



**HAL**  
open science

# Modèles déformables et multirésolution pour la détection de contours de traitement d'images

Youssef Elomary

► **To cite this version:**

Youssef Elomary. Modèles déformables et multirésolution pour la détection de contours de traitement d'images. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1994. Français. NNT: . tel-00010656

**HAL Id: tel-00010656**

**<https://theses.hal.science/tel-00010656>**

Submitted on 17 Oct 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE

présentée par

ELOMARY youssef

pour obtenir le titre de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I  
(Arrêtés ministériels du 5.7.1984 et du 30.3.1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

---

MODÈLES DÉFORMABLES ET MULTIRÉSOLUTION  
POUR LA DÉTECTION DE CONTOURS EN  
TRAITEMENT D'IMAGES

---

Date de soutenance : 24 Octobre 1994

Composition du Jury :

Pierre-Jean Laurent	PRESIDENT
Philippe Bolon	RAPPORTEUR
Françoise Preteux	RAPPORTEUR
Jacques Blum	EXAMINATEUR
Jean-Marc Chassery	EXAMINATEUR

Thèse préparée au sein du Laboratoire TIMC - Institut IMAG



# Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire TIMC (Techniques de l'Imagerie, de la Modélisation et de la Cognition), de l'institut IMAG (Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble).

Je remercie tout particulièrement le professeur Pierre-Jean Laurent responsable de l'école doctorale de mathématiques appliquées à Grenoble, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, et je tiens à lui exprimer à cette occasion ma reconnaissance pour sa profonde gentillesse.

Je ne sais comment exprimer ma gratitude au professeur Françoise Prêteux responsable du département signal et image de l'Institut National de Télécommunication pour avoir accepté de rapporter cette thèse, et pour les discussions fructueuses que nous avons eues, ainsi que ses grands encouragements.

J'adresse également mes remerciements au professeur Philippe Bolon de l'université de Savoie qui a pris la rude charge d'être rapporteur de ce mémoire de thèse.

J'exprime ma reconnaissance au professeur Jacques Blum vice-président de l'institut I.M.A.G., pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse, et pour les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble, malgré ses nombreuses préoccupations.

J'ai le plaisir d'avoir comme directeur de thèse Monsieur Jean-Marc Chassery, Directeur de recherche au CNRS, et directeur-adjoint du Groupement De Recherche TDSI (Traitement De Signal et Image). Aussi, qu'il soit assuré de mes vifs remerciements pour avoir accepté de me prendre au sein de son équipe, ainsi que pour ses directives, ses conseils et sa sympathie tout au long de ces années.

J'ai eu le grand honneur de bénéficier des encouragements du professeur Yves Meyer membre de l'Académie Française des Sciences et professeur à l'école normale supérieure de Paris, et qui pour des contraintes de date n'a pu faire partie de ce jury. Je tiens néanmoins à lui exprimer ici mes remerciements les plus sincères et

ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier Monsieur Laurent Cohen chargé de recherches à l'INRIA de Paris et au laboratoire CEREMADE de Paris Dauphine, pour les discussions que nous avons eues, et pour avoir accepté de rapporter mon travail, et l'intérêt qu'il lui a porté. Je déplore également son absence de ce jury pour des contraintes de date.

Je tiens également à remercier tous les membres du laboratoire TIMC pour l'ambiance qu'ils y ont installée.

Je réserve toutefois une attention particulière aux membres des équipes INFODIS et SIC pour les bons moments que nous avons passés ensemble durant ces trois années.

Je dédie cette thèse à ma mère pour qui j'éprouve un grand amour et un profond respect que je tiens à lui exprimer ici, de la manière la plus humble.

J'exprime aussi mes remerciements à toute ma famille et à mes amis pour leur soutien moral très précieux et inestimable.

Je ne pourrais pas citer toutes les personnes que je voudrais remercier ici, mais j'espère qu'elles se reconnaîtront.



# Résumé

## MODÈLES DÉFORMABLES ET MULTIRÉSOLUTION POUR LA DÉTECTION DE CONTOURS EN TRAITEMENT D'IMAGES

Les modèles déformables ou les contours actifs sont utilisés pour extraire les caractéristiques visuelles dans une image, en particulier les contours d'objets.

Notre propos dans cette thèse est d'étudier ces modèles dans un environnement multirésolution.

Commençant par une étude des contours actifs à haute résolution, nous démontrons un théorème d'existence pour les contours actifs fermés et les contours actifs à extrémités libres. Nous présentons ensuite un nouveau modèle appelé la bulle déformable, qui a l'avantage d'avoir une représentation discrète, d'être relativement robuste au bruit et à la texture et d'agir par faibles déformations.

Ensuite nous étudions quelques techniques de multirésolution, en présentant les avantages et les inconvénients de chacune. A travers une proposition que nous avons montrée, nous établissons le lien entre la multirésolution et la notion de minimisation d'énergie.

Enfin, nous terminons par une proposition originale qui consiste à faire coopérer les contours actifs et la multirésolution. Cette coopération s'agrèmente de plusieurs approches pour faire passer le contour du haut de la pyramide vers sa base. Elle associe entre autres une factorisation du modèle des contours actifs, d'une part selon une démarche de type membrane effectuée à basse résolution, et d'autre part selon une démarche de type plaque mince au travers des différentes résolutions supérieures permettant de réajuster le contour détecté jusqu'à la résolution initiale.



# Abstract

## DEFORMABLE MODELS AND MULTIREOLUTION FOR EDGE DETECTION IN IMAGE PROCESSING

Deformable models or active contours are used for edge detection in image analysis and picture processing.

We purpose in this thesis, to study these models in a multiresolution environment.

First, we study active contours at high resolution, and we prove the existence of solutions for closed snakes and open snakes with free boundaries. We also present a new model wich is called: The Deformable Bubble. This model has advantage to be discrete and less sensitive to noise and texture. Moreover it works by small deformations, allowing hence to track the evolution of the curve.

Then, we study a lot of multiresolution technics and show advantages and disadvantages of each one. We also establish a relation between multiresolution and energy minimization.

Finally, we present an original approach combining active contours and multiresolution. It consists to reduce image until some level of the pyramide, to detect edges at this level, to take (in several ways) the obtained contour from low resolution to higher resolution until the bottom of the pyramide is reached.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités . . . . .	1
1.2 Méthodes variationnelles en imagerie . . . . .	4
1.3 Introduction rapide aux ondelettes . . . . .	6
1.4 Présentation du travail et principales contributions . . . . .	8
<b>2 Modèles déformables pour la segmentation</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 Modèle des Snakes . . . . .	12
2.2.1 Modélisation et énergie . . . . .	12
2.2.2 Modèle stationnaire . . . . .	16
2.2.3 Aspects numériques . . . . .	18
2.2.4 Modèle évolutif et formulation variationnelle . . . . .	22
2.2.5 Résolution de l'équation et évolution de la courbe . . . . .	25
2.2.6 Limites du modèle de Kass et présentation de modèles dérivés	30
2.2.7 Adaptabilité des paramètres . . . . .	35
2.3 Modèle géométrique intrinsèque . . . . .	35
2.3.1 Modélisation . . . . .	35
2.3.2 Aspects numériques . . . . .	39
2.3.3 Discussion du modèle . . . . .	40
2.4 Modèle discret de la bulle . . . . .	42

2.4.1	Modélisation . . . . .	42
2.4.2	Interaction avec l'image . . . . .	44
2.5	Conclusion . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Techniques de Multirésolution</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Pyramides Gaussiennes et Laplaciennes . . . . .	58
3.3	Représentation par ondelettes . . . . .	65
3.4	Pyramides Splines . . . . .	74
3.5	Conclusion . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Multirésolution et Contours Actifs</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Description de l'approche . . . . .	82
4.2.1	Phase de réduction . . . . .	83
4.2.2	Phase de détection . . . . .	84
4.3	Phase de synthèse . . . . .	85
4.3.1	Ajustements successifs . . . . .	86
4.3.2	Séparation du modèle . . . . .	88
4.3.3	Affinements successifs . . . . .	91
4.3.4	Déformations successives . . . . .	92
4.4	Discussion de l'approche globale . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Développements et conclusion</b>	<b>99</b>
5.1	Introduction . . . . .	99
5.2	Description de l'environnement de travail . . . . .	99
5.3	Opérateurs intégrés dans le logiciel . . . . .	101
5.4	Conclusion et perspectives . . . . .	102
	<b>Bibliographie</b>	<b>105</b>

# Table des figures

1	image d'une fibre musculaire . . . . .	3
2	Contours détectés par Deriche . . . . .	4
3	Résultat d'un snake à extrémités fixes . . . . .	27
4	Résultat d'un snake à extrémités libres . . . . .	28
5	Résultat d'un snake fermé . . . . .	29
6	Snake fermé en terrain plat . . . . .	31
7	Ajout de l'information dans la frontière . . . . .	32
8	Profil d'intensité . . . . .	44
9	Bande de déplacement du sommet par la bulle . . . . .	45
10	Evolution de la bulle sur un terrain plat . . . . .	51
11	Courbe d'énergie de la bulle . . . . .	52
12	Diagramme illustrant la méthode de la bulle . . . . .	53
13	Résultat d'une bulle fermée . . . . .	54
14	Résultat d'une bulle ouverte et évolution des sommets . . . . .	54
15	Contours détectés par la bulle . . . . .	55
16	Pyramide Gaussienne . . . . .	61
17	Pyramide Laplacienne . . . . .	61
18	Méthode de la bulle sur l'image de muscle . . . . .	62
19	Méthode de la bulle sur l'image laplacienne . . . . .	63
20	Résultat sur l'image d'origine . . . . .	64
21	Image réduite de taille 128x128 et images de détails . . . . .	74
22	Courbe d'entropie . . . . .	84
24	Portions de l'image originale et de l'image réduite . . . . .	90
25	Initialisations et résultats sur l'image réduite . . . . .	90

26	Résultat de la séparation du modèle . . . . .	90
27	Résultat des affinements successifs . . . . .	92
28	détection sur l'image réduite . . . . .	93
29	Illustration des déformations successives . . . . .	93
23	Schéma résumant les affinements successifs . . . . .	98
30	Interface de traitement . . . . .	102

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Généralités

Le but d'une des premières étapes de la vision par ordinateur et du traitement d'images, connue sous le terme de segmentation, est de décrire l'image à l'aide d'indices visuels "simples".

Ces indices doivent être pertinents afin de faciliter les étapes qui suivent dans une perspective de décrire rapidement les objets de la scène, et de les reconnaître.

Cette description de la scène consiste souvent à détecter les discontinuités de l'intensité de l'image, ou à partager celle-ci en des régions homogènes afin de faciliter son interprétation et sa description. C'est le but de la segmentation qui est l'une des étapes les plus difficiles associant les mécanismes de la perception, de la décision, et de l'interprétation.

Les indices visuels sont des informations sur l'image, obtenus directement à partir des niveaux de gris de ses pixels, et ceci souvent de manière locale avec des opérateurs linéaires ou non linéaires. Ce sont par exemple les discontinuités des niveaux de gris qu'on appelle généralement contours, et qui correspondent à des ruptures des propriétés locales de l'intensité de l'image, par opposition aux régions qui sont des zones où ces propriétés locales sont similaires et conservées. On peut tout aussi inclure parmi ces indices visuels, les textures uniformes, simples à caractériser, formées par exemple de motifs répétitifs bien que les textures habituelles en pratique soient assez difficiles à décrire en raison de leur caractère aléatoire ou irrégulier.

Les contours sont définis comme les discontinuités présentes dans une image. Toutefois il ne s'agit pas de détecter toutes les discontinuités présentes dans l'image, mais uniquement celles qui sont pertinentes, et qui offrent une interprétation simple de celle-ci. La notion de pertinence est directement liée au processus de perception, et elle peut s'associer dans ce cas à la mise en place d'un opérateur, à un concept de robustesse et de localisation d'opérations dans l'image.

En pratique on cherche un contour comme un ensemble de pixels (picture element) dont la norme du gradient image est élevée dans la direction du gradient. Le fait de citer le mot "élevé" implique déjà une certaine relativité dans la définition, élevé par rapport à quoi? En fait c'est par rapport aux gradients des autres pixels voisins du pixel considéré.

On voit ainsi clairement que le caractère local intervient non seulement dans l'estimation de la norme du gradient, mais aussi dans la région où cette quantité est évaluée. Ceci nous amène donc à parler des problèmes rencontrés dans la détection de contours, à savoir la robustesse des détecteurs de contours face au bruit présent dans l'image, aux irrégularités des surfaces, et aux variations locales insignifiantes.

Pour remédier à ces problèmes, on peut effectuer un prétraitement sur l'image qui consiste à filtrer celle-ci pour lisser ces petites irrégularités sans perte d'information sur la localisation des discontinuités qui nous intéressent. Dans la littérature, afin de réaliser cette fonction de réduction, on trouve toute une panoplie de filtres comme les filtres linéaires, les filtres d'ordre, les filtres morphologiques, les filtres adaptatifs, etc...

Souvent le choix du filtre est lié aux caractéristiques de l'image notamment à la nature du bruit qui y est présent (bruit blanc gaussien, bruit impulsionnel,...), ce qui explique la diversification de ces filtres et la nécessité de connaître les caractéristiques de chaque filtre pour pouvoir choisir le filtre adopté à la nature de l'image et au traitement à effectuer.

Cette étape de filtrage passée, on détecte les contours en calculant un gradient discret sur l'image puisque celle-ci n'est connue que sur une grille de points. Ce calcul s'effectue par convolution de l'image filtrée avec des masques permettant de donner une approximation du gradient de l'image. On pourra citer par exemple les masques de Roberts [Rob65], de Prewitt [Prew70], de Sobel, de Kirsch [Kir71] et de

Canny-Deriche [Der87]. Un exemple de tels traitements est donné en figure (2) qui montre le résultat du détecteur de Canny-Deriche appliqué à l'image d'une section de fibre musculaire (fig. 1).

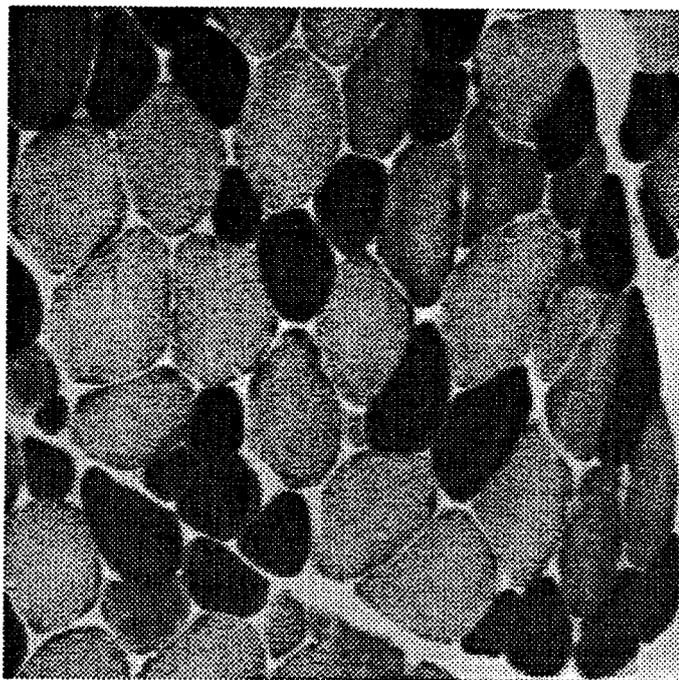


FIG. 1 - image d'une section de fibre musculaire.

Les points de contours étant extraits par l'un de ces différents détecteurs, il s'agit ensuite de les chaîner afin d'avoir des contours connexes, ce chaînage se fait en tenant compte des caractéristiques des objets dans l'image, telle la forme qui est un critère essentiel dans le regroupement des pixels.

En conclusion, on peut dire que dans les méthodes locales précédemment évoquées, procédant par détection et ensuite chaînage, une erreur -sous segmentation- peut survenir soit du fait que la détection a échoué car le contraste est insuffisant en ce point ainsi que dans son environnement, soit du fait que la mise en correspondance n'aboutit pas car on se trouve dans une forme bruitée où il n'y a pas de portion de contour significatif sur laquelle le processus de chaînage peut s'appuyer.

Afin de pallier ces problèmes, des travaux se sont orientés vers l'utilisation de contours connexes déformables dont l'évolution est portée par les points les plus significatifs. Cette méthode de détection de contours porte le nom de contours actifs. Avant de décrire ces méthodes de contours actifs ce qui est le but du prochain

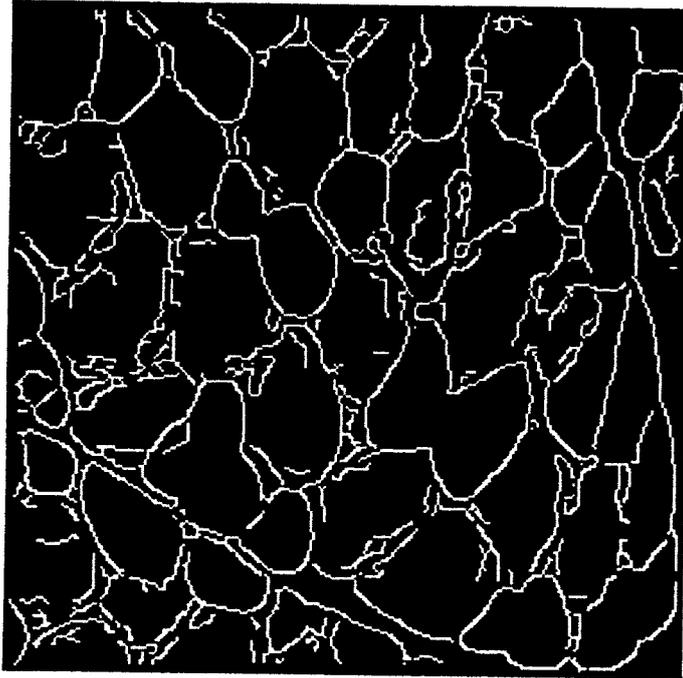


FIG. 2 - Contours détectés par l'opérateur de Canny-Deriche.

chapitre, on va parler dans le prochain paragraphe de l'historique des méthodes variationnelles en traitement d'images, puis l'on va évoquer dans le paragraphe qui suit, et très brièvement la notion d'ondelette car on verra au troisième chapitre un processus de réduction d'images et plus généralement de décomposition de signaux multidimensionnels appelé décomposition par ondelettes. Un quatrième chapitre sera consacré à la coopération entre processus de contours actifs et processus de multirésolution. On termine enfin ce chapitre d'introduction, par une présentation de notre contribution dans le présent manuscrit, et une description du contenu des prochains chapitres.

## 1.2 Méthodes variationnelles en imagerie

Les méthodes variationnelles en traitement d'images sont apparues d'une part avec le modèle de Kass et ses collaborateurs [Kas88] en ce qui concerne la détection de contours (voir le chapitre suivant), et d'autre part avec celui de Malik et Perona [Mali87] qui à l'origine, étaient plus intéressés par la restauration d'images que par la détection de bords et qui ont pu trouver une autre formulation pour la segmentation.

En effet, constatant que le filtrage d'une image avec une gaussienne équivaut à l'évolution sur cette image d'un processus de diffusion (en l'occurrence ici c'est l'équation de la chaleur) durant un temps fini associé au paramètre d'échelle  $\sigma^2 = t$ , où  $\sigma$  est l'écart type de la gaussienne, Malik et Perona ont imaginé une méthode de filtrage non linéaire basée sur un processus de diffusion qui varie suivant les régions de l'image: plus vite dans les zones homogènes, et moins vite ou pas de diffusion du tout au voisinage des bords.

Cette idée, a été à l'origine de nombreux travaux et développements faits par Osher et Rudin [Osh90], Alvarez, Morel et leurs collaborateurs [Alv92b]. Ces travaux consistent à utiliser un schéma de diffusion anisotropique, où dans les zones de fort gradient, l'image est lissée perpendiculairement au gradient, donc parallèlement aux bords [Cha93a].

En se basant sur les travaux de D. S. Geman (voir [Gem84] ou [Aze87]) pour des modèles discrets, Mumford et Shah ont étudié une nouvelle approche variationnelle [Mum89], combinant en un même processus, régularisation de l'image (plus généralement un signal multidimensionnel) et détection de bords. Cette méthode consiste à approcher l'image initiale  $f$  définie sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $[0,1]$ , par une fonction  $u$  présentant des discontinuités dans un sous ensemble  $Z \subset \bar{\Omega}$ , en minimisant la quantité suivante:

$$\int_{\Omega \setminus Z} |\nabla u|^2 + H^1(Z) + \int_{\Omega} |u - f|^2$$

où  $Z$  est un ensemble compact sur lequel  $u$  peut être discontinue, et  $H^1(Z)$  est la dimension de Hausdorff de  $Z$ . Dans la plupart des cas traités,  $\Omega$  est un carré représentant la grille ou le support de l'image. Sur  $\Omega \setminus Z$ ,  $u$  est supposée régulière (en général de classe  $C^1$ ).

Rappelons ce qu'est la dimension de Hausdorff  $H^1(Z)$ : Soit  $C$  une courbe de  $\mathbb{R}^n$ , c'est donc l'image d'une fonction continue et injective  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

La longueur de la courbe  $C$  est définie par:

$$L(C) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{i=m} \|g(t_i) - g(t_{i-1})\| \text{ avec } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1 \text{ et } m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

On dit que  $C$  est rectifiable si  $L(C)$  est finie.

Posons pour  $s > 0$ ,  $\omega_s = \frac{\Gamma(1/2)^s}{\Gamma(s/2+1)}$ , où  $\Gamma$  représente la fonction d'Euler. On retrouve pour  $s \in \mathbb{N}^*$  que  $\omega_s$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^s$ .

Pour  $s > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $A \subset \mathbb{R}^n$  posons:

$$H_\rho^s(A) = 2^{-s} \omega_s \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ et } |U_i| \leq \rho \right\}$$

où  $|X| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in X\}$  désigne le diamètre de  $X$ , et  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  un recouvrement de  $A$ .

On définit alors la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle de  $A$  par:

$$H^s(A) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} H_\rho^s(A) = \sup\{H_\rho^s(A) \text{ pour } \rho > 0\}$$

Pour  $s \in \mathbb{N}^*$ , on retrouve les définitions classiques de longueur, surface, volume, ... et lorsque  $C$  est rectifiable, on a  $H^1(C) = L(C)$ .

On cherche à avoir une fonction  $u$  ressemblant le plus possible à  $f$  d'où la présence du troisième terme dans l'expression de la fonctionnelle à minimiser. Le second terme signifie que l'on veut minimiser la longueur dans un certain sens de l'ensemble  $Z$  des discontinuités.

Ayant étudié l'aspect des minima de la fonctionnelle ci-dessus, Mumford et Shah ont conjecturé l'existence d'un minimum  $(u, Z)$ , où  $Z$  serait composé d'un nombre fini de courbes régulières de classe  $C^1$  ne se rencontrant qu'à leurs extrémités. Des résultats partiels ont été démontrés par de nombreux chercheurs comme Ambrosio, De Giorgi [ambr88], Dal Maso, Morel et Solimini [Dal92] dans des cas bien particuliers, comme celui où  $u$  est à variation bornée. Mais la conjecture est toujours présente ...[Cha93a].

### 1.3 Introduction rapide aux ondelettes

Dans ce paragraphe, on va présenter d'une manière très brève la notion d'ondelettes par un survol des différents travaux qui ont été réalisés dans ce domaine pour ne voir dans le troisième chapitre qu'une application de cette notion que nous serons amenés à utiliser dans le chapitre 4, et qui concerne la décomposition et la reconstruction d'images.

L'analyse par ondelettes est apparue après le travail pionnier de Morlet et Grossmann [Gro84] comme un fruit d'une collaboration de ces deux auteurs, et d'une

profonde intuition due à Morlet et à ses expériences numériques sur les signaux sismiques. Ce nouvel outil pour l'analyse temps-fréquence de certains phénomènes, dont les principaux résultats sont dus à Meyer et ses collaborateurs, a séduit les chercheurs scientifiques, et est actuellement largement utilisé dans de nombreux domaines.

En effet, contrairement à l'analyse par transformée de Fourier par fenêtre, où il faut multiplier les sinus et les cosinus par une fenêtre glissante, la fenêtre dans l'analyse par ondelettes est déjà oscillante, et est appelée une ondelette mère. Cette ondelette mère  $\psi(x)$  possède les propriétés suivantes [Mey92]:

Elle est régulière, elle est à support compact (décroissance rapide à l'infini), et satisfait la condition fondamentale suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0$$

Ceci signifie que dans un certain sens que  $\psi(x)$  est oscillante.

Translatée et dilatée, cette ondelette  $\psi$  permet de générer d'autres ondelettes  $\psi_{a,b}(x) = a^{-1/2}\psi((x-b)/a)$  où  $b \in \mathbb{R}$  donne la position de l'ondelette  $\psi_{a,b}$  et  $a$  est un réel strictement positif mesurant sa largeur moyenne.

En dimension  $n$ , une ondelette analysante  $\psi(x)$  est une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , définie à partir de sa transformée de Fourier  $\hat{\psi}(\omega)$  vérifiant:

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(t\omega)|^2 \frac{dt}{t} \text{ pour } \omega \neq 0$$

Les ondelettes générées à partir de l'ondelette  $\psi$  sont alors:

$$\psi_{x,t}(y) = t^{-n/2} \psi\left(\frac{y-x}{t}\right)$$

Outre leurs applications en traitement de signal, les ondelettes sont aussi utilisées dans divers champs et nombreux domaines comme la turbulence [Fri92], les phénomènes à caractère fractal [Muz92], les statistiques [Ant92], la géophysique [Cou92], l'astrophysique [Bij92] et bien d'autres. Ceci montre le grand essor et le formidable écho qu'elles ont trouvé dans la communauté scientifique.

Pour conclure ce rapide survol, on va juste mentionner l'application des ondelettes dans le domaine des équations aux dérivées partielles et que l'on pourrait utiliser pour la résolution des e.d.p. que l'on va rencontrer dans le prochain chapitre.

En effet, la structure des bases orthonormales d'ondelettes permet de contribuer à la résolution des équations aux dérivées partielles suivant un schéma numérique à espace et temps adaptatifs [Bac92], grâce à la structure multirésolution qui donne un moyen simple d'adapter les réaffinements de calcul à la régularité locale de la solution de l'e.d.p. Cela veut dire qu'à haute résolution, seules les régions où apparaissent des singularités ou de fortes transitions du phénomène sont sujets au calcul effectif. Liandrat et Tchamitchian [Lia90] ont montré que la multirésolution ayant des bases d'ondelettes orthogonales est un outil simple et efficace pour résoudre les e.d.p. de modèles stationnaires en utilisant des algorithmes à résolution spatiale adaptative, et en ajoutant successivement des couches de détails qui augmentent localement la résolution de l'approximation dans une approche du plus grossier au plus fin. Dans la continuité de cette approche combinant e.d.p et ondelettes, Bacry [Bac] a proposé une méthode qui concerne les équations aux dérivées partielles évolutives et qui permet d'adapter leur pas temporel à la résolution spatiale afin de maintenir une bonne stabilité et une grande précision du schéma numérique de résolution.

## 1.4 Présentation du travail et principales contributions

Comme on l'a signalé auparavant, ce paragraphe est consacré à la description du contenu des différents chapitres de cette thèse. On peut diviser ce manuscrit en trois parties: la première concernant les contours actifs qui est une autre façon d'extraire les points de contours, et qui consiste à combiner les deux étapes citées précédemment à savoir l'extraction et le chaînage en une seule méthode.

On va présenter dans cette partie trois modèles dont deux sont à caractère continu et le troisième à caractère discret:

- Le modèle des Snakes et les différentes contributions.
- Le modèle des contours actifs "Modèle géométrique et évolution par courbure moyenne".
- Le modèle discret de la "Bulle déformable".

Dans cette partie et en ce qui concerne notre contribution, nous allons montrer un théorème d'existence d'une solution du modèle des snakes valable aussi bien pour les snakes à extrémités libres que pour les snakes fermés, en précisant les espaces où l'on va travailler et les conditions aux limites choisies pour chaque type de snakes. Nous allons aussi établir une proposition concernant l'évolution des snakes fermés en l'absence d'une énergie externe pour montrer l'effet du terme régularisant de l'énergie sur la courbe dans une zone uniforme.

Nous présenterons également un nouveau modèle "la bulle déformable" pour la détection de contours. C'est un modèle discret adapté à la nature discrète de l'image, et qui est plus robuste que les snakes en ce qui concerne l'initialisation. L'évolution de la courbe se fait par petites déformations ce qui est dans l'esprit même de l'approche.

Le contour  $\gamma$  est détecté par rupture du modèle grâce aux extrema apparaissant dans la courbe d'énergie qui quantifie cette évolution.

On présentera une première version pour les contours fermés et une seconde pour les morceaux de frontières, ainsi que des résultats illustrant ce modèle à travers des images de natures différentes.

Outre la présentation des contours actifs, on trouvera aussi dans le deuxième chapitre une étude comparative entre les trois modèles présentés en faisant surgir les avantages et les inconvénients de chacun, ainsi que quelques images pour les illustrer.

Dans la deuxième partie à laquelle on consacre tout le troisième chapitre, on va présenter trois techniques de réduction d'images (trois modèles de pyramides) qui sont les suivantes:

- La pyramide Gaussienne et Laplacienne de Burt et Adelson [Burt83].
- L'approximation multirésolution et la décomposition par ondelettes orthogonales de Mallat [Mal89b].
- La pyramide spline de Unser et ses collaborateurs [Uns93].

La présentation de ces trois techniques va nous permettre de les comparer, et de faire ressortir la plus adéquate pour la segmentation à plusieurs niveaux que l'on désire développer. Bien entendu selon l'approche envisagée, il impose d'étudier le moyen de faire passer les contours d'une résolution à une autre.

La troisième et dernière partie est basée sur la coopération entre ces deux processus, à savoir les contours actifs et la multirésolution. Cette partie sera consacrée à la description de l'approche originale que nous proposons, qui consiste à détecter les contours à travers plusieurs niveaux de résolutions dans une "coarse to fine strategy" en commençant à un niveau situé au plus haut dans la pyramide et en réajustant le contour en fonction des données successivement à chaque résolution. Cette approche ainsi que quelques illustrations seront présentées au quatrième chapitre.

Enfin on termine par un chapitre décrivant l'interface élaborée ainsi que les différents outils utilisés pour tester notre approche et pour présenter les différents résultats obtenus, tout en mentionnant les conclusions générales de ce travail et les perspectives envisagées par la suite.

## Chapitre 2

# Modèles déformables pour la segmentation

### 2.1 Introduction

Les contours actifs ou “Snakes” ont été introduits par Kass, Witkin et Terzopoulos dans leur article: “Snakes: Active Contour Models” [Kas88]. Ils se présentent comme un modèle pour l’extraction de caractéristiques visuelles dans une image comme les contours d’objet ou les éléments de frontières.

L’idée de base est de positionner, au voisinage du contour à détecter, une courbe qui sera l’initialisation du contour actif et de la déformer successivement jusqu’à ce qu’elle coïncide avec la frontière de l’objet. Ce processus de déformation se fait suivant des critères qui doivent traduire les buts désirés, eux-mêmes intégrés dans la formulation propre du modèle.

Le critère utilisé par Kass et ses collaborateurs correspond à la minimisation d’une fonctionnelle appelée communément Energie, modélisant l’énergie d’un phénomène physique qui sera la déformation d’une courbe pour extraire des points de contour d’un objet dans l’image. Le minimum de cette fonctionnelle sera associée au contour final devant représenter la frontière de l’objet. Le processus est itératif et le minimum correspond à l’état de la courbe en phase de convergence.

Dans ce chapitre seront présentés trois modèles de contours actifs qui sont différents de par leur formalisation du problème de détection de contours, leur manière de percevoir les contours et par la suite la manière de représenter les déformations

des courbes.

On va présenter dans un premier temps le modèle initial des Snakes. On fera ressortir ses avantages et ses limites ainsi que les différentes contributions introduites pour pallier certaines de ses limitations.

Ensuite, dans le troisième paragraphe, on présentera un autre modèle appelé modèle géométrique développé par Caselles et ses collaborateurs [Cas92] qui considère les contours comme les courbes de niveau de certaines fonctions et procède à leur déformation suivant une équation aux dérivées partielles non linéaire faisant intervenir les niveaux de gris dans l'image. Cette nouvelle façon de voir les contours offre une bonne étude mathématique du modèle assurant l'existence et l'unicité de la solution dans un sens qui sera précisé ultérieurement.

Enfin, on va parler du troisième modèle présenté dans ce chapitre qui a vu le jour au laboratoire TIMC, et qui est associé au concept de bulle déformable. Ce modèle est un modèle discret faisant évoluer la courbe par petites déformations à travers les déplacements de ses sommets, tout en calculant leurs différentes interactions avec l'image, jusqu'à ce qu'elle épouse le contour de l'objet.

A travers cette présentation, on discutera les avantages et inconvénients de chaque modèle. Des résultats nous permettront de comparer ces différents modèles et de choisir le modèle adéquat suivant la nature du problème à traiter.

## 2.2 Modèle des Snakes

### 2.2.1 Modélisation et énergie

Comme on l'a vu, le contour d'un objet est défini comme étant l'ensemble des points de l'image pour lesquels la norme du gradient de l'image est maximale dans la direction du gradient de l'image.

Contrairement à l'approche consistant à appliquer un masque à l'image pour extraire les points correspondants aux gradients élevés, et ensuite appliquer à ces points un processus de chaînage suivant un critère de connexité, de forme ou autre, on va combiner ces deux étapes en une seule en cherchant une courbe connexe  $C$  qui s'appuiera sur des points de gradients d'image élevés; c'est cette courbe qui va

représenter le contour de l'objet auquel on s'intéresse.

En adoptant une formulation continue, si l'on choisit une représentation paramétrique de la courbe  $C$  comme suit:

$C = \{v(s) = (x(s), y(s)); s \in [a, b]\}$  alors l'énergie que l'on va chercher à minimiser est une fonctionnelle  $E$  qui à chaque courbe  $C$  associe un réel  $E(C)$ .

Cette énergie doit faire apparaître d'une part les caractéristiques du contour et de la courbe, d'autre part celles de l'image ou de points qui nous intéressent dans l'image et l'interaction entre la courbe et l'image.

Le choix de Kass et ses collaborateurs s'est porté sur une énergie faisant intervenir plusieurs termes, que l'on peut écrire sous la forme suivante:

$$E(C) = E_{image}(C) + E_{interne}(C) + E_{interact}(C).$$

où:

$E_{image}(C)$  et  $E_{interne}(C)$  désignent respectivement l'énergie image et l'énergie interne de la courbe  $C$ .

Quant à  $E_{interact}(C)$ , elle désigne l'énergie d'interaction introduite par l'utilisateur.

Spécifions maintenant chaque terme de cette énergie globale:

- L'énergie image traduit les caractéristiques que l'on cherche dans l'image dont  $I$  désigne l'intensité; si l'on cherche des lignes de faible intensité s'appuyant sur des points sombres (de faibles niveaux de gris) alors  $E_{image}(C)$  peut être de la forme:  $E_{image}(C) = \int_a^b I(v(s)) ds$  de sorte que le minimum donne les points de faible intensité.

Dans notre cas, on est intéressé par la détection de contours composés d'éléments de la frontière, alors un choix de l'énergie image pourrait s'écrire tout naturellement comme:

$$(1) \quad E_{image}(C) = - \int_a^b \|\nabla I(v(s))\|^2 ds.$$

Le signe moins apparaît car on veut maximiser la norme du gradient de l'image, afin de procéder à la détection des frontières dont les points possèdent un gradient d'image élevé.

Notons tout d'abord qu'il y a une multitude de choix possibles pour l'énergie  $E_{image}$  associée à l'image, ceci à travers plusieurs formulations possibles.

En effet, si on prend une fonction  $\phi : x \rightarrow \phi(x)$  croissante et continue, alors en appliquant une telle fonction  $\phi$  à la quantité située à l'intérieur de l'intégrale, on obtient une autre énergie image traduisant le même but. Ainsi une autre formulation de  $E_{image}$  pourrait être:

$$(2) \quad E_{image}(C) = - \int_a^b \phi(\|\nabla I(v(s))\|) ds.$$

La différence entre les différentes formulations portera alors sur la rapidité de convergence du processus et sur la stabilité numérique des résultats.

- L'énergie interne est un terme régularisant dont l'introduction est due au fait que les problèmes de détection de contours sont des problèmes mal posés " au sens de Hadamard " comme beaucoup de problèmes en vision [Ter86b]. Rappelons qu'un problème est dit bien posé au sens de Hadamard, si sa solution existe, est unique, et dépend continûment des données (ie stable), et il est mal posé, s'il faillit à l'une des conditions précédentes.

Aussi on veut régulariser le problème et limiter le champ d'investigation pour la recherche de la solution afin de rendre le problème bien posé ou tout du moins essayer de le poser ou de le formuler correctement.

Une autre raison pour introduire ce terme régularisant réside dans le fait que nous cherchons en général un contour assez régulier réduisant le mieux possible les oscillations dues aux nombreux sauts d'intensité dans l'image, afin d'avoir une meilleure visualisation.

Pour ceci, on utilise souvent un opérateur régularisant de type Thikonov [Thi74] dont l'expression est donnée par:

$$E_{interne}(C) = \sum_{r=0}^p \int_a^b \alpha_r(s) \left\| \frac{\partial^r v(s)}{\partial s^r} \right\|^2 ds.$$

où  $p$  désigne l'ordre du stabilisateur et les fonctions  $\alpha_r$  sont des fonctions de pondérations. Le choix de  $p$  est fonction de la régularité imposée à la solution.

Si  $p > 1$  la solution est de classe  $C^{2p-3}$  et si de plus  $\alpha_p$  est constante, la solution est de classe  $C^{2p-2}$  [Coh92c].

L'énergie interne choisie par Kass est la suivante:

$$E_{interne}(C) = \int_a^b \alpha(s) \left\| \frac{\partial v(s)}{\partial s} \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} \right\|^2 ds.$$

Le choix de cet ordre est néanmoins insuffisant pour extraire des caractéristiques telles les courbures qui nécessitent en général des stabilisateurs d'ordre supérieur ou égal à 3, ce qui conduira à la résolution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 6, comme ceci a été signalé par I. Cohen [Coh92c].

Bien entendu il ne s'agit pas de résoudre des équations du sixième ordre, mais on utilise plutôt dans ces cas une décomposition de la solution dans des bases convenables, comme les B-splines [Lau74] ou toute autre base convenable.

La pondération par les fonctions positives  $\alpha(s)$  et  $\beta(s)$  permet de donner plus d'importance à l'un ou à l'autre des termes suivant la forme de l'objet à segmenter, de même que mettre  $\beta(s)$  à 0 permet d'introduire une discontinuité de première espèce ou d'ordre un. Ceci permet par exemple de générer un coin ou un point anguleux, alors qu'affecter à  $\alpha(s)$  et  $\beta(s)$  la valeur 0 permet d'introduire une discontinuité d'ordre zéro (discontinuité dans la courbe).

Si l'on veut trouver une analogie du modèle avec des phénomènes physiques, pour  $\alpha$  et  $\beta$  constantes, la minimisation du premier terme engendre dans l'équation d'évolution un laplacien qui est analogue à l'équation régissant les faibles déplacements d'une membrane tandis que la minimisation du second terme fait apparaître dans l'équation d'évolution un bilaplacien qui est similaire à celle des vibrations d'une plaque mince pour de petits déplacements. Ainsi  $|v_s(s)|^2$  agit sur la longueur de la courbe et par suite le minimum influence sa rigidité et sa tension alors que  $|v_{ss}(s)|^2$  agit sur sa courbure. Donc la courbe obtenue doit être suffisamment lisse et rigide sans introduire de boucles superflues.

Aussi séduisant que puisse paraître l'éventail des possibilités pour le choix des pondérations  $\alpha$  et  $\beta$  pour tenir compte de la topologie du contour, on prend en pratique  $\alpha$  et  $\beta$  constantes durant le processus de déformation parce qu'on

ignore localement comment se comporte la courbe, et même si l'on voit que le contour cherché admet un point anguleux, on ne sait pas où il se situe sur la courbe paramétrée, et c'est à l'utilisateur (averti) de régler convenablement ces paramètres. Toutefois quelques suggestions ont été faites pour choisir ces paramètres en fonction de l'information dans l'image, c'est à dire à partir des niveaux de gris des points considérés sur la courbe et ceux de leurs voisins comme on va le voir par la suite.

- L'énergie d'interaction est introduite par l'utilisateur pour tenir compte de certaines caractéristiques du problème traité. Cela revient à introduire un complément d'information pour guider l'évolution de la courbe, ce qu'on appelle de "l'information haut niveau". Ainsi pour éviter certains points par exemple, on génère un potentiel de la forme  $\frac{1}{|v-v_0|}$  pour avoir des forces de répulsion au point  $v_0$ . De même on peut introduire un potentiel générant des forces élastiques simulant l'allongement d'un ressort dont les extrémités sont deux points choisis par l'utilisateur et attachant la courbe aux points considérés.

### 2.2.2 Modèle stationnaire

On cherche donc une courbe  $C$  qui réalise le minimum de la fonctionnelle:

$$(3) \quad E(C) = \int_a^b \alpha(s) \|v'(s)\|^2 + \beta(s) \|v''(s)\|^2 - \|\nabla I(v(s))\|^2 ds.$$

Le minimum de cette équation est donné par le théorème suivant portant sur les calculs de variation:

**Théorème 2.1** *Soit  $x$  une variable courante à valeur dans l'intervalle  $[a,b]$ , et soit  $y$  une fonction dépendant de la variable  $x$ .*

*Soit  $F(x, y, y', \dots, y^n)$  une fonction de classe  $C^2$  par rapport à tous ses arguments.*

*Soit le problème de minimisation suivant:*

*Trouver  $y$  réalisant le minimum de la fonctionnelle  $J[y]$  définie par:*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

où toutes les dérivées de  $y$  jusqu'à l'ordre  $n-1$  aux extrémités sont fixées. Alors l'équation d'Euler est donnée par :

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} F_{y^{(i)}} = 0$$

où  $F_{y^{(i)}}$  désigne la dérivée partielle de  $F$  par rapport à  $y^{(i)}$ .

**Démonstration :** la démonstration de ce résultat classique en calcul des variations figure dans [Gel63] ou [Els62]. ■

Dans notre cas, l'équation d'Euler associée à l'énergie choisie s'écrit vectoriellement comme:

$$(4) \quad -(\alpha v')' + (\beta v'')'' = \nabla P(v).$$

où  $P(v) = \frac{1}{2} \|\nabla I(v)\|^2$ .

Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont constantes, (4) devient alors:

$$(5) \quad -\alpha v'' + \beta v^{(4)} = \nabla P(v).$$

En l'absence de tout champ extérieur, on a l'équation homogène associée à (5) qui s'écrit donc:

$$(6) \quad -\alpha v'' + \beta v^{(4)} = 0.$$

Cherchons la forme générale des solutions de l'équation (6) en nous intéressant à une composante:

$$-\alpha x'' + \beta x^{(4)} = 0.$$

avec les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  non tous nuls.

Pour  $s \in [a, b]$  on a les cas suivants:

- Si  $\beta = 0$  alors  $x(s) = C_1 s + C_2$
- Si  $\alpha = 0$  alors  $x(s) = C_1 s^3 + C_2 s^2 + C_3 s + C_4$
- Si  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$  alors  $x(s) = C_1 e^{\lambda s} + C_2 e^{-\lambda s} + C_3 s + C_4$

où  $\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ . Ensuite on ajoute les conditions aux limites que doivent vérifier les courbes pour avoir soit des courbes fermées, soit des courbes à extrémités fixes. On peut tout aussi bien, choisir des courbes à extrémités libres en les contraignant le moins possible. Comme l'a proposé Berger [Ber91], on a alors dans ce cas des conditions aux limites de type:

$$v''(a) = v'''(a) = v''(b) = v'''(b) = 0.$$

Ce choix intervient afin de ne pas annuler ou ne pas fixer les extrémités de la courbe, et leurs dérivées pour donner plus de liberté à la courbe ouverte pour se mouvoir. On en tiendra compte dans la formulation variationnelle du problème par la suite, quand on parlera du modèle évolutif et de l'existence d'une solution pour ce type de snakes admettant ces conditions aux limites.

### 2.2.3 Aspects numériques

Pour trouver la courbe réalisant le minimum de l'énergie (3), on doit résoudre l'équation aux dérivées partielles obtenue. A l'instar des auteurs [Kas88] et [Ber91], on a choisi une résolution de cette équation par la méthode des différences finies que l'on va rappeler dans un premier temps:

Revenons à l'équation (5). Comme c'est une équation vectorielle, on va raisonner sur une composante.

Considérons la courbe discrétisée  $\{v_i = (x_i, y_i), i = 0, \dots, N - 1\}$  dont les points sont équidistants d'un pas  $h$ . Au point  $x_i$ , on approche la dérivée première (respectivement la dérivée seconde) par:

$$\frac{dx}{ds}(i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{h} \text{ (respectivement } \frac{d^2x}{ds^2}(i) = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2}).$$

Ainsi l'équation  $-(\alpha x')' + (\beta x'')'' = f$  devient:

$$\begin{aligned} & \beta_{i-1} x_{i-2} + (-2\beta_{i-1} - 2\beta_i - h^2 \alpha_i) x_{i-1} + \\ & (\beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1} + \alpha_{i+1} h^2 + h^2 \alpha_i) x_i + \\ & (-2\beta_{i+1} - 2\beta_i - h^2 \alpha_{i+1}) x_{i+1} + \beta_{i+1} x_{i+2} = h^4 f_i. \end{aligned}$$

Si  $\alpha_i = \alpha$  et  $\beta_i = \beta \quad \forall i \in \{0, \dots, N - 1\}$  alors l'équation devient:

$$(\beta x_{i-2} + (-4\beta - h^2 \alpha) x_{i-1} + (6\beta + 2h^2 \alpha) x_i + (-4\beta - h^2 \alpha) x_{i+1} + \beta x_{i+2}) = h^4 f_i.$$

On obtient alors un système linéaire de la forme  $AX = F$  où  $A$  est une matrice pentadiagonale.

Pour les snakes fermés, et compte tenu du caractère cyclique des courbes, la matrice  $A$  est symétrique, circulante et peut s'écrire de la manière suivante (pour  $\alpha$  et  $\beta$  constantes):

$$\begin{bmatrix} 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta \\ -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & \beta \\ \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots \\ 0 & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 \\ \\ 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta \\ \beta & 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta \\ -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta \end{bmatrix}$$

Quant aux snakes à extrémités libres, et sous les conditions aux limites vues précédemment, la matrice  $A$  proposée par [Ber91] dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont constantes s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \beta & -2\beta & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha - 2\beta & 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 & \dots \\ 0 & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta & 0 \\ \\ 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 6\beta & -\alpha - 4\beta & \beta \\ 0 & 0 & \dots & \beta & -\alpha - 4\beta & 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta & -2\beta & \beta \end{bmatrix}$$

On peut cependant se demander pourquoi la matrice obtenue, n'est pas symétrique compte tenu de la symétrie des conditions aux limites du problème? Ceci peut s'interpréter d'une part parce que le schéma de différences finies n'est pas directement associé à la forme bilinéaire associée au problème dont on va parler après, par opposition au schéma des éléments finis pour lequel on doit trouver une matrice

symétrique compte tenu de la symétrie de cette forme bilinéaire associée, et d'autre part parce que l'on n'a pas tenu compte des conditions imposées à  $\alpha$  que l'on verra quand on abordera l'existence de la solution du problème.

Pour les snakes fermés, Berger a montré dans [Ber91] que les valeurs propres de la matrice  $A$  s'expriment par:

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{N} (4\beta \sin^2 \frac{k\pi}{N} + h^2\alpha) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Donc  $\lambda_0 = 0$  est une valeur propre de  $A$  et par conséquent  $A$  n'est pas inversible. Pour les autres types de snakes, et au travers des expériences numériques, Berger a observé que les résultats étaient instables et en a déduit que la matrice  $A$  pouvait être singulière aussi.

Mais pour les snakes à extrémités libres, on peut montrer que la matrice obtenue est effectivement singulière. En effet, il est facile de voir que 0 est une valeur propre de la matrice correspondante, associée au vecteur propre  $[1, \dots, 1]$ .

Ainsi dans les deux cas, les deux matrices sont singulières. Kass et ses collaborateurs [Kas88] ont perçu la singularité de ces matrices, car ils ont proposé de résoudre le problème de la manière suivante:

$$AV^{t+1} = F + \theta (V^t - V^{t+1})$$

où  $\theta$  est un réel strictement positif, et le système matriciel devient alors:

$$(A + \theta I)V^{t+1} = F + \theta V^t$$

Pour les snakes fermés, la matrice  $A + \theta I$  est inversible car, étant réelle et symétrique, ses valeurs propres sont positives et de plus sa plus petite valeur propre est justement  $\theta$ , valeur strictement positive.

Le choix de  $\theta$  détermine le bon conditionnement de la matrice à inverser, et pour cela on rappelle quelques définitions citées dans [Cia85] qui permettent d'utiliser un théorème donnant le conditionnement de la matrice à inverser et précisant par la suite le choix de  $\theta$ .

**Définition 2.1** *On appelle valeurs singulières d'une matrice carrée  $A$ , les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice hermitienne  $A^* A$ , ( $A^t A$  si  $A$  est réelle).*

**Définition 2.2** *Etant donné une norme vectorielle  $\|\cdot\|$  sur  $K^n$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), on appelle norme matricielle subordonnée, l'application  $\|\cdot\|$  de  $M_n(K) \rightarrow \mathbb{R}$  qui à une matrice  $A$  associe  $\|A\| = \sup\|Av\|$  pour  $v \in K^n$  tel que  $\|v\| = 1$ .*

**Définition 2.3** *Soit  $A$  une matrice inversible et  $\|\cdot\|$  une norme matricielle subordonnée, alors le nombre  $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  s'appelle le conditionnement de  $A$  relativement à la norme  $\|\cdot\|$ .*

Une matrice est d'autant mieux conditionnée que la valeur de son conditionnement est proche de 1 par valeurs supérieures.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  matrice associée aux snakes fermés. Alors comme  $A$  est réelle et symétrique,  $\lambda$  est à valeur positive et par conséquent, les valeurs singulières de  $A$  sont exactement les valeurs propres de  $A$ .

Soit  $\|\cdot\|$  la norme matricielle subordonnée à la norme déduite du produit scalaire sur  $K^n$ , alors le conditionnement de la matrice  $(A + \theta I)$  relatif à cette norme est donné par le théorème suivant [Cia85]:

**Théorème 2.2** *Pour toute matrice  $A$  inversible, on a:*

$$\text{cond}(A) = \frac{\mu_N(A)}{\mu_1(A)}.$$

Où  $\mu_1$  et  $\mu_N$  désignent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de la matrice  $A$ , valeurs strictement positives.

En fait nous n'avons énoncé qu'une partie du théorème cité dans la référence, et dans notre cas on a:

$$\text{cond}(A + \theta I) = \frac{\rho + \theta}{\theta} = 1 + \frac{\rho}{\theta}.$$

Où  $\rho$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice  $A$ , donnée par:

$$\rho = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{N} (4\beta \sin^2 \frac{k\pi}{N} + h^2\alpha) \quad \text{où } k \text{ est la partie entière de } \frac{N}{2}.$$

Il s'agit donc de choisir  $\theta$  très grand ou inversement de choisir un  $\rho$  très petit. On verra l'expression de  $\theta$  en fonction du pas temporel quand on parlera de l'équation évolutive et la conclusion que l'on peut en faire sur le pas temporel grâce à cette interprétation.

### 2.2.4 Modèle évolutif et formulation variationnelle

L'énergie totale à minimiser n'est pas convexe en raison du fait que le gradient de l'intensité  $I$  de l'image n'est connu que pour des valeurs discrètes. On n'est donc pas assuré de l'existence d'un minimum global. Plus précisément, ceci signifie qu'il nous faudra se placer au voisinage de l'objet à segmenter afin d'être sûr de trouver le minimum local qui nous intéresse. Cette considération a amené certains auteurs comme Cohen [Coh93] à transposer l'équation initialement stationnaire en une équation évolutive de type parabolique, de la forme:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - (\alpha v_s)_s + (\beta v_{ss})_{ss} = f(v) \\ \text{condition initiale} \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

La fonction  $f$  n'étant pas linéaire, l'équation (7) ne l'est pas non plus, la résolution de (7) va donc se faire de manière itérative dans laquelle on calcule  $v^{(n+1)}$  à partir des itérés précédents  $v^{(n)}, \dots$

En pratique on calcule  $f$  appliquée à l'itération précédente. On va donc considérer  $f$  dépendante à la fois de  $t$  et de  $s$  comme l'ont fait remarquer L. et I.Cohen [Coh90a], au lieu d'être dépendante de  $v$ . De ce fait, l'équation (7) devient:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - (\alpha v_s)_s + (\beta v_{ss})_{ss} = f(s, t) \\ \text{condition initiale} \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

Dans cette partie, nous allons étudier trois types de snakes:

- Snakes à extrémités fixes: ce sont des courbes ouvertes dont on a fixé les extrémités ainsi que leurs directions à certaines valeurs bien spécifiques que l'on va prendre, par souci de simplicité, égales à 0.

- Snakes à extrémités libres: ce sont des courbes ouvertes que l'on va laisser évoluer pour détecter des portions de frontières, et donc on ne peut leur imposer de valeurs ni aux extrémités, ni aux directions associées. On va donc choisir des conditions aux limites annulant les dérivées seconde et troisième aux extrémités pour leur imposer le moins de contraintes possible dans leurs déplacements.
- Snakes fermés: ce sont des courbes fermées qui vont évoluer pour détecter des contours fermés (le premier point est égal au dernier point ainsi que leurs dérivées) ou des régions dans l'image.

On se ramène à une composante pour étudier l'équation vectorielle (7) du fait que le système peut être décomposé, et on considère que  $v$  désigne une des coordonnées  $x$  ou  $y$ .

En notant  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire dans  $L^2]0, 1[$  et en multipliant les deux membres de (7) par  $u$  puis en intégrant sur  $]0, 1[$  on obtient formellement:

$$\frac{d}{dt}(v, u) + \int_0^1 (\alpha v' u' + \beta v'' u'') ds - [\beta v'' u']_0^1 - [\alpha v' u]_0^1 + [(\beta v'')' u]_0^1 = (f, u).$$

Notons  $I$  l'intervalle  $]0, 1[$  et  $a(v, u)$  la forme bilinéaire symétrique définie par:

$$a(v, u) = \int_0^1 (\alpha v' u' + \beta v'' u'') ds$$

On se ramène alors au problème équivalent:

Trouver un espace  $V$  adéquat traduisant les conditions aux limites de la solution recherchée et permettant de passer au problème variationnel suivant:

Déterminer  $v : t \in [0, T] \longrightarrow v(t) \in V$  tel que pour tout  $u$  dans  $V$  on ait:

$$(9) \quad \frac{d}{dt}(v(t), u) + a(v(t), u) = (f(t), u).$$

$[0, T]$  désigne l'intervalle de temps où l'on cherche la solution.

La dérivée est prise au sens des distributions, la donnée initiale est dans  $L^2(I)$  espace de fonctions de carré intégrable sur  $I$ , tandis que la fonction  $f$  est dans  $L^2(0, T; L^2(I))$  espace de fonctions de carré intégrable sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $L^2(I)$ .

Il reste maintenant à préciser l'espace où l'on travaille pour démontrer un résultat d'existence de la solution pour les trois types de snakes. En effet le choix de l'espace  $V$  dépend du type de snakes choisi donc des conditions aux limites imposées. Si l'on choisit par exemple les snakes à extrémités fixes (resp. les snakes fermés), on prend alors pour espace  $V$  l'espace  $H_0^2(I)$  (resp.  $H_p^2(I)$ ) avec les notations habituelles:

$H_0^2(I)$  est l'ensemble des fonctions de  $L^2(I)$  dont les dérivées jusqu'à l'ordre deux appartiennent à  $L^2(I)$  et s'annulent ainsi que leurs dérivées premières en 0 et en 1.

$H_p^2(I)$  est l'ensemble des fonctions de  $L^2(I)$  périodiques sur  $]0, 1[$ , ainsi que leurs dérivées première et seconde.

Par contre pour les snakes à extrémités libres et étant donné les conditions imposées, un calcul simple montre que l'équivalence entre les deux problèmes ci-dessus n'a lieu que si la fonction  $\alpha$  s'annule aux bords, et dans ce cas on choisit l'espace suivant:  $V = \{v \in H^4(I) \text{ tel que } v'' \in H_0^2(I)\}$ . A signaler que cette condition n'a pas été imposée par Berger quand elle a proposée sa matrice.

Dans le cas des snakes à extrémités fixes et lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont minorés par des constantes positives, L. et I. Cohen [Coh90a] ont montré l'existence et l'unicité d'une solution  $v$  de (8) satisfaisant:

$$v \in L^2(0, T; H^2(I)) \cap C^0(0, T; L^2(I)).$$

Ceci est une application immédiate au théorème de Lax-Milgram du fait de la coercivité de la forme bilinéaire  $a(.,.)$  dans l'espace considéré qui est  $H_0^2(I)$ .

Mais il se trouve que les cas les plus traités en pratique sont les snakes fermés et les snakes à extrémités libres pour lesquels ce résultat d'existence et d'unicité n'est évidemment pas valable en raison des conditions aux limites qui sont imposées.

Dans ces cas, nous avons pu montrer l'existence d'une solution du problème (8) qui n'est pas unique comme on le verra par la suite.

**Théorème 2.3** *Soit  $V = \{u \in H^4(I), u'' \in H_0^2(I)\}$ , pour les snakes à extrémités libres, si  $\alpha$  s'annule au bord et est minorée par une constante positive, alors il existe une solution  $v$  du problème (9) vérifiant:*

$$v \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; L^2(I)).$$

On va donner une démonstration assez brève de ce théorème en se ramenant au théorème de Lax-Milgram.

**Démonstration :**

Soit  $V = \{u \in H^4(I), u'' \in H_0^2(I)\}$  et soit  $u$  un élément de  $V$  vérifiant  $a(u,u)=0$ , on a alors  $u' = 0$  et  $u'' = 0$ . Introduisons alors la relation d'équivalence  $R$  définie sur  $V$  par:

$$u_1 R u_2 \iff \exists \text{ une constante } c \text{ telle que } u_1 - u_2 = c.$$

Il est facile de vérifier que c'est une relation d'équivalence, ce qui nous permet de parler de l'espace quotient.

En effet, notons  $\tilde{V}$  l'espace quotient de  $V$  par  $R$ , et  $\bar{u}$  la classe de  $u$ , alors pour  $u_1$  et  $u_2$  dans  $V$ , il est facile de montrer que l'on a:

$$a(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = a(u_1, u_2).$$

Dans  $\tilde{V}$ , on a  $a(\bar{u}, \bar{u}) = 0$  entraîne  $\bar{u} = 0$ , de sorte que la forme bilinéaire  $a(.,.)$  devient maintenant coercive dans  $\tilde{V}$  et on en conclut, d'après le théorème de Lax-Milgram l'existence et l'unicité de la solution dans  $\tilde{V}$ . On en déduit l'existence dans  $V$  et l'unicité à une translation près. ■

Evidemment la démonstration reste valable pour le cas des snakes fermés, et ceci sans imposer dans les hypothèses du théorème la nullité de la fonction  $\alpha$  aux bords de l'intervalle  $I$  puisqu'on a l'équivalence entre le problème initial et le problème variationnel.

Bien entendu dans le cas des snakes à extrémités libres, le fait d'imposer à  $\alpha$  d'être nulle aux bords de l'intervalle  $I$ , va changer l'expression de la matrice  $A$  proposée par Berger [Ber91].

### 2.2.5 Résolution de l'équation et évolution de la courbe

Ainsi, partant d'une courbe initiale positionnée au voisinage du minimum local à déterminer - ce qui en pratique revient à placer le contour initial assez proche de l'objet dont on cherche à extraire la frontière - on laisse évoluer la courbe jusqu'à

ce qu'elle coïncide avec le contour de l'objet. Ceci rejoint le schéma de résolution proposé par Kass en prenant  $\theta = \frac{1}{\Delta t}$  où  $\Delta t$  est le pas temporel.

La résolution de cette équation peut se faire soit par différences finies, soit par éléments finis comme l'ont proposé L. et I. Cohen [Coh90a] pour obtenir pour les trois types de snakes, une matrice symétrique heptadiagonale. On peut également utiliser un schéma numérique à résolutions spatiale et temporelle adaptées comme celui suggéré par [Bac] pour les équations aux dérivées partielles.

Nous avons choisi, tout comme dans le cas pseudo-stationnaire, une résolution par différences finies suivant deux schémas.

Un premier schéma implicite de la forme:

$$\begin{aligned} h^4 \frac{v_i^{t+\Delta t} - v_i^t}{\Delta t} + \beta_{i-1} v_{i-2}^{t+\Delta t} - (2\beta_{i-1} + 2\beta_i + h^2 \alpha_i) v_{i-1}^{t+\Delta t} \\ + (\beta_{i-1} + 4\beta_i + \alpha_{i+1} h^2 + h^2 \alpha_i) v_i^{t+\Delta t} + (-2\beta_{i+1} - 2\beta_i - h^2 \alpha_{i+1}) v_{i+1}^{t+\Delta t} \\ + \beta_{i+1} v_{i+2}^{t+\Delta t} = h^4 f_i^t. \end{aligned}$$

Un second schéma explicite donné par:

$$\begin{aligned} h^4 \frac{v_i^{t+\Delta t} - v_i^t}{\Delta t} + \beta_{i-1} v_{i-2}^t - (2\beta_{i-1} + 2\beta_i + h^2 \alpha_i) v_{i-1}^t \\ + (\beta_{i-1} + 4\beta_i + \alpha_{i+1} h^2 + h^2 \alpha_i) v_i^t + (-2\beta_{i+1} - 2\beta_i - h^2 \alpha_{i+1}) v_{i+1}^t \\ + \beta_{i+1} v_{i+2}^t = h^4 f_i^t. \end{aligned}$$

Le pas de discrétisation  $h$  est constant pour toutes les itérations. Mais, du fait que les points de la courbe lors de son évolution ne restent pas à une distance constante, il faudrait en toute rigueur après chaque itération rediscrétiser la courbe afin de garder un pas constant  $h$ . Ceci peut entraîner une modification du nombre de points et par suite un changement de la taille de la matrice ce qui, pour un schéma implicite

nous conduit encore à une inversion de la matrice, inversion réalisée en utilisant par exemple une décomposition de type LU.

Le schéma explicite est certes moins stable que le schéma implicite, mais il a l'avantage de ne pas nécessiter d'inversion de matrice et de donner directement les nouveaux points en fonction des anciens permettant ainsi de rediscrétiser la courbe à chaque itération.

Une autre raison en faveur de la rediscrétisation de la courbe vient du phénomène d'accumulation et d'agglomération des points de la courbe dans les pixels à fort gradient que l'on observe pendant l'évolution de la courbe et par conséquent pour avoir une courbe représentant fidèlement le contour de l'objet, il faut avoir une contribution égale de tous ses points.

Les figures (3), (4) et (5) montrent des résultats obtenus pour chaque type de snakes en montrant l'initialisation et le contour final obtenu.



FIG. 3 - Initialisation, évolution et résultat pour un snake à extrémités fixes.

En l'absence de  $f$  dans l'équation (8), c'est à dire lorsque le snake évolue sur un terrain plat où le gradient d'image est nul, il est soumis à l'équation suivante:

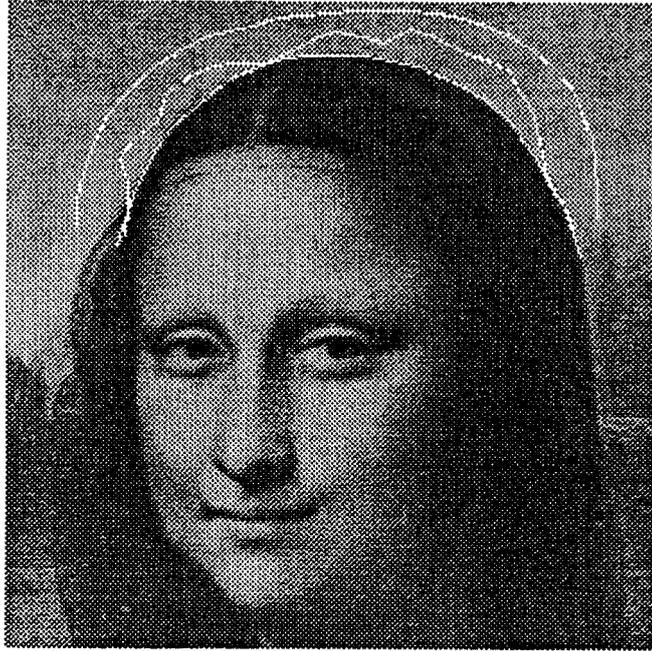


FIG. 4 - Initialisation et résultat pour un snake à extrémités libres.

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha v_{ss} + \beta v_{ssss} = 0 \\ \text{condition initiale} \\ \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Sa tendance naturelle alors, est de se rétracter puisqu'il n'est soumis qu'à son énergie interne, et à aucune force extérieure. Dans ce cas, pour les snakes fermés et les snakes à extrémités libres, les deux courbes tendent vers un point.

Dans le cas des snakes à extrémités fixes, l'évolution se fait vers le segment reliant ces extrémités.

En effet la proposition suivante montre que contrairement au résultat de I. Cohen [Coh92c], affirmant que la courbe tend vers un cercle en l'absence du gradient d'image, les snakes fermés convergent vers un point.

**Proposition 2.1** *Soit  $v_0$  une courbe fermée soumise à l'équation (10) alors cette courbe tend vers un point quand  $t$  tend vers l'infini.*

**Démonstration :**

A chaque instant  $t$ , représentons un point de la courbe par  $v(s,t)=(x(s,t),y(s,t))$  et raisonnons sur une des deux composantes, par exemple  $x(s,t)$ :

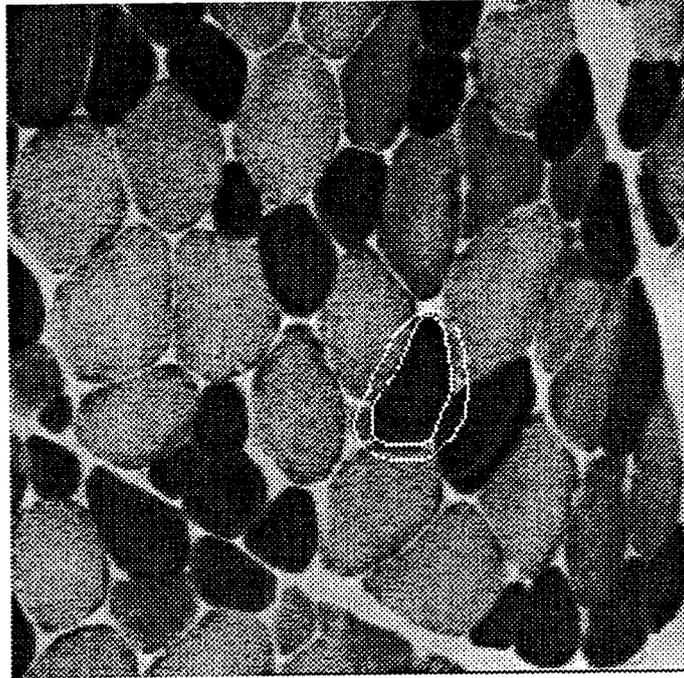


FIG. 5 - Initialisation et résultat pour un snake fermé.

Du fait de la périodicité selon la variable  $s$  de  $x(s, t)$ , on peut écrire sa représentation en série de Fourier:

$$x(s, t) = \sum_{n \geq 1} a_n(t) \cos(ns) + b_n(t) \sin(ns) + \frac{a_0(t)}{2}$$

$$\forall s \in [0, 2\pi] \text{ et } \forall t \geq 0.$$

On va utiliser les conventions suivantes:  $\dot{\phantom{x}}$  désigne la dérivée par rapport au temps  $t$ , et  $\prime$  désigne la dérivée par rapport à la variable spatiale  $s$ .

$$\dot{x}(s, t) = \sum_{n \geq 1} \dot{a}_n(t) \cos(ns) + \dot{b}_n(t) \sin(ns) + \frac{\dot{a}_0(t)}{2}.$$

$$x'(s, t) = \sum_{n \geq 1} -n a_n(t) \sin(ns) + n b_n(t) \cos(ns).$$

$$x''(s, t) = \sum_{n \geq 1} -n^2 a_n(t) \cos(ns) - n^2 b_n(t) \sin(ns).$$

$$x^{(3)}(s, t) = \sum_{n \geq 1} n^3 a_n(t) \sin(ns) - n^3 b_n(t) \cos(ns).$$

$$x^{(4)}(s, t) = \sum_{n \geq 1} n^4 a_n(t) \cos(ns) + n^4 b_n(t) \sin(ns).$$

Injectons ces expressions dans l'équation (10), on en déduit:

$$\dot{a}_n(t) = -(\alpha n^2 + \beta n^4) a_n(t) \text{ et } \dot{b}_n(t) = -(\alpha n^2 + \beta n^4) b_n(t) \quad \forall n \geq 1.$$

Par ailleurs on a  $\dot{a}_0(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ .

D'où  $a_0(t) = a_0(0)$ ,  $a_n(t) = a_n(0) e^{-(\alpha n^2 + \beta n^4)t}$  et  $b_n(t) = b_n(0) e^{-(\alpha n^2 + \beta n^4)t}$ .

En définitive on a  $x(s, t)$  qui s'écrit sous la forme:

$$x(s, t) = \sum_{n \geq 1} (a_n(0) \cos(ns) + b_n(0) \sin(ns)) e^{-(\alpha n^2 + \beta n^4)t} + \frac{a_0(t)}{2}$$

Quand  $t$  tend vers l'infini,  $x(s, t)$  se comporte comme  $\frac{a_0(t)}{2}$ , de sorte que la courbe tend vers un point puisque  $a_0(t) = a_0(0) \quad \forall t \geq 0$ . ■

Donc, il est tout à fait naturel de considérer une initialisation du contour à l'extérieur de l'objet à segmenter afin que les forces internes le poussent vers le contour de l'objet, et afin que les forces extérieures dues à l'image arrêtent cette évolution.

La figure (6) illustre cette proposition, par l'évolution d'un snake fermé dans une image à valeurs constantes.

## 2.2.6 Limites du modèle de Kass et présentation de modèles dérivés

Le modèle initial introduit par Kass a certains avantages, comme celui de combiner deux opérations en une seule à savoir la détection et le chaînage, de plus il offre la possibilité d'avoir un contour régulier. En effet la connexité de la courbe permet d'intégrer de manière implicite l'information le long de la courbe sans avoir à chercher comment il faut connecter les points obtenus. Il offre en outre la possibilité d'introduire de l'information là où elle est manquante ou difficile à prendre en compte comme par exemple celle de compléter deux contours d'objets proches l'un de l'autre comme cela est illustré en figure (7) (performance que l'on ne peut pas avoir par un détecteur de contours classique).

En revanche, il souffre de certains inconvénients telle l'instabilité numérique, la tendance des points à s'accumuler dans des portions de contour à forts gradients due

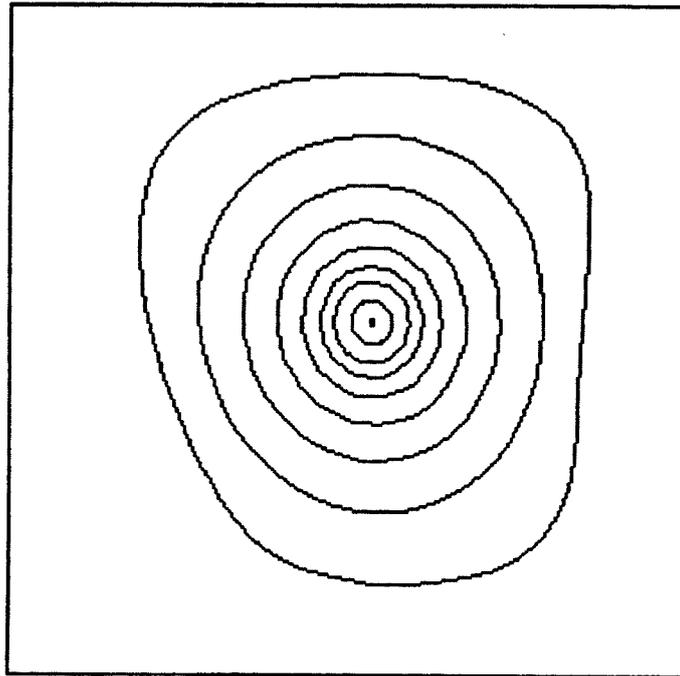


FIG. 6 - Evolution d'un snake fermé vers un point en l'absence d'énergie externe.

à l'absence d'une contrainte de distance fixe ou légèrement flexible entre les points pour le schéma numérique proposé. De plus aucune indication n'est donnée sur le choix des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , ce soin étant souvent laissé à l'utilisateur en fonction des caractéristiques du contour de l'objet.

Une amélioration de ce modèle a été proposée par L. Cohen [Coh91] en considérant le modèle comme un ballon que l'on peut gonfler, donc soumis à une force de pression dirigée suivant la normale pour lui permettre de se propager vers le contour de l'objet et ceci même lorsque l'utilisateur procède à une initialisation grossière relativement éloignée de l'objet. Ceci s'explique par le fait que la force suivant la normale a pour rôle de propager la courbe vers l'objet, tout en évitant qu'il ne soit attiré par les points de forts gradients d'intensité, correspondant soit au bruit présent dans l'image, soit à la texture qui tous deux sont considérés comme des éléments parasites.

D'autre part pour éviter les instabilités dues au champ de forces extérieures, et pour que la force d'expansion suivant la normale et la force d'image soient à contributions égales, L. Cohen a aussi proposé une normalisation et une pondération de ces forces par des coefficients assez proches de sorte que l'équation d'évolution

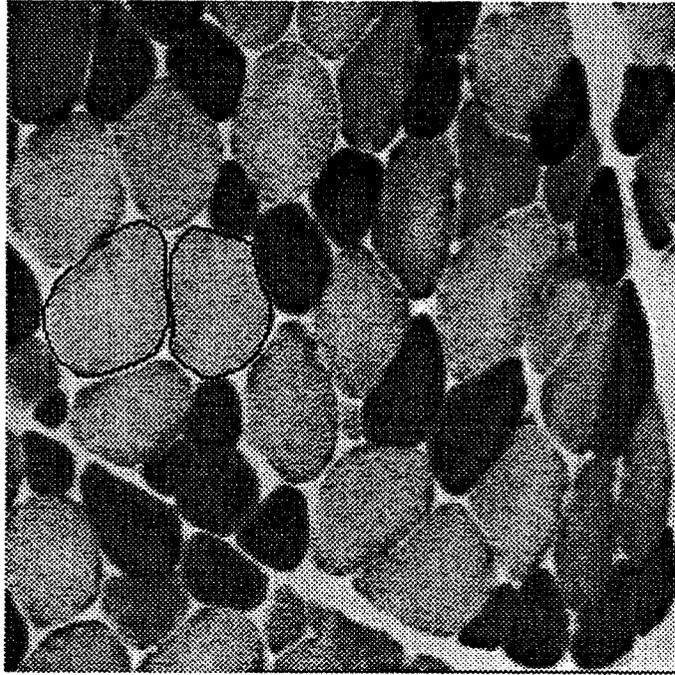


FIG. 7 - Frontière entre deux cellules bénéficiant de l'ajout de l'information, avantage des contours actifs.

devienne:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - (\alpha v_s)_s + (\beta v_{ss})_{ss} = k_1 \vec{n} + k_2 \frac{\vec{f}}{\|\vec{f}\|} \\ \text{condition initiale} \\ \text{conditions aux limites} \end{array} \right.$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont deux constantes de même ordre de grandeur, inférieures à l'unité pondérant respectivement la normale et la force du gradient d'image.

Suivant le signe de  $k_1$ , quand on choisit une orientation de la normale vers l'extérieur, on a soit une contraction (lorsque  $k_1$  est négatif), soit une expansion (quand  $k_1$  est positif) du snake vers le contour de l'objet. Ceci permet donc d'initialiser le snake à l'intérieur de l'objet, et de le faire évoluer vers sa frontière.

En effet, c'est la force suivant la normale qui se charge de contrebalancer la tendance naturelle du snake à se rétracter.

D'autres auteurs ont proposé de corriger ces instabilités en agissant sur  $\Delta t$  soit de manière interactive par l'utilisateur [Kas88], soit par l'expression suivante proposée

par Fua [Fua89]:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{(2n)}}{\delta} |\nabla E(v_{t-1})|.$$

Où  $n$  et  $\delta$  désignent respectivement le nombre de points de la courbe et le déplacement choisi. Ceci nécessite à chaque itération l'inversion de la matrice  $A$ .

Rougon [Rou93] a généralisé l'introduction de la force suivant la normale en un modèle de snakes gonflables, en ajoutant à l'énergie interne un nouveau terme de sorte que l'énergie totale à minimiser devienne:

$$E(C) = \int_a^b \alpha(s) \|v_s(s)\|^2 + \beta(s) \|v_{ss}(s)\|^2 - \det(K(v), v_s) - \|\nabla I(v(s))\|^2 ds.$$

Pour  $K(v) = kv$  où  $k$  est une constante, et pour une courbe fermée, ceci revient à maximiser ou à minimiser selon le signe de  $k$  l'aire de la région délimitée par la courbe en vertu du théorème intégral de Green-Riemann. En effet si  $A(C)$  désigne cette aire on a:

$$A(C) = \frac{1}{2} \int_a^b \det(v, v_s) ds.$$

Toujours pour  $K(v) = k_1 v$  avec  $k_1$  constante, on obtient la force d'expansion suivant la normale introduite précédemment par L. Cohen. D'autant plus que pour éviter des complications de calcul et une nonlinéarité du problème d'optimisation, Rougon a préféré voir cette force suivant la normale comme une force extérieure plutôt que d'exprimer la normale en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  dans l'équation d'Euler régissant le mouvement.

D'autre part, pour calculer le potentiel  $P = -|\nabla I|^2$ , Cohen propose de trouver les points de contours en appliquant à l'image un détecteur de contour [Der87] suivi d'une élimination selon un procédé de seuillage par hystérésis. L'image binaire est ensuite lissée par un filtre gaussien ce qui permet d'une part de ne pas tenir compte des points éloignés du contour et d'autre part d'annuler la contribution de cette force aux points du contour.

D'autres suggestions ont été émises pour le calcul du potentiel de l'image en appliquant dans un premier temps un détecteur de contour à l'image. Ensuite on applique à l'image obtenue un masque de convolution caractérisant la métrique choisie afin de générer une carte de distance (euclidienne, chanfrein). On obtient alors un potentiel de type:

$$P(v) = -e^{-d(v)^2}$$

où  $d(v)$  est la distance de la courbe au point du contour le plus proche.

Certains auteurs [Ami88] ont proposé la minimisation de l'énergie en utilisant la programmation dynamique permettant ainsi d'avoir une plus grande stabilité numérique, et donnant la possibilité d'ajouter aux contraintes internes inhérentes à la formulation de l'énergie interne, ce qu'ils ont appelé les fortes contraintes, qui peuvent guider le snake pendant son évolution et tenir compte de certaines informations supplémentaires. Ainsi les points ont la possibilité de se déplacer sur une grille discrète, ce qui n'est pas le cas dans le modèle de Kass.

Il est à signaler que la complexité de l'algorithme proposé par Amini est en  $O(nm^3)$  où  $n$  est le nombre de points et  $m$  la taille du voisinage au sein duquel un point peut se mouvoir durant une itération. Une amélioration du temps d'exécution a été apportée par [Wil92] qui, en comparant différentes expressions de la courbure, expressions discrètes et continues, a proposé un algorithme plus rapide d'une complexité en  $O(nm)$ .

Des modèles assez proches du modèle initial de Kass ont été élaborés, pour pallier ces restrictions et lui apporter des améliorations, comme on l'a vu avec entre autres Cohen, Rougon,... pour ne citer que les plus proches dans l'esprit.

On peut également mentionner le modèle de croissance des snakes proposé par Berger [Ber91], qui consiste à faire évoluer la courbe par l'algorithme classique, puis à l'allonger en prolongeant ses extrémités dans les directions des tangentes. Ensuite on considère cette courbe comme une nouvelle donnée initiale et on réitère l'algorithme jusqu'à ce qu'on ne puisse plus procéder à l'allongement.

On peut également évoquer le modèle des B-snakes proposé par Menet [Men90]. Ce modèle consiste à décomposer la courbe dans une base B-spline, et à faire évoluer la courbe par l'intermédiaire de ses points de contrôle. Ceci a pour avantage, d'une part de réduire la complexité algorithmique du problème, et d'autre part d'offrir la possibilité d'insérer des discontinuités de tangentes en dédoublant les points de contrôle aux points de discontinuités.

Il est à signaler que l'usage des snakes ne se borne pas uniquement à la détection de contours, mais on peut trouver d'autres applications comme la description des formes par squelettisation introduite par Leymarie [Ley90] qui a considéré le processus de squelettisation des images binaires comme la propagation d'un front d'onde (ou un

feu de prairie) en partant du bord de l'objet vers son intérieur en faisant évoluer une courbe qui va converger vers une courbe finale qui sera le squelette de l'objet.

### 2.2.7 Adaptabilité des paramètres

La fonction  $\alpha$  agit sur la rigidité de la courbe alors que la fonction  $\beta$  influence sa courbure, mais la plupart du temps, on prend les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  de l'énergie interne du snake constants pour les raisons qu'on a précitées.

Donc leur choix est primordial dans la mesure où il va participer en compagnie du gradient de l'image à déterminer la forme du contour obtenu ainsi que sa régularité. Kass et ses collaborateurs ont proposé une adaptabilité de ces paramètres par l'utilisateur d'une manière ad hoc, alors que d'autres auteurs comme I. Cohen [Coh93], ont proposé d'utiliser la décomposition de la solution dans la base des éléments finis d'Hermite pour trouver  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction du gradient de potentiel d'attraction  $P$ , de ses dérivées par rapport à  $s$ , de la matrice de rigidité  $A$  et des dérivées de  $v$  par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ . Ils aboutissent aux formulations suivantes:

$$\sqrt{\alpha(ih)} = -\frac{1}{2\left(\frac{\partial(\nabla P(v))}{\partial s}\right)_i\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_i}(\nabla P(v))_i\left(A\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)_i$$

$$\sqrt{\beta(ih)} = -\frac{1}{2\left(\frac{\partial^2(\nabla P(v))}{\partial s^2}\right)_i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_i}(\nabla P(v))_i\left(A\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)_i$$

où  $h$  est le pas de discrétisation de la courbe.

Les expressions obtenues illustrent bien la signification physique de ces paramètres à savoir que  $\alpha$  contrôle l'élasticité de la courbe, et  $\beta$  sa courbure et sa résistance à se tordre.

## 2.3 Modèle géométrique intrinsèque

### 2.3.1 Modélisation

Parmi les inconvénients du modèle des snakes, on peut mentionner entre autres sa dépendance vis à vis de la paramétrisation choisie, comme cela a été souligné auparavant. Aussi Caselles, Catté, Coll et Dibos [Cas92], ont introduit un nouveau

modèle intrinsèque en considérant les contours comme les frontières des courbes de niveau d'une certaine fonction  $u$ , et transposant de ce fait l'étude des contours à celle de la fonction  $u$ .

Plus précisément, Caselles et ses collaborateurs ont proposé un nouveau modèle de contours actifs inspiré du travail d'Evans et Spruck [Eva91] sur l'évolution des courbes de niveau dans la direction de la normale avec une vitesse dépendant de la courbure moyenne. L'équation d'une telle évolution peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2$$

Le modèle proposé pour la détection de contours, satisfait à l'équation suivante:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(x) |\nabla u| \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nu \right) & (t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2. \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec:

$$g(x) = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma * g_0|^2}$$

$G_\sigma * g_0$  est la convolution de l'image  $g_0$  avec une gaussienne pour atténuer l'influence du bruit,  $u_0$  est la donnée initiale prise comme une version régulière de la fonction  $1 - \chi_C$  avec  $\chi_C$  la fonction caractéristique d'un ensemble  $C$  contenant l'objet  $O$  dont on cherche le contour.

Le terme  $\nu$  est introduit pour générer une force dans la direction normale à la courbe de niveau, alors que la fonction  $g$  contrôle la vitesse de l'évolution et l'arrête lorsque le gradient devient élevé.

On suppose que  $u(t, x, y)$  est une fonction de classe  $C^2$ . Soit  $k$  un réel, et on définit la courbe  $\partial C$  par:

$$\partial C = \{x : u(t, x) = k\}$$

En paramétrant  $\partial C$  par son abscisse curviligne, on montre facilement que la courbure algébrique  $\rho$  en un point quelconque de  $\partial C$  est donnée par:

$$\rho = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

Le terme  $\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$  assure que le niveau de gris en un point de  $\partial C$  augmente proportionnellement à la courbure algébrique en ce même point. Ceci a pour effet de régulariser le modèle comme le fait l'énergie interne pour le modèle des snakes.

La constante  $\nu$  est choisie de façon à ce que le terme  $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \nu$  reste toujours positif, et peut être interprétée comme une force poussant  $\partial C$  vers l'objet  $O$  quand la courbure devient négative ou nulle.

Quant au terme  $|\nabla u|$ , il contrôle ce qui se passe à l'intérieur et à l'extérieur de domaine  $C$ . Ainsi la fonction  $u$  fait varier rapidement ses niveaux de gris dans l'objet alors qu'au voisinage de  $\partial C$ , la variation est plus lente.

De ce fait, le niveau de gris en un point de  $\partial C$  va croître de manière à ce que  $\partial C$  reproduise la frontière de l'objet  $O$ .

Après avoir vu l'interprétation géométrique du modèle, on va maintenant voir des résultats d'existence et d'unicité de la solution de l'équation (12) issus des travaux des auteurs précédemment cités pour des données dans des espaces convenables et dont les démonstrations figurent dans [Cas92].

L'équation (12) peut s'écrire sous la forme:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - g(x)a_{ij}(u)\partial_{ij}u - \nu g(x)|\nabla u| = 0 & (t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2. \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

avec  $a_{ij}(p) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2}$  si  $p \neq 0$ .

$g(x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ , et  $g(x) \geq 0$  avec  $g(x)^{\frac{1}{2}} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ .

$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$  désigne l'espace des fonctions lipschitziennes bornées sur  $\mathbb{R}^2$ , et on a utilisé la convention d'Einstein pour la sommation.

Puisque le support des images est fini, l'équation (13) doit être résolue dans un carré (par exemple  $[0, 1]^2$ ), mais elle sera étendue à  $\mathbb{R}^2$  par extension périodique de même que la condition initiale  $u_0$  et la donnée  $g(x)$ .

La définition d'une solution de viscosité de (13) est donnée en fonction de celle d'une solution inférieure au sens de viscosité que l'on rappelle ci-dessous (voir [Cas92] et les références qui y sont citées).

**Définition 2.4** Soit  $u \in C([0, T] \times \mathbb{R}^2)$  pour  $T \in ]0, +\infty[$ , on dit que  $u$  est une solution inférieure de viscosité de (13) si:

Pour toute fonction  $\phi \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ , et pour tout maximum local  $(t_0, x_0) \in ]0, T] \times \mathbb{R}^2$  de  $(u - \phi)$  on a :

- Si  $\nabla \phi(t_0, x_0) \neq 0$  alors:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, x_0) - g(x_0) a_{ij}(\nabla \phi(t_0, x_0)) \partial_{ij} \phi(t_0, x_0) - \nu g(x_0) |\nabla \phi(t_0, x_0)| \leq 0.$$

- Si  $\nabla \phi(t_0, x_0) = 0$  alors:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, x_0) - g(x_0) \limsup_{p \rightarrow 0} a_{ij}(p) \partial_{ij} \phi(t_0, x_0) \leq 0.$$

- $u(0, x) \leq u_0(x) \forall x \in \mathbb{R}^2$ .

D'une manière similaire on peut définir une solution supérieure de viscosité en remplaçant dans la définition ci-dessus "maximum local" par "minimum local", " $\leq 0$ " par " $\geq 0$ " et "lim sup" par "lim inf".

Enfin une solution de viscosité est une fonction qui est à la fois solution inférieure et solution supérieure.

On énonce maintenant le théorème assurant l'existence et l'unicité de la solution toujours au sens de viscosité.

**Théorème 2.4** Soit  $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ , alors:

- L'équation (13) admet une solution unique au sens de viscosité  $u \in C([0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2))$  pour tout  $T < \infty$  et satisfait:

$$\inf_{\mathbb{R}^2} u_0 \leq u(t, x) \leq \sup_{\mathbb{R}^2} u_0.$$

- Soit  $v \in C([0, +\infty[ \times \mathbb{R}^2)$  la solution de (13) associée à la donnée initiale  $v_0$ , alors pour tout  $T \in [0, +\infty[$  on a:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Ainsi ce théorème assure non seulement l'existence et l'unicité de la solution de (13), mais démontre également que l'erreur pendant l'évolution reste inférieure à celle commise au départ sur la donnée initiale.

Un autre résultat montre que moyennant certaines hypothèses, le niveau de gris  $u$  reste nul pour tout point du contour cherché de l'objet, et pendant toute son évolution au cours du temps.

**Théorème 2.5** Supposons que  $\Gamma \equiv x \in [0, 1]^2 : g(x) = 0$  est une courbe de Jordan simple, et que  $u_0(x) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$  est périodique sur  $[0, 1]^2$  s'annulant sur un voisinage ouvert de  $\Gamma$ .

Soit  $u(t, x)$  la solution de (13) donnée par le théorème précédent, alors on a :

$$u(t, x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma, \forall t \geq 0.$$

La démonstration repose sur des résultats partiels prouvés dans [Cra84], et figure entièrement dans [Cas92].

Il reste à montrer que la fonction  $u$  épouse asymptotiquement le contour désiré. En effet, en supposant que la courbe  $\Gamma$  est une courbe simple de Jordan, comme cela a été le cas dans le théorème précédent, et que la courbe  $\Gamma$  est de classe  $C^2$ , elle partage  $[0, 1]^2$  en deux parties connexes, l'intérieur  $I(\Gamma)$  et l'extérieur  $E(\Gamma)$ . La donnée initiale est prise dans  $C^2(\mathbb{R}^2)$  encore une fois périodique sur  $[0, 1]^2$  s'annulant sur un voisinage ouvert de  $\Gamma \cup I(\Gamma)$  et dont les courbes de niveau sont à courbure uniformément bornée.

On note  $\Gamma(t)$  la frontière de l'ensemble  $G(t) = \{x \in [0, 1]^2 : u(t, x) = 0\}$ .

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 2.6** *Pour  $\nu$  suffisamment grand, la courbe  $\Gamma(t)$  converge pour la distance de Hausdorff vers  $\Gamma$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

Donc l'évolution de la frontière de la courbe de niveau tend vers le contour cherché pour un choix de  $\nu$  suffisamment grand, tout en permettant au terme  $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \nu$  de rester positif comme on l'a signalé précédemment.

### 2.3.2 Aspects numériques

On va donner maintenant une très brève description du schéma numérique qui a été proposé par [Cas92] et qui est inspiré de celui utilisé par [Alv92b].

La discrétisation de l'opérateur dégénéré de diffusion repose sur l'introduction de la coordonnée  $\xi$  dans la direction de diffusion orthogonale au gradient et qui est donnée par :

$$\xi = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad \text{avec} \quad (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}.$$

Si on désigne par  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n \leq \pi$  les  $n$  variables angulaires, et par  $x_1, \dots, x_n$ , les coordonnées orthogonales aux directions données par les  $\theta_j$  et définies

par:  $x_j = -x \sin \theta_j + y \cos \theta_j$ , alors on approche l'opérateur de diffusion  $|\nabla u| \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$  par:

$$Au = \sum_{j=1}^n f_j\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

où les  $f_j$  sont positives, régulières, forment asymptotiquement une partition de l'unité, et ne sont désignées à être "actives" que lorsque  $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  est proche de  $\eta_j$ .

L'approximation est stable dans le sens où l'opérateur d'approximation est aussi elliptique et tend à représenter parfaitement toutes les directions de diffusion (voir les propositions 1 et 2 dans [Alv92b]).

Choisissons les directions  $\theta_j$  comme suit:  $\theta_j = \frac{(j-1)\pi}{2N}$  où  $j=1, \dots, 2N$ , et prenons pour  $f$  une fonction paire, régulière et à support dans  $[-\frac{\pi}{2N}, +\frac{\pi}{2N}]$  vérifiant:

$$f(\pi/2N - \theta) + f(\theta) = 1$$

Alors on définit les  $f_j(\theta)$  par  $f_j(\theta) = f(\theta - \theta_j)$ , et on applique l'opérateur d'approximation signalé plus haut.

On obtient alors un système linéaire que l'on peut résoudre par une méthode itérative comme la relaxation.

Pour conclure ce paragraphe, il est à signaler que la discrétisation de l'équation (12) n'est pas aisée car l'opérateur de diffusion  $|\nabla u| \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$  est fortement anisotrope, et ceci rend sa résolution un peu délicate à mettre en oeuvre.

### 2.3.3 Discussion du modèle

Ce modèle permet donc de s'affranchir de la dépendance paramétrique du contour, dans la mesure où il possède une paramétrisation intrinsèque, et offre l'avantage d'une étude mathématique rigoureuse comme on l'a vu (il satisfait entre autres au principe du maximum), permettant d'avoir l'existence et l'unicité de la solution, et dépend de peu de paramètres.

En effet, les paramètres nécessaires à la méthode sont:

- la constante  $\nu$  qui représente le poids de la force appliquée dans la direction de la normale aux courbes de niveau.
- le choix de la courbe de niveau que l'on va suivre pendant son évolution (initialisation).

- enfin, le critère choisi pour arrêter l'évolution de la courbe de niveau de façon à ce qu'elle donne le contour cherché.

La proposition qui a été faite est de comparer le gradient de l'image initiale le long du contour et de s'arrêter quand l'énergie obtenue atteint une certaine valeur préchoisie.

Si  $\gamma_t$  représente l'évolution de la courbe initiale à l'instant  $t$ , alors on prend comme temps d'arrêt la valeur donnée par  $T = \text{Arg } E(\gamma_T)$ .

où  $E(\gamma_T) = \frac{1}{2} E(\gamma_0)$  avec l'énergie suivante:

$$E(\gamma_t) = \frac{1}{L(\gamma_t)} \int_{\gamma_t} |\nabla G_\sigma * g_0(x(s))| ds.$$

Donc le temps d'arrêt est celui pour lequel l'énergie de la courbe associée est égale à la moitié de l'énergie de la courbe initiale  $\gamma_0$ .

Le modèle permet en plus de détecter plusieurs contours à la fois et ceci pour le même coût car les calculs sont faits pour la fonction  $u$  sur tout le support de l'image.

Après avoir vu les avantages de ce modèle, il s'agit aussi de parler de ses inconvénients afin de procéder à une comparaison des différents modèles de contours actifs.

Tout d'abord, ce modèle n'est valable que pour des courbes fermées ce qui limite beaucoup son utilisation par comparaison avec le modèle des snakes et le modèle suivant de la bulle que l'on va voir dans le prochain paragraphe.

Ensuite, la procédure de résolution est assez délicate à mettre en œuvre comparée à la simplicité de celle des snakes vue dans le paragraphe précédent ou à celle de la bulle prochainement décrite (cf 2.4).

Enfin on a envie de traiter les courbes qui sont des objets filiformes dans le plan comme tels, plutôt que de les traiter comme frontières de domaines surfaciques dans le plan. Car si le modèle offre l'avantage de traiter plusieurs contours à la fois sans coût supplémentaire, en revanche quand on veut traiter un seul contour, on est obligé de traiter toute l'image en raison de la conception même du modèle.

## 2.4 Modèle discret de la bulle

### 2.4.1 Modélisation

Après avoir vu deux modèles continus de contours actifs, nous proposons dans ce paragraphe un modèle discret qui est à notre avis mieux adapté à la nature discrète de l'image. Ce modèle est assez similaire dans l'esprit à celui proposé par [Ami88], toutefois l'analogie s'arrête au niveau de la prise en compte de la nature discrète de l'image comme on va le voir.

Soit une courbe polygonale  $C$  représentée par sa liste de sommets discrets  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Toujours dans la même optique, il s'agit de déformer cette courbe pour détecter le contour de l'objet placé à proximité. La déformation de la courbe se fait par l'expansion du sommet réalisant le minimum d'une fonction de coût  $f(v)$  dont l'expression est donnée par:

$$f(v) = \alpha \text{curv}(v) + f_{\text{image}}(v).$$

Où  $\text{curv}$  désigne la courbure au sommet  $v$ ,  $f_{\text{image}}(v)$  représente l'interaction du sommet  $v$  avec l'image, interaction décrite ultérieurement.

Le paramètre  $\alpha$  modélise la raideur de la bulle supposée constante pour tous les sommets de la courbe. Plus ce paramètre est grand, plus la courbe obtenue est régulière.

Ainsi la déformation se fait d'une manière lente et progressive puisqu'à chaque itération, un seul sommet de la courbe est déplacé. En effet, dans un premier temps on procède à l'expansion de tous les sommets suivant la direction de la normale avec un module  $k$  constant, ensuite on cherche le sommet réalisant le minimum de la fonction coût et on procède à son expansion effective.

A ce stade, il faut préciser que la fonction coût  $f$  est l'analogue de l'expression d'énergie globale dans le modèle des snakes. Le terme  $\alpha \text{curv}(v)$  joue le rôle de  $\beta |v''|^2$  dans l'énergie interne du snake et le terme  $f_{\text{image}}(v)$  remplace l'énergie externe.

Quant au terme  $\alpha |v'|^2$  présent dans l'énergie interne du snake et dont le rôle est d'une part d'empêcher la formation de boucles superflues et d'autre part de minimiser la longueur de la courbe, ce terme a été remplacé par des contraintes de distances minimale et maximale entre les sommets que l'on impose pendant l'évolution des sommets.

En effet la distance entre les sommets lors de l'évolution de la courbe peut devenir soit très grande, soit très petite par rapport à la distance initialement choisie sur la courbe de départ. Il faut donc contrôler cette variation de distance en lui imposant de se limiter dans un intervalle donné.

Ainsi, lorsque deux sommets sont à une distance supérieure à la distance maximale autorisée, on insère entre eux un ou plusieurs sommets de manière à respecter la contrainte entre les sommets de la courbe, et de manière analogue, lorsque la distance entre deux sommets devient inférieure à la distance minimale, on élimine un des sommets.

La courbure et la normale en un sommet de la courbe sont calculées de manière discrète comme c'est le cas dans [Wil92] en prenant en considération ses sommets voisins.

Le modèle peut être formalisé de la façon suivante:

Soit  $(I_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une suite de sous ensembles de  $\mathbb{N}$ , à partir de la courbe initiale  $C_0$ , on va trouver une suite de courbes  $(C_t)_{t \in \mathbb{N}}$  donnée par:  $C_t = \{v_i^t, i \in I_t\}$  qui désigne la courbe à l'instant  $t$ .

La courbe  $C_{t+1}$  est donnée en fonction de la courbe  $C_t$  de la manière suivante:

$$v_i^{t+1} - v_i^t = k(v_i^t) \vec{n} \text{ ceci } \forall i \in I_t$$

avec:

$$(14) \quad k(v_i^t) = \begin{cases} k & \text{si } f(v_i^t) = \min\{f(v_j^t), j \in I_t\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où:

$$f(v) = \alpha \text{ curv}(v) + f_{\text{image}}(v).$$

$\alpha$  et  $k$  sont des constantes positives,  $\vec{n}$  est la normale à la courbe,  $\text{curv}(v)$  est la courbure au sommet  $v$ , et enfin  $f_{\text{image}}(v)$  est l'interaction avec l'image au sommet  $v$ , et elle sera décrite au prochain paragraphe.

**Remarque 2.1**  $I_{t+1}$  est différent de  $I_t$  dont la mesure où: lorsque la distance entre deux sommets voisins devient inférieure à une valeur préfixée  $\beta_1$ , on élimine un

sommet, et quand elle devient supérieure à une valeur préfixée  $\beta_2$  on considère leur milieu comme un nouveau sommet de la courbe.

Donc le cardinal de  $I_t$  peut augmenter ou diminuer à chaque itération.

### 2.4.2 Interaction avec l'image

La fonction d'interaction avec l'image est calculée de la façon suivante:

Puisque à chaque itération, seul un sommet se déplace, alors on va chercher un profil souhaité de l'évolution de l'intensité de ce sommet. Si on s'attend à ce que le sommet lors de son évolution passe d'une zone sombre à une zone claire, et que le contour à détecter sépare ces deux régions, alors un exemple de ce profil est donné par la figure 8.

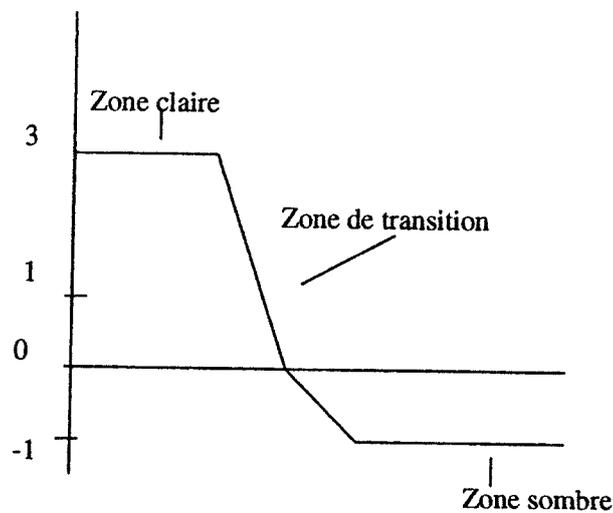


FIG. 8 - Profil d'intensité allant du plus sombre au plus clair.

Pour calculer l'interaction de la courbe avec l'image, on va essayer de maximiser la corrélation avec ce profil de la trajectoire de chaque sommet de la courbe.

A chaque sommet on associe la frontière extérieure de la bande comme cela est illustré dans la figure (9) et on calcule l'intensité moyenne  $ENG(t, v)$  du bord extérieur de la bande  $B_{ext}$  de sorte que nous avons:

$$ENG(t, v) = \frac{\sum_{w \in B_{ext}} I(w)}{L(B_{ext})}$$

où:

$I(w)$  désigne l'intensité de l'image au point  $w$ , et  $L(B_{ext})$  la longueur de la courbe  $B_{ext}$ .

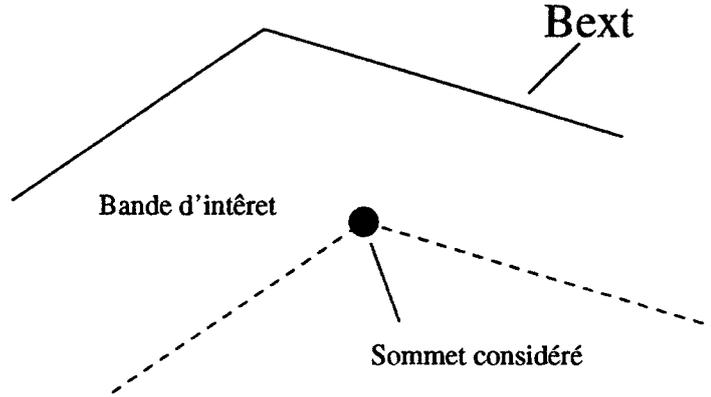


FIG. 9 - Bande de déplacement du sommet par la bulle.

Dans ce cas on définit l'interaction avec l'image au sommet  $v_i^t$  par:

$$f_{image}(v_i^t) = \left| \sum_{j=0}^{j=p-1} ENG(t-j, v_i^{t-j}) \gamma_j \right|$$

Cette interaction permet de tenir compte de l'historique de l'information image des  $p$  dernières itérations du sommet considéré.

avec  $\gamma_j$  désignant les coefficients du profil.

Dans l'exemple précité, ces coefficients auront pour valeurs:  $\gamma_0 = \gamma_1 = 3$ ,  $\gamma_2 = 0$  et  $\gamma_3 = \dots = \gamma_8 = -1$

En fait c'est un produit scalaire du profil cherché avec la trajectoire du sommet que l'on va chercher à maximiser en guise de corrélation avec l'information de l'image.

Cette manière de calculer les interactions avec l'image a l'avantage de tenir compte de la zone d'intérêt avant l'expansion et des précédentes interactions du sommet avec l'image, pour nous donner une sorte de gradient étalé dans l'espace et le temps, pour d'une part la prise en compte de la zone d'image, et d'autre part la prise en compte de la dimension temporelle grâce aux itérations précédentes intervenant dans le calcul de la valeur d'interaction de l'image en ce sommet.

On constate alors la différence avec les snakes où l'on ne tient compte, dans le calcul du gradient spatial de l'image, que d'une itération, qui est la précédente alors qu'ici on fait intervenir une pondération de l'interaction au sommet considéré, par

celles de plusieurs itérations précédentes permettant de donner plus d'information sur l'évolution de chaque sommet de la courbe.

Donc le principe est de faire évoluer les sommets, à la manière de la propagation de particules dans un milieu (visqueux par exemple) qui se propagent tant qu'elles ne rencontrent qu'une faible résistance opposée par le milieu, et sitôt que la résistance devient forte, elles ont de plus en plus de difficulté à pénétrer dans le milieu.

Cette façon de calculer l'interaction avec l'image présente une certaine robustesse que l'on peut voir dans les résultats obtenus par cette méthode en comparaison avec le calcul du gradient dans le modèle de Kass, dans la mesure où on parvient à détecter des contours d'objets en partant d'un cercle à l'intérieur de l'objet ou d'une droite. Ceci rend l'initialisation relativement facile dans l'objectif d'une semi-automatisation du processus de détection comme le montrent les résultats (on a toujours besoin d'une initialisation par l'utilisateur pour placer la courbe à proximité de l'objet choisi).

On peut tout aussi choisir d'autres profils d'intensité pour décrire plus ou moins la variation de l'intensité du sommet lors de son évolution vers le contour à détecter et c'est l'utilisateur qui choisit le profil souhaité.

Après avoir précisé comment s'effectue l'expansion des sommets de la courbe, on va étudier comment obtenir la courbe finale qui est censée représenter le contour de l'objet.

Pour un certain nombre d'itérations  $N$  fixé au départ, on procède à chaque itération à l'expansion du sommet correspondant au minimum de la fonction coût  $f$ . Ceci nous permet au terme des  $N$  itérations d'avoir une courbe connectant les sommets.

Il faut noter que le contour obtenu après ces  $N$  itérations, n'a aucune raison de ressembler au contour désiré du fait que l'entier  $N$  peut être choisi arbitrairement grand. Par contre on peut affirmer que parmi les différentes courbes associées aux itérations successives, il y en a au moins une qui présente une adéquation avec le contour cherché.

Il est donc nécessaire d'introduire un critère pour choisir la bonne courbe. Pour cela on calcule à chaque itération l'énergie image de la courbe obtenue (comme somme des énergies images de chaque sommet), et on trace la courbe d'énergie donnant l'énergie image de la courbe en fonction du nombre d'itérations.

Ensuite on choisit l'indice correspondant à l'extremum de la courbe d'énergie, et la courbe à cette itération va nous donner le contour de l'objet.

A chaque itération  $t$ , l'énergie de la courbe à minimiser est la suivante:

$$E(t) = - \sum_{i \in I_t} \frac{f_{image}(v_i^t) (d(v_i^{t+1}, v_i^t) + d(v_i^t, v_{i-1}^t))}{L(C_t)} / 2$$

avec  $L(C_t)$  désignant la longueur de la courbe:

$$L(C_t) = \sum_{i \in I_t} d(v_i^{t+1}, v_i^t)$$

Cette énergie représente physiquement à tout instant  $t$  une force d'interaction entre l'image et la courbe obtenue à cet instant  $t$ . Cette forme sera minimale quand la courbe sera formée par le contour recherché, et dès l'instant où la courbe aura réussi à dépasser le contour, on assistera à une libération "explosive" de la courbe et par conséquent à une augmentation de l'énergie.

Le contour final est donné par la courbe  $C_T$  où  $T$  est l'itération donnée par:

$$E(T) = \min\{E(t) : \text{pour } 0 \leq t \leq N\}.$$

En représentation continue, l'énergie aurait l'expression suivante:

$$E(t) = - \int_{C_t} \frac{f_{image}(v)}{L(C_t)} dv$$

**Remarque 2.2** *Ce modèle est aussi régularisant, dans la mesure où: en partant d'une courbe initiale irrégulière, et pour une image à niveaux de gris constants, on arrive à trouver une courbe régulière comme le montre la figure (10) même si l'évolution de la courbe ne se fait qu'en déplaçant un seul sommet à la fois.*

Un exemple dans la figure (11) donne l'allure de la courbe d'énergie obtenue par un tel processus. on constate la présence d'un minimum d'énergie

Le diagramme de la figure (12) résume les différentes étapes de cette méthode de la bulle de l'initialisation jusqu'à la détection du contour.

Tout comme pour les snakes, on propose cette méthode pour les deux modes de contours à savoir les contours fermés, et les éléments de frontière ouverts.

On peut voir un résultat de la détection d'un contour fermé dans la figure (13) en partant d'une initialisation par un cercle, et en laissant évoluer les sommets sur l'image.

Un autre résultat pour un élément de frontière est illustré dans la figure (14) en partant d'une initialisation par un segment et en laissant les sommets évoluer dans l'image pour trouver le contour final.

En plus des avantages des snakes que nous avons cités préalablement, et plus généralement des contours actifs, le modèle de la bulle offre d'autres avantages qui sont les suivants:

- Il permet de simplifier l'initialisation requise par l'utilisateur ce qui lui confère une certaine robustesse face au bruit.
- Il tient compte des interactions avec l'image de façon locale dans l'espace (l'information sur la région), et dynamique ou temporelle à travers les itérations précédentes, au lieu de tenir compte uniquement du gradient spatial d'images.
- Le processus d'expansion dépend du sommet considéré par opposition au modèle du Ballon dans les snakes où l'expansion est la même pour tous les sommets. Ceci a l'avantage de ne pas traiter des sommets qui sont arrivés à destination.
- Il prend en considération la nature discrète des données.

Par contre, on peut lui reprocher (tel qu'il est présenté actuellement ) d'avoir deux paramètres (celui qui modélise la raideur et le module d'expansion) qui sont constants pour tous les sommets de la courbe au lieu d'être des fonctions du sommet considéré. Enfin, il importe de préciser que l'on détecte le contour après coup. Ceci est dû à la nature même du modèle liée à une recherche de rupture de modèle et qui par conséquent nécessite une connaissance suffisamment importante de l'évolution du modèle. C'est précisément cet aspect qui rend le modèle attractif et le dénomme sous le terme de modèle de la bulle.

Dans la figure (15), on présente un résultat pour des contours fermés de différentes cellules donc à travers différentes sortes de textures et de niveaux de gris, et différentes formes d'objets.

**Remarque 2.3** *Le terme “discret” du modèle de la bulle, ne vient pas de la discrétisation de la courbe comme on pourrait le croire (dans ce cas même les modèles continus sont amenés à être discrétisés par la suite), mais l’appellation vient du fait que la conception même du modèle est discrète dans la mesure où on procède à la déformation d’un seul sommet à chaque itération par opposition aux autres modèles qui font déformer toute la courbe.*

*Une autre raison qui n’est pas favorable (à ce stade) à sa reformulation de manière continue est la suivante:*

*Le processus d’expansion se fait par une minimisation d’une fonction coût  $f$ , or si ce minimum existe dans le cas discret, trouver un minimum de  $f$  dans le cas continu n’est pas évident à cause du caractère nonlinéaire de  $f$ .*

Ce modèle permet aussi de régulariser la courbe, car lorsque l’interaction est nulle, le déplacement se fait par minimisation de la courbure qui tend à régulariser la courbe, de même que l’énergie interne dans le cas des snakes régularise la courbe.

## 2.5 Conclusion

On a vu dans ce chapitre, trois approches de modèles déformables en vu de la détection de contours qui sont différents par leur façon de percevoir les contours et leur manière de traiter les déformations des courbes, dans le but de détecter le contour de l’objet, suivant qu’ils considèrent les contours comme des courbes planes, ce qui est le cas pour les snakes, ou bien comme des courbes de niveau comme pour le modèle géométrique intrinsèque, ou alors comme une approximation polygonale discrète de la courbe comme on l’a vu pour la bulle.

Pour chaque modèle, nous avons présenté ses avantages et ses inconvénients. A travers l’étude qui a été consacrée à ces différents modèles, et dans le but de les évaluer et de comparer leurs caractéristiques, nous avons tout aussi présenté différents résultats les illustrant.

Malgré la diversité des modèles étudiés, on peut leur trouver un point commun qui est celui de l’initialisation requise au voisinage de l’objet comme courbe de départ, et qui est inhérente à toute méthode de détection par contours actifs pour les raisons

mentionnés auparavant, et qui concernent la recherche d'un minimum local de la fonctionnelle d'énergie.

De même tous ces modèles nécessitent des paramètres pour imposer une certaine régularité aux contours, et influencer par la suite leurs formes pour avoir un contour ressemblant le plus possible à la frontière de l'objet. Ces paramètres permettent d'éviter les irrégularités dues à la seule information des valeurs discrètes de l'image.

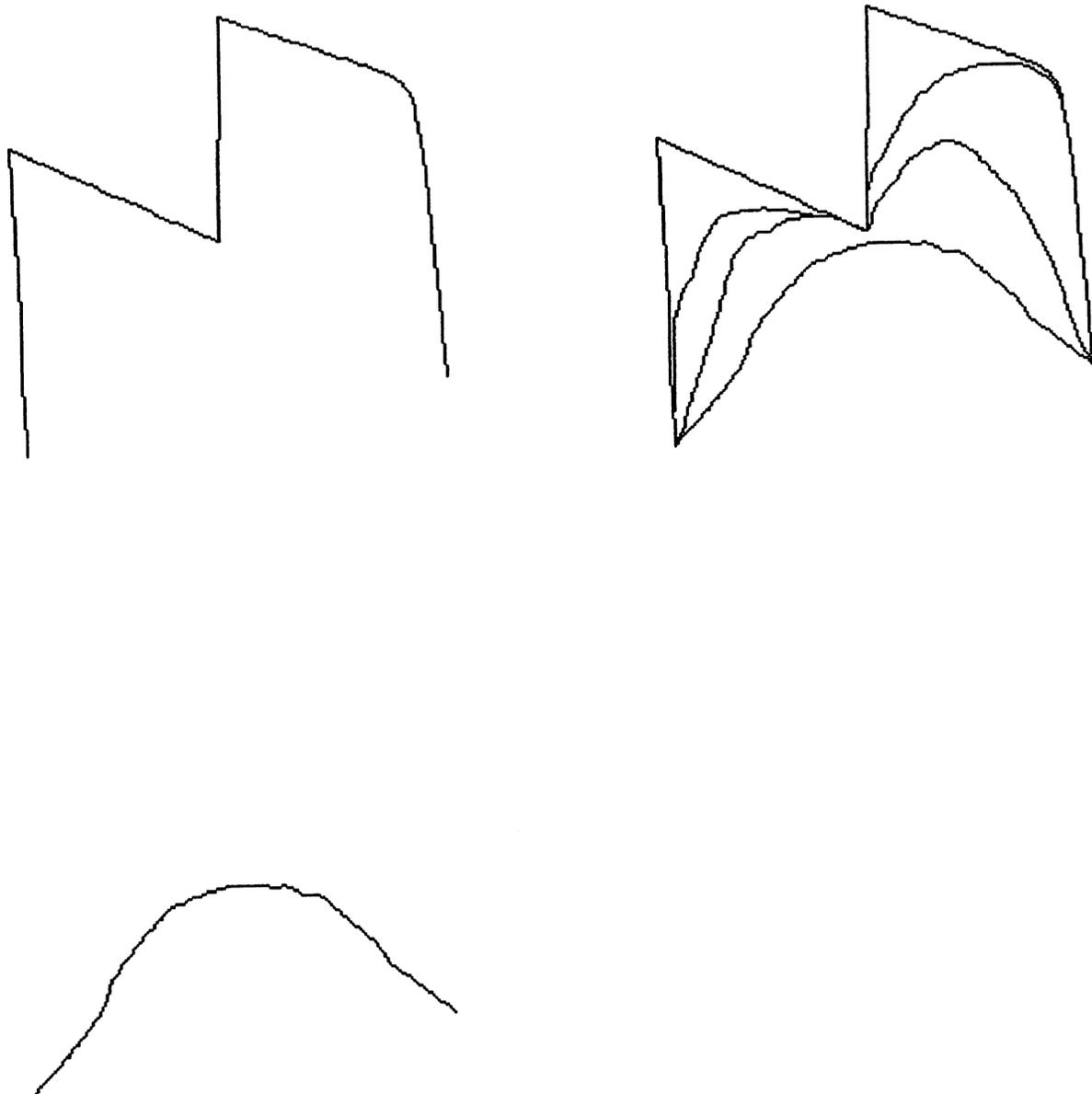


FIG. 10 - Evolution de la bulle sur un terrain plat, initialisation, évolution et résultat.

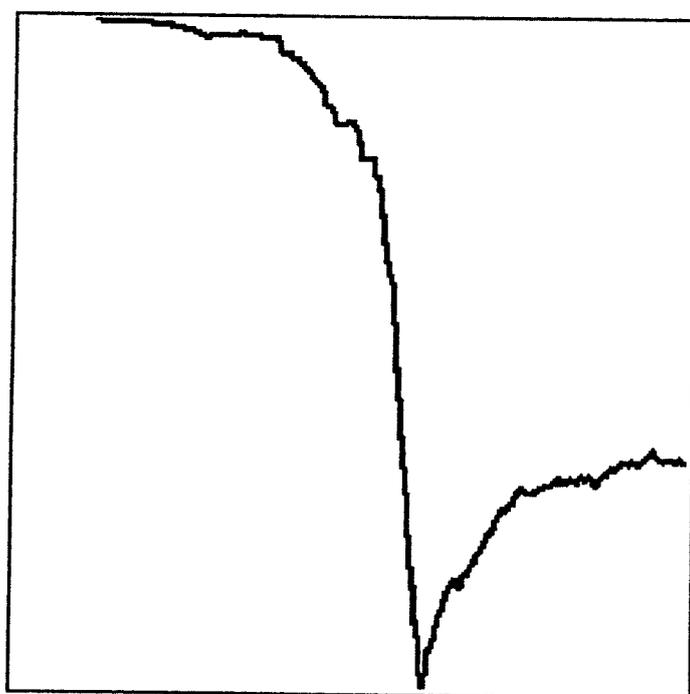


FIG. 11 - Courbe d'énergie de la bulle.

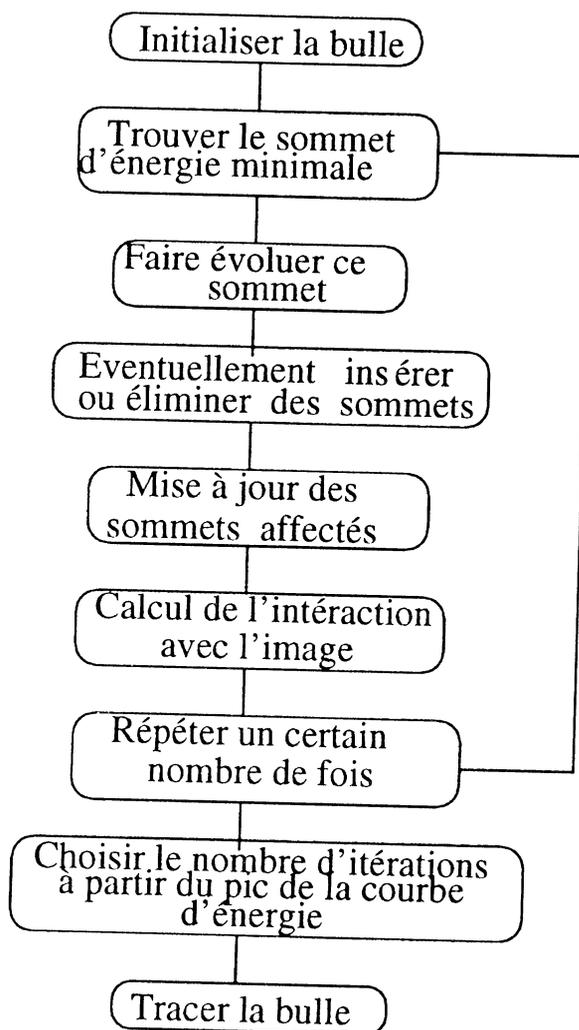


FIG. 12 - Diagramme de la méthode de la Bulle.

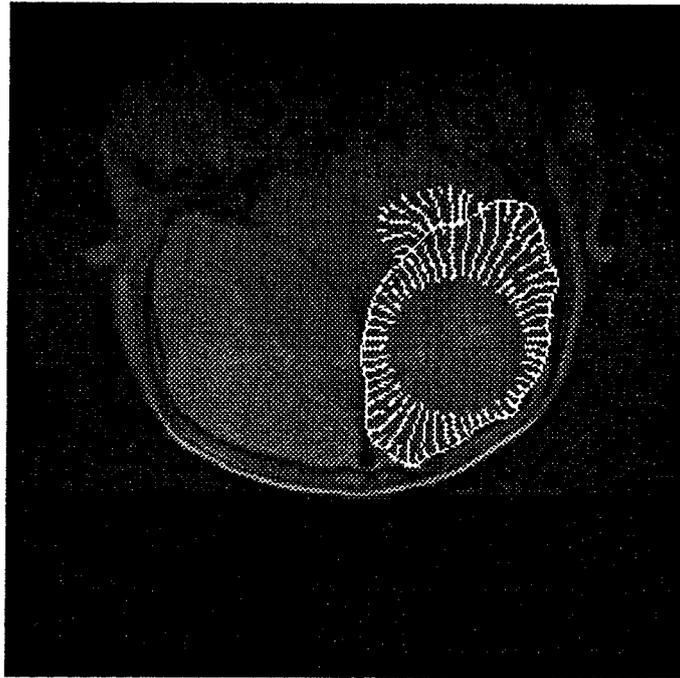


FIG. 13 - Initialisation et résultat pour un contour fermé détecté par la bulle.

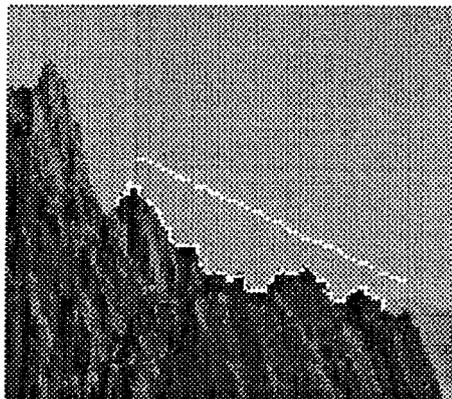


FIG. 14 - Initialisation et résultat pour un élément de frontière par la bulle et évolution des sommets.

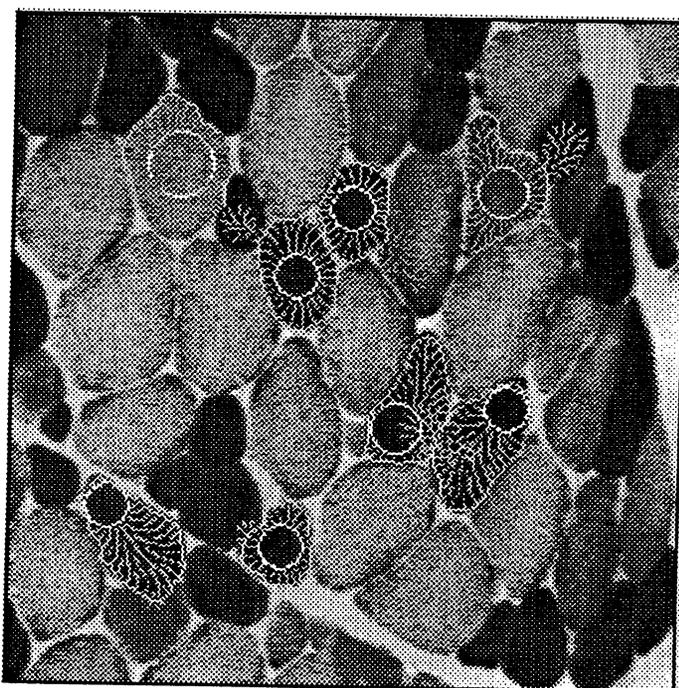


FIG. 15 - Quelques contours fermés détectés par la méthode de la Bulle sur des objets ayant différentes textures.



## Chapitre 3

# Techniques de Multirésolution

### 3.1 Introduction

Il est difficile d'analyser par ordinateur directement l'information contenue dans une image à partir des niveaux de gris de ses pixels, car ils dépendent des conditions d'illumination. Or les variations locales de l'intensité d'une image sont très importantes, notamment pour la détection de contours, étape essentielle dans la segmentation.

Il faut avant tout rappeler que les variations d'intensité ne correspondent pas toujours à la présence de points de contours, car elles peuvent être dues aux effets d'ombres, de reflets, de textures, ...

D'autre part, la taille du voisinage où le contraste est calculé doit être adaptée à celle des objets de la scène à analyser [Mal89b], mais généralement les structures que l'on veut analyser dans une image ont des tailles différentes, ce qui élimine l'existence d'une résolution unique adaptée à tous les objets présents dans l'image.

Aussi, on choisit d'analyser ces structures, de façon progressive en utilisant la représentation multirésolution qui permet d'interpréter l'information de l'image d'une manière hiérarchique.

Les objets à différentes résolutions caractérisent alors les différentes structures physiques présentes dans la scène, et on retrouve à faible résolution, les entités qui correspondent aux larges structures contribuant au contexte de l'image.

Dans ce chapitre, on va présenter trois méthodes assez différentes dans leur esprit

et leur philosophie pour réduire ou extrapoler les images. Ces méthodes permettent de construire une pyramide multirésolution.

On va commencer par présenter un des travaux pionniers dans ce domaine qui est celui de Burt et Adelson concernant les pyramides Gaussiennes et Laplaciennes [Burt83]. Ensuite on parlera de la représentation par ondelettes introduite par Mallat [Mal89b] et qui depuis, est très utilisée dans de nombreuses applications (comme le codage et la compression d'images). Enfin on achèvera ce chapitre par la présentation d'une technique de multirésolution fondée sur les pyramides splines [Uns93] faisant intervenir des bases B-splines et qui ne peuvent être incluses dans la représentation par ondelettes de Mallat à cause de leur caractère non orthogonal.

L'ordre dans lequel sont évoquées ces différentes méthodes, correspond à l'ordre chronologique de leur apparition dans la littérature. Notre choix est motivé par la volonté de présenter un éventail de techniques de multirésolution, afin de voir les diverses étapes qui ont permis de les élaborer, afin d'exprimer un choix en fonction de leur intégration avec tel ou tel processus suivant les processus de contours actifs ainsi que cela sera détaillé au chapitre suivant.

## 3.2 Pyramides Gaussiennes et Laplaciennes

Ce paragraphe est consacré à la présentation d'une des premières techniques de multirésolution à savoir la pyramide Gaussienne, introduite par Burt et Adelson [Burt83] comme structure pyramidale pour la représentation des images en vue d'un processus ultérieur comme le codage par exemple.

Cette pyramide Gaussienne est générée à partir d'une image initiale par une suite de filtres passe-bas appliqués chaque fois à l'image résultante.

En effet la valeur de chaque pixel de la nouvelle image est obtenue en effectuant une moyenne pondérée des pixels voisins dans l'ancienne image, en utilisant un masque de convolution.

Pour passer d'une image  $g_0$  à pleine résolution à une image  $g_1$  à résolution inférieure, on utilise une fonction de réduction REDUCE qui procède par convolution de l'image  $g_0$  avec un masque et effectue ensuite un sous-échantillonnage de l'image convoluée pour obtenir l'image à bas niveau notée  $g_1$ .

Si on note par  $g_0(i, j)$  (resp.  $g_1(i, j)$ ) le niveau de gris du pixel d'abscisse  $i$  et d'ordonnée  $j$  sur l'image  $g_0$  (resp.  $g_1$ ), alors on a:

$$g_1(i, j) = \sum_{m=-2}^2 \sum_{n=-2}^2 W(m, n) g_0(2i + m, 2j + n).$$

La convolution avec le noyau  $W$  est effectuée ici sur une fenêtre de taille 5x5 centrée sur le pixel  $(i, j)$ .

Burt et Adelson ont imposé certaines contraintes à ce noyau  $W$  qui s'expriment de la manière suivante:

- La séparabilité: pour réduire le coût de calcul en dimension 2, on prend un noyau  $W$  sous forme de produit tensoriel de deux noyaux unidimensionnels identiques  $w$ .

$$W(m, n) = w(m)w(n)$$

- La normalisation: cette condition porte sur le noyau monodimensionnel  $w$  et permet de préserver la moyenne des niveaux de gris.

$$\sum_{n=-2}^2 w(n) = 1$$

- La symétrie: le noyau  $w$  doit être symétrique pour garantir une réponse impulsionnelle réelle.

$$w(-i) = w(i)$$

- L'équicontribution: chaque point de l'image à un niveau donné doit contribuer de la même façon aux noeuds du niveau successeur de la pyramide.

$$\sum_{n=\text{pair}} w(n) = \sum_{m=\text{impair}} w(m)$$

- l'unimodalité: la réponse impulsionnelle doit être unimodale afin de mieux approcher un filtre gaussien, ce qui pour une détection de contours permet d'éviter les faux contours [Wak93].

En prenant la valeur de  $w(0) = a$  comme paramètre, on peut exprimer les coefficients du filtre monodimensionnel sous les conditions précitées comme suit:

$$w(0) = a$$

$$w(-1) = w(1) = \frac{1}{4}$$

$$w(-2) = w(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} * a$$

Le paramètre  $a$  est choisi de façon à ce que la condition d'unimodalité se réalise au mieux. Différentes valeurs de  $a$  ainsi que les courbes correspondantes des profils de noyaux sont discutées dans [Burt83] ainsi que dans [Dau88] où on trouve par exemple que pour  $a=0.4$ , on a une fonction qui approche une gaussienne au fil des itérations, alors que pour  $a=0.3$ , on obtient une fonction triangulaire.

Par itérations successives du processus, on obtient une pyramide d'images dite pyramide Gaussienne illustrée en figure (16).

Une fois la pyramide Gaussienne construite, on va construire la pyramide Laplacienne en se basant sur deux fonctions qui sont EXPAND et DIFFERENCE et qui sont définies par:

$$g'_0 = EXPAND(g_1) \text{ et } L_0 = DIFFERENCE(g_0, g'_0)$$

L'image  $g'_0$  est construite de la manière suivante:

$$g'_0(i, j) = 4 \sum_{m=-2}^2 \sum_{n=-2}^2 W(m, n) g_1\left(\frac{i-m}{2}, \frac{j-n}{2}\right)$$

Seuls les termes pour lesquels  $\frac{i-m}{2}$  et  $\frac{j-n}{2}$  sont entiers, sont pris en considération à l'intérieur de la somme.

Quant à l'image  $L_0$ , elle est obtenue en prenant la valeur absolue de la différence entre les niveaux de gris des deux images  $g_0$  et  $g'_0$ .

En appliquant au dernier niveau de la pyramide Gaussienne ce que l'on a fait à l'image  $g_1$  à savoir EXPAND puis DIFFERENCE avec le niveau supérieur de la pyramide Gaussienne et en itérant le processus, on obtient une pyramide Laplacienne qui peut s'interpréter comme une pyramide composée par des images renfermant les détails en passant d'une résolution à une autre.

Ceci est juste une interprétation par opposition aux détails effectifs présentés au prochain paragraphe dans la représentation par ondelettes et intégrés dans la formulation même de l'approche.

La figure (16) montre un résultat de cette pyramide gaussienne appliquée à l'image de femme avec un choix du paramètre  $a$  correspondant à  $a = 0,4$ . En outre, on

observe les détails de la pyramide Laplacienne en figure (17) où les images ont subi une égalisation d'histogrammes pour une meilleure visualisation.



FIG. 16 - Pyramide Gaussienne (avec  $a=0.4$ )



FIG. 17 - Pyramide Laplacienne après égalisation d'histogrammes

En outre, et pour voir l'influence des valeurs de niveaux de gris des pixels sur la détection de contours par contours actifs, on a pris deux images ayant les mêmes structures, et on a appliqué la méthode de la bulle à ces deux images, à savoir, l'image originale  $g_0$  (voir figure 18) et l'image laplacienne de même taille  $L_0$ , tout en prenant soin de garder les mêmes paramètres ainsi qu'une même initialisation.

Les contours obtenus sur l'image laplacienne sont illustrés par la figure (19) et sont affichés sur l'image originale comme le montre la figure (20), afin de faciliter la

comparaison avec les contours obtenus directement sur l'image originale. On observe que les contours détectés sur l'image laplacienne sont plus réguliers, et donnent de meilleurs résultats pour les objets bruités et texturés comme le sont les cellules grises. Ceci rejoint les travaux de Bossart cités dans [Bos94].

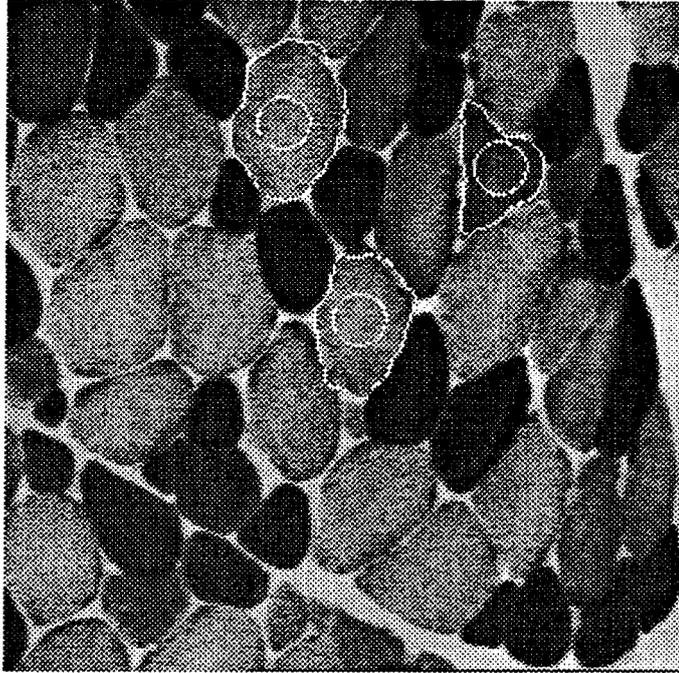


FIG. 18 - Méthode de la Bulle appliquée sur l'image originale

D'autre part, les contours actifs et la multirésolution ne sont pas si étrangers l'un de l'autre. En effet si comme on l'a vu dans le chapitre précédent certains contours actifs sont issus de minimisation de fonctionnelles. On peut aussi montrer que certaines multirésolutions peuvent tout aussi à leur tour, être issues d'une minimisation d'énergie. Ainsi, pour un signal monodimensionnel, minimiser une certaine énergie, revient à lui appliquer une convolution avec une fonction gaussienne et sous-échantillonner ensuite le signal obtenu (ce qui revient à appliquer l'algorithme de Burt pour un noyau gaussien).

En effet si on désigne par  $g_0$  le signal original, et par  $h$  le signal sous-échantilloné à un coefficient près, alors minimiser une énergie faisant intervenir un terme de régularisation et un deuxième terme comme étant la distance entre  $u$  et  $h$  ( dans  $L^2$ ), équivaut à appliquer l'algorithme de Burt pour un noyau gaussien.

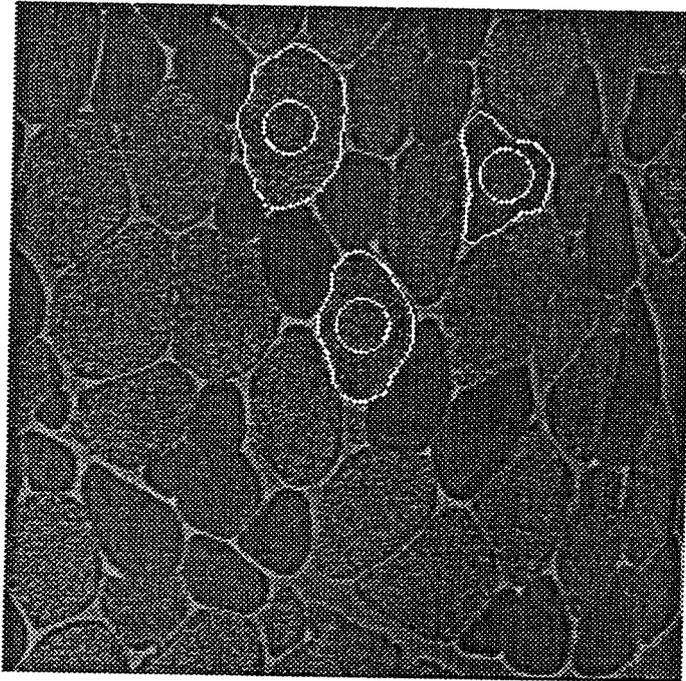


FIG. 19 - Méthode de la Bulle appliquée sur l'image laplacienne

Ceci est pleinement justifié par la proposition suivante:

**Proposition 3.1** *Calculer le premier niveau dans la pyramide gaussienne de Burt construite sur  $g_0(x)$  avec un noyau gaussien  $W(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$ , revient à minimiser l'énergie suivante:*

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2}{4} [u'(x)]^2 + \frac{\sigma^4}{32} [u''(x)]^2 + [u - h]^2 dx.$$

avec  $h(x) = \sigma g_0(2x)$ .

**Démonstration:** Soit  $g_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(y)g_0(2x+y) dy$  avec  $W(x) = e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$ .

On note par  $\check{f}$  la fonction définie par:  $\check{f}(x) = f(-x)$ , et par  $\hat{f}$  la transformée de Fourier de  $f$  quand elle existe.

On a  $\check{W} = W$  et  $\hat{W}(z) = \sigma e^{-\sigma^2 z^2}$ .

D'autre part,  $g_1(x) = (\check{W} * g_0)(2x) = (W * g_0)(2x)$ . En passant à la transformée de Fourier, on a alors:

$$\hat{g}_1(z) = \frac{\sigma}{2} e^{-\frac{\sigma^2}{4} z^2} \hat{g}_0\left(\frac{z}{2}\right)$$

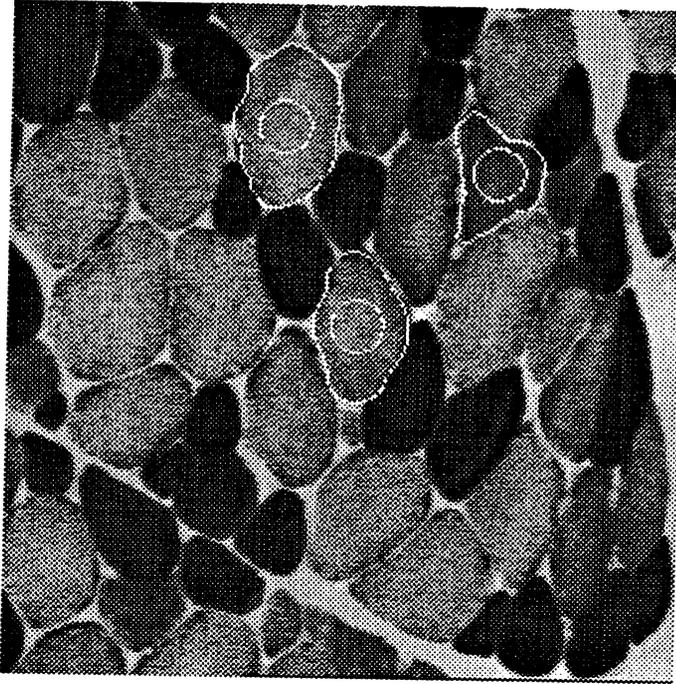


FIG. 20 - Résultats de la laplacienne sur l'image originale

Or on a:

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{4}\right) = 1/\exp\left(\frac{\sigma^2 z^2}{4}\right)$$

que l'on peut approcher par:

$$\frac{1}{1 + \frac{\sigma^2 z^2}{4} + \frac{\sigma^4 z^4}{32}}$$

on a donc en première approximation:

$$\left(1 + \frac{\sigma^2}{4}z^2 + \frac{\sigma^4}{32}z^4\right) \hat{g}_1(z) \simeq \frac{\sigma}{2} \hat{g}_0\left(\frac{z}{2}\right)$$

En passant par la transformée de Fourier inverse, on obtient l'équation suivante:

$$g_1(x) - \frac{\sigma^2}{4} g_1''(x) + \frac{\sigma^4}{32} g_1^{(4)}(x) = \sigma g_0(2x)$$

D'autre part, soit l'énergie

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2}{8} [u'(x)]^2 + \frac{\sigma^4}{64} [u''(x)]^2 + \frac{1}{2} [u - h]^2 dx$$

L'équation d'Euler donne:

$$(u - h)(x) - \frac{\sigma^2}{4} u''(x) + \frac{\sigma^4}{32} u^{(4)}(x) = 0$$

En choisissant  $h(x) = \sigma g_0(2x)$ , alors  $g_1$  vérifie l'équation d'Euler pour l'énergie  $E(u)$ .

Réciproquement: Minimiser  $E(u)$ , revient-il à effectuer une multirésolution? Si  $v$  est un minimum de  $E$ , alors il satisfait à l'équation d'Euler. Par transformée de Fourier, et en utilisant la même approximation que précédemment, puis par transformée inverse, on obtient alors:

$$v(x) = (\check{W} * g_0)(2x) = (W * g_0)(2x)$$

■

Ainsi cette proposition établit un lien entre la multirésolution et la minimisation de la fonctionnelle décrite plus haut que l'on peut considérer comme une énergie associée à une image, et non pas à une courbe comme on l'a vu au chapitre précédent pour les courbes déformables.

En conclusion de ce paragraphe, les pyramides Gaussiennes et laplaciennes sont de bons outils pour réduire les images et présenter leurs détails en faisant apparaître leurs structures à des échelles différentes, mais leur grand inconvénient réside dans le fait que les données images dans la pyramide Laplacienne sont corrélées et il n'y a aucune solution pour ce modèle multirésolution de lever cette corrélation. Aussi on ne sait pas si les similarités présentes entre les images de détails à travers les différentes résolutions sont dues aux propriétés de l'image elle-même, ou bien à la redondance intrinsèque de la représentation [Mal89b]. On peut tout aussi reprocher au modèle pour certaines applications comme la reconnaissance de formes, son homogénéité spatiale à savoir qu'on ne peut pas voir quelles orientations ont les détails, ce qui n'est pas le cas pour la représentation orthogonale par ondelettes comme on va le voir dans le prochain paragraphe qui grâce à l'orthogonalité de la base et à la formalisation de l'approche permet de générer trois orientations pour les images de détails à savoir les images de détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

### 3.3 Représentation par ondelettes

Dans ce paragraphe, on va présenter un puissant outil pour la réduction d'images développé par Mallat [Mal89b] à partir des résultats en analyse fonctionnelle obtenus

par Meyer et présentés dans son ouvrage [Mey92], en ce qui concerne les propriétés des ondelettes.

Meyer a montré qu'il existe des ondelettes permettant de générer des bases orthonormales de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  qui généralisent la base de Haar, tout en étant aussi bien localisées que régulières, donnant ainsi naissance à un puissant outil en analyse fonctionnelle qui a trouvé de nombreuses applications dans différents domaines. Une des raisons majeures vient du fait que les bases orthogonales d'ondelettes sont des bases de la plupart des espaces fonctionnels classiques comme  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , les espaces de Sobolev, les espaces de Besov,...

Ayant déjà introduit la définition d'une ondelette dans le premier chapitre, on va maintenant présenter l'approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  comme l'a défini Meyer dans [Mey92].

**Définition 3.1** Une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est une suite croissante  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  vérifiant les propriétés suivantes:

$$(15) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \text{ et } \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$(16) \quad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et tout } j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$$

$$(17) \quad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ et tout } k \in \mathbb{Z}^n, f(x) \in V_0 \leftrightarrow f(x - k) \in V_0$$

$$(18) \quad \text{il existe une fonction } g(x) \in V_0, \text{ telle que la suite } \{g(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$$

forme une base de Riesz de  $V_0$ .

Mallat [Mal89b] a utilisé cette définition pour l'étude des signaux dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de la façon suivante:

Soit  $A_j$  l'opérateur donnant une approximation du signal  $f$  à la résolution  $2^j$ , alors  $A_j$  est linéaire et idempotent, c'est donc un opérateur de projection sur un sous espace  $V_j$  que l'on peut interpréter comme l'ensemble des approximations possibles des signaux de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  à la résolution  $2^j$ .

Ceci lui a permis de donner des bases orthonormées des espaces  $V_j$  à l'aide de la fonction d'échelle associée à la multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  grâce au théorème suivant:

**Théorème 3.1** [Mal89c]

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , il existe alors une fonction  $\phi(x)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  appelée fonction d'échelle telle que  $(\phi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}^n}$  forme une base orthonormée de  $V_j$  avec:

$$\phi_{jk}(x) = 2^{nj/2} \phi(2^{-j/2}x - k).$$

Si on note la projection de  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  sur l'espace  $V_j$  par  $f_j$  alors on a:

$$f_j(y) = A_j f(y) = 2^{nj} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(2^j x - y) dx.$$

Pour le traitement de signaux monodimensionnels et le traitement d'images ( $n = 1, 2$ ), on utilise en pratique la caractérisation de la fonction d'échelle par un filtre discret. En effet la relation entre la fonction d'échelle et le filtre discret associé, est donnée par le théorème suivant:

**Théorème 3.2** [Mal89b]

Soit  $\phi$  la fonction d'échelle associée à une multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , et soit  $H$  un filtre discret de réponse impulsionnelle  $h(n) = \langle \phi_{-10}, \phi_{0n} \rangle$  avec  $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^{-j/2}x - k)$ . Supposons de plus que  $|\phi(x)|$  et  $|\phi'(x)|$  sont de l'ordre de  $x^{-2}$  à l'infini, alors la série de Fourier définie par:

$H(\omega) = \sum h(n) e^{-in\omega}$  satisfait aux deux propriétés suivantes:

- $H(0) = 1$  et  $h(n) = O(-n^2)$  à l'infini
- $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$

Réciproquement, Si  $H(\omega)$  est une série de Fourier satisfaisant aux deux propriétés ci-dessus, et vérifiant en plus:

$$|H(\omega)| \neq 0 \forall \omega \in [0, \pi/2]$$

alors la fonction définie par:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{p=\infty} H(2^{-p}\omega)$$

est la transformée de Fourier de la fonction d'échelle d'une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Introduisons maintenant la notation suivante:  $\tilde{h}(n) = h(-n)$ , alors  $\tilde{H}$  est le filtre miroir de  $H$  associé à  $\tilde{h}$  et il va jouer un rôle essentiel dans l'algorithme proposé par Mallat pour la décomposition [Mal89c].

Ayant introduit la fonction d'échelle et le filtre discret associé, on va introduire la notion d'ondelette liée à l'approximation multirésolution à travers les espaces complémentaires des espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . Notons par  $W_j$  le sous espace de  $V_{j+1}$  supplémentaire à  $V_j$  c'est à dire que l'on a  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ , alors l'espace  $W_j$  contient les signaux détails obtenus en passant de la résolution  $j+1$  à la résolution  $j$  ce qui revient à dire que c'est l'information perdue en passant de la résolution  $j+1$  à la résolution inférieure  $j$ .

D'après la définition de l'analyse multirésolution, et celle des espaces  $W_j$ , on peut en déduire que  $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$ . ceci signifie qu'une base de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est donnée par celles des différents  $W_j$ . Le théorème suivant dans le cas des signaux monodimensionnels donne la fonction d'ondelette à partir de la fonction d'échelle:

**Théorème 3.3** [Mal89b]

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , soient  $\phi$  et  $H$  la fonction d'échelle et le filtre associés, notons par  $G(\omega) = e^{-i\omega} \bar{H}(\omega + \pi)$  et soit  $\psi$  une fonction dont la transformée de Fourier est donnée par:

$\hat{\psi}(\omega) = G(\omega)\hat{\phi}(\omega)$  alors  $(\psi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$ , et  $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . avec  $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ .

$\psi$  est alors dite l'ondelette associée à  $\phi$ .

Ainsi à partir d'une approximation multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , on définit une fonction d'échelle  $\phi$  et le filtre  $H$  associé. Ensuite à l'aide du filtre conjugué  $G$  défini par le théorème précédent, on en déduit l'ondelette associée à la multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Dans le cas bi-dimensionnel qui nous intéresse (celui des images), la généralisation de ces théorèmes se fait sans peine à l'aide du produit tensoriel, ce qui revient à considérer uniquement le cas séparable comme dans le cas des pyramides gaussiennes. On construit alors trois ondelettes de la manière suivante:

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , et soit  $\phi$  la fonction d'échelle associée et  $\psi$  l'ondelette associée à  $\phi$ . On définit  $\tilde{V}_j = V_j \otimes V_j$  comme une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dont la fonction d'échelle associée est donnée par  $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ . Alors les fonctions suivantes définies par:

$\Psi^{(1)}(x, y) = \phi(x)\psi(y)$ ,  $\Psi^{(2)}(x, y) = \psi(x)\phi(y)$  et  $\Psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y)$  sont les trois ondelettes associées à  $\tilde{V}_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  et vérifient les deux propriétés suivantes:

- $\{\Psi_{jnm}^{(1)}, \Psi_{jnm}^{(2)}, \Psi_{jnm}^{(3)}\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$  forme une base orthonormée de  $\tilde{W}_j$
- $\{\Psi_{jnm}^{(1)}, \Psi_{jnm}^{(2)}, \Psi_{jnm}^{(3)}\}_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^3}$  forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$

où on a utilisé les notations suivantes:

$$\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j. \quad f_{jnm}(x, y) = 2^j f_1(2^j x - n) f_2(2^j y - m) \text{ quand } f(x, y) = f_1(x) f_2(y) \text{ pour } j, n, m \in \mathbb{Z}.$$

Le produit scalaire de la fonction  $f$  avec chacune de ces trois ondelettes, donne alors ce qu'on appelle les détails horizontaux, verticaux et diagonaux, obtenus en passant d'une résolution à une autre.

Mallat a donné pour cette représentation en ondelettes deux algorithmes pyramidaux permettant de décomposer une image et de la reconstruire en utilisant une décomposition séparable en filtres miroirs conjugués [Mal89b].

Ces algorithmes permettent donc de générer à partir d'une image à une résolution donnée, l'image à plus faible résolution, et les images de détails horizontaux, verticaux, et diagonaux. Pour la reconstruction, on obtient à partir d'une image réduite et des images détails, une image à plus grande résolution par l'algorithme inverse.

Un résultat d'une telle décomposition est donné par la figure (21), où on observe l'image réduite, et les images de détails horizontaux, verticaux, et diagonaux.

Ayant étudié de plus près les relations liant les coefficients des filtres intervenant dans la décomposition et la reconstruction par ondelettes, ainsi que ceux intervenant dans l'algorithme de Crowley [Cro84] ou encore de Burt pour la pyramide gaussienne, Daubechies [Dau88] a montré que l'on peut construire une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  et par conséquent une base d'ondelettes en partant d'éléments discrets qui sont les réponses impulsionnelles des filtres. Ceci lui a permis de construire des ondelettes orthonormales à supports compacts grâce au théorème suivant:

**Théorème 3.4** [Dau88]

Soit  $\epsilon > 0$ , et soit  $h(n)$ , la réponse impulsionnelle d'un filtre, vérifiant:

- $\sum_n |h(n)| |n|^\epsilon < +\infty$

- $\sum_n h(n-2k)h(n-2l) = \delta_{kl}$
- $\sum_n h(n) = 2^{1/2}$

Supposons aussi qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $m_0(\omega) = 2^{1/2} \sum_n h(n)e^{-in\omega}$  puisse se mettre sous la forme:

$$m_0(\omega) = [1/2(1 + e^{i\omega})]^N [\sum_n f(n)e^{-in\omega}]$$

avec:

$$\begin{aligned} \sum_n |f(n)||n|^\epsilon &< +\infty \\ \sup |\sum_n f(n)e^{in\omega}| &< 2^{N-1} \end{aligned}$$

Définissons par:

$$\begin{aligned} g(n) &= (-1)^n h(1-n) \\ \hat{\phi}(\omega) &= (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) \\ \psi(x) &= 2^{1/2} \sum_n g(n)\phi(2x-n) \end{aligned}$$

Alors  $\phi$  définit la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  où  $\psi$  est l'ondelette associée.

Une autre manière d'interpréter ce résultat, est que les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont bornées et uniformément continues car leurs transformées de Fourier sont dans  $L^1 \cap L^\infty$ .

Quand le filtre est à réponse impulsionnelle finie, ce qui signifie que:

$$\exists N_i, N_f \in \mathbb{N} \text{ tel que } h(n) = 0 \forall n < N_i \text{ et } \forall n > N_f$$

alors les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont à supports compacts, et vérifient:

$$\begin{aligned} \text{supp}(\phi) &\subset [N_i, N_f] \\ \text{supp}(\psi) &\subset \left[ \frac{1}{2}(1 - N_f - N_i), \frac{1}{2}(1 + N_f - N_i) \right] \end{aligned}$$

La notion de repère introduite par Daubechies [Dau88], a permis de donner une généralisation des ondelettes orthogonales à ce qu'on appelle les ondelettes bi-orthogonales, qui permettent de séparer les éléments d'analyse et de synthèse utilisés en compression d'images.

En effet, la notion de repère généralise celle de base dans un espace vectoriel, dans la mesure où l'on se passe de la contrainte d'orthonormalité qui peut dans certains cas être assez restrictive. On va se limiter ici pour la définition d'un repère au cas d'un espace de Hilbert  $H$ , la généralisation pour un espace de Banach a été obtenue par Feichtinger et Grochenig [Fei89].

Soit  $J$  un sous ensemble de  $\mathbb{N}$ , alors on a la définition suivante:

**Définition 3.2** [Dau88]

Une suite  $(e_n)_{n \in J}$  d'éléments de  $H$ , est un repère, s'il existe des réels positifs  $A, B$  tels que:

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{n \in J} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2$$

pour tout  $f \in H$ .

$A$  et  $B$  sont appelés les bornes du repère.

Un repère  $(e_n)_{n \in J}$  est dit exact, si pour tout  $n_0 \in J$ ,  $(e_n)_{n \in J - n_0}$  n'est pas un repère.

On obtient alors une caractérisation d'un repère à partir des propriétés d'un opérateur linéaire par le théorème suivant dû à Heil et dont la démonstration figure dans [Hei89].

**Théorème 3.5** Soit  $(e_n)_{n \in J}$ , une suite d'éléments de  $H$ , alors on a l'équivalence entre les assertions suivantes:

- $(e_n)_{n \in J}$  est un repère de bornes  $A$  et  $B$ .
- $Sf = \sum_{n \in J} \langle f, e_n \rangle e_n$  est un opérateur linéaire borné vérifiant:  
 $AI \leq S \leq BI$  où  $I$  est l'identité de  $H$ .

Un corollaire immédiat à ce théorème est le suivant:

**Corollaire 3.1** • L'opérateur  $S$  est inversible et on a  $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$ .

- $(S^{-1}e_n)_{n \in J}$  est un repère de bornes  $B^{-1}, A^{-1}$  appelé repère dual de  $(e_n)_{n \in J}$ .
- Pour tout  $f$  dans  $H$ , on a  $f = \sum_{n \in J} \langle f, S^{-1}e_n \rangle e_n = \sum_{n \in J} \langle f, e_n \rangle S^{-1}e_n$ .

- Si  $(e_n)_{n \in J}$  est un repère exact, alors  $(e_n)_{n \in J}$  et  $(S^{-1}e_n)_{n \in J}$  sont bi-orthogonaux ie  $\langle e_n, S^{-1}e_m \rangle = \delta_{nm}$  où  $\delta_{nm}$  est le symbole de Kronecker.

Notons que si  $(e_n)_{n \in J}$  est une base, tout élément  $f$  de  $H$  s'écrivant sous la forme  $f = \sum_{n \in J} c_n e_n$ , admet une représentation unique décrite par les coefficients  $c_n$ , ce qui n'est pas nécessairement vrai pour un repère.

Les bases bi-orthogonales d'ondelettes ont été introduites pour obtenir une représentation où l'on s'affranchit de la contrainte d'orthogonalité des premières bases d'ondelettes d'une part, et pour leur utilité en codage d'image où les filtres d'analyse sont différents de ceux de synthèse. Ceci permet notamment d'avoir une flexibilité dans la construction des bases d'ondelettes.

En ce qui concerne la construction d'une analyse multirésolution par ondelettes bi-orthogonales à partir des réponses impulsionnelles des filtres associés, A. Cohen et ses collaborateurs [Coh92b] ont démontré le théorème suivant:

**Théorème 3.6** Soient  $(h(n), \tilde{h}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels telles que:

$$\sum_n h(n) \tilde{h}(n + 2k) = \delta_{0k}$$

$$\sum_n h(n) = 1 \text{ et } \sum_n \tilde{h}(n) = 1$$

Introduisons les notations suivantes:

$$m_0(\omega) = 2^{-1/2} \sum_n h(n) e^{-in\omega} \text{ et } \tilde{m}_0(\omega) = 2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}(n) e^{-in\omega}$$

$$\hat{\phi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \prod_j m_0(2^{-j}\omega) \text{ et } \hat{\tilde{\phi}}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \prod_j \tilde{m}_0(2^{-j}\omega)$$

$$\psi(x) = 2^{1/2} \sum_n (-1)^n \tilde{h}(1-n) \phi(2x-n)$$

$$\tilde{\psi}(x) = 2^{1/2} \sum_n (-1)^n h(1-n) \tilde{\phi}(2x-n)$$

Supposons que pour  $C, \epsilon > 0$ , on ait:

$$|\tilde{\phi}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1/2-\epsilon} \text{ et } |\hat{\tilde{\phi}}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-1/2-\epsilon}$$

Alors  $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est un repère de  $L^2(\mathbb{R})$  avec  $\psi_{jk}(x) = 2^j/2 \psi(2^j x - k)$  dont le repère dual est donné par  $(\tilde{\psi}_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  avec  $\tilde{\psi}_{jk}(x) = 2^j/2 \tilde{\psi}(2^j x - k)$ .

Ainsi pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a :

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk}(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \tilde{\psi}_{jk}(x)$$

où les séries convergent fortement.

Notons que pour les applications numériques, on considère généralement des ondelettes à supports compacts, ce qui engendre un nombre fini de réponses impulsionnelles des filtres associés.

Dans toute cette panoplie d'ondelettes qui existent dans la littérature, on peut se demander qu'elle est la meilleure ondelette pour une application donnée? La réponse à cette question passe actuellement par l'étude des propriétés spécifiques des ondelettes afin d'analyser leurs influences sur le traitement envisagé. Ces propriétés sont la localisation, l'oscillation, et la régularité. Donnons alors la signification de chacune :

- Localisation: Elle est obtenue en faisant varier deux paramètres: l'échelle et la translation, ce qui fait agir l'ondelette comme un zoom à effet de réduction ou d'agrandissement, qui est intéressant pour l'étude des phénomènes locaux.
- Oscillation: Elle se traduit graphiquement par plusieurs passages à zéro de l'ondelette et analytiquement par le nombre de moments nuls de la fonction ondelette  $\psi$ .
- Régularité: Elle peut être évaluée à partir des exposants de Hölder ou de Sobolev ou bien encore par la puissance lipschitzienne de la fonction d'échelle. La régularité de l'ondelette étant la même que celle de la fonction d'échelle associée, il s'agit de trouver un compromis dans le choix de l'ondelette concernant cette propriété, car si l'ondelette n'est pas régulière (ondelette de Haar), cela revient à effectuer simplement une moyenne des pixels voisins, ce qui introduit des effets de blocs dans les basses échelles alors que pour une ondelette à très forte régularité, on a l'apparition des effets de bords dus à un lissage très important [Wak93].

En conclusion de ce paragraphe, nous avons présenté une technique de multirésolution basée sur les ondelettes, et qui est largement utilisée en traitement d'images

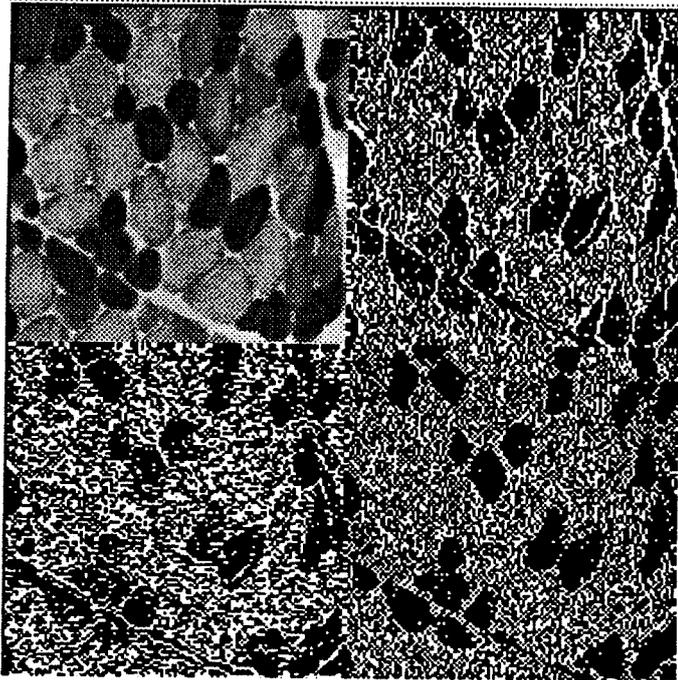


FIG. 21 - Image réduite et images détails de tailles 128x128 d'une image de section de muscle 256x256

surtout en codage et compression. On a vu les principaux résultats théoriques obtenus dans ce domaine pour des ondelettes orthogonales. On a aussi parlé des ondelettes à support compact, et des ondelettes bi-orthogonales que nous avons utilisées dans nos applications comme on va le voir au prochain chapitre.

### 3.4 Pyramides Splines

Les fonctions splines sont très utilisées en vision par ordinateur pour plusieurs raisons parmi lesquelles on peut citer:

- La bonne régularité des splines polynomiales, en effet parmi tous les interpolants ayant un degré de régularité donné, elles sont considérées comme étant les moins oscillantes, ce qui leur confère un avantage pour tout ce qui concerne les formes d'objets et leurs approximations.
- La forme explicite des polynômes splines rend leur utilisation facile et aisée.

Dans ce paragraphe, sur la base des fonctions splines, nous allons décrire une autre technique de multirésolution appelée “pyramides spline” introduites par Unser et ses collaborateurs [Uns93]. Elle aussi, est également basée sur la définition de deux fonctions REDUCE et EXPAND comme pour les pyramides Gaussiennes et Laplaciennes, mais il existe cependant une différence entre les deux techniques.

Plus précisément, dans les pyramides splines, la perte de l'information est minimale en passant d'une résolution à une autre, contrairement aux pyramides Gaussiennes et Laplaciennes [Uns93]. Ceci vient du fait que d'une part la fonction REDUCE est choisie de manière à ce que dans les résolutions inférieures les images restent très proches de l'image originale pour assurer une compatibilité entre les opérations de traitement d'images réalisées à différents niveaux de la pyramide. D'autre avec la fonction EXPAND, l'erreur d'approximation entre l'image originale et l'image extrapolée à partir d'un niveau plus bas sera minimale.

Ces deux critères sont bien entendu satisfaits par la pyramide par ondelettes de Mallat que nous avons vue dans le paragraphe précédent. Mais la différence entre les pyramides splines et les pyramides par ondelettes est que les B-splines utilisées, n'entrent pas dans la catégorie des bases pouvant être utilisées par Mallat à cause de leur caractère non orthogonal.

Décrivons un peu plus en détail cette pyramide spline:

Soit  $n$  un entier impair, et notons par  $S_1^n$  l'ensemble des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  de classe  $C^{n-1}$  et égales à un polynôme de degré  $n$  sur chaque intervalle  $[k, k+1[$  quand  $n$  est impair, et  $[k - 1/2, k + 1/2[$  lorsque  $n$  est pair, avec  $k$  élément de  $\mathbb{Z}$ .

$S_1^n$  peut être caractérisé par:

$$S_1^n = \left\{ g(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c(k) \beta^n(x - k), \text{ avec } c \in l_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

Où  $\beta^n(x)$  est la B-spline centrale d'ordre  $n$  donnée par:

$$\beta^n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{n!} C_{n+1}^j [x + (n+1)/2 - j]_+^n$$

où  $l_2(\mathbb{Z})$  est l'ensemble des suites de carrés sommables dans  $\mathbb{Z}$ , et

$[x]_+ = \max\{0, x\}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

La transformée de Fourier de  $\beta^n(x)$  est donnée par:

$$B^n(\omega) = \left( \sin\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \right)^n.$$

Pour  $\epsilon$  strictement positif, introduisons la notation suivante:

$$g_\epsilon(x) = g\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

La pyramide spline polynomiale est une transformation d'une fonction  $g(x)$  élément de  $L^2(\mathbb{R})$  obtenue à partir d'une série d'approximations  $\{g_i^n(x) \in S_{2^i}^n, i \in \mathbb{Z}\}$  avec:

$$S_\epsilon^n = \{g_\epsilon^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_\epsilon(k) \beta_\epsilon^n(x - k), c_\epsilon \in l_2(\mathbb{Z})\}$$

Une suite  $a(k)$  élément de  $l_2(\mathbb{Z})$  est caractérisée de manière unique par sa transformée en  $z$  définie par

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a(k) z^{-k}$$

Lorsque  $A(z)$  est un polynôme ayant des racines complexes n'appartenant pas au cercle unité, alors il existe une suite notée  $a^{-1}$ , inverse de la suite  $a(k)$ , définie de manière unique par:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \text{ on a } a^{-1} * a(k) = \delta_0(k)$$

Notons  $b^n(k) = \beta^n(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et  $b_m^n(k) = \beta^n(k/m)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , alors on peut parler de la suite inverse  $(b^n)^{-1}(k)$  (voir [Uns93]). Ceci permet par la suite de définir la base duale de la base B-spline comme:

$$\tilde{\beta}^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (b^{2n+1})^{-1}(k) \beta^n(x - k).$$

On va se servir de cette base duale pour définir l'approximation multirésolution d'une fonction  $g$  de  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour cela on va distinguer deux cas, suivant que la donnée initiale est discrète ou pas.

- Si elle n'est pas discrète, alors on définit une suite  $a_{(0)}(k)$  par:

$$a_{(0)}(k) = (\beta^n * g)(k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

- Par contre si la donnée initiale est discrète, alors on note  $g_{(0)}^n(k) = g(k)$ , et on définit  $a_{(0)}(k)$  par:

$$a_{(0)}(k) = b^{2n+1} * (b^n)^{-1} * g_{(0)}^n(k)$$

L'approximation de la fonction  $g$  à la résolution  $i$  est alors donnée par:

$$g_{(i)}^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{(i)}(k) \tilde{\beta}_{2^i}^n(x - 2^i k)$$

Il reste maintenant à déterminer la suite  $a_{(i)}(k)$  à partir de la suite  $a_{(0)}(k)$ . Pour cela on définit la suite  $u_2^n(k)$  par:

$$(19) \quad u_2^n(k) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} C_{n+1}^{k+(n+1)/2} & \text{si } |k| \leq (n+1)/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour une suite  $a(k)$ , on définit l'opérateur de décimation par un facteur  $m$  comme:

$$[a]_{\downarrow m}(k) = a(mk) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

et l'opérateur de sur-échantillonnage que l'on va utiliser dans la fonction EXPAND par:

$$(20) \quad [a]_{\uparrow m}(k) = \begin{cases} b(k') & \text{pour } k = m k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite  $a_{(i)}(k)$  est alors donnée par:

$$a_{(i)}(k) = \frac{1}{2} [u_2^n * a_{(i-1)}]_{\downarrow 2}(k)$$

Ceci achève la définition de la fonction REDUCE qui permet à partir d'une fonction  $g$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , de déterminer son approximation à la résolution  $i$  par la formule déjà précitée:

$$g_{(i)}^n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{(i)}(k) \tilde{\beta}_{2^i}^n(x - 2^i k)$$

où  $i$  désigne la résolution, et  $n$  désigne l'ordre de la spline.

Généralement pour des applications en CAO, on prend des splines cubiques donc d'ordre 3 dont la régularité est suffisante pour avoir de bons résultats.

L'opération duale de la réduction est celle de l'expansion que l'on va décrire comme suit:

Pour un certain niveau  $i_0$  de la pyramide, notons par  $c_{(i_0, i)}$  l'extrapolation à la résolution  $i$  à partir du niveau  $i_0$  ceci avec  $i$  inférieur strictement à  $i_0$ . Posons d'abord  $c_{(i_0, i_0)}(k) = (b^{2n+1})^{-1} * a_{(i_0)}(k)$  et on obtient  $c_{(i_0, i)}$  par la formule suivante:

$$c_{(i_0, j)}(k) = u_2^n * [c_{(i_0, j+1)}]_{\downarrow 2}(k)$$

On obtient finalement le signal interpolé  $g_{(i_0, i)}^n(k)$  à la résolution  $i$  à partir du niveau  $i_0$ , par la formule suivante:

$$g_{(i_0, i)}^n(k) = b^n * c_{(i_0, i)}(k)$$

En ce qui concerne les images (donc des signaux de dimension 2), on procède par produit tensoriel comme on l'a vu précédemment pour les deux autres techniques.

La pyramide de différence est obtenue par différence entre l'image au niveau  $i$  et l'image interpolée à partir du niveau  $i + 1$ . On obtient des images similaires dans l'allure à celles de la pyramide laplacienne mais plus pertinentes ([Uns93]).

Une des différences entre cette technique et la pyramide gaussienne, est le fait que la pyramide spline requiert un pré-filtrage au premier niveau alors qu'il n'est pas nécessaire dans la pyramide gaussienne.

Une autre différence réside dans la minimisation de la perte de l'information en passant d'une résolution à une autre, pour la pyramide spline, alors que ce critère n'est pas vérifié pour la pyramide gaussienne.

Une troisième différence avec la pyramide gaussienne concerne l'aptitude de la pyramide spline à minimiser l'erreur d'approximation entre l'image originale et l'image extrapolée à partir d'une basse résolution.

### 3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, trois méthodes de multirésolution pour la réduction des images. On a commencé par la plus ancienne des trois à savoir la pyramide Gaussienne. Ensuite on a parlé de la décomposition par ondelettes, et on a terminé par la pyramide spline.

On a aussi comparé chacune des techniques citées avec les autres tout en présentant leurs différences ou leurs points communs si elles en ont, ce qui va nous aider à choisir la technique la plus adéquate pour nos applications que l'on va voir dans le prochain chapitre.

En général on a un penchant pour la décomposition par ondelettes pour les raisons suivantes:

- Une bonne formulation mathématique permettant de séparer les différentes phases (image réduite, images de détails).
- Orientation spatiale des détails (détails diagonaux, verticaux et horizontaux).

- Levée de la corrélation entre les différents niveaux de la pyramide à cause de l'orthogonalité de la base.

Il importe cependant de mentionner qu'une perspective intéressante semble offerte par l'utilisation des pyramides splines quand l'orientation spatiale des détails n'est pas importante pour l'application cherchée.



## Chapitre 4

# Multirésolution et Contours Actifs

### 4.1 Introduction

On assiste de plus en plus en traitement d'images à une coopération entre plusieurs méthodes afin d'améliorer le traitement en profitant des avantages qu'offre la prise en compte globale de ces différents processus.

Aussi dans la continuité de cette optique, nous présentons dans ce chapitre, une association entre la segmentation par contours actifs à travers les modèles que nous avons vus au deuxième chapitre, et le processus de multirésolution dont on a parlé au chapitre précédent. On peut tout d'abord se demander pourquoi penser à une association entre deux approches qui sont en général utilisées chacune dans son domaine spécifique à savoir la segmentation et la détection de contour pour les contours actifs, et la compression et le codage d'images pour la multirésolution?

Dans un premier temps, nous essayerons de répondre à cette question dans le paragraphe suivant pour expliquer les différentes motivations qui nous ont amenés à introduire une telle coopération en insistant sur l'apport que peut apporter la multirésolution à la détection par contours actifs, et en décrivant l'approche que nous proposons puis en l'illustrant par quelques résultats. Enfin, on conclut le chapitre par une discussion de l'approche globale en présentant ses avantages et ses inconvénients.

## 4.2 Description de l'approche

Comme on l'a vu précédemment, les contours actifs sont très sensibles à l'initialisation, au bruit et à la texture présents dans l'image, de même la détection par contours actifs est une opération essentiellement locale dans la mesure où il faut se placer au voisinage de l'objet pour en détecter le contour ou la frontière.

Aussi nous proposons une approche qui est basée sur une approche locale et qui procède par faibles déformations des contours à travers plusieurs niveaux de résolution, dans l'esprit d'une stratégie du grossier au plus fin: "a coarse to fine strategy".

On commence donc par réduire l'image originale par un processus de multirésolution parmi ceux qu'on a vu au chapitre précédent jusqu'à un certain niveau. Celui ci va correspondre au niveau où on va commencer la segmentation par contours actifs. Ce procédé de descente en résolution a pour effet d'atténuer le bruit et la texture dans l'image originale qui peuvent gêner l'évolution de la courbe pour détecter le contour de l'objet.

Une fois que l'on a choisi le niveau où on va commencer la segmentation, on applique à l'image correspondante une des méthodes de contours actifs que nous avons vues au second chapitre pour obtenir le contour de l'objet à cette résolution. Mais comme on est intéressé par le contour de l'objet à la résolution initiale, il nous faudra "transporter" ce contour à la résolution de l'image d'origine pour avoir le contour à l'échelle dont on a besoin; ce transport peut alors se faire de plusieurs façons comme nous allons le décrire un peu plus loin.

Notre approche comprend donc trois phases qui peuvent être résumées de la manière suivante:

- Phase de réduction: elle correspond à la réduction de l'image originale par un des processus de multirésolution, et à choisir le niveau où on commence la segmentation. On proposera par la suite comment choisir ce niveau de manière à ne pas perdre trop d'information sur le contour cherché.
- Phase de détection: elle concerne la détection par contours actifs du contour de l'objet à faible résolution de l'image.

- Phase de synthèse: elle consiste à “ramener” le contour obtenu de basse résolution à haute résolution en tenant compte de l'information locale de chaque niveau, information perdue lors du processus de réduction.

### 4.2.1 Phase de réduction

Dans ce paragraphe, on va parler du niveau d'arrêt du processus de réduction des images, afin de commencer la segmentation. Il s'agit de choisir ce niveau de manière à ne pas altérer l'objet pendant la descente en résolution, et à ne pas perdre (ou rajouter) trop d'informations lors du processus de décomposition et de réduction de l'image.

Aussi, nous proposons d'utiliser le critère de la variation d'entropie de l'image pour choisir ce niveau de début de segmentation.

L'entropie d'une image d'intensité  $I$  est définie par:

$$H(I) = - \sum_{i=0}^n p_i \ln(p_i).$$

où  $p_i$  désigne la fréquence du niveau de gris  $i$  dans l'image  $I$ , et la sommation est sur tous les niveaux de gris présents dans l'image.

L'entropie  $H$  d'une image donne une idée sur la distribution des niveaux de gris présents dans cette image, et pour une suite d'images, elle va nous renseigner sur l'information perdue ou rajoutée quand on passe d'une image à une autre par un processus quelconque (réduction, filtrage, approximation, ...).

En particulier, pour une descente en résolution, l'entropie  $H$  nous permettra de choisir le niveau  $l$  de la pyramide où la variation est très grande ou significative. Le niveau où commence la détection est donné par le niveau  $l - 1$ , c'est à dire le niveau précédant.

Un exemple d'une telle variation de la courbe d'entropie de l'image de fibre musculaire est donné dans la figure (22), où en abscisse on a les résolutions de l'image dans l'ordre décroissant, et en ordonnée on a les valeurs d'entropie correspondantes.

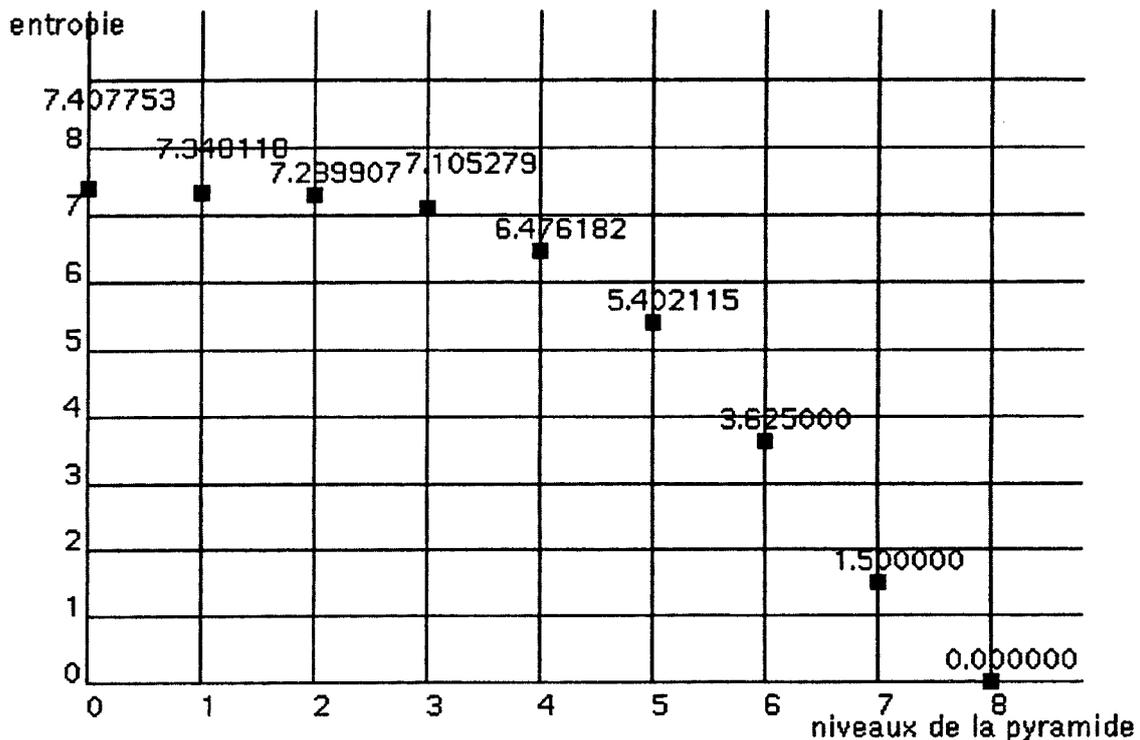


FIG. 22 - Courbe et valeurs d'entropie à travers plusieurs résolutions.

On constate que la valeur d'entropie est quelque peu constante pour les trois premiers niveaux de résolution (correspondant aux diminutions successives de 256, 128, 64, ...). Un gradient d'entropie apparaît quand on passe à la résolution 32 et ce gradient est tellement accentué quand on passe à la résolution 16.

Pour cette image, il conviendra de s'arrêter au niveau 2 c'est à dire à la résolution 64.

#### 4.2.2 Phase de détection

Il s'agit d'appliquer dans cette phase une des différentes méthodes de contours actifs que nous avons vues auparavant, cette opération s'applique à la plus basse résolution, celle du niveau que l'on a choisi pour commencer la segmentation, afin d'obtenir un contour à faible résolution.

En appliquant aux images réduites l'algorithme des snakes, on a constaté une certaine "robustesse" des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  quand on les prend constantes, et plus

exactement, on a remarqué le phénomène suivant:

Pour une même initialisation, on a maintenu un des coefficients  $\alpha$  ou  $\beta$  constant, et on a fait varier l'autre. Ensuite se basant sur des critères visuels pour juger de la qualité de la détection, on a remarqué qu'on disposait de plus de choix pour chacun des deux paramètres à faible résolution qu'à la résolution initiale dans la mesure où la taille du "bon intervalle" dans lequel on a une bonne détection à plus faible résolution est presque le double de celui à la résolution initiale. Ceci est une constatation et ne peut avoir de valeur justificative même si l'idée de la multirésolution va dans ce sens.

On peut dire alors que travailler sur des images réduites offre plus de choix pour ces paramètres, d'où l'explication du mot "robustesse" que nous avons employé.

Dans la mesure où on ne dispose que d'un critère visuel pour illustrer ce phénomène, on va présenter quelques images à la fin de ce chapitre.

Passons maintenant à la description de la dernière étape de l'approche qui est celle de la synthèse ou la remontée du contour obtenu par détection, du plus haut niveau de la pyramide à la résolution initiale.

### 4.3 Phase de synthèse

Cette phase est initialisée par le contour détecté à basse résolution, et on se propose de le ramener à la résolution supérieure et ceci de manière itérative jusqu'à accéder à la résolution de l'image originale.

Pour cela on propose différentes méthodes à savoir:

- Ajustements successifs.
- Séparation du modèle.
- Affinement successifs.
- Déformations successives.

En résumé, l'approche que nous proposons peut être synthétisée par le schéma de la figure (23), et passons à la description de chaque méthode à part en commençant par la première, celle des ajustements successifs.

### 4.3.1 Ajustements successifs

A basse résolution, on a une courbe  $C$  détectée par contours actifs qui modélise le contour de l'objet. Cette courbe va jouer le rôle de courbe initiale à la résolution supérieure et on fait dérouler l'algorithme des snakes pour obtenir le contour à cette nouvelle résolution. A son tour, ce contour servira de courbe initiale à la résolution supérieure et on répète le même processus à la nouvelle résolution pour obtenir un nouveau contour.

On agit de la même manière à la résolution supérieure et ainsi de suite, jusqu'à retrouver un contour à la résolution initiale, d'où le terme d'ajustements successifs.

Ceci revient donc à ajuster au fur et à mesure, le contour à chaque résolution en tenant compte de l'information locale de l'image à cette résolution, et au voisinage du contour pour ne lui faire subir que de légères déformations afin de l'amener à épouser la forme de l'objet.

Donnons maintenant une formalisation de l'approche par ajustements successifs:

Soient  $I_0$ : l'image originale,  $I_1$ : l'image réduite au premier niveau, ..., et  $I_N$ : l'image réduite au niveau où commence la segmentation.

Notons par  $X_j(t) : s \in [0, 1] \rightarrow X_j(t, s)$  les courbes à travers ces différentes résolutions pour  $0 \leq j \leq N$ .

A niveau de résolution  $j$  fixé, et en faisant varier  $t$  entre 0 et  $T_j$  ( $0 \leq t \leq T_j$ ), on obtient les différentes courbes paramétrées par la variable spatiale  $s$  traduisant l'évolution du snake à cette résolution  $j$ .

Désignons par  $n$  la normale à chaque courbe (on a préféré garder une notation légère pour la normale car il est évident qu'elle dépend de la courbe choisie), et désignons par  $F_j$  la force normalisée due au gradient de l'image  $I_j$ .

Donc le paramètre  $j$  désigne la résolution,  $s$  est le paramètre spatial décrivant les points de la courbe, et  $t$  désigne le temps correspondant aux itérations lors du déplacement de la courbe à une résolution donnée. Enfin  $T_j$  est le temps d'arrêt de l'évolution de la courbe à la résolution  $j$  et par suite  $X_j(T_j, \cdot)$  est le contour final à la résolution  $j$ .

On commence par une courbe initiale  $U$  fournie par l'observateur à la résolution inférieure  $N$ , et on lui applique l'algorithme des snakes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_N}{\partial t} - (\alpha_N X'_N)' + (\beta_N X''_N)'' = \lambda_N n + \mu_N F_N(X_N) \\ \text{Conditions aux limites} \\ X_N(0, \cdot) = U(\cdot) \end{array} \right.$$

...

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_{N-1}}{\partial t} - (\alpha_{N-1} X'_{N-1})' + (\beta_{N-1} X''_{N-1})'' = \mu_{N-1} F_{N-1}(X_{N-1}) \\ \text{Conditions aux limites} \\ X_{N-1}(0, \cdot) = 2X_N(T_N, \cdot) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_0}{\partial t} - (\alpha_0 X'_0)' + (\beta_0 X''_0)'' = \mu_0 F_0(X_0) \\ \text{Conditions aux limites} \\ X_0(0, \cdot) = 2X_1(T_1, \cdot) \end{array} \right.$$

$X_0(T_0, \cdot)$  est donc le contour final détecté à haute résolution.

Le facteur 2 intervient dans les équations parce qu'on a pris une réduction diadique des images et qu'il faut en tenir compte pour placer le contour au voisinage de l'objet, et le ramener à bonne échelle quand on passe d'une résolution à une autre.

**Remarque 4.1** *On ne tient compte de la normale à la courbe qu'au plus bas niveau, car le fait de transporter le contour obtenu à la résolution supérieure en lui appliquant une homothétie de rapport 2 permet de le placer au voisinage de l'objet, ce qui ne nécessite pas l'introduction de la force d'évolution suivant la normale pour le pousser encore plus vers l'objet, et permet donc de donner à la force du gradient de l'image plus de poids et plus d'influence.*

On peut aussi faire une autre remarque à propos de cette approche concernant les itérations nécessaires à l'ajustement.

**Remarque 4.2** *Le fait de procéder par ajustements successifs requiert peu d'itérations pour la détection car à chaque résolution, on se place très près de l'objet.*

Une autre variante de cette approche, consiste à diviser le processus en deux phases: la première phase intervient lors de la détection à la plus basse résolution

choisie, qui est le niveau où on va commencer la segmentation, et la seconde lors des ajustements du contour en passant d'une résolution à une autre. Alors comment justifier la différence entre les deux phases? Ceci fait l'objet de ce que nous appelons "séparation du modèle".

### 4.3.2 Séparation du modèle

Dans la première étape qui est celle de la détection au plus haut niveau de la pyramide, on a choisi de ne tenir compte dans l'énergie globale des snakes que du paramètre  $\alpha$  influençant la tension de la courbe et du facteur gradient de l'image. Ceci se traduit par une assimilation des déformations de la courbe aux seules vibrations d'une membrane élastique soumise aux forces extérieures. En effet on peut l'expliquer par la présence du terme laplacien et l'absence du terme bi-laplacien dans l'équation stationnaire du mouvement.

$$(21) \quad -(\alpha v)' = f.$$

Quant à la seconde phase, celle concernant les résolutions intermédiaires, on va cette fois-ci tenir compte dans l'énergie des snakes du terme  $\beta$  agissant sur la courbure, ainsi que du gradient de l'image. Ceci permet de n'avoir dans l'équation stationnaire que le terme bi-laplacien et les forces extérieures ce qui correspond aux vibrations d'une plaque mince élastique.

$$(22) \quad (\beta v)'' = f.$$

Cette division du processus de déformations revient donc à laisser évoluer la courbe pendant la première phase sous l'influence des forces internes dues à la minimisation de sa tension, et des forces externes dues à l'image, sans contrôler sa courbure, et ce n'est qu'à la deuxième phase, que l'on va tenir compte du terme influençant la courbure dans l'énergie des snakes pour les faibles déformations inter-résolutions afin de mieux l'ajuster au bord de l'objet.

En effet, il semble naturel de ne contrôler la courbure qu'en dernier lieu, c'est à dire dans la deuxième phase d'ajustements parce qu'on n'est intéressé dans la première phase que par le fait de trouver un contour à proximité de l'objet sans

qu'il soit obligé d'épouser parfaitement sa forme étant donné qu'après, il va subir des ajustements. D'autre part, le fait que l'on ait une bonne initialisation (très proche du contour de l'objet) dans les résolutions supérieures ne nécessite pas une minimisation de la tension de la courbe ou de sa longueur, car elle sera soumise à de faibles déformations.

Ainsi les équations régissant les mouvements de la courbe à travers les différentes résolutions deviennent:

$$\begin{cases} \frac{\partial X_N}{\partial t} - (\alpha_N X'_N)' = \lambda_N n + \mu_N F_N(X_N) \\ \text{Conditions aux limites} \\ X_N(0, \cdot) = U(\cdot) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X_{N-1}}{\partial t} + (\beta_{N-1} X''_{N-1})'' = \mu_{N-1} F_{N-1}(X_{N-1}) \\ \text{Conditions aux limites} \\ X_{N-1}(0, \cdot) = 2X_N(T_N, \cdot) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial X_0}{\partial t} + (\beta_0 X''_0)'' = \mu_0 F_0(X_0) \\ \text{Conditions aux limites} \\ X_0(0, \cdot) = 2X_1(T_1, \cdot) \end{cases}$$

On a parlé du mouvement stationnaire quand on a assimilé la première phase à la vibration d'une membrane élastique, et la seconde à celle d'une plaque mince élastique, parce que l'analogie avec le mouvement évolutif en théorie d'élasticité, nécessite la présence dans l'équation d'évolution de la courbe, d'une dérivée seconde par rapport au temps au lieu de la dérivée première. Ceci est dû au fait que les équations d'élasticité régissant l'évolution des vibrations de la membrane et de la plaque mince sont de nature hyperboliques et font intervenir la deuxième dérivée par rapport au temps  $t$  (voir [Lan67]).

Quelques résultats illustrent cette approche sur une portion de l'image originale et de l'image réduite au niveau le plus haut de la pyramide (figure 24). On procède à une initialisation dans l'image réduite et on détecte les contours à faible résolution (figure 25), ensuite on utilise ce résultat comme initialisation au niveau supérieur et

on l'ajuste pour trouver le résultat final à haute résolution (figure 26).

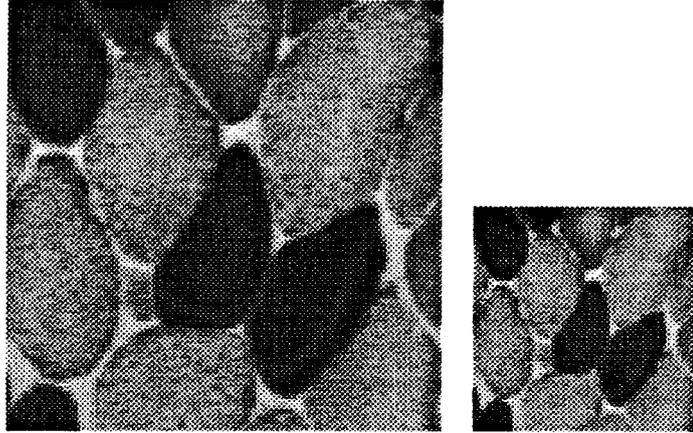


FIG. 24 - Portions de l'image originale de muscle et de l'image réduite.

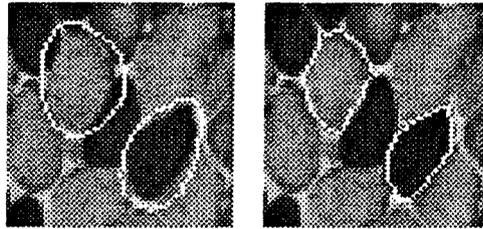


FIG. 25 - Initialisations et résultats sur l'image réduite.

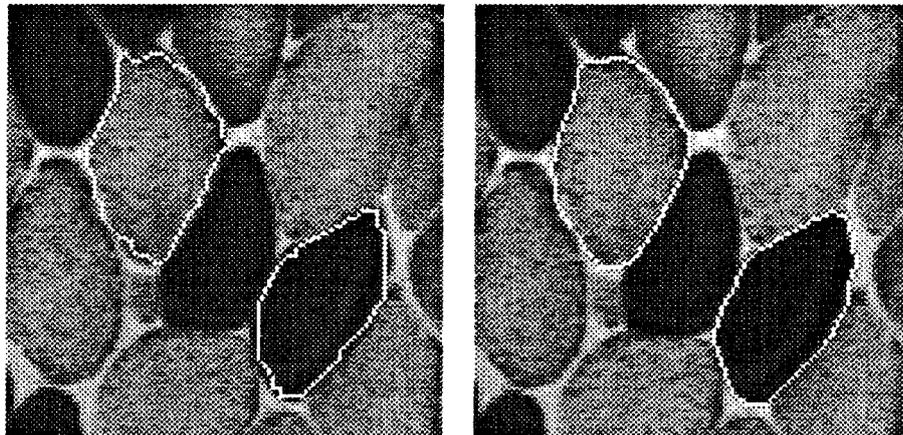


FIG. 26 - Remontée des contours et résultats sur l'image originale.

La troisième méthode proposée pour transporter le contour détecté à la résolution initiale est l'approche par affinements successifs que l'on va décrire dans le prochain paragraphe.

### 4.3.3 Affinements successifs

Cette approche est assez différente des précédentes dans la mesure où on va utiliser les détails obtenus à chaque résolution pour les intégrer au contour. En effet, dans l'étape de réduction, on suppose que l'on a réduit l'image en utilisant la décomposition par ondelettes bi-orthogonales, et qu'on garde les détails des différents niveaux.

Après l'étape de détection par contours actifs réalisée au plus bas niveau de résolution, on va intégrer au contour détecté les détails perdus lors de la décomposition de l'image entre le niveau inférieur de la pyramide et le niveau où l'on a commencé la détection.

Pour cela, on va utiliser l'algorithme de Mallat pour la reconstruction, appliqué à une image formée uniquement par le contour. On obtient alors une image de même taille que celle à la résolution supérieure et qui contient une bande (couronne pour les contours fermés) sur laquelle on va porter notre intérêt pour trouver le contour à cette résolution, en supposant que le contour cherché est situé à l'intérieur de cette bande.

Cette bande étant épaisse, et le contour cherché devant être d'épaisseur unité, il faut amincir cette bande en tenant compte des niveaux de gris de l'image à la présente résolution à l'intérieur de cette bande, et c'est ici qu'intervient la prise en compte de l'information au voisinage du contour détecté.

On propose de procéder à l'amincissement de cette bande en la considérant comme un objet à niveaux de gris sur lequel on va opérer une squelettisation à niveaux de gris qui a l'avantage de préserver la connexité de la courbe ([Ser88]).

Le résultat obtenu sera alors le contour ou l'élément de frontière cherché à la nouvelle résolution qui à son tour va nous permettre de remonter à la résolution supérieure en procédant de la même manière:

Former l'image contour, y intégrer les détails et procéder ensuite à l'amincissement de la bande obtenue par squelettisation à niveaux de gris.

On répète le processus à chaque résolution jusqu'à la plus haute résolution qui est celle de l'image d'origine, pour obtenir le contour final.

Des résultats des différentes étapes de cette méthode sont présentés par la figure (27).

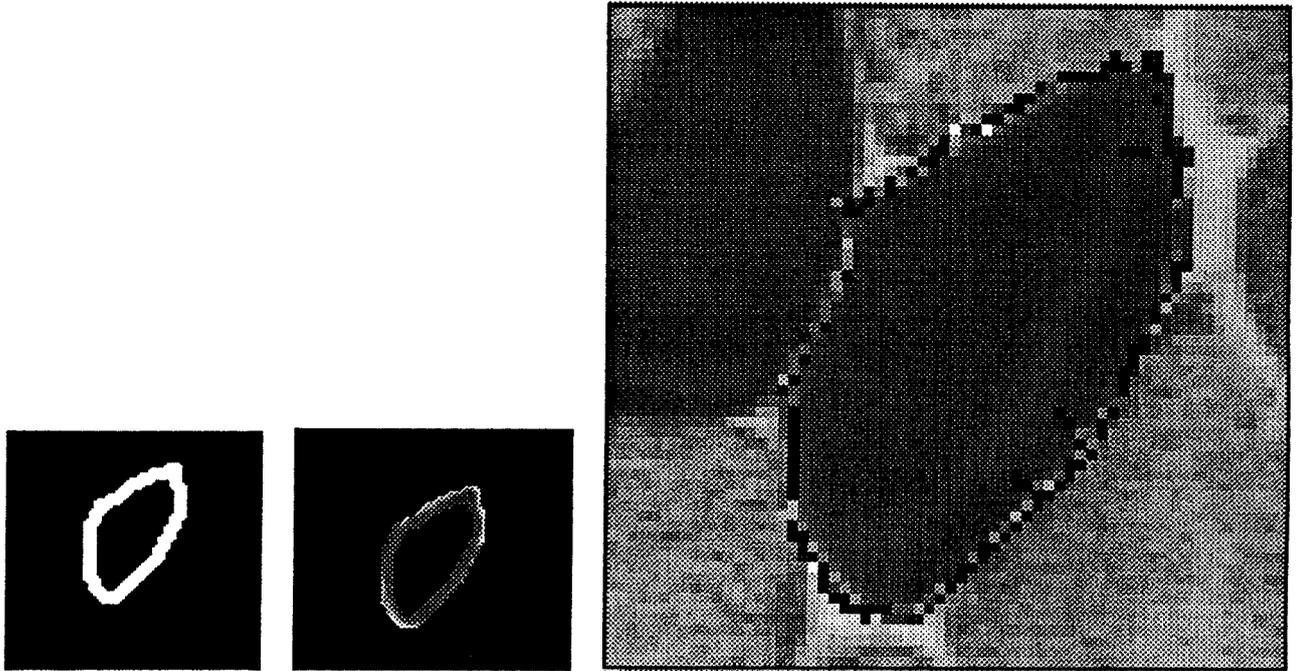


FIG. 27 - forme de la bande, la bande comme objet à niveaux de gris et résultat de la squelettisation.

L'idée d'injecter les détails présents aux différents niveaux de résolution est intéressante mais l'inconvénient de cette méthode réside dans l'utilisation du processus de squelettisation. Il fournit une courbe à caractère relativement bruité et qui va à l'encontre de la philosophie régularisante des contours actifs. On préfère à cette méthode l'approche par déformations successives présentée dans le paragraphe suivant.

#### 4.3.4 Déformations successives

Une autre variante de la méthode précitée, basée aussi sur la détection et l'injection des détails, est la méthode des déformations successives que nous nous proposons de décrire:

Après avoir détecté le contour à faible résolution, on prend l'image formée uniquement par l'objet segmenté (en niveaux de gris) dans l'image à faible résolution, et on y intègre les détails horizontaux, verticaux et diagonaux perdus lors de la réduction, en lui appliquant l'algorithme de reconstruction de Mallat. Ceci permet d'annuler tous les coefficients d'ondelettes qui ne correspondent pas à l'objet. On obtient alors à la résolution supérieure une image contenant essentiellement un objet en niveaux de gris isolé dans toute l'image. Ensuite on injecte à cette image les détails par l'algorithme de reconstruction de Mallat pour retrouver une image à la résolution supérieure. On répète le même processus jusqu'à arriver à la résolution de l'image d'origine, où on aura une image dans laquelle l'objet d'intérêt est isolé de tout autre objet de l'image, et en particulier de ses voisins, et on retrouve le contour de l'objet en procédant par initialisation et détection par contours actifs.

Pour illustrer cette méthode, nous présentons dans la figure (28) le contour détecté et l'objet correspondant à faible résolution 128x128. L'image reconstruite par ondelettes à résolution supérieure 256x256, l'initialisation et la détection sur cette image, et enfin le résultat final sur l'image originale 256x256 sont présentés dans la figure (29).



FIG. 28 - Contour détecté et objet correspondant sur l'image réduite.

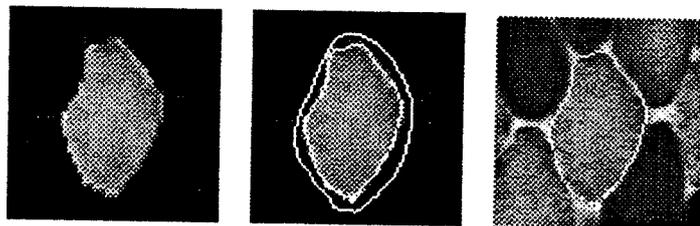


FIG. 29 - Injection des détails puis initialisation, détection sur l'image obtenue à haute résolution et résultat sur l'image d'origine.

Il faut préciser certains faits dans cette méthode qui sont implicites mais que nous tenons à signaler:

Ayant constaté par expérimentation que les paramètres de l'énergie interne des snakes sont plus robustes à résolutions inférieures, on pense que la détection sera plus performante à bas niveau et on suppose que la différence entre l'objet extrait après détection et l'objet réel dans l'image réduite est négligeable ceci signifie qu'il faut réaliser une très bonne détection à faible résolution.

Pourquoi alors une telle supposition? La réponse à cette question vient du fait qu'après injection des détails dans l'objet, ce qui veut dire que l'on s'est ramené à une résolution supérieure, on obtient une image où l'objet principal est censé ressembler le plus possible à l'objet dans l'image à la résolution correspondante, et par suite avoir toutes les informations nécessaires pour détecter son contour à la plus haute résolution.

En fait, on veut profiter de l'isolation de l'objet pour détecter son contour, sans l'altérer afin de ne pas procéder à une détection d'un objet différent de celui qui nous intéresse.

C'est pourquoi on utilise des ondelettes bi-orthogonales dans le processus de décomposition et de reconstruction de l'image, qui contrairement aux ondelettes orthogonales, permettent une reconstruction exacte de l'image grâce aux différents filtres d'analyse et de synthèse.

## 4.4 Discussion de l'approche globale

Nous allons dans ce paragraphe présenter les avantages et les inconvénients de l'approche proposée dans le cadre de la coopération entre les deux processus.

Commençons par citer les avantages de cette combinaison:

- Le fait de réduire l'image permet d'atténuer le bruit et la texture dans cette image, qui à haute résolution, peuvent créer des maxima locaux du gradient d'image et gêner l'évolution de la courbe et attirer ses points.
- Comme la détection de contours par contours actifs est une approche essentiellement locale, le fait de tenir compte des détails et informations au voisinage de

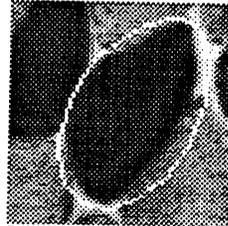
l'objet à chaque résolution, permet d'apporter plus d'informations sur l'objet, et est en parfaite harmonie avec l'esprit même de l'approche.

- En passant d'une résolution supérieure à une résolution inférieure, la taille de l'image est divisée par quatre. La taille de la courbe se trouve aussi réduite pour autant à cause de la réduction de la taille de l'objet d'intérêt, ce qui accélère le processus de détection par contours actifs à faible résolution.
- En appliquant l'algorithme des contours actifs à faible résolution, on a plus de marge pour choisir les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  lorsque ces paramètres sont constants. Ceci a été constaté expérimentalement.

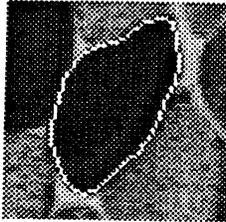
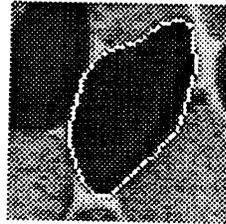
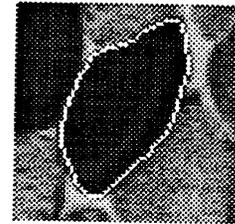
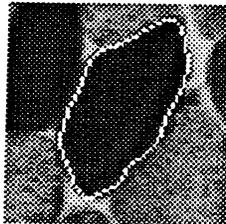
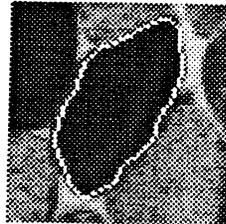
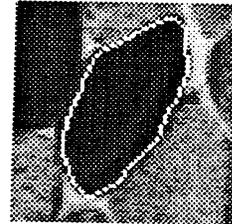
En ce qui concerne les inconvénients de l'approche, on peut lui reprocher les faits suivants:

- L'existence d'un risque de dégradation de l'information sur l'objet lors du processus de réduction de l'image.
- Le choix du niveau où l'on commence la segmentation porte sur l'entropie de l'image qui est un critère global prenant en compte toute l'image, alors qu'un critère local serait plus opportun et permettrait de voir comment varie l'objet lors de la descente en résolution.

Une conclusion plus générale du travail ici présenté, ainsi que les perspectives envisagées par la suite, feront l'objet du chapitre suivant. De même on va procéder à une description de l'environnement que nous avons développé et des opérateurs que nous avons implantés.

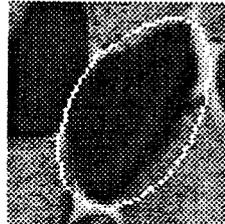


Initialisation à 256

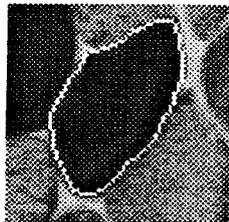
 $\alpha = 0 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.1 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.2 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.3 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.4 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.5 \quad \beta = 0.5$ 

Initialisation à 128

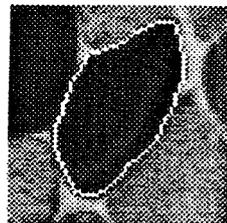
 $\alpha = 0.25 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.35 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.45 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.6 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.75 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.85 \quad \beta = 0.5$  $\alpha = 0.95 \quad \beta = 0.5$



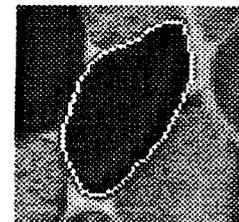
Initialisation à 256



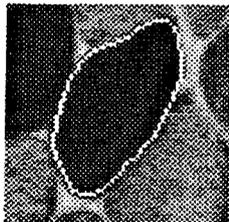
$\alpha = 0.4 \beta = 0.1$



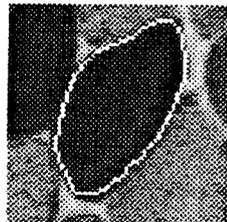
$\alpha = 0.4 \beta = 0.25$



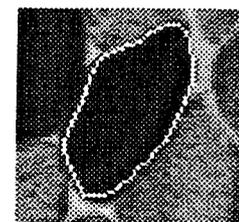
$\alpha = 0.4 \beta = 0.45$



$\alpha = 0.4 \beta = 0.5$



$\alpha = 0.4 \beta = 0.55$



$\alpha = 0.4 \beta = 0.6$



Initialisation à 128



$\alpha = 0.4 \beta = 0.1$



$\alpha = 0.4 \beta = 0.2$



$\alpha = 0.4 \beta = 0.5$



$\alpha = 0.4 \beta = 0.8$



$\alpha = 0.4 \beta = 1.2$



$\alpha = 0.4 \beta = 1.5$



$\alpha = 0.4 \beta = 1.8$



$\alpha = 0.4 \beta = 2.8$

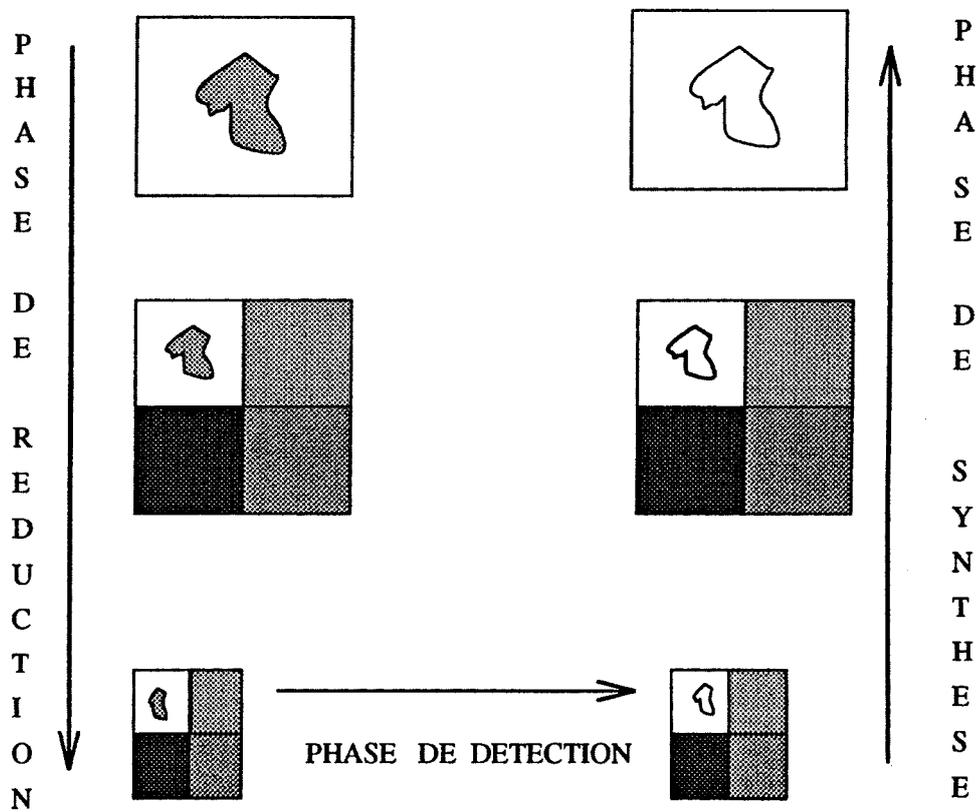


FIG. 23 - Schéma résumant l'approche coopérative.

# Chapitre 5

## Développements et conclusion

### 5.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, on va présenter les outils développés ainsi que les environnements d'exploitation nécessaires pour obtenir les résultats qui ont servi à valider les applications de notre travail de recherche.

Nous commencerons par décrire le logiciel de traitement d'images sous lequel tournent nos programmes et qui a été développé au laboratoire TIMC-IMAG de Grenoble par l'équipe INFODIS sous le nom d'Image Package Software (I.P.S.). Ensuite on parlera des différents opérateurs développés sous cet environnement pour nos propres applications, et on terminera le chapitre par une conclusion générale du travail présenté dans ce mémoire et les perspectives des prochains travaux envisagés.

### 5.2 Description de l'environnement de travail

La validation des travaux théoriques et des modèles proposés dans toutes les disciplines appliquées passe par le stade de l'expérimentation. En traitement et analyse d'images, ceci implique la nécessité d'interfaces conviviales et puissantes pour bien les manipuler afin de tester les différents modèles et techniques utilisés, car les résultats sont en grande partie appréciés visuellement.

Le logiciel I.P.S. a suivi les différentes étapes par lesquelles sont passées les plateformes matérielles du Laboratoire. Cela a commencé en 1985 sur les stations Apollo. Ensuite c'était le tour des stations graphiques IBM 6150 en 1987, puis les Macintosh

en 1990 et depuis 1992, sur les stations Sun SPARC2 avec le système UNIX et le gestionnaire OpenWindows. Ces développements sont actuellement suivis par E. Thiel [Thi94] qui a aussi assuré la conception de la nouvelle interface.

Actuellement il existe deux versions d'I.P.S., une version globale G.I.P.S. regroupant tout le savoir faire de l'équipe en matière de traitement d'images, et comprenant les opérations de base comme les transformations géométriques, algébriques, morphologie mathématique, différents détecteurs de contours, transformation de Fourier, etc...

La deuxième version P.I.P.S. est une version personnelle qui permet à chaque utilisateur faisant partie de l'équipe de développer ses propres opérateurs, avant d'intégrer la version définitive dans la version globale.

De notre part, on a commencé notre propre développement d'interfaces en 1991, bien avant d'utiliser la version personnelle P.I.P.S. qui offre la possibilité d'une part d'avoir un environnement uniforme pour toute l'équipe, et d'autre part d'interagir avec la version globale G.I.P.S. en transmettant les images de l'une vers l'autre juste par un "drag and drop" afin d'utiliser directement toute la bibliothèque d'opérateurs disponibles dans la version globale.

La fenêtre principale contient différents menus comme File qui permet le traitement des fichiers, New servant à créer un nouvel icône, et Oper comprenant les différents opérateurs que nous allons décrire au prochain paragraphe. Elle contient tout aussi un menu Help qui donne une brève description des opérateurs utilisés.

Les images sont affichées dans la fenêtre principale sous forme d'icônes d'images ayant un menu qui permet de changer les propriétés des images (taille, nom, palette de couleurs,...) avec la possibilité d'avoir un zoom, ou encore la possibilité de créer un autre icône à partir d'une portion qui nous intéresse de l'image de travail.

Les opérateurs sont aussi affichés sous forme d'icônes disposant d'un menu pour changer les paramètres de l'application, et permettant de l'exécuter.

## 5.3 Opérateurs intégrés dans le logiciel

Dans ce paragraphe, nous allons décrire un peu plus en détail les différents opérateurs que nous avons implanté <sup>1</sup> pour nos applications (fig. 30), et qui ont été programmés en langage C, et qui sont les suivants:

- L'algorithme de Burt et Adelson [Burt83] donnant les pyramides Gaussienne et Laplacienne avec l'affichage des histogrammes et de la courbe d'entropie.
- Les procédures de réduction et de reconstruction d'images par ondelettes avec la possibilité d'avoir différents filtres.
- Les snakes fermés par différence finies schémas implicite et explicite, avec un choix d'initialisation par B-splines ou courbes de Beziers en plaçant des points de contrôles sur l'image, ou encore un simple polygone. Il y a aussi la possibilité d'insérer ou d'éliminer un point de contrôle ou encore de jouer sur leurs multiplicités.

Les déformations des courbes par expansion ou par contraction sont visualisées en temps réel pour suivre l'évolution des contours.

- Les snakes ouverts à extrémités libres ou fixes, et offrant le même traitement que pour les snakes fermés.
- La déformation par la méthode de la bulle pour des contours fermés et des morceaux de frontières avec la possibilité de faire varier différents paramètres par des boites de dialogues très conviviales.

Une fois que le contour a été initialisé et les paramètres choisis, le processus est entièrement automatique, donnant la courbe d'énergie et le résultat de la détection. Là encore on peut suivre l'évolution des sommets de la courbe en temps réel.

- La possibilité de passer des contours obtenus à faibles résolutions aux autres résolutions supérieures, et la possibilité de combiner plusieurs méthodes différentes par exemple détecter le contour à faible résolution par la méthode de

---

<sup>1</sup>En collaboration avec un stagiaire Hollandais Jan-Willem Wissema de l'université de Leiden, dans le cadre du programme d'échange Européen EURASMUS.

la bulle et procéder à son ajustement en utilisant la méthode des snakes.

- Une procédure de squelettisation d'une couronne ou bande à niveaux de gris pour obtenir un contour d'épaisseur unité servant de contour dans la méthode des affinements successifs.

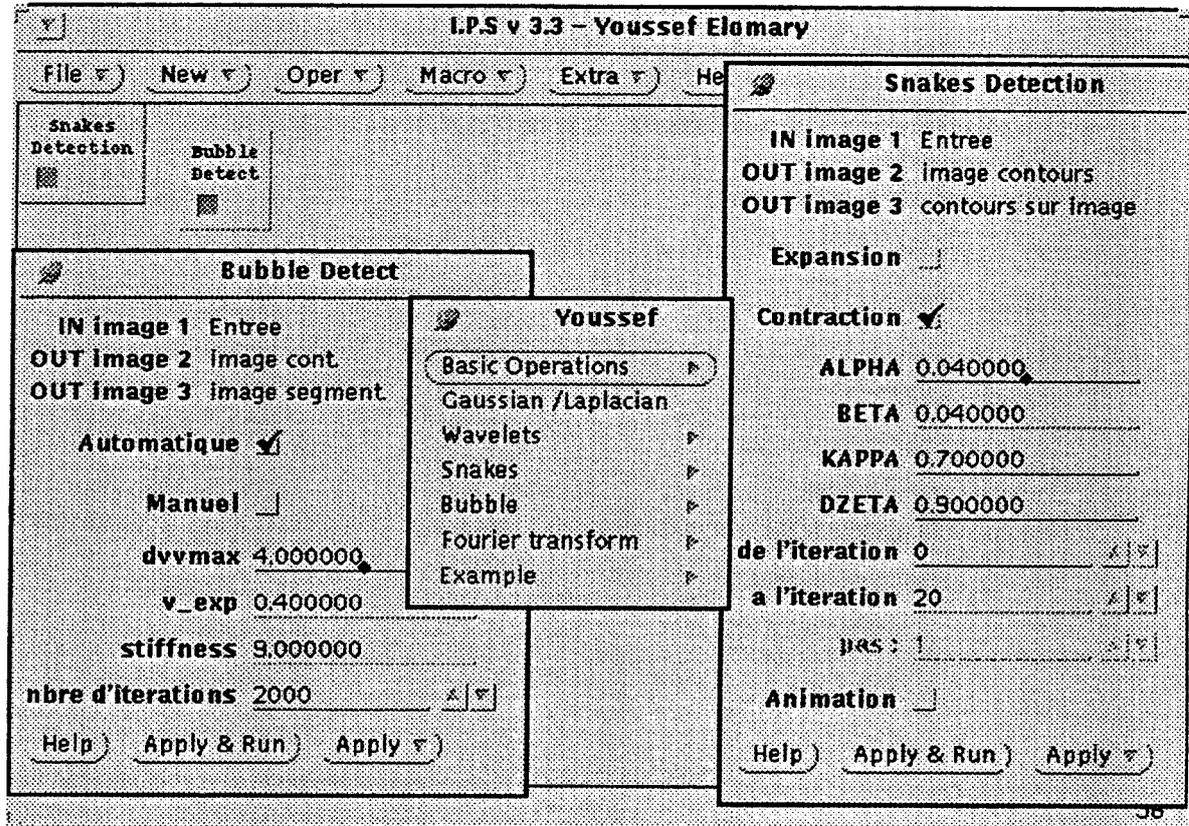


FIG. 30 - Interface de traitement.

## 5.4 Conclusion et perspectives

En conclusion de ce travail et après le chapitre d'introduction, qui a permis de faire l'historique des méthodes que l'on a vu dans ce manuscrit, nous avons étudié dans le deuxième chapitre trois modèles de contours actifs avec quelques contributions théoriques sur le modèle des snakes en ce qui concerne l'existence de la solution pour les snakes fermés et les snakes à extrémités libres à travers un théorème d'existence, nous avons aussi montré une proposition donnant l'évolution des snakes fermés dans

une zone homogène. Chaque type de snake est illustré par une image donnant son initialisation et le résultat.

Nous avons proposé un nouveau modèle qui est celui de la bulle, et nous l'avons comparé au modèle des snakes et au modèle géométrique pour les contours actifs proposé par [Cas92]. Là encore des résultats sur des images ont permis de tester ce modèle.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté trois techniques de multirésolution différentes de part leur façon de décomposer les images et de construire les pyramides, tout en les comparant pour expliciter leurs points communs et leurs différences. Nous avons pu établir grâce à une proposition un lien entre la multirésolution par un noyau gaussien et la minimisation d'énergie pour des images.

Ensuite, on a proposé au quatrième chapitre une méthode originale basée sur la coopération entre la segmentation par contours actifs et les techniques de multirésolution pour améliorer la détection de contours lorsque celle-ci n'est pas satisfaisante à haute résolution. Cette coopération est basée sur différentes approches comprenant des ajustements successifs effectués à chaque résolution de la pyramide ou encore des affinements successifs.

Enfin, dans ce dernier chapitre, nous avons décrits les opérateurs implantés pour les différents procédés que nous avons utilisés.

Dans les perspectives des futurs travaux que l'on prévoit de faire dans ce domaine, il est envisageable de faire plus d'investigations dans le domaine des modèles déformables et dans la coopération en particulier:

- Améliorer le modèle de la bulle, surtout en ce qui concerne le critère d'arrêt de l'évolution des sommets.
- Etudier la possibilité de l'utilisation du schéma de Bacry [Bac] pour la résolution des équations d'évolution des snakes et du modèle de diffusion.
- Étendre le modèle de la bulle aux images 3D en l'initialisant par exemple par une sphère pour les objets volumiques ou un plan pour les objets surfaciques.
- Il semble que le modèle géométrique basé sur les courbes de niveaux, semble

plus approprié à la poursuite de l'étude de la coopération entre la multirésolution et les contours actifs dans la mesure où il prend en compte l'évolution de toute une image à travers les courbes de niveaux et non des courbes paramétrées comme les snakes et la bulle.

- Dans l'optique de faire coopérer les différents processus, prévoir une coopération entre la croissance des régions et la détection par contours actifs.
- Concernant les paramètres de l'énergie interne des snakes à savoir  $\alpha$  et  $\beta$ , nous les avons déterminés expérimentalement de manière à ce qu'ils donnent un bon résultat visuel pour plusieurs objets dans l'image. Il est important d'envisager de les étudier dans l'équation générale d'évolution comme des contrôles non linéaires, et il importe de faire leur étude et de déterminer leur existence en se servant par exemple de la théorie du contrôle optimal.

# Bibliographie

- [Alv92a] L. Alvarez, F. Guichard, P-L.Lions, and J-M. Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. Technical Report 9216, CEREMADE, Paris IX - Dauphine, 1992.
- [Alv92b] L. Alvarez, P-L. Lions, and J-M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29, N 3:845–866, 1992.
- [ambr88] L. Ambrosio and E. De Giorgi. Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni. *Atti accad. Naz. Lincei-Rend.-cl. sci. Fis. Mat. Natur*, 82,2:199–210, 1988.
- [Ami88] A. A. Amini, S. Tehrani, and T. E. Weymouth. Using dynamic programming for minimizing the energy of active contours in the presence of hard constraints. In *International Conference on Computer Vision*, May 1988.
- [Amit] Y. Amit, U. Grenander, and M. Piccioni. Structural image restoration through deformable templates.
- [Ant92] A. Antoniadis, P. Baras, and M. Coulibaly. Estimation non paramétrique d'une densité de probabilité par ondelettes orthogonales. In *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Toulouse, France, June 1992.
- [Aze87] R. Azencott. Markov fields and image analysis. In *AFCEC, Congress*, Antibes, France, 1987.
- [Bac] E. Bacry. *Utilisation de la transformation en ondelettes pour l'analyse de signaux fractals et pour la résolution d'équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université de PARIS VII.

- [Bac92] E. Bacry, S. Mallat, and G. Papanicolaou. A wavelet based space-time adaptative numerical method for partial differential equations. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, Vol. 26, Number 7:793–834, 1992.
- [Baj] R. Bajcsy and S. Kovacic. Multiresolution elastic matching.
- [Bar87] R.H. Bartels and J.C. Beatty and B.A. Barsky. *B-splines*, volume Mathématiques et CAO, 6. Hermes, 1987.
- [Ber90] M-O Berger and R. Mohr. Towards autonomy in active contour models. In *ICPR*, Atlantic City, NJ (USA), June 1990.
- [Ber91] M-O. Berger. *Les contours actifs: modélisation, comportement et convergence*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Février 1991.
- [Bes89] G. Besson. Vascular segmentation using “snake” transforms and regions growing. *SPIE Medical Imaging*, 1092:429–433, 1989.
- [Bey92] G. Beylkin. On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 6, N 6:1716–1740, 1992.
- [Bij92] A. Bijaoui. Astronomical image inventory by the wavelet transform. In *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Toulouse, France, June 1992.
- [Blo89] D. Blostein and N. Ahuja. A multiscale region detector. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 45:22–41, 1989.
- [Bon] P. Bonnet and D. Remond. Une transformée en ondelettes rapide. *Traitement de Signal*, 8, N 3:195–207.
- [Boo85] C. De Boor. *A Practical Guide to Splines*, volume Applied Mathematical Sciences 27. Springer-Verlag New York, Third printing 1985.
- [Boo89] F. Bookstein. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Trans. on PAMI*, 11, N 6:567–585, 1989.

- [Bos94] P-L. Bossart. *Détection de contours réguliers dans des images bruitées et texturées: Association des contours actifs et d'une approche multiéchelle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994.
- [Bre83] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [Brz91] D. Brzakovic, A. Liakopoulos, and L. Hong. Spline models for boundary detection/description: formulation and performance evaluation. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 53, N 4:392-401, 1991.
- [Bur81] D.J. Burr. Elastic matching of line drawings. *IEEE Trans. on PAMI*, 3, Number 6, 1981.
- [Burt83] P.J. Burt and E.H. Adelson. The laplacian pyramide as a compact code. *IEEE Trans. Commun.*, COM-31:337-345, Apr, 1983.
- [Can86] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. on PAMI*, vol.8, N 6:679-698, Nov., 1986.
- [Cas92] V. Caselles, F. Catté, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours in image processing. Technical Report 9210, CEREMADE, Paris IX - Dauphine, 1992.
- [Cha93a] A. Chambolle. *Analyse Mathématiques de trois Problèmes de reconstruction visuelle*. PhD thesis, Université de PARIS IX DAUPHINE, 1993.
- [Cha93b] A. Chambolle. Image segmentation by variational methods: Mumford and shah functional, and the discrete approximations. *Manuscrit*, 1993.
- [chas91] J.-M. Chassery and A. Montanvert. *Géométrie Discrète en Analyse d'Images*. Edition Hermès, Paris, 1991.
- [Cia85] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse matricielle et à l'optimisation*. Masson, Paris, 1985.
- [Cia87] P. G. Ciarlet. *The finite element methods for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1987.

- [Coh90a] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3D reconstruction from cross sections. In *ICCV90*, Osaka, Japan, December 1990.
- [Coh90b] L.D. Cohen. *Etude des Modèles de Contours actifs et d'autres Techniques de Traitement d'images*. PhD thesis, Université de PARIS-SUD, Centre d'Orsay, 1990.
- [Coh91] L.D. Cohen. Note on active contour models and ballons. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Image Understanding*, 53 N:2:211-218, 1991.
- [Coh92a] A. Cohen. *Ondelettes et Traitement numérique du signal*, volume 25. *Recherches en Mathématiques Appliquées*, Masson, Paris, 1992.
- [Coh92b] A. Cohen, I. Daubechies, and J.C. Feauveau. Biorthogonal basis of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45:485-560, 1992.
- [Coh92c] I. Cohen. *Modèles déformables 2-D et 3-D: Application à la Segmentation d'Images Médicales*. PhD thesis, Université de PARIS IX - DAUPHINE, 1992.
- [Coh93] L. D. Cohen and I. Cohen. Finite-element methods for active contour models and ballons for 2-d and 3-d images. *IEEE Trans. on PAMI*, 15, Number 11:1131-1147, 1993.
- [Cohi92] T. Cohignac, F. Eve, F. Guichard, C. Lopez, and J-M. Morel. Numerical analysis of the fundamental equation of image processing. Technical Report 9254, CEREMADE, Paris IX - Dauphine, 12 1992.
- [Cot94] G.H. Cottet. Neural networks: Continuous approach and applications to image processing. Technical Report RT113, LMC, IMAG, Grenoble, 1994.
- [Cou92] M. Coulibaly, B. Barnier, and C. Leprovost. Application de l'analyse par ondelettes aux tourbillons engendrés par un modèle numérique du gulf stream. In *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Toulouse, France, June 1992.

- [Cra84] M.G. Crandall, I. Ishii, and P. L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Technical Report 9039, CEREMADE, Paris IX - Dauphine, 1984.
- [Cro84] J.L. Crowley and R.M. Stern. Fast computation of the difference of low pass transform. *IEEE Trans. on PAMI*, 6:212-22, 1984.
- [Dal92] G. Dal Maso, J-M. Morel, and S. Solimini. A variational method in image segmentation: Existence and approximation results. *Acta Mathematica*, 168:89-151, 1992.
- [Dau88] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41:909-996, 1988.
- [Der87] R. Deriche. Using canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *Int. J. Comp. Vis.*, pages 167-187, 1987.
- [Elo93] Y. Elomary and J-M. Chassery. Cooperation between active contour and multiresolution for edge based segmentation. In *Eighth Workshop on Image and Multidimensional Signal Processing*, Cannes, France, September 1993.
- [Elo94a] Y. Elomary and J-M. Chassery. Contours actifs en multirésolution. In *Temps-Frequence, Ondelettes et Multirésolution: Théories, modèles et applications*, Lyon, France, Mars 1994.
- [Elo94b] Y. Elomary and B. Garguet. Ondelettes et images. In *Communication Orale, Colloque de l'Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble*, France, Janvier 1994.
- [Els62] L. E. Elsgolc. *Calculus of Variations*. Pergamon Press LTD., Massachusetts, 1962.
- [Eva91] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature i. *Journal of Differential Geometry*, 33:635-681, 1991.
- [Far] G. Farin. *Courbes et Surfaces pour la CGAO*. Masson, Paris.

- [Fei89] H.G. Feichtinger and K.H. Grochening. Banach spaces related to integral group representations and their atomic decompositions. *Int. J. Funct. An.*, 86:307–340, 1989.
- [Fri92] P. Frick. Choix des ondelettes pour les modèles hiérarchiques de la turbulence. In *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Toulouse, France, June 1992.
- [Fua89] P. Fua and Y. G. Leclerc. Model driven edge detection. In *DARPA Image Understanding Workshop*, 1989.
- [Gau93] J. M. Gauch and S. M. Pizer. Multiresolution analysis of ridges and valleys in grey-scale images. *IEEE Trans. on PAMI*, 15, N 6:635–646, 1993.
- [Gel63] I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of Variations*. Prentice-Hall, INC., New Jersey, 1963.
- [Gem84] D. Geman and S. Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions and the batesian restoration of images. *IEEE Trans. on PAMI*, 6, 1984.
- [Gok93] M. Gökmen and Ching-Chung Li. Edge detection and surface reconstruction using refined regularization. *IEEE Trans. on PAMI*, 15, N 5:492–499, 1993.
- [Gra88] P. Grattoni, F. Pollastri, and A. Premoli. A contour detection algorithm based on the minimum radial inertia criterion. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 43:22–36, 1988.
- [Gro84] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Math.*, 15:723–736, 1984.
- [Gru91] I. Gruais. *Analyse asymptotique de quelques problèmes de Jonction en théorie des plaques et des poutres élastiques*. PhD thesis, Université Paris 6, 1991.
- [Hei89] C.E. Heil and D.F. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 31, N 4:628–666, 1989.

- [Ito92] S. Itô. *Diffusion Equations*, volume 114. Translations of Math. Monographs, American Math. Soc., 1992.
- [Jaf89] S. Jaffard and Y. Meyer. Bases d'ondelettes dans des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . *J. Math. pures et appli.*, Number 68:95–108, 1989.
- [Jaf92] S. Jaffard. Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29, Number 4:965–986, 1992.
- [Kas88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, pages 321–331, 1988.
- [Kir71] Kirsch R. Computer determination of the constituent structure of biological images. *Comp. Biomedical Research*, 4:315–328, 1971.
- [Koe92] G. Koepfler, C. Lopez, and J-M. Morel. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method. Technical Report 9253, CEREMADE, Paris IX - Dauphine, 12 1992.
- [Kru89] W. M. Krueger and K. Phillips. The geometry of differential operators with application to image processing. *IEEE Trans. on PAMI*, 11, Number 12:1252–1264, 1989.
- [Lan67] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*, volume Tome 7. Mir, Moscou, 1967.
- [Lau74] P.J. Laurent. *Approximation et Optimisation*. Hermann, Paris, 1974.
- [Law90] W. M. Lawton. Wavelet discretization methods for surface estimation and reconstruction. *SPIE Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics*, 1251:242–251, 1990.
- [Ley90] F. Leymarie. *Tracking and describing Deformable Objects Using Active Contour Models*. PhD thesis, Computer Vision and Robotics Laboratory, Mc Gill Research Center for Intelligent Machines, Mc Gill University, Montréal, Québec, Canada, 1990.

- [Ley92a] F. Leymarie and M.D. Levine. Simulating the grassfire transform using an active contour model. *IEEE Trans. on PAMI*, 14, N 1, January, 1992.
- [Ley92b] F. Leymarie and M.D. Levine. Tracking deformable objects in the plane using an active contour model. *IEEE Trans. on PAMI*, 14, N 1, January, 1992.
- [Lia90] J. Liandrat and Ph. Tchamitchian. Resolution of 1d regularized burgers equation using a spatial wavelet approximation. Technical Report 90-83, NASA Report, ICASE Report, Dec. 1990.
- [Mal89a] S.G. Mallat. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models. *IEEE Acoustics Speech and Signal Processing*, 1989.
- [Mal89b] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. on PAMI*, 2 Number 7, July 1989.
- [Mal89c] S.G. Mallat. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $l_2$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, June 1989.
- [Mal92a] S.G. Mallat and W.L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Trans. on PAMI*, 38 Number 2, March 1992.
- [Mal92b] S.G. Mallat and S. Zhong. Characterization of signals from multiscale edges. *IEEE Trans. on PAMI*, 14 Number 7:710-732, July 1992.
- [Mali87] J. Malik and P. Perona. A scale space and edge detection using anisotropic diffusion. In *IEEE Comp. Soc. Workshop on comp. Vision*, Miami, USA, 1987.
- [Men90] S. Menet, P. Saint-Marc, and G. Medioni. Active contour models: Overview, implementation and applications. *System, Man and Cybernetic*, pages 194-199, 1990.
- [Mey89] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs*. Hermann, 1989.
- [Mey92] Y. Meyer. *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, 1992.

- [Mey87] Y. Meyer. Ondelettes et fonctions splines. Technical report, centre de mathématiques, Ecole Polytechnique, 1986-87.
- [Mor93] J-M. Morel and C. Lopez. Formalisation mathématiques et equations fondamentales de la pyramide visuelle. Technical Report 9303, CEREMADE, Paris IX - Dauphine, 2 1993.
- [Mos91] M. Moshfeghi. Elastic matching of multimodality medical images. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 53, Number 3:271–282, 1991.
- [Mum89] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:577–684, 1989.
- [Muz92] J-F Muzy, E. Bacry, and A. Arnéodo. Multifractal formalism for singular signals based on wavelet analysis. In *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Toulouse, France, June 1992.
- [Osh90] S. Osher and L. Rudin. Feature-oriented image enhancement using shock filters. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 27, Number 4:919–940, 1990.
- [Pao92] C. V. Pao. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equation*. Plenum Press, New York, 1992.
- [Pen91] A. Pentland and B. Horowitz. Recovery of nonrigid motion and structure. *IEEE Trans. on PAMI*, 13, Number 7, 1991.
- [Prew70] J.M.S. Prewitt. Object enhancement and extraction. *Picture Processing and Psychopictorics*, pages 75–149, 1970.
- [Rao90] A. Raoult. Asymptotic modeling of the elastodynamics of a multi-structure. Technical Report R 90024, Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie, 1990.
- [Rob65] L. G. Roberts. Machine perception of three dimensionnal solids. *Optical and Electro-optical Information processing*, pages 159–197, 1965.

- [Rou91] N. Rougon and F. Preteux. Deformable markers: Mathematical morphology for active contour models control. In *SPIE's 1991 International Symposium on Optical Applied Science and Engeneering-Image Algebra and Morphological Image processing II*, San Diego, California, USA, Juillet 1991.
- [Rou93] N. Rougon. *Eléments pour la reconnaissance de formes tridimensionnelles déformables: Application à l'imagerie échographique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, département images (Paris), 1993.
- [Sch92] M. Schwarzingler, D. Noll, and W.V. Seelen. Object rrecognition with deformable models, using constrained elastic nets. In *Informatik aktuell, Mustererkennung, Springer-Verlag*, Proc. 14, DAGM Symposium Dresden 1992, 1992.
- [Ser88] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume 2, theoretical advances. Academic Press, London, 1988.
- [Sin92] S.S. Sinha and B.G. Schunck. A two-stage algorithm for discontinuity-preserving surface reconstruction. *IEEE Trans. on PAMI*, 14 Number 1:36-55, January 1992.
- [Sny91] M.A. Snyder. On the mathematical foundations of smoothness constraints for the determination of optical flow for surface reconstruction. *IEEE Trans. on PAMI*, 13 Number 11, November 1991.
- [Ter86a] D. Terzopoulos. Image analysis using multigrid relaxation methods. *IEEE Trans. on PAMI*, 8 Number 2, 1986.
- [Ter86b] D. Terzopoulos. Regularization of inverse problems involving discontinuities. *IEEE Trans. on PAMI*, 8 Number 4, 1986.
- [Ter91] D. Terzopoulos and D. Metaxas. Dynamic 3d models with local and global deformations: Deformable superquadrics. *IEEE Trans. on PAMI*, 13 Number 7:703-714, July 1991.

- [Thi74] A. Thikonov and V. Arsenine. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Mir, Moscou, 1974.
- [Thi94] E. Thiel. *Les distances de Chanfrein en analyse d'images: Fondements et Applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées à Grenoble, 1994.
- [Ued92] N. Ueda and K. Mase. Tracking moving contours using energy-minimizing elastic contour models. In *ECCV'92*, San Margherita Ligure Italy, May 1992.
- [Uns93] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. The l2 polynomial spline pyramide. *IEEE Trans. on PAMI*, 15 Number 4, April 1993.
- [Vem93] B. C. Vemri and R. Malladi. Constructing intrinsic parameters with active models for invariant surface reconstruction. *IEEE Trans. on PAMI*, 15, Number 7:668–681, 1993.
- [Wah85] W. Von Wahl. *The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations*, volume Aspects of Mathematics. Vieweg Branschweig, 1985.
- [Wak93] J. Waku. *Ondelettes et Applications en Imagerie et en Calcul de Surfaces*. PhD thesis, Université Joseph Fourier de Grenoble, TIMC-IMAG, 1993.
- [Wan92] Y.F. Wang and J-F. Wang. Surface reconstruction using deformable models with interior and boundary constraints. *IEEE Trans. on PAMI*, 14, N 5, 1992.
- [Wei88] I. Weiss. 3d shape representation by contours. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 41:80–100, 1988.
- [Wil92] D. J. Wiliams and M. Shah. A fast algorithm for active contours and curvature estimation. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Image Undrstanding*, 55:14–26, January 1992.
- [Wit87] A. Witkin, D. Terzopoulos, and M. Kass. Signal matching through scale space. *Int. J. Comp. Vis.*, pages 133–144, 1987.

