epsilon}$:

$$R = R_0 \left(1 - C\epsilon^{1/p} + O(\epsilon^{2/p})\right). \tag{4.105}$$

Le cas générique $p = 2$ correspond à la gravité pure comme ci-dessus. Pour $p \geq 3$, nous avons un *point multicritique d'ordre p*, caractérisé par un exposant critique $\gamma = -1/p$. Dans l'espace des paramètres z_k, $3 \leq k \leq m$, les points critiques d'ordre p forment une variété algébrique de codimension $p-2$. En particulier, il existe un unique point critique *minimal* d'ordre m, obtenu pour :

$$z_k^{(m)} = \frac{(-1)^k}{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{2k-1}{k-1}} \left(\frac{6}{m-1}\right)^{k-1} \tag{4.106}$$

où l'équation (4.101) devient :

$$\frac{y_0^{(m)} - y}{y_0^{(m)}} = \left(\frac{v_0^{(m)} - v}{v_0^{(m)}}\right)^m \tag{4.107}$$

avec :

$$v_0^{(m)} \equiv \frac{m-1}{6} \qquad y_0^{(m)} \equiv \frac{m-1}{6m}. \tag{4.108}$$

Le cas $m = 3$ correspond au point critique des dimères durs sur cartes tétravalentes, discuté ci-dessus.

Utilisons alors la forme exacte de R_n : l'équation caractéristique (4.59) peut se réécrire :

$$P_m\left(\frac{v\left(x + \frac{1}{x} - 2\right)}{v_0^{(m)} - v}\right) = 0 \qquad P_m(u) \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\binom{m-1}{l}}{\binom{2l-1}{l-1}} (-u)^l \tag{4.109}$$

et nous observons que pour $v \to v_0^{(m)}$, l'ensemble des $m-1$ solutions indépendantes de l'équation caractéristique tend vers 1 avec :

$$x_i = 1 - 2a_i \epsilon^{1/2m} + O(\epsilon^{1/m}) \qquad P_m(2a_i^2) = 0. \tag{4.110}$$

Ceci permet d'identifier la dimension fractale $2m$, et nous avons alors dans la limite continue $n \propto \epsilon^{1/2m}$:

$$R_n = m\left(1 - F_m(n\epsilon^{1/2m})\epsilon^{1/m} + O(\epsilon^{2/m})\right) \tag{4.111}$$

avec :

$$F_m(u) = 1 - 2\frac{d^2}{du^2} \log \det_{1 \leq i,j \leq m-1} \left(\frac{d^{j-1}}{du^{j-1}} \sinh(a_i u)\right). \tag{4.112}$$

F_m apparaît comme fonction à deux points intégrée continue, et est reliée aux propriétés asymptotiques du coefficient $[y^k]R_n$ par :

$$\frac{[y^k]R_n}{[y^k]R} \sim \Phi_m\left(\frac{n}{k^{1/2m}}\right) \tag{4.113}$$

où la fonction à deux points Φ_m à aire fixée est reliée à F_m par les lois de transformation :

$$\begin{aligned} F_m(u) - 1 &= \frac{1}{m\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)} \int_0^\infty e^{-a} a^{-(m+1)/m} \left(1 - \Phi_m(ua^{-1/2m})\right) da \\ \Phi_m(u) &= \frac{m\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)}{\pi} \int_0^\infty e^{-a} a^{1/m} \mathrm{Im}\left(e^{i\pi/m} F_m\left(ue^{i\pi/2m} a^{1/2m}\right)\right) da. \end{aligned} \tag{4.114}$$

En substituant l'expression (4.111) dans l'équation (4.10), nous obtenons que F_m vérifie l'équation différentielle :

$$\mathcal{R}_m[F_m] = \mathcal{R}_m[1] \tag{4.115}$$

où $\mathcal{R}_m$ désigne le résidu d'ordre m de la hiérarchie KdV [80], donné par la récurrence :

$$\mathcal{R}'_{m+1}[F] = \mathcal{R}'''_m[F] - F\mathcal{R}'_m[F] - \frac{F'\mathcal{R}_m[F]}{2} \qquad \mathcal{R}_0[F] = \frac{1}{2}. \tag{4.116}$$

Ceci peut être vu par une analogie avec les modèles de matrices, comme expliqué dans la publication V. F_m vérifie de plus les conditions aux limites $F_m(u) \propto u^{-2}$ pour $u \to 0$ et $F_m(u) \to 1$ pour $u \to \infty$. F_m est un candidat pour la fonction à deux points intégrée de la gravité quantique couplée à la théorie conforme minimale $(2, 2m+1)$ [22, 81]. Il s'agit bien d'une limite universelle, en ce sens qu'une approche générique à tout point multicritique d'ordre m donne la même limite continue. Par dérivation, nous obtenons la fonction à deux points non-intégrée F'_m, et nous avons les exposants critiques :

$$\gamma = -1/m \qquad \nu = 1/2m \qquad \eta = 4. \tag{4.117}$$

Cependant, les problèmes soulevés dans le cadre du modèle des dimères durs ci-dessus se posent à nouveau : les points multicritiques sont non-physiques car certains poids sont négatifs, et la notion de distance est dépendante de la position des multimères dans cette interprétation. Le caractère non-physique des points multicritiques induit également la modification suivante : F'_m correspond à la fonction de corrélation $\mathcal{G}_{\Phi_0\Phi_0}$, où Φ_0 est l'opérateur de dimension minimale de la théorie conforme minimale $(2, 2m+1)$ (couplée à la gravité quantique), qui possède une dimension strictement négative dès que $m > 2$. En particulier, Φ_0 diffère alors de l'opérateur identité $\mathbb{I}$. Une telle identification semble confirmée par une comparaison avec les approches continues [24, 25, 26], permettant de prédire la valeur de γ, voir la discussion en appendice A de I. La dimension fractale $2m$ obtenue ici semble cependant en désaccord avec la prédiction continue favorisée par les simulations numériques [79]. Une telle situation a été également obtenue dans le cas du couplage de la gravité quantique à une théorie conforme de charge centrale $c = -2$ [82], à laquelle il a été proposé de remédier en introduisant une notion de « temps propre » distincte de celle de distance géodésique. Alternativement, nous pouvons suggérer que la limite continue du modèle discret est décrite par une théorie continue dont l'action comprend un terme de gravité pure distinct de l'action de Riemann-Hilbert usuelle, comprenant des dépendances d'ordre plus élevé en la métrique ou la courbure.

Au-delà de ces remarques conjecturales, mentionnons que la bijection générale entre cartes eulériennes et mobiles, présentée au chapitre 3 et introduite dans la publication VIII (postérieure à la publication V) semble permettre d'étendre notre approche discrète. Cependant, l'étiquetage des sommets se fait par une distance dépendant d'une orientation des arêtes, dont le rôle dans la limite continue nécessite d'être élucidé.

4.2 Autour du rayon des quadrangulations

Considérons à nouveau l'équation (3.3) utilisée pour le calcul de la fonction à deux points des quadrangulations (avec l'identification $R_n \equiv M_{n-1}$) :

$$M_n = 1 + tM_n(M_{n+1} + M_n + M_{n-1}) \tag{4.118}$$

Nous avons vu à la section 4.1.3 que la forme de la solution convergeant pour $n \to \infty$ est donnée par l'équation (4.26), avec un paramètre arbitraire λ. Il ne s'agit pas de la solution générale de cette récurrence d'ordre 2, car pour deux valeurs initiales M_1 et M_2, une condition nécessaire pour la convergence est que :

$$\psi(M_1, M_2) = \psi(M, M) \tag{4.119}$$

comme à l'équation (4.28). Une question mathématiquement naturelle consiste à chercher la solution générale de la récurrence (4.118). D'un point de vue plus physique (ou combinatoire), il est intéressant de considérer la solution $M_n^{(m)}$ telle que, pour un certain entier $m > 1$:

– $M_0^{(m)} = M_m^{(m)} = 0$

– pour $0 < n < m$, $M_n^{(m)}$ est une série formelle en t non nulle à coefficients positifs

$M_n^{(m)}$ peut être interprété comme la série génératrice des arbres appartenant à $\mathcal{M}_n$ (ensemble défini au chapitre 3) dont toutes les étiquettes sont strictement inférieures à m. Dans le langage des cartes, $M_n^{(m)} - 1$ correspond à la série génératrices des quadrangulations planaires pointées enracinées telles que :

– l'arête marquée est de type i—$i+1$ avec $i < n$,

– **tous** les sommets sont à une distance strictement inférieure à m de l'origine.

Si nous définissons le *rayon* d'une quadrangulation pointée comme la distance maximale d'un sommet à l'origine, la seconde propriété ci-dessus revient à dire que le rayon est strictement inférieur à m.

Dans cette section, nous proposons une expression exacte pour $M_n^{(m)}$, avant d'en discuter la limite continue. Les résultats sont repris de la publication VI, où la discussion est faite dans le langage des arbres, et une interprétation probabiliste comme évolution d'une population est proposée.

4.2.1 Solution exacte discrète

Pour des raisons de simplicité technique, il s'avère commode de commencer par considérer le cas des triangulations eulériennes, gouverné par l'équation :

$$L_n = 1 + tL_n(L_{n+1} + L_{n-1}) \tag{4.120}$$

qui, dans l'équation (3.3), est valable pour $n > 0$ avec la condition $L_0 = 0$. Par un raisonnement similaire à celui de la section 4.1.3, nous pouvons obtenir la forme de la solution convergeant pour $n \to \infty$:

$$L_n = L\frac{(1-\lambda x^{n+1})(1-\lambda x^{n+5})}{(1-\lambda x^{n+2})(1-\lambda x^{n+4})} \tag{4.121}$$

où :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{tL} - 2 \qquad L = 1 + 2tL^2. \tag{4.122}$$

Nous commençons par présenter la solution générale de l'équation (4.120), légèrement plus simple, la méthode s'étendant ensuite aisément au cas (4.118).

La solution convergente (4.121) peut se réécrire sous la forme :

$$L_n = \tilde{L}\frac{u_{n+1}u_{n+5}}{u_{n+2}u_{n+4}} \qquad u_n = \sinh(an+b) \qquad \tilde{L} = L \tag{4.123}$$

avec $a \equiv \frac{1}{2}\log x$, $b \equiv \frac{1}{2}\log\lambda$. Il est alors naturel de chercher une déformation de u_n sous forme d'une fonction elliptique (et éventuellement une déformation de $\tilde{L}$, a, b). Plus précisément, nous considérons le « q-analogue » :

$$\begin{aligned} u_n &= \sinh(an+b)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j e^{2(an+b)})(1-q^j e^{-2(an+b)}) \\ &= 2\theta(\alpha n+\beta|\tau) \end{aligned} \tag{4.124}$$

où $a \equiv i\pi\alpha$, $b \equiv i\pi\beta$, et θ est la *fonction theta de Jacobi* définie par [83] :

$$\theta(z|\tau) \equiv 2i\sin(\pi z)\prod_{j=1}^{\infty}(1-2q^j\cos(2\pi z)+q^{2j}). \tag{4.125}$$

où le *nôme* q est lié au *paramètre modulaire* τ par $q \equiv \exp(2i\pi\tau)$. La fonction θ est une fonction entière de z, et jouit des propriétés de quasi-périodicité :

$$\theta(z+1) = -\theta(z) \qquad \theta(z+\tau) = -q^{1/2}e^{-2i\pi z}\theta(z) \tag{4.126}$$

(nous omettons la dépendance en τ pour alléger les notations). De plus, $\theta(z)$ possède un zéro simple en tout point du réseau $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ (et seulement ceux-ci). Ces propriétés classiques permettent d'aboutir à la solution générale de l'équation (4.120) : en y substituant notre ansatz et posant $z \equiv \alpha(n+3)+\beta$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \theta(z-2\alpha)\theta(z)\theta(z+2\alpha) = \frac{1}{\tilde{L}}\theta(z-\alpha)\theta(z)\theta(z+\alpha)+ \\ t\tilde{L}\left(\theta(z-3\alpha)\theta(z+\alpha)\theta(z+2\alpha)+\theta(z-2\alpha)\theta(z-\alpha)\theta(z+3\alpha)\right) \end{aligned} \tag{4.127}$$

qui est une identité elliptique trilinéaire. La méthode pour prouver une telle formule est classique : on vérifie tout d'abord que les deux membres de l'équation vérifient les mêmes propriétés de quasi-périodicité en z, ce qui impose que leur rapport, qui est une fonction méromorphe, est doublement périodique de périodes 1 et τ. On montre ensuite que ce rapport ne possède pas de pôle : il en résulte qu'il est constant par le théorème de Liouville appliqué aux fonctions elliptiques. Ici, il suffit de vérifier que le membre de droite de (4.127) s'annule pour tous les zéros (connus) du membre gauche, c'est-à-dire pour $z = -2\alpha, 0, 2\alpha$ modulo $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$. Le cas $z=0$ est immédiat par imparité de $\theta(z)$, tandis que pour $z = \pm 2\alpha$ nous devons avoir :

$$t\tilde{L}^2 = \frac{\theta(2\alpha)}{\theta(4\alpha)}. \tag{4.128}$$

Enfin, il suffit de tester l'égalité pour une valeur particulière de z, par exemple $z=\alpha$, et nous obtenons :

$$t\tilde{L} = \left(\frac{\theta(\alpha)}{\theta(2\alpha)}\right)^2. \tag{4.129}$$

Nous aboutissons ainsi au résultat suivant :

La solution générale de la récurrence $L_n = 1 + tL_n(L_{n+1} + L_{n-1})$ est :

$$L_n = \frac{\theta(2\alpha)^3}{\theta(\alpha)^2\theta(4\alpha)} \frac{\theta((n+1)\alpha+\beta)\theta((n+5)\alpha+\beta)}{\theta((n+2)\alpha+\beta)\theta((n+4)\alpha+\beta)} \tag{4.130}$$

où t, α et le paramètre modulaire de la fonction theta sont reliés par :

$$t = \frac{\theta(\alpha)^4\theta(4\alpha)}{\theta(2\alpha)^5}. \tag{4.131}$$

Revenant à la notion de rayon, nous nous intéressons à la solution particulière $L_n^{(m)}$ vérifiant $L_0^{(m)} = L_m^{(m)} = 0$, et possédant un développement en série en $t = 0$ pour tout n tel que $0 < n < m$: nous avons alors :

$$\alpha = \frac{1}{m+4} \qquad \beta = -\alpha \tag{4.132}$$

L'équation (4.131) détermine implicitement le nôme q. Comme expliqué dans la publication VI, $L_n^{(m)}$ possède un rayon de convergence $t_0(m)$ strictement plus grand que $1/8$: ainsi, le nombre d'arbres très bien étiquetés à k arêtes dont toutes les étiquettes sont $< m$ croît comme $t_0(m)^{-k} \ll 8^k$. Nous mettons en évidence l'existence d'une autre valeur particulière :

$$t_1(m) = \frac{1}{8}\left(1 - \tan^4\left(\frac{\pi}{m+4}\right)\right) < \frac{1}{8} \tag{4.133}$$

pour laquelle $q = 0$ et $L_n^{(m)}$ possède une expression en termes de fonctions trigonométriques, pendant du cas hyperbolique de l'équation (4.123) obtenu pour $m \to \infty$, $q \to \infty$.

Par un raisonnement similaire, nous pouvons traiter alors le cas de l'équation (4.118) :

La solution générale de la récurrence $M_n = 1 + tM_n(M_{n+1} + M_n + M_{n-1})$ est :

$$M_n = \tilde{M} \frac{\theta((n+1)\alpha+\beta)\theta((n+4)\alpha+\beta)}{\theta((n+2)\alpha+\beta)\theta((n+3)\alpha+\beta)} \tag{4.134}$$

où t, α et le paramètre modulaire de la fonction theta sont reliés par :

$$t\tilde{M}^2 = \frac{\theta(2\alpha)}{\theta(3\alpha)} \qquad \tilde{M} = 4\frac{\theta(\alpha)\theta(2\alpha)}{\theta'(0)\theta(3\alpha)}\left(\frac{\theta'(\alpha)}{\theta(\alpha)} - \frac{1}{2}\frac{\theta'(2\alpha)}{\theta(2\alpha)}\right). \tag{4.135}$$

À nouveau, pour l'étude de la notion de rayon, nous considérons la solution particulière $M_n^{(m)}$ vérifiant les conditions aux limites $M_0^{(m)} = M_m^{(m)} = 0$ obtenue pour :

$$\alpha = \frac{1}{m+3} \qquad \beta = -\alpha \tag{4.136}$$

et pour q déterminé implicitement par les relations (4.135). Le rayon de convergence de $M_n^{(m)}$ devient strictement plus grand que $1/12$. La quantité $M_1^{(m)} - M_1^{(m-1)}$ correspond à la série génératrice des quadrangulations planaires enracinées de rayon m.

4.2.2 Limite continue

Nous cherchons à présent à définir une limite continue de $L_n^{(m)}$ défini par les équations (4.130), (4.131) et (4.132). Nous posons :

$$t = \frac{1}{8}e^{-\lambda\epsilon} \qquad m = \frac{2\omega}{\epsilon^{1/4}} \qquad n = \frac{r}{\epsilon^{1/4}} \tag{4.137}$$

puis nous considérons la limite $\epsilon \to 0$ avec λ, ω, r fixés. Nous identifions que $L_n^{(m)}$ a un développement de la forme :

$$L_n^{(m)} = 2\left(1 - 3\mathcal{P}(r)\epsilon^{1/2} + O(\epsilon)\right) \tag{4.138}$$

où $\mathcal{P}(r)$ désigne la *fonction elliptique de Weierstrass* [83, 84, 85], qui est l'unique fonction méromorphe et doublement périodique n'ayant que des pôles doubles en chaque point du réseau $2\omega\mathbb{Z} + 2\omega'\mathbb{Z}$. ω et ω' sont les *demi-périodes* : ω est défini par l'équation (4.137), tandis que ω' est déterminée par l'équation (4.131) développée à l'ordre ϵ, qui se réécrit :

$$g_2(\omega, \omega') = \frac{4\lambda}{3} \tag{4.139}$$

où g_2 désigne le *premier invariant elliptique*, qui apparaît dans le développement $\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + O(z^4)$. L'expression (4.138) peut être obtenue par manipulation de fonctions theta, ou bien de manière beaucoup plus directe en notant que $\mathcal{P}(z)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathcal{P}(z)''}{6} - \mathcal{P}(z)^2 = 3g_2 \tag{4.140}$$

ce qui correspond précisément à la limite continue obtenue par substitution dans l'équation (4.120), pourvu que la condition (4.139) soit vérifiée. La demi-période ω est fixée par la condition $L_0^{(m)} = L_m^{(m)} = 0$ qui devient :

$$\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}(2\omega - r) \sim \frac{1}{r^2} \text{ pour } r \to 0. \tag{4.141}$$

Pour un nombre de faces k fixé, nous avons la loi d'échelle :

$$[t^k]L_n^{(m)} \sim \frac{8^k}{\pi^{1/2}k^{3/2}}\Upsilon\left(\frac{n}{k^{1/4}}, \frac{m}{k^{1/4}}\right) \tag{4.142}$$

où la fonction d'échelle Υ est reliée à $\mathcal{P}$ par :

$$3\mathcal{P}(r) - 1 = \pi^{1/2}\int_0^\infty e^{-\lambda A}A^{-3/2}\left(1 - \Upsilon\left(\frac{r}{A^{1/4}}, \frac{2\omega}{A^{1/4}}\right)\right). \tag{4.143}$$

La quantité $R_n^{(m)}$ définie par les équations (4.134), (4.135) et (4.136) possède la même limite continue aux facteurs près :

$$t = \frac{1}{12}e^{-\lambda\epsilon} \qquad m = \frac{2\omega}{\epsilon^{1/4}} \qquad n = \frac{r}{\epsilon^{1/4}} \qquad \epsilon \to 0 \tag{4.144}$$

$$R_n^{(m)} = 2\left(1 - 2\mathcal{P}(r)\epsilon^{1/2} + O(\epsilon)\right) \tag{4.145}$$

$$g_2(\omega, \omega') = 3\lambda \tag{4.146}$$

La fonction $F = 2\mathcal{P}$ est la solution générale de l'équation différentielle (4.54), pourvu que la condition (4.146) soit vérifiée. Pour un nombre k d'arêtes fixé, nous avons le comportement d'échelle :

$$[t^k]R_n^{(m)} \sim \frac{12^k}{\pi^{1/2}k^{3/2}}\Upsilon\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{n}{k^{1/4}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{m}{k^{1/4}}\right). \tag{4.147}$$

La fonction d'échelle Υ est la probabilité asymptotique qu'une quadrangulation pointée enracinée de k arêtes soit de rayon inférieur à m et ait son arête marquée à distance inférieure à n de l'origine. Nous retrouvons l'équivalent (4.40) pour $m \gg k^{1/4} \propto n$.

La fonction d'échelle Υ donne la loi du support de l'ISE : plus précisément $\Upsilon(a, a+b)$ $(a, b \geq 0)$ est la probabilité que le support de l'excursion superbrownienne intégrée issue de 0 soit inclus dans l'intervalle $[-a, b]$. Quelques moments de cette loi jointe ont été calculés par Delmas [76] mais nous ne connaissons pas de formule générale fermée étendant l'expression (4.51).

4.3 Le profil des quadrangulations

Nous définissons le *profil* d'une quadrangulation pointée comme la donnée des suites $(r_i, s_i)_{i\geq 1}$ où :

- r_i est le nombre de sommets à distance i de l'origine,
- s_i est le nombre d'arêtes de type $i-1$ — i (ce que nous pourrions qualifier d'arête à distance $i-1$ de l'origine).

Cette définition étend légèrement celle de Chassaing et Schaeffer [69] qui considèrent la suite (r_i). Le rayon d'une quadrangulation pointée, étudié ci-dessus correspond au plus petit m tel que $r_i = 0$ pour tout $i > m$.

Nous montrons dans cette section comment obtenir certaines séries génératrices liées au profil à l'aide de la bijection avec les arbres bien étiquetés. Les résultats sont repris de la publication VII.

4.3.1 Séries génératrices

Nous souhaitons obtenir la série génératrice des quadrangulations planaires enracinées, comptées avec :

- un poids t par face,
- pour tout $i \geq 1$, un poids ρ_i par sommet à distance i de l'origine,
- pour tout $i \geq 1$, un poids σ_i par arête de type $(i-1)$ — i.

Par la bijection avec les arbres bien étiquetés du chapitre 3, cette série génératrice compte aussi les arbres bien étiquetés, t devenant un poids par arête, ρ_i un poids par sommet d'étiquette i, σ_i un poids par coin étiqueté i (équivalent à un poids par demi-arête incidente à un sommet i). Pour appliquer la décomposition récursive, nous considérons plus généralement l'ensemble $\mathcal{M}_n$ introduit au chapitre 3. Avec les poids ci-dessus, la série génératrice M_n vérifie :

$$M_n = \begin{cases} \rho_n + t\sigma_n M_n(\sigma_{n+1}M_{n+1} + \sigma_n M_n + \sigma_{n-1}M_{n-1}) & \text{si } n \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.148}$$

Il s'agit d'une généralisation immédiate de l'équation (3.11), qui est retrouvée lorsque tous les ρ_i et σ_i sont pris égaux à 1. Pour interpréter M_n en terme de cartes pointées enracinées, il convient de se rappeler que les quadrangulations planaires pointées et enracinées sur une arête $(n-1)$—n sont en bijection avec les arbres de $\mathcal{M}_n$ **contenant au moins un sommet d'étiquette 1** (et

non réduits à celui-ci pour $n = 1$). Leur série génératrice est ainsi :

$$M_n - [M_{n-1}]_{\substack{\rho_i \leftarrow \rho_{i+1} \\ \sigma_i \leftarrow \sigma_{i+1}}} - \delta_{n,1} \tag{4.149}$$

Le second membre correspond à la série M_{n-1} dans lequel nous effectuons les substitutions $\rho_i \leftarrow \rho_{i+1}$ et $\sigma_i \leftarrow \sigma_{i+1}$, ce qui revient par translation des étiquettes à compter les arbres de $\mathcal{M}_n$ ne contenant pas de sommet 1. La série génératrice pour les quadrangulations enracinées est simplement $M_1 - 1$.

Nous nous intéressons à présent aux propriétés statistiques à distance finie, c'est-à-dire que pour i supérieur à un certain seuil m, les poids ρ_i et σ_i valent 1. Ceci implique pour pour $n \to \infty$, M_n converge (au sens des séries formelles) vers M, défini à l'équation (3.13). De plus, nous avons les équations :

$$\begin{aligned} M_{m+1} &= 1 + tM_{m+1}(M_{m+2} + M_{m+1} + \sigma_m M_m) \\ M_n &= 1 + tM_n(M_{n+1} + M_n + M_{n-1}) \text{ pour } n > m+1 \end{aligned} \tag{4.150}$$

ce qui implique, en vertu de l'intégrale première (3.14) :

$$\psi(\sigma_m M_m, M_{m+1}) \;=\; \psi(M_{m+1}, M_{m+2}) \;=\; \psi(M_{m+2}, M_{m+3}) \;=\; \cdots \;=\; \psi(M, M) \tag{4.151}$$

En ne conservant que l'égalité $\psi(\sigma_m M_m, M_{m+1}) = \psi(M, M)$, et les équations (4.148) pour $n = 1, \ldots, m$, nous obtenons un système fermé de $m + 1$ équations déterminant les $m + 1$ inconnues M_n, $n = 1, \ldots, m + 1$. Nous aboutissons ainsi au résultat suivant :

Soit $E^{(m)}$ la série génératrice de l'ensemble des quadrangulations planaires enracinées, comptées avec un poids t par face, et pour tout $i = 1, \ldots m$, un poids ρ_i par sommet à distance i de l'origine, et un poids σ_i par arête de type $(i-1)$—i.
Alors $E^{(m)}$ est algébrique et déterminée par $E^{(m)} = M_1 - 1$ où M_1 est solution du système :

$$\begin{aligned} &M_1 = \rho_1 + t\sigma_1 M_1(\sigma_2 M_2 + \sigma_1 M_1) \\ &M_2 = \rho_2 + t\sigma_2 M_2(\sigma_3 M_3 + \sigma_2 M_2 + \sigma_1 M_1) \\ &\quad\vdots \\ &M_{m-1} = \rho_{m-1} + t\sigma_{m-1} M_{m-1}(\sigma_m M_m + \sigma_{m-1} M_{m-1} + \sigma_{m-2} M_{m-2}) \\ &M_m = \rho_m + t\sigma_m M_m(M_{m+1} + \sigma_m M_m + \sigma_{m-1} M_{m-1}) \\ &\psi(\sigma_m M_m, M_{m+1}) = \psi(M, M) \end{aligned} \tag{4.152}$$

avec $M = 1 + 3tM^2, \psi(M_n, M_{n+1}) \equiv (1 - tM_n - tM_{n+1})(1 + tM_n M_{n+1})$.

Illustrons ceci dans le cas $m = 1$. Dans la série génératrice $E^{(1)}$ pour les cartes enracinées, t est un poids par arête, ρ_1 est un poids par sommet adjacent à l'origine, σ_1 un poids par arête incidente à l'origine (équivalent à un poids par sommet adjacent à l'origine compté avec multiplicité). Par le résultat ci-dessus, la série est déterminée par les équations :

$$\begin{cases} M_1 = \rho_1 + t\sigma_1 M_1(M_2 + \sigma_1 M_1) \\ \psi(\sigma_1 M_1, M_2) = \psi(M, M) \end{cases} \tag{4.153}$$

Par élimination de M_2, nous obtenons une équation cubique pour $E^{(1)} = M_1 - 1$, ayant une unique solution qui est une série formelle (de puissances positives) de t.

4.3.2 Profil des cartes infinies : première approche

La connaissance de la série génératrice $E^{(m)}$ permet en principe d'en extraire le coefficient de t^k, correspondant à une somme (finie) sur les quadrangulations enracinées à k faces (soit $2k$ arêtes). Ce coefficient peut être interprété de manière probabiliste comme suit. Considérons $\vec{\mathcal{Q}}_k$ l'ensemble des quadrangulations enracinées à k faces, de cardinal :

$$\left|\vec{\mathcal{Q}}_k\right| = \frac{2\cdot 3^k}{(k+2)(k+1)}\binom{2k}{k}. \tag{4.154}$$

$\vec{\mathcal{Q}}_k$ est muni de la mesure de probabilité uniforme, et la valeur moyenne (espérance) associée est notée $\langle\cdot\rangle_{\vec{\mathcal{Q}}_k}$. Soient, pour tout $i \geq 1$, les variables aléatoires r_i, s_i correspondant respectivement au nombre de sommets à distance i de l'origine, et au nombre d'arêtes $(i-1)$—i. Alors nous avons :

$$[t^k]E^{(m)} = \left|\vec{\mathcal{Q}}_k\right| \left\langle \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{r_i}\sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\vec{\mathcal{Q}}_k} \tag{4.155}$$

Cette quantité est un polynôme en les ρ_i et les σ_i. Nous nous intéressons alors à la limite des quadrangulations de grande taille, $k \to \infty$. Il s'avère que la mesure de probabilité uniforme sur $\vec{\mathcal{Q}}_k$ « converge » quand $k \to \infty$ vers une loi limite sur $\vec{\mathcal{Q}}_\infty$, l'ensemble des quadrangulations planaires enracinées infinies. Nous ne précisons pas ici le sens de cette convergence, introduite initialement par Angel et Schramm [86] dans le cas des triangulations, et étendue par Chassaing et Durhuus au cas des quadrangulations [70]. Ici, nous observons qu'il existe une limite :

$$\left\langle \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{r_i}\sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\vec{\mathcal{Q}}_\infty} \equiv \lim_{k\to\infty} \left\langle \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{r_i}\sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\vec{\mathcal{Q}}_k} \tag{4.156}$$

Plus précisément, nous montrons aisément qu'en prenant les ρ_i et α_i dans l'intervalle $]0,1]$, la série génératrice $E^{(m)}$ possède un rayon de convergence en t égal à $1/12$, et possède un comportement singulier dominant de la forme :

$$E^{(m)}\Big|_{\text{sing}} \propto (1-12t)^{3/2} \tag{4.157}$$

Pour $m = 0$, nous retrouvons la série génératrice des quadrangulations planaires enracinées comptées avec un poids t par arête, avec :

$$E^{(0)}\Big|_{\text{sing}} = \frac{8}{3}(1-12t)^{3/2} \tag{4.158}$$

Par un argument classique, ceci implique que pour $k \to \infty$:

$$\frac{[t^k]E^{(m)}}{[t^k]E^{(0)}} \sim \frac{E^{(m)}\big|_{\text{sing}}}{E^{(0)}\big|_{\text{sing}}} \tag{4.159}$$

ce qui montre l'existence la limite (4.156), en notant que $[t^k]E^{(0)} = \left|\vec{\mathcal{Q}}_k\right|$.

La probabilité uniforme sur l'ensemble des quadrangulations enracinées n'est pas la plus naturelle pour la statistique des cartes, car elle est « biaisée » en faveur des cartes ayant un grand nombre d'arêtes incidentes à l'origine. Plus précisément, nous considérons l'ensemble $\dot{\mathcal{Q}}_k$

des quadrangulations planaires pointées infinies à k faces, muni de la mesure uniforme, sur lequel les variables aléatoires r_i et s_i sont naturellement définies. Nous avons alors :

$$\left\langle \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\dot{\mathcal{Q}}_k} \to \Gamma^{(m)} \equiv \left\langle \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\dot{\mathcal{Q}}_\infty} \tag{4.160}$$

où la moyenne sur $\dot{\mathcal{Q}}_\infty$ est liée à celle sur $\vec{\mathcal{Q}}_\infty$ par :

$$\left\langle \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\vec{\mathcal{Q}}_\infty} = \frac{1}{\langle s_1 \rangle_{\dot{\mathcal{Q}}_\infty}} \left\langle s_1 \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\dot{\mathcal{Q}}_\infty} \propto \sigma_1 \frac{\partial \Gamma^{(m)}}{\partial \sigma_1}. \tag{4.161}$$

Cette identification revient à considérer que tirer uniformément une quadrangulation enracinée revient à tirer une quadrangulation pointée puis tirer une arête incidente à l'origine : ceci n'est pas vrai pour une taille k finie en raison de la possibilité de symétries, mais semble plausible pour $k \to \infty$ car l'ensemble des cartes ayant des symétries non-triviales devient négligeable [87]. Ainsi $\Gamma^{(m)}$ est proportionnel à la primitive de $E^{(m)}\big|_{\text{sing}}$ s'annulant en 0 :

$$\Gamma^{(m)} = \frac{\int_0^{\cdot} E^{(m)}\big|_{\text{sing}} \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}}{\int_0^1 E^{(m)}\big|_{\text{sing}} \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}}. \tag{4.162}$$

$\Gamma^{(m)}$ donne, par développement en série, la loi jointe des r_i, s_i pour $i = 1, \ldots, m$.

À titre d'illustration, considérons le cas $m = 1$. Comme détaillé dans la publication VII, l'équation cubique pour $E^{(1)} = M_1 - 1$, obtenue à partir des équations (4.153) permet d'exprimer sa partie singulière et ainsi parvenir à une équation pour $\Gamma \equiv \Gamma^{(1)}$, que nous donnons dans le résultat suivant :

Dans le modèle des quadrangulations pointées infinies aléatoires, la loi jointe du nombre r_1 de sommets adjacents à l'origine et du nombre s_1 d'arêtes incidentes à l'origine est caractérisée par la série génératrice $\Gamma \equiv \langle \rho_1^{r_1} \sigma_i^{s_i} \rangle$ solution de :

$$6\Gamma(\Gamma+1)(\Gamma+3) - \sigma_1 \left(2\Gamma(1+4\Gamma+\Gamma^2) + 3\rho_1(1+\Gamma)^2(2+\Gamma)\right) = 0 \tag{4.163}$$

avec la condition $\Gamma = 1$ pour $\alpha = \rho = 1$.
Marginalement, les séries génératrices des probabilités d'avoir r_1 sommets adjacents à l'origine ou s_1 arêtes incidentes à l'origine sont :

$$\begin{aligned} \left(\Gamma^{(1)}\right)_{\sigma_1=1} &= \frac{2}{\sqrt{4-3\rho_1}} - 1 = \sum_{r_1=1}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^{r_1} \binom{2n}{n} \rho_1^n \\ \left(\Gamma^{(1)}\right)_{\rho_1=1} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{6+3\sigma_1}{6-5\sigma_1}} - 1\right) = \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{1}{6}\sigma_1^2 + \frac{13}{108}\sigma_1^3 + \cdots \end{aligned} \tag{4.164}$$

et leurs premiers moments sont :

$$\begin{array}{lll} \langle r_1 \rangle = 3 & \langle r_1^2 \rangle = \frac{33}{2} & \langle r_1^3 \rangle = \frac{579}{4} \\ \langle s_1 \rangle = 4 & \langle s_1^2 \rangle = \frac{100}{3} & \langle s_1^3 \rangle = \frac{1372}{3} \end{array} \tag{4.165}$$

s_1 correspond au degré de l'origine, et le premier moment $\langle s_1 \rangle = 4$ peut être confirmé en notant que dans une quadrangulation à k faces, le nombre de sommets est $k+2$ et la somme de leurs degrés est $4k$ (deux fois le nombre d'arêtes). Comme exemple d'information liée à la fois à r_1 et s_1, nous pouvons calculer la probabilité que $r_1 = s_1$ (l'origine ne possède pas de voisins multiples), qui vaut $(\sqrt{17}-3)/2$. Notons enfin que la fonction $\Gamma^{(1)}$ est analytique dans le domaine :

$$\rho_1 \geq 0 \qquad \sigma_1 \geq 0 \qquad \frac{3\rho_1\sigma_1}{2(3-\sigma_1)} < 1 \tag{4.166}$$

Lorsque la dernière contrainte n'est pas satisfaite, un changement de comportement se produit : au-delà de cette ligne critique, la série $E^{(1)}$ possède un rayon de convergence en t strictement inférieur à $1/12$. Sur la ligne critique, le rayon de convergence vaut $1/12$, mais nous avons le comportement singulier non-générique :

$$E^{(1)}\Big|_{\text{sing}} \propto (1-12t)^{3/4} \tag{4.167}$$

sauf pour le point particulier $\rho_1 = \frac{2}{3}$, $\sigma_1 = \frac{3}{2}$ où :

$$E^{(1)}\Big|_{\text{sing}} \propto (1-12t)^{1/2}. \tag{4.168}$$

Dans le langage des arbres étiquetés, une interprétation physique claire comme transition de décrochement est proposée dans la publication VII.

4.3.3 Profil des cartes infinies : schéma général

Pour une valeur arbitraire de m, $\Gamma^{(m)}$ est donnée par l'équation (4.162), où la partie singulière $E^{(m)}\big|_{\text{sing}}$ peut en principe être calculée à partir des équations (4.152) avec $E^{(m)} = M_1 - 1$, dans lesquelles nous effectuons *in fine* un développement autour de $t = 1/12$.

De façon remarquable, $\Gamma^{(m)}$ peut être obtenu directement par un calcul purement algébrique, effectué **exactement** au point critique $t = 1/12$. Revenons en effet à l'équation fondamentale (4.148), qui se simplifie pour $n > m$ en l'équation (4.150) : au point critique $t = 1/12$, la solution de cette dernière équation prend la forme :

$$M_n = 2\frac{(n+g^{(m)})(n+g^{(m)}+3)}{(n+g^{(m)}+1)(n+g^{(m)}+2)} \tag{4.169}$$

qui est valable pour tout $n > m$. Cette forme correspond à la solution générale telle que $M_n \to M = 2$ pour $n \to \infty$, et peut être obtenue comme limite de l'équation (4.26). La condition initiale $g^{(m)}$ est fixée par compatibilité avec l'équation (4.150) pour $n = m+1$, qui peut se réécrire :

$$\alpha_m M_m = 2\frac{(m+g^{(m)})(m+g^{(m)}+3)}{(m+g^{(m)}+1)(m+g^{(m)}+2)} \tag{4.170}$$

Cette quantité $g^{(m)}$, solution d'une équation algébrique dont les coefficients dépendent des ρ_i et σ_i, est très simplement reliée à $\Gamma^{(m)}$ par :

$$\frac{\partial g^{(m)}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \Gamma^{(m)}}{\partial \sigma_1} \tag{4.171}$$

d'où nous tirons le résultat suivant :

Dans le modèle des quadrangulations pointées infinies aléatoires, la loi jointe des nombres r_i de sommets à distance i de l'origine, et des nombres s_i d'arêtes $(i-1)$—i, possède la série génératrice locale $\Gamma^{(m)} \equiv \langle \prod_{i=1}^m \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \rangle$ donnée par :

$$\Gamma^{(m)} = g^{(m)} - \left(g^{(m)} \right)_{\sigma_1 = 0} \tag{4.172}$$

où $g^{(m)}$ est donné par le système de $m+2$ équations algébriques :

$$\begin{aligned}
M_1 &= \rho_1 + \frac{\sigma_1 M_1}{12}(\sigma_2 M_2 + \sigma_1 M_1) \\
M_2 &= \rho_2 + \frac{\sigma_2 M_2}{12}(\sigma_3 M_3 + \sigma_2 M_2 + \sigma_1 M_1) \\
&\vdots \\
M_{m-1} &= \rho_{m-1} + \frac{\sigma_{m-1} M_{m-1}}{12}(\sigma_m M_m + \sigma_{m-1} M_{m-1} + \sigma_{m-2} M_{m-2}) \\
M_m &= \rho_m + \frac{\sigma_m M_m}{12}(M_{m+1} + \sigma_m M_m + \sigma_{m-1} M_{m-1}) \\
\sigma_m M_m &= 2\frac{(m+g^{(m)})(m+g^{(m)}+3)}{(m+g^{(m)}+1)(m+g^{(m)}+2)} \\
M_{m+1} &= 2\frac{(m+g^{(m)}+1)(m+g^{(m)}+4)}{(m+g^{(m)}+2)(m+g^{(m)}+3)}
\end{aligned} \tag{4.173}$$

et la condition $g^{(m)} = 0$ quand tous les ρ_i et σ_i valent 1.

Une tel résultat peut être vérifie explicitement par le calcul pour les premières valeurs de m. Nous proposons ici un argument général, reposant sur une hypothèse d'indépendance asymptotique que nous ne saurions justifier ici.

Pour tout $n \geq 1$, la quantité $\sigma_1 \frac{\partial M_n}{\partial \sigma_1}$ peut être interprétée comme la série génératrice des cartes pointées, avec marquage d'une arête $(n-1)$—n, et d'une arête de type 0—1. Nous utilisons pour cela l'expression (4.149) en notant que le second membre ne dépend pas de σ_1. En considérant la partie singulière principale pour $t \to 1/12$, nous obtenons :

$$\sigma_1 \left. \frac{\partial M_n}{\partial \sigma_1} \right|_{\text{sing}} \propto \left\langle s_n s_1 \prod_{i=1}^m \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \right\rangle_{\dot{\mathcal{Q}}_\infty} \tag{4.174}$$

Il convient de noter que la constante de proportionnalité est indépendante des ρ_i et σ_i. Dans la limite $n \to \infty$, nous nous attendons à ce que s_n devienne indépendant des r_i, s_i pour $i \leq m$. Bien qu'il convienne de mieux justifier cette hypothèse de « localité », nous l'admettons ici, pour obtenir :

$$\left\langle s_n s_1 \prod_{i=1}^m \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \right\rangle = \langle s_n \rangle \left\langle s_1 \prod_{i=1}^m \rho_i^{r_i} \sigma_i^{s_i} \right\rangle \tag{4.175}$$

et nous en déduisons la relation :

$$\left. \frac{\partial M_n}{\partial \sigma_1} \right|_{\text{sing}} \sim C_n \frac{\partial \Gamma^{(m)}}{\partial \sigma_1} \text{ pour } n \to \infty \tag{4.176}$$

où la constante de proportionnalité est indépendante des ρ_i et σ_i. Nous cherchons à présent exprimer le membre de gauche de cet équivalent : par l'équation (4.150) pour $t < 1/12$ et $n > m$, M_n est de la forme :

$$M_n = M\frac{\left(1-\lambda^{(m)}x^n\right)\left(1-\lambda^{(m)}x^{n+3}\right)}{\left(1-\lambda^{(m)}x^{n+1}\right)\left(1-\lambda^{(m)}x^{n+2}\right)} \tag{4.177}$$

ce qui correspond à la solution (4.26) convergente pour $n \to \infty$ (avec $x + x^{-1} + 4 = (tM)^{-1}$). Le paramètre $\lambda^{(m)}$ contient la dépendance entre les ρ_i, σ_i pour $i = 1, \ldots, m$. Posant alors $\epsilon = 1-12t$, nous avons les développements (connus) de M et x :

$$\begin{aligned} M &= 2\left(1-\epsilon^{1/2}+\epsilon-\epsilon^{3/2}+O\left(\epsilon^2\right)\right) \\ x &= 1-\sqrt{6}\epsilon^{1/4}+3\epsilon^{1/2}-\frac{5\sqrt{6}}{4}\epsilon^{3/4}+3\epsilon-\frac{39\sqrt{6}}{32}\epsilon^{5/4}+O\left(\epsilon^{3/2}\right) \end{aligned} \tag{4.178}$$

Le développement de $\lambda^{(m)}$ est a priori inconnu, mais au point critique ($\epsilon = 0$), nous devons retrouver l'expression (4.169) pour M_n, ce qui implique que :

$$\lambda^{(m)} = 1-\sqrt{6}g^{(m)}\epsilon^{1/4}+O\left(\epsilon^{1/2}\right) \tag{4.179}$$

Nous avons de plus la condition :

$$M_n|_{\text{sing}} \propto \epsilon^{3/2} \tag{4.180}$$

qui fixe quelques termes de la suite du développement de λ :

$$\begin{aligned} \lambda^{(m)} = 1-\sqrt{6}g^{(m)}\epsilon^{1/4}+3\,{g^{(m)}}^2\epsilon^{1/2}-\frac{\sqrt{6}}{4}\left(g^{(m)}+4\,{g^{(m)}}^3\right)\epsilon^{3/4} \\ +\frac{3}{2}\left({g^{(m)}}^2+{g^{(m)}}^4\right)\epsilon+O(\epsilon^{5/2}) \end{aligned} \tag{4.181}$$

Cette information suffit à obtenir l'équivalent (4.176), nous obtenons en effet :

$$M_n|_{\text{sing}} = \epsilon^{3/2}\left(\frac{1}{7}n^4+\frac{2}{7}\left(2g^{(m)}+3\right)n^3+O(n^2)\right) \tag{4.182}$$

d'où nous tirons enfin :

$$\left.\frac{\partial M_n}{\partial\sigma_1}\right|_{\text{sing}} \sim \frac{4n^3}{7}\epsilon^{3/2}\frac{\partial g^{(m)}}{\partial\sigma_1} \text{ pour } n\to\infty \tag{4.183}$$

Ainsi, par comparaison avec l'équation (4.176), $\frac{\partial g^{(m)}}{\partial\sigma_1}$ et $\frac{\partial\Gamma^{(m)}}{\partial\sigma_1}$ sont proportionnels, et la constante de proportionnalité peut être calculée lorsque tous les ρ_i et σ_i valent 1. De manière immédiate nous avons :

$$\left(\frac{\partial g^{(m)}}{\partial\sigma_1}\right)_{\substack{\rho_i=1\\ \sigma_i=1}} = \left(\frac{\partial g^{(1)}}{\partial\sigma_1}\right)_{\substack{\rho_1=1\\ \sigma_1=1}} \tag{4.184}$$

et par les équations (4.173) pour $m = 1$ nous obtenons aisément :

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{3}\frac{{g^{(1)}}^2+6g^{(1)}+6}{\left(g^{(1)}+2\right)\left(g^{(1)}+4\right)}+\frac{\rho_1}{2}\frac{\left(g^{(1)}+2\right)\left(g^{(1)}+3\right)}{\left(g^{(1)}+1\right)\left(g^{(1)}+4\right)} \tag{4.185}$$

Pour $\rho_1 = \sigma_1 = 1$, nous avons $g^{(1)} = 0$ et :

$$\left(\frac{\partial g^{(1)}}{\partial \sigma_1}\right)_{\substack{\rho_i=1\\ \sigma_i=1}} = 4 \tag{4.186}$$

Ceci achève de montrer l'égalité (4.171), car nous avons par ailleurs :

$$\left(\frac{\partial \Gamma^{(m)}}{\partial \sigma_1}\right)_{\substack{\rho_i=1\\ \sigma_i=1}} = \langle s_1 \rangle = 4. \tag{4.187}$$

Conclusion et perspectives

Au coeur de ce mémoire, aux chapitres 2 et 3, nous avons présenté deux types de bijections entre cartes et arbres. Ces deux constructions présentent de profondes similarités (elles sont « duales »), néanmoins de subtiles différences ont empêché jusqu'ici d'obtenir une équivalence directe.

La méthode des arbres bourgeonnants présente une similarité plus grande avec les intégrales matricielles solubles par polynômes orthogonaux : en effet, les contraintes de charge dans les arbres bourgeonnants traduisent, d'une certaine façon, les contraintes de degré des polynômes et des opérateurs associés. Cette méthode facilite donc l'intuition d'une preuve combinatoire pour les résultats des modèles de matrice : nous avons traité le cas du modèle à une matrice (section 2.2), du modèle à deux matrices (section 2.3) et trois matrices en chaîne (section 2.4). Un cas particulier du modèle à quatre matrices en chaîne (particules dures sur cartes biparties trivalentes, résolu à la section 1.3.2) a pu depuis être traité [64]. Nous pensons avoir l'essentiel des ingrédients nécessaires à une construction combinatoire liée au modèle général de matrices en chaîne.

La méthode des arbres étiquetés vient dans un second temps. Bien que, comme dit plus haut, elle ne soit pas directement équivalente à la précédente, nous pensons qu'elle peut s'en déduire de manière quasi-systématique : la méthode des arbres bourgeonnants utilise une procédure de découpage des cartes par un « parcours en largeur » de la carte duale, correspondant à un étiquetage particulier des sommets duaux ; lorsque cet étiquetage est connu, il est alors possible de trouver des règles locales pour construire un arbre étiqueté. Dans cette esprit, les mobiles associés aux modèles à trois et quatre matrices en chaîne peuvent être construits.

Une piste intéressante est la généralisation aux cartes de genre supérieur. Les procédés de construction présentés ici conduisent naturellement aux « g-arbres » [14, 68], cartes à une face de genre g qui sont l'extension naturelle de la notion d'arbre plan. Quelques subtilités sont liées à leur énumération, on peut cependant espérer qu'une analyse fine de la structure des « g-mobiles » fournisse une preuve combinatoire de l'ensemble des prédictions d'exposants critiques par la théorie de Liouville couplée aux théories conformes minimales.

Au-delà des techniques employées ici, une question restant ouverte est celle de l'existence d'une approche bijective pour l'énumeration de familles de cartes ne correspondant pas à un modèle de matrices en chaîne, éventuellement attaquables par d'autres techniques [42, 43, 44, 47, 48, 49]. Le cas des graphes (et non cartes !) planaires mérite aussi considération.

Le chapitre 4 présente quant à lui quelques applications intéressantes à l'étude de la statistique des cartes aléatoires. La méthode des arbres étiquetés semble plus ici adaptée, bien qu'une partie de l'analyse puisse se faire via les arbres bourgeonnants, comme dans la publication V.

Concernant l'approche de la section 4.1, il serait bien évidemment utile de mieux comprendre l'origine de la solution exacte et de la propriété d'intégrabilité. Quelques généralisations ont été obtenues (notamment pour les constellations). La question de l'interprétation physique de la

limite continue à un point multicritique reste posée.

Nous pensons que la solution elliptique de la section 4.2 peut être généralisée aux équations discrètes correspondant à d'autres familles de cartes, en introduisant des fonctions theta de genre supérieur. Il nous a été suggéré par B. Eynard que les équations discrètes peuvent être obtenues par un modèle de matrice, via un passage à la limite particulier. Cette relation reste encore mal comprise.

Les résultats de la section 4.3 peuvent être étendus à d'autres familles de cartes, grâce à la construction de la section 3.2, trouvée ultérieurement. Nous pensons que cette dernière peut être utile pour une définition probabiliste rigoureuse des cartes infinies ou continues, étendant les approches existantes pour les quadrangulations [70, 71]. Un article est récemment apparu en ce sens [72].

En dernier lieu, ce mémoire n'évoque que superficiellement la relation avec les arbres continus et les processus de branchements spatiaux [88]. Nous pensons cependant qu'il s'agit d'une voie très prometteuse, et divers travaux récents [77, 89, 72] semblent conforter ce point de vue. La notion de « carte brownienne » [71], récemmment introduite, serait aux surfaces aléatoires ce que le mouvement brownien est aux marches aléatoires.

Dans ce cadre, l'existence de points multicritiques, connue dans le langage des surfaces, doit pouvoir se traduire dans le langage des arbres continus, ce qui n'a pas été étudié jusqu'ici à notre connaissance. Plus généralement, on peut s'attendre à ce que la relation entre surfaces aléatoires et processus de branchement soit analogue à celle unissant les phénomènes critiques bidimensionnels aux processus de croissance invariants conformes, et espérer qu'elle s'avère aussi profonde et fructueuse !

Enfin, il est intéressant de voir que, en ce domaine, la communication entre physiciens et mathématiciens semble se renforcer. Nous souhaitons que cette thèse y ait apporté une contribution utile.

Bibliographie

[1] W. Tutte. A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.* **14** 21–38, 1962.

[2] W. Tutte. A census of Hamiltonian polygons. *Canad. J. Math.* **14** 402–417, 1962.

[3] W. Tutte. A census of slicings. *Canad. J. Math.* **14** 708–722, 1962.

[4] W. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.* **15** 249–271, 1963.

[5] R. Cori et B. Vauquelin. Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.* **33**(5) 1023–1042, 1981.

[6] D. Arquès. Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés. *Discrete Math.* **58**(1) 11–24, 1986.

[7] G. 't Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B* **72** 461–473, 1974.

[8] É. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, et J.-B. Zuber. Planar diagrams. *Commun. Math. Phys.* **59** 35–51, 1978.

[9] V. Kazakov. Bilocal regularization of models of random surfaces. *Phys. Lett. B* **150**(4) 282–284, 1985.

[10] F. David. Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models. *Nucl. Phys. B* **257** [FS14] 45–58, 1985.

[11] J. Ambjørn, B. Durhuus, et J. Fröhlich. Diseases of triangulated random surface models, and possible cures. *Nucl. Phys. B* **257** 433–449, 1985.

[12] V. Kazakov. Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution. *Phys. Lett. A* **119** 140–144, 1986.

[13] D. Boulatov et V. Kazakov. The Ising model on a random planar lattice: the structure of the phase transitioin and the exact critical exponents. *Phys. Lett. B* **187** 379–384, 1987.

[14] G. Schaeffer. *Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires*. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 1998.

[15] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable. part I. discharging. *Illinois J. Math.* **21** 429–490, 1977.

[16] K. Appel, W. Haken, et J. Koch. Every planar map is four colorable. part II. reducibility. *Illinois J. Math.* **21** 491–567, 1977.

[17] I.P. Goulden et D.M. Jackson. *Combinatorial enumeration*. Wiley, New York, 1983.

[18] M. Bousquet-Mélou. On (some) functional equations arising un enumerative combinatorics. Extended abstract for FPSAC 2001. `http://www.labri.fr/Perso/~bousquet/Articles/Eqfunc/eqfunc.ps.gz`.

[19] R. Cori. *Un code pour les graphes planaires et ses applications*. Société Mathématique de France, Paris, 1975. With an English abstract, Astérisque, No. 27.

[20] R. Cori et A. Machì. Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey. I, II, III. *Exposition. Math.* **10**(5) 403–427, 429–447, 449–467, 1992.

[21] M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer. The degree distribution in bipartite planar maps: applications to the Ising model. arXiv:math.CO/0211070.

[22] P. Di Francesco, P. Ginsparg, et J. Zinn-Justin. 2D gravity and random matrices. *Phys. Rep.* **254** 1–131, 1995. arXiv:hep-th/9306153.

[23] J. Ambjørn, B. Durhuus, et T. Jonsson. *Quantum Geometry. A statistical field theory approach*. Cambridge Monogr. Math. Phys. 1, 1997.

[24] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov, et A.B. Zamolodchikov. Fractal structure of 2D quantum gravity. *Mod. Phys. Lett. A* **3** 819–826, 1988.

[25] F. David. Conformal field theories coupled to 2D gravity in the conformal gauge. *Mod. Phys. Lett. A* **3** 1651–1656, 1988.

[26] J. Distler et H. Kawai. Conformal field theory and 2D quantum gravity. *Nucl. Phys. B* **321** 509–527, 1989.

[27] M. Douglas. Strings in less than one dimension and the generalized KdV hierarchies. *Phys. Lett. B* **238** 176, 1990.

[28] M. Douglas. The Two matrix model. In *Cargèse 1990, Proceedings, Random surfaces and quantum gravity*, pages 77–83.

[29] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, et E. Verlinde. Loop equations and Virasoro constraints in non-perturbative 2D quantum gravity. *Nucl. Phys. B* **348** 435–456, 1991.

[30] I. Kostov. Bilinear functional equations of Hirota type in statistical models on random surfaces. In *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute / Cargèse Summer School on Low Dimensional Applications of Quantum Field Theory, 11-29 juillet 1995, Cargèse, France*, L. Baulieu, V. Kazakov, M. Picco, et P. Windey, éditeurs. NATO ASI Series B **362**, 201–209, 1997.

[31] B. Duplantier. Random walks and quantum gravity in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **81** 5489–5492, 1998.

[32] B. Duplantier. Harmonic measure exponents for two-dimensional percolation. *Phys. Rev. Lett.* **82** 3940–3943, 1999. arXiv:cond-mat/9901008.

[33] P. Di Francesco, O. Golinelli, et E. Guitter. Meanders: exact asymptotics. *Nucl. Phys. B* **570** 699–712, 2000. arXiv:cond-mat/9910453.

[34] R.C. Mullin, E. Nemeth, et P.J. Schellenberg. The enumeration of almost cubic maps. In *Proceedings of the Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computer Science*, volume 1, pages 281–295, 1970.

[35] É. Brézin et V. Kazakov. Exactly solvable field theories of closed strings. *Phys. Lett. B* **236** 144–150, 1990.

[36] M. Douglas et S. Shenker. Strings in less than one-dimension. *Nucl. Phys. B* **335** 635, 1990.

[37] D. Gross et A. Migdal. Non-perturbative two-dimensional gravity. *Phys. Rev. Lett.* **64** 127–130, 1990.

[38] B. Eynard. Random matrices. Notes du cours de physique théorique, Saclay, 2000. `http://www-spht.cea.fr/cours-ext/fr/lectures_notes.html`.

[39] G. Bonnet. *Modèles de matrices aléatoires à N grand, groupe de renormalisation, solutions exactes et universalité*. Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2000.

[40] Harish-Chandra. Differentiable operators on a semisimple Lie algebra. *Am. J. Math.* **79** 87, 1957.

[41] C. Itzykson et J.-B. Zuber. The planar approximation II. *J. Math. Phys.* **21** 411–421, 1980.

[42] P. Di Francesco et C. Itzykson. A generating function for fatgraphs. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **59**(2) 117–140, 1993. arXiv:hep-th/9212108.

[43] V. Kazakov, M. Staudacher, et T. Wynter. Character expansion methods for matrix models of dually weighted graphs. *Commun. Math. Phys.* **177** 451–468, 1996. arXiv:hep-th/9502132.

[44] V. Kazakov et P. Zinn-Justin. Two-matrix model with ABAB interaction. *Nucl. Phys. B* **546** 647–668, 1999. arXiv:hep-th/9808043.

[45] M.-L. Mehta. A method of integration over matrix variables. *Commun. Math. Phys.* **79** 327–340, 1981. Réimprimé dans *The Large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics – From Spin to 2-dimensional Gravity*, É. Brézin et S. Wadia éditeurs, World Scientific, 1993, pages 616–629.

[46] S. Chadha, G. Mahoux, et M.-L. Mehta. A method of integration over matrix variables: II. *J. Phys. A* **14** 579–586, 1981. Réimprimé dans *The Large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics – From Spin to 2-dimensional Gravity*, É. Brézin et S. Wadia éditeurs, World Scientific, 1993, pages 630–637.

[47] B. Eynard et C. Kristjansen. Exact solution of the O(n) model on a random lattice. *Nucl. Phys. B* **455** 577–618, 1995. arXiv:hep-th/9506193.

[48] J.-M. Daul. Q-states Potts model on a random planar lattice. arXiv:hep-th/9502014.

[49] P. Zinn-Justin. The dilute potts model on random surfaces. *J. Stat. Phys.* **98** 245–264, 2001. arXiv:cond-mat/9903385.

[50] M. Staudacher. The Yang-Lee edge singularity on a dynamical planar random surface. *Nucl. Phys. B* **336** 349–362, 1990.

[51] D. Gaunt et M. Fisher. Hard-sphere lattice gases: I. Plane-square lattice. *J. Chem. Phys.* **43** 2840–2863, 1965.

[52] L. Runnels, L. Combs, et J. Salvant. Exact finite methods of lattice statistics: II. Honeycomb-lattice gas of hard molecules. *J. Chem. Phys.* **47** 4015–4020, 1967.

[53] R.J. Baxter, I.G. Enting, et S.K. Tsang. Hard square lattice gas. *J. Stat. Phys.* **22** 465–489, 1980.

[54] R.J. Baxter. Hard hexagons: exact solution. *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** L61–70, 1980.

[55] R.J. Baxter et S.K. Tsang. Entropy of hard hexagons. *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** 1023–1030, 1980.

[56] R.J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. London Academic, 1984.

[57] P. Di Francesco. Geometrically constrained statistical models on fixed and random lattices: from hard squares to meanders. arXiv:cond-mat/0211591.

[58] G. Schaeffer. Bijective census and random generation of Eulerian planar maps with prescribed vertex degrees. *Electron. J. Combin.* **4**(1) #R20, 1997.

[59] B. Jacquard et G. Schaeffer. A bijective census of nonseparable planar maps. *J. Combin. Theory Ser. A* **83**(1) 1–20, 1998.

[60] M. Bousquet-Mélou et G. Schaeffer. Enumeration of planar constellations. *Adv. in Appl. Math.* **24**(4) 337–368, 2000.

[61] D. Poulalhon et G. Schaeffer. A bijection for triangulations of a polygon with interior points and multiple edges. *Theoret. Comput. Sci.* **307**(2) 385–401, 2003.

[62] E.A. Bender et E.R. Canfield. The number of degree-restricted rooted maps on the sphere. *SIAM J. Discrete math.* **7** 9–15, 1994.

[63] J. Bouttier. Non publié.

[64] J. Bouttier, P. Di Francesco, et E. Guitter. Combinatorics of bicubic maps with hard particles. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 4529–2559, 2005. arXiv:math.CO/0501344.

[65] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, 1999.

[66] N. Sloane. On-line encyclopedia of integer sequences [en ligne]. `http://www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A000108`.

[67] P. Di Francesco, B. Eynard, et E. Guitter. Coloring random triangulations. *Nucl. Phys. B* **516** [FS] 543–587, 1998. arXiv:cond-mat/9711050.

[68] M. Marcus et G. Schaeffer. Une bijection simple pour les cartes orientables. `http://www.lix.polytechnique.fr/~schaeffe/Biblio/MaSc01.ps`.

[69] P. Chassaing et G. Schaeffer. Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probab. Theory Related Fields* **128**(2) 161–212, 2004.

[70] P. Chassaing et B. Durhuus. Local limit of labelled trees and expected volume growth in a random quadrangulation. arXiv:math.PR/0311532.

[71] J.-F. Marckert et A. Mokkadem. Limit of normalized quadrangulations: the Brownian map. arXiv:math.PR/0403398.

[72] J.-F. Marckert et G. Miermont. Invariance principles for labeled mobiles and bipartite planar maps. arXiv:math.PR/0504110.

[73] J. Ambjørn et Y. Watabiki. Scaling in quantum gravity. *Nucl. Phys. B* **445** 129–114, 1995. arXiv:hep-th/9501049.

[74] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1968.

[75] H. Kawai, N. Kawamoto, T. Mogami, et Y. Watabiki. Transfer matrix formalism for two-dimensional quantum gravity. *Phys. Lett. B* **306** 19–26, 1993. arXiv:hep-th/9302133.

[76] J.-F. Delmas. Computation of moments for the length of the one dimensional ise support. *Electron. J. Probab.* **8**(17), 2003.

[77] M. Bousquet-Mélou. Limit laws for embedded trees. applications to the integrated super-Brownian excursion. arXiv:math.CO/0501266.

[78] M. Jimbo et T. Miwa. Solitons and infinite-dimensional Lie algebras. *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.* **19**(3) 943–1001, 1983. Eq. (2.12).

[79] N. Kawamoto et K. Yotsuji. Numerical study for the c-dependence of fractal dimension in two-dimensional quantum gravity. *Nucl. Phys. B* **644** 533–567, 2002. arXiv:hep-lat/0207007.

[80] I. Gelfand et L. Dikii. Fractional powers of operators and Hamiltonian systems. *Funct. Anal. Appl.* **10**(4) 13, 1976.

[81] V. Kazakov. The appearance of matter fields from quantum fluctuations of 2D-gravity. *Mod. Phys. Lett. A* **4** 2125, 1989.

[82] J. Ambjørn, C. Kristjansen, et Y. Watabiki. The two-point function of $c = -2$ matter coupled to 2D quantum gravity. *Nucl. Phys. B* **504** 555–578, 1997. arXiv:hep-th/9705202.

[83] Staff of the Bateman Manuscript Project. *Higher Transcendental Functions*, volume 2. McGraw-Hill, New-York, 1953.

[84] M. Abramowitz et I.A. Stegun, éditeurs. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New-York, 9$^{\text{ème}}$ édition, 1972.

[85] E.W. Weisstein. Weierstrass Elliptic Function. MathWorld – A Wolfram Web resource [en ligne]. `http://mathworld.wolfram.com/WeierstrassEllipticFunction.html`.

[86] O. Angel et O. Schramm. Uniform infinite planar triangulations. *Commun. Math. Phys.* **241**(2-3) 191–213, 2003. arXiv:math.PR/0207153.

[87] L.B. Richmond et N.C. Wormald. Almost all maps are asymmetric. *J. Combin. Theory Ser. B* **63** 1–7, 1995.

[88] J.-F. Le Gall. *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations*. Birkhauser, Boston, MA, 1999.

[89] J.-F. Le Gall. An invariance principle for conditioned trees. arXiv:math.PR/0503263.