



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude numérique des jets supersoniques sous-détendus

Guillaume Lehnasch

► **To cite this version:**

Guillaume Lehnasch. Contribution à l'étude numérique des jets supersoniques sous-détendus. Modélisation et simulation. Université de Poitiers, 2005. Français. NNT: . tel-00010669

**HAL Id: tel-00010669**

**<https://theses.hal.science/tel-00010669>**

Submitted on 17 Oct 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

pour l'obtention du Grade de  
**Docteur de l'Université de POITIERS**

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE de MÉCANIQUE et d'AÉROTECHNIQUE  
et  
FACULTÉ DES SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

(Diplôme National - Arrêté du 25 Avril 2002)

École Doctorale : Sciences pour l'Ingénieur

Secteur de Recherche : Énergie, Thermique, Combustion

Présentée par :

**Guillaume LEHNASCH**

\*\*\*\*\*

**CONTRIBUTION À L'ÉTUDE NUMÉRIQUE DES JETS  
SUPERSONIQUES SOUS-DÉTENDUS**

\*\*\*\*\*

Directeur de Thèse : **Pascal BRUEL**

\*\*\*\*\*

Soutenue le 29 Juin 2005 devant la Commission d'Examen

\*\*\*\*\*

– **Jury** –

M. Yves D'ANGELO  
M. Pascal BRUEL  
M. Christian FABRE

M. Pierre MILLAN  
M. Francis ROGER  
M. Dany VANDROMME

Membre invité

M. D. SAUCEREAU

Professeur, INSA de Rouen.  
Chargé de recherche CNRS, LMA, Pau.  
Responsable Projets de Recherche « Moteurs et intégration nacelle », Airbus France, Toulouse.  
Directeur de recherche ONERA, Toulouse (Rapporteur)  
Professeur, Université de Poitiers.  
Professeur, INSA de Rouen, (Rapporteur).

Ingénieur, SNECMA-MOTEURS, Vernon.



## Remerciements

J'exprime tout d'abord ma reconnaissance envers Pascal Bruel, pour m'avoir accompagné tout au long de ce travail, pour avoir su mettre en place tous les moyens qui m'ont permis de mener à bien cette étude, pour son esprit d'initiative pour explorer de nouveaux domaines, pour la rigueur avec laquelle il questionne les problèmes, pour la confiance qu'il m'a progressivement accordé dans l'organisation de ce travail.

Je remercie Michel Champion de m'avoir accueilli au sein du laboratoire de Combustion et Détonique, pour son soutien dans mes initiatives de présenter mon travail lors de conférences internationales et pour ses divers conseils.

Je remercie messieurs Yves d'Angelo, Christian Fabre, Pierre Millan, Francis Roger, Dany Vandromme et Didier Saucereau, d'avoir accepté de lire et de juger ce travail, et de m'avoir utilement conseillé pour la suite des mes aventures scientifiques.

Je remercie vivement Jean-Pierre Garo, Jean-Michel Souil, Yves d'Angelo, Francis Roger, Daniel Desbordes et Marc Bellenoue pour avoir accompagné mes premiers pas dans le monde de l'enseignement.

Je salue chaleureusement tous les doctorants et membres sympatiques du personnel du laboratoire, encore présents ou déjà partis, qui m'ont aidé à passer quelques moments agréables : merci notamment à Jocelyne, Françoise, Monique, Djamel, Xavier, Jean-Louis, Daniel, Véronique, Jean-Joseph, Thierry, Danh, Khanh, Vladymir, Julien, Marie, Olivier, Rui, Yoan, Arnaud, Cécile, Camille, Vincent, Elena, Andres ...

J'adresse en particulier toute mon amitié à Bernardo, mon grand compagnon de route pendant ces deux dernières années de travail, pour tout ce que nous avons pu partager au-delà de notre lutte acharnée pour dompter N3SNATUR.

Je n'oublie pas de remercier également la Région Poitou-Charentes et le CNRS pour leur nécessaire soutien financier.

Je salue tous les amis, anciens et nouveaux, que j'ai pu côtoyer pendant cette période de thèse, et qui, par leur amitié auront su rendre cette période de ma vie agréable. Je n'oserais faire une liste qui ne puisse être exhaustive...

Je rend finalement hommage à ma tendre amie Ariane, qui m'aura soutenu moralement tout le long de la rédaction de ce manuscrit. Qu'elle reçoive ici toute l'expression de mon affection.





# Table des matières

Notations	vii
Introduction	xix
Du percement accidentel d'une chambre de combustion d'un moteur aéronautique à l'étude fondamentale des jets fortement sous-détendus	xix
<b>I Phénoménologie</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à la phénoménologie des jets compressibles</b>	<b>5</b>
1.1 Phénoménologie des couches de mélange . . . . .	5
1.1.1 Développement tourbillonnaire d'une couche de mélange . . . . .	5
1.1.2 Cas du jet . . . . .	5
1.1.3 Caractéristiques liées aux grandes vitesses . . . . .	7
Introduction aux effets de compressibilité . . . . .	7
Effets de compressibilité intrinsèque à grande échelle . . . . .	8
Effets de compressibilité intrinsèque à petite échelle . . . . .	8
1.1.4 Effets géométriques sur les jets supersoniques . . . . .	9
1.2 Introduction aux phénomènes de chocs et de détente . . . . .	9
1.2.1 Formation et structures d'ondes de choc . . . . .	10
1.2.2 Ondes de Mach . . . . .	10
1.2.3 Faisceaux de détente et de compression . . . . .	10
1.2.4 Écoulement stationnaire en présence d'un dièdre - Formation d'une onde de choc oblique . . . . .	11
1.2.5 Réflexions stationnaire de chocs . . . . .	11
1.2.6 Réflexion d'un choc sur un dièdre . . . . .	13
1.2.7 Interaction choc/turbulence . . . . .	14
1.3 Présentation des différents régimes de sous-détente d'un jet sonique axisymétrique	15
1.3.1 Définition . . . . .	15
1.3.2 Description globale des différentes classes d'écoulement . . . . .	16
<b>2 Phénoménologie du jet fortement sous-détendu</b>	<b>23</b>
2.1 Description de l'écoulement dans la zone proche . . . . .	23
2.1.1 Evolution de la structure de choc en fonction du rapport des pressions statiques à l'ajutage . . . . .	24
Position du disque de Mach . . . . .	24
Allure et diamètre du premier disque de Mach . . . . .	25
2.1.2 Evolution de la couche de cisaillement et caractérisation de la turbulence .	26

	Longueur du noyau potentiel . . . . .	26
	Longueur $L_s$ de la zone subsonique en aval du disque de Mach . . . . .	27
	Caractérisation de la turbulence . . . . .	27
	Turbulence dans la couche de cisaillement . . . . .	27
	Interaction de la turbulence avec la structure de choc . . . . .	28
2.2	Description de l'écoulement dans la zone lointaine - Paramètres de similitude . .	28
2.2.1	Décroissance de la vitesse sur l'axe . . . . .	29
2.2.2	Décroissance de la température sur l'axe . . . . .	31
2.2.3	Croissance dynamique du jet - Autosimilarité des profils de vitesses . . . .	31
2.2.4	Croissance thermique du jet - Autosimilarité des profils de température .	32
2.3	Influence des conditions génératrices sur le développement du jet sous-détendu . .	33
2.3.1	Influence des conditions géométriques à l'ajutage . . . . .	33
	Influence de la géométrie de l'ajutage . . . . .	33
	Influence de la forme de la tuyère et effets de couche limite . . . . .	33
	Effet de tuyère . . . . .	33
	Effets de couche limite . . . . .	35
	Effet de swirl . . . . .	35
2.3.2	Effet des conditions thermodynamiques du mélange . . . . .	36
	Effet du rapport des chaleurs spécifiques . . . . .	36
	Influence de la température du jet . . . . .	36
2.3.3	Turbulence initiale . . . . .	36
2.3.4	Aspects multiphasiques et de gaz réels . . . . .	37
	Effets de la présence de particules . . . . .	37
2.3.5	Cas du jet réactif . . . . .	37
2.4	Caractéristiques instationnaires du jet libre sous-détendu . . . . .	37
2.4.1	Instationnarité liée à la structure de choc - Phénomène d'hystérésis . . . .	38
2.4.2	Instationnarité liée à la couche de cisaillement - Développement de l'instabilité de Taylor-Görtler . . . . .	38
	Description des tourbillons . . . . .	38
	Etude sur l'origine des tourbillons . . . . .	39
2.4.3	Instationnarité liée à l'interaction de la structure de choc avec la couche de cisaillement . . . . .	40
	Boucle de feedback - Génération du bruit screech . . . . .	40
	Instationnarité à grandes échelles . . . . .	41
2.5	Phénoménologie du jet sous-détendu en impact . . . . .	42
2.6	Bilan - Description <i>a priori</i> de l'écoulement issu du percement d'une chambre de combustion d'un moteur d'avion . . . . .	47
2.6.1	Considérations sur les conditions à l'injection . . . . .	47
	Evolution des profils des variables physiques . . . . .	47
	Estimation des conditions thermodynamiques au niveau de l'ajutage créé par le percement d'une chambre de combustion . . . . .	47
2.6.2	Estimation des paramètres de l'écoulement ambiant . . . . .	49
2.6.3	Bilan : estimation des caractéristiques géométriques du jet . . . . .	49
	Estimation globale des plages de paramètres . . . . .	49
	Bilan : illustration pour le cas nominal . . . . .	50

<b>II</b>	<b>Modélisation et outils numériques</b>	<b>55</b>
<b>3</b>	<b>Introduction à la simulation des jets sous-détendus</b>	<b>61</b>
3.1	Difficultés numériques . . . . .	61
3.2	Modélisation de la turbulence dans les jets sous détendus . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Modélisation aérothermique retenue</b>	<b>67</b>
4.1	Principes physiques et équations de conservation pour un fluide monoespèce monophasique compressible . . . . .	67
4.1.1	Hypothèses générales . . . . .	67
4.1.2	Loi d'état et lois de comportement . . . . .	67
4.1.3	Lois de bilans . . . . .	68
4.2	Traitement de la configuration axisymétrique . . . . .	70
4.3	Présentation du modèle $k - \epsilon$ standard en régime incompressible . . . . .	72
4.3.1	Problème de fermeture et modélisation . . . . .	72
4.3.2	Calage conventionnel des constantes . . . . .	74
4.3.3	Limitations intrinsèques au modèle $k - \epsilon$ en régime incompressible . . . . .	75
4.3.4	Correction pour l'axisymétrie . . . . .	76
4.4	Extension du modèle $k - \epsilon$ au régime compressible . . . . .	77
4.4.1	Introduction à la turbulence compressible . . . . .	77
4.4.2	Reformulation et modélisation des lois de bilan pour les écoulements turbulents compressibles . . . . .	78
4.4.3	Modélisation du transport de l'énergie cinétique de turbulence en situation compressible . . . . .	79
	Effets diffusifs et dissipatifs . . . . .	79
	Modélisation des termes de production . . . . .	80
	Modélisation de la pression-dilatation . . . . .	81
	Approche de Zeman . . . . .	81
	Approche de Sarkar . . . . .	82
4.4.4	Modélisation du transport de la dissipation en situation compressible . . . . .	82
	Choix de l'équation de transport . . . . .	82
	Modélisation de la dissipation compressible . . . . .	84
	Modélisation de Zeman . . . . .	84
	Modélisation de Sarkar et al. . . . .	85
	Expression du coefficient de viscosité turbulente . . . . .	85
4.4.5	Remarques finales sur la prise en compte des effets de compressibilité . . . . .	86
4.5	Prise en compte d'effets de non-équilibre . . . . .	87
4.6	Bilan de la modélisation retenue sous forme différentielle en coordonnées axisymétriques . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Présentation de la méthode numérique</b>	<b>91</b>
5.1	Application d'une approche mixte éléments finis / volumes finis . . . . .	91
5.1.1	Principes : du problème continu à sa résolution approchée . . . . .	91
5.1.2	Formulation discrète obtenue . . . . .	94
5.2	Evaluation des flux convectifs . . . . .	95
5.2.1	Principe de décentrage dans une approche volumes-finis . . . . .	95
	Introduction . . . . .	95
	Illustration du principe pour la convection d'un scalaire dans le cas linéaire . . . . .	95

5.2.2	Propriétés des équations d'Euler et résolution du problème de Riemann en une dimension d'espace . . . . .	96
	Homogénéité et hyperbolicité . . . . .	96
	Problème de Riemann et structure caractéristique . . . . .	97
	Evaluation du flux numérique à l'interface . . . . .	100
5.2.3	Cas du système d'équations d'Euler bidimensionnel . . . . .	101
5.2.4	Approche de Roe : résolution exacte d'un problème de Riemann linéarisé .	103
5.2.5	Correction entropique pour le solveur de Roe . . . . .	105
5.2.6	Approche de Van Leer : découpage de flux . . . . .	105
5.3	Extension à un ordre de précision spatiale supérieure . . . . .	106
5.3.1	Introduction : difficultés liées à l'élévation au second ordre des méthodes de décentrage . . . . .	106
5.3.2	Principes des méthodes à Variation Totale Diminuante (TVD) . . . . .	107
5.3.3	Fonctions de limitation de pente utilisées . . . . .	109
5.3.4	Extrapolation des valeurs à l'interface . . . . .	109
	Extrapolation par utilisation du limiteur "minmod" . . . . .	109
	Extrapolation des valeurs à l'interface par utilisation du limiteur Van Albada	110
	Reconstruction des valeurs à l'interface . . . . .	111
5.4	Evaluation des flux diffusifs et des termes sources . . . . .	111
5.4.1	Flux diffusifs laminaires . . . . .	111
5.4.2	Remarque sur la prise en compte des flux diffusifs et des termes sources turbulents . . . . .	112
5.5	Remarque sur l'intégration en temps . . . . .	113
5.6	Parallélisation . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Domaine de calcul et conditions limites</b>	<b>117</b>
6.1	Conditions aux parois . . . . .	118
6.1.1	Condition de paroi glissante . . . . .	118
6.1.2	Condition de paroi adhérente . . . . .	118
6.2	Conditions aux frontières libres du domaine de calcul . . . . .	118
6.2.1	Approche basée sur la théorie des caractéristiques . . . . .	118
6.2.2	Conditions à l'entrée du domaine de calcul relatives à l'orifice . . . . .	120
6.2.3	Conditions relatives à la sortie . . . . .	120
6.2.4	Conditions relatives à l'entrée subsonique . . . . .	121
6.2.5	Conditions sur les frontières mixtes subsonique / supersonique en $r_{max}(x)$	121
6.3	Détermination des niveaux de $k$ et de $\epsilon$ . . . . .	122
6.4	Choix du domaine de calcul et bilan . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Procédures de génération et de réadaptation de maillage</b>	<b>125</b>
7.1	Génération de maillages non-structurés . . . . .	125
7.1.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	125
7.1.2	Génération d'un maillage de type structuré par blocs avec redécoupage . .	126
7.1.3	Génération d'un maillage non-structuré de type Voronoï . . . . .	126
7.2	Réadaptation du maillage . . . . .	128
7.2.1	Introduction à la méthode de remaillage anisotrope choisie . . . . .	128
7.2.2	Présentation de la technique AMA . . . . .	130
	Principe de la méthode . . . . .	130
	Opérations élémentaires réalisées . . . . .	132
	Processus itératif . . . . .	133

Evaluation des dérivées secondes et détermination de la matrice d'erreur . . . . .	134
7.3 Bilan : illustration de l'application de la méthode AMA . . . . .	137
<b>III Etude numérique</b>	<b>139</b>
<b>8 Validation de la méthode numérique</b>	<b>141</b>
8.1 Capture des propriétés convectives en écoulement pseudo-unidimensionnel : test du tube à choc . . . . .	141
8.1.1 Résultats du test de Sod subsonique . . . . .	142
8.1.2 Résultats du test de Sod supersonique . . . . .	145
8.2 Réflexion d'un choc instationnaire sur une rampe de compression . . . . .	148
8.3 Ecoulement supersonique sur une marche montante . . . . .	152
8.4 Bilan . . . . .	156
<b>9 Problèmes numériques et stratégie de calcul adoptée pour la simulation des jets supersoniques</b>	<b>157</b>
9.1 Descriptions des problèmes numériques fondamentaux . . . . .	158
9.1.1 Difficultés liées à la topologie du maillage et à l'initialisation . . . . .	158
9.1.2 Difficultés liées à la condition limite de sortie . . . . .	161
9.1.3 Difficultés liées à la section d'entrée de l'ajutage . . . . .	162
9.2 Stratégie de calcul adoptée . . . . .	164
9.2.1 Maillages utilisés pour la première étape de calcul . . . . .	166
9.2.2 Paramètres numériques utilisés pour la première étape de simulation . . . . .	166
9.2.3 Paramètres de réadaptation retenus . . . . .	169
9.2.4 Maillages et paramètres de calcul pour les étapes de simulation suivantes . . . . .	171
9.2.5 Bilan : procédure globale adoptée pour la simulation des jets supersoniques . . . . .	171
9.3 Difficultés non-résolues et considérations sur l'application de la procédure de calcul retenue . . . . .	171
9.3.1 Considérations sur la représentativité de la solution . . . . .	171
9.3.2 Remarques sur l'application de l'algorithme de réadaptation . . . . .	173
<b>10 Etude numérique des jets supersoniques parfaitement détendus</b>	<b>175</b>
10.1 Objectifs et cas de validation retenus . . . . .	175
10.2 Etude de sensibilité au maillage . . . . .	178
10.2.1 Conditions de l'étude . . . . .	178
10.2.2 Résultats . . . . .	179
10.3 Prise en compte de la correction de Pope [131] pour l'axisymétrie . . . . .	185
10.4 Sensibilité au nombre de Prandtl turbulent . . . . .	186
10.5 Modélisation des termes de pression-dilatation et de dissipation dilatationnelle : Sarkar et al. vs Zeman . . . . .	186
10.6 Expression de la viscosité turbulente . . . . .	189
10.7 Modélisation du terme de production enthalpique : Jones [86] vs Shyy et Krishnamurthy [152] . . . . .	193
10.8 Sensibilité aux conditions limites prescrites au niveau de l'ajutage . . . . .	195
10.9 Correction de non-équilibre . . . . .	200
10.10 Bilan : modélisation retenue et représentativité physique . . . . .	204

<b>11 Etude du jet faiblement sous-détendu</b>	<b>211</b>
11.1 Etude de sensibilité au maillage . . . . .	212
11.1.1 Utilisation du domaine $\mathbf{MI}_1$ pour une simulation basée sur les équations d'Euler . . . . .	212
11.1.2 Utilisation du domaine $\mathbf{MI}_2$ pour une simulation prenant en compte les effets de turbulence. . . . .	216
11.1.3 Remarque sur le paramétrage de l'algorithme de réadaptation . . . . .	216
11.2 Etude de la structure du jet obtenue . . . . .	219
11.2.1 Aspect global du jet . . . . .	219
11.2.2 Etude du champ proche de l'écoulement . . . . .	221
11.2.3 Bilan et remarques qualitatives sur la représentativité du modèle . . . . .	225
<b>12 Simulation de jets fortement sous-détendus</b>	<b>233</b>
12.1 Etude de sensibilité au maillage, à la longueur du domaine et au solveur numérique	233
12.1.1 Etude de sensibilité au maillage . . . . .	233
12.1.2 Sensibilité à la longueur du domaine de calcul . . . . .	236
12.1.3 Sensibilité au solveur numérique . . . . .	238
12.2 Etude de la structure globale du jet . . . . .	238
12.3 Etude de la structure de choc . . . . .	244
12.4 Etude préliminaire du percement d'une chambre de combustion d'un moteur aéronautique. . . . .	248
12.4.1 Etude des effets de gaz brûlés . . . . .	249
12.4.2 Etude de l'effet d'orifice . . . . .	250
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>254</b>
<b>A Interpolation linéaire d'éléments finis triangulaires</b>	<b>261</b>
<b>B Communications à des congrès pendant la période du travail de thèse</b>	<b>263</b>

# Notations

## Constantes et variables physiques

### Symboles latins

$a$		Taux d'élargissement du jet.
$a_T$		Taux de croissance thermique de la couche de mélange.
$a$		Taux de croissance.
$c$	(m/s)	Vitesse du son.
$D$	(m)	Diamètre.
$e$	(J/kg)	Energie interne massique.
$E$	(J/kg)	Energie totale massique.
$k$	( $m^2/s$ )	Energie cinétique de turbulence par unité de masse.
$L$	(m)	Longueur.
$M$		Nombre de Mach.
$p$	(Pa)	Pression (statique ou totale).
$r$	(m)	Distance radiale dans les expressions relatives à la croissance du jet.
$Re$		Nombre de Reynolds.
$T$	(K)	Température.
$v_x$	(m/s)	Composante longitudinale du vecteur vitesse.
$v_r$	(m/s)	Composante radiale du vecteur vitesse.
$X$	(m)	Distance ou position par rapport à la section de sortie de l'ajutage sur l'axe.
$X_o$		Origine virtuelle sur l'axe.
$Z$	(m)	Distance entre deux entités calculée sur l'axe de symétrie.

### Symboles grecs

$\delta$	(m)	Rayon caractéristique du jet.
$\delta_\theta$		Epaisseur de quantité de mouvement.
$\delta_\omega$		Epaisseur de vorticité.
$\epsilon$	( $m^2/s^3$ )	Taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence par unité de masse.
$\mu$	(kg/ms)	Viscosité dynamique du mélange.
$\nu$	( $m^2/s$ )	Viscosité cinématique du mélange.
$\rho$	( $kg/m^3$ )	Masse volumique.



## Constantes et variables numériques

### Symboles latins

$C_i$	Volume ou cellule de contrôle.
$I_C$	Ensemble des indices des cellules de contrôle du maillage $\mathcal{T}_h$ .
$I_C^i$	Ensemble des indices des cellules de contrôle voisines du noeud indicé $i$ .
$I_T$	Ensemble des indices des triangles du maillage $\mathcal{T}_h$ .
$I_T^i$	Ensemble des indices des triangles voisins du noeud indicé $i$ .
$n_C$	Nombre de volumes de contrôle $C_i$ constituant le maillage $\mathcal{T}_h$ .
$n_T$	Nombre de triangles constituant le maillage $\mathcal{T}_h$ .
$\vec{n}_i$	Normale locale à la frontière $\Gamma_i$ de la cellule de contrôle $C_i$ .
$\vec{n}_{ij}$	Normale moyenne à $\Gamma_{ij}$ .
$t^n$	Temps à l'étape de temps $n$ .
$T_k$	Triangle de $\mathcal{T}_h$ indicé $k$ , $k \in I_T$ .
$T_{ij}$	Triangle amont intersectant la cellule $C_i$ et la direction $(\vec{i}\vec{j})$ donnée par la droite passant par les noeuds $i$ et $j$ .
$T_{ji}$	Triangle aval intersectant la cellule $C_i$ et la direction $(\vec{i}\vec{j})$ donnée par la droite passant par les noeuds $i$ et $j$ .
$\vec{\mathcal{U}}_h$	Approximation volumes finis du vecteur d'état conservatif.
$\vec{\mathcal{V}}_h$	Approximation éléments finis du vecteur d'état conservatif.
$V_i$	Volume de la cellule $C_i$ .

### Symboles grecs

$\Omega$	Domaine spatial physique.
$\Gamma_i$	Frontière du volume de contrôle indicé $i$ .
$\Gamma_{ij}$	Elément de frontière commun aux volumes de contrôle indicés $i$ et $j$ .
$\mathcal{T}_h$	Maillage conforme du domaine physique $\Omega$

## Indices

0,05	Relatif au rayon où est atteinte une valeur de vitesse égale à 5% de la vitesse maximale (implicitement considérée sur l'axe).
0,95	Relatif au rayon où est atteinte une valeur de vitesse égale à 95% de la vitesse maximale (implicitement considérée sur l'axe).
1/2	Relatif au rayon où est atteinte une valeur de vitesse égale à la moitié de la vitesse maximale (implicitement considérée sur l'axe).
<i>a</i>	Relatif à l'atmosphère ambiante (ou co-écoulement).
<i>axe</i>	Relatif à l'axe.
<i>c</i>	Relatif à la première cellule de choc.
<i>dm</i>	Relatif au disque de Mach.
<i>e</i>	Relatif à la section de sortie de l'ajutage.
<i>eq</i>	Relatif à la section de sortie du jet équivalent parfaitement détendu dans l'hypothèse d'une détente monodimensionnelle, adiabatique sans entraînement d'air de l'atmosphère ambiante.
<i>j</i>	Relatif aux conditions équivalentes de jet parfaitement détendu.
<i>NP</i>	(Nozzle Plate) terminologie relative aux éléments ajutage et obstacle
<i>o</i>	Relatif aux conditions génératrices.
<i>p</i>	Relatif à la zone potentielle.
<i>RM</i>	Relatif à une réflexion de Mach (cas 2D).
<i>s</i>	Relatif à la zone subsonique en arrière du disque de Mach.
<i>T1/2</i>	Relatif au rayon où est atteinte une valeur de température égale à la moitié de la température maximale (implicitement considérée sur l'axe).

## Symboles et opérateurs

### Abbréviations

<i>DM</i>	Disque de Mach.
<i>HVOF</i>	"High Velocity Oxygen Fuel", sprays thermiques utilisés pour les revêtements de surface.
<i>LDV</i>	"Laser Doppler Velocimetry".
<i>LIF</i>	"Laser Induced Fluorescence", fluorescence induite par laser.
<i>NPR</i>	"Nozzle Pressure Ratio", rapport des pressions statiques entre la section de l'ajutage et l'atmosphère ambiante ou co-écoulement.
<i>PIV</i>	"Particle Image Velocimetry", Imagerie par vélocimétrie de particules.
<i>RELIEF</i>	"Raman Excitation and Laser Induced Electronic Fluorescence".
<i>STOVL</i>	"Short Take Off and Vertical Landing", relatif aux problèmes de décollage ou atterrissage verticaux (terrestres ou lunaires).



# Table des figures

1.1	Schéma de la structure globale d'un jet. . . . .	6
1.2	Schéma de la formation de faisceaux de détente et de compression. . . . .	11
1.3	Schémas de la formation d'une onde de choc oblique. . . . .	12
1.4	Schémas des deux principaux types de réflexion d'une onde de choc stationnaire. . . . .	12
1.5	Schéma des motifs de réflexions pseudo-stationnaires d'une onde de choc oblique. . . . .	14
1.6	Schéma de la structure de la région proche d'un jet faiblement sous-détendu. . . . .	16
1.7	Schéma de la structure proche d'un jet faiblement sous-détendu. . . . .	18
1.8	Schéma de la structure proche d'un jet modérément à fortement sous-détendu (NPR = 2,1 à 4,5) . . . . .	18
1.9	Schéma de la structure proche d'un jet fortement sous-détendu (NPR = 4,5 à 7). . . . .	19
1.10	Schéma de la structure de la région proche d'un jet très fortement sous-détendu (NPR = 7 à 10). . . . .	19
1.11	Schéma de la structure de la région proche d'un jet très fortement sous-détendu (NPR > 10). . . . .	20
2.1	Définition des paramètres caractéristiques du jet très fortement sous-détendu. . . . .	24
2.2	Illustration de la sensibilité de la structure de choc d'un jet fortement sous-détendu à la valeur du rapport de pression NPR (obtenu d'après les données de Love [106]). . . . .	25
2.3	Comparaison entre les diverses corrélations et données expérimentales pour le positionnement et le diamètre du disque de Mach en fonction du rapport de NPR (pour $\gamma = 1,4$ ). . . . .	26
2.4	Schéma de la structure détaillée de la structure proche d'un jet fortement sous-détendu. . . . .	39
2.5	Schéma de la structure d'un jet fortement sous-détendu lors d'un impact normal en zone proche d'un jet fortement sous-détendu sur une paroi plane. . . . .	44
2.6	Allure du profil radial de pression le long d'une plaque plane impactée normalement par un jet fortement sous-détendu. . . . .	45
2.7	Schéma de la structure de choc rencontrée pour un impact de jet supersonique à $M_e = 2,2$ , $Z_{NP}/D_e = 2$ et $\theta_{NP} = 30^\circ$ . . . . .	46
2.8	Schéma du profil sonique en section droite de sortie d'une buse convergente d'angle limite $90^\circ$ . . . . .	49
2.9	Evolution du rapport des chaleurs spécifiques du mélange de gaz brûlés en fonction de la richesse effective $r$ et de la température génératrice $T_o$ . . . . .	49
2.10	Evolution des paramètres adimensionnés de la structure du jet. . . . .	51
2.11	Estimation de l'aspect de la structure proche du jet susceptible d'apparaître en cas de percement d'une chambre de combustion lors d'une phase de décollage (pour une pression génératrice de 30 bar). . . . .	53

4.1	Définition du repère choisi et des axes de coordonnées cartésiennes et axisymétriques.	68
5.1	Représentation bidimensionnelle de la discrétisation spatiale retenue.	92
5.2	Illustration de l'algorithme REA pour la convection linéaire du profil d'une variable scalaire.	96
5.3	Solution du problème de Riemann pour le système d'équations d'Euler.	98
5.4	Illustration de la décomposition du maillage pour une exécution du programme en parallèle (cas à 2 sous-domaines).	115
6.1	Schéma des domaines de calcul relatifs aux cas de validations de l'outil numérique.	123
6.2	Schéma du domaine de calcul retenu pour la simulation des jets supersoniques.	124
7.1	Procédure de génération du maillage de type structuré.	126
7.2	Procédure de génération d'un maillage de type non-structuré.	127
7.3	Illustration (en 1D) de l'erreur d'interpolation de $u$ induite par une distribution initiale inadaptée des noeuds du maillage.	131
7.4	Utilisation de la courbure locale de la solution pour estimer l'erreur maximale d'interpolation.	131
7.5	Illustration (en 1D) de l'erreur d'interpolation de $u$ minimisée par réadaptation du maillage.	131
7.6	Schémas des opérations élémentaires réalisées par la procédure de réadaptation.	134
7.7	Agrandissement du maillage obtenu dans la zone du point triple d'un jet de gaz chauds fortement sous-détendu à $NPR = 15, 53$ .	138
7.8	Comparaison des maillages obtenus après 3 cycles de réadaptation pour un jet sous-détendu.	138
8.1	Comparaison globale des profils de masse volumique, de pression, de vitesse et de température prévus en utilisant les différents schémas numériques au second ordre en espace sur un maillage non-structuré (1305 noeuds) pour le cas test de Sod subsonique.	143
8.2	Comparaison des profils de masse volumique obtenus en fonction du schéma numérique utilisé sur un maillage non-structuré (1305 noeuds) pour le cas test de Sod subsonique.	143
8.3	Comparaison des profils de vitesse obtenus avec le solveur de Roe couplé au limiteur "minmod" en fonction du raffinement du maillage pour le cas test de Sod subsonique.	144
8.4	Illustration de la dissymétrie des profils en aval du choc apparaissant lors de la simulation du test de Sod subsonique avec un maillage de type structuré / redécoupé.	144
8.5	Comparaison des temps de calcul requis en fonction du solveur choisi, pour simuler l'évolution des gaz lors du test de Sod subsonique jusqu'à un temps de simulation physique de 0,6 ms (CFL=0,9).	145
8.6	Comparaison globale des profils de masse volumique, de pression, de vitesse et de température prévus en utilisant les différents schémas numériques sur un maillage non-structuré (4000 noeuds) pour le cas test de Sod supersonique.	146
8.7	Comparaison globale des profils de masse volumique, de pression, de vitesse et de température prévus en fonction du niveau de raffinement d'un maillage non-structuré pour le test de Sod supersonique.	147

8.8	Interaction d'un choc instationnaire avec une rampe : champ d'isocontours de masse volumique des solutions obtenues sur un maillage de type structuré / redécoupé avec les différents schémas numériques retenus. . . . .	149
8.9	Illustration du cas d'impact d'un écoulement à nombre de Mach égal à 10 sur un corps émoussé. . . . .	150
8.10	Interaction d'un choc instationnaire avec une rampe : champ d'isocontours de masse volumique des solutions obtenues sur un maillage de type non-structuré. . .	151
8.11	Interaction d'un choc instationnaire avec une rampe : champ d'isocontours de masse volumique adimensionnée par la masse volumique en amont du choc. . . .	152
8.12	Champ d'isocontours de la masse volumique extraits de la solution obtenue lors de la simulation de l'interaction d'un écoulement supersonique avec une marche montante. . . . .	154
8.13	Champ d'isocontours de la pression extraits de la solution obtenue lors de la simulation de l'interaction d'un écoulement supersonique avec une marche montante.	154
8.14	Champ d'isocontours de la vitesse longitudinale extraits de la solution obtenue lors de la simulation de l'écoulement supersonique sur la marche montante. . . . .	154
8.15	Écoulement supersonique sur une marche montante : agrandissement du champ d'isocontours de l'entropie adimensionnée par sa valeur dans l'écoulement amont.	155
8.16	Écoulement supersonique sur une marche montante : agrandissement du champ d'isocontours de la vitesse longitudinale au niveau du coin de la marche. . . . .	155
9.1	Illustration de la pathologie de type "carbuncle" rencontrée lors de la simulation d'un jet sous-détendu avec un maillage de type structuré par bloc. . . . .	158
9.2	Illustration d'une solution non-physique obtenue dans le champ proche d'un jet sous-détendu, due à un niveau insuffisant de raffinement du maillage. . . . .	160
9.3	Illustration du contrôle par le maillage de l'intensité du choc diffracté pendant la phase initiale de la simulation. . . . .	161
9.4	Illustration de la formation d'une recirculation à la périphérie d'un jet de gaz brûlés pendant la phase initiale de la simulation. . . . .	161
9.5	Illustration de la déstabilisation de la structure du jet induite par l'inadaptation de la condition limite en sortie. . . . .	163
9.6	Illustration du problème de coin rencontré au bord de l'ajutage : isocontours de pression. . . . .	164
9.7	Comparaison des champs proches de jets faiblement sous-détendus à NPR=1,75.	165
9.8	Illustration du maillage central $MI_1$ utilisé et de la zone tampon construite à sa périphérie. . . . .	167
9.9	Illustration du maillage central $MI_2$ utilisé et de la zone tampon construite à sa périphérie. . . . .	168
9.10	Comparaison des maillages obtenus par réadaptation dans la zone proche du jet en utilisant la masse volumique ( $r/D_e > 0$ ) ou l'entropie ( $r/D_e < 0$ ). . . . .	170
9.11	Comparaison des maillages obtenus par réadaptation dans la zone proche du jet en utilisant la masse volumique ( $r/D_e > 0$ ) ou le nombre de Mach ( $r/D_e < 0$ ). . .	170
9.12	Procédure adoptée pour la simulation des jets supersoniques. . . . .	172
9.13	Agrandissement de la solution diffuse obtenue dans la zone du point triple sur un maillage réadapté trop dense (20181 noeuds) : isocontours du nombre de Mach et maillage. . . . .	174
10.1	Évolution du résidu de la masse volumique $\mathcal{R}(\rho)$ au cours de la simulation pour le niveau de raffinement $N2$ . . . . .	179

10.2	Évolution des profils radiaux des variables physiques, extraits en $X/D_e = 10$ au cours du second cycle de la simulation pour un maillage de 14573 noeuds dans la zone centrale. . . . .	180
10.3	Illustration de l'évolution des maillages obtenus pour la simulation du jet parfaitement détendu de Seiner et al. [85] à nombre de Mach $M_e = 3$ . . . . .	182
10.4	Profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées à chaque étape de la simulation pour le niveau de raffinement $N1$ . . . . .	183
10.5	Profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées à chaque étape de la simulation pour le niveau de raffinement $N3$ . . . . .	183
10.6	Profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées à la troisième étape des simulations pour les niveaux de raffinement $N1, N2$ et $N3$ . . . . .	184
10.7	Comparaison des solutions convergées obtenues à la troisième étape de la simulation pour les niveaux de raffinement $N2$ et $N3$ : profils radiaux de vitesse longitudinale et de contrainte de cisaillement. . . . .	184
10.8	Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus avec ou sans la correction de Pope. . . . .	185
10.9	Comparaison des profils de vitesse axiale pour différentes valeurs du nombre de Prandtl turbulent. . . . .	187
10.10	Comparaison des profils radiaux de température en $X/D_e = 3$ et $X/D_e = 9$ obtenus avec $Pr_t = 0,5$ et $Pr_t = 0,9$ . . . . .	187
10.11	Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus en fonction de la modélisation retenue pour les termes de pression-dilatation et de dissipation compressible. . . . .	188
10.12	Comparaison des champs d'énergie cinétique, du coefficient de viscosité turbulente, de la vitesse longitudinale et de la pression obtenus avec ou sans l'application de la correction de Sarkar et al. . . . .	190
10.13	Comparaison des profils radiaux du taux de dissipation solénoïdale de l'énergie cinétique turbulente avec ou sans l'application de la correction de Sarkar et al. . . . .	191
10.14	Comparaison des profils radiaux de l'énergie cinétique turbulente obtenus avec ou sans l'application de la correction de Sarkar et al. . . . .	191
10.15	Comparaison des évolutions de l'épaisseur $\delta_{0,1}$ prévue numériquement avec le modèle $k - \epsilon$ sans et avec la prise en compte de la correction de Sarkar et al. . . . .	192
10.16	Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus en fonction de l'expression choisie pour le coefficient de viscosité turbulente. . . . .	193
10.17	Comparaison des profils radiaux en $X/D_e = 3, 7$ et $9$ , du nombre de Mach turbulent, des contraintes de cisaillement turbulent, du coefficient de viscosité turbulente et de la vitesse longitudinale, obtenus par simulation avec et sans la prise en compte de la dissipation compressible dans l'expression du coefficient de viscosité turbulente. . . . .	194
10.18	Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus à partir des modélisation de type Jones [86] et de Shyy et Krishnamurthy [152] pour le terme G. . . . .	195
10.19	Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale obtenus à la fin du cône potentiel en fonction des conditions imposées à l'entrée. . . . .	197
10.20	Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus pour différents couples de valeurs d'intensité de turbulence et d'échelle spatiale de référence prescrites à l'ajutage. . . . .	197
10.21	Comparaison des contributions énergétiques des différents mécanismes au bilan de $k$ en $X/D_e = 1$ pour le cas $I_t = 7,5\%$ et $L_t = 0,14D_e$ . . . . .	198
10.22	Comparaison des profils radiaux de $k$ , $\epsilon$ et $\mu_t$ obtenus en fonction des différentes conditions prescrites à l'ajutage. . . . .	199

10.23	Agrandissement de la structure typique du maillage obtenu au niveau de l'ajutage pour la simulation du jet de Seiner et al. [85], après trois cycles de simulation. . . . .	200
10.24	Comparaison des profils de vitesse prescrit (théorique) et effectivement pris en compte numériquement par interpolation linéaire. . . . .	200
10.25	Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique. . . . .	201
10.26	Comparaison des profils radiaux d'énergie cinétique turbulente obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique. . . . .	201
10.27	Comparaison des profils radiaux de la production d'énergie cinétique turbulente par cisaillement obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique. . . . .	201
10.28	Comparaison des profils radiaux de la diffusion de $k$ obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique. . . . .	201
10.29	Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus en prescrivant un profil de vitesse plat et un profil en tangente hyperbolique à l'ajutage. . . . .	202
10.30	Comparaison des épaisseurs de la couche de cisaillement prévues en prescrivant un profil de vitesse plat et un profil en tangente hyperbolique à l'ajutage. . . . .	202
10.31	Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus avec ou sans la correction modifiée de non-équilibre de Shyy et Krishnamurthy [152]. . . . .	203
10.32	Comparaison du champ d'isocontours ( $k = 2000, 4000, 6000$ et $8000 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ) de l'énergie cinétique turbulente prévus numériquement. . . . .	205
10.33	Comparaison du champ d'isocontours du nombre de Mach (de 0,1 à 1,9 par pas de 0,2) prévus numériquement. . . . .	205
10.34	Comparaison des évolutions du rayon où la moitié de la vitesse maximale est atteinte (d'après les profils radiaux de vitesse longitudinale extraits en $X/D_e = 1,3,5,7,9$ et 11). . . . .	206
10.35	Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale adimensionnée (extraits en $X/D_e = 1,3,5,7,9$ et 11). . . . .	206
10.36	Structure du jet supersonique ( $M_e = 2$ ) prévue numériquement : isocontours de vitesse longitudinale et lignes de courant. . . . .	207
10.37	Comparaison des niveaux de fluctuations longitudinales (extraits de la solution numérique entre $X/D_e = 1$ et 7). . . . .	208
10.38	Comparaison des niveaux de fluctuations radiales (extraits de la solution numérique entre $X/D_e = 1$ et 7). . . . .	208
10.39	Comparaison des profils de contraintes turbulentes de cisaillement adimensionnées (extraits de la solution numérique entre $X/D_e = 1$ et 7). . . . .	208
10.40	Comparaison des profils de l'énergie cinétique turbulente adimensionnée (extraits de la solution numérique entre $X/D_e = 1$ et 7). . . . .	208
10.41	Comparaison des profils radiaux de contraintes turbulentes prévue par le modèle retenu. . . . .	209
11.1	Comparaison deux à deux des maillages obtenus à chaque étape de la simulation du jet faiblement sous-détendu. . . . .	213
11.2	Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à chaque étape de la simulation pour le niveau <b>N1</b> de raffinement global. . . . .	214
11.3	Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale et de pression extraits des solutions obtenues à la quatrième (10664 noeuds) et la cinquième étape (9978 noeuds) de la simulation pour le niveau <b>N2</b> de raffinement global. . . . .	214



11.4	Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à l'issue de la quatrième étape de la simulation pour différents niveaux de raffinement global imposés.	215
11.5	Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale et de pression extraits des solutions obtenues à la quatrième étape de la simulation du jet faiblement sous-détendu pour les niveaux <b>N2</b> (10664 noeuds) et <b>N3</b> (12851 noeuds).	215
11.6	Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à l'issue des différentes étapes de la simulation du jet turbulent faiblement sous-détendu pour le niveau <b>N2</b> de raffinement global.	217
11.7	Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à l'issue de la troisième étape de la simulation du jet turbulent faiblement sous-détendu pour les niveaux <b>N1</b> (7918 noeuds), <b>N2</b> (12045 noeuds) et <b>N3</b> (15721 noeuds) de raffinement global.	218
11.8	Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale et de température extraits des solutions de jet turbulent faiblement sous-détendu obtenues à la troisième étape de la simulation pour les niveaux <b>N2</b> (12045 noeuds) et <b>N3</b> (15721 noeuds) de raffinement global.	218
11.9	Structure globale du jet faiblement sous-détendu prévu numériquement : isocontours de la vitesse longitudinale.	219
11.10	Comparaison des profils axiaux de la masse volumique adimensionnée.	220
11.11	Comparaison des profils axiaux de la masse volumique adimensionnée obtenus en corrigeant l'abscisse.	222
11.12	Comparaison des structures de choc prévues numériquement dans la zone proche via l'utilisation des différentes modèles.	223
11.13	Evolution des profils radiaux de masse volumique dans la zone proche du jet faiblement sous-détendu.	226
11.14	Structure du jet faiblement sous-détendu : isocontours de quelques grandeurs caractéristiques intervenant dans le bilan d'énergie cinétique turbulente.	229
11.15	Structure du jet faiblement sous-détendu : distribution des contraintes turbulentes et de leurs rapports.	230
12.1	Evolution de la structure du maillage adapté dans la zone proche pour le domaine <b>MI<sub>1</sub></b> utilisé pour une simulation basée sur les équations d'Euler.	235
12.2	Etude de sensibilité au nombre d'étapes de la simulation et au niveau global de raffinement pour un jet à NPR = 15 simulé à partir des équations d'Euler sur le domaine <b>MI<sub>1</sub></b> (extension $10D_e$ ).	236
12.3	Etude de sensibilité au nombre d'étapes de la simulation et au niveau global de raffinement pour un jet turbulent à NPR = 7,55 simulé sur le domaine <b>MI<sub>2</sub></b> (extension $20D_e$ ).	237
12.4	Etude de sensibilité à la longueur du domaine central utilisé pour simuler un jet non-turbulent à NPR = 7,55.	237
12.5	Comparaison des profils de pression, de masse volumique, de vitesse axiale et de température sur l'axe, obtenus avec le solveur de Roe ou le solveur de Van Leer, couplé au limiteur "minmod".	239
12.6	Structure du jet simulé à NPR=7,55 : isocontours (50 niveaux) de la pression statique, de la masse volumique, de la vitesse longitudinale, de la vitesse radiale, du rotationnel, de la pression totale de l'énergie cinétique turbulente et du coefficient de viscosité turbulente.	240
12.7	Evolution des niveaux de fluctuation rms de la vitesse axiale.	242

12.8	Champs d'isocontours des termes principaux intervenant dans le bilan d'énergie cinétique turbulente dans la zone proche du jet pour le cas $\text{NPR} = 7,55$ . . . . .	243
12.9	Comparaison des profils de vitesse axiale pour le cas à $\text{NPR} = 7,5$ . . . . .	244
12.10	Comparaison des profils de vitesse axiale pour le cas à $\text{NPR} = 15,5$ . . . . .	244
12.11	Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale dans le champ proche du jet fortement sous-détendu pour le cas $\text{NPR} = 15,53$ . . . . .	245
12.12	Comparaison des structures de chocs pour le cas $\text{NPR} = 7,5$ . . . . .	246
12.13	Comparaison des structures de chocs pour le cas $\text{NPR} = 15,53$ . . . . .	246
12.14	Comparaison des structures de chocs pour le cas $\text{NPR} = 15,53$ . . . . .	247
12.15	Comparaison des structures de chocs obtenues pour le cas $\text{NPR} = 7,55$ sans (lignes pointillées) et avec (lignes continues) prise en compte de la turbulence. . . . .	247
12.16	Comparaison des champs d'isocontours du nombre de Mach obtenus pour $\text{NPR} = 15,53$ en simulant un jet froid (lignes pointillées en noir) et un jet chaud (lignes colorées en traits plein). . . . .	250
12.17	Illustration du maillage utilisé pour simuler l'écoulement issu d'un orifice. . . . .	251
12.18	Illustration de la déformation des profils prévalant dans la section d'un orifice. . . . .	252
12.19	Comparaison des structures de choc obtenues pour un écoulement issu d'une buse profilée (lignes noires tiretées) et celui issu d'un orifice (lignes continues colorées). . . . .	252



# Introduction

L'objet principal de cette étude est le jet "très fortement" sous-détendu. Ce travail a été inspiré en particulier par le besoin de pouvoir prévoir les dangers associés à l'impact d'un jet supersonique issu du percement accidentel de la paroi d'une chambre de combustion d'un moteur d'avion de ligne. Bien que cette paroi soit refroidie, soit par circulation d'air entre la coupelle et la casquette près de l'injecteur ou par injection d'air à travers des plaques multiperforées qui l'isolent des zones de combustion, l'apparition de points chauds, la naissance et la propagation d'une fissure au niveau de la chambre de combustion ne peuvent en effet être rigoureusement exclues (notamment près de la tête d'injection). Un mélange de gaz brûlés fortement sous-détendu (issu de la combustion à haute pression de kérosène et d'air) (voire un tel mélange encore diphasique et potentiellement réactif) risque ainsi d'être déchargé au sein de l'habitacle moteur et venir irrémédiablement endommager les divers éléments moteurs. La terminologie de *flamme torche* a été adoptée au sein du département Intégration Moteur de l'entreprise EADS-Airbus pour désigner ces écoulements, même si la terminologie de flamme pour décrire cet écoulement potentiellement réactif peut sembler *a priori* quelque peu abusive. En particulier, la *flamme torche* est susceptible d'impacter la pyramide de mât moteur par laquelle l'ensemble du bloc moteur est rattaché à l'aile de l'avion. Une insuffisance dans la tenue mécanique de cette structure peut alors entraîner la perte du moteur, si ce n'est celle de l'avion. L'intégrateur doit donc pouvoir démontrer aux autorités de certification, en accord avec la norme en vigueur (FAR 25.903), qu'un bras de pyramide peut résister pendant au moins trois minutes au cas où il serait impacté perpendiculairement par un tel jet issu d'un orifice circulaire d'un pouce de diamètre. Afin de diminuer le coût des tests de certification, EADS-Airbus s'est naturellement fixé pour objectif de développer les outils de prévision numérique adéquats lui permettant *a priori* de prédisposer et d'optimiser les divers éléments moteurs tout en assurant le plus haut niveau de sûreté possible. Le but de ces travaux est ainsi d'amorcer cette démarche en améliorant d'une part, la connaissance de ce phénomène complexe, et en déterminant, d'autre part, une procédure numérique exploitable industriellement.

La littérature rend compte d'un nombre important d'études menées sur les jets modérément sous-détendus (NPR<sup>1</sup>s inférieurs à 5) dans la mesure où ces phénomènes sont rencontrés dans de nombreuses applications. Pour ces niveaux de sous-détente, l'écoulement rencontré correspond typiquement aux jets de tuyères d'éjection et est abondamment étudié pour des problèmes de bruit de "screech" [122] ou de signature infrarouge [17]. De la bonne compréhension du comportement de ces jets dépend également l'optimisation de certains procédés industriels. Le comportement dynamique (peu connu) de ces jets peut, par exemple, entraîner de sérieuses difficultés de maintien de composants électroniques miniatures lorsqu'il est nécessaire d'assister le découpage laser de ces pièces par des jets sous-détendus afin de minimiser le dépôt d'impuretés à leur surface

---

<sup>1</sup>Le NPR (Nozzle Pressure Ratio) correspond au rapport de la pression statique dans le plan de l'ajutage sur la pression statique ambiante.

[88]. La performance de la "spallation" thermique de roches via l'utilisation de tels jets réactifs pour le forage de puits pétrolifères [62] ou des sprays thermiques ("High Velocity Oxygen Fuel" (HVOF)) pour les revêtements de surface [121] dépend également d'une subtile optimisation des conditions génératrices et du type de buse utilisé. Le jet moyennement sous-détendu présente une structure globale désormais relativement bien connue, où l'on peut observer une répétition de cellules de chocs (chocs incidents obliques se réfléchissant régulièrement sur l'axe) décroissant progressivement dans la zone de coeur potentiel, alors que la couche de cisaillement s'élargit. La prise en compte de corrections de compressibilité désormais classiques [143] [182] avec l'utilisation d'une simple fermeture en un point à deux équations de transports de type  $k - \epsilon$ , permet déjà de rendre compte, avec une précision acceptable, de l'évolution globale de ces jets [39][40].

Dans le cas où NPR est plus important, la structure du jet devient cependant plus complexe et plus délicate à simuler. Ce problème correspond néanmoins au cas du percement de chambre de combustion envisagé (en tenant compte des conditions génératrices typiquement rencontrées dans ces moteurs, une grossière estimation des conditions à l'ajutage nous permet de nous situer dans une plage de NPR allant de 13 à 97 en fonction de l'altitude de vol considérée). Cette configuration d'écoulement se rencontre également dans d'autres applications. Pour le décollage ou atterrissage terrestre ou lunaire ("Short Take Off and Vertical Landing" (STOVL))[67] par exemple, la forte instationnarité des jets produits peut fortement dégrader les lèvres de la buse d'éjection tandis que des problèmes cruciaux de pertes de poussée (jusqu'à 60%) apparaissent à cause de l'entraînement important du fluide ambiant. Les problèmes de forte sous-détente sont également au coeur des préoccupations des concepteurs d'injecteurs de moteurs cryotechniques et se rencontrent lorsque la sûreté des systèmes fortement pressurisés (conduites de gaz naturel ou réacteurs nucléaires) doit être assurée. Dans ces cas, les chocs naissant à la base de la section d'éjection sont fortement courbés et se réfléchissent irrégulièrement au niveau de l'axe où un large disque de Mach (choc fort) apparaît. Ce choc fort interagit directement avec la couche de cisaillement, donnant naissance à de fortes instabilités qui déstabilisent la structure du jet en aval. La couche de mélange supersonique présente encore une alternance de zones de détente et de recompression tandis que les effets importants de courbure dans la zone proche de la couche de cisaillement induisent la croissance de structures cohérentes longitudinales de Taylor-Görtler susceptibles de modifier de façon importante les propriétés initiales du mélange de la couche de cisaillement. Par ailleurs, la différence de chute de pression totale à travers le choc fort et le choc réfléchi devient très importante et induit une forte inflexion de la couche de cisaillement vers l'axe du jet. Aucune étude ne semble avoir précisément rendu compte à ce jour de la complexité de ces interactions supplémentaires qui modifient profondément la structuration du jet très fortement sous-détendu par rapport au cas du jet modérément sous-détendu. Une modélisation fine de la turbulence semble *a priori* nécessaire pour simuler de façon satisfaisante le champ moyen de la zone proche du jet très fortement sous-détendu. Afin d'éviter un coût prohibitif de la simulation numérique, il semble aussi nécessaire de pouvoir limiter au maximum le nombre de noeuds de calcul en restreignant l'extension du domaine de calcul à la zone proche du jet dans laquelle l'impact pourrait avoir lieu. Cependant, en adoptant cette approche et même en simplifiant, dans un premier temps, la modélisation en ne cherchant à calculer que la structure purement convective de l'écoulement, de sérieuses difficultés d'ordre numérique apparaissent. Il est d'ailleurs étonnant de constater qu'aucune étude ne rende précisément compte de l'ensemble de ces difficultés. Tout d'abord, la présence simultanée de fortes discontinuités de types différents impose l'utilisation de procédures de décentrage pour l'évaluation des flux numériques pour lesquelles un compromis délicat entre robustesse et précision doit être déterminé. Par ailleurs, ces procédures ne peuvent être rigoureusement développées que dans une approche à géométrie unidimensionnelle et leur extension à des géométries multidimensionnelles ne peut se faire qu'en perdant une part impor-

tante de la précision "chèrement" acquise en une dimension d'espace lorsque les discontinuités rencontrées dans l'écoulement ne sont plus orthogonales aux directions dans lesquelles les flux numériques sont évalués. Au vu de la complexité géométrique de la structure de choc *a priori* attendue dans le cas d'un jet fortement sous-détendu, il apparaît nécessaire de coupler la résolution numérique de l'opérateur hyperbolique avec une procédure permettant d'adapter de façon pertinente le maillage utilisé pour le calcul. Enfin, la coexistence de zones supersoniques (couche de mélange) et subsoniques (zone en aval du disque de Mach et co-écoulement entraîné par le jet) pose le délicat problème du traitement des conditions limites. Effectivement, la simulation numérique ne peut se comporter correctement que si le niveau de pression prescrit dans les zones d'écoulement subsonique sortant du domaine de calcul est suffisamment précis, alors que ce niveau est impossible à déterminer *a priori* lorsqu'un domaine de calcul peu étendu est utilisé. Trouver le juste compromis pour pallier l'ensemble de ces difficultés et proposer une procédure globale utilisable pour l'étude numérique du champ proche des jets fortement sous-détendus sur un domaine de calcul limité constitue le coeur de l'exposé de notre étude numérique.

Force est de constater que la littérature est malheureusement beaucoup moins abondante au sujet des jets fortement sous-détendus qu'elle ne l'est pour des rapports de détente moins élevés. L'étude expérimentale des écoulements supersoniques reste en effet généralement délicate. D'une part, l'introduction de sondes physiques peut souvent altérer considérablement l'écoulement, sans compter que les quantités mesurées demandent toujours à être interprétées avec précaution. D'autre part, les méthodes optiques non-intrusives restent encore à améliorer pour fournir des données quantitatives pertinentes. La fluorescence induite par laser ("Laser Induced Fluorescence" (LIF)) présente certes une bonne spécificité moléculaire et une large section diffusives mais est très sensible aux conditions de l'écoulement ("quenching"), ce qui est problématique dans notre écoulement où la pression et la température ne cessent de varier sur une très large plage de valeurs. La double dépendance du signal de fluorescence à la température et à la pression constitue ainsi la limitation fondamentale de cette méthode pour l'étude du jet fortement sous-détendu. Pour celui-ci, il est nécessaire de mesurer simultanément la température par une autre technique afin d'en déduire ensuite le champ de pression, à moins de savoir estimer suffisamment précisément les variations de cette température afin d'en déduire les profils d'absorption adéquats [104]. La diffusion Rayleigh est certes insensible au "quenching" et permet d'obtenir localement des visualisations bidimensionnelles de la masse volumique [43] non-intégrées sur le chemin optique. La précision fait cependant rapidement défaut et cette méthode reste très délicate à mettre en oeuvre de par le besoin d'un air très pur pour éviter le parasitage du signal par les poussières ou l'eau formée par condensation (notamment dans le cas des jets froids où la température chute considérablement en amont du disque de Mach). Dans le cas de l'ombroscopie ou de la visualisation Schlieren, le signal reste directement proportionnel à la dérivée seconde de la masse volumique et permet d'observer la géométrie des structures des chocs beaucoup plus nettement. Néanmoins, l'image reste intégrée sur le chemin optique, ce qui limite l'accès à la géométrie tridimensionnelle détaillée de ces structures, même si quelques remarquables études ont pu être menées (voir par exemple Tabei et al. [89] qui décrivent l'utilisation de la méthode Moiré-Schlieren pour mesurer l'évolution des profils tridimensionnels de masse volumique, pour NPR allant jusqu'à 6,5 environ). Si la connaissance expérimentale du champ moyen est délicate à obtenir, il semble encore quasi-impossible d'accéder à des données statistiques pertinentes sur le champ turbulent. Des mesures de vitesse peuvent être tentées par fils chauds mais ces techniques ne sont pas applicables dans des écoulements supersoniques avec chocs où des milieux à très basse pression [47] peuvent être rencontrés. Les mesures par vélocimétrie laser Doppler ("Laser Doppler Velocimetry" (LDV)) ne semblent pas avoir pu être appliquées au delà de NPR égal à 3,75 environ, [135]. Des indications approximatives sur la position du disque de Mach peuvent

encore se déduire du pic d'intensité turbulente via des mesures en imagerie de vélocimétrie par particules ("Particle Image Velocimetry" (PIV)) mais l'inertie des traceurs par rapport à l'écoulement conduit rapidement à des observations peu exploitables (choc épaissi sur une distance de près de 80% du diamètre de buse pour NPR égal à 20 [176] avec des particules de  $2,4 \mu\text{m}$  de diamètre et une masse volumique de  $0,18$  à  $2 \text{ g/cm}^3$ ). Miles [112] [111] a tenté d'utiliser l'excitation vibrationnelle de l'oxygène, élément naturellement présent et qui présente un temps d'excitation appréciablement très long pour réaliser des mesures d'intensité turbulente et de corrélations de fluctuations de vitesse simultanément à des mesures de masse volumique. Cette technique, dénommée RELIEF (Raman Excitation and Laser Induced Electronic Fluorescence), nécessite cependant l'utilisation simultanée de lasers puissants (typiquement 50 mJ à 532 nanomètres et 40 mJ à 580 nanomètres sont nécessaires au niveau de la nappe) pour obtenir le signal de diffusion Raman stimulée tandis qu'on devient rapidement limité par la résolution des caméras (typiquement une erreur de 1 pixel correspondant à une distance physique de 16 microns dans l'écoulement induit déjà une erreur de 8 m/s pour une partie d'écoulement à vitesse moyenne de 500 m/s). L'étude de l'impact induit également des limitations liées à l'endommagement très rapide des dispositifs. Rahimi et al. [133] rapportent ainsi ne pas pouvoir obtenir une distribution complète du coefficient de transfert de chaleur sur une plaque impactée par un jet sonique sous-détendu au delà d'un niveau de NPR égal à 6 à cause des dommages occasionnés. De nouvelles techniques optiques semblent prometteuses pour l'étude du champ de masse volumique mais ne fournissent essentiellement pour l'instant que des données quantitatives pour la caractérisation de l'instationnarité des jets fortement sous-détendus (Diffusion Rayleigh filtrée [112], Diffusion Rayleigh interférométrique [24] [124], Diffusion à décalage de phase [163]). De ce bref panorama des possibilités expérimentales actuellement accessibles, il ressort malheureusement qu'une part conséquente de l'étude numérique et de l'évaluation de modèles plus évolués de turbulence ne sera essentiellement que de nature qualitative, la base de données expérimentale la plus pertinente pour le jet fortement sous-détendu se réduisant principalement à des visualisations ombroscopiques (ou corrélations obtenues à partir de celles-ci), à quelques évolutions de profils de pression ou nombre de Mach sur l'axe et à quelques profils radiaux de vitesse longitudinale récemment obtenus par PIV [176].

Nos travaux menés sur le jet fortement sous-détendu sont rapportés dans ce mémoire selon un cheminement naturel qui part de l'observation, passe par la modélisation et aboutit à l'étude numérique. Tout d'abord, nous proposons une étude phénoménologique du jet fortement sous-détendu telle qu'elle ressort de l'analyse de l'ensemble de la littérature scientifique ouverte. Cette étude permet de dégager les caractéristiques essentielles qui distinguent le jet supersonique fortement sous-détendu des autres classes d'écoulements supersoniques. Pour ce faire, un rappel de la phénoménologie de chaque élément distinctif identifiable est donné (couche de mélange annulaire supersonique, choc, détente...) ainsi qu'un exposé des différentes classes caractéristiques de jets sous-détendus. Les propriétés caractéristiques particulières du jet fortement sous-détendu sont données dans un second temps. Les principales corrélations rapportées dans la littérature sont notamment rappelées, ce qui constitue une base essentielle de référence pour le prétraitement des divers cas de simulation en fonction de la structure globale attendue de l'écoulement. Le second volet de cet exposé est consacré à la présentation de la modélisation adoptée pour représenter les écoulements supersoniques à étudier, des méthodes numériques spécifiquement dédiées à ces modèles et des sous-procédures utilisées pour traiter le maillage. Les particularités de la méthode mixte volumes finis/éléments finis implémentée dans le code N3S-NATUR utilisé sont notamment soulignées à travers l'exposé général des méthodes de discrétisation décentrée pour la résolution des systèmes hyperboliques en volumes finis, de même que l'accent est porté sur la pertinence de la méthode de réadaptation de maillage par estimation *a posteriori* de l'erreur

d'interpolation [48] que nous avons choisi de coupler au code de calcul. Le troisième volet expose l'ensemble de l'étude numérique. Les capacités et limitations de la méthode numérique sont exposées à travers un ensemble de cas de validation de référence (tube à choc, réflexion de choc sur un dièdre...), ce qui éclaire ensuite la dépendance particulièrement forte de la simulation du jet fortement sous-détendu libre aux conditions initiales, au maillage initial et aux conditions limites. Le coeur de l'exposé est ainsi constitué par le troisième volet dédié à la simulation du jet fortement sous-détendu au début duquel l'exposé de ces difficultés numériques est fait pour le cas du jet libre, ainsi que d'une présentation de la procédure globale de calcul adoptée pour les résoudre. On distingue, dans cette partie, les capacités prévisionnelles de la méthode en augmentant progressivement le niveau de modélisation. On s'attache ainsi à déterminer d'abord le maillage et le domaine adaptés pour minimiser *a priori* la dissipation numérique associée au calcul des termes convectifs pour ensuite prendre en compte les termes de diffusion visqueuse (négligeables) et turbulente. L'étude de l'influence de la prise en compte des termes baroclines, de production enthalpique et d'effets de non-équilibre énergétique (en plus de la prise en compte des effets de dissipation compressible plus couramment réalisés), sur la capture de la zone proche du jet fortement sous-détendu, constitue à ce propos une originalité dans l'ensemble des résultats donnés dans la littérature. Le dernier volet de ce mémoire est consacré à une étude préliminaire du cas plus particulier de percement de chambre de combustion qui a inspiré cette étude. Pour cette première approche, on choisit de simplifier le problème en ne considérant que le cas *a priori* le plus critique en accord avec la norme de certification, soit un mélange de gaz brûlés issus de la combustion d'un mélange de kérosène et d'air. On y distingue l'influence de la prise en compte de l'effet d'orifice sur la structure du jet (déformation des profils des variables de l'écoulement au droit de l'ajutage), de l'effet de conditions thermodynamiques globales représentatives d'un mélange de gaz brûlés à haute température.





Première partie  
Phénoménologie



L'écoulement qui s'établit dans le cas du percement d'une chambre de combustion d'un moteur aéronautique est un écoulement particulièrement complexe dans lequel on peut cependant identifier différents éléments structurels bien distincts. Nous introduisons, dans le premier chapitre de cette partie, la phénoménologie de chacun de ces éléments. La structure d'un jet très fortement sous-détendu, où l'on fait l'hypothèse d'amorçage sonique et d'ajutage parfaitement circulaire peut se découper en trois principales zones. La première zone correspond à la première cellule de choc. Elle se présente sous la forme d'une couche de mélange circulaire fortement courbée, contenant en son sein une structure de choc ayant la forme d'un cône bombé et tronqué en aval par la présence d'un choc fort de forme semi-hémisphérique et de concavité orientée vers l'ajutage, que l'on désignera de manière un peu réductrice par disque de Mach. La seconde zone, en aval de la première, se présente globalement sous la forme d'une couche de mélange annulaire supersonique se développant entre un noyau subsonique et l'atmosphère ambiante au repos. La zone externe de cette couche supersonique présente successivement des zones de compression et de détente dues aux réflexions successives de trains d'ondes de Mach entre les deux pseudo-surfaces isobares qui la délimitent. La couche est fortement défléchie par la différence de chute de pression totale induite à travers le choc oblique en amont de la zone externe de cette couche de mélange et le choc droit en amont de la zone interne de cette couche de mélange. En fonction des conditions en aval du disque de Mach et de son extension, l'écoulement subsonique central peut être réaccélééré, par "effet tuyère" induit par la croissance de la couche de mélange interne, et atteindre à nouveau un état supersonique avant le développement de la couche de cisaillement jusque l'axe. La nature de cet écoulement nous amène ainsi à considérer successivement les éléments suivants :

- des couches de mélanges annulaires concentriques subissant des effets de courbures et de compressibilité,
- des chocs faibles et forts pouvant interagir entre eux et donner naissance à des structures diverses,

ainsi que les interactions entre éléments :

- interaction de la turbulence avec un choc,
- interaction d'un choc avec une couche de mélange (principalement dans la zone interne de la couche de cisaillement externe).

Une fois ces éléments présentés, nous proposons une classification des régimes d'écoulements sous-détendus que l'on est susceptible de rencontrer en fonction du paramètre clé qu'est le rapport NPR ("Nozzle Pressure Ratio") de la pression statique à l'ajutage sur la pression ambiante. Une introduction à l'état de l'art sur le phénomène de jet sous-détendu, tel qu'il a pu être rapporté jusqu'à présent dans la littérature, constitue ensuite le second chapitre. On y précise les caractéristiques liées aux différentes zones, la dépendance aux conditions géométriques et génératrices de la structure globale, telle qu'elle a pu être observée, et enfin l'aspect instationnaire du phénomène.

Le cas de l'impact, qui introduit des modifications conséquentes de la structure de choc associée à l'écoulement, sera finalement évoqué.

L'ensemble de ces éléments ainsi présentés nous permet finalement de conclure quant à l'aspect de la structure globale attendu *a priori* dans le cas de la perforation d'une chambre de combustion pour le cas d'un jet libre, représentatif du phénomène dans sa zone proche si l'impact a lieu à une distance suffisamment importante. Ces données seront particulièrement utiles notamment pour le prédimensionnement du domaine de calcul et pour le choix des paramètres physiques à utiliser lors des simulations.



# Chapitre 1

## Introduction à la phénoménologie des jets compressibles

### 1.1 Phénoménologie des couches de mélange

#### 1.1.1 Développement tourbillonnaire d'une couche de mélange

Dans une première approche, on peut définir globalement la turbulence comme le régime d'un écoulement dans lequel des instabilités mécaniques, liées principalement aux grandes échelles (et donc à la géométrie de l'écoulement), peuvent se développer non-linéairement en n'étant que partiellement amorties par les forces de viscosité. Bien que considérée déterministe à petite échelle, ce développement conduit, du point de vue macroscopique, à une distribution aléatoire de structures tourbillonnaires dans une large gamme d'échelles spatio-temporelles par lesquelles l'énergie cinétique produite à grande échelle est transférée (à flux constant dans la théorie originale de Kolmogorov) des grosses structures vers les petites, par divers mécanismes de déformation, étirement et dislocation des tourbillons. On peut aisément décrire le principe général de naissance et de développement de ces structures dans le cas d'une couche de mélange. Rayleigh a en effet montré qu'un écoulement devenait instable dès qu'un point d'inflexion apparaissait dans le profil de vitesse. Ainsi, les petites oscillations de part et d'autre de deux écoulements à vitesses différentes vont engendrer le développement d'oscillations de la courte interface initiale, qui vont croître jusqu'à former des enroulements tourbillonnaires. Par effet d'entraînement, les structures les plus externes de l'interface vont s'enrouler radialement sur les structures internes. Ce processus dit d'appariement, conduit ainsi à des structures tourbillonnaires primaires dont la croissance va essentiellement conditionner l'épanouissement de la couche de mélange [113]. Ces structures primaires sont à leur tour instables et provoquent la naissance de structures secondaires [23] moins étendues mais qui vont s'enrouler autour des structures primaires, rendant la structure tourbillonnaire tridimensionnelle. Cet enroulement longitudinal va accélérer la destruction des structures primaires en structures plus petites puis disparaître dès que l'écoulement sera développé et devenu complètement tridimensionnel.

#### 1.1.2 Cas du jet

Un jet est un écoulement issu d'un espace confiné jaillissant dans un espace ouvert. Dans le cas d'un jet plan, on ajoute simplement une échelle spatiale (la hauteur de l'ajutage), de sorte que l'écoulement apparaît en somme (si on néglige les effets des bords de la fente et qu'on ne représente que son comportement moyen bidimensionnel) comme la superposition de deux couches de mélange planes qui se développent indépendamment, sous forme de tourbillons contrarotatifs

dont la taille augmente au fur et à mesure de leur convection dans chaque couche respective, jusqu'à se rencontrer au niveau du plan de symétrie. La distance entre la section de sortie de l'ajutage et le point où les couches se rejoignent définit la zone dite de coeur ou noyau potentiel, au sein de laquelle l'écoulement reste isolé de l'écoulement environnant (le niveau de turbulence reste constant sur l'axe). Au niveau de la fin du coeur potentiel, la taille des tourbillons est maximale. On rentre dans une zone de transition où l'étirement scinde tour à tour les structures (primaires et secondaires) en structures plus petites [38]. L'écoulement devient progressivement tridimensionnel et voit tour à tour se former toutes les échelles de structures. La zone lointaine correspond ainsi à une zone tourbillonnaire développée où les profils moyens, de vitesse et de température, deviennent similaires.

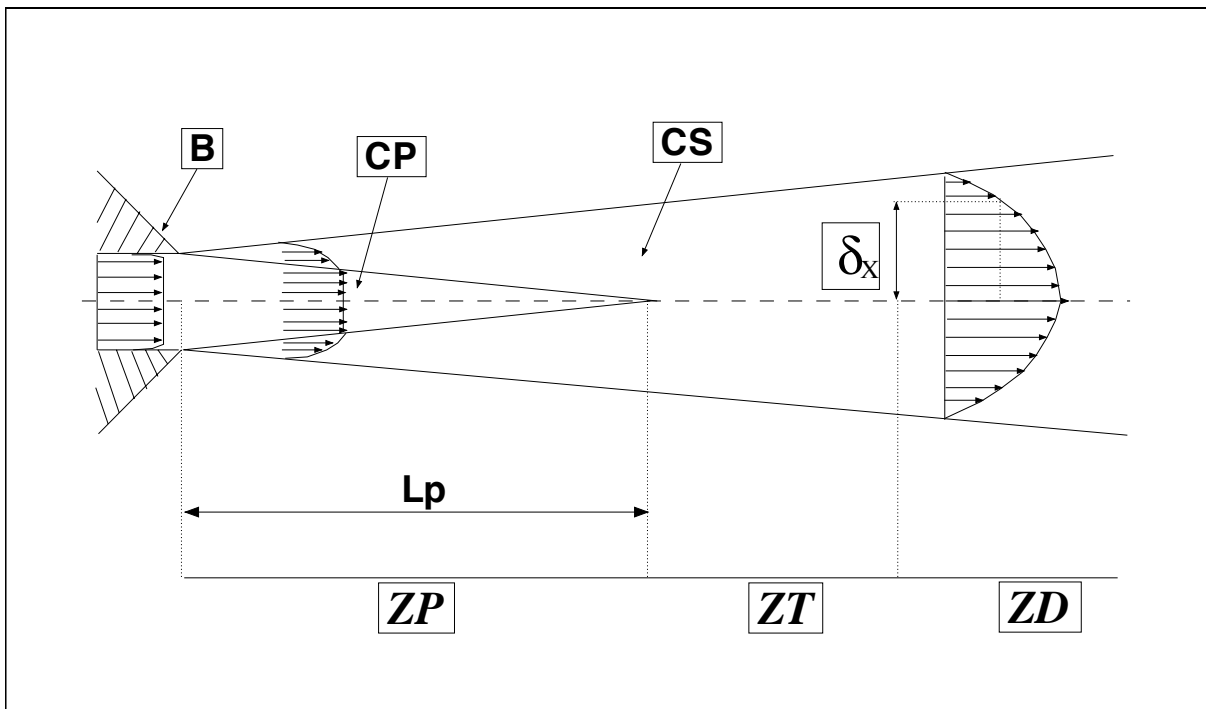


FIG. 1.1 – Schéma de la structure globale d'un jet : **ZP** : Zone potentielle, **ZT** : Zone de transition, **ZD** : Zone développée ou de similitude, **B** : Buse, **CP** : Cône potentiel, **CS** Couche de cisaillement,  $\delta_x$  : Hauteur de demi-vitesse maximale,  $L_p$  : Longueur du cône potentiel.

Notons que le cas du jet axisymétrique est plus complexe. Dès la base du jet, coexistent à la fois des modes d'instabilités axisymétrique, azimutal et hélicoïdal. Les structures annulaires dominent au niveau du coeur potentiel [38] tandis que les structures hélicoïdales deviennent prépondérantes au niveau de la zone de transition. Le développement juxtaposé de ces structures hélicoïdales limite l'appariement des structures principales annulaires et accélère, au niveau de la zone de transition, la formation des structures à plus petite échelle. Ceci se traduit par un épanouissement du jet sensiblement plus faible que dans le cas bidimensionnel. Typiquement, dans la zone tourbillonnaire développée (ou de similitude), la vitesse axiale  $u_{axe}$  décroît de manière inversement proportionnelle à la distance  $X$  par rapport à la buse (de diamètre  $D_e$ ), l'épaisseur du jet (décrite par exemple par la distance  $\delta_{1/2}$  entre l'axe et le point de la couche où la vitesse atteint la moitié de sa valeur atteinte sur l'axe) évolue proportionnellement à cette distance, tandis que les profils radiaux de vitesse longitudinale  $u$ , adimensionnés par la vitesse

axiale  $u_{axe}$ , peuvent être décrits par une loi exponentielle de type gaussien :

$$\frac{\delta_{1/2}}{D_e} = a \frac{X - X_o}{D_e}, \quad \frac{u_{axe}}{u_e} = b \frac{D_e}{X - X_o}, \quad \frac{u}{u_{axe}} = e^{-\frac{\ln(2)}{a^2} \left( \frac{r}{X_{axe} - X_o} \right)^2} \quad (1.1)$$

où  $r$  est la distance à l'axe,  $U_e$  est la vitesse moyenne débitante au niveau de la buse, et où  $a$  (le taux d'élargissement du jet),  $X_o$  (l'origine virtuelle) et  $b$  sont des constantes. On pourra retenir les valeurs moyennes expérimentales pour le cas d'un jet axisymétrique en régime subsonique à bas nombre de Mach<sup>1</sup>  $a \simeq 0,95$ ,  $b \simeq 5,9$  et  $X_o \simeq D_e$  (d'après Bailly et Comte-Bellot [20]), même si des écarts notables sont expérimentalement observés, notamment pour l'origine virtuelle. Deux paramètres essentiels semblent contrôler le développement du jet en régime subsonique à bas nombre de Mach : le nombre de Reynolds initial  $Re_i = \rho u_e D_e / 2\mu$  et le rapport  $D_e / 2\delta_\theta$  du rayon sur l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite au niveau de la section de l'ajutage. La transition à la turbulence peut s'effectuer soit à une distance de plusieurs diamètres de buses si  $Re_i < 10^5$  soit apparaître à une distance de la buse de moins d'un quart de son diamètre si  $Re_i > 10^5$ . Une augmentation de  $\delta_\theta$  par rapport au diamètre de l'ajutage aura tendance à augmenter le taux de croissance des instabilités et diminuer l'étendue du cône potentiel. Dans le cas d'une buse sonique, et en particulier pour un orifice sonique, on notera cependant que la croissance de la couche limite est fortement limitée [149], de sorte que cette épaisseur de quantité de mouvement restera *a priori* faible devant le diamètre de l'ajutage. L'influence de ce paramètre sera négligée dans le cadre de cette étude. On retiendra les ordres de grandeur typiques pour le cas d'un jet subsonique à bas nombre de Mach, isobare et isotherme (de pression et température sensiblement égales à la pression et la température ambiantes). Le cône potentiel s'étend sur une longueur égale à environ cinq fois le diamètre de la buse tandis que la zone développée démarre à une distance de la buse égale à environ quinze fois son diamètre.

### 1.1.3 Caractéristiques liées aux grandes vitesses

#### Introduction aux effets de compressibilité

De façon très générale, on définit un écoulement compressible comme un écoulement au sein duquel la masse volumique peut varier. On peut cependant distinguer différents types d'effets pour lesquels l'origine physique de cette variation est différente :

- Les effets d'inhomogénéité de température ou de masse volumique dans le cas de mélange de fluides. Dans ce cas, l'effet des fluctuations de pression sur la structure de la turbulence reste négligeable et l'écoulement reste quasi-isovolume. Cependant, les flux de masse turbulents commencent à jouer un rôle non-négligeable dans le bilan énergétique en faisant apparaître un couplage notable entre le champ thermique et le champ cinématique. Ces effets sont typiquement à prendre en considération dans les problèmes de mélange de jets chauds libres ou les problèmes d'impact de jet réactifs.
- Les effets de dilatation moyenne pure liés à des réactions chimiques pour lesquels le changement de masse volumique moyenne est liée à un changement de la composition du milieu. Cet aspect ne sera pas abordé dans notre étude.
- Les effets de compression moyenne typiquement rencontrés et étudiés pour les moteurs à combustion interne ou en interaction de chocs avec la turbulence.
- Les effets de compressibilité intrinsèque que l'on peut dénommer plus précisément effets de Mach, qui correspondent à une modification de la structure de la turbulence due au changement de volume des cellules fluides lié à la propagation d'ondes acoustiques.

---

<sup>1</sup>La terminologie "bas Mach" correspondra au cours de cet exposé à des régimes d'écoulement où le nombre de Mach, rapport de la vitesse locale sur la vitesse locale du son, ne dépasse pas 0,3.



Au cours de cet exposé, on s'intéressera principalement à ce dernier type d'effets de compressibilité.

### Effets de compressibilité intrinsèque à grande échelle

À grande échelle, l'effet de compressibilité intrinsèque apparaît être de nature dissipative et se traduit par une diminution de l'épanouissement des couches de mélange. Même si la structure tourbillonnaire reste globalement identique [145] [35] lorsque la différence de vitesse entre les deux écoulements augmente, l'importance accrue de l'effet d'entraînement semble induire un allongement et une inclinaison des structures tourbillonnaires primaires [128] et un agrandissement de la taille des structures secondaires qui peut devenir comparable à celle des structures primaires [56]. Par ailleurs, des chocs peuvent apparaître au sein même de ces structures [127]. Le processus d'appariement se voit ainsi inhibé et on peut observer une transition plus rapide des grosses structures bidimensionnelles vers les structures à petite échelle [36]. La couche de cisaillement s'épanouit alors moins et le cône potentiel s'allonge. Dans le cas d'un jet isotherme et isobare, Lau et al. [83] ont ainsi observé par vélocimétrie laser que l'augmentation de la longueur de ce cône pouvait être décrite par la corrélation suivante :

$$\frac{L_p}{D_e} = 4,2 + 1,1M_e^2 \quad (1.2)$$

où  $M_e$  est le nombre de Mach dans la section de l'ajutage.

L'importance des effets de compressibilité, observables à grande échelle dans les couches de mélange, est souvent quantifiée en introduisant le nombre de Mach convectif  $M_c$ . Cette variable représente une pondération de la différence entre la vitesse caractéristique  $U_c$  de convection des grosses structures de la couche, par les vitesses locales du son  $a_1$  et  $a_2$ , relatives respectivement aux deux écoulements à vitesse débitante  $U_1$  et  $U_2$ . Lorsque le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  peut être considéré constant à la traversée de la zone de cisaillement, l'expression du nombre de Mach convectif se réduit typiquement à :  $M_c = \frac{U_1 - U_2}{a_1 + a_2}$ ,  $U_1$  étant la vitesse de l'écoulement principal.

### Effets de compressibilité intrinsèque à petite échelle

S'il est possible d'avancer une explication phénoménologique de l'effet de compressibilité intrinsèque à grande échelle, il est plus délicat d'interpréter cet effet à petite échelle. Les résultats des études en cours sont contradictoires. Certaines observations amènent à penser que le mélange aux petites échelles est accru [52] [37] tandis que d'autres indiquent le contraire [74]. L'ensemble des observations s'accordent sur une diminution globale des fluctuations turbulentes. Cependant, l'anisotropie reste constante pour certains (diminution à la fois de  $\frac{\sqrt{(u')^2}}{\Delta U}$  et de  $\frac{\sqrt{(v')^2}}{\Delta U}$ ) [55] [21], tandis que seul le niveau des fluctuations radiales semble être affecté pour d'autres [72]. Les études théoriques ou numériques ne sont guère plus concluantes (cf. chapitre 4.4). Sarkar [143] ou Zeman [182] ont introduit le concept le plus couramment employé désormais dans les modélisations les plus simples, concept global dit d'"extra-dissipation" de l'énergie cinétique turbulente apparaissant à nombre de Mach élevé. Cette "extra-dissipation" conduit à prévoir une intensité de turbulence et des paramètres d'anisotropie globalement en accord avec les résultats expérimentaux (principalement pour les couches de mélange planes). Cependant, des résultats plus récents de simulation directe [146] contredisent totalement la base phénoménologique sur laquelle repose ce concept. L'ordre de grandeur des termes dissipatifs dans le bilan énergétique ne saurait être suffisant pour induire cette diminution du mélange, dont l'origine est désormais plutôt recherchée dans une altération de la redistribution d'énergie dans le tenseur de Reynolds,

liée aux fluctuations de pression. Cette autre explication est introduite par Breidenthal [27] avec le concept de "Sonic Eddy". L'effet de compressibilité serait en fait liée à une diminution de ces fluctuations de pression à nombre de Mach élevé. Les échanges entre grosses structures de la couche de mélange seraient ainsi limités, les effets de pression ne pouvant plus se faire sentir qu'entre des points de l'écoulement où la différence de vitesse reste subsonique, de sorte que la redistribution énergétique serait favorisée ou inhibée en fonction des directions privilégiées de l'écoulement. Bien que ce concept soit séduisant en termes d'interprétation physique, il n'a pu encore être véritablement validé. Certes, Sarkar [146] a tenté de paramétrer l'influence de la communication par la pression en introduisant un nouveau paramètre, le nombre de Mach de gradient (rapport entre un temps acoustique et un temps de turbulence) afin de fermer les corrélations impliquant ces fluctuations de pression. Mais ce modèle conduit à une forte augmentation de l'anisotropie avec le niveau de compressibilité<sup>2</sup>, résultat qui reste en profond désaccord avec l'ensemble des résultats expérimentaux. Récemment, Bellaud [22] a par exemple pu reconstruire les bilans de l'énergie cinétique turbulente et des tensions de Reynolds pour différentes valeurs du nombre de Mach convectif (0,55 ; 0,68 ; 0,84). Elle a ainsi vérifié que l'anisotropie semble rester relativement constante (sauf peut-être pour le cas très compressible à nombre de Mach convectif de 1,3). Par ailleurs, l'allure globale du bilan d'énergie cinétique semble de même rester globalement identique pour les couches de mélange annulaires subsoniques et supersoniques.

Au vu de ce rapide tour d'horizon phénoménologique, force est de constater que la compréhension des mécanismes physiques à l'origine du changement de la structure de la turbulence dans les jets à grande vitesse, semble loin d'être acquise.

#### 1.1.4 Effets géométriques sur les jets supersoniques

Si le mécanisme exact permettant d'expliquer la décroissance du taux d'évasement dans les jets supersoniques lorsque le nombre de Mach augmente, n'est pas à ce jour élucidé, l'influence des conditions géométriques ne semble guère plus explicable. Il est intéressant cependant de noter que le mode d'instabilité hélicoïdal est d'autant plus favorisé que l'écoulement devient rapide, ce qui rend le jet axisymétrique supersonique particulièrement sensible à la génération d'instabilités liées à la géométrie de l'ajutage. Ainsi, les conditions initiales deviennent déterminantes sur le comportement des structures en aval. Michalke [110] montre par exemple que, plus le rapport du rayon de l'ajutage sur l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite au niveau de celui-ci augmente, plus les tourbillons axisymétriques de Kelvin-Helmoltz vont se transformer rapidement en structures hélicoïdales vers l'aval, cet effet rentrant alors en compétition avec les effets de compressibilité. On notera cependant que la compressibilité ne modifie pas l'effet géométrique globalement observé en incompressible. Ainsi, Bellaud a montré [22] que le taux d'évasement compressible (calculé à partir de l'épaisseur de vortacité) adimensionné par sa valeur en régime incompressible est comparable à celui d'une couche de mélange plane de même nombre de Mach convectif. Par ailleurs, les budgets d'énergie diffèrent peu entre les cas plan et axisymétrique, ce qui tendrait à montrer que l'équilibre énergétique reste indépendant du type de symétrie de l'écoulement.

## 1.2 Introduction aux phénomènes de chocs et de détente

Certes, la compressibilité va jouer un rôle fondamental sur la structure de la turbulence dans les zones de transition et développée d'un jet supersonique. Cependant, la structure moyenne du

---

<sup>2</sup>On notera que l'ensemble des résultats de simulation directe correspondent à des cas où le nombre de Reynolds est inférieur d'un ordre de grandeur au moins, et qu'ils ne sont généralement pas convergés, ce qui rend de toute façon très délicate toute interprétation sur la nature exacte du tenseur de Reynolds.

champ très proche d'un jet fortement sous-détendu restera principalement conditionnée par les mécanismes purement convectifs. Même si l'on se place alors dans des configurations où l'influence de la turbulence devient secondaire, on constate que la structure de l'écoulement, dès lors qu'il devient supersonique, peut être radicalement modifiée par l'apparition de zones de compression et de détente.

### 1.2.1 Formation et structures d'ondes de choc

On définira un choc comme une zone très mince (typiquement d'une épaisseur de l'ordre du libre parcours moyen moléculaire) de l'écoulement à travers laquelle les grandeurs physiques varient très rapidement. On introduit classiquement leur mode de formation en considérant une accumulation et fusion (ou coalescence) d'ondes de compression infinitésimales. Liée à la nature compressible des écoulements de fluide gazeux, une perturbation ponctuelle d'une variable physique va en effet pouvoir se propager à la vitesse locale du son (fonction de la température du milieu), propageant un saut infinitésimal de toutes les variables physiques. En particulier, le passage d'une telle onde de compression va légèrement augmenter la température et donc la vitesse du son dans le milieu. Si la source de perturbation est continue (brutale mise en mouvement d'un piston par exemple), chaque nouvelle onde de perturbation va se déplacer plus rapidement et rattrapper l'onde précédemment émise et fusionner ou coalescer en une onde de vitesse dépendant du nouveau saut des grandeurs induit entre l'amont et l'aval du front de perturbation. Si la source de perturbation est suffisamment intense (la différence de pression et de masse volumique de part et d'autre d'un diaphragme dans un tube à choc par exemple), l'onde de choc peut se former instantanément. Un bilan local de masse, quantité de mouvement et énergie permet alors de déterminer classiquement les conditions de saut de Rankine-Hugoniot, reliant par exemple le saut de chaque grandeur au nombre de Mach en amont de l'écoulement.

### 1.2.2 Ondes de Mach

En configuration multidimensionnelle, une perturbation ponctuelle va se propager dans toutes les directions à la vitesse locale du son. Dès que le fluide est en mouvement, les ondes sonores émises par une source ponctuelle (un point quelconque de l'écoulement) ne sont cependant plus concentriques, chaque onde se déplaçant plus rapidement dans le sens de l'écoulement que dans sa direction opposée. Dès lors que l'écoulement est supersonique, les ondes de perturbations ne peuvent plus remonter l'écoulement et s'accumulent le long de lignes (ou surfaces) de discontinuités infinitésimales (de direction d'angle  $\alpha = \arcsin(1/M)$  localement près de la source) appelées ondes de Mach (ou cônes de Mach). Ces ondes de Mach séparent typiquement l'écoulement en trois zones : une zone d'influence de la source, une zone pouvant influencer l'état existant au niveau de cette source et une zone morte, de laquelle aucune information ne peut provenir et vers laquelle aucune information ne peut parvenir. Dès lors que l'écoulement n'aura plus une vitesse uniforme, ces ondes de Mach vont pouvoir diverger ou converger, les ondes de Mach propageant alors respectivement une information de chute de pression et d'augmentation de la vitesse, ou d'augmentation de pression et de chute de vitesse.

### 1.2.3 Faisceaux de détente et de compression

Typiquement, au niveau d'un orifice ou d'une marche descendante, la section de passage des lignes fluides augmente soudainement. Si l'écoulement amont est supersonique, il accélère alors tandis que sa pression chute. Cette information de chute de pression et d'augmentation de vitesse ressentie par une particule P2 (voir figure 1.2) lors de la déflexion de sa trajectoire est propagée le long des lignes de Mach. Une particule P1 initialement située à la même abscisse que P2, mais

à une ordonnée supérieure (dans la zone morte de P2) va finalement ressentir cette information avec un certain décalage dans le temps, fonction de la vitesse amont. La déviation induite de sa trajectoire sera alors d'autant décalée que son ordonnée initiale relativement à celle de P2 était importante.

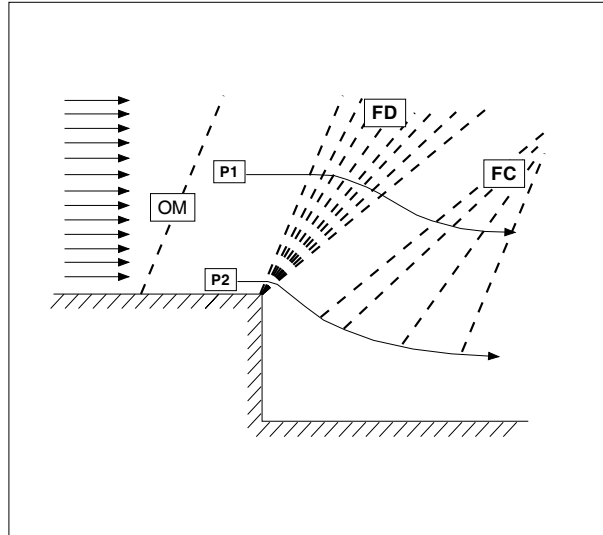


FIG. 1.2 – Schéma de la formation de faisceaux de détente et de compression. :

**OM** : Onde de Mach, **FD** : Faisceau de détente, **FC** : Faisceau d'ondes de compression, **P1, P2** : Particules fluides.

Si la trajectoire de la particule fluide P2 est réimposée par la présence d'une paroi (ou de façon identique à la frontière libre d'un jet), le changement de courbure des lignes fluides peut induire progressivement une convergence des lignes de Mach. L'information d'augmentation de pression et de diminution de la vitesse induite par cette contraction ou constriction de l'écoulement étant propagée par les lignes de Mach, on parle alors de faisceau d'ondes de compression. On observe ainsi qu'un faisceau de détente se réfléchit sur une paroi, ou à la frontière libre d'un jet, en un faisceau d'ondes de compression.

#### 1.2.4 Écoulement stationnaire en présence d'un dièdre - Formation d'une onde de choc oblique

Lorsque la déflexion des lignes de courant est imposée brusquement par la présence d'un obstacle, les ondes de Mach focalisent et donnent naissance à une onde de choc, oblique par rapport à la direction initiale de l'écoulement, dont l'origine converge vers l'apex du dièdre (voir figure 1.3). Le changement de direction des lignes de courant dans l'écoulement est alors assurée par une augmentation brutale (sur une distance de l'ordre du libre parcours moyen) de la pression et une chute de la composante de vitesse normale à l'onde de choc. On peut montrer qu'au delà d'un angle limite  $\Phi_{lim}$ , la déflexion de l'écoulement ne peut plus être assurée par une seule onde de choc. Un choc droit se forme alors en léger amont du dièdre, dont la courbure évolue progressivement vers l'aval pour redonner un nouveau choc oblique.

#### 1.2.5 Réflexions stationnaire de chocs

On observe pour les ondes de choc stationnaires en présence de parois (ou au niveau de l'axe d'un jet axisymétrique) le même comportement que pour les faisceaux d'ondes de Mach. Si l'angle

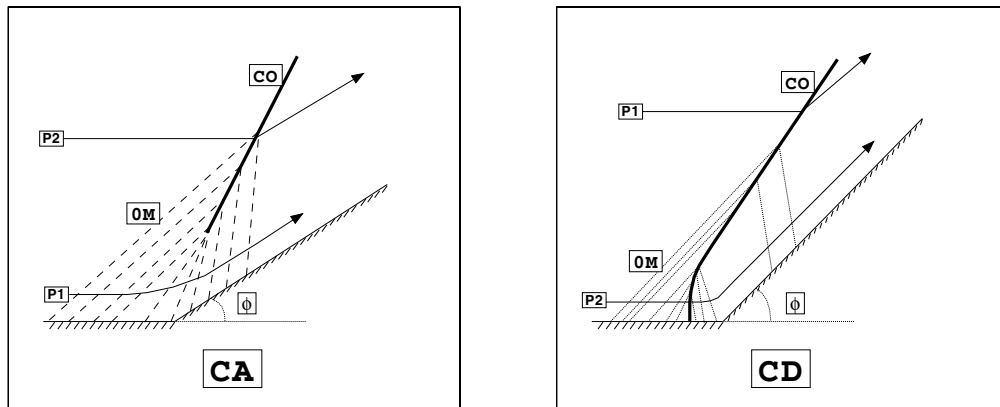


FIG. 1.3 – Schéma de la formation d'une onde de choc oblique. :

**OM** : Onde de Mach, **CO** Choc oblique, **P1,P2** : Particules fluides, **CA** : Configuration de choc oblique attaché, **CD** : Configuration de choc oblique détaché.

$\delta$  du choc oblique incident (CI) (voir figure 1.4) reste modéré, le choc est simplement réfléchi en une nouvelle onde de choc (CR). Cette configuration est dite de réflexion régulière (RR). Les lignes de courant sont d'abord déviées vers la paroi (ou l'axe du jet) d'un angle dépendant de l'intensité du choc incident. L'angle du choc réfléchi dépend de la nouvelle déflexion des lignes de courant qui doit être compatible avec la direction imposée par la paroi (ou la condition de symétrie). Dans cette configuration, trois zones principales peuvent être définies au sein de l'écoulement qui reste entièrement supersonique.

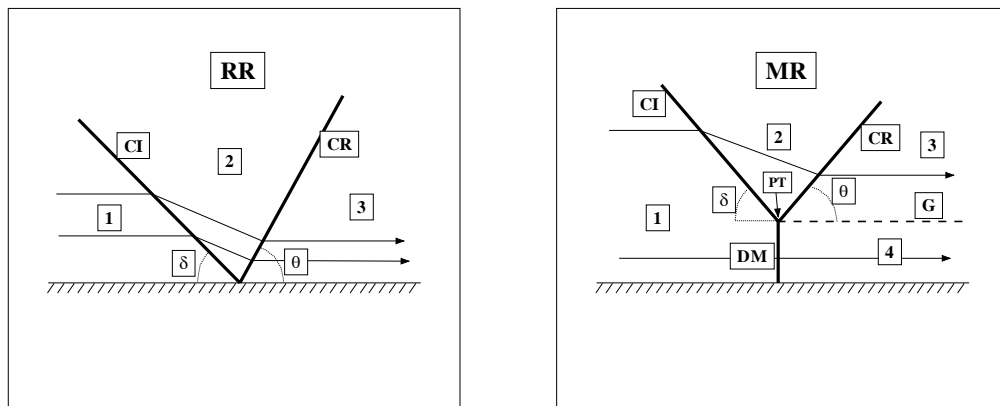


FIG. 1.4 – Schémas des deux principaux types de réflexion d'une onde de choc stationnaire. :

**CI** : Choc incident,  $\delta$  : Angle entre la direction du choc incident et la direction de la paroi (ou axe de symétrie), **CR** Choc réfléchi,  $\theta$  : Angle entre la direction du choc réfléchi et la direction de la paroi (ou axe de symétrie), **DM** : Disque de Mach, **PT** : Point triple, **1,2,3,4** : Différentes zones de l'écoulement.

Il existe une valeur limite de l'angle  $\theta$  entre le choc réfléchi et la paroi pour laquelle la déflexion des lignes de courant dans la direction de la paroi ne peut plus être assurée. Une configuration dite de réflexion de Mach (RM) peut alors apparaître. Un choc quasi-droit, le disque de Mach (DM), apparaît au niveau de la paroi. Il est connecté aux chocs incident et réfléchi par le point triple (PT). Une zone subsonique (4) apparaît alors en aval du disque de Mach, séparée de l'écoulement en aval du choc réfléchi par une ligne de glissement (G). Il existe

une plage de conditions en amont pour laquelle les deux configurations de réflexion peuvent exister et un phénomène d'hystérésis peut alors être expérimentalement observé. Remarquons que d'un point de vue numérique, ce phénomène d'hystérésis sera naturellement très sensible aux conditions initiales et aux conditions limites. Cependant, dans une configuration axisymétrique, la condition numérique de vitesse radiale nulle sur l'axe interdit rigoureusement l'existence de la réflexion régulière, de sorte qu'un disque de Mach, aussi petit son diamètre soit-il, existera quelles que soient les conditions imposées. Notons que dans ce cas, dans les zones (3) et (4) les niveaux de pression statique sont du même ordre de grandeur, ce qui n'est évidemment pas le cas pour le nombre de Mach ou la vitesse. Ainsi, la chute de pression totale diffère de part et d'autre de la ligne de glissement, ce qui peut être à l'origine de l'apparition d'une recirculation en aval du disque de Mach. Ce principe peut être d'ailleurs appliqué pour amorcer et stabiliser des zones de combustion dans les foyers de propulseurs supersoniques [105].

### 1.2.6 Réflexion d'un choc sur un dièdre

Les phénomènes d'interactions de chocs ont déjà été abondamment étudiés, sans pour autant être parfaitement élucidés, tant la complexité des structures pouvant apparaître est grande. Cependant, le cas de la réflexion d'un choc droit instationnaire sur un dièdre constitue désormais un cas d'école relativement bien documenté, permettant de mettre en évidence un certain nombre de configurations géométriques pouvant apparaître en fonction de deux paramètres simples : le nombre de Mach de choc  $M_c^3$  et l'angle  $\Phi$  entre le dièdre et la direction de l'écoulement. Cette configuration peut être vue de façon équivalente à celle d'une réflexion pseudo-stationnaire d'un choc sur une paroi inclinée. Le passage du choc dans le milieu au repos (provenant de la gauche et se déplaçant vers la droite sur la figure 1.5) provoque une accélération du fluide jusqu'à la vitesse de propagation du choc. La déflexion des lignes de courant induite par la présence du dièdre est alors à l'origine d'une focalisation des ondes de Mach en une structure courbe de choc faible, comme dans le cas d'un choc stationnaire. Le nombre de Mach tend vers zéro à l'apex du dièdre mais les conditions en aval près de la paroi continuent cependant d'évoluer avec l'avancée du choc incident, de sorte que l'angle des faisceaux d'ondes de Mach ne reste plus constant lorsque l'on suit une ligne de courant près de la paroi. La structure résultante est un choc diffracté dont la forme géométrique est similaire en temps. Le choc diffracté (R) (voir figure 1.5) se rattache au choc incident (I) en donnant naissance à une structure de choc qui va dépendre de l'angle  $\Phi$  du dièdre. Si le point de réattachement se situe au niveau même de la paroi du dièdre, on est dans le cas d'une réflexion régulière (RR). Comme dans le cas d'une réflexion d'un choc oblique sur l'axe d'un jet axisymétrique, il existe un angle limite entre la direction du choc diffracté près de ce point de réflexion et la direction de la paroi au delà duquel le changement de direction des lignes fluides (dépendant de l'intensité des chocs diffracté et incident) devient incompatible avec la direction imposée par la paroi, de sorte qu'une simple réflexion de Mach (SMR) peut apparaître. En conservant  $M_c$ , on pourrait typiquement faire basculer une configuration (RR) en une configuration (SMR) en diminuant l'angle du dièdre. Le choc diffracté (R), le choc incident (I) et le pied de Mach (M) se rattachent en un point triple, duquel une ligne de glissement (G) est issue. On s'intéressera en particulier à cette configuration dont les propriétés géométriques sont proches de celles attendue dans le cas d'un jet fortement sous-détendu (cf. 8.2). A angle du dièdre fixé, si l'on augmente alors fortement  $M_c$ , on peut faire apparaître des configurations plus complexes telle que la double réflexion de Mach (DMR) pour laquelle un second pied de Mach apparaît entre le choc diffracté et la ligne de glissement principale issue du premier point triple, provoquant la naissance d'une seconde ligne de glissement (G'). Dans la classification classique,

---

<sup>3</sup>Le nombre de Mach de choc est une mesure de l'intensité du choc. Il est défini comme la vitesse du choc sur la vitesse du son dans le milieu en amont du choc.

on introduit également la configuration intermédiaire de réflexion complexe de Mach (CMR) pour laquelle on peut observer un changement caractéristique de l'angle du choc diffracté à proximité du point triple.

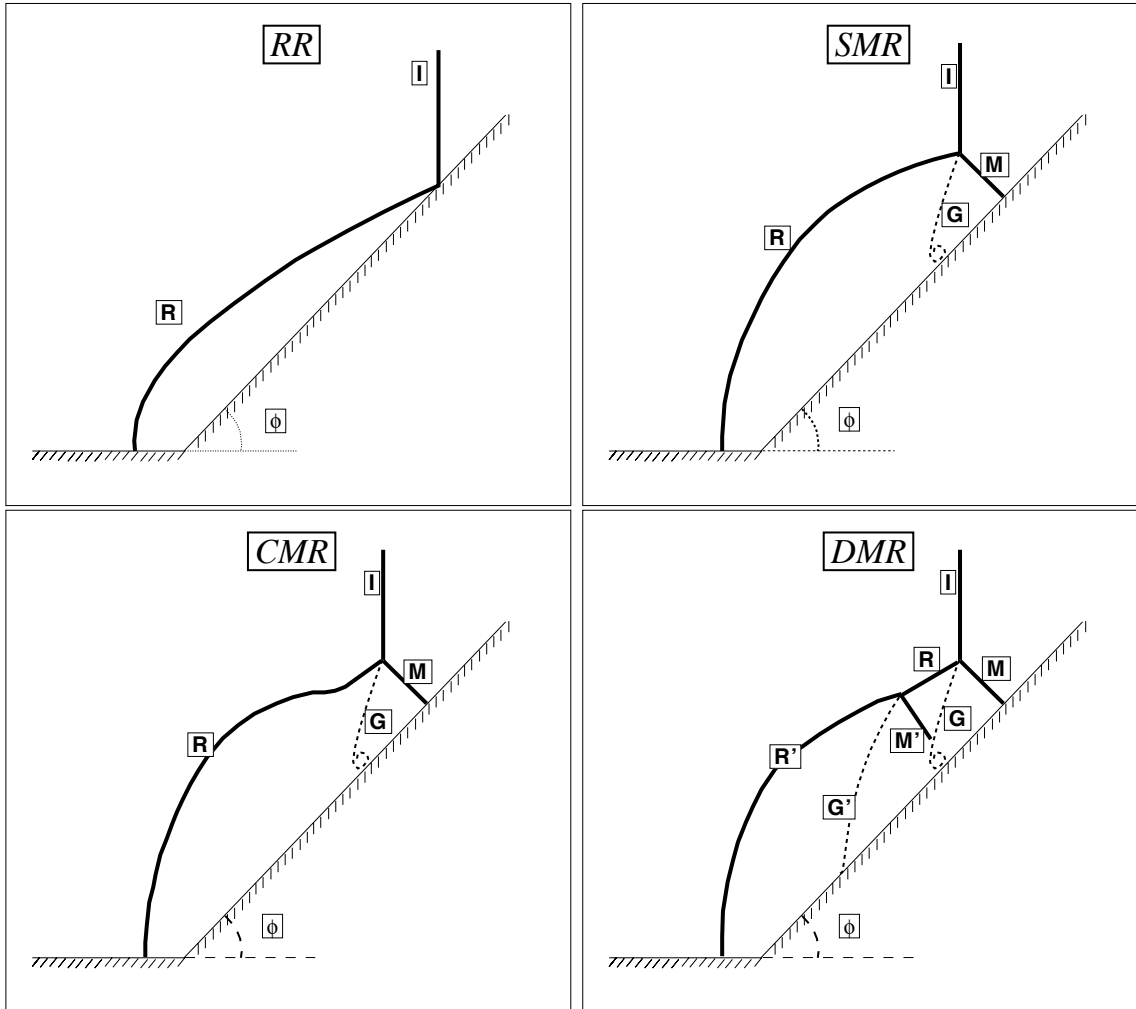


FIG. 1.5 – Schéma des motifs de réflexions pseudo-stationnaires d'une onde de choc oblique. :

**RR** : Réflexion régulière, **SMR** : Réflexion simple de Mach ("Single Mach Reflection"), **CMR** : Réflexion complexe de Mach ("Complex Mach Reflection"), **DMR** : Double réflexion de Mach ("Double Mach Reflection"), **I** : Choc incident, **R** : Choc diffracté primaire, **M** : Pied de Mach primaire, **G** : Ligne de glissement primaire, **R'** : Choc diffracté secondaire, **M'** : Pied de Mach secondaire, **G'** : Ligne de glissement secondaire.

### 1.2.7 Interaction choc/turbulence

Les effets de compressibilité sur le développement d'une couche de mélange annulaire supersonique, ou sur la structuration des ondes de choc dans des configurations où la turbulence peut être négligée, sont déjà, séparément, très délicats à étudier. La turbulence au sein de l'écoulement conduit à rendre toute structure de choc instationnaire et peut modifier considérablement sa structure moyenne, que ce soit localement lors de l'interaction d'une structure cohérente avec

un choc droit ou oblique, ou globalement lors de l'interaction d'une turbulence développée avec un choc droit par exemple. D'autre part, la présence de chocs pourra profondément modifier, et ce de façon inhomogène, les échelles spatiales et temporelles qui la caractérisent. Cette interaction mutuelle n'a pu à ce jour être étudiée que dans des configurations simples et donc particulièrement réductrices par rapport à la complexité d'un jet fortement sous-détendu (interaction d'une turbulence homogène avec un choc droit, interaction d'un tourbillon longitudinal avec un choc oblique...). Aussi n'existe-t'il pas véritablement de conclusion aboutie dans ce domaine, permettant de décrire plus finement les éléments constitutifs du jet fortement sous-détendu. On se contentera ici de mentionner quelques tendances générales, qui pourront aiguiller l'interprétation des résultats de nos simulations. En accord immédiat avec les relations de saut de Rankine-Hugoniot, la composante de la vitesse normale à la surface de choc et les composantes radiales du rotationnel peuvent être amplifiées de façon très importante, tandis que la composante de la vorticité normale au choc et les composantes radiales de la vitesse resteront généralement peu affectées par l'interaction avec le choc. Il est ainsi généralement admis qu'un choc a globalement tendance à augmenter à la fois l'intensité de la turbulence et son taux de dissipation. Cette augmentation dépend néanmoins fortement de l'état de la turbulence et du niveau de compressibilité de l'écoulement amont, et de l'intensité du choc. Par exemple, une augmentation du niveau de compressibilité en amont accentuera plus l'augmentation des fluctuations des composantes de la vorticité radiales à la surface de choc que sa composante longitudinale. Par ailleurs, l'échelle de longueur longitudinale est systématiquement réduite tandis que les échelles de longueur radiales peuvent avoir tendance soit à augmenter si le nombre de Mach amont est peu important soit à être réduites lorsque ce nombre de Mach est plus important. Typiquement, si le choc est suffisamment faible, les tourbillons seront avant tout comprimés dans la direction normale au choc, pour être comprimés dans toutes les directions dès lors que le choc devient plus fort. Globalement, l'interaction avec un choc semble favoriser la scission des grosses structures et l'apparition des plus petits tourbillons. On retiendra que les effets baroclines (interaction des gradients de pression et de masse volumique) jouent un rôle clé lors de telles interactions.

## 1.3 Présentation des différents régimes de sous-détente d'un jet sonique axisymétrique

### 1.3.1 Définition

On définira un jet sous-détendu comme toute veine fluide à vitesse sonique ou supersonique qui se déplace dans un milieu fluide (en repos ou en mouvement) et dont la pression statique dans la plan de sortie de l'ajutage est plus élevée que la pression statique du milieu dans lequel elle se déplace [162]. Comme dans le cas d'un jet parfaitement sous-détendu (voir chapitre 1.1.2), on peut définir trois zones distinctes :

- LE CHAMP PROCHE OU RÉGION QUASI-POTENTIELLE : Cette zone s'étend de la section du plan de l'ajutage jusqu'à la fin de la dernière cellule de choc identifiable (cf. figure 1.6, p.16). Antsupov [12] définit plus précisément cette première zone comme s'étendant jusqu'à la section de l'écoulement pour laquelle le profil de pression sur l'axe atteint le minimum local de valeur absolue maximale.
- LA RÉGION DE TRANSITION : Dans cette zone, la couche de cisaillement atteint l'axe. L'augmentation du mélange termine l'homogénéisation de la pression et annihile la formation d'une structure de chocs stationnaire en moyenne.
- LA ZONE LOINTAINE OU ZONE TOURBILLONNAIRE : Le jet reprend alors une structure



de jet subsonique (si initialement sonique) ou supersonique parfaitement détendu, avec un profil de vitesse autosimilaire.

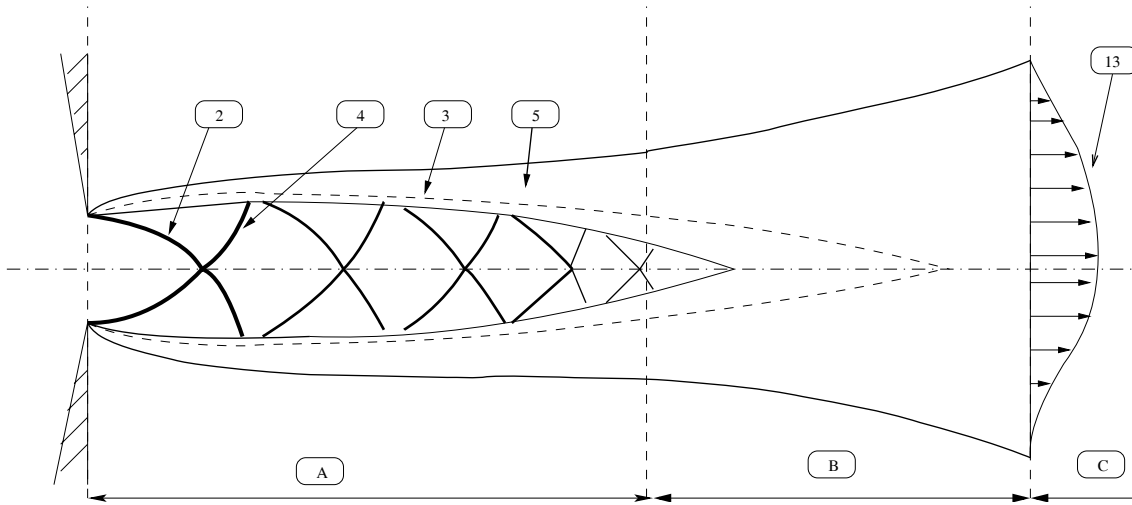


FIG. 1.6 – Schéma de la structure globale d'un jet faiblement sous-détendu. :  
**A** : Zone quasi-potentielle, **B** : Zone de transition, **C** : Zone tourbillonnaire développée, **2** :  
 Choc incident, **3** : Ligne isobare de la couche de cisaillement, **4** : Choc réfléchi, **5** : Couche de  
 cisaillement du jet, **13** Profil de similitude des champs de vitesse et de température.

### 1.3.2 Description globale des différentes classes d'écoulement

Le rapport entre la pression statique à l'ajutage et la pression statique ambiante NPR ("Nozzle Pressure Ratio") est le paramètre clé qui détermine la structure globale du jet. On se propose ici de présenter les différentes classes d'écoulements en décrivant globalement la structure rencontrée dans la zone proche, quasi-stationnaire, d'un jet axisymétrique en fonction de ce rapport, et ce en suivant la terminologie classique introduite dans la littérature (cf. par exemple Cumber et al. [40] [39]). Les valeurs de NPR sont données à titre indicatif et correspondent ici au cas sonique isotherme pour l'air à  $\gamma = 1,4$ . On observe ainsi que :

- Si NPR reste faible (1 à 1,1), et dans le cas d'une buse sonique convergente, un **choc faible** se positionne au niveau de la section de sortie de la buse.
- Pour NPR légèrement supérieur (1,1 à 2,1), il se développe un jet **faiblement à modérément sous-détendu** (cf. figure 1.7). La divergence des lignes de courant du jet à vitesse supersonique à partir de la section de l'ajutage induit l'apparition de faisceaux divergents d'ondes de détente (**1**) qu'on représente globalement comme étant réfléchis sur l'enveloppe isobare (**3**) du jet en faisceaux convergents d'ondes de compression. Le choc suspendu (**2**), qui résulte de leur focalisation ou coalescence, est dit "incident" et converge vers l'axe pour se réfléchir au niveau de celui-ci, en un choc réfléchi (**4**) divergent vers la frontière du jet<sup>4</sup>. Ce choc se réfléchit à nouveau sur l'enveloppe isobare en un nouveau faisceau de détente convergent vers l'axe. Le rapport de pression n'étant pas trop élevé, les faisceaux

<sup>4</sup>Il est étonnant de voir que cette représentation semble communément admise alors qu'elle peut sembler quelque peu erronée. Plus rigoureusement, la différence de courbure des lignes fluides, entre la partie interne de la couche de cisaillement naissante et sa partie externe, induit une focalisation des ondes de Mach en un choc oblique. La courbure de ce choc oblique peut ensuite évoluer progressivement en fonction du changement combiné de l'orientation des lignes fluides au sein du jet et de l'angle des lignes de Mach qui diminue progressivement avec le nombre de Mach au sein de la zone de détente.

de détente restent relativement peu étendus, de sorte qu'ils ne défléchissent l'enveloppe isobare que sur une courte distance. Les chocs apparaissent quasi-rectilignes. Ce schéma se répète alors pour donner naissance à une structure globale dite "en diamants" (typique des jets en sortie de tuyère). Dans ce cas de réflexion régulière, l'écoulement est successivement détendu et accéléré puis comprimé et ralenti, mais reste toujours supersonique (toutes les ondes de chocs traversées par l'écoulement étant obliques). Ce cas est assez simple et n'est essentiellement conditionné que par l'évolution de la couche de cisaillement externe **(5)** qui, en se développant, va progressivement diffuser la quantité de mouvement du jet et dissiper les gradients de pression. Suivant l'évolution globale de la position de l'enveloppe isobare, le jet se comprime et se dilate radialement, perdant l'aspect classique qu'il aurait s'il était parfaitement détendu (voir figure 1.1). L'enveloppe du jet apparaît alors ondulée dans la direction radiale (voir par exemple les visualisations de Timmerman et Watt [163]). La longueur du noyau potentiel et le nombre de cellules visibles vont fortement dépendre du diamètre de la buse  $D_e$  et du NPR. Dans le cas plus général, cette longueur dépend également du taux effectif de croissance de la couche de cisaillement, essentiellement conditionné par l'épaisseur de la couche limite en sortie, et du profil du nombre de Mach dans la section de l'ajutage.

- Pour un NPR compris entre 2,1 et 4,5, on rentre dans le régime de jet **fortement sous détendu**<sup>5</sup> (cf. figure 1.8). La première réflexion de choc sur l'axe n'est plus régulière. Légèrement en amont du point de réflexion du choc sur l'axe que l'on observerait pour un NPR de 2,1, un choc droit, dit "*disque*" ou "*cône de Mach*" **(9)** apparaît, les chocs suspendu **(2)** et réfléchi **(4)** se rattachant à ce disque au niveau du point triple **(7)**. L'écoulement **(10)** en aval du disque de Mach est subsonique tandis que l'écoulement en aval du choc réfléchi **(4)** reste supersonique, de sorte qu'une couche de cisaillement **(8)** prend naissance à partir de celui-ci. Le nouveau faisceau de détente naissant à la frontière du jet au point de réflexion du choc réfléchi en aval du disque de Mach va infléchir cette couche de cisaillement interne, qui en croissant rapidement (cf. les visualisations de Yip et al. [18]) va restreindre la section de passage de l'écoulement subsonique. Cet effet tuyère va réaccélérer le fluide jusqu'à la vitesse sonique, la croissance de la couche de cisaillement diffusant rapidement l'excès de pression totale de l'écoulement entourant la zone subsonique et finissant d'homogénéiser la vitesse des deux écoulements concentriques. La longueur de cette zone subsonique est essentiellement liée à la taille du premier disque de Mach (cf. partie 2.1.2).
- Au delà d'un NPR de 4,5, Dam et al. [43] observent que la zone subsonique **(10)** s'étend jusqu'à la seconde cellule. Les chocs ne subsistant plus que dans l'enveloppe externe supersonique, la première cellule en diamant en arrière du disque de Mach est pénétrée par l'écoulement subsonique et apparaît "trouée" (voir figure 1.9). Augmenter encore NPR induit une augmentation du diamètre du disque de Mach, un allongement et un élargissement radial de la zone subsonique et donc une diminution de l'extension de la zone supersonique où résident les chocs obliques. Le diamètre du trou subsonique augmente avec NPR, de sorte que la zone subsonique s'allonge jusqu'à effacer complètement la seconde structure de choc. La couche supersonique finit, en aval de la seconde cellule, par enfermer complètement la zone subsonique (la troisième structure en diamant pouvant rester parfaitement définie).
- Pour  $\text{NPR} = 7$ , Dam et al. [43] observent la disparition complète de la seconde cellule. Le choc incident est fortement courbé, on parle parfois de "bouteille de Mach".

---

<sup>5</sup>On note que la notion de jet fortement sous-détendu n'est pas précisément définie dans la littérature, la plupart des auteurs utilisant cette terminologie dès qu'ils souhaitent désigner le cas d'une réflexion non-régulière.

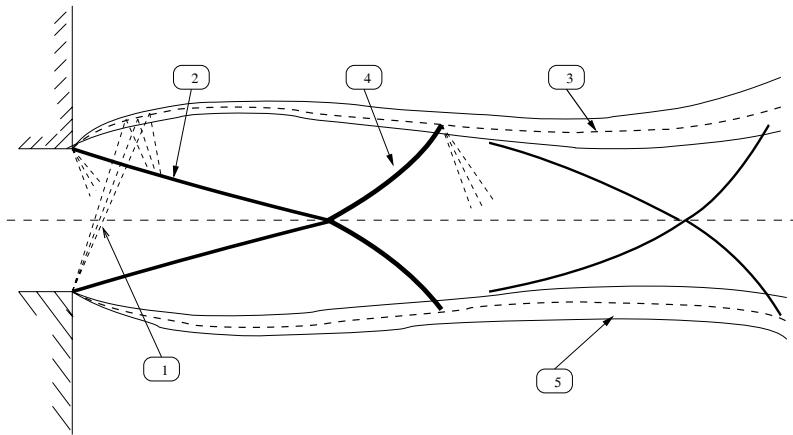


FIG. 1.7 – Schéma de la structure proche d'un jet faiblement sous-détendu ( $NPR = 1 \text{ à } 2,1$ ).

1 : Faisceau de détente, 2 : Choc incident ("suspendu" ou dit "en tonneau"), 3 : Ligne isobare de la couche de cisaillement, 4 : Choc réfléchi, 5 : Couche de cisaillement du jet.

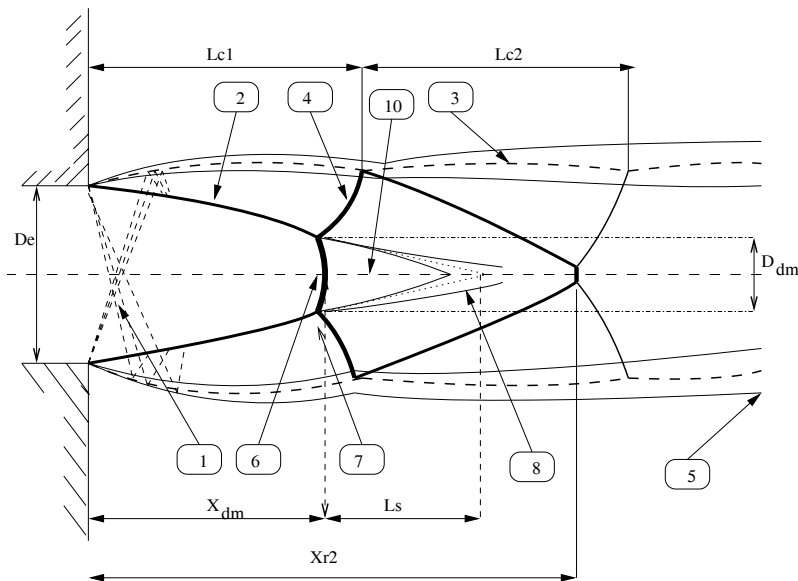


FIG. 1.8 – Schéma de la structure proche d'un jet modérément à fortement sous-détendu ( $NPR=2,1 \text{ à } 4,5$ )

1 : Faisceau de détente, 2 : Choc incident ("suspendu" ou dit "en tonneau"), 3 : Ligne isobare de la couche de cisaillement, 4 : Choc réfléchi, 5 : Couche de cisaillement du jet, 6 : Disque de Mach (DM), 7 : Point triple, 8 : Couche de mélange du disque de Mach, 10 : Poche subsonique,  $D_e$  : Diamètre de l'ajutage circulaire,  $L_{dm}$  : Distance moyenne entre la section de l'ajutage et le disque de Mach,  $D_{dm}$  : diamètre moyen du disque de Mach,  $L_s$  : Longueur moyenne de la poche subsonique en arrière du disque de Mach,  $L_{c1}$  : Longueur moyenne de la première cellule de choc,  $L_{c2}$  : Longueur moyenne de la seconde cellule de choc.

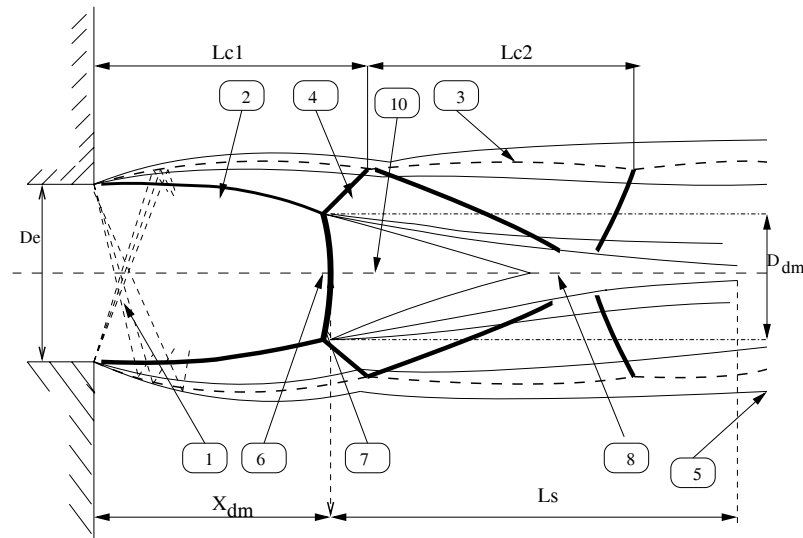


FIG. 1.9 – Schéma de la structure proche d'un jet fortement sous-détendu ( $NPR = 4,5$  à  $7$ ) :

1 : Faisceau de détente, 2 : Choc incident ("suspendu" ou dit "en tonneau"), 3 : Ligne isobare de la couche de cisaillement, 4 : Choc réfléchi, 5 : Couche de cisaillement du jet, 6 : Disque de Mach (DM), 7 : Point triple, 8 : Couche de mélange du disque de Mach, 9 : Ligne isobare de la couche de mélange du disque de Mach, 10 : Poche subsonique,  $D_e$  : Diamètre de l'ajutage circulaire,  $X_{dm}$  : Distance moyenne entre la section de l'ajutage et le disque de Mach,  $D_{dm}$  : diamètre moyen du disque de Mach,  $L_s$  : Longueur moyenne de la poche subsonique en arrière du disque de Mach,  $L_{c1}$  : Longueur moyenne de la première cellule de choc,  $L_{c2}$  : Longueur moyenne de la seconde cellule de choc.

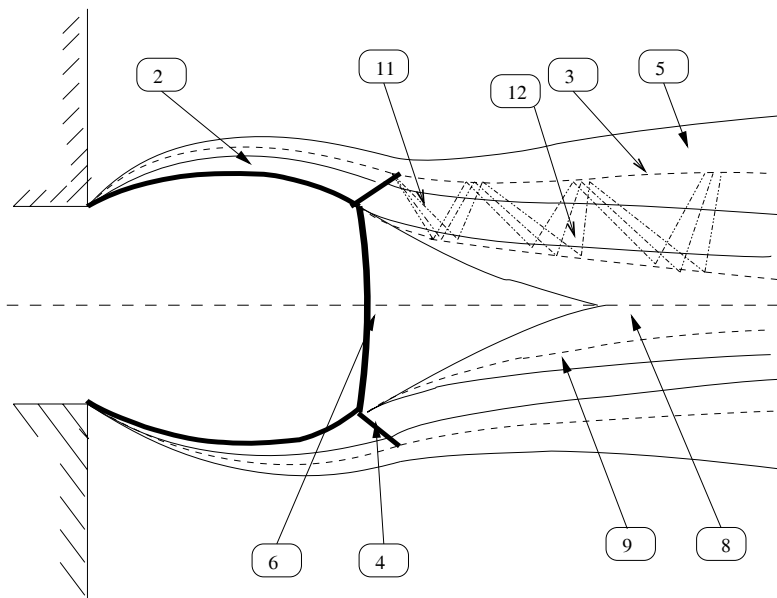


FIG. 1.10 – Schéma de la structure de la région proche d'un jet très fortement sous-détendu ( $NPR = 7$  à  $10$ ) :

2 : Choc incident ("suspendu" ou dit "en tonneau"), 3 : Ligne isobare de la couche de cisaillement, 4 : Choc réfléchi, 5 : Couche de cisaillement du jet, 6 : Disque de Mach (DM), 8 : Couche de mélange du disque de Mach, 9 : Ligne isobare de la couche de mélange du disque de Mach, 11 : Zone de détente supersonique, 12 : Zone compressive supersonique.

- Au delà de  $\text{NPR}=7$ , l'évolution précise de l'ensemble de la structure du jet (au delà de la première cellule de choc) ne semble pas avoir été décrite en détails jusqu'à présent. On devrait cependant *a priori* pouvoir distinguer deux cas. Le premier pour lequel le disque de Mach **(6)** bien que très large reste au sein de la zone dite potentielle (cf. figure 1.10). Dans ce cas, la zone subsonique devient suffisamment longue pour que la couche de cisaillement du disque de Mach **(8)** interagisse en aval avec la couche de cisaillement externe **(5)**, qui se développe entre le jet et l'ambient. Au delà de la première cellule, l'écoulement s'apparente alors à l'écoulement de deux jets annulaires concentriques à masse volumique fortement variable, l'un subsonique, l'autre supersonique. L'écoulement en aval du choc réfléchi traverse alors un train de faisceaux d'ondes de Mach **(11)** et **(12)**, et subit successivement des détente et des compressions. Pour des NPR encore plus élevés ( $\text{NPR}>10$ ), le disque de Mach **(6)** interagit directement avec la couche de cisaillement **(5)**, déstabilisant complètement le jet en aval (voir figure 1.11). Aucune structure de choc stationnaire ne devient alors *a priori* identifiable au delà du disque de Mach. Le choc incident **(2)** et le disque de Mach **(6)** deviennent très courbés et la zone subsonique s'allonge en aval du disque de Mach. La problématique dans cette zone proche en aval du disque de Mach est alors celle d'une couche de mélange supersonique à masse volumique fortement variable comprise entre une couche externe au repos et un noyau subsonique interne fortement comprimé. Cette couche de cisaillement est soumise à une chute de pression totale différente à travers le choc droit et le choc oblique, ce qui semble induire un mélange accru et une forte déflexion de la zone interne de la couche vers l'axe.

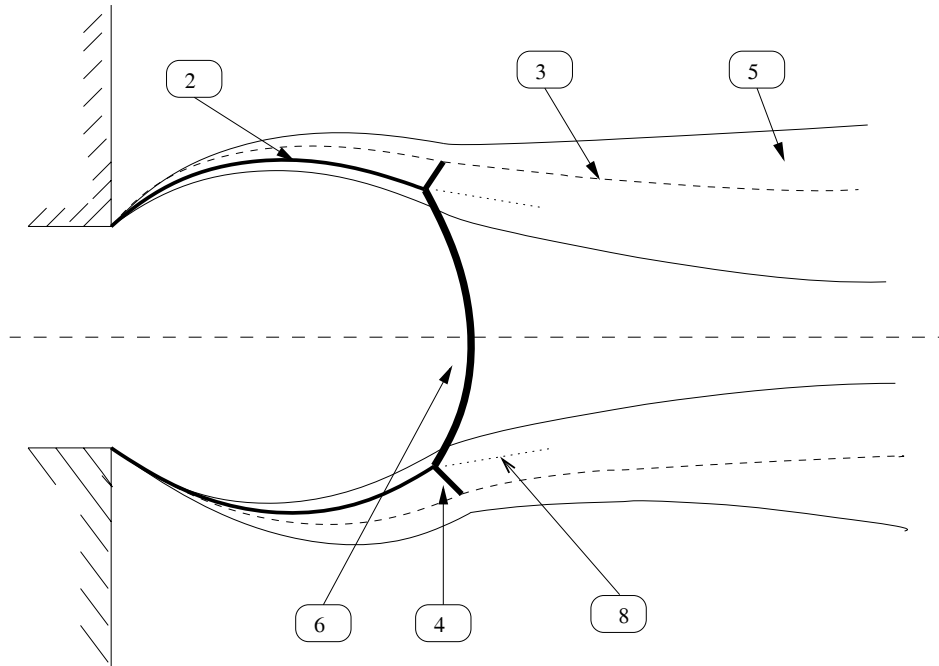


FIG. 1.11 – Schéma de la structure de la région proche d'un jet très fortement sous-détendu ( $\text{NPR} > 10$ ) :

**2** : Choc incident ("suspendu" ou dit "en tonneau"), **3** : Ligne isobare de la couche de cisaillement, **4** : Choc réfléchi, **5** : Couche de cisaillement du jet, **6** : Disque de Mach (DM), **8** : Couche de mélange du disque de Mach.

Cette configuration de jet très fortement sous-détendu correspond typiquement à celle que l'on devrait obtenir dans le cas particulier de percement d'une chambre de combustion. Nous allons

désormais examiner plus en détail ses caractéristiques.



## Chapitre 2

# Phénoménologie du jet fortement sous-détendu

Après avoir présenté, au chapitre précédent, les différents aspects que peut présenter le jet libre sonique axisymétrique sous-détendu, en fonction du rapport de pression statique dans la section de l'ajutage, nous proposons maintenant une description plus détaillée des caractéristiques des différents éléments de la structure, associés respectivement aux différentes zones du jet fortement sous-détendu (i.e. pour  $NPR > 2,1$  typiquement pour l'air). Les corrélations empiriques les plus pertinentes relevées dans la littérature sont notamment précisées. Celles-ci nous permettent d'estimer, *a priori*, les dimensions de la structure attendue lors du percement accidentel de la chambre de combustion d'un moteur d'avion de ligne (cf. paragraphe 2.6). On présente ensuite une étude de la dépendance de la structure aux conditions génératrices de l'écoulement, telle qu'elle a pu être observée, avant de présenter les particularités de la structure liées à la nature fortement instationnaire des écoulements de cette classe. Enfin, la nouvelle structure de l'écoulement, résultant spécifiquement de l'impact du jet fortement sous-détendu sur une paroi plane, sera évoquée.

### 2.1 Description de l'écoulement dans la zone proche

La figure 2.1, qui rappelle la structure proche du jet fortement sous-détendu, introduit les paramètres suivants :

- $D_e$  : diamètre de l'ajutage,
- $L_c$  : longueur de la première cellule de choc, définie comme la distance entre le plan de sortie de l'ajutage et le plan coïncidant avec le point de réflexion du choc réfléchi sur la ligne isobare de la couche de cisaillement principale du jet,
- $X_{dm}$  : position du disque de Mach, définie comme la distance entre la section de l'orifice et le point d'intersection sur l'axe du disque de Mach,
- $D_{dm}$  : diamètre du disque de Mach, défini par le double de la distance entre la position du point triple et l'axe,
- $L_s$  : longueur de la zone subsonique, définie comme la distance entre la position sur l'axe du disque de Mach et le point de l'axe atteint par la ligne sonique intérieure de la couche de cisaillement,
- $a_i$  : angle initial entre la direction de la frontière libre du jet et l'axe,
- $R_i$  : rayon de courbure initial de la frontière libre du jet,
- $a_r$  : angle entre la direction du choc réfléchi et l'axe du jet,
- $D_{C_{max}}$  : diamètre maximal de la structure principale de choc.



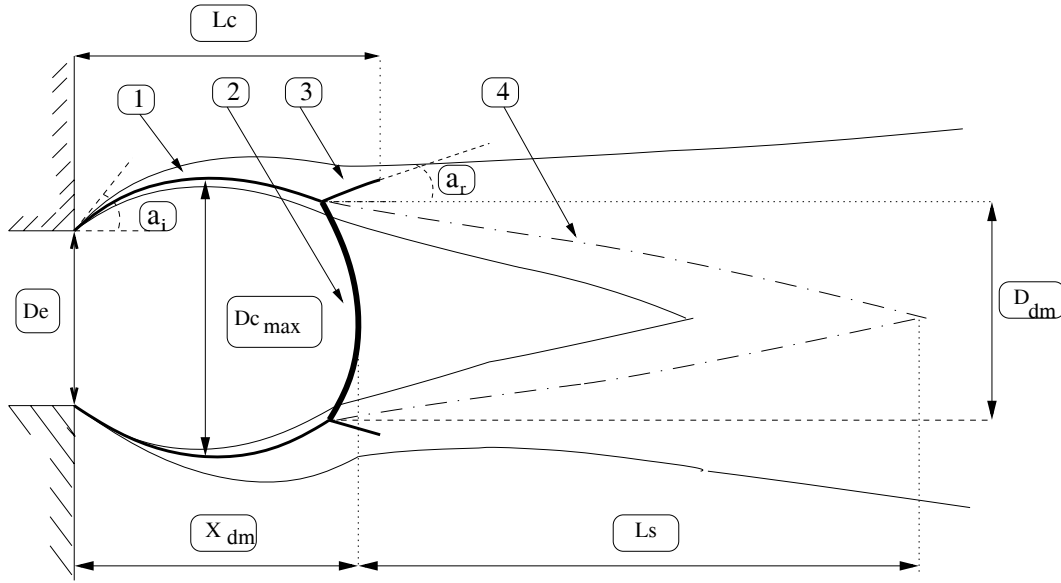


FIG. 2.1 – Définition des paramètres caractéristiques du jet très fortement sous-détendu :

1 : Choc incident, 2 : Disque de Mach, 3 : Choc réfléchi, 4 : Ligne sonique intérieure de la couche de cisaillement.

### 2.1.1 Evolution de la structure de choc en fonction du rapport des pressions statiques à l'ajutage

#### Position du disque de Mach

Ashkenas et Sherman [14] donnent une corrélation pour évaluer l'évolution de la distance à laquelle le disque de Mach (DM) se positionne, dans le cas sonique et axisymétrique, en fonction du NPR, soit :

$$\frac{X_{dm}}{D_e} = 0,67 \times \sqrt{\frac{P_o}{P_a}} \quad (2.1)$$

D'après Crist et al. [151], cette corrélation resterait valable dans le régime continu jusqu'à des rapports de pressions très élevés de l'ordre de  $\frac{P_o}{P_a} = 3.10^5$ , avant l'apparition du régime de gaz raréfié<sup>1</sup>. Cette corrélation et les données de Love [106] (voir figure 2.2) sont désormais communément citées dans la littérature par la grande majorité des auteurs étudiant ce phénomène. Pourtant, Ewan et Moodie [63] considèrent que la corrélation (2.1) n'est applicable, dans le cas sonique, que pour un NPR inférieur à 4. Ces derniers auteurs proposent pour la gamme de NPR = 3 à 14 une corrélation plus précise<sup>2</sup> :

$$X_{dm} = 0.77D_e + 0,068D_e^{1,35} \times \left(\frac{P_e}{P_a}\right) \quad (2.2)$$

On gardera à l'esprit le fait que l'établissement de ces corrélations, caractérisant la géométrie de la structure de choc principale, s'appuie sur l'exploitation de visualisations Schlieren. Or celles-ci représentent des moyennes temporelle intégrées en espace sur le chemin optique dans la

<sup>1</sup>Ils ont utilisé, dans leur cas, une soufflerie à basse masse volumique avec laquelle le rapport de pression pouvait être fortement augmenté en diminuant la pression ambiante.

<sup>2</sup>Cette dernière corrélation a été spécifiquement obtenue pour des jets soniques issus de buses convergentes profilées de diamètres 12,7 et 25,4 mm.  $D_e$  doit être exprimé en millimètres.

direction d'observation. Aussi doivent elles être utilisées avec précaution lors de toute comparaison avec des résultats de simulation numérique. La comparaison de ces données (figure 2.3) démontre immédiatement la grande disparité des résultats (de 15 à 25%!) disponibles pour cette grandeur élémentaire et pourtant primordiale.

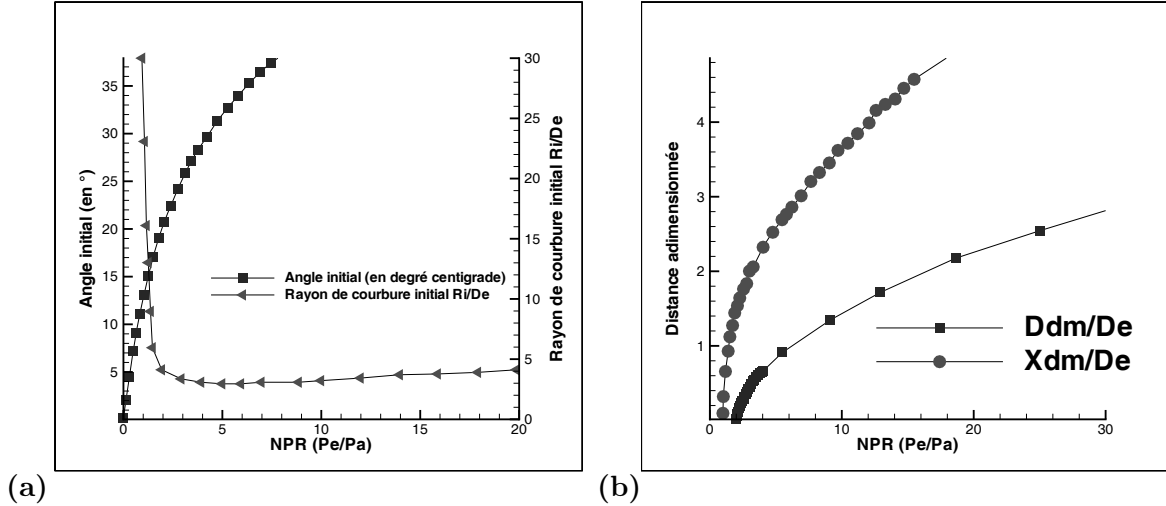


FIG. 2.2 – Illustration de la sensibilité de la structure de choc d'un jet fortement sous-détendu à la valeur du rapport de pression NPR (obtenu d'après les données de Love [106]) :

(a) : Evolution de l'angle  $a_i$  et du rayon de courbure  $R_i$  initiaux de la frontière libre du jet ; (b) : Evolution du diamètre  $D_{dm}$  et de la position  $X_{dm}$  du disque de Mach.

### Allure et diamètre du premier disque de Mach

Dans le cas du jet sonique, le disque de Mach garde une allure de choc droit jusqu'à NPR=10 environ. Quand NPR augmente au delà de cette valeur, le disque de Mach se courbe, sa concavité étant orientée vers l'ajutage. Le rapport de son diamètre sur la distance à laquelle il se positionne  $D_{dm}/X_{dm}$  tend alors vers une valeur constante (de 0,8 pour les très grands rapports de pression) dans le cas axisymétrique. La position du premier disque de Mach ne dépend essentiellement que du rapport des pressions statiques. En revanche, lorsque le rapport des chaleurs spécifiques diminue (entre 1,4 pour l'air dans les conditions standards et 1,25 par exemple pour des gaz brûlés à haute température), le faisceau de détente (Prandtl-Meyer) s'élargit. Il en résulte un accroissement de l'angle initial de la frontière du jet par rapport à l'axe, accompagnée d'une augmentation de l'angle d'incidence du choc en tonneau avant réflexion, et donc du diamètre du disque de Mach. Notons que l'étendue spatiale du choc en tonneau et le diamètre du disque de Mach sont d'autant plus limités que le niveau de turbulence et le taux de croissance initial de la couche de cisaillement dans la zone compressée sont importants [15]. On pourra se reporter à l'étude de Antsupov [12] pour connaître toutes les caractéristiques des jets supersoniques (jusqu'à NPR = 30). Celui-ci propose pour estimer le diamètre du disque de Mach dans le cas de buses convergentes, la corrélation suivante (vérifiée expérimentalement par visualisation Schlieren pour  $NPR < 40$ ) :

$$\frac{D_{dm}}{D_e} = \log\left(\left(\frac{P_e}{P_a}\right)^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{3}{4} \quad (2.3)$$

D'après les observations de Ewan et Moodie [63], cette corrélation surrestime cependant le diamètre effectif du disque de Mach. En effet, on observe également pour ce paramètre (voir figure

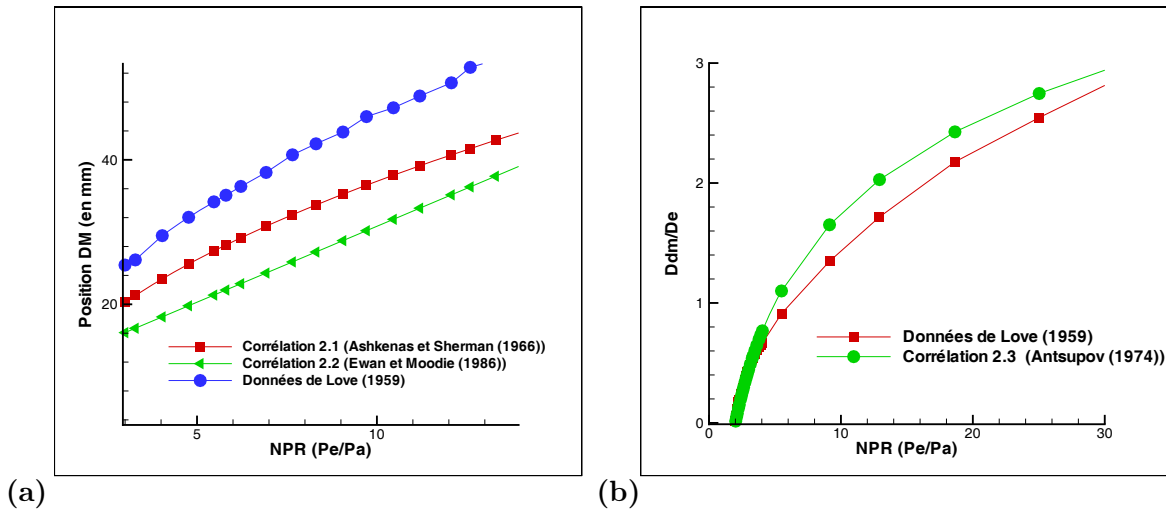


FIG. 2.3 – Comparaison des données expérimentales pour le positionnement et le diamètre du disque de Mach en fonction du NPR (pour  $\gamma = 1,4$ ). :

(a) : Position du disque de Mach pour un diamètre de buse de 12,7 mm, (b) : Diamètre du disque de Mach.

2.3), une importante disparité dans les données expérimentales disponibles (17 à 21% dans la plage de NPR comprise entre 10 et 20 par exemple).

### 2.1.2 Evolution de la couche de cisaillement et caractérisation de la turbulence

#### Longueur du noyau potentiel

Cette longueur est directement déterminée par le taux de croissance de la couche de cisaillement. Dans le cas des jets faiblement sous-détendus (à réflexion régulière), elle a pu être estimée par sonde Pitot (en détectant l'amortissement des oscillations de pression ou du nombre de Mach sur l'axe). Quand le jet est faiblement ou modérément sous-détendu, on estime généralement que le noyau potentiel s'étend sur les cinq premières cellules de choc (la première étant légèrement plus longue que les suivantes). Au delà de la cinquième cellule environ, la couche de cisaillement atteint l'axe et le mode hélicoïdal devient prépondérant (cf. chapitre 1.1.2), ce qui déstabilise complètement le jet (voir partie 2.4). L'effet principal qui contribue dans ce cas, pour un diamètre de buse donné, à augmenter légèrement la longueur du noyau potentiel du jet supersonique sous-détendu par rapport au cas classique subsonique est celui de la compressibilité intrinsèque, qui se traduit, à grande échelle du moins, par une diminution significative du mélange et du taux d'épanouissement du jet (cf. chapitre 1.1.3). Par rapport au cas du jet parfaitement détendu, le développement de la couche de mélange est également modifié par le changement régulier de courbure associé respectivement aux zones de compression et de détente. Néanmoins, même si cet effet ne semble pas avoir été quantifié précisément, il n'apparaît pas être *a priori* aussi important que l'effet de compressibilité intrinsèque. Du moins peut-on considérer que les effets alternés de courbure positive et négative doivent globalement se compenser. D'après Antsupov [12], la longueur du noyau potentiel reste ainsi sensiblement équivalente à sa valeur obtenue dans le cas parfaitement détendu. Pour un jet sonique, cela correspond finalement, d'après la corrélation (1.2), à une valeur à peine supérieure à cinq fois le diamètre de buse, valeur représentative de la longueur du noyau potentiel pour des jets subsoniques.

Dans le cas d'un jet très fortement sous-détendu, la structure de choc est radicalement mo-

difiée et se réduit à la première cellule (dès lors que le NPR devient supérieur à 7 environ). De nouveaux effets apparaissent alors, qui, en se compensant, induisent finalement une longueur de cône potentiel sensiblement équivalente ou légèrement plus petite que dans le cas d'un jet subsonique. D'une part, l'entraînement de l'air extérieur est accru par une forte surdétente induite à la frontière du jet [162] qui va avoir tendance à accroître la masse entraînée dans la couche de cisaillement tandis que la différence de chute de pression totale à travers le choc oblique et le disque de Mach lors de leur interaction avec la couche de cisaillement induit une forte déflexion de la zone interne de la couche vers l'axe et un mélange turbulent accru. D'autre part, le développement initial de la couche est inhibé par la forte courbure imposée aux lignes de courant lors du processus de détente. Ce mécanisme de compensation conduit ainsi à l'obtention d'une longueur de cône potentiel égale à 4,76 fois le diamètre de la buse par exemple pour NPR=20,3 d'après l'étude expérimentale de Yüceil et Ötügen [176], valeur à comparer avec celle de 5 fois environ le diamètre de l'ajutage dans le cas d'un jet en régime subsonique.

### Longueur $L_s$ de la zone subsonique en aval du disque de Mach

Glotov [71] propose une corrélation empirique de l'extension de la zone subsonique  $L_s$ , obtenue expérimentalement par sonde Pitot sur l'axe. Valable pour un NPR allant de 1,1 à 30 et avec un nombre de Mach en sortie de buse allant de 1 à 3, cette corrélation s'écrit :

$$\frac{L_s}{D_{dm}} = 1,96 \times \left(\frac{P_e}{P_a}\right)^{-0,16} \quad (2.4)$$

On se gardera bien d'additionner simplement cette longueur de noyau subsonique avec la distance de positionnement du disque de Mach, pour retrouver la longueur du noyau potentiel. En effet, pour certaines valeurs de NPR, le noyau subsonique en aval du disque de Mach peut être réaccélééré par effet tuyère avant que la couche de cisaillement n'atteigne l'axe.

### Caractérisation de la turbulence

**Turbulence dans la couche de cisaillement** D'après les travaux de Avduevskii [15], on peut distinguer quatre cas en fonction du nombre de Reynolds initial  $Re_i = U_e L_{c1} / \mu_a$  (basé sur la vitesse débitante dans la section de l'ajutage  $U_e$ , la longueur de la première cellule de choc  $L_{c1}$  et la viscosité du milieu ambiant  $\mu_a$ ).

- Lorsque  $Re_i < 10^2$ , les chocs sont épaissis par diffusion de l'air ambiant dans le jet. La problématique est celle d'une décharge dans le vide<sup>3</sup>.
- Pour  $10^2 < Re_i < 10^3$ , la couche reste laminaire mais son épanouissement est d'autant plus important que  $Re_i$  est important. Avduevskii donne alors la loi empirique suivante :

$$\frac{Dc_{max}}{X_{dm}} = 0,73 - \frac{2,21}{\sqrt{Re_i}}$$

La forme du tonneau peut alors considérablement varier.

- Pour  $10^3 < Re_i < 10^4$ , la couche est initialement laminaire mais transitionne vers la turbulence avant le disque de Mach. L'extension radiale relative de la cellule  $Dc_{max}/X_{dm}$  est maximale pour le cas limite laminaire à  $Re_i = 10^3$ .
- Pour  $Re_i > 10^4$ , la couche de cisaillement est turbulente dès sa naissance. Son épaisseur croît linéairement avec la distance par rapport à l'ajutage. La forme de la première cellule

---

<sup>3</sup>La seule manière d'obtenir un nombre de Reynolds aussi peu élevé dans le cas d'une décharge sonique est d'augmenter fortement la viscosité cinématique de l'atmosphère ambiante, i.e. de diminuer fortement sa température et sa masse volumique.

de choc ne dépend alors plus du nombre de Reynolds. Les dimensions de la première cellule évoluent homothétiquement en fonction de la racine carré du rapport de pressions NPR.

On pourra retenir que la couche de cisaillement devient turbulente dès sa naissance dans la plupart des cas pratiques. Kutateladze [156] a ainsi analysé qualitativement la structure instantanée de la couche de cisaillement se développant autour d'un jet fortement sous-détendu (NPR=8). Il rapporte qu'à partir de  $Re_i = 6.10^3$ , on peut enregistrer des fluctuations de masse volumique (de l'ordre de 10%) dans la couche de cisaillement en  $X/D_e = 2$ , soit en léger aval du premier disque de Mach dans son cas, que l'amplitude de celles-ci et l'étendue de la région turbulente augmentent ensuite avec le nombre de Reynolds<sup>4</sup> pour finir par atteindre le choc suspendu de la première cellule de choc dès  $Re_i = 2,4.10^4$ .

**Interaction de la turbulence avec la structure de choc** Très peu de mesures non intrusives de vitesse ont pu être effectuées au sein de la zone proche de l'écoulement, de sorte que la structure de la turbulence reste mal précisée, que ce soit au sein de la couche ou au sein de la zone potentielle. Yüceil et Ötügen [176] ont tout de même réussi à observer, par vélocimétrie par imagerie de particules (PIV)<sup>5</sup>, que l'amplitude des fluctuations de vitesse au sein de la zone potentielle croît rapidement en sortie de la buse pour atteindre dans le champ proche un maximum en un point situé en léger aval du DM avant d'être très fortement réduite. Le niveau des fluctuations rms  $v_{rms}$ , de la vitesse radiale dans la première cellule de choc reste environ deux fois inférieur à celui  $u_{rms}$  de la vitesse longitudinale. C'est donc naturellement le pic de  $u_{rms}$  qui va induire le maximum de l'intensité de turbulence (et reste le critère optimal pour repérer la position du DM). On notera évidemment la forte anisotropie de l'écoulement turbulent dans la première cellule de choc. L'amortissement à la traversée du DM est cependant beaucoup plus important pour  $u_{rms}$  que pour  $v_{rms}$  de sorte que l'écart entre les niveaux de fluctuations se réduit nettement dans la poche subsonique. Par ailleurs, Chuech et al. [150] mettent en avant la tendance de  $v_{rms}$  à croître plus vite que  $u_{rms}$  en aval de la zone de noyau potentiel, ceci étant lié d'après les auteurs au fait que  $u_{rms}$  a commencé à croître plus tôt. Aucune autre donnée même qualitative n'a pu être trouvée pour caractériser plus spécifiquement l'évolution de la turbulence dans la zone tourbillonnaire des jets fortement sous-détendus. Notons que Yüceil et Ötügen [176] observent qu'à l'encontre de l'étude de Ferdmann [53], les relations de transport de type gradient semblent être globalement satisfaites dans le cas fortement sous-détendu, c'est à dire que les profils de contraintes de cisaillement semblent bien suivre, avec un signe opposé, le profil de taux moyen de déformation.

## 2.2 Description de l'écoulement dans la zone lointaine - Paramètres de similitude

Dans la zone lointaine, le jet redevient globalement isobare et se développe à nouveau selon la structure classique d'un jet supersonique, simplement soumis aux forts effets de compressibilité. En adimensionnant correctement les variables de vitesse, distance et température, on peut démontrer l'existence d'un régime de similitude caractérisé par :

<sup>4</sup>Le nombre de Reynolds utilisé est en fait ici construit à partir de la distance à laquelle se positionne le disque de Mach au lieu de la longueur de la première cellule de choc, ce qui ne modifie pas l'ordre de grandeur et permet de vérifier la classification de Avduevskii [15].

<sup>5</sup>Dans ce cas de mesures par PIV, on notera que, non seulement la statistique est basée sur un nombre limité de tirs (une centaine), mais aussi que ces tirs ne peuvent être parfaitement reproductibles, de part la grande sensibilité de l'écoulement aux conditions génératrices qu'il est particulièrement délicat de fixer rigoureusement. Aussi, on ne pourra retenir que le comportement général de ces grandeurs turbulentes, qui ne sauraient être exploitées d'un point de vue quantitatif.

- Les profils radiaux de vitesse et de température qui suivent une loi gaussienne,
- Les taux d'épanouissement dynamique et thermodynamique qui atteignent une valeur asymptotique constante,
- Les décroissances de la vitesse longitudinale et de l'excès d'enthalpie sur l'axe qui deviennent proportionnelles à la distance parcourue en aval de la zone de transition.

### 2.2.1 Décroissance de la vitesse sur l'axe

Il est relativement aisé dans un jet classique subsonique de déterminer l'évolution du profil de vitesse moyenne. Pour un jet sonique fortement sous-détendu, il est en revanche nécessaire de prendre en compte l'effet de forte expansion radiale initiale induite par la forte détente, ainsi que les effets de masse volumique variable et de compressibilité. Il est alors possible de choisir des paramètres d'adimensionnement adaptés qui permettent de décrire de façon simplifiée la croissance du jet. Différentes approches ont successivement été proposées dans la littérature pour tenter de déterminer les coefficients d'adimensionnement les mieux adaptés et ramener la description du jet sous-détendu à celle d'un jet classique dans la zone lointaine. Korja et Lange [96] (1984) ont d'abord décrit la décroissance de la vitesse longitudinale en l'adimensionnant par la vitesse du son de l'écoulement à l'ajutage  $c_e$ . Elle suivrait alors une loi en puissance où le coefficient préexponentiel serait simplement corrélé à la pression génératrice. Ewan et Moodie [63] (1986) précisent l'évolution des profils de vitesse d'un jet sonique dans la zone pleinement développée pour des rapports de pressions s'étendant jusqu'à NPR = 10,5. En se basant sur le modèle de Kleinstein [94] pour les jets compressibles parfaitement détendus, ils tentent alors de caractériser l'effet de masse volumique variable par la loi d'évolution de vitesse axiale suivante :

$$\frac{U_m}{U_e} = 1 - \exp\left(\frac{-1}{K_\mu \left(\frac{\rho_a}{\rho_e}\right)^{0,5} \frac{X^*}{Re} - L_{npa}}\right)$$

où  $K_\mu$  est une constante,  $L_{npa}$  est la longueur adimensionnée du noyau potentiel et  $X^*$  l'abscisse à laquelle on retrouverait la même vitesse dans le jet parfaitement détendu équivalent. Afin de se donner un diamètre de buse équivalent et une nouvelle origine, Ewan et Moodie [63] considèrent, en première approche, que tout le débit de l'écoulement sous-détendu se retrouve simplement à une nouvelle abscisse où l'écoulement est redevenu sonique et à pression ambiante. Le diamètre équivalent  $D_{eq}$  est alors donné par conservation du débit massique :

$$D_{eq} = D_e \left(\frac{P_e}{P_a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il reste cependant alors à fixer empiriquement la nouvelle abscisse<sup>6</sup>  $X^*$ . En utilisant une nouvelle modification de la constante  $K_\mu$  (effectuée par Witze [173] (1973)) pour prendre en compte les effets de masse volumique variable observés dans les jets chauds :

$$K_\mu = 0,08(1 - 0,16Me) \left(\frac{\rho_a}{\rho_e}\right)^{-0,22}$$

il est alors possible aux auteurs de démontrer que la vitesse axiale suit bien une décroissance comparable à celle d'un jet compressible parfaitement détendu.

On notera évidemment que ces corrélations nécessitent un calibrage de nombreux coefficients et que la méthode manque de généralité. Birch et al. [9] (1984) ainsi que Tam et Tanna [161]

---

<sup>6</sup>Pour ces valeurs modérées du NPR, les auteurs se sont basés sur les résultats de Eggins et Jackson [54] qui ont observé que l'homogénéisation de la vitesse en arrière du disque de Mach était réalisée à une distance égale à deux fois la longueur de la première cellule de choc environ, soit  $X^* = X - 2X_{dm}$  (en tout cas pour un NPR équivalent inférieur à 10,5).

(1982) ont également repris cette idée d'adimensionner les différentes variables en considérant une première phase initiale de détente parfaite. Cependant, ces premiers ne prennent pas en compte l'évolution non isenthalpique du jet au cours de cette détente initiale tandis que les seconds utilisent le nombre de Mach totalement détendu  $M_j$  calculé via des relations isentropiques de sorte que les paramètres qu'ils utilisent ne sont typiquement applicables que pour les cas où le NPR est faible.

Une étude plus complète et rigoureuse a récemment été menée à ce sujet par Yüceil et Ötügen [177] (2003). Ils partent du constat que les conditions initiales au développement du jet en arrière du noyau potentiel ne diffèrent de façon conséquente qu'en fonction de NPR qui va conditionner l'extension latérale initiale du jet, mais que, s'inspirant en cela de l'étude de Krothapalli et al. [2], la forme exacte de la structure proche n'a que peu d'effet sur la décroissance autosimilaire des jets. Ils cherchent alors à réexprimer ces grandeurs équivalentes (à un jet parfaitement détendu) uniquement à partir des grandeurs prévalant au niveau de la section de l'ajutage et de NPR. Pour ce faire, ils écrivent le bilan monodimensionnel de masse, de quantité de mouvement et d'enthalpie totale pour le jet, en faisant l'hypothèse que l'on peut négliger le débit massique de l'air entraîné et que l'écoulement dans cette première phase de détente est essentiellement adiabatique. Ce bilan leur permet d'exprimer le diamètre équivalent  $D_{eq}$ , la température équivalente  $T_{eq}$ , la vitesse équivalente  $u_{eq}$  et la masse volumique équivalente  $\rho_{eq}$  respectivement par <sup>7</sup> :

$$\frac{D_{eq}}{D_e} = \sqrt{\frac{2\gamma M_e^2 \frac{p_e}{p_a} (\gamma + \frac{p_e}{p_a} - 1) - (\gamma - 1) (\frac{p_e}{p_a} - 1)^2}{2\gamma^2 M_e^2 \frac{p_e}{p_a} + 2\gamma (\frac{p_e}{p_a} - 1)}} \quad (2.5)$$

$$\frac{T_{eq}}{T_e} = \frac{\gamma + \frac{p_e}{p_a} - 1}{\gamma \frac{p_e}{p_a}} - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{p_e}{p_a} - 1 \right)^2 \quad (2.6)$$

$$\frac{u_{eq}}{u_e} = 1 + \frac{\frac{p_e}{p_a} - 1}{\gamma M_e^2 \frac{p_e}{p_a}} \quad (2.7)$$

$$\frac{\rho_{eq}}{\rho_e} = \frac{2\gamma^2 M_e^2 \frac{p_e}{p_a}}{2\gamma M_e^2 \frac{p_e}{p_a} (\gamma + \frac{p_e}{p_a} - 1) - (\gamma - 1) (\frac{p_e}{p_a} - 1)} \quad (2.8)$$

En prenant en compte l'effet de compressibilité dû aux différences de masse volumique entre le jet et l'atmosphère ambiante<sup>8</sup>, Yüceil et Ötügen vérifient alors expérimentalement que l'inverse de la pente de la vitesse adimensionnée en fonction de la distance adimensionnée est approximativement constante, soit :

$$K = \frac{\partial[u_{eq}/u_e]}{\partial[(\frac{\rho_a}{\rho_{eq}})^{1/2} \frac{x}{D_{eq}}]} \sim 0,16 \quad (2.9)$$

Ces auteurs observent cependant encore une diminution de la pente en fonction du NPR (18% d'écart entre 1,47 et 1,75 environ respectivement pour NPR allant de 2,52 à 20,32), qu'ils attribuent principalement à l'effet de la compressibilité sur le mélange turbulent. Cependant, ils démontrent que l'écart observé ne devrait guère être plus important en dehors de la plage de

<sup>7</sup>On pourra à partir de ces expressions remarquer les tendances asymptotiques suivantes :

- $\frac{u_{eq}}{u_e}$  tend vers la valeur asymptotique  $1 + \frac{1}{\gamma M_e^2}$
- $\frac{T_{eq}}{T_e}$  tend vers la valeur asymptotique  $\frac{2\gamma M_e^2 - \gamma + 1}{2\gamma^2 M_e^2}$

<sup>8</sup>Par analyse dimensionnelle, on peut montrer que la décroissance de vitesse au loin d'un jet de masse volumique initiale différente de celle de l'atmosphère ambiante est proportionnelle à  $(\frac{\rho_{eq}}{\rho_a})^2$ .

rapport de pressions étudiée et donc que cet écart observé reste *a priori* l'écart maximal observable. En effet, en se référant aux études de Lele [103] et Papamoschou et Roshko [128], il est possible d'introduire un nombre de Mach convectif équivalent axisymétrique :

$$M_{ceq} = \frac{u_{eq}}{\sqrt{\gamma RT_{eq}}} \left[ 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho_{eq}}{\rho_a}\right)^{-\frac{1}{2}}} \right] \quad (2.10)$$

qui varierait entre 0,47 et 0,91 pour NPR allant de 1 à 20,32, plage en dehors de laquelle les effets de compressibilité ne se font effectivement plus sentir de toute façon<sup>9</sup>.

### 2.2.2 Décroissance de la température sur l'axe

A partir des paramètres d'adimensionnement ainsi déterminés, il est possible d'écrire un bilan d'énergie entre la section de jet parfaitement détendu équivalent et une section en aval où la température est considérée égale à la température ambiante ce qui permet de dériver une expression simplifiée de l'évolution longitudinale de l'excès d'enthalpie [177] :

$$\frac{T_{eq} - T_a}{T_{axe} - T_a} \# \left(\frac{\rho_a}{\rho_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{D_{eq}} \left(1 + \frac{1}{T_{axe} - T_a}\right) \quad (2.11)$$

On voit ainsi que la décroissance de la température sur l'axe ne sera approximativement linéaire par rapport à la distance parcourue sur l'axe, comme celle de la vitesse lorsque l'écoulement est subsonique, qu'à condition que l'excès d'enthalpie du jet par rapport à celle de l'atmosphère ambiante soit supérieur à l'énergie cinétique.

### 2.2.3 Croissance dynamique du jet - Autosimilarité des profils de vitesses

Koria et Lange [96] (1984) ont cherché à mesurer l'évolution des profils de vitesse dans la zone subsonique (entre 16 et 80 diamètres de buse en aval de l'écoulement) pour des jets de pression génératrice  $P_o = 3$  à 7 se déchargeant dans une atmosphère à 1 bar. Ils ont pu vérifier, dans ce cas de faible à moyenne sous-détente, que le jet retrouve dans cette zone une évolution autosimilaire. Le profil radial de vitesse longitudinale adimensionnée par la vitesse maximale sur l'axe suit alors la loi classique donnée par la fonction d'erreur de Gauss<sup>10</sup> :

$$\frac{u}{u_{axe}} = \exp\left(-\ln(2) \left(\frac{r}{\delta_{1/2}}\right)^2\right) \quad (2.12)$$

où  $u_{axe}$  est la vitesse longitudinale sur l'axe,  $u$  la vitesse longitudinale à la coordonnée radiale  $r$  et  $\delta_{1/2}$  le rayon du point où la vitesse longitudinale atteint la moitié de la vitesse maximale atteinte sur l'axe. Cette distance suivrait une loi linéaire classique du type :

$$\frac{\delta_{1/2}}{D_e} = 0,078 \frac{x}{D_e} \quad (2.13)$$

Cette loi reste cependant spécifique à leur cas d'étude qui correspond ici à un angle d'épanouissement du jet de  $4,46^\circ$ . Ces mêmes auteurs précisent que cet angle peut en effet varier entre  $3$  et  $8,2^\circ$  d'après la littérature sur les jets compressibles.

<sup>9</sup>D'après l'étude de Papamoschou et Roshko [128], les effets de compressibilité d'une couche de mélange plane ne se font essentiellement sentir que dans la plage de Mach convectif  $[0,5 - 0,9]$ .

<sup>10</sup>Cette loi avait initialement été introduite par Warren [171] (1957) sur l'étude de jets compressibles parfaitement détendus.



Aussi, suivant l'idée de Ferdmann et al. [53] (2000), Yüceil et Ötügen [177] (2003) proposent une relation plus générale. En faisant un bilan de quantité de mouvement entre la position équivalente à une détente parfaite  $X_{eq}$  et une position loin en aval où le jet retrouve une masse volumique égale à celle de l'atmosphère ambiante, le taux de décroissance de la vitesse sur l'axe peut être relié à la croissance du jet selon :

$$\frac{U_{eq}}{U_e} = 1,7a\left(\frac{\rho_a}{\rho_{eq}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{D_{eq}}\right) \quad (2.14)$$

où le coefficient  $a = \frac{K}{1,7} \sim 0,095$  si on choisit pour  $K$  la valeur moyenne de 0,16 (cf. paragraphe 2.2.1).

La croissance dynamique du jet se caractérise alors dans la zone de similitude par :

$$\frac{\delta_{1/2}}{D_{eq}} \sim 0,095 \frac{x}{D_{eq}} \quad (2.15)$$

#### 2.2.4 Croissance thermique du jet - Autosimilarité des profils de température

Dans un jet supersonique, l'énergie cinétique prédomine dans le bilan d'énergie, ce qui reste vrai dans la zone en aval pour le cas particulier où le jet est fortement sous-détendu. La croissance thermique du jet reste donc plus lente dans le cas du jet sous-détendu que dans le cas incompressible avec un régime de similitude atteint d'après Yüceil et Ötügen [177] en :

$$\frac{x}{D_{eq}} \sim 18. \quad (2.16)$$

L'énergie cinétique au centre du jet est approximativement égale à la différence d'enthalpie entre le jet et l'atmosphère ambiante, ce qui permet de relier dans le champ lointain l'évolution de la différence d'enthalpie avec l'évolution de la vitesse. En notant  $\delta_{T1/2}$  le rayon où est atteinte une température égale à la moitié de la température atteinte sur l'axe, on a :

$$\frac{T_a - T}{T_a - T_{axe}} = e^{2 \ln 2 \left(\frac{r}{\delta_{1/2}}\right)^2} = e^{\ln 2 \left(\frac{r}{\delta_{T1/2}}\right)^2} \quad (2.17)$$

ce qui donne un rapport des rayons caractéristiques de la croissance dynamique et de la croissance thermique du jet égal à :

$$\frac{\delta_{1/2}}{\delta_{T1/2}} = \sqrt{2} \quad (2.18)$$

Ce rapport donne alors un taux de croissance thermique du jet (dérivée selon la direction longitudinale de  $\delta_{T1/2}$ ) de l'ordre de 0,067, valeur proche de la valeur de 0,063 déterminée expérimentalement par Yüceil et Ötügen [177] pour un NPR variant entre 1 et 20,32. Notons que cette valeur du rapport des taux de croissance de l'ordre de  $\sqrt{2}$  est remarquablement plus élevée que les valeurs plus communément rencontrées pour les jets subsoniques (entre 0,65 et 0,85 typiquement). Dans le cas des jets à très grande vitesse, le champ de température reste en effet principalement piloté par l'énergie cinétique de turbulence et donc le cisaillement, tandis qu'il est piloté par la diffusion thermique dans le cas subsonique.

## 2.3 Influence des conditions génératrices sur le développement du jet sous-détendu

### 2.3.1 Influence des conditions géométriques à l'ajutage

#### Influence de la géométrie de l'ajutage

L'écoulement au sein du jet fortement sous-détendu est directement conditionné par la structure de choc qui s'y établit. Or la forme de cette structure dépend directement de la forme du faisceau d'ondes de détente qui s'attache au bord de l'ajutage et du mode de réflexion sur la frontière du jet qui va induire la possible focalisation. Le jet axisymétrique est le cas le plus simple pour lequel la courbure des lignes fluides est uniforme dans la direction azimutale, ce qui induit une focalisation uniforme des ondes de compression. Dès lors que la géométrie n'est plus axisymétrique, l'écoulement devient beaucoup plus complexe à décrire. Dans le cas d'une fente rectangulaire, le mode de focalisation des chocs dépend fortement des effets tridimensionnels associés à l'allongement relatif de la fente. A ce sujet, on pourra citer à titre illustratif l'étude de Gannochenko et al. [70] sur le positionnement du premier choc de recompression en fonction du rapport d'allongement de la buse  $a = \frac{l}{h}$  où  $l$  est la longueur de la fente et  $h$  sa hauteur. Au cours de cette étude, l'évolution de la position du choc droit  $X_{RM}$  pour des jets soniques ( $M_e = 1$ ) pour une large gamme de paramètres :

- Un rapport NPR de la pression statique à l'ajutage et celle de l'atmosphère ambiante allant de 1 à 110,
- Un allongement relatif allant de 1,66 à 55,5 (les hauteurs des fentes ayant des dimensions caractéristiques de l'ordre du millimètre : 2,7 à 15 mm).

Les résultats expérimentaux obtenus par interférométrie ont permis à Gannochenko et al. [70] de proposer la loi d'évolution suivante :

$$\frac{X_{RM}}{h} = \frac{n}{e^{2n-a} + 1} + \frac{1,65\sqrt{\frac{an}{\pi}}}{e^{2(14a-n)} + 1} + e^{2n-a}[e^{2(14a-n)}][n(\frac{1,03}{a} - \frac{1,54}{a^2} - 0,109)] + [\frac{1}{n}(0,516a - 0,693a^2 - 1,54) - \frac{2,73}{a} + 1,07] \quad (2.19)$$

expression dans laquelle  $n$  représente NPR. On peut constater qu'à NPR fixé à 20 par exemple, le choc se positionne à une distance de 5 à 20 fois la hauteur de la fente pour un rapport d'allongement (longueur sur hauteur) allant de 1,6 à 55,5 respectivement.

#### Influence de la forme de la tuyère et effets de couche limite

La forme de la tuyère va directement conditionner l'évolution de la couche limite et celle du profil de vitesse, influençant alors les conditions en section de sortie de l'ajutage et donc la structure de l'écoulement qui en résulte. L'effet de couche limite pourra généralement être minimisé dans le cas de tuyères convergentes et donc *a fortiori* pour celui de l'orifice qui représente le cas limite d'une tuyère convergente à 90°. En revanche, le profil de vitesse dans la section de l'ajutage sera particulièrement modifié entre une buse convergente profilée donnant un profil relativement plat et une buse convergente à section droite, ce qui aura une grande influence sur la structuration de la première cellule.

**Effet de tuyère** Dans le cas de jets supersoniques, Antsupov [12] montre qu'il existe un angle limite de divergence de la tuyère au delà duquel une réflexion régulière ne peut plus apparaître, quelque soit NPR. Dans le cas de buses convergentes, une telle dépendance à la forme de la tuyère est moins flagrante mais existe néanmoins. Addy [10] montre en effet que le rapport de pression

pour lequel le disque de Mach va apparaître sera d'autant plus élevé que l'angle de convergence sera élevé (de  $\frac{P_o}{P_a} = 1,92$  à  $5,88$ ) pour un angle allant de  $0^\circ$  (buse profilée) à  $90^\circ$  (orifice). Aleshin [13] a en particulier précisé l'évolution de cette structure dans le cas d'un jet modérément sous-détendu ( $NPR=2,56$ ) et donne quelques éléments phénoménologiques dont découle l'explication suivante.

Si on se réfère aux études menées sur l'évolution du profil de la ligne sonique dans les tuyères droites convergentes (voir par exemple Delery [45]), on peut observer que plus l'angle de convergence augmente, plus le profil se déforme vers l'extérieur (en forme de "langue" [13]), plus le développement de la couche limite est réduit (et a tendance à augmenter la section efficace de passage de l'écoulement en sortie), tandis que les lignes de courant se contractent davantage en sortie avant de reprendre une direction de plus en plus alignée avec l'axe (ce qui a tendance à réduire la section efficace de passage de l'écoulement en sortie et allonger la zone d'accélération subsonique qui précède la zone de détente supersonique). Ces différents effets rentrent en compétition, ce qui induit une évolution non monotone de la structure en fonction de l'angle de convergence de la tuyère. Ainsi, si on augmente progressivement l'angle de convergence, la section efficace a d'abord tendance à augmenter par diminution de l'épaisseur de la couche limite, tandis que l'angle de divergence des lignes de courant diminue. L'angle initial d'épanouissement du jet ( $\theta_i$ , entre la direction de l'axe et la direction des lignes de courant en périphérie du jet, direction imposée par le passage à travers le choc oblique) a donc tendance dans un premier temps à diminuer, la cellule s'allonge ( $X_{dm}$  augmente) et le diamètre du disque de Mach  $D_{dm}$  diminue.

Si on continue à augmenter l'angle de convergence de la tuyère, le profil de vitesse continue à se déformer, induisant une dissipation visqueuse de l'énergie mécanique accrue et donc des pertes de charge de plus en plus importantes. Cet effet s'oppose alors à celui de la diminution de la divergence des lignes de courant et réaugmente corrélativement l'extension du diamètre du choc suspendu. L'extension de la structure apparaîtrait maximale pour un angle de convergence de  $50^\circ$  environ, tandis que  $\theta_i$  serait minimal entre  $60$  et  $80^\circ$ .

Au delà de  $50^\circ$ , les effets de contraction diminuant, ceux de la diminution du diamètre effectif de la section de sortie et la diminution de l'angle de divergence des lignes de courant deviennent prépondérants, de sorte que l'étendue de la structure diminue ( $-15\%$  pour  $X_{dm}$  et pour un orifice par rapport à sa valeur maximale obtenue pour un angle de convergence de  $50^\circ$ ) tandis que  $D_{dm}$  reste constant au delà de  $60^\circ$  ( $-45\%$  par rapport à sa valeur maximale obtenue pour le cas d'une buse profilée). On pourra retenir les deux corrélations<sup>11</sup> données par Addy [10] qui illustrent l'évolution du diamètre du disque de Mach pour les deux cas extrêmes de buse convergente profilée (angle nul et profil de vitesse plat) et orifice (cas où le profil de la ligne sonique est le plus déformé), soit :

$$\begin{aligned} \text{- Buse profilée} & : \frac{D_{dm}}{D_e} = 0.36 * \sqrt{\frac{p_o}{p_a} - 3,9}, \quad \text{avec } \frac{p_o}{p_a} > 3,9 \\ \text{- Orifice} & : \frac{D_{dm}}{D_e} = 0.31 * \sqrt{\frac{p_o}{p_a} - 5}, \quad \text{avec } \frac{p_o}{p_a} > 5 \end{aligned} \quad (2.20)$$

A titre illustratif, si on se fixe  $\frac{p_o}{p_a} = 9$ , le diamètre adimensionné du disque de Mach  $\frac{D_{dm}}{D_e}$  passerait ainsi de  $0,8$  pour un écoulement issu d'une buse profilée à  $0,6$  environ pour un écoulement issu d'un orifice<sup>12</sup>.

<sup>11</sup>Ces corrélations ont été établies pour des rapports de pression peu élevés ( $\frac{P_o}{P_a}=1$  à  $10$ ). Leur utilisation pour des rapports plus élevés devra donc être faite avec réserve.

<sup>12</sup>On vérifie ainsi que le diamètre du disque de Mach dans l'écoulement issu d'un orifice est inférieur de  $45\%$  par rapport au cas de l'écoulement issu d'une buse profilée lorsque le  $NPR$  est de  $2,56$  [13], mais qu'il n'est inférieur que de  $25\%$  pour  $NPR=9$  [10]. Il est délicat d'extrapoler *a priori* l'écart relatif qui serait observé pour

**Effets de couche limite** Lorsque le jet est issu d'une buse divergente, le développement de la couche limite, fonction de la forme de cette buse, peut non seulement induire une restriction notable de la section de passage au niveau de l'ajutage, mais aussi rendre l'écoulement particulièrement sensible aux perturbations venant de l'aval. Un orifice représente le cas limite d'une tuyère convergente pour laquelle ces effets jouent néanmoins un rôle beaucoup moins marqué. Dans ce cas, on peut généralement considérer que la couche est laminaire au niveau de l'ajutage même si elle est turbulente en amont. En effet, lors de son développement, les fluctuations turbulentes transverses diminuent fortement, de même que les épaisseurs de quantité de mouvement et de déplacement (cf. Schlichting [149]). Afin de caractériser l'état de la turbulence dans la couche limite qui se développe dans une tuyère convergente, Moretti et Kays [114] introduisent par exemple le paramètre d'accélération :

$$K = -\frac{\nu}{\rho u^3} \frac{dp}{dx} = \frac{\nu}{u^2} \frac{du}{dx} \quad (2.21)$$

qui, s'il atteint typiquement une valeur de  $2 \cdot 10^{-6}$  pour un gradient de pression favorable, correspond alors à une relaminarisation de la couche limite. La structure du jet en aval est alors sensible à l'épaisseur de la couche en sortie et au régime de turbulence qui la caractérise. Zaprugaev [178] compare ainsi la structure de jet obtenue, soit avec une buse courte, soit avec une buse longue, les deux buses donnant les mêmes conditions thermodynamiques au niveau de la section de l'ajutage. Dans le cas de la buse courte, il obtient effectivement une faible valeur de l'épaisseur de déplacement (0,0064 mm) grâce à un paramètre d'accélération  $K$  assez élevé (égal à  $1,45 \cdot 10^{-5}$ ). En revanche, en utilisant une buse longue donnant une faible valeur de  $K$  (égal à  $10^{-6}$ ) et donc une épaisseur de quantité de mouvement beaucoup plus importante ( $\delta = 0,148mm$ ) dans la section de l'ajutage, il observe le phénomène de "*fuite de couche limite*". Lorsque la couche devient trop épaisse, le fort gradient de pression favorable rencontré dans le cas de forte sous-détente induit une brusque diminution de l'épaisseur de la couche au niveau de la section de sortie, de sorte que la couche a tendance à se reconstruire à l'intérieur de la buse et peut parfois faire apparaître un col sonique en léger amont de cette section de sortie. L'accélération supersonique de l'écoulement en aval de ce col artificiel, même sur une très faible distance, est alors suffisant pour modifier les conditions au niveau du col de la tuyère<sup>13</sup>, et donc modifier la structure du jet qui en dépend.

### Effet de swirl

En fonction de la géométrie de l'ajutage, un effet de swirl peut éventuellement exister. En fonction de son intensité, celui-ci peut notablement modifier la croissance de la couche de cisaillement et donc la structure de l'écoulement potentiel qui en dépend. Carpenter [29] remarque ainsi que le nombre de structures observables dans le cas d'un jet moyennement sous-détendu diminue lorsqu'un swirl est initialement ajouté au jet, tandis que Han [75] vérifie que le flux de masse entraîné devient effectivement plus important, la structure de la turbulence pouvant ainsi être fondamentalement modifiée.

---

des rapports NPR plus élevés. Cependant, on peut constater que l'écart absolu donné par les corrélations de Addy reste approximativement constant et égal à  $0,2 \times D_e$ .

<sup>13</sup>Ce phénomène a par exemple été observé par Moretti [114] pour un jet sonique à NPR=2,65 issu d'une buse courte convergente.

### 2.3.2 Effet des conditions thermodynamiques du mélange

#### Effet du rapport des chaleurs spécifiques

Peu d'information existe sur l'influence exacte des conditions thermodynamiques du mélange sur la structure du jet. Les mécanismes de transport prépondérants étant convectifs, la structure globale ne semble pouvoir principalement être modifiée que par un effet global du rapport des chaleurs spécifiques. Chen et al. [109] ont par exemple comparé la structure de choc d'un jet sonique à NPR=5 injecté dans un courant d'air à Mach 2 entre le cas d'une injection d'hydrogène et le cas d'une injection d'hélium. On peut observer que pour l'hydrogène, la structure est légèrement plus courte ( $\frac{X_{dm}}{D_e} = 2,14$  au lieu de 2,17) et le diamètre du disque de Mach légèrement plus important ( $\frac{D_{dm}}{D_e} = 0,71$  par rapport à 0,68). Aucune différence notable ne peut être faite dans le cas d'une injection d'air ou d'azote. Cet effet semble donc *a priori* négligeable dans ce cas où le co-écoulement est supersonique. Pourtant, en se référant aux données de Love [106], on peut constater que pour le cas d'un jet sonique se déchargeant dans une atmosphère au repos, l'angle initial de la frontière libre du jet augmente sensiblement lorsque  $\gamma$  diminue (passant par exemple de  $29,5^\circ$  à  $37,5^\circ$  lorsque  $\gamma$  passe de 1,4 à 1,115, et pour NPR=5). Une telle modification peut notablement modifier l'extension latérale du choc en barrique et ainsi l'angle d'incidence vers l'axe, pouvant induire une réduction notable du diamètre du disque de Mach.

#### Influence de la température du jet

La température du jet pourra avoir également un effet sur l'entraînement de l'air ambiant dans la couche de cisaillement. Dans le cas d'un jet plan, Huynh et Taghavi [80] ont ainsi vérifié que la température du jet a une influence négligeable tant que la température reste peu élevée (jusqu'à 400 K). En revanche, un accroissement de la température au delà de 400 K a naturellement tendance à augmenter l'entraînement de l'air ambiant (cas d'un jet non isotherme). Les couches de cisaillement croissent alors plus vite et les structures de choc se raccourcissent. A 1100 K, le jet chaud sonique à faible sous détente ( $\frac{p_e}{p_a} = 1,57$ ) ne présentait plus que six structures alors qu'il en présentait sept à 422 K.

### 2.3.3 Turbulence initiale

L'étude de Mal'tsev et al. [166] confirme l'évolution de la turbulence caractérisée par Avduevskii [16]. D'après Mal'tsev et al. [166], la transition à la turbulence apparaît entre la sortie sonique et le premier disque de Mach à une position qui va dépendre du nombre de Reynolds initial défini par rapport à la vitesse dans la section de l'ajutage, le diamètre de l'ajutage et la viscosité cinématique de l'atmosphère ambiante :  $Re_i = u_e D_e / \nu_a$ . Au delà de  $Re_i = 10^4$ , le jet peut être considéré comme complètement turbulent dès la sortie de la buse. Soulignons cependant l'importance de la rugosité relative (rapport de la hauteur moyenne des aspérités sur le diamètre de l'ajutage) dans la buse et des conditions dans la chambre en amont. La transition semble notamment ne respecter l'axisymétrie (apparition de structures en lobes) que tant que le libre parcours moyen moléculaire est inférieur ou de l'ordre de grandeur de la hauteur des aspérités. A partir d'une rugosité relative de 5/1000, la symétrie semble être nécessairement perdue. En dessous de 1/1000, la transition à la turbulence dans la couche de cisaillement ne dépend plus que des perturbations extérieures et du taux de croissance de la couche de cisaillement. Tout en respectant une transition sans perte d'axisymétrie (rugosité relative inférieure à 0,005), Mal'tsev et al. [166] vérifient, pour  $NPR = 50$ , qu'un changement de diamètre de la chambre de tranquillisation peut alors induire un décalage de la limite haute du spectre des fluctuations au niveau de la couche de mélange (mesuré en léger amont du disque de Mach, zone déjà turbulente dans

leur cas d'étude), c'est à dire un décalage du niveau de développement de la turbulence. Ainsi, même si la transition à la turbulence n'est *a priori* conditionnée directement que par le nombre de Reynolds en sortie, le développement de cette turbulence est quant à lui piloté, par l'état de la turbulence à l'intérieur de la chambre de tranquillisation d'une part, et par l'amplification des perturbations (liés à la géométrie de cette chambre de tranquillisation) d'autre part<sup>14</sup>.

### 2.3.4 Aspects multiphasiques et de gaz réels

#### Effets de la présence de particules

Hatta et al. [117] vérifient numériquement que la présence de particules a tendance à stabiliser l'écoulement en aval du disque de Mach en absorbant une partie des fluctuations de température et de vitesse. Sommerfeld [154] observe alors que l'injection de particules solides au sein de l'écoulement peut se traduire par un déplacement du premier disque de Mach vers l'amont. Utilisant des perles de verre d'un diamètre moyen de 45 micromètres, il observe en effet qu'injecter ces particules jusqu'à un taux de charge de 1 (rapport de la masse de particules par unité de volume sur la masse d'air par unité de volume) peut diminuer  $\frac{X_{dm}}{D_e}$  d'environ 35% (avec  $D_e=3\text{mm}$  et  $NPR = 30$ ,  $\frac{X_{dm}}{D_e}$  passerait de 3,38 à 2,5). Il est certain que les particules ont une forte inertie, sont aérodynamiquement freinées et ne peuvent alors suivre parfaitement l'écoulement au cours des successions de phases de détente et de compression. Mais cette seule constatation est insuffisante, d'après les auteurs, pour expliquer précisément l'origine du décalage sur la structure. Il faudrait rechercher plus précisément des effets de traînée ou de modification locale de la vitesse du son dus à la présence des particules.

### 2.3.5 Cas du jet réactif

La structure proche du jet libre ne semble pas être fondamentalement modifiée par la chimie (voir étude de Klavuhn et McDaniel [84]), ce qui conforte notre démarche de ne considérer qu'un écoulement de gaz chauds pour représenter le jet *a priori* le plus dangereux dans le cas d'un percement de chambre de combustion.

## 2.4 Caractéristiques instationnaires du jet libre sous-détendu

Dans un jet fortement sous-détendu, on pourra distinguer les instabilités de l'écoulement dont l'origine repose sur l'instabilité intrinsèque liée à la structure de choc<sup>15</sup> ou plus précisément à une alternance des types de structuration (phénomène d'hystérésis), des instabilités liées au développement de la couche de cisaillement avec notamment le développement, dans le cas particulier de la forte sous-détente, de l'instabilité de Taylor-Görtler. Mais la difficulté de définir une structure de jet stationnaire en moyenne au delà de la zone très proche du jet provient avant tout de l'interaction des structures tourbillonnaires de la couche de cisaillement avec la structure de choc qui rend impossible de définir une structure du jet stationnaire au delà de la première cellule de choc.

<sup>14</sup>On notera que le nombre de Reynolds à l'intérieur de la chambre était contrôlé dans leur étude par un changement du niveau de pression (le NPR restant fixé par un changement relatif équivalent de la pression de l'atmosphère ambiante).

<sup>15</sup>On pourrait mentionner l'existence d'autres types d'instabilités intrinsèquement liées aux chocs telles que l'instabilité de Richtmeyer-Meshkov. L'influence de ces instabilités apparaît néanmoins absolument négligeable par rapport à la déstabilisation des structures liée à l'interaction avec le développement tourbillonnaire dans le jet.

### 2.4.1 Instationnarité liée à la structure de choc - Phénomène d'hystérésis

Il existe une plage de rapports de détente dans laquelle les solutions de réflexions de choc régulière et non-régulière coexistent. De faibles variations des conditions génératrices peuvent alors amener l'écoulement à passer successivement d'une structure à l'autre. Ce phénomène a notamment été numériquement approfondi par Gribben et al. [25]. Il ne peut être négligé dans une approche instationnaire dans le cas de l'étude de jet modérément à fortement sous-détendu. Par exemple, Avital [17] a vérifié qu'en gardant constant NPR à 2,88 et  $M_e = 2,35$  (divergent de  $19^\circ$  et  $D_e = 25$  mm), les transitions successives entre réflexion régulière (choc oblique) et réflexion de Mach (choc droit) provoquaient de fortes variations de température (de l'ordre de 350K) juste en aval du point de réflexion sur l'axe. Dans le régime de jet très fortement sous-détendu, la solution de réflexion du choc devient unique (apparition du disque de Mach) et l'aspect de la structure proche de l'écoulement ne subit pas de changement majeur au cours du temps.

### 2.4.2 Instationnarité liée à la couche de cisaillement - Développement de l'instabilité de Taylor-Görtler

Comme c'est le cas pour tout écoulement cisailé, le jet fortement sous-détendu est naturellement le siège du développement d'instabilités de type Kelvin-Helmoltz, donnant naissance à des structures tourbillonnaires dont la taille croît, par entraînement de l'air ambiant, lorsqu'elles sont convectées vers l'aval. L'interaction de ces structures tourbillonnaires avec la structure de choc est d'ailleurs à l'origine de la nature particulièrement instationnaire du jet fortement sous-détendu (cf. partie 2.4.3). Malgré leur rôle prépondérant, nous choisissons de ne pas décrire plus en détail ce type d'instabilités, dont la nature, déjà abondamment décrite dans la littérature, ne semble pas fondamentalement modifiée dans le cas d'un régime sous-détendu. En revanche, on s'intéresse, dans cette section, au développement d'un type d'instabilités typiquement lié au cas du jet fortement sous-détendu : l'instabilité de Taylor-Görtler. De part le phénomène d'intense détente, les lignes de courant de l'écoulement sont en effet fortement courbées, de sorte que des effets de force centrifuge peuvent s'exercer sur la couche cisailée soumise à de forts gradients de vitesse. Ces instabilités donnent naissance à des tourbillons longitudinaux qui sont plus couramment observés au sein de couches limites se développant sur des parois courbes.

### Description des tourbillons

D'après Krothapalli et al. [3], l'observation d'une structure stationnaire de tourbillons longitudinaux prenant naissance entre le choc suspendu et la frontière du jet, au sein de la couche de cisaillement dans la zone proche d'un jet fortement sous-détendu, aurait été rapportée dès la fin des années 70 dans la littérature russe. Il serait en effet possible, d'après l'étude de Arnette et al. [144], d'enregistrer des variations azimutales de la pression statique (en forme de W) de très forte amplitude en aval (5 mm) du disque de Mach (230 kPa d'amplitude en  $r/R_e = 1,2$  et  $X/D_e = 2$ ) pour un jet sonique de nombre de Mach équivalent parfaitement détendu  $M_j = 2$  ( $NPR \simeq 4,1$ ). L'amplitude de ces fluctuations représentent 61% de la pression moyenne mesurée en ce rayon, qui est de l'ordre de 376 kPa. En effectuant des coupes planes transversales à l'axe du jet à différentes distances de la buse (par simple diffusion Rayleigh d'eau condensée dans le jet), Krothapalli et al. [3] illustrent par exemple le mécanisme de développement de cette structure dite *en pétales* [119] qui prennent naissance au niveau de la buse (voir figure 2.4) puis s'élargissent vers l'aval, atteignent leur taille maximale au niveau de la fin de la zone proche du jet (vers  $\frac{X}{D_e} = 3$  par exemple pour un jet issu d'une buse sonique à NPR=9 [179] [181] [180]) avant de fusionner, de perdre leur aspect stationnaire en moyenne puis de disparaître. Le nombre de structures semble globalement augmenter avec le niveau de sous-détente mais les tourbillons

longitudinaux se présentent toujours par paires de tourbillons contrarotatifs. Cet écart à l'axisymétrie semble être fortement lié à la géométrie de la buse, une rotation de la buse entraînant en effet une rotation de la structure [119]. En vérifiant que cette structure n'apparaît que dans le cas des jets fortement sous-détendus, Arnette et al. [144] associe cependant fortement l'apparition de cette structure à l'instabilité de Taylor-Görtler.

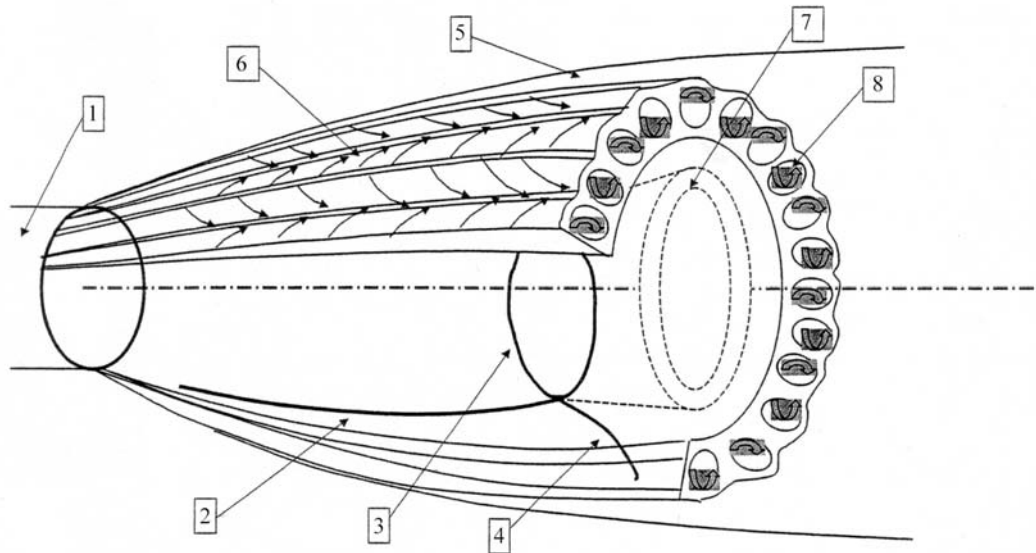


FIG. 2.4 – Schéma de la structure proche d'un jet fortement sous-détendu :

**1** : Buse, **2** : Choc incident ("suspendu" ou dit "en tonneau"), **3** : Disque de Mach, **4** : Choc réfléchi, **5** : Couche de cisaillement, **6** : Couche tourbillonnaire de structures longitudinales, **7** : Couche de mélange du disque de Mach, **8** : Tourbillon longitudinal de Taylor-Görtler.

### Etude sur l'origine des tourbillons

L'origine de ces tourbillons est ainsi dans un premier temps entièrement attribuée à la naissance et à l'amplification d'instabilités de type Taylor-Görtler [180]. Zapryagaev et Bobrikov [179] étudient d'ailleurs spécifiquement l'évolution longitudinale des taux de croissance des perturbations dans la couche de cisaillement d'un jet sonique sous-détendu ( $NPR = 2,65$ ). Une transformée de Fourier rapide des profils de pression azimuthaux leur permet d'obtenir les spectres d'amplitude de pression en fonction de chaque nombre d'onde, desquels ils déduisent les taux de croissance entre chaque section transversale. Ils observent naturellement que l'intervalle d'instabilité diminue à mesure que l'on s'éloigne vers l'aval, vérifiant directement le lien entre la disparition des structures tourbillonnaires longitudinales et la diminution de courbure de la couche de cisaillement. Cette étude ne permet cependant pas de conclure quant à la véritable origine des tourbillons. Novopashin et Perepelkin [119] identifient en revanche la position des tourbillons dans leur jet sonique avec des stries (5 micromètres de hauteur) existant dans la buse et en concluent que la rugosité dans la buse est nécessaire à l'apparition des tourbillons. Par ailleurs, Krothapalli et al. [3] observent l'existence de cette structure tourbillonnaire également pour des jets non faiblement sous-détendus, démontrant que la forte courbure des lignes de courant n'est pas le seul ingrédient nécessaire au développement de ces structures longitudinales. King et al. [34] et Island et al. [81] en 1994 et 1997 respectivement, réussissent d'ailleurs à exciter ces tourbillons



longitudinaux même pour des cas de détente idéale<sup>16</sup>. Face à l'imprécision quant à l'origine de ces tourbillons, Krothapalli et al. [4] mènent finalement (en 1998) une étude plus complète sur le lien entre la structure et l'état de surface à l'intérieur de la buse. Ils constatent notamment par mesures micrométriques, que le pic d'ondulation de pression qu'ils observent dans un premier temps dans leur jet, correspond à un défaut d'usinage de la surface de leur buse convergente (petit plateau de 0,06mm à peine!). En retravaillant l'état de surface, ils parviennent à faire disparaître globalement l'ensemble des tourbillons, même avec un jet fortement sous-détendu. Au contraire, en ajoutant de petits apex au niveau de la sortie d'une tuyère divergente adaptée ( $Me=1,8$ ), ils parviennent à enregistrer une augmentation de 34470 à 137880 Pa des ondulations de pression, soit environ l'équivalent des variations enregistrées dans le cas du jet fortement sous-détendu sans obstacle. Constatant que les plus gros tourbillons sont générés par des apex triangulaires et que des obstacles de forme rectangulaire n'induisent que très peu de mélange supplémentaire par rapport au cas sans obstacle, ils relient la présence des tourbillons longitudinaux à une génération initiale de vorticité longitudinale au sein de la couche limite de la tuyère. Ainsi, l'instabilité de Taylor-Görtler ne ferait qu'amplifier spatialement la vorticité générée au sein de la couche limite. D'autres facteurs resteraient   étudier pour caractériser plus précisément ces tourbillons, tels que le rapport des masses volumiques, de la vitesse du jet ou encore du nombre de Mach convectif. On retiendra le résultat de Krothapalli et al. [4] suivant : la rugosité est susceptible de déclencher la naissance d'un tourbillon longitudinal si la hauteur relative de rugosité sur le diamètre de la section de l'ajutage est supérieure à environ 2/1000 pour une buse convergente de diamètre de sortie de 22,6 mm)(Novopashin et Perepelkin avaient trouvé 0,0013 mais pour des buses plus petites de 0,5   4 mm). C'est ainsi en estimant l'épaisseur de la couche limite et la rugosité que l'on devrait *a priori* pouvoir prédire l'apparition de tourbillons longitudinaux<sup>17</sup>. Un défaut de surface égal à un douzième de l'épaisseur de déplacement de la couche limite semble suffisant pour déclencher l'apparition d'un tourbillon dans le jet.

### 2.4.3 Instationnarité liée à l'interaction de la structure de choc avec la couche de cisaillement

L'interaction des tourbillons de la couche de cisaillement avec les structures de choc va générer des perturbations de pression (bruit de hurlement "screech") qui rétroactivement semblent piloter en partie le développement des instabilités dans la couche. Il en résulte qu'en fonction du rapport de détente (qui conditionne principalement l'étendue de la structure de choc) et de la position de ces chocs dans le jet (où différents modes d'instabilité pourront dominer tour à tour), différents types de couplage pourront apparaître et éventuellement déstabiliser complètement le jet en aval.

#### Boucle de feedback - Génération du bruit screech

Le bruit des jets supersoniques est principalement lié à la génération et l'amplification de certaines fréquences typiques du spectre d'émission acoustique qui se traduit par le bruit dit de *hurlement* ou "screech". On pourra se référer à l'article de revue de Raman [134] qui synthétise l'ensemble des connaissances acquises sur ce sujet et propose un ensemble exhaustif de références bibliographiques. Powell [132] a avancé pour la première fois au début des années 1950 une explication sur l'origine du bruit de hurlement. Celle-ci résident dans l'interaction d'un train

<sup>16</sup>On notera que Arnette et al. [144] en 1993 rapportent des observations différentes. En testant différents types de buse, ils n'observeraient ces tourbillons que dans le cas d'une forte sous détente, la structure étant stationnaire et présentant une forme indépendante de la position azimutale des buses.

<sup>17</sup>L'interaction entre les tourbillons longitudinaux et le choc réfléchi ou le disque de Mach lorsque le NPR devient plus important semble ne jamais avoir été étudiée. Son effet sur le mélange semble cependant ne pas être négligeable.

périodique de tourbillons nés des instabilités de la couche de cisaillement (typiquement Kelvin-Helmoltz) avec la structure de choc contenue dans le jet. Cette interaction génère périodiquement des perturbations de pression (de niveau acoustique) dans tout l'environnement. Le lobe d'émission principal étant dirigé vers l'amont et l'amplitude des ondes de pression étant suffisamment importante, celles-ci peuvent voyager jusqu'au niveau de la buse, soit via la couche externe de la couche de cisaillement, modulant au passage la vitesse à laquelle les tourbillons sont convectés, soit via l'écoulement ambiant subsonique, perturbent et amplifient les instabilités au niveau de l'orifice. Cette boucle de rétroaction ou "*feedback*" a été le sujet de nombreuses recherches durant ces cinquantes dernières années et ne peut être encore à ce jour parfaitement décrite. La fréquence principale du bruit de hurlement est principalement liée à l'espacement entre les chocs (non uniformément espacés) et à la vitesse convective au sein de la couche de cisaillement, qui est elle-même modulée selon l'évolution dans les différentes zones de compression ou détente qui modifient successivement la vitesse du son. L'ensemble des études étant naturellement destiné au bruit des jets de tuyères d'avions (pollution sonore ou fatigue acoustique des matériaux constituant la buse), les résultats avancés à ce jour ne correspondent malheureusement qu'à des niveaux de détente relativement modérés (jusqu'à un nombre de Mach équivalent de jet parfaitement détendu de  $M_j = 1,8$  d'après Raman [134], ce qui correspondrait à  $NPR = 3$  environ dans le cas d'un jet d'air sonique). On retiendra cependant un certain nombre d'éléments pertinents. En fonction du rapport de pression, on peut rencontrer la superposition de un ou deux modes différents d'émission (axisymétriques (A1) ou (A2), hélicoïdal, sinusoidal, mode (D)), chacun de ces modes donnant naissance à des fréquences, des lobes d'émission et des rapports d'intensité de pression acoustique différents. Même s'il faut une intensité minimale de choc pour produire les fréquences de hurlement, le niveau de pression acoustique généré lors de l'interaction choc tourbillon ne dépend qu'indirectement du NPR. L'interaction avec le choc n'a qu'un rôle d'amorçage. Il s'agit d'un phénomène d'amplification non-linéaire qui est essentiellement lié à la géométrie environnante (épaisseur des lèvres, présence de parois). Il y a par ailleurs une compétition entre la décroissance de l'intensité des chocs constituant les cellules et l'intensité des instabilités se développant au sein de la couche de cisaillement, de sorte que les différents centres acoustiques ne sont pas uniformément distribués, le centre dominant se situant dans les cas de détente étudiés en léger aval de la troisième cellule de choc. Dans le cas du mode hélicoïdal, Umeda et Ishii [165] ont mis en évidence l'existence d'une double structure hélicoïdale de tourbillons *en forme de delta* de même longueur d'onde et déphasés de  $180^\circ$ . En modélisant des sources acoustiques en rotation à vitesse supersonique autour de l'axe du jet, ils ont pu reproduire la formation de l'enveloppe de cônes de Mach en forme d'hélice, balayant la couche de cisaillement près de la buse (superposition et amplification de l'ensemble des ondes rayonnées vers l'amont à partir des différentes sources acoustiques en rotation), proposant pour ce mode particulier d'oscillation, un nouveau mécanisme d'excitation de la couche de cisaillement<sup>18</sup>.

### Instationnarité à grandes échelles

Les visualisations spectroradiométriques d'Avital et al. [17] sont une excellente illustration de l'impossibilité de définir une structure pseudo-stationnaire stable au delà de la cinquième cellule pour les jets sous-détendus présentant plusieurs répétitions de la structure de choc (typiquement pour  $NPR < 4,5$ ). Au delà de cette cinquième structure de choc, dont la position correspond à la fin du cône potentiel, le mode hélicoïdal est prépondérant et le jet peut perdre totalement son aspect axisymétrique. L'écoulement ainsi généré va alors généralement subir un mouvement

<sup>18</sup>Cependant, aucune explication n'est donnée sur l'origine initiale de l'oscillation hélicoïdale de l'écoulement et il est impossible de dire *a priori* si de tels modes apparaîtront dans la gamme de rapports de pressions relative au cas du percement d'une chambre de combustion.

de précession pour ne redevenir quasi-axisymétrique que pendant de brefs instants. Dans la zone proche, lorsque le rapport de sous-détente est suffisamment élevé, le noyau subsonique en aval du disque de Mach devient suffisamment long pour que des structures tourbillonnaires de type Kelvin Helmholtz aient le temps de se développer et venir "étrangler" et accélérer ce noyau subsonique jusqu'à générer par "*effet tuyère*" des chocs instationnaires qui sont alors convectés périodiquement vers l'aval avec les tourbillons. Des chocs forts pourront de même apparaître au sein du coeur supersonique et être périodiquement convectés au delà de la troisième cellule de choc lorsque le NPR est plus faible. Matsuda [159] observe ainsi numériquement pour un jet sonique à NPR=2,06 la croissance très rapide des tourbillons qui atteindraient dès la troisième cellule de choc une taille comparable à l'épaisseur du jet, rendant très délicate toute identification de structure stationnaire en moyenne au delà de cette troisième cellule. Birkby [59] vérifie numériquement quant à lui la naissance d'instabilités au sein de la couche de cisaillement du disque de Mach (voir aussi les visualisations de Yip et al. [18]) et considère que seule la première cellule de choc pourra être considérée comme véritablement stationnaire en moyenne.

Cependant, au sein même de la zone potentielle d'un jet fortement sous-détendu, l'écoulement ne sera stationnaire qu'en moyenne. Il sera en effet fortement perturbé par le mouvement du disque de Mach résultant du passage de ces mêmes tourbillons qui déstabilisent complètement le jet en aval lorsque le rapport de détente est plus faible. Panda [124][122][123] a notamment étudié le mouvement instationnaire des chocs et mis en évidence l'existence d'un système de chocs doubles se déplaçant au gré du passage des tourbillons de Kelvin-Helmoltz. Les chocs sont ainsi régulièrement étirés vers l'aval selon un mouvement hélicoïdal puis disparaissent progressivement tandis qu'un nouveau choc fort apparaît en amont. Ce mouvement oscillatoire peut induire, indépendamment des niveaux de turbulence, des fluctuations de forte amplitude sur les variables de l'écoulement (un point de l'écoulement pourra en effet être successivement en amont ou en aval des chocs<sup>19</sup>).

## 2.5 Phénoménologie du jet sous-détendu en impact

On se propose finalement d'évoquer le cas de l'impact d'un jet sous-détendu sur une paroi plane. On décompose classiquement la structure du jet impactant (subsonique ou supersonique) en trois zones :

- La zone de jet libre,
- La zone d'impact,
- La zone d'écoulement pariétal.

Si l'impact a lieu à une distance  $Z_{NP}$  entre la paroi et la buse suffisamment importante pour que le jet soit redevenu subsonique, les zones d'impact et de jet de paroi présenteront naturellement une structure semblable à celle rencontrée dans le cas de l'impact de jets subsoniques. Dans le cas où l'impact est proche et le jet parfaitement détendu, la déflexion des lignes de courant, à vitesse supersonique, près de la paroi, induit la formation d'un choc dit "en plateau" qui s'étend sur la largeur du noyau supersonique du jet, soit environ la largeur de ce dernier. La direction des lignes de courant n'étant pas uniforme en amont, il présente généralement une légère courbure, sa convexité étant orientée vers l'ajutage. Le faisceau de détente qui naît de l'interaction de ce choc avec la frontière du jet se réfléchit successivement entre la paroi impactée et la frontière libre du jet dans la zone de jet de paroi. Ainsi, l'allure du profil de pression sur

---

<sup>19</sup>Pour un jet faiblement sous-détendu à  $M_j = 1,42$  issu d'une buse convergente de diamètre 25,4 mm, Panda [122] rapporte par exemple une amplitude du mouvement du troisième choc réfléchi de l'ordre de 0,13 fois le diamètre  $D_e$  de l'ajutage pour une position moyenne située à 2,38  $D_e$  (soit une variation de 5,5% de la distance de positionnement moyenne par rapport à l'ajutage).

la paroi impactée est fondamentalement modifiée par rapport à celle qui est observable dans le cas subsonique. A l'aval du choc "plateau" correspond typiquement une zone uniforme de haute pression statique qui chute à une distance radiale correspondant environ à la largeur de ce choc dans la zone correspondant à l'impact du faisceau de détente sur la paroi. La pression oscille ensuite corrélativement aux zones de compression et détente successivement rencontrées en s'éloignant de l'axe. Dans le cas de l'impact d'un jet fortement sous-détendu, cette structure de choc interagit avec la structure de choc qui apparaît dans la zone de jet libre, de sorte que la structure de choc dans la zone d'impact peut devenir notablement plus complexe. Cette structure ne dépend plus seulement du NPR, mais aussi de la distance d'impact  $Z_{NP}$  (définie comme la distance entre la plaque impactée et la section de l'ajutage) et de l'angle  $\theta_{NP}$  entre la direction de cette plaque et l'axe du jet. La figure (2.5.a) présente la forme de la structure pseudo-stationnaire qui est typiquement rencontrée dans la majorité des cas pour un impact normal, soit  $\theta_{NP} = 90^\circ$ . Si  $Z_{NP}$  reste modéré, le disque de Mach (DM) interagit avec le choc en plateau (CP) pour former une structure centrale de choc double, à laquelle se rattache un "choc de queue" oblique (CQ). Une ligne de glissement (G) est issue du point d'interaction entre (DM), (CP) et (CQ), séparant typiquement (comme dans le cas où le jet est libre), une zone subsonique centrale et une zone supersonique. Dans ce cas, les profils de pression et température sur la paroi gardent une allure similaire à celle rencontrée dans le cas de l'impact d'un jet supersonique parfaitement détendu (voir figure 2.6). Si  $Z_{NP}$  est plus important, le choc en plateau (CP) se positionne en aval du disque de Mach (DM), la première structure de choc restant insensible à la zone d'impact, alors que la structure du choc en plateau peut interagir avec la ligne de glissement issue du disque de Mach en amont, et devient de ce fait plus complexe<sup>20</sup>. Dans la zone d'impact, la pression totale régnant dans la zone supersonique est plus importante que celle qui règne près de l'axe. Aussi, en fonction de  $Z_{NP}$  et du NPR (qui conditionne typiquement la distance  $Z_{NC}$  entre la section de l'ajutage, ainsi que la position et le diamètre du disque de Mach), la ligne de glissement (G) pourra interagir de façon plus ou moins importante avec la couche limite qui se développe au niveau de la paroi. Ainsi, si la zone d'impact de cette ligne de glissement (G) sur la paroi n'est pas trop éloignée de l'axe et que la différence de pression totale de part et d'autre de (G) est supérieure à une certaine valeur critique, un décollement de la couche limite en paroi pourrait amorcer la formation d'une bulle de recirculation (voir figure 2.5.b). Les conditions d'apparition d'une telle bulle de recirculation ne semblent pas encore être clairement élucidées [67][90]. Néanmoins le rôle de la différence de pression totale dans l'écoulement central subsonique et la couche de cisaillement supersonique semble effectivement prépondérant comme le démontrent notamment des études de stabilisation de zone de combustion en écoulement supersonique par zone de recirculation libre générée par interaction de chocs [105].

La formation d'une telle recirculation modifie alors nettement les conditions de recompression en aval de la structure, induisant un couplage avec celle-ci. La variation périodique de son extension radiale, de basse fréquence (1 à 10 Hertz) et d'une amplitude de 20 à 25% d'après Alvi [communication privée] est la source d'une forte instationnarité qui s'ajoute aux intenses sources d'instationnarité déjà présentes, dues notamment à :

- A la présence d'une onde acoustique stationnaire pouvant se former entre la surface impactée et toute surface parallèle et qui est à la source d'une instabilité à hautes fréquences typiquement rencontrée même dans le cas du jet libre [118],
- Au phénomène de résonance d'Hartman [19] qui est à la source de l'instabilité prédominante, de très grande amplitude et à très hautes fréquences (14-20KHz).

Notons que la combinaison de ces différentes sources d'instabilités peut provoquer, dans certaines plages de  $Z_{NP}$  et de NPR, une déstabilisation complète du jet impactant. Alvi et al. [67] semblent

<sup>20</sup>Ce genre d'interaction à haut NPR n'apparaît pas être précisément décrit dans la littérature.

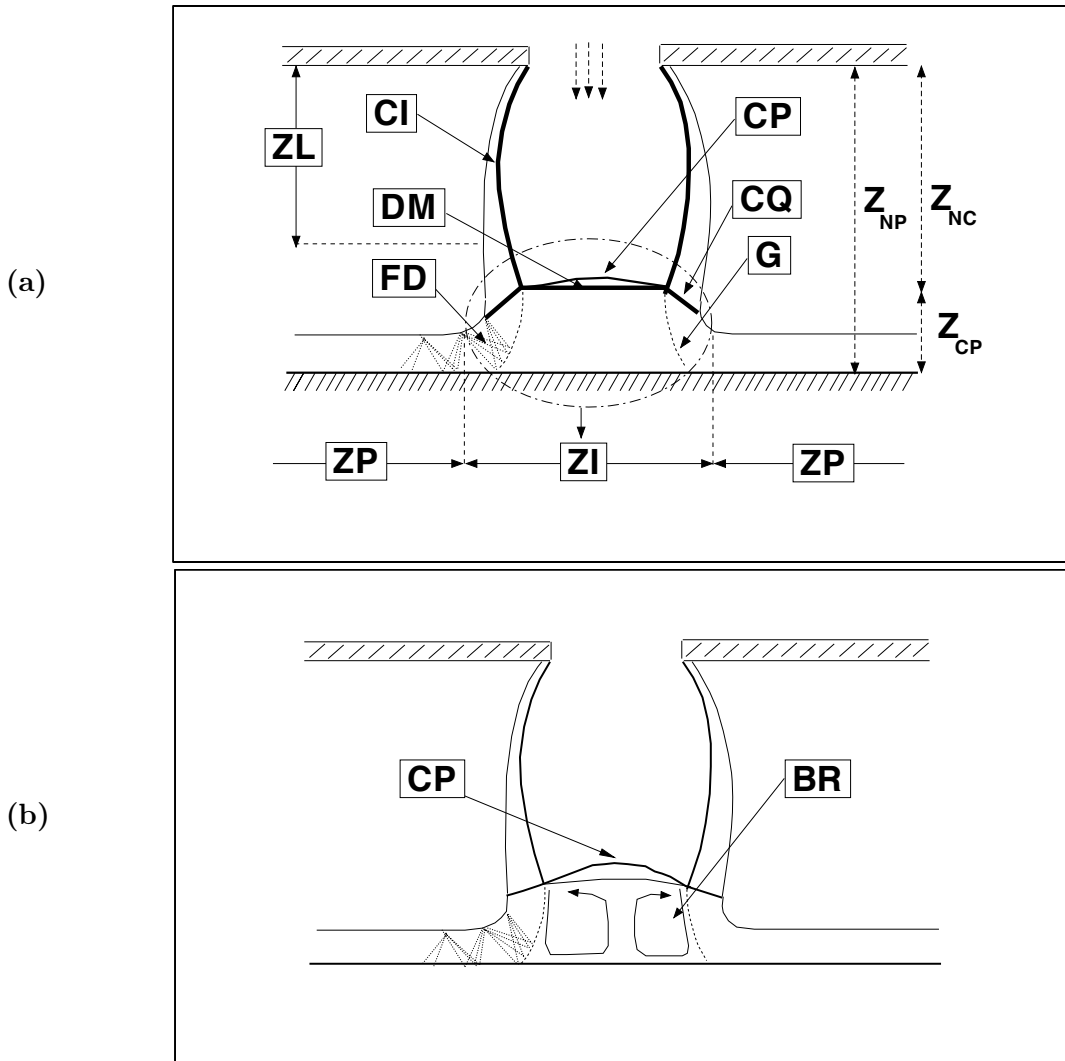


FIG. 2.5 – Schéma de la structure d'un jet fortement sous-détendu lors d'un impact normal en zone proche d'un jet fortement sous-détendu sur une paroi plane :

(a) : Structure typique rencontrée dans la majorité des configurations, (b) : Cas d'apparition d'une bulle de recirculation, CI : Choc incident, DM : Disque de Mach, CP : Choc plateau, CQ : Choc de queue, G : Ligne de glissement, FD : Faisceau de détente, ZL : Zone de jet libre, ZI : Zone d'impact, ZP : Zone de jet de paroi, ZNP : Distance entre la buse et la paroi, ZNC : Distance entre la buse et le choc plateau, ZCP : Distance entre le choc plateau et la paroi, BR : Bulle de recirculation.

être les premiers à avoir mesuré précisément le champ de vitesse et de masse volumique pour un impact normal de jet fortement sous-détendu ( $NPR \simeq 2,6$ ). Ils mettent notamment en évidence l'extrême dépendance de l'extension de la bulle de recirculation à celle du disque de Mach en amont et à l'intensité du choc. La présence de cette bulle peut alors considérablement modifier le profil moyen classique de pression en surface. En partant de l'axe, on pourra observer une première zone plateau correspondant à une pression dont le niveau est nettement inférieur à celui que l'on obtiendrait sans la bulle (voir figure 2.6). Le fluide en aval du disque se déplaçant près de l'axe est alors nettement freiné par le flux radial dû à la bulle de recirculation. Puis, au point d'impact de la couche de cisaillement du DM correspond alors un niveau de pression maximal (et de friction nulle).

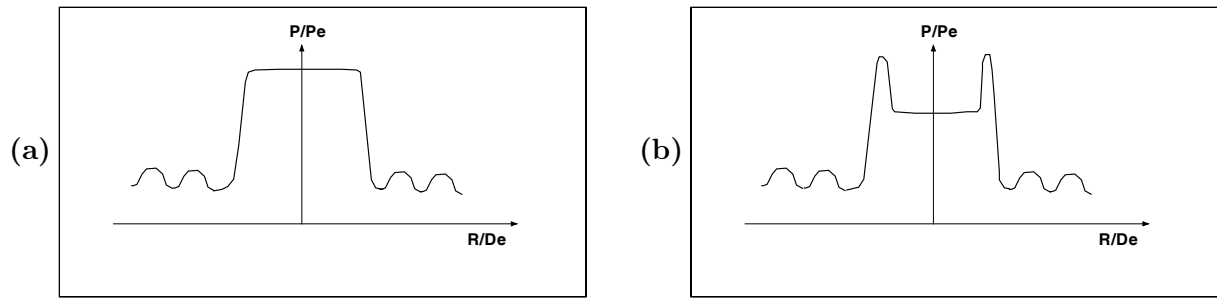


FIG. 2.6 – Allure du profil radial de pression le long d’une plaque plane impactée normalement par un jet fortement sous-détendu :

(a) : Allure typique d’un profil dans une configuration d’impact sans recirculation, (b) : Allure typique d’un profil dans une configuration d’impact avec présence d’une bulle de recirculation.

Notons finalement que des structures de choc plus complexes sont susceptibles d’apparaître dès lors que l’impact n’est plus normal. On pourra utilement se référer en particulier à l’étude de Lamont et Hunt [98] pour une présentation détaillée des divers types d’interaction pouvant apparaître dans cette configuration. A titre illustratif, la figure 2.7 reproduit schématiquement la structure de choc observée par ces auteurs, par visualisation Schlieren, pour un jet supersonique issue d’une buse divergente à un nombre de Mach  $M_e = 2,2$ , impactant une plaque située (au niveau de l’axe) à une distance  $Z_{NP}/D_e = 2$  et dont la direction présente un angle de  $\theta_{NP} = 30^\circ$  par rapport à l’axe du jet. De telles modifications de la structure en amont de la plaque conduisent naturellement à une modification radicale des distributions de pression et de cisaillement au niveau de la paroi. On retiendra, par exemple, que pour certains cas proches de la configuration illustrée (pour  $\theta_{NP} < 45^\circ$ ), Lamont et Hunt [98] rapportent avoir enregistré des pics de niveau de pression à la paroi, jusqu’à trois fois plus élevés que ceux rencontrés dans le cas d’un impact normal.

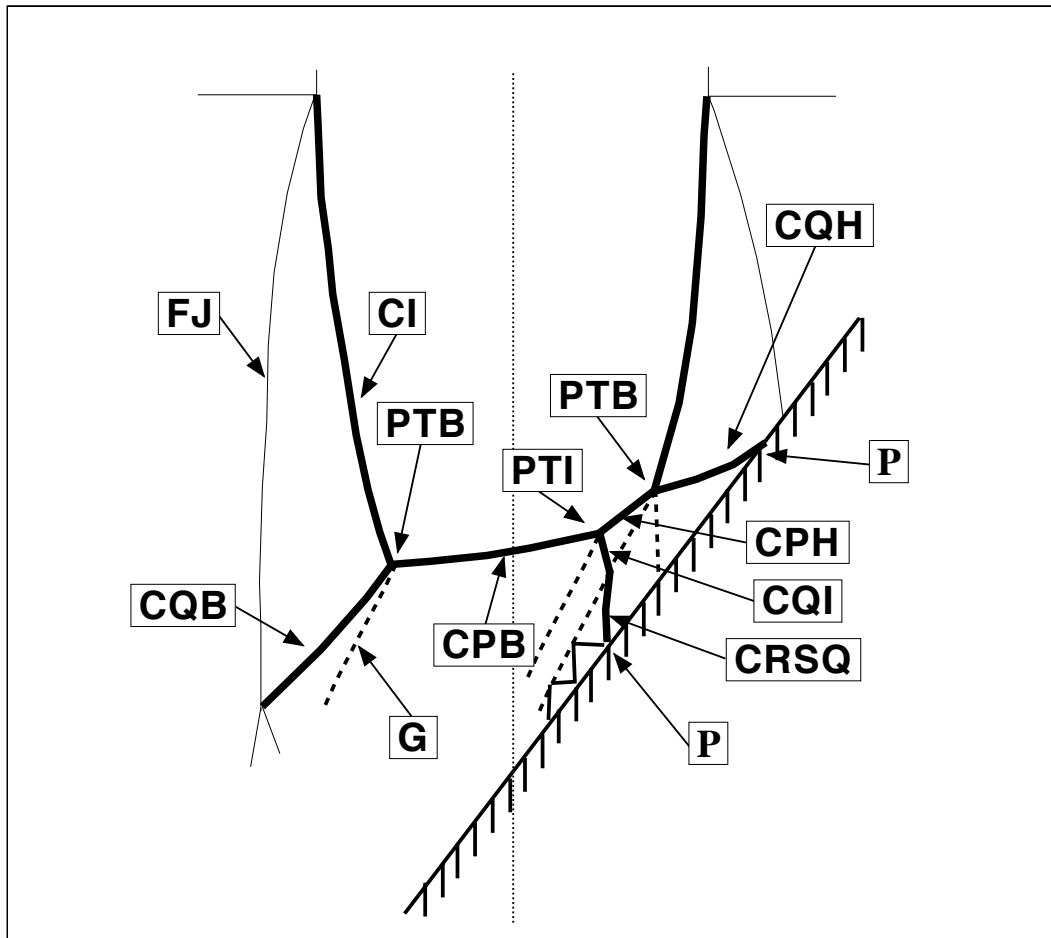


FIG. 2.7 – Schéma de la structure de choc rencontrée pour un impact de jet supersonique à  $M_e = 2,2$ ,  $Z_{NP}/D_e = 2$  et  $\theta_{NP} = 30^\circ$  :

(FJ) : Frontière du jet, (CI) : Choc incident, (PTH) : Point triple haut, (PTI) : Point triple intermédiaire, (PTB) : Point triple bas, (CPH) : Choc plateau haut, (CQB) : Choc plateau bas, (CQH) : Choc de queue haut, (CQI) : Choc de queue intermédiaire, (CQB) : Choc de queue bas, (P) : Position des pics de pression.

## 2.6 Bilan - Description *a priori* de l'écoulement issu du percement d'une chambre de combustion d'un moteur d'avion

Nous précisons tout d'abord, dans cette section, les conditions à l'ajutage qu'il s'agirait de prendre en considération pour simuler de façon pertinente le cas d'un écoulement issu d'un orifice circulaire apparaissant au niveau de la chambre de combustion d'un moteur aéronautique. Après quelques brèves considérations sur l'effet d'orifice, nous proposons une estimation des plages de paramètres représentatives des conditions prévalant, d'une part au niveau de la section de l'ajutage, d'autre part dans l'atmosphère ambiante. L'ensemble des corrélations empiriques données dans la littérature pour les jets d'air soniques sous-détendus (rapportées tout au long de ce chapitre) nous permet ensuite, de distinguer, sous forme synthétique, l'ensemble des informations accessibles *a priori* sur la structure géométrique attendue de l'écoulement et du type d'interaction éventuelle avec une paroi en cas d'impact (notamment d'après l'évolution de la géométrie de la bouteille de Mach en fonction du rapport de pressions statiques NPR), de l'ensemble des informations qu'on ne peut déterminer facilement sans étude numérique approfondie.

### 2.6.1 Considérations sur les conditions à l'injection

#### Evolution des profils des variables physiques

Dans le cas d'un orifice sonique, à condition de négliger l'épaisseur de la paroi, on pourra négliger l'effet de couche limite, ce qui permet légitimement de considérer que les conditions à l'intérieur de la chambre sont découplées des éventuelles perturbations en aval. Cet argument physique conforte l'idée de considérer une entrée sonique ou très légèrement supersonique dans la majeure partie de nos simulations (la méthode est alors plus robuste). En revanche, d'après les études menées sur l'influence de la forme des tuyères (voir par exemple Delery [45]), la forme du profil de vitesse et le coefficient de débit qui en résulte au niveau de la section de sortie dépendent à la fois de l'angle du convergent et de la géométrie du col. Plus l'angle du convergent équivalent va croître, plus le profil de la ligne sonique va se déformer. L'épaisseur de la paroi d'une chambre de combustion reste très petite, d'une part par rapport au diamètre de la chambre, et d'autre part par rapport au diamètre retenu pour l'orifice par la norme de certification en vigueur. Aussi, on peut raisonnablement assimiler localement l'orifice à une tuyère tronconique d'angle de convergent  $90^\circ$  et section droite en sortie (ou section arrondie avec un rayon de courbure négligeable par rapport à la longueur représentative de l'orifice). On définit le coefficient de débit comme le rapport du débit réel sur le débit théorique calculé en considérant l'aire de la section de l'orifice et une vitesse uniforme déterminée d'après les lois isentropique 1D. Dans ce cas limite de buse convergente à  $90^\circ$ , le coefficient de débit limite atteindrait une valeur de 0,86 [45] environ (Addy [10] indique un coefficient de débit massique allant de 0,975 à 0,812 pour un angle de buse convergente allant de  $0$  à  $90^\circ$ ) tandis que le profil sonique devrait être proche du profil limite observé pour les tuyères tronconiques (cf. figure 2.8). En revanche, l'effet non-isotherme ne devrait pas modifier de façon conséquente la structuration du jet.

#### Estimation des conditions thermodynamiques au niveau de l'ajutage créé par le percement d'une chambre de combustion

Les paramètres de fonctionnement d'une chambre de combustion d'un moteur d'avion actuel (et futur) ont été estimés (indiquées par EADS-Airbus [communication privée]) comme pouvant typiquement varier dans les plages suivantes :

- Une pression génératrice  $p_o$  variant entre 25 bar et 45 bar,
- Une température génératrice  $T_o$  variant entre 1700K et 2200K,



- Une richesse du mélange de kérosène et d'air variant entre 0,8 et 1,2,
- Un rendement de combustion variant entre 0,5 et 0,95.

ces deux dernières données n'étant qu'une approximation que l'on se donne afin d'obtenir une marge de sécurité relative aux différentes positions d'apparition de l'orifice dans la chambre.

Nous faisons alors les hypothèses suivantes :

- La détente étant très intense entre l'intérieur de la chambre et l'orifice, on considère que la composition du mélange reste figée et correspond à la composition moyenne dans la chambre,
- Le mélange est un gaz parfait,
- On néglige la variation de la chaleur spécifique à pression constante  $C_p$  en fonction de la température, en négligeant la mise en jeu de phénomènes de vibration moléculaire au dessus de 600 K ou de dissociations au-dessus de 1600 K,
- On se donne une valeur constante pour le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  donnée par un paramétrage analytique de tables kérosène-air [45] donnant l'évolution de  $\gamma$  en fonction du rapport  $\phi = \text{débit massique kérosène}/\text{débit massique d'air}$  (une valeur de 0,0674 est retenue pour la stoechiométrie) :

$$\gamma = \frac{a + b\phi}{a - 1 + \phi(b - 1)}$$

avec

$$\begin{cases} a = 3,5 - 2,8 \cdot 10^{-5} T_o + 2,24 \cdot 10^{-8} T_o^2 + \left(\frac{3090}{T_o}\right)^2 \frac{e^{\frac{3090}{T_o}}}{\left(e^{\frac{3090}{T_o}} - 1\right)^2} \\ b = -1,8373 \cdot 10^{-6} T_o^2 + 8,01994 \cdot 10^{-3} T_o + 4,47659 \end{cases}$$

- L'écoulement suit une évolution isentropique et unidimensionnelle, ce qui permet d'utiliser les relations classiques permettant de déterminer la température, la pression et la masse volumique dans la section sonique au niveau de l'ajutage, données respectivement par :

$$\begin{cases} T_e = T_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{-1} \\ p_e = p_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ \rho_e = \rho_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \end{cases}$$

Les plages de variation des paramètres thermodynamiques dans le plan de l'ajutage sont alors les suivantes :

- Une température  $T_e$  à l'ajutage variant entre 1488 K et 1957 K,
- Une pression statique  $p_e$  variant entre 13,7 et 25 bar,
- Un rapport de chaleurs spécifiques  $\gamma_e$  variant entre 1,25 et 1,285.

La figure 2.9 illustre le fait que le rapport des chaleurs spécifiques du mélange de gaz brûlés reste proche de la valeur moyenne  $\gamma = 1,265$  estimée sur la plage de paramètres donnée. Ainsi, pour un même niveau de pression génératrice  $p_o$ , la pression  $p_e$  dans la section de l'ajutage pour un mélange de gaz brûlés issus d'une combustion entre du kérosène et de l'air, sera plus élevée d'à peine 4,5% environ que la pression résultant d'un écoulement composé d'air uniquement et porté à la même température. Par conséquent, si l'on considère que la structure du jet dépend essentiellement du rapport des pressions statiques à l'ajutage, les niveaux de richesse ou de rendement de combustion n'ont finalement que peu d'influence sur notre estimation *a priori* de la structure de l'écoulement. Au cours de l'étude numérique, nous choisissons donc, dans un premier temps, de négliger ces effets et d'étudier directement des jets d'air, pour lesquels

des données expérimentales sont disponibles dans la littérature ouverte. Les effets de gaz brûlés pourront judicieusement être pris en compte en modifiant simplement la valeur du rapport des chaleurs spécifiques dans le plan de l'ajutage de 1,4 à 1,265, et en se redonnant le niveau de température statique dans ce même plan, en fonction de ce rapport et de la température génératrice.

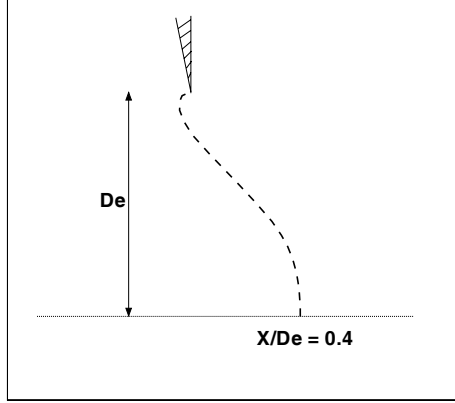


FIG. 2.8 – Schéma du profil sonique en section droite de sortie d'une buse convergente d'angle limite 90°.

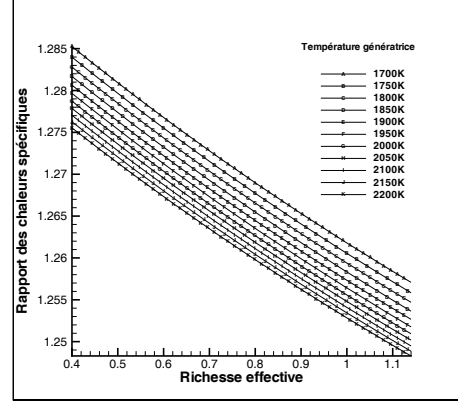


FIG. 2.9 – Evolution du rapport des chaleurs spécifiques du mélange de gaz brûlés en fonction de la richesse effective  $r$  et de la température génératrice  $T_o$ .

### 2.6.2 Estimation des paramètres de l'écoulement ambiant

Les tables US de l'atmosphère standard (Standart Atmosphere) donnent une idée précise de l'évolution de la température et de la pression de l'atmosphère ambiante en fonction de l'altitude  $h$ . Cette évolution peut être approchée dans la troposphère ( $h < 11000m$ ) par les lois d'évolution suivantes :

$$\begin{cases} T_a = 288,5 \left(1 - \frac{h}{44329}\right) \\ p_a = 101325 \left(1 - \frac{h}{44329}\right)^{5,255876} \end{cases} \quad (2.22)$$

L'évolution de la viscosité dynamique  $\mu_a$  est estimée via la loi classique de Sutherland :

$$\mu_a = 1,711 \cdot 10^{-5} \left(\frac{T_a}{273,15}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{110,4 + 273,15}{110,4 + T_a} \quad (2.23)$$

L'estimation des paramètres de l'atmosphère ambiante peut se faire en considérant des conditions de vol entre le niveau de la mer et une altitude de croisière de 10000 mètres. On obtient alors :

- Une pression ambiante  $p_a$  variant entre 1 et 0,26 bar,
- Une température ambiante  $T_a$  variant entre 288 K et 223 K,
- Une viscosité cinématique  $\nu_a$  variant entre  $0,146 \cdot 10^{-4}$  et  $0,354 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ .

### 2.6.3 Bilan : estimation des caractéristiques géométriques du jet

#### Estimation globale des plages de paramètres

Le nombre de Reynolds, qu'il soit évalué à partir du diamètre de l'orifice ou de la longueur de la première cellule de choc, est systématiquement supérieur à  $10^6$ . On pourra considérer que

la couche de cisaillement est turbulente dès sa naissance. D'après les niveaux de pression estimés au niveau du plan de l'ajutage et dans l'atmosphère ambiante, le NPR varie typiquement entre 13,7 et 96. L'écoulement sera donc, dans tous les cas, celui d'un jet très fortement sous-détendu, et présentera un disque de Mach suffisamment large pour interagir directement avec la couche de cisaillement. D'après les corrélations de Ashkenas [14] où les données de Love [106], la géométrie de la bouteille de Mach, qui peut considérablement varier<sup>21</sup> se caractérise par :

- Un angle initial de la frontière libre du jet variant environ entre 35 et 67°,
- Un rayon de courbure initial de la frontière du jet, adimensionné par le diamètre de l'ajutage, variant environ entre 3,5 et 5,5,
- Un disque de Mach positionné à une distance adimensionnée par le diamètre à l'ajutage  $X_{dm}/D_e$  variant entre 3,3 et 9,1 environ,
- Un diamètre du disque de Mach adimensionné par le diamètre de l'ajutage  $D_{dm}/D_e$  variant entre 3,6 et 7,2 environ,
- Une longueur de la zone subsonique s'étendant en arrière du disque de Mach adimensionnée par le diamètre de l'ajutage, variant entre 4,6 et 6,8 environ.

### Bilan : illustration pour le cas nominal

On retient les approximations suivantes :

- La position du disque de Mach est donnée par la corrélation de Ashkenas et Sherman [14] :  $X_{dm}/D_e = 0,67\sqrt{p_o/p_a}$ ,
- Le diamètre du disque de Mach est donné par la corrélation de Antsupov [12] :  $D_{dm}/D_e = \log(p_e/p_a)^{5/2} - 3/4$ ,
- La longueur  $L_s$  de la zone subsonique en aval du disque de Mach est donnée par la corrélation de Glotov [71] :  $L_s/D_{dm} = 1,96(p_e/p_a)^{-0,16}$ , la position de la fin de la zone subsonique étant alors fixée comme égale à  $L_s + X_{dm}$ ,
- La ligne sonique délimitant la zone subsonique en aval du disque de Mach se confond avec un arc, paramétré par un polynôme à l'ordre 2, de pente nulle au point triple et joignant celui-ci au point de l'axe positionné à la fin de la zone subsonique ci-avant évaluée,
- On néglige la courbure du disque de Mach, de sorte que la position du point triple est directement donnée par la position et le diamètre du disque de Mach,
- Le rayon de courbure initial  $R_i$  du choc incident se confond avec un arc de cercle joignant le bord de l'ajutage au point triple, dont le rayon se confond avec le rayon de courbure initial  $R_i$  de la frontière libre du jet, paramétré à partir d'une régression polynomiale des données de Love [106] pour l'évolution de ce rayon en fonction de NPR (noté  $n$  ci-dessous), soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i = 4.E^{-7}n^6 - 4.E^{-5}n^5 + 1,7.E^{-3}n^4 - 3,55.E^{-2}n^3 \\ \quad + 3,799.E^{-1}n^2 - 1,947n + 6,5755 \quad \text{pour } 2,5 < n < 20 \\ R_i = -2.E^{-10}n^6 + 7.E^{-8}n^5 - 1.E^{-5}n^4 + 7.E^{-4}n^3 \\ \quad - 2,7.E^{-2}n^2 + 5,626.E^{-1}n - 0,766 \quad \text{pour } 20 < n < 100 \end{array} \right.$$

Il est alors aisé de se donner *a priori* l'évolution de la géométrie de la bouteille de Mach et de l'extension de la poche subsonique en aval du disque de Mach. La figure 2.10 donne une estimation du type d'interaction possible en cas d'impact, d'une part en fonction de l'altitude de vol  $h$  pour un jeu de conditions génératrices représentatif des conditions réglementaires (AC20-135), soit une pression totale  $p_o = 30$  bar, une température totale  $T_o = 1922$  K, une richesse effective  $r_o$

<sup>21</sup>On notera bien qu'il ne s'agit là que d'estimations, le recours aux corrélations citées étant effectuées à titre indicatif au-delà des limites des plages où elles ont pu être expérimentalement validées (au-delà de NPR=30 pour Love).

proche de la stoechiométrie (richesse multipliée par le rendement de combustion), d'autre part pour une altitude nulle et pour une plage de pression génératrice représentative des moteurs d'avions de ligne présents ou futurs. A la zone *A* (par rapport à l'axe des ordonnées  $X/D_e$ ) correspond un impact au niveau de la première structure de choc. Dans ce cas, la structure de l'écoulement dans la zone d'impact ressemble probablement à celle illustrée par la figure 2.5 (a) si l'impact est normal (avec un disque de Mach fusionnant avec la structure de choc plateau à une distance intermédiaire restant indéfinie) ou par la figure 2.7 si l'élément impacté est oblique par rapport à l'axe du jet. A la zone *B* (entre les lignes  $X_{dm}/D_e = f(h)$  ou  $X_{dm}/D_e = f(p_o)$  et  $X_{dm}/D_e + L_s/D_e = f(h)$  ou  $X_{dm}/D_e + L_s/D_e = f(h)$  (par rapport à l'axe des ordonnées  $X/D_e$ ) correspond un impact au niveau de la poche subsonique en aval du disque de Mach. Pour cette plage de distances, une zone de recirculation des gaz brûlés est susceptible d'apparaître dans la zone d'impact (voir figure 2.5(b)). A la zone *C* correspond finalement un impact au niveau de la zone de transition ou développée du jet, entièrement supersonique (avec apparition d'un choc en plateau, plus faible). Dans ces deux sous-figures est également retranscrit l'évolution du diamètre du disque de Mach sur l'axe des abscisses  $D_{dm}/D_e = f(NPR)$  en fonction de l'axe des ordonnées  $NPR = f(h)$  ou  $NPR = f(p_o)$ , ce qui permet, à partir d'une altitude et d'un niveau de pression génératrice donnés, de se faire directement une idée de l'extension de la zone du jet la plus dangereuse.

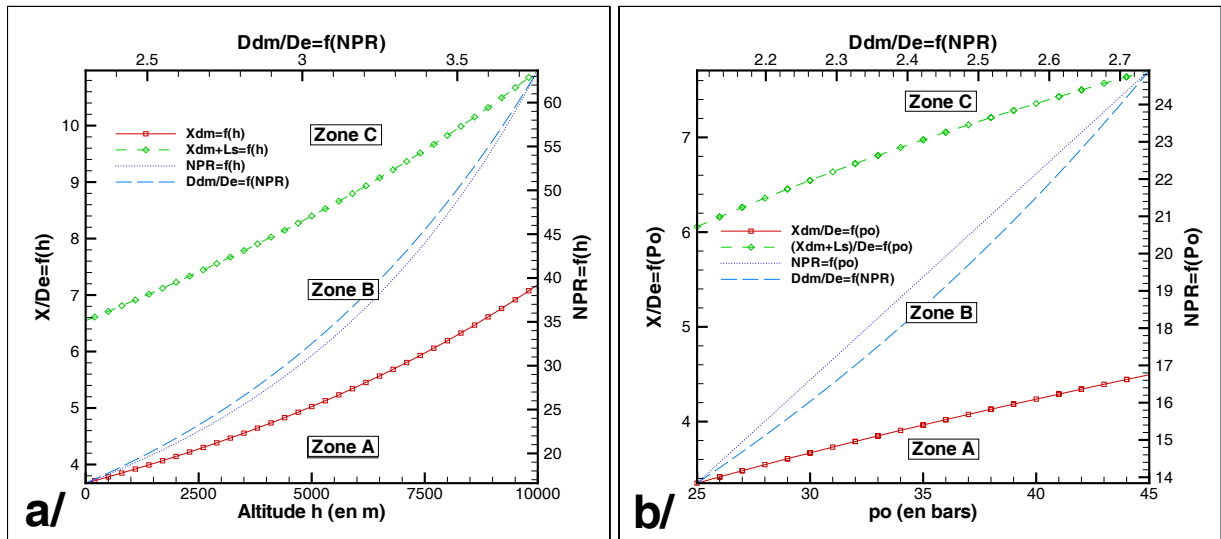


FIG. 2.10 – Evolution des paramètres adimensionnés de la structure du jet.

- (a) : en fonction de l'altitude de vol pour le cas nominal ( $p_o=30$  bar,  $T_o=1922$  K),
- (b) : en fonction de la pression génératrice pour une altitude nulle, ( $T_o=1922$  K).

$X_{dm}$  : Position du disque de Mach par rapport à la section de l'orifice,  $L_s$  : Longueur de la zone subsonique en aval du disque de Mach,  $D_{dm}$  : Diamètre du disque de Mach,  $NPR$  : Rapport des pressions statiques à l'ajutage,  $X/D_e$  : Distance par rapport à l'ajutage adimensionnée par le diamètre de l'ajutage,  $p_o$  : Pression génératrice,  $h$  : Altitude.

Si l'on considère que le risque de percement de la chambre de combustion est le plus important dans la phase de décollage (altitude  $h = 0$ ), il est alors possible d'estimer l'aspect de la structure proche du jet que nous sommes susceptible de voir apparaître. La figure 2.11 illustre cette configuration pour le cas nominal ( $p_o=30$  bar,  $T_o=1922$  K). La géométrie de la structure de choc et de la ligne sonique issue du point triple est déterminée analytiquement selon les hypothèses ci-avant énoncées, tandis que la frontière de la couche de cisaillement est ajoutée "à la main" avec pour seule contrainte la longueur de la zone potentielle, adimensionnée par le diamètre de

l'orifice, fixée à une valeur de  $\frac{L_{npa}}{D_e} = 5$ . Bien qu'il soit possible de se faire *a priori* une idée de l'extension des différentes zones caractéristiques de ce jet, on constate les principales limitations suivantes :

- La géométrie de la structure de choc reste mal définie, en particulier quand NPR est grand. L'approximation de l'aspect du choc incident par un arc de cercle ne permet même plus de rendre compte de l'évolution croissante de l'incidence de la frontière libre du jet dès que NPR est supérieur à quinze. Ceci nous indique, d'une part que la courbure du choc incident évolue fortement par interaction directe avec la couche de cisaillement, d'autre part que la courbure du disque de Mach ne peut être négligée. Il en résulte notamment une grande incertitude sur la localisation *a priori* du point triple.
- L'extension et l'angulation du choc réfléchi restent inconnues. Notre capacité à prévoir l'évolution de la couche de cisaillement en aval de la structure de choc reste néanmoins conditionnée par ces données aussi primordiales que le positionnement du disque de Mach.
- La structure interne de la couche de cisaillement, après l'interaction particulièrement complexe avec la structure de triple choc reste absolument inconnue.
- De même, aucune information n'est donnée dans la littérature pour préciser l'évolution de la structure externe de la couche de cisaillement. Notons que des tourbillons longitudinaux de Görtler ont probablement été présents au cours de la majorité des études expérimentales qui ont été menées jusqu'à présent. L'effet de cette interaction et l'effet de la différence de la chute de pression totale à travers le disque de Mach et le choc réfléchi ne sont pas précisés dans la littérature.
- Enfin, il est possible d'estimer l'état du régime de similitude vers lequel le jet tend dans la zone lointaine. Cependant, les effets de compression et de détente sur l'évolution de la couche de cisaillement entourant la poche subsonique restent inconnus.

A partir de cette étude phénoménologique, basée sur la synthèse des résultats expérimentaux rapportés dans la littérature scientifique, nous sommes en mesure de décrire grossièrement la structure du jet libre, mais un grand nombre d'aspects restent très mal documentés. Nous allons désormais tenter, par prévision numérique, de préciser le comportement pseudo-stationnaire en moyenne des jets fortement sous-détendus, en présentant tout d'abord l'ensemble des modèles et des outils numériques que nous avons choisis *a priori* pour le bon compromis qu'il représente, entre robustesse, précision et coût de la simulation.

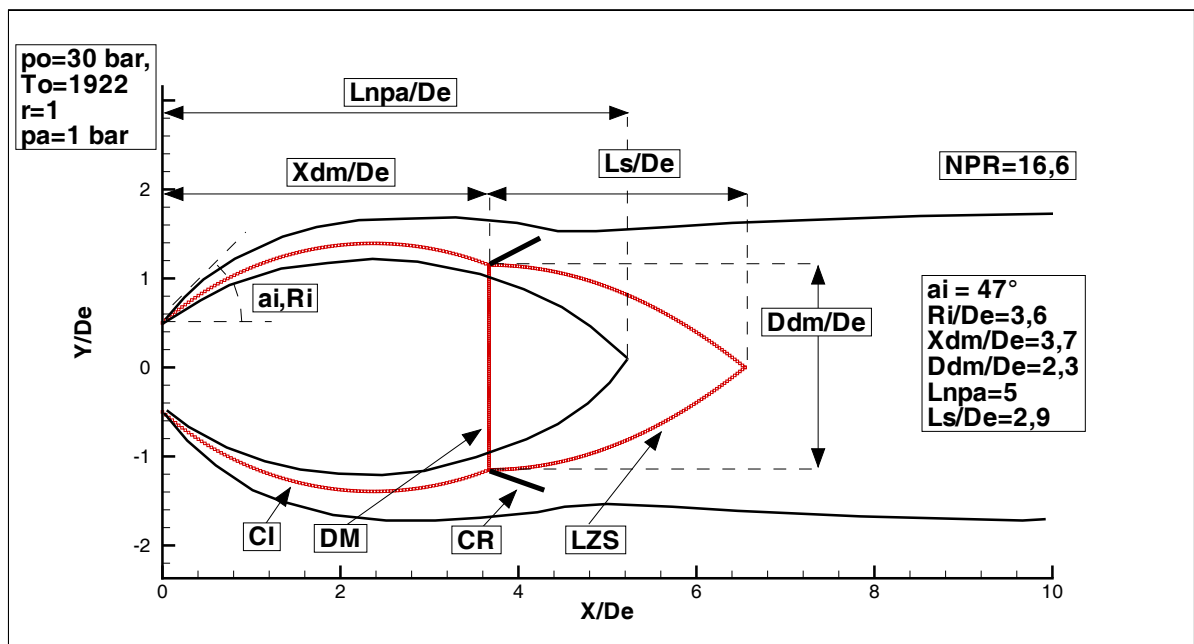


FIG. 2.11 – Estimation de l'aspect de la structure proche du jet susceptible d'apparaître en cas de percement d'une chambre de combustion lors d'une phase de décollage (pour une pression génératrice de 30 bar).

**CI** : Choc incident, **DM** : Disque de Mach, **CR** : Choc réfléchi, **LZS** : Ligne délimitant la zone subsonique,  $X_{dm}/D_e$  : Position du disque de Mach, adimensionnée par le diamètre de l'orifice,  $L_s/D_e$  : Longueur de la zone subsonique, adimensionnée par le diamètre de l'orifice,  $D_{dm}/D_e$  : Diamètre du disque de Mach, adimensionné par le diamètre de l'orifice,  $L_{npa}/D_e$  : Longueur de la zone potentielle, adimensionnée par le diamètre de l'orifice.



Deuxième partie

Modélisation et outils numériques





La décharge d'un mélange kérosène-air en cours de réaction, est un écoulement particulièrement complexe (multiphasiques, multispèces, turbulent, supersonique, potentiellement réactif...), qu'on ne saurait étudier directement dans son ensemble. Non seulement une telle simulation globale nécessiterait des moyens de calculs évidemment encore hors de portée de toute application industrielle viable, mais les modèles décrivant chaque aspect du comportement d'un tel jet doivent encore être testés pas à pas, en augmentant progressivement le niveau de complexité, afin que les limitations intrinsèques à chaque sous-modèle puissent être évaluées de façon pertinente. Néanmoins, au vu de l'étude phénoménologique présentée précédemment, certains de ces aspects, particulièrement délicats à modéliser, apparaissent n'avoir qu'un rôle secondaire dans la structuration globale du jet. Par conséquent, nous choisirons de ne représenter l'écoulement que comme un fluide monoespèce (correspondant soit à de l'air, soit à un mélange de gaz brûlés), issus d'un orifice parfaitement circulaire (conformément à la norme en vigueur). Une brève introduction à l'état de l'art de la simulation de tels jets (cf. chapitre 3) confirme par ailleurs qu'aucune modélisation plus avancée n'a véritablement été tentée pour les simuler. Deux principaux constats se dégagent de ce tour d'horizon bibliographique. D'une part, la quasi-inexistence de données expérimentales détaillées sur la structure de la turbulence et la complexité des interactions (choc/turbulence, forte détente...) ont contraint les auteurs de ces études à se borner à ne pouvoir faire que quelques comparaisons globales (typiquement sur l'aspect géométrique de la structure de choc ou sur l'évolution axiale de la pression statique ou du nombre de Mach) à partir, au mieux, de modèles de turbulence relativement simples et uniquement pour des niveaux de détente bien en dessous des niveaux que l'on devrait considérer dans le cas du percement d'une chambre de combustion. D'autre part, les difficultés d'ordre numérique, que l'on peut rencontrer dans la majorité des simulations d'écoulements compressibles, semblent être particulièrement accrues dans cette configuration d'écoulement, et ce, d'autant plus, lorsque le jet est sonique et que le rapport de détente est élevé. Une attention particulière doit ainsi être portée sur le choix et l'évaluation des méthodes d'évaluation des flux convectifs, sur la gestion du maillage et la prescription des conditions limites.

Notre étude numérique prolonge naturellement les études les plus abouties déjà menées sur le sujet utilisant une approche RANS basée sur l'utilisation d'un modèle  $k - \epsilon$  modifié pour prendre en compte les principaux effets de compressibilité. Cette partie est dédiée à la présentation des outils numériques retenus pour mener cette étude. On rappelle brièvement (cf. chapitre 4) les principes de bilans, les lois phénoménologiques de fermeture des flux ainsi que les principes de moyenne permettant d'aboutir au système d'équations de Navier-Stokes sous leur forme intégrale et conservative en régime compressible, avant d'introduire plus en détails les principales propositions de corrections de compressibilité qui ont pu être faites à ce jour pour le modèle  $k - \epsilon$  qu'on choisit de coupler à ce système. Ce type de modélisation des effets non-linéaires d'origine convective des fluctuations des variables de l'écoulement par de simples termes de diffusions additionnels qui restent exprimés par rapport aux grandeurs moyennes de l'écoulement reste encore aujourd'hui l'outil de modélisation privilégié dans le cadre général d'applications industrielles. Il offre en effet une certaine simplicité de mise en oeuvre et permet de restituer, du moins qualitativement, les principales caractéristiques des écoulements rencontrés dans la plupart des situations. Le modèle  $k - \epsilon$ , en particulier, en dépit des limitations liées aux principes réducteurs qui ont conduit à son élaboration (turbulence à l'équilibre en couche limite) et qui ont été abondamment documentés dans la littérature, constitue encore aujourd'hui un des meilleurs compromis, notamment pour simuler les écoulements cisailés simples, évitant de recourir à une modélisation au second ordre ou à des simulations des grandes échelles, beaucoup plus coûteuses en temps de simulation. Certes, on pourra s'attendre à s'écarter notablement de la réalité physique dans la zone proche du jet fortement sous-détendu qui est fortement anisotrope ou dans

les zones de chocs où la turbulence n'est plus à l'équilibre. Le calcul, via ce modèle, du transport d'échelles turbulentes de longueur et de vitesse, constitue néanmoins un moyen simplifié de réintroduire un effet de mémoire sur la turbulence et une dépendance locale des tensions de Reynolds au champ moyen, suffisamment représentatifs pour nous permettre de capturer globalement la structure moyenne de l'écoulement, dès lors que des effets de compressibilité sont pris en compte. A ce jour, il apparaît d'ailleurs comme le modèle au premier ordre à deux équations de transport le plus approprié pour incorporer de telles corrections de compressibilité. Bien que d'importants efforts restent à fournir pour améliorer la modélisation de la turbulence compressible, tant la représentation des nouveaux modes de transferts énergétiques par les fluctuations de masse volumique reste délicate à interpréter et vérifier expérimentalement, les mécanismes principaux identifiés (dissipation compressible, pression-dilatation, production enthalpique et/ou flux de masse turbulent) ont déjà fait l'objet de propositions de modélisation. Elles sont ici rappelées dans le but d'étudier par la suite la pertinence de leur utilisation pour la simulation des jets fortement sous-détendus.

Les bases de la méthode numérique implantée dans le code utilisé, N3SNATUR [107], sont ensuite développées dans le chapitre 5. La considération d'un régime d'écoulement compressible confère à la pression un nouveau rôle thermodynamique (en plus de son rôle mécanique joué en régime incompressible) qui, par sa fermeture dans les termes convectifs via l'équation d'état, induit un fort couplage du système d'équations. Par ailleurs, la prise en compte d'une masse volumique variable renforce la non-linéarité de ces équations. Une attention particulière doit ainsi être portée sur la robustesse de la méthode numérique. Les principes sous-jacents à l'évaluation des flux convectifs, point clé de la résolution du système qui, à grands nombres de Mach, est essentiellement de nature hyperbolique, sont tout particulièrement développés. Une représentation correcte du comportement physique du fluide compressible impose en effet de propager l'information à une vitesse finie dans les directions caractéristiques, et non plus à vitesse infinie dans les directions de l'écoulement, comme on pourrait le faire en régime incompressible. Nous présentons en particulier les solveurs de Roe et de Van Leer, adaptés pour approcher les vitesses d'ondes, dans des directions physiquement significatives, afin de simuler correctement les structures physiques de "pseudo-discontinuités" qui apparaissent au sein de notre écoulement. Les spécificités du solveur implanté dans N3SNATUR, qui reposent sur l'utilisation d'une formulation mixte volumes finis/ éléments finis seront précisées.

Le problème des conditions limites et celui du choix des domaines de calculs sont ensuite abordés au chapitre 6. Souhaitant proposer une stratégie globale d'obtention de solutions stationnaires à moindre coût, on s'abstrait de conditions complexes à prescrire au niveau de la section de l'orifice et des parois pouvant la délimiter. Au vu de l'absence de bases théoriques suffisamment sérieuses (à notre connaissance) pour choisir les niveaux des variables pertinentes sur les frontières libres du domaine de calcul où d'importants gradients sur toutes les variables sont rencontrés, on se contente par ailleurs de s'appuyer simplement sur la théorie de propagation caractéristique unidimensionnelle de l'information physique. La pertinence de ces choix sera naturellement évaluée au cours de l'étude numérique.

Finalement, le chapitre 7 est consacré à la présentation des outils de gestion du maillage. On y distingue les méthodes de génération du maillage initial (réalisé via le mailleur ICEMCFD) de la méthode choisie pour réadapter ce maillage. Notre intérêt se portant en premier lieu sur la qualification d'une procédure d'obtention d'une structure pseudo-stationnaire en configuration libre, et afin de ne pas trop léser les temps de calcul, le choix de coupler complètement cette méthode avec le code de calcul pour rendre le maillage adaptatif n'a pas été retenu. L'algorithme choisi permet néanmoins, à partir d'une solution initiale, d'améliorer la distribution des éléments du maillage afin de minimiser l'erreur d'interpolation. Plusieurs cycles de réadaptation

de maillage à partir de solutions suffisamment convergées nous permettront alors, tout en diminuant progressivement le nombre d'éléments requis, d'améliorer nettement la précision de la solution.



## Chapitre 3

# Introduction à la simulation des jets sous-détendus

### 3.1 Difficultés numériques

Les premières tentatives de simulation numérique des jets sous-détendus ont naturellement reposé sur la méthode des caractéristiques [6][65][31]. Cette méthode a donné des résultats intéressants pour évaluer globalement la forme des structures de chocs en champ très proche dans le cas des jets faiblement sous-détendus. Cependant, son utilisation étant limitée par nature à la prévision des zones entièrement supersoniques, elle ne peut être appliquée, pour déterminer la structure d'un jet sous-détendu, dès lors que la réflexion du choc incident sur l'axe est irrégulière. La grande majorité des études numériques portant sur le jet fortement sous-détendu sont ainsi essentiellement basées sur la résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes en régime laminaire. Même si la modélisation du jet est restreinte au niveau élémentaire où seuls les phénomènes convectifs sont pris en compte, il s'avère qu'un nombre important de difficultés numériques apparaissent en filigrane dans l'ensemble de ces études.

Tout d'abord, la nécessité de capturer précisément, à la fois des discontinuités de choc et des lignes de glissement, pose le problème délicat de choisir une méthode d'évaluation des flux numériques qui soit à la fois robuste et suffisamment précise. Le recours à des schémas centrés en différences finies nécessite d'ajouter artificiellement, près des zones de discontinuités, une dissipation numérique très délicate à manipuler. Elle a pu donner des résultats intéressants comme le démontrent notamment les études de Dash et Wolf [57][58] avec leur code parabolisé. Le recours à une approche structurée offre par ailleurs des possibilités de vectorisation particulièrement intéressantes pour paralléliser les algorithmes ou décomposer les matrices en approche implicite, pouvant conduire à des temps de restitution parfois exceptionnellement courts (solution convergée pour un jet à NPR=3,4 en moins de 30 secondes sur un supercalculateur NEC-SX-2N d'après Tsubakishita et al.[175]). Il est cependant désormais reconnu que la méthode des volumes finis couplée à une méthode de résolution du problème de Riemann (cf. chapitre 5.2.2) offre une bien meilleure résolution, tout en permettant un traitement plus naturel des conditions aux limites. Il reste cependant très délicat dans cette approche de déterminer le solveur le plus approprié, dans la mesure où ses performances dépendent fortement de la gestion du maillage. En ayant recours à une méthode de maillage adaptatif pour la simulation d'un impact proche d'un jet faiblement sous-détendu, Satyanarayana et Balakrishnan [148] ont par exemple mis en évidence que, même si l'utilisation du schéma de Roe (cf. chapitre 5.2.4) impliquait une convergence plus longue, il permettait d'obtenir dans leur cas une précision équivalente à celle obtenue avec des schémas de découpage de flux tels que AFVS ("Acoustic FLux Vector Splitting") ou KFVS

("Kinetic Flux Vector Splitting"), schémas plus sophistiqués que les schémas plus classiques de découpage de flux de Steger et Warming ou de Van Leer (cf. chapitre 5.2.6). Par ailleurs, la qualité de la solution obtenue peut fortement dépendre de la méthode retenue pour l'extension au second ordre spatial. Obayashi et Gavali [120] vérifient en effet que le limiteur "minmod" est trop dissipatif et proposent un nouveau limiteur différentiable qui leur permet d'améliorer sensiblement la qualité de leur solution. Globalement, on pourra retenir que, tant que le niveau de détente reste modéré et que l'interaction de la structure de choc avec la turbulence reste modérée, l'ensemble des schémas se comportent correctement et semblent permettre de prévoir avec une bonne précision les configurations d'impact proche. Lors de l'étude de l'impact d'un jet supersonique faiblement sous-détendu, sans prise en compte de la turbulence, Adrianov et al. [11] démontrent par exemple la possibilité de prévoir correctement les fréquences des oscillations de la pression au point d'impact (sur l'axe) du plateau, avec cependant une légère surrestimation (5 à 7%) de l'amplitude des pics dans le spectre des fluctuations de pression. Kim et Chang [93] parviennent même à prédire le profil de pression sur la plaque impactée dans le cas d'une sous détente faible (NPR=1,2) et un jet supersonique (Me=2,2) avec une erreur relative maximale de 10% par rapport aux résultats de Lamont et Hunt [98]. Il peut être observé dans leur cas une tendance à sous-estimer les pics de pression, et ce d'autant plus que l'impact se dévie de la normale. En revanche, dès que le rapport de détente est plus élevé, la robustesse nécessaire pour le schéma numérique est susceptible de mettre en défaut la précision requise pour capturer finement l'angulation des structures de choc, tandis qu'il devient nécessaire de prendre en compte la turbulence. Force est de constater que le nombre d'auteurs ayant qualifié ces effets est peu élevé. D'après Alvi et al. [67], une imprécision dans la capture du saut de pression à travers le disque de Mach semble pouvoir rapidement induire une erreur importante sur les profils de pression à la paroi. Ces auteurs mentionnent notamment la nécessité de recourir à une méthode d'adaptation du maillage afin de pallier le manque de précision des schémas disponibles dans ce cas de forte détente. Notons alors que la mise en place et l'efficacité d'une telle procédure ne sont pas immédiates. D'une part, la nature instationnaire même du phénomène peut fortement limiter l'application d'une telle procédure. La moindre perturbation en amont peut rapidement induire en effet un décalage de toute la structure de choc en aval. D'autre part, si le maillage est trop raffiné près des discontinuités, les fonctions limitantes utilisées dans toute méthode au second ordre spatial peuvent agir localement comme des "switchs", faisant périodiquement basculer le schéma numérique entre deux formulations [170], interdisant toute convergence vers une structure stationnaire. Notant par ailleurs qu'une couche de mélange simulée est potentiellement instable à toute longueur d'onde supérieure à sa largeur [77], il devient alors particulièrement délicat, dans un tel écoulement, de distinguer les instabilités numériques des instabilités physiques [78].

Un problème récurrent, même s'il n'est que rarement explicitement mentionné, est celui de la prescription des conditions limites. Classiquement, la majorité des auteurs introduisent des conditions de type mixte pour les frontières séparant le domaine de calcul de l'état infini (basées sur des relations de compatibilité), qui reviennent à prescrire un niveau de pression uniquement dans les zones subsoniques de l'écoulement. L'erreur introduite par une telle méthode, lorsque une poche subsonique, normalement suivie d'une zone supersonique, se positionne au niveau de la sortie, peut être importante. Aussi, la plupart des études reposent sur l'utilisation de domaines de calculs très étendus (70 fois le diamètre de la buse dans la direction longitudinale et 20 fois ce diamètre dans la direction radiale pour Gribben et al. [25] par exemple). Même si le maillage est progressivement déraffiné vers la frontière de sortie, cette approche peut rapidement devenir très handicapante en terme de coût calcul. Travaillant sur des domaines moins étendus, Prudhomme et Haj-Hariri [60] introduisent l'idée intéressante de diminuer l'intensité des ondes numériques

réfléchies à la sortie du domaine de calcul en prescrivant un niveau de pression différent au sein du noyau subsonique du jet, niveau correspondant à la pression statique calculée au sein de la couche de cisaillement supersonique qui l'entoure. Cette solution ne remédie cependant que partiellement au problème dans la mesure où l'écoulement extérieur à proximité de la frontière du jet, entraîné par celui-ci, nécessiterait également un traitement particulier. Afin de diminuer les sources de perturbation numérique, la majorité des auteurs s'accordent par ailleurs sur la nécessité d'imposer un léger co-écoulement (à nombre de Mach égal à 0,05) et de toujours imposer un écoulement légèrement supersonique dans le cas où un jet sonique est simulé (nombre de Mach égal à 1,01)[150][39][40]. Afin d'éviter le problème du choix de prescrire une condition partiellement réflexive, Speares et al. [170] préfèrent imposer une paroi sur la frontière d'entrée entourant la buse. Il resterait à vérifier que les propriétés de l'écoulement ambiant entraîné n'ont pas d'influence majeure sur la structuration du jet.

De même, le problème de l'initialisation est rarement abordé. La majorité des calculs sont initialisés en prescrivant les valeurs des variables égales à celles qui sont imposées pour le co-écoulement. Speares et al. [170] préconisent une initialisation du profil imposé à l'entrée du domaine de calcul, sur toute la longueur de ce domaine de calcul, et une initialisation du reste du domaine, plus loin de l'axe, aux conditions de sortie. Ce choix peut *a priori* sembler judicieux pour éviter de propager trop "brutalement" des perturbations numériques dans la direction radiale lors de la phase pseudo-stationnaire de simulation, et accélérer de façon évidente la convergence. Leurs résultats (obtenus en utilisant un schéma HLLC pour l'évaluation des flux hyperboliques) correspond néanmoins à un cas de jet modérément sous-détendu. L'efficacité de ce procédé dans le cas d'un NPR plus important et de l'utilisation d'autres solveurs n'est pas aussi évidente.

## 3.2 Modélisation de la turbulence dans les jets sous détendus

L'histoire de la turbulence dans les jets sous détendus commence probablement en 1984 avec Dash et Wolf [57][58]. Testant le modèle  $k - \epsilon$  de Jones et Launder[86], modifié pour l'axisymétrie et le faible cisaillement [1], et le modèle  $k - \omega$  de Spalding [155], ils déterminent que le modèle de Spalding permet une meilleure prévision de la structure du jet (cas d'un jet rectangulaire). Dans leur cas, une correction sommaire est ajoutée pour prendre en compte les effets de compressibilité, consistant à pondérer l'expression de la viscosité turbulente par un facteur correctif, fonction du nombre de Mach turbulent, mais simplement calé pour pouvoir reproduire les taux d'évasement observés pour les couches de mélange supersoniques étudiées par Birch et Eggers [61] (1973). Limités par un code parabolisé (SCIPVIS) (non prise en compte des effets elliptiques, nécessité de spécifier la distribution de pression à la frontière des zones supersoniques) et utilisant une méthode simplifiée pour le calcul des zones subsoniques, ils ne peuvent cependant tester ces modèles que dans des cas de jets supersoniques présentant des niveaux de sous-détente peu élevés.

Chuech et al.(1989) [150] adoptent une approche similaire en basant cette fois-ci la correction de compressibilité sur le nombre de Mach convectif (associé aux larges structures de la couche de cisaillement), correction introduite par Papamoschou et Roshko (1986)[128]. Bien que présentant des résultats encourageants pour des faibles rapports de pression, cette correction semble insuffisante car incapable de décrire précisément la complexité des mécanismes d'interaction observable lorsque NPR est plus important.

Abdol-Hamid et Wilmoth [7] (1989) choisissent d'appliquer une approche multi-échelles, basée sur le modèle  $k - \epsilon$  pour tenter de prendre en considération, en plus des phénomènes de compressibilité, le déséquilibre des transferts d'énergie cinétique turbulente entre les différentes



échelles de turbulence. La prise en compte d'un tel déséquilibre semble judicieuse puisque la structure de la turbulence est profondément modifiée lors de l'interaction entre la couche de cisaillement et la structure de choc, et semble permettre, d'après ces auteurs, d'obtenir une nette amélioration de la qualité de la prévision numérique, par rapport à celle accessible par un modèle à une échelle. Cependant, leur modèle ne semble pas avoir donné suite à des développements majeurs, dans le cadre de la simulation des jets fortement sous-détendus. Il semble en effet particulièrement délicat de décrire finement ces mécanismes de transferts pouvant apparaître et de calibrer précisément l'ensemble des nouvelles constantes introduites pour le couplage entre les multiples systèmes d'équations  $k - \epsilon$ .

Cumber et al. [39][40] (1994) ont testé la correction de Sarkar [143] pour la dissipation compressible additionnelle ajoutée dans le modèle  $k - \epsilon$  (avec prise en compte de la dissipation totale pour fermer la viscosité turbulente), réécrit dans le formalisme de Favre (Jones et Whitelaw [87]), sur des jets modérément et fortement sous-détendus. Globalement, on peut constater, dans le cas modérément sous-détendu, que le modèle standard sous-estime largement le niveau de vitesse sur l'axe tandis que le modèle corrigé permet de le capturer beaucoup plus correctement, notamment dans le champ lointain. En ajustant la constante  $C_{\epsilon 2}$  du modèle de Rodi (1980) de 1,92 à 1,8 (dans la limite des incertitudes introduites pour la détermination de cette constante) et en corrigeant le décalage introduit par la présence d'une couche limite turbulente non-calculée, mais nécessairement présente dans la tuyère de Seiner et Norum (1979) (dont ils estiment l'épaisseur à 2% pour ce jet à NPR=1,45 et Me=2), ils parviennent même à réduire suffisamment le taux de mélange dans la couche de cisaillement pour capturer correctement les variations de pression et de vitesse sur l'axe au sein des six voire sept premières cellules de choc, même si l'amplitude de ces oscillations reste surrestimée, notamment au sein de la première cellule. Le cas du jet sonique (même faiblement sous-détendu) semble en revanche plus délicat à prévoir et interpréter. Pour NPR=1,2 (comparaison avec le jet sonique de Chuech et al. [150](1989)), Cumber et al. [40] rapportent que l'évolution de la vitesse axiale est correctement prédite dans le champ lointain grâce à la correction de compressibilité, mais qu'un net décalage est observable dans la zone de transition. Alors que le modèle standard surrestime la décroissance des oscillations de vitesse sur l'axe, le modèle corrigé semble les sous-estimer. Pour NPR égal à 1,88 (comparaison avec les résultats de Birch et al. [9](1984) pour un jet sonique de gaz naturel), l'amélioration apportée par la correction semble d'ailleurs moins probante. Dans ce cas, le modèle standard semble mieux décrire la décroissance de vitesse dans le champ lointain. Pour le cas d'un jet fortement sous-détendu, Cumber et al. [39] vérifient à nouveau la grande amélioration que permet le modèle corrigé dans le champ lointain pour prédire la décroissance des vitesses ou de fraction massique (comparaison avec les résultats de Birch et al. [8] pour un jet sonique de gaz naturel de NPR allant de 3,2 à 37,6). Cependant, même si la position et le diamètre du premier disque de Mach sont correctement prédits, le modèle corrigé n'améliore sensiblement la prévision du champ de vitesse que dans la zone proche du jet (comparaison avec les résultats de Donaldson et Snedeker (1971) [51]) en diminuant sensiblement le taux d'épanouissement de la couche de mélange (et augmentant ainsi la longueur de la zone potentielle). Au delà du champ proche, dans la zone de transition, la correction de Sarkar tend à sous-estimer largement le taux d'épanouissement du jet et dégrade les résultats.

Pao et Habdol-Hamid [126], à l'aide du code parabolisé PAB3D, vérifient ces tendances. Il semble globalement possible de décrire correctement la décroissance de l'amplitude des oscillations de pression sur l'axe d'un jet faiblement sous-détendu, mais un déphasage est progressivement observé : 1/6 de longueur d'onde avec la correction de Wilcox (1991) [172] contre 1/2 avec la correction de Sarkar (1991) [142] tandis que l'amplitude du premier pic de pression reste sous-estimée d'environ 15%.

Huynh et Taghavi [80](1998) ont utilisé le code de calcul Navier Stokes NPARC, afin de tester les huit modèles inclus dans ce code sur le cas test d'un jet rectangulaire sonique faiblement sous-détendu ( $M_e = 1,33$  pour  $NPR=1,57$ ), soit quatre modèles algébriques (Thomas, Baldwin-Lomax, Thomas et Baldwin-Lomax et le modèle de renormalisation RNG), deux modèles de fermeture à une équation (Baldwin Barth et Spalart-Allmaras) ainsi que deux modèles de fermeture à deux équations (Chien  $k - \epsilon$  et Wilcox  $k - \omega$ ). En terme d'isocontours de coefficient de pression en différentes positions en aval de la sortie du jet, seuls les modèles de Thomas, Baldwin-Barth et Chien  $k - \epsilon$ , donnent des résultats comparables aux résultats expérimentaux, et seuls ces deux derniers modèles semblent permettre d'atteindre un état stationnaire. Le modèle  $k - \epsilon$  de Chien surestime largement l'entraînement du jet, ce qui conduit Huynh et Taghavi [80] à donner la préférence au modèle de Baldwin-Barth. On notera cependant que le NPR utilisé reste peu élevé et qu'aucun effet de compressibilité n'a été envisagé pour corriger la tendance, classiquement observée pour le modèle  $k - \epsilon$ , à surestimer les niveaux de turbulence. Aussi devons-nous considérer les conclusions de cette étude comme difficilement généralisables.

Finalement, l'étude numérique la plus approfondie sur le jet sonique libre sous-détendu, est probablement celle réalisée par Birkby et Page (2001) [59]. Ces auteurs confirment tout d'abord l'absence complète de données pertinentes sur les champs de vitesse et champs turbulents pour cette configuration. Pour le cas du jet faiblement sous-détendu, ils vérifient la décroissance trop rapide de la taille des cellules lorsque les corrections de compressibilité évoquées ci-dessus sont utilisées, même si l'espacement reste relativement bien capturé (ce qui est naturel dans la mesure où la contrainte de cisaillement reste peu élevée au sein du coeur potentiel). Ils mettent surtout en évidence, par une étude du régime instationnaire, le problème d'interaction du disque de Mach avec la couche de cisaillement. Dans leur étude (jet sonique à  $NPR = 3,17$ ), le disque de Mach devient déjà suffisamment large pour interagir avec la couche de cisaillement née autour de la première structure, interaction qui déstabilise totalement le jet. Ces auteurs vérifient que les structures de choc n'existent alors plus en aval du premier disque de Mach, du moins de manière stationnaire.

Le couplage entre la modélisation de la turbulence et la méthode numérique, pour le cas du jet sous-détendu apparaît finalement plus cruciale dans le cas de l'impact du jet sous-détendu. Alvi et al. [67](2002) ont récemment étudié le cas d'un jet d'air à  $NPR=5$  impactant normalement une paroi plane située à une distance de trois diamètres de buse (au niveau de la zone subsonique en aval du disque de Mach). Utilisant un solveur RANS, ils mettent en évidence la grande sensibilité du profil de pression observé sur la paroi à l'extension calculée du disque de Mach (et donc indirectement à la précision avec laquelle on peut évaluer ce diamètre). Dans ce cas où l'impact est très proche (et donc où l'importance des effets de compressibilité sur la croissance de la couche de cisaillement est moins flagrante), la forme de la structure de choc au sein du jet semble ne dépendre que très peu du modèle de turbulence utilisé. Alvi et al. [67] vérifient en effet que l'utilisation d'un modèle SARC (Spalart Allmaras modifié pour prendre en compte les effets de courbure et de rotation) permet d'obtenir quasiment les mêmes résultats qu'un modèle SST (basculé entre  $k - \omega$  et  $k - \epsilon$  selon respectivement la proximité ou non d'une paroi). Le disque de Mach prévu numériquement apparaît en fait à une position légèrement plus proche de la paroi que l'expérience ne le montre. Ceci conduit à une sous-estimation de l'extension longitudinale de la bulle de recirculation, mais ne semble guère influencer l'extension radiale de celle-ci. Ils remarquent cependant que le modèle de Spalart induit une nette surestimation du pic de pression à la paroi, tandis que la correction de courbure permet de ramener l'erreur relative maximale à 30% au niveau du plateau de pression (zone s'étendant à partir de l'axe d'impact et correspondant à une pression quasi constante et faible en aval de la bulle de recirculation). Leur étude met finalement en avant le manque de compréhension fine du comportement de l'écoule-

ment proche du disque de Mach. On comprend en effet que sous-estimer l'extension du disque de Mach revient à exagérer l'importance du saut de vitesse et à sous-estimer la distance par rapport à l'axe où la couche de cisaillement impacte la paroi. L'effet de l'interaction de la turbulence avec ce choc reste cependant très délicate à interpréter. Par ailleurs, l'influence de l'introduction de correction d'effets de courbure reste difficile à évaluer dans leur cas d'étude, dans la mesure où un manque de précision numérique semble avant tout être à l'origine du décalage de la structure de choc (aucune méthode de réadaptation de maillage n'était utilisée (ou utilisable?) dans ce cas). Notons que ces auteurs indiquent modestement que l'erreur, observée dans les résultats présentés (à  $NPR=5$ ), augmente rapidement avec l'intensité de l'interaction. L'analogie de Bousinesq, dans cette configuration précise, semblerait ne plus pouvoir légitimement être applicable. La distribution particulièrement inégale des contraintes normales à la paroi suggère qu'il serait judicieux, non seulement d'utiliser un modèle dont le calage ne repose pas implicitement sur une distribution isotrope de ces niveaux de contraintes, mais aussi d'évaluer plus précisément ces contraintes en ne les reliant plus simplement de façon linéaire au champ de déformation moyenne.

# Chapitre 4

## Modélisation aérothermique retenue

### 4.1 Principes physiques et équations de conservation pour un fluide monoespèce monophasique compressible

#### 4.1.1 Hypothèses générales

Pour cette étude, on se place naturellement dans le cadre de la *mécanique des milieux continus*. Même pour les plus hautes altitudes de vol envisagées (10000 m environ), on pourra considérer que le libre parcours moyen des molécules reste largement inférieur aux dimensions caractéristiques de l'écoulement et tout effet de gaz raréfié pourra être négligé (nombre de Knudsen très petit). L'élément infinitésimal mathématique correspondra ainsi physiquement à une cellule fluide infiniment petite par rapport à l'échelle macroscopique, mais dont le volume renferme toujours un nombre suffisamment important de molécules. On pourra ainsi toujours y définir statistiquement un état constant pendant les échelles de temps moléculaires (masse moyenne sur l'unité de volume  $\rho$ , vitesse barycentrique moyenne  $\vec{V}$  et énergie interne moyenne  $e$ ). Le milieu est considéré comme *fluide*, le champ de déformation macroscopique restant continu sous l'action du champ de contraintes. Les forces massiques (forces de Coriolis, forces électromagnétiques ou force de pesanteur) seront considérées comme totalement négligeables. De même, les flux radiatifs entre zones à différentes températures ne seront pas pris en compte. Enfin, on supposera que l'équilibre thermodynamique est toujours établi, ce qui revient à considérer que les temps caractéristiques du mouvement du fluide restent toujours beaucoup plus grands que les temps de relaxation des molécules vers leur niveau d'équilibre énergétique. Une unique température d'équilibre  $T$  permet ainsi d'être introduite (fonction du niveau d'énergie interne global) et l'état du fluide pourra être plus simplement décrit par une variable vectorielle cinématique (la vitesse ou la quantité de mouvement par unité de volume  $\rho\vec{V}$ ) et deux variables thermodynamiques (température et masse volumique).

#### 4.1.2 Loi d'état et lois de comportement

La loi d'état adoptée, reliant la pression aux variables thermodynamiques, est la loi de gaz parfait :

$$p = \rho \frac{R}{M} T \quad (4.1)$$

où  $M$  est la masse molaire du gaz considéré et  $R = 8,314$  kJ/mol K est la constante universelle des gaz parfaits.

On fera l'hypothèse classique que ce fluide est visqueux et reste newtonien, i.e. qu'en chaque point, le tenseur des contraintes visqueuses suit la loi de Newton. On admet ainsi que le champ

de forces de cisaillement  $\overline{\overline{\Sigma}}_v$  reste proportionnel en chaque point au champ de déformation :

$$\overline{\overline{\Sigma}}_v = \lambda \nabla \cdot \overline{\overline{V}} \overline{\overline{I}} + \mu \left( \overline{\overline{\nabla}} \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{\nabla}}^T \overline{\overline{V}} \right) \quad (4.2)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de viscosité. Par ailleurs, on retiendra l'hypothèse de Stokes  $3\lambda + 2\mu = 0$ , i.e. que les changements de volume des cellules fluides s'effectuent sans viscosité.

La loi de variation de la viscosité dynamique retenue est la loi semi-empirique de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_o \sqrt{\frac{T}{T_o}} \frac{1 + S_{th}/T_o}{1 + S_{th}/T} \quad (4.3)$$

où  $S_{th} = 110,4$  K,  $\mu_o = 1,711 \cdot 10^{-5}$  kg/ms et  $T_o = 273,15$  K. Les variations spatiales de la pression seront ainsi supposées n'avoir aucune influence sur la viscosité.

Finalement, on considérera que le flux de chaleur par conduction thermique  $\overline{\overline{q}}_T$  suit la loi de Fourier :

$$\overline{\overline{q}}_T = -\lambda_T \overline{\overline{\nabla}} T \quad (4.4)$$

où  $\lambda_T$  est le coefficient de conductivité thermique. En introduisant le nombre de Prandtl :

$$P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda_T}$$

on ramène généralement l'évaluation du flux conductif de chaleur à celle de la viscosité par :

$$\overline{\overline{q}}_T = -\frac{\mu C_p}{P_r} \overline{\overline{\nabla}} T \quad (4.5)$$

### 4.1.3 Lois de bilans

On adopte une description eulérienne de l'évolution de l'état du fluide en chaque point en se fixant dans un repère associé au centre de la section de l'ajutage, qu'on supposera galiléen<sup>1</sup>, soit par exemple le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sur la figure 4.1.

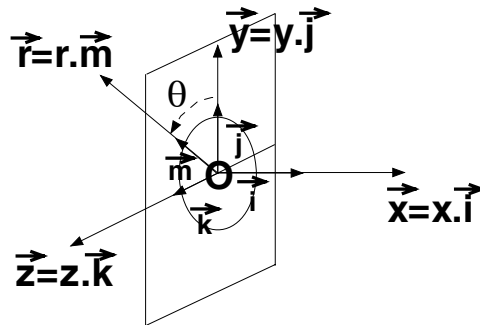


FIG. 4.1 – Définition du repère choisi et des axes de coordonnées cartésiennes et axisymétriques.

<sup>1</sup>Cela revient à admettre soit que l'avion se déplacera à vitesse uniforme pendant une phase de croisière, soit que la vitesse de l'avion sera de toute façon négligeable par rapport aux vitesses des particules fluides rencontrées au sein du jet pendant la phase d'accélération au décollage.

Dans un volume élémentaire fixe  $\Omega$ , de surface  $\partial\Omega$  et de normale unitaire à cette surface  $\vec{n}$ , orientée vers l'extérieur de ce domaine, le principe de conservation d'une quantité physique  $\phi$  se traduit alors par le bilan suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi dV + \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} \phi dS = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{F}(\phi) dS + \int_{\Omega} \mathcal{S}(\phi) dV \quad (4.6)$$

La variation de  $\phi$  au cours du temps résulte du mouvement propre du volume fluide (effet convectif) et des actions externes surfaciques (flux diffusifs  $\vec{F}$ ) et volumiques (source  $\mathcal{S}$ ).

On choisit de décrire l'état du fluide par le vecteur d'état conservatif :

$$\vec{U} = (\rho, \rho\vec{V}, \rho E)^T$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\rho\vec{U}$  la quantité de mouvement et  $E$  l'énergie totale massique définie par la somme de l'énergie interne massique  $e$  et de l'énergie cinétique par unité de masse  $\frac{1}{2}\|\vec{V}\|^2$ .

Le principe de conservation de la masse (aucune source de création ou disparition de masse) nous amène à ne considérer qu'un flux de masse lié au mouvement propre de la particule fluide.

L'application du principe fondamental de la dynamique nous indique que le produit de la masse par l'accélération d'une particule fluide est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées. L'effet des forces volumiques étant négligé *a priori*, le flux surfacique de quantité de mouvement se décompose alors simplement en une contribution des contraintes normales par unité de surface (la pression) et une contribution des contraintes tangentielles (les forces de viscosité), reliées au champ moyen par la relation de Newton.

Enfin, du premier principe de la thermodynamique découle la loi de conservation de l'énergie totale. La variation de l'énergie totale est égale à la somme du flux d'énergie thermique et de la puissance des forces mécaniques (uniquement surfaciques donc dans notre cas) s'exerçant sur le système.

D'après les hypothèses introduites, l'évolution spatio-temporelle de l'état conservatif est ainsi décrite sous forme tensorielle par l'équation intégrale suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{U} dV + \int_{\partial\Omega} \vec{F}(\vec{U}) \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial\Omega} \vec{D}(\vec{U}) \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} \vec{S}(\vec{U}) dV \quad (4.7)$$

dans laquelle on distingue les effets convectifs  $\vec{F}$ , diffusifs  $\vec{D}$  et de production  $\vec{S}$  :

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \rho\vec{V} \cdot \vec{n} \\ \vec{n} \cdot \rho\vec{V} \otimes \vec{V} + \vec{n} \cdot p\vec{I} \\ (\rho E + p)\vec{V} \cdot \vec{n} \end{pmatrix}, \quad \vec{D} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{\tau}_v \\ \vec{V} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\tau}_v) - \vec{n} \cdot q\vec{T} \end{pmatrix}, \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

L'application du théorème de Gauss permet de réexprimer les intégrales de surface en intégrales de volume. L'équation de bilan intégral (4.7) se réexprime alors en :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{U} dV + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV + \int_{\Omega} \vec{S} dV \quad (4.9)$$

expression de laquelle se déduit directement la forme différentielle valide pour les régions d'évolution régulière du vecteur d'état conservatif. Dans le cadre de cette formulation, notons qu'à partir de l'équation d'état (4.1), la pression s'exprime en fonction des variables conservatives selon :

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{1}{2}\rho\|\vec{V}\|^2) \quad (4.10)$$

L'introduction de cette équation d'état (4.10) et des lois de comportement (4.2), (4.3) et (4.4) permet ainsi de fermer complètement le système (6 équations pour 6 inconnues). On notera que la masse volumique devient bien une variable indépendante du problème, de sorte qu'une équation supplémentaire est nécessaire afin de fermer le système par rapport au cas incompressible. Par ailleurs, l'épaisseur des ondes de chocs attendues reste bien en deçà des capacités de résolutions de toute méthode numérique (de l'ordre du libre parcours moyen). Ainsi, même lorsque les effets diffusifs et thermiques sont pris en compte, les ondes de chocs seront traitées numériquement comme de véritables discontinuités, au sens mathématique, que seule la forme intégrale des équations de Navier-Stokes, ici introduite, peut directement prendre en compte sans procédure particulière additionnelle. Par ailleurs, on notera dès à présent que seule la discrétisation de cette formulation intégrale conservative est naturellement par construction elle-même conservative. Ainsi, les solutions faibles de ce système décriront naturellement l'apparition des discontinuités de choc en leur donnant une vitesse de propagation physiquement correcte, tandis que les relations de saut de Rankine-Hugoniot (qui ne sont que la formulation locale des lois de conservation à travers une discontinuité en mouvement) seront naturellement vérifiées (aux erreurs près des termes de diffusion numérique). Finalement, on notera bien que, compte tenu des hypothèses introduites, le terme source est considéré nul pour un fluide mono-espèce, en régime laminaire.

## 4.2 Traitement de la configuration axisymétrique

Le jet étudié est supposé être issu d'un orifice circulaire, ce qui nous permet d'exprimer plus simplement le système d'équations de Navier-Stokes dans un système de coordonnées cylindriques  $(O, \vec{x}, \vec{r}, \theta)$ , selon la direction axiale  $(O, \vec{x})$ , la direction radiale  $(O, \vec{r})$  et d'angle orthoradial  $\theta$  (voir figure 4.1). On introduit les composantes du vecteur vitesse projeté sur ce système de coordonnées, soit  $\vec{V} = (v_x, v_r, v_\theta)^T$ . En négligeant les dérivées selon la direction orthoradiale, le transport des cinq variables conservatives  $\vec{U} = (\rho, \rho v_x, \rho v_r, \rho v_\theta, \rho E)$  s'exprime alors par rapport aux deux coordonnées spatiales  $(x, r)$ , selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v_r}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v_r v_x}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho v_r}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x v_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v_r^2}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x v_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v_r v_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p) v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r (\rho E + p) v_r}{\partial r} \end{array} \right. = \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r} \\ -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\rho v_\theta^2}{r} \\ -\frac{\rho v_r v_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \tau_{r\theta}}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mu}{\gamma Pr} \frac{\partial T}{\partial x} + v_x \tau_{xx} + v_r \tau_{xr} + v_\theta \tau_{x\theta} \right] \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\mu}{\gamma Pr} \frac{\partial T}{\partial r} + v_x \tau_{rx} + v_r \tau_{rr} + v_\theta \tau_{r\theta} \right) \right] \end{array} \quad (4.11)$$

où le tenseur des contraintes visqueuses  $\overline{\tau}$  est donné par :

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xr} & \tau_{x\theta} \\ \tau_{rx} & \tau_{rr} & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta x} & \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \overline{V} & \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} & \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} & 2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \overline{V} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial x} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} & -2\frac{v_r}{r} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \overline{V} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

et la divergence du champ de vitesse  $\overline{V} = (v_x, v_r, v_\theta)^T$  devient :

$$\nabla \cdot \overline{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} \quad (4.13)$$

Les termes  $\rho v_\theta^2/r$  et  $\rho v_r v_\theta/r$  apparaissant dans l'équation de transport de la troisième composante de la quantité de mouvement dans (4.11), correspondent respectivement à une force centrifuge apparente et une force de Coriolis apparente. On choisit de négliger la vitesse de swirl, i.e. de considérer  $v_\theta = 0$ . Ces forces apparentes, simplement issus de la transformation des coordonnées, s'annulent alors et l'équation de transport de  $\rho v_\theta$  devient évidemment redondante. On constate alors qu'en introduisant les hypothèses d'axisymétrie et de vitesse de swirl nulle, il suffit d'identifier les axes  $(O, \overline{r})$  et  $(O, \overline{y})$  pour que le système d'équations soit rigoureusement identique à son homologue en configuration cartésienne bidimensionnelle, modulo deux termes de flux additionnels. Provenant de la forme cylindrique des équations du mouvement, ces termes de flux additionnels s'apparentent à des termes sources de nature purement géométriques, l'un,  $S_e$ , étant lié à la transformation du flux convectif lors du changement de système de coordonnées, l'autre,  $S_d$ , lié à la transformation du flux diffusif. En réexprimant dans le système cartésien bidimensionnel les composantes du vecteur vitesse  $\overline{V} = (u, v)^T$  et du vecteur d'état conservatif  $\overline{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$ , on considère finalement, sous forme différentielle, le système vectoriel suivant :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\mathcal{F}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\mathcal{F}}_y}{\partial y} = \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\mathcal{D}}_y}{\partial y} + \overline{S}_e + \overline{S}_v \quad (4.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_x &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{F}}_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}, \\ \overline{\mathcal{D}}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \frac{\mu\gamma C_v}{P_r} \frac{\partial T}{\partial x} + u\tau_{xx} + v\tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{D}}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \frac{\mu\gamma C_v}{P_r} \frac{\partial T}{\partial y} + u\tau_{yx} + v\tau_{yy} \end{pmatrix}, \\ S_e &= \frac{1}{y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, \quad S_v = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} + \mu \left[ \frac{2v}{y} - \frac{2}{3}\nabla \cdot \overline{V} \right] \\ \frac{\mu\gamma C_v}{P_r} \frac{\partial T}{\partial y} + u\tau_{yx} + v\tau_{yy} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Notons qu'il serait également possible de développer autrement les termes et de faire apparaître des termes sources simplifiés, à condition de considérer une transformation des coordonnées



des points du systèmes (pondération par la distance à l'axe). L'approche ici retenue présente cependant l'avantage de traiter formellement les termes sources géométriques supplémentaires de façon identique aux autres termes sources, sans avoir à modifier la métrique du système. Par ailleurs, les flux convectifs et diffusifs pourront être évalués de façon équivalente au cas 2D, simplement en corrigeant l'expression de la divergence pour l'évaluation des tensions visqueuses :

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} \quad (4.16)$$

La prise en compte de la turbulence se traduira par l'apparition des contraintes qui s'ajouteront aux contraintes laminaires dans les composantes des flux diffusifs. Un troisième vecteur source  $\mathcal{S}_t$ , similaire à  $\mathcal{S}_v$  devra ainsi être également ajouté pour prendre en compte les termes géométriques supplémentaires issus de la dérivation dans la direction radiale.

### 4.3 Présentation du modèle $k - \epsilon$ standard en régime incompressible

Afin de simplifier l'introduction des modèles de turbulence et de respecter le formalisme dans lequel ils ont initialement été introduits, les équations sont présentées, dans cette section et la section suivante, sous forme cartésienne. L'équivalent du système global d'équations effectivement utilisé en coordonnées axisymétriques est finalement redonné dans la section bilan 4.6.

#### 4.3.1 Problème de fermeture et modélisation

Le principe des modèles RANS consiste à décrire statistiquement l'évolution d'une variable physique  $\phi$  en chaque point, en la décomposant en la somme d'un champ moyen  $\bar{\phi}$  et d'un champ fluctuant  $\phi'$  autour de cette moyenne. Dans le formalisme classique de Reynolds, dans lequel le modèle  $k - \epsilon$  a originellement été fondé, on identifie simplement la représentation d'une moyenne temporelle à la moyenne statistique d'un ensemble de réalisations (hypothèse d'ergodicité) en supposant que le temps d'intégration expérimental  $T_o$  est suffisamment long par rapport aux échelles de temps de la turbulence pour que la moyenne statistique de l'ensemble des réalisations obtenue sur  $T_o$  soit proche de la valeur qu'on obtiendrait sur un temps infini. Ceci équivaut à considérer l'indépendance de la moyenne statistique à l'origine de l'intervalle d'intégration. On introduit donc l'opérateur de moyenne selon :

$$\overline{\phi(x_i)} = \lim_{T_o \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_o} \int_{t_o}^{t_o+T_o} \phi(t, x_i) dt$$

On applique cette décomposition sur l'ensemble des variables dépendantes en incompressible, soit pour la température  $T$  et les composantes  $v_i$  du vecteur vitesse  $\vec{V}$ , respectivement données par :

$$\begin{cases} T = \bar{T} + T' \\ v_i = \bar{v}_i + v'_i \end{cases}$$

L'injection de cette décomposition dans les équations de Navier-Stokes et l'application de l'opérateur de moyenne à ce système, nous amènent à considérer le nouveau problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \bar{v}_i) = 0 \\ \frac{\partial (\rho \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_i v'_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{v'_i v'_j} \right] \end{cases} \quad (4.17)$$

Ce système reste formellement identique au système original, exception faite d'un terme supplémentaire de contraintes turbulentes  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$  apparaissant dans l'équation de transport de la quantité de mouvement. L'approche diffusivo-conservative consiste alors à fermer le tenseur des contraintes turbulentes par analogie avec la loi de Newton utilisée pour fermer le tenseur des contraintes visqueuses. L'analogie de Boussinesq consiste ainsi à considérer dans un premier temps la contrainte turbulente comme étant localement proportionnelle à la déformation du champ moyen :

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = 2\mu_t \overline{S_{ij}} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \quad (4.18)$$

où le tenseur moyen des déformations est donné par :

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right)$$

et  $\mu_t$  est la viscosité turbulente, analogue de la viscosité  $\mu$  pour les contraintes visqueuses. Pour cette approximation, le dernier terme de l'équation (4.18) est nécessairement introduit afin que la trace invariante du tenseur des contraintes turbulentes soit effectivement égale au double de l'énergie cinétique turbulente  $k$ . Il s'identifie alors à une pression dynamique supplémentaire induite par le mouvement turbulent. On cherche alors à évaluer  $\mu_t$ , par analogie avec  $\mu$ , comme le produit d'une échelle turbulente de vitesse  $v_t$  par une échelle turbulente de longueur  $l_t$ , ces quantités n'étant simplement plus intrinsèquement dépendantes de la nature du fluide, mais dépendantes des propriétés dynamiques locales de l'écoulement. L'échelle de vitesse est classiquement donnée par  $\sqrt{k}$ , une équation de transport pour l'énergie cinétique de turbulence pouvant s'obtenir avec une relative simplicité<sup>2</sup> (voir par exemple Chassaing [32]) :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}}_{\mathcal{A}_k} + \underbrace{\frac{\partial(\rho k \overline{v_j})}{\partial x_j}}_{\mathcal{C}_k} = \underbrace{-\rho \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}}_{\mathcal{P}_k} - \underbrace{\overline{\tau'_{ij}} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}_{\epsilon} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_i v'_j})}_{\mathcal{D}_k} - \underbrace{\overline{v'_i} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i \tau'_{ij}})}_{\mathcal{D}_k} \quad (4.19)$$

Dans cette équation de transport, les termes  $\mathcal{A}_k$  et  $\mathcal{C}_k$  sont respectivement les termes d'accumulation et de flux convectifs. Les termes  $\mathcal{P}_k$  et  $\epsilon$  correspondent aux mécanismes de production d'énergie cinétique de turbulence et à son taux de dissipation, tandis que les termes constituant  $\mathcal{D}_k$  représentent des termes de diffusion, par les fluctuations, respectivement de vitesse, de pression et des contraintes visqueuses. Le terme de production est modélisé en réintroduisant la fermeture de Boussinesq pour l'expression des contraintes  $\rho \overline{v'_i v'_j}$  et se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &= \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \\ &= 2\mu_t \overline{S_{ij}}^2 \end{aligned}$$

tandis que les termes diffusifs sont regroupés et réexprimés sous la forme d'un terme de flux diffusif de  $p + \rho k$  qui est alors fermé par une schématisation de type gradient [32] :

$$\mathcal{D}_k = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{(p + \rho k) v'_j} \right] = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

<sup>2</sup>Il suffit de soustraire l'équation pour la moyenne  $\overline{u_i}$  à l'équation initiale pour  $u_i$  pour obtenir l'équation de transport de la fluctuation de vitesse  $v'_i$ . On multiplie ensuite cette équation par la fluctuation croisée  $v'_j$  et on moyenne pour en déduire l'équation de transport des contraintes. Une contraction indicielle donne alors l'équation de transport exacte de l'énergie cinétique turbulente moyenne  $k = \frac{1}{2} \overline{v'_k v'_k}$ .

Le coefficient de diffusivité  $d_k$  de  $k$  est ici exprimé par  $d_k = \nu_t/\sigma_k$  en introduisant le nombre de Prandtl/Schmidt de turbulence  $\sigma_k$  de l'énergie cinétique de turbulence, supposé constant. On remarquera qu'on choisit de ne pas incorporer le terme de pression dans la source modélisée de flux diffusif dans la mesure où celle-ci n'est effectivement pas physiquement "transportable". Le regroupement de ce terme de pression avec le flux diffusif ne peut pas rigoureusement se justifier d'un point de vue physique mais reste généralement effectué par souci de simplification opératoire en supposant faible la contribution de la pression dans le bilan de  $k$  (hypothèse vérifiée dans le cas incompressible [32]). Finalement, le terme de dissipation peut être directement réexprimé en fonction de la seconde grandeur transportée. Cependant, il n'est pas possible de déduire directement des équations de Navier-Stokes une équation de transport pour l'échelle de longueur turbulente  $l_t$ . L'ensemble des fermetures en un point à deux équations de transport consiste ainsi à la déduire indirectement d'une autre grandeur dont on peut déduire l'équation de transport, grandeur correspondant à une combinaison  $k^m l_t^n$ . Le choix de Jones et Launder [86], consiste à prendre  $m = 3/2$  et  $n = -1$ , afin de dériver une équation de transport pour le terme de dissipation apparaissant explicitement dans l'équation de transport pour  $k$ , ce dernier terme n'ayant alors plus à être réexprimé. La complexité des corrélations intervenant dans l'équation de transport de ce taux de dissipation est cependant trop importante pour qu'une modélisation terme à terme puisse être effectuée. C'est pourquoi la modélisation de l'équation de transport de  $\epsilon$  consiste à la "calquer" sur l'équation de transport modélisée de  $k$ . Les mécanismes de production, dissipation et diffusion de la dissipation sont alors supposés analogue à ceux de  $k$  et sont reportés, multipliés par l'inverse de l'échelle moyenne de temps turbulente  $\epsilon/k$ . Chaque constante multiplicative introduite devant chacun des termes correspond alors à une pondération de l'échelle de temps relative au mécanisme associé.

Le calage standard de ces constantes est brièvement rappelé ci-après (chapitre 4.3.2). Par cette démarche, le modèle classique de Jones et Launder [86] et son jeu de constantes standards [100] se réécrit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial(\rho k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \mathcal{P}_k - \rho \epsilon \\ \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} \mathcal{P}_k - C_{\epsilon 2} \rho \epsilon) \\ \mathcal{P}_k = 2\mu_t \overline{S_{ij}^2} \\ \mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$C_\mu = 0,09$	$C_{\epsilon 1} = 1,44$	$C_{\epsilon 2} = 1,92$	$\sigma_k = 1,0$	$\sigma_\epsilon = 1,3$
----------------	-------------------------	-------------------------	------------------	-------------------------

### 4.3.2 Calage conventionnel des constantes

La constante  $C_{\epsilon 2}$  est déterminée en considérant une situation de turbulence homogène et isotrope, pour laquelle la simplification du système (4.20) permet de réexprimer directement cette constante comme étant égale au taux de décroissance énergétique connu pour cette situation particulière de turbulence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dk}{dt} = -\epsilon \\ \frac{d\epsilon}{dt} = -C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \end{array} \right. \implies C_{\epsilon 2} = k \frac{\frac{d^2 k}{dt^2}}{\left( \frac{dk}{dt} \right)^2}$$

En fonction des différents travaux expérimentaux s'accordant à décrire ce taux de décroissance par une loi en puissance de type  $at^n$ , la constante s'exprime alors par  $C_{\epsilon 2} = (n - 1)/n$ , soit une valeur typiquement comprise entre 1,8 et 2 pour  $n$  compris entre -1,25 et -1 [32].

La constante  $C_\mu$  se détermine en considérant la situation d'une couche limite turbulente plane en moyenne, dans la région d'équilibre entre production et dissipation de  $k$ . L'expression du coefficient de viscosité turbulente  $\mu_t$  (4.20), l'expression directe du cisaillement et l'hypothèse d'équilibre donnent alors respectivement :

$$\begin{cases} \mu_t &= \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \\ -\rho \overline{u'v'} &= \mu_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \\ -\overline{u'v'} \partial \bar{U} / \partial y &= \frac{\epsilon}{\bar{\epsilon}} \end{cases} \implies C_\mu = \frac{(\overline{u'v'})^2}{k^2}$$

La valeur constante sensiblement égale à 0,3 du rapport  $-(\overline{u'v'})/k$  est historiquement retenue d'après les travaux expérimentaux de Bradshaw [26] pour cette configuration.

La constante  $C_{\epsilon 1}$  se détermine ensuite à partir de ces deux premières constantes en se plaçant dans la région logarithmique de la couche limite. Dans cette situation, on peut réécrire l'équation de transport de la dissipation en négligeant les termes de convection et de diffusion moléculaire, et utiliser la forme des profils de la composante longitudinale de la vitesse  $\bar{u}$ ,  $k$  et  $\epsilon$  :

$$\begin{cases} C_{\epsilon 1} \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \\ \frac{\bar{u}}{u_f} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \\ k = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \\ \epsilon = \frac{u_f^3}{\kappa y} \end{cases} \implies C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 2} - \frac{\kappa}{\sigma_\epsilon \sqrt{C_\mu}}$$

où  $u_f = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}$  est la vitesse de frottement à la paroi et  $\kappa = \nu_t / (U_f y)$  est la constante de von Karman. Pour  $\sigma_\epsilon = 1,3$  et  $\kappa = 0,435$ , valeur sensiblement supérieure à la valeur préconisée pour la couche limite, on retrouve la valeur standard de  $C_{\epsilon 1}$ .

Notons finalement que les constantes  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$  vont essentiellement déterminer le comportement de l'écoulement simulé près des frontières libres. Afin que ce comportement reste physique (gradient de vitesse fini à la frontière), la seule condition  $2\sigma_k - \sigma_\epsilon \leq 1$  doit être respectée [32]. Ces constantes ont alors été ajustées par comparaison avec des expériences de jet et de sillage [20].

### 4.3.3 Limitations intrinsèques au modèle $k - \epsilon$ en régime incompressible

Toute interprétation de résultats de simulation numérique utilisant ce modèle ne pourra faire abstraction d'un certain nombre de limitations directement reliées à certains principes quelque peu réducteurs qui ont conduit à son élaboration.

On notera tout d'abord que le calage de ces différentes constantes n'a été possible qu'en se plaçant dans des configurations d'écoulements bien particulières, et ne saurait rendre le modèle universel. Notamment, la constante  $C_\mu$  dépend largement du type d'écoulement (variant entre 0,03 et 0,6 d'après Cazalbou et Bradshaw [30]) tandis que pour une configuration donnée,  $C_\mu$  aurait tendance à décroître significativement à très haut Reynolds (0,055 et 0,065 pour la couche limite et le canal plan respectivement quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini).

La fermeture linéaire du coefficient de viscosité turbulente rend ensuite le modèle incapable de capturer correctement l'anisotropie. Les effets de courbure, notamment au niveau de la zone proche, au sein de laquelle réside la première structure de choc du jet fortement sous-détendu, ne sauraient donc en aucun cas être précisément capturés. Le calage des constantes  $C_{\epsilon 1}$  et  $C_{\epsilon 2}$  du modèle suppose par ailleurs que les différentes composantes des fluctuations de vitesse participent de façon égale à l'énergie cinétique turbulente. Or dans le cas d'un jet supersonique, la composante longitudinale est nettement plus importante que les composantes radiale et azimuthale, d'autant plus que l'écoulement devient fortement supersonique. On peut s'attendre *a priori* à ce que l'inadaptation du schéma de redistribution entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds induise des écarts notables entre la prévision numérique et le comportement physique.

Afin de décrire qualitativement la turbulence par l'évolution de ses échelles caractéristiques via  $k$  et  $\epsilon$ , on a été amené à faire l'hypothèse très réductrice que son spectre d'énergie est parfaitement établi. En particulier, le modèle a été calé en considérant une situation de turbulence à l'équilibre que l'on ne rencontre qu'en couche limite. Or, dans le cas des couches de cisaillement, un tel équilibre production-dissipation n'est jamais atteint. Par construction, le modèle ne pourrait s'appliquer rigoureusement dans le cas des jets supersoniques sans présenter quelque faiblesse. Au mieux admet-on généralement que la dissipation croît proportionnellement au terme de production de  $k$  au centre de la couche de cisaillement. L'introduction de nouvelles hypothèses permettrait de redériver alors des relations plus appropriées pour fermer  $C_\mu$  dans le cas de couches de mélanges parfaitement détendues, sans devenir pour autant plus universelles [41]. On notera par ailleurs que les effets diffusifs ont été négligés dans le cadre de cette hypothèse d'équilibre. Or ceux-ci ne sont justement plus négligeables dans le cas d'une couche de cisaillement puisqu'ils pilotent directement son expansion radiale.

On pourra noter également la limitation de l'hypothèse bidimensionnelle utilisée, qui induit la non-prise en compte d'effets géométriques typiquement liés à l'axisymétrie. Une correction simple, proposée par Pope [131], est présentée ci-après (cf. chapitre 4.3.4).

Finalement, dans le cas où l'écoulement est supersonique et contient des zones de forte compression, la restriction fondamentale du modèle original apparaît liée à l'hypothèse d'incompressibilité dans lequel il a été développé. Dans la suite de l'exposé (chapitre 4.4) sont introduits des éléments de correction, correspondant à la prise en compte de corrélations additionnelles apparaissant dès lors que la masse volumique n'est plus constante.

#### 4.3.4 Correction pour l'axisymétrie

Bien que les constantes du modèle  $k - \epsilon$  soient calées pour une turbulence à l'équilibre en couche limite, une précision satisfaisante est étonnamment obtenue lors de la simulation de jets libres bidimensionnels. Cependant, le modèle ne peut reproduire l'effet moyen des mécanismes particuliers liés au développement tourbillonnaire en axisymétrique (cf. chapitre 1.1.2). Typiquement, le taux d'évasement du jet, dans le cas subsonique, est surrestimé d'environ 40%. Différentes corrections ont été proposées pour pallier ce problème, consistant à modifier la constante  $C_{\epsilon 1}$  [108] [116] (cherchant à augmenter le taux de production de  $\epsilon$ ) ou  $C_{\epsilon 2}$  [99] (cherchant à diminuer l'effet de destruction de  $\epsilon$ ) en prenant en compte la valeur sur l'axe de la vitesse ou du gradient de vitesse, ou la distance à l'axe  $r_{1/2}$  où la vitesse atteint la moitié de sa valeur atteinte sur l'axe. Ces modifications purement artificielles introduisent cependant une dépendance non-physique de tout point de l'écoulement au comportement de la vitesse sur l'axe. Par ailleurs, leur utilisation n'est plus générale dès lors qu'elles introduisent  $r_{1/2}$ , ce qui restreint drastiquement leur champ d'application. Pour remédier à ce problème, Pope [131] propose une correction plus originale à partir de considérations basées sur la dynamique tourbillonnaire. Il part du constat que dans

un jet axisymétrique, une contrainte normale positive en moyenne a tendance à étirer les tourbillons (ce qui n'est pas le cas dans un jet 2D pour lequel la vorticité moyenne reste normale au plan de l'écoulement) et donc, par conservation du moment angulaire, à diminuer la largeur de ces tourbillons en augmentant leur fréquence de rotation. Puisque la vorticité fluctuante a tendance à s'aligner avec la vorticité moyenne, l'étirement tourbillonnaire moyen dans les jets ronds a naturellement tendance à induire une plus rapide décroissance de l'échelle intégrale, et donc une plus forte dissipation. Ainsi, Pope propose de rajouter, dans l'équation de transport de la dissipation, un terme additionnel de production de dissipation  $P_\epsilon^{axi}$ , qu'il suppose directement proportionnel à une mesure adimensionnée de l'étirement tourbillonnaire  $\chi = \Omega_{ij}\Omega_{jk}\zeta_{ki}$  avec :

$$\begin{cases} \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon} \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \\ \zeta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon} \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \end{cases}$$

L'expression de la production additionnelle de dissipation est alors :

$$P_\epsilon^{axi} = C_\epsilon^{axi} \frac{\epsilon^2}{k} \chi$$

D'après les données expérimentales de Rodi [138] pour des configurations de jet rond en régime subsonique, une valeur de  $C_\epsilon^{axi} = 0,79$  semble permettre d'obtenir à nouveau le bon taux d'évasement ( $dr_{1/2}/dx = 0,86$ ) et le bon profil de vitesse moyenne.

Notons que dans le cas d'un écoulement 2D axisymétrique sans swirl, l'expression de l'invariant que nous utiliserons se réécrit en coordonnées cartésiennes :

$$\chi = \frac{1}{4} \left( \frac{k}{\epsilon} \right)^3 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \frac{\bar{v}}{y}$$

## 4.4 Extension du modèle $k - \epsilon$ au régime compressible

### 4.4.1 Introduction à la turbulence compressible

Le modèle  $k - \epsilon$  a formellement été développé pour des écoulements en régime incompressible. Pour un régime compressible, à la limite où l'amplitude des fluctuations de masse volumique est supposée rester d'un ordre de grandeur inférieure au niveau moyen de masse volumique, la modélisation physique réalisée en régime incompressible semble pouvoir encore s'appliquer sans modification formelle fondamentale. On considère généralement (hypothèse de Morkovin [115]) que cette hypothèse correspond à un nombre de Mach limite de 5 dans les couches limites et une différence de nombre de Mach de 1,5 dans les cas des couches de cisaillement. Cependant, dès lors que le nombre de Mach devient plus important, le champ dynamique ne se comporte plus de façon identique. Les interactions impliquant les fluctuations de pression ou de masse volumique tendent à ne plus être négligeables et modifient fondamentalement les échanges énergétiques entre le champ moyen et le champ turbulent. Afin de déterminer ces nouvelles interactions, la première démarche consisterait à étendre directement la décomposition de Reynolds à la masse volumique et à la pression. Cependant, un flux convectif d'une quantité  $\phi = \bar{\phi} + \phi'$  se décomposerait alors en :

$$\overline{\rho v_k \phi} = \bar{\rho} \bar{v}_k \bar{\phi} + \overline{\rho' v'_k \phi} + \overline{\rho' \phi' v_k} + \overline{\rho v'_k \phi'} + \overline{\rho' v'_k \phi'}$$

Du type de regroupement que l'on pourrait effectuer sur ces corrélations dépend fortement l'interprétation physique des termes mis en jeu, ce qui rend particulièrement délicate toute tentative

de modélisation. Aussi préfère t'on généralement également introduire le formalisme de Favre [64] pour décomposer certaines variables physiques  $\phi$  selon :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad \text{où} \quad \tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}$$

L'utilisation de cette moyenne pondérée par la masse volumique impose de redéfinir dans l'absolu une nouvelle surface de courant pour interpréter la vitesse macroscopique  $\tilde{v}_k$ , dans la mesure où la masse n'est alors plus conservée qu'en moyenne. Cependant, les corrélations relatives aux flux convectifs moyens se simplifient nettement en la somme distincte d'une contribution du mouvement macroscopique moyen et une contribution du mouvement fluctuant :

$$\overline{\rho v_k \phi} = \rho \tilde{v}_k \tilde{\phi} + \overline{\rho v_k'' \phi''}$$

#### 4.4.2 Reformulation et modélisation des lois de bilan pour les écoulements turbulents compressibles

La démarche désormais couramment retenue, consiste en fait à décomposer le champ des variables en mixant les deux moyennes selon :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p', \quad v_i = \tilde{v}_i + v_i'', \quad T = \tilde{T} + T''.$$

Ceci permet de dériver un système d'équations proche du système original en situation incompressible. L'équation de continuité reste formellement identique :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0 \quad (4.21)$$

Le bilan de quantité de mouvement devient :

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{\tau}_{ij} + \overline{\tau_{ij}''} - \overline{\rho v_i'' v_j''} \right] \quad (4.22)$$

Une nouvelle modélisation doit alors être donnée pour les tensions de Reynolds  $-\overline{\rho v_i'' v_j''}$ . En revanche, on néglige généralement la moyenne des fluctuations du tenseur de contraintes visqueuses :

$$\overline{\tau_{ij}''} = \mu \overline{\left( \frac{\partial v_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j''}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k''}{\partial x_k} \right)}$$

par rapport au tenseur de contraintes visqueuses moyennes :

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \right)$$

Enfin, en étendant la décomposition de Favre aux expressions de l'enthalpie  $H = e + \frac{p}{\rho}$  et des composantes du flux de chaleur  $q_j$ , soit :

$$\begin{cases} H = \tilde{H} + h'' \\ q_j = \tilde{q}_j + q_j'' \end{cases}$$

le bilan d'énergie totale se réécrit :

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{H})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{v}_j \left( \tilde{\tau}_{ij} + \overline{\tau_{ij}''} - \overline{\rho v_i'' v_j''} \right) + \overline{v_j'' \tilde{\tau}_{ij}} + \overline{v_j'' \tau_{ij}''} - \tilde{q}_j - \overline{q_j''} - \overline{\rho v_j'' h''} - \overline{\rho v_j'' \left( \frac{1}{2} v_i'' v_i'' \right)} \right] \quad (4.23)$$

Dans ce bilan, on néglige généralement la moyenne des fluctuations du flux de chaleur  $\overline{q_j''}$ , ainsi que l'interaction entre le flux de masse turbulent et le tenseur des contraintes visqueuses  $\overline{v_i'' \tau_{ij}}$ .

La modélisation des autres termes se fait de façon semblable à celle retenue en régime incompressible. L'extension de l'hypothèse de Boussinesq permet de modéliser, au premier ordre, les contraintes de Reynolds dans le cadre d'écoulement à divergence non-nulle selon :

$$-\overline{\rho v_i'' v_j''} = \mu_t \left( \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \overline{\rho k} \delta_{ij} \quad (4.24)$$

Les termes de diffusion d'énergie par les fluctuations turbulentes sont classiquement regroupés et modélisés selon une hypothèse gradient :

$$\overline{v_i'' \sigma_{ij}''} - \rho v_j'' \left( \frac{1}{2} \overline{v_i'' v_i''} \right) = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (4.25)$$

tandis que le flux de chaleur turbulent est modélisé, en étendant l'analogie de Reynolds, par :

$$-\overline{\rho v_j'' h''} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} \quad (4.26)$$

Par estimation expérimentale en écoulement cisailé, cette constante semble fortement varier (entre 0,6 et 1 d'après Bailly et Comte-Bellot [20]). La valeur de 0,7 est couramment employée, bien que d'après Wilcox[172], une valeur de 0,5 serait plus appropriée pour les couches de cisaillement libres.

#### 4.4.3 Modélisation du transport de l'énergie cinétique de turbulence en situation compressible

La nouvelle décomposition amène à réécrire l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente selon :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\rho k})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho \widetilde{v}_i k})}{\partial x_i} &= \overline{v_i'' \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j}} \\ \underbrace{-\overline{\rho v_i'' v_j''} \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j}}_{P_k} &\underbrace{- \overline{v_i''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}}_G \underbrace{- \frac{\partial v_i''}{\partial x_j} \sigma_{ij}''}_{\rho \epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \underbrace{\overline{v_i'' \sigma_{ij}''} - \rho v_j'' \left( \frac{1}{2} \overline{v_i'' v_i''} \right) - \overline{p' v_j''}}_{D_k} \right] + \underbrace{\overline{p' \frac{\partial v_i''}{\partial x_i}}}_{\Pi_d} \end{aligned} \quad (4.27)$$

A grand nombre de Reynolds, on pourra négliger, dans ce bilan, la corrélation du flux de masse turbulent avec le gradient de contraintes visqueuses  $\overline{v_i'' \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j}}$ . En revanche, aux mécanismes de production  $P_k$ , dissipation ( $-\rho \epsilon$ ) et de diffusion  $D_k$ , s'ajoutent de nouvelles interactions ( $G$  et  $\Pi_d$ ). Spécifiquement liées au régime compressible, elles ne sont plus négligeables dans le cas général.

#### Effets diffusifs et dissipatifs

En suivant l'approche retenue en régime incompressible, on ne prend pas explicitement en compte la corrélation  $\overline{p' v_j''}$  dans le transport de l'énergie cinétique turbulente. Ce terme est alors intégré dans les termes diffusifs, qui sont fermés par une approche gradient, en suivant une démarche identique à celle suivie pour fermer ces termes dans l'équation de transport de l'énergie



totale. De même, le terme  $(-\rho\epsilon)$  représente le taux de dissipation totale de l'énergie cinétique turbulente par les effets moléculaires. Ce terme doit être résolu en ajoutant une équation de transport. Cependant, son expression n'étant plus équivalente à son homologue en incompressible pour laquelle une équation de transport est dérivable, il nécessite un traitement particulier (cf. paragraphe 4.4.4).

### Modélisation des termes de production

Le terme  $P_k$  représente la production d'énergie cinétique de turbulence par cisaillement, interaction des contraintes de Reynolds avec les gradients de vitesse moyenne. Il est fermé en réintroduisant la fermeture étendue de Boussinesq, soit :

$$\begin{aligned} -\overline{\rho v_i'' v_j''} \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} &= \left[ \mu_t \left( \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\rho k} \right] \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} \\ &= 2\mu_t S_{ij}^* S_{ij}^* - \frac{2}{3} \overline{\rho k} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.28)$$

faisant donc intervenir en régime compressible, non plus le tenseur de déformation mais son déviateur :

$$S_{ij}^* = \left( \frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \widetilde{v}_k}{\partial x_k} \right)$$

En suivant ainsi l'hypothèse de Boussinesq, ce terme représente une transformation irréversible d'énergie cinétique moyenne en énergie cinétique de turbulence. La décomposition (4.27) fait également apparaître le terme  $G$ , interaction entre le flux de masse turbulent et le gradient moyen de pression. On remarquera que ce terme, dit de "production enthalpique" est souvent négligé en première approximation. Sa modélisation précise repose évidemment sur celle du flux de masse turbulent. On peut néanmoins utiliser une première approximation qui consiste à réécrire  $\overline{v_i''}$  en faisant apparaître un flux de fluctuations de masse volumique (en moyenne de Reynolds) qui peut alors être fermé via une hypothèse gradient [20] :

$$\overline{v_i''} = -\frac{\overline{\rho' v_i'}}{\overline{\rho}} \quad \text{avec} \quad \overline{\rho' v_i'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_i}$$

Ce terme de production se réécrit alors simplement comme :

$$G = -\overline{v_i''} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \quad (4.29)$$

où la constante  $\sigma_t$  doit être fixée entre 0,7 et 1 d'après Bailly et Comte-Bellot [20]. On remarquera que dans des situations de rapide détente ou compression, ce terme représentera une production négative de  $k$ .

Shyy et Krishnamurty [152] proposent une autre fermeture de ce terme en modélisant le flux de masse turbulent. Ils appuient leur raisonnement sur les hypothèses (confirmées expérimentalement par Gaviglio et al. [82] sur une configuration d'écoulement en aval d'un arrière-corps axisymétrique à nombre de Mach de 2,3) que l'enthalpie totale est constante et que les fluctuations de masse volumique sont isobares. Développant l'expression de l'enthalpie totale  $H$  selon :

$$\widetilde{H} + H'' = \left[ \widetilde{h} + \frac{1}{2} \widetilde{v}_j \widetilde{v}_j + \frac{1}{2} v_j'' v_j'' \right] + [h'' + v_j'' \widetilde{v}_j]$$

et identifiant classiquement le dernier terme aux fluctuations d'enthalpie totale  $H''$ , on relie les fluctuations d'enthalpie statique à l'intensité de turbulence selon :

$$h'' = -v_j'' \tilde{v}_j \quad (4.30)$$

L'hypothèse selon laquelle les fluctuations de masse volumique restent isobares permet par ailleurs de relier les fluctuations de masse volumique aux fluctuations de température selon :

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \simeq -\frac{T''}{\tilde{T}}$$

Si l'on considère que la chaleur spécifique reste constante, on a également :

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \simeq -\frac{h''}{\tilde{h}} \quad (4.31)$$

Couplant ces deux équations (4.31) et (4.30), on peut alors relier les fluctuations de masse volumique ou de température à la vitesse selon :

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{T''}{\tilde{T}} = \frac{(\gamma - 1)}{a^2} \tilde{v}_j v_j'' \quad (4.32)$$

Multipliant (4.32) par  $v_i'$  et moyennant, on aboutit à réexprimer le flux de masse turbulent par rapport au gradient de température et aux contraintes de Reynolds selon :

$$\overline{v_i''} = C_1 \left\{ \left( \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \right) \left( \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho} a^2} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} + \left[ \left( \frac{(\gamma - 1)}{\bar{\rho} a^2} \right) \tilde{v}_j \overline{\rho v_j'' v_i''} \right] \right\} \quad (4.33)$$

La constante  $C_1$  est fixée par comparaison avec l'expression donnée par Ristorcelli [136] à :

$$C_1 = \frac{2M_t}{1 - M_t}$$

où le nombre de Mach turbulent est donné par  $M_t = \frac{\sqrt{2k}}{a}$ ,  $a$  étant la vitesse du son.

Finalement, la seconde modélisation du terme de production enthalpique que nous retenons s'écrit :

$$G = \frac{2M_t}{M_t - 1} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \right) \left\{ \left( \frac{\mu_t C_p}{Pr_t} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} + \tilde{v}_j \overline{\rho v_j'' v_i''} \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad (4.34)$$

### Modélisation de la pression-dilatation

Le terme  $\Pi_d$ , couramment dénommé pression-dilatation ou terme de pression dilatationnelle, représente un travail additionnel dû aux fluctuations simultanées de la pression et du volume des cellules fluides. Ce terme caractérise un échange réversible entre l'énergie cinétique turbulente et l'énergie interne du fluide. D'après Vandromme [168], il représente, en particulier, un puits important de  $k$  lors d'une interaction choc-turbulence.

**Approche de Zeman** En combinant les équations pour l'entropie et les fluctuations de masse volumique, Zeman [182] propose, en ne retenant que les termes dominants, de modéliser ce terme en le reliant à la variance de la pression selon :

$$\overline{p' \frac{\partial v_i''}{\partial x_i}} = -\frac{1}{2\gamma \bar{p}} \frac{dp'^2}{dt}$$

Cette variance de la pression est supposée décroître vers une valeur d'équilibre  $p_e$  pendant un temps caractéristique qu'il s'agit d'évaluer. En première approche, on suppose que cette décroissance est linéaire. Le point délicat dans ce modèle réside alors dans la détermination de la pression d'équilibre. En supposant un équilibre entre les énergies cinétiques et potentielles, et en calant empiriquement le rapport des énergies associées aux champs compressible et incompressible, Zeman propose de relier cette pression d'équilibre à la variance de la pression par un facteur fonction du nombre de Mach turbulent. La modélisation de Zeman pour la pression-dilatation donne finalement :

$$\Pi_d = \begin{cases} -C_{\Pi_d} * 2 * \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon} \mathcal{S}_{ij}^* \mathcal{S}_{ij}^* & , \quad M_t > 0,1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \\ 0 & , \quad M_t < 0,1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \end{cases} \quad (4.35)$$

Une valeur  $C_{\Pi_d} = 0,004$  est utilisée dans le code N3SNATUR. Cette constante semble avoir été calée sur des configurations d'impacts de jet (EDF). Au vu du manque d'information pertinente au sujet du calage de cette constante et des erreurs grossières mises en évidence dans l'implantation de ce modèle et du modèle pour la dissipation compressible de Zeman dans la version 1.4.3.2 de N3SNATUR, une grande précaution sera de mise dans l'utilisation de cette modélisation.

**Approche de Sarkar** Nous préférons suivre l'approche de Sarkar et al. [143][142] pour modéliser ce terme. A partir d'une décomposition du champ de pression en une partie compressible et une partie incompressible, ces auteurs démontrent, en se basant sur des données de simulation directe de turbulence homogène en écoulement cisailé libre, que seule la contribution du champ de pression incompressible est significative pour le terme de pression-dilatation. La partie compressible oscillerait globalement au cours du temps autour d'une valeur nulle, et donc serait sans influence sur le bilan moyen de l'énergie cinétique de turbulence. La modélisation de ce terme incompressible repose alors sur l'hypothèse que le carré du nombre de Mach turbulent pourrait représenter l'échelle de la fraction d'énergie cinétique compressible sur l'énergie cinétique totale. Sarkar et al. [143] décomposent alors cette partie incompressible en une partie linéaire et quadratique, et développent asymptotiquement sur l'échelle de temps acoustique les équations de Poisson pour ces composantes. Leur modélisation, réécrite dans le cas isotrope applicable dans le cadre d'une modélisation  $k - \epsilon$  se réécrit alors :

$$\Pi_d = -0,4 \mathcal{P}_k M_t^2 + 0,2 \bar{\rho} \epsilon_s M_t^2 \quad (4.36)$$

Notons que les constantes ici introduites, que nous retenons pour nos simulations, sont initialement calées pour des couches de mélange planes.

#### 4.4.4 Modélisation du transport de la dissipation en situation compressible

##### Choix de l'équation de transport

Si on fait l'hypothèse, à grand nombre de Reynolds, que l'échelle de temps des mouvements fluctuants dissipatifs est beaucoup plus petite que celle du mouvement moyen, et que le comportement anisotrope des grandes échelles peut se découpler du comportement des petites échelles qui tend vers l'isotropie, on peut supposer un comportement isotrope de la dissipation. En négligeant alors la corrélation du champ de déformation moyenne avec lui-même  $\widetilde{S}_{ij} \widetilde{S}_{ij}$  par rapport à la corrélation du champ de déformation fluctuant avec lui-même  $\overline{S''_{ij} S''_{ij}}$ , on peut estimer l'expression du taux de dissipation selon :

$$\bar{\rho} \epsilon = \overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \sigma_{ij}''} = \frac{1}{2} \mu \overline{\left( \frac{\partial v_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j''}{\partial x_i} \right)^2} - \frac{2}{3} \mu \overline{\left( \frac{\partial v_k''}{\partial x_k} \right)^2}$$

à comparer avec l'expression, dans le formalisme de la décomposition de Reynolds, du taux de dissipation utilisé dans le modèle standard  $k - \epsilon$  en régime incompressible  $\bar{\rho}\epsilon = \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \tau'_{ij}}$ . Certes, il est possible de déterminer une équation de transport exacte (voir Vandromme [167]) pour cette nouvelle expression du taux de dissipation isotrope en régime compressible. Cependant, l'introduction du formalisme de Favre rend la complexité de cette équation de transport encore plus importante que celle déjà constatée pour son homologue en régime incompressible. Elle ne peut pas ainsi être directement modélisée. Une première démarche consiste donc à étendre la méthodologie adoptée en régime incompressible pour construire l'équation de transport de la dissipation totale, en supposant que les mêmes mécanismes pilotant le transport de  $k$  peuvent agir pour le transport de  $\epsilon$ . Suivant cette démarche, à tout mécanisme additionnel ajouté dans le transport de  $k$  (pression-dilatation, production enthalpique) peut correspondre un mécanisme équivalent dans le transport de  $\epsilon$  [167], même si ces termes peuvent ponctuellement s'avérer être finalement négligeables dans des configurations particulières où le calage des nouvelles constantes introduites serait effectué. La seconde démarche, plus couramment adoptée, consiste à décomposer, à haut nombre de Reynolds, la forme isotrope du taux de dissipation en une composante rotationnelle et une composante dilatationnelle selon (pour un écoulement turbulent homogène) :

$$\bar{\rho}\epsilon = \bar{\rho}\epsilon_s + \bar{\rho}\epsilon_c = 2\overline{\mu\omega''_{ij}\omega''_{ij}} - \frac{4}{3}\overline{\mu\frac{\partial v_k''}{\partial x_k}\frac{\partial v_k''}{\partial x_k}}$$

Le taux de dissipation solénoïdale  $\rho\epsilon_s$  représente alors le taux de dissipation dû au processus régulier de cascade énergétique inertielle aux petites échelles, observable en l'absence d'effets dilatationnels. Les études de simulation directe ayant démontré que l'influence de la compressibilité était généralement négligeable sur  $\epsilon_s$  [182][143], il est alors directement assimilé au taux de dissipation global observé en situation incompressible. La procédure retenue consiste alors à injecter cette décomposition dans l'équation de transport de  $k$ , à n'utiliser qu'une équation additionnelle pour le transport de la dissipation solénoïdale  $\epsilon_s$  et à finalement modéliser le taux de dissipation supplémentaire  $\epsilon_c$  dans l'équation de transport de  $k$ . Examinons alors l'équation de transport (plus simple) de la dissipation solénoïdale (donnée par exemple par Krishnamurty et Shyy [97]) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\epsilon_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\epsilon_s)}{\partial x_i} &= \underbrace{-2\nu\overline{\omega''_j v''_i \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x_i}} + 2\nu\overline{\omega''_j \omega''_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}} + 2\nu\tilde{\omega}_i \left( \overline{\omega''_j \frac{\partial v''_j}{\partial v''_i}} \right)}_{P_\epsilon} \\ &\quad \underbrace{-\overline{v''_i \frac{\partial(\nu\omega''_j \omega''_j)}{\partial x_i}} + 2\nu\overline{\omega''_j \omega''_i \frac{\partial v''_j}{\partial x_i}}}_{D_\epsilon} \\ &\quad \underbrace{-2\nu^2 \overline{\frac{\partial \omega''_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega''_j}{\partial x_i}}}_{\Phi_\epsilon} \\ &\quad \underbrace{2\nu \frac{\epsilon_{jkl}}{\rho^2} \left( \overline{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_k} \omega''_j \frac{\partial p'}{\partial x_l}} + \overline{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_l} \omega''_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_k}} + \overline{\omega''_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_l}} \right)}_{B_\epsilon} \end{aligned} \quad (4.37)$$

où  $\epsilon_{jkl}$  est le tenseur alterné,  $\tilde{\omega}_i$  et  $\omega''_i$  sont respectivement la vorticité moyenne et sa fluctuation. On s'aperçoit qu'aux mécanismes classiques identifiables de production  $P_\epsilon$ , diffusion

$D_\epsilon$  et dissipation  $\Phi_\epsilon$ , s'ajoute un terme barocline  $B_\epsilon$ , représentant une interaction additionnelle entre les gradients de masse volumique et de pression, qui modifie le transport de la dissipation solénoïdale. Par une analyse d'ordre de grandeur, Krishnamurty et Shyy [97] montrent que le second terme de  $B_\epsilon$  est prépondérant, sans pour autant néanmoins pouvoir proposer une véritable modélisation indépendante pour ce terme. Puisque pour l'écoulement moyen,  $\vec{\nabla}(1/\rho)(\vec{\nabla}p)$  représente effectivement une production additionnelle de vorticité, ce second terme de  $B_\epsilon$  est identifié à un terme de production. Sa modélisation est alors proposée par analogie avec le terme  $G$  apparaissant dans l'équation de transport de  $k$ , selon :

$$B_\epsilon = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon_s}{k} G$$

A défaut de disposer de données expérimentales ou de résultats de simulation directe appropriés, on notera bien que la constante  $C_{\epsilon 1}$  n'est cependant ici adoptée qu'en accord avec le calage conventionnel du mécanisme de production de  $\epsilon$ . Par rapport à l'équation de transport relative au régime incompressible, c'est le seul terme additionnel qui sera considéré dans cette étude, en dehors évidemment des termes dilatationnels apparaissant implicitement via la modification de l'expression de la production d'énergie cinétique turbulente  $P_k$ . L'effet des termes dilatationnels ne saurait évidemment être négligé dans les zones de forte détente ou recompression [68], et seront donc systématiquement pris en compte.

## Modélisation de la dissipation compressible

**Modélisation de Zeman** Zeman [182] fait l'hypothèse qu'à haut nombre de Mach turbulent, un champ initialement solénoïdal est profondément modifié par l'apparition de "shocklets". L'hypothèse de l'existence d'une infinité de telles microstructures de chocs apparaissant au sein des tourbillons de l'écoulement est confortée désormais par plusieurs travaux en simulation numérique directe (DNS) [129][141]. En dissipant "anormalement" une partie de l'énergie cinétique  $k$  sur des temps caractéristiques très courts (de l'ordre de l'échelle de temps dissipative), elles vont directement affecter le taux de dissipation dilatationnelle  $\epsilon_c$  sans modifier  $\epsilon_s$ . Suivant cette hypothèse, l'idée est alors d'assimiler le saut de vitesse  $\Delta U = u_1 - u_2$  ayant lieu à travers chaque micro-choc observable en DNS (où  $u_1$  est la vitesse en amont du micro-choc et  $u_2$  la vitesse en aval), à la variation des fluctuations de vitesse considérée dans l'approche RANS  $\Delta u' = c_o \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \left(\frac{m^2-1}{m}\right)$  où  $c_o$  est la vitesse du son évaluée par rapport aux conditions génératrices et  $m = \frac{U_1}{c_o} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$ , le nombre de Mach en amont du choc. En considérant que la dissipation compressible intervient à faible nombre de Reynolds sur une échelle de longueur représentative de l'épaisseur du choc  $\lambda$  apparaissant dans le tourbillon d'échelle de longueur caractéristique  $L$ , on peut relier par ailleurs le saut de vitesse à la viscosité locale de l'écoulement. Le taux de dissipation dilatationnel apparaît ainsi comme une fraction de la dissipation solénoïdale  $\left(\frac{k^3}{L}\right)$  :

$$\tilde{\epsilon}_c \propto \left(\frac{k^3}{L}\right) \frac{1}{M_t^3} \left(\frac{m^2-1}{m}\right)^3 \left(\frac{c_k}{c}\right)^3$$

Zeman choisit alors de décrire la répartition des nombres de Mach amont aux chocs  $m$  par une fonction densité de probabilité, fonction du facteur d'aplatissement  $K$  (kurtosis) et du niveau des fluctuations de vitesse donné par  $M_t$ , et tendant progressivement vers une fonction gaussienne :

$$\frac{1}{M_t^4} \int_1^\infty \left(\frac{m_1^2-1}{m_1}\right)^3 p(m_1) dm_1$$

où la pondération est donnée par :

$$F(M_t, K) = \frac{1}{M_t^4} \int_1^\infty \left( \frac{m_1^2 - 1}{m_1} \right)^3 p(m_1) dm_1$$

Par souci de simplicité algorithmique, on utilise classiquement une expression simplifiée de cette fraction de pondération intégrée numériquement en fonction du facteur d'aplatissement, simplement dépendante du nombre de Mach turbulent local :

$$\begin{cases} \epsilon_c = 0.75F(M_t)\epsilon_s \\ F(M_t) = 1 - e^{-\left[\frac{M_t - M_{to}}{\sigma_o}\right]^2}, \quad M_t \geq M_{to} \\ F(M_t) = 0, \quad M_t \leq M_{to} \\ M_{to} = 0,1\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \\ \sigma_o = 0,6 \end{cases} \quad (4.38)$$

Les valeurs des coefficients  $M_{to}$  et  $\sigma_o$  que nous utilisons dans la fonction (4.38), correspondent au calage originellement effectué pour le cas de la couche de mélange bidimensionnelle.

**Modélisation de Sarkar et al.** Cette modélisation repose sur des observations de simulation directe. A partir d'une analyse asymptotique basée sur l'hypothèse que la dissipation dilatationnelle varie sur une échelle de temps acoustique beaucoup plus courte que l'échelle de temps de la dissipation solénoïdale, Sarkar et al. [143] concluent que la dissipation dilatationnelle peut être représentée comme une fraction de la dissipation solénoïdale, évoluant de façon monotone en fonction du nombre de Mach turbulent. Ils proposent la fermeture suivante :

$$\epsilon_c = \alpha_c M_t^2 \epsilon_s \quad (4.39)$$

Initialement, la constante  $\alpha_c$  vaut 1, lorsque seul le terme de dissipation compressible est considéré dans l'équation de transport de  $k$ . On choisit de considérer simultanément  $\epsilon_c$  et le terme de pression-dilatation  $\Pi_d$  donné par l'équation (4.36). Dans ce cas, une valeur de 0,5 est prescrite pour la constante  $\alpha$ .

### Expression du coefficient de viscosité turbulente

En toute rigueur, la dissipation totale  $\epsilon$  doit être prise en compte pour exprimer le coefficient de viscosité turbulente, soit :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4.40)$$

On note cependant que, pour des raisons généralement non-explicitées, certains auteurs [28] ne considèrent que la partie solénoïdale de la dissipation pour réexprimer  $\mu_t$ . D'après Guezengar et al. [41], des écarts notables entre la simulation et l'expérience peuvent apparaître si seule la dissipation solénoïdale est prise en compte, dès lors que le niveau de compressibilité augmente. Avec la prise en compte de la dissipation totale dans la fermeture de  $\mu_t$ , l'effet dissipatif sur  $k$  est cependant beaucoup plus important. D'une part, on prend en compte une réduction de  $k$  via le terme dissipatif ajouté dans l'équation de son transport. D'autre part, la réduction de la viscosité turbulente induit implicitement, via les contraintes turbulentes, une réduction de la production par cisaillement  $P_k$ . On notera que cet effet, qui peut paraître redondant, n'est pas clairement souligné dans la littérature. La cohérence de cette modélisation pourrait être sujette à question. Par ailleurs, on remarque qu'une modélisation de la dissipation compressible comme

une fraction de  $\epsilon_s$  peut également s'interpréter, lors de la réexpression de la viscosité turbulente, comme une pondération de la constante  $C_\mu$  par le nombre de Mach turbulent (qui devient alors  $C_\mu(1 + F(M_t))^{-1}$  dans l'équation (4.40)). Puisque ni le calage de cette constante  $C_\mu$ , ni celui des constantes apparaissant dans la modélisation de la dissipation compressible n'est universel (voir paragraphe 4.4.4), aucune des deux approches n'apparaît *a priori* plus légitime que l'autre. Les deux approches seront donc testées.

#### 4.4.5 Remarques finales sur la prise en compte des effets de compressibilité

Ce simple paramétrage de la dissipation compressible ou de la pression-dilatation en fonction du nombre de Mach turbulent est encore largement employé, à défaut de disposer de modèles plus précis. Cependant, de nouvelles études (voir par exemple [102]) tendraient à montrer que d'autres paramètres doivent nécessairement être introduits pour évaluer plus correctement l'effet de compressibilité. Mentionnons par exemple l'intéressante proposition de Lejeune [102] pour la modélisation du terme de pression-dilatation. En linéarisant l'équation de continuité, on peut relier l'évolution temporelle de la fluctuation de masse volumique à la divergence du champ moyen, la dilatation fluctuante étant alors approchée en introduisant le nombre de Mach turbulent pour représenter l'échelle de temps acoustique :

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = O\left(\frac{1}{\rho_o} \frac{\rho'}{\tau_a}\right) = O\left(\frac{\rho'}{\rho_o} \frac{\epsilon}{k M_t}\right)$$

de sorte que

$$\overline{\rho' \frac{\partial v'_i}{\partial x_i}} = \alpha \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}} \frac{\epsilon}{k M_t}$$

Il s'agit alors de relier les fluctuations de masse volumique aux fluctuations de pression. Dans son cas particulier d'étude de la couche de mélange isobare, Lejeune introduit l'hypothèse de turbulence quasi-isentropique, de sorte que l'on peut simplement considérer que  $p'/\bar{p} = \gamma \rho'/\bar{\rho}$ , et le terme de pression-dilatation se réécrit alors :

$$\Pi_d = \alpha \frac{\overline{\rho'^2}}{\bar{\rho}^2} \frac{\gamma \bar{p}}{M_t} \frac{\epsilon}{k}$$

Utilisant une équation de transport supplémentaire pour la variance de masse volumique, cette stratégie lui permet finalement, via l'introduction indirecte d'une échelle de temps acoustique associée à la variance de masse volumique, de mieux capturer les variations de  $\Pi_d$  liées aux phénomènes de faible détente ou compression modérée. Au vu des forts gradients de pression et de masse volumique rencontrés dans le cas d'un jet fortement sous-détendu, on peut plus difficilement faire l'hypothèse que les fluctuations de pression restent isentropiques. Celles-ci ne sauraient alors être aussi simplement corrélées aux fluctuations de masse volumique et cette modélisation ne peut évidemment plus s'appliquer.

Soulignons ensuite la délicate interprétation de la pertinence du couplage des différentes modélisations proposées. Tout d'abord, les modélisations de Sarkar ou Zeman pour la pression-dilatation ne font intervenir que le terme de production par cisaillement  $P_k$  avec des constantes calées pour le cas de la couche de mélange bidimensionnelle dans laquelle l'effet des gradients moyens de pression peut être négligé. La modélisation de ce terme peut donc légitimement être remise en question lorsque le terme de production enthalpique  $G$  n'est plus considéré négligeable. L'incorporation du terme  $G$  dans un terme global de production dans le transport de la dissipation solénoïdale devient d'autant plus artificielle. A ce propos, Delamare [44] préfère par exemple regrouper ces termes de pression-dilatation et de production enthalpique, et simplement négliger

l'interaction des fluctuations de  $p'$ . La modélisation de l'ensemble de ces termes par une hypothèse gradient le conduit à une simple dépendance aux gradients moyens de masse volumique et de pression (terme modélisé typiquement égal au double de l'expression (4.29)).

A défaut de disposer de données expérimentales ou de simulation directe plus élaborées, l'extension du modèle  $k - \epsilon$  au régime compressible est généralement réalisée en conservant les valeurs classique du modèle pour l'ensemble des cinq constantes introduites. Nous ne pourrions que nous contenter de faire de même dans notre étude numérique, même si l'incorporation des nouveaux termes nécessiterait de requestionner leur légitimité.

Il est désormais reconnu (voir par exemple Vreman et al. [169]) que l'influence des termes de dissipation ou de pression-dilatation n'est finalement pas si importante dans les couches de mélanges compressibles même si des "shocklets" théoriques y sont observés (et qui n'ont pas été expérimentalement observés à ce jour!). La réduction du taux d'épanouissement d'une couche compressible serait dûe essentiellement à l'anisotropie du tenseur de Reynolds et à la diminution des fluctuations de pression agissant donc directement sur le tenseur des contraintes (voir la récente étude de Sarkar [147] (2002)).

## 4.5 Prise en compte d'effets de non-équilibre

Une des principales faiblesses du modèle  $k - \epsilon$ , que ce soit pour les écoulements compressibles ou incompressibles, provient du fait que le taux de production de l'énergie cinétique turbulente tend à être surestimé, et qu'un retard peut être observée dans la réponse du taux de dissipation à un changement rapide du taux de contraintes moyennes. Diverses modifications ont été proposées pour pallier ce défaut, consistant à modifier les constantes introduites dans l'équation de transport de la dissipation solénoïdale. Chen et Kim [33] proposent de modifier la constante  $C_{\epsilon 1}$  selon :

$$C_{\epsilon 1} = 1,15 + 0,25 \frac{\mathcal{P}_k}{\epsilon_s} \quad (4.41)$$

Cette seule modification aurait tendance, d'après Shyy et Krishnamurty [152] et d'après des tests de simulation sur les longueurs de recirculation sur une marche descendante, à surestimer le taux de production de dissipation. En conjonction avec la première modification, une seconde modification pourrait alors être ajoutée sur la constante  $C_{\epsilon 2}$  :

$$C_{\epsilon 2} = 1,45 + 0,45 \frac{\mathcal{P}_k}{\epsilon_s} \quad (4.42)$$

cette modification pouvant être vue comme un ajout d'une échelle de temps de relaxation entre la production et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Afin d'éviter que cette modification n'induisse une surestimation du taux de décroissance de l'énergie cinétique de turbulence (observée dans une situation de turbulence isotrope décroissante), Shyy et Krishnamurty proposent de limiter la valeur maximale que pourrait prendre cette constante à la valeur classique du modèle de base, soit 1,92.



## 4.6 Bilan de la modélisation retenue sous forme différentielle en coordonnées axisymétriques

Le système d'équations de bilan que nous retenons, est finalement redonné dans son ensemble ci-dessous, sous forme différentielle en coordonnées axisymétriques. Les équations de transport de masse  $\bar{\rho}$ , des composantes de la quantité de mouvement moyenne  $\bar{\rho}\tilde{v}_x$  et  $\bar{\rho}\tilde{v}_r$ , d'énergie totale  $\bar{\rho}\tilde{E}$ , d'énergie cinétique turbulente  $\bar{\rho}k$  et du taux de dissipation solénoïdal de l'énergie cinétique de turbulence  $\bar{\rho}\epsilon_s$ , sont respectivement données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r\bar{\rho}\tilde{v}_r}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{v}_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}\tilde{v}_x^2 + \bar{p}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{\rho}\tilde{v}_x\tilde{v}_r) = \frac{\partial}{\partial x} [\widetilde{\tau_{xx}} - \overline{\rho v_x'' v_x''}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (\widetilde{\tau_{xr}} - \overline{\rho v_x'' v_r''})] \\ \frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{v}_r)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}\tilde{v}_r\tilde{v}_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{\rho}\tilde{v}_r^2 + \bar{p}) = \frac{\partial}{\partial x} [\widetilde{\tau_{xr}} - \overline{\rho v_x'' v_r''}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (\widetilde{\tau_{rr}} - \overline{\rho v_r'' v_r''})] \\ \quad + \frac{1}{r} (\bar{p} + \widetilde{\tau_{\theta\theta}} + \overline{\rho v_\theta'' v_\theta''}) \\ \frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\tilde{v}_x (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r\tilde{v}_r (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})] \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tilde{v}_x (\widetilde{\tau_{xx}} - \overline{\rho v_x'' v_x''}) + \tilde{v}_r (\widetilde{\tau_{xr}} - \overline{\rho v_x'' v_r''}) + \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \gamma C_v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right] \\ \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \tilde{v}_x (\widetilde{\tau_{xr}} - \overline{\rho v_x'' v_r''}) + \tilde{v}_r (\widetilde{\tau_{rr}} - \overline{\rho v_r'' v_r''}) + \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \gamma C_v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right) \right] \\ \frac{\partial (\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{v}_x k)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r\tilde{v}_r \bar{\rho}k}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \mathcal{P}_k + G + \Pi_d - \bar{\rho}(\epsilon_s + \epsilon_c) \\ \frac{\partial (\bar{\rho}\epsilon_s)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}\tilde{v}_x \epsilon_s)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r\tilde{v}_r \bar{\rho}\epsilon_s}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon_s}{\partial r} \right] + \frac{\epsilon_s}{k} (C_{\epsilon 1} (\mathcal{P}_k + G) - C_{\epsilon 2} \bar{\rho}\epsilon_s) \end{array} \right.$$

où le terme de pression est relié, via l'équation d'état, aux variables conservatives par la relation suivante :

$$\bar{p} = (\gamma - 1) \bar{\rho} \left( \tilde{E} - \frac{|\vec{V}|^2}{2} - k \right)$$

La modélisation des termes de contraintes de cisaillement par viscosité moléculaire et des contraintes de cisaillement turbulentes conduit aux expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\tau_{xx}} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \right) \right) \\ \widetilde{\tau_{rr}} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\tilde{v}_x}{r} \right) \right) \\ \widetilde{\tau_{\theta\theta}} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\tilde{v}_r}{r} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) \right) \\ \widetilde{\tau_{xr}} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\overline{\rho v_x'' v_x''} = \mu_t \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} \right) \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho}k \\ -\overline{\rho v_r'' v_r''} = \mu_t \left( \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\tilde{v}_x}{r} \right) \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho}k \\ -\overline{\rho v_\theta'' v_\theta''} = \mu_t \left( \frac{4}{3} \frac{\tilde{v}_r}{r} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho}k \\ -\overline{\rho v_x'' v_r''} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

La viscosité moléculaire (pour laquelle on néglige les fluctuations) et le coefficient de viscosité

turbulente sont respectivement modélisés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\tilde{T}) = \mu_o \sqrt{\frac{\tilde{T}}{T_o}} \frac{1+S_{th}/T_o}{1+S_{th}/\tilde{T}} \quad , \quad (\text{Sutherland}) \\ \mu_t = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon_s + \epsilon_c} \quad , \quad (\text{Fermeture complète}) \\ \quad = \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\epsilon_s} \quad , \quad (\text{Fermeture partielle}) \end{array} \right.$$

Les termes de production d'énergie cinétique turbulente par cisaillement, de production enthalpique, de pression-dilatation et du taux de dissipation dilatationnel de l'énergie cinétique turbulente sont respectivement donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_k = -\overline{\rho v_x'' v_x''} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \overline{\rho v_r'' v_r''} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \overline{\rho v_\theta'' v_\theta''} \frac{\tilde{v}_r}{r} - \overline{\rho v_x'' v_r''} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} \right) \\ G = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nu_t \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) \quad , \quad \text{Jones [86]} \\ \quad = \frac{2M_t}{M_t - 1} \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \right) \left[ \frac{\mu_t \gamma C_v}{Pr_t} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) \right. \\ \quad \left. + \tilde{v}_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} (-\overline{\rho v_x'' v_x''} - \overline{\rho v_x'' v_r''}) + \tilde{v}_r \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} (-\overline{\rho v_x'' v_r''} - \overline{\rho v_r'' v_r''}) \right] \quad , \quad \text{Shyy et Krishnamurty [152]} \\ \Pi_d = \begin{cases} -0,004 * 2 * \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon_s} \mathcal{S}_{ij}^* \mathcal{S}_{ij}^* & , \quad M_t > 0,1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \\ 0 & , \quad M_t < 0,1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \end{cases} \quad , \quad \text{Zeman [182]} \\ \quad = -0,4 \mathcal{P}_k M_t^2 + 0,2 \bar{\rho} \epsilon_s M_t^2 \quad , \quad \text{Sarkar et al. [142]} \\ \epsilon_c = \begin{cases} 0,75 \epsilon_s \left( 1 - e^{-\left[ \frac{M_t - 0,1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}}{0,6} \right]^2} \right) & , \quad M_t \geq 0,1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \\ 0 & , \quad M_t \leq 0,1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \end{cases} \quad , \quad \text{Zeman [182]} \\ \quad = 0,5 M_t^2 \epsilon_s \quad , \quad \text{Sarkar et al. [142]} \end{array} \right.$$

où le nombre de Mach turbulent est donné par :  $M_t = \frac{\sqrt{2k}}{\tilde{a}}$ ,  $\tilde{a} = \sqrt{\gamma r \tilde{T}}$  étant la vitesse de son moyenne, et les composantes  $\mathcal{S}_{ij}^*$  du déviateur du tenseur des déformations moyennes sont données respectivement par  $\tilde{\tau}_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{V}$  où  $\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r}$ . Dans le cas axisymétrique avec une vitesse de swirl nulle, la sommation indiciale des carrés de ces composantes se réduit à :

$$\mathcal{S}_{ij}^* \mathcal{S}_{ij}^* = \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{v}_r}{r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial x} \right)^2$$

Finalement, l'ensemble des constantes de la modélisation est donné par le tableau suivant :

Constantes physiques	Calage conventionnel des constantes du modèle $k - \epsilon$ [100]	Constantes ajoutées [20] ou modifiées [152]
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\mu_o = 1,711.10^{-5} \text{kg/ms}</math></li> <li>- <math>T_o = 273,15 \text{K}</math></li> <li>- <math>S_{th} = 110,4 \text{K}</math></li> <li>- <math>Pr = 0,72</math></li> <li>- <math>\gamma = 1,4</math></li> <li>- <math>C_v = 721 \text{kJ/molK}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>C_\mu = 0,09</math></li> <li>- <math>C_{\epsilon 1} = 1,44</math></li> <li>- <math>C_{\epsilon 2} = 1,92</math></li> <li>- <math>\sigma_k = 1,0</math></li> <li>- <math>\sigma_\epsilon = 1,3</math></li> <li>- <math>0,5 &lt; Pr_t &lt; 0,9</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>0,7 &lt; \sigma_t &lt; 1</math></li> <li>- <math>C_{\epsilon 1} = 1,15 + 0,25 \frac{\mathcal{P}_k}{\epsilon_s}</math></li> <li>- <math>C_{\epsilon 2} = \max(1,92, 1,45 + 0,45 \frac{\mathcal{P}_k}{\epsilon_s})</math></li> </ul>

Des principes énoncés tout au long de ce chapitre, découle finalement, redonné synthétiquement dans cette section, l'ensemble des équations aux dérivées partielles et des modélisations des termes inconnus que nous retenons pour décrire le comportement des écoulements compressibles mono-espèces. Dans ces bilans, on notera que les termes sont ordonnés sous la forme classique d'un équilibre mettant en jeu les mécanismes fondamentaux, soit respectivement accumulation temporelle plus convection équilibrées par la diffusion ajouté à la production. Chaque terme de dérivation selon la direction radiale se décompose en  $\frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r}$ , de sorte que l'on pourra traiter numériquement ce système de façon identique au cas bidimensionnel où tous les termes additionnels en facteur de  $\frac{1}{r}$  s'apparentent à des termes sources de nature purement géométrique. A chacun des mécanismes cités, correspond alors un opérateur mathématique qu'il s'agit de discrétiser judicieusement afin d'obtenir une méthode à la fois suffisamment robuste et précise pour prévoir numériquement le comportement d'écoulements aussi "sévères" que celui, en particulier d'un jet fortement sous-détendu. Nous allons désormais préciser les choix que nous retenons pour discrétiser successivement chacun de ces opérateurs et intégrer finalement le système global qui en résulte. Nous insisterons, en particulier, sur les difficultés qui apparaissent dès lors que l'on cherche à prévoir des zones de chocs, et sur les remèdes choisis pour les surmonter.

## Chapitre 5

# Présentation de la méthode numérique

Ce chapitre est dédié à la présentation des principes à partir desquels les opérateurs mathématiques relatifs aux mécanismes de convection, diffusion et source sont discretisés. Afin de distinguer les expressions et propriétés générales qui s'appliquent au système d'équations continues, des expressions qui relèvent de l'approximation numérique finalement retenue, les vecteurs d'état ou de flux seront soit notés  $\vec{U}$  et  $\vec{F}(\vec{U})$  respectivement dans l'espace continu, soit  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  pour l'approximation numérique de leur moyenne dans l'espace discret.

### 5.1 Application d'une approche mixte éléments finis / volumes finis

#### 5.1.1 Principes : du problème continu à sa résolution approchée

La méthode numérique retenue dans le programme N3SNATUR qui a servi de base à notre travail, repose sur une approche mixte de discrétisation par volumes finis et éléments finis. Pour ces deux méthodes, le principe consiste à approcher la solution recherchée sous une forme particulière (fonction constante ou linéaire par morceau respectivement dans notre cas) que l'on injecte dans la formulation faible du système d'équations exactes. L'approche mixte réside ici dans le choix de la formulation utilisée qui est fonction du terme traité. Ainsi, chaque opérateur est traité séparément en adoptant la méthode d'évaluation qui lui est la plus appropriée.

Le domaine spatial physique  $\Omega$  est géométriquement représenté par un maillage triangulaire  $\mathcal{T}_h$ . Introduisons  $n_T$  le nombre de triangles composant  $\mathcal{T}_h$  et  $I_T$  l'ensemble des indices de ces triangles.  $\mathcal{T}_h$  est conforme (voir chapitre 7), c'est à dire notamment que la réunion de l'ensemble des triangles constitue tout et uniquement  $\mathcal{T}_h$ , soit  $\mathcal{T}_h = \bigcup_{k \in I_T} T_k$ .

L'approche "cell-vertex" retenue consiste alors à construire un maillage dual de  $n_C$  cellules ou volumes de contrôle<sup>1</sup> (voir figure 5.1)  $C_i$  construits autour des noeuds  $i$  distribués dans le domaine de calcul. Notons  $I_C$  l'ensemble des indices de ces cellules (ou de façon équivalente, l'ensemble des indices des noeuds),  $I_T^i$  le sous-ensemble de  $I_T$  d'indices des triangles partageant le noeud  $i$  en commun, et  $I_C^i$ , le sous-ensemble de  $I_C$  d'indices des cellules voisines du noeud indicé  $i$ . La frontière  $\Gamma_i$  de chaque volume de contrôle  $C_i$  est construite en joignant chaque milieu d'arête  $M_{ij}$  (arête joignant le noeud  $i$  au noeud  $j$ ,  $j \in I_C^i$ ) aux centres de gravité  $G_k$  des triangles

---

<sup>1</sup>La terminologie "volume de contrôle" est utilisée de façon générique dans toute la suite de l'exposé en référence à la méthode dite de volumes finis. Pour la modélisation axisymétrique retenue, toute référence à un volume correspondra naturellement à une surface tandis qu'une référence à une surface correspondra à un segment ou la longueur de ce segment.

$T_k$  voisins de  $i$ ,  $k \in I_T^i$ . Au détriment d'une gestion globale du maillage plus complexe, ce choix présente l'avantage de minimiser la déformation des volumes de contrôle  $C_i$  lorsque les mailles triangulaires sont étirées et permet notamment d'améliorer la précision de l'évaluation des flux convectifs dès lors que l'orientation des mailles triangulaires est contrôlée.

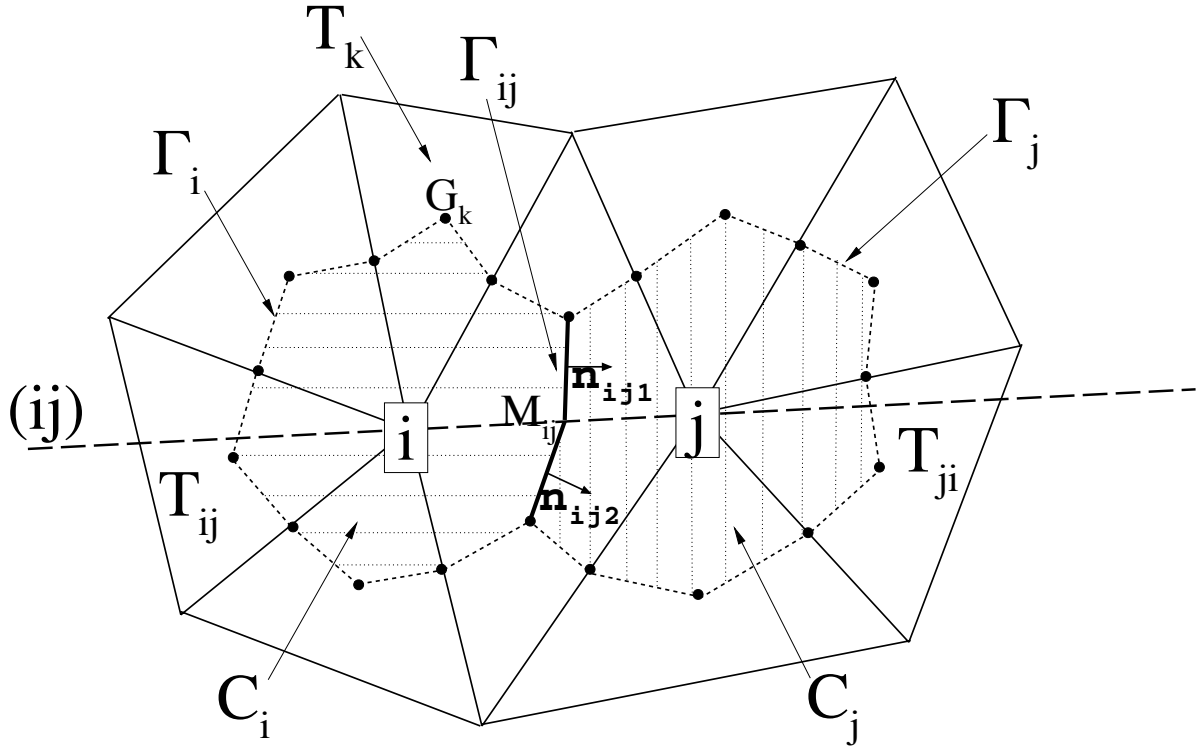


FIG. 5.1 – **Représentation bidimensionnelle de la discrétisation spatiale retenue :**  
 $C_i$  (resp.  $C_j$ ) : Cellule ou volume de contrôle construite autour du nœud indicé  $i$  (resp.  $j$ ),  $\Gamma_i$  (resp.  $\Gamma_j$ ) : Frontière du volume de contrôle  $C_i$  (resp.  $C_j$ ),  $\Gamma_{ij}$  : Portion de frontière commune à  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$ ,  $G_k$  : Centre de gravité du triangle  $T_k$ ,  $k \in I_T^i$  voisin du nœud indicé  $i$ ,  $M_{ij}$  : Milieu du segment joignant les nœuds  $i$  et  $j$ ,  $(ij)$  : Droite passant par les nœuds indicés  $i$  et  $j$ ,  $T_{ij}$  (resp.  $T_{ji}$ ) : Triangle amont (resp. aval) au nœud  $i$  (resp.  $j$ ) intersectant la droite  $(ij)$ ,  $\vec{n}_{ij}$  : normale moyenne à  $\Gamma_{ij}$ .

A partir de l'équation bilan (4.9), on introduit classiquement la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes. Quelque soit la fonction test prise dans l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur le domaine physique considéré  $\phi \in L^2(\Omega)$ , le vecteur d'état conservatif  $\vec{U}$  doit vérifier :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{U} \phi \, dV + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}(\vec{U}) \phi \, dV = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{U}) \phi \, dV + \int_{\Omega} \vec{\mathcal{S}} \phi \, dV \quad (5.1)$$

D'une part, à un instant  $t$  donné, la solution approchée peut être recherchée, sur l'ensemble du domaine, comme une fonction  $\vec{U}_h(x, r)$  constante par morceau, constante sur chacun des  $n_C$

volumes de contrôle  $C_i$  (formulation volumes finis) :

$$\vec{\mathcal{U}}_h(x, r) = \sum_{i=1}^{n_C} \vec{\mathcal{U}}_i \Phi_i(x, r)$$

où  $(x, r)$  sont les coordonnées d'un point de  $\Omega$ , et  $\vec{\mathcal{U}}_i$  est le vecteur d'état conservatif recherché au noeud  $i$ . Les fonctions tests formant une base de l'espace d'interpolation de  $\vec{\mathcal{U}}_h$  seront alors naturellement choisies comme les fonctions indicatrices des volumes de contrôle :

$$\begin{cases} \Phi_i(x, r) = 1 & \text{si } (x, r) \in C_i \\ \Phi_i(x, r) = 0 & \text{si } (x, r) \notin C_i \end{cases} \quad (5.2)$$

D'autre part, cette solution peut être recherchée comme une fonction continue, linéaire par morceau sur chacun des  $n_T$  triangles (formulation éléments finis) :

$$\vec{\mathcal{V}}_h(x, r) = \sum_{k=1}^{n_T} \Phi'_k(x, r) \vec{N}_k(x, r)$$

où  $\Phi'_k(x, r)$  est la fonction indicatrice du triangle indicé  $k$  et où la fonction d'interpolation  $\vec{N}_k$  sur chaque triangle  $T_k$  est réexprimée dans la base des fonctions de base  $B_{jk}$  éléments P1 associées à chaque noeud  $j$  du triangle (voir annexe A), soit en notant  $\mathcal{S}(T_k)$  l'ensemble des indices des sommets de  $T_k$  :

$$\vec{N}_k(x, r) = \sum_{j \in \mathcal{S}(T_k)} \vec{\mathcal{U}}_j B_{jk}(x, r) \quad (5.3)$$

L'équivalence des deux formulations impose que la valeur constante  $\vec{\mathcal{U}}_i$  de l'approximation volumes-finis  $\vec{\mathcal{U}}_h$  sur le volume fini  $C_i$  autour du noeud  $i$  soit égale à la moyenne intégrée de l'approximation éléments-finis  $\vec{\mathcal{V}}_h$  sur l'ensemble des portions des éléments finis intersectant  $C_i$ , soit :

$$\int_{C_i} \vec{\mathcal{U}}_i dV = \sum_{k \in I_T^i} \int_{C_i \cap T_k} \vec{\mathcal{V}}_h dV$$

Cette équivalence étant assurée, la forme discrète de l'équation peut être obtenue en mixant les deux formulations. Les termes de variation temporelle et convectifs sont traités par la formulation volumes-finis (la formulation éléments finis sera également utilisée pour l'extension TVD à l'ordre 2, voir chapitre 5.3) tandis que les termes visqueux et termes sources sont évalués à l'aide d'une formulation éléments-finis. En appliquant le théorème de Gauss pour les intégrales des flux convectifs et l'identité de Green pour l'intégrale des flux diffusifs, la formulation mixte volumes-finis / éléments-finis du bilan intégral conservatif devient pour tout volume de contrôle  $C_i$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_i} \vec{\mathcal{U}}_h dV + \int_{\Gamma_i} \vec{\mathcal{F}}(\vec{\mathcal{U}}_h) \cdot \vec{n}_i dS = - \int_{C_i} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{V}}_h) \cdot \vec{\nabla} N_i dS + \int_{C_i} \vec{\mathcal{S}}(\vec{\mathcal{V}}_h) N_i dV \quad (5.4)$$

où  $\vec{n}_i$  est la normale locale à la frontière  $\Gamma_i$  de la cellule  $C_i$  et où l'expression de la fonction d'interpolation  $N_i$  dépend de la portion de triangle considérée lors de l'intégration spatiale. L'évaluation des différents termes de flux est détaillée dans la suite de l'exposé.

### 5.1.2 Formulation discrète obtenue

Introduisons les expressions symboliques du vecteur d'état conservatif discret  $\mathbf{U}_i^n$ , approximation de la moyenne de l'état conservatif sur la cellule  $C_i$  de volume  $V_i$  à l'instant  $t^n$ , des états gauche  $\mathbf{U}_{ij}^n$  et droit  $\mathbf{U}_{ji}^n$  de l'interface  $\Gamma_{ij}$  (relativement à la direction  $(\vec{i}j)$ ) entre la cellule  $C_i$  et une de ses cellules voisines  $C_j$ ,  $j \in I_C^i$ , états évalués dans la direction de la normale moyenne  $\mathbf{n}_{ij}$  à l'interface  $\Gamma_{ij}$ . Le flux numérique convectif  $\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}, \mathbf{U}_{ji}, \mathbf{n}_{ij})$  est alors une approximation du flux moyen pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , fonction de ces deux états adjacents à l'instant  $t^n$ . Les flux diffusifs numériques  $\mathbf{D}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \vec{\nabla} B_{ik}; j \in I_C^i, k \in I_T^i)$  et le vecteur source numérique  $\mathbf{S}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \vec{\nabla} B_{ik}; j \in I_C^i, k \in I_T^i)$  sont des approximations des flux diffusifs et des termes sources considérés constants sur ce même intervalle de temps et qui dépendent d'un état moyen sur la cellule  $C_i$  à l'instant  $t^n$  réexprimé en fonction des états de tous les noeuds voisins et des gradients des fonctions de base des triangles participant à la construction de la cellule. En introduisant  $l_1$  et  $l_2$ , les longueurs des deux segments de frontière composant  $\Gamma_{ij}$ , nous écrirons donc symboliquement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_i^n = (\rho_i, \rho_i \vec{V}_i, \rho_i E_i)^T \simeq \frac{1}{V_i} \int_{C_i} \vec{\mathcal{U}}(\vec{x}, t^n) dV \\ \mathbf{n}_{ij} = \frac{l_1 \vec{n}_{ij1} + l_2 \vec{n}_{ij2}}{l_1 + l_2} \\ \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}, \mathbf{U}_{ji}, \mathbf{n}_{ij}) \simeq \int_{\Gamma_{ij}} \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{n}_{ij} dS \\ \mathbf{D}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \vec{\nabla} B_{ik}; j \in I_C^i, k \in I_T^i) \simeq \int_{\Gamma_{ij}} \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{ij} dS \\ \mathbf{S}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \vec{\nabla} B_{ik}; j \in I_C^i, k \in I_T^i) \simeq \int_{C_i} \vec{\mathcal{S}} dV \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Notons dès à présent que dans une telle approche, la nécessité de considérer *a priori* la direction d'évaluation du flux convectif (via la normale moyenne à  $\Gamma_{ij}$ ), quelque soit le maillage, constitue une des principales limitations des algorithmes d'évaluation des flux convectifs, pouvant conduire, pour certaines simulations, à des solutions absolument non-physiques (cf. chapitre 9). La méthode de réadaptation de maillage choisie (cf. chapitre 7.2) permettra en grande partie de pallier ce problème.

De l'application de la formulation conservative (5.4) sur un volume de contrôle  $C_i$  découle directement la formulation conservative (par construction) discrète du bilan. Au premier ordre d'intégration en temps explicite, nous calculerons donc l'état discret  $\mathbf{U}_i^{n+1}$  à l'instant  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ ,  $\Delta t$  étant le pas de temps choisi, en sommant l'état discret  $\mathbf{U}_i^n$  calculé à l'instant précédent  $t^n$  avec les contributions de flux numérique aux interfaces et d'un terme source éventuel (cas turbulent) :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{V_i} \left[ \sum_{j \in I_C^i} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{U}_{ij}, \mathbf{U}_{ji}, \mathbf{n}_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{D}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \vec{\nabla} B_{ik}; j \in I_C^i, k \in I_T^i) + \mathbf{S}_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j, \vec{\nabla} B_{ik}; j \in I_C^i, k \in I_T^i) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

## 5.2 Evaluation des flux convectifs

Dans cette partie sont introduits les principes des méthodes de décentrage, basées sur quelques unes des propriétés remarquables du système d'équations d'Euler. Elles permettent de dériver des algorithmes à la fois suffisamment précis et robustes pour évaluer les flux convectifs dans les écoulements à grand nombre de Mach. Nous détaillons en particulier les approches classiques de Roe et de Van Leer qui sont utilisées pour l'étude numérique.

### 5.2.1 Principe de décentrage dans une approche volumes-finis

#### Introduction

Les schémas centrés sont basés sur des développements en série de Taylor autour de chaque point et ne permettent pas de prendre en compte les discontinuités introduites par la présence de chocs dans un écoulement. A moins d'ajouter dans ces zones de discontinuités une viscosité numérique artificielle, des instabilités se propagent rapidement et conduisent inéluctablement à la divergence du calcul. En revanche, les méthodes de décentrage vont naturellement introduire un terme stabilisateur de viscosité numérique près de ces discontinuités en se basant sur la structure caractéristique du système hyperbolique des équations d'Euler. Elles consistent, en un point donné, à prendre en compte le sens et l'amplitude des ondes se propageant à vitesse finie au sein de l'écoulement, afin de restreindre naturellement le champ numérique pouvant physiquement influencer la solution en ce point. Un premier niveau est introduit dans les méthodes de découpage de flux (FVS pour "Flux Vector Splitting"), via lesquelles le flux numérique est directement composé de deux contributions amont et aval, et dont l'expression des composantes dépend du nombre de Mach local. Ces méthodes présentent souvent l'avantage d'être plus robustes et surtout plus simples à mettre en oeuvre, mais introduisent généralement une diffusion numérique trop importante pour capturer correctement les couches limites ou les ondes de cisaillements. Un niveau plus élaboré est introduit par les méthodes de découpage des différences de flux (FDS pour "Flux Difference Splitting"). Basée sur le schéma de Godunov, l'évolution en temps d'une discontinuité initiale (entre deux états constants différents sur deux volumes finis adjacents), est calculée par la résolution d'un problème de Riemann local via lequel on décompose l'accroissement de flux en fonction des accroissements élémentaires liés à la propagation des ondes simples caractéristiques.

#### Illustration du principe pour la convection d'un scalaire dans le cas linéaire

Une telle approche traduit alors très concrètement le processus convectif que l'on peut illustrer simplement dans le cas de la résolution du problème de Riemann pour une équation de convection scalaire (d'une variable quelconque  $\psi$ ), soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = 0, & a > 0 \\ \psi(x,0) = \begin{cases} \psi_i, & x < 0 \\ \psi_{i+1}, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.7)$$

L'algorithme dit REA ("Reconstruct Evolve Average") consiste, à partir d'une distribution initiale, à l'instant  $t^n$ , constante par morceau (Figure 5.2(a)), à propager le créneau initial entre  $\psi_i^n$  et  $\psi_{i+1}^n$  (l'onde caractéristique élémentaire) dans la direction (de l'espace-temps) correspondant à sa vitesse de propagation (vers la droite si  $a > 0$ ), et ce pendant un temps suffisamment court pour que les créneaux issus de différentes interfaces voisines ne puissent interagir mutuellement (Figure 5.2(b)). L'état en arrière de ces créneaux étant modifié, l'état moyen  $\psi_{i+1}^{n+1}$  est alors



recalculé en ajoutant une fraction (la fraction modifiée de la cellule) de la variable caractéristique ( $\psi_i$  si l'information vient de la gauche avec  $a > 0$ ), relative à la cellule voisine d'où provient cette information (Figure 5.2(c)) :

$$\psi_{i+1}^{n+1} = \left( \frac{1 - a\Delta t}{\Delta x} \right) \psi_{i+1}^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x} \psi_i^n$$

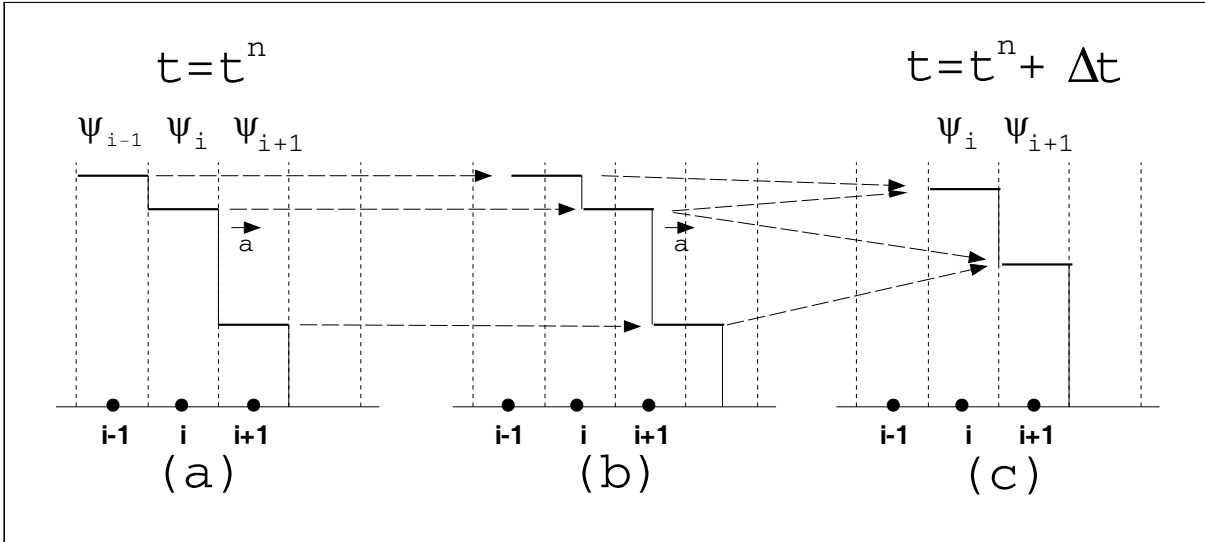


FIG. 5.2 – Illustration de l'algorithme REA pour la convection linéaire du profil d'une variable scalaire : (a) : Distribution initiale constante par morceau, (b) : Convection des créniaux, (c) : Nouveau moyennage des états sur chaque cellule.

Précisons maintenant comment la structure caractéristique des équations d'Euler permet d'étendre ce principe et comment, à partir de la détermination de l'incrément des variables caractéristiques, induite par la propagation de chaque onde élémentaire, on déduit l'expression de l'approximation du flux numérique convectif pour le système conservatif complet.

## 5.2.2 Propriétés des équations d'Euler et résolution du problème de Riemann en une dimension d'espace

### Homogénéité et hyperbolicité

Pour une dimension d'espace, en réintroduisant le vecteur d'état conservatif  $\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho E)^T$  et le vecteur de flux convectif  $\vec{F}(\vec{U}) = (\rho u, \rho u^2 + p, u(\rho E + p))^T$ , le système d'équations d'Euler se réécrit selon :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial x} \vec{F}(\vec{U}) = 0 \quad (5.8)$$

Si l'on considère l'équation d'état du gaz idéal, la première propriété remarquable de ce système, qui est à la base des méthodes de découpage de flux (FVS)) est d'être homogène. En réexprimant la pression et les composantes du flux en fonction des variables conservatives du système et en dérivant chaque composante par rapport à chaque variable, on montre en effet aisément que le flux se réexprime par :

$$\vec{F}(\vec{U}) = \bar{A}(\vec{U}) \vec{U}$$

où  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  est la matrice jacobienne du flux, i.e. la matrice dont les composantes  $A_{ij} = \partial \mathcal{F}_i / \partial \mathcal{U}_j$  sont les dérivées des composantes  $\mathcal{F}_i$  du flux  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  par rapport aux composantes  $\mathcal{U}_j$  du vecteur d'état conservatif  $\overrightarrow{\mathcal{U}}$ . A partir de la réécriture équivalente du système sous cette forme dite quasi-linéaire, on montre alors que la matrice jacobienne  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  du flux est diagonalisable à valeurs propres réelles : le système est hyperbolique. Les valeurs propres  $\lambda_i$  du système représentent les vitesses d'ondes propageant les ondes élémentaires de discontinuités associées au système, dont l'amplitude est respectivement donnée par chaque vecteur propre à droite. L'ensemble de ces vecteurs propres à droite (ou champs caractéristiques) forment une base de l'espace des phases dans laquelle toute onde de discontinuité pourra être décomposée. Cette propriété est à la base des méthodes de découpage de différences de flux (FDS). Les vitesses d'ondes élémentaires représentent également les directions caractéristiques du système (i.e. les courbes de l'espace-temps définies par  $dx/dt = \lambda_i$  et sur lesquelles les équations différentielles deviennent ordinaires).

Dans le cas à une dimension d'espace, en introduisant la vitesse du son  $a = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ , les valeurs propres de  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  sont :

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a$$

et les équations caractéristiques deviennent :

$$\begin{cases} dp - \rho a du = 0 & \text{sur } dx/dt = u - a \\ dp - a^2 d\rho = 0 & \text{sur } dx/dt = u \\ dp + \rho a du = 0 & \text{sur } dx/dt = u + a \end{cases} \quad (5.9)$$

Ces équations caractéristiques nous fournissent, entre autres, un moyen simplifié (bien que très réducteur puisqu'elles dérivent du système réécrit pour une seule dimension d'espace) de prescrire les conditions limites au niveau des frontières libres du domaine de calcul. Il s'agit alors de considérer la direction normale à chaque facette de bord appartenant à chaque frontière libre du domaine de calcul sur laquelle l'état du fluide dépend localement à la fois de l'état intérieur et de l'état extérieur au domaine de calcul (cf. chapitre 6).

Notons bien que seule la formulation conservative permet de réobtenir les vitesses d'ondes physiquement correctes. L'utilisation de la formulation quasi-linéaire permet cependant d'identifier plus clairement la signification physique de chacune de ces ondes élémentaires. En introduisant notamment l'entropie  $s = C_v \ln \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + C_o$  pour réexprimer le système d'équation Euler en fonction du vecteur d'état non-conservatif  $\mathbf{W} = (\rho, u, s)^T$ , on montre en effet que, dans les régions continues de l'écoulement,  $ds/dt = 0$  (ou de façon équivalente  $p = C(s_o)\rho^\gamma$ ) le long de  $dx/dt = u$ . L'onde élémentaire de vitesse  $u$  est ainsi une onde entropique propageant la conservation de l'entropie le long des lignes de courant de l'écoulement. De même, on montre que les ondes élémentaires de vitesses  $u + a$  et  $u - a$  sont des ondes acoustiques propageant des sauts conjugués de pression, de masse volumique et de vitesse.

### Problème de Riemann et structure caractéristique

L'approche volumes-finis retenue pour l'évaluation des termes convectifs nous amène à considérer la résolution du problème de Riemann au niveau de chaque interface moyenne  $\Gamma_{ij}$  séparant les volumes de contrôle  $C_i$  et  $C_j$ . Présentons tout d'abord ce problème dans le cas à une dimension d'espace. Le problème de Riemann a été présenté dans le paragraphe 5.2.1 dans le cas de la convection d'une quantité scalaire. En l'étendant à l'ensemble de l'espace des phases et en supposant notre interface localisée en  $x = 0$  séparant deux états  $\overrightarrow{\mathcal{U}}_i$  et  $\overrightarrow{\mathcal{U}}_j$ , il se réécrit cette

fois-ci pour le système d'équations d'Euler selon :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial x} = 0 \\ \vec{U}(x, 0) = \begin{cases} \vec{U}_i & \text{si } x < 0 \\ \vec{U}_j & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.10)$$

La résolution de ce problème revient physiquement à considérer localement l'évolution d'un gaz dans un tube à choc, l'interface jouant le rôle d'un diaphragme séparant deux gaz portés à un état différent dans chaque volume de contrôle. La solution de ce problème (cf. figure 5.3) est similaire en temps. Aux ondes simples, de vitesses données par les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux, correspondent les champs caractéristiques associés aux vecteurs propres à droite  $\vec{\mathcal{K}}_1, \vec{\mathcal{K}}_2$  et  $\vec{\mathcal{K}}_3$  diagonalisant la matrice jacobienne du flux. Les courbes caractéristiques (de pentes égales aux inverses des vitesses d'onde simple), séparent le domaine d'espace-temps ( $t > 0$ ) en quatre zones distinctes et laissent apparaître deux nouveaux états  $\vec{U}_i^*$  et  $\vec{U}_j^*$ .

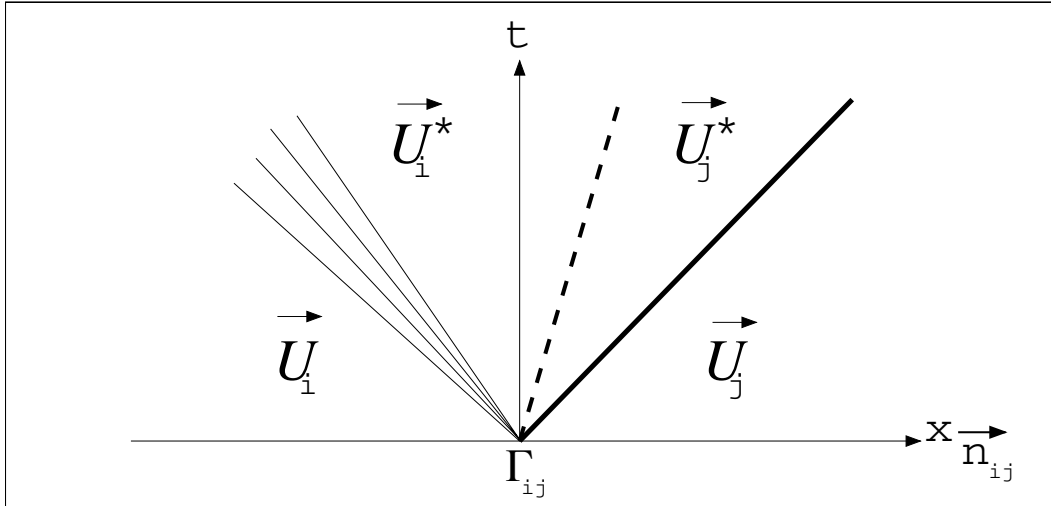


FIG. 5.3 – Solution du problème de Riemann pour le système monodimensionnel des équations d'Euler.

On montre aisément que le second champ caractéristique associé à  $\vec{\mathcal{K}}_2$  et donc à la vitesse d'onde  $\lambda_2 = u$  est linéairement dégénéré (i.e. que  $\vec{\nabla} \lambda_2 \cdot \vec{\mathcal{K}}_2 = 0$ , où l'opérateur gradient  $\vec{\nabla}$  est ici appliqué dans l'espace des phases), tandis que les deux autres champs sont fondamentalement non-linéaires. Ainsi, l'onde centrale représentera toujours une discontinuité de contact (autour de laquelle les caractéristiques sont parallèles) tandis que les autres champs représentent soit une onde de détente, soit une onde de choc, selon que les caractéristiques relatives aux états adjacents divergent ou convergent respectivement de ou vers l'onde simple. La structure propre des équations permet d'analyser la nature de chacun de ces champs caractéristiques élémentaires. Notamment, en introduisant symboliquement, de façon indépendante à la dimension d'espace  $m$  considérée, la matrice  $\vec{\mathcal{K}} = [\vec{\mathcal{K}}_1, \dots, \vec{\mathcal{K}}_m]$  des vecteurs propres à droite  $\vec{\mathcal{K}}_1 = (k_1^1, \dots, k_1^m)^T, \dots, \vec{\mathcal{K}}_m = (k_m^1, \dots, k_m^m)^T$  provenant de la diagonalisation de la matrice jacobienne du flux, les incréments de variables caractéristiques  $(dw_1, \dots, dw_m)$  révèlent la nature du saut des quantités physiques que propage chaque onde simple. Quelque soit  $i$ , ces incréments sont reliés par l'équation différentielle

ordinaire (invariant de Riemann généralisé) suivante :

$$\frac{dw_1}{k_1^i} = \frac{dw_2}{k_2^i} = \dots = \frac{dw_m}{k_m^i}$$

Pour l'onde de discontinuité de contact, on a ainsi

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho u)}{u} = \frac{dE}{\frac{1}{2}u^2} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \text{constante} \\ u = \text{constante} \end{cases} \quad (5.11)$$

L'onde élémentaire de discontinuité de contact propage ainsi un saut de masse volumique et de vitesse tangentielle tout en conservant la pression et la vitesse normale.

Pour une onde de détente, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{1} = \frac{du}{-a/\rho} \\ ds = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u + \int \frac{a}{\rho} d\rho = \text{constante} \\ s = \text{constante} \end{cases} \text{ à travers } \lambda_1 = u - a \\ \begin{cases} u - \int \frac{a}{\rho} d\rho = \text{constante} \\ s = \text{constante} \end{cases} \text{ à travers } \lambda_3 = u + a \end{cases}$$

L'introduction de la loi d'état isentropique  $p = C(s_o)\rho^\gamma$  conduit de façon équivalente à :

$$\begin{cases} u + \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constante} \\ s = \text{constante} \end{cases} \text{ à travers } \lambda_1 = u - a \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} u - \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constante} \\ s = \text{constante} \end{cases} \text{ à travers } \lambda_3 = u + a$$

L'onde de détente est donc une onde propageant (entre le pied et la queue de la détente) un saut continu de la pression, de la masse volumique et de la vitesse normale.

Finalement, le troisième type d'onde simple correspond à une onde de choc, l'analyse ici menée conduisant à reformuler les conditions de saut de Rankine-Hugoniot, i.e. les relations de chocs. De façon équivalente, ces relations s'obtiennent en se plaçant dans le nouveau repère associé à l'onde de choc et en appliquant les relations de conservations unidimensionnelles dans ce nouveau repère dans lequel la vitesse de choc est nulle. L'introduction de la loi de gaz idéal et quelques manipulations algébriques conduisent alors aux relations classiques de chocs 1D. Par exemple, en supposant, en accord avec l'illustration de la figure 5.3, que l'onde associée au champ  $\vec{\mathcal{K}}_1$  de vitesse  $\lambda_1$  est une onde de choc, on introduit le saut de pression à travers ce choc  $P = \frac{p_j^*}{p_j}$ . On peut alors relier la masse volumique  $\rho_j^*$  et la vitesse  $u_j^*$ , relatives à l'état  $\vec{U}_j^*$ , à ce saut de pression, soit :

$$\begin{cases} \frac{\rho_j^*}{\rho_j} = \frac{1 + \alpha P}{\alpha + P} \\ \frac{u_j^* - u_j}{a_j} = \frac{P - 1}{\sqrt{1 + \alpha P}} \frac{1}{\sqrt{\gamma(\gamma - 1)/2}} \end{cases} \quad (5.13)$$

où  $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ .

Cette structure caractéristique nous permet finalement d'évaluer simplement le flux numérique à l'interface. On pourra trouver, par exemple dans l'ouvrage de Hirsch [79], le détail de la résolution complète du problème de Riemann en une dimension d'espace (méthode de Godunov) et, de façon équivalente, la solution analytique du problème de Sod (tube à choc) que nous avons retenu comme cas test de référence pour la validation du code de calcul en configuration

d'écoulement pseudo-unidimensionnelle. La combinaison de ces relations de saut à travers chaque type de discontinuité (équations 5.13, 5.12 et 5.11), en fonction des niveaux de pression  $p_j$  et  $p_i$ , de masse volumique  $\rho_j$  et  $\rho_i$  et de vitesse  $u_j$  et  $u_i$  relatifs à chaque état à droite ou à gauche respectivement, permet en fait d'aboutir à une équation implicite pour ce saut de pression  $P$ , que nous pouvons par exemple réécrire sous la forme suivante :

$$\sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}} \frac{P-1}{\sqrt{1+\alpha P}} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{a_i}{a_j} \left(\frac{p_j}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \left[ \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - P^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] + \frac{u_i - u_j}{a_j}$$

La résolution itérative (par un algorithme classique de Newton-Raphson par exemple) de cette équation conduit alors à la détermination de la pression en aval du choc, de laquelle on déduit successivement toutes les autres variables définissant les états intermédiaires  $\vec{U}_i^*$  et  $\vec{U}_j^*$ . Cette résolution exacte étant trop coûteuse en temps de simulation, on ne résout généralement le problème de Riemann que de façon approchée (solveur d'Osher par exemple) ou on résout exactement une approximation linéaire du problème (solveur de Roe, cf. chapitre 5.2.4).

### Evaluation du flux numérique à l'interface

La décomposition en ondes caractéristiques laisse finalement apparaître une solution similaire en temps pour laquelle l'état du fluide reste cependant constant au niveau de l'interface  $\Gamma_{ij}$  pendant l'intervalle de temps d'intégration en temps. La reconstruction du flux numérique dans l'espace discret s'appuie sur cette caractéristique essentielle. Ce flux numérique se réexprime alors, soit en déterminant cet état constant et en évaluant ensuite l'expression du vecteur flux en cet état, soit en reconstruisant directement ses composantes par addition de toutes les contributions (différences de flux élémentaires) relatives à chaque onde élémentaire. Nous pouvons réécrire formellement, dans l'espace discret, la décomposition de la différence entre les états discrets à gauche  $\mathbf{U}_i$  et à droite  $\mathbf{U}_j$  dans la base formée par les vecteurs propres caractéristiques  $[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3]$  correspondant aux vitesses d'ondes  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ , selon :

$$\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ij}^k \mathbf{K}_k$$

L'état intermédiaire  $\mathbf{U}_{ij}^*$  à l'interface est constant entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , à condition que  $\Delta t$  soit suffisamment petit pour que les ondes issues d'autres interfaces ne puissent interagir avec cet état, et est alors déterminé par :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* &= \mathbf{U}_i + \sum_{k / \lambda_k < 0} \alpha_{ij}^k \mathbf{K}_k \\ &= \mathbf{U}_j + \sum_{k / \lambda_k > 0} \alpha_{ij}^k \mathbf{K}_k \end{aligned} \quad (5.14)$$

Le flux numérique évalué en cet état se reconstruit alors de façon équivalente, soit en ajoutant la contribution des ondes de vitesse négative au flux évalué en l'état gauche, soit en retranchant la contribution des ondes de vitesse positive au flux évalué en l'état à droite :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \sum_{k / \lambda_k < 0} \lambda_{ij}^k \alpha_{ij}^k \mathbf{K}_k \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_j) - \sum_{k / \lambda_k > 0} \lambda_{ij}^k \alpha_{ij}^k \mathbf{K}_k \end{aligned} \quad (5.15)$$

En recombinaut ces deux égalités (5.15), le flux à l'interface apparaît finalement sous la forme équivalente d'un flux moyen (schéma centré instable) auquel s'ajoute un terme correcteur (de viscosité numérique) fonction de la différence entre les états amont et aval :

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_j)) - \frac{1}{2} \sum_k \left| \lambda_{ij}^k \right| \alpha_{ij}^k \mathbf{K}_k \quad (5.16)$$

### 5.2.3 Cas du système d'équations d'Euler bidimensionnel

Comme nous l'avons remarqué, sous l'hypothèse d'axisymétrie, on peut aisément ramener la modélisation de l'écoulement tridimensionnel à une modélisation bidimensionnelle. En fait, le système des équations d'Euler présente une autre propriété remarquable, qui est l'invariance rotationnelle. Cette propriété permet également de ramener l'évaluation du flux convectif en configuration bidimensionnelle, à celle d'un flux unidimensionnel. Présentons cette propriété en considérant désormais le système d'équations d'Euler en configuration bidimensionnelle, soit :

$$\frac{\partial(\vec{\mathcal{U}})}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{\mathcal{U}})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\mathcal{G}}(\vec{\mathcal{U}})}{\partial y} = 0 \quad (5.17)$$

pour lequel on introduit les expressions des vecteurs d'état conservatif  $\vec{\mathcal{U}}$ , de flux longitudinal  $\vec{\mathcal{F}}$  et de flux radial  $\vec{\mathcal{G}}$ , soit :

$$\vec{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{F}}(\vec{\mathcal{U}}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{G}}(\vec{\mathcal{U}}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}$$

De même que nous l'avons fait pour une dimension d'espace, on peut par exemple réécrire l'expression du flux longitudinal sous sa forme quasi-linéaire en introduisant sa matrice jacobienne  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  de composantes  $A_{ij} = \partial \mathcal{F}_i / \partial \mathcal{U}_j$ , soit :

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{\mathcal{U}})}{\partial x} = \overline{\overline{\mathbf{A}}} \frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial x}$$

et montrer que  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  est diagonalisable. Ses valeurs propres réelles sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = u - a \\ \lambda_2 = \lambda_3 = u \\ \lambda_4 = u + a \end{cases}$$

Dans ce cas bidimensionnel, la structure caractéristique des équations d'Euler reste donc similaire. On dénote simplement, par rapport au cas monodimensionnel, l'apparition d'une valeur propre double. Tandis que  $\lambda_2$  correspond toujours à l'onde de discontinuité de contact déjà identifiée, qui introduit un saut de la vitesse normale et de masse volumique, la valeur propre  $\lambda_3$  correspond à une onde entropique de cisaillement qui introduit un saut combiné de masse volumique et de vitesse radiale. En réutilisant  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$ , la matrice de vecteurs propres à droite correspondant à ces vitesses, et  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$  la matrice diagonale, le gradient de flux longitudinal se réécrit alors de la façon suivante :

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{F}}(\vec{\mathcal{U}})}{\partial x} = \overline{\overline{\mathbf{K}}}(\vec{\mathcal{U}}) \overline{\overline{\mathbf{A}}}(\vec{\mathcal{U}}) \overline{\overline{\mathbf{K}}}^{-1}(\vec{\mathcal{U}}) \frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial x} \quad (5.18)$$

De même, on peut aisément montrer que la matrice jacobienne du flux dans la direction radiale  $\overline{\overline{B}} = \frac{\partial \overline{\overline{G}}}{\partial \overline{\overline{U}}}$  est diagonalisable. La difficulté de traiter des écoulements dans des configurations multidimensionnelles réside dans le fait qu'il n'est pas possible, dans le cas général, de diagonaliser simultanément les différentes matrices jacobienues de flux et d'exploiter ainsi la structure propre caractéristique du système comme dans le cas monodimensionnel. La démarche que nous suivons consiste ainsi à ramener l'évaluation de ce flux bidimensionnel à celle d'un flux monodimensionnel.

Pour ce faire, introduisons l'angle  $\theta$  (évalué dans le sens antihoraire) entre la direction de l'axe longitudinal  $(0, \vec{x})$  et celle de la normale moyenne  $\vec{n}_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{n}_{ij1} + \vec{n}_{ij2})$  à l'interface entre deux volumes de contrôle  $C_i$  et  $C_j$  où le flux est évalué (cf. figure 5.1). Le terme de flux surfacique à travers l'interface est évalué comme la projection du flux dans la direction donnée par la normale  $\vec{n}_{ij}$  et s'exprime alors par :

$$\cos\theta \overline{\overline{F}}(\vec{U}) + \sin\theta \overline{\overline{G}}(\vec{U})$$

Considérons l'opérateur de rotation  $\mathcal{R}_\theta$  d'angle  $\theta$  dans le plan euclidien. La matrice correspondant à cette application dans l'espace des phases et sa matrice inverse sont respectivement données par :

$$\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut alors montrer la propriété fondamentale suivante (voir par exemple Toro [164]) :

$$\cos\theta \overline{\overline{F}}(\vec{U}) + \sin\theta \overline{\overline{G}}(\vec{U}) = \overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}}^{-1} \overline{\overline{F}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U}) \quad (5.19)$$

Le système d'équations d'Euler en géométrie bidimensionnelle vérifie la propriété d'invariance rotationnelle quelque soit l'état  $\vec{U}$  et l'angle de rotation  $\theta$  considérés. Cette propriété permet de ramener l'évaluation du flux dans n'importe quelle direction à son évaluation dans la direction privilégiée donnée par l'axe  $(0, \vec{x})$ . Notons que cette propriété reste naturellement vraie dans le cas 3D. Dans un premier temps, on peut vérifier l'hyperbolicité des équations d'Euler en deux dimensions d'espace. En effet, la différentiation de l'équation 5.19 par rapport à  $\vec{U}$  conduit à :

$$\cos\theta \overline{\overline{A}}(\vec{U}) + \sin\theta \overline{\overline{B}}(\vec{U}) = \overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}}^{-1} \overline{\overline{A}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U}) \overline{\overline{U}} \quad (5.20)$$

Or  $\overline{\overline{A}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U})$  est diagonalisable et se réécrit, en gardant les notations précédemment introduites pour la matrice de vecteurs propres à droite et la matrice diagonale, selon  $\overline{\overline{\mathcal{K}}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U}) \overline{\overline{\Lambda}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U}) \overline{\overline{\mathcal{K}}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U})$ . La réintroduction de cette expression dans l'équation 5.20 permet finalement de réécrire le système d'équations d'Euler 5.17 sous la forme équivalente suivante :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \overline{\overline{\mathcal{K}}}(\vec{U}, \theta) \overline{\overline{\Lambda}}(\vec{U}, \theta) \overline{\overline{\mathcal{K}}}^{-1}(\vec{U}, \theta) \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0 \quad (5.21)$$

où les champs propres caractéristiques se réexpriment en fonction de ceux du flux longitudinal et des matrices de rotation par :

$$\begin{cases} \overline{\overline{\mathcal{K}}}(\vec{U}, \theta) = \overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}}^{-1} \overline{\overline{\mathcal{K}}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U}) \\ \overline{\overline{\Lambda}}(\vec{U}, \theta) = \overline{\overline{\Lambda}}(\overline{\overline{\mathcal{R}_\theta}} \cdot \vec{U}) \end{cases} \quad (5.22)$$

Nous allons donc légitimement pouvoir étendre l'exploitation de la décomposition caractéristique à une dimension dans le cas bidimensionnel. Il nous est cependant nécessaire dans ce cas

de choisir de façon pertinente la direction d'évaluation du flux. La normale moyenne à l'interface entre volumes de contrôle va définir dans notre cas la direction de projection du flux. Plus précisément, le flux sera évalué à partir de la projection des ondes élémentaires dans la direction donnée par la normale moyenne. Afin de minimiser l'erreur numérique induite par cette projection, nous allons prendre soin d'aligner au mieux la direction de ces normales avec les directions de propagation des ondes physiques de l'écoulement ou, de façon équivalente, d'étirer les volumes de contrôle normalement aux fortes discontinuités.

#### 5.2.4 Approche de Roe : résolution exacte d'un problème de Riemann linéarisé

La résolution complète du problème de Riemann exact étant trop coûteuse, il est nécessaire d'introduire quelques simplifications. La méthode de Roe [139] consiste à linéariser localement le problème de Riemann à l'interface  $\Gamma_{ij}$ . Dès lors, nous ne cherchons plus à déterminer la solution analytique du problème de Riemann exact (5.10) mais la solution discrète du problème de Riemann approché suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \overline{\overline{\mathbf{A}}}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_i = (\rho_i, \rho_i u_i, \rho_i v_i, \rho_i E_i)^T & \text{si } x \in C_i \\ \mathbf{U}_j = (\rho_j, \rho_j u_j, \rho_j v_j, \rho_j E_j)^T & \text{si } x \in C_j \end{cases} \end{cases} \quad (5.23)$$

où la matrice de Roe  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}_{ij}$  est cherchée de façon à assurer :

- L'hyperbolicité du système,
- La consistance du flux :  $\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)$ ,
- Le maintien de la conservativité discrète (afin d'obtenir la bonne vitesse de propagation d'une discontinuité localisée entre les positions des noeuds  $i$  et  $j$ ).

Pour les équations d'Euler, le flux n'est pas quadratique par rapport au vecteur d'état conservatif, de sorte que  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}_{ij}$  ne peut être simplement calculée comme la matrice jacobienne évaluée en la moyenne des deux états conservatifs adjacents. L'idée originale de Roe consiste à redéfinir un nouveau vecteur  $\mathbf{Z}$  :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ E + \frac{p}{\rho} \end{bmatrix}$$

duquel dépendent quadratiquement le vecteur d'état conservatif et le flux numérique selon :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i = \overline{\overline{\mathbf{B}}}(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Z}_i) \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \overline{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{Z}_j - \mathbf{Z}_i) \end{cases}$$

où  $\mathbf{Z}_i$  et  $\mathbf{Z}_j$  correspondent au vecteur  $\mathbf{Z}$  évalué d'après les variables relatives aux états  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_j$  respectivement. Par conséquent, la différence des flux évalués à droite et à gauche se réexprime en fonction de la différence des états à gauche et à droite selon :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i) = \left( \overline{\overline{\mathbf{C}}} \overline{\overline{\mathbf{B}}}^{-1} \right) (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i)$$

La matrice de Roe s'identifie alors avec  $\left( \overline{\overline{\mathbf{C}}} \overline{\overline{\mathbf{B}}}^{-1} \right)$ . La matrice de Roe présente alors la propriété remarquable d'être identique à la matrice Jacobienne locale pour laquelle les variables sont



simplement redéfinies comme des moyennes des états gauche et droit, pondérées par les racines carrées des masses volumiques à droite et à gauche. Cette linéarisation s'avère non seulement être exacte et l'unique choix satisfaisant la conservativité discrète [140], mais elle peut naturellement être généralisée à des problèmes multidimensionnels (notamment en considérant la direction normale moyenne à l'interface  $\Gamma_{ij}$  dans notre cas). La reconstruction du flux se base alors simplement sur la structure caractéristique du système présentée dans la section précédente (selon 5.15 ou 5.16). L'algorithme de Roe que nous utilisons se résume ainsi de la façon suivante :

- Dans un premier temps, la valeur moyenne de Roe de chaque variable est calculée selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_R = \sqrt{\rho_i \rho_j} \\ u_R = \frac{u_i \sqrt{\rho_i} + u_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \\ v_R = \frac{v_i \sqrt{\rho_i} + v_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \\ H_R = \frac{H_i \sqrt{\rho_i} + H_j \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \\ a_R = \sqrt{(\gamma - 1) \left( H_R - \frac{1}{2} (u_R^2 + v_R^2) \right)} \end{array} \right. \quad (5.24)$$

- Nous en déduisons directement les vitesses d'ondes, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{ij^1} = u_R - a_R \\ \lambda_{ij^2} = \lambda_{ij^3} = u_R \\ \lambda_{ij^4} = u_R + a_R \end{array} \right. \quad (5.25)$$

- Les vecteurs propres à droite constituant la base de décomposition de la différence de flux gardent la même forme explicite mais sont évalués d'après les moyennes de Roe pour chaque variable, soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ u_R - a_R \\ v_R \\ H_R - u_R a_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u_R \\ v_R \\ \frac{1}{2} (u_R^2 + v_R^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ v_R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ u_R + a_R \\ v_R \\ H_R + u_R a_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.26)$$

- Les intensités  $\alpha_R^k$  des ondes élémentaires sont déterminées en projetant la différence des états  $\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_i$  dans la base des vecteurs propres à droite précédemment calculés. Nous pouvons les redonner dans un ordre pratique pour les calculer, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_R^3 = \rho_j v_j - \rho_i v_i - v_R (\rho_j - \rho_i) \\ \alpha_R^2 = \frac{\gamma - 1}{a_R^2} [(\rho_j - \rho_i) (H_R - u_R^2) + u_R (\rho_j u_j - \rho_i u_i) + \rho_i E_i - \rho_j E_j + v_R (\rho_j v_j - \rho_i v_i - v_R (\rho_j - \rho_i))] \\ \alpha_R^1 = \frac{1}{2a_R} [(\rho_j - \rho_i) (u_R + a_R) + \rho_i u_i - \rho_j u_j - a_R \alpha_R^2] \\ \alpha_R^4 = \rho_j - \rho_i - (\alpha_R^1 - \alpha_R^2) \end{array} \right. \quad (5.27)$$

- Finalement nous recalculons le flux de Roe en utilisant par exemple l'équation 5.16, soit :

$$\mathbf{F}_{ij}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_j)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 |\lambda_R^k| \alpha_R^k \mathbf{K}_k \quad (5.28)$$

### 5.2.5 Correction entropique pour le solveur de Roe

Par construction, dans le cas non-linéaire, la matrice de Roe se réduit à une fonction scalaire produisant des vitesses d'ondes égales aux vitesses des discontinuités de choc (et les relations de saut de Rankine-Hugoniot). La disparition de l'onde de détente dans la solution du problème de Riemann approché constitue la faiblesse du schéma de Roe, pouvant conduire à violer la condition entropique. Dans le cas scalaire, une solution non-entropique apparaît lorsque l'onde de détente est transsonique. Typiquement, si deux états adjacents sont susceptibles de générer une telle onde de détente, le solveur de Roe connectera directement les deux états par un saut discontinu, de sorte qu'une contribution additionnelle de flux doit être introduite (soit ajoutée au volume en amont, soit soustraite au volume en aval) lorsqu'un tel point est détecté, afin d'assurer correctement la conservativité discrète et d'éviter la production d'un choc de détente. De façon équivalente, Harten et Hyman [76] proposent de réintroduire un faisceau de détente local dans la solution du problème de Riemann approché lorsqu'un tel point sonique est détecté. Ceci est réalisé indirectement, lors de la reconstruction du flux de Roe, en modifiant le module des valeurs propres afin d'empêcher leur annulation. Il s'agit donc de comparer les vitesses d'ondes  $\lambda_R$  (voir équations 5.25) aux vitesses d'ondes  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  relatives aux états à gauche et à droite de l'interface respectivement pour effectivement prendre en compte la valeur propre suivante :

$$|\lambda_R| = \begin{cases} |\lambda_R|, & |\lambda_R| \geq \epsilon_h \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_R^2}{2} + \epsilon_h \right), & |\lambda_R| < \epsilon_h \end{cases} \quad (5.29)$$

avec

$$\epsilon_h = \max [0, (\lambda_R - \lambda_i), (\lambda_j - \lambda_R)]$$

Soulignons que d'autres types de correction sont possibles mais que l'expression qui est ici retenue présente l'avantage de rester continûment différentiable.

### 5.2.6 Approche de Van Leer : découpage de flux

Une seconde approche que nous testons au cours de l'étude numérique est la méthode de découpage de flux de Van Leer. Les méthodes de découpage de flux ont initialement été introduites par Steger et Warming [157]. Basées sur l'exploitation directe de la propriété d'homogénéité à l'ordre un du flux convectif, elles consistent à reconstruire deux composantes distinctes du flux à partir d'une décomposition, dans l'espace caractéristique, de sa matrice jacobienne. Travaillant en deux dimensions d'espace, cette matrice jacobienne et les matrices qui la diagonalisent sont obtenues en opérant une rotation dans le plan  $(\vec{x}, \vec{r})$  d'angle égal à l'opposé de l'angle existant entre la direction donnée par la normale moyenne à l'interface où l'on cherche à évaluer le flux convectif entre deux volumes de contrôle adjacents, et la direction longitudinale. En conservant les notations précédemment introduites,  $\overline{\mathbf{K}}$  et  $\overline{\mathbf{\Lambda}}$  pour la matrice de vecteurs propres à droite et la matrice diagonale respectivement et en introduisant le vecteur d'état caractéristique  $\mathbf{W} = \overline{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{U}$ , la réécriture du système d'équations d'Euler dans cet espace caractéristique s'obtient simplement en multipliant le système conservatif par la matrice de vecteurs propres à gauche, ce qui conduit directement, en une dimension d'espace, au système suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \overline{\mathbf{\Lambda}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$$

Dans l'espace caractéristique, la séparation des contributions des ondes de vitesse positive et négative est alors immédiate :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \overline{\mathbf{\Lambda}}^+ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + \overline{\mathbf{\Lambda}}^- \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0$$

où les deux matrices jacobiennes introduites sont reconstruites à partir du signe des valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_k^+ = \frac{\lambda_k + |\lambda_k|}{2} \\ \lambda_k^- = \frac{\lambda_k - |\lambda_k|}{2} \end{cases}$$

Quand on repasse dans l'espace physique, cette décomposition conduit alors à :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \overline{\overline{\mathbf{A}}}^+ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \overline{\overline{\mathbf{A}}}^- \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (5.30)$$

avec  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^+ = \overline{\overline{\mathbf{K}}} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^+ \overline{\overline{\mathbf{K}}}^{-1}$  et  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^- = \overline{\overline{\mathbf{K}}} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^- \overline{\overline{\mathbf{K}}}^{-1}$ . Notons que, même si  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^+ \neq \frac{\partial \mathbf{F}^+}{\partial x}$  et  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^- \neq \frac{\partial \mathbf{F}^-}{\partial x}$ , les valeurs propres de  $\mathbf{F}^+$  et  $\mathbf{F}^-$  restent respectivement positives et négatives tant que  $1 < \gamma < \frac{5}{3}$ , ce qui conforte la cohérence de cette approche. Cependant, un tel découpage élémentaire conduit à introduire des matrices jacobiennes de flux non continûment différentiables. Les composantes du flux réexprimées en fonction du nombre de Mach présentent une pente différente en fonction de l'état subsonique ou supersonique du fluide, ce qui induit des difficultés à capturer numériquement la transition sonique lors de laquelle l'expression de ces composantes change. Van Leer [101] choisit ainsi d'introduire un découpage différent, en recherchant à exprimer les composantes des flux sous forme de polynômes fonction du nombre de Mach, d'ordre le plus faible possible, tout en s'assurant que les signes de valeurs propres des matrices jacobiennes  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^+$  et  $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^-$  restent respectivement positives et négatives. Considérant que les composantes des flux découpés doivent conserver les mêmes propriétés de symétrie que celles du flux total et que les pentes doivent s'annuler lorsque les points soniques sont atteints, une expression simple du flux de masse s'impose. Van Leer recherche alors une expression du flux de quantité de mouvement proportionnelle au flux de masse et choisit une expression du flux d'énergie qui assure l'annulation d'au moins une des valeurs propres en régime subsonique (afin de forcer la transition de choc stationnaire sur deux mailles). L'expression du flux de Van Leer que nous utilisons est finalement reconstruite en additionnant les contributions  $\mathbf{F}_{VL}^+$  et  $\mathbf{F}_{VL}^-$  respectivement données par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{VL}^+ = \frac{\rho a}{4} (M+1)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2a}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M\right) \\ v \\ \frac{2a^2}{\gamma^2-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M\right)^2 + \frac{1}{2} v^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_{VL}^- = -\frac{\rho a}{4} (M-1)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2a}{\gamma} \left(\frac{\gamma-1}{2} M - 1\right) \\ v \\ \frac{2a^2}{\gamma^2-1} \left(\frac{\gamma-1}{2} M - 1\right)^2 + \frac{1}{2} v^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.31)$$

## 5.3 Extension à un ordre de précision spatiale supérieure

### 5.3.1 Introduction : difficultés liées à l'élévation au second ordre des méthodes de décentrage

Afin d'évaluer le flux numérique au premier ordre en espace, les valeurs considérées de part et d'autre de l'interface  $\Gamma_{ij}$  entre deux volumes de contrôle  $C_i$  et  $C_j$  sont simplement les valeurs

moyennes sur ces volumes. La solution est dans ce cas recherchée comme une fonction constante par morceau. L'augmentation de l'ordre de précision en espace passe par la prise en compte du comportement local de la solution pour prescrire plus précisément ces valeurs. On peut soit utiliser les valeurs constantes des cellules voisines pour extrapoler ces valeurs à l'interface, soit augmenter l'ordre du polynôme d'interpolation par volume de contrôle. Cependant, une telle extrapolation des valeurs à l'interface ne peut être effectuée sans précaution. Au second ordre, le schéma numérique devient en effet consistant avec une équation de dispersion. La vitesse de propagation des ondes numériques peut ainsi varier en fonction de leur phase, ce qui induit l'apparition de trains d'ondes oscillantes, notamment près des discontinuités. Il s'agit d'adopter une stratégie pour éviter l'apparition d'une telle solution non-physique. Nous retenons, dans le cadre de cette étude, l'utilisation de méthodes TVD ("Total Variation Diminishing"). Celles-ci consistent globalement à sélectionner les fonctions d'interpolation de part et d'autre de l'interface en fonction de leur pente respective, afin de garantir la décroissance de l'ensemble des pics que la solution présente localement. Une estimation du nombre et de l'amplitude de ces pics est donnée par la variation totale, définie rigoureusement en une dimension d'espace par :

$$TV(\mathbf{U}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\delta u(x, t)}{\delta x} \right| dx$$

Les gradients utilisés de part et d'autre des interfaces entre volumes de contrôle seront ainsi sélectionnées de façon à diminuer cette variation totale. Soulignons dès à présent que ces méthodes ne sont rigoureusement développées que dans un cadre unidimensionnel. Seule la pratique numérique peut permettre ensuite d'évaluer leur efficacité lorsqu'elles sont appliquées à une configuration d'écoulement donnée. Nous présentons donc les principes des méthodes TVD dans ce cadre unidimensionnel avant de préciser les fonctions effectivement utilisées pour notre application en deux dimensions d'espace, en accord avec la méthode numérique que nous avons présentée tout au long de ce chapitre. De façon équivalente, ces méthodes correspondent en fait à ajouter au flux d'ordre 1 une correction de flux limité, où la fonction limitante assure le retour à l'ordre 1 près des discontinuités, le schéma résultant à l'ordre 1 étant suffisamment dissipatif pour amortir les oscillations parasites. Cependant, notons que ces méthodes amortiront indifféremment tous les extréma, qu'ils soient liés à l'évolution irrégulière de la solution perturbée par la propagation de l'erreur dispersive, ou qu'ils soient liés à la présence d'une discontinuité de choc. Ainsi, des schémas plus sophistiqués ont aussi vu le jour pour pallier cet inconvénient, tels que les schémas ENO ("Essentially Non Oscillating") (voir par exemple Toro [164]). Ceux-ci réimposent la condition de diminuer la variation totale à un terme de précision près. Moins restrictifs que les schémas TVD, ils permettent d'accéder à une précision plus élevée près des discontinuités mais conduisent généralement à de plus grandes difficultés pour atteindre l'état stationnaire. Ajouté au fait que leur adaptation au cas multidimensionnel reste délicate, surtout dans l'approche mixte retenue, le choix de les implanter dans le code n'a pas été retenu pour notre étude numérique.

### 5.3.2 Principes des méthodes à Variation Totale Diminuante (TVD)

Les méthodes à variation totale diminuante consistent concrètement à assurer non seulement que le nombre d'extréma locaux au sein de la solution numérique n'augmentera pas dans le temps, mais aussi que la valeur de ces extréma ne pourra que décroître en valeur absolue. Une mesure du nombre et de l'amplitude de ces extréma peut être évaluée numériquement, en une dimension d'espace (ou en deux dimensions en considérant les directions données par la normale moyenne), en sommant les écarts, à un instant donné, entre cellules adjacentes :

$$TV(\mathbf{U}^n) = \sum_i |\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i| \quad (5.32)$$

Assurer la conservation de la variation totale dans les régions de continuité de la solution ou sa diminution près des discontinuités impliquera automatiquement la conservation de la monotonie et la diminution des extrêma en valeur absolue. Le principe de ces méthodes consiste donc à simplement forcer localement la diminution de la variation totale, en sélectionnant les fonctions d'interpolation utilisées de part et d'autre de l'interface pour extrapoler la valeur considérée pour l'évaluation du flux convectif. Si la méthode numérique est conservative, que le flux est continu (au sens de Lipschitz) et consistant, on peut montrer (théorèmes de Lax), pour une loi de conservation scalaire, que si la méthode est stable au sens de la variation totale (i.e. qu'on assure que la variation totale reste uniformément bornée au cours du temps), elle convergera vers la solution entropique [79]. Ainsi, l'idée originale de ces méthodes consiste à borner la variation totale par sa valeur initiale en utilisant un schéma monotone. Si  $\mathbf{U}_k^n$  sont les solutions aux noeuds indicés  $k$  à l'étape de temps  $t^n$ , à partir desquelles la valeur de  $\mathbf{U}_i$  est mise à jour selon  $\mathbf{U}_i^{n+1} = F_n(\mathbf{U}_k^n)$ , cela signifie alors concrètement que la fonction numérique  $F_n$  doit nécessairement être une fonction croissante de chacun de ses arguments  $\mathbf{U}_k^n$ . Cependant, on montre alors qu'un tel schéma de discrétisation, monotone et conservatif, ne peut être d'un ordre supérieur à 1. Aussi, on notera bien que les méthodes TVD doivent nécessairement se baser sur une définition plus faible de la monotonie, pour laquelle la valeur mise à jour devra simplement être comprise dans l'intervalle constitué par la plus petite valeur et la plus grande valeur des arguments de la fonction  $F_n$ . Cette condition moins restrictive permet de préserver la monotonie sans imposer au schéma d'être lui-même monotone. S'affranchir de la limitation du premier ordre nécessite donc d'introduire une non-linéarité via un terme de diffusion numérique non-linéaire. Dans le cas général, il est délicat de prescrire directement la forme de ce terme. Aussi utilise-t-on souvent une approche alternative équivalente, dite de limitation de flux, pour imposer le comportement non-oscillant de la solution, qu'il s'agit ensuite de retraduire sous la forme de l'ajout d'un terme de diffusion numérique additionnel au schéma numérique à l'ordre 1.

Une méthode de limitation de flux consiste à exprimer formellement le flux d'ordre élevé  $\mathbf{F}_H$  comme la somme du flux décentré  $\mathbf{F}_1$  d'ordre 1 et d'un terme correctif, ce que nous pouvons écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{F}_1 + [\mathbf{F}_H - \mathbf{F}_1] \Phi(\Theta)$$

où la fonction  $\Phi(\Theta)$  est la fonction limitante qu'il s'agit de déterminer et où  $\Theta$  mesure la régularité de la solution par le rapport des gradients consécutifs, soit en tout point  $i$  :

$$\Theta_i = \frac{\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}}{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i} \quad (5.33)$$

Cette fonction doit pouvoir mesurer la régularité de la solution de façon à assurer l'ordre supérieur dans les régions d'évolution régulière de la solution et diminuer l'ordre d'interpolation à 1 près des discontinuités. L'imposition de ces conditions (TVD) à la fonction de limitation de flux  $\Phi$  utilisée lors de la construction du flux numérique se traduit alors concrètement à devoir utiliser, en une dimension d'espace et quelque soit le point de discrétisation  $i$ , un schéma numérique qui se réexprime sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - C_i(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}) + D_i(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \quad (5.34)$$

où les coefficients introduits, fonctions de  $\Phi(\Theta)$ , doivent simplement respecter les conditions suivantes

$$\begin{cases} C_i \geq 0 \\ D_i \geq 0 \\ C_i + D_i \leq 1 \end{cases}$$

### 5.3.3 Fonctions de limitation de pente utilisées

La forme de la fonction limitante peut être construite de nombreuses manières. Le choix  $\Phi(\theta) = 1$  revient à considérer le schéma classique de Lax-Wendroff (schéma décentré aval), le choix  $\Phi(\Theta) = \Theta$ , celui de Beam-Warming (schéma décentré amont). Empiriquement, un bon comportement de la solution est assuré lorsque  $\Phi(\Theta)$  est exprimé comme une combinaison convexe de ces deux fonctions. Dans notre étude, nous utilisons les limiteurs "minmod" et de Van Albada [69], respectivement donnés dans l'approche limitation de flux par :

$$\begin{cases} \Phi_{\minmod}(\Theta) = \max(0, \min(1, \Theta)) \\ \Phi_{VanAlbada}(\Theta) = \frac{\Theta^2 + \Theta}{1 + \Theta^2} \end{cases} \quad (5.35)$$

Dans l'approche équivalente de limitation de pente pour extrapoler les valeurs de part et d'autre de l'interface  $\Gamma_{ij}$ , on utilise les fonctions :

$$\begin{cases} \lim_{\minmod}(a, b) = \frac{\text{signe}(a) + \text{signe}(b)}{2} \min(|a|, |b|) \\ \lim_{VanAlbada}(a, b) = \begin{cases} \frac{(a^2 + \epsilon_v)b + (b^2 + \epsilon_v)a}{a^2 + b^2 + 2\epsilon_v} & , ab > 0 \\ 0 & , ab < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.36)$$

où  $a$  et  $b$  sont généralement les deux pentes évaluées (généralement en amont et en aval de l'interface) sur lesquelles la limitation s'applique.  $\epsilon_v$  est finalement une valeur très faible (fixée dans notre cas à  $1.10^{-16}$ ) simplement ajoutée pour éviter l'annulation du dénominateur dans l'expression du limiteur de Van Albada.

### 5.3.4 Extrapolation des valeurs à l'interface

Après avoir présenté les principes des méthodes TVD et les fonctions de limitation de pente retenues dans les sections précédentes, nous précisons finalement comment ces fonctions sont effectivement appliquées dans l'approche volumes-finis en deux dimensions d'espace que nous utilisons. Dans une approche unidimensionnelle, on estime classiquement les pentes de part et d'autre de l'interface avant d'appliquer la fonction limitante à ces deux pentes estimées. Dans le contexte de la formulation mixte volumes-finis/éléments-finis retenue en configuration bidimensionnelle, ce choix n'est cependant plus pertinent dans la mesure où la pente moyenne que l'on peut estimer sur une cellule n'est plus représentative de l'ensemble des pentes des triangles qui participent à sa construction. En effet, les variations rapides de pente sur chaque triangle ne peuvent alors localement être correctement prises en compte. Nous retenons donc deux solutions alternatives qui consistent à appliquer séparément, de part et d'autre de l'interface, les fonctions limitantes sur une combinaison d'estimations de ces pentes.

#### Extrapolation par utilisation du limiteur "minmod"

La première méthode consiste, pour chaque composante  $v_m$  du vecteur d'état physique  $\mathbf{V} = (\rho, u, v, E)^T$  à estimer les gradients limités de cette composante en amont  $(\vec{\nabla} v_m)_{ij}$  et  $(\vec{\nabla} v_m)_{ji}$  en aval de façon identique. Pour cela, pour chaque direction spatiale, le limiteur minmod est appliqué à l'ensemble des gradients de cette composante  $v_m$ , constants sur chaque triangle participant à la construction des cellules adjacentes  $C_i$  et  $C_j$ . Nous rappelons les notations classiques pour les fonctions  $\min$  et  $\max$  qui donnent respectivement la plus petite et la plus grande valeur de l'ensemble de valeurs auquel elles sont appliquées et la fonction  $\text{signe}$  qui retourne la

valeur  $-1$  ou  $+1$  si la valeur à laquelle elle est appliquée est négative ou positive respectivement. Par souci de simplification d'écriture, nous introduisons également les grandeurs suivantes :

$$\begin{cases} \min x(v_m) = \min \left( \text{signe} \left( \left( \frac{\partial v_m}{\partial x} \right) \Big|_{T_k, k \in I_T^i \cup I_T^j} \right) \right) \\ \min r(v_m) = \min \left( \text{signe} \left( \left( \frac{\partial v_m}{\partial r} \right) \Big|_{T_k, k \in I_T^i \cup I_T^j} \right) \right) \\ \max x(v_m) = \max \left( \text{signe} \left( \left( \frac{\partial v_m}{\partial x} \right) \Big|_{T_k, k \in I_T^i \cup I_T^j} \right) \right) \\ \max r(v_m) = \max \left( \text{signe} \left( \left( \frac{\partial v_m}{\partial r} \right) \Big|_{T_k, k \in I_T^i \cup I_T^j} \right) \right) \end{cases}$$

Nous pouvons alors réexprimer le gradient limité utilisé pour la variable physique  $v_m$  sous la forme suivante :

$$(\vec{\nabla} v_m)_{ij} = (\vec{\nabla} v_m)_{ji} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\min x(v_m) + \max x(v_m)) \cdot \min \left( \left( \frac{\partial v_m}{\partial x} \right) \Big|_{T_k, k \in I_T^i \cup I_T^j} \right) \\ \frac{1}{2}(\min r(v_m) + \max r(v_m)) \cdot \min \left( \left( \frac{\partial v_m}{\partial r} \right) \Big|_{T_k, k \in I_T^i \cup I_T^j} \right) \end{pmatrix}$$

Nous constatons que le schéma qui en résulte est très diffusif dans la mesure où on retombera nécessairement à l'ordre 1 dès qu'un changement de signe des pentes sera détecté autour de  $\Gamma_{ij}$ . En contrepartie, nous verrons que cette méthode est très robuste et sera la seule méthode permettant d'avancer les calculs dans la phase initiale de la simulation des jets fortement sous-détendus.

### Extrapolation des valeurs à l'interface par utilisation du limiteur Van Albada

La seconde méthode retenue consiste, pour chaque variable  $v_m$ , à estimer séparément ces deux pentes limitées. Soit  $v_{m_i}$  et  $v_{m_j}$  les valeurs prises par  $v_m$  sur les cellules  $C_i$  et  $C_j$  respectivement. Rappelons que les triangles  $T_{ij}$  et  $T_{ji}$  sont respectivement les triangles en amont et en aval à l'interface  $\Gamma_{ij}$ , relatifs respectivement aux cellules  $C_i$  et  $C_j$  intersectant la direction donnée par  $\vec{i}_j$  (voir figure 5.1). Nous introduisons alors une approximation de pente centrée  $(\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C$ , une approximation de pente demi-décentrée vers l'amont  $(\vec{\nabla} v_m)_{ji}^{AM}$  (en prenant en compte le gradient relatif au triangle  $T_{ij}$ ) et une approximation de pente demi-décentrée vers l'aval  $(\vec{\nabla} v_m)_{ji}^{AV}$  (en prenant en compte le gradient relatif au triangle  $T_{ji}$ ), soit :

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C = \frac{1}{l_{ij}} (v_{m_i} - v_{m_j}) \\ (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AM} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} v_m |_{T_{ij}}) \\ (\vec{\nabla} v_m)_{ji}^{AV} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} v_m |_{T_{ji}}) \end{cases} \quad (5.37)$$

D'une part,  $(\vec{\nabla} v_m)_{ij}$  est estimé en appliquant le limiteur Van Albada au gradient  $(\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C$  centré à l'interface et au gradient demi-décentré vers l'amont  $(\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AM}$ . D'autre part,  $(\vec{\nabla} v_m)_{ji}$  est estimé en appliquant le limiteur Van Albada à ce même gradient centré à l'interface  $(\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C$  et au gradient demi-décentré vers l'aval  $(\vec{\nabla} v_m)_{ji}^{AV}$ . Formellement, nous considérons donc :

$$(\vec{\nabla} v_m)_{ij} = \begin{cases} \frac{\left[ \left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C \right)^2 + \epsilon_v \right] (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AM} + \left[ \left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AM} \right)^2 + \epsilon_v \right] (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C}{\left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C \right)^2 + \left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AM} \right)^2 + 2\epsilon_v}, & (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AM} > 0 \\ 0, & (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AM} < 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

$$(\vec{\nabla} v_m)_{ji} = \begin{cases} \frac{\left[ \left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C \right)^2 + \epsilon_v \right] (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AV} + \left[ \left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AV} \right)^2 + \epsilon_v \right] (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C}{\left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C \right)^2 + \left( (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AV} \right)^2 + 2\epsilon_v}, & (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AV} > 0 \\ 0, & (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^C (\vec{\nabla} v_m)_{ij}^{AV} < 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

Dans ce cas, le schéma ne redevient d'ordre 1 en espace que dans le cas où les signes du gradient centré et du gradient demi-décentré sont simultanément différents. On notera que dès lors que les mailles sont très déformées, la direction de la normale moyenne à  $\Gamma_{ij}$  et la direction donnée par  $\vec{i}\vec{j}$  peuvent être très différentes, ce qui pourra constituer une forte limitation de ce schéma dès lors que les maillages seront réadaptés.

### Reconstruction des valeurs à l'interface

A partir de cette estimation de pente relative à chaque variable physique  $v_m$ , les états à gauche  $v_{mij}$  et à droite  $v_{mji}$  de l'interface sont alors extrapolés selon :

$$\begin{cases} v_{mij} = v_{mi} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} v_m)_{ij} \cdot \vec{i}\vec{j} \\ v_{mji} = v_{mj} - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} v_m)_{ji} \cdot \vec{i}\vec{j} \end{cases}$$

où les gradients  $(\vec{\nabla} v_m)_{ij}$  et  $(\vec{\nabla} v_m)_{ji}$  sont estimés en fonction de la limitation de pente adoptée ("minmod" ou Van Albada) pour un cas donné de simulation. La reconstruction des états conservatifs à gauche  $\mathbf{U}_{ij}$  et à droite  $\mathbf{U}_{ji}$  est alors immédiate. Ainsi, nous pouvons simplement évaluer le flux numérique au second ordre en espace en appliquant les expressions du flux de Roe (cf. section 5.2.4) ou de Van Leer (cf. section 5.2.6) à ces deux états conservatifs extrapolés à l'interface au lieu des états moyens  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{U}_j$ .

La difficulté de prévoir précisément les discontinuités pouvant apparaître dans les écoulements à grand nombre de Mach nous a conduit à détailler quelques uns des aspects fondamentaux de tout l'arsenal de méthodes sophistiquées développé par la communauté scientifique pour évaluer le flux numérique relatif au mécanisme convectif. Nous proposons désormais de développer plus sommairement, l'approche retenue pour l'évaluation, moins contraignante, des flux diffusifs et termes sources.

## 5.4 Evaluation des flux diffusifs et des termes sources

### 5.4.1 Flux diffusifs laminaires

Par application des formules de Green, l'intégrale de volume, sur un volume de contrôle  $C_i$  de la divergence des flux visqueux ou turbulents, pondérée (en formulation faible Galerkin) par la fonction test  $\phi$  peut se réexprimer selon :

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{V}}_h) \cdot \phi dV &= \int_{\Gamma_i} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{V}}_h) \cdot \phi \vec{n}_i dS - \int_{C_i} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{V}}_h) \cdot \vec{\nabla} \phi dV \\ &= \sum_{k \in I_T^i} \left[ \int_{\Gamma_{ij}} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{V}}_h) \cdot B_{ik} \vec{n}_i dS - \int_{C_i \cap T_k} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{V}}_h) \cdot \vec{\nabla} B_{ik} dV \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$



en choisissant, sur chaque triangle  $T_k$ , la fonction de base élément P1  $B_{ik}$  associée au noeud  $i$ . De par le choix de la forme des volumes de contrôle et des fonctions test linéaires sur chaque élément triangulaire intersectant le volume de contrôle, cette intégration se ramène en fait à :

$$- \sum_{k \in I_T^i} \int_{T_k} \vec{\mathcal{D}}(\vec{\mathcal{V}}_h) \cdot \vec{\nabla} B_{ik} dV$$

Soulignons que l'intégrale de contour dans le second membre de la seconde égalité de l'équation (5.40) n'est plus nulle lorsque la cellule de contrôle est située à la frontière du domaine de calcul. L'approche que nous retenons revient donc, au niveau de cette frontière, à négliger les flux diffusifs par rapport aux flux convectifs. Au vu des écoulements que nous considérons, l'erreur introduite restera néanmoins absolument négligeable. De façon cohérente, la prescription des conditions limites aux frontières du domaine sera donc uniquement basée sur les flux convectifs (voir chapitre 6). Les gradients de variables physiques intervenant dans l'expression des flux visqueux ou turbulents sont alors eux-même évalués en se ramenant à l'évaluation des gradients des fonctions tests éléments P1 (voir annexe A), tandis que les coefficients de diffusion sont pris constants et égaux, sur chaque élément triangulaire  $T_k$ , à la moyenne des coefficients donnés aux noeuds de ce triangle. Par exemple, le flux conductif de chaleur est évalué sur un des triangles  $T_k$  intersectant le volume de contrôle  $C_i$  selon :

$$\lambda \vec{\nabla}(T) = \frac{1}{3} \left( \sum_{j \in \mathcal{S}(T_k)} \lambda_j \right) \sum_{j \in \mathcal{S}(T_k)} T_j \vec{\nabla} B_{jk} \vec{\nabla} B_{ik}$$

Les fonctions d'interpolation étant linéaires, les composantes des gradients des fonctions de base sont constantes, de sorte que l'intégration sur le volume revient rigoureusement à multiplier les produits de gradients des fonctions de base par le volume  $V(T_k)$  des triangles  $T_k$  participant à la construction de la cellule, soit par exemple pour l'intégration du flux conductif de chaleur :

$$\int_{C_i} \lambda \vec{\nabla}(T) dV = \sum_{k \in I_T^i} V(T_k) \left[ \frac{1}{3} \left( \sum_{j \in \mathcal{S}(T_k)} \lambda_j \right) \sum_{j \in \mathcal{S}(T_k)} T_j \vec{\nabla} B_{jk} \vec{\nabla} B_{ik} \right]$$

Le tenseur des déformations intervenant dans l'expression des contraintes laminaires s'évalue de façon similaire en remplaçant le champ scalaire de température par les composantes du champ de vitesse, et le champ de conductivité par le champ de viscosité laminaire.

#### 5.4.2 Remarque sur la prise en compte des flux diffusifs et des termes sources turbulents

Les flux diffusifs turbulents ou termes sources font également intervenir des termes dérivant de gradients et sont évalués de façon similaire. Soulignons cependant que, pour un écoulement compressible, la divergence du champ de vitesse est non-nulle. A la contribution isotrope de la pression statique, s'ajoute ainsi une contribution assimilée à une pression liée à l'agitation turbulente (découlant directement de la fermeture de type Boussinesq pour les contraintes de Reynolds). Lors d'une intégration temporelle implicite, c'est cette pression effective  $p^* = p_i + \frac{2}{3} \rho k$  qui doit être prise en compte directement dans l'expression des flux convectifs pour dériver correctement leurs matrices jacobiniennes. Dans l'approche explicite que nous avons retenue, l'effet de la turbulence se ressent également, quelque soit l'approximation du flux numérique retenue,

via une modification des vitesses d'onde découlant d'une modification de la vitesse du son :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma(\bar{p} + 2/3\bar{\rho}k)}{\bar{\rho}}} = \sqrt{(\gamma - 1)\gamma \left[ \tilde{E} - \frac{\tilde{U}_i^2}{2} - k \right]}$$

où on reconnaît l'expression de l'équation d'état qui doit effectivement être utilisée pour extraire le champ de pression via la formulation conservative retenue :

$$\bar{p} = (\gamma - 1)\bar{\rho} \left[ \tilde{E} - \frac{\tilde{U}_i^2}{2} - k \right]$$

Aussi, le mouvement turbulent ne vient plus simplement se superposer au mouvement moyen comme en régime incompressible. La modélisation de la turbulence compressible ne se traduit plus seulement par l'ajout d'un effet purement diffusif via une altération de la viscosité effectivement "ressentie" en moyenne, mais induit un couplage beaucoup plus fort via lequel l'évolution de l'énergie cinétique turbulente va directement altérer les propriétés convectives de l'écoulement moyen. Concrètement, la prise en compte de la turbulence n'induera pas seulement un étalement des profils autour des discontinuités, mais pourra modifier sensiblement la géométrie même des structures de choc rencontrées.

## 5.5 Remarque sur l'intégration en temps

Au cours de l'étude numérique, nous avons retenu une méthode d'intégration en temps explicite au premier ordre. Nous précisons dans cette partie comment le pas de temps est choisi *a priori* pour que cette méthode soit stable pour l'approche mixte volumes finis / éléments finis utilisée.

Lorsque l'on utilise une méthode de différences finies, ou une méthode de volumes finis en une dimension d'espace, un schéma décentré au premier ordre spatial d'une équation scalaire hyperbolique linéarisée revient, d'un point de vue purement algorithmique, à interpoler la nouvelle solution à partir des deux solutions voisines de l'étape précédente, et ce dans la direction d'où provient l'information physique. Cette direction est donnée par le signe de la vitesse d'onde caractéristique. Puisque l'information physique doit se propager à cette vitesse finie et que le principe du décentrage consiste à inclure toute et uniquement cette information, le schéma numérique doit être construit de façon à ce que le domaine de dépendance numérique de l'équation différentielle soit inclus dans son domaine de dépendance physique. Si  $a$  est la vitesse d'onde de convection du scalaire,  $\Delta t$  le pas de temps à déterminer et  $\Delta x$  le pas d'espace fixé par le choix du maillage, la condition CFL ( $\lambda\Delta t \leq \Delta x$ ) exprime alors simplement le fait que le schéma numérique, dans une approche explicite, est stable dès lors que cette nouvelle solution à l'étape de temps  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  s'exprime comme une combinaison convexe de ces deux solutions voisines à l'étape de temps  $t^n$ , i.e. qu'on interpole en fait bien entre les deux solutions voisines. Par exemple, pour une vitesse d'onde positive, on aurait :

$$U_i^{n+1} = \frac{a\Delta t}{\Delta x} U_{i-1}^n + \left( 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \right) U_i^n$$

où les deux coefficients sont positifs et de somme égale à un. Pour une distribution spatiale donnée des noeuds de calcul, le pas de temps  $\Delta t$  est simplement choisi de façon à ce que la vitesse d'onde numérique soit plus grande que la vitesse d'onde physique. Naturellement, dès lors que l'on travaille sur une équation vectorielle non-linéaire, nous devons prendre en compte

la vitesse d'onde la plus rapide et se donner, via le critère CFL, une condition plus restrictive.

Dans l'approche volumes finis retenue en configuration bidimensionnelle, au premier ordre d'intégration en temps explicite, la condition CFL doit désormais traduire plus concrètement le fait que le pas de temps doit être choisi suffisamment petit, pour une répartition spatiale donnée des volumes de contrôle, pour que les ondes issues de chaque interface ne puissent atteindre les interfaces voisines. Sur chaque cellule, une distance maximale  $\Delta x_{max}$  de référence est ainsi estimée (en considérant la plus petite extension des volumes de contrôle), ainsi que les vitesses d'ondes maximales  $\lambda_{max}$ , desquelles un pas de temps maximal de référence  $\Delta t_{ref}$ , pour l'ensemble du domaine de calcul, est déterminé, soit :

$$\Delta t_{ref} = \frac{\Delta x_{max}}{\lambda_{max}}$$

La condition CFL permet de pondérer cette estimation d'un facteur de sécurité (globalement fixé à 0,7 ou 0,8 dans la plupart de nos simulations) et le pas de temps pris en compte devient simplement dans le cas de simulation basées sur les équations d'Euler :

$$\Delta t = CFL \times \Delta t_{ref}$$

Dans le cas de calcul avec prise en compte de flux diffusifs, à partir d'une étude de stabilité sur une équation linéaire de convection/diffusion en une dimension d'espace, un second pas de temps maximal  $\Delta t_{ref2}$  est estimé selon :

$$\Delta t_{ref2} = \frac{(\Delta x_{max})^2}{\lambda_{max} \Delta x_{max} + 2\mu}$$

Le pas de temps de référence effectivement utilisé est alors choisi égal à la plus petite de ces deux estimations.

Il est à noter que, dans le solveur N3SNATUR, des algorithmes d'intégration en temps implicite par résolution itérative (Gauss Seidel ou Jacobi) sont également disponibles, avec différentes options pour un préconditionnement pour les nombres de Mach peu élevés. Ces algorithmes permettent de fixer des nombre de CFL beaucoup plus importants (typiquement des valeurs de 5000 sont accessibles pour la simulation d'écoulements de canal en subsonique par exemple), ce qui permet dans un grand nombre de situations d'accéder beaucoup plus rapidement à la solution convergée. Deux raisons ont cependant conditionné notre choix de ne pas les utiliser. D'une part, des tests préliminaires ont démontré un manque de robustesse de ces algorithmes dans le cadre de la simulation des écoulements plus "sévères" que nous cherchons à simuler. Un nombre de CFL maximal de l'ordre de 2 à 2,5 devait être choisi. Le coût en temps calcul d'une itération en intégration implicite étant typiquement 5 à 10 fois plus important, pour un maillage d'une dizaine de milliers de noeuds, que celui d'une itération en intégration explicite, ces méthodes perdaient tout leur intérêt. D'autre part, l'étude phénoménologique a clairement mis en évidence la nature instationnaire du jet fortement sous-détendu. Il est ainsi plus pertinent d'utiliser une formulation explicite pour éventuellement observer une instationnarité de nature physique, même si de telles observations peuvent devenir difficilement interprétables dès lors que des flux diffusifs turbulents sont pris en compte.

## 5.6 Parallélisation

Une approche de parallélisation à mémoire distribuée avec utilisation de la bibliothèque de fonctions d'échanges de messages MPI ("Message Passing Interface") fonctionnant sous Red Hat

Linux est implantée dans le code. Bien qu'elle ne puisse simplement optimiser les performances des calculs de boucles, elle présente un taux de parallélisme élevé et reste applicable simultanément à des machines présentant des architectures différentes. Le maillage global est dans notre cas décomposé selon une méthode de répartition des données de type VOD ("Vertex Oriented Decomposition"). Chaque noeud du maillage n'est actif que dans un seul sous-domaine, c'est à dire que le bilan de flux n'est opéré sur chaque noeud que dans un seul domaine. Une zone de recouvrement est générée en conséquence, chaque noeud non-actif à la frontière de chaque sous-domaine voyant ses valeurs mises à jour à chaque nouveau pas de temps de calcul par échange de l'information relative au sous-domaine voisin dans lequel ce noeud est actif (voir figure 5.4).

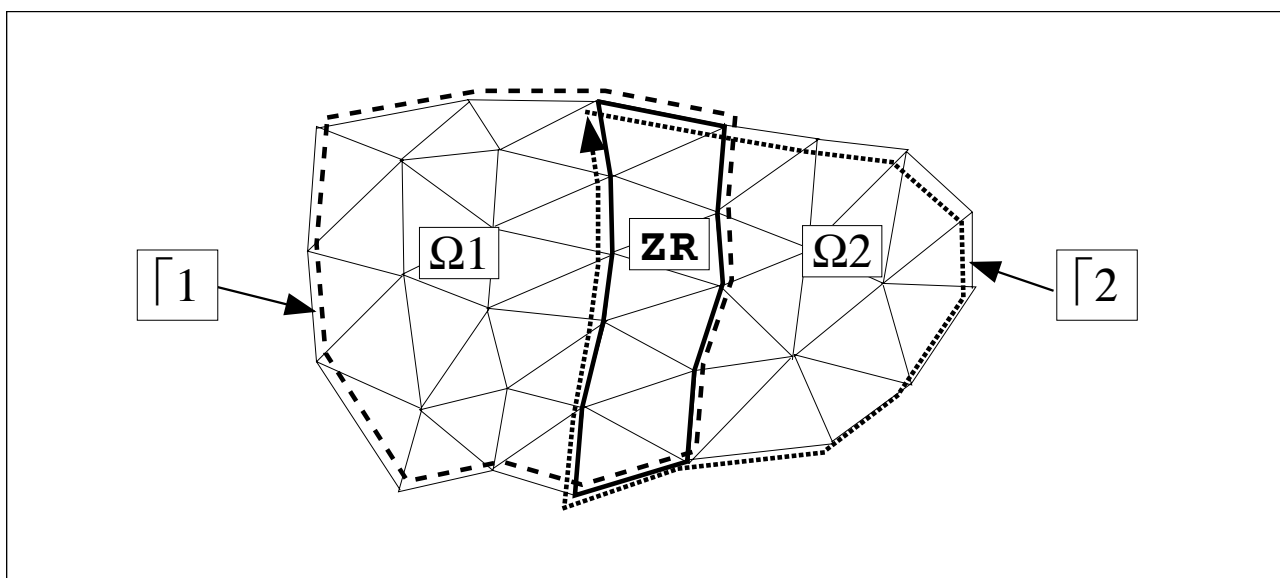


FIG. 5.4 – Illustration de la décomposition du maillage pour une exécution du programme en parallèle (cas à 2 sous-domaines).

$\Omega 1$  : Sous-domaine 1,  $\Gamma 1$  : Frontière du sous-domaine 1,  $\Omega 2$  : Sous-domaine 2,  $\Gamma 2$  : Frontière du sous-domaine 2,  $ZR$  : Zone de recouvrement.

Dans cette approche, on notera que le calcul des gradients des variables physiques, bien que redondant dans la zone de recouvrement, est facilité par la création d'un support complet pour chaque noeud actif de chaque sous-domaine. La zone de recouvrement étant choisie comme ayant la largeur d'un seul élément, la communication des gradients locaux est néanmoins rendue nécessaire lors de l'extension à l'ordre 2. De même, lorsque le choix est fait d'utiliser un pas de temps global unique, l'estimation pour chaque sous-domaine du pas de temps maximal admissible selon le critère CFL doit être communiquée afin de déterminer la valeur du pas de temps unique à appliquer à tous les sous-domaines. En dépit de cette importante quantité d'informations à communiquer, on pourra retenir l'ordre de grandeur suivant pour le gain en temps obtenu. Le temps de restitution d'une simulation, pour un même temps de simulation physique, est divisé par un facteur légèrement supérieur égal à 5 via l'utilisation d'un sous-cluster de 4 machines biprocesseurs cadencés à 2 GHz et pour l'utilisation d'un maillage d'environ 10000 noeuds (découpage en 7 sous-domaines).



## Chapitre 6

# Domaine de calcul et conditions limites

L'une des tâches les plus délicates en simulation numérique consiste à prescrire les conditions aux limites du domaine de calcul. La résolution du système d'équations différentielles à l'intérieur du domaine de calcul nécessite en effet la connaissance *a priori* de la solution sur cette frontière, au moins pour un certain nombre des variables du problème, solution qu'il n'est possible de prescrire qu'en faisant généralement un certain nombre d'hypothèses très réductrices. De façon générale, la prise en compte de l'influence des frontières doit non seulement satisfaire la définition physique de ces frontières (vitesse qui s'annule à proximité d'une paroi ou au moins devient tangente à sa direction...), qu'il s'agit de traduire mathématiquement de façon judicieuse, mais la discrétisation de ces conditions aux frontières doit aussi rester compatible avec la précision et la stabilité du schéma numérique utilisé à l'intérieur du domaine. Ce problème est d'autant plus délicat quand le comportement du fluide, comme dans notre cas où les termes convectifs sont prépondérants, est essentiellement de nature hyperbolique. Ce caractère propagatif de l'information prescrite aux frontières nous impose en effet de distinguer les conditions physiques (telles qu'un profil de vitesse ou de pression statique obtenue expérimentalement) qui doivent être imposées pour un nombre requis de variables physiques de l'écoulement pour que le problème reste bien posé, des conditions purement numériques, simplement nécessaires au schéma numérique. Notons à ce propos qu'il n'existe à ce jour aucune théorie globale permettant de déterminer catégoriquement *a priori* le nombre et le choix de variables physiques requises sur une frontière libre, pour le système complet des équations de Navier-Stokes. Le choix couramment adopté, et qui est ici retenu, repose sur la théorie caractéristique en une dimension d'espace. Une fois ces conditions déterminées, il est alors possible de les imposer, soit de manière forte (on parle de conditions de Dirichlet), en imposant la valeur des variables physiques ou conservatives directement aux noeuds de la frontière, soit de manière faible (conditions de type Neuman), en imposant ces valeurs dans l'expression des composantes des flux de bords relatifs aux facettes appartenant à ces frontières, soit de manière mixte. L'imposition des conditions dans l'expression des composantes des flux permet de retrouver, pour la solution convergée, les niveaux attendus de variables physiques aux noeuds des frontières du calcul mais introduisent une liberté dans les niveaux des variables accessibles dans la phase transitoire de calcul, qui peut conduire à la dérive de ces conditions et donc à la divergence du calcul. L'imposition des conditions par prescription de flux reste cependant plus consistante avec la méthode des volumes finis et les diverses méthodes de résolution du problème de Riemann, et sera préférentiellement retenue à chaque fois que la robustesse du schéma résultant n'est pas mise en défaut.

Le choix du type de conditions limites à prescrire s'opère généralement après le choix de l'extension du domaine de calcul. Pour la simulation du jet fortement sous-détendu, ce sont finalement les limitations des différents types de conditions limites disponibles qui ont plus pré-

cisément conditionné le choix de la géométrie du domaine de calcul.

## 6.1 Conditions aux parois

### 6.1.1 Condition de paroi glissante

Pour la simulation du jet libre, nous choisissons de négliger les effets de couche limite pouvant apparaître au niveau de l'orifice (ou de la tuyère). De simples parois glissantes sont alors considérées, soit pour prescrire les conditions au niveau de l'axe de symétrie, soit pour reconnecter la frontière d'entrée sonique ou supersonique aux frontières libres du domaine de calcul. On impose donc la condition de glissement classique :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$$

et la valeur du flux de bord  $\vec{F}_b^i$  est directement prescrite, sur les segments de frontière relatifs au volume de contrôle  $C_i$  et appartenant à ces parois glissantes adiabatiques selon :

$$\vec{F}_b^i = \begin{pmatrix} 0 \\ p_i \vec{n}_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $p_i$  est la pression extraite de la solution au noeud, calculée à l'étape de temps précédente.

### 6.1.2 Condition de paroi adhérente

La forte limitation de la représentativité physique d'une condition de paroi glissante peut parfois être à l'origine d'un manque de robustesse du schéma numérique dès lors qu'un nombre restreint de noeuds de calcul est utilisé près des parois en présence de forts gradients des variables physiques. Dans ce cas, une condition d'adhérence pourra être utilisée à la paroi, de façon simplement pragmatique, même si le maillage n'est pas raffiné en conséquence à sa proximité. Une valeur nulle pour la vitesse et une valeur  $E_b = \rho C_v T_b$  pour l'énergie totale, déterminée à partir d'une température de bord  $T_b$  prescrite, sont alors imposées fortement aux noeuds relatifs aux segments de bord concernés, tandis que les autres variables imposées correspondent à la solution calculée à l'étape de temps précédente.

## 6.2 Conditions aux frontières libres du domaine de calcul

### 6.2.1 Approche basée sur la théorie des caractéristiques

En introduisant le vecteur normal unitaire au niveau de la frontière  $\vec{n} = (n_x, n_y)^T$ , le vecteur tangent unitaire  $\vec{l}$  et le vecteur d'accroissement des variables caractéristiques en deux dimensions d'espace, dans la direction donnée par la normale unitaire  $\overrightarrow{\delta W}_n$ , soit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta W}_n &= (w_1, w_2, w_3, w_4)^T \\ &= \left( \delta\rho - \frac{\delta p}{a^2}, n_y \delta v_x - n_x \delta v_r, \frac{\delta p}{\rho a} + \vec{n} \cdot \delta \vec{V}, \frac{\delta p}{\rho a} - \vec{n} \cdot \delta \vec{V} \right)^T \end{aligned}$$

on peut réécrire sous forme caractéristique les équations d'Euler projetées dans la direction de la normale selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\delta}{\delta t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) w_1 = 0 \\ \left( \frac{\delta}{\delta t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) w_2 = \frac{a}{2} (n_x \delta_y - n_y \delta_x) (w_3 + w_4) \\ \left( \frac{\delta}{\delta t} + (\vec{V} + a \vec{n}) \cdot \vec{\nabla} \right) w_3 = a (n_x \delta_y - n_y \delta_x) w_2 \\ \left( \frac{\delta}{\delta t} - (\vec{V} + a \vec{n}) \cdot \vec{\nabla} \right) w_4 = a (n_x \delta_y - n_y \delta_x) w_1 \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Ce système étant couplé, il n'est pas utilisable directement pour prescrire simplement les conditions aux frontières libres. C'est pourquoi, on doit classiquement se contenter de considérer que le comportement de la solution est localement unidimensionnel. L'annulation des membres de droite des égalités de ce système (6.1) permet en effet d'obtenir un système découplé qu'on intègre aisément pour obtenir les relations caractéristiques précédemment présentées (voir 5.12). En introduisant  $u_n$  la vitesse normale à la frontière, nous rappelons ces relations ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \\ u_t = \text{constante} \end{array} \right. \text{ le long de } \frac{dn}{dt} = u_n \\ u_n + \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constante, le long de } \frac{dn}{dt} = u_n + a \\ u_n - \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constante, le long de } \frac{dn}{dt} = u_n - a \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Le principe suivi est alors similaire au principe de décentrage. Il s'agit de considérer localement au niveau des frontières les vitesses d'ondes afin de prescrire le nombre de variables physiques adéquat, les autres variables étant alors prescrites en fonction de l'information numérique déjà contenue dans le domaine de calcul, soit pour pour le système en configuration bidimensionnelle :

- 3 variables physiques pour une frontière d'entrée subsonique (via la pression totale, la température totale et la direction du vecteur vitesse dans notre cas, recalculées en fonction des niveaux prescrits pour la pression statique, la température statique et les composantes du vecteur vitesse),
- 1 variable physique pour une frontière de sortie subsonique (un niveau de pression statique dans notre cas),
- 4 variables physiques pour une frontière d'entrée supersonique (la pression statique, la température statique et les deux composantes de vitesse dans notre cas),
- Aucune variable physique pour une frontière de sortie supersonique (les composantes du flux convectif de bord sont alors prescrites en évaluant le flux sur la moyenne des états de l'élément jouxtant la frontière de sortie).

On notera bien qu'annuler les membres de droite dans (6.1) revient à négliger les gradients de pression et de vitesse tangentiellement à la frontière, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\rho} \left( \vec{l} \cdot \vec{\nabla} \right) p = 0 \\ -a \vec{l} \cdot \left( \vec{l} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V} = 0 \end{array} \right.$$

En simulation numérique directe, la précision des conditions limites devient primordiale, de sorte que certains auteurs proposent des méthodes plus sophistiquées pour intégrer en partie le système caractéristique en plus d'une dimension [130]. L'information physique peut alors être prescrite de façon plus pertinente et permet notamment d'évacuer des structures tourbillonnaires du domaine de calcul en écoulement quasi-incompressible, sans réflexion d'onde parasite. Ces procédures



relativement complexes ne restent cependant efficaces que si les frontières sont peu affectées par l'écoulement que l'on cherche à simuler. L'utilisation de telles conditions ne saurait effacer notre problème de connaître au moins le niveau de la pression, en particulier sur la frontière de sortie où elle pourra fortement varier, d'autant plus que l'on cherchera à réduire l'extension du domaine de calcul.

### 6.2.2 Conditions à l'entrée du domaine de calcul relatives à l'orifice

L'hypothèse d'évolution isentropique monodimensionnelle, entre les conditions génératrices et la section de l'ajutage, est retenue pour l'ensemble de nos simulations, sauf dans le cas où l'on cherche justement à évaluer spécifiquement l'effet de la déformation des profils dû à un orifice. Un état légèrement supersonique (nombre de Mach  $M_e = 1,01$ ) est cependant imposé au niveau de la section de l'ajutage afin d'éviter toute dérive des conditions à cette frontière, nécessitant la prescription de toutes les variables physiques. Le rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma$  et le rapport  $\frac{R}{M}$  de la constante des gaz parfaits sur la masse molaire, sont naturellement fixés en fonction du mélange étudié. Les niveaux de pression statique  $P_e$ , température statique  $T_e$ , vitesse longitudinale  $U_e$  et vitesse radiale nulle  $V_e$  sont alors déterminés et imposés sur les composantes du flux convectif de bord, en fonction des conditions génératrices  $P_o$  et  $T_o$ , selon les relations classiques :

$$\begin{cases} P_e = P_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \\ T_e = T_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \\ U_e = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T_e M_e} \end{cases} \quad (6.3)$$

Un jet parfaitement détendu, issu d'une tuyère divergente, est également simulé au cours d'une étude préliminaire de validation de la modélisation retenue. Dans ce cas, sans chercher à vérifier précisément l'impact de la présence d'une couche limite, l'effet d'un défaut d'injection de quantité de mouvement au bord de l'ajutage est étudié en prescrivant un profil en tangente hyperbolique pour la vitesse, fonction de la distance à l'axe  $r$  et du diamètre  $D_e$  de l'ajutage, soit :

$$U_{tanh} = \frac{v_{xe}}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{D_e}{4\delta\theta} \left( 1 - \frac{2r}{D_e} \right) \right) \right], \quad \text{pour } 0 \leq r \leq \frac{D_e}{2} \quad (6.4)$$

où  $\delta\theta$  est l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite déterminée expérimentalement et  $v_{xe}$  correspond à la vitesse obtenue dans l'approximation monodimensionnelle. Les profils de  $k_e$  et de  $\epsilon_e$  sont alors réajustés en conséquence.

### 6.2.3 Conditions relatives à la sortie

La nature de l'écoulement à la sortie du domaine de calcul est mixte, subsonique et supersonique, ce qui impose l'utilisation d'une condition dite de compatibilité. Celle-ci consiste à ne réimposer un niveau de pression statique sur la composante du flux convectif de bord que lorsque l'état du fluide est subsonique, ce niveau de pression statique étant déterminé par égalisation des invariants de Riemann au niveau de la frontière, cette frontière étant supposée connectée par une détente à un état à l'infini en aval, supposé égal à l'état prescrit dans le co-écoulement. Bien que ce choix représente *a priori* le meilleur compromis, il ne peut être optimal dès lors qu'on ne peut prendre correctement en compte l'évolution du champ de pression en aval de la frontière de sortie si un domaine de calcul peu étendu est utilisé. Que ce soit près de l'axe, dans le noyau subsonique en aval du disque de Mach ou au sein du co-écoulement fortement accéléré près de la frontière du jet supersonique, cette condition est susceptible d'imposer en permanence des

niveaux de pression trop éloignés des niveaux de pression obtenus dans le domaine en amont de cette frontière. L'illustration des difficultés induites par ce choix et les solutions retenues pour les surmonter sont développées au chapitre 9.

#### 6.2.4 Conditions relatives à l'entrée subsonique

Pour des raisons de stabilité et d'incompatibilité du schéma numérique pour la simulation de zones d'écoulement quasiment au repos, un co-écoulement à faible nombre de Mach ( $M = 0,05$ ) est imposé autour de l'écoulement principal imposé à l'ajutage. Par soucis de cohérence avec le choix imposé par la nature de la frontière de sortie, une condition de compatibilité pour l'entrée est également utilisée pour cette frontière. Cette condition revient ainsi à imposer les niveaux de pression totale, température totale et direction du champ de vitesse lorsque l'écoulement est subsonique (2 caractéristiques entrant dans le domaine de calcul). Les relations de compatibilité sont ainsi appliquées entre l'état intérieur du domaine et l'état infini en amont pour réimposer les niveaux de pression statique et température statique dans les composantes du flux de bord, les composantes de la vitesse étant réajustées pour respecter la direction du co-écoulement imposée parallèlement à l'axe du jet principal. Cette condition présente les mêmes limitations que la condition de sortie, de sorte qu'elle ne peut être appliquée sur une frontière positionnée trop près de la frontière d'entrée supersonique, sans risquer d'induire une rapide dérive des conditions réimposées à l'entrée dès lors que le jet simulé ne sera plus adapté.

#### 6.2.5 Conditions sur les frontières mixtes subsonique / supersonique en $r_{max}(x)$

Les conditions de compatibilité imposées sur les frontières d'entrée et de sortie sont susceptibles d'améliorer l'ajustement progressif des niveaux des variables prescrites pour prendre en compte le champ dynamique dans le co-écoulement. Ces conditions ne peuvent cependant pas être rigoureusement appliquées sur la frontière  $r_{max}(x)$  du domaine reliant ces frontières d'entrée et de sortie, dans la mesure où le comportement de l'écoulement (entrant ou sortant) n'est pas rigoureusement connu, notamment dans la phase transitoire du calcul. Afin d'éviter le risque de ne pas réimposer le nombre de variables physiques requis, le flux de bord est déterminé par application de la méthode de découpage de flux de Steger et Warming [157], légèrement modifiée. L'état conservatif  $\mathbf{U}_{int}$  à l'intérieur du domaine près de cette frontière et un état infini radial  $\mathbf{U}_{\infty}$  prescrit, permettent alors une évaluation des vitesses d'ondes et la sélection de l'expression des composantes selon :

$$\mathbf{F}_b(\mathbf{U}_{int}, \mathbf{U}_{\infty}) = \overline{\mathbf{A}}^+(\mathbf{U}_{int})\mathbf{U}_{int} + \overline{\mathbf{A}}^-(\mathbf{U}_{int})\mathbf{U}_{\infty}$$

où  $\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}}^+ + \overline{\mathbf{A}}^-$  est la matrice jacobienne du flux convectif décomposée en deux matrices selon le signe des valeurs propres. Par rapport au flux classique de Steger et Warming, la modification se caractérise ici par le fait que ces deux matrices sont évaluées sur le même état conservatif  $\mathbf{U}_{int}$ . Le flux de bord est ainsi totalement décentré sur la solution intérieure du domaine de calcul, de façon à éviter l'inconsistance qui apparaîtrait dès lors qu'un écoulement supersonique sortant du domaine serait détecté tandis qu'un état infini subsonique serait prescrit. Notons que cette condition n'a pas été retenue pour la frontière de sortie afin de conserver le caractère subsonique du co-écoulement en évitant la dérive des conditions en sortie dès lors qu'une zone supersonique trop étendue y serait détectée.

### 6.3 Détermination des niveaux de $k$ et de $\epsilon$

Au cours de la phase d'initialisation des simulations avec prise en compte de la turbulence, les niveaux de  $k$  et de  $\epsilon$  sont imposés aux noeuds appartenant aux frontières de paroi ou de sortie par simple extrapolation des valeurs aux noeuds les plus proches appartenant à l'intérieur du domaine de calcul. Aucune condition n'est ensuite appliquée pour modifier les valeurs déterminées par le bilan de flux à chaque étape de temps. En revanche, les valeurs de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et de son taux de dissipation  $\epsilon$  doivent être directement imposées aux noeuds appartenant aux frontières d'entrée relatives au co-écoulement et à l'ajutage et à la frontière  $r_{max}(x)$  lorsque l'écoulement rentre dans le domaine de calcul. Afin de fixer leurs valeurs respectives, nous choisissons de nous fixer deux grandeurs représentatives, soit l'intensité de turbulence  $I_t$  (qui doit être de l'ordre de quelques pourcents) et une échelle spatiale intégrale de la turbulence  $L_t$  (qui doit rester bornée par le diamètre de l'ajutage). De façon cohérente avec l'approche unidimensionnelle retenue pour prescrire les niveaux de pression, de température et de vitesse longitudinale au niveau de la section de l'orifice, le niveau des fluctuations de vitesse radiale est supposé nul, de sorte que le niveau des fluctuations longitudinales est directement imposé comme le produit  $I_t v_x$ , duquel se déduit directement la valeur de  $k$ . De façon cohérente avec la modélisation retenue,  $k$  et  $\epsilon$  sont reliés par l'expression du coefficient de viscosité turbulente sur cette frontière, soit :  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ . Par analyse dimensionnelle, on relie par ailleurs l'échelle spatiale intégrale au coefficient de viscosité turbulente et au taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente par :  $L_t = \left(\frac{\nu_t^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$ . Cette relation associée à la relation précédente permet donc de déterminer  $\epsilon$  de façon cohérente en fonction de  $k$  et  $L_t$ . Finalement, de la prescription de grandeurs représentatives pour  $I_t$  et  $L_t$ , on déduit les valeurs à imposer dans ce cas, pour  $k$  et  $\epsilon$  selon :

$$\begin{cases} k = \frac{(I_t v_x)^2}{2} \\ \epsilon = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{L_t} \end{cases}$$

### 6.4 Choix du domaine de calcul et bilan

La figure 6.1 représente l'allure des domaines de calculs retenus respectivement pour la simulation des ondes simples élémentaires ou du tube à choc, d'un écoulement supersonique stationnaire sur une rampe ou la réflexion d'un choc instationnaire sur un dièdre, de l'impact d'un écoulement supersonique stationnaire sur un corps émoussé et de l'écoulement supersonique sur une marche montante. Ces configurations n'étant retenues que pour valider les capacités de l'outil numérique à évaluer correctement les flux convectifs, de simples conditions de paroi glissante sont utilisées pour les frontières horizontales, la rampe ou la surface du corps émoussé. Les conditions à l'entrée du domaine sont imposées fortement tandis qu'une condition de compatibilité est utilisée en sortie.

La figure 6.2 synthétise l'ensemble des choix retenus pour la géométrie du domaine et les conditions limites retenues pour la simulation des jets supersoniques. Même si le caractère restrictif de l'approximation unidimensionnelle et du choix d'une direction d'évaluation de nature arbitrairement géométrique, s'avère moins prononcé pour le traitement des conditions aux limites que pour l'évaluation des flux numériques à l'intérieur du domaine de calcul, les frontières du domaine doivent être *a priori* alignées au mieux orthogonalement aux directions privilégiées de l'écoulement, afin d'éviter l'obtention de solutions numériques incohérentes avec la physique de l'écoulement. Ainsi, la direction des frontières de sortie et d'entrée pour l'injection ou le co-

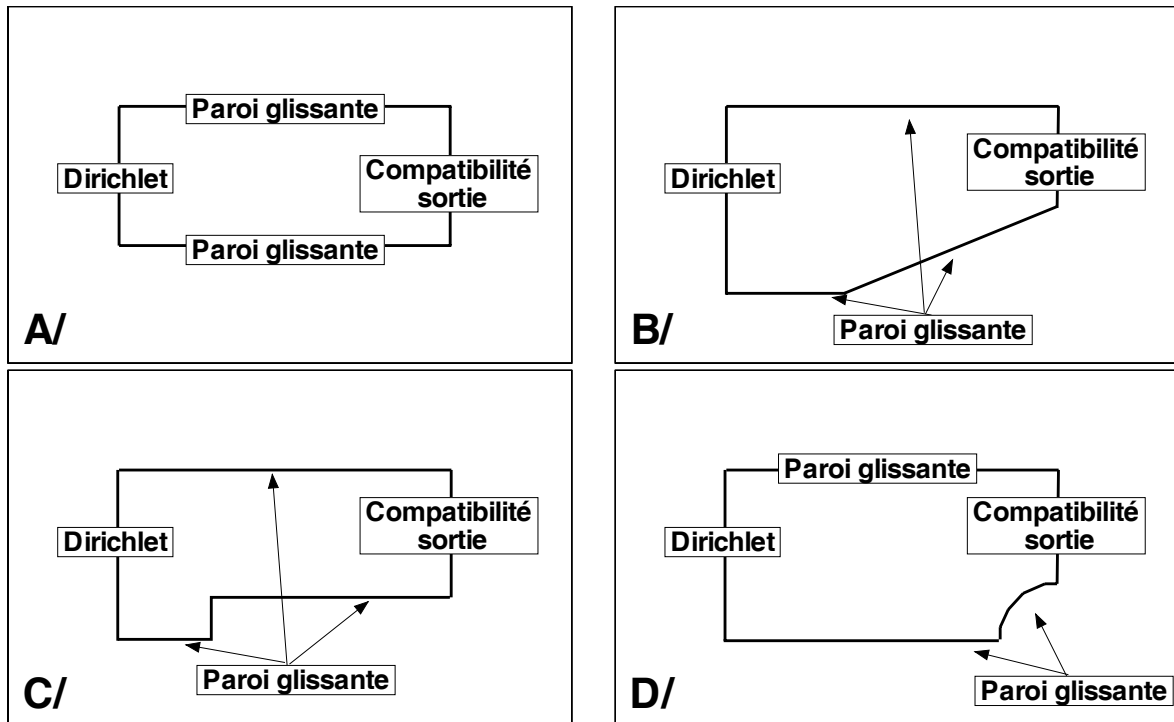


FIG. 6.1 – Schéma des domaines de calcul relatifs aux cas de validation de l'outil numérique : **A/** : Ondes simples et tube à choc, **B/** : Ecoulement supersonique stationnaire sur une rampe et réflexion d'un choc instationnaire sur un dièdre, **C/** : Ecoulement supersonique stationnaire sur une marche montante, **D/** : Ecoulement supersonique impactant un corps émoussé.

écoulement seront naturellement choisies orthogonales à l'axe de symétrie. De par le processus de détente, l'angle de la frontière du jet et de la structure de choc peut être suffisamment important au bord de l'ajutage pour induire des niveaux des variables physiques incompatibles avec les niveaux imposés à la frontière d'entrée du co-écoulement. Aussi est-il nécessaire de repousser cette frontière en amont. On choisit alors de reconnecter cette frontière d'entrée du co-écoulement à la frontière supersonique de l'ajutage par une paroi glissante. Il en découle que les effets de couche limite au niveau de la lèvre de buse ne sont pas pris en compte, ce qui peut induire, dès lors que le rapport de détente devient suffisamment élevé, soit une trop grande imprécision de la localisation de l'origine du faisceau de détente, soit un manque de robustesse du schéma numérique lié à un raffinement insuffisant près du bord de la buse. Ces effets sont étudiés en considérant deux géométries différentes. La première consiste à raccorder directement la frontière de l'ajutage à la paroi. La seconde consiste à rajouter une "pseudo-lèvre" de buse, en rajoutant deux simples éléments de paroi glissante supplémentaires en aval de la frontière relative à l'ajutage (voir figure 6.2). Finalement, la direction du co-écoulement dans le lointain radial n'étant pas rigoureusement connue *a priori*, on choisit de limiter au maximum la réflexivité de cette condition en l'orientant obliquement par rapport à l'axe (cette direction est fixée arbitrairement en fonction des extensions radiales des frontières d'entrée du co-écoulement et de sortie, estimées satisfaisantes après différents essais préliminaires).

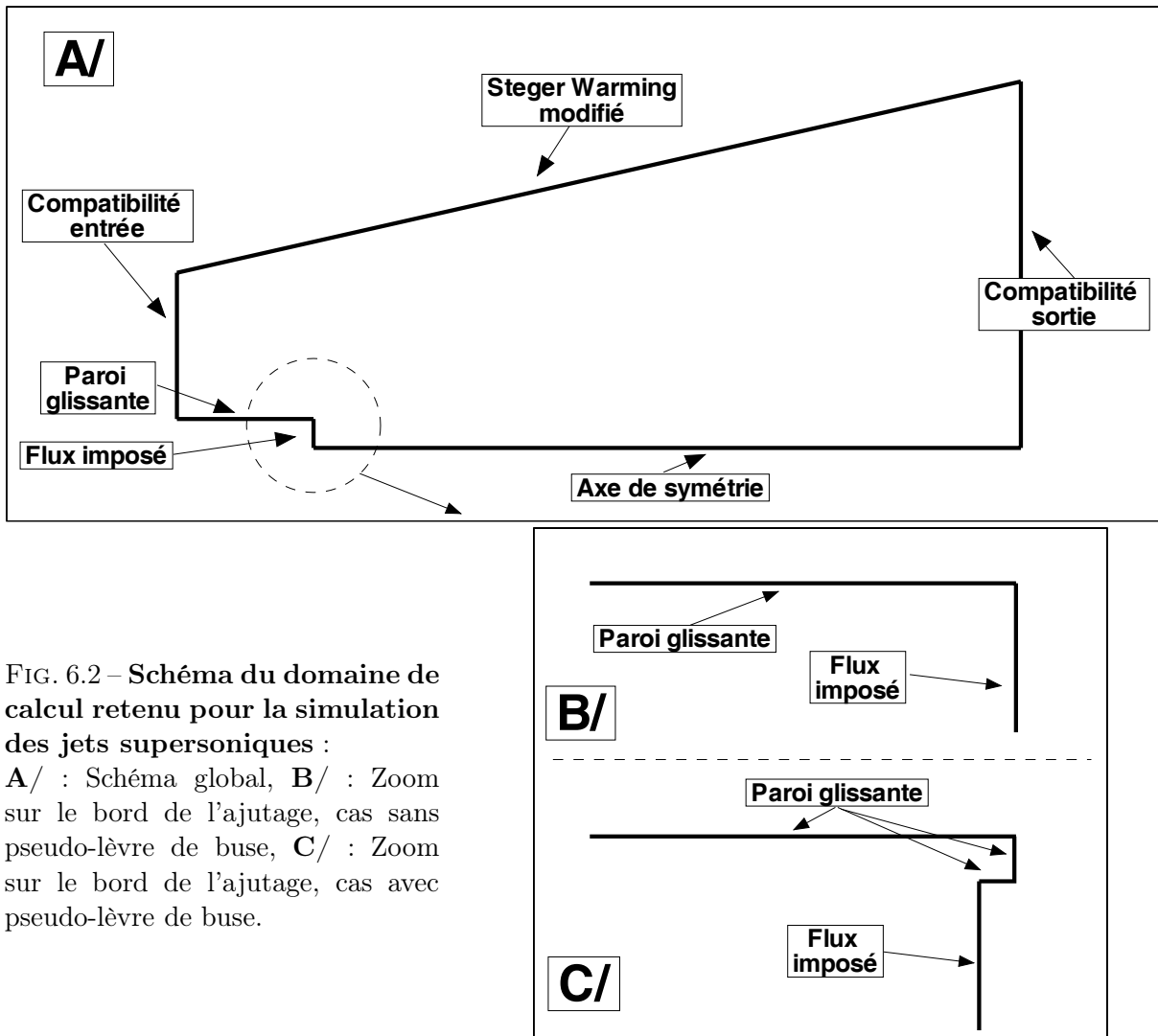


FIG. 6.2 – Schéma du domaine de calcul retenu pour la simulation des jets supersoniques :

A/ : Schéma global, B/ : Zoom sur le bord de l'ajutage, cas sans pseudo-lèvre de buse, C/ : Zoom sur le bord de l'ajutage, cas avec pseudo-lèvre de buse.

## Chapitre 7

# Procédures de génération et de réadaptation de maillage

Dans ce chapitre, nous proposons dans un premier temps de décrire succinctement les principes de génération des deux types de maillage qui ont été initialement utilisés. Nous verrons (cf. chapitre 8) que le comportement initial des solutions dans diverses configurations d'écoulement dépendra fortement de la qualité intrinsèque de ces deux types de maillage obtenus. Les principes de la méthode de réadaptation de maillage choisie, ainsi que ses avantages sont ensuite présentés.

### 7.1 Génération de maillages non-structurés

#### 7.1.1 Définitions et propriétés générales

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine borné de l'espace physique dans lequel on cherche à prévoir le comportement d'une portion de l'écoulement. L'approximation polygonale du bord de ce domaine définit le domaine de calcul  $\Omega$ . On choisit de discrétiser ce domaine de calcul par un maillage non-structuré en utilisant des ensembles de trois points orientés dans le sens spatial antihoraire, correspondant géométriquement à des triangles ( $T_i$ ,  $i \in I_T$ ,  $I_T$  étant l'ensemble des index des triangles). En dépit du fait qu'elle implique une gestion globale du maillage plus complexe, l'utilisation de tels éléments triangulaires facilite leur manipulation locale (découpage, suppression locale) via des algorithmes locaux plus simples à implanter et permettent surtout de représenter plus fidèlement des formes géométriques complexes (telle que la structure de choc attendue dans notre cas). On définit un maillage admissible  $\Omega_h$  du domaine de calcul  $\Omega$  donné comme un ensemble de triangles  $\bigcup T_i$ ,  $i \in I_T$ , vérifiant les propriétés suivantes :

- L'union des triangles forme un recouvrement du domaine de calcul fermé :  $\bigcup_{i \in I_T} T_i = \Omega_h$ ,
- Le barycentre de tous les triangles est inclu dans le domaine  $\mathcal{D}$ ,
- L'intersection de deux triangles est vide, ou comporte soit un sommet ou un bord commun,
- L'intersection d'un bord d'un triangle avec la frontière du domaine de calcul est vide, ou comporte soit deux de ces extrémités ou le bord entier,
- Les valeurs des angles intérieurs du triangle doivent être supérieures à une valeur seuil (typiquement  $5^\circ$ ) pour éviter des déformations des mailles triangulaires qui soient incompatibles avec la précision accessible via la méthode numérique.

### 7.1.2 Génération d'un maillage de type structuré par blocs avec redécoupage

La première méthode<sup>1</sup> suit une approche de décomposition multiblocs où les blocs sont spécifiés *a priori* par redécoupage d'un bloc initial, englobant la géométrie du domaine, en un nombre de sous-blocs adapté à la description correcte du domaine. Afin d'assurer la plus grande régularité du maillage sans post-traitement supplémentaire, on choisit de raccorder naturellement les segments des bords des blocs en fixant les mêmes distributions de noeuds sur tous les bords parallèles de ceux-ci. La distribution des noeuds est alors immédiate. La spécification des correspondances entre les noeuds et bords des blocs, respectivement avec les sommets et frontières de la géométrie du domaine, permet ensuite de projeter ce maillage sur la géométrie exacte du domaine choisi. Une simple étape de redécoupage des quadrilatères obtenus est ensuite appliquée. Cette procédure permet de traiter des géométries relativement complexes et offre l'avantage de pouvoir contrôler *a priori* le nombre d'éléments triangulaires souhaité. Par ailleurs, il est relativement aisé d'imposer des lois non-linéaires de distribution des noeuds sur chaque ensemble de bords (par exemple pour effectuer un resserrement près d'une paroi). On remarque immédiatement cependant l'orientation privilégiée des segments dans l'ensemble du maillage (cf. figure 7.1). Nous mettrons en évidence la faiblesse de la méthode numérique retenue lorsque de tels maillages sont utilisés (voir en particulier la section 9.1.1).

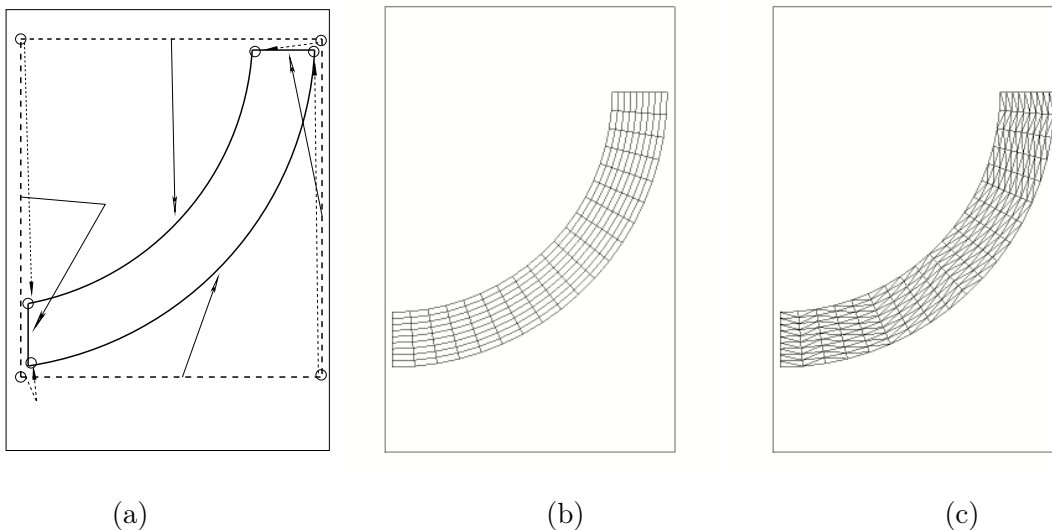


FIG. 7.1 – Procédure de génération du maillage de type structuré :

(a) : Génération d'un bloc autour de la géométrie initiale et projection des noeuds et bords du bloc sur la géométrie, (b) : Maillage structuré généré, (c) : Maillage non-structuré obtenu par redécoupage des quadrilatères du maillage structuré.

### 7.1.3 Génération d'un maillage non-structuré de type Voronoï

La seconde procédure utilisée<sup>2</sup> repose sur une méthode originale de découpage itératif de boucles dans le domaine [95], méthode qu'on pourrait classer entre les méthodes classiques de décomposition spatiale (construction d'une structure hiérarchique d'arbre pour la localisation progressive des points et l'acquisition des informations métriques) et les méthodes d'optimisation

<sup>1</sup>Cette méthode est implantée dans le module Hexa du mailleur ICEMCFD utilisé.

<sup>2</sup>Ces maillages initiaux sont générés avec le module Quad du mailleur ICEMCFD utilisé.

de type Delaunay contraint<sup>3</sup>. Cette méthode repose sur le concept de boucle, que l'on peut définir comme une ligne polygonale fermée, constituée par l'assemblage d'un ensemble de segments orientés. La procédure consiste à définir un ensemble de boucles dont la réunion recouvre le domaine géométrique de calcul. Dans notre cas, une seule boucle est initialement construite en joignant l'ensemble des frontières du domaine formant une ligne polygonale fermée. Ces boucles définissent l'espace dans lequel les noeuds sont alors distribués. Une taille de maille est prescrite pour chaque frontière, ce qui permet d'obtenir une distribution initiale des noeuds sur toute la frontière fermée de notre domaine. Un algorithme de bouclage redécoupe itérativement chaque boucle en deux sous-boucles en introduisant une ligne de découpage sur laquelle des noeuds sont redistribués. Le choix de la ligne de redécoupage à partir d'un noeud est effectué via le calcul d'un critère d'erreur qui prend en compte par ordre de priorité :

- La distortion attendue des éléments triangulaires en mesurant l'écart des angles générés par rapport à des angles multiples de  $\pi/3$ .
- La longueur des lignes de redécoupage introduites en favorisant la longueur des petites boucles.
- L'erreur d'adaptation correspondant à l'écart entre le nombre de noeuds à prescrire sur la ligne de redécoupage pour respecter certains critères (nombre de segments pairs par exemple au cas où l'on souhaiterait que la boucle finale soit un quadrilatère) avec le nombre idéal de noeuds à distribuer sur le domaine, celui-ci étant estimé par rapport à la distribution initiale des noeuds sur la boucle.

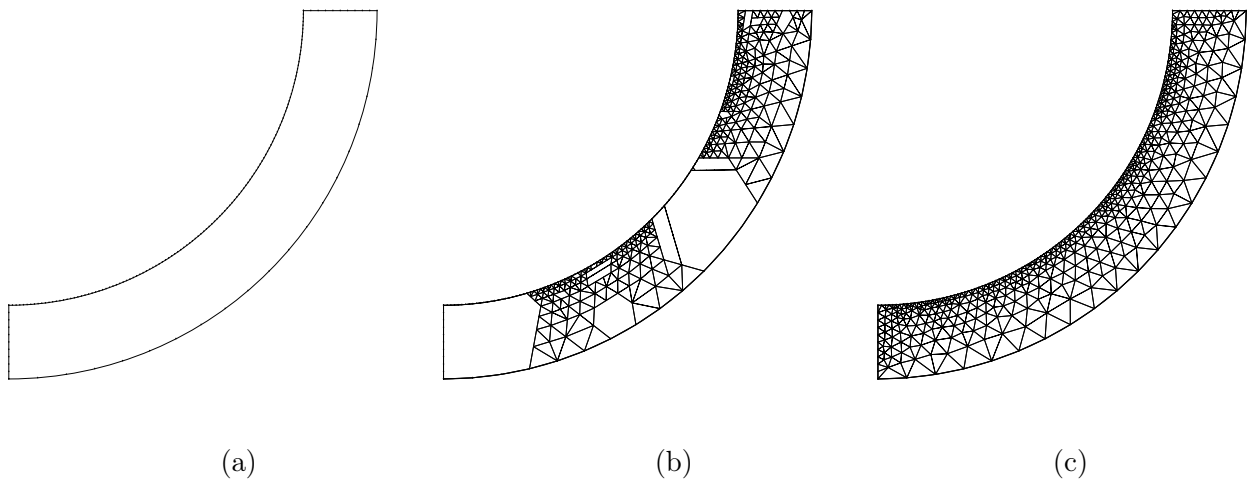


FIG. 7.2 – Procédure de génération d'un maillage de type non-structuré :

(a) : Génération de la boucle initiale et distribution des noeuds de bord, (b) : Maillage intermédiaire obtenu pendant la procédure de bouclage, (c) : Maillage final obtenu après lissage.

La ligne de redécoupage choisie est celle dont le critère d'erreur est le plus petit. Des noeuds sont alors redistribués sur cette ligne nouvellement introduite selon une loi géométrique respectant les tailles des segments initial et final, celles-ci étant respectivement calculées par simple moyenne des tailles de segments adjacents au noeud initial et au noeud final de la ligne introduite.

Cette méthode est particulièrement adaptée pour la génération de maillages hybrides (quadrilatères et triangles en 2D) pour des géométries complexes où les zones convexes et concaves sont facilement prises en compte. Dans notre cas, où l'on ne souhaite générer que des triangles,

<sup>3</sup>Voir par exemple l'ouvrage de Frey et George [66] pour une présentation de l'ensemble de ces méthodes.



elle permet également de produire des maillages de meilleure qualité que celle obtenue par des méthodes plus classiques de décomposition spatiale. Une transition plus régulière des tailles de maille est en effet automatiquement assurée en passant des zones de faible à fort raffinement (cf. Fig. 7.2). Près des frontières où de grosses tailles de mailles sont prescrites, le maillage obtenu peut certes présenter localement quelques faibles irrégularités sur la forme des triangles, mais celles-ci restent moins marquées que dans le cas où des méthodes frontales sont utilisées. Par ailleurs, la réimposition d'une distribution géométrique des noeuds sur chaque ligne de redécoupage introduite permet de générer, près des zones où de petites tailles de mailles sont prescrites, moins d'éléments que dans le cas où un tel front de propagation est utilisé. Finalement, la qualité de maillage obtenue semble très proche de celle obtenue par l'utilisation de méthodes de type Delaunay contraint pour lesquelles les limitations sont essentiellement liées à un manque de robustesse des algorithmes dans la phase de préservation de l'intégrité de la frontière (surtout dans le cas tridimensionnel)<sup>4</sup>. Afin d'améliorer encore la qualité du maillage, on applique un algorithme de lissage qui consiste simplement à repositionner chaque noeud au centre de gravité de ses noeuds voisins.

## 7.2 Réadaptation du maillage

### 7.2.1 Introduction à la méthode de remaillage anisotrope choisie

Quelque soit la qualité de la méthode numérique que nous pourrions utiliser pour augmenter la précision spatiale (voir section 5.3), la dissipation numérique induite par un maillage trop grossier dans les zones où apparaissent des discontinuités, peut totalement nuire à la qualité globale de la solution calculée. L'erreur de discrétisation introduite localement est en effet directement liée à la taille des mailles via les termes d'ordre supérieur qui sont négligés dans l'approximation équivalente en différences finies des dérivées spatiales. L'utilisation d'un nombre limité de noeuds de calcul restreint ainsi la plus petite échelle caractéristique numérique de l'écoulement simulé à une échelle qui peut rester relativement grande par rapport aux échelles caractéristiques locales de l'écoulement réel. Par ailleurs, seul un nombre limité de longueurs d'ondes caractéristiques pourra être pris en compte. Dans le cadre de notre étude, la limitation la plus importante provient de l'extension multidimensionnelle d'algorithmes de décentrage qui ne sont rigoureusement valides que pour évaluer les flux numériques dans une configuration unidimensionnelle. En une dimension d'espace, on peut en effet évaluer précisément l'intensité des ondes simples propageant une discontinuité des variables conservatives de l'écoulement dans l'unique direction d'espace. En deux dimensions d'espace, cette évaluation est réalisée dans la direction normale moyenne à un ensemble de segments à la frontière séparant deux surfaces de contrôle sur lesquelles les bilans de flux sont calculés (cf. chapitre 5.2). Ainsi, seule l'amplitude de la projection de l'onde dans cette direction moyenne est rigoureusement évaluée. Une importante erreur peut donc également être introduite par une orientation inadaptée des éléments du maillage (localement non orthogonale aux directions de propagation de l'information physique). Pour une majorité de configurations, il est possible de remédier à ce problème en diminuant progressivement la taille des mailles utilisées. Dans des configurations d'écoulements supersoniques contenant de larges zones de forte discontinuité, il n'est cependant plus envisageable de recourir systématiquement à un tel raffinement global du maillage sans rapidement rencontrer de sérieuses limitations en termes de capacités de calcul. Afin de ne raffiner le maillage que dans les zones où cela s'avère vraiment nécessaire, la plupart des méthodes présentées dans la littérature ont d'abord été basées sur l'utilisation d'un

---

<sup>4</sup>Ces comparaisons sont essentiellement basées sur des exemples de maillages donnés dans l'ouvrage de Frey et George [66].

"indicateur de choc" qui n'est autre qu'une fonction estimant le gradient des diverses variables sur un élément. Ceux-ci sont marqués si le gradient estimé est trop important, afin de pouvoir raffiner autour de celui-ci. Il s'agit alors de redécouper l'élément et ses voisins sans trop nuire à la qualité du maillage. Par exemple, pour un calcul bidimensionnel d'un écoulement sur un dièdre à l'aide de maillages à base de triangles, Da Silva et al. [42] estiment sur chacun des triangles du domaine, pour chaque variable significative (pression, vitesse longitudinale, vitesse radiale, température et fraction massique d'espèce), le gradient adimensionné par l'écart maximal de la variable, relevé sur l'ensemble du domaine de calcul. Lorsque le module de ce gradient est supérieur à une valeur seuil (qu'il s'agit alors d'ajuster par expérience numérique), le triangle est marqué et redécoupé en quatre sous-triangles (en utilisant les milieux des arêtes du triangle initial par exemple), tandis que les triangles voisins sont redécoupés en deux triangles via le milieu de l'arête du triangle marqué (à condition que ces triangles voisins ne soient pas eux-mêmes marqués). Afin de ne pas nuire à la qualité du maillage, il est cependant nécessaire d'appliquer plusieurs fois un algorithme de lissage consistant à déplacer successivement chaque noeud du maillage au centre du polygone formé par tous les éléments triangulaires ayant ce noeud en commun. L'effet global de raffinement permet évidemment d'améliorer très nettement la qualité de la solution. On constate cependant rapidement les limitations de ce type de méthodes qui ne font qu'ajouter des éléments. Si une valeur seuil trop faible est utilisée, on rajoute rapidement trop d'éléments, ce qui est incompatible avec l'obtention de temps de calcul acceptables. Si elle est trop élevée, seules les très fortes discontinuités sont correctement capturées. Par ailleurs, il est délicat de savoir *a priori* le nombre de lissages à effectuer, un nombre trop important de lissages faisant rapidement perdre l'intérêt du raffinement, un nombre trop faible de lissages résultant en une "mauvaise" qualité de maillage, sans contrôle possible de l'erreur induite. Des méthodes plus efficaces sont désormais disponibles et consistent non plus seulement à raffiner le maillage uniquement dans les zones de forts gradients, mais à l'adapter globalement selon un estimateur de l'erreur d'interpolation induite par la géométrie des mailles utilisées. C'est cette approche que nous avons privilégiée en adoptant la méthode AMA ("Anisotropic Mesh Adaptation") de Dolejši [48]. Son principe est de définir un estimateur de l'erreur d'interpolation de la solution à partir d'une estimation sur les noeuds du maillage du comportement des dérivées secondes de la solution initialement calculée. Dans notre cas, on se contentera d'utiliser la solution de la masse volumique. Cette estimation permet de générer une nouvelle métrique de Riemann plus pertinente pour adapter le maillage à partir de critères s'appliquant directement sur les nouvelles "longueurs" des segments du maillage, estimées avec cette nouvelle métrique. Il est alors aisé de compléter la procédure classique de raffinement (ajout de noeuds), par des procédures de suppression et déplacement de noeuds, ainsi que par des interversions des diagonales de quadrilatères formés par deux triangles voisins. Cette procédure itérative minimise l'erreur d'interpolation et la répartit le plus uniformément possible dans le domaine de calcul pour un nombre d'éléments de référence prescrit, nous permettant de la sorte d'adapter au mieux le maillage tout en contrôlant le nombre maximum d'éléments (et donc le coût calcul) souhaité. Le nouveau maillage optimisé présente alors non seulement des zones raffinées où de forts gradients sont rencontrés, mais aussi des zones déraffinées relatives à des zones où la solution évolue peu. L'anisotropie est par ailleurs explicitement prise en compte localement de sorte que les mailles sont progressivement orientées et déformées de façon contrôlée (en limitant l'angulation des arêtes) parallèlement aux discontinuités (ce qui limite l'erreur sur l'estimation des flux numériques). Il suffit alors simplement de réinterpoler l'ancienne solution pour initialiser un nouveau calcul sur le nouveau maillage et de réitérer l'opération jusqu'à "convergence du maillage"<sup>5</sup>. Cette méthode éprouvée [48] s'avère

---

<sup>5</sup>On dit que la méthode de réadaptation converge dans le sens où les maillages obtenus, pour un jeu de paramètres de réadaptation donné, deviennent "quasi-semblables" lorsqu'on cherche une solution stationnaire.

particulièrement efficace pour optimiser le rapport qualité de la solution sur nombre d'éléments introduit, tandis que l'algorithme "converge" rapidement (entre 5 et 10 répétitions). Bien que cette méthode ne permette pas de fixer *a priori* la véritable erreur de discrétisation, sa généralité offre l'avantage de pouvoir être couplée à n'importe quelle méthode de discrétisation spatiale basée sur l'utilisation d'éléments triangulaires.

### 7.2.2 Présentation de la technique AMA

On pourra consulter le rapport de Dolejši [49] pour un développement détaillé des principes et des démonstrations. Seule une synthèse du principe général de la méthode est donnée dans cette section.

#### Principe de la méthode

Soit le domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , soit  $\mathcal{U}$  l'espace des phases (fonctions spatio-temporelles des variables physiques de l'écoulement), la formulation faible du problème à valeur limite que l'on considère quand on résout les équations de Navier-Stokes consiste en toute rigueur à déterminer la fonction solution exacte  $u \in \mathcal{U}$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U} \\ \mathcal{L}(u, v) = f(v), \quad \forall v \in \mathcal{V} \\ \mathcal{B}(u) \in \mathcal{V}, \end{cases}$$

où  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{B}$  sont les opérateurs différentiels s'appliquant respectivement dans le domaine  $\Omega$  et sur sa frontière  $\partial\Omega$  et  $\mathcal{V}$  est l'espace des fonctions tests. En suivant l'approche "éléments finis" retenue, la résolution numérique du problème consiste alors à chercher la solution approchée  $u_h$  sur l'union du domaine fermé et de son approximation polygonale vérifiant :

$$\begin{cases} u_h \in \mathcal{U}_h, \\ \mathcal{L}_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \\ \mathcal{B}_h(u_h) \in \mathcal{V}_h \end{cases}$$

où l'on choisit, pour l'espace des fonctions tests et l'approximation de l'espace des phases, l'espace  $\mathcal{V}_h$  des fonctions linéaires par morceau (linéaire sur chaque élément triangulaire) (cf. chapitre 5.1). Si on fait l'hypothèse que la solution exacte  $u$  est unique, on introduit, par construction, une erreur absolue de discrétisation  $\|u - u_h\|$  (où  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne) qu'il s'agit de minimiser en dessous d'une valeur de tolérance  $\omega$  fixée. Naturellement, on ne dispose, pour évaluer initialement la solution exacte  $u$  qui n'est pas connue, que d'une distribution de valeurs  $u_{hi}$ ,  $i \in I_C$ , aux noeuds du maillage. On doit donc faire l'hypothèse que le maillage initial est suffisamment raffiné pour que l'on puisse représenter localement la solution exacte  $u$  par un lissage polynomial de l'ensemble des valeurs  $u_{hi}$  initialement calculées aux noeuds du maillage (voir figure 7.3). A partir de cette estimation initiale de la solution exacte entre chaque point, on peut montrer que, quelque soit la fonction d'espace définie sur l'union du domaine fermé et de sa triangulation, si cette fonction est de carré intégrable (ce qui reste évidemment valable pour le lissage polynomial d'une distribution des variables classiques hydrodynamiques ou fractions massiques d'espèce), l'erreur d'interpolation  $\epsilon$  induite par l'utilisation d'une fonction linéaire est maximale pour la fonction qui conserve la valeur et le gradient de cette variable au centre de gravité. On parle alors de  $\nabla$ -interpolation (voir la figure 7.4 où sont illustrées les erreurs  $\epsilon_\nabla$  et  $\epsilon_i$  induites par l'utilisation de la  $\nabla$ -interpolation et l'interpolation initiale respectivement). On peut donc se contenter d'imposer une condition plus forte qui est d'assurer que l'erreur d'interpolation autour du centre de gravité des triangles, induite par l'utilisation de la  $\nabla$ -interpolation reste

inférieure à la tolérance fixée. Pour une approximation linéaire, un simple développement en série de Taylor autour de ce centre de gravité de coordonnées  $(x_G, r_G)$  montre alors que l'erreur induite par l'utilisation de la  $\nabla$ -interpolation est de l'ordre de la demi-somme des dérivées secondes. Assurer que l'erreur d'interpolation de la solution est inférieure à la tolérance  $\omega$  donnée revient donc, de façon équivalente, à satisfaire pour tout point  $(x, r)$  appartenant au triangle que :

$$\begin{pmatrix} x - x_G, & r - r_G \end{pmatrix} \mathbb{H}(x) \begin{pmatrix} x - x_G, & r - r_G \end{pmatrix}^T \leq 2\omega \tag{7.1}$$

où  $\mathbb{H}(x)$  est la matrice hessienne de la fonction  $u$ , i.e. la matrice dont les composantes sont les dérivées secondes de  $u$ . Si la matrice hessienne est symétrique et définie positive, l'équation (7.1) est celle satisfaite par l'ensemble des points intérieurs à une ellipse dont les rayons sont donnés par l'inverse des valeurs propres de la matrice hessienne diagonalisée. D'une part, majorer l'erreur d'interpolation par la valeur de tolérance  $\omega$  pour l'ensemble des points du triangle revient géométriquement à imposer au triangle d'être inclus dans cette ellipse. D'autre part, minimiser le nombre de triangles requis pour mailler l'ensemble du domaine revient alors localement à maximiser l'aire du triangle inclus dans chaque ellipse. Chaque triangle ne peut naturellement pas être parfaitement inclus dans l'ellipse ainsi définie autour de son centre de gravité. Le problème d'optimisation qui se pose consiste donc à améliorer progressivement la position des noeuds définissant chaque triangle pour que l'écart cumulé entre ces positions et l'intérieur des ellipses soit le plus petit possible, le nombre de triangles utilisés devant également être le plus petit possible (voir illustration dans le cas 1D sur la figure 7.5). En fait, il est beaucoup plus pratique

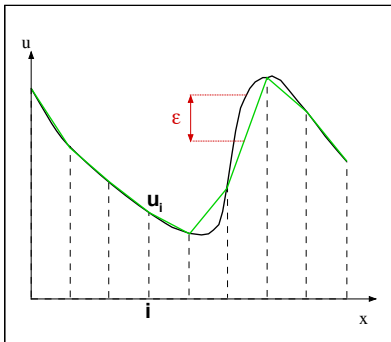


FIG. 7.3 – Illustration (en 1D) de l'erreur d'interpolation de  $u$  induite par une distribution initiale inadaptée des noeuds du maillage.

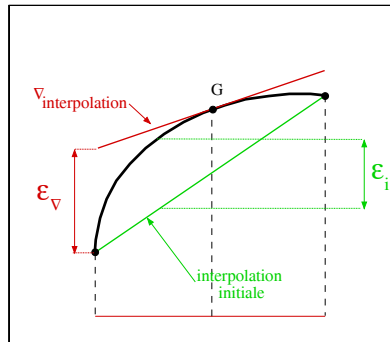


FIG. 7.4 – Utilisation de la courbure locale de la solution pour estimer l'erreur maximale d'interpolation.

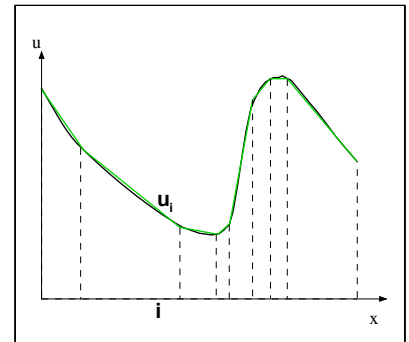


FIG. 7.5 – Illustration (en 1D) de l'erreur d'interpolation de  $u$  minimisée par réadaptation du maillage.

de transposer ce problème d'optimisation directement sur les longueurs des segments définissant chaque triangle. La norme euclidienne n'étant naturellement plus adaptée pour se fixer une longueur de référence à approcher au mieux pour chaque segment, on utilise la courbure d'une variable physique (la masse volumique dans notre cas) pour introduire une nouvelle métrique dans laquelle la longueur idéale de chaque segment composant le maillage est calculable *a priori*. D'un point de vue mathématique, le problème se ramène donc à construire, à partir de la matrice hessienne de la masse volumique, une nouvelle matrice qui soit toujours symétrique et définie positive via laquelle nous pouvons introduire une nouvelle norme vectorielle afin de comparer, dans cette nouvelle métrique de Riemann, les longueurs des segments à une longueur idéale fonction de la tolérance prescrite. Soit  $I_S$  l'ensemble des indices des segments du maillage. Pour

estimer la longueur des  $n_S$  segments du maillage, joignant chaque couple de noeuds  $i$  et  $j$ , définis par les vecteurs  $(\vec{ij})_k = (x_j - x_i, r_j - r_i)_k^T$ ,  $k \in I_S$ , nous introduisons donc la norme vectorielle suivante :

$$\|(\vec{ij})_k\|_{\mathbb{M}_k} = \left( (\vec{ij})_k^T \mathbb{M}_k (\vec{ij})_k \right)^{\frac{1}{2}}, \forall k \in I_S \quad (7.2)$$

où l'expression de la matrice  $\mathbb{M}_k$ , fonction des matrices hessiennes de la masse volumique aux noeuds du segment indicé  $k$ , est explicitée plus loin dans l'exposé.

L'élément  $\omega$ -optimal pour une tolérance donnée  $\omega$  se définit comme le triangle (dont on peut montrer l'existence quelque soit la tolérance) inscrit dans cette ellipse et ayant l'aire maximale. En deux dimensions d'espace, l'aire maximale est en fait obtenue pour des triangles dont les côtés ont une longueur de  $\sqrt{6\omega}$ , longueur estimée dans la nouvelle métrique. Puisqu'un maillage (dit "bord-optimal"), composé uniquement d'éléments-optimaux, n'existe pas dans la pratique, la démarche suivie consiste à estimer les écarts entre les longueurs initiales (relatives au maillage initial et à la solution calculée sur celui-ci) et la longueur optimale  $\sqrt{6\omega}$ . Un ensemble d'opérations élémentaires adéquates est alors appliqué localement pour réduire progressivement le paramètre de qualité qui moyenne l'écart à la longueur optimale de tous les segments du maillage. Ce paramètre de qualité pour un maillage intermédiaire obtenu  $\Omega_h$  se définit par :

$$\mathcal{Q}_{\Omega_h} = \frac{1}{n_S} \sum_{k \in I_S} \left( \|(\vec{ij})_k\|_{\mathbb{M}_k} - \sqrt{6\omega} \right)^2$$

Notons qu'une opération élémentaire conduisant à la génération d'un élément triangulaire trop déformé n'est pas appliquée. Pour un triangle  $T_k$ ,  $k \in I_T$ , cette condition se ramène à vérifier que le rapport de la surface du triangle  $|T_k|$  sur la somme des carrés des longueurs de ces segments est supérieur à une valeur ajustable en fonction de l'angle minimal  $\alpha$  requis. Soit  $A, B, C$  les sommets d'un triangle  $T_k$ , cette condition s'exprime par :

$$\frac{2|T_k|}{\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2} \geq \alpha, \text{ avec } |T_k| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

condition dans laquelle nous devons naturellement cette fois-ci utiliser la norme euclidienne pour estimer les longueurs des segments. L'intérêt de mettre cette condition sous cette forme est de pouvoir vérifier simultanément (via le "signe de la surface") que l'orientation des noeuds des triangles obtenue après l'application de chaque opération élémentaire conserve la conformité du maillage (noeuds orientés dans le sens antihoraire).

Finalement, notons qu'il peut être délicat de se fixer *a priori* la valeur de tolérance  $\omega$ , et ce d'autant plus que cette tolérance dépend elle-même de la précision de la solution idéale estimée uniquement d'après l'évolution de la courbure locale. Aussi suit-on en fait la démarche alternative qui consiste à se fixer un nombre de segments  $N_{\text{élé}}^m$  et à les répartir idéalement sur le domaine. Sans avoir à connaître explicitement la valeur de l'erreur alors induite, la procédure itérative que nous allons préciser, nous permet de minimiser cette erreur et de la répartir uniformément sur l'ensemble du domaine (voir figure 7.5). Dans la suite, on montre que la longueur idéale d'un segment peut être paramétrée par  $N_{\text{élé}}^m$  et non plus par  $\omega$ . On choisit alors de fixer la valeur de  $\omega$  à 1/2 en considérant que le maillage idéal est dans ce cas constitué de triangles équilatéraux inscrits dans des cercles de longueur unitaire (dans la nouvelle métrique introduite par la matrice d'erreur).

### Opérations élémentaires réalisées

En considérant un champ de courbure nulle, l'expression retenue pour la matrice d'erreur (voir le paragraphe suivant) nous amène à considérer que le maillage "bord-optimal" est uniquement

composé de triangles équilatéraux inscrits dans des cercles unités. La valeur de  $\omega$  ainsi fixée à  $\frac{1}{2}$  nous amène donc à considérer une longueur idéale de segment, estimée dans le nouvelle métrique, égale à  $\sqrt{3}$ . Le maillage "bord-optimal" ne doit donc comporter que des segments  $(\vec{ij})_k$ ,  $k \in I_S$ , dont les longueurs  $\|(\vec{ij})_k\|_{\mathbb{M}_k}$  ne s'éloignent pas trop de cette valeur, i.e. ni supérieure, ni inférieure de plus du tiers de cette valeur. Les opérations élémentaires effectivement réalisées par l'algorithme de réadaptation retenu, illustrées sur la figure 7.6, sont alors les suivantes :

1. Opération de redécoupage d'un segment ( $\mathcal{R}$ ) : si la nouvelle longueur du segment est supérieure à  $4/3\sqrt{3}$ , cette valeur étant la plus petite solution positive de :

$$\left| \|(\vec{ij})_k\|_{\mathbb{M}_k} - \sqrt{3} \right| \geq \left| \frac{1}{2} \|(\vec{ij})_k\|_{\mathbb{M}_k} - \sqrt{3} \right|$$

assurant que l'erreur d'interpolation estimée sera effectivement inférieure en redécoupant le segment, un noeud est ajouté au milieu du segment et est reconnecté aux noeuds voisins.

2. Opération de suppression d'un segment ( $\mathcal{S}$ ) : si la nouvelle longueur du segment est inférieure à  $2/3\sqrt{3}$ , cette valeur étant la plus grande solution de :

$$\left| \|(\vec{ij})_k\|_{\mathbb{M}_k} - \sqrt{3} \right| \geq \left| 2 \|(\vec{ij})_k\|_{\mathbb{M}_k} - \sqrt{3} \right|$$

les deux noeuds du segment supprimé sont transformés en un noeud placé au milieu du segment supprimé si celui-ci appartient complètement au domaine, en un noeud de la frontière si le segment joint un noeud intérieur à ce noeud de la frontière, ou finalement en la projection orthogonale du milieu du segment supprimé sur la frontière si ce segment appartient complètement à la frontière du domaine.

3. Opération de balayage ( $\mathcal{B}$ ) : si le paramètre de qualité est diminué par l'interversion de la diagonale dans le quadrilatère formé par la réunion de deux triangles adjacents et que cette transformation conserve la conformité du maillage, on effectue cette interversion.
4. Opération de déplacement d'un noeud ( $\mathcal{D}$ ) : cette opération non-locale consiste pour un noeud donné, à calculer dans les directions des noeuds voisins, les positions de noeuds fictifs permettant d'obtenir pour tous ces noeuds la longueur idéale de segment. La nouvelle position du noeud est alors donnée par le centre de gravité de ces noeuds fictifs.

**Processus itératif** Par expérimentation numérique, Dolejši a déterminé une séquence itérative  $\mathcal{S}$  de ces opérations élémentaires ( $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ ) conduisant dans la plupart des cas à la convergence de la procédure, dans le sens où un nombre fini d'opérations suffit pour obtenir une distribution des noeuds sur laquelle plus aucune opération ne peut plus être appliquée au vu des critères précédemment énoncés, soit :

$$\mathcal{S} = m \{ \mathcal{D} + n_1[\mathcal{S} + \mathcal{B}] + \mathcal{D} + n_2[\mathcal{R} + \mathcal{B}] + \mathcal{D} + \mathcal{B} \} + \mathcal{D}$$

où  $m, n_1, n_2$  sont des entiers correspondant au nombre de fois où l'ensemble des opérations associées est appliqué. Une opération conduisant à la formation d'un triangle trop déformé n'est cependant pas appliquée. L'algorithme teste ainsi si le rapport du double de la surface du triangle sur la somme des carrés des longueurs des segments est bien supérieur à une valeur donnée, ce qui est équivalent à tester si le plus petit angle d'un triangle est bien supérieur à une valeur prescrite.

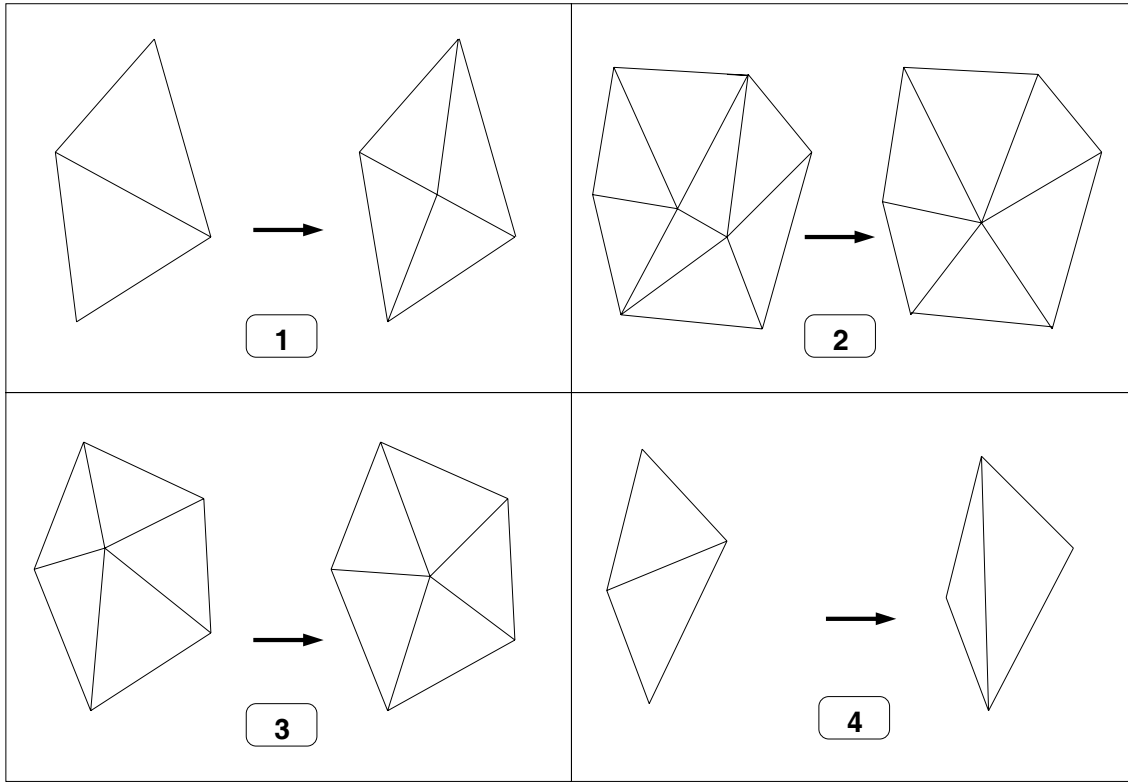


FIG. 7.6 – Schémas des opérations élémentaires réalisées par la procédure de réadaptation :

**1** : Ajout d'un segment, **2** : Suppression d'un segment, **3** : Déplacement d'un noeud, **4** : Balayage de la diagonale d'un quadrilatère formé par la réunion de deux triangles.

### Evaluation des dérivées secondes et détermination de la matrice d'erreur

Puisque l'approximation utilisée est linéaire par morceau sur chaque triangle, les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j}$  de la solution à estimer n'existent pas au sens classique. Cependant, on peut les évaluer en suivant la méthodologie classique en éléments finis<sup>6</sup> qui consiste à les approximer par les fonctions  $D_{u_h}^{xx}$ ,  $D_{u_h}^{xr}$ ,  $D_{u_h}^{rx}$  et  $D_{u_h}^{rr}$  définies en chaque noeud  $i$  de  $I_C$  appartenant aux triangles  $T_k$ ,  $k \in I_T^i$  partageant le noeud  $i$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} D_{u_h}^{xx} B_{ik} dV = - \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial B_{ik}}{\partial x} dV \\ \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} D_{u_h}^{xr} B_{ik} dV = - \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial B_{ik}}{\partial r} dV \\ \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} D_{u_h}^{rx} B_{ik} dV = - \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} \frac{\partial u_h}{\partial r} \frac{\partial B_{ik}}{\partial x} dV \\ \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} D_{u_h}^{rr} B_{ik} dV = - \int_{\cup_{k \in I_T^i} T_k} \frac{\partial u_h}{\partial r} \frac{\partial B_{ik}}{\partial r} dV \end{array} \right. \quad (7.3)$$

<sup>6</sup>La méthodologie classique consiste à utiliser la forme faible de la formulation intégrale et à ramener le calcul des intégrales des produits de dérivées secondes des variables par les fonctions tests (pour les termes diffusifs) en intégrale des produits de gradients de variables par les gradients des fonctions tests.

où les fonctions tests choisies sont les fonctions de base éléments finis linaires par morceau  $B_{jk}$  valant 1 sur le noeud  $j$  appartenant à l'élément  $k$  et 0 sur tous les autres noeuds du maillage (raison pour laquelle l'intégrale de contour, apparaissant lorsque le théorème de Green-Ostrogradski est appliqué, est nulle). D'une part, les gradients étant constants par triangle, nous pouvons évaluer exactement les termes de gauche dans les égalités 7.3, soit par exemple pour la première égalité :

$$\int_{\bigcup_{k \in I_T^i} T_k} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial B_{jk}}{\partial x} dV = \sum_{k \in I_T^i} |T_k| \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \right) \Big|_{T_k} \left( \frac{\partial B_{jk}}{\partial x} \right) \Big|_{T_k} \quad (7.4)$$

D'autre part, l'intégrale du terme de dérivée seconde sur la surface d'un triangle  $T_k$  est approximée par le produit de la surface de ce triangle  $|T_k|$  avec la moyenne des valeurs à ces noeuds  $(x_j, r_j)$ ,  $j \in \mathcal{S}(T_k)$  de ce triangle (quadrature pondérée), soit par exemple pour la première égalité de l'équation 7.3 :

$$\int_{\bigcup_{k \in I_T^i} T_k} D_{u_h}^{xx} B_{ik} dV \simeq \sum_{k \in I_T^i} \frac{|T_k|}{3} \sum_{j \in \mathcal{S}(T_k)} D_{u_h}^{xx}(x_j, r_j) B_{ik}(x_j, r_j) \quad (7.5)$$

Puisque par définition les fonctions de base s'annulent sur les sommets  $j$  des triangles autres que le noeud  $i$ , ce terme se réduit au produit de la dérivée seconde au noeud  $i$  par la somme des tiers de surfaces des triangles partageant  $i$ , soit :

$$\int_{\bigcup_{k \in I_T^i} T_k} D_{u_h}^{xx} B_{ik} dV \simeq |V_i| D_{u_h}^{xx}(x_i, r_i) \quad (7.6)$$

où  $|V_i|$  n'est autre que la surface du volume de contrôle utilisé dans l'approche volumes finis présentée à la section 5.1. La combinaison des équations (7.4), (7.6) et (7.3) fournit alors l'approximation du terme de la dérivée seconde au noeud  $i$ , soit pour la dérivée seconde dans la direction longitudinale<sup>7</sup> :

$$D_{u_h}^{xx}(x_i, r_i) \simeq -\frac{1}{|V_i|} \sum_{T \in \Omega_h(i)} \left( \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right)_T \left( \frac{\partial v_h}{\partial x_j} \right)_T \quad (7.7)$$

Les composantes  $h_{mn}$  de la matrice hessienne étant ainsi évaluées, il s'agit de construire la matrice d'erreur en s'assurant qu'elle soit toujours symétrique et définie positive. On utilise pour cela les matrices de vecteurs propres à droite et à gauche issus de la diagonalisation de la matrice hessienne  $\mathbb{H}_i = \mathcal{R}_i \Lambda_i \mathcal{R}_i^{-1}$  pour reconstruire une matrice (de courbure positive) définie positive :  $\mathbb{G}_i = \mathcal{R}_i |\Lambda_i| \mathcal{R}_i^{-1}$ , où  $|\Lambda_i|$  est la matrice diagonale dont les valeurs sont égales aux valeurs absolues des valeurs de  $\Lambda_i$ . On choisit alors empiriquement de définir la matrice d'erreur au noeud  $i$  selon :

$$\mathbb{M}_i = c \left[ \mathbb{I} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + \max_{m,n=1,2} |g_{mn}|} \mathbb{G}_i \right] \quad (7.8)$$

où  $c$ ,  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des coefficients à ajuster, et  $|g_{mn}|$  sont les valeurs absolues des valeurs de la matrice hessienne  $\mathbb{G}$ . Le choix d'ajouter la matrice identité  $\mathbb{I}$  permet d'assurer la régularité de  $\mathbb{M}_i$  tout en restant cohérent avec le fait que si  $\mathbb{G}_i$  s'annule, la triangulation doit devenir uniforme. Dans le cas limite d'une solution uniforme, le domaine de calcul ne doit contenir idéalement que des triangles équilatéraux dont les côtés auraient une longueur (euclidienne)  $h$  telle que  $6\omega = ch^2$

<sup>7</sup>Dolejši démontre que les produits scalaires de dérivés de la variable et de la fonction test sont égaux quand les indices de dérivation sont intervertis et donc que cette approximation est bien consistante avec la reconstruction d'une matrice hessienne symétrique  $\mathbb{H}$ .



et dont la surface serait  $\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{6\omega}{c}$ . Une première approche pourrait ainsi consister à fixer  $\omega$  et en déduire le nombre idéal d'éléments  $N_{\text{élém}}$  à introduire en divisant simplement la surface globale du domaine de calcul  $|\Omega_h|$  par la surface d'un tel triangle idéal :

$$N_{\text{élém}} = \frac{|\Omega_h|}{\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{6\omega}{c}}$$

Afin d'assurer un contrôle sur le niveau global d'éléments à introduire, on effectue cependant la démarche inverse, qui consiste à se fixer un nombre idéal d'éléments  $N_{\text{élém}}$  que l'on souhaite introduire et on paramètre le coefficient  $c$  en fonction de ce nombre idéal :

$$c = \frac{6\omega\sqrt{3}N_{\text{élém}}}{4|\Omega_h|}$$

On voit alors que la longueur d'un segment de triangle idéal devient indépendante de la tolérance qu'on pourrait se fixer :

$$\sqrt{6\omega} = \sqrt{\frac{4|\Omega_h|}{\sqrt{3}N_{\text{élém}}}}$$

Ce n'est plus qu'en considérant le fait qu'un triangle idéal est équilatéral et inscrit dans un cercle unité qu'on se fixe *a priori*  $\omega = 1/2$ . Par cette démarche, on perd toute possibilité éventuelle d'estimer *a priori* l'erreur d'interpolation. En revanche, pour un nombre idéal d'éléments à introduire, on dispose d'un outil permettant de quantifier *a posteriori* la distribution relative de l'erreur d'interpolation et donc de modifier localement les éléments pour redistribuer cette erreur de façon plus homogène. Par cette démarche, l'étude de la sensibilité de la solution au maillage se fera en faisant varier  $N_{\text{élém}}$  et non plus la taille locale de maille comme on le fait plus classiquement dans les cas où aucune réadaptation de maillage n'est appliquée. Par ailleurs, on remarquera que le choix d'utiliser cette forme de fonction pondérant  $\mathbb{G}_i$  dans (7.8) permet de fixer indirectement à la fois le rapport maximal des longueurs de segments dans le domaine  $l_{\min}/l_{\max}$  et la répartition des erreurs en fonction de la courbure estimée. En effet, en considérant la forme de la matrice d'erreur (équation 7.8), quand les niveaux de courbure (et donc les composantes de  $\mathbb{G}_i$ ) varie entre 0 et l'infini, la matrice d'erreur varie entre  $c\mathbb{I}$  et  $c(1 + \epsilon_1)\mathbb{I}$ . Par définition de la norme (voir équation 7.2), à la longueur optimale de segment, toujours égale à  $\sqrt{3}$  dans la nouvelle métrique, correspond une longueur (euclidienne) effective de segment qui varie entre  $l_{\max} = \sqrt{\frac{3}{c}}$  et  $l_{\min} = \sqrt{\frac{3}{c(1+\epsilon_1)}}$ . Le rapport de ces longueurs effectives est donc :

$$l_{\max}/l_{\min} = \sqrt{1 + \epsilon_1}$$

De même que l'on contrôle la déformation des mailles en interdisant l'application d'opérations élémentaires qui conduisent à la formation d'angles trop petits, on peut fixer le rapport maximal des longueurs de segments distribués dans le maillage en prescrivant :  $\epsilon_1 = \left(\frac{l_{\min}}{l_{\max}}\right)^2 - 1$ . Par ailleurs, la distribution des longueurs des segments peut être ajustée par le choix empirique du second coefficient pris sous la forme suivante :

$$\epsilon_2 = \frac{1}{10} \frac{1}{l_{\max}^2} \frac{(\epsilon_1 + 1)(1 - p)}{p(\epsilon_1 + 1) - 1}$$

où  $1/l_{\max}^2$  estime le maximum de la dérivée seconde et  $p$  permet d'ajuster la concentration des segments et donc des noeuds de calcul dans les zones de forte courbure. Par exemple, en fixant  $p$  à 0,8, nous pouvons caler grossièrement la répartition des segments autour d'une valeur égale à 80% de l'erreur maximale pour une courbure égale ici à 1/10 de la courbure maximale. Ceci nous évite typiquement, dès la première application de l'algorithme de réadaptation, de concentrer inutilement tous les éléments près des chocs.

### 7.3 Bilan : illustration de l'application de la méthode AMA

Quelque soit le maillage initial utilisé (même très raffiné), la présence de fortes discontinuités dans un jet sous-détendu limite fortement, de façon générale, les performances des algorithmes de décentrage utilisés. La méthode de réadaptation présentée dans ce chapitre nous permet de surmonter en grande partie ces limitations tout en contrôlant le nombre de noeuds requis (et donc le coût calcul attendu). Son principe consiste à pondérer les longueurs des segments par une fonction estimant la courbure dans les deux directions d'espace, afin d'appliquer itérativement en ensemble d'opérations élémentaires permettant de rapprocher au mieux les longueurs de ces segments d'une longueur idéale calculable en fonction du nombre d'éléments souhaité. D'une part, l'application de cet algorithme nous permet d'ajouter des éléments dans les zones de fort gradient et d'en retirer dans des zones de l'écoulement où les variables évoluent peu. D'autre part, elle permet, de par sa nature anisotrope, de réaligner naturellement les mailles le long des discontinuités (voir figure 7.7), minimisant de la sorte l'erreur induite par la projection du vecteur vitesse dans la direction normale aux interface entre volumes de contrôle lors de l'évaluation des flux convectifs. Pratiquement, cette méthode permet aussi de visualiser directement la structure de l'écoulement en observant simplement la structure du maillage. Soulignons néanmoins que l'évaluation de la qualité des résultats nécessite une expérimentation numérique, parfois délicate à mener, afin de déterminer, en fonction de l'écoulement étudié, le jeu de paramètres à utiliser (choix de la variable de réadaptation, du nombre d'éléments global à prescrire, du rapport maximal des longueurs de segments à autoriser, du paramètre de distribution, du nombre de cycles à effectuer, du temps de simulation requis avant de réappliquer la réadaptation...). Par ailleurs, pour une même classe d'écoulements, un changement des conditions thermodynamiques pourra affecter de façon significative le champ de la variable de réadaptation, conduisant à obtenir des maillages très différents, et donc une précision différente. Aussi, à moins de pouvoir déterminer un certain nombre de critères heuristiques permettant de contrôler l'ensemble des paramètres de réadaptation, il semble délicat d'automatiser l'application de cette méthode sans vérifier systématiquement son efficacité. La figure 7.8 illustre par exemple les maillages obtenus après trois cycles de réadaptation à partir du même maillage initial  $MI_1$  (voir section 9.2.1), basés sur le champ de la masse volumique, avec le même jeu de paramètres ( $p = 2$ ,  $\epsilon_1 = 10000$ ,  $c = 30$ ,  $\alpha = 5^\circ$ ) pour un jet fortement sous-détendu ( $NPR = 15, 53$ ), en changeant uniquement la température statique et le rapport des chaleurs spécifiques à l'ajutage (jet d'air froid et jet de gaz brûlés). Bien que les maillages comportent environ le même nombre d'éléments (15911 et 15519 noeuds pour le jet d'air et le jet de gaz brûlés respectivement), on voit clairement apparaître une distribution différente de l'ensemble de ces éléments. Ainsi, à moins de pouvoir adimensionner la variable de l'écoulement choisie pour la réadaptation afin d'obtenir une échelle de variation de sa courbure qui soit équivalente pour tous les cas de simulation, une étude de sensibilité au niveau global de raffinement doit être menée à chaque fois que les conditions thermodynamiques sont fortement modifiées.

Cette section achève la présentation de l'outil numérique à partir duquel nos simulations ont pu être menées. L'application de cet outil, dans un premier temps sur des configurations plus classiques, puis sur des configurations de jets, va nous permettre de préciser dans un premier temps ses limitations intrinsèques, et de dégager ainsi une procédure globale permettant de les contourner. Les résultats de simulation sur des cas de jets sous-détendus, obtenus via cette procédure, seront présentés dans un second temps.

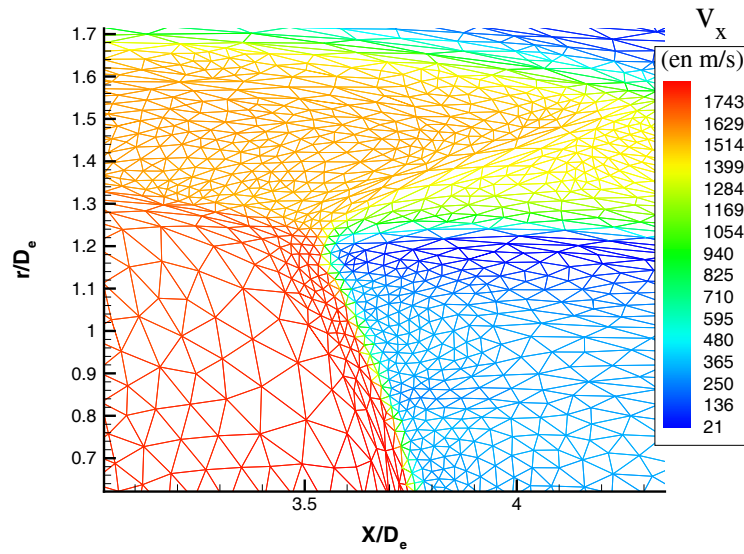


FIG. 7.7 – Agrandissement du maillage obtenu dans la zone du point triple d'un jet de gaz chauds fortement sous-détendu à  $NPR = 15,53$ .

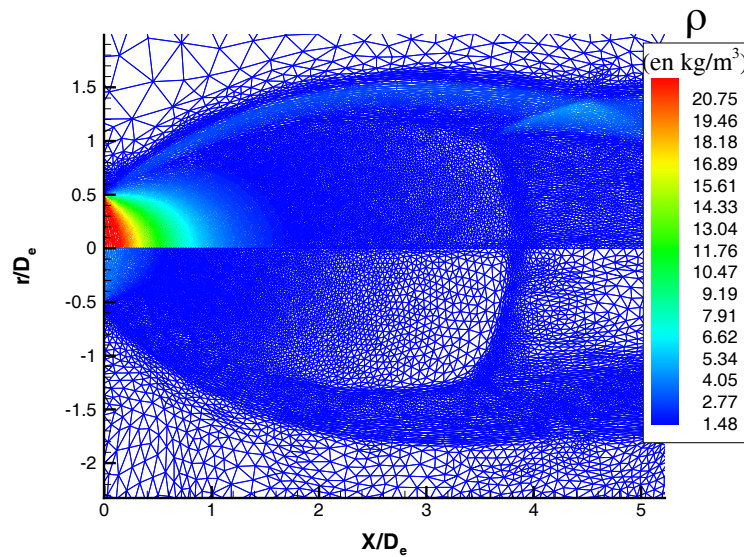


FIG. 7.8 – Comparaison des maillages obtenus après 3 cycles de réadaptation pour un jet sous-détendu :

- $r/D_e > 0$  : Jet d'air à  $T_e = 235 \text{ K}$ ,  $\gamma = 1,4$ ,
- $r/D_e < 0$  : Jet de gaz brûlés à  $T_e = 1500 \text{ K}$ ,  $\gamma = 1,26$ .

Troisième partie  
Etude numérique



## Chapitre 8

# Validation de la méthode numérique

Nous cherchons dans ce chapitre à synthétiser un ensemble de tests de simulation qui ont été menés sur des cas standard permettant de vérifier la précision et la robustesse des schémas numériques que nous avons retenus pour l'évaluation des flux convectifs. Nous commençons par présenter succinctement quelques résultats du test du tube à choc, pour lequel la solution analytique exacte est connue et permet ainsi d'évaluer précisément ces schémas. Du moins cherchons-nous à retrouver le comportement déjà bien connu de ces schémas dans cette configuration. La qualité des schémas numériques ainsi évaluée en configuration 1D peut cependant être fortement dégradée lorsqu'ils sont utilisés en configuration multidimensionnelle. Par ailleurs, pour une géométrie du domaine de calcul inadaptée ou des conditions limites insuffisamment représentatives, ces schémas peuvent localement conduire à ne plus pouvoir considérer des états physiques, ce qui peut fortement dégrader la qualité de la solution dans l'ensemble du domaine. Aussi est-il nécessaire de caractériser la méthode numérique retenue sur des configurations bidimensionnelles standard avant de l'utiliser pour simuler des jets supersoniques. Nous choisissons notamment de réaliser quelques tests sur la configuration d'un choc instationnaire sur une rampe et celle de l'impact d'un écoulement supersonique sur une marche montante pour la similarité des éléments structurels rencontrés dans ces écoulements avec ceux observés dans un jet fortement sous-détendu.

### 8.1 Capture des propriétés convectives en écoulement pseudo-unidimensionnel : test du tube à choc

Les méthodes de décentrage développées pour évaluer de façon adaptée les flux numériques dans les écoulements à grand nombre de Mach sont fondées sur les propriétés de propagation de l'information caractéristique en une dimension d'espace. Aussi évalue-t-on classiquement dans un premier temps la robustesse et la précision de ces schémas dans un domaine numérique pour lequel la géométrie, les conditions initiales et les conditions limites ne dépendent que de la direction longitudinale. A partir de la prescription adéquate de deux états physiques différents, nous pouvons isoler un type d'onde donné ou une combinaison de ces ondes et vérifier la précision avec laquelle le schéma numérique peut nous permettre de prévoir leur évolution spatiale et temporelle. Le test de Sod [153] consiste à considérer simultanément la coexistence de ces trois ondes se propageant dans un domaine pseudo-unidimensionnel en résolvant exactement le problème de Riemann, ce qui revient physiquement à simuler l'évolution de deux gaz portés dans des états différents et initialement au repos après la suppression de la membrane qui les sépare. Le domaine utilisé est un simple domaine rectangulaire de longueur 1 m et de hauteur 0,1 m. Il est initialisé en considérant deux états physiques distincts, l'un à gauche d'une interface fictive

initiale ( $x < 0,5$  m) et l'autre à droite de cette interface ( $x > 0,5$  m). Les conditions relatives aux deux cas classiques que nous considérons sont reportées dans le tableau 8.1. Pour les deux cas, la vitesse est initialisée à 0,01 m/s. Le premier test permet de vérifier la précision des schémas dans une configuration où l'état en tout point reste subsonique. Le second nous amène à considérer une détente supersonique pour laquelle certains schémas peuvent notamment présenter une légère discontinuité au niveau du point sonique.

Cas test	Etat gauche		Etat droit	
	$\rho$	$p$	$\rho$	$p$
Sod subsonique	1 $kg/m^3$	100000 Pa	0,125 $kg/m^3$	10000 Pa
Sod supersonique	1 $kg/m^3$	100000 Pa	0,01 $kg/m^3$	1000 Pa

TAB. 8.1 – Conditions retenues pour l'initialisation du problème du tube à choc.

Pour ces deux cas, les conditions initiales utilisées nous amènent à considérer un choc suivi d'une ligne de glissement se propageant vers la droite et une onde de détente se propageant vers la gauche du domaine.

### 8.1.1 Résultats du test de Sod subsonique

La figure 8.1 illustre la solution obtenue à un temps de simulation physique égal à 0,6 ms pour le cas de Sod subsonique. Sur ce cas, nous constatons que la précision des différents schémas numériques retenus est tout à fait comparable. Un test préliminaire à l'ordre un en espace, permettant d'observer plus nettement la différence entre les schémas de Roe et de Van Leer, ne révèle pas non plus de différence significative. L'utilisation de l'ordre un en espace conduisant à introduire un niveau beaucoup trop élevé de diffusion numérique, le second ordre est systématiquement utilisé pour l'ensemble des simulations dont les résultats sont présentés dans la suite de l'exposé. Un agrandissement au niveau de la tête de la détente ou en léger amont du choc (voir figure 8.2) nous permet simplement de vérifier que le limiteur de Van Leer Van Albada (noté VLVA) est plus précis. Remarquons qu'en utilisant ces schémas numériques, l'effet du raffinement du maillage est différent selon le type d'onde, comme nous pouvons le constater sur la figure 8.3 qui présente un agrandissement du champ de masse volumique en léger amont du choc et au niveau de la queue de la détente. Ainsi l'épaisseur numérique locale du choc (que nous pouvons définir par exemple par la distance séparant les points où l'écart absolu entre les valeurs numériques des variables physiques et leurs valeurs théoriques est inférieur à 1%) est toujours égale à la longueur des 2 à 3 éléments localisés autour de la position attendue de la discontinuité. En revanche, même en raffinant davantage, la précision de la solution au niveau de la zone de détente est rapidement limitée par la diffusion numérique induite par les schémas numériques. Cette difficulté à capturer simultanément les ondes de détente et les ondes de compression avec la même précision, difficulté que présente la plupart des méthodes de décentrage, constitue probablement une des difficultés les plus importantes pour simuler précisément la structure de choc d'un jet très fortement sous-détendu. Evoquons un comportement pathologique de la méthode numérique retenue lorsqu'elle est utilisée sur un maillage structuré / redécoupé. Celui-ci apparaît déjà sur ce simple test. La figure 8.4 présente les profils de quelques variables physiques obtenus avec le solveur de Roe et le limiteur "minmod" à partir d'un tel maillage, extrait en bas ( $Y = 0,005$ ) et en haut ( $Y = 0,095$ ) du domaine de calcul. L'orientation privilégiée des lignes du maillage nous conduit à prévoir des profils non-symétriques des variables, notamment en aval du choc, alors que ceux-ci restent quasiment superposables dans le cas où le maillage est directement généré

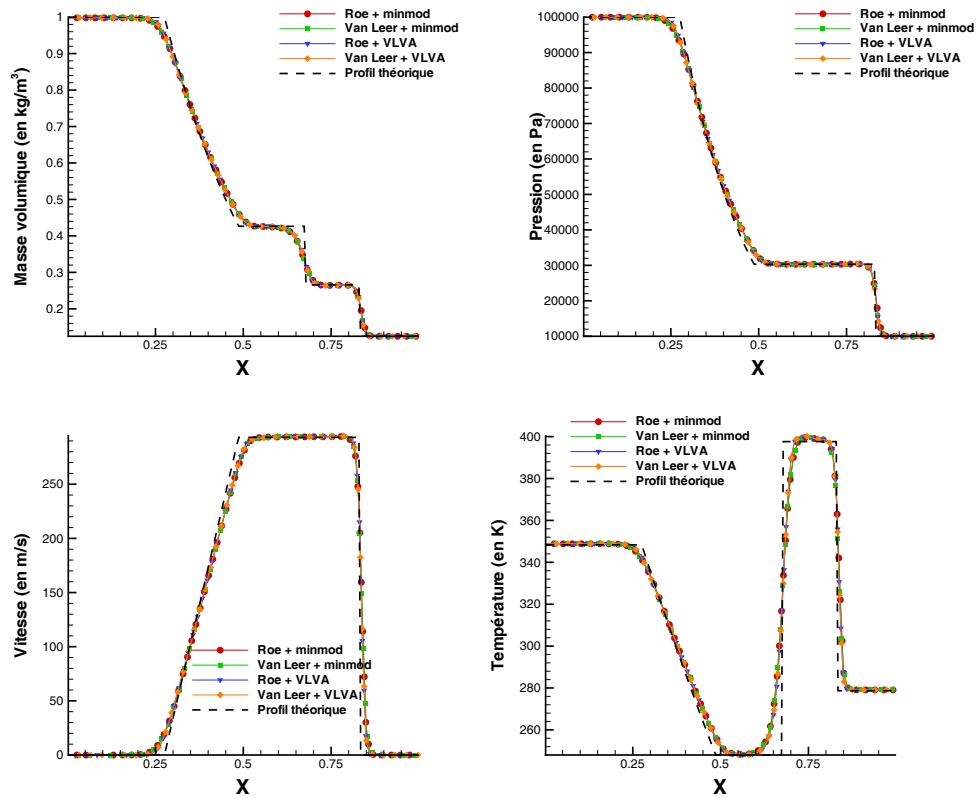


FIG. 8.1 – Comparaison globale des profils de masse volumique, de pression, de vitesse et de température prévus en utilisant les différents schémas numériques au second ordre en espace sur un maillage non-structuré (1305 noeuds) pour le cas test de Sod subsonique.

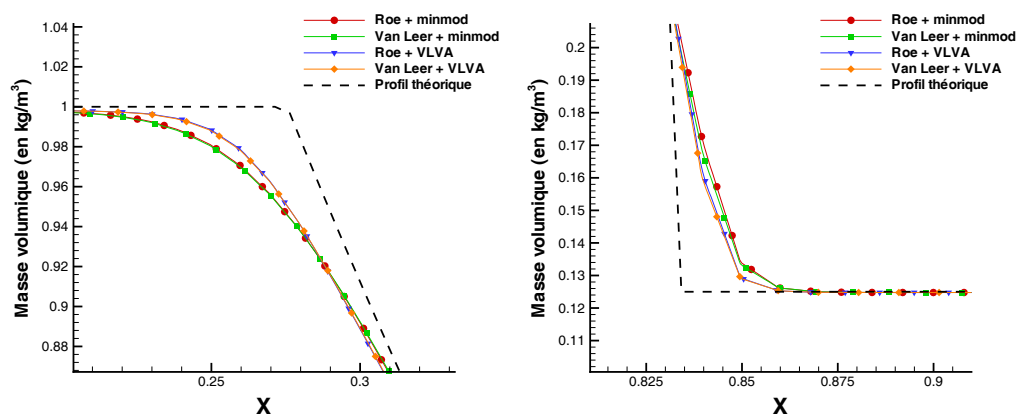


FIG. 8.2 – Comparaison des profils de masse volumique obtenus en fonction du schéma numérique utilisé sur un maillage non-structuré (1305 noeuds) pour le cas test de Sod subsonique : tête de la détente (à gauche) et zone en léger amont du choc (à droite).



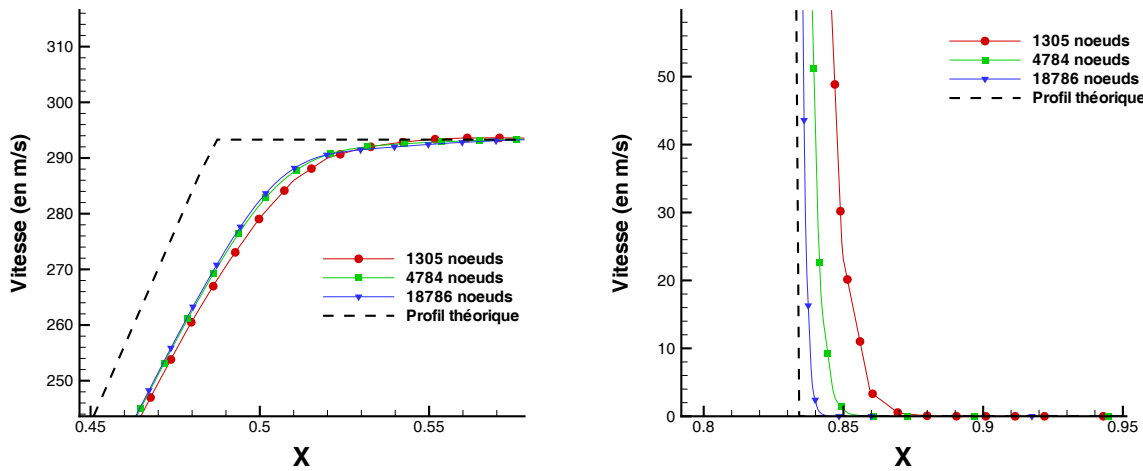


FIG. 8.3 – Comparaison des profils de vitesse obtenus avec le solveur de Roe couplé au limiteur "minmod" en fonction du raffinement du maillage pour le cas test de Sod subsonique : zone de pied de détente (à gauche) et zone en léger amont du choc (à droite).

de façon non-structurée. Notons que le raffinement du maillage ne réduit alors que partiellement cet effet indésirable.

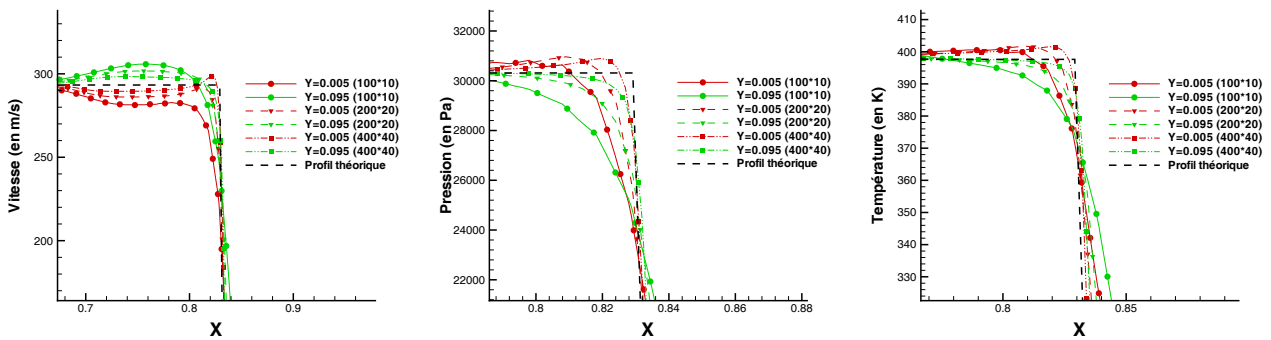


FIG. 8.4 – Illustration de la dissymétrie des profils apparaissant en aval du choc lors de la simulation du test de Sod subsonique avec un maillage de type structuré / redécoupé : profils de vitesse, de pression et de température.

Finalement, la simplicité de l'écoulement considéré nous permet de choisir des maillages homogènes où les noeuds sont uniformément répartis de sorte que le pas de temps maximal admissible est évalué de façon homogène à chaque étape de temps. Le relevé de quelques temps CPU obtenus pour ce test nous donne une indication sur le coût de la simulation induite par le choix d'un solveur donné. Précisons que ces temps présentés sur la figure 8.5 sont obtenus en utilisant, pour ce test, une unité centrale de type pentium 4 cadencé à 1,7 GHz utilisant 512 Mo de mémoire vive. De par la simplicité de l'expression des composantes du flux de Van Leer, il n'est pas étonnant de constater que l'utilisation de ce solveur conduise aux temps CPU

les plus petits. Il est par ailleurs intéressant de remarquer que l'utilisation de la limitation de Van Leer Van Albada couplée au solveur de Roe conduit à des temps de calcul plus importants (+10% environ) que ceux obtenus en utilisant le limiteur de type "minmod". Compte tenu du gain très limité en précision qui a pu être observé en utilisant le limiteur de Van Leer Van Albada (typiquement inférieur à 1%) et de la plus grande robustesse que présente le limiteur "minmod" (qui apparaît plus clairement lors des cas tests en configuration bidimensionnelle illustrés dans la suite de l'exposé), il semble finalement beaucoup plus avantageux d'utiliser systématiquement le schéma de Roe conjointement au limiteur "minmod".

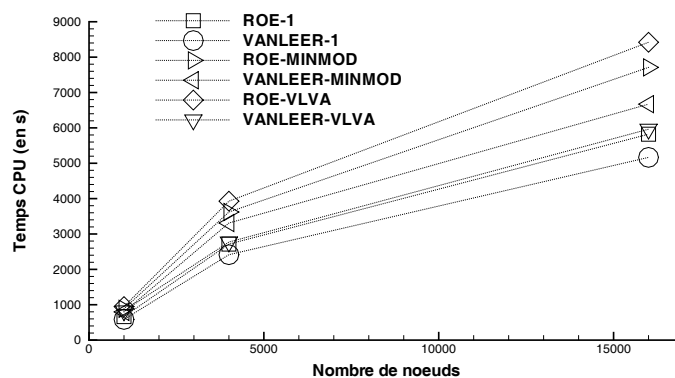


FIG. 8.5 – Comparaison des temps de calcul requis en fonction du solveur choisi, pour simuler l'évolution des gaz lors du test de Sod subsonique jusqu'à un temps de simulation physique de 0,6 ms.

### 8.1.2 Résultats du test de Sod supersonique

Les profils des variables physiques obtenus au bout d'un temps de simulation physique égal à 0,3 ms sur un maillage non-structuré contenant 4000 noeuds sont présentés sur la figure 8.6. Aucune discontinuité n'est distinguable au niveau du point sonique. En plus des tendances déjà observées lors du test précédent, nous voyons cependant apparaître la difficulté des schémas retenus à prévoir précisément le saut des variables au niveau de la ligne de glissement. Une surestimation du saut de température et de vitesse en aval du choc conduit en effet à un excès important de diffusion numérique au niveau de celle-ci. Nous constatons par ailleurs que raffiner le maillage en utilisant le limiteur le plus précis ne permet pas d'améliorer significativement la précision de la solution autour de cette ligne de glissement, comme le montrent les quelques profils présentés par la figure 8.7, issus d'une étude de sensibilité au maillage menée pour cette configuration.

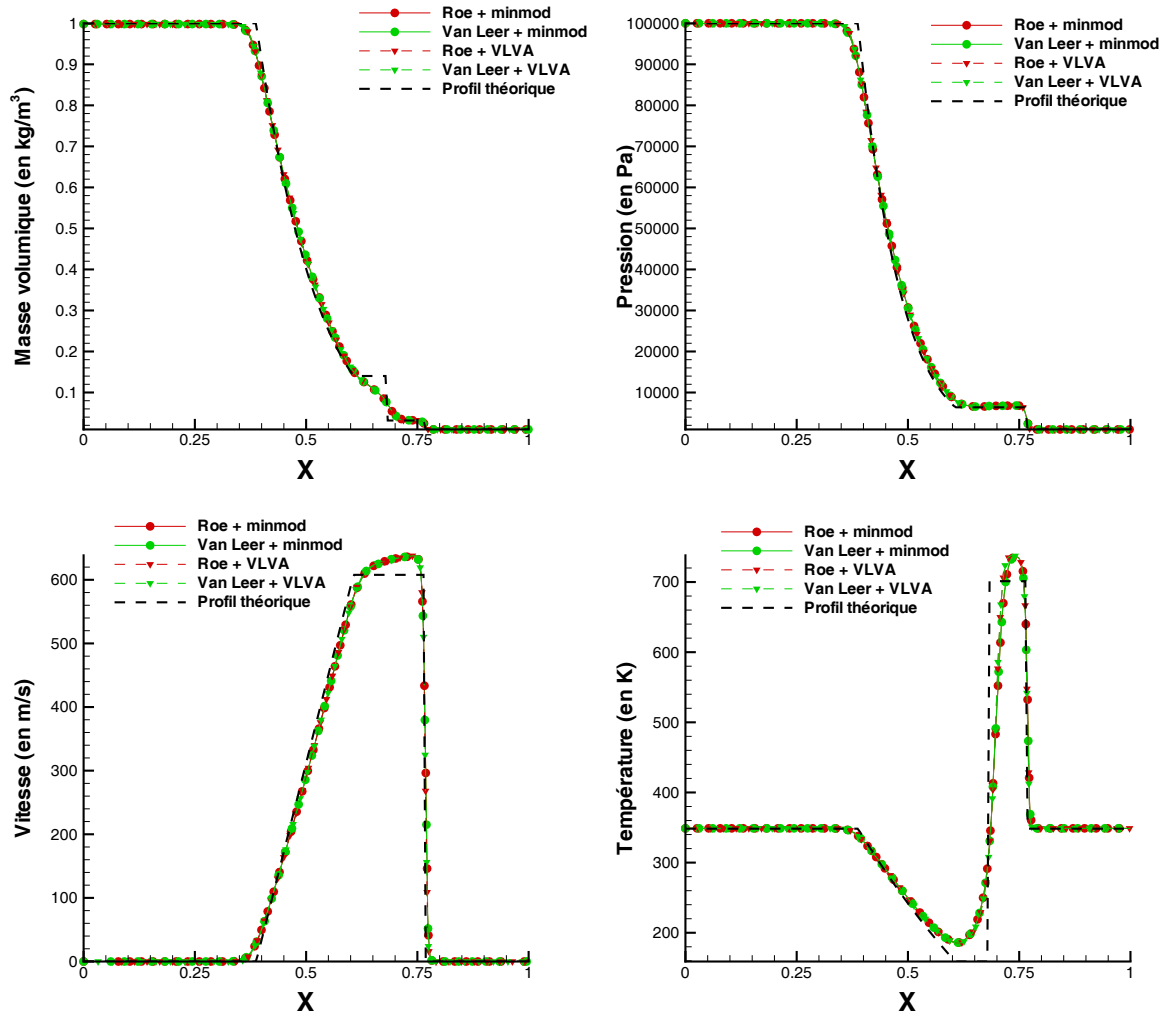


FIG. 8.6 – Comparaison globale des profils de masse volumique, de pression, de vitesse et de température prévus en utilisant les différents schémas numériques sur un maillage non-structuré (4000 noeuds) pour le test de Sod supersonique.

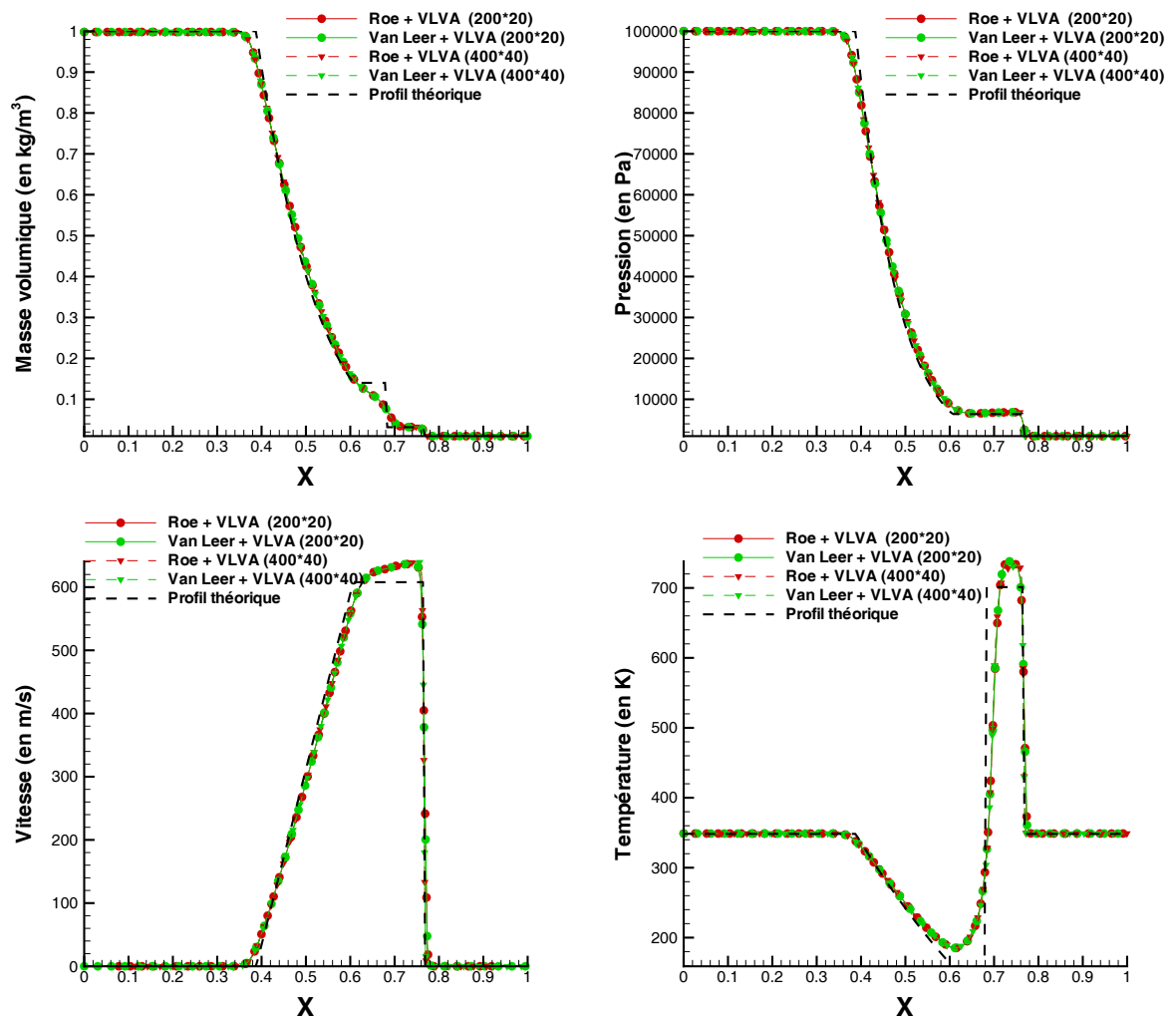


FIG. 8.7 – Comparaison globale des profils de masse volumique, de pression, de vitesse et de température prévus en fonction du niveau de raffinement d'un maillage non-structuré pour le test de Sod supersonique.

## 8.2 Réflexion d'un choc instationnaire sur une rampe de compression

La propagation d'un choc instationnaire sur une rampe de compression peut donner naissance à des structures de choc relativement complexes. La forme de ces structures, présentée dans le paragraphe 1.2.6, dépend principalement de l'angle de la rampe et de l'intensité du choc, mesurée par le nombre de Mach de choc. Malgré la complexité de ces structures, leur évolution est désormais relativement bien documentée, de sorte qu'elles constituent un ensemble de cas de référence pour évaluer les performances des algorithmes numériques dédiés aux écoulements supersoniques. Parmi toutes ces structures, nous choisissons naturellement de simuler le cas de réflexion SMR ("Single Mach Reflection") dont les propriétés géométriques sont proches de celles rencontrées dans le cas d'un jet fortement sous-détendu. Afin de limiter l'erreur introduite par une initialisation incompatible avec la précision limitée des solveurs numériques, celle-ci est réalisée en deux temps. Tout d'abord, le champ est initialisé dans une section droite sans rampe en fixant des niveaux relatifs de pression, de masse volumique et de température respectant exactement les conditions de saut de Rankine-Hugoniot et en ajustant au mieux le raffinement du maillage pour qu'il corresponde à celui qui est utilisé dans un second temps sur le domaine contenant la rampe. La vitesse initiale est fixée par ailleurs à une valeur arbitraire proche de zéro. On laisse alors le profil numérique s'établir autour de la discontinuité de choc, en attendant que toute oscillation liée à l'initialisation soit amortie ou localisée suffisamment loin de la zone de discontinuité, et en laissant l'épaisseur de diffusion numérique du choc (liée au schéma utilisé) atteindre un niveau stationnaire. On réinterpole ensuite le champ obtenu localement autour de la discontinuité propagée pour le réimposer au niveau de la position initiale du choc souhaitée dans le domaine contenant la rampe. Cette position est localisée arbitrairement en léger aval de la section d'entrée, tandis que la position amont de la rampe est localisée suffisamment loin de cette section d'entrée de façon à ce que le choc diffracté, né du passage du choc instationnaire, ne puisse interagir avec cette frontière. Le temps physique de simulation est alors ajusté en fonction de la vitesse de propagation de choc, de façon à ce que ce choc atteigne la position souhaitée en amont de la frontière de sortie du domaine de calcul. Pour les deux cas de simulations dont nous présentons les résultats dans ce paragraphe, le choc se propage de la gauche vers la droite dans une section droite de longueur et de hauteur unitaire. Les paramètres physiques et géométriques relatifs utilisés sont synthétisés dans le tableau 8.2 suivant :

Cas test	$M_c$	$X_i$	$X_f$	$\phi$
Reproduction du cas de Takayama et Jiang [160]	2	0,25	0,9	46°
Reproduction d'un cas proche de celui de Deschambault et Glass [46]	2,03	0,167	0,958	23°

TAB. 8.2 – Paramètres géométriques et conditions limites utilisés pour la simulation d'un choc instationnaire sur une rampe :  $M_c$  : nombre de Mach du choc,  $\phi$  : angle interne entre la direction de la rampe et la direction longitudinale,  $X_i$  : position relative du coin de la rampe par rapport à la frontière d'entrée pour une longueur unitaire du domaine de calcul,  $X_f$  : position relative du choc plan à la fin de la simulation par rapport à la frontière d'entrée pour une longueur unitaire du domaine de calcul.

Les premiers tests sont réalisés en considérant les conditions physiques et géométriques utili-

sées par Takayama et Jiang [160] afin de vérifier dans un premier temps la positivité des différents schémas numériques retenus en fonction du type de maillage généré. Les simulations sont réalisées en considérant l'écoulement non-visqueux, en intégrant à l'ordre un en temps et en utilisant les différents solveurs sélectionnés pour l'évaluation des flux convectifs. Plusieurs niveaux globaux de raffinement ont été utilisés successivement pour chaque type de maillage afin de vérifier les tendances observées. La structure de choc étant en constante évolution, un niveau relativement élevé de raffinement global est requis pour observer précisément ces tendances. Nous nous fixons néanmoins comme contrainte d'utiliser un niveau maximum de raffinement global équivalent à celui du maillage de référence imposé par Takayama et Jiang, soit un maillage de  $256 \times 256$  éléments (65536 noeuds). La figure 8.8 présente les différents champs d'isocontours de masse volumique obtenus pour le plus haut niveau de raffinement étudié pour les maillages de type structurés / redécoupés. Nous pouvons constater qu'une instabilité se propage et dénature complètement la

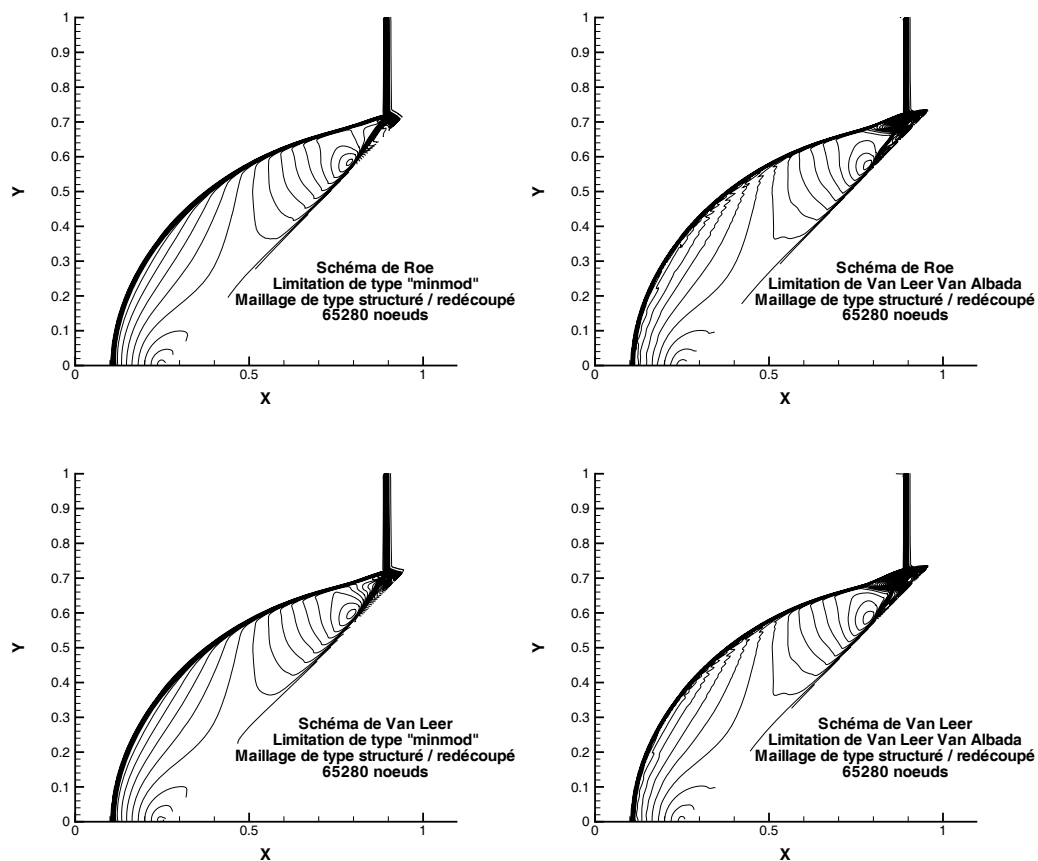


FIG. 8.8 – Interaction d'un choc instationnaire avec une rampe : champ d'isocontours de masse volumique des solutions obtenues sur un maillage de type structuré / redécoupé avec les différents schémas numériques retenus.

structure de choc attendue au niveau du pied de Mach, en particulier pour le schéma le moins robuste combinant l'utilisation du schéma de Van Leer et la limitation de pente de Van Leer Van Albada. Le choc droit attendu est absent et est remplacé par un choc oblique. L'écoulement en aval de celui-ci reste ainsi supersonique et une nouvelle structure de choc non-physique apparaît en amont de la ligne de glissement issue du point triple. Cette anomalie présente des

caractéristiques très proches de celles du phénomène de carbuncle [73]. Celui-ci correspond à la déstabilisation d'un choc droit en cours de simulation qui, par propagation d'instabilités numériques insuffisamment amorties dans la direction radiale conduit à faire bifurquer la solution de choc droit en une solution de choc oblique formant un pic orienté vers l'amont de la position attendue du choc droit. Cette anomalie apparaît dans notre simulation quel que soit le niveau de raffinement global prescrit, mis à part le fait qu'elle devient beaucoup moins discernable lorsque le maillage est plus grossier ou que la limitation (dont l'effet dissipatif est plus important) est de type "minmod". Quel que soit le niveau de correction entropique utilisé pour le solveur de Roe, cette anomalie persiste alors que la correction entropique est normalement suffisante pour la faire disparaître. Notons que nous observons cette anomalie pour le solveur de Roe comme pour le solveur de Van Leer alors que ce dernier ne peut spécifiquement être sujet à cette anomalie [73]. Par ailleurs, en reproduisant le test d'impact d'un écoulement supersonique sur un corps émoussé, qui est un des tests qui permettent le mieux de faire apparaître cet artefact numérique, nous vérifions que cette instabilité n'apparaît alors pas. En utilisant par exemple un maillage contenant un nombre d'éléments équivalent à celui utilisé par Gressier [73] pour montrer l'apparition de ce phénomène, le schéma de Roe reste suffisamment robuste, même si nous considérons une configuration d'écoulement particulièrement sévère à nombre de Mach en amont égal à 10 (3480 m/s, 101325 Pa, 298 K) et que nous fixons le coefficient de correction entropique à 0. Sur la figure 8.9 où est présenté le champ d'isocontours de la vitesse longitudinale obtenu pour ce cas, nous pouvons constater que la topologie particulière du maillage nous conduit à prévoir des isocontours relativement irréguliers mais que le choc reste droit en amont du corps émoussé impacté.

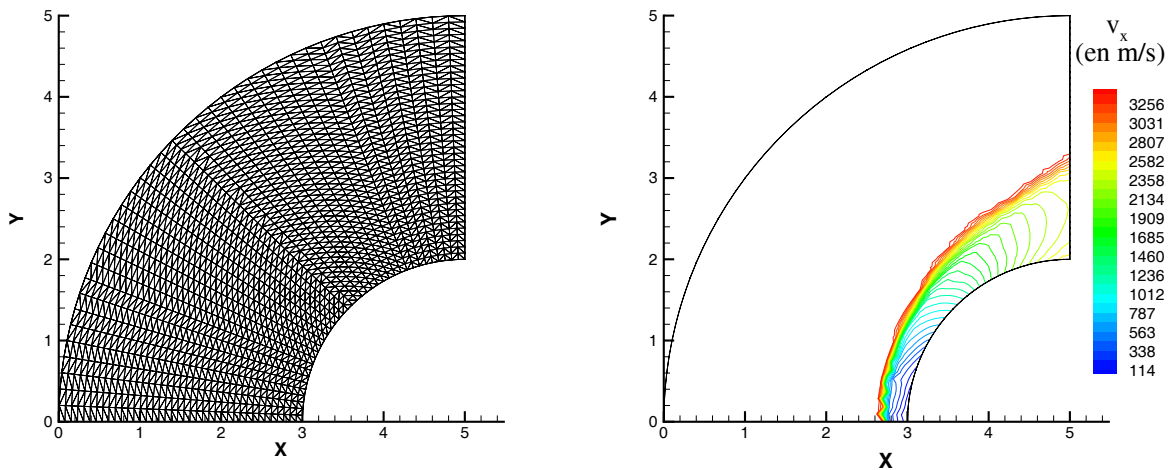


FIG. 8.9 – Illustration du cas d'impact d'un écoulement à nombre de Mach égal à 10 sur un corps émoussé : maillage et champ d'isocontours de la vitesse longitudinale obtenu avec le solveur de Roe sans correction entropique.

L'apparition de ce genre d'anomalie dépend en fait beaucoup du maillage utilisé. Nous relierions son apparition dans notre cas à l'orientation particulière du maillage utilisé au niveau de la rampe. En utilisant un maillage construit directement de façon non-structurée et contenant un nombre d'éléments d'un ordre de grandeur comparable, nous constatons en effet la complète disparition du problème, même lorsque le schéma de Van Leer couplé au limiteur de van Leer Van Albada, *a priori* le moins robuste, est utilisé. Les caractéristiques géométriques de la structure obtenue

sont alors comparables à celles que nous pouvons observer dans la revue de Takayama et Jiang [160]. Sur la figure 8.10 sont par exemple reportés quelques points esquissant la géométrie de la structure de choc et de la ligne de glissement obtenue par E. Ritzerfeld, H. Kleine et H. Grönig de l'université de Aachen en Allemagne qui ont participé au "benchmark test" organisé par Takayama et Jiang et qui ont utilisé le solveur de Roe couplé à un limiteur "Superbee" (voir Toro [164]). Remarquons qu'un niveau de raffinement global relativement élevé doit être utilisé pour que la structure obtenue en aval du pied de Mach soit suffisamment représentative. Ainsi, pour les conditions de ce test pour lesquelles la hauteur attendue du pied de Mach est relativement petite, nous constatons en effet qu'un niveau insuffisant de raffinement conduit à ne plus pouvoir prévoir correctement la structure de la ligne de glissement.

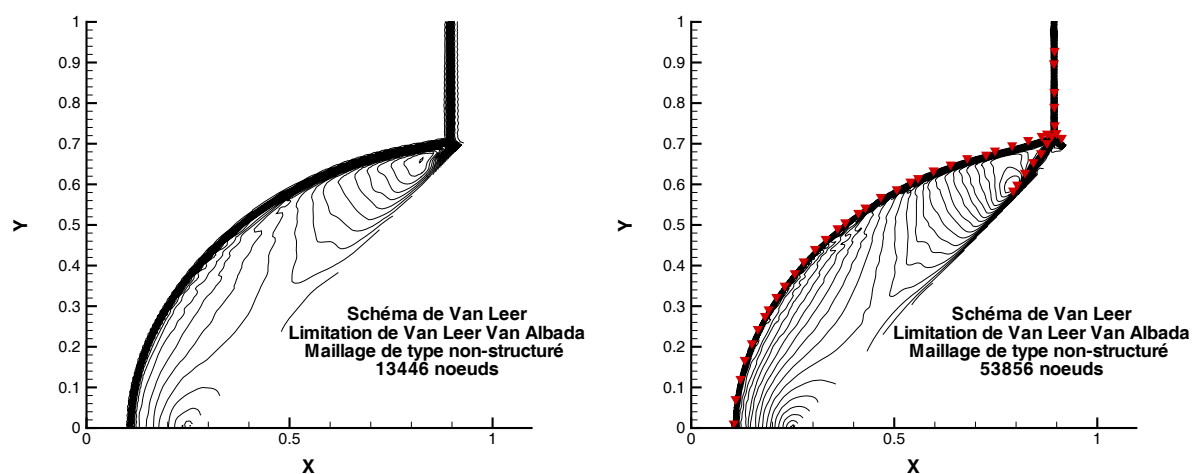


FIG. 8.10 – Interaction d'un choc instationnaire avec une rampe : champ d'isocontours de masse volumique des solutions obtenues sur un maillage de type non-structuré : résultats de notre simulation avec le schéma de Van Leer et le limiteur de Van Leer Van Albada (ligne continues), résultats de E. Ritzerfeld, H. Kleine et H. Grönig obtenus avec le solveur de Roe et une limitation "Superbee" (symboles).

Plus la hauteur du pied de Mach attendue est importante, plus des instabilités numériques sont susceptibles de se propager si le schéma n'est pas suffisamment dissipatif et plus la forme de la structure de choc est susceptible d'être affectée par un excès de diffusion numérique. En diminuant l'angle du dièdre pour un nombre de Mach de choc équivalent, nous vérifions néanmoins que l'utilisation du maillage non-structuré et du solveur de Van Leer associé au limiteur de Van Leer Van Albada nous permet de prévoir une évolution correcte de la structure. Les conditions utilisées pour mener cette nouvelle simulation dont le résultat est illustré sur la figure 8.11 sont proches de celles relatives au cas expérimental étudié par Deschambault et Glass [46]. L'angle de la rampe étant sensiblement plus élevé dans leur cas ( $27^\circ$ ), la structure obtenue n'est naturellement pas tout à fait superposable. Ses proportions restent néanmoins correctement reproduites. Le rapport de la distance entre le pied de choc et le point d'impact de la ligne de glissement sur la rampe sur la distance entre ce pied de choc et l'apex de la rampe est par exemple égal à 0,275 dans les deux cas, tandis que le rapport de la distance maximale entre le choc diffracté et la rampe sur cette distance entre le pied de choc et l'apex de la rampe est égal à environ 0,38. Nous vérifions par ailleurs que la distribution des isocontours de la masse volumique adimensionnée par la masse volumique en amont du choc  $\rho/\rho_0$ , qui peut être extraite du résultat de notre simulation, est



proche de celle qui est observée (par interférométrie) dans l'étude de Deschambault et Glass [46]. Le rapport de masse volumique  $\rho/\rho_0$  passe de 1 à 2,7 à travers le choc droit et atteint un niveau maximal de 4,09 au niveau de l'apex de la rampe, valeurs à comparer aux valeurs expérimentales évaluées à 2,71 et 4,14 respectivement. Nous observons néanmoins un décalage sensiblement plus important en aval du pied de Mach (3,21 à comparer avec la valeur de 3,33) et surtout en aval du point triple (3,47 à comparer avec la valeur de 3,68). Cette observation est en accord avec la difficulté admise d'élaborer des schémas d'évaluation des flux numériques qui permettent simultanément de prévoir précisément la structure des chocs forts et des lignes de glissement. Au vu de la non-adaptation spécifique du maillage utilisé dans ce cas, ces résultats indiquent néanmoins que l'utilisation de ces solveurs constitue un compromis satisfaisant.

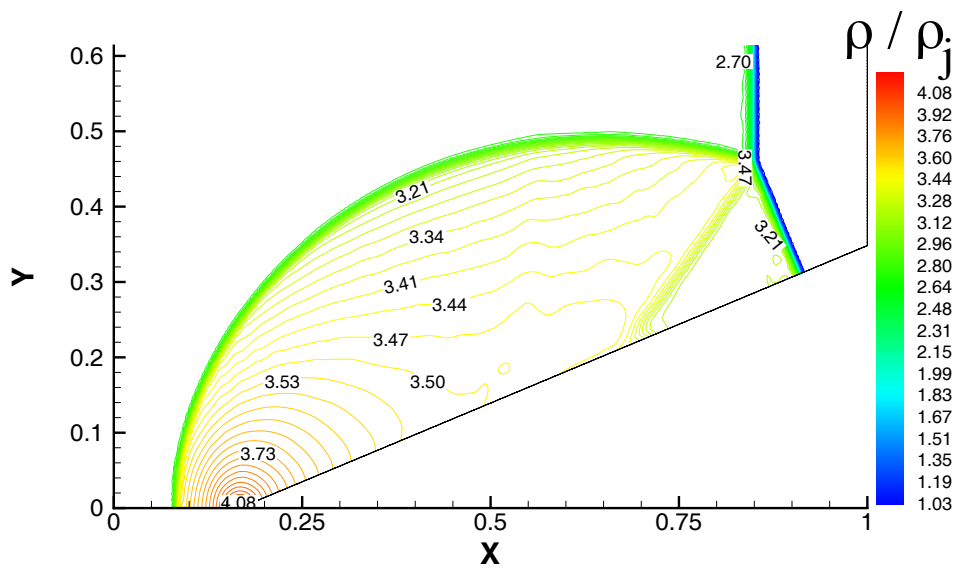


FIG. 8.11 – Interaction d'un choc instationnaire avec une rampe : champ d'isocontours de masse volumique adimensionnée par la masse volumique en amont du choc.

### 8.3 Ecoulement supersonique sur une marche montante

Nous terminons cette étude en présentant le cas test plus "sévère" qui démontre les limitations des solveurs que nous avons retenus. Ce cas standard a été initialement proposé par Woodward et Colella [174] et est utilisé depuis par de nombreux auteurs (voir par exemple [49] ou [158]). Il s'agit d'un canal de section droite de hauteur 1 m et de longueur 3 m, avec une marche montante de hauteur égale à 20% de la hauteur du canal localisée en aval de l'entrée du canal à une distance égale à 60% de cette hauteur. Le test est réalisé en configuration bidimensionnelle en utilisant les différents solveurs présentés au chapitre 5 et en utilisant la procédure de réadaptation adoptée. Les conditions aux limites imposées à l'entrée du canal et utilisées pour initialiser le champ sont les suivantes :

- $p_e = 101325$  Pa,
- $T_e = 298$  K,
- $v_{xe} = 1038$  m/s
- $\gamma = 1,4$ .

Une condition de compatibilité sortie est retenue pour la frontière de sortie tandis que des

conditions de paroi glissante sont considérées pour les autres frontières. La structure qui se forme dans une telle configuration dépend du temps de simulation  $t_s$  adimensionné par le temps caractéristique de l'écoulement amont considéré, soit  $t^* = t_s v_{xe} / L$ , où  $L = 1m$  dans notre cas. Un choc en cloche se forme tout d'abord devant la marche montante, puis en grandissant vers l'aval se réfléchit sur la paroi haute (en  $t^* = 1$  environ) et donne naissance à un nouveau choc qui se réfléchit ensuite sur la paroi basse ( $t^* = 1,5$ ). Un pied de Mach apparaît alors au niveau du premier point de réflexion sur la paroi haute, connecté donc au premier choc réfléchi par un point triple et la structure progresse vers l'amont. La structure de choc en cloche reliée au pied de Mach sur la paroi haute disparaît ensuite, la structure finale stationnaire, atteinte à  $t^* = 5$  environ, présente un choc fort courbé dont la courbure est fortement diminuée par rapport à sa courbure observée en début de simulation. Pour la structure stationnaire observée, l'intensité du choc oblique né de l'interaction triple avec la paroi, est devenu très faible, de sorte qu'on ne peut plus rigoureusement parler de réflexion de Mach au niveau de la paroi supérieure. Pour sa similarité avec la structure attendue dans le cas d'un jet fortement sous-détendu, nous nous intéressons à la structure de choc obtenue à un temps de simulation équivalent à  $t^* = 2,5$ . A ce temps de simulation, la solution doit présenter un choc en courbe se réfléchissant irrégulièrement sur la paroi haute en donnant naissance à une discontinuité de contact et à un choc oblique qui impacte régulièrement la paroi inférieure pour se réfléchir à nouveau vers la paroi supérieure à partir de laquelle le choc réfléchi régulièrement sort du domaine. Par rapport aux cas précédemment étudiés, une nouvelle région particulièrement intéressante apparaît au niveau du coin de la marche où une intense détente a lieu. L'écoulement comprimé en amont de la marche passe d'un état subsonique à un état supersonique sur une distance très petite, de sorte que la plupart des solveurs numériques ne peuvent capturer correctement ce passage sans traitement spécifique au niveau du coin de la marche montante. De par les conditions initiales utilisées, la structure est instationnaire, de sorte que nous avons dû fortement limiter la concentration des mailles près des discontinuités de choc pour pouvoir utiliser la procédure de réadaptation et répéter le calcul plusieurs fois en répartissant plus uniformément les éléments en aval de ce choc. Le cas échéant, la robustesse des solveurs utilisés est mise en défaut pendant la phase initiale du calcul où ces structures commencent à apparaître dans des zones où le maillage peut être localement trop déraffiné. Notons que, probablement par un contrôle plus minutieux des paramètres de réadaptation, modifiés entre chaque étape de la simulation, ou par une initialisation différente, Dolejší [49] parvient à obtenir un resserrement beaucoup plus important autour des discontinuités. Pour le jeu de paramètres que nous avons finalement utilisé pour ce test ( $N_{\text{élé}} = 50$ ,  $\epsilon_1 = 1000$  et  $p = 2$ ), la solution obtenue n'évolue plus significativement dès que trois cycles de réadaptation ont été appliqués. Caractérisons les résultats alors obtenus en commençant par préciser que le solveur de Van Leer n'est pas suffisamment robuste pour obtenir une solution dans cette configuration. Les résultats présentés sont obtenus avec le solveur de Roe, pour lequel une valeur de 0,1 est prescrite pour le coefficient de correction entropique, couplé à une limitation de type "minmod" pour l'extension à l'ordre 2 en espace. Les champs d'isocontours de la masse volumique, de la pression et de la vitesse longitudinale correspondant à cette solution (le maillage final contenant 11591 noeuds) sont présentés sur les figures 8.12, 8.13 et 8.14 respectivement.

Nous pouvons vérifier que l'utilisation de ce schéma couplé à la méthode de réadaptation permet, en utilisant finalement un nombre limité d'éléments de reproduire les caractéristiques principales de la structure au niveau de la zone d'impact du choc en cloche sur la paroi supérieure. Par rapport à la structure attendue décrite par Woodward et Colella [174], nous constatons néanmoins que cette zone d'impact est décalée vers l'aval, tandis qu'une réflexion irrégulière est également obtenue au niveau de la réflexion du choc sur la paroi basse, alors que cette réflexion devrait être régulière. Par ailleurs, l'irrégularité des isocontours de masse volumique ou

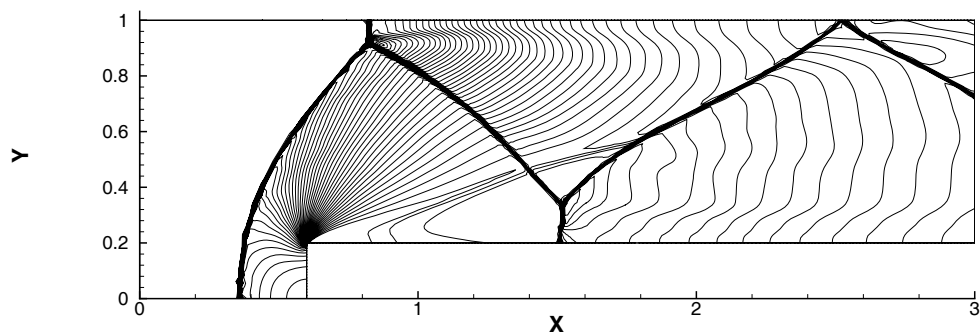


FIG. 8.12 – Champ d’isocontours de la masse volumique extraits de la solution obtenue lors de la simulation de l’interaction d’un écoulement supersonique avec une marche montante (50 niveaux répartis entre 0,68 et 5,5 kg/m<sup>3</sup>).

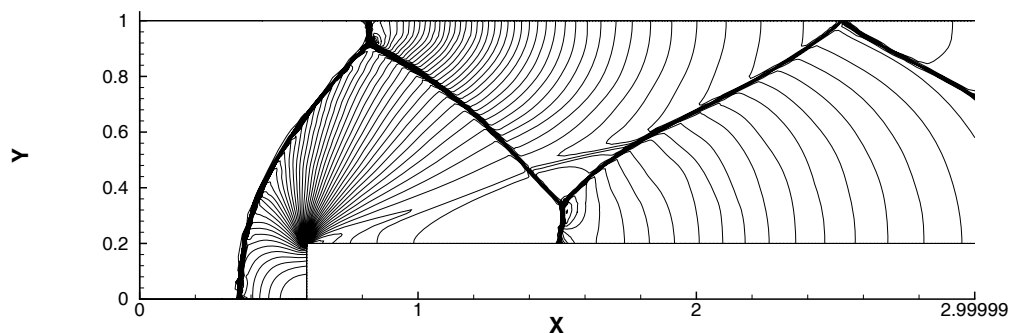


FIG. 8.13 – Champ d’isocontours de la pression extraits de la solution obtenue lors de la simulation d’un écoulement supersonique avec une marche montante (50 niveaux répartis entre 40975 Pa et 1055077 Pa).

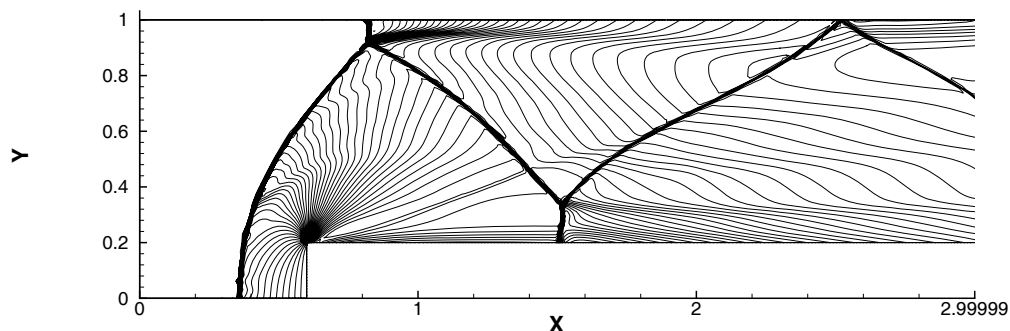


FIG. 8.14 – Champ d’isocontours de la vitesse longitudinale extraits de la solution obtenue lors de la simulation de l’écoulement supersonique sur la marche montante (50 niveaux répartis entre 20 m/s et 1017 m/s).

de vitesse longitudinale en aval du choc réfléchi en aval de cette seconde réflexion irrégulière sur la paroi basse ainsi que l'irrégularité de la courbure de ce choc dénotent la présence d'une ligne de glissement de faible intensité dont nous localisons nettement l'origine au niveau du coin de la marche montante. Ces tendances sont observables quel que soit le niveau global de raffinement utilisé. Ce coin coïncide avec le centre du faisceau de détente à travers lequel les particules fluides sont accélérées d'un état subsonique en amont de la marche à un état supersonique en aval de ce point. Une telle singularité est en fait incompatible avec une déflexion à  $270^\circ$  des lignes de courant qui proviennent de la zone en amont de la marche, de sorte que, sans traitement particulier, le schéma numérique ne peut conserver l'entropie  $s = p/\rho^\gamma$  dans cette zone et donne naissance à une couche limite numérique comme on peut le constater sur les figures 8.15 et 8.16.

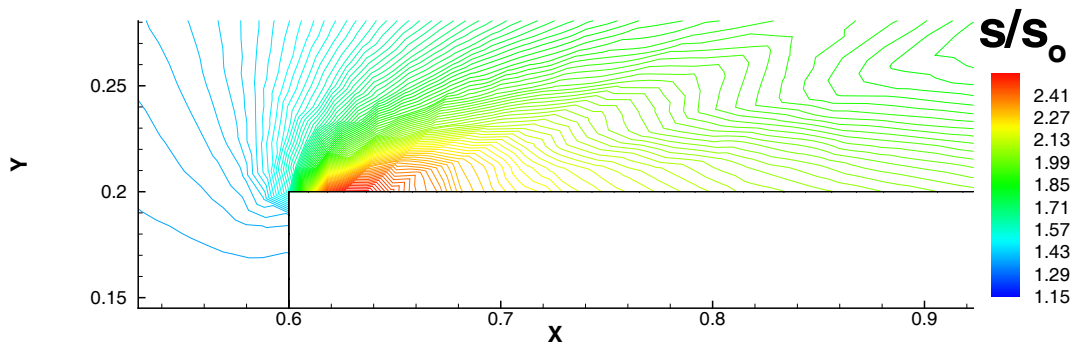


FIG. 8.15 – **Ecoulement supersonique sur une marche montante : agrandissement du champ d'isocontours de l'entropie adimensionnée par sa valeur dans l'écoulement amont.**

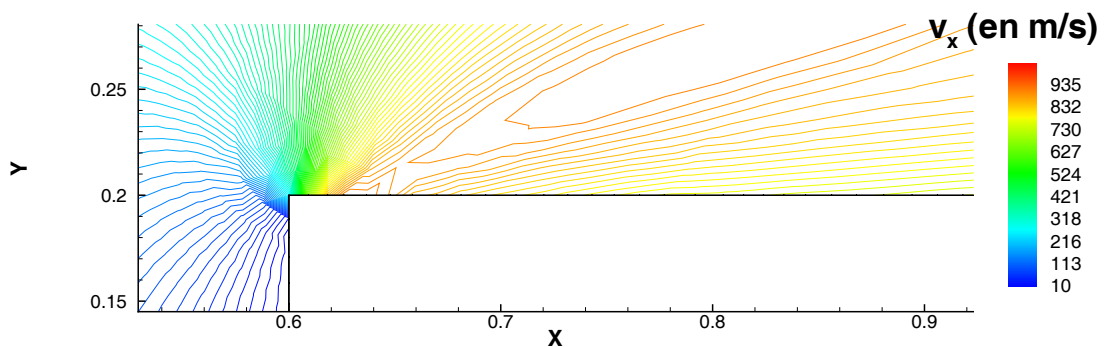


FIG. 8.16 – **Ecoulement supersonique sur une marche montante : agrandissement du champ d'isocontours de la vitesse longitudinale au niveau du coin de la marche.**

L'intensité de la détente étant alors sous-estimée, la déflexion du choc en cloche et l'angle du premier choc réfléchi (par rapport à la direction longitudinale et évalué dans le sens horaire) le sont également, ce qui explique le décalage observé en aval. Afin d'éviter ce problème lié à la singularité du coin, Woodward et Colella [174] proposent de modifier, à chaque étape de temps de la simulation, les valeurs aux points localisés juste en aval et juste au dessus de ce point singulier, de façon à ce que la valeur de l'entropie soit conservée.

## 8.4 Bilan

Les résultats des simulations menées dans les quelques configurations simplifiées d'écoulements supposés non-visqueux que nous avons considérés nous ont permis de caractériser les principales forces et faiblesses de la méthode numérique retenue. Tout d'abord, afin d'interpréter les résultats de notre étude numérique sur le jet supersonique, nous ne pourrions pas faire abstraction des quelques limitations suivantes :

- Le choix particulier retenu pour construire les volumes de contrôle autour des noeuds associé au choix d'évaluer les flux convectifs dans la direction normale moyenne aux interfaces entre volumes de contrôle induit une sensibilité particulière de la solution à la topologie du maillage utilisée. Une orientation privilégiée des triangles dans le maillage conduit notamment à une dissymétrisation des profils de vitesse pour les écoulements pseudo-unidimensionnels et favorise la propagation d'instabilités numériques en configuration bidimensionnelle, même dans le cas où un schéma très dissipatif (solveur de Roe, limiteur "minmod" et valeur importante du coefficient de correction entropique) est utilisé.
- En présence d'une détente intense, le schéma de Van Leer devient instable et ne permet pas de faire aboutir la simulation. Le schéma de Roe associé à une limitation de type "minmod" est beaucoup plus robuste mais conduit à sous-estimer l'intensité des ondes de détente.
- Les solveurs en l'état ne permettent pas de prendre correctement en compte la présence de points singuliers dans le domaine de calcul. En cherchant à limiter le coût calcul en utilisant une géométrie simplifiée de buse, nous pouvons nous attendre à observer localement une dérive non-isentropique des valeurs des variables physiques, qui pourrait conduire à dégrader sensiblement la précision avec laquelle la géométrie des structures pourrait être prévue.
- Pour des écarts importants d'états physiques, l'ensemble des schémas retenus introduisent un excès important de diffusion numérique, notamment au niveau des lignes de glissement. Nous pouvons nous attendre à éprouver quelques difficultés pour observer précisément la géométrie de la structure de choc, induit notamment par l'excès de diffusion numérique en aval du point triple.

La principale qualité du solveur de Roe associé à une limitation de pente de type "minmod" reste néanmoins sa grande robustesse. Au vu de l'intensité attendue des chocs que nous devons considérer dans un jet fortement sous-détendu, son utilisation semble plus que recommandable, du moins pour une phase initiale de simulation, d'autant plus qu'elle réduit sensiblement le coût de la simulation. Notons néanmoins que seule l'utilisation de ce schéma au second ordre en espace est susceptible de nous conduire à obtenir une précision satisfaisante. Par ailleurs, en dépit du haut niveau de diffusion numérique introduit par le schéma de Roe, les caractéristiques de la structure et les niveaux des variables observés lors d'une réflexion de Mach sont correctement prévus pour des niveaux modérés de compression et de détente. La méthode retenue semble donc pouvoir nous amener à prévoir la structure proche des jets fortement sous-détendus avec une précision satisfaisante, d'autant plus qu'une réadaptation du maillage sera successivement appliquée. Avant de vérifier ces hypothèses, suggérées par l'observation des résultats de simulation sur les configurations simplifiées que nous avons présentées dans ce chapitre, nous devons déterminer une stratégie de calcul à adopter pour surmonter un ensemble de difficultés plus importantes que nous allons désormais évoquer.

## Chapitre 9

# Problèmes numériques et stratégie de calcul adoptée pour la simulation des jets supersoniques

Les simulations, dont les résultats sont présentés dans le chapitre précédent, ont pu être menées à bien sans rencontrer de difficulté majeure. Une sensibilité importante et quelque peu atypique au type de maillage utilisé a simplement été soulignée, ce qui nous invite *a priori* à y prêter attention pour simuler les écoulements plus complexes de jets sous-détendus. Ces tests nous ont ainsi permis de démontrer que la précision et la robustesse de la méthode numérique sont relativement satisfaisantes pour simuler des écoulements fortement compressibles dans des configurations simples. Remarquons néanmoins que les conditions initiales et aux limites sont parfaitement définies pour les cas de validation que nous avons retenus. De simples conditions de paroi glissante peuvent être prescrites au niveau des frontières délimitant un domaine confiné. Par ailleurs, ou bien les états à la sortie et à l'entrée du domaine sont entièrement supersoniques quand un écoulement stationnaire est simulé (écoulement supersonique sur une marche montante ou impactant sur un corps émoussé), ou bien les conditions que nous imposons ne jouent qu'un rôle secondaire pour simuler des phénomènes instationnaires ayant lieu au sein du domaine de calcul sur des temps physiques suffisamment courts pour qu'ils ne puissent interagir avec ces frontières (tube à choc et réflexion d'un choc instationnaire sur un dièdre). Une difficulté apparaît désormais lorsque l'on cherche à simuler le champ proche d'un jet supersonique dans un domaine ouvert infini. Celle-ci est d'autant plus importante qu'un de nos objectifs est de minimiser les temps de restitution (et donc en particulier l'extension du domaine de calcul) afin que la procédure de calcul soit également exploitable dans un contexte industriel. Le recours à une procédure de réadaptation de maillage nous impose en effet, dans ce cas, de réduire fortement l'extension du domaine de calcul, ce qui est naturellement incompatible avec la prescription de conditions limites suffisamment représentatives, quelque soit la frontière considérée. Dans ce chapitre, nous proposons de détailler l'origine de ces difficultés et des artefacts numériques qui peuvent alors apparaître, dont l'analyse nous conduit à proposer une stratégie globale de calcul permettant de les surmonter. Cette stratégie est ensuite utilisée pour mener toutes nos simulations de jet supersonique.

## 9.1 Descriptions des problèmes numériques fondamentaux

### 9.1.1 Difficultés liées à la topologie du maillage et à l'initialisation

Le test de Sod nous a permis de montrer que l'utilisation d'un maillage de type structuré et redécoupé selon une direction privilégiée (voir section 7.1.2) conduit à l'apparition d'une légère dissymétrie du champ de vitesse en aval d'un choc fort instationnaire dans une configuration pseudo-unidimensionnelle. Par ailleurs, l'utilisation de ce type de maillage induit le développement de fortes instabilités au pied d'un choc instationnaire se réfléchissant sur un dièdre, n'autorisant qu'une capture très grossière de la structure de choc apparaissant dans cette configuration. On s'attend donc naturellement à ne pouvoir simuler très précisément la forme du disque de Mach dans un jet fortement sous-détendu en utilisant un tel maillage. Des tests préliminaires sur le solveur hyperbolique, effectués pour un jet sous-détendu à  $NPR = 7,55$ , confirment l'influence désastreuse de l'orientation privilégiée des lignes du maillage sur la précision du calcul. Dans les rares cas où la solution converge, alors que l'aspect de la structure est correctement capturé dans la phase initiale du calcul, une instabilité, naissant au niveau de l'axe, croît systématiquement. Le jet présente alors une structure non-physique comme on peut le constater sur la figure 9.1 qui illustre cet artefact numérique (ici obtenu à partir des équations d'Euler, en utilisant le schéma de Roe, la limitation de type "minmod" et en fixant le coefficient de correction entropique à 0,075).

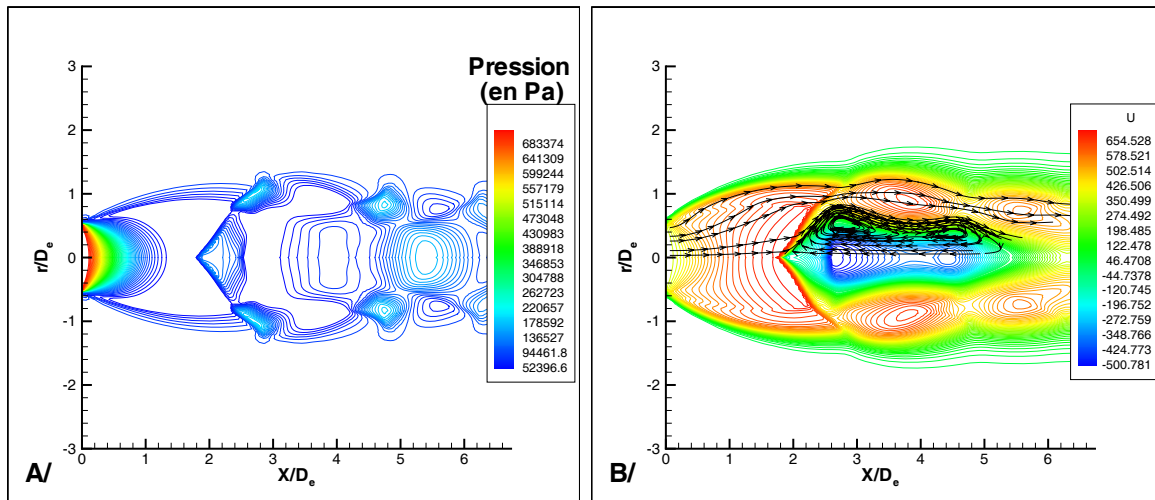


FIG. 9.1 – Illustration de la pathologie de type "carbuncle" rencontrée lors de la simulation d'un jet sous-détendu avec un maillage de type structuré par bloc :

**A** : Isocontours de pression, **B** : Isocontours de vitesse longitudinale (en m/s) et lignes de courant.

Différents tests ont été effectués pour déterminer l'origine de cette anomalie de la méthode, dont les signes caractéristiques sont très proches de la fameuse pathologie du "carbuncle". La pathologie du "carbuncle" est également liée à l'orientation privilégiée des lignes du maillage qui, lorsqu'elles sont alignées perpendiculairement aux zones de forte discontinuité, laissent se propager des instabilités numériques dans les directions tangentielles à ces discontinuités. Il a été montré que la propagation de ces instabilités est en fait liée à la disparition du terme de diffusion numérique lorsqu'un schéma d'approximation du flux convectif par découpage des différences de flux ("Flux Difference Splitting") était utilisé, tel que le schéma de Roe [125][137]. L'ajout de

la correction entropique est sensé éliminer ce défaut en modifiant localement les vitesses d'ondes numériques pour éviter l'annulation de ce terme diffusif. Des valeurs excessives pour ce coefficient allant jusque 0,3 (généralement à ajuster entre 0 et 0,1) ont pourtant été testées sur cette configuration, sans succès, tandis que le schéma a pu surmonter le test d'un impact d'écoulement hypersonique sans même le recours de cette correction. Par ailleurs, les schémas de découpage du vecteur flux FVS ("Flux Vector Splitting") tel que le schéma de Van Leer, sont connus pour ne pas être sujet à ce phénomène [73]. Ce schéma n'est pas suffisamment robuste pour être utilisé dans la phase initiale de nos simulations de jets sous-détendus mais reste cependant suffisamment robuste pour être exploité sur la configuration de réflexion de choc instationnaire sur un dièdre sur laquelle la pathologie est restée nettement visible. La prescription de différents jeux de conditions limites et de domaines plus ou moins étendus ont été testés sans pouvoir corriger cet artefact. Soulignons que, dans les cas où cette instabilité se propage, elle apparaît toujours au bout d'un temps physique de 0,003 s environ pour le cas à  $NPR=7,55$ , et ce quelque soit l'extension du domaine utilisé. Elle serait donc en quelque sorte déclenchée lorsque le jet s'est suffisamment développé en aval, sans pour autant pouvoir mettre la condition limite de sortie en cause. Cet artefact n'apparaît pas lorsqu'un maillage de type non-structuré est utilisé, toute autre condition restant inchangée par ailleurs, ce qui exclut de relier ce problème à un défaut de la condition limite sur l'axe uniquement. Nous relierons donc naturellement son origine à l'orientation privilégiée des lignes du maillage. En effet, les flux numériques sont évalués dans la direction normale à l'interface entre chaque volume de contrôle, de sorte que l'erreur introduite dans l'évaluation de ce flux augmente lorsque l'angle entre le vecteur vitesse et la direction de la normale augmente. D'une part, la direction de cette normale reste relativement constante lorsqu'un tel découpage privilégié des blocs rectangulaires est effectué. D'autre part, le phénomène de détente rencontré dans le jet sous-détendu implique une divergence des lignes de courant. Ainsi, l'angle entre le vecteur vitesse et la direction normale aux interfaces entre volumes de contrôle augmentant globalement lorsqu'on s'éloigne de l'axe, on peut imaginer que l'erreur commise sur l'évaluation des contributions de flux augmente également en s'éloignant de l'axe. Le schéma numérique aurait ainsi tendance à sous-évaluer de plus en plus le saut de vitesse en s'éloignant de l'axe, la solution finissant par bifurquer vers la solution non-physique observée.

Le recours à un maillage de type non-structuré ne remédie alors au problème qu'à condition d'utiliser un niveau de raffinement initial suffisant dans la zone périphérique du jet. Un niveau de précision important est en effet requis pour capturer même grossièrement les caractéristiques du jet sous-détendu, qu'un maillage trop grossier ne saurait permettre de capturer. Si la maillage initial utilisé n'est pas suffisamment dense où que le calcul n'est effectué qu'au premier ordre en espace, l'excès de diffusion introduite peut amener à sous-évaluer la courbure du disque de Mach et engendrer un excès de pression totale dans la zone périphérique de la structure de choc. La figure 9.2 illustre la possible apparition d'une recirculation, la solution ici présentée étant obtenue à partir des équations d'Euler, en utilisant la méthode de Roe, une limitation "minmod" et un coefficient de correction entropique égal à 0,05. Non seulement, cette solution initialement obtenue n'est pas physiquement observable dans le cas des jets sous-détendus<sup>1</sup>, mais elle inhibe le recours à la procédure de réadaptation dans la mesure où un nombre beaucoup trop important de mailles sont alors générées dans des zones inadaptées de l'écoulement si l'on essaie de l'appliquer. Soulignons que dans ce cas, l'application d'un raffinement global pour obtenir un nouveau maillage et l'initialisation d'un nouveau calcul par interpolation sur cette solution ne conduit pas automatiquement à faire disparaître cet aspect non-physique de la solution obtenue. La procédure de réadaptation du maillage ne peut s'appliquer que sur une solution présentant

---

<sup>1</sup>Une telle recirculation stabilisée ne peut s'observer que dans le cas où la concavité du choc est orientée vers l'aval.



déjà les caractéristiques essentielles de la solution physique attendue. La génération d'un maillage initial suffisamment adapté doit être considérée comme une étape à part entière au même titre que le choix des conditions initiales. Le choix des conditions initiales à prescrire sur l'ensemble du

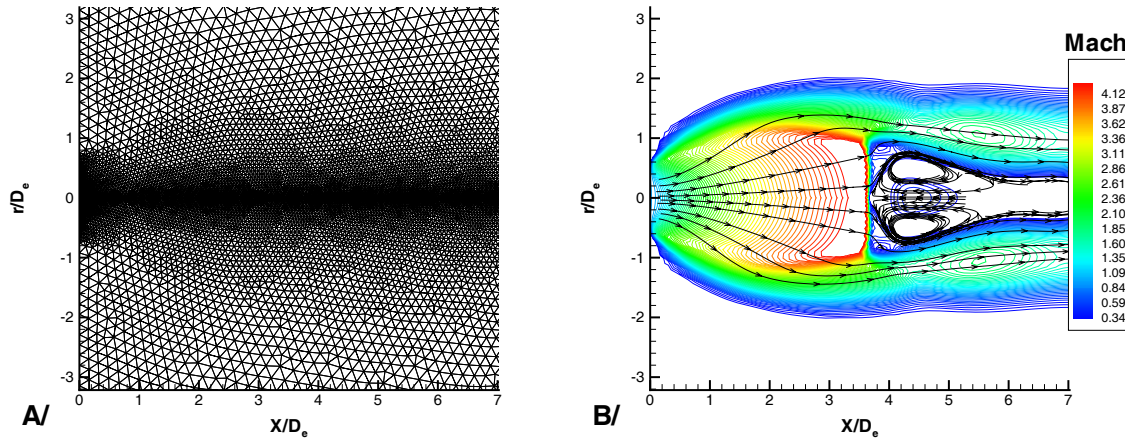


FIG. 9.2 – Illustration d'une solution non-physique obtenue dans le champ proche d'un jet sous-détendu, due à un niveau insuffisant de raffinement du maillage initial.

A : Maillage utilisé, B : Isocontours du nombre de Mach et lignes de courant.

domaine doit justement être guidé par le comportement de l'écoulement pseudo-instationnaire qui en découle dans la phase initiale du calcul. Mettons de côté le choix préconisé par Speares et al. [170] d'initialiser le domaine de calcul sur toute sa longueur avec les profils des variables imposés en entrée du domaine. Ce choix revient en fait à considérer, pendant la phase initiale de la simulation, un écoulement identique à celui que l'on trouverait dans un tube à choc orienté dans la direction perpendiculaire à l'axe, et ne peut être judicieusement retenu lorsque le NPR est trop important et que l'on utilise un domaine peu étendu dans lequel l'interaction du choc résultant de cette initialisation avec la frontière radiale à l'axe conduit inéluctablement à la divergence du calcul. Un choix plus naturel est alors d'imposer initialement, sur l'ensemble du domaine, les conditions relatives au co-écoulement. Dans ce cas, un choc est initialement diffracté dans le domaine. Pour les niveaux de NPR que nous devons considérer, ce choc est cependant suffisamment intense pour induire, si un niveau insuffisant de dissipation numérique n'est pas alors introduit, une dérive des conditions limites tandis que la structure de choc naissante à l'intérieur de la zone de jet peut mettre en défaut la robustesse de la méthode. Aussi est-il nécessaire de limiter le raffinement initial dans la zone près de l'axe et dans la zone d'entraînement afin d'introduire naturellement le niveau de dissipation adéquat, permettant de passer cette phase pseudo-instationnaire du développement du jet (voir figure 9.3) tout en obtenant une première solution de la structure de l'écoulement physiquement admissible. Même s'il est suffisamment dissipé, ce choc courbe qui se propage induit cependant une déflexion des lignes de courant vers l'extérieur du domaine, tandis que la forte expansion initiale du jet en formation induit la convergence de ces lignes de courant à la périphérie du jet. Lorsque la vitesse initiale dans le domaine correspond à la vitesse imposée dans le co-écoulement (à nombre de Mach égal à 0,05), une recirculation apparaît à la périphérie du jet et est convectée alors que celui-ci se développe (voir figure 9.4). Utilisant un domaine d'extension limitée et une approche unidimensionnelle pour prescrire le niveau de pression statique sur la frontière de sortie, cette recirculation est partiellement réflé-

chie sur cette frontière. Tandis que le champ de vitesse se rétablit progressivement, une zone de basses valeurs de la masse volumique reste "bloquée" dans le domaine en amont de la frontière de sortie, nécessitant des temps prohibitifs de calcul pour être correctement évacuée. Afin de limiter l'intensité de cette recirculation et de l'évacuer plus rapidement, nous suggérons d'augmenter la valeur de la vitesse prescrite pour initialiser le domaine. Naturellement, ce procédé induit la formation d'une structure de choc très étirée vers l'aval si le nombre de Mach initial dans le domaine est trop important, pouvant conduire également à des temps de calcul plus longs afin que les variables imposées dans le co-écoulement se rétablissent et que la position de la structure de choc se stabilise en amont. Par expérimentation numérique, nous choisissons finalement d'ajuster la valeur initiale de vitesse dans le domaine de calcul afin d'obtenir un nombre de Mach initial égal à 0,5.

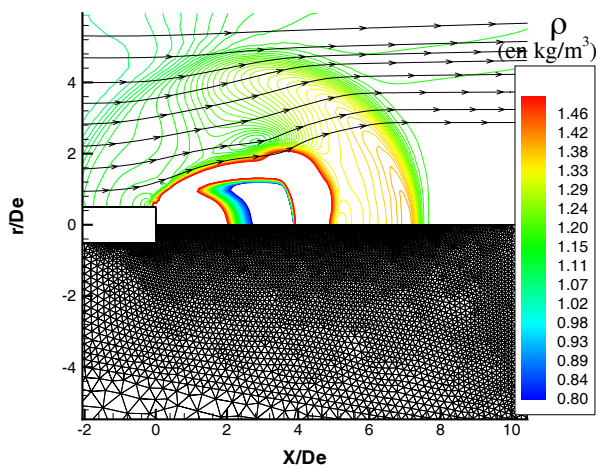


FIG. 9.3 – Illustration du contrôle par le maillage de l'intensité du choc diffracté pendant la phase initiale de la simulation :

- $r/D_e > 0$  : isocontours de la masse volumique (80 niveaux sur la plage de valeurs  $[0,8 ; 1,5]$  (en  $kg/m^3$ ) et lignes de courants),
- $r/D_e < 0$  : Maillage utilisé.

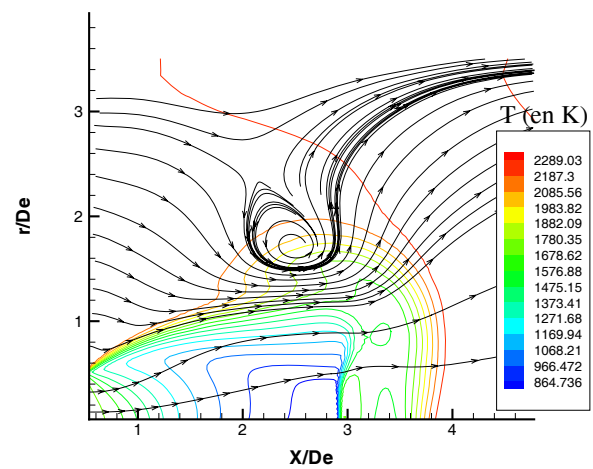


FIG. 9.4 – Illustration de la formation d'une recirculation à la périphérie d'un jet de gaz brûlés pendant la phase initiale de la simulation.

### 9.1.2 Difficultés liées à la condition limite de sortie

Une première difficulté mise en évidence est liée au fait que des zones subsoniques de nature différente peuvent coexister au niveau de la frontière de sortie. Lorsque l'état du fluide en sortie est subsonique, il est en effet nécessaire de réimposer le niveau d'une variable physique, soit la pression dans notre cas. Lorsque cet état subsonique correspond à la zone de co-écoulement, il peut sembler judicieux de réimposer le niveau de pression relatif à l'infini en aval. Nous ne pouvons cependant plus opter pour ce choix dès lors que cet état subsonique correspond à la zone proche de l'axe en aval du disque de Mach, au cas où le disque de Mach est suffisamment large et la poche subsonique suffisamment longue pour s'étendre jusqu'à la frontière de sortie. Suivant l'idée de Prudhomme et al. [60], des tests ont été réalisés en implantant une condition limite variable en temps. Celle-ci consiste à détecter la présence d'une poche subsonique au niveau de cette frontière et de modifier, pour les éléments de frontière positionnés au niveau de cette zone,

le niveau de pression statique pris en compte pour l'évaluation des flux convectifs. La pression statique effectivement prise en compte correspond alors à la pression statique relative au premier noeud de calcul, détecté en partant de l'axe, où l'état du fluide est supersonique. Cela suppose naturellement un comportement unidimensionnel de l'écoulement dans cette zone mais permet de réimposer une information physique plus pertinente. Ce choix s'avère néanmoins insuffisant dès lors que le maillage est suffisamment raffiné en amont de la frontière de sortie. Non seulement ce niveau de pression statique imposé au niveau de la poche subsonique reste trop éloigné du niveau satisfaisant la continuité de l'écoulement dans cette zone, mais le niveau de pression statique réimposé dans la zone de co-écoulement subsonique reste trop important. Le fluide du co-écoulement étant fortement accéléré par entraînement à la périphérie du jet, la pression statique peut en effet être inférieure de plusieurs milliers de pascals à ce niveau. La réimposition de ce niveau trop élevé de pression statique dans le co-écoulement subsonique conduit alors à générer artificiellement d'importantes différences de pression totale entre ce co-écoulement et la zone périphérique de la couche de cisaillement supersonique. Il en résulte une incurvation de la couche de mélange supersonique vers l'axe et, par entraînement d'air venant de la frontière de sortie, l'apparition de recirculations non-physiques. La constriction de la couche, illustrée sur la figure 9.5 induit alors une onde de pression qui remonte vers l'amont, notamment via la poche subsonique en aval du disque de Mach, et déstabilise la structure de choc. Les oscillations de faible amplitude de cette structure de choc se traduisent en retour par la propagation vers l'aval d'instabilités de la couche de mélange supersonique. Ce processus de bouclage interdit alors l'obtention d'une solution stationnaire. Face à cette impossibilité d'utiliser un domaine de calcul peu étendu et de prescrire *a priori* de façon suffisamment précise l'information physique adaptée à la structure de cet écoulement, il semble alors naturel de chercher à amortir au maximum l'ensemble de ces instabilités générées artificiellement à partir de la frontière de sortie, en introduisant suffisamment de dissipation numérique au niveau de celle-ci.

### 9.1.3 Difficultés liées à la section d'entrée de l'ajutage

La non-prise en compte des effets de couche limite induit des niveaux d'accélération anormalement importants dans la zone d'écoulement entraîné par le jet à sa périphérie, près de l'ajutage. Il en résulte une chute de pression suffisante pour que le rapport des pressions statiques effectivement pris en compte au cours de la simulation ne soit pas exactement celui qui est attendu. Par ailleurs, une trop grande déformation des mailles et un resserrement insuffisant au niveau de l'ajutage peuvent induire, en quelques noeuds du maillage, une erreur importante des niveaux des variables calculées lors du bilan de flux. Un raffinement trop important conduisant également à mettre en défaut la robustesse des schémas numériques, que cela soit dans la phase initiale du calcul ou pour une reprise de la simulation avec un nouveau maillage plus raffiné, nous devons déterminer par expérimentation numérique le juste compromis. Il est alors possible de trouver le niveau adéquat de raffinement permettant de limiter l'apparition de ces niveaux anormalement bas de pression en un unique point, localisé au bord de l'ajutage. Même si un niveau de pression inférieur est généré uniquement en ce noeud au coin de l'ajutage, l'erreur introduite est alors suffisante pour modifier de façon significative l'angulation des faisceaux de détente. La figure 9.6 présente un agrandissement des isocontours de pression obtenus au niveau de l'ajutage pour la simulation d'un jet supersonique parfaitement détendu (voir chapitre 10), où l'on voit apparaître un faisceaux parasite d'ondes de compression. Ainsi, comme dans le cas expérimental où il est impossible d'adapter précisément le niveau de pression dans la section de l'ajutage à celui de l'atmosphère ambiante, nous devons prendre en compte une certaine incertitude dans la prescription du NPR. Il est néanmoins possible de réduire fortement cet effet en utilisant une "pseudo-lèvre" de buse (voir figure 6.2), de taille très petite ( $0,005D_e$ ) pour reconnecter la frontière d'entrée à

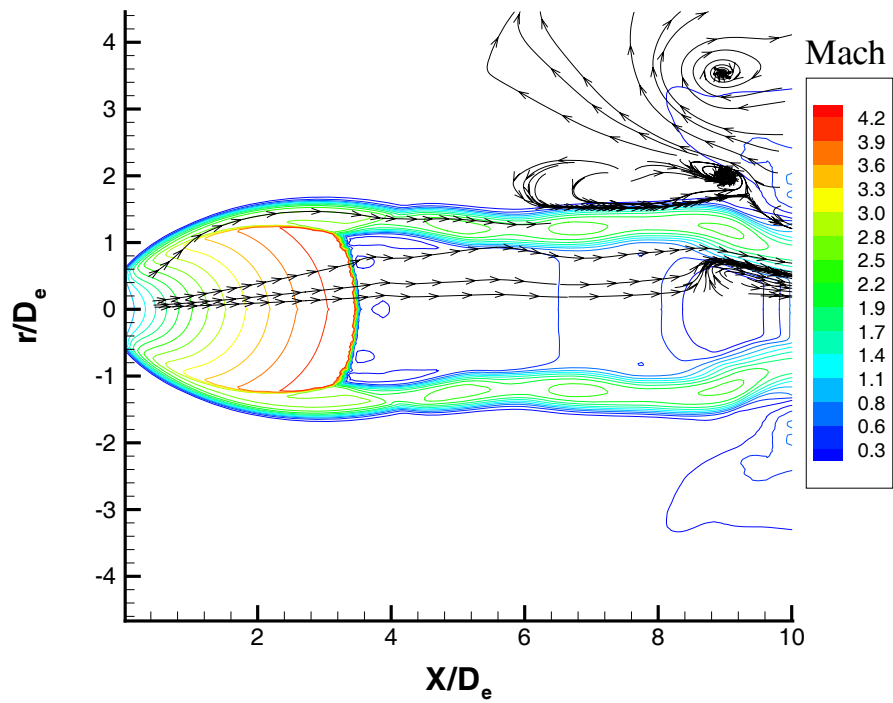


FIG. 9.5 – Illustration de la déstabilisation de la structure du jet induite par l'inadaptation de la condition limite en sortie.

la paroi glissante qui la sépare de la frontière d'entrée du co-écoulement. La figure 9.7 compare par exemple les structures de choc obtenues lors de simulations de jet faiblement sous-détendus sans et avec l'utilisation de cette "pseudo-lèvre" de buse. Ces structures sont obtenues après 6 étapes de calcul, à partir d'un maillage initial uniforme dans le champ proche (de 12057 noeuds) d'extension égale à dix fois le diamètre de buse et l'application de 5 cycles de réadaptation (résultant en des maillages similaires contenant 7749 et 7236 noeuds respectivement) sur les solutions intermédiaires obtenues. Nous constatons que l'origine du faisceau de détente est en effet mieux définie vers le coin de l'ajutage lorsque le domaine comporte une "pseudo-lèvre" de buse. Dans le cas de la simulation d'un jet faiblement sous-détendu, la précision avec laquelle on capture l'origine et l'extension du faisceau de détente pilote directement la structure de choc qui en résulte. Alors que la position du premier point de réflexion de choc sur l'axe ne diffère que de  $0,06D_e$  entre  $X/D_e = 1,44$  (avec la "pseudo-lèvre") et  $X/D_e = 1,5$  (sans la "pseudo-lèvre"), cet écart augmente rapidement en allant vers l'aval, atteignant par exemple  $0,14D_e$  pour la longueur des deux premières cellules de choc ( $3D_e$  et  $2,86D_e$  respectivement sans et avec l'utilisation de la "pseudo-lèvre"). Si les effets de proche paroi ne sont pas pris en compte, nous préconisons donc l'utilisation de ce type d'artifice au bord de l'ajutage afin de mieux représenter le développement de jets supersoniques en aval d'un ajutage.

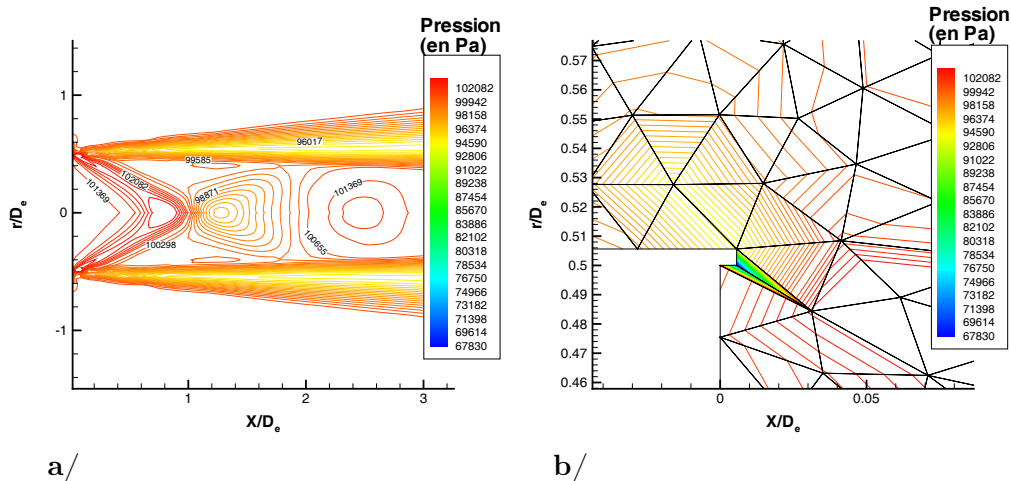


FIG. 9.6 – Champ d'isocontours de la pression statique illustrant le problème de coin rencontré au bord de l'ajutage : a/ Structure proche du jet, b/ Agrandissement au bord de l'ajutage.

## 9.2 Stratégie de calcul adoptée

Après avoir présenté les principales difficultés d'ordre numérique que l'on peut rencontrer lors de la simulation de jets sous-détendus avec la méthode numérique retenue et l'ensemble des restrictions que nous imposons (utilisation d'un domaine d'extension limitée, non-prise en compte des effets de proche paroi), nous décrivons la stratégie adoptée permettant de les surmonter. Son principe repose essentiellement sur l'utilisation d'une combinaison de maillages, permettant de réadapter le maillage dans une zone centrale afin d'accéder à un niveau de précision satisfaisant tout en déraffinant fortement un maillage périphérique afin d'introduire naturellement un niveau élevé de dissipation numérique dans ces zones. Détaillons les étapes de cette procédure.

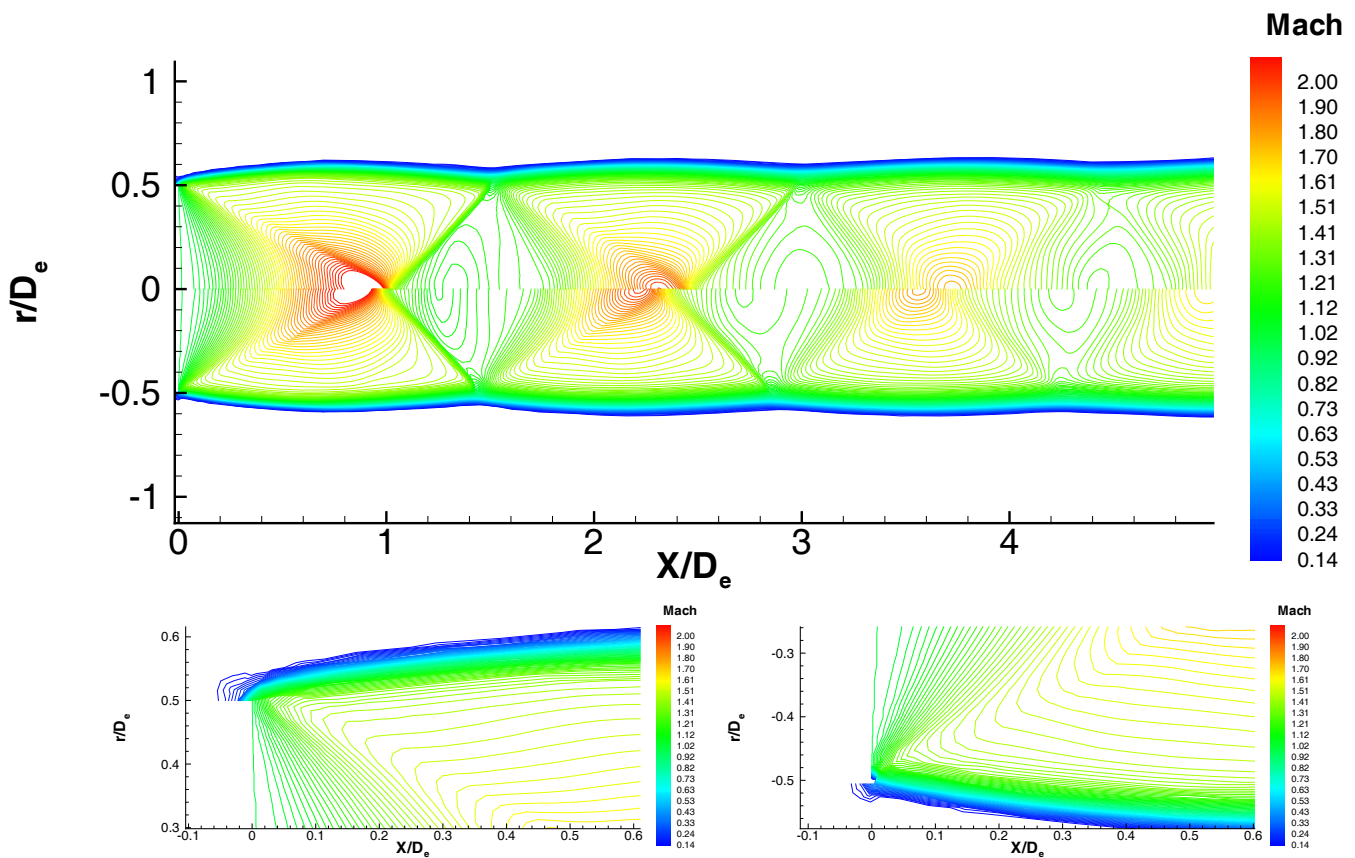


FIG. 9.7 – Comparaison des champs proches de jets faiblement sous-détendus à  $NPR=1,75$  : isocontours du nombre de Mach (100 niveaux) de la structure proche obtenue sans "pseudo-lèvre" ( $r/D_e > 0$ ) et avec une "pseudo-lèvre" ( $r/D_e < 0$ ) de buse.

### 9.2.1 Maillages utilisés pour la première étape de calcul

Afin d'obtenir une précision satisfaisante pour la solution issue d'une première phase de simulation, tout en assurant la robustesse des schémas numériques, nous construisons directement un maillage initial non-structuré par la méthode de redécoupage itératif de boucles (voir section 7.1.3) en prescrivant sur les frontières les tailles de maille indiqués dans le tableau 9.1. Ces paramètres sont choisis par expérimentation numérique et représentent un compromis satisfaisant entre la qualité de la solution initiale obtenue et le nombre d'éléments générés. Les deux frontières **F6** et **F7** correspondent aux parois glissantes composant la "pseudo-lèvre" de buse et ne comportent chacune qu'un unique élément d'une taille égale à  $0,005D_e$ . Deux extensions de domaine sont étudiées afin de vérifier la perturbation de l'écoulement induite par cette extension limitée. Le premier, illustré par la figure 9.8, s'étend jusqu'à 10 fois le diamètre de l'ajutage dans la direction longitudinale et 5 fois environ dans la direction radiale, tandis que le second (voir figure 9.9) s'étend jusqu'à  $20D_e$  dans la direction longitudinale et  $9D_e$  dans la direction radiale. Les maillages correspondant à ces deux domaines seront respectivement dénommés **MI<sub>1</sub>** (12057 noeuds) et **MI<sub>2</sub>** (20128 noeuds) dans la suite de l'exposé. Remarquons que l'inclinaison exacte de la frontière  $r_{max}(x)$ , participant à limiter la réflexivité de cette frontière, n'a qu'un rôle secondaire. Une forte dissipation numérique est alors introduite dans la zone périphérique en associant un second maillage fortement déraffiné à ce maillage central. L'extension de cette zone "tampon" et le niveau de raffinement associé sont ajustés de façon à ce que l'écoulement près de l'axe devienne entièrement supersonique en sortie. Les segments des frontières **F2**, **F3** et **F4** deviennent autant de frontières indépendantes pour le maillage "tampon". Le haut niveau de déraffinement imposé lors de la construction de ce maillage "tampon" est alors assuré en prescrivant, sur ces éléments de frontière communs aux deux maillages, des tailles de mailles très supérieures à la taille de ces éléments. Notons que, pour le maillage **MI<sub>2</sub>** plus étendu, le développement de la couche supersonique pendant la phase initiale de calcul pour les plus grandes valeurs de NPR testées (NPR=15.5) s'étend sur une distance radiale beaucoup plus importante, ce qui nécessite d'étendre cette zone "tampon" afin d'éviter les problèmes de couplage précédemment décrits. Pour les deux extensions de domaine utilisées, la fusion du maillage central et de sa zone "tampon" constitue le maillage utilisé pour mener à bien la première étape de simulation.

### 9.2.2 Paramètres numériques utilisés pour la première étape de simulation

Pour la première étape de calcul, des tests préliminaires ont mis en évidence le manque de robustesse du schéma de Van Leer. L'utilisation du schéma de Roe conjointement à une limitation de pente de Van Albada nécessite par ailleurs de diminuer fortement la valeur du CFL typiquement en dessous de 0,2, et ce quelle que soit la valeur du coefficient de correction entropique (que l'on a choisi de faire varier entre 0,01 et 0,3 au cours de cette étude). Pour chaque étape initiale de calcul, le solveur de Roe est donc utilisé conjointement à une limitation de pente de type "minmod" qui nous permet de fixer systématiquement une valeur de CFL égale à 0,8, quelque soit l'intensité de la détente fonction du NPR. Le temps nécessaire pour obtenir une première solution à partir de laquelle la réadaptation de maillage puisse être appliquée de façon pertinente, peut être fixé empiriquement par observation du comportement de l'écoulement dans la phase pseudo-stationnaire. La forte expansion initiale du jet provoque notamment une forte déflexion des lignes de courant dans le co-écoulement associée à la propagation d'ondes "pseudo-acoustiques" qui se réfléchissent partiellement sur les frontières du domaine. Par ailleurs, l'imposition d'un co-écoulement à nombre de Mach égal à 0,5 conduit à prévoir initialement une structure de choc allongée vers l'aval au cours de la phase pseudo-stationnaire de la simulation, un disque de Mach plus petit et donc une zone subsonique moins étendue en aval de celui-ci. La



Frontière	Maillage $MI_1$		Maillage $MI_2$	
	Taille de maille prescrite adimensionnée par $D_e$	Coordonnées adimensionnées par $D_e$	Taille de maille prescrite adimensionnée par $D_e$	Coordonnées adimensionnées par $D_e$
<b>F1</b>	$3,37E^{-2}$	(0;0) à (0;10)	$3,37E^{-2}$	(0;0) à (20;0)
<b>F2</b>	$6,74E^{-2}$ (MC), 1,12 (MT)	(10;0) à (10;6)	$6,74E^{-2}$ (MC), 1,12 (MT)	(20;0) à (20;10,5)
<b>F3</b>	$1,68E^{-1}$ (MC), 1,12 (MT)	(10;6) à (-2;4)	$1,68E^{-1}$ (MC), 1,12 (MT)	(20;10,5) à (-2;4)
<b>F4</b>	$1,68E^{-1}$ (MC), 1,12 (MT)	(-2;4) à (-2;1,005)	$1,68E^{-1}$ (MC), 1,12 (MT)	(-2;4) à (-2;1,005)
<b>F5</b>	$6,74E^{-2}$	(-2;1,005) à (0,005;1,005)	$6,74E^{-2}$	(-2;1,005) à (0,005;1,005)
<b>F6</b>	$3E^{-5}$	(0,005;1,005) à (0,005;1)	$3E^{-5}$	(0,005;1,005) à (0,005;1)
<b>F7</b>	$3E^{-5}$	(0,005;1) à (0;1)	$3E^{-5}$	(0,005;1) à (0;1)
<b>F8</b>	$1,69E^{-2}$	(0;1) à (0;0)	$1,69E^{-2}$	(0;1) à (0;0)
<b>F9</b>	0,33	(10;0) à (13,5;0)	0,33	(20;0) à (30;0)
<b>F10</b>	0,787	(13,5;0) à (13,5;8,5)	0,787	(30;0) à (30;18,5)
<b>F11</b>	2,24	(13,5;8,5) à (-4,5;6)	2,24	(30;18,5) à (-5;7)
<b>F12</b>	1,685	(-4,5;6) à (-4,5;1,005)	1,685	(-5;7) à (-5;1,005)
<b>F13</b>	1,12	(-4,5;1,005) à (-2;1,005)	1,12	(-5;1,005) à (-2;1,005)

TAB. 9.1 – Paramètres utilisés pour la génération des maillages de référence : maillage central (MC) et maillage "tampon" (MT).

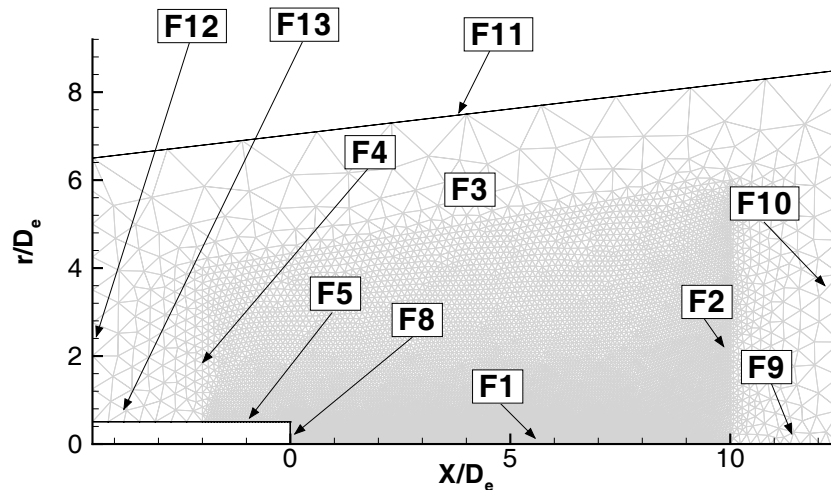


FIG. 9.8 – Illustration du maillage central  $MI_1$  utilisé et de la zone tampon construite à sa périphérie.



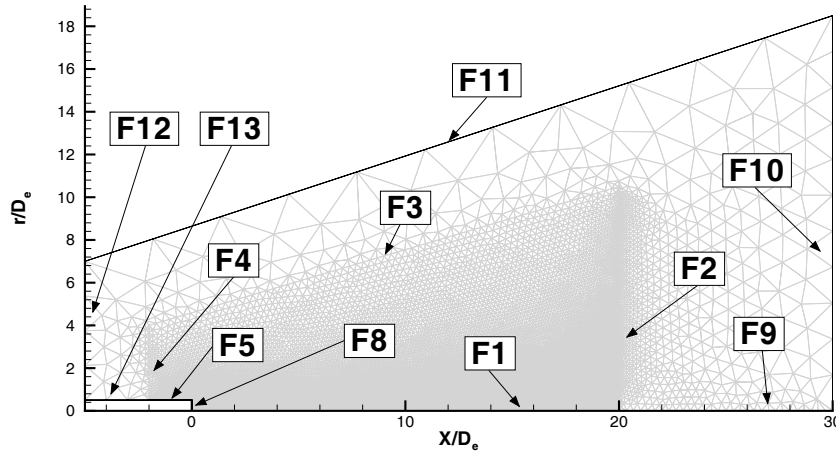


FIG. 9.9 – Illustration du maillage central  $MI_2$  utilisé et de la zone tampon construite à sa périphérie.

structure de choc se reconstruit ensuite progressivement vers l'amont, le diamètre du disque de Mach et la longueur de la zone subsonique augmentant, pour atteindre une position qui n'évolue plus au cours du temps. Ce temps reste cependant insuffisant. L'information "physique" liée aux conditions limites dans le co-écoulement est en effet plus lente à se propager. L'algorithme de réadaptation présente à ce niveau un intérêt pratique, dans la mesure où il permet de visualiser directement (par raffinement) la position des ondes (même si leur intensité est faible) se propageant au sein du co-écoulement lorsque celui-ci n'est pas parfaitement établi. Un premier critère heuristique peut ainsi consister à observer l'aspect des maillages réadaptés sur des solutions obtenues à partir de temps physiques de simulations différents, qui, s'ils présentent un niveau excessif de raffinement dans la zone de co-écoulement, indiquent un avancement insuffisant de la simulation. Par ailleurs, une fois que la structure du jet est grossièrement établie, le niveau des vitesses d'ondes les plus importantes l'est aussi. Appliquant un pas de temps constant sur l'ensemble du domaine (selon l'application du critère CFL), le pas de temps pris en compte devient alors sensiblement constant. La décroissance de résidus "intrinsèques" des variables physique devient alors signifiante<sup>2</sup>. Nous choisissons notamment d'utiliser l'évolution de la norme L2 du résidu de la masse volumique pondérée par sa valeur initiale, soit :

$$\mathcal{R}(\rho) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_C} |\rho_i^{n+1} - \rho_i^n|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_C} |\rho_i^1 - \rho_i^0|^2}} \quad (9.1)$$

En utilisant conjointement un troisième critère absolu consistant à comparer directement les solutions obtenues après des temps de simulations différents (comparaison des champs d'isopycniques notamment), nous vérifions que la décroissance de  $\mathcal{R}(\rho)$  de trois ordres de grandeurs (donc jusqu'à des valeurs proches de  $10^{-3}$ ) est suffisante dans la majorité des cas pour indiquer que la solution n'évolue plus de façon significative. En initialisant l'écoulement dans le domaine à un nombre de Mach égal à 0,5 et en ajustant ainsi l'extension de la zone "tampon" et le niveau de dé-raffinement qui y est imposé, nous constatons qu'un niveau satisfaisant de convergence peut être

<sup>2</sup>Nous rappelons que l'évaluation absolue de la précision d'une solution ne peut s'effectuer que si l'évaluation au cours du temps de la différence des états en chaque point est pondérée par le pas de temps.

atteint pour un temps de simulation physique correspondant grossièrement, en fonction du NPR imposé, à seulement deux à trois aller-retours des ondes les plus rapides dans le co-écoulement (soit typiquement à 0,003 à 0,006 s de temps physique de simulation, ou 300000 à 600000 pas de temps pour un pas de temps maximal admissible variant typiquement entre  $10^{-8}$  et  $10^{-7}$  s en fonction du NPR et de l'avancement de la simulation). Une solution suffisamment convergée étant obtenue, la réadaptation peut alors être appliquée dans le champ proche de l'écoulement relatif à la zone centrale.

### 9.2.3 Paramètres de réadaptation retenus

A partir de la solution convergée obtenue à partir du maillage initial, la solution relative au maillage central est extraite. L'algorithme de réadaptation est alors appliqué uniquement sur ce domaine central. Des tests préliminaires ont été effectués afin de déterminer la variable ou la combinaison de variables qui soit la plus pertinente pour effectuer cette réadaptation. Même si les niveaux de vitesse sont largement supérieurs au sein du jet, les champs de ses composantes présentent des niveaux de courbure équivalents, voire plus importants dans la zone de co-écoulement, de sorte que celles-ci ne peuvent être choisies. Étonnamment, on constate également que les niveaux de courbure rencontrés dans le champ de pression relatif à la zone d'inflexion des lignes de courant dans le co-écoulement, sont du même ordre de grandeur que ceux rencontrés au sein du jet, de sorte que, si la pression est utilisée, le raffinement obtenu dans la zone de forte détente au sein de la première cellule de choc est équivalent à celui obtenu dans l'ensemble du domaine. L'utilisation d'une variable représentative de l'entropie  $s = \frac{p}{\rho^\gamma}$  (éventuellement adimensionnée par sa valeur estimée à l'ajutage) est un choix intéressant dans la mesure où la zone rotationnelle résiduelle trouvée dans le co-écoulement (qui reste isentropique) n'apparaît pas sur le champ de cette variable, ce qui n'induit pas de raffinement excessif au sein du co-écoulement, même si la réadaptation est effectuée à partir d'une solution obtenue après un temps plus court de simulation. La variation d'entropie liée à la forte détente en aval de l'ajutage reste cependant largement inférieure aux variations d'entropie rencontrées à travers les zones de choc ou de forte compression. La suppression d'un nombre trop important de noeuds juste en aval de l'ajutage (illustrée sur la figure 9.10) conduit alors à trop fortement réduire la précision avec laquelle nous pouvons prévoir la divergence des lignes de courant. Finalement, les utilisations de la masse volumique ou du nombre de Mach, prenant simultanément en compte les variations de vitesse dans les zones de cisaillement et celles de la masse volumique dans les zones de compression, permettent d'obtenir des maillages réadaptés de même nature. L'utilisation de la masse volumique conduit néanmoins à raffiner plus significativement dans la zone de forte détente en aval de l'ajutage et dans les zones de compression en aval du disque de Mach (voir figure 9.11). Au vu de la faiblesse des schémas numériques que nous utilisons dans les zones d'intense détente, nous privilégions donc le choix de cette variable. La masse volumique étant choisie comme variable de réadaptation, nous cherchons par ailleurs au cours de cette étude à obtenir une définition élevée de la géométrie des structures de choc. Nous autorisons donc une variation importante des longueurs de segments en fixant le rapport maximal de ces longueurs à 100, tout en autorisant une concentration élevée des segments dans les zones de discontinuités en fixant le paramètre  $p$  à 2 (voir chapitre 7.2.2). Nous choisissons alors d'ajuster le niveau global de raffinement, en fonction du cas traité et de l'extension du domaine utilisée, par une étude de sensibilité de la solution à ce paramètre.

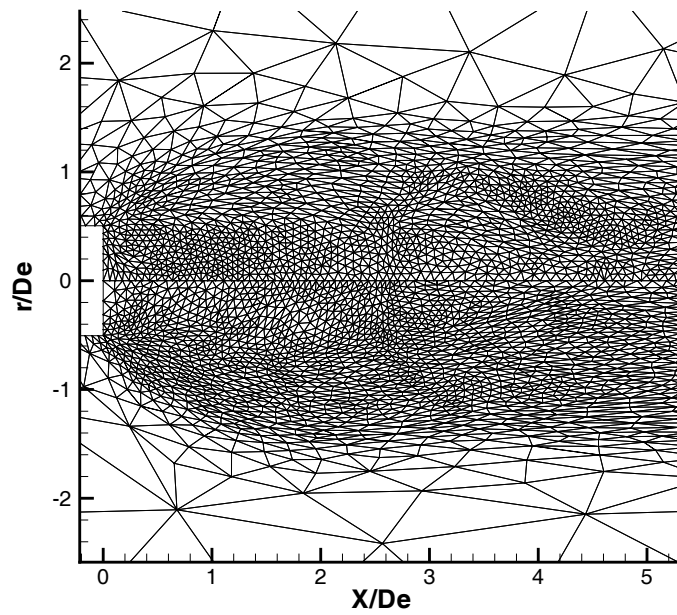


FIG. 9.10 – Comparaison des maillages obtenus par réadaptation dans la zone proche du jet à partir de la masse volumique ( $r/D_e > 0$ ) et de l'entropie ( $r/D_e < 0$ ).

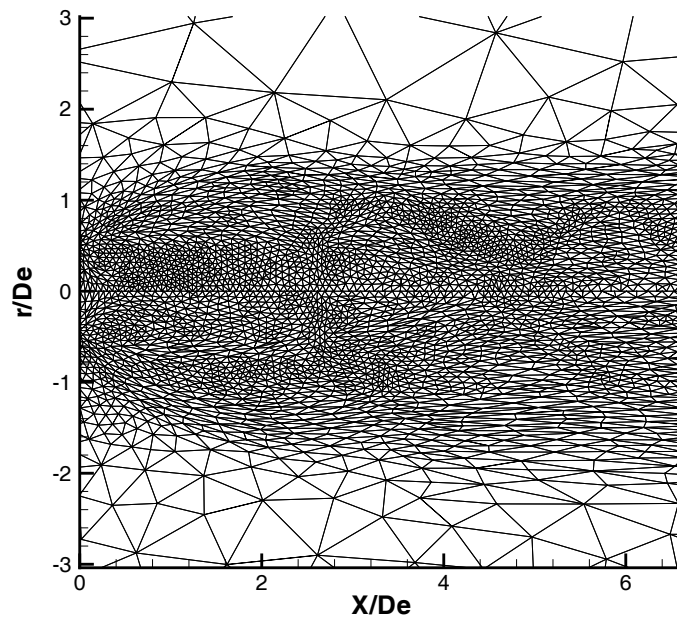


FIG. 9.11 – Comparaison des maillages obtenus par réadaptation dans la zone proche du jet à partir de la masse volumique ( $r/D_e > 0$ ) et du nombre de Mach ( $r/D_e < 0$ ).

### 9.2.4 Maillages et paramètres de calcul pour les étapes de simulation suivantes

Une nouvelle zone "tampon" est alors construite autour de ce nouveau maillage central. Notons que les tailles de maille prescrites dans le tableau 9.1 sont généralement satisfaisantes pour reconstruire le maillage de la zone "tampon" même après plusieurs cycles de réadaptation. Cependant, dans le cas où le NPR reste faible et que le co-écoulement est peu perturbé, les tailles de mailles du maillage central sur les frontières **F4** ou **F5** obtenues après réadaptation peuvent devenir beaucoup plus importantes, nécessitant naturellement d'augmenter en conséquence les tailles de maille prescrites sur ces frontières pour reconstruire un maillage adapté<sup>3</sup> dans la zone tampon. La structure du jet étant déjà globalement établie, des schémas numériques moins robustes (basés sur l'utilisation du solveur de Van Leer ou l'utilisation de la limitation de pente de Van Albada) peuvent alors généralement être appliqués. A l'issue de la première étape de calcul, si un niveau global de raffinement trop faible est utilisé, le maillage réadapté peut cependant être par endroit trop déraffiné dans la zone de détente en amont de la position du disque de Mach initialement calculée. La meilleure capture de l'angulation du jet naissant près de l'ajutage induit alors une translation du disque de Mach vers l'amont, donc vers des zones précédemment déraffinées ou la robustesse des schémas est à nouveau mise en défaut. Ce problème occasionnellement rencontré peut être réglé en modifiant légèrement les paramètres de la première réadaptation (en autorisant par exemple la génération d'un nombre d'éléments légèrement supérieur).

### 9.2.5 Bilan : procédure globale adoptée pour la simulation des jets supersoniques

La stratégie de calcul adoptée est finalement illustrée par la figure 9.12. A partir d'un maillage central adéquat **A**, une zone tampon est construite autour de sa zone périphérique. La fusion de ces deux maillages fournit le maillage initial **B** sur lequel, à partir des conditions **CI** initialisant l'ensemble de ce domaine, est déterminée une première solution convergée **C**. A partir du maillage central initial **A** et de cette solution globale **C** est extraite la solution **D** relative au champ proche, ce qui finalise la première étape de la simulation. La seconde étape de la simulation consiste tout d'abord à appliquer l'algorithme de réadaptation sur cette solution **D** et le maillage initial **A** afin de générer un nouveau maillage central **E** que l'on assemble à une nouvelle zone "tampon". Les valeurs aux points du maillage **F** qui en résulte sont alors initialisées par interpolation sur la précédente solution globale **C**. La seconde étape de calcul aboutit à une nouvelle solution globale **G**. A partir de celle-ci et du maillage central **E** est finalement extraite la solution du champ proche **H**. Cette seconde étape de la simulation peut alors être répétée jusqu'à ce que le nouveau maillage régénéré et la nouvelle solution obtenue n'évoluent plus.

## 9.3 Difficultés non-résolues et considérations sur l'application de la procédure de calcul retenue

### 9.3.1 Considérations sur la représentativité de la solution

Cette procédure permet d'obtenir des solutions stationnaires convergées, même en n'utilisant que les équations d'Euler et en simulant des jets pour lesquels le NPR prescrit est élevé. Elle

---

<sup>3</sup>Remarquons au passage que le choix de paramètres inadaptés pour la reconstruction du maillage nous a amené à générer involontairement des maillages non-conformes qui n'ont pourtant pas été détectés par la procédure de test de conformité du maillage incluse dans le solveur N3SNATUR.

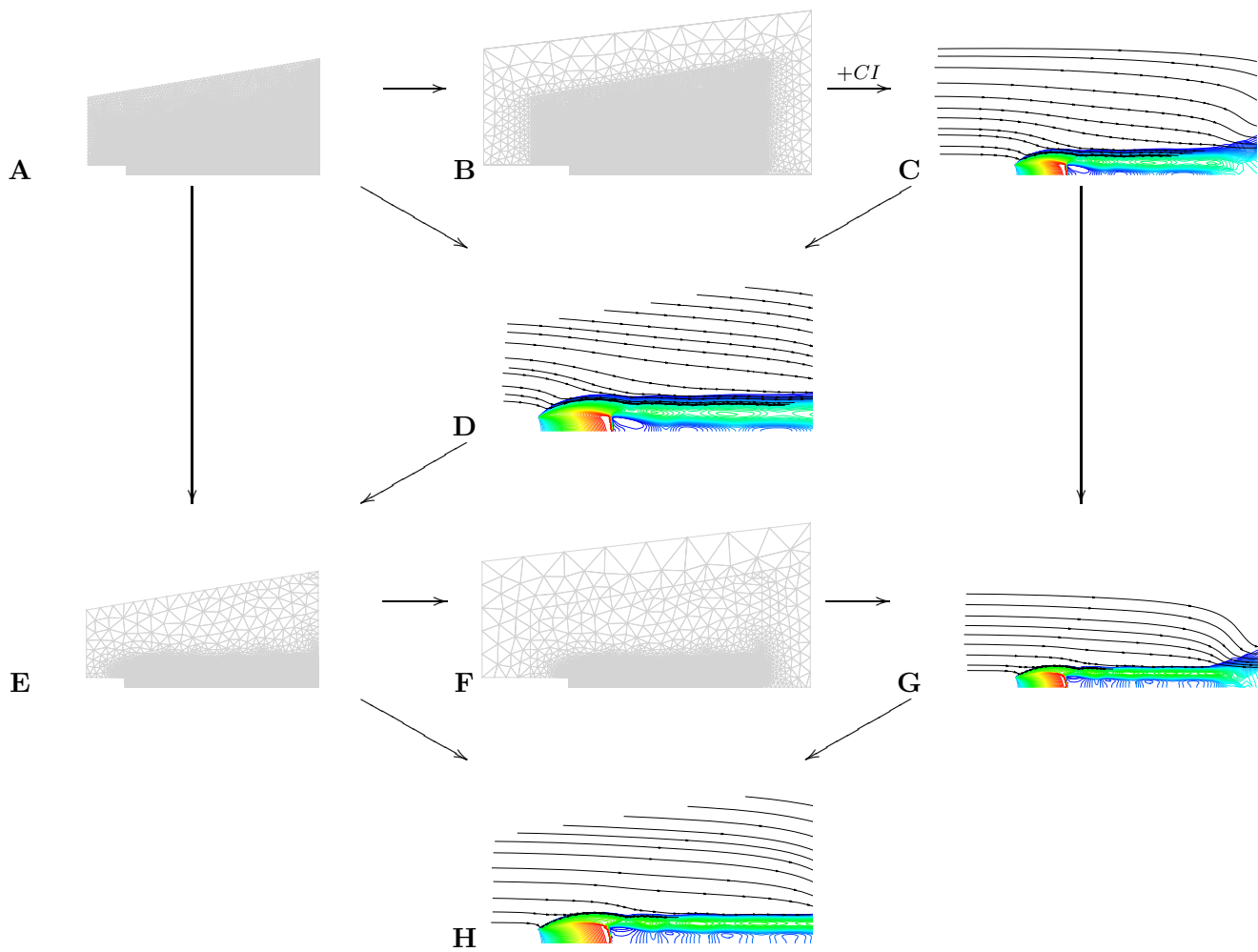


FIG. 9.12 – Procédure adoptée pour la simulation des jets supersoniques (illustration pour un cas à deux étapes).

constitue donc un outil privilégié pour étudier la structure moyenne de l'écoulement. En contrepartie, si le domaine est trop court, en dissipant artificiellement les sources de perturbation provenant de l'aval, il nous est impossible d'étudier rigoureusement l'aspect instationnaire de ces jets (boucle de rétroaction). Soulignons que le fort déraffinement induit par la zone tampon permet d'augmenter artificiellement l'évasement du jet qui devient entièrement supersonique en sortie, ce qui induit naturellement une perturbation sur la solution calculée en léger amont de la frontière **F2** commune aux deux maillages. Cette perturbation n'est essentiellement visible qu'à la périphérie du jet où l'entraînement est artificiellement accru, ce qui induit un raffinement plus important à ce niveau. La perturbation induite dans la zone subsonique en aval du disque de Mach doit en revanche être évaluée plus précisément.

### 9.3.2 Remarques sur l'application de l'algorithme de réadaptation

La procédure retenue nous permet d'améliorer progressivement la précision des solutions numériques obtenues. Un certain nombre de précautions doivent cependant être prises en contrepartie, notamment pour éviter de trop augmenter les temps de calcul. Par exemple, la prescription d'un niveau global de raffinement plus faible conduit naturellement à diminuer le coût d'une itération en temps puisque celui-ci est fonction du nombre de noeuds introduits dans le domaine. Si ce nombre est insuffisant, le maillage réadapté peut cependant présenter localement des mailles très étirées, conduisant à une évaluation d'un pas de temps maximal admissible plus petit et donc à un nombre d'itérations beaucoup plus élevé pour atteindre le même niveau de convergence. Par ailleurs, au cours du second cycle de calcul, le fort resserrement des maillages dans la zone proche de l'ajutage où le choc oblique prend naissance permet de mieux capturer l'angle initial de ce choc et de la frontière du jet. Le disque de Mach a alors tendance à focaliser plus en amont où le resserrement des mailles, du fait de la réadaptation sur la solution précédente, peut être finalement moins approprié qu'il ne l'était initialement pour cette zone du jet. Il en résulte notamment une forte dissipation numérique dans la zone du point triple comme l'illustre la figure 9.13. Si le niveau de raffinement prescrit pour effectuer la première étape de réadaptation est trop important, la structure de choc peut ainsi être très distordue dans la zone relative au point triple. Même si le schéma numérique reste suffisamment robuste pour que le calcul se poursuive, cette zone devient alors une source importante d'instabilités pour l'écoulement en aval, inhibant toute possibilité d'atteindre une solution convergée. Soulignons qu'il n'est alors pas possible de façon générale d'utiliser la solution obtenue après plusieurs cycles de réadaptation pour un niveau de raffinement donné, pour ensuite effectuer une nouvelle simulation basée sur un niveau de raffinement beaucoup plus important. L'algorithme ne se comporte en effet correctement que si le maillage est progressivement raffiné dans les zones adéquates. Le cas échéant, la réadaptation des zones de chocs en amont induit un décalage des positions des zones de compression et de détente en aval qui rétroactivement modifie la répartition des segments lors de la réadaptation suivante. La structure capturée continue alors à osciller sans que nous puissions obtenir une solution qui n'évolue plus en un nombre raisonnable d'étapes de calcul. Par conséquent, la structure particulière de l'écoulement de jet sous-détendu restreint la plage de niveaux de raffinement exploitable pour la seconde étape de simulation. Une autre forme de limitation apparaît lors des étapes suivantes. Alors que la position de la structure de choc n'évolue plus de façon significative, les réadaptations successives peuvent induire progressivement une trop forte déformation des triangles le long des chocs. La faible modulation des valeurs des gradients estimés sur ces éléments triangulaires peut alors provoquer des basculements réguliers des valeurs utilisées par les fonctions limitantes. Même si l'écoulement n'évolue plus significativement en moyenne, un phénomène de saturation est observable au niveau de la décroissance des résidus.

Finalement, une étude rigoureuse de la sensibilité de la solution au maillage devient particu-

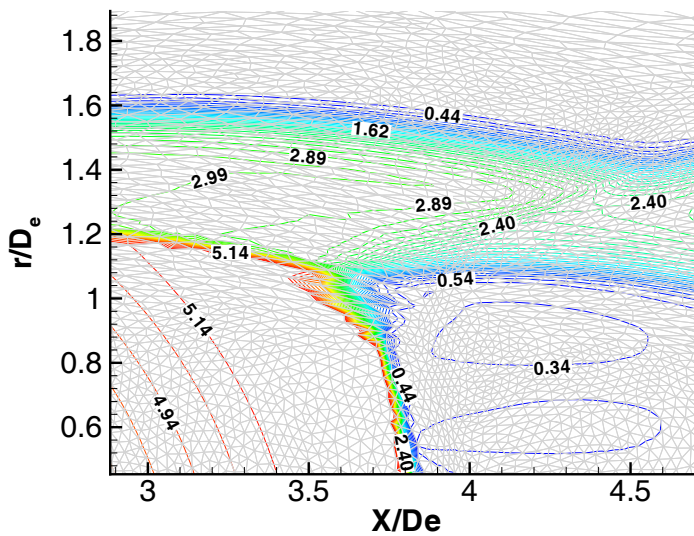


FIG. 9.13 – Agrandissement de la solution diffuse obtenue dans la zone du point triple sur un maillage réadapté trop dense (20181 noeuds) : isocontours du nombre de Mach et maillage.

lièrement délicate à mener. D'une part, la nature anisotrope de la réadaptation et le recours à plusieurs cycles de calcul nous amènent à considérer un maillage en perpétuelle évolution. D'autre part, seul un jeu restreint de paramètres peut nous amener à obtenir des solutions convergées exploitables. Une étude de la sensibilité des solutions au niveau global de raffinement sera néanmoins menée pour chaque configuration testée, dans la limite des niveaux permettant d'obtenir ces solutions.

La procédure développée dans ce chapitre complète l'outil numérique validé précédemment afin de surmonter les difficultés particulières qui sont liées aux caractéristiques des jets fortement sous-détendus. Nous allons désormais évaluer progressivement ses capacités de prévision pour différentes classes d'écoulements de jets supersoniques, en commençant par nous replacer dans la configuration de jet parfaitement détendu.

## Chapitre 10

# Etude numérique des jets supersoniques parfaitement détendus

### 10.1 Objectifs et cas de validation retenus

La procédure de réadaptation de maillage anisotrope retenue (voir chapitre 7) a initialement été développée afin d'optimiser la prévision numérique d'écoulements essentiellement non-visqueux (typiquement pour des écoulements transsoniques ou des écoulements externes supersoniques autour d'un profil d'aile par exemple) pour lesquels l'influence des effets de viscosité ou de turbulence reste secondaire. Nous démontrons en particulier, dans le chapitre 8, qu'elle est particulièrement efficace lorsqu'elle est appliquée sur des configurations d'écoulements relativement simples en présence de zones de chocs et de détente seulement. Dans ce cas, l'estimation *a posteriori* de la courbure du champ de la masse volumique peut être retenue pour construire le champ de l'erreur d'interpolation induite par l'utilisation de maillages inadaptés à la structure de l'écoulement. Cependant, ce choix n'est plus nécessairement le plus optimal dès lors que des chocs et des zones d'intense cisaillement sont simultanément présents dans l'écoulement. Dolejši [50] propose d'ailleurs une correction à cette procédure afin de simuler plus précisément des écoulements de couche limite ou de sillage supersoniques, tout en minimisant le nombre d'éléments du maillage requis. Cette correction consiste à utiliser simultanément deux variables pour évaluer l'erreur d'interpolation. Dans un premier temps, Dolejši [50] choisit la courbure du nombre de Mach au lieu de celle de la masse volumique comme première variable de référence (ce choix donnant des résultats similaires dans les zones de chocs mais s'avérant être plus pertinent pour la couche limite où la variation de la vitesse est beaucoup plus significative que celle de la masse volumique). La seconde variable est choisie, après optimisation empirique, comme une combinaison linéaire de la distance à la paroi et de l'inverse du nombre de Reynolds  $1/\sqrt{Re}$ , cette dernière grandeur étant représentative de l'évolution de la couche limite. Le choix de cette seconde variable est ensuite transposé au cas du sillage. Le principe de construction de la matrice d'erreur reste alors similaire au cas où une seule variable est prise en compte. Géométriquement, l'optimisation revient finalement à inscrire, au mieux, chaque triangle (dont les longueurs des arêtes sont évaluées à l'aide de la nouvelle métrique) simultanément dans deux ellipses au lieu d'une seule. Lorsque cette correction n'est pas appliquée, un déraffinement trop important peut notamment être observé près de la paroi, rendant imprécis les profils de vitesse observés dans la couche limite, à moins d'augmenter le nombre global d'éléments utilisés dans le domaine de calcul. Au vu des difficultés que représentent la détermination d'une seconde variable adéquate pour le cas des jets supersoniques et l'implantation des modifications nécessaires dans les programmes de calculs disponibles, nous avons choisi de n'appliquer que l'algorithme de base et de pallier



ses limitations, liées à son application pour les écoulements visqueux ou turbulents, en augmentant suffisamment le niveau global de raffinement. Bien que les maillages générés contiennent un nombre d'éléments plus important, nous espérons de la sorte accéder à un niveau de précision suffisant, en conservant le choix de la masse volumique comme unique variable de référence pour la réadaptation. Le premier objectif de cette partie de l'étude numérique, sur le cas du jet parfaitement détendu, est ainsi de vérifier la pertinence de l'utilisation de l'algorithme originel de Dolejši [48] pour prévoir numériquement des zones de cisaillement supersoniques.

Par ailleurs, la grande intensité des ondes de détente ou de choc mise en jeu dans le cas des écoulements fortement sous-détendus nous conduit à privilégier l'utilisation du solveur de Roe, une limitation de pente de type "minmod" et la prise en compte d'une correction entropique. Le schéma numérique qui en résulte est ainsi très dissipatif et peut fortement dégrader la précision de la simulation dans les zones de cisaillement. Aussi, le second objectif de ce chapitre est de vérifier que l'utilisation de ce schéma numérique fortement dissipatif reste compatible avec l'obtention d'un niveau de précision satisfaisant dans les zones de cisaillement pur.

Rappelons également que, dans le cas du percement d'une chambre de combustion, il est impossible de se donner des conditions physiques, et surtout géométriques, qui soient parfaitement représentatives des conditions réelles qui prévalent au niveau de la section de l'orifice. Toutes nos simulations sont donc réalisées en négligeant tous les effets de bord et en supposant que l'axisymétrie est parfaitement respectée, que les parois utilisées sont infiniment minces et que les couches limites sont absolument négligeables. L'ensemble de ces conditions de bord déterminent pourtant le détail de la structure des jets. Nous cherchons donc ici à vérifier que ce procédé réducteur nous permet malgré tout de prévoir leur structure globale.

Finalement, la plupart des modèles que nous avons présentés au chapitre 4, pour représenter les effets de compressibilité sur la turbulence, n'ont pas spécifiquement été développés et calés pour la classe d'écoulements qui nous intéresse principalement. Aussi est-il nécessaire de vérifier pas à pas la pertinence de leur utilisation. L'étude menée ici sur le jet parfaitement détendu nous permet de tester les avantages et limitations de l'ensemble de ces modèles afin de n'appliquer par la suite, dans le cas du jet sous-détendu, que ceux qui nous semblent les plus appropriés.

Le cas de référence retenu pour mener cette étude est celui d'un jet d'air supersonique à nombre de Mach  $M_e = 2$  (cette valeur est proche de celle du nombre de Mach moyen que nous rencontrons au sein de la couche de cisaillement externe des jets sous-détendus dont nous présentons l'étude par la suite) issu d'une buse convergente/divergente profilée, étudié expérimentalement par Seiner et al. [85]. Les conditions limites utilisées pour l'ensemble des cas de simulation de ce jet sont données dans le tableau 11. Afin de réutiliser le même maillage initial pour simuler les jets fortement sous-détendus (voir chapitre 12), nous avons choisi de ne pas respecter, pour ce cas, le diamètre de la section de sortie, que nous fixons à  $D_e = 0,0089\text{m}$  au lieu de  $D_e = 0,04989\text{m}$ . Même si le nombre de Reynolds est suffisamment important pour que le développement de la turbulence reste de nature similaire entre ces deux cas, on gardera à l'esprit que les nombres de Reynolds correspondant  $Re = u_{xe}D_e/\nu_e$  diffèrent d'un facteur 5,6 environ. Ce jet a déjà été étudié d'un point de vue numérique pour des problèmes d'aéroacoustique par Bailly et al. [28], qui ont également utilisé un modèle  $k - \epsilon$ . Mentionnons également l'étude de Rona et Zhang [5] qui, à l'aide d'un modèle  $k - \omega$ , ont étudié un jet supersonique à même nombre de Mach dont les caractéristiques sont proches de celles du jet de Seiner. Dans ces deux études, le profil de vitesse axiale est relativement bien reproduit. Malheureusement, le détail de la prescription des conditions limites n'est pas donné. Nous cherchons, à la fin de ce chapitre, à vérifier un peu plus en détail la structure du jet simulé. Une simulation du jet étudié par Kerhervé [92] est également rapidement évoquée afin de vérifier qualitativement la répartition et le niveau des contraintes turbulentes prévues numériquement via le modèle qui est finalement retenu.

Jet étudié	Conditions dans la section de l'ajutage	Conditions dans la section d'entrée du co-écoulement	Conditions à la sortie du domaine de calcul
Seiner et al. [85]	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>D_e = 0,0089</math> m</li> <li>- <math>p_e = 101325</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xe} = 692</math> m/s</li> <li>- <math>v_{re} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_e = 298</math> K</li> <li>- <math>M_e = 2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>p_a = 101325</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xa} = 17,3</math> m/s</li> <li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_a = 298</math> K</li> <li>- <math>M_a = 0,05</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>p_a = 101325</math> Pa</li> <li>- <math>T_a = 298</math> K</li> <li>- <math>v_{xa} = 17,3</math> m/s</li> <li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li> </ul>
Kerhervé [92]	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>D_e = 0,052</math> m</li> <li>- <math>p_e = 100000</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xe} = 379</math> m/s</li> <li>- <math>v_{re} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_e = 280</math> K</li> <li>- <math>M_e = 1</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>p_a = 100000</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xa} = 47</math> m/s</li> <li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_a = 2</math> K</li> <li>- <math>M_a = 0,14</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>p_a = 100000</math> Pa</li> <li>- <math>T_a = 280</math> K</li> <li>- <math>v_{xa} = 47</math> m/s</li> <li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li> </ul>

TAB. 10.1 – Conditions limites utilisées pour la simulation du jet parfaitement détendu de Seiner et al. [85] et Kerhervé [92].

Pour l'ensemble des résultats de simulation présentés dans ce chapitre, l'intégration numérique au premier ordre en temps est réalisée en utilisant les outils numériques suivants :

- Le maillage initial MI2 (voir page 166),
- Le solveur de Roe,
- La limitation de pente de type "minmod",
- Un facteur de correction entropique fixé à  $0,05^1$ ,
- Un nombre  $CFL = 0,8$ .

Avant de présenter l'étude de sensibilité au maillage et aux modèles de turbulence, commençons par rappeler un défaut caractéristique important que nous rencontrons au cours de nos simulations de jets supersoniques, et donc en particulier sur les solutions qui sont présentées dans ce chapitre. La non-prise en compte de la couche limite et la prescription d'une condition de glissement sur les parois nous amènent, en faisant le bilan de flux sur un nombre d'éléments insuffisant, à générer une solution incorrecte à l'angle formé par le bord de l'orifice (voir figure 9.6 au chapitre 9). Il s'agit de déterminer en ce point, via l'algorithme de résolution, une solution qui autorise une déflexion exagérée des lignes de courant à vitesse supersonique. La solution présente alors un niveau de pression anormalement bas, qui, même s'il reste localisé en un point, est à la source d'un faisceau d'onde de compression parasite. Ce défaut est finalement comparable à celui que l'on peut rencontrer dans un certain nombre d'expériences sur des jets supersoniques pour lesquels il n'est pas possible d'ajuster les niveaux de pression avec une précision suffisante pour éviter l'apparition de chocs caractéristiques d'un jet très faiblement surdétendu (voir Kerhervé [92]). Le profil de vitesse axiale présente alors une évolution irrégulière près de la section de l'orifice, ce qui interdit toute comparaison rigoureuse avec les données expérimentales dans cette zone. Cet effet reste cependant minime. On peut noter une décroissance puis une augmentation de vitesse sur l'axe qui reste de l'ordre de 0,5% du niveau de vitesse prescrit dans la section de l'ajutage. Cependant, on gardera à l'esprit que le développement de la couche de cisaillement

<sup>1</sup>Il s'agit d'une valeur minimale, retenue par sécurité dans l'ensemble de toutes les simulations afin d'éviter *a priori* toute divergence du calcul.

reste suffisamment affecté (sur une distance de 1 à 2 fois le diamètre de l'ajutage) dans la zone potentielle et n'atteint l'axe qu'avec un certain retard, interdisant toute comparaison rigoureuse entre la longueur du cône potentiel déterminée expérimentalement et celle prévue numériquement. En revanche, dès lors que la couche de cisaillement atteint l'axe, l'inadaptation initiale du champ de pression initiale n'affecte plus l'écoulement, de sorte qu'il est possible de distinguer clairement l'influence des différentes corrections de compressibilité que nous avons retenues.

## 10.2 Etude de sensibilité au maillage

### 10.2.1 Conditions de l'étude

Le type d'interaction entre un jet supersonique et une paroi pouvant apparaître lors d'un impact dépend principalement de la croissance de la zone interne de la couche de cisaillement. Un bon indicateur de celle-ci est le profil de vitesse axiale. Il nous semble donc judicieux d'effectuer l'étude de sensibilité au maillage en observant principalement l'évolution du profil de vitesse axiale en fonction des divers maillages générés. Cette étude est réalisée en retenant les éléments de modélisation suivants :

- Les termes de pression-dilatation et de dissipation dilatationnelle sont modélisés selon l'approche de Sarkar et al. [142],
- L'approximation gradient de la réexpression du flux de masse turbulent est retenu pour exprimer le terme de production enthalpique dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, et l'équivalent de ce terme (interaction barocline) dans l'équation de transport du taux  $\epsilon$  de dissipation de l'énergie cinétique turbulente,
- Le coefficient de viscosité turbulente est réexprimé en ne prenant en compte que la partie solénoïdale de la dissipation,
- Les valeurs standards sont retenues pour les constantes du modèle  $k - \epsilon$ ,
- Le nombre de Prandtl turbulent est fixé à  $Pr_t = 0,7$ ,
- On prescrit une intensité de turbulence de 5% et une échelle de longueur turbulente à  $0,14D_e$  dans la section de l'ajutage.

Trois niveaux de raffinement global sont testés : niveau  $N1$  pour le niveau de base correspondant au nombre d'éléments le plus bas et niveau  $N2$  et  $N3$  respectivement (on double et on triple respectivement le nombre idéal d'éléments prescrit) pour les deux autres cas. Enfin, pour chaque niveau de raffinement, cinq étapes de calcul sont effectuées en réadaptant successivement les maillages (cycle 1 à 5). Pour le premier cycle de calcul, des essais effectués au préalable sur cette configuration d'écoulement et avec cette extension du maillage MI2 ont permis de vérifier qu'il suffit de réaliser la simulation jusqu'à ce qu'un temps physique environ égal à 0,003 s soit atteint, afin que les champs des variables physiques deviennent stationnaires. La variation en chaque point devient typiquement inférieure à 1% au delà de 0,001 s. Ceci correspond à une chute du résidu  $\mathcal{R}(\rho)^2$  de la masse volumique de trois ordres de grandeurs environ au cours de ce premier cycle de la simulation. La convergence de la solution est naturellement de plus en plus rapide pour les cycles suivants. Comme le montre l'évolution temporelle des profils des différentes variables calculées présentées sur la figure 10.2, les variables qui requièrent le temps le plus long pour converger sont en fait la masse volumique dans la zone externe de la couche de cisaillement et la vitesse dans le co-écoulement. La forte diffusion numérique liée à l'inadaptation du maillage initial induit en effet une large surestimation du niveau d'entraînement de l'air du

---

<sup>2</sup>On rappelle que l'indicateur de l'évolution résiduelle que nous utilisons est défini selon  $\mathcal{R}(\rho) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_C} |\rho_i^{n+1} - \rho_i^n|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_C} |\rho_i^1 - \rho_i^0|^2}}$  où  $\rho_i^n$  est la solution au noeud  $i$  à l'étape de temps  $n$ .

co-écoulement et induit, au cours du premier cycle, une légère dérive des variables aux frontières du domaine. Un temps relativement long est alors nécessaire pour que la masse volumique et la vitesse dans la zone d'entraînement puissent se stabiliser au cours du second cycle (après la première réadaptation du maillage). En revanche, on peut observer que la convergence des variables de l'écoulement dans la zone de cisaillement supersonique (ou les niveaux de courbure de la masse volumique sont les plus importants) est beaucoup plus rapide, de sorte que l'on pourrait légitimement ne pas attendre la convergence rigoureuse de toutes les variables sur tout le domaine avant de procéder à une réadaptation du maillage. Néanmoins, nous choisissons de laisser systématiquement la simulation se dérouler jusqu'à un temps physique de 0,003 s pour chaque cycle et pour chaque cas. Ce temps nous permet typiquement d'atteindre une chute du résidu sur la masse volumique de deux à trois ordres de grandeurs au cours du premier cycle, et trois à quatre pour les suivants, telle qu'on peut le remarquer sur la figure 10.1.

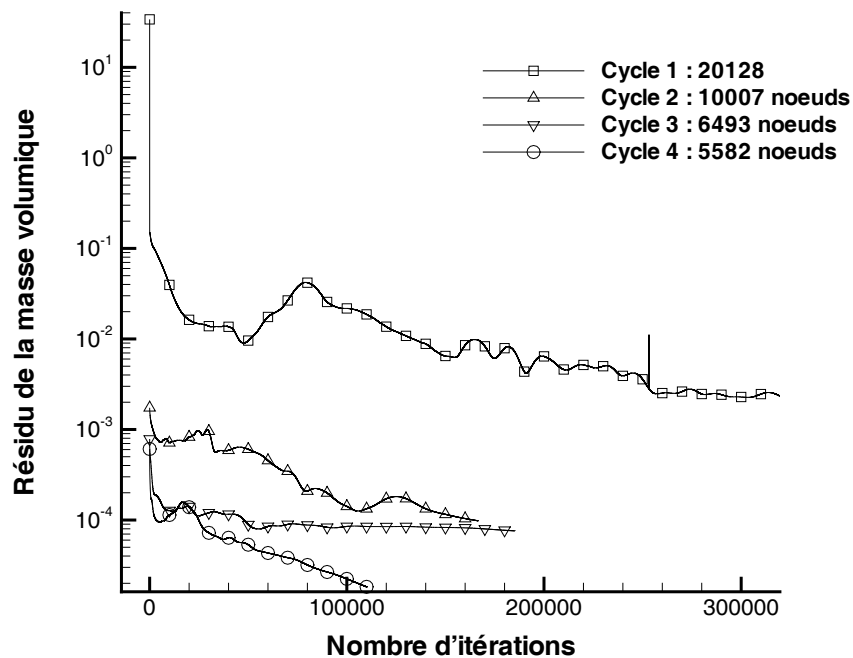


FIG. 10.1 – Évolution du résidu de la masse volumique  $\mathcal{R}(\rho)$  en fonction du nombre d'itérations pour le niveau de raffinement  $N2$ .

### 10.2.2 Résultats

L'évolution typique de la structure du maillage est illustrée sur la figure 10.3 qui correspond ici au maillage initial et aux maillages réadaptés *a posteriori* sur les solutions obtenues à chaque cycle précédent pour le niveau moyen  $N2$  du nombre d'éléments prescrit. Le nombre de noeuds indiqué correspond à la zone centrale du domaine. L'effet de déaffinement progressif est clairement visible à l'oeil, notamment dans le co-écoulement et à la périphérie de la zone supersonique restant localisée à une distance d'environ  $0,5D_e$ . Bien qu'une zone tampon soit utilisée, la zone fortement rotationnelle convectée à la périphérie du jet et partiellement réfléchi sur la frontière de sortie pendant la phase initiale du calcul est difficile à évacuer. Aussi peut-on remarquer

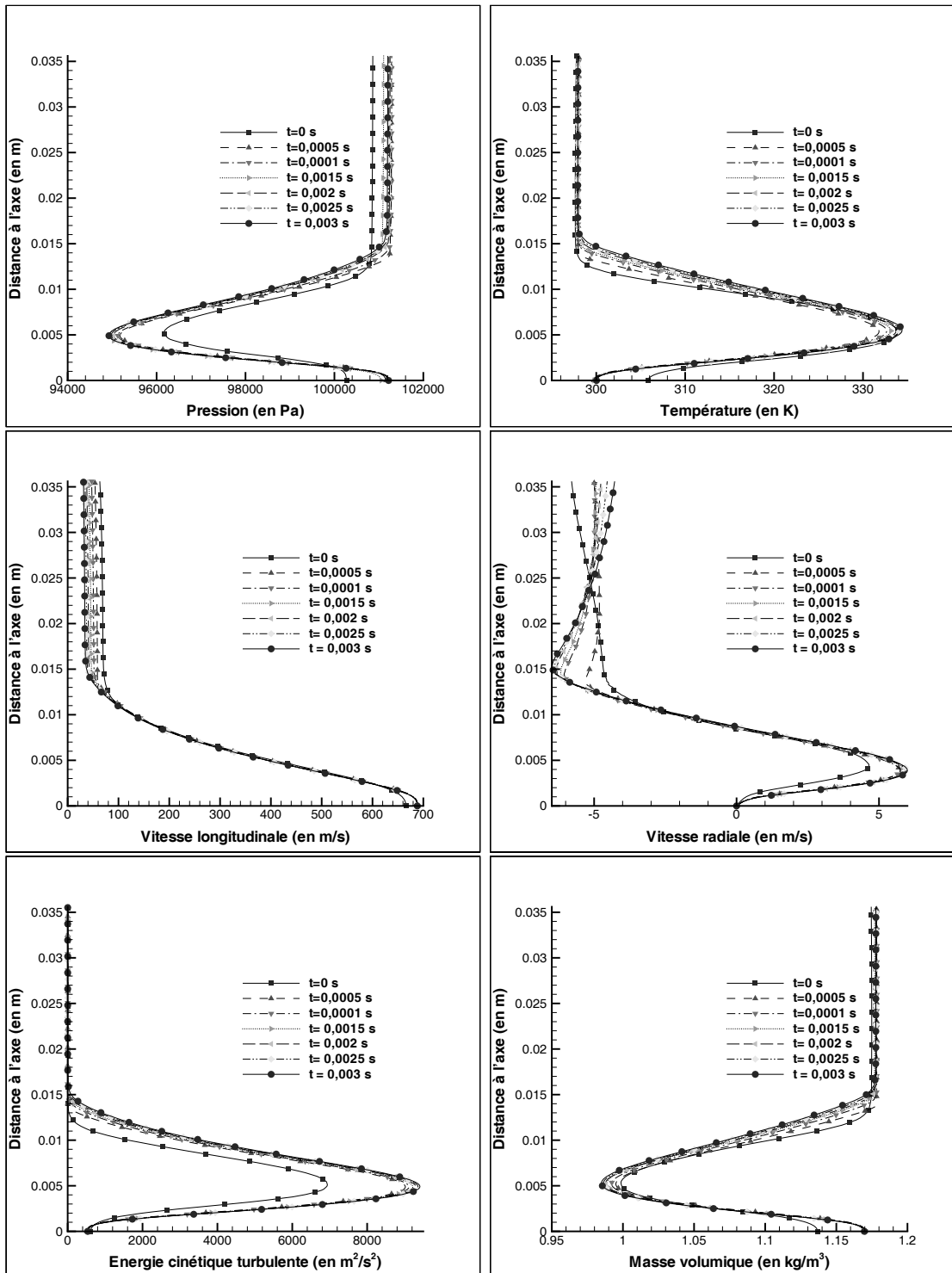


FIG. 10.2 – Évolution des profils radiaux des variables physiques, extraits en  $X/D_e = 10$  au cours du second cycle de la simulation pour un maillage de 14573 noeuds dans la zone centrale.

la zone de fort raffinement dans le co-écoulement qui disparaît progressivement. On remarque également le fort étirement des mailles le long de lignes faisant un angle d'environ  $7^\circ$  par rapport à l'axe. Cette zone où la courbure de la masse volumique est élevée correspond sensiblement à la zone définie entre la ligne formée par l'ensemble des points d'inflexion des lignes de courant dans le co-écoulement (voir figure 10.36) et la ligne formée par les points où la vitesse radiale s'annule.

Les profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées à chaque étape de la simulation sont reportés sur la figure 10.4 pour le niveau de raffinement  $N1$  et sur la figure 10.5 pour le niveau de raffinement  $N3$ . Les profils pour le niveau de raffinement  $N2$ , non représentés, présentent les mêmes tendances que celles observées pour le niveau de raffinement  $N3$ . L'allure globale des profils de vitesse axiale est très semblable pour l'ensemble de tous les niveaux de raffinement testés et toutes les étapes des simulations, sauf la première. Ceci illustre l'efficacité de la procédure de réadaptation. Bien que les maillages pour les niveaux  $N2$  et  $N3$  continuent d'évoluer sensiblement au delà du cinquième cycle (telle que l'évolution du nombre de noeuds dans le maillage central peut l'indiquer), la vitesse sur l'axe n'évolue plus dès la quatrième étape, tandis qu'une différence maximale inférieure à 0,5% de la vitesse d'éjection  $v_{xe}$  est observée en chaque point de l'axe entre les profils obtenus à la troisième étape et ceux obtenus aux étapes suivantes. Ce résultat nous indique qu'il est donc possible, pour ces deux niveaux de raffinement  $N2$  et  $N3$ , de n'effectuer que trois étapes de calcul pour obtenir une solution stationnaire qui soit quasiment indépendante du nombre de cycles de réadaptation qui pourrait être appliqués ultérieurement. Pour l'ensemble des simulations réalisées avec le niveau de raffinement  $N1$ , on note en revanche que cette convergence du profil de vitesse n'est pas atteinte. Dans ce cas, l'application de la procédure de réadaptation se traduit par la suppression d'un nombre trop important d'éléments pour qu'une solution puisse être correctement capturée. Pour le niveau  $N3$  de raffinement, le profil correspondant à la dernière étape de la simulation présente, pour le jeu de conditions limites ici retenu, un meilleur accord avec le profil expérimental que celui obtenu dans tous les autres cas. Ceci ne fait cependant que traduire la compensation de l'imprécision de la modélisation ici utilisée par une diffusion numérique excessive. La comparaison des profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées au cours de la troisième étape des simulations pour les niveaux  $N2$  et  $N3$  et présentée sur la figure 10.6 permet de finalement conclure que le niveau de raffinement  $N2$  semble suffisant pour que la structure moyenne des jets que nous simulons ne soit plus fondamentalement modifiée en augmentant le niveau de raffinement ou le nombre d'étapes de calcul. On vérifie finalement que ce critère, prédéfini à partir de la seule observation du profil de vitesse axiale, est vérifié pour toutes les autres variables. La figure 10.7 montre par exemple que les profils radiaux de la vitesse longitudinale et de la contrainte de cisaillement adimensionnée par la vitesse à l'ajutage sont indiscernables lorsqu'ils sont extraits des solutions obtenues après trois étapes de simulation, avec des niveaux de raffinement  $N2$  ou  $N3$ .

Même si le choix d'autres modèles pour les différents termes des équations de transport de  $k$  et de  $\epsilon$  pourrait conduire à des zones de cisaillement présentant une extension sensiblement différente, l'utilisation du second niveau de raffinement  $N2$  testé et le recours à trois cycles de calcul (donc deux applications de la procédure de réadaptation seulement) nous semblent suffisant pour réaliser désormais, sur le cas du jet de Seiner et al. [85] une étude de sensibilité de la structure du jet au modèle de turbulence ou à ses paramètres. Ces paramètres sont donc utilisés pour l'ensemble des calculs dont les résultats sont présentés dans les paragraphes suivants.

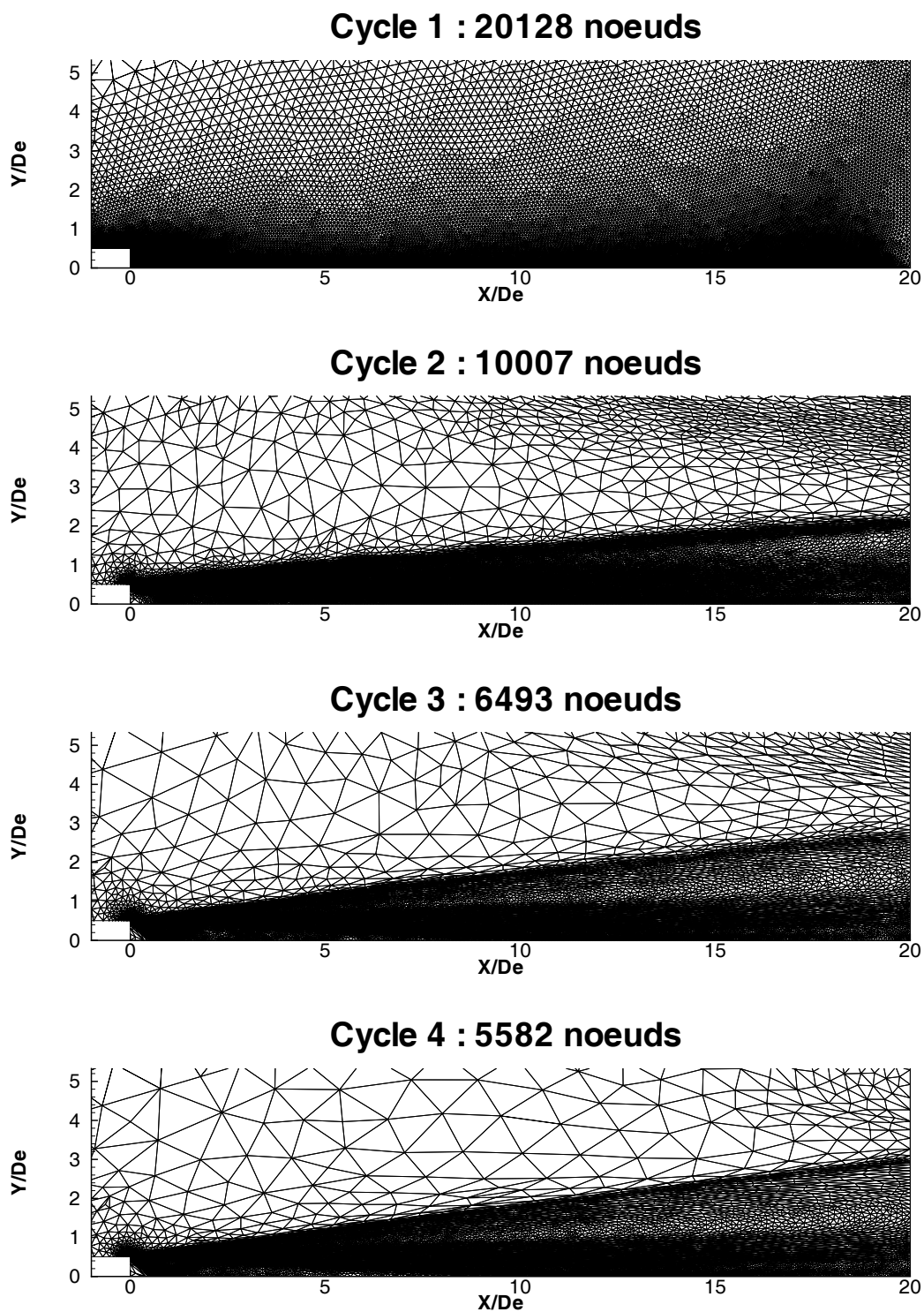


FIG. 10.3 – Illustration de l'évolution des maillages obtenus pour la simulation du jet parfaitement détendu de Seiner et al. [85] à nombre de Mach  $M_e = 3$  pour le niveau de raffinement moyen  $N2$ .

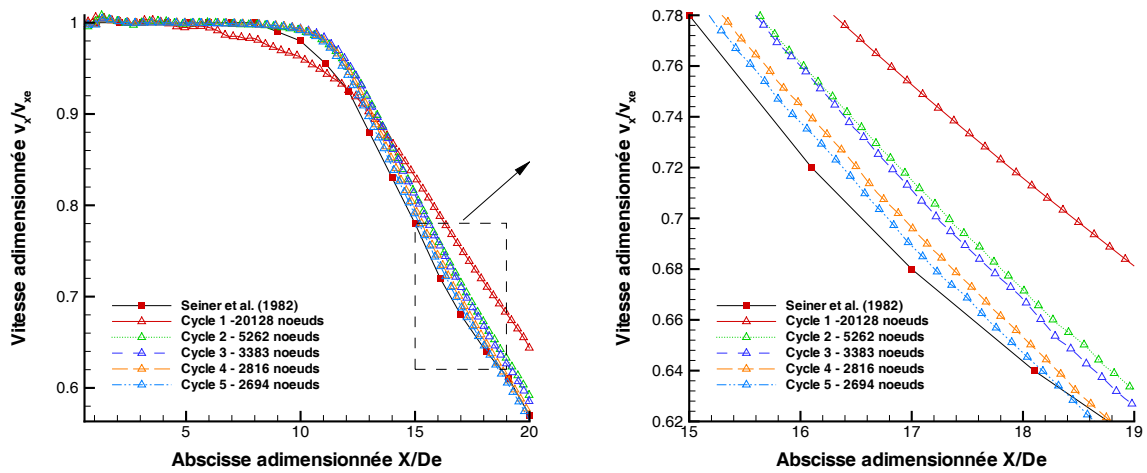


FIG. 10.4 – Profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées à chaque étape de la simulation pour le niveau de raffinement  $N1$ .

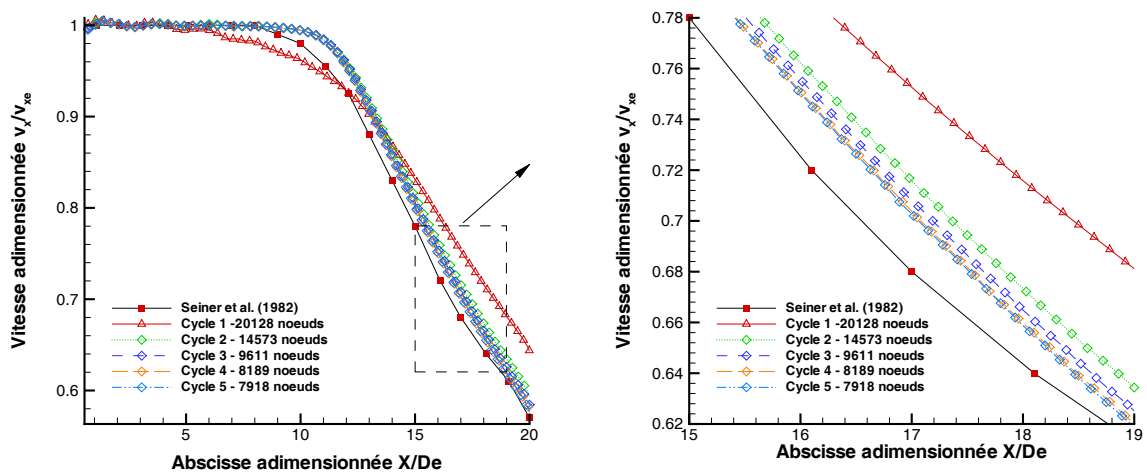


FIG. 10.5 – Profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées à chaque étape de la simulation pour le niveau de raffinement  $N3$ .



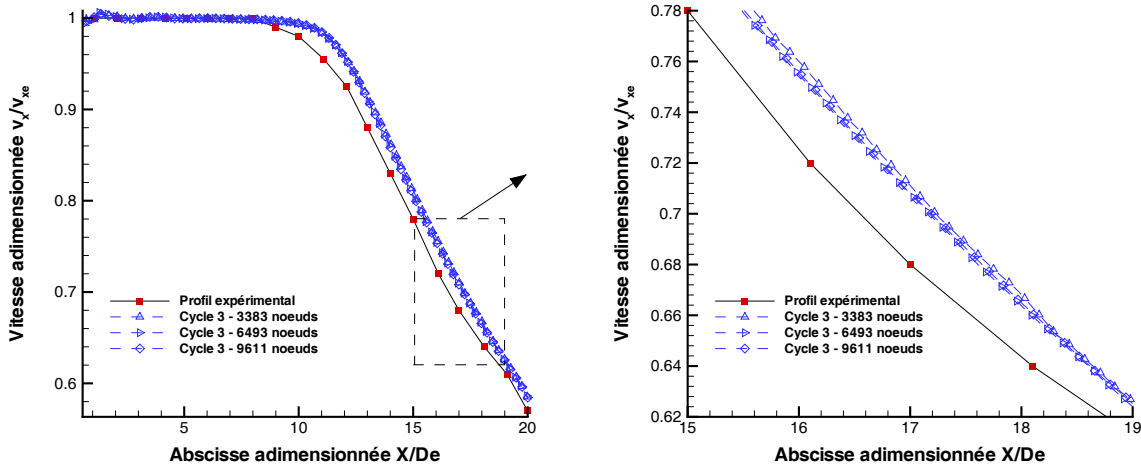


FIG. 10.6 – Profils de vitesse axiale extraits des solutions convergées à la troisième étape des simulations pour les niveaux de raffinement  $N1$  (3383 noeuds),  $N2$  (6493 noeuds) et  $N3$  (9611 noeuds).

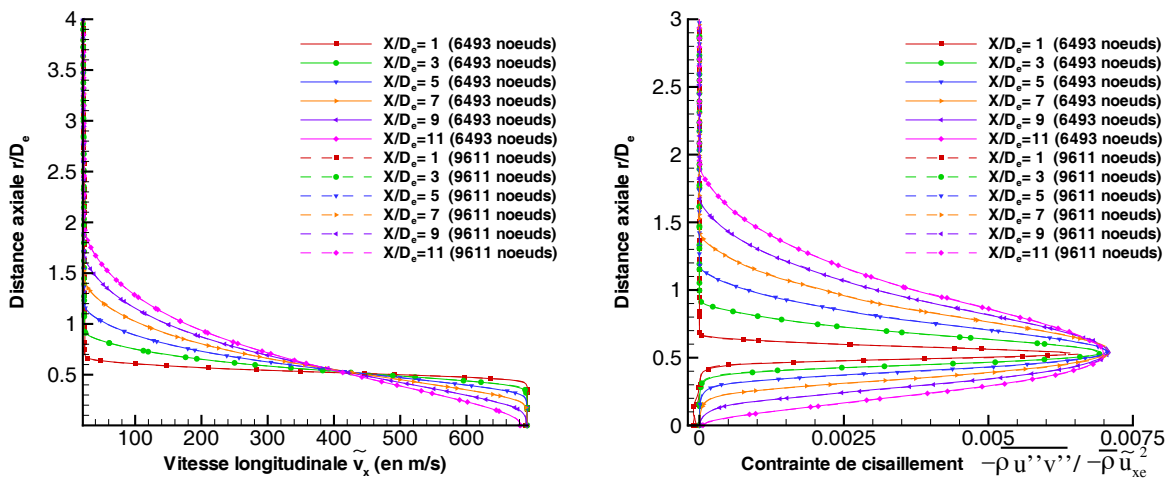


FIG. 10.7 – Comparaison des solutions convergées obtenues à la troisième étape de la simulation pour les niveaux de raffinement  $N2$  (6493 noeuds) et  $N3$  (9611 noeuds) : profils radiaux de vitesse longitudinale et de contrainte de cisaillement.

### 10.3 Prise en compte de la correction de Pope [131] pour l'axisymétrie

Pour cette section, le modèle de référence que nous retenons inclut le modèle de Sarkar et al. [142] pour les termes de pression-dilatation et de dissipation compressible, le modèle de Jones [86] pour le terme de production enthalpique, une réexpression du coefficient de viscosité turbulente en ne prenant en compte que la dissipation solénoïdale et en fixant le nombre de Prandtl turbulent à 0,7. Evoquons tout d'abord l'effet de la correction axisymétrique de Pope. Partant du constat que le modèle  $k-\epsilon$ , calé à l'origine pour des écoulements bidimensionnels, avait tendance à surestimer largement (40%) le taux d'évasement des jets simulés à l'aide du modèle  $k-\epsilon$ , Pope [131] introduit l'idée de prendre en considération la réduction de la croissance de la taille des tourbillons et l'accélération de leur destruction liées aux effets axisymétriques. Il propose d'ajouter un terme de production de dissipation à l'équation de transport de  $\epsilon$ , proportionnel à l'étirement tourbillonnaire, correction qu'il valide sur le cas d'un jet subsonique. Quoique séduisante d'un point de vue physique, cette correction est rapidement mise en défaut par la simple observation du profil de vitesse axiale présenté sur la figure 10.8. Typiquement, on peut relever, dans la zone proche de l'ajutage, une diminution des niveaux du taux de dissipation de l'ordre de 4 à 5%. Cette diminution est suffisante pour induire une chute, dans l'ensemble du jet en aval, de 20 à 25% environ des niveaux de  $k$  et 30 à 40% des niveaux du coefficient de viscosité turbulente obtenus avec le modèle de référence. Nous voyons ainsi que la prise en compte de cette correction induit un retard exagéré du développement du jet supersonique simulé. Nous ne retiendrons donc pas la correction de Pope pour l'ensemble des simulations qui suivent.

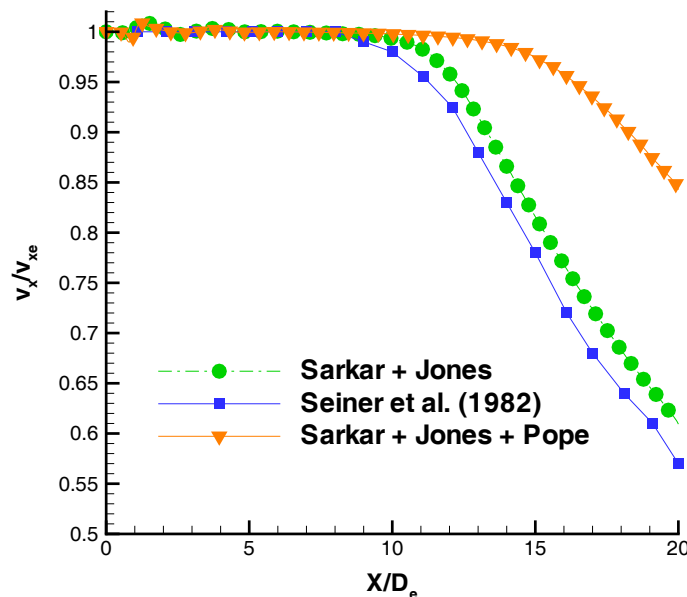


FIG. 10.8 – Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus avec ou sans la correction de Pope.

## 10.4 Sensibilité au nombre de Prandtl turbulent

On peut noter dans la littérature une large variabilité quant à la valeur à retenir pour prescrire le nombre de Prandtl turbulent. Alors qu'une valeur légèrement inférieure à 0,9 serait relativement bien adaptée pour la simulation de couches limites en régime subsonique, une valeur de 0,7 est souvent prescrite pour la simulation d'écoulements supersoniques, même si, d'après Wilcox [172], une valeur de 0,5 serait plus adaptée dans les cas d'écoulements cisailés libres. L'ensemble des valeurs préconisées dans la littérature pour le nombre de Prandtl turbulent ne correspondant pas de toute façon avec la prise en compte des termes que nous retenons finalement dans les équations de transport de  $k$  et  $\epsilon$ , il nous a semblé intéressant de vérifier la sensibilité de la solution à la valeur prescrite pour cette constante. Cette étude de sensibilité est menée en retenant les termes de pression-dilatation et dissipation compressible de Sarkar et al., le terme de production enthalpique selon l'approximation gradient de type Jones et en réexprimant le coefficient de viscosité turbulente à partir de la dissipation solénoïdale seulement. Intuitivement, les mécanismes convectifs étant prépondérants dans un tel écoulement, on s'attend à ce que cet effet reste mineur. A partir de la figure 10.9 qui présente le profil de vitesse axiale obtenu pour différentes valeurs du nombre de Prandtl turbulent variant entre 0,5 et 0,9, on peut effectivement constater que la croissance dynamique du jet supersonique près de l'axe reste peu affectée par le niveau prescrit pour le flux de chaleur turbulent. L'observation des champs de température (voir figure 10.10) permet de voir en revanche que la croissance thermique du jet prévue est sensiblement modifiée lorsqu'on utilise une telle modélisation. On constate par exemple que l'excès de chaleur produite dans la zone de fort cisaillement devient plus important d'environ 20% au centre de la couche de cisaillement lorsque la valeur de  $Pr_t$  passe de 0,5 à 0,9 (alors que les valeurs des contraintes restent semblables). Aussi des données expérimentales sur le champ de température seraient utiles pour évaluer plus précisément cet effet, et ce d'autant plus si l'on souhaite étudier des jets de gaz brûlés. A défaut d'en disposer, nous nous contentons par la suite de prescrire la valeur moyenne de 0,7 pour tous les autres cas de simulation. Remarquons que cet excès de chaleur observé à nombre de Prandtl égal à 0,9 par rapport à 0,5, restera négligeable par rapport à la chaleur produite par conversion d'énergie cinétique induite par brusque recompression à travers les chocs. Même en aval de la structure de choc apparaissant devant une paroi impactée par un jet chaud, la valeur prescrite pour cette constante aura probablement une influence négligeable sur les niveaux et l'allure de la distribution de température à la paroi, qui resteront avant tout pilotés par des effets purement dynamiques en amont. Pour la suite de l'étude, on s'intéresse avant tout au champ dynamique du jet. La valeur moyenne testée, égale à 0,7 sera utilisée dans tous les autres cas de simulation.

## 10.5 Modélisation des termes de pression-dilatation et de dissipation dilatationnelle : Sarkar et al. vs Zeman

En fixant donc le nombre de Prandtl turbulent à 0,7, en conservant une intensité de turbulence (relativement élevée) à 5% et une échelle de longueur de turbulence égale à  $0,14D_e$ , on se propose de comparer l'influence des termes de pression-dilatation et de dissipation compressible sur la vitesse axiale. Des simulations utilisant les modélisations de Sarkar et al. [142][143] et Zeman [182] pour ces termes sont extraits les profils représentés sur la figure 10.11. Pour les conditions de ce test, on constate que la longueur du cône potentiel  $L_p$  (évaluée à partir du point de l'axe où la vitesse atteint 99% de la valeur prescrite à la sortie de la buse  $v_{xe}$ ) est mieux capturée par le modèle  $k - \epsilon$  dans sa version standard avec une valeur  $L_p = 8,4D_e$  à comparer avec la valeur expérimentale de  $L_p = 9D_e$  environ. En revanche, l'excès (bien connu) de diffusion

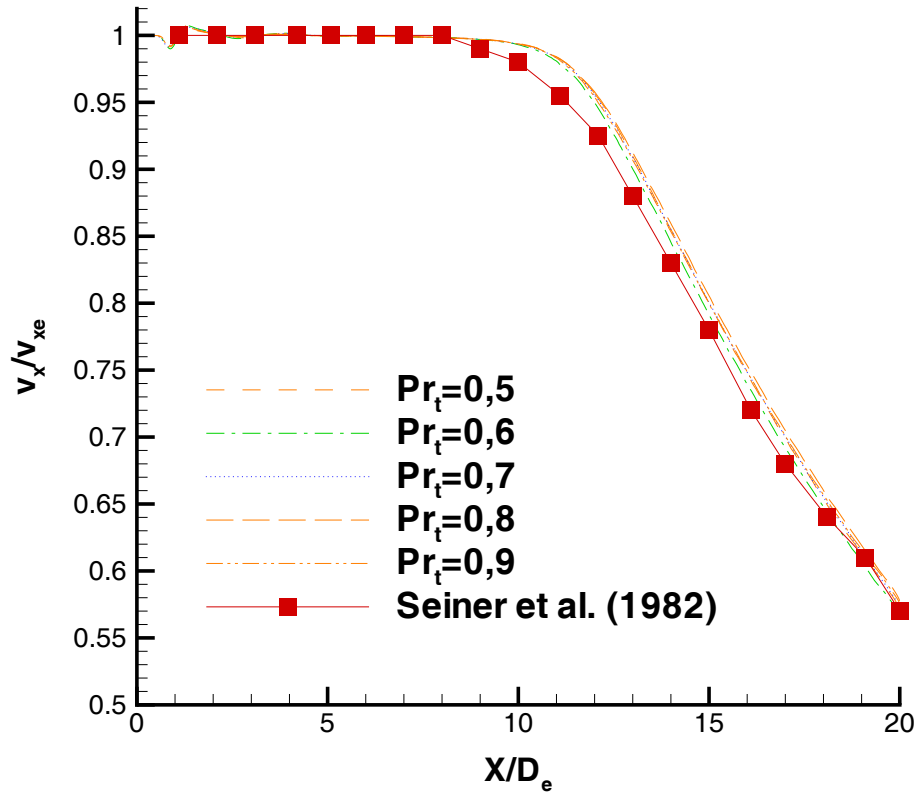


FIG. 10.9 – Comparaison des profils de vitesse axiale pour différentes valeurs du nombre de Prandtl turbulent.

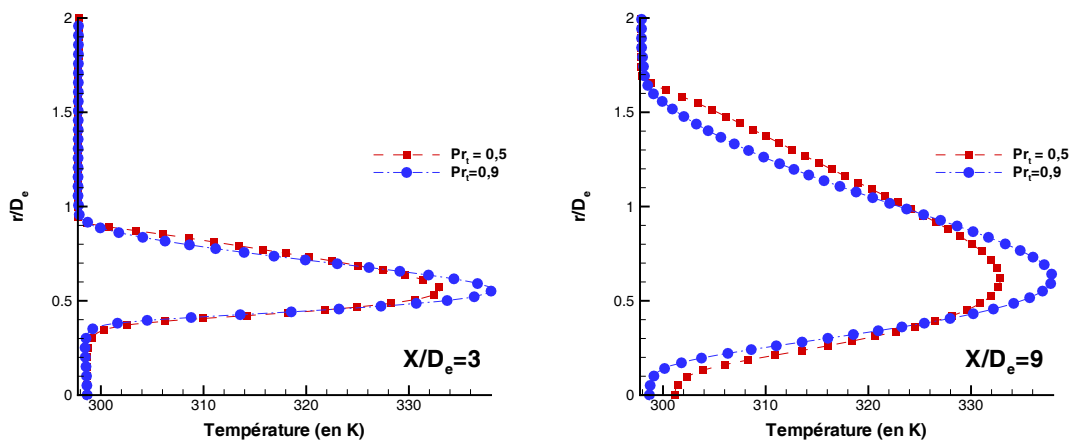


FIG. 10.10 – Comparaison des profils radiaux de température en  $X/D_e = 3$  et  $X/D_e = 9$  obtenus avec  $Pr_t = 0,5$  et  $Pr_t = 0,9$ .

turbulente qu'il induit dans cette configuration d'écoulement, reste nettement visible dans la zone de transition, où la vitesse axiale présente un taux de décroissance trop important.

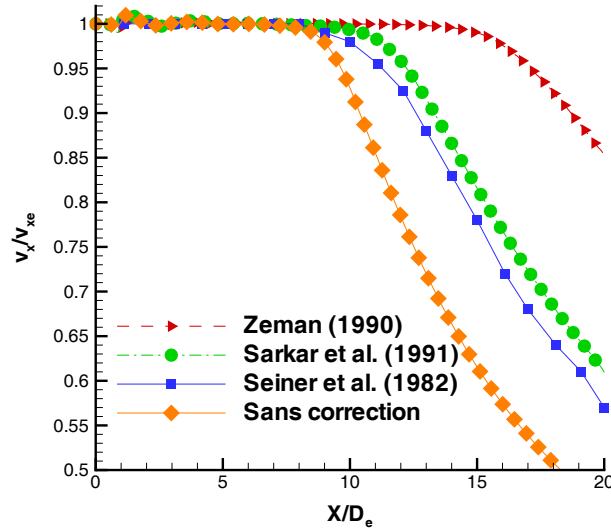


FIG. 10.11 – Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus en fonction de la modélisation retenue pour les termes de pression-dilatation et de dissipation compressible.

Bien que la modélisation de Sarkar et al., pour ce jeu de conditions limites, conduise à surestimer légèrement la longueur du cône potentielle avec  $L_p = 10,4D_e$ , le taux de décroissance de la vitesse est relativement bien reproduit dans la zone de transition. En revanche, le modèle de Zeman conduit à largement exagérer l'effet dissipatif additionnel sur  $k$ , ce qui conduit à un retard beaucoup trop important du développement de la couche de cisaillement (avec  $L_p = 15D_e$  dans ce cas). Précisons qu'il n'a pas été possible de déterminer précisément comment la valeur préconisée pour la constante du terme de pression-dilatation exprimée avec l'approche de Zeman (fixée à 0,004) avait été calée pour être retenue dans le code N3SNATUR utilisé<sup>3</sup>. Par ailleurs, les valeurs utilisées pour exprimer la dissipation compressible ne sont originellement adaptées que pour le cas d'une couche plane bidimensionnelle. Une étude paramétrique plus complète nous permettrait probablement de redéterminer des valeurs plus appropriées dans le cadre des écoulements de jet axisymétrique. En revanche, les valeurs des constantes utilisées dans la modélisation de Sarkar et al. semblent présenter un cadre d'application plus général. Du moins ce modèle, associé à la méthode numérique utilisée, semble pouvoir nous amener à prévoir la croissance interne d'une couche de cisaillement supersonique annulaire avec une précision supérieure à celle obtenue avec l'approche (en l'état) de Zeman. Par conséquent, nous ne retenons, pour la suite de l'étude numérique, que la modélisation de Sarkar et al. pour les termes de pression-dilatation et de dissipation compressible. Observons un peu plus en détail l'effet de cette correction. Le mécanisme qui est mis en jeu, essentiellement dissipatif, s'interprète aisément d'un point de vue global. Les champs d'énergie cinétique, du coefficient de viscosité turbulente, de vitesse longitudinale et de pression statique, présentés sur la figure 10.12, permettent d'illustrer les différences fondamentales observable entre la structure du jet obtenue en utilisant le

<sup>3</sup>Remarquons que, pour utiliser le modèle de Zeman, seul modèle originellement disponible dans le code N3SNATUR, il a été nécessaire de corriger de grossières erreurs d'implantation dans la version 1.4.3.2.

modèle  $k - \epsilon$  standard (champ  $r/D_e > 0$ ) avec celle obtenue avec l'application de la correction de Sarkar et al. (champ  $r/D_e < 0$ ). On constate très nettement que le niveau maximum de  $k$  produit au centre de la couche de cisaillement (correspondant à la zone où les contraintes de cisaillement sont maximales), localisé en  $r/D_e = 0,5$  environ, est fortement diminué lorsque la correction est appliquée. D'après les profils présentés sur la figure 10.14, cette diminution de 7% environ en  $X/D_e = 1$  augmente très rapidement vers l'aval pour se stabiliser à 22% environ dès  $X/D_e = 5$ . En revanche, le taux de dissipation reste peu affecté (voir figure 10.13). Il en résulte une diminution moyenne du coefficient de viscosité turbulente de l'ordre de 40%. comme on peut le constater sur la figure 10.12. Il en découle naturellement une forte diminution du niveau des contraintes turbulentes et donc de l'importance du mécanisme diffusif. De l'évolution des profils de vitesse extraits de ces champs, on peut retenir synthétiquement que l'effet conjugué de la pression-dilatation et de la dissipation compressible se traduit dans notre cas par :

- Un allongement du cône potentiel de  $8,4D_e$  à  $10,4D_e$  soit +24%,
- Une diminution de l'épaisseur de la couche de cisaillement, que l'on peut caractériser par exemple par l'épaisseur à 10% <sup>4</sup>  $\delta_{0,1}$  dont le gradient longitudinal diminue de 16% en passant de 0,118 à 0,989 (voir figure 10.15),
- Une diminution de l'épanouissement du jet que l'on peut caractériser par exemple par l'angle  $\alpha_{(r0,5)}$  que fait avec l'axe la ligne joignant les points de la couche où la valeur de la vitesse atteint la moitié de la valeur trouvée sur l'axe, qui passe dans notre cas de  $1,01^\circ$  à  $0,88^\circ$  environ, soit une réduction de l'ordre de 13%.

Nous remarquons finalement que l'application de la correction de Sarkar induit une augmentation non-négligeable (de l'ordre de 2000 Pa) sur les niveaux de pression rencontrés dans la zone d'intense cisaillement, comme l'illustre la figure 10.12. La pression étant recalculée via l'équation d'état par soustraction de l'énergie cinétique et l'énergie cinétique turbulente à l'énergie totale, la forte production d'énergie cinétique au centre de la couche de cisaillement induit une chute du niveau de pression jusqu'à une valeur minimale de 92600 Pa environ en  $X/D_e \simeq 3,8$  et  $r/D_e \simeq 0,5$  lorsqu'aucune correction n'est appliquée, tandis que ce niveau minimal n'est que de 94750 Pa en ce même point lorsque la correction de Sarkar est utilisée. Naturellement, des données expérimentales seraient utiles pour vérifier l'ordre de grandeur des niveaux de pression effectivement atteints au sein de cette couche de cisaillement.

## 10.6 Expression de la viscosité turbulente

Comme nous le faisons remarquer dans la sous-section 4.4.4, l'extension du modèle  $k - \epsilon$  au régime compressible pose le délicat problème, pourtant rarement souligné, de la réexpression du coefficient de viscosité turbulente  $\mu_t$ . Certaines études récentes semblent indiquer que l'ordre de grandeur des termes correctifs que nous retenons n'est pas aussi important que ce que les modèles utilisés pourraient nous amener à penser. Les effets de compressibilité seraient liés à une modification dans la redistribution des contraintes plutôt qu'à l'émergence d'un phénomène, de nature dissipative, aussi important. Suivant l'approche diffusive retenue, même si la nature des termes correctifs n'est pas à remettre en question, le calage des constantes utilisées peut alors apparaître comme un moyen simple permettant de modifier légèrement, de façon finalement quelque peu artificielle, l'équilibre entre la production et la dissipation de l'énergie cinétique turbulente et de son taux de dissipation. Cet équilibre est ainsi indirectement ajusté par certains auteurs en multipliant l'expression de la viscosité turbulente par un facteur correctif. Une autre approche, même si elle ne peut que difficilement se justifier autrement que par la volonté de réaliser un tel

<sup>4</sup>On définit l'épaisseur à 10% par  $\delta_{0,1} = \frac{r(0,1) - r(0,9)}{D_e}$  où  $r(0,1)$  et  $r(0,9)$  sont respectivement les distances à l'axe où la vitesse atteint 10% et 90% de la vitesse maximale atteinte sur l'axe.

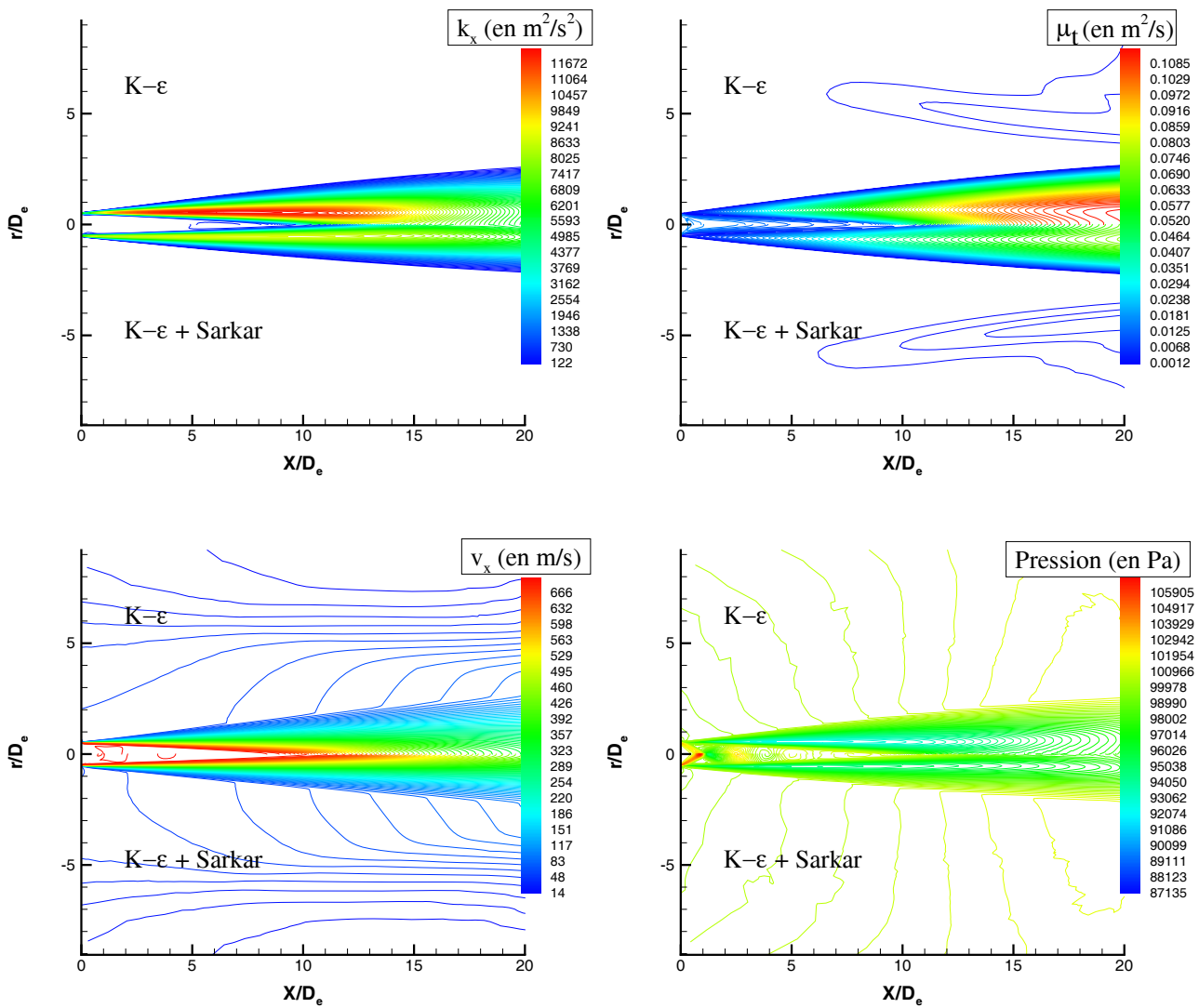


FIG. 10.12 – Comparaison des champs d'énergie cinétique turbulente, du coefficient de viscosité turbulente, de la vitesse longitudinale et de la pression obtenus avec (demi-plan inférieur) ou sans l'application de la correction de Sarkar et al. (demi-plan supérieur).

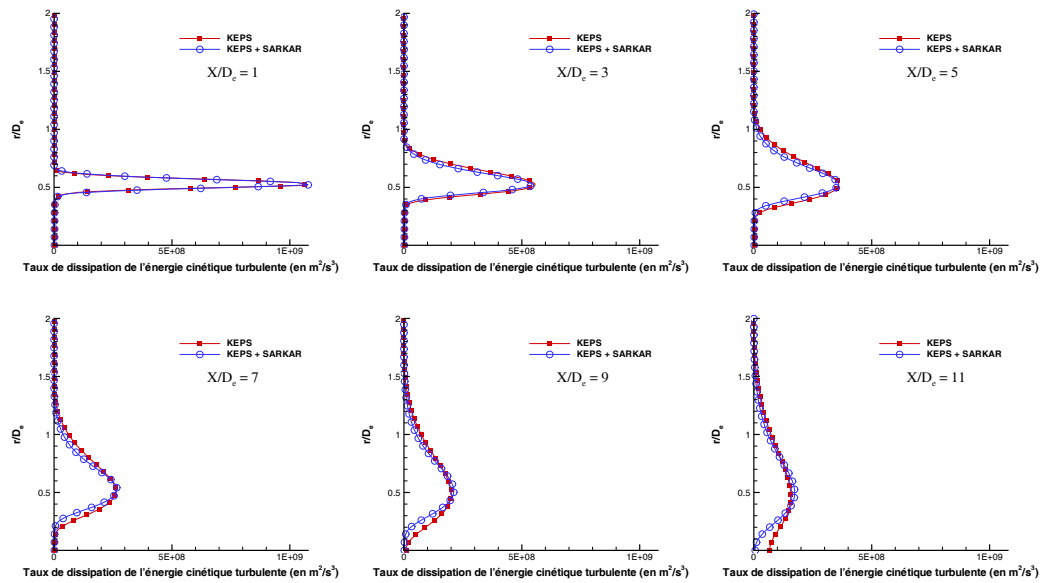


FIG. 10.13 – Comparaison des profils radiaux du taux de dissipation solénoïdale de l'énergie cinétique turbulente obtenus avec ou sans l'application de la correction de Sarkar et al..

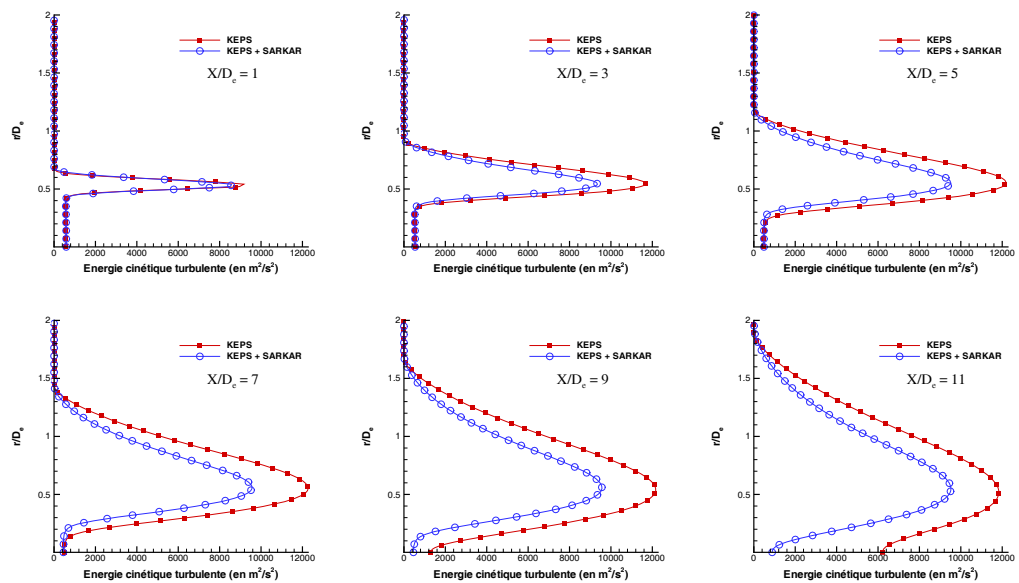


FIG. 10.14 – Comparaison des profils radiaux de l'énergie cinétique turbulente obtenus avec ou sans l'application de la correction de Sarkar et al..



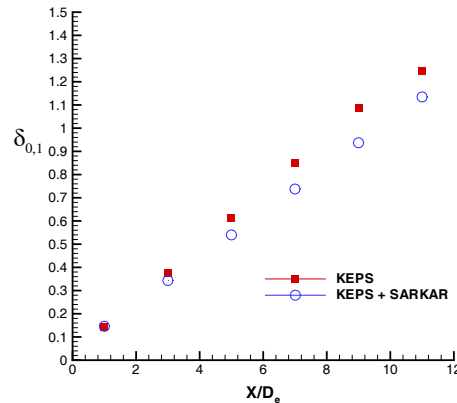


FIG. 10.15 – Comparaison des évolutions de l'épaisseur  $\delta_{0,1}$  prévue numériquement avec le modèle  $k - \epsilon$ , sans et avec la prise en compte de la correction de Sarkar et al.

ajustement, consiste à ne prendre en compte que le taux de dissipation solénoïdale, même si le coefficient de viscosité turbulente doit, en toute rigueur, être réexprimé en considérant le taux de dissipation totale. Face à la diversité des différentes approches dans la littérature (rarement justifiées), tout en continuant de suivre l'approche de Sarkar et al. pour exprimer la dissipation compressible, nous choisissons de tester deux cas limites correspondant, d'une part à la seule prise en compte du taux de dissipation solénoïdale pour réexprimer  $\mu_t$ , d'autre part à la prise en compte du taux de dissipation totale. Ceci équivaut finalement à considérer respectivement, d'une part que la constante  $C_\mu$  conserve sa valeur standard, d'autre part qu'elle peut varier de façon inversement proportionnelle à  $(1 + 0,5M_t^2)$  où  $M_t$  est le nombre de Mach turbulent. Le résultat des simulations réalisées est illustré par les figures 10.16 et 10.17. On constate que le développement de la partie interne de la couche de cisaillement simulée est trop fortement inhibé lorsque le taux de dissipation totale est pris en compte pour la réexpression de  $\mu_t$ . Typiquement, le nombre de Mach turbulent varie entre 0 et 0,35 à travers la couche de cisaillement, ce qui induit une augmentation du taux de dissipation totale allant jusque 6,5% environ. Cette augmentation est suffisante pour provoquer une diminution de l'ordre de 15% sur le niveau des contraintes de cisaillement par exemple et une diminution de 30% de la valeur du coefficient de viscosité turbulente. La croissance du jet est trop fortement limitée. La longueur du cône potentiel est surestimée de 40% ( $L_p = 12,5D_e$  à comparer avec la valeur expérimentale  $L_p = 9D_e$ ) tandis que le taux de décroissance de la vitesse axiale adimensionnée par la vitesse à l'ajutage est sous-estimé de 40% environ ( $-3,8 \cdot 10^{-2}$  au lieu de  $-5 \cdot 10^{-2}$  d'après le profil expérimental de vitesse axiale adimensionnée par la vitesse dans la section de l'ajutage). Dans le cas où seule la dissipation solénoïdale est prise en compte, la longueur du cône potentiel n'est surestimée que de 15% tandis que le taux de décroissance de la vitesse axiale n'est sous-estimé que de 6% environ. Par conséquent, l'utilisation du taux de dissipation totale pour réexprimer  $\mu_t$ , du moins dans le cadre de la simulation de jets supersoniques axisymétriques, avec les outils numériques que nous avons retenus, semble conduire à beaucoup trop limiter l'effet de la diffusion turbulente et ne sera pas retenu pour la suite des simulations. On se contentera par la suite, de réexprimer, certes de façon quelque peu artificielle, le coefficient de viscosité turbulente en ne prenant en compte que le taux de dissipation solénoïdale.

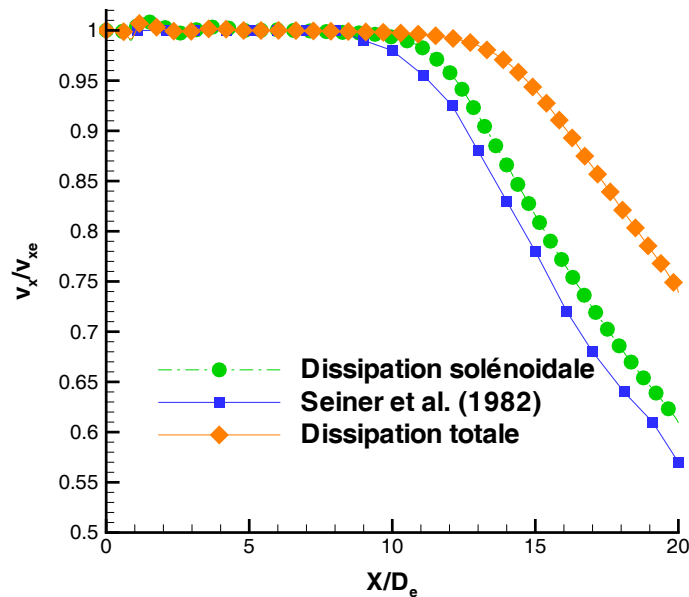


FIG. 10.16 – Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus en fonction de l'expression choisie pour le coefficient de viscosité turbulente.

## 10.7 Modélisation du terme de production enthalpique : Jones [86] vs Shyy et Krishnamurthy [152]

Nous concluons cette étude de sensibilité de la structure du jet parfaitement détendu aux modèles retenus, en observant l'effet du choix de la modélisation pour le terme de production enthalpique  $G$ . Ce terme est généralement négligé dans les jets isobares, en considérant que la contribution des gradients de pression à la production de  $k$  reste négligeable par rapport à la production par cisaillement. Dans le cas du jet parfaitement détendu, on dénote tout de même sur la figure 10.18 que l'effet de ce terme n'est plus tout à fait négligeable dès le début de la zone développée du jet. Avec les conditions limites ici utilisées (toujours  $I_t = 5\%$  et  $L_t = 0,14D_e$ ), nous pouvons dénoter un retard dans le développement du jet, que la production enthalpique soit prise en compte ou non, avec une longueur du cône potentiel du jet simulé qui reste inchangée. En revanche, la production négative de  $k$  apportée par le terme  $G$  permet de mieux prévoir le taux de décroissance dans la zone tourbillonnaire développée (au delà de  $X/D_e = 15$ ). Dans cette zone, l'erreur maximale, qui est de l'ordre  $0,044u_{x_e}$  lorsque seuls les modèles de Sarkar et al. [142] pour la pression-dilatation et la dissipation compressible sont pris en compte, est réduite à  $0,02u_{x_e}$  environ. En revanche, aucune différence significative n'est détectable dans l'écoulement entre les solutions obtenues à partir des deux différentes modélisations pour ce terme de production enthalpique. Il n'est pas possible, à ce niveau, de distinguer la pertinence d'un modèle par rapport à l'autre.

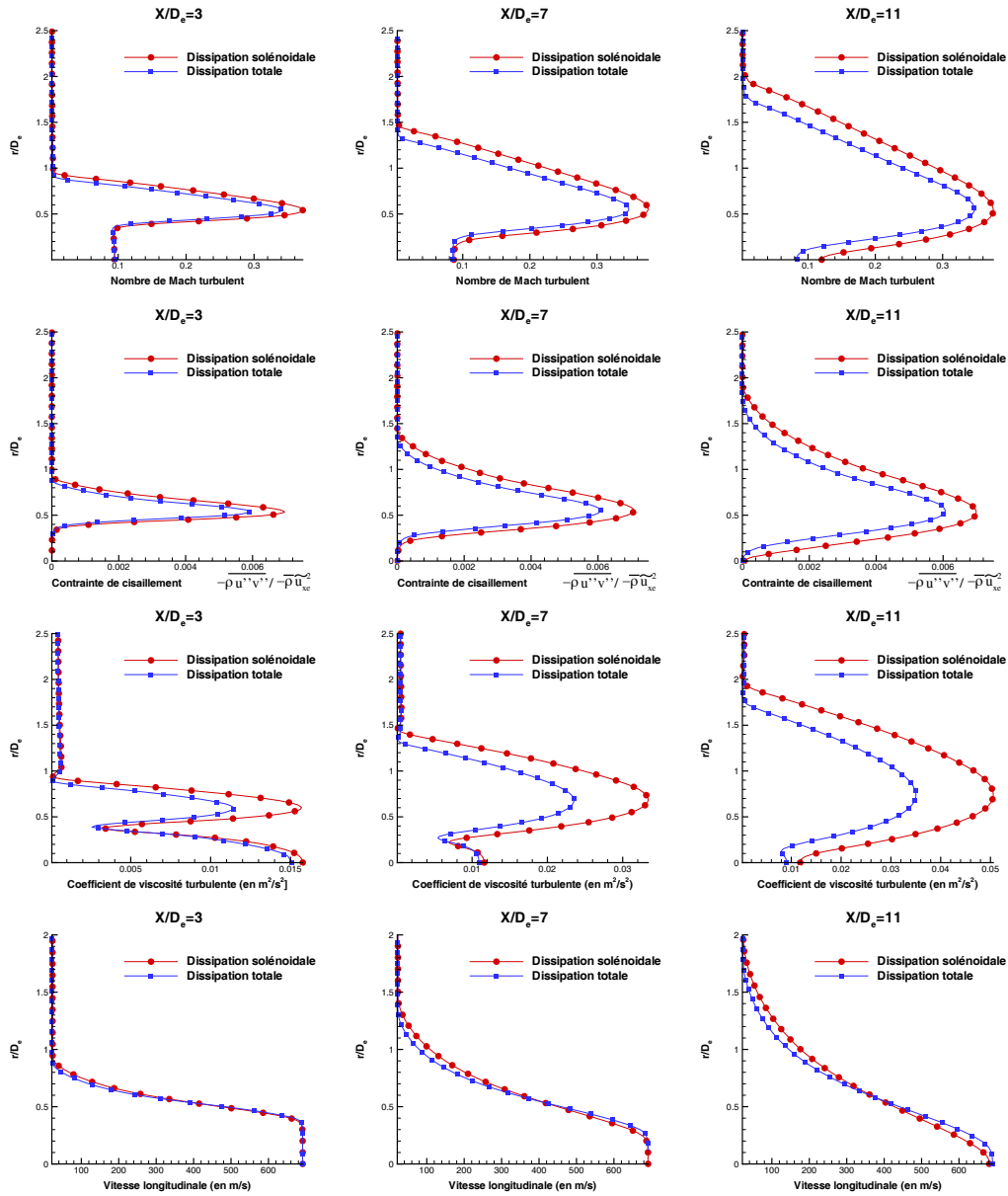


FIG. 10.17 – Comparaison des profils radiaux en  $X/D_e = 3, 7$  et  $9$ , du nombre de Mach turbulent, des contraintes de cisaillement turbulent, du coefficient de viscosité turbulente et de la vitesse longitudinale, obtenus par simulation avec et sans la prise en compte de la dissipation compressible dans l’expression du coefficient de viscosité turbulente.

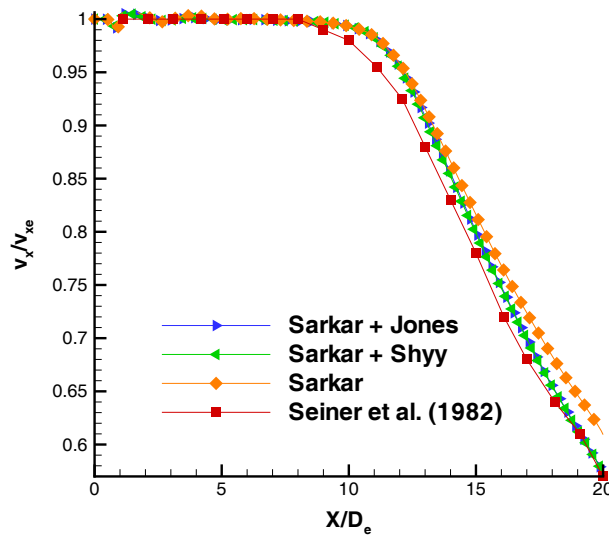


FIG. 10.18 – Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus à partir des modélisation de type Jones [86] et de Shyy et Krishnamurthy [152] pour le terme G.

## 10.8 Sensibilité aux conditions limites prescrites au niveau de l'ajutage

Comme nous le présentons au chapitre 6, à défaut de disposer de données expérimentales, la prescription des niveaux de  $k$  et de  $\epsilon$  au niveau de la section de l'ajutage est réalisée de façon arbitraire en se donnant un niveau d'intensité de turbulence  $I_t$  et une échelle de longueur turbulente de référence  $L_t$  selon :

$$\begin{cases} k_e = \frac{I_t v_{xe}^2}{2} \\ \epsilon_e = \frac{C_\mu^{3/4} k_e^{3/2}}{L_t} \end{cases}$$

Il est certes possible de se donner une idée assez correcte de l'intensité de turbulence initiale si le jet est issu d'une buse profilée. Des valeurs proches de 1% sont couramment rencontrées. En revanche, en l'absence de données statistiques sur le champ turbulent, desquelles on pourrait déduire une longueur de turbulence représentative (échelle intégrale par exemple), il est impossible d'associer en toute rigueur une échelle spatiale géométrique à l'échelle spatiale représentative de la structure de la turbulence dans la section de l'ajutage. Ce choix est d'autant plus délicat pour l'entrée du co-écoulement, sensée représenter un domaine ouvert d'extension infinie. Dans les quelques rares études numériques pour lesquelles le choix retenu pour la prescription des conditions limites pour  $k$  et  $\epsilon$  est mentionné, une intensité de turbulence de l'ordre de 5% est fixée tandis que l'échelle spatiale représentative varie entre  $0,05D_e$  et  $0,33D_e$ . C'est pourquoi la valeur de  $0,14D_e$ , proche de la valeur moyenne rencontrée dans la littérature, a arbitrairement été fixée pour mener l'étude de sensibilité présentée dans les paragraphes précédents. On choisit néanmoins de vérifier l'influence de ces niveaux prescrits dans la section de l'ajutage sur le développement du jet. On constate que le champ de vitesse longitudinale présente une sensibilité globale relativement "marginale" autour de la zone potentielle (voir figure 10.19) de sorte que

l'épanouissement initial du jet n'est pas modifié (vérifié par exemple en considérant la pente de la ligne joignant les points de la couche pour lesquels la valeur de la vitesse atteint la moitié de la valeur atteinte sur l'axe). En revanche, cette dépendance aux niveaux  $k_e$  et  $\epsilon_e$  prescrits à l'ajutage devient beaucoup plus marquée dans la zone axiale. Sur la figure 10.20 qui illustre l'évolution du profil axial de la vitesse longitudinale en fonction de différentes valeurs prescrites à l'ajutage, nous pouvons en effet remarquer que la prescription d'un niveau d'intensité de turbulence de 1%, physiquement plus représentatif des niveaux mesurés expérimentalement à la sortie d'une buse profilée, conduit en fait à surestimer la longueur du cône potentiel de 38% au lieu de 16% lorsque l'intensité de turbulence est fixée à 5%. En revanche, la prescription de  $I_t$  à 7,5% permet de prévoir un profil de vitesse axiale quasiment superposé au profil expérimental. Une dépendance aussi forte est délicate à interpréter, d'autant plus que les niveaux de  $k$  rencontrés dans le cône potentiel sont naturellement largement inférieurs à ceux rencontrés dans la couche de cisaillement. Dans cette zone, le bilan énergétique est essentiellement dominé par un équilibre dissipation solénoïdale / production par cisaillement qui pilote la diffusion turbulente de la quantité de mouvement et donc l'épaississement de la couche de mélange. Cependant, de par la modélisation retenue, nous pouvons remarquer que l'absence de la production de  $k$  (et donc de  $\epsilon$ ) par cisaillement dans la zone potentielle, confère au mécanisme diffusif turbulent de  $k$  un rôle prédominant dans la zone intermédiaire (entre le cône potentiel et la zone de fort cisaillement). L'importance de la diffusion turbulente dans cette zone est illustrée par la figure 10.21 où les contributions énergétiques de chaque terme modélisé sont reconstruites (divisées par  $\rho v_{x_e}^3$ ). Ainsi même si les maxima de  $k$  sont fixés par le terme de production de cisaillement dans la couche de mélange (éventuellement pondéré par les corrections de compressibilité), l'évolution de la couche interne devient très sensible à la fois au niveau de  $k$  fixé à l'origine du cône potentiel (qui fixe le gradient initial de  $k$  entre la zone de cisaillement et la zone potentielle) et au coefficient de viscosité turbulente initial (qui fixe la vitesse à laquelle ce gradient de  $k$  pourra être réduit). Sur la figure 10.22 sont par exemple reportés quelques profils radiaux de  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\mu_t$  qui permettent de se faire une idée du subtil équilibre qui détermine la croissance de la zone interne de la couche de cisaillement. Nous noterons cependant que ce niveau d'intensité turbulente  $I_t = 7,5\%$  (et donc directement du coefficient de viscosité turbulente dans la zone potentielle) qui permet de prévoir correctement l'évolution de la vitesse axiale, est fixé de façon quelque peu artificielle dans la mesure où ce niveau a très probablement été largement inférieur au cours de l'expérience de Seiner et al. [85]. Cependant, afin de reproduire ce mécanisme de croissance interne de la couche de cisaillement tout en prescrivant des niveaux d'intensité de turbulence plus faibles à l'ajutage, il serait nécessaire de fortement réduire le niveau de dissipation à l'ajutage. Ces faibles valeurs de  $\epsilon$  conduiraient alors, selon l'égalité retenue  $\epsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{L_t}$  à prescrire une échelle spatiale de turbulence de référence largement supérieure au diamètre de l'ajutage, ce qui au niveau de celui-ci n'a évidemment plus guère de signification physique. De nombreux tests complémentaires seraient à ce stade nécessaires pour poursuivre l'analyse. Si le profil injecté correspondait précisément au profil expérimental, nous pourrions soupçonner une faiblesse à la fois des corrections de compressibilité (qui même sans prendre en compte la dissipation compressible dans la réexpression de  $\mu_t$  conduisent à des niveaux trop faibles de  $k$  et de  $\mu_t$  au sein de la couche de cisaillement entourant le cône potentiel) et du mécanisme diffusif modélisé. Cependant, il est à noter que l'évolution du jet dépend également fortement des profils des variables à l'ajutage et de la forme exacte de la lèvre de la buse.

Finalement soulignons justement l'effet de la forme du profil prescrit au niveau de l'ajutage. Une pratique couramment suivie pour l'étude numérique des jets ou des couches de mélange, est de prescrire un profil de vitesse en tangente hyperbolique (cf. équation 6.4) variant entre la vitesse  $v_{x_e}$  et la vitesse imposée dans le co-écoulement, et dont la pente dans la zone inter-

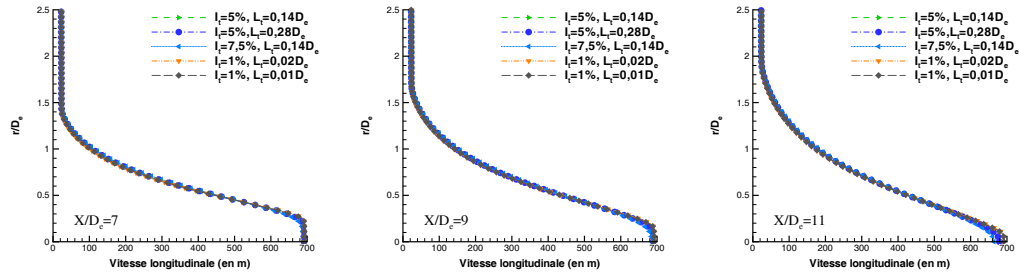


FIG. 10.19 – Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale obtenus à la fin du cône potentiel en fonction des conditions imposées à l'entrée.

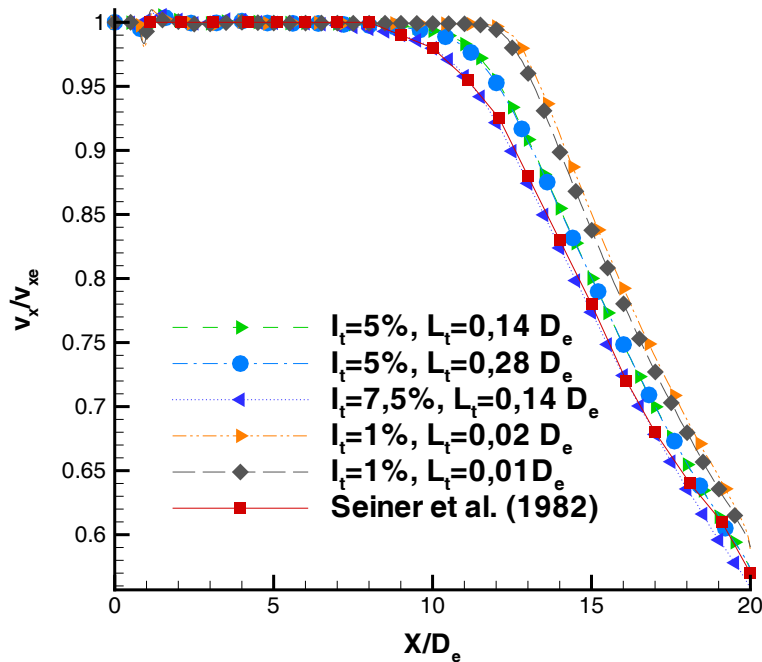


FIG. 10.20 – Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus pour différents couples de valeurs d'intensité de turbulence et d'échelle spatiale de référence prescrites à l'ajutage.

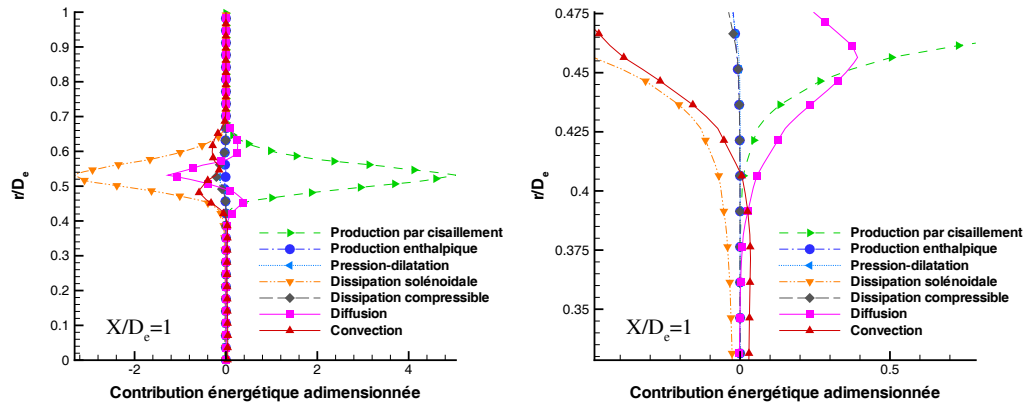


FIG. 10.21 – Comparaison des contributions énergétiques des différents mécanismes au bilan de  $k$  en  $X/D_e = 1$  pour le cas  $I_t = 7,5\%$  et  $L_t = 0,14D_e$ .

médiaire est ajustée en fonction de l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite. Evidemment, ce procédé n'a aucunement la prétention de réintégrer précisément les effets de couche limite. Il permet néanmoins d'imposer un léger défaut de quantité de mouvement injectée au bord de l'ajutage et surtout de limiter la valeur des gradients radiaux de vitesse longitudinale générés lorsqu'on choisit un maillage très raffiné au bord de l'ajutage. Ces gradients augmentent en effet de façon inversement proportionnelle à la plus petite distance de maille fixée près de la paroi dans le plan de l'ajutage et peuvent facilement atteindre des valeurs non-physiques, incompatibles avec la stabilité des schémas numériques utilisés. Le test réalisé prend en compte une épaisseur de quantité de mouvement égale à 1% du diamètre de l'ajutage pour prescrire la pente du profil de vitesse en forme de tangente hyperbolique à l'ajutage, tandis que les valeurs de l'intensité de turbulence et de l'échelle spatiale de référence correspondent aux valeurs du cas de référence, soit  $I_t = 5\%$  et  $L_t = 0,14D_e$ . Le profil de  $k$  est naturellement modifié en conséquence de la modification de ce profil de vitesse, tandis que les autres variables restent prescrites de manière identique. Notons que la recours à la procédure de réadaptation du maillage nous amène finalement à ne prescrire qu'un nombre très réduit d'éléments dans la section de l'ajutage, tel qu'on peut le remarquer sur un agrandissement du maillage reproduit par la figure 10.23. Cependant, une comparaison entre les profils théoriques prescrits et les profils extraits des solutions numériques convergées (voir figure 10.24) nous conforte dans l'idée que l'altération des niveaux des gradients de vitesse et de  $k$  induite par la prescription du profil en tangente hyperbolique, est correctement prise en compte. On constate alors que l'imposition d'un tel déficit de vitesse près du bord de l'ajutage ne modifie que très légèrement le champ de vitesse prévu numériquement dans la zone proche de l'ajutage (voir figure 10.25). En revanche, la zone de cisaillement est suffisamment élargie pour induire des niveaux plus importants de  $k$  (voir figure 10.26) dans la zone proche, tandis que sa position moyenne est sensiblement décalée vers l'axe, décalant par conséquent les centres de production et de diffusion d'énergie cinétique turbulente (voir figures 10.27 et 10.28) également vers l'axe. La combinaison de ces effets se traduit par un effet positif sur la prévision de la longueur du cône potentiel. Une comparaison des profils de vitesse axiale est donnée par la figure 10.29. Nous constatons notamment que la prise en compte du profil modifié nous amène à prévoir numériquement une longueur de cône potentiel  $L_p = 10,2D_e$  au lieu  $L_p = 11,4D_e$ , ce qui représente une surestimation de l'ordre de 15% au lieu de 26%. L'excès de diffusion réintroduit par la prescription de ce profil se traduit en contrepartie par une légère

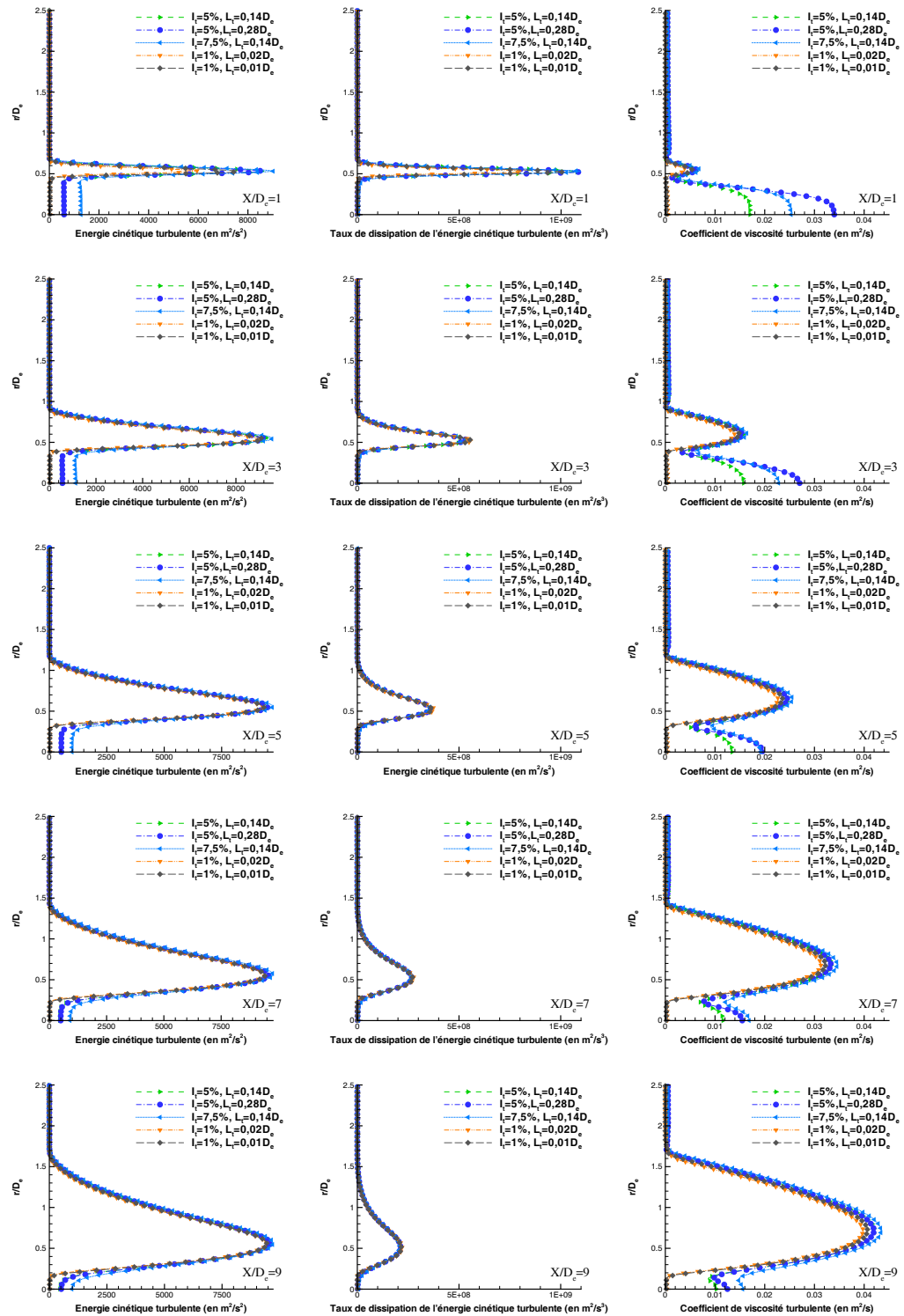


FIG. 10.22 – Comparaison des profils radiaux de  $k$ ,  $\epsilon$  et  $\mu_t$  obtenus en fonction des différentes conditions prescrites à l'ajutage.



augmentation de l'épaisseur de la couche de cisaillement (d'environ  $0,04D_e$  pour  $\delta_{0,1}$ ), le taux de croissance, défini par le gradient longitudinal de cette épaisseur (voir figure 10.30) restant par ailleurs inchangé. Par conséquent, la structure du jet simulé en modifiant la forme des profils au bord de l'ajutage n'est pas fondamentalement différente de celle observée en prescrivant un profil plat, ce qui conforte notre choix de s'abstraire de la détermination précise des effets de proche paroi. Les résultats de ce test semblent indiquer que la prescription du champ de vitesse et d'énergie cinétique turbulente à l'ajutage par un profil en tangente hyperbolique contribue non seulement à renforcer la robustesse de l'algorithme de résolution numérique, mais aussi à mieux représenter la dynamique de la croissance de la partie interne de la couche de cisaillement. Néanmoins une épaisseur de quantité de mouvement égale à 1% du diamètre de l'ajutage a été fixée ici arbitrairement pour réaliser ce test. Il n'est pas certain, ni que cette valeur corresponde à la valeur réelle, ni que cette méthodologie soit généralisable à l'ensemble des simulations de jets. Aussi, tout en gardant à l'esprit que la croissance interne de la couche de cisaillement prévue numériquement dépend fortement des profils de vitesse et de  $k$  prescrits à l'ajutage, nous nous contenterons d'utiliser un profil plat à chaque fois que des données plus précises ne seront pas disponibles.

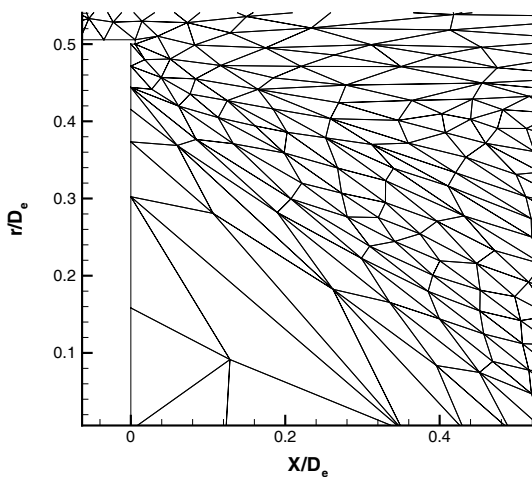


FIG. 10.23 – Agrandissement de la structure typique du maillage obtenu au niveau de l'ajutage pour la simulation du jet de Seiner et al. [85], après trois cycles de simulation.

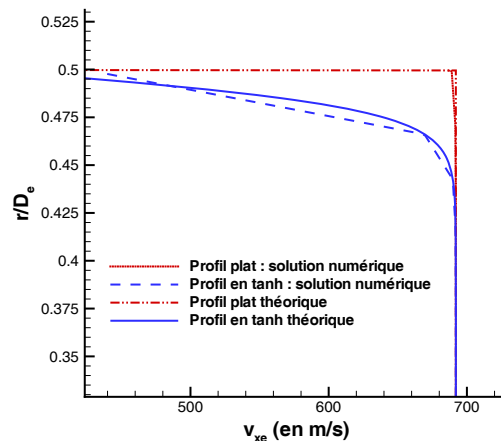


FIG. 10.24 – Comparaison des profils de vitesse prescrit (théorique) et effectivement pris en compte numériquement par interpolation linéaire.

## 10.9 Correction de non-équilibre

La prise en compte de cette correction est désormais abordée succinctement. En fait, il n'est pas possible de modifier les constantes  $C_{\epsilon_1}$  et  $C_{\epsilon_2}$  selon les indications de Shyy et Krishnamurthy sans rencontrer des problèmes d'instabilités numériques, conduisant l'algorithme de résolution à générer des niveaux négatifs de  $k$  ou  $\epsilon$ . En dépit d'une procédure dite de "clipping" permettant de réimposer des niveaux positifs pour ces variables (en réimposant une valeur fonction de la valeur absolue de la valeur négative éventuellement générée), la simulation ne peut être menée à bout avec la modélisation proposée en l'état, les calculs divergeant rapidement, même sur cette

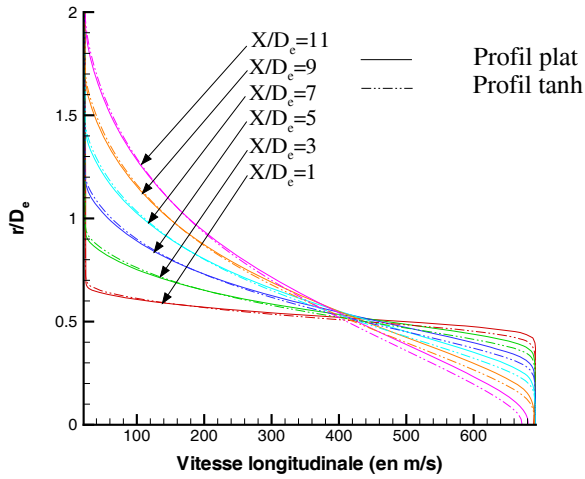


FIG. 10.25 – Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique.

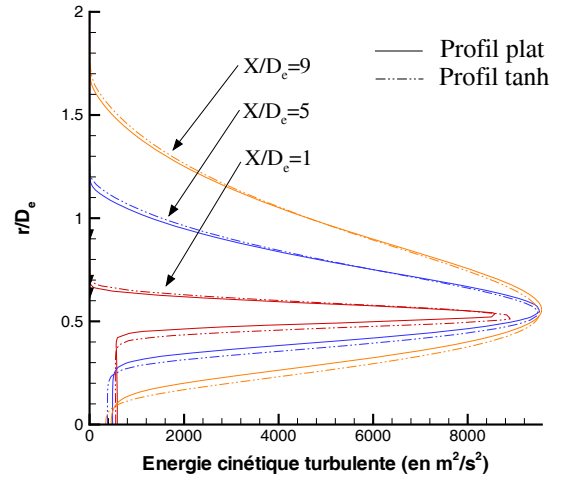


FIG. 10.26 – Comparaison des profils radiaux d'énergie cinétique turbulente obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique.

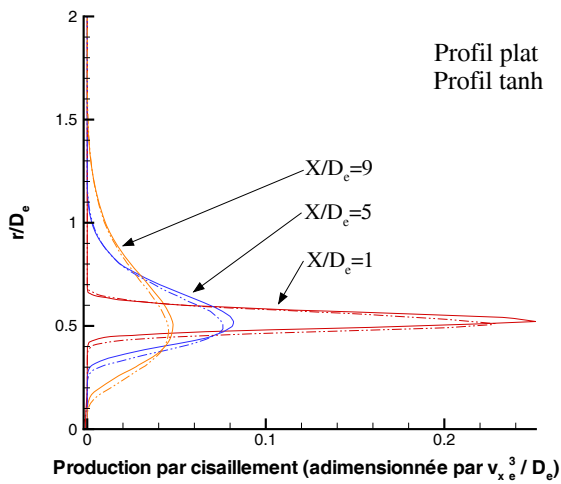


FIG. 10.27 – Comparaison des profils radiaux de la production d'énergie cinétique turbulente obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique.

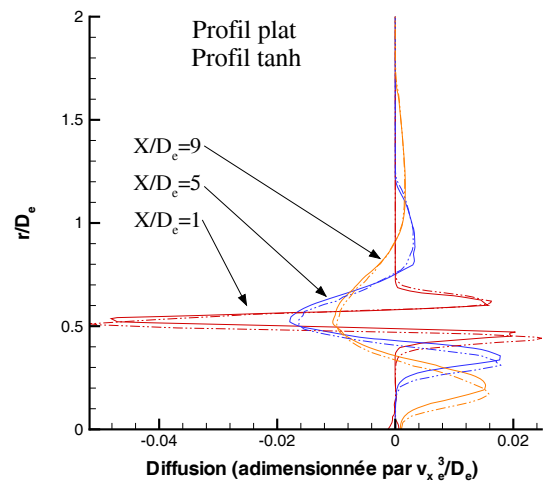


FIG. 10.28 – Comparaison des profils radiaux de la diffusion de  $k$  obtenus en prescrivant pour la vitesse un profil plat ou un profil en tangente hyperbolique.

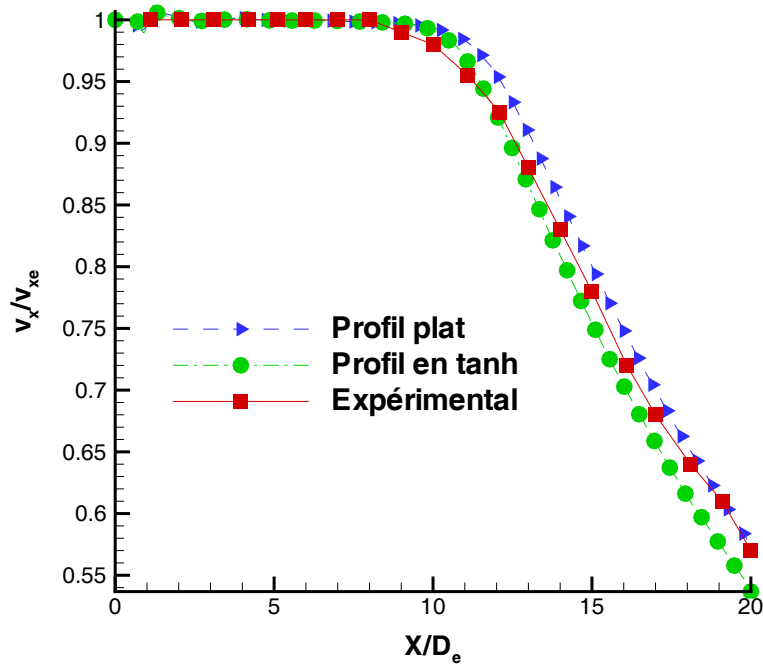


FIG. 10.29 – Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus en prescrivant un profil de vitesse plat et un profil en tangente hyperbolique à l'ajutage.

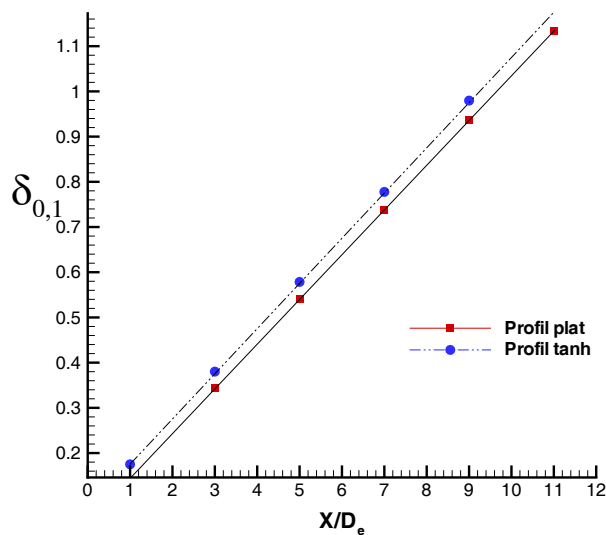


FIG. 10.30 – Comparaison des épaisseurs de la couche de cisaillement prévues en prescrivant un profil de vitesse plat et un profil en tangente hyperbolique à l'ajutage.

configuration de jet parfaitement détendu. Supposant que des niveaux de contraintes trop élevés sont générés dans la phase initiale du calcul (peut-être liés à notre problème de coin à l'ajutage), et donc un excès de la production du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente, il semble judicieux de modifier à nouveau le coefficient  $C_{\epsilon 1}$ . Nous avons choisi de suivre la démarche recommandée par Shyy et Krishnamurthy pour limiter la valeur  $C_{\epsilon 2}$ , en limitant simplement la valeur maximale de  $C_{\epsilon 1}$  à 1,44. Dans ce cas, l'effet induit semble mineur sur la configuration du jet de Seiner, comme on peut le constater en comparant, sur la figure 10.31, les profils de vitesse axiale obtenus en prescrivant les niveaux de référence  $I_t = 5\%$  et  $L_t = 0,14D_e$ . On dénote un retard du développement de jet au niveau du cône potentiel, et à l'inverse, un taux de décroissance de la vitesse sur l'axe légèrement plus important. Aussi, la limitation corrigée introduite induit un effet opposé à l'effet escompté. Par ailleurs, même s'il était possible d'augmenter la valeur limitante de  $C_{\epsilon 1}$  pour autoriser une production plus importante du taux de dissipation, notamment dans le champ proche près de l'ajutage, on assisterait probablement à un retard encore plus prononcé du développement du jet et donc à une dégradation de la qualité de la prévision numérique du profil de vitesse axiale. Par conséquent, nous choisissons de pas utiliser cette correction pour nos simulations de jets sous-détendus.

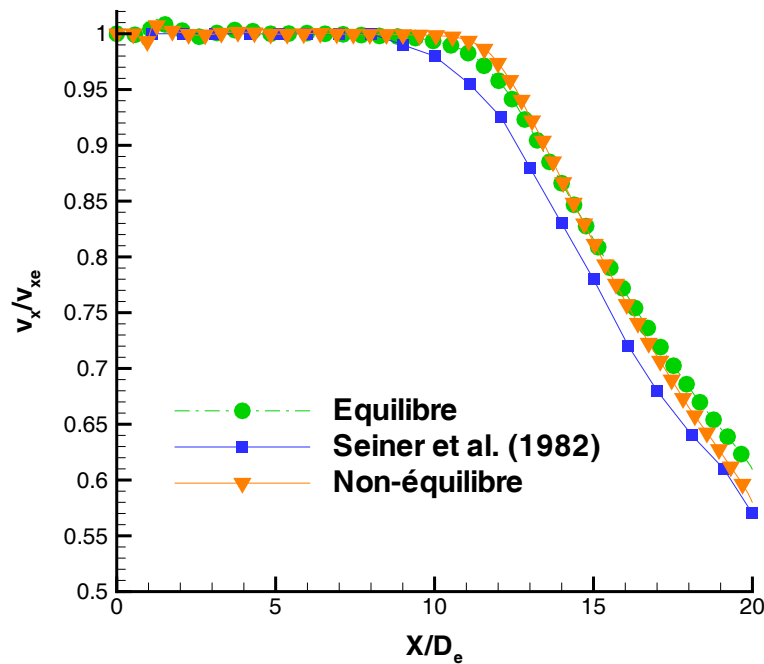


FIG. 10.31 – Comparaison des profils de vitesse axiale obtenus avec ou sans la correction modifiée de non-équilibre de Shyy et Krishnamurthy [152].

Les études précédemment présentées nous ont permis de vérifier que seul le modèle de référence que nous avons choisi peut conduire à prévoir le profil de vitesse axiale du jet de Seiner en augmentant l'intensité de turbulence à  $I_t = 7,5\%$  dans la section de l'ajutage et ne prescrivant qu'un profil plat pour la vitesse et l'énergie cinétique de turbulence. Nous proposons désormais de qualifier la représentativité physique de la solution prévue avec ce modèle et la stratégie numérique que nous avons retenue.

## 10.10 Bilan : modélisation retenue et représentativité physique

Les tests présentés dans les sections précédentes nous ont permis de démontrer la grande sensibilité de la structure du jet numériquement prévue au choix des modèles retenus. Les modèles de Zeman [182] pour la pression-dilatation et la dissipation compressible, la correction de Pope [131] pour les effets axisymétriques ainsi que la prise en compte du taux de dissipation total de l'énergie cinétique turbulente pour réexprimer le coefficient de viscosité turbulente conduisent à réduire de façon exagérée l'épanouissement prévu du jet supersonique axisymétrique à nombre de Mach égal à deux expérimentalement étudié par Seiner et al. [85], et ce malgré la prescription d'une intensité de turbulence très élevée (5%). Par ailleurs, les modifications recommandées par Shyy et Krishnamurthy [152] pour la prise en compte d'une turbulence en déséquilibre ne peuvent, pour des problèmes de manque de robustesse, être utilisées pour simuler ce cas avec la procédure numérique globale que nous avons retenue. En anticipant sur l'étude présentée aux chapitres suivants, la modélisation de Shyy et Krishnamurthy [152] pour le terme de production enthalpique (et son homologue dans l'équation de transport de  $\epsilon$ , assimilé à l'interaction barocline) n'est pas non plus exploitable pour des raisons analogues. Nous retenons donc finalement la modélisation de Sarkar [142] pour la pression-dilatation et la dissipation compressible, l'approximation gradient de type Jones [86] pour exprimer la production enthalpique tandis que le coefficient de viscosité turbulente sera exprimé en ne prenant en compte que le taux de dissipation solénoïdale. Notons que cette modélisation retenue et la méthode numérique utilisée conduisent à ne prévoir précisément le profil de vitesse axiale du champ proche du jet qu'en prescrivant artificiellement un niveau élevé d'intensité de turbulence dans la section de l'ajutage. Pour les simulations de jets sous-détendus avec prise en compte de la turbulence, nous fixerons donc une intensité de turbulence égale à 5% au moins, tandis qu'une échelle spatiale de turbulence équivalente à 5% du diamètre de l'ajutage et une valeur de 0,7 pour le nombre de Prandtl turbulent seront utilisées. Nous garderons à l'esprit que le développement de la zone interne de la couche de cisaillement présente néanmoins une sensibilité non négligeable aux conditions prescrites à l'ajutage, et notamment à ce niveau d'intensité de turbulence.

Analysons un peu plus en détail les qualités et les défauts de cette modélisation en étendant tout d'abord nos comparaisons avec l'ensemble des données disponibles sur ce jet. Dans un premier temps, nous pouvons constater que la structure du jet que nous simulons est proche de celle numériquement prévue par Bailly et al. [28], qui ont utilisé la même modélisation que nous avons retenue. Alors que la position des isocontours de l'énergie cinétique turbulente (cf. figure 10.32) et du nombre de Mach (cf. figure 10.33) sont quasiment superposés autour de la zone potentielle, nous constatons un étalement plus important de ces lignes d'isovaleurs pour les résultats de Bailly et Comte-Bellot, au delà de  $X/D_e = 10$ , la différence devenant plus marquée au delà de  $X/D_e = 15$ , alors que les profils de vitesse axiale correspondant aux solutions de ces deux simulations coïncident avec le profil expérimental. Cette observation concorde avec celle d'un évasement plus important prévu par Bailly et Comte-Bellot au delà de  $X/D_e = 15$ , comme on peut le constater d'après l'évolution de  $r(0,5)$  retranscrite sur la figure 10.34. Cette différence est probablement imputable à un effet de maillage. L'observation des profils radiaux de vitesse longitudinale sur la figure 10.35 permet de vérifier que leur caractère autosimilaire est correctement rendu. Par comparaison avec les profils expérimentaux, on constate néanmoins que l'entraînement prévu de l'air ambiant à la périphérie du jet reste largement surestimé.

La nécessité d'imposer un léger co-écoulement (pour des questions de robustesse de la méthode numérique) et la présence d'un niveau de pression incorrect au coin de l'ajutage, nous amène donc légitimement à questionner la représentativité d'une zone d'entraînement aussi large. Des tests supplémentaires visant à observer l'effet du niveau de vitesse imposé dans le co-écoulement seraient à ce stade nécessaires pour vérifier précisément la sensibilité de la largeur de cette zone

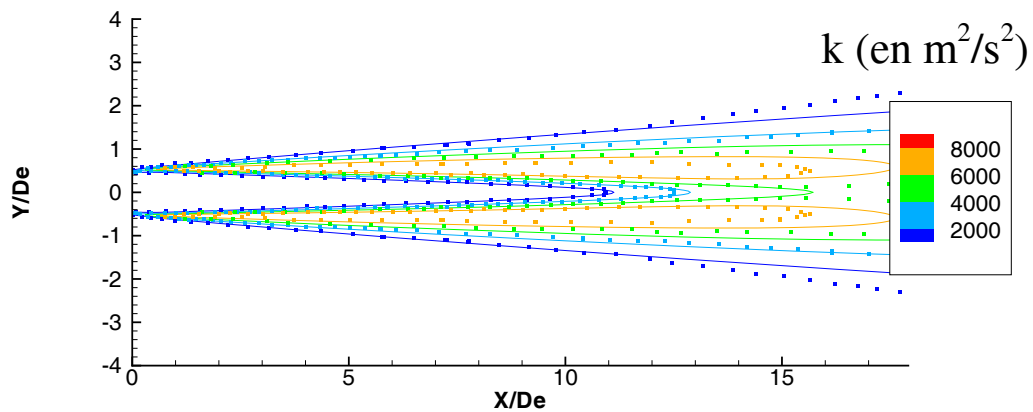


FIG. 10.32 – Comparaison du champ d’isocontours ( $k = 2000, 4000, 6000$  et  $8000 m^2/s^2$ ) de l’énergie cinétique turbulente prévus numériquement : résultats de la simulation pour  $I_t = 7,5\%$  (lignes continues), résultats numériques extraits de Baily et Comte-Bellot [28] (symboles).

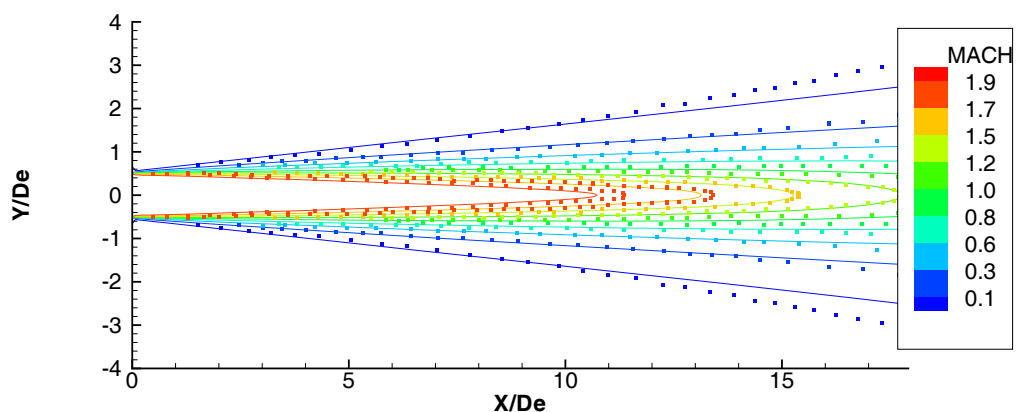


FIG. 10.33 – Comparaison du champ d’isocontours du nombre de Mach prévus numériquement : résultats de la simulation pour  $I_t = 7,5\%$  (lignes continues), résultats numériques extraits de Baily et Comte-Bellot [28] (symboles).

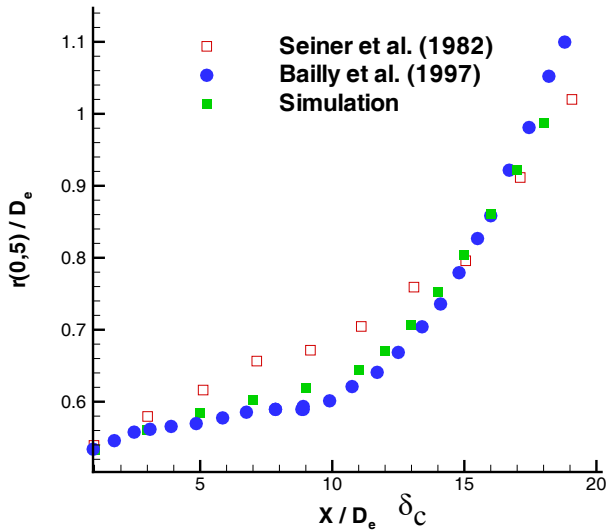


FIG. 10.34 – Comparaison des évolutions du rayon où la moitié de la vitesse maximale est atteinte (d’après les profils radiaux de vitesse longitudinale extraits en  $X/D_e = 1, 3, 5, 7, 9$  et 11).

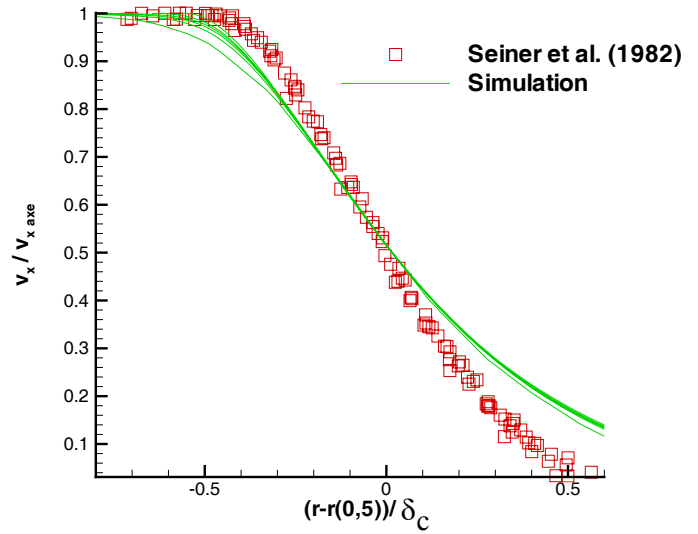


FIG. 10.35 – Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale adimensionnée (extraits en  $X/D_e = 1, 3, 5, 7, 9$  et 11).

à ce paramètre. Notons néanmoins que cette tendance à surestimer l’entraînement de l’air ambiant est également observable sur les résultats de Bailly et Comte-Bellot. Les isocontours de vitesse et l’allure de quelques lignes de courants obtenues dans le champ proche et pour la valeur  $I_t = 7,5\%$ , représentés sur la figure 10.36 illustrent la structure du jet ainsi prévue. Comme nous l’avons déjà fait remarquer en observant la structure des maillages obtenus par réadaptation, l’isocontour situé le plus loin de l’axe correspond à la ligne d’inflexion des lignes de courant et sépare typiquement le co-écoulement du champ proche du jet dans lequel les niveaux de courbure de la masse volumique restent importants. La netteté (révélée par la méthode de réadaptation) avec laquelle les deux zones sont ainsi démarquées pourrait d’ailleurs laisser penser que la caractérisation, communément admise, du champ dynamique des jets supersoniques, uniquement à partir du champ de vitesse longitudinale, est finalement quelque peu réductrice.

Finalement, évoquons un second test de simulation, effectué sur un jet d’air supersonique à nombre de Mach égal à 1,375, étudié par Kerhervé [92]. Pour cette expérience, les conditions génératrices ne pouvant être parfaitement fixées, l’auteur dénote la présence d’un réseau de chocs faibles, dû à la non parfaite adaptation de la pression dans la section de l’ajutage. Aussi, la longueur du cône potentiel mesurée expérimentalement est naturellement beaucoup plus importante que celle prévue numériquement ( $13D_e$  et  $9,5D_e$  respectivement) et les grandeurs caractérisant l’épanouissement du jet ne sont pas rigoureusement comparables. En revanche, les niveaux des contraintes et de l’énergie cinétique ne sont pas susceptibles d’être profondément différents de ceux qui auraient été obtenus si le jet avait été parfaitement détendu. Nous pouvons ainsi comparer qualitativement les niveaux et la distribution de ces contraintes avec ceux prévus numériquement avec le modèle que nous retenons. Les figures 10.37, 10.38, 10.39 et 10.40 présentent les distributions des moyennes de fluctuations longitudinales et radiales, des contraintes turbulentes

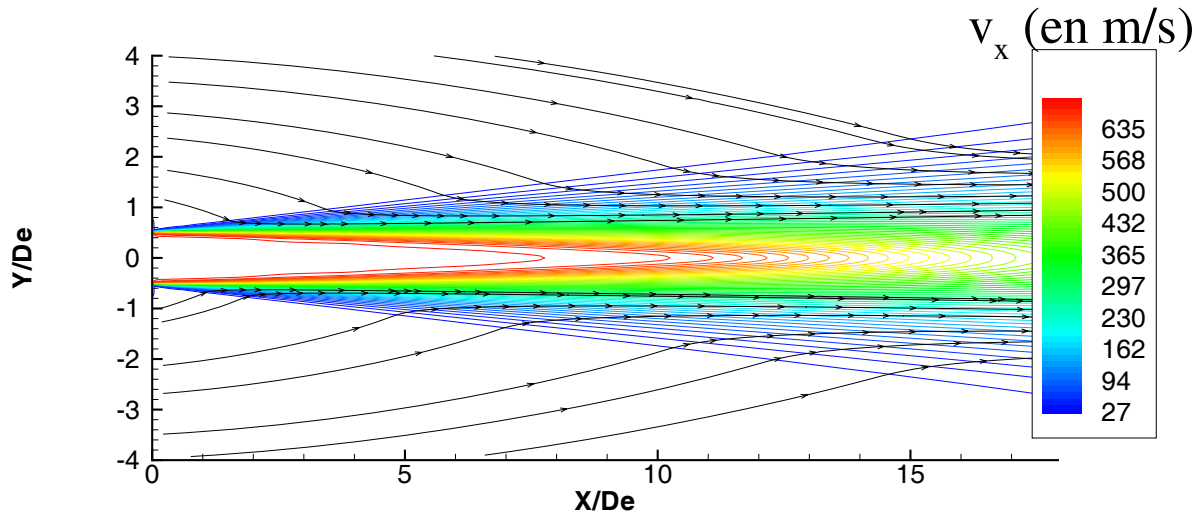


FIG. 10.36 – Structure du jet supersonique ( $M_e = 2$ ) prévue numériquement : isocontours de vitesse longitudinale et lignes de courant.

(adimensionnées par le carré de la vitesse à l'ajutage) de cisaillement et de l'énergie cinétique turbulente respectivement, pour lesquelles on vérifie également le comportement d'autosimilarité. Les points expérimentaux reportés sur ces trois premières figures sont extraits des limites haute et basse des nuages de points correspondant à la superposition de tous les profils extraits expérimentalement dans la couche de cisaillement autour du cône potentiel. Nous vérifions que la distribution des fluctuations en moyenne et des contraintes de cisaillement est correctement prévue. Le niveau maximal moyen des fluctuations de vitesse longitudinale obtenus expérimentalement est sous-estimé de 12,5% environ par la solution numérique tandis que le niveau maximal moyen de la contrainte de cisaillement est au contraire surestimé de 12,5% environ par notre simulation. Le niveau moyen des fluctuations radiales reste quant à lui largement surestimé (de l'ordre de 50%). Notons que le co-écoulement dans l'expérience présentée par Kerhervé [92] est confiné et présente une direction moyenne (dirigée vers le jet) faisant un angle de 3° environ, ce qui peut expliquer le léger décalage de la position du maximum des contraintes vers une position inférieure à  $r(0,5)$  qui se traduit de façon plus visible sur un décalage du pic de l'énergie cinétique turbulente. Soulignons que, ne disposant pas des contraintes orthoradiales, l'énergie cinétique est recalculée par Kerhervé [92] en supposant la troisième composante diagonale du tenseur des contraintes (composante orthoradiale) de niveau égal à celui de la composante radiale. La figure 10.41 illustre finalement la répartition des niveaux moyen de fluctuations prévue numériquement. On peut constater que la prédominance de la contrainte longitudinale, telle qu'elle est couramment observée dans les jets supersoniques, n'est absolument pas prévue par le modèle. De part le modèle au premier ordre retenu, nous vérifions donc (certes sans étonnement) que la distribution des contraintes n'est naturellement pas prévisible de façon correcte (sous-estimation des contraintes longitudinales de 12,5%, surestimation des contraintes radiales de 50% et surestimation de 65% du niveau des contraintes orthoradiales en moyenne). L'ordre de grandeur prévu numériquement reste cependant suffisamment correct et nous permet de prévoir le niveau d'énergie cinétique turbulente avec une précision très satisfaisante (surestimation de 10% à peine du niveau maximal d'énergie cinétique turbulente).

Les difficultés d'ordre numérique, liées aux caractéristiques intrinsèques des jets sous-détendus



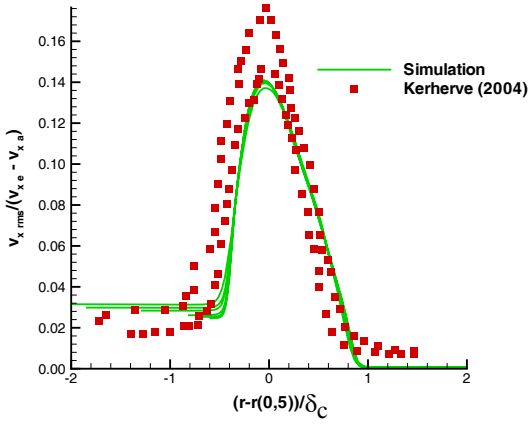


FIG. 10.37 – Comparaison des niveaux de fluctuations longitudinales (extraits de la solution numérique entre  $X/D_e = 1$  et 7).

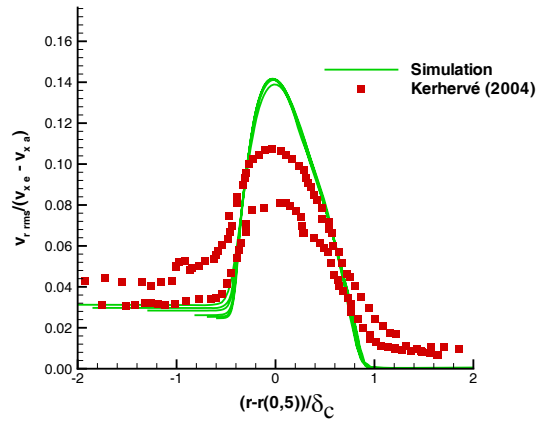


FIG. 10.38 – Comparaison des niveaux de fluctuations radiales (extraits de la solution numérique entre  $X/D_e = 1$  et 7).

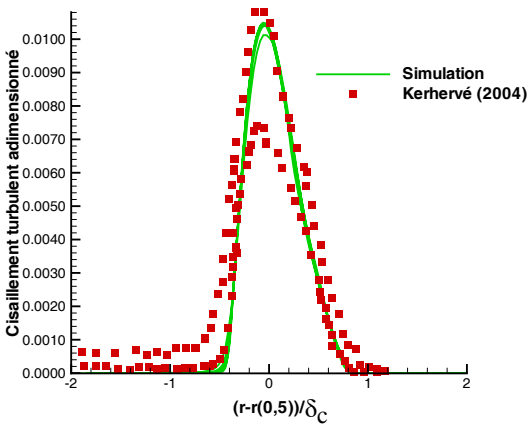


FIG. 10.39 – Comparaison des profils de contraintes turbulentes de cisaillement adimensionnées (extraits de la solution numérique entre  $X/D_e = 1$  et 7).

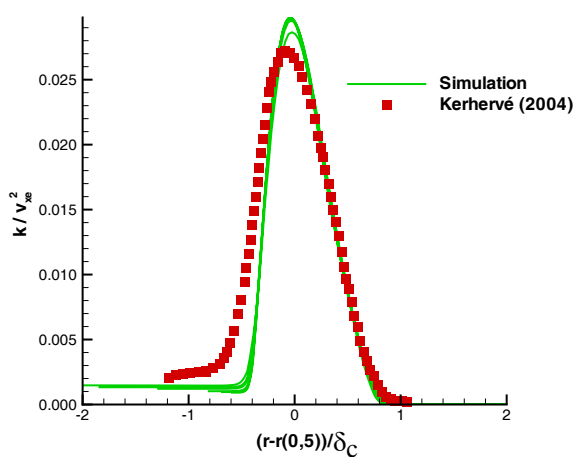


FIG. 10.40 – Comparaison des profils de l'énergie cinétique turbulente adimensionnée (extraits de la solution numérique entre  $X/D_e = 1$  et 7).

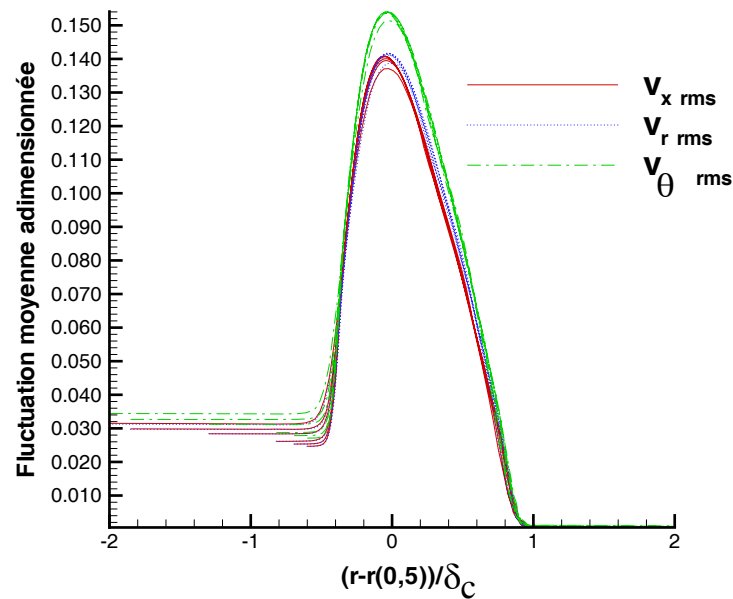


FIG. 10.41 – Comparaison des profils radiaux de contraintes turbulentes prévue par le modèle retenu.

et à notre choix d'utiliser un domaine de calcul restreint, nous ont conduit à élaborer une méthodologie spécifique pour mener à bien nos simulations. Les tests de sensibilité aux différents modèles de turbulence compressible, présentés tout au long de ce chapitre, nous ont permis, de sélectionner une unique combinaison qui, associée à la méthode de résolution numérique retenue et en dépit de ses limitations, nous permet finalement de prévoir la structure d'un jet parfaitement détendu avec une précision relativement satisfaisante. Nous allons désormais éprouver les capacités prévisionnelles de cette stratégie numérique, associée au modèle de référence retenu, sur le cas des jets sous-détendus.



# Chapitre 11

## Etude du jet faiblement sous-détendu

Après avoir vérifié la validité de l'approche retenue sur le cas d'un jet parfaitement détendu, une étude du jet faiblement sous-détendu est menée. Bien que la structure et la dynamique du jet faiblement sous-détendu soit relativement différente de celle d'un jet très fortement sous-détendu, sa simulation est plus simple à réaliser, ce qui nous permet de faire plus aisément une première évaluation des performances de l'outil numérique et des modèles retenus dans une configuration présentant des éléments structurels équivalents. L'étude présentée correspond à un jet d'air faiblement sous-détendu à  $NPR = 1,754$  (correspondant à un nombre de Mach de 1,43 pour un jet équivalent parfaitement détendu) étudié par Panda et Seasholtz [124] à l'aide de visualisations Schlieren et d'une technique non-intrusive de diffusion Rayleigh, en utilisant une buse convergente profilée dont le diamètre à l'ajutage est égal à 25,4 mm. Les paramètres prescrits aux conditions aux limites sont donnés dans le tableau 11.1. Cette étude sur le jet faiblement sous-détendu est réalisée en utilisant le schéma de Roe pour l'évaluation des flux convectifs combiné à une limitation de type "minmod" et un facteur de correction entropique de 0,05. Deux études complémentaires sont réalisées. La première est menée sur le domaine  $\mathbf{MI}_1$  en utilisant uniquement le système d'équations d'Euler. Les modèles de turbulence retenus d'après l'étude présentée dans le chapitre précédent sont ensuite évalués sur le domaine  $\mathbf{MI}_2$ .

Jet étudié	Conditions dans la section de l'ajutage	Conditions dans la section d'entrée du co-écoulement	Conditions à la sortie du domaine de calcul
Panda et Seasholtz [124]	<ul style="list-style-type: none"><li>- <math>D_e = 0,0254</math> m</li><li>- <math>p_e = 177725,26</math> Pa</li><li>- <math>v_{xe} = 315,35</math> m/s</li><li>- <math>v_{re} = 0</math> m/s</li><li>- <math>T_e = 247,5</math> K</li><li>- <math>M_e = 1,01</math></li><li>- <math>k_e = 124,3</math> <math>m^2/s^2</math></li><li>- <math>\epsilon_e = 179302</math> <math>m^2/s^3</math></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>- <math>p_a = 101325</math> Pa</li><li>- <math>v_{xa} = 17,3</math> m/s</li><li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li><li>- <math>T_a = 297</math> K</li><li>- <math>M_a = 0,05</math></li><li>- <math>k_e = 0,3741</math> <math>m^2/s^2</math></li><li>- <math>\epsilon_a = 29,6</math> <math>m^2/s^3</math></li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>- <math>p_a = 101325</math> Pa</li><li>- <math>T_a = 297</math> K</li><li>- <math>v_{xa} = 17,3</math> m/s</li><li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li></ul>

TAB. 11.1 – Conditions limites utilisées pour la simulation du jet faiblement sous-détendu de Panda et Seasholtz [124].

## 11.1 Etude de sensibilité au maillage

### 11.1.1 Utilisation du domaine $MI_1$ pour une simulation basée sur les équations d'Euler

De façon similaire à la démarche présentée dans le chapitre précédent pour le jet parfaitement détendu, nous vérifions dans un premier temps l'effet du nombre d'étapes de calcul (**C1** à **C5**) et du niveau global d'éléments prescrit (trois niveaux **N1**, **N2** et **N3**) sur la solution obtenue, une étude identique étant menée au préalable pour vérifier qu'un niveau satisfaisant de convergence est atteint à chaque étape. Les nombres de noeuds indiqués dans cette section correspondent à la zone centrale effectivement réadaptée. La figure 11.1 illustre, pour le niveau de raffinement **N1**, la structure des maillages obtenus successivement, présentés deux par deux symétriquement par rapport à l'axe. Le premier cycle de réadaptation induit l'effet le plus significatif. La concentration des éléments dans la zone proche de l'ajutage permet de mieux capturer l'angle des faisceaux de détente et réduit fortement la diffusion numérique à la frontière du jet. Il en résulte un décalage vers l'aval des fronts de focalisation des ondes de Mach. Ces fronts étant par ailleurs moins diffus, le saut des grandeurs est capturé plus précisément, ce qui se traduit par une diminution des minima locaux et une augmentation des maxima locaux des valeurs des variables, que nous pouvons observer plus clairement sur la figure 11.2 qui présente une comparaison des profils du nombre de Mach sur l'axe extraits de ces solutions. La seconde réadaptation a pour principal effet de réduire le nombre d'éléments précédemment introduits dans la zone périphérique du jet et de réaligner les éléments le long des discontinuités de choc dont la position moyenne sur l'axe n'évolue déjà plus, du moins jusqu'à la sixième cellule de choc. L'intensité des chocs diminuant en allant vers l'aval, les réadaptations suivantes ont alors tendance à supprimer des éléments vers l'aval, essentiellement au-delà de la quatrième cellule de choc. Mis à part pour la zone localisée juste en amont de la ligne de maillage commune à la zone centrale réadaptée et la zone "tampon" en  $X/D_e = 10$ , nous constatons que le profil du nombre de Mach est quasiment établi dès la quatrième étape de calcul. Les profils axiaux du nombre de Mach obtenus à la quatrième et la cinquième étape de la simulation présentent au niveau de la cinquième cellule de choc une différence maximale de l'ordre de 0,02. La figure 11.3 illustre par exemple, pour les champs de vitesse longitudinale et de pression, que la solution n'évolue effectivement plus de façon significative au-delà de la quatrième étape de la simulation. L'écart qui peut être observé au niveau de l'axe en  $X/D_e = 1$  provient ici simplement du fait que ce profil est extrait juste en aval du point de réflexion sur l'axe du choc incident de la première structure de choc (situé en  $X/D_e = 0,9$  environ en considérant la position sur l'axe où la valeur maximale du nombre de Mach est observée) et que cette zone de choc est sensiblement décalée vers l'amont (de  $0,02 D_e$ ) lorsque le niveau **N2** de raffinement global est utilisé.

En observant alors l'évolution de la structure du jet obtenue à l'issue de la quatrième étape de la simulation en fonction du niveau global de raffinement prescrit, on constate que l'ajout d'éléments conduit naturellement à rendre les zones de choc moins diffuses et donc à prévoir une amplitude sensiblement plus importante des oscillations du nombre de Mach sur l'axe (voir figure 11.4). L'indépendance de la solution au niveau global de raffinement n'est donc pas ici rigoureusement atteinte. Nous observons néanmoins que les différences de phase des oscillations du nombre de Mach sur l'axe sont négligeables pour les niveaux **N2** et **N3** et que la différence maximale sur les niveaux de ce nombre de Mach sur l'axe, observée localement au niveau du point de réflexion du choc incident de la sixième structure de choc sur l'axe n'est que de 0,04. Nous considérons donc ce deuxième niveau comme suffisant pour caractériser la structure du jet sur le domaine associé au maillage initial  $MI_1$  pour une simulation ne prenant pas en compte les effets diffusifs. Nous vérifions effectivement que le champ des variables, illustré par exemple

par les profils radiaux de vitesse longitudinale et de pression sur la figure 11.5, ne varie que très peu entre les solutions obtenues à partir des niveaux N2 et N3.

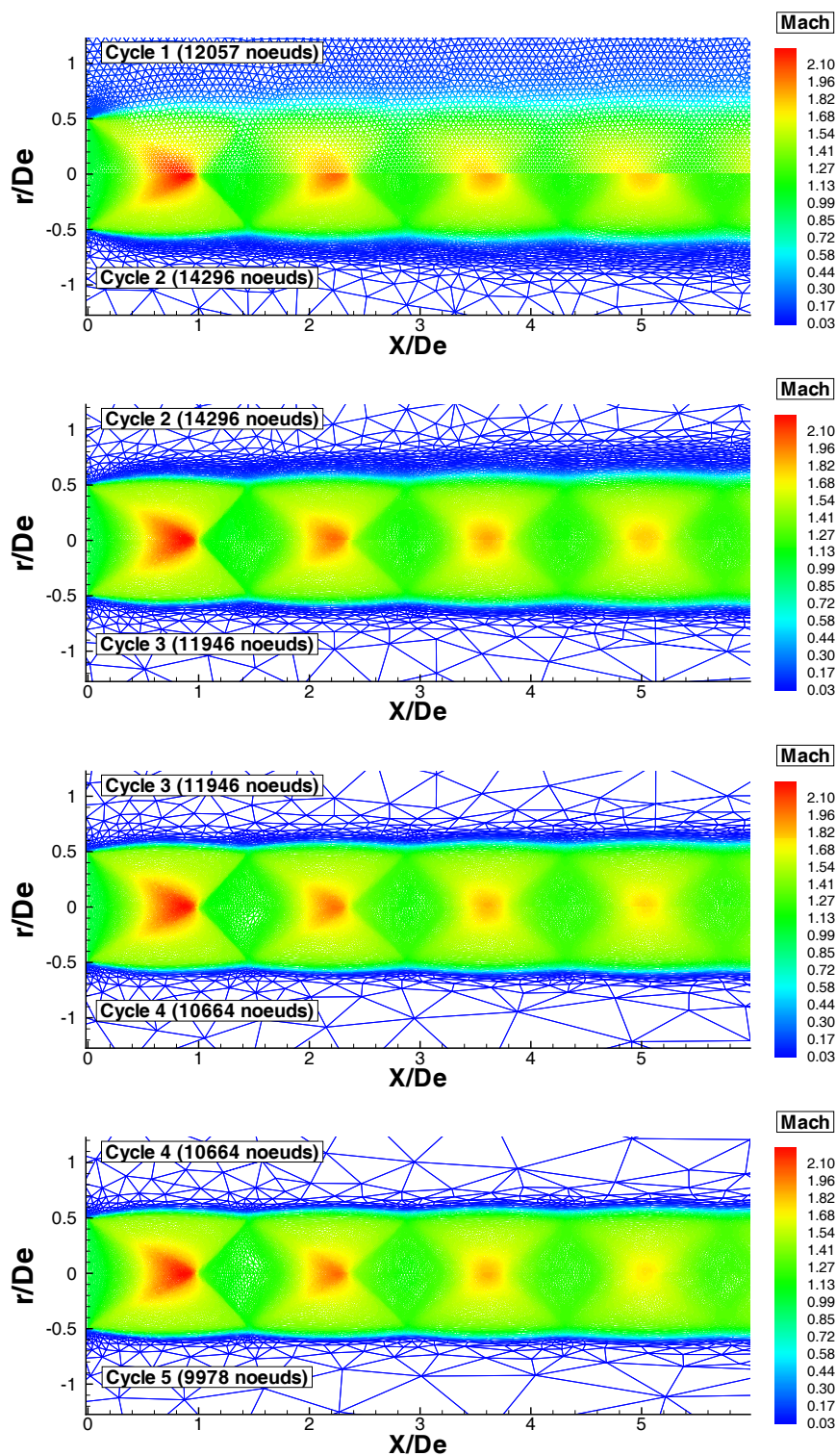


FIG. 11.1 – Comparaison deux à deux des maillages obtenus à chaque étape de la simulation du jet faiblement sous-détendu.

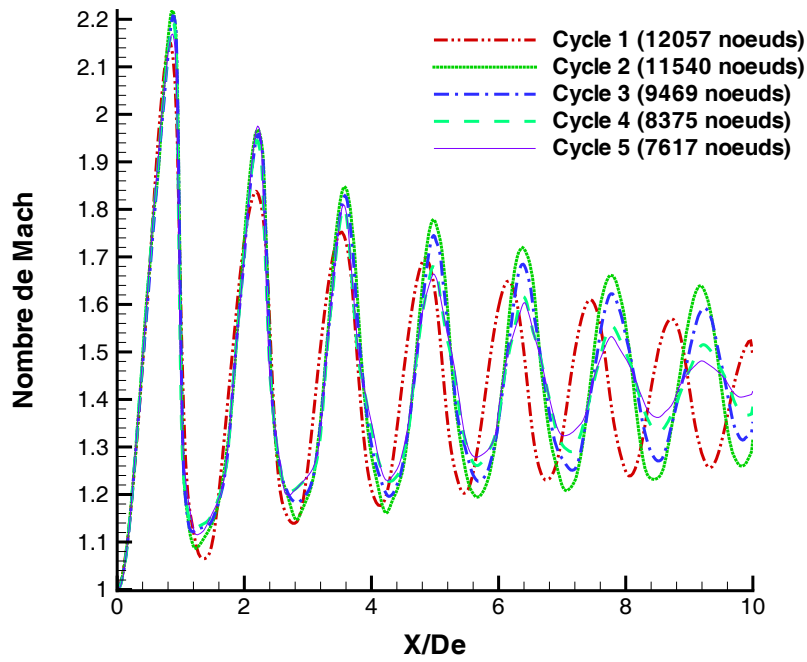


FIG. 11.2 – Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à chaque étape de la simulation pour le niveau N1 de raffinement global.

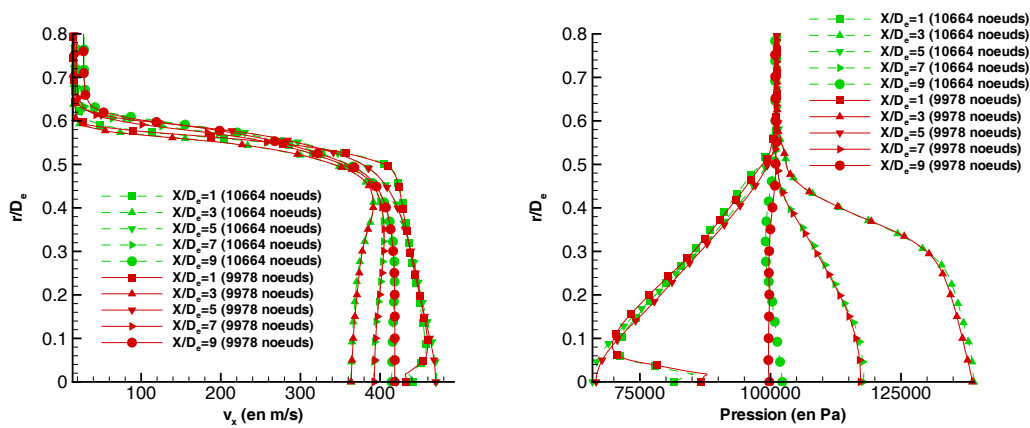


FIG. 11.3 – Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale et de pression extraits des solutions obtenues à la quatrième (10664 noeuds) et la cinquième étape (9978 noeuds) de la simulation pour le niveau N2 de raffinement global.

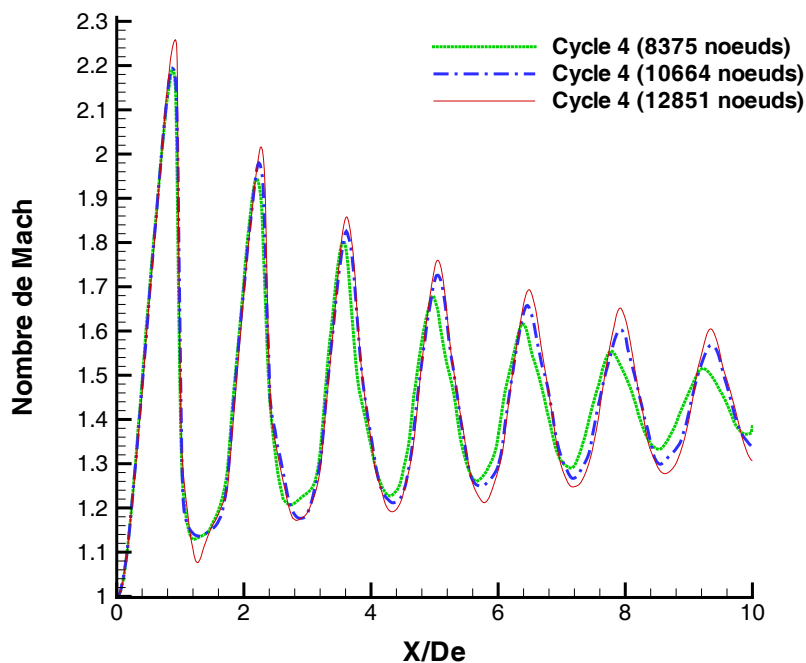


FIG. 11.4 – Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à l’issue de la quatrième étape de la simulation pour différents niveaux de raffinement global imposés : N1 (8379 noeuds), N2 (10664 noeuds) et N3 (12851 noeuds).

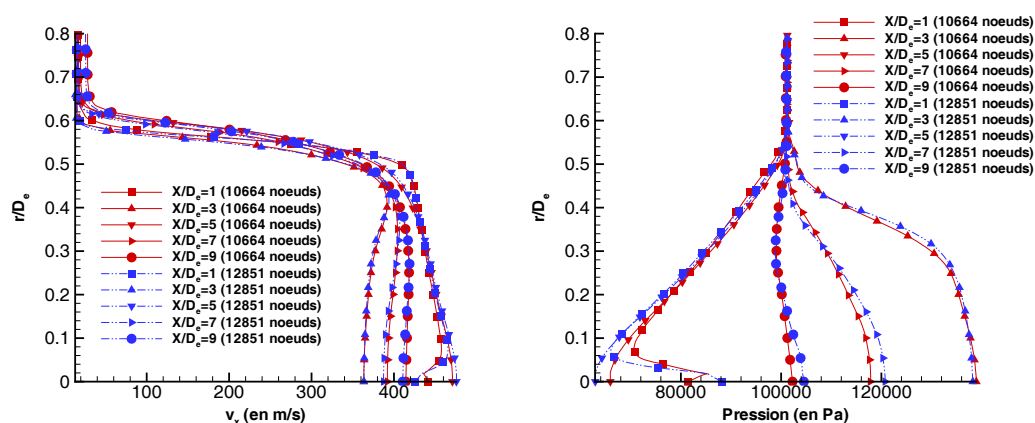


FIG. 11.5 – Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale et de pression extraits des solutions obtenues à la quatrième étape de la simulation du jet faiblement sous-détendu pour les niveaux N2 (10664 noeuds) et N3 (12851 noeuds).



### 11.1.2 Utilisation du domaine $\mathbf{MI}_2$ pour une simulation prenant en compte les effets de turbulence.

Ce test de sensibilité est réalisé sur le modèle de référence retenu d'après l'étude menée sur le jet parfaitement détendu, reposant sur l'utilisation du modèle de Sarkar et al. pour les termes de pression-dilatation et de dissipation compressible, de l'approche de type gradient pour fermer le terme de production enthalpique et d'une réexpression du coefficient de viscosité turbulente à partir de la dissipation solénoïdale uniquement. L'intensité de turbulence et l'échelle spatiale intégrale de référence sont fixées respectivement à 5% et à 5% du diamètre de l'ajutage. Notons bien que l'extension du domaine  $\mathbf{MI}_2$  est différente de celle du domaine  $\mathbf{MI}_1$  de sorte que les trois niveaux de raffinement global utilisés pour ce second test ne correspondent pas aux niveaux prescrits dans le cas précédent.

Dans le cas où les effets de turbulence sont ainsi pris en compte, la comparaison des profils axiaux du nombre de Mach extraits des solutions obtenues aux diverses étapes de la simulation (illustrée pour un niveau  $\mathbf{N2}$  sur la figure 11.6) nous permet de constater que l'adaptation du maillage est plus rapidement obtenue que dans le cas où la simulation est basée sur les équations d'Euler uniquement. La croissance de la couche de cisaillement diminue en effet rapidement l'amplitude des structures de choc et leur intensité tandis que la diffusion globalement introduite dans l'ensemble de l'écoulement réduit nettement la sensibilité des structures de choc en aval au mouvement des structures en amont. Nous vérifions par ailleurs que l'utilisation du second niveau de raffinement global est satisfaisante pour obtenir une solution qui n'évolue plus significativement si le nombre de noeuds de calcul est augmenté. La figure 11.7 illustre en effet que l'écart maximal observable sur les niveaux du nombre de Mach, au niveau des zones de réflexion des chocs sur l'axe est de l'ordre de 0,01 seulement. Quelques profils radiaux de vitesse longitudinale et de température sont également retracés sur la figure 11.8 pour illustrer que seul un écart négligeable (sauf pour les points très proche des zones de choc) peut être relevé dans l'ensemble de l'écoulement relatif à la zone centrale entre les solutions correspondant à ces deux niveaux  $\mathbf{N2}$  et  $\mathbf{N3}$  dans l'ensemble de l'écoulement.

### 11.1.3 Remarque sur le paramétrage de l'algorithme de réadaptation

L'étude de sensibilité de la solution au niveau global de raffinement a été menée successivement à partir du maillage  $\mathbf{MI}_1$  pour une simulation basée sur les équations d'Euler et à partir du maillage  $\mathbf{MI}_2$  pour une simulation prenant en compte les effets de la turbulence. Nous avons déjà souligné le fait que l'adaptation du maillage est obtenue plus rapidement lorsque la turbulence est prise en compte grâce à l'effet "positif" de la diffusion qu'elle introduit sur l'ensemble des structures de choc en aval qui deviennent ainsi moins sensibles au décalage des structures situées en amont, ce décalage étant induit par la meilleure adaptation du maillage. Il est intéressant de souligner également que le nombre d'éléments que nous avons finalement jugé nécessaire d'introduire est très proche pour ces deux cas (soit 11000 à 12000 environ pour ce jet à  $\text{NPR} = 1,752$ ), alors que l'extension de la zone de jet est doublée pour le second cas (en considérant que la majorité des éléments est concentrée entre l'axe et  $r/D_e = 0,5$ ). La prise en compte de la turbulence implique en effet une forte diminution du nombre d'éléments qui doivent être introduits près des zones de chocs puisque leur étendue est réduite du fait de la croissance de la couche de cisaillement tandis que la prévision précise de celle-ci requiert une densité d'éléments inférieure mais s'étend en contrepartie sur une zone plus large. Nous allons désormais observer plus précisément la structure du jet ainsi prévue dans ces deux cas.

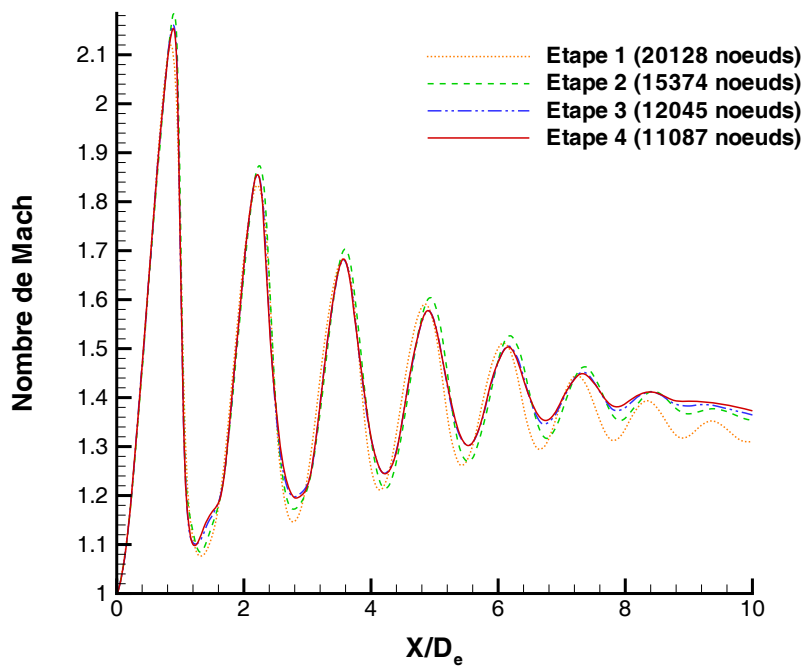


FIG. 11.6 – Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à l'issue des différentes étapes de la simulation du jet turbulent faiblement sous-détendu pour le niveau N2 de raffinement global.

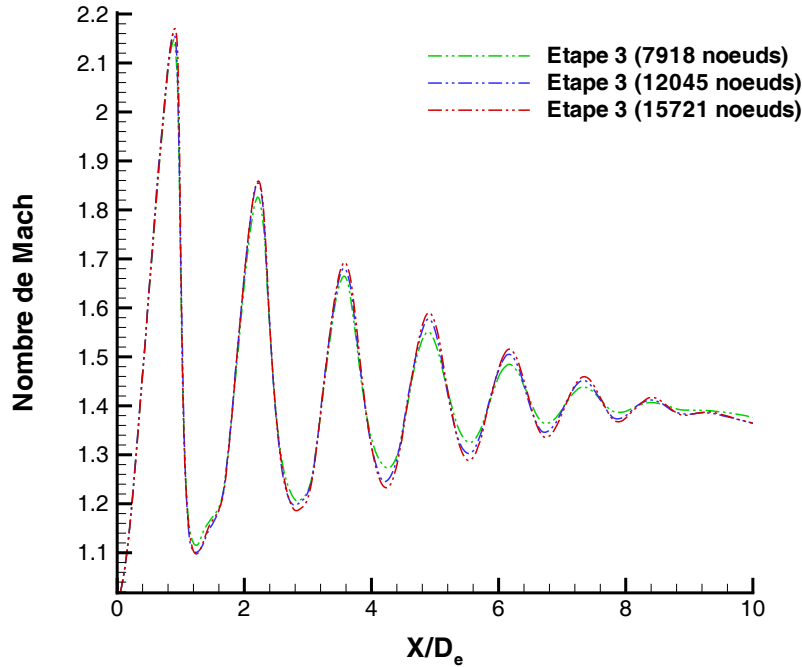


FIG. 11.7 – Comparaison des profils axiaux du nombre de Mach obtenus à l’issue de la troisième étape de la simulation du jet turbulent faiblement sous-détendu pour les niveaux N1 (7918 noeuds), N2 (12045 noeuds) et N3 (15721 noeuds) de raffinement global.

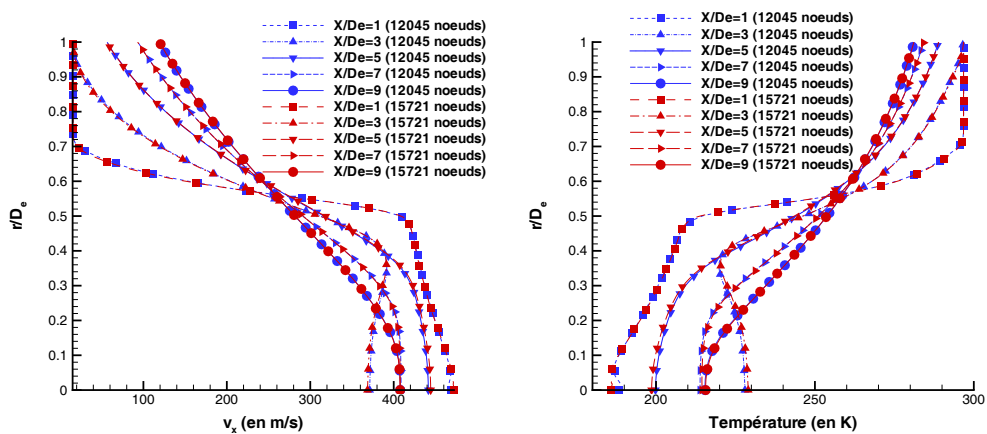


FIG. 11.8 – Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale et de température extraits des solutions de jet turbulent faiblement sous-détendu obtenues à la troisième étape de la simulation pour les niveaux N2 (12045 noeuds) et N3 (15721 noeuds).

## 11.2 Etude de la structure du jet obtenue

### 11.2.1 Aspect global du jet

La structure du jet prévu numériquement par le modèle de référence retenu est illustrée par la figure 11.9. Nous y reconnaissons la structure classique de chocs en diamants au sein de la zone de cône potentiel, pour laquelle 6 cellules de choc sont distinguables. De manière cohérente avec les résultats obtenus pour la simulation du jet parfaitement détendu, on constate que l'utilisation de notre modèle de référence, la prescription d'une intensité de turbulence égale à 5% au niveau de l'ajutage et la non-prise en compte des effets de couche limite conduisent à surestimer la longueur du cône potentiel ( $8,5D_e$  dans notre cas contre  $7,5D_e$  d'après les résultats de Panda et Seasholtz [124]). Bien que l'aspect global du jet soit qualitativement bien rendu, l'imprécision

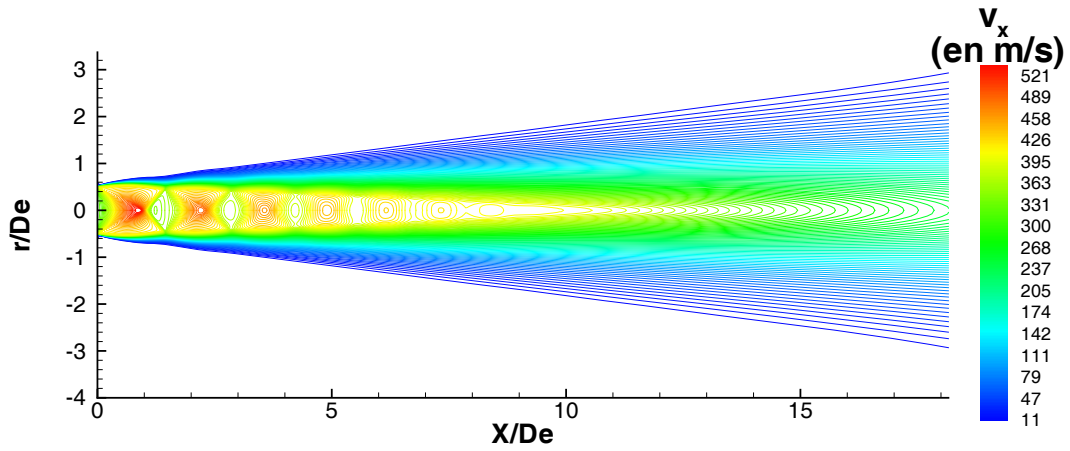


FIG. 11.9 – Structure globale du jet faiblement sous-détendu prévu numériquement : isocontours de la vitesse longitudinale.

dans l'évaluation du taux de croissance de la zone interne de la couche de cisaillement (et donc du positionnement de la ligne isobare au sein de celle-ci), associée à l'accumulation des erreurs d'estimation du saut des grandeurs à travers les chocs successifs, induit rapidement un décalage des structures calculées en aval. Ce décalage de phase est clairement visible dès la seconde cellule de choc lorsque l'on compare l'évolution des profils axiaux de la masse volumique, présentée sur la figure 11.10. Etant de l'ordre  $0,2D_e$  au niveau de la seconde cellule de choc, il augmente progressivement en allant vers l'aval pour atteindre  $0,8D_e$  environ au niveau de la sixième cellule de choc. Notons que les longueurs des cellules de choc observées au delà de la première cellule sont effectivement légèrement supérieures à la longueur indiquée par la corrélation de Tam et Tanna [161] pour estimer celle-ci, soit :

$$L_s = 2\pi\left(\frac{D_e}{2}\right)(M_j^2 - 1)^{\frac{1}{2}}/2,405 \quad (11.1)$$

qui nous indique une longueur de l'ordre de  $1,32D_e$ . Cette erreur semble néanmoins être essentiellement liée aux premières cellules de choc ( $1,55D_e$  pour la seconde cellule de choc,  $1,42D_e$  pour la troisième,  $1,35D_e$  pour la quatrième), ce qui semble indiquer que la source d'imprécision est essentiellement liée à la zone d'écoulement en amont. Précisons que la valeur  $\rho_j$  utilisée par Panda et Seasholtz pour adimensionner le profil de la masse volumique correspond à la masse volumique que l'on obtiendrait à l'ajutage si le jet était parfaitement détendu. Sa valeur est par

exemple évaluée dans ce cas à  $1,68 \text{ kg/m}^3$  via les relations isentropiques à partir de la température prescrite à l'ajutage  $T_e$ , la pression ambiante  $p_a$  et le nombre de Mach de jet parfaitement détendu équivalent  $M_j$  selon :

$$\rho_j = \frac{p_a \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_j^2\right)}{r T_e \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)}$$

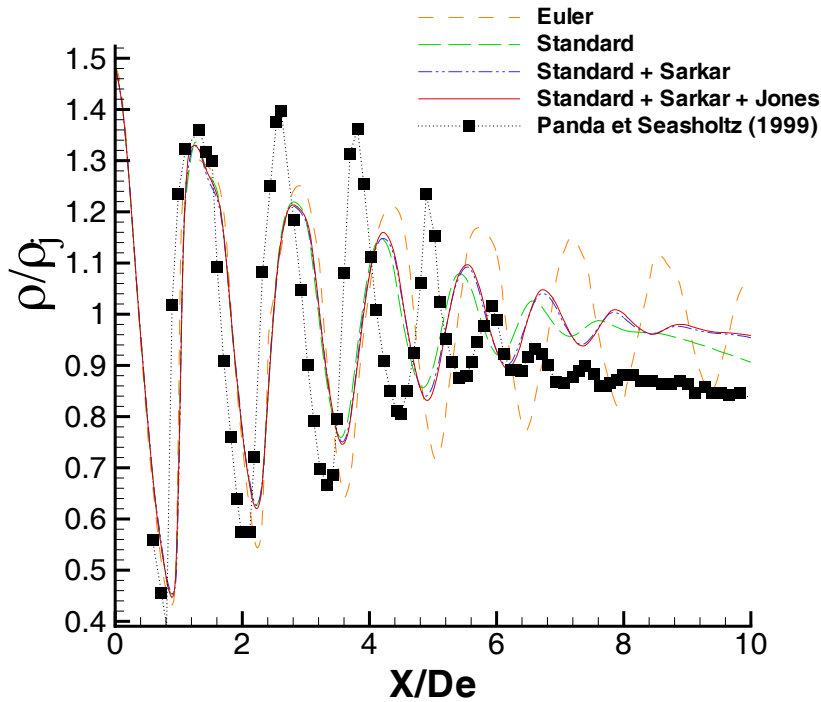


FIG. 11.10 – Comparaison des profils axiaux de la masse volumique adimensionnée.

Notons qu'en dépit de cette surestimation de la longueur du cône potentiel, la comparaison des profils radiaux des variables caractéristiques de l'écoulement étudié expérimentalement ou numériquement peut être réalisée dans le cas où le jet est parfaitement détendu car ces profils sont de même nature. Une telle comparaison n'est cependant plus pertinente dans un jet faiblement sous-détendu dès lors qu'ils peuvent correspondre à des zones de nature différente (compressive ou de détente), même si le décalage, comme dans notre cas de simulation, reste relativement modéré. Essayons d'analyser l'origine du décalage observé. Observons tout d'abord que la prescription d'une intensité de turbulence à 7,5% dans ce cas ne permet de réduire que très légèrement cette erreur de phase et augmente en contrepartie très légèrement l'erreur d'amplitude. Ceci n'est pas étonnant dans la mesure où les niveaux d'énergie cinétique et du coefficient de viscosité turbulente ne sont plus tout à fait comparables à ceux que l'on a pu rencontrer au cours de l'étude du jet de Seiner et al. [85]. Afin de prendre en compte une réduction du diamètre effectif de la buse due à la présence de couche limite, Cumber et al. [40] proposent par exemple, dans le cas d'un jet supersonique à nombre de Mach égal à 2, d'appliquer une opération affine pour corriger l'abscisse selon :

$$\left(\frac{X}{D_e}\right)^* = \left(1 - \frac{\delta_l}{D_e}\right) * \left(\frac{X}{D_e} - \alpha_1\right) \quad (11.2)$$

où  $\delta_l$  est l'épaisseur caractéristique de la couche limite prescrite et  $\alpha_1$  une constante (égale à 0,5 pour Cumber et al.). Nous vérifions que l'application d'une telle opération permet effectivement, en considérant artificiellement un diamètre inférieur de 7% et en réduisant la constante à la valeur de 0,1, de fortement réduire le décalage observé pour les cinq premières cellules de chocs (voir figure 11.11). Cette épaisseur artificiellement importante semble pouvoir nous permettre non seulement de prendre en compte un diamètre effectif plus petit correspondant au diamètre effectif de la buse expérimentale, mais aussi de compenser avant tout l'erreur induite par la géométrie simplifiée du bord de l'ajutage de laquelle dépend fortement l'angle initial du faisceau de détente. Cette correction ne peut cependant compenser le décalage observé à la fin de la zone potentielle. Alors que la simulation nous amène à prévoir une décroissance régulière de l'amplitude des oscillations des variables de l'écoulement sur l'axe, cette décroissance observée expérimentalement est beaucoup plus brutale. Ceci peut être interprété par le fait que nos simulations ne peuvent pas prendre en compte le développement du mode hélicoïdal qui devient prépondérant à la fin de la zone potentielle et accélère le développement tourbillonnaire. Il est alors naturel d'observer un décalage entre les niveaux de masse volumique obtenus à la fin du cône potentiel en  $X/D_e = 8,5$ , le profil numérique ne présentant un niveau de masse volumique similaire que plus loin en aval ( $X/D_e = 11$ ). Nous constatons néanmoins que l'amplitude des oscillations de la masse volumique, induites par le passage successif à travers les zones de détente ou de compression, reste très sous-estimée (de 0,2  $\rho_j$  notamment au niveau du point de réflexion du choc oblique de la seconde cellule). La simulation basée sur les équations d'Euler nous amenant à prévoir une erreur sur l'amplitude du même ordre de grandeur, nous ne pouvons attribuer cette erreur uniquement à une mauvaise représentation du transport turbulent. Cette faiblesse de la simulation semble donc être attribuable, d'une part à l'incapacité du schéma de Roe de capturer précisément les zones de forte détente que l'ajout d'un grand nombre d'éléments au maillage (en tout cas bien au-delà de la plage de niveau de raffinement global utilisée lors de l'étude de sensibilité au maillage) ne saurait corriger qu'en partie, et d'autre part à la non-prise en compte du profil exact en sortie de buse. Même si la buse utilisée pour l'expérience est profilée, une légère déformation des profils de masse volumique peut nous amener au cours de nos simulations à prescrire une valeur de masse volumique à l'ajutage qui surestime, surtout près de l'axe, le niveau réel expérimentalement observable lorsque qu'une buse est utilisée. Nous noterons néanmoins que l'amplitude de la masse volumique, mesurée expérimentalement après le passage à travers le second choc incident, devient plus importante qu'après le passage à travers le premier choc. Celle-ci est donc probablement surestimée par Panda et Seasholtz qui, ne disposant pas de données fiables sur l'évolution du champ de masse volumique dans de tels jets, ont calé leur méthode en mesurant le signal de diffusion dans un jet parfaitement détendu pour lequel ils ont supposé que l'évolution des profils radiaux de masse volumique suivaient une loi d'évolution empirique donnée par Morris et Tam [161]. Celle-ci ne repose cependant que sur la mesure d'un profil de vitesse axiale à partir de laquelle l'évolution du profil de masse volumique est déduit via une équation de Crocco, supposant donc explicitement que l'évolution des variables le long des tubes de courant est isentropique. De l'ensemble de ces considérations, nous ne pouvons que retenir que l'outil numérique retenu nous permet de prévoir qualitativement la structure d'un jet faiblement sous-détendus mais que l'obtention d'une précision plus satisfaisante nécessite un réglage des conditions prescrites à l'ajutage beaucoup plus précis que celui que nous avons retenu et une densité de maillage probablement beaucoup plus élevée.

### 11.2.2 Etude du champ proche de l'écoulement

Dans la zone proche du jet, le plus faible décalage des structures de choc nous permet de caractériser plus précisément le champ de l'écoulement simulé et d'estimer ainsi quantitative-

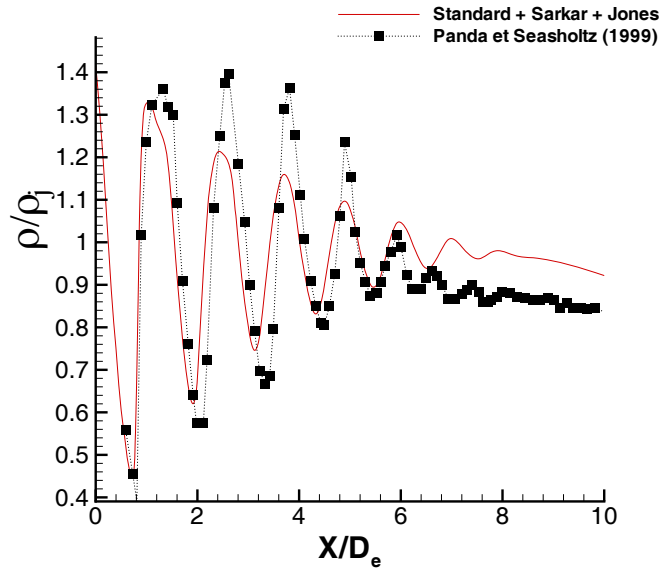


FIG. 11.11 – Comparaison des profils axiaux de la masse volumique adimensionnée obtenus en corrigeant l'abscisse.

ment l'erreur induite par le recours à l'outil numérique. Détaillons dans un premier temps la structure de choc obtenue numériquement. Les carrés noirs reportés sur la figure 11.12 correspondent aux contours déterminés d'après les zones de transition (clair-obscur) distinguables sur la photographie Schlieren publiée dans l'étude de Panda et Seasholtz [124]. La structure expérimentalement observable n'étant pas parfaitement axisymétrique, les images de ces points par symétrie par rapport à l'axe sont également ajoutés, ce qui permet de souligner l'incertitude expérimentale qu'il est nécessaire de considérer pour définir la structure moyenne de cet écoulement de nature fortement instationnaire. Nous pouvons vérifier que l'aspect géométrique de la structure est prévu de façon satisfaisante et que les effets de la turbulence, dans le cas du jet faiblement sous-détendu, jouent un rôle négligeable sur l'évolution des variables au sein de la structure proche de l'ajutage, le modèle standard ou ses versions corrigées pour prendre en compte les effets de compressibilité nous amenant à prévoir une structure géométrique relativement similaire dans cette zone. Le décalage vers l'aval, précédemment mentionné est précisé par les positions moyennes des points de réflexion des chocs incidents sur l'axe et de celles des chocs réfléchis sur la couche de cisaillement (ou frontière du jet), reportées dans le tableau 11.2. D'une part, nous choisissons de définir localement ces positions expérimentales comme les positions moyennes des zones de transition clair / obscur observées par visualisation Schlieren. En supposant que cette position coïncide environ avec la zone où la courbure de la masse volumique s'annule, nous choisissons d'autre part de définir ces positions relatives aux solutions numériques comme la position moyenne ( $\nabla_{\max}$ ) où la norme du gradient de la masse volumique est localement maximale. Une estimation des positions moyennes de ces points de réflexion sur l'axe peut également être donnée par la valeur moyenne ( $\mathbf{Moy}$ ) des valeurs maximale et minimale locales observées sur les profils axiaux de masse volumique (voir figure 11.10). Remarquons que la précision sur ce positionnement géométrique dépend alors fortement de l'estimateur que l'on se donne. D'une part, l'estimation  $\mathbf{Moy}$  des positions des points de réflexion des chocs sur l'axe nous amène à considérer un écart maximal de  $0,15D_e$  uniquement à partir de la seconde cellule

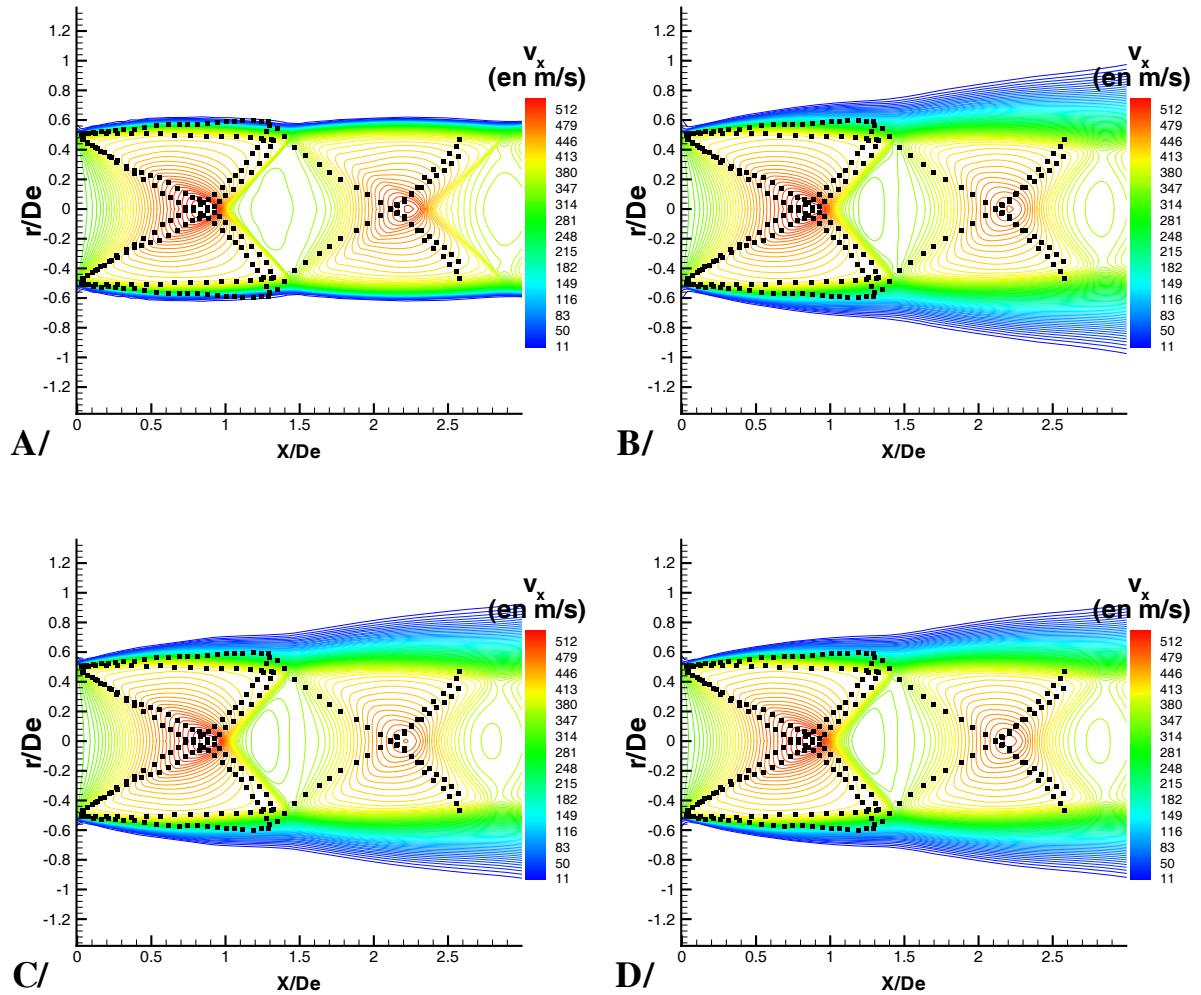


FIG. 11.12 – Comparaison des structures de choc prévues numériquement dans la zone proche via l'utilisation des différents modèles :

- A : Equations d'Euler,
- B : Modèle  $k - \epsilon$  standard,
- C : Modèle  $k - \epsilon$  avec correction de Sarkar pour la pression-dilatation et la dissipation compressible,
- D : Modèle  $k - \epsilon$  avec correction de Sarkar pour la pression-dilatation et la dissipation compressible et fermeture de type gradient pour la production enthalpique.



Modélisation ou référence étudiée	RR1		RO1	RR2		RO2
	Moy	$\nabla_{\max}$	$\nabla_{\max}$	Moy	$\nabla_{\max}$	$\nabla_{\max}$
Euler	(1,1;0)	(1,01;0)	(1,44;0,49)	(2,57;0)	(2,4;0)	(2,86;0,48)
$k - \epsilon$	(1,085;0)	(1,015;0)	(1,41;0,44)	(2,515;0)	(2,41;0)	(2,8;0,42)
$k - \epsilon + \text{Sarkar}$	(1,075;0)	(1,025;0)	(1,41;0,45)	(2,5;0)	(2,36;0)	(2,85;0,44)
$k - \epsilon + \text{Sarkar}$ + Jones	(1,065;0)	(1,03;0)	(1,41;0,43)	(2,5;0)	(2,35;0)	(2,84;0,44)
Panda et Seasholtz (1999)	(1,075;0)	(0,84;0)	(1,32;0,53)	(2,35;0)	(2,11;0)	(2,58;0,41)

TAB. 11.2 – Comparaison des coordonnées des points de réflexion des chocs incidents sur l'axe et des chocs réfléchis à la frontière isobare du jet :

**RR1** : Point de réflexion sur l'axe du choc incident de la première cellule de choc, **RO1** : Position du point de réflexion du choc oblique de la première cellule de choc sur la frontière du jet, **RR2** : Point de réflexion sur l'axe du choc incident de la seconde cellule de choc, **RO2** : Position du point de réflexion du choc oblique de la seconde cellule de choc sur la frontière du jet,  $\nabla_{\max}$  : Estimation d'après la valeur maximale de la norme du gradient de la masse volumique ou de la valeur nulle de la courbure, **Moy** : Evaluation d'après la valeur moyenne sur l'axe du minimum local et du maximum local juste en aval.

de choc et donc à penser que l'erreur introduite en aval est principalement liée à une imprécision dans la prévision de la croissance de la couche de cisaillement. D'autre part, l'estimation ( $\nabla_{\max}$ ) nous indique un décalage plus important vers l'aval, de l'ordre de  $0,2D_e$ , dès la première cellule de choc tandis que l'erreur estimée d'après la solution obtenue à partir des équations d'Euler est du même ordre de grandeur que celle estimée d'après les simulations prenant en compte la turbulence, ce qui nous invite alors à incriminer fortement les conditions prescrites à l'ajutage.

Une observation de l'évolution des profils radiaux de masse volumique extraits des différentes simulations, reportée sur la figure 11.13 nous permet de vérifier que la source d'imprécision provient simultanément de ces deux origines et de souligner la nécessité, soit de prescrire plus précisément les conditions au niveau de l'ajutage, soit de recourir à une correction géométrique du diamètre pris en compte pour comparer les résultats de façon plus pertinente. A titre indicatif, nous retraçons ainsi les profils relatifs aux abscisses modifiées ayant même valeur. Les profils extraits près de l'ajutage en  $X/D_e = 0,6$  et  $0,75$  illustrent clairement que les niveaux de masse volumique sont globalement surestimés non seulement près de l'axe, mais aussi dans l'ensemble de la zone de l'écoulement non encore affectée par le passage à travers le choc et qu'ils sont au contraire sous-estimés au niveau des tubes de courant ayant traversé le premier front de choc incident. Ceci est valable que la turbulence soit prise en compte ou non. Ceci nous indique principalement que le recours au schéma numérique retenu nous conduit à sous-estimer l'intensité des chocs, malgré le recours à la réadaptation du maillage. Les profils extraits en  $X/D_e = 0,9$  correspondent à une position située en léger aval du point de réflexion sur l'axe du choc incident observé expérimentalement et à une position située en léger amont de ce point observé numériquement. Il en découle donc naturellement en cette position un fort décalage des niveaux de masse volumique près de l'axe. Alors que l'effet de recompression à travers le choc incident de la seconde structure de choc est visible dès  $X/D_e = 1,4$  sur les profils expérimentaux, il ne commence à être visible qu'entre  $X/D_e = 1,55$  et  $X/D_e = 1,7$  sur les profils numériques. L'ensemble des profils numériques extraits après correction de l'abscisse présentent en revanche une bien meilleure adéquation tant qualitative que quantitative. Ainsi, même si les niveaux minimaux et

maximaux des variables physiques, restent surestimés et sous-estimés respectivement dans l'ensemble de l'écoulement, principalement à cause de la dissipation introduite par le solveur de Roe et la correction entropique et l'utilisation d'un nombre limité de noeuds de calcul, l'utilisation de la procédure de réadaptation nous permet de prévoir globalement l'évolution dynamique du jet faiblement sous-détendu. Des comparaisons quantitatives nécessitent néanmoins de réinterpréter les résultats en prenant en considération le fait qu'une géométrie simplifiée de l'ajutage a été prise en compte pour mener à bien les simulations. Une étude plus complète de l'effet de cette géométrie s'avère nécessaire pour quantifier plus précisément l'erreur induite sur l'écoulement par l'utilisation d'une géométrie trop simplifiée du bord de l'ajutage.

### 11.2.3 Bilan et remarques qualitatives sur la représentativité du modèle

Pour le jet faiblement sous-détendu que nous étudions, nous observons que la précision avec laquelle nous pouvons prévoir son évolution semble avant tout dépendre de la précision avec laquelle les flux convectifs peuvent être évalués et avec laquelle nous pouvons représenter la géométrie de l'ajutage. La précision avec laquelle la turbulence est représentée joue néanmoins un rôle non-négligeable. Les corrections de compressibilité permettent de déplacer suffisamment l'équilibre dans le bilan de l'énergie cinétique turbulente au sein de la couche de cisaillement, avant tout dominé par la production par cisaillement et la dissipation, de façon à générer des niveaux de  $k$  inférieurs. La valeur inférieure du coefficient de viscosité turbulente qui en découle permet alors d'inhiber la diffusion radiale de quantité de mouvement classiquement surévaluée par le modèle standard et de réduire sensiblement l'évasement de la zone interne de la couche de cisaillement. Puisque les niveaux de  $k$  rencontrés dans la couche de cisaillement sont largement plus importants que ceux rencontrés au sein de la zone potentielle, ces corrections ne semblent ainsi à première vue n'avoir une influence significative sur le champ des variables dynamiques dans la zone potentielle que dans la mesure où elles vont alors décaler les cellules de choc vers l'amont par décalage des zones de réflexion des faisceaux d'ondes de Mach. Typiquement, nous vérifions ainsi que l'utilisation de la correction de Sarkar et al. nous amène à réduire la longueur du cône potentiel d'une longueur équivalente à  $1D_e$  environ, de sorte que la décroissance des structures prévue avec le modèle standard est sensiblement plus rapide. De par l'erreur induite par la géométrie simplifiée de l'ajutage, nous constatons que le modèle standard permet ainsi artificiellement de mieux prévoir, pour ce cas de simulation, la position des cellules de choc. L'amplitude des oscillations des variables induites par le passage successif à travers les zones de choc et de détente reste néanmoins sous-estimée de façon équivalente par le modèle standard et le modèle corrigé. Il est alors intéressant de remarquer que cette erreur n'est véritablement significative qu'à partir de la seconde cellule de choc. La représentativité physique de l'interaction des chocs obliques avec la couche de cisaillement semble ainsi également jouer un rôle fondamental dans la prévision de l'intensité des ondes de détente naissant à partir de cette zone d'interaction, rôle qui semble être imparfaitement représenté par l'outil retenu. Aussi proposons-nous de décrire succinctement, de façon qualitative (à défaut de disposer de données expérimentales sur le champ turbulent de ce type de jets), comment les grandeurs caractéristiques du champ turbulent sont affectées au sein du jet, afin de souligner les qualités et faiblesses de la modélisation.

La figure 11.14 illustre l'évolution spatiale de quelques unes des grandeurs caractéristiques intervenant dans le bilan d'énergie cinétique turbulente, sur des échelles adaptées pour faire apparaître la structure caractéristique de l'écoulement dans la zone potentielle. Les taux de dissipation solénoïdale et compressible, les termes de production par cisaillement, de production enthalpique, de pression-dilatation, de diffusion et de convection sont adimensionnés par  $\frac{v_x^3}{D_e}$ . Il est avant tout intéressant de remarquer que le champ de l'énergie cinétique turbulente est beaucoup plus affecté par la présence de la structure de choc que celui de son taux de dissipation

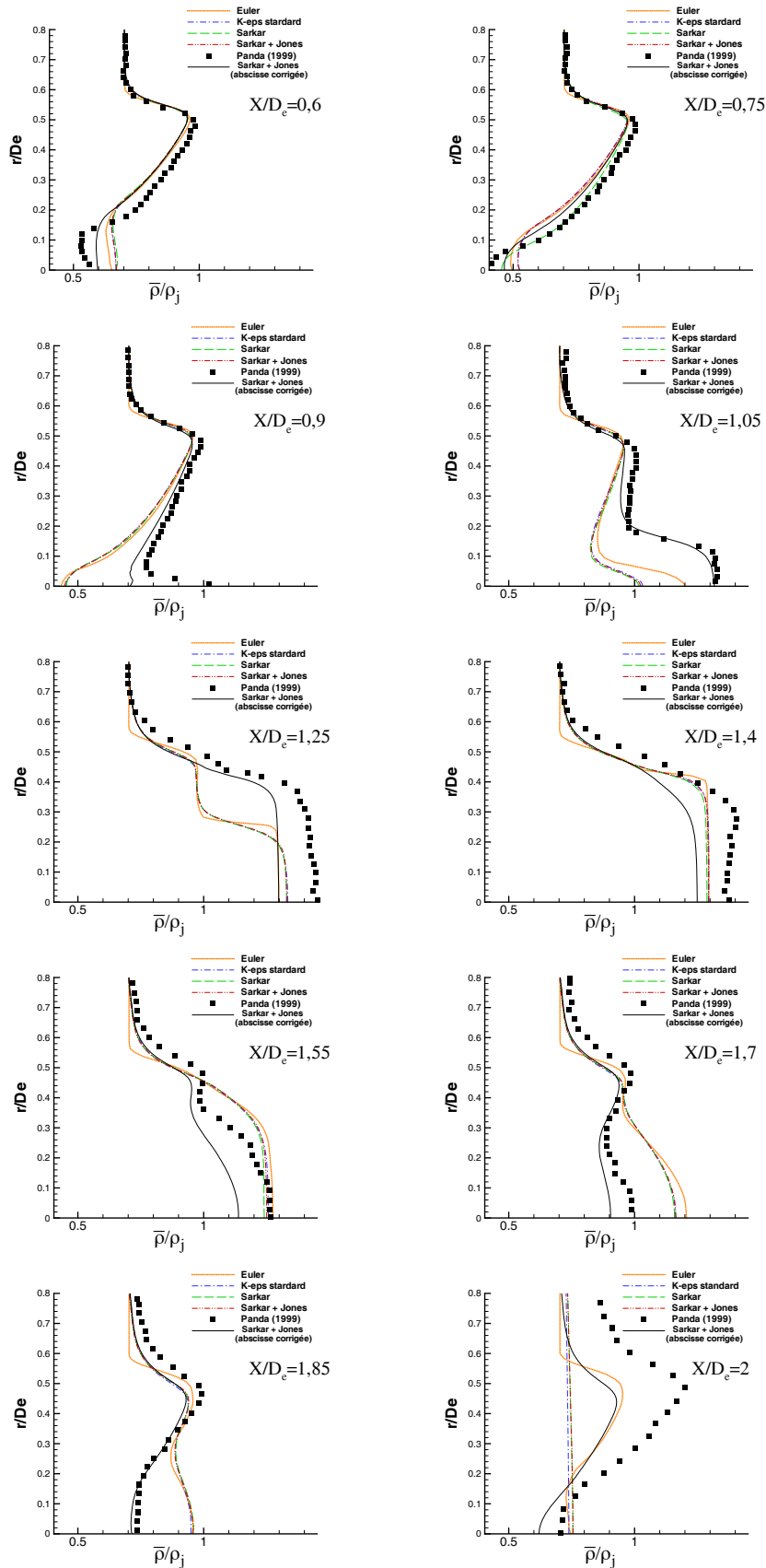


FIG. 11.13 – Evolution des profils radiaux de masse volumique dans la zone proche du jet faiblement sous-détendu.

solénoïdale. Dans cette zone dite "potentielle", le taux de dissipation compressible est de trois ordres de grandeur inférieur au moins au taux de dissipation solénoïdale, de sorte que son effet reste peu important au sein de cette zone. A partir de l'ajutage, les particules fluides passant à travers la première cellule de choc vont voir leur niveau de  $\epsilon_s$  augmenter d'un ordre de grandeur environ, niveau qui oscille ensuite entre cette valeur et sa moitié. La multiplication par cinq environ des niveaux de  $k$  se traduit alors par une augmentation substantielle (facteur 2,5) du niveau du coefficient de viscosité turbulente. Ainsi, si le rapport des niveaux de  $k$  et de  $\nu_t$  entre la couche de cisaillement et le cône potentiel pilote en grande partie la diffusion de  $k$  dans la zone interne de la couche de cisaillement, la méthodologie utilisée pour reproduire plus correctement l'évasement de cette couche dans le cas d'un jet parfaitement détendu ne peut plus s'appliquer de façon générale au cas du jet sous-détendu. Il semble en effet peu évident de recalculer les niveaux de  $k$  et  $\epsilon$  à imposer en entrée en fonction d'un taux d'augmentation, principalement à travers la première cellule de choc, qui est difficilement prévisible *a priori*. Il est intéressant de remarquer par ailleurs que, même si les niveaux de  $k$  au sein de la zone potentielle restent largement inférieurs à ceux observés dans la couche de cisaillement, le nombre de Mach turbulent prévu par notre simulation présente des ordres de grandeurs proches de 0,1, donc déjà suffisamment importants pour que les effets de compressibilité, tels qu'ils sont modélisés, puissent se faire ressentir, notamment dans la zone d'interaction avec le choc réfléchi de la première structure. L'effet du terme de production enthalpique reste cependant largement supérieur à celui de la pression-dilatation dans cette zone d'interaction avec le choc réfléchi, où l'on peut voir ce terme atteindre des niveaux à peine inférieurs aux niveaux de production par cisaillement. Ce terme ainsi modélisé permet donc de limiter le niveau d'énergie cinétique produit au sein de la zone potentielle par interaction avec le choc, niveau probablement très surestimé par la seule prise en compte de la production par cisaillement. Les mécanismes de convection et diffusion s'équilibrant dans cette zone de choc, l'action du terme de production semble ainsi pouvoir contribuer à réduire sensiblement le niveau de  $k$  au sein de la zone potentielle, et ainsi à réduire l'épanouissement du jet, même si cette contribution reste négligeable dans notre cas de simulation. D'autres tests pour des jets faiblement sous-détendus supersoniques, pour lesquels des niveaux de  $k$  plus importants seraient rencontrés au sein de la zone potentielle, nous permettraient de vérifier cette hypothèse. Finalement, remarquons le comportement particulier de ces termes dans la zone de réflexion du choc réfléchi sur la couche de cisaillement. Dans cette zone, le terme de production par cisaillement prend non seulement en compte l'effet d'un cisaillement pur lié à la couche de mélange, mais aussi l'effet des gradients longitudinaux induit par la focalisation des ondes de compression d'une part, et une divergence qui tend vers zéro d'autre part. Le niveau d'énergie cinétique, et donc du nombre de Mach turbulent, restant relativement peu élevé par rapport aux niveaux rencontrés au centre de la couche de cisaillement, nous pouvons supposer que les termes de pression-dilatation et de production enthalpique, sous la forme modélisée retenue, ne permettent plus de compenser une production par cisaillement qui devient localement excessive. Une telle production localement trop élevée de  $k$  peut alors nous conduire à sous-estimer la pression dans cette zone de réflexion du choc réfléchi, et donc l'intensité des ondes compressives issues des lignes de courant défléchies dans cette zone au sein de la couche de cisaillement. L'intensité du choc incident et son angle par rapport à l'axe serait ainsi également sous-estimés, expliquant en partie le fort décalage en amplitude observés entre les profils axiaux expérimentaux et numériques au niveau de la seconde cellule de choc.

Faisons finalement quelques remarques sur la représentation de la distribution des contraintes turbulentes prévue par l'utilisation du modèle retenu, illustrée par la figure 11.15. Les niveaux de fluctuation "rms" sont adimensionnés par la vitesse à l'ajutage tandis que les contraintes de cisaillement (pondérées par la masse volumique locale) sont adimensionnées par le carré de cette

vitesse. En parcourant les lignes de courant (dont quelques-unes sont illustrées pour le champ d'isocontours de  $v_{xrms}$ ) à partir de l'ajutage (où les niveaux de contraintes radiales sont deux fois plus élevés que ceux des contraintes longitudinales, nous pouvons observer que le processus de détente en amont du choc incident a tendance à augmenter progressivement le niveau des contraintes radiales et diminuer celui des contraintes longitudinales, sauf près de l'axe où la tendance inverse est observée. Alors que le passage à travers le choc incident entre  $r/D_e = 0,2$  et  $r/D_e = 0,5$  a tendance à redonner un comportement plus isotrope, la détente plus intense près de l'axe induit une augmentation substantielle du niveau d'anisotropie. Le rapport  $v_{xrms}/v_{rrms}$  illustre particulièrement (sauf dans la zone de co-écoulement où les mailles sont trop grossières pour réinterpréter de façon pertinente les gradients qui y seraient calculés) que les champs de contraintes prévus dans les zones localisées près de l'axe entre le choc réfléchi et le choc incident sont particulièrement anisotropes. Des niveaux de fluctuations de vitesse longitudinale jusqu'à 9 fois plus élevés que ceux des fluctuations de vitesse radiale y sont observables. Ceci nous amène ainsi à reconsidérer l'utilisation du modèle  $k - \epsilon$  sous sa forme standard pour représenter précisément l'évolution des contraintes dans le champ proche d'un jet faiblement sous-détendu. Même si en aval du choc réfléchi, l'anisotropie retombe à des niveaux plus classiquement observés (autour de 1 quelque soit le rapport considéré), la fermeture de Boussinesq utilisée nous conduit probablement à dégrader fortement le transport des échelles turbulentes dans cette zone proche.

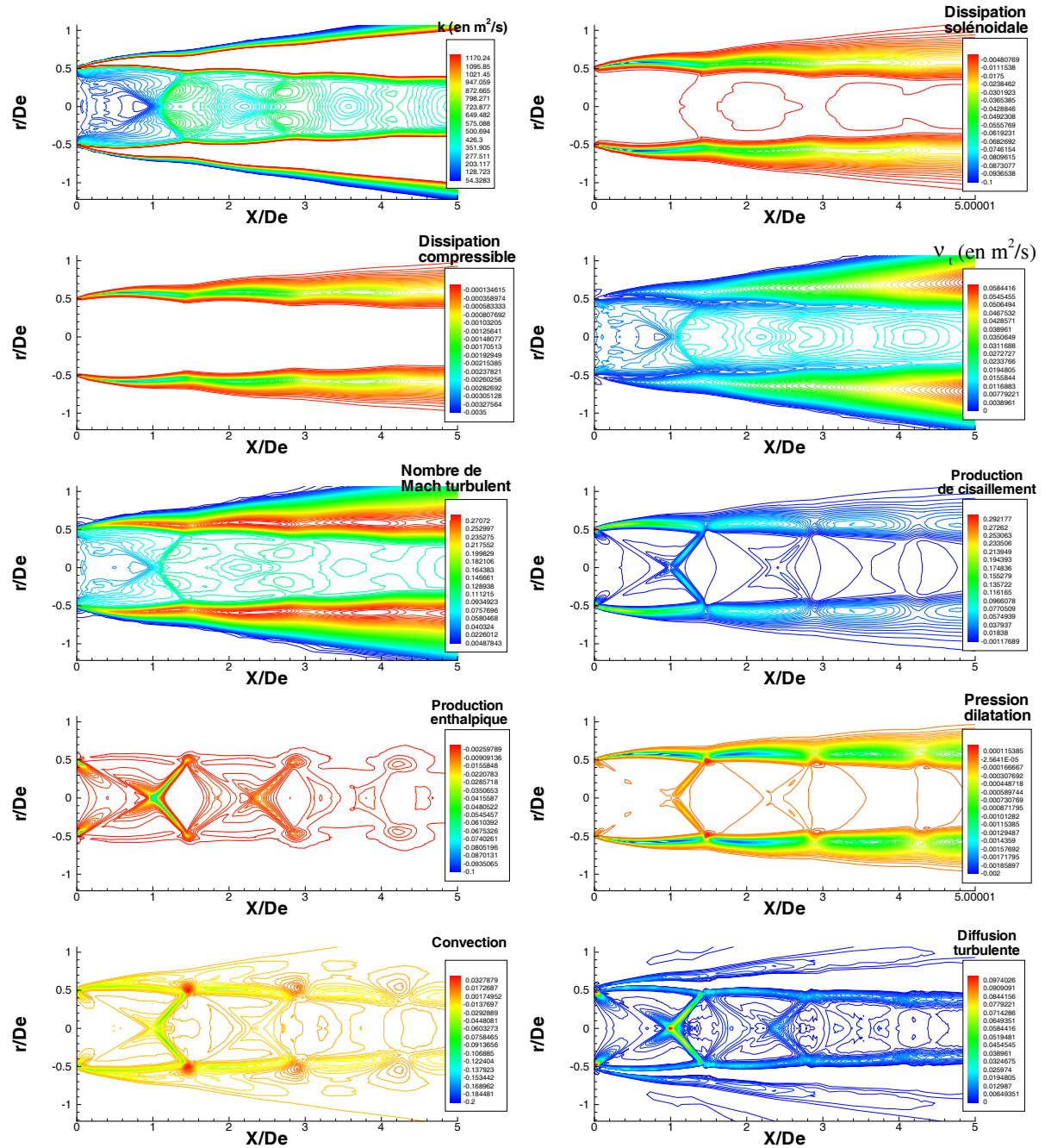


FIG. 11.14 – Structure du jet faiblement sous-détendu : isocontours de quelques grandeurs caractéristiques intervenant dans le bilan d'énergie cinétique turbulente.

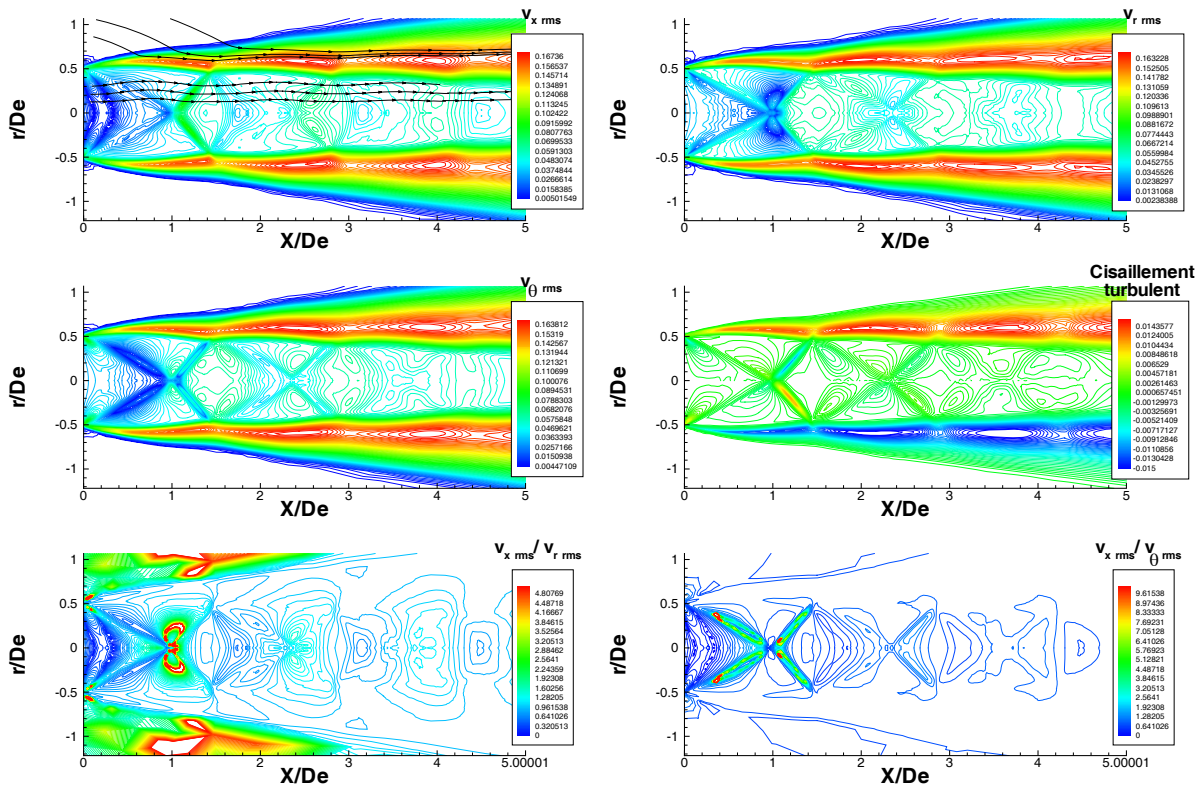


FIG. 11.15 – Structure du jet faiblement sous-détendu : distribution des contraintes turbulentes et de leurs rapports.

L'étude numérique du jet faiblement sous-détendu étudié expérimentalement par Panda et Seasholtz [124] nous a permis de démontrer que l'outil numérique retenu permet, en recourant à un nombre modéré de cycles de calcul et d'éléments introduits pour les maillages, de correctement reproduire le champ des variables hydrodynamiques. La structure de choc observable dans ces jets étant particulièrement sensible aux conditions géométriques du bord de l'ajutage (qui conditionne la divergence des lignes de courant et l'information caractéristique véhiculée le long des lignes de Mach), il semble néanmoins nécessaire de pouvoir affiner la prescription de ces conditions limites afin de pouvoir effectuer des comparaisons quantitatives sans recourir à des ajustements d'abscisses absolument non-généralisables. Bien que la structure de la couche de cisaillement soit reproduite de façon satisfaisante, une observation qualitative de l'évolution spatiale de quelques variables représentatives des champs turbulents nous ont permis de vérifier la nature particulièrement anisotrope du jet, en dépit du niveau relativement modéré de détente. Afin de préciser l'influence du champ turbulent sur l'évolution de la structure de choc rencontrée dans le cône potentiel, tout en limitant le coût des simulations, nous suggérons donc, dans un premier temps, de recourir à une fermeture non-linéaire du coefficient de viscosité turbulente. La structure du jet très fortement sous-détendu étant très différente de la structure du jet faiblement sous-détendu, elle présente probablement une sensibilité différente aux conditions prescrites à l'ajutage. Par ailleurs, l'interaction de la structure de choc avec la couche de cisaillement est dans ce cas beaucoup plus forte, de sorte que la problématique de la modélisation de la turbulence peut être relativement différente de celle qui conclut cette étude sur le jet faiblement sous-détendu.





## Chapitre 12

# Simulation de jets fortement sous-détendus

Comme nous le soulignons dès l'introduction de ce mémoire, force est de constater que très peu de données expérimentales sont disponibles dans la littérature ouverte sur les jets sous-détendus. Au mieux dispose-t'on généralement de quelques visualisations Schlieren et de quelques profils de pression statique ou de nombre de Mach sur l'axe pour des jets supersoniques faiblement à modérément sous-détendus. Mis à part les données de Yüceil et Ötügen [177][176] et Yüceil et al. [91], aucune donnée exploitable n'a pu être récupérée au cours du temps consacré à cette étude, sur les jets soniques pour les gammes de NPR qui nous intéressent plus particulièrement. Pourtant, quelques profils de vitesse axiale et quelques profils radiaux de vitesse longitudinale, obtenus principalement par vélocimétrie par plan laser et par diffusion Rayleigh, suffisent, à l'aide des conclusions des études précédemment présentées, à caractériser les capacités prévisionnelles de l'outil ainsi constitué et préciser l'origine de ces limitations. Nous choisissons de présenter les cas de jets à  $NPR = 7,55$  et  $NPR = 15,53$  (cette dernière valeur étant légèrement supérieure à la valeur nominale actuellement retenue pour les tests de certification) pour lesquels l'ensemble des conditions prescrites aux limites sont données dans le tableau 12.1. Avant d'illustrer les résultats obtenus, rappelons que la précision des solutions que nous pouvons obtenir est contingente des paramètres de la réadaptation qui doivent être réajustés dès lors que la structure de l'écoulement est aussi fondamentalement modifiée. Aussi vérifions-nous dans un premier temps la sensibilité des solutions obtenues au maillage.

### 12.1 Etude de sensibilité au maillage, à la longueur du domaine et au solveur numérique

#### 12.1.1 Etude de sensibilité au maillage

L'étude est menée simultanément sur les deux domaines  $MI_1$  et  $MI_2$  présentés dans le paragraphe 9.2.1, en simulant l'écoulement pour les deux cas de NPR choisis et pour plusieurs niveaux de raffinement global, d'une part en utilisant uniquement les équations d'Euler, d'autre part en utilisant le modèle de turbulence retenu. Nous vérifions naturellement, comme nous le présentons au chapitre 10.2.1, que la solution est suffisamment convergée au bout de chaque cycle de la simulation pour que la réadaptation du maillage puisse être appliquée de façon pertinente.

Grâce à un réglage adéquat des paramètres de la méthode de réadaptation, nous pouvons vérifier dans un premier temps que l'adaptation progressive du maillage, illustrée sur la figure 12.1 se comporte de la façon attendue. La solution initiale obtenue à partir du maillage initial

Jet étudié	Conditions dans la section de l'ajutage	Conditions dans la section d'entrée du co-écoulement et de la frontière de sortie
NPR = 7,55	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>D_e = 0,0089</math> m</li> <li>- <math>p_e = 754431,5</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xe} = 309,8</math> m/s</li> <li>- <math>v_{re} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_e = 234</math> K</li> <li>- <math>M_e = 1,01</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>p_a = 101353</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xa} = 17,3</math> m/s</li> <li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_a = 298</math> K</li> <li>- <math>M_a = 0,05</math></li> </ul>
NPR = 15,53	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>D_e = 0,0089</math> m</li> <li>- <math>p_e = 1574020</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xe} = 310,6</math> m/s</li> <li>- <math>v_{re} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_e = 235</math> K</li> <li>- <math>M_e = 1,01</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>p_a = 101353</math> Pa</li> <li>- <math>v_{xa} = 17,3</math> m/s</li> <li>- <math>v_{ra} = 0</math> m/s</li> <li>- <math>T_a = 298</math> K</li> <li>- <math>M_a = 0,05</math></li> </ul>

TAB. 12.1 – Conditions limites utilisées pour la simulation des jets fortement sous-détendus étudiés par Yüceil et Ötügen [177] [176] et Yüceil et al. [91].

(12057 noeuds) étant relativement diffuse, la première application de l'algorithme de réadaptation conduit à répartir un nombre important d'éléments (13589 noeuds) sur une zone suffisamment large autour de la couche de mélange et les zones de choc oblique et du disque de Mach pour que la structure de choc plus précisément calculée puisse se décaler en amont de sa position initiale pendant la phase pseudo-instationnaire du calcul sans conduire à la divergence du calcul. Au début du troisième cycle de la simulation, les éléments sont alors essentiellement déplacés et concentrés autour de la nouvelle géométrie de la structure de choc qui présente encore une grande irrégularité au niveau du disque de Mach de par le déplacement de cette structure à l'étape précédente, tandis qu'un grand nombre d'éléments sont supprimés à la périphérie de la couche de mélange ou orientés le long des lignes de courant au sein de cette couche. A l'issue de cette troisième étape de calcul, la géométrie de la structure de choc n'évolue quasiment plus et les étapes suivantes permettent essentiellement de parfaire l'alignement des éléments triangulaires le long des discontinuités de choc, de la ligne de glissement issue du point triple et de la frontière du jet. Les faisceaux divergents d'ondes de Mach dans la zone en aval de la structure de choc en bouteille ne pouvant plus se focaliser, le positionnement des zones de compression et de détente entre la périphérie du jet et la ligne de glissement en aval du disque de Mach devient beaucoup moins sensible au niveau global de raffinement choisi, une augmentation du nombre d'éléments introduits permettant simplement de capturer de façon légèrement plus précise le saut des grandeurs à travers les discontinuités.

Les éléments retenus *a priori* comme étant les plus représentatifs de la sensibilité de la structure du jet sont les profils des variables sur l'axe et la position du point triple, une comparaison des champs d'isocontours et de profils radiaux des variables physiques étant ensuite menée *a posteriori*. Une comparaison des profils de vitesse axiale est par exemple présentée sur les figures 12.2 et 12.3 pour une simulation à NPR = 15,53 basée sur les équations d'Euler sur le domaine  $\mathbf{M1}$  et pour une simulation à NPR = 7,55 basée sur le modèle de turbulence retenu

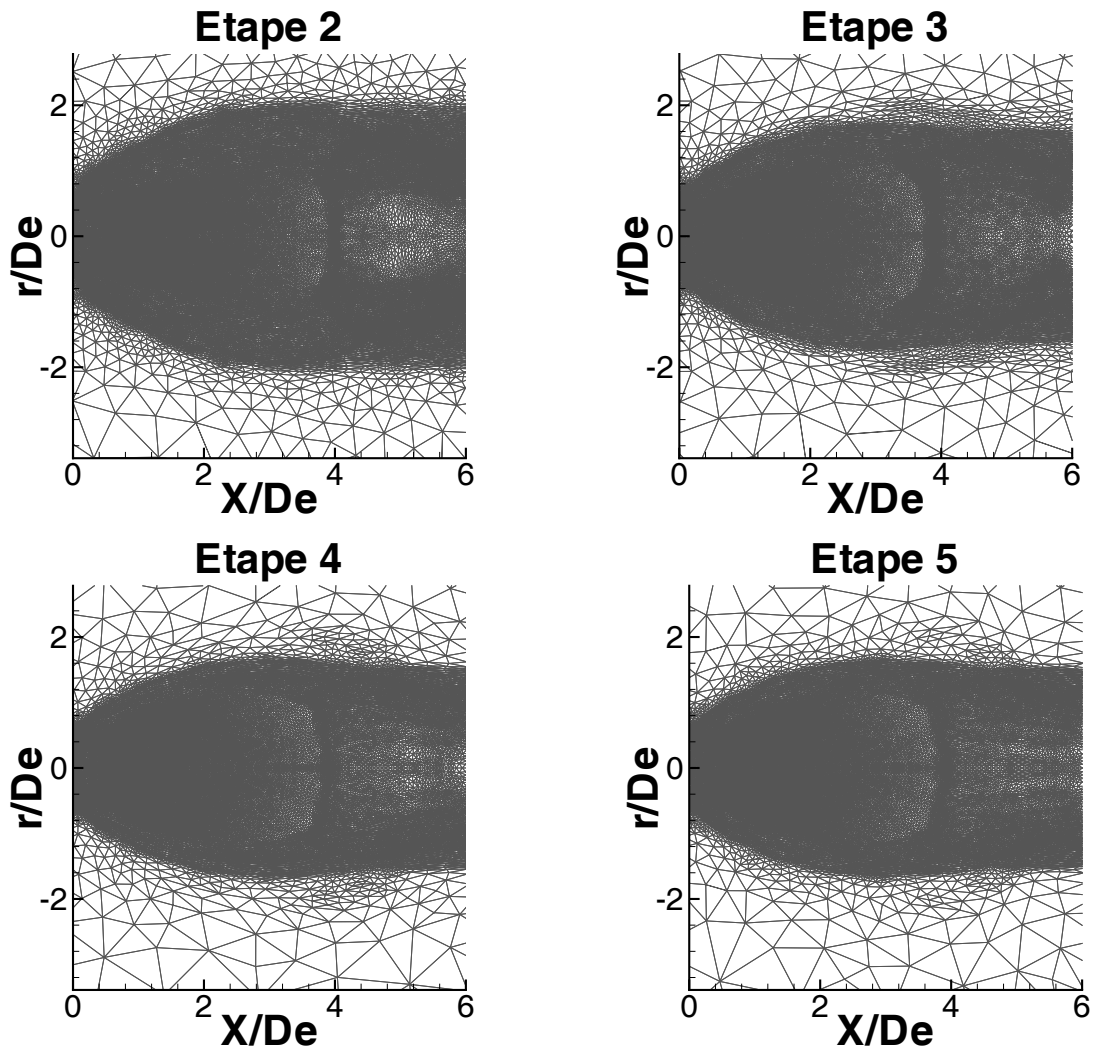


FIG. 12.1 – Evolution de la structure du maillage adapté dans la zone proche pour le domaine  $MI_1$  utilisé pour une simulation basée sur les équations d'Euler (13589, 11272, 10148 et 10040 noeuds utilisés pour le maillage central aux étapes 2 à 5 respectivement).

sur le domaine  $\mathbf{MI}_2$ . Nous pouvons constater sur ces exemples que quatre étapes de simulation et 10000 éléments suffisent pour que la solution obtenue ne change plus de façon significative lorsque la simulation est menée sur le domaine  $\mathbf{MI}_1$  en utilisant les équations d'Euler pour  $\text{NPR} = 15,53$  (et donc *a fortiori* pour  $\text{NPR} = 7,55$ ), tandis que trois étapes et 18000 éléments environ suffisent pour simuler un jet à  $\text{NPR} = 7,55$  sur le domaine  $\mathbf{MI}_2$  avec le modèle de turbulence retenu. Par comparaison de l'extension géométrique de la structure de choc et de l'intensité de la détente, relatives aux cas de jets turbulents à  $\text{NPR} = 7,55$  et  $\text{NPR} = 15,53$ , un niveau global de raffinement (25000 noeuds) est déduit pour ce dernier cas, en prenant en compte une large marge de sécurité, pour obtenir une solution que nous pouvons considérer comme ne dépendant plus d'un niveau de raffinement global du maillage plus important.

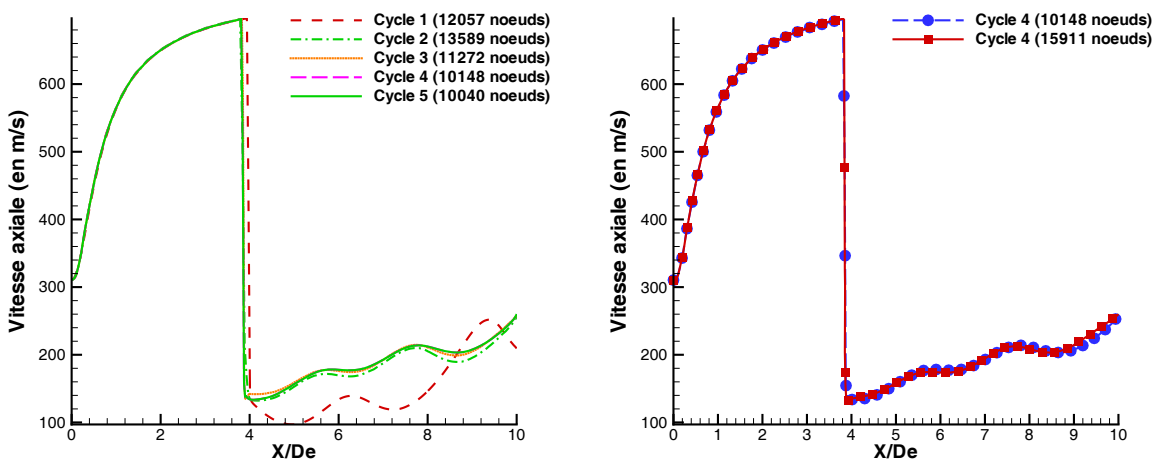


FIG. 12.2 – Étude de sensibilité au nombre d'étapes de la simulation et au niveau global de raffinement pour un jet à  $\text{NPR} = 15$  simulé à partir des équations d'Euler sur le domaine  $\mathbf{MI}_1$  (extension  $10D_e$ ).

### 12.1.2 Sensibilité à la longueur du domaine de calcul

A cause de la présence d'une zone subsonique en aval du disque de Mach, l'utilisation de notre zone de maillage "tampon" pourrait conduire à rendre la solution du jet fortement sous-détendu plus sensible à la forme de cette zone. Après avoir déterminé un niveau de raffinement global et un nombre de cycles de calcul suffisant pour obtenir des solutions ne dépendant plus du maillage dans la zone centrale, les autres paramètres de la réadaptation étant prédéterminés, vérifions plus précisément l'influence de la perturbation induite par la présence de la zone tampon. Nous remplaçant dans la configuration *a priori* la plus sensible, nous comparons donc les solutions finales obtenues avec les équations d'Euler sur les domaines  $\mathbf{MI}_1$  et  $\mathbf{MI}_2$ . Cette comparaison illustrée par exemple par la pression, la vitesse et la température sur l'axe sur la figure 12.4 pour le cas à  $\text{NPR} = 7,55$  nous permet de constater que les solutions obtenues sont en fait quasiment identiques dans la zone centrale du domaine  $\mathbf{MI}_1$  ( $X/D_e < 10$ ). Nous remarquons que l'utilisation du domaine  $\mathbf{MI}_1$ , très faiblement étendu, nous conduit à prévoir une structure de choc légèrement plus courte et plus large, la variation des longueurs caractéristiques de la structure restant inférieure à 3% du diamètre de l'ajutage. Cette différence est naturellement due en partie à des niveaux très légèrement différents obtenus en léger amont de la frontière

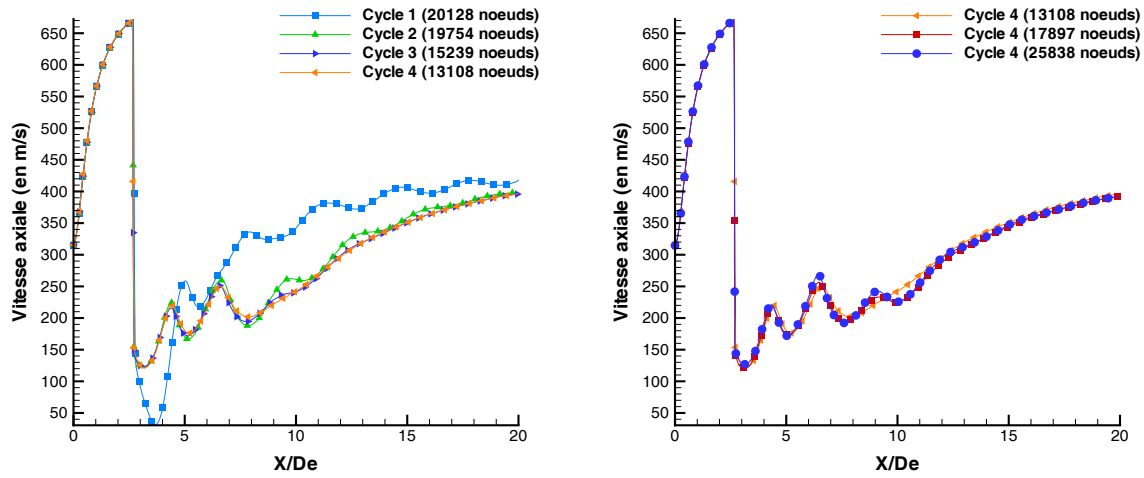


FIG. 12.3 – Etude de sensibilité au nombre d'étapes de la simulation et au niveau global de raffinement pour un jet turbulent à  $\text{NPR} = 7,55$  simulé sur le domaine  $\text{MI}_2$  (extension  $20D_e$ ).

mixte entre le maillage central et le maillage "tampon". Il semble néanmoins avant tout piloté par l'entraînement artificiel sensiblement plus important autour de la cellule de choc (induit par la diffusion volontairement introduite dans la zone tampon en aval) du co-écoulement à la périphérie du jet dans le cas où le domaine est court. Cet entraînement artificiel étant similaire dans le cas turbulent ou non-turbulent, la structure du jet obtenue dans la zone centrale pour un jet turbulent n'est pas non plus fondamentalement affectée par l'utilisation de la zone tampon. En considération du gain en temps CPU induit par l'utilisation du maillage court, la qualité de la solution obtenue sur le domaine  $\text{MI}_2$  peut donc être considérée comme suffisante si on ne s'intéresse qu'à la structure proche du jet. Notons alors que l'utilisation de deux zones de maillages distinctes (avec néanmoins des conditions de déraffinement ajustées précisément) nous permet de déterminer précisément la zone du domaine de calcul où une information précise peut véritablement être obtenue.

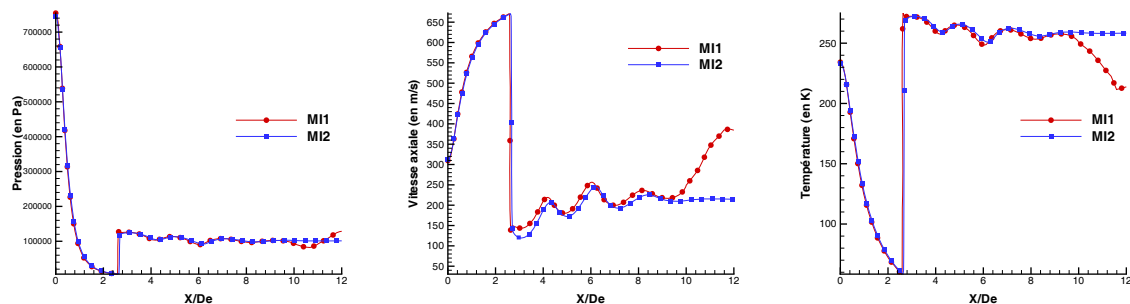


FIG. 12.4 – Etude de sensibilité à la longueur du domaine central utilisé pour simuler un jet non-turbulent à  $\text{NPR} = 7,55$ .

### 12.1.3 Sensibilité au solveur numérique

Enfin, évoquons l'influence du solveur numérique retenu pour évaluer le flux convectif. Comme nous avons déjà pu le constater lors de la simulation d'écoulements structurellement plus simples, l'utilisation du limiteur de Van Leer Van Albada, conduit à la divergence du calcul dès que l'intensité des chocs mise en jeu est trop importante. Ce fait est également observable sur le cas du jet sous-détendu. Modérons cette constatation en précisant que la prescription d'un nombre de CFL inférieur à 0,5 n'a cependant pas été testée sur cette configuration. L'utilisation du solveur de Van Leer couplé au limiteur "minmod" reste en revanche suffisamment robuste si le calcul est initialisé par interpolation à partir d'une solution initiale prévue en utilisant le schéma de Roe couplé au limiteur "minmod". La comparaison de quelques variables physiques, présentée sur la figure 12.5 pour le cas à  $NPR = 15,53$  nous permet alors de vérifier que ces deux solveurs, lorsqu'ils sont couplés au limiteur "minmod" nous conduisent à prévoir une structure d'écoulement identique dans la zone de forte détente. Seule une légère différence est observable en aval du disque de Mach sur les variables de vitesse et de température. Cette différence s'interprète par le fait que le solveur de Roe nous amène à considérer une chute de la vitesse et une augmentation de température légèrement plus importantes d'une part, et par le fait que la courbure de la ligne de glissement issue du point triple est légèrement plus faible lorsque le solveur de Van Leer est utilisé (et conduisant à un effet "tuyère" moins prononcé) d'autre part. La structure de l'écoulement n'étant pas significativement modifiée lorsque l'on cherche à diminuer l'importance de la diffusion numérique en cours de simulation en basculant de l'utilisation du schéma de Roe à celle du schéma de Van Leer, nous considérons cette opération peu utile. Tous les résultats présentés dans les sections suivantes sont obtenus en utilisant le solveur de Roe couplé au limiteur "minmod".

## 12.2 Etude de la structure globale du jet

L'indépendance de la solution obtenue par l'application de la stratégie de simulation choisie étant assurée, nous pouvons analyser la qualité de cette solution. Précisons tout d'abord qu'il n'a pas été possible d'obtenir une solution de jet stationnaire à partir des équations d'Euler pour le cas à  $NPR = 15,53$  sur le maillage  $MI_2$ , et ce en dépit de plusieurs réajustements de l'étendue de la zone "tampon" et des longueurs prescrites pour les éléments de frontière de ce maillage "tampon" (afin de discriminer un possible amortissement insuffisant des ondes numériques se réfléchissant dans cette zone) ou des paramètres contrôlant la répartition des éléments dans la zone réadaptée (afin de discriminer un possible phénomène de basculement régulier des valeurs des pentes utilisées près des discontinuités de choc). La propagation d'instabilités le long de la couche de mélange reste observable dans ce cas quels que soient les paramètres utilisés pour contrôler les maillages. L'importante longueur du domaine central et la faible épaisseur de la couche de mélange semblent dans ce cas pouvoir nous conduire à capturer certaines instabilités intrinsèquement liées à cet écoulement non-visqueux. La prise en compte de la diffusion turbulente conduit naturellement à observer une couche de cisaillement qui s'épaissit rapidement, ce qui nous permet en revanche d'obtenir dans ce cas une solution convergée sans difficulté majeure. Observons les caractéristiques principales de la structure globale des jets ainsi obtenus.

### Représentation de l'adaptation du jet

La figure 12.6 présente les champs d'isocontours de quelques grandeurs caractéristiques de l'écoulement pour le cas à  $NPR = 7,55$ . Nous pouvons constater que la morphologie globale

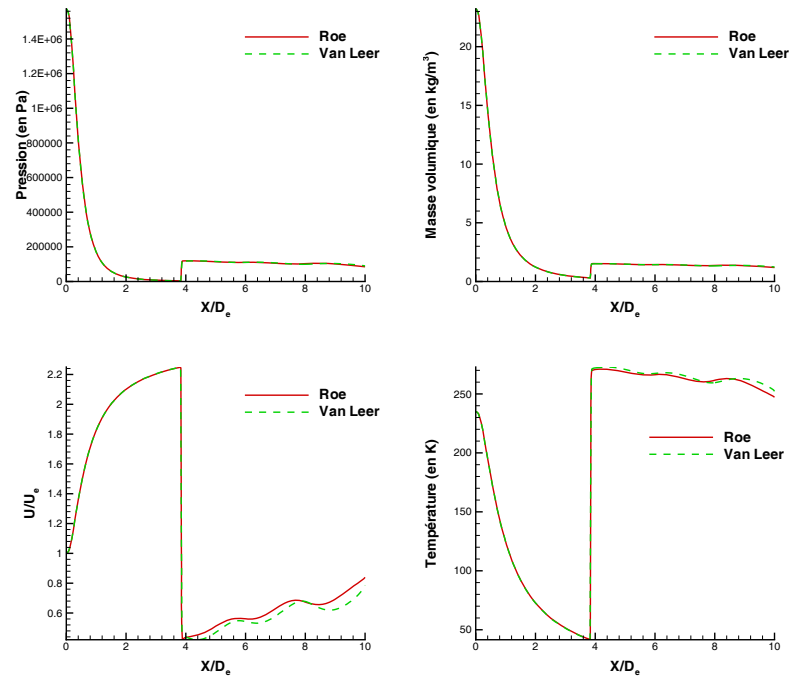


FIG. 12.5 – Comparaison des profils de pression, de masse volumique, de vitesse axiale et de température sur l'axe, obtenus avec le solveur de Roe ou le solveur de Van Leer, couplé au limiteur "minmod".

du jet fortement sous-détendu est bien prévue. L'adaptation du niveau de pression statique étant principalement assurée par le phénomène de détente initiale, le jet redevient quasiment isobare au-delà de l'unique cellule de choc existant dans cette configuration. Nous observons néanmoins des niveaux de pression statique sensiblement plus importants en aval du choc réfléchi (autour de 150000 Pa) qu'en aval du disque de Mach (autour de 125000 Pa), ces deux niveaux devant être très proches de la valeur observable dans le co-écoulement, à l'écart théorique près lié à l'augmentation d'entropie et à l'écart expérimental près de phénomènes de surdétente à la périphérie du jet. A défaut de disposer de données expérimentales précises pour le champ de pression pour cette configuration, nous pouvons considérer que celui-ci est qualitativement bien prévu par la simulation en aval de la cellule de choc. En supposant que ces niveaux devraient tous deux être plus proches du niveau de pression statique de l'atmosphère ambiante, nous ne pouvons que supposer que le niveau de pression reste légèrement surestimé dans la zone de détente en amont de la structure de choc, que l'angle du choc réfléchi est sensiblement sous-estimé et que la courbure du disque de Mach est sensiblement surestimée. La chute des valeurs des composantes de la vitesse étant beaucoup plus importante en aval du disque de Mach qu'en aval du choc réfléchi, une importante différence de pression totale est observable de part et d'autre de la couche de cisaillement issue du point triple (et donc des forces qui s'exercent de part et d'autre de celle-ci), ce qui conduit à la défléchir vers l'axe du jet. Ce résultat est donc aussi qualitativement en accord avec les diverses observations expérimentales. Le champ  $S/S_o$  estimant l'entropie  $p/\rho^\gamma$  adimensionnée par sa valeur évaluée d'après les conditions à l'ajutage, nous indique que le schéma numérique n'introduit pas de diffusion excessive dans la zone proche de l'ajutage (qui pourrait naître de l'utilisation de points singuliers liés à la géométrie simplifiée de notre "pseudo-lèvre" de buse). L'observation de ce champ d'entropie adimensionnée, associée à celle du champ de masse



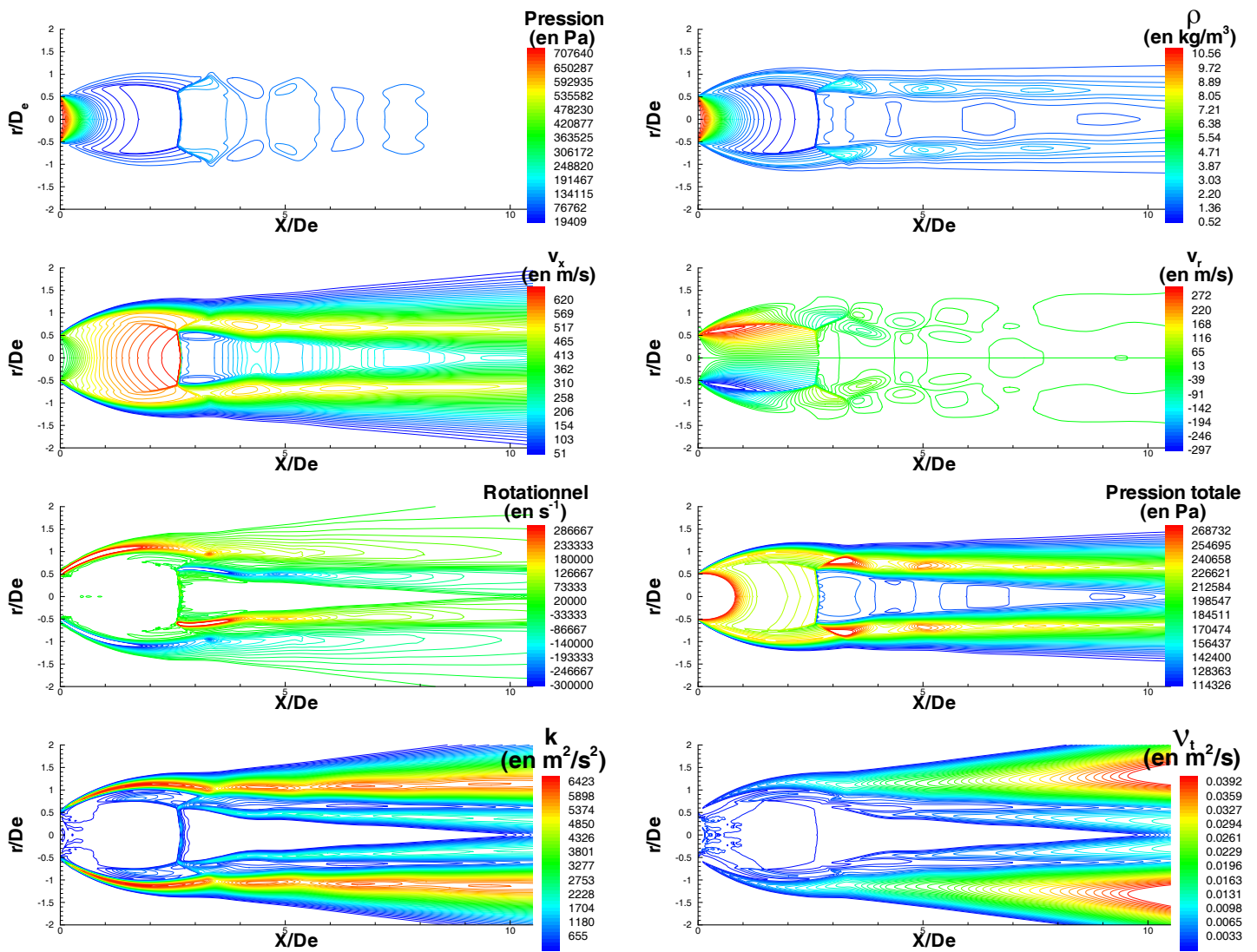


FIG. 12.6 – Structure du jet simulé à  $NPR=7,55$  : isocontours (50 niveaux) de la pression statique, de la masse volumique, de la vitesse longitudinale, de la vitesse radiale, du rotationnel, de la pression totale, du nombre de Mach, de l'énergie cinétique turbulente et du coefficient de viscosité turbulente.

volumique nous montre d'autre part que la processus de détente se poursuit sur une distance égale à une dizaine de fois le diamètre de l'ajutage environ, cette observation étant en accord avec celle de Yüceil et Ötügen [177].

### Représentation globale du mélange turbulent

Même si la simulation nous conduit à surestimer le rotationnel à la périphérie du jet dans la zone d'expansion initiale (où des niveaux de l'ordre de  $6.10^5 \text{ s}^{-1}$  sont observés tandis que les données expérimentales indiquent des valeurs plus proches de  $3.10^5 \text{ s}^{-1}$ ) ou au niveau de la zone initiale de la couche de cisaillement issue du point triple, une rapide décroissance de ce rotationnel est observable au sein de la couche externe de cisaillement entre l'abscisse où le jet atteint son extension maximale et la zone en aval de la cellule de choc. Le rotationnel chute alors jusqu'à des valeurs de l'ordre de  $1.10^5$  à  $1,5.10^5 \text{ s}^{-1}$ , qui sont en accord avec les valeurs observées expérimentalement par Yüceil et Ötügen dans la couche de cisaillement en aval de la zone d'expansion initiale. De plus, il est intéressant de remarquer (notamment sur les champs de  $\nu_t$  et  $k$ ) que le développement de la couche de cisaillement externe et celui de la couche de cisaillement issue du point triple restent découplés en moyenne jusqu'à une distance de 6 à  $7 D_e$  au moins, ce résultat étant en accord avec l'observation des champs de rotationnel issus des mesures PIV de Yüceil et Ötügen. En revanche, l'extension radiale de ces zones fortement rotationnelles semblent sous-estimée, notamment en aval du disque de Mach. L'observation qualitative de l'évolution des fluctuations rms de la vitesse axiale expérimentalement mesurée permet de préciser quelque peu l'effet induit par cette forte augmentation du mélange expérimentalement observable. Le profil des fluctuations rms de la vitesse axiale présente une augmentation de l'intensité de turbulence en aval de l'ajutage qui atteint un pic localisé en aval du disque de Mach. Une brusque chute des niveaux de fluctuations rms est ensuite observable dans la zone de réaccélération subsonique, suivi d'une nouvelle zone entre  $X/D_e = 6$  et  $X/D_e = 7$  où ces niveaux réatteignent des valeurs élevées. Cette zone semble correspondre à celle où la couche de cisaillement issue du point triple atteint l'axe en moyenne. Le premier pic est également observable sur la solution numérique (voir figure 12.7), mais est légèrement décalé vers l'aval, ce qui semble indiquer une légère surestimation de l'extension de la cellule de choc. Le second pic n'est en revanche observable que beaucoup plus loin en aval ( $X/D_e = 9,5$ ). Nous remarquons ainsi que le mélange turbulent prévu numériquement est sous-estimé, notamment en aval de la première cellule de choc. Dans la mesure où la modélisation que nous avons retenue est au premier ordre et que les effets de courbure ne sont pas pris en compte, il n'est cependant pas étonnant de constater que l'inhibition du mélange dû à cet effet de courbure à la périphérie du jet et au contraire l'augmentation du mélange turbulent induite par la déflexion de la couche de cisaillement interne (en  $X/D_e = 4$  environ) ne sont pas précisément prises en compte par la simulation. Etant donné que l'interaction régulière des tourbillons de Kelvin-Helmoltz avec la structure de choc déstabilise complètement le jet en aval de cette structure, et confère au jet un caractère fortement instationnaire dans cette zone avale, il est important de souligner par ailleurs que ces données expérimentales obtenues par PIV ne nous permettent d'accéder qu'à une information très réduite sur la véritable structure du jet en moyenne. D'ailleurs, la simple observation des niveaux particulièrement élevés de fluctuations observables dès la section de l'ajutage, nous invite à interpréter ces résultats avec une grande prudence. Ces hauts niveaux observables dès  $X/D_e = 6$  peuvent ne représenter qu'un battement très irrégulier des couches de cisaillement en aval du disque de Mach, leur position moyenne restant jusqu'à aujourd'hui non véritablement mesurée. La différence qualitative du comportement de la turbulence dans la zone de détente est plus délicate à interpréter. Alors que dans l'ensemble de nos simulations, l'intensité de turbulence a tendance à décroître fortement dans cette zone de détente, les résultats de Yüceil et Ötügen indiquent que celle-ci augmente au contraire forte-

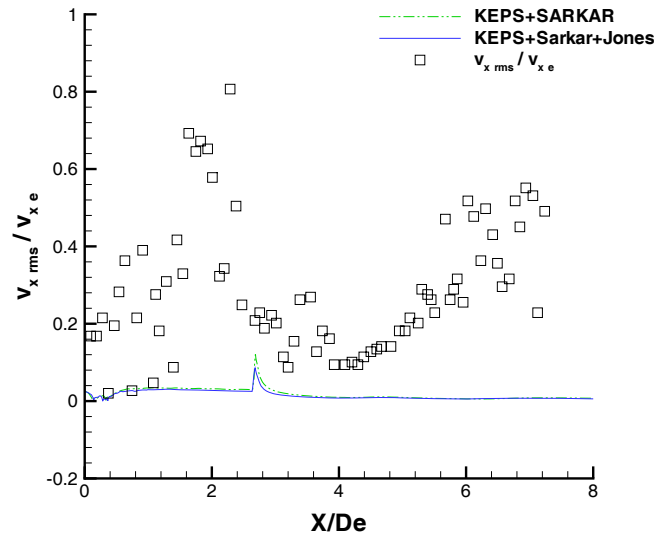


FIG. 12.7 – Evolution des niveaux de fluctuation rms de la vitesse axiale : simulation (lignes continues), résultats expérimentaux de Yüceil et Ötügen [177](symboles).

ment. L'importance de la divergence du champ de vitesse dans cette zone d'intense détente nous conduit, via l'approximation de type Boussinesq, à obtenir une contribution négative de la production par cisaillement. L'interaction des gradients négatifs de pression et de masse volumiques apportent par ailleurs une contribution supplémentaire fortement négative au bilan d'énergie cinétique turbulente. La modélisation retenue nous conduit alors à prévoir une forte décroissance du coefficient de viscosité turbulente et donc de toutes les contraintes turbulentes dans cette zone d'intense détente, et ce quels que soient les niveaux de  $k$  et de  $\epsilon$  imposés à l'ajutage. Notons que le champ d'isocontours des termes contribuant au bilan d'énergie cinétique turbulente est très perturbé dans cette zone, notamment pour les termes convectif et diffusif qui passent rapidement de valeurs négatives à des valeurs positives, ce changement s'opérant néanmoins toujours sur une distance correspondant à plusieurs dizaines d'éléments concentrés dans ces zones. La figure 12.8 permet d'illustrer ici la complexité de ces champs. Des données expérimentales et de simulation directe sont évidemment nécessaires pour analyser plus en détail le comportement de la turbulence dans une telle zone et vérifier si la traduction de son effet par l'utilisation du modèle retenu est véritablement significative ou si elle ne relève que d'un artefact numérique lié à la faiblesse du solveur utilisé, à l'utilisation exclusive de la masse volumique pour réadapter le maillage dans cette zone ou encore à un critère inadapté pour déterminer la convergence de la solution du champ turbulent. A ce stade, ces données ne peuvent donc nous permettre de conclure précisément quant à la nature du champ de turbulence moyen. Tout au plus pouvons nous dire que le mélange semble globalement sous-estimé par la modélisation retenue en aval de la cellule de choc, mais que la structure moyenne du jet reste qualitativement prévue de façon satisfaisante. L'observation du champ de vitesse longitudinale, probablement plus représentatif, nous permet en revanche d'identifier plus clairement quelques faiblesses de l'outil numérique dans cette configuration de jet fortement sous-détendu.

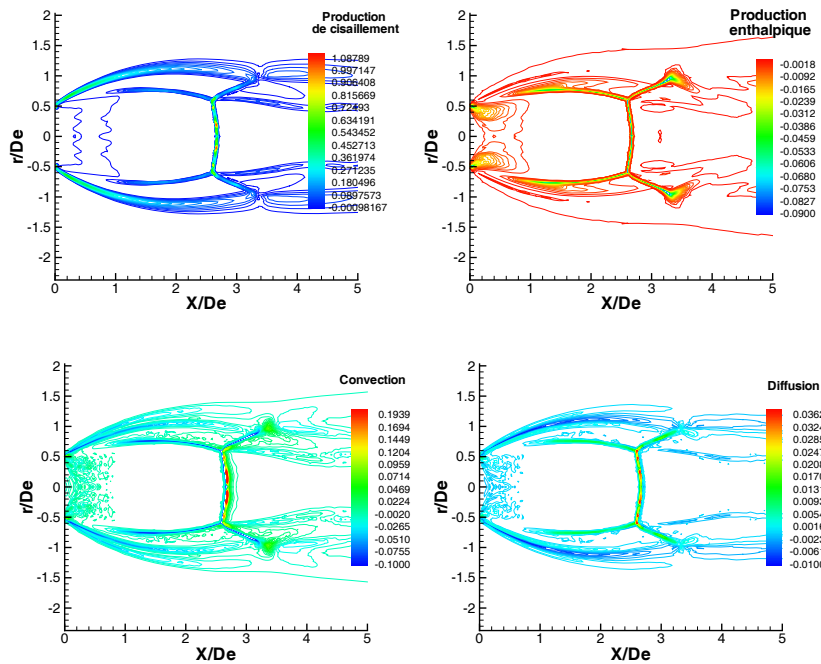


FIG. 12.8 – Champs d'isocontours des termes principaux intervenant dans le bilan d'énergie cinétique turbulente dans la zone proche du jet pour le cas  $NPR = 7,55$ .

### Champ de vitesse moyenne

Observons tout d'abord les profils de vitesse axiale présentés par les figures 12.9 et 12.10 pour les cas  $NPR = 7,55$  et  $NPR = 15,53$  respectivement. Par le processus de détente, cette vitesse axiale augmente très rapidement pour atteindre un niveau maximal en amont du disque de Mach. Elle chute alors brutalement à travers celui-ci pour ensuite osciller en fonction de la position moyenne de la couche de cisaillement issue du point triple. Tant que cette couche de cisaillement n'a pas atteint l'axe, l'évolution des grandeurs dans cette zone subsonique en aval du disque de Mach est en fait essentiellement pilotée par les effets de compression ou de détente ayant lieu dans la zone irrotationnelle en aval du choc réfléchi. La couche de cisaillement issue du point triple joue en quelque sorte le rôle d'une paroi d'une tuyère axisymétrique en imposant par effet essentiellement géométrique l'accélération ou la décélération de l'écoulement près de l'axe, tandis que l'accroissement de l'épaisseur de cette couche conduit à amortir progressivement cet effet "tuyère". L'influence du modèle de turbulence est clairement visible à partir de  $X/D_e = 5$  pour le cas à  $NPR = 7,55$ , position à partir de laquelle les différentes représentations de la diffusion turbulente conduisent à prévoir un épaississement plus ou moins important de la couche de cisaillement en moyenne, et donc à plus ou moins décaler les oscillations du niveau de la vitesse axiale. Le fait que ces oscillations restent peu amorties sur la solution numérique alors que la vitesse axiale expérimentalement observée n'oscille plus dès  $X/D_e = 6$  semble confirmer l'observation qualitative faite au paragraphe précédent sur la représentation du mélange turbulent en aval de la cellule de choc. Au niveau de la cellule de choc, nous constatons par ailleurs que le niveau de vitesse moyenne est largement surestimée (+20% à  $NPR = 7,55$  et +25% à  $NPR = 15,53$ ) et que la position du disque de Mach est décalée en aval de la position observée expérimentalement. Les profils radiaux de vitesse longitudinale présentés sur la figure 12.11 pour le cas à  $NPR = 15,53$  permettent de vérifier que ce niveau de vitesse est en fait surestimé dans

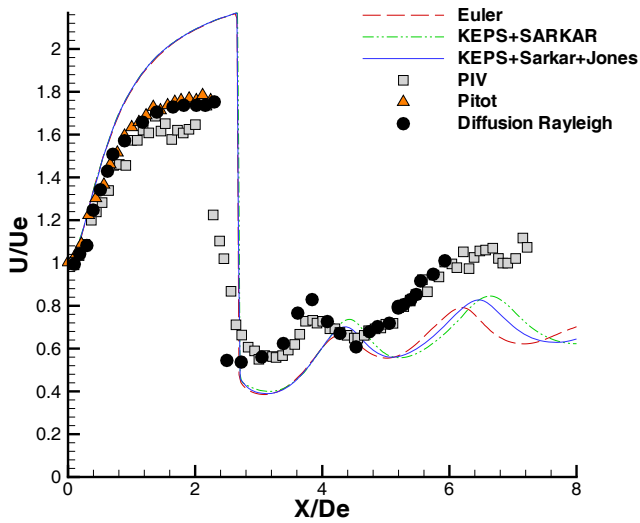


FIG. 12.9 – Comparaison des profils de vitesse axiale pour le cas à  $\text{NPR} = 7,5$ .

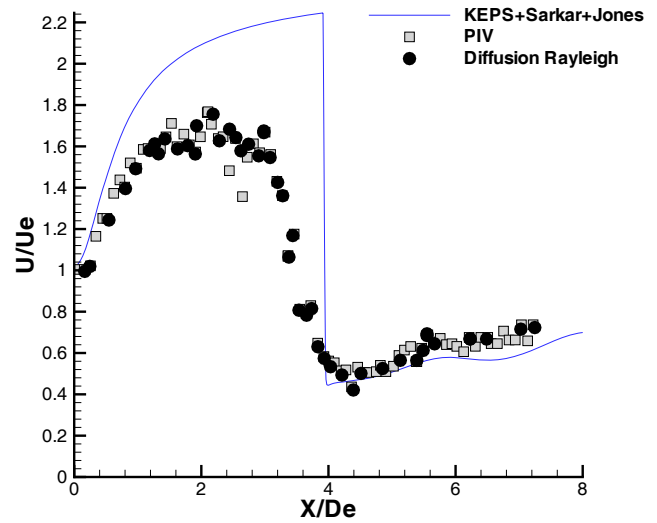


FIG. 12.10 – Comparaison des profils de vitesse axiale pour le cas à  $\text{NPR} = 15,5$ .

l'ensemble de la zone de détente (pour  $X/D_e = 2$  et  $X/D_e = 3$ ), tandis que les profils en  $X/D_e = 4$  et  $X/D_e = 5$  indiquent que l'extension du disque de Mach prévue numériquement est également trop importante et la chute de vitesse à travers le choc oblique est largement sous-estimée. Les profils en  $X/D_e = 6$  et  $X/D_e = 7$  montrent par ailleurs que la structure moyenne des couches de cisaillement présente, en aval de la cellule de choc, un taux d'évasement très supérieur à ceux observés sur des cas de jet parfaitement détendus.

Deux conclusions importantes s'imposent alors. D'une part, l'effet moyen du développement de fortes instabilités dans les couches de cisaillement (déjà observables par simples visualisations Schlieren dans les jets faiblement sous-détendus) lors de l'interaction entre les chocs et les structures cohérentes conduit à un changement structural majeur des champs moyens turbulents en aval de la cellule de choc. Non seulement la simple modélisation au premier ordre retenue, calée pour des situations isotropes et à l'équilibre ne peut nous permettre d'appréhender précisément l'évolution de la structure moyenne de la couche de cisaillement en aval de cette cellule de choc, mais la présence de ces instabilités confèrent aussi aux effets dilatationnels un rôle secondaire dans cette zone de transition. D'autre part, l'utilisation du schéma de Roe (ou de Van Leer) couplé au limiteur "minmod" nous conduit à nettement surestimer les niveaux de vitesse dans la zone de détente et en aval du choc réfléchi. L'observation de niveaux trop importants de vitesse en aval du choc réfléchi conforte celle d'une surestimation probable du niveau de pression statique. Ceci semble indiquer que le choc réfléchi présente une intensité trop faible et donc un angle trop faible par rapport aux directions locales des lignes de courant.

### 12.3 Etude de la structure de choc

De par les résultats obtenus sur la simulation du jet faiblement sous-détendu, le schéma de Roe conduit également à surestimer les niveaux de masse volumique dans la zone de détente. Combiné à une surestimation des niveaux de vitesse que nous venons d'observer, nous nous

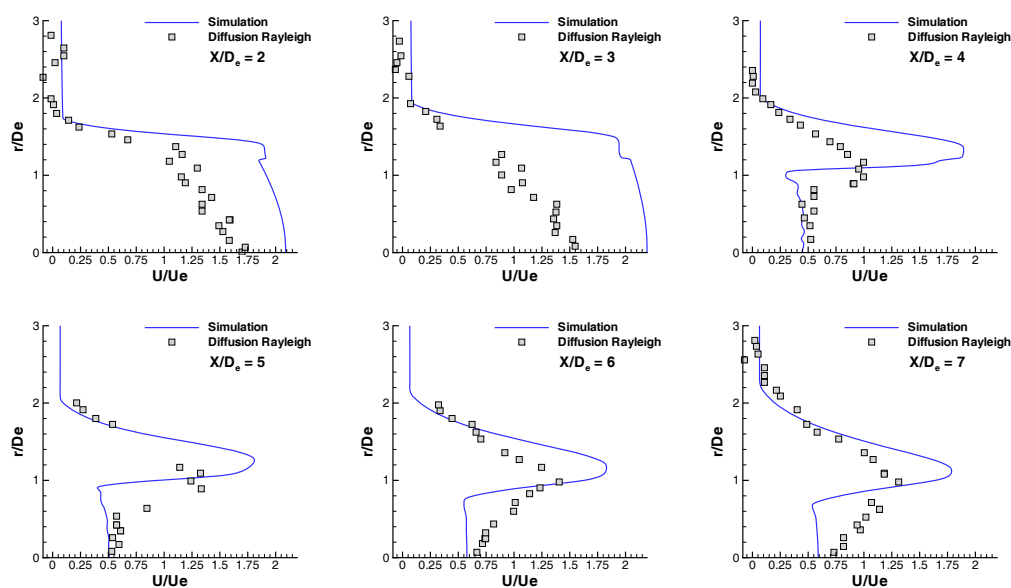


FIG. 12.11 – Comparaison des profils radiaux de vitesse longitudinale dans le champ proche du jet fortement sous-détendu pour le cas  $\text{NPR} = 15,53$ .

attendons naturellement à ce que la prévision de la forme de la structure de choc reste quelque peu imprécise. Les figures 12.12 et 12.13 illustrent (par le champ d'isocontours du nombre de Mach) la forme de cette structure. Pour chaque cas, les positions minimale et maximale ainsi que les diamètres minimaux et maximaux du disque de Mach, tels que l'indiquent les différentes corrélations empiriques de Ashkenas et Sherman [14], Addy [10] ou Antsupov [12] où les profils de vitesse axiale mesurée par Yüceil et al. [91] précédemment présentés sont également reportées<sup>1</sup>. L'extraction digitale de points des contours de choc à partir d'une photographie obtenue par visualisation Schlieren donnée par Yüceil [communication privée] et leur report (ainsi que celui de leur symétrique) sur la figure 12.14 nous permet par ailleurs d'indiquer<sup>2</sup> la forme de la cellule de choc en bouteille visualisée expérimentalement pour le cas à  $\text{NPR} = 15,53$ . Nous observons ainsi un faible décalage du disque de Mach qui se positionne en  $X_{dm}/D_e = 2,68$  en aval de la plage indiquée par les corrélations empiriques ( $X_{dm}/D_e = 2,31$  à  $2,53$ ) tandis que son diamètre reste proche de la valeur limite basse de la plage de valeurs expérimentales avec  $D_{dm}/D_e = 1,18$  (à comparer avec des valeurs expérimentales de  $D_{dm}/D_e$  allant de  $1,16$  à  $1,44$ ). La combinaison de ces deux données nous indique que la forme globale de la structure présente un allongement sensiblement exagéré. La structure pour le cas à  $\text{NPR} = 15,53$  présente toujours une distance de positionnement du disque de Mach surestimée mais avec cette fois-ci un diamètre proche de la valeur haute avec  $X_{dm}/D_e = 3,86$  et  $D_{dm}/D_e = 2,14$  à comparer avec les plages de valeurs [3, 14; 3, 63] et [1, 82; 2, 23] respectivement. Notons que la forme globale de la structure apparaît ainsi correctement reproduite jusqu'à l'abscisse où la structure présente son extension radiale maximale. L'angle initial de la frontière du jet et du choc incident semblent donc correctement reproduits, indépendamment d'une prescription plus précise des conditions à l'ajutage.

Par ailleurs, les structures obtenues en utilisant uniquement les équations d'Euler ou le modèle

<sup>1</sup>La corrélation de Ewan et Moodie [63] n'est pas utilisée car elle conduit à sous-estimer nettement (par rapport aux autres corrélations ou données expérimentales) la distance où se positionne le disque de Mach.

<sup>2</sup>Notons bien qu'il ne s'agit là que d'une indication, l'extension exacte du diamètre de l'ajutage étant délicate à déterminer sur la photographie obtenue par visualisation Schlieren.

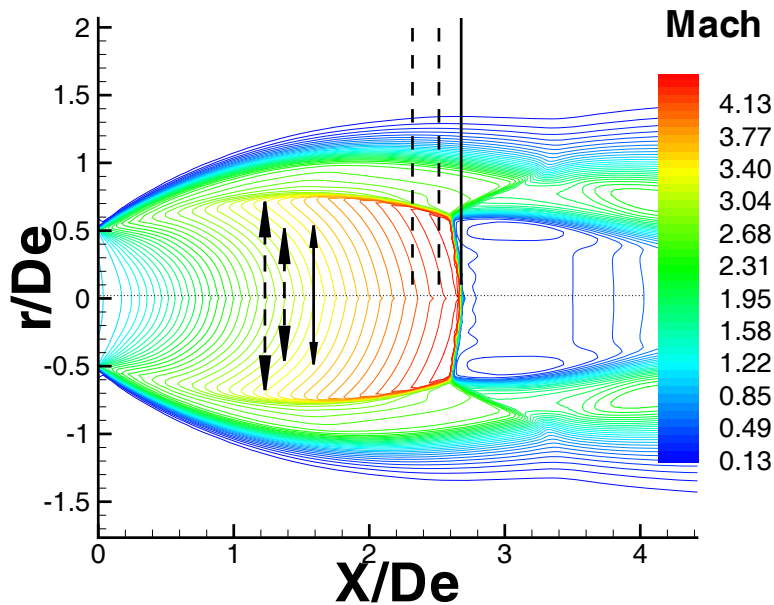


FIG. 12.12 – Comparaison des structures de chocs pour le cas  $\text{NPR} = 7,5$  : isocontours du nombre de Mach, position et diamètre du disque de Mach obtenus numériquement (lignes et flèches continues), position et diamètre du disque de Mach d'après les corrélations expérimentales (lignes et flèches pointillées).

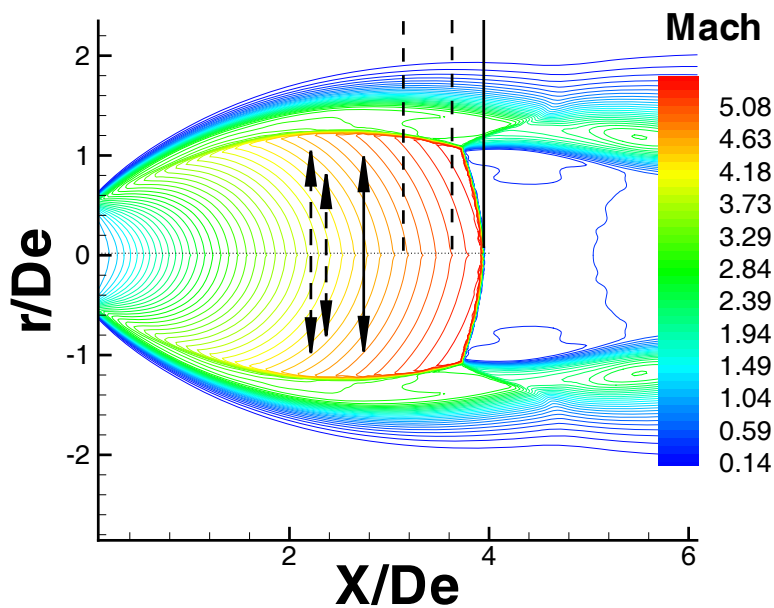


FIG. 12.13 – Comparaison des structures de chocs pour le cas  $\text{NPR} = 15,53$  : isocontours du nombre de Mach, position et diamètre du disque de Mach obtenus numériquement (lignes et flèches continues), position et diamètre du disque de Mach d'après les corrélations expérimentales (lignes et flèches pointillées).



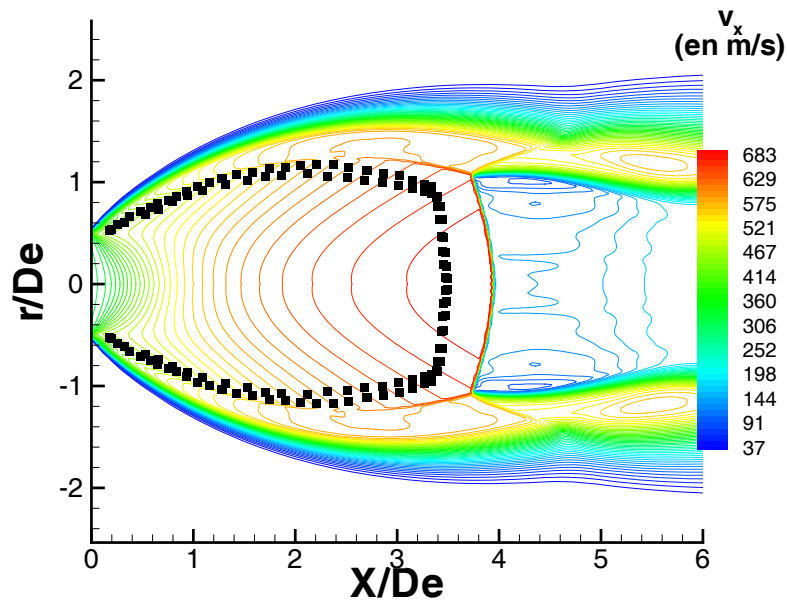


FIG. 12.14 – Comparaison des structures de chocs pour le cas  $NPR = 15,53$  : isocontours de la vitesse longitudinale obtenus numériquement (lignes continues), allure de la structure de choc d’après la visualisation Schlieren de Yüceil [communication privée] (symboles).

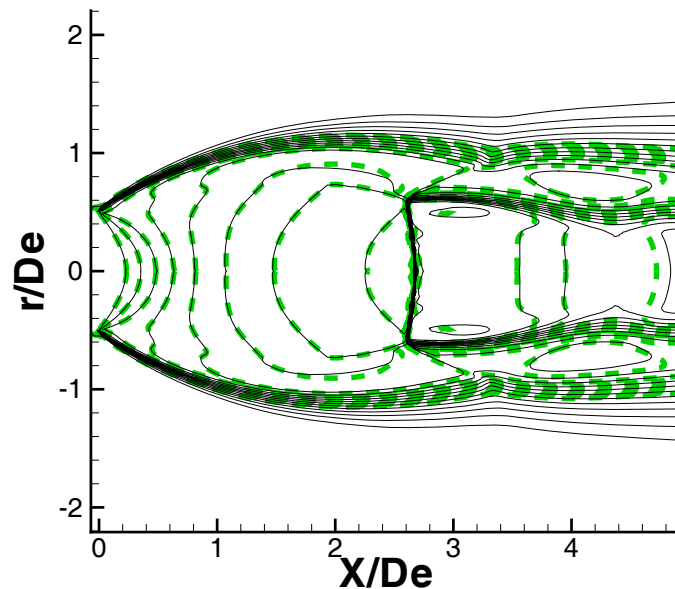


FIG. 12.15 – Comparaison des structures de chocs obtenues pour le cas  $NPR = 15,53$  sans (lignes pointillées) et avec (lignes continues) prise en compte de la turbulence.



de turbulence, présentées sur la figure 12.15 sont parfaitement superposables. Ainsi le développement initial de la couche de cisaillement, du moins tant que les effets de courbure ne sont pas pris en compte, apparaît ne jouer qu'un rôle secondaire sur la structure de choc dans le cas d'un jet fortement sous-détendu. La surestimation des niveaux de vitesse et de masse volumique observés dans la zone de détente, est ainsi purement attribuable à l'imprécision du schéma numérique retenu pour évaluer le flux convectif. Ce résultat est encourageant dans la mesure où il nous permet d'envisager à court terme d'améliorer nettement la précision de la prévision numérique de ces jets, du moins jusqu'à un niveau de NPR correspondant aux valeurs nominales actuellement retenues pour les tests de certification, en utilisant de nouveaux schémas numériques qui ont vu le jour ces dernières années (voir par exemple Toro [164]). Même si ces schémas ne sont pas tous susceptibles d'être suffisamment robustes pour être appliqués à l'ensemble de l'écoulement d'un jet fortement sous-détendu, l'origine principale de la source d'imprécision de notre simulation étant clairement localisée (au niveau de cette zone de détente), nous pouvons par ailleurs envisager l'utilisation d'un solveur spécifique simplement pour cette zone de l'écoulement proche de l'ajutage. Remarquons finalement que, même si les niveaux de vitesse sensiblement surestimés dans la couche de cisaillement en aval du choc réfléchi, restent suffisamment représentatifs pour pouvoir appliquer, avec l'outil numérique en l'état, un modèle simplifié de combustion pour lequel le dégagement de chaleur pourrait être évalué en fonction d'un temps d'induction dépendant des conditions locales de pression et de température et d'un temps convectif suffisamment représentatif, le cas de l'impact nécessite impérativement d'opérer une telle modification du schéma de flux numérique utilisé dans la zone proche de l'ajutage. En effet, l'association d'un champ de vitesse légèrement sous-estimé avec un champ de masse volumique légèrement surestimé en aval du disque de Mach nous conduit à sous-estimer de façon significative le nombre de Mach dans cette zone et donc la longueur de la poche subsonique (avec  $L_s = 12,3$  à comparer avec la plage de valeurs  $[3,96; 4,57]$  d'après la corrélation de Glotov [71] pour le cas  $NPR = 7,55$ ). Les différentes structures d'écoulement qui pourraient apparaître lors d'un tel impact dépendent en effet fortement de l'état local du fluide, subsonique ou supersonique dans cette zone (voir section 2.5).

## 12.4 Etude préliminaire du percement d'une chambre de combustion d'un moteur aéronautique.

L'étude phénoménologique a permis de mettre en évidence la forte dépendance de la géométrie de la "bouteille de Mach" à la forme de la tuyère utilisée (voir paragraphe 2.3.1). Par ailleurs, même si le développement de la couche de cisaillement d'un jet supersonique est susceptible d'être profondément affecté par les niveaux des variables turbulentes prévalant au niveau de l'ajutage (voir section 10.8), nous venons de vérifier que l'influence de ces conditions reste secondaire quant à la prévision de la forme de la structure proche de l'écoulement. Par ailleurs, même si les niveaux de vitesse et de masse volumique restent surestimés dans la phase initiale de détente, la forme de la structure proche est numériquement prévue avec une précision satisfaisante (erreur maximale de 10% sur le positionnement du disque de Mach). Ceci nous permet ainsi d'étudier qualitativement les deux effets principaux susceptibles de modifier de façon significative la structure proche de l'écoulement lorsque le jet est issu d'un orifice et est composé de gaz chauds. Nous cherchons dans cette section finale à illustrer comment la modification de l'orientation des lignes de courant d'une part et celle de l'angle des ondes de Mach d'autre part, peut modifier la structure de choc observable.

### 12.4.1 Etude des effets de gaz brûlés

Pour cet essai préliminaire, nous prenons en compte une température génératrice de 1700 K. En se basant sur les corrélations données dans la section 2.6, en considérant un mélange kérosène / air à la stoechiométrie pour cette température génératrice, le rapport des chaleurs spécifiques est évalué à 1,2618. La forme de la structure de choc étant avant tout conditionnée par la déflexion des lignes de courant au sein du jet, nous choisissons dans cette première approche de négliger l'influence des conditions thermodynamiques propres au gaz dans le co-écoulement. Soulignons que cette approche n'est plus valide dès lors qu'on s'intéresse à la structure du jet en aval de la cellule de choc et que les effets de diffusion turbulente doivent être pris en compte. Le calcul est donc ici mené en ne considérant toujours qu'une espèce unique en phase gazeuse avec les équations d'Euler. En considérant une évolution isentropique unidimensionnelle entre les conditions génératrices et la section de l'ajutage, nous déterminons ainsi une température statique égale à 1504 K. Afin de distinguer l'effet thermique de l'effet de pression, nous réimposons un niveau de pression statique à l'ajutage égal à celui prescrit pour le cas du jet froid, soit  $p_e = 1574020$  Pa, le rapport NPR restant ainsi égal à 15,53. La vitesse est en revanche ajustée en conséquence de façon à ce que le nombre de Mach à l'ajutage soit égal à 1,01. Finalement, la réadaptation du maillage est pilotée par le même jeu de paramètres que celui utilisé pour le cas du jet froid. Le maillage final obtenu à la quatrième étape de la simulation pour le niveau de raffinement global jugé satisfaisant pour le cas du jet froid, est illustré par la figure 7.8. Précisons que pour ce cas, les niveaux de courbure de la masse volumique, observés dans le cas du jet chaud, sont inférieurs à ceux observés dans le cas du jet froid, de sorte qu'il serait possible d'obtenir le même niveau de précision en utilisant un nombre inférieur d'éléments. Les champs d'isocontours de la vitesse sur la figure 12.16 illustrent la différence entre les deux structures de choc obtenues pour ce même NPR. La prise en compte de gaz chauds conduit essentiellement à étendre globalement l'ensemble de la zone de détente et donc de la structure de choc dans la direction radiale. Le disque de Mach se positionne ainsi toujours à environ la même distance de l'ajutage. Les points de réflexion du choc incident apparaissant toujours pour les mêmes conditions d'angle, son diamètre apparaît en revanche plus grand (+14%) et le point triple plus en amont. Soulignons également que l'évolution de la pression et de la masse volumique, adimensionnées par leurs valeurs respectives prescrites à l'ajutage, sont relativement semblables, de sorte que les taux de détente et de compression pour ces variables restent identiques. En revanche, la chute relative de la température adimensionnée par sa valeur à l'ajutage, observée pour le jet chaud est inférieure à celle observée pour le jet froid, tandis que l'augmentation relative de la vitesse longitudinale pour le jet chaud est inférieure à celle observée pour le jet froid. Des études complémentaires sont naturellement nécessaires pour caractériser en détail le changement du comportement dynamique du jet induit par le changement des conditions thermodynamiques prises en considération. Cet exemple permet déjà néanmoins d'illustrer la dépendance non-négligeable de la structure proche d'un jet sous-détendu aux conditions thermodynamiques qui prévalent à l'ajutage. Dans la mesure où la structure de l'écoulement en impact peut dépendre fortement, pour certaines valeurs de la distance entre la section de l'ajutage et la paroi, de l'extension radiale de la zone subsonique en aval du disque de Mach, il nous semble nécessaire de prendre précisément en compte des conditions thermodynamiques qui représentent véritablement un jet de gaz brûlés détendu jusqu'à un état sonique.

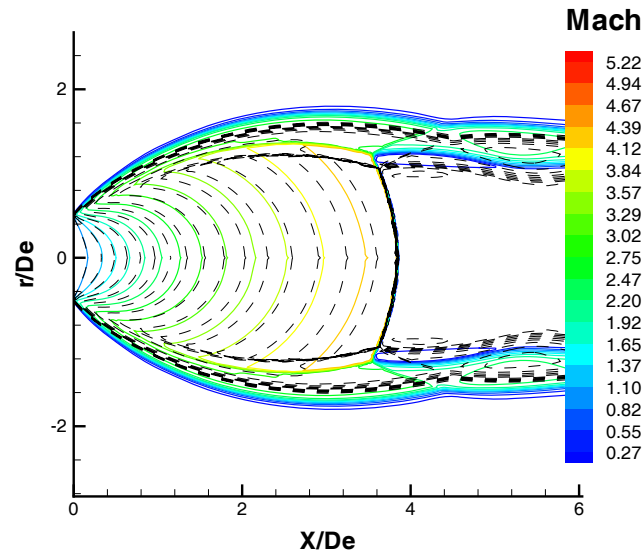


FIG. 12.16 – Comparaison des champs d'isocontours du nombre de Mach obtenus pour  $NPR = 15,53$  en simulant un jet froid (lignes pointillées en noir) et un jet chaud (lignes colorées en traits plein).

#### 12.4.2 Etude de l'effet d'orifice

Un second effet important que nous cherchons à souligner par ce second exemple est l'influence de la forme du profil à l'ajutage et la modification de l'entraînement induite par la présence d'une paroi que nous supposons dans un premier temps parallèle à la section de l'orifice. Un nouveau domaine de calcul doit donc être considéré dans ce cas, comportant une "pseudo-chambre" et un ensemble de frontières représentant une paroi d'épaisseur égale à 2% du diamètre de l'ajutage, la frontière de sortie, la frontière  $r(x)_{max}$  et celle relative à l'axe restant par ailleurs semblables. La figure 12.17 présente le domaine global utilisé et deux agrandissements successifs au niveau de l'orifice. Les conditions génératrices, relatives aux conditions d'entrée précédemment utilisées pour prescrire directement le niveau des variables à l'ajutage, sont désormais imposées fortement aux noeuds de la section d'entrée du domaine, tandis que les conditions relatives aux frontières libres du domaine restent identiques à celles précédemment utilisées. Précisons qu'une condition de paroi adhérente doit être prescrite sur le segment de frontière de paroi joignant les deux parois perpendiculaires à l'axe, afin de garantir la robustesse du schéma numérique. Un niveau de température égal à celui correspondant à une détente isentropique entre la frontière d'entrée et la section de l'ajutage est alors imposé faiblement pour cette frontière. Notons que la méthode de réadaptation ne peut être utilisée simplement pour mener à bien cette simulation. Une fois encore, la non-prise en compte des effets de couche limite associée à l'utilisation exclusive de la masse volumique pour réadapter le maillage ne nous permet pas de contrôler celui-ci de façon suffisamment précise à proximité de la paroi. Il en résulte localement des déformations trop importantes des mailles ou des niveaux de raffinement insuffisants à proximité des coins relatifs au bord de l'orifice. La connaissance *a priori* de la structure attendue et plusieurs essais successifs nous permettent néanmoins d'effectuer progressivement des raffinements par blocs (notamment illustrés par les agrandissements de la figure 12.17), tout en assurant la régularité du maillage à proximité de ce bord de l'orifice, jusqu'à ce que la solution dans la zone proche du jet n'évolue

plus lorsque de nouvelles opérations de raffinement sont appliquées. Le déraffinement progressif du maillage dans la zone en aval est cette fois-ci assuré par l'utilisation d'un nombre suffisant de frontières de la géométrie du domaine, sur lesquelles des longueurs de segments adéquates sont prescrites lors de la construction du maillage initial. La solution finale obtenue présente, dans la section de l'orifice, une déformation des profils qui est en accord satisfaisant avec celle attendue. Le profil de la ligne sonique est tout d'abord orienté vers l'intérieur de la chambre, puis se courbe vers l'axe avant de s'orienter vers l'aval de l'orifice. Dans notre cas, la ligne sonique atteint l'axe en  $X/D_e \simeq 0,2$  environ, comme nous pouvons le constater sur la figure 12.18.

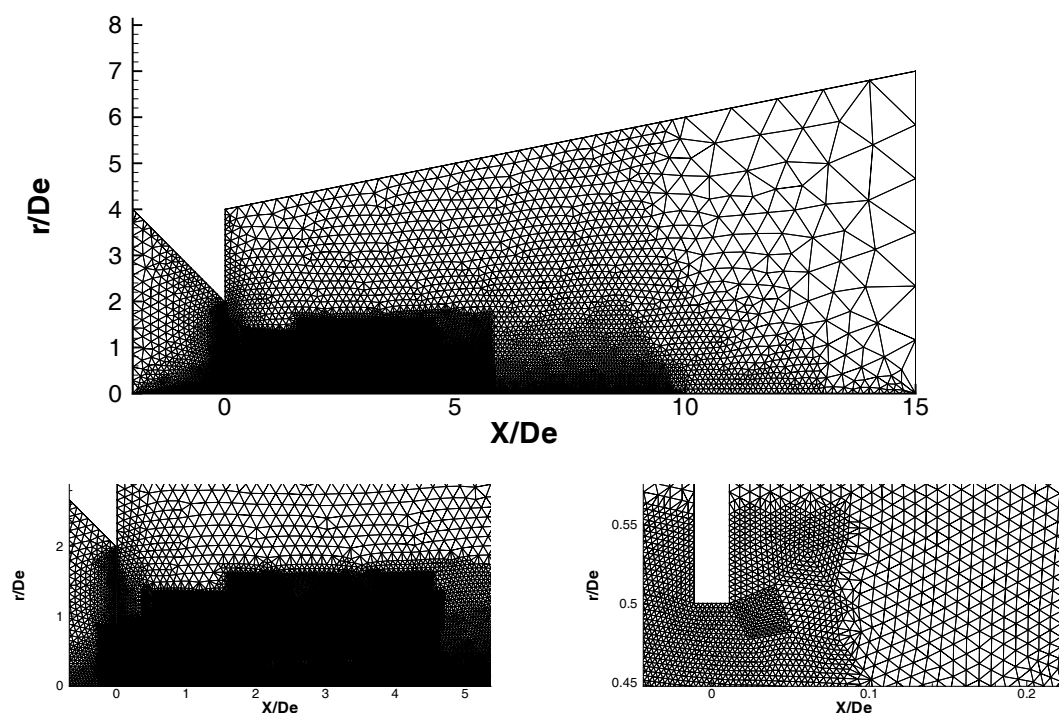


FIG. 12.17 – Illustration du maillage utilisé pour simuler l'écoulement issu d'un orifice : domaine complet et agrandissement de la zone de l'orifice.

Notons bien que cette valeur est très faible par rapport aux valeurs de l'ordre de  $0,38D_e$  qui peuvent être mesurées expérimentalement ou approchées lorsque la couche limite est précisément calculée, et lorsque les effets visqueux et de gaz réel sont effectivement pris en compte (voir par exemple Delery [45]). Le profil obtenu est néanmoins suffisant pour illustrer la déformation de la structure de choc qui en résulte. Sur la figure 12.19 sont superposés les champs d'isocontours de la vitesse longitudinale définissant les contours des cellules de choc obtenues avec ou sans la prise en compte de cette déformation du profil en  $X/D_e = 0$ . La prise en compte de l'effet d'orifice nous conduit à prévoir un disque de Mach localisé en léger amont de sa position observée lorsqu'un profil plat des variables physique est prescrit à l'ajutage ( $X_{dm}/D_e = 3,78$  à comparer avec la valeur de  $3,88$  précédemment obtenue). Son diamètre est en revanche significativement réduit et passe de  $D_{dm}/D_e = 2,14$  à  $1,88$ . Précisons que pour cette simulation, une convergence stricte n'a pu être obtenue. Des instabilités de très faibles amplitudes sont en effet observables au niveau de la couche de mélange entre la paroi et la frontière du jet. Nous supposons que celles-ci sont régulièrement convectées en aval et perturbent en retour la zone de l'orifice. Cet artefact est probablement lié à la présence de la paroi réfléchissante et l'utilisation d'une condition de

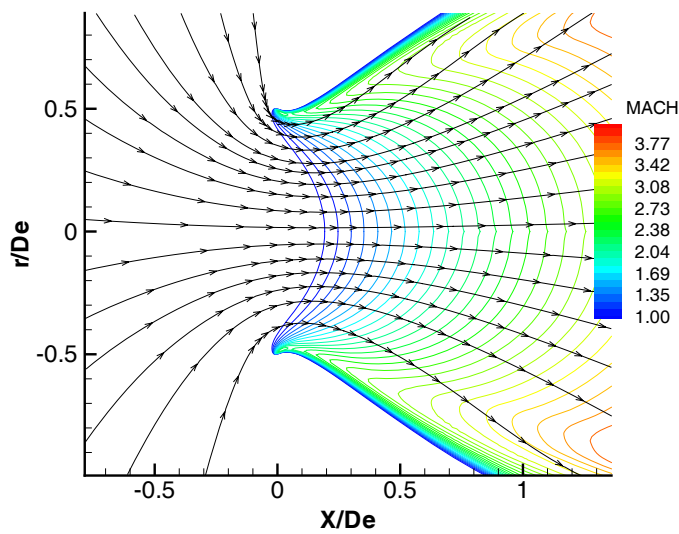


FIG. 12.18 – Illustration de la déformation des profils prévalant dans la section d'un orifice : isocontours du nombre de Mach et lignes de courant.

glissement qui favorise la génération de vorticité numérique. Aussi l'obtention rigoureuse d'une structure stationnaire pour un jet issu d'un tel orifice semble beaucoup plus difficile, ce qui n'empêche pas néanmoins d'observer une structure de choc qui reste stable.

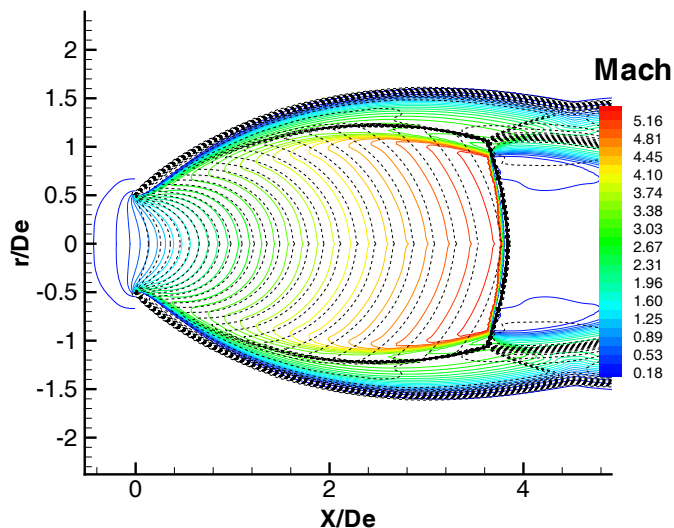


FIG. 12.19 – Comparaison des structures de choc obtenues pour un écoulement issu d'une buse profilée (lignes noires tiretées) et celui issu d'un orifice (lignes continues colorées).

Les résultats de l'étude numérique des jets fortement sous-détendus étudiés expérimentalement par Yüceil et Ötügen [177] [176] et Yüceil et al. [91] démontrent que la stratégie retenue nous permet de prévoir les caractéristiques essentielles du champ stationnaire en moyenne des jets fortement sous-détendus pour des rapports de pressions statiques entre la section de l'ajutage et l'atmosphère ambiante proches des niveaux actuellement considérés pour les normes de sécurité en vigueur. Le couplage d'un maillage central réadaptable avec une zone de maillage fortement déraffinée nous permet en effet de dissiper naturellement les ondes numériques provenant de la frontière de sortie et, à l'inverse, de réduire significativement la dissipation numérique dans la zone centrale. Cette stratégie nous offre ainsi la possibilité d'évaluer véritablement la précision des schémas de décentrage et des modèles de turbulence pour cette configuration, dans la limite de l'exploitation des rares données expérimentales disponibles. Le schéma de Roe, initialement retenu pour sa grande robustesse, ou le schéma de Van Leer, qui ne peut néanmoins n'être utilisé que dans un second temps, se révèlent ainsi être beaucoup trop dissipatifs dans la zone de détente, ce qui conduit, même pour des rapports de détente modérés à surestimer les niveaux de vitesse et de masse volumique, et à prévoir une structure de choc légèrement trop étirée vers l'aval. Par ailleurs, les effets de compressibilité semblent ne jouer qu'un rôle secondaire dans la zone de transition en aval de la cellule de choc par rapport à l'importante production vorticitaire induite par les effets de courbure des couches de cisaillement d'une part, et de l'interaction de la structure de choc avec la couche de cisaillement d'autre part. Ainsi, même si la structure du jet libre est qualitativement prévue de façon correcte, la combinaison de l'imprécision de l'évaluation du flux convectif dans la zone principale de détente et de l'imprécision de celle de la croissance des couches de cisaillements en aval de la cellule de choc conduit à surestimer de façon importante la longueur de la zone subsonique en aval du disque de Mach, ce qui réduit fortement nos capacités de prévoir, avec l'outil en l'état, la structure de l'écoulement en impact. Afin d'améliorer la précision de la simulation dans cette zone intermédiaire sans trop léser le coût calcul, nous suggérons dans un premier temps d'évaluer une modification de la réexpression du coefficient de viscosité turbulente en introduisant une fermeture non-linéaire de ce terme. Finalement, une étude préliminaire des effets d'orifice et de gaz brûlés ont permis d'illustrer que ceux-ci ne peuvent être négligés dans une approche pertinente de certification dans la mesure où ils modifient de façon significative la géométrie de la cellule de choc et donc la répartition radiale et longitudinale des niveaux de pression et de température.



# Conclusion et perspectives

Ce travail de recherche a consisté à caractériser l'écoulement de jet fortement sous-détendu pouvant apparaître lors du percement accidentel d'une chambre de combustion d'un moteur aéronautique et à définir une procédure numérique, utilisable dans un contexte industriel, afin de prévoir la structure moyenne de ces jets et afin de permettre ainsi à terme l'évaluation des dangers associés à leur impact potentiel sur des éléments moteurs.

Une étude phénoménologique exhaustive a permis de décrire l'évolution des éléments structuraux observables au sein du jet fortement sous-détendu et de particulariser celui-ci par rapport aux autres classes d'écoulements. La structure attendue pour le cas d'un orifice circulaire a ainsi pu être précisée en considérant des conditions génératrices typiques de celles rencontrées pour les moteurs d'avion. La sensibilité de la structure moyenne du jet à la géométrie de l'ajutage et son aspect instationnaire ont par ailleurs été mis en évidence.

En prolongement des quelques études numériques de ces jets présentées dans la littérature pour des niveaux de pression génératrice inférieurs, une modélisation physique et une méthode de résolution numérique utilisables dans un contexte industriel, basées sur le programme N3SNATUR, ont été proposées en précisant leur qualités et leur limites intrinsèques. La méthode repose sur une discrétisation de type mixte volumes finis / éléments finis de la formulation intégrale faible des équations de Navier-Stokes en régime compressible couplé à un modèle  $k - \epsilon$ . Afin de prendre en compte les principaux effets de compressibilité, de non-équilibre ou d'axisymétrie qui modifient le mélange turbulent dans ces régimes d'écoulement supersonique en configuration axisymétrique, ce modèle  $k - \epsilon$  standard a été modifié par l'ajout du terme de pression-dilatation, du taux de dissipation compressible, du terme de production enthalpique et d'un terme de production de dissipation additionnel par étirement tourbillonnaire, pour lesquels différentes approches proposées dans la littérature ont été testées.

Les capacités de la méthode numérique ont tout d'abord été vérifiées sur un ensemble d'écoulements plus simples, choisis notamment en configuration bidimensionnelle pour la similitude des structures de choc ou de détente observables dans ces écoulements avec celles qui sont rencontrées dans les jets fortement sous-détendus. Les résultats obtenus ont notamment permis de conclure quant à une utilisation appropriée des différents types de solveur disponibles afin de mener à bien la simulation dans le cadre de l'approche retenue.

Les diverses difficultés d'ordre numérique rencontrées lors de la simulation des jets fortement sous-détendus ont alors été analysées. Provenant essentiellement de la structure particulière de l'écoulement qui contient une poche subsonique près de l'axe, la solution numérique du jet est en effet très sensible aux choix retenus pour les conditions limites, la topologie du maillage et les solveurs utilisés pour l'évaluation des flux convectifs. Afin de surmonter ces diverses difficultés d'ordre numérique conduisant, dans de nombreuses situations, à ne pouvoir obtenir de solution positive convergée, une stratégie de couplage de l'outil de calcul avec une procédure de remaillage a été développée et validée. Celle-ci consiste à appliquer de façon itérative un algorithme de réadaptation anisotrope sur une zone centrale qui est ensuite couplée à une zone périphérique fortement déraffinée. Ce choix s'avère crucial pour mener à bien ce type de simulation sur des



domaines de calcul d'extension limitée permettant ainsi un temps de calcul raisonnable. Il présente par ailleurs l'avantage de diminuer fortement la dissipation numérique liée aux schémas de flux numériques utilisés pour représenter les flux convectifs tout en limitant le nombre de noeuds introduits, et celui de pouvoir être utilisé conjointement avec n'importe quel autre type de schéma numérique de décentrage pour lequel l'évaluation des gradients est obtenue par éléments finis linéaires.

L'application de l'outil numérique ainsi constitué à la simulation de jets parfaitement détendus nous a alors permis de sélectionner, parmi les différentes corrections de compressibilité retenues dans la littérature, l'ensemble des modèles pouvant être véritablement appliqués de façon judicieuse sur la configuration d'un jet supersonique axisymétrique. Le modèle de référence retenu utilise ainsi les expressions de Sarkar et al. [142] pour les termes de pression-dilatation et du taux de dissipation compressible, un modèle de type gradient pour exprimer le terme d'interaction entre le flux de masse turbulent et le gradient de pression moyenne, ainsi qu'une réexpression du coefficient de viscosité turbulente en ne prenant en compte que le taux de dissipation solénoïdale. L'utilisation de ce modèle de référence nous a alors permis d'obtenir des solutions de jets parfaitement détendus en bon accord avec les résultats expérimentaux disponibles, tant pour le champ cinématique moyen que pour le champ turbulent. Une tendance à surestimer le niveau d'entraînement de l'air extérieur et une sensibilité importante aux niveaux des variables turbulentes prescrites à l'ajutage ont néanmoins été soulignées.

L'utilisation de ce modèle de référence nous a également permis de décrire correctement la structure d'ensemble de trains de chocs en diamant rencontrée lors de la simulation de jets faiblement sous-détendus. Un léger décalage de l'ensemble de la structure prévue par rapport à la structure attendue a néanmoins été observé dans ce cas, ainsi qu'une tendance à sous-estimer l'intensité de la détente. Nous avons essentiellement attribué ce décalage, d'une part à la géométrie simplifiée considérée à l'ajutage, d'autre part à la forte diffusion numérique intrinsèquement liée au schéma de Roe couplé au limiteur "minmod". L'analyse des diverses contributions à l'équation de bilan de l'énergie cinétique de turbulence nous a par ailleurs permis de mettre en évidence la nécessité de recourir à une étude plus approfondie du "calage" des modèles retenus, en particulier pour les termes de production enthalpique et de pression-dilatation, qui semblent ne pas permettre, en l'état, de représenter correctement l'interaction des chocs avec la couche de cisaillement.

Nous avons finalement abordé l'étude de jets très fortement sous-détendus en considérant des niveaux de pression génératrice proches de ceux utilisés pour les essais de certification. L'outil numérique adopté a été en mesure de nous conduire à prévoir l'ensemble des éléments caractéristiques présents au sein de l'écoulement moyen, même si l'utilisation du schéma de Roe conduit à surestimer nettement l'augmentation de vitesse dans la zone de détente intense. Nous avons pu mettre en évidence que le processus d'adaptation de la pression à travers la cellule de choc et au sein de la poche subsonique dans un jet fortement sous-détendu reste fondamentalement dominé par les effets purement convectifs mais que la seule prise en compte des effets de compressibilité ne permet pas de représenter correctement la croissance des couches de cisaillement en aval de la cellule de choc. Ceci nous indique que nous ne pouvons pas faire abstraction des effets de courbure qui conduisent à augmenter de façon très importante le mélange turbulent dès que le jet a atteint son extension radiale maximale en amont du disque de Mach.

Ces premiers résultats sont encourageants à plusieurs niveaux. Ils nous indiquent tout d'abord qu'il est possible, par une gestion judicieuse du maillage, de s'abstraire d'une description trop détaillée des conditions limites en sortie et d'utiliser ainsi des domaines de calcul peu étendus et un nombre relativement modeste d'éléments pour prévoir le comportement moyen des jets for-

tement sous-détendus. La mise en évidence de la faiblesse du schéma de Roe couplé au limiteur "minmod" nous conduit alors en premier lieu à suggérer l'adoption d'un schéma numérique plus précis pour évaluer les flux convectifs, qui, s'il est suffisamment robuste, devrait nous permettre à cours terme de disposer d'un outil à même de prévoir, au moins globalement, le comportement de l'écoulement moyen en configuration d'impact normal proche. Cette perspective est d'autant plus attrayante que le parcours de la littérature scientifique a révélé l'inexistence d'étude numérique aboutie pour cette configuration pour  $NPR > 5$ . La source principale d'imprécision ayant été localisée au niveau de la zone de détente intense en aval de l'ajutage et le manque de robustesse de schémas plus précis étant principalement liée à la structure de choc, il semble également envisageable, à partir de la détermination initiale de l'écoulement stationnaire en moyenne par l'application de la stratégie adoptée, d'utiliser ensuite conjointement différents solveurs, en fonction de la zone de l'écoulement concernée. Un simple paramétrage d'une fonction indicatrice de gradient pourrait nous permettre par exemple d'utiliser localement un solveur plus approprié dans la zone de détente.

Notons que la pratique de l'outil numérique sur cette configuration a permis de mettre en évidence qu'il est toujours possible, en fonction de l'extension du domaine utilisé et de celle des zones de chocs ou de détente, de définir un jeu de paramètres de réadaptation et un critère absolu de convergence relative permettant d'obtenir une nouvelle solution stationnaire qui ne change quasiment plus si un niveau de raffinement global plus important est utilisé. En étendant ainsi l'étude menée séparément sur des configurations de couches de mélange et des configurations de choc stationnaire, nous devrions pouvoir automatiser la procédure en réglant automatiquement les paramètres de la réadaptation, par exemple en fonction du nombre de Mach convectif dans la couche initiale de cisaillement et de l'intensité des chocs.

Nous avons ensuite montré qu'une extension du modèle de turbulence proposé était nécessaire dans la configuration de jet fortement sous-détendu. Le recours à une simulation au second ordre pour mieux représenter les effets de courbure peut être très coûteuse en temps calcul, sans compter qu'elle peut poser de sérieuses difficultés de stabilité numérique. Aussi serions-nous tentés de nous orienter dans un premier temps vers une fermeture non-linéaire du tenseur des contraintes, à condition de trouver un moyen de réintégrer les effets de compressibilité lorsque nous souhaitons nous intéresser au champ lointain du jet.

Soulignons finalement que, même si les évolutions de l'outil que nous suggérons devraient probablement améliorer nettement la précision des prévisions numériques en configuration axi-symétrique (et donc être exploitable au vu de l'imprécision des interprétations de la norme de sécurité actuellement en vigueur), de nombreux efforts restent à fournir pour préciser l'influence des conditions prévalant au niveau de l'orifice. Nous avons en effet mis en évidence le fait que la structure de choc dépend de façon non-négligeable des profils des variables physiques prescrits et que la croissance de la couche de cisaillement dépend également fortement des niveaux de turbulence considérés à l'ajutage. Au vu de ces éléments, il nous semble souhaitable de préciser les éléments de la norme en vigueur. Par ailleurs, en nous appuyant sur les études expérimentales rapportées dans la littérature, nous pouvons affirmer, non seulement que la structure de la couche de cisaillement dépend également fortement de la rugosité au niveau de l'ajutage (de par le possible développement de tourbillons longitudinaux de Taylor-Görtler), mais aussi que la structure globale de l'écoulement de jet fortement sous-détendu est profondément modifiée lorsque nous considérons un orifice de forme elliptique ou en fente au lieu d'un orifice circulaire. N'oublions pas non plus que la structure de l'écoulement en configuration d'impact peut être profondément modifiée en fonction de la distance entre l'orifice et le plan impacté et l'angle de ce plan avec l'axe principal du jet. Si les améliorations que nous suggérons d'apporter à l'outil numérique qui a été présenté dans ce mémoire, s'avèrent suffisamment efficaces, leur adaptation

au cas tridimensionnel semble être plus que souhaitable afin de pouvoir mener, en configuration tridimensionnelle, une étude paramétrique plus étendue. En effet, seul ce type d'étude permettra d'identifier les géométries d'orifice à l'origine des configurations d'impact effectivement les plus défavorables dans le cas du percement d'une chambre de combustion aéronautique.

# Annexes



## Annexe A

# Interpolation linéaire d'éléments finis triangulaires

Soit un élément triangulaire  $T_n$  d'un maillage non-structuré. Soit  $h$  un champ scalaire que l'on cherche à évaluer. On connaît les coordonnées des points indicés  $(i, j, k)$ , constituant le triangle et les valeurs  $(h_i, h_j, h_k)$  du champ scalaire en ces points. Les fonctions de base linéaires (dite éléments P1) associées au triangle sont les fonctions

$$\mathcal{B}_{mn} = a_{mn} + b_{mn}x + c_{mn}y$$

$m$  parcourant l'ensemble des indices  $(i, j, k)$ , permettant de reconstruire linéairement le champ scalaire en n'importe quel point  $(x, y)$  à l'intérieur du triangle, selon :

$$h(x, y) = \sum_{m=\{i,j,k\}} \mathcal{B}_{mn}(x, y)h_m, \quad (x, y) \in T_n$$

On introduit les vecteurs  $\vec{\mathcal{A}}$  des coefficients de l'approximation linéaire résultante  $h$  sur  $T_n$  et  $\vec{\mathcal{H}}$  celui des valeurs de  $h$  aux sommets du triangle, ainsi que la matrice  $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$  des coordonnées de ses sommets, soit :

$$\vec{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{\mathcal{P}}} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$

L'égalisation de l'expression linéaire de  $h$  en chaque sommet donne :

$$\vec{\mathcal{H}} = \overline{\overline{\mathcal{P}}}\vec{\mathcal{A}}$$

Les coefficients des fonctions de bases  $\mathcal{B}_{mn}$  se déterminent alors par simple inversion de ce système, et correspondent à l'inverse de  $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ , soit :

$$\overline{\overline{\mathcal{P}}}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{in} & a_{jn} & a_{kn} \\ b_{in} & b_{jn} & b_{kn} \\ c_{in} & c_{jn} & c_{kn} \end{bmatrix}$$

Les coefficients des fonctions de base ne dépendent ainsi que des coordonnées des points selon :

$$\begin{cases} a_{in} = \frac{1}{\det(\overline{\mathcal{P}})}(x_j y_k - x_k y_j) \\ b_{in} = \frac{1}{\det(\overline{\mathcal{P}})}(y_i - y_k) \\ c_{in} = \frac{1}{\det(\overline{\mathcal{P}})}(x_k - x_j) \end{cases}$$

les autres coefficients s'obtenant par permutation circulaire sur les indices  $i, j, k$  de ces expressions. Par identification, les coefficients de la fonction d'interpolation sur le triangle sont reliés aux coefficients des fonctions de base selon :

$$\begin{cases} a = \sum_{m=\{i,j,k\}} a_{mn} h_m \\ b = \sum_{m=\{i,j,k\}} b_{mn} h_m \\ c = \sum_{m=\{i,j,k\}} c_{mn} h_m \end{cases}$$

Le calcul des gradients de la variable interpolée sur  $T_n$  est alors immédiat :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = b \\ \frac{\partial h}{\partial y} = c \end{cases}$$

## Annexe B

### Communications à des congrès pendant la période du travail de thèse

- G. Lehnasch, P. Bruel, "Numerical Problems Related to the Simulation of Highly Underexpanded free jets", *International Conference "High Speed Flow : Fundamental Problems"*, Zhukovski, Moscow region, Russia, September 21-24, 2004.
- G. Lehnasch, P. Bruel, "Some Specific Aspects of the Simulation of Highly Underexpanded Supersonic Jets", *The Seventh Asia-Pacific International Symposium on Combustion and Energy Utilization*, Hong-Kong SAR, December 15-17, 2004.





# Numerical Problems Related to the Simulation of Highly Underexpanded Supersonic Free Jets

G. Lehnasch<sup>1</sup> and P. Bruel<sup>2</sup>

*Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire de Combustion et Détonique,  
ENSMA, 1 Avenue Clément Ader, 86960 Futuroscope Chasseneuil, France*

**This study highlights the principal difficulties related to the simulation of highly underexpanded supersonic jets and suggests solutions to overcome these in order to develop an appropriate numerical strategy. Focusing on the primarily inviscid near field of an inert highly underexpanded sonic round free jet, a time-dependent compressible axisymmetric formulation of the Euler equations is chosen while a mixed finite volume / finite element method is applied on unstructured triangular meshes. The numerical algorithm is combined with an anisotropic mesh adaptation procedure to perform a precise evaluation of the capabilities of the low cost classical upwind schemes of Roe or Van Leer to capture the main peculiarities of the shock structure.**

## Nomenclature

$D_{dm}$	=	diameter of the Mach Disk
$D_e$	=	diameter of the nozzle outlet section
$\mathbf{ij}$	=	vector between nodes $i$ and $j$
$L_{sc}$	=	length of the first shock cell
$MD$	=	Mach Disk
$NPR$	=	Nozzle Pressure Ratio
$\mathbf{U}_i$	=	Vector of conservative variables at node $i$
$\mathbf{V}_i$	=	Vector of physical variables at node $i$
$X_{dm}$	=	position of the Mach Disk

## I. Introduction

Underexpanded jets have been extensively studied since they are encountered in various practical situations such as assisted laser cutting, infrared signature of jet plumes, thermal spallation drilling torch flame, or accidental discharge of gases from high pressure pipes. For weak or moderate "Nozzle Pressure Ratio (NPR)" between the "nozzle" exit and the atmosphere, these jets are characterised by three main zones: i) the near field, whose "diamond-like" shock structure is a repetition of incident and reflected oblique shock waves; ii) the transition region, wherein these structures are swallowed by the development of the shear layer; and finally, iii) the far field, where a more classical self-similar jet is seen to evolve. In these cases, the jet core remains mainly supersonic so that the global features of the flow structure is reasonably predicted just by taking into account the compressible effects on turbulence. It is not the case for situations involving much higher NPR's encountered for instance for a jet issuing from an orifice in the combustion chamber wall of a jet engine, or in injection system of a rocket engine. In that case, the expansion gives rise to a highly curved incident "barrel" shock which irregularly reflects through a strong, curved "Mach Disk" which strongly interacts with the shear layer, while a large subsonic zone develops within the jet core. This flow configuration represents a great challenge as far as the modelling of the prominent phenomena is concerned, e.g. compressible turbulence, interaction between turbulence and shock, strong compression or expansion zones, curvature and non-equilibrium effects on the shear layer growth. In fact, dealing with such flows by simply considering the Euler or Navier-Stokes equations cannot be considered as a trouble free strategy, especially in the case of a sonic nozzle. Indeed, because of the simultaneous presence of strong shocks and shear layers, a compromise has to be found between accuracy and computational feasibility. If we want to avoid the use of a prohibitively extended computational domain, the dual subsonic-supersonic nature of the jet core within the near flow field requires the prescription of specific conditions and/or specific grid procedures, especially at the exit boundary of the computational domain. The goal of this contribution is thus to address these numerical problems. Firstly, we introduce the peculiarities of the numerical method implemented in the code N3s-NATUR [1] which is used, and identify the strong dependence

<sup>1</sup> PhD Student, Combustion and Turbulence Team, Guillaume.Lehnasch@lcd.ensma.fr.

<sup>2</sup> Senior Scientist, Combustion and Turbulence Team, Pascal.Brue@lcd.ensma.fr.

of the calculated flow structure on the grid topology and on the initial conditions. Accordingly, a specific strategy of initialization and mesh adaptation is defined which better capture the flow features and represents a good compromise between the desired accuracy of the calculations and their computational cost.

## II. Numerical Method and Meshing Procedure

### A. Presentation of the numerical method

The method which is implemented in the CFD code N3s-NATUR [1] to solve the hyperbolic operator relies on a classical cell-vertex finite volume approach. Figure 1 presents how the control volumes  $C_i$  are built around each node  $i$  of the triangulation of the computational domain. The segment midpoints  $M_{ij}$  linked to this node are joined with the centres of gravity  $G_{ij}$  of the surrounding triangles. On each control volume  $C_i$ , a constant mean state vector of conservative variables  $U_i$  associated with the nodal value at  $i$  is considered, so that the discretization of the integral form of the weak conservative formulation of the Euler equations gives the following basic conservative numerical scheme (first order explicit integration of the time derivative term):

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t. ( 1/V_i \sum_{j=1}^{N_i} F_{ij}(U_{ij}^n, U_{ji}^n, n_{ij}) + F_b ), \text{ where } n_{ij} \text{ are the mean vectors normal to the common}$$

boundary segment  $\Gamma_{ij}$  between  $C_i$  and the  $N_i$  surrounding cells,  $F_{ij}$  are the upwind fluxes evaluated by taking the extrapolated values  $U_{ij}$  and  $U_{ji}$  from each side of  $\Gamma_{ij}$  into account to achieve second order spatial accuracy when possible (MUSCL's approach) and  $F_b$  is an additional boundary flux for boundary elements. The way the gradients  $(\nabla V)_{ij}$  of physical variables  $V$  are evaluated to extrapolate these values by  $V_{ij} = V_i + 1/2(\nabla V)_{ij} \cdot ij$  or  $V_{ji} = V_j - 1/2(\nabla V)_{ji} \cdot ij$  constitutes the originality of the hyperbolic solver. Two choices have been considered for this study. The first consists in applying a minmod limiter ( $\lim(a,b)=1/2(\text{sign}(a)+\text{sign}(b)).\min(|a|,|b|)$ ) directly on the gradients  $(\nabla V)_{mi}$  evaluated by P1 Galerkin finite elements on each triangle intersecting the control volume  $C_i$ . The second consists in applying a Van Albada limiter ( $\lim(a,b)=((a^2+\epsilon).b+(b^2+\epsilon).a)/(a^2+b^2+2\epsilon)$ ) to a centered gradient  $(\nabla_c V)_{ij} \cdot ij = V_j - V_i$  and a half-upwind gradient  $(\nabla_{1/2} V)_{ij} \cdot ij = 1/2(V_j - V_i + (\nabla_{T_{ij}} V) \cdot ij)$ , where  $(\nabla_{T_{ij}} V)$  is the gradient of the physical variable evaluated using finite elements on the upwind triangle  $T_{ij}$  intersecting the direction given by  $ij$  (see Fig. 1). Then, two classical approaches have been chosen for evaluating the numerical flux  $F_{ij}(U_{ij}^n, U_{ji}^n, n_{ij})$  based on these two extrapolated values. At first, Roe's method [2] gives the exact linear solution to Riemann's problem considered locally at the level of  $\Gamma_{ij}$  and yields a simple expression of an average flux with the addition of a dissipative term :  $F_{ij}(U_{ij}^n, U_{ji}^n, n_{ij}) = 1/2 (F(U_{ij}^n) + F(U_{ji}^n) - R_{ij} (U_{ji}^n - U_{ij}^n))$ . This approximate solver is quite inexpensive since Roe's matrix  $R_{ij}$  is computed from algebraic expressions, but is known to sometimes fail locally in strong expansion zones (shift of variables near vacuum state) or to lead to propagation of numerical instabilities in the vicinity of strong shocks ("carbuncle" phenomenon). Accordingly, special care to grid quality is given and the entropy fix of Harten [3] is applied, which consists in locally modifying the expressions of near sonic waves velocities so as to avoid vanishing numerical dissipation and enforce robustness. The second approach is Van Leer's flux splitting [4] which

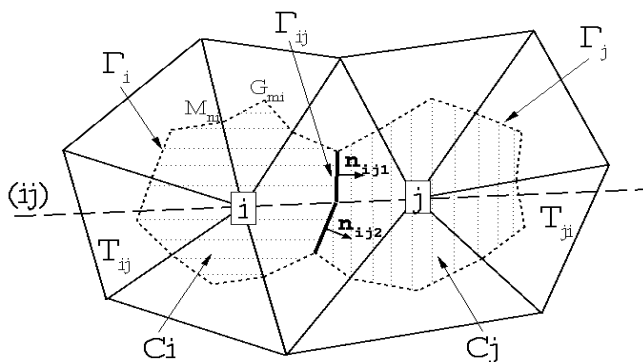


Figure 1. Schematic of the geometric features of the control volume related to the numerical method.

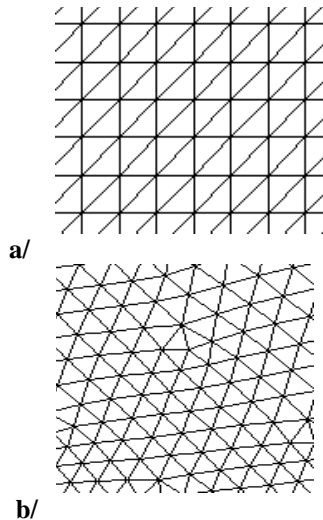
consists in directly computing the numerical flux from two contributions according to the direction of propagation of information, which is given by components of the split fluxes  $F^+$  and  $F^-$  which depend on the local Mach number, normal to  $\Gamma_{ij}$ :

$$F_{ij}(U_{ij}^n, U_{ji}^n, n_{ij}) = F_{ij}^+(U_{ij}^n) + F_{ij}^-(U_{ji}^n)$$

So as to keep time consistency and because of the unsteady nature of highly underexpanded jets, an explicit formulation is chosen for the time discretization. We use the smallest time step within the computational domain, evaluated locally on each cell by taking into account the velocity of the fastest local wave and the smallest length within each control volume. Finally, a domain decomposition algorithm is implemented to run the simulation in parallel on a MPI-Linux cluster.

### B. Grid Generation and Remeshing Procedure

Generating the initial mesh with the ICEM-CFD mesher, two kinds of grid topology have been tested (shown in Fig. 2a). For the first, structured blocks encompassing the whole computational domain are generated with fixed numbers of nodes at each boundary. Then, the edges of blocks are projected to the corresponding boundaries of the domain and the quadrilateral elements obtained are finally split to get triangular elements. This common method constitutes a good way of precisely controlling the grid density. However, it has the



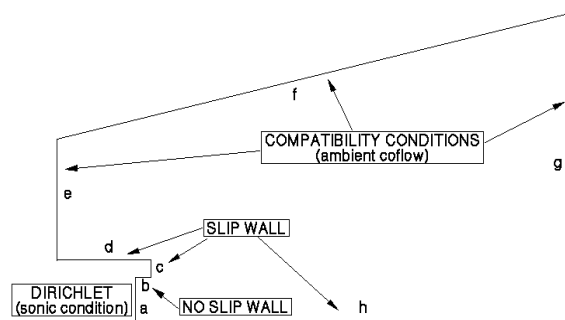
**Figure 2 : Samples of tested grids :**  
**a/ splitted structured type grid,**  
**b/ unstructured type grid**

disadvantage that all triangular elements are orientated in the same direction for a regular domain. The second kind of initial mesh (see Fig. 2b) is of the Voronoï type and is generated by a constrained Delaunay method. Different levels of refinement are imposed at the various boundaries and smoothing is applied to obtain better quality according to these constraints, which are empirically fixed to get a satisfying first solution for subsequent application of a readaptation procedure. By this method, a uniform distribution of triangles with no preferential orientation can be obtained, but the grid density cannot be precisely controlled. Once the first solution is obtained, the anisotropic mesh adaptation (AMA) method of Dolejší [5] is chosen to improve the distribution of nodes. This consists in generating *a posteriori* an error field due to the linear interpolation, based on the behaviour of the second derivative of a given solution. In fact, the discretization error around the centre of gravity of a triangle is equal to half the sum of the second derivatives when a piecewise linear interpolation is used to represent the solution on each triangle. Thus, an "error matrix" can be built based on the Hessian matrix of a relevant variable of the solution (like the density in our case). Based on this "error matrix"  $E$ , a new norm ( $\|v\| = v^T E v$ ,  $v$  being a vector from the Euclidian space) can be applied directly on each segment of the triangular mesh to generate a new Riemann metric. Based on this new metric, local operations of edge splitting, edge removal or sweeping (suppression of the edge linking two triangles and use of the second diagonal of the resultant

quadrilateral element to get two new triangles) can be run through an iterative process to progressively reach a better distribution of segments throughout the computational domain, according to the previous solution and a given global level of grid density. Dolejší [5] has shown that this procedure converges for stationary problems, meaning that the newly generated grid becomes quite unchanged after a few iterations (typically from 5 to 10).

### C. Initialization and Boundary conditions

The geometry of the computational domain is presented in Fig. 3. Representative levels of physical variables are evaluated from stagnation conditions by considering a unidimensional isentropic evolution up to the (convergent) nozzle section (Label *a* in Fig. 3). At each iteration, the inlet boundary condition (Label *a*) is strongly imposed by using these physical values, either through the vector of conservative variables at each node, or through the flux components at each boundary segment. Actually, a Mach number of 1.01 is considered here so as to prevent numerical instabilities due to downstream perturbations. It is then necessary to impose a slow coflow (Mach number equal to 0.05 for ambient conditions (101325 Pa, 298K) in order to accelerate convergence and prevent instabilities in the flow surrounding the jet. Nevertheless, velocity vector direction and levels of pressure have to be left free so as to correctly take the entrainment into account and avoid numerical rotational near the inlet between the jet and the surrounding coflow. So, compatibility conditions must be prescribed for boundaries distant from the jet (Labels *e*, *f* and *g*).



**Figure 3 : Schematic of the computational domain and boundary conditions.**

equal to the number of incoming characteristic waves, by connecting the state inside the computational domain with the far state through Riemann invariants evaluated in the direction normal to the boundary. This fixes in particular the position of the coflow inlet boundary (Label *e*) which must be located sufficiently upstream of the nozzle exit, to avoid rapid shift of the imposed variables at this location which would systematically lead to a

This consists in imposing a number of variables

failure of the simulation. Thus, a free-slip wall (Label *d*) is used to connect the inlet coflow (Label *e*) and the nozzle outlet (Label *a*). For this condition,  $v \cdot n = 0$  is imposed on the boundary flux components (between boundary nodes), whereas nodal values can be imposed at the level of the inlet when a Dirichlet condition is used so that the variables at the common node cannot be correctly imposed in that case. A small pseudo-nozzle lip (Label *b* and *c*) is so added to prescribe more precisely the real nozzle outlet cross-section. Previous tests with small NPR have demonstrated that the origin of the fan expansion is better defined in that case [6], even if the domain boundary is just located at a very small distance (about 0.5% of the inlet diameter) downstream of the real exit section. A free-slip wall condition is so prescribed for the boundary *c* while a no-slip condition is imposed for the boundary *b*, with a prescribed temperature equal to the temperature at the nozzle inlet. For the axis of symmetry (Label *h*), a free-slip condition is also applied to the boundary flux. The outlet boundary (Label *g*) imposes a specific treatment which is discussed in the following section. Finally, the choice to impose ambient conditions (298 K, 101325 Pa) with a velocity corresponding to a mach number equal to 0.5 on the flow throughout the domain is also related to the following specific numerical difficulties.

### III. Numerical Difficulties and Adopted Strategy

#### D. Dependency of the robustness and the positivity to the grid topology

By using the structured type grid topology, the shock structure may be correctly defined at the beginning of the simulation, but a strong instability often develops and gives rise to a non-physical converged solution (yielding features quite similar to the famous carbuncle phenomenon [7]), as shown in Fig. 4a, with an oblique shock wave instead of a straight Mach disk and a supersonic recirculation zone downstream. In fact, previous tests have shown that the same artefact appears when the reflection of a shock wave on a wedge (oblique to the axis) is simulated, whereas the blunt body problem for an upstream mach number of 10 (particularly sensitive to the carbuncle phenomenon) could be correctly simulated for the same set of parameters. This demonstrates that this instability cannot be directly attributed to a weakness of the axisymmetric formulation or the basic axis boundary condition. This artefact shows no dependency on the grid refinement, the type of prescribed boundary conditions or the type of numerical flux schemes (Van Leer or Roe) whereas the carbuncle phenomenon is not supposed to appear when the Van Leer scheme is used. On the other hand, it generally appears at the same physical time of the simulation, depending only on the dimensions of the computational domain. Moreover, simulations of shock tube problems reveal the appearance of a dissymmetry of the velocity profile downstream of the travelling shock wave when such a grid topology is used. Thus, this weakness of the numerical method is primarily attributed to the preferential orientation of the mesh. Indeed, this instability totally disappears by using the unstructured grid topology.

#### E. On the importance of the initial grid and the initialization of the domain

Too much initial numerical dissipation linked with too coarse an initial grid can also lead to a non-physical solution comprising an inverted curvature of the Mach disk followed by a strong recirculation (see Fig. 4b), which do not disappear when further refinements are performed and which prevent correct application of the remeshing procedure. On the contrary, over-refined initial grids lead to a failure of the numerical schemes at some points to capture the strong levels of expansion corresponding to the initial shock diffraction, so that only a somewhat limited range of levels of initial grid refinement can be used to get a useful first solution. Finally, if a too slow coflow is prescribed for initializing the flow throughout the domain, a very strong recirculation zone and corresponding low density region appear at the jet boundary. Because the outlet boundary condition can never be perfectly non reflective, this low density region can take a very long time to be correctly drained out of the computational domain, so that a relevant readaptation on density could be performed. In consequence, a velocity corresponding to a Mach number equal to 0.05 is initially prescribed throughout the domain to lessen this effect.

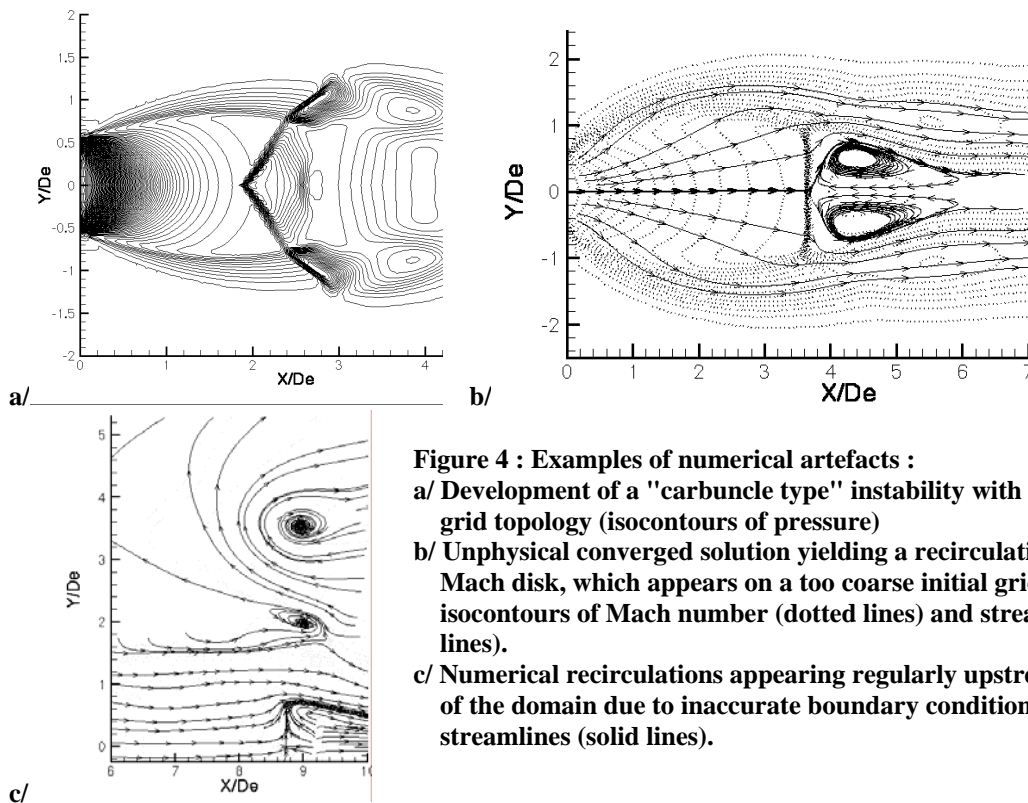
#### F. Dealing with the outlet boundary condition

Theoretical studies prove that if the flow is considered locally inviscid and one-dimensional, the dual supersonic/subsonic nature of the flow can be correctly treated at the outlet section of the computational domain by extrapolating values from the interior of the domain when an outlet node is in a supersonic state and by reimposing one variable (the pressure) for outlet subsonic nodes. As a consequence, the exact experimental pressure profile should be supposed prescribed for the boundary to be exactly non-reflective in the subsonic outlet regions. Directly prescribing an ambient level of pressure (1 atm) at the outlet of a short computational domain introduces a great error, in particular in the case of a highly underexpanded jet where different levels of pressure have to be considered for the subsonic coflow and for the subsonic jet core behind the Mach disk. It is for this reason that most studies deal with this kind of problem by using a very extended domain, so that weak reflected numerical waves can be sufficiently dissipated so as to not inhibit convergence. Prudhomme et al. [8] introduced the idea of using a short computational domain by prescribing a different constant level of pressure

within the subsonic jet core, corresponding to the pressure found within the the supersonic mixing layer near the axis. However, this solution does not prove sufficient in our case for high NPR as soon as the grid is refined near the outlet. Incorrect differences of total pressure can be observed between the supersonic mixing layer and the surrounding subsonic coflow (whose entrainment cannot be predicted *a priori*) or jet core flow, leading to the regular appearance of numerical recirculations (see Fig. 4c) while upstream instabilities rapidly develop within the mixing layer and couple with the outlet. This prevents convergence and generally leads to a failure of the simulation.

### G. Adopted numerical strategy

According to these numerical limitations which appear with the use of limited extended domain, the readaptation procedure is only applied to a limited domain and a strong coarsened zone is systematically added around it so as to strongly dissipate the mixing layer which becomes totally supersonic upstream of the outlet, and to damp all the unphysical reflected waves at the boundaries.

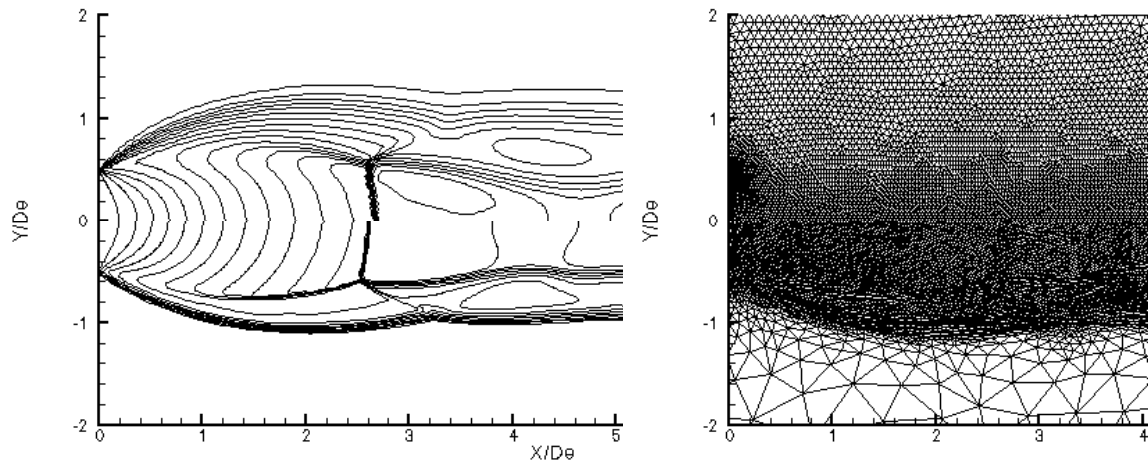


**Figure 4 : Examples of numerical artefacts :**  
**a/ Development of a "carbuncle type" instability with structured type grid topology (isocontours of pressure)**  
**b/ Unphysical converged solution yielding a recirculation behind the Mach disk, which appears on a too coarse initial grid : isocontours of Mach number (dotted lines) and streamlines (solid lines).**  
**c/ Numerical recirculations appearing regularly upstream of the outlet of the domain due to inaccurate boundary conditions : streamlines (solid lines).**

## IV. Numerical Validation and Results

The strategy used has been validated against the experimental results of [9] and classical data given in [10]. Figure 5a presents isocontours of Mach number of the solution obtained for NPR=7.55 after the first simulation on the initial 12057 node grid compared to the final solution obtained on the final 10979 nodes after five iterations of the readaptation procedure and use of Roe's method combined with a minmod limiter. Figure 5b compares the corresponding grids and clearly illustrates the performance of the remeshing procedure. After each remeshing iteration, elements within the jet are stretched along discontinuities, while most of nodes are removed in the smoother coflow region. Thus, even if fewer nodes are prescribed for the last grid, the first shock structure appears to be far better defined. The evaluation of convergence is based on an estimation of the L2 norm of the difference of the density field between two time steps (nondimensionalised by the same initial difference), while a CFL=0.8 is used. The mean position of the Mach disk is given by  $X_{dm}/De=2.6$  compared with 2.55 [10], while the Mach disk diameter is  $D_{dm}/De=1.14$  in comparison with 1.18 [10]. Increasing the global level of prescribed grid density does not significantly change the overall structure. This set of parameters thus appears to be a good compromise to obtain a numerical solution in good agreement with experimental results, even if the overall size of the first shock cell appears to be slightly overpredicted (1-3.5%). This error level grows with NPR and reaches 10% on  $X_{dm}/De$  for NPR=15.5, showing the limitation of the use of this kind of numerical scheme. Let us note that Van Leer's flux is not robust enough (as well as the use of the Van Albada limiter) for the initial calculation but can be used for new simulations initialized by a first solution calculated

with Roe's flux. For this case, the final grid obtained is slightly more refined (16287 nodes compared with 15825 for instance) but no significant differences between the shock structure geometries obtained can be observed. This demonstrates that the differences between the precision of the different methods of evaluation of the numerical fluxes can be compensated by such a procedure of improvement of the grid quality, but that this lack of precision can strongly penalize simulations for NPR higher than about 10. Finally, the Mach disk always yields a curvature which is too large, whereas it is supposed to be nearly straight for NPR less than 10. 3D simulations are required to evaluate the true capacity of the axisymmetric formulation and identify the origin of this artefact.



a/ b/  
**Figure 5: Solution of the simulation of sonic air jet at NPR=7.55**  
a/ Isocontours of Mach number (15 levels) for the first solution ( $Y/D_e > 0$ ) and after 5 readaptation cycles ( $Y/D_e < 0$ ).  
b/ Corresponding initial 12057 node grid ( $Y/D_e > 0$ ) and final 10979 node grid ( $Y/D_e < 0$ ).

## V. Conclusion

A specific strategy has been chosen to deal with the numerical difficulties associated with the simulation of highly underexpanded jets, consisting mainly in using a main grid through which a remeshing procedure is applied and systematically building a thin strongly coarsened grid all around to prevent coupling with inaccurate boundary conditions at the boundaries. This procedure proves quite efficient in simulating the main features of the near field of underexpanded jets for NPR of up to about 10. However it also highlights the need for testing different numerical schemes and more complex modelling approaches for higher NPR's.

## References

1. Martin R., *Projet N3S-NATUR, Ver. 1.4, Manuel Théorique, Simulog, Cannes, France, 2001.*
2. Roe, P.L., "Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 1981, pp. 357, 372.
3. Harten, A., "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, 1983, pp. 357, 394.
4. Van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme III. Upstream-Centered finite Difference Schemes for Ideal Compressible Flow," *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, 1977, pp. 263, 275.
5. Dolejší V., "Anisotropic mesh adaptation for finite volume and finite element methods on triangular meshes," *Comp. Visual. Sci*, Vol.1, 1998, pp. 165, 178.
6. Lehnasch, G. and Bruel, P., "Some Specific Aspects of the Simulation of Highly Underexpanded Supersonic Jets," *The 7<sup>th</sup> Asia-Pacific International Symposium on Combustion and Energy Utilization*, Hong Kong SAR, December, 2004, (to be published).
7. Robinet, J.C., Gressier, J., Casalis, G. and Moschetta, J.M., "Shock Wave Instability and the Carbuncle Phenomenon : Same intrinsic origin ?," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 417, 2000, pp. 237, 263.
8. Prudhomme, S.M. and Haj-Hariri, "Investigation of supersonic underexpanded jets using adaptative unstructured finite elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 17, 1994, pp. 21, 40.
9. Yüceil K.B. and Ötügen M.V., "Scaling parameters for underexpanded supersonic jets," *Physics of Fluids*, Vol. 14, N° 12, 2002, pp. 4206, 4215.
10. Love E.S., Grigsby C.E. and Lee L.P., *Experimental of theoretical study of axisymmetric free jets*, Technical Report R-6, Langley Research Center, Langley Field, VA, 1959.

## Some Specific Aspects of the Simulation of Highly Underexpanded Supersonic Jets

G. Lehnasch and P. Bruel

Centre National de la Recherche Scientifique, Laboratoire de Combustion et de Détonique,  
ENSMA, Futuroscope Chasseneuil, France, E-mail : Guillaume.Lehnasch@lcd.ensma.fr

### **ABSTRACT**

This work represents the first step towards the full prediction of the structure of highly underexpanded supersonic reacting jets representative of the discharge of hot gases through an orifice resulting from the accidental crack of the combustion chamber wall of a jet engine. Such jets yield very complex structures giving rise to challenging numerical difficulties for which a global strategy is proposed. At first, the jet is assumed to be inert and formed by a mixture of fully burned gases issued from a one-inch diameter orifice (standard certification test) and discharged into a quiescent atmosphere. A compressible axisymmetric time-dependent Navier-Stokes approach is chosen to obtain solutions on unstructured meshes by applying a TVD second-order scheme in a cell-vertex finite volume/finite elements form combined with a mesh adaptation algorithm to improve accuracy. This strategy is validated by comparing the main features of the predicted flow structure to various experimental results reported in the literature for cold air jets issued from convergent nozzles. Then, this study focuses on the influence of orifice conditions on the overall structure of a highly underexpanded jet for the case of a discharge of hot fully burned gases.

**Keywords** : discharge, orifice, sonic jet, compressible flow, computational fluid dynamics

### **1 INTRODUCTION**

In a jet engine, the accidental boring of the combustion chamber wall leads to the formation of a high pressure jet, possibly reacting, which can impact and severely damage vital equipment such as the pylon truss which attaches the engine block to the plane wing. As a consequence, the certification authorities require that the engine manufacturer demonstrate that, in the case of such a chamber wall boring, the engine integrity can be preserved for at least three minutes (considered as the necessary period for the pilot to identify and stop the faulty engine). Thus, the ability to simulate the jet structure is one of the keypoints paving the way towards an efficient assessment of the hazards associated to such an engine failure that will help in designing the engine. Since the direct numerical simulation of all the phenomena present in the chamber is by far out of reach of any computer, it seems reasonable, as a first step, to simplify the flow geometry by considering the discharge from an orifice which will belong to the boundary of the computational domain at which profiles of all the relevant variables will be prescribed. For that purpose, by considering i) an isentropic evolution between the stagnation conditions prevailing in the combustion chamber and the choked orifice over a realistic range of fuel-air ratios and combustion efficiencies; ii) a relevant range of ambient pressure given by Standard Atmosphere correlations for various flight levels at which the failure might occur, high levels of nozzle pressure ratios (NPR) ranges between the static pressure at the orifice and the ambient one can be determined and prove (cf. Table 1) to be very wide (from about 13 to 96). It is worth underlining that although such underexpanded jets are encountered in many other practical situations such as jet plumes [4], assisted jet laser cutting, thermal spallation drilling with torch flames [10], or discharge of gases from high pressure gas pipes, these jets exhibit rather smaller NPR's (typically less than 5) leading to a pressure recovery in the atmosphere that occurs mainly through oblique shocks. Thus, they yield the classical replication of diamond shock-cell structures embedded in the potential core of the near zone, whose progressive decay is due to the shear layer growth. Since the interaction between the shocks and the shear layer is quite weak, the jet core remains mainly supersonic and various numerical studies prove that it is possible to predict quite well the near zone of the jet (by just taking into account the extra dissipation of kinetic turbulent energy due to compressibility). For the higher NPR's considered here, the jet flow structure is more complex and challenging as far as modelling and simulation are concerned. Accordingly, on the following part, we recall the main features of the jets considered and detail the prominent numerical aspects addressed in order to produce accurate simulations of the flow structure. Finally, examples of numerical results will be shown and discussed with a special emphasis on the influence of the boundary condition at the nozzle exit on the flow patterns properties.



Stagnation conditions	Orifice section conditions	Standard Atmosphere conditions
Total pressure = 25-45 bars	Static pressure = 13.7 - 25 bars	Altitude = 0 - 10000 m
Total temperature = 1700-2200 K	Static temperature = 1488 - 1957 K	Static pressure = 1 - 0.26 bars
Mixing ratio = 0.8 - 1.2	$\gamma = 1.25 - 1.285$	Static temperature = 288 - 223 K
Combustion efficiency = 0.5 - 0.95		
$\gamma = 1.25 - 1.285$		

Table 1 : Estimation of thermodynamic conditions at the orifice section and into the ambient atmosphere.

## 2 PHENOMENOLOGY AND FRAMEWORK OF THE STUDY

Fig. 1 presents a schematic representation of the jet under study for a NPR greater than 10. Since the chamber pressure is high enough to induce a choked flow at the orifice level, as it would be in a Laval nozzle, the sonic flow accelerates through a fan expansion wave (Label 1 in Fig. 1) attached to the nozzle edge. The Mach lines reflect at the jet boundary and focalise to give birth to a highly curved oblique "barrel shock" wave (Label 2), which converges towards the axis. Because of the high NPR value, the reflection cannot be regular and so a strong shock (or "Mach disk") (Label 3) appears on the jet axis. As a consequence, the produced reflected shock (Label 4) is "connected" to the "barrel shock" and the "Mach Disk" by a triple point (Label 5), from which a slip line (Label 9) develops (growing rapidly as a shear layer) for moderated NPR's and separates a supersonic zone (Label 6) behind the oblique reflected shock wave from the subsonic core (Label 7) behind the "Mach Disk". The size of this shock structure is proportional to the square root of the ratio of the total inlet pressure to the stagnation ambient pressure [3] so that the "Mach Disk" directly interacts with the main shear layer of the jet as soon as  $NPR \geq 7$ . For  $NPR \geq 10$ , the "Mach Disk" begins to bend upstream. The difference in the loss of total pressure through the reflected shock and the Mach Disk becomes very high and induces a strong bending of the shear layer towards the subsonic jet core. It has to be noticed that the reflected shock produces a new fan expansion which reflects without focalizing on the supersonic shear layer boundaries (Labels 8 and 9), leading to a succession of expansions and compressions of the supersonic flow. In addition, due to the strong curvature of the shear layer surrounding the "barrel shock", Taylor-Görtler instabilities can develop [13] so that large longitudinal coherent and stationary structures interact with the classical growing Kelvin-Helmoltz coherent structures. Last but not least, the strong interaction between the shock structure and the shear layer promotes the mixing so that the self-similarity region occurs more rapidly than for lower values of NPR [11].

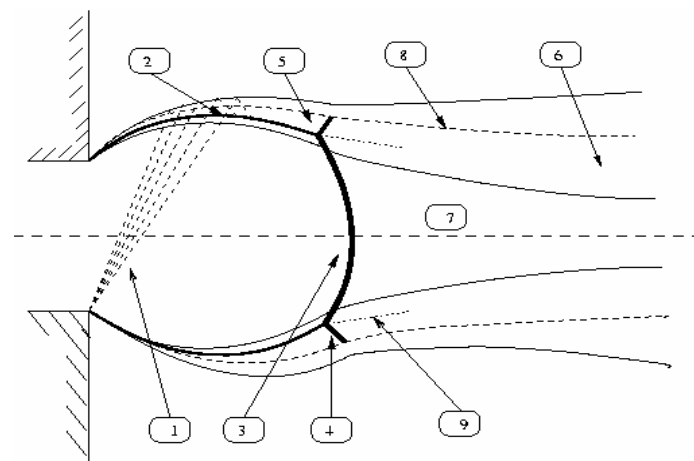


Figure 1 : Schematic of a highly underexpanded jet.

As far as turbulence modelling is concerned, most studies reported in the literature [2][5] rely on the  $k-\epsilon$  model. For  $NPR \leq 5$ , simulations based on that model with compressibility corrections prove to be able to correctly predict the main features of the flow patterns. However, as the NPR is increased, they fail to reproduce in a satisfactory manner the near field and the transition region. Indeed, it is well-known that such a kind of turbulence model originally developed for turbulence near equilibrium behaves poorly as soon as the interaction between coherent structures is driving the flow unsteadiness or/and if curvature and anisotropic effects are present. However, since no significant improvement would be obtained for high NPR's, the complexity associated with the introduction of a multiscale approach [1] is not warranted. So, modelling developments are still required to take precisely into account the effects of the strong interaction between the various kinds of coherent structures, discontinuities and turbulence. Nevertheless, the near field still remains mainly influenced by purely convective effects, so that the Euler equations are widely used to compute the near field of moderately underexpanded jets. But even in that case, these simulations require a great deal of attention since the use of too

dissipative numerical fluxes or unadapted grids will lead to a lack of precision in the location of the sonic line, accompanied by a shift of all the following expansion and compression zones. In that respect, it is quite surprising to note that the level of efficiency of the most widely used algorithms for evaluating the convective fluxes is not precisely reported in the literature. So, before improving turbulence modelling for highly underexpanded jets, it is necessary to evaluate the performance of the numerical approach chosen by solving the Euler equations and checking the capability of accurately simulating the near zone of the jet. The goal of the present study is to demonstrate such a capability and/or limitations with the CFD code N3S-NATUR [8] combined with a remeshing procedure.

### 3 COMPUTATIONAL MODEL AND NUMERICAL ALGORITHM

#### 3.1 Presentation of the Numerical Method

The present numerical strategy is presented here briefly. More details can be found in [8]. The computer code relies on a cell-vertex based discretization on unstructured triangular meshes of the weak conservative integral form of the Navier-Stokes equations. The cell-vertex formulation has been retained since it minimizes the distortion of the control volumes when the triangular elements are highly stretched. The time derivative discretization relies on an explicit Euler formula for first order accuracy or on a Runge-Kutta sequence when second order accuracy is sought. The low-cost approximate Riemann Roe solver is used for the evaluation of the conservative fluxes. Such a linearization is known to fail to capture precisely strong expansion zones and leads sometimes to a local shift of the variables near the vacuum state at local points, but still remains more robust than other approaches (Van Leer flux splitting for instance), in particular in the early stage of the calculations. A MUSCL extension is used to obtain higher accuracy and is combined with a minmod limiter to ensure a TVD behaviour, while the evaluation of gradients relies on a linear finite-elements approximation on each triangle connected to the control volume. An entropy fix is also applied for damping instabilities and prevent the apparition of unphysical solutions. Such a numerical scheme is supposed to be dissipative enough to damp the strong instabilities which could occur near discontinuities. Finally, a domain decomposition is adopted that allows the simulations to be run on a multiprocessors Linux cluster.

#### 3.2 Mesh adaptation and related numerical strategy

The initial mesh, generated with the ICEM-CFD mesher is of Voronoï type with prescribed mesh sizes for each boundary and smoothing is applied to improve the grid quality for the first simulation. Then, after getting a solution on that first grid, the anisotropic mesh adaptation (AMA) algorithm of Dolejsi et al. [6] is applied to evaluate *a posteriori* the error induced by nodal distribution according to the local variation of the curvature of a relevant combination of physical variables. Based on that "interpolation error field", local operations of edge splitting, nodes removing or sweeping can be applied in an internal iterative procedure. This method results not only in clustering nodes in strong gradients regions but also in progressively lining up the triangular meshes with the different kinds of discontinuities (improving the accuracy of the evaluation of convective fluxes) and reducing the number of nodes in smooth regions (easing the control of the global level of nodes density). Once the new mesh has been constructed, the solution obtained on the previous mesh is interpolated on that new mesh and a new nearly converged solution is sought. This procedure is here repeated several times by using the density, until a mesh convergence is achieved (usually after 5 to 10 cycles) or until the overall solution does not change significantly anymore. At the present time, this remeshing strategy has been applied only for free stream simulations i.e. a co-flow is present around the nozzle. Indeed, when prescribing wall conditions around the nozzle (as it would be the case with a real chamber boring), the remeshing procedure was difficult to control at the same time near the wall and within the jet so that Roe's scheme was sometimes failing near the wall where too coarsened meshes were found. In such a case, a more simple refinement has been applied which consists in splitting each triangle into several subtriangles in *a posteriori* prescribed areas.

#### 3.3 Initialization and Boundary Conditions

Fig. 2 presents an overview of the computational domain geometry. Two kinds of flow configurations are considered e.g. a free stream simulation for which a co-flow is present and an orifice simulation for which the orifice is directly connected to interior and exterior walls. We specify for each case, the boundary conditions used on the various segments forming the frontier of the computational domain.

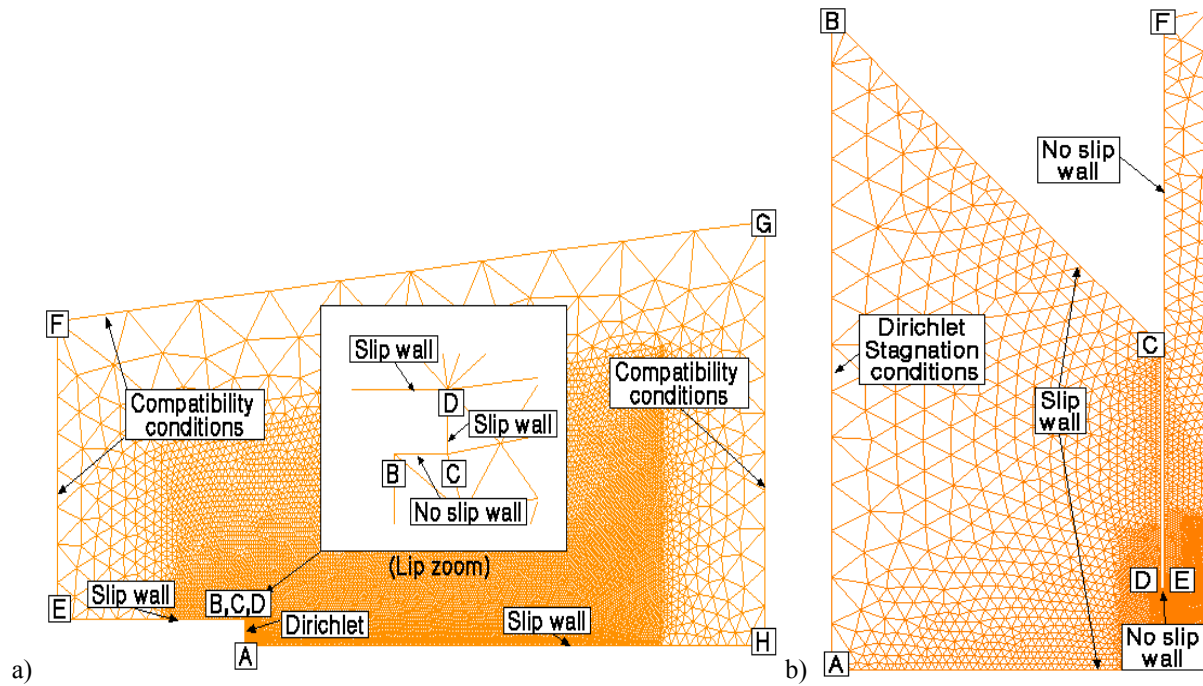


Figure 2 : Computational domain and prescribed boundary conditions :

a) free stream simulation with a "pseudo nozzle lip", b) orifice simulation (zoom upstream of the orifice)

#### Free stream simulation (Fig. 2-a)

*Segment A-B,C,D* : Two nozzle geometries have been considered. The first one consists in considering a simple inlet so that A is directly connected to D at the same longitudinal location  $x=0$  and strongly prescribing a flat profile for the pressure, the temperature and the velocity whose values correspond to the isentropic evolution from the stagnation conditions to the choked orifice. The Mach number is set equal to 1.01 instead of 1 in order to avoid downstream perturbations near the inlet which would inhibit convergence. The second geometry consists in adding a small "sharp edge nozzle lip", so that A-B corresponds to the inlet described above, B-C is a no-slip wall where temperature is set equal to the inlet temperature while a slip wall condition is prescribed to the segment C-D.

*Segment D-E* : A slip wall condition is prescribed just to take into account a coflow without boundary layer.

*Segments E-F,F-G,G-H* : Compatibility conditions are prescribed. It consists in imposing into the flux components a number of variables equal to the number of characteristics entering into the computational domain in the direction normal to boundary segments. This variables are recalculated by considering the compatibility relations between the local state found in the domain and a prescribed far state corresponding to the ambient atmosphere, so that correct entrainment can be taken into account. The Mach number is set equal to 0.05 to prevent oscillations and speed-up convergence, this value being sufficiently small to avoid any change in the expected main flow structure. Because of entrainment of ambient air into the jet, local acceleration can lead to levels of pressure very different from the prescribed level, so that these boundaries still remain highly reflective for a few extended computational domain. In particular, in the subsonic parts of segment G-H, imposing the pressure from the level of the atmosphere far downstream can lead to unphysical differences with the total pressure prevailing in the supersonic part (shear layer) where all the variables are obtained by extrapolation from the interior of the domain, so that unphysical recirculations appear upstream of G-H. Moreover, the transient oscillations in the mixing layer induce at some points a switch between a subsonic and a supersonic state, that can ultimately lead to oscillations of the location of the Mach disk or even to a failure of the simulation when this coupling becomes too strong. To overcome this, a strongly coarsened grid is systematically added around the readable core grid to damp unphysical reflected numerical waves.

*Segment H-A* : A slip wall condition is imposed to this boundary which corresponds to the axis of symmetry.

#### Orifice simulation (Fig. 2-b)

*Segment A-B* : Stagnation conditions are strongly imposed with a small velocity of 10 m/s.

*Segments B-C, C-D* : Slip wall conditions are prescribed.

*Segments D-E* : A no-slip wall condition is prescribed with a temperature set equal to the choked condition evaluated by considering an isentropic evolution from the stagnation conditions.

*Segment E-F* : A no-slip wall condition is prescribed with a temperature set equal to the ambient atmosphere temperature.

*Segments F-G, G-H, H-A* : same conditions as for the free stream simulation.

### Initialization

For free stream simulations or downstream of the orifice section for the orifice simulation, a uniform field is prescribed in the whole computational domain with temperature and pressure set to ambient conditions and a longitudinal velocity corresponding to a Mach number equal to 0.5. For the orifice simulation, the field inside the chamber is prescribed to stagnation conditions, for which a small velocity (10m/s) is considered to prevent bad convergence.

## 4 COMPUTATIONAL VALIDATION

### 4.1 Study of a moderately underexpanded jet

The slightly underexpanded sonic cold jet of Panda [9] with NPR=1.754 (fully expanded equivalent Mach number of 1.43), has been chosen. Starting from a smeared solution on a uniform 12057-node grid, the locations of shock reflections at the axis or at the jet boundary slightly shift downstream after the first remeshing cycle (11540 nodes), while following readaptations improve accuracy and minimize the required number of nodes. Fig. 3 presents a zoom of the iso-pressure contours lines in the near field for the simulation with a "nozzle lip" and its corresponding 7236-node grid obtained after five remeshing cycles based on density. This level of grid density represents a good compromise between accuracy and CPU time. The solution is fairly well converged (L2 norm of density decreases by 4 decades for the first simulation and then by 2 to 3 decades after each remeshing cycle). The first regular reflection occurs at  $X_{rr}/De = 0.98$  to be compared to the value of 0.9 obtained in [9], while the first reflected shock reaches the jet boundary at  $L_{cs}/De = 1.44$  ( $De$  being the orifice diameter) instead of about 1.25. So, the simulated inviscid shock structure proves to be in quite good agreement with that reported in [9]. The accuracy of the simulation is compared for the two inlet geometries. If a tiny nozzle is considered, the origin of the fan expansion wave appears to be better defined (cf. Fig. 4), with a better accuracy in the simulation of the shocks positions as it is shown in Fig. 5, where the first shock cell length amounts to 1.44 with lip instead of 1.5 without lip. Actually, the discrepancy between the shock positions increases downstream, reaching for instance 0.14  $De$  for the length of the two first shock cells (3 $De$  without nozzle lip against 2.86  $De$  with nozzle lip) whereas the inlet boundary is put upstream from the orifice plane by only 0.005  $De$ . This clearly indicates how sensitive is the structure to the level of accuracy at which the boundary conditions are prescribed along the nozzle exit. Let us note that the addition of such a nozzle lip implies the use of more locally stretched meshes but the time step is not more constrained in that region than it is by the adapted meshes within the jet.

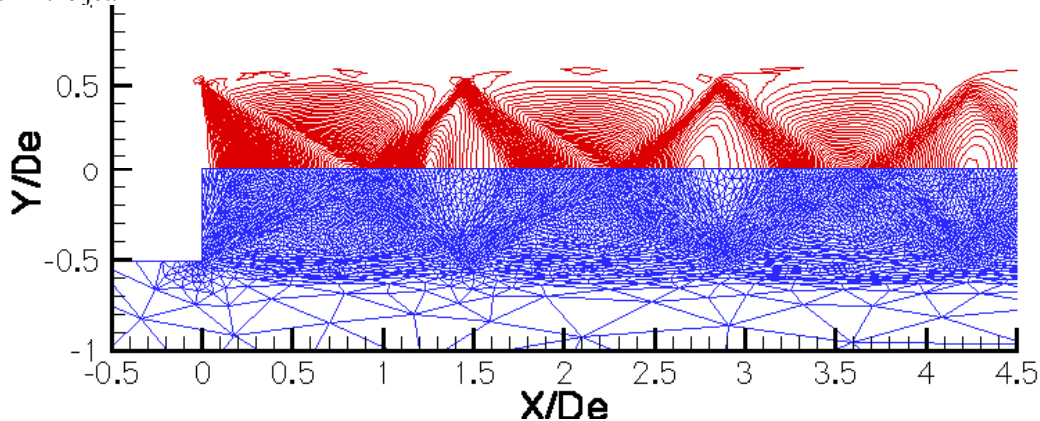


Figure 3 : Near field of a slightly underexpanded jet of NPR=1.754 (with small nozzle lip): iso-pressure contours lines ( $Y \geq 0$ ) and corresponding grid ( $Y \leq 0$ ) after five remeshing cycle.

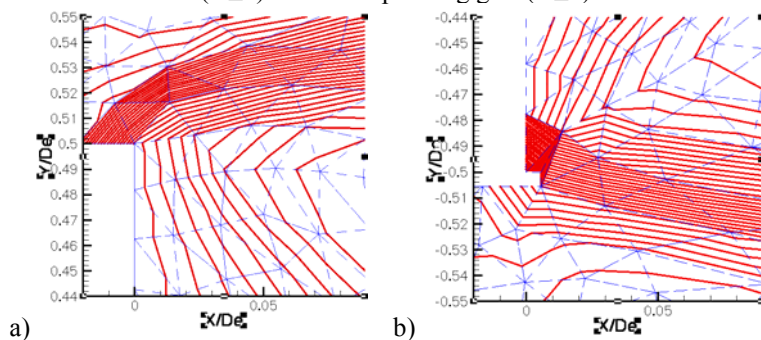


Figure 4 : Comparison of the iso-Mach contours lines of the simulated solution at NPR=1.75  
 a) zoom at the inlet upper corner without nozzle lip, b) zoom at the inlet lower corner with nozzle lip.

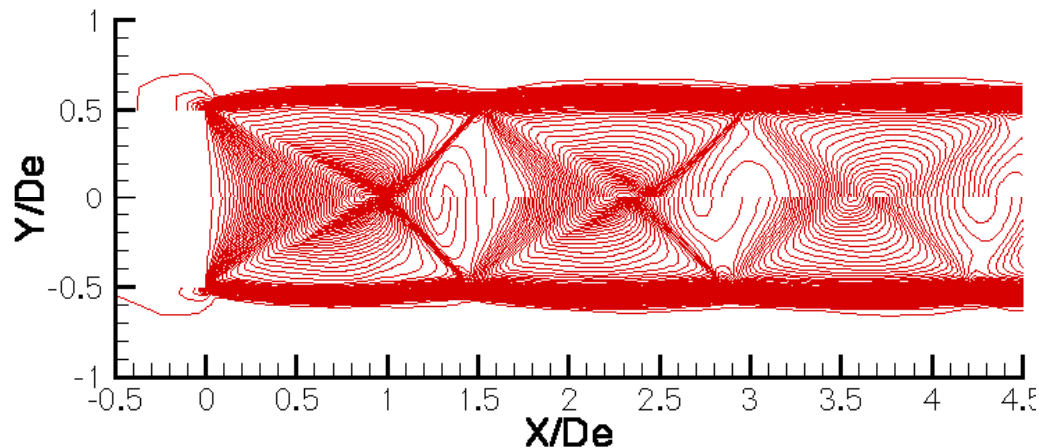


Figure 5 : Comparison of the near jet structures of the slightly underexpanded cold air jet of NPR=1.754 : Iso-Mach contours lines (100 levels) of the near structure without nozzle lip ( $Y \geq 0$ ) and with nozzle lip ( $Y \leq 0$ ).

#### 4.2 Study of a very highly underexpanded jet

The highly underexpanded cold jet into ambient atmosphere (temperature  $T_a=298\text{K}$  and stagnation pressure  $P_a=101353.5\text{Pa}$ ) with NPR=15.53 ( $T_e=235\text{K}$ ) experimentally studied by Yüceil and Ötügen [12] is simulated. Schlieren visualizations and classical correlations to determine the position and the diameter of the Mach disk [3][7] are used to assess the accuracy of the simulations. Fig. 6 presents the iso-pressure contours lines obtained after 5 remeshing cycles based on density. In this case, the last grid holds only 9870 nodes but increasing the prescribed grid density has not shown to change the near field, except that the triple point location is better defined and can move slightly upstream (from  $X_{tp}/D_e=3.65$  to 3.61). By this simulation with the small nozzle lip, the size of the shock structure seems to be overpredicted by about 9-11%, so that the numerical inviscid results can be considered as satisfactory, even if it is still not clear whether this discrepancy can be only attributed to turbulence effects in the shear layer or a weakness of the numerical schemes for such a strong expansion. As a matter of fact, small perturbations in the velocity field can be observed downstream of the Mach disk but increasing the coefficient of entropy correction does not lead to any change in the overall structure.

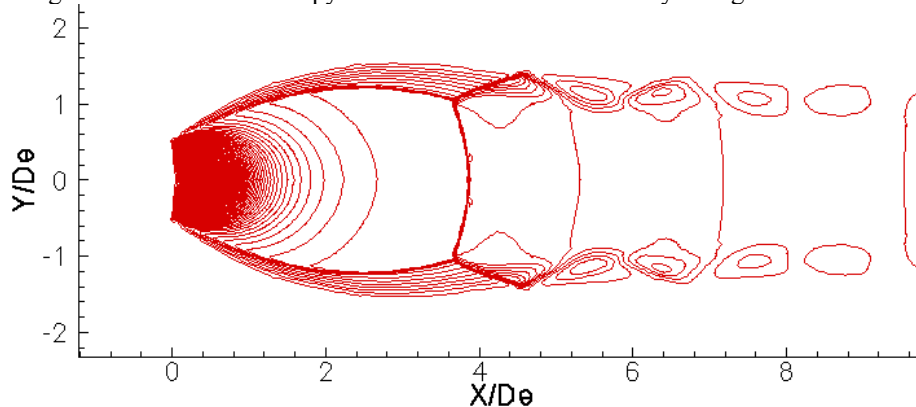


Figure 6 : Iso-pressure contours of the highly underexpanded simulated jet at NPR= 15.53.

### 5 PRELIMINARY STUDY OF A HIGHLY UNDEREXPANDED JET OCCURRING IN THE CASE OF THE BORING OF THE CHAMBER WALL OF A JET ENGINE

In the case of the boring of a combustion chamber wall, specific inlet conditions have to be addressed. At first, one has to consider hot burned gases which yield different thermodynamic properties. The combined effect of temperature and ratios of specific heat capacities can potentially change the overall structure, and we propose to check such a dependency. On a second time, the flow induced by the discharge from an orifice can be distinguished from more common convergent nozzle plumes by two main aspects. At first, the contraction of streamlines induces a restriction of the effective outlet cross-section and a strong deformation of the sonic line downstream of the orifice section (up to about  $0.2D_e$ ). Thus, even if boundary layer effects are neglected, the profiles of variables at a real choked orifice can be far different from the flat profile that is used in most studies reported in the literature for contoured nozzles so that the spreading of the origins of expansion waves can lead to quite different shock structures. In addition, the presence of a wall aligned with the orifice section induces a



totally different entrainment of ambient air and thus can modify sufficiently the mixing layer for the Mach lines to focalize with different angles.

### 5.1 Effect of thermodynamic conditions at the inlet

An increase of the temperature is likely to induce an increase of air entrainment from the surrounding co-flow, so that its effects would be more noticeable in viscous simulations. In our case, any change in the shock structure can mainly be attributed to the influence of the ratio of the specific heat capacities  $\gamma$ . Fig. 7 presents a comparison of the isopycnics obtained in the near field with the previous cold air jet ( $\gamma=1.4$  and inlet temperature  $T_e=235\text{K}$ ) with the corresponding one for a hot fully burned gases discharge ( $\gamma=1.26$  and  $T_e=1500\text{K}$ ), for which a total temperature of  $1700\text{K}$  was considered with the same  $\text{NPR}=15.53$ . Flat profiles of variables were prescribed at the inlet for both cases. We should underline that  $\gamma$  was kept constant for this simulation to evaluate the performance of the numerical scheme, but further calculations would be needed to take into account the dependency of specific heats to the temperature. For these simulations, only three remeshing cycles have been applied since the second readaptation was enough to fix shock positions. In this case, the global aspect of the shock structure is modified, as it is presented by Fig. 7. The Mach disk shifts only slightly downstream from about  $X_{dm}/D_e=3.85$  for the cold air jet to about  $3.87$  whereas the diameter of the Mach disk increases from  $D_{dm}/D_e=2.14$  to  $2.46$  respectively and the triple point location is slightly shifted upstream from  $X_{tp}/D_e=3.67$  to  $3.57$ . For hot gases, lower levels of density are encountered but the pressure recovery occurs in the same cold atmosphere. So, higher curvature of density are found within the shear layer and near shock discontinuities, where higher clustering is realized by the readaptation procedure for the same prescribed global level of nodes density. As a consequence, more instabilities are captured within the mixing layer and longer computational time would be required to get the same level of strict convergence and damp perturbations found within the coflow.

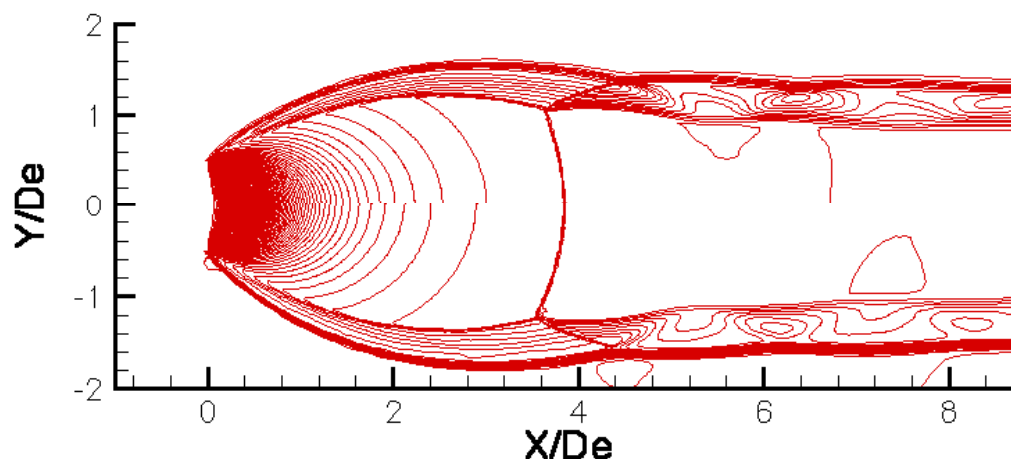


Figure 7 : Comparison of the near fields of a highly underexpanded jet at  $\text{NPR}=15.53$ ,  $Y \geq 0$  : cold air jet with  $\gamma=1.4$  and  $T_e=235\text{K}$ ,  $Y \leq 0$  : hot burned gases with  $\gamma=1.26$  and  $T_e=1700\text{K}$ .

### 5.2 Effect of the deformation of profiles at the inlet

Due to the different initial angle of streamlines at the level of a section orifice (which are still converging towards the axis in most part of the orifice section), the initial spreading angle of the jet appears to be reduced. The deformation of sonic line downstream at the orifice level is in good agreement with the expected one, proving that the chosen geometry for the chamber is satisfactory to capture representative deformed profiles at the orifice. Thus, the length of the shock cell is quite similar (the Mach disk shifts upstream up to  $X_{dm}/D_e=3.78$  in comparison with  $3.88$  in our previous simulation) but in this case the Mach disk diameter presents a significant decrease (12%) ( $D_{dm}/D_e=1.88$  compared to  $2.14$ ) as we can see in Fig. 8. Only a rougher remeshing procedure was applied in this first attempt to simulate the discharge from the orifice. Since our first concern was to check the geometric aspects of the shock structure, we have chosen to cluster nodes in the very near field (up to about  $X/D_e=4.5$ ) so that the following shear layer is naturally more dissipated than in the previous simulation, but the shock cell size does not present grid dependency anymore for this high level of clustering (most of the  $27942$  nodes in the final mesh are located between  $X/D_e=0-4.5$  and  $Y/D_e=0-1.5$ ). However, that for this case, small decreasing amplitude instabilities have been observed within the mixing layer just downstream of the orifice between the jet boundary end the wall, which were regularly convected downstream, so that strict convergence seems to be more difficult to reach for orifice simulations.

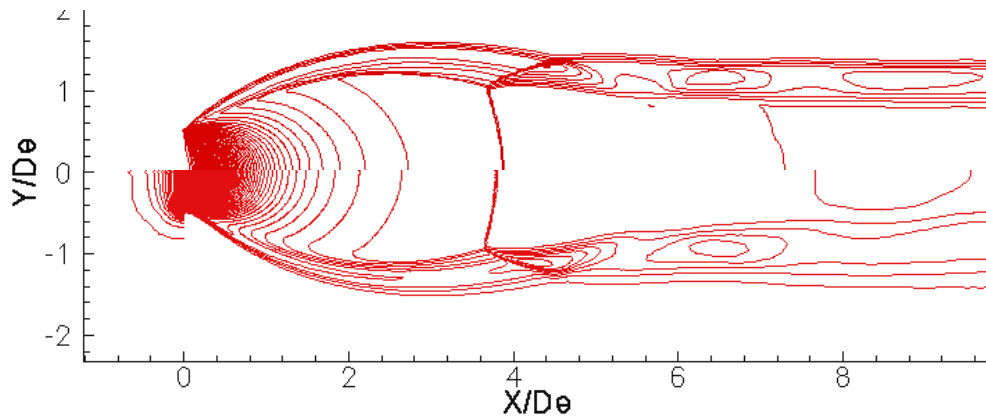


Figure 8 : Comparison of the near field of a highly underexpanded at NPR=15.53,  $Y \geq 0$  : issued from a convergent countoured nozzle ,  $Y \leq 0$  : issued from an orifice.

## 6 CONCLUSION

An efficient remeshing procedure has been combined with the CFD code N3S-NATUR and specific numerical difficulties linked with the highly underexpanded jet have been addressed to elaborate a numerical strategy which proves to be quite successful in free stream configurations. In order to adjust this strategy for studying the boring of the chamber wall of a jet engine, the influence of the specific corresponding inlet conditions has been accessed. These first numerical simulations prove that even if the overall structure aspect is not modified, noticeable changes in relative shock lengths can be observed, demonstrating that precise conditions have to be prescribed at the inlet boundary so as to accurately predict the discharge of hot gases from an orifice.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge Drs Yüceil and Ötügen for their private communication of Schlieren visualizations.

## REFERENCES

1. Abdol-Hamid K.S., Three dimensional calculations for underexpanded and overexpanded supersonic jet flows, AIAA 7th Applied Aerodynamics Conference, AIAA 89-2196, 1989.
2. Alvi F.S., Ladd J.A. and Bower W.W., Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets, AIAA Journal, Vol.40, pp509-609, 2002.
3. Ashkenas H. and Sherman F.S., The structure and utilization of supersonics free jets in low density wind tunnel, Advances in Applied Mechanics - Rarefied Gas Dynamics, Academic, New York, pp84--105, 1966.
4. Avital G., Cohen Y., Gamss L., Kanelbaum Y., Macales J., Trieman B., Yaniv S., Lev M., Stricker J. and Sternlieb A., Experimental and computational study of infrared emission from underexpanded rocket exhaust plumes, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Vol.15, N°4, pp377-383, 2001.
5. Cumber P.S., Fairweather M., Falle S.A.E.G. and Giddings J.R., Predictions of the structure of turbulent highly underexpanded jets, AIAA Journal, Vol.117, pp599-604, 1994.
6. Dolejší V., Anisotropic mesh adaptation for finite volume and finite element methods on triangular meshes, Comp. Visual. Sci, Vol.1, pp165--178, 1998.
7. Love E.S., Grigsby C.E. and Lee L.P., Experimental of theoretical study of axisymmetric free jets, Technical Report R-6, Langley Research Center, Langley Field, VA, 1959.
8. Martin R., Projet N3S-NATUR, V1.4, Manuel Théorique, Simulog, 2001.
9. Panda J. and Seasholtz R.G., Measurements of shock structure and shock-vortex interaction in underexpanded jets using Rayleigh scattering, Physics of Fluids, Vol. 11, N° 12, pp3761-3777, 1999.
10. Rauenzahn R.M. and Tester J.W., Numerical simulation and field testing of flame jet spallation drilling, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 34, N°3, pp795-818, 1991.
11. Yüceil K.B. and Ötügen M.V., Scaling parameters for underexpanded supersonic jets, Physics of Fluids, Vol. 14, N° 12, pp4206-4215, 2002.
12. Yüceil K.B., Ötügen M.V. and Arik E., Interferometric Rayleigh scattering and PIV measurements in the near field of underexpanded sonic jets, AIAA Paper, N° 2003-0917, 2003.
13. Zapryagaev V.I. and Bobrikov N.G., Investigation of the streamwise vortices in a shear layer of the initial region of the supersonic underexpanded jet, EUROMECH Colloquium 403, pp63-72, 1999.

# Bibliographie

- [1] Prediction of free shear flows : a comparison of six turbulence models. (SP-321), 1972.
- [2] D. Forliti A. Krothapalli, D. Wishart and D. Parekh. Role of shock cells on the development of a supersonic jet. In *FED-Vol.237, 1996 Fluids Engineering Division Conference - ASME 1996*, volume 2, pages 509–515, 1996.
- [3] G. Buzyna A. Krothapalli and L. Lourenco. Streamwise vortices in an underexpanded axisymmetric jet. *Physics of Fluids*, 3(8) :1848–1851, 1991.
- [4] P.J. Strykowski A. Krothapalli and C.J. King. Origin of streamwise vortices in supersonic jets. *AIAA Journal*, 36(5) :869–872, 1998.
- [5] X. Zhang A. Rona. Time accurate numerical study of turbulent supersonic jets. *Journal of Sound and Vibration*, 270 :297–321, 2004.
- [6] M. Abbett. Mach disc in underexpanded exhaust plumes. *AIAA Journal*, 9(3) :512–514, 1971.
- [7] K.S. Abdol-Hamid and R.G. Wilmoth. Multiscale turbulence effects in underexpanded jets. *AIAA 19th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference AIAA-87-1377*, pages 1–13, 1987.
- [8] D.J. Hughes A.D. Birch and G. Swaffield. Velocity decay of high pressure jets. *Combustion Science and Technology*, 52 :161–161–170, 1987.
- [9] M.G. Dodson A.D. Birch, D.R. Brown and F. Swaffield. The structure and concentration decay of high pressure jets of natural gas. *Combustion Science and Technology*, 36 :249–261, 1984.
- [10] A.L. Addy. Effects of axisymmetric sonic nozzle geometry on Mach disk characteristics. *AIAA Journal*, 19(1) :121–122, 1981.
- [11] A.A. Bezrukov A.L. Adrianov and U.A. Gaponenko. Numerical study of the interaction of a supersonic gaseous jet with a planar target. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 41(4) :670–675, 2000.
- [12] A.V. Antsupov. Properties of underexpanded and overexpanded supersonic gas jets. *Soviet Physics and Technical Physics*, 19(2) :234–238, 1974.
- [13] N.M. Rogachev A.P. Aleshin, I.N. Denisov and V.F. Sivirkin. Effect of the cone angle and the degree of contraction of a sonic nozzle on the geometrical structure of the first roll of an underexpanded jet. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, 28(2) :296–300, 1975.
- [14] H. Ashkenas and F.S. Sherman. The structure and utilization of supersonic free jets in low density wind tunnel. In *Advances in Applied Mechanics - Rarefied Gas Dynamics*, pages 84–105. Academic, New York, 1966.
- [15] V.S. Avduevskii, A.V. Ivanov, I.M. Karpman, V.D. Traskovskii, and M.Y. Yudelovich. Effect of viscosity on the flow in the initial part of a highly underexpanded jet. *Soviet Physics - Doklady - Fluid Mechanics*, 16(3) :186–189, 1971.



- [16] V.S. Avduevskii, A.V. Ivanov, I.M. Karpman, V.D. Traskovskii, and M.Y. Yudelovich. Investigation of the regularities of flow development in a system of viscous underexpanded supersonic jets. *Sov.Phys.Dokl.*, 19(6) :328–330, 1974.
- [17] G. Avital, Y. Cohen, L. Gamss, Y. Kanelbaum, J. Macales, B. Trieman, S. Yaniv, M. Lev, J. Stricker, and A. Sternlieb. Experimental and computational study of infrared emission from underexpanded rocket exhaust plumes. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 15(4) :377–383, 2001.
- [18] K. Lyons B. Yip and M. Long. Visualization of a supersonic underexpanded jet by planar Rayleigh scattering. *Physics of Fluids A*, 1(9) :1449–1450, 1989.
- [19] L.H. Back and V. Sarohia. Pressure pulsations on a flat plate normal to an underexpanded supersonic jet. *AIAA Journal*, 16(6) :634–636, 1978.
- [20] C. Bailly and G. Comte-Bellot. *Turbulence*. CNRS Editions, 2003.
- [21] S. Barre, C. Quine, and J.P. Dussauge. Compressibility effects on the structure of supersonic mixing layers : experimental results. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 47–78, 1994.
- [22] S. Bellaud. *Mesures et analyses détaillées des champs turbulents en couches de mélange annulaires supersoniques*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1999.
- [23] L.P. Bernal and A. Roshko. Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 170 :499–525, 1986.
- [24] D. Bivolaru, M.V. Ötügen, A. Tzes, and G. Papadopoulos. Image processing for interferometric Mie and Rayleigh scattering velocity measurements. *AIAA Journal*, 37(6) :688–694, 1999.
- [25] K.J. Badcock B.J. Gribben and B.E. Richards. Numerical study of shock reflection hysteresis in an underexpanded jet. *AIAA Journal*, 38(2) :275–283, 2000.
- [26] P. Bradshaw. Turbulence modelling and application to turbomachinery. *Progress in Aerospace and Sciences*, 32 :575–624, 1996.
- [27] R. Breidenthal. The sonic eddy - a model of compressible turbulence. In *AIAA Paper*, number 0495, 1990.
- [28] P. Lafon C. Bailly and S. Candel. Subsonic and supersonic jet noise predictions from statistical source models. *AIAA Journal*, 35(11) :1688–1696, 1997.
- [29] P.W. Carpenter. A linearized theory for swirling supersonic jets and its application to shock-cell noise. *AIAA Journal*, 23(12) :1902–1909, 1985.
- [30] J.B. Cazalbou and P. Bradshaw. Turbulent transport in wall-bounded flows. evaluation of model coefficients using direct numerical simulation. *Physics of FLuids A*, 5(12) :3233–3239, 1993.
- [31] I.S. Chang and W.L. Chow. Mach disk from underexpanded axisymmetric nozzle flow. *AIAA Journal*, 12(8) :1079–1082, 1974.
- [32] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides*. Cépaduès-Éditions, 2000.
- [33] Y.S. Chen and S.W. Kim. Computation of turbulent flows using an extended  $k - \epsilon$  turbulence closure model. Technical Report NASA CR 179204, 1987.
- [34] A. Krothapalli C.J. King and P.J. Strykowski. Streamwise vorticity generation in supersonic jets with minimal thrust loss. *AIAA Paper 94-0661*, 1994.
- [35] P.S. Clancy and M. Samimy. Two component laser doppler velocimetry in high speed flows. *AIAA Journal*, 35 :1729–1738, 1997.

- [36] N.T. Clemens and M.G. Mungal. Large-scale structure and entrainment in the supersonic mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 284 :171–216, 1995.
- [37] N.T. Clemens, P.H. Paul, M.G. Mungal, and R.K. Hanson. Scalar mixing in the supersonic mixing layer. In *AIAA Paper*, number 91-1720, 1991.
- [38] S.C. Crow and F.H. Champagne. Orderly structure in jet turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 48(3) :547–591, 1971.
- [39] P.S. Cumber, M. Fairweather, S.A.E.G. Falle, and J.R. Giddings. Predictions of the structure of turbulent, highly underexpanded jets. *AIAA Journal*, 117 :599–604, 1995.
- [40] P.S. Cumber, M. Fairweather, S.A.E.G. Falle, and J.R. Giddings. Predictions of the structure of turbulent, moderately underexpanded jets. *AIAA Journal*, 116 :707–713, 1994.
- [41] H. Guillard D. Guézengar and J.P. Dussauge. Modelling the dissipation equation in supersonic turbulent mixing layers with high density gradients. Technical Report 3761, INRIA, 1999.
- [42] L.F. Figueira da Silva, J.L.F. Azevedo, and H. Korzenowski. Unstructured adaptive grid flow simulations of inert and reactive gas mixtures. *Journal of Computational Physics*, 160 :522–540, 2000.
- [43] N.J. Dam, M. Rodenburg, R.A.L. Tolboom, G.G.M. Stoffels, P.M. Huisman Kleinherenbring, and J.J. Ter Meulen. Imaging of an underexpanded nozzle flow by UV laser Rayleigh scattering. *Experiments in Fluids*, 24 :93–101, 1998.
- [44] L. Delamare. *Modélisation numérique de la propagation d'une flamme turbulente en milieu confiné*. PhD thesis, Université de Rouen, 1992.
- [45] J. Delery. *Aérodynamique interne - Tuyères et arrières corps*. Cours ENSAE, 1989.
- [46] R.L. Deschambault and I.I. Glass. An update on non-stationary oblique shock-wave reflections : actual isopycnics and numerical experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 131 :27–57, 1983.
- [47] G.L. Morrison D.K. McLaughlin and T.R. Troutt. Experiments of the instability waves in a supersonic jet and their acoustic radiation. *Journal of Fluid Mechanics*, 69(1) :73–95, 1975.
- [48] V. Dolejši. Anisotropic mesh adaptation for finite volume and finite element methods on triangular meshes. *Comp. Visual Sci.*, 1 :165–178, 1998.
- [49] V. Dolejši. *Sur des méthodes combinant des volumes finis et des éléments finis pour le calcul d'écoulements compressibles sur des maillages non structurés*. PhD thesis, L'Université Méditerranée et Univerzita Karlova, 1998.
- [50] V. Dolejši. Anisotropic mesh adaptation technique for viscous flow simulation. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 2001.
- [51] C.D. Donaldson and R.S. Snedeker. A study of free jet impingement. Part 1. mean properties of free and impinging jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 45(2) :281–319, 1971.
- [52] J.C. Dutton, R.F. Burr, S.G. Goebel, and N.L. Messersmith. Compressibility and mixing in a turbulent free shear layer. In *12th Symposium on Turbulence*, 1990.
- [53] M.V. Ötügen E. Ferdman and S. Kim. Effect of initial velocity profile on the development of round jets. *Journal of Propulsion and Power*, 16(4) :676–686, 2000.
- [54] P.L. Eggins and D.A. Jackson. Laser doppler velocity measurements in an underexpanded free jet. *Journal of Physics*, 7, 1974.

- [55] G.S. Elliott and M. Samimy. Compressibility effects in free shear layers. *Physics of Fluids A*, (7) :1231–1240, 1990.
- [56] G.S. Elliott and M. Samimy. Rayleigh scattering technique for simultaneous measurements of velocity and thermodynamic properties. *AIAA Journal*, 34(11) :2346–2352, 1996.
- [57] S.M. Dash et D.E. Wolf. Interactive phenomena in supersonic jet mixing problems :part 1 : Phenomenology and numerical modeling techniques. *AIAA Journal*, 22(7) :905–913, 1984.
- [58] S.M. Dash et D.E. Wolf. Interactive phenomena in supersonic jet mixing problems :part 2 : Numerical studies. *AIAA Journal*, 22(10) :1395–1404, 1984.
- [59] P. Birkby et G.J. Page. Numerical predictions of turbulent underexpanded sonic jets using a pressure-based methodology. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part G, Journal of Aerospace Engineering*, 215(63) :165–173, 2001.
- [60] S.M. Prudhomme et H. Haj-Hariri. Investigation of supersonic underexpanded jets using adaptative unstructured finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17 :21–40, 1994.
- [61] S.F. Birch et J.M. Eggers. A critical review of the experimental data for developed free turbulent shear layers. In *Proceedings, NASA SP-321*, pages 11–40, 1973.
- [62] M.A. Wilkinson et J.W. Tester. Experimental measurements of surface temperatures during flame-jet induced thermal spallation. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 26(1) :29–62, 1993.
- [63] B.C.R. Ewan and K. Moodie. Structure and velocity measurements in underexpanded jets. *Combustion Science and Technology*, 45 :275–288, 1986.
- [64] A.J. Favre. Equations des gaz compressibles. *Journal de Mécanique*, 4, 1965.
- [65] J.H. Fox. On the structure of jet plumes. *AIAA Journal*, pages 105–107, January 1974.
- [66] P.J. Frey and P.L. George. *Maillages*. Hermes Science, 1999.
- [67] J.A. Ladd et W.W. Bower F.S. Alvi. Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets. *AIAA Journal*, 40(4) :509–609, 2002.
- [68] T.B. Gatski. *Lecture 4 - Modeling compressibility effects on turbulence*. Les Editions de Physique - Springer, 2003.
- [69] B. Van Leer G.D. Van Albada and W.W. Roberts. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Astron. Astrophysics*, (108) :76–84, 1982.
- [70] L.S. Ermolayev G.I. Gannochenko and N.A. Zadorozhnyi. On the position of the central compression shock in an underexpanded sonic jet issuing from a slot nozzle. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 4 :89–91, 1986.
- [71] G.F. Glotov. Local subsonic zones in supersonic jet flows. *Fluid Dynamics*, 33(1) :117–123, 1998.
- [72] S.G. Goebel and J.C. Dutton. Experimental study of compressible turbulent mixing layers. *AIAA Journal*, (4) :538–546, 1991.
- [73] J. Gressier. *Robustesse et précision des schémas décentrés pour les écoulements compressibles*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 1999.
- [74] J.L. Hall, P.E. Dimotakis, and H. Rosemann. Some measurements of molecular mixing in compressible turbulent shear layer. (91-1719), 1991.
- [75] S. Han and R. Taghavi. Effects of boundary layer swirl on supersonic underexpanded rectangular jet oscillations. In *37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, number AIAA 99-0900, pages 1–11.

- [76] A. Harten and J.M. Hyman. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 50 :235–269, 1983.
- [77] R. Hillier. Computation of shock wave diffraction at a ninety degrees convex edge. *Shock Waves*, 1 :89–98, 1991.
- [78] R. Hillier. Plenary lecture. In *Proc. of the 19th Intl Shock Wave Symp, Marseille*, 1993.
- [79] C. Hirsch. *Volume 1 : Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley and Sons, 1988.
- [80] T. Huynh and R. Taghavi. Underexpanded supersonic free jets : computations and experiments. In *34th AIAA/ASME/SAE Joint Propulsion Conference*, AIAA Meeting Papers NO. 98-3568, pages 1–11, 1998.
- [81] T.C. Island, W.D. Urban, and M.G. Mungal. Small perturbation mixing enhancement in compressible shear layers. In *35th Aerospace Sciences Meeting*, number 97-0395, 1997.
- [82] J.F. Debieve J. Gaviglio, J.P. Dussauge and A. Favre. Behaviour of a turbulent flow, strongly out of equilibrium at supersonic speeds. *Physics of Fluids*, 20 :179–192, 1977.
- [83] P.J. Morris J.C. Lau and M.J. Fisher. Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter. *Journal of Fluid Mechanics*, 93(1) :1–27, 1979.
- [84] G. Gauba et J.C. McDaniel J.G. Klavuhn. Oh laser induced fluorescence velocimetry techniques for steady, high speed, reacting flows. *Journal of Propulsion and Power*, 10(6) :787–797, 1994.
- [85] D.K. McLaughlin J.M. Seiner and C.H. Liu. Supersonic jet noise generated by large-scale instabilities. Technical Report NASA Technical Paper 2072, 1982.
- [86] W.P. Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15 :301–314, 1972.
- [87] W.P. Jones and J.H. Whitelaw. Calculation methods for reacting turbulent flows : a review. *Combustion and Flame*, 48 :1–26, 1982.
- [88] Y.L. Yao K. Chen and V. Modi. Gas dynamic effects on laser cut quality. *Journal of Manufacturing Processes*, 3(1) :38–49, 2001.
- [89] H. Shirai K. Tabei and F. Takakusagi. Density measurements of underexpanded free jets of air from circular and square nozzles by means of moiré-schlieren method. *JSME International Journal, Series II*, 35(2) :212–217, 1992.
- [90] G.T. Kalghatgi and B.L. Hunt. The occurrence of stagnation bubbles in supersonic jet impingement flows. *Aeronautical Quarterly*, 27 :169–185, 1976.
- [91] M.V. Ötügen K.B. Yüceil and E. Arik. Interferometric Rayleigh scattering and PIV measurements in the near field of underexpanded sonic jets. (AIAA-2003-0917), 2003.
- [92] F. Kerhervé. *Caractérisation statistique des sources aéroacoustiques en jets supersoniques par vélocimétrie laser à effet Doppler : application à la prédiction du bruit de jet*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2004.
- [93] K.H. Kim and K.S. Chang. Three dimensional structure of a supersonic jet impinging on an inclined plate. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 31(5) :778–782, 1994.
- [94] G. Kleinstein. Mixing in turbulent axially free jets. *Journal of Spacecraft*, 1(4) :403–408, 1964.
- [95] A. Kolms. *Computing unstructured finite element grids on free-form CAD surfaces*, pages 93–100. Number ISBN 3-86005-395-7. 2003.

- [96] S.C. Koria and K.W. Lange. An experimental study on the behaviour of an underexpanded supersonic gas jet. *Archiv für das Eisenhuettenwesen*, 55(9) :427–432, 1984.
- [97] V.S. Krishnamurty and W. Shyy. Study of compressibility modifications to the k-epsilon turbulence model. *Physics of Fluids*, 9(9) :2769–2788, 1997.
- [98] P.J. Lamont and B.L. Hunt. The impingement of underexpanded, axisymmetric jets on perpendicular and inclined flat plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 100(3) :471–511, 1980.
- [99] B.E. Launder. Second moment closure : present... and future? *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 10(4) :282–300, 1989.
- [100] B.E. Launder and B.I. Sharma. Application of energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Lett. Heat Mass Transfer*, 1 :131–138, 1974.
- [101] B. Van Leer. Flux vector splitting for the euler equations. In *8th International Conference on Numerical Methods in FLuid Dynamics*, 1982.
- [102] C. Lejeune. Analyse physique et modélisation des écoulements turbulents à grandes vitesses. Master's thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1996.
- [103] S.K. Lele. Compressibility effects on turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26 :211–254, 1994.
- [104] F. Lemoine and B. Leporcq. Static pressure measurements for near isentropic flows using laser induced iodine fluorescence. *Von Karman Institute for Fluid Dynamics - Lecture Series 1993-05*, pages 1–13, 1993.
- [105] V. Sabel'nikov L.F. Figueira da Silva and B. Deshaies. The stabilization of supersonic combustion by a free recirculating bubble : a numerical study. *AIAA Journal*, 35(11) :1782–1784, 1997.
- [106] E.S. Love, C.E. Grigsby, and L.P. Lee. Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jets. Technical Report Technical Report R-6, Langley Research Center, Langley Field, Va., 1959.
- [107] R. Martin. Projet n3s-natur n3s-natur v1.4 - manuel théorique. Technical report, 2001.
- [108] J.J. McGuirk and W. Rodi. The calculation of three-dimensional free jets. In *Symposium on Turbulent Shear Flows*, Pennsylvania State University, 1977.
- [109] P-K Wu M.H. Chen, R. Gaffney and A.S. Nejad. Numerical simulations of axisymmetric sonic he and h2 injections into a mack 2 airstream. Number AIAA 95-0873, pages 1–17, 1995.
- [110] A. Michalke. Instability of a compressible circular free jet with consideration of the influence of the jet boundary layer thickness. Technical Report TM 75190, NASA, 1977.
- [111] R.B. Miles. Development and application of oxygen flow tagging for velocity measurements and flow visualization in turbulent three-dimensional supersonic flows. Technical report, Air Force Office of Scientific Research, Bolling AFB, DC, 1988.
- [112] R.B. Miles, J.Connors, E. Markovitz, P. Howard, and G. Roth. Instantaneous supersonic velocity profiles in an underexpanded sonic air jet by oxygen fiox tagging. *Physics of Fluids A*, 1(2) :389–393, 1989.
- [113] D.W. Moore and P.G. Saffman. Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 69 :465–473, 1982.
- [114] P.M. Moretti and W.M. Kays. Heat transfer to a turbulent boundary layer with varying free stream velocity and varying surface - an experimental study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 8(9) :1187–1202, 1965.

- [115] M.V. Morkovin. *Effects of compressibility on turbulent flows*, pages 367–380. Gordon and Breach New York, 1967.
- [116] A.P. Morse. *Axisymmetric turbulent shear flows with and without swirl*. PhD thesis, London University, England, 1977.
- [117] R. Ishii N. Hatta, H. Fujimoto and J.I. Kokado. Theoretical analysis of supersonic gas-particle two-phase flow and its application to relatively complicated flow fields. *Memories of the Faculty of Kyoto University*, 52(3) :115–185, 1990.
- [118] T. Nakatogawa, M. Hirata, and Y. Kukita. Disintegration of a supersonic jet impinging normally on a flat plate. *Journal of Spacecraft*, 8 :410–411, 1971.
- [119] S.A. Novopashin and A.L. Perepelkin. Axial symmetry loss of a supersonic preturbulent jet. *Physics Letters A*, 135 :290, 1989.
- [120] S. Obayashi. Numerical simulation of underexpanded plumes using upwind algorithms. Number AIAA 88-4360, pages 284–299, 1988.
- [121] W.L. Oberkampf and M. Talpalikar. Analysis of a high-velocity oxygen fuel(hvof) thermal spray torch part 1 : Numerical formulation. *Journal of Thermal Spray Technology*, 5(1) :53–61, 1996.
- [122] J. Panda. Shock oscillation in underexpanded screeching jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 363 :173–198, 1998.
- [123] J. Panda. An experimental investigation of screech noise generation. *Journal of Fluid Mechanics*, 378 :71–96, 1999.
- [124] J. Panda and R.G. Seasholtz. Measurements of shock structure and shock-vortex interaction in underexpanded jets using Rayleigh scattering. *Physics of Fluids*, 11(12) :3761–3777, 1999.
- [125] M. Pandolfi and D. D’Ambrosio. Numerical instabilities in upwind methods : analysis and cures for the carbuncle phenomenon. *Journal of Computational Physics*, 166 :271–301, 2001.
- [126] S.P. Pao and K.S. Abdol-Hamid. Numerical simulation of jet aerodynamics using the three dimensional Navier-Stokes code pab3d. Technical report, NASA Technical Paper 3596, 1996.
- [127] D. Papamoschou. Evidence of shocklets in a counterflow supersonic shear layer. *Physics of Fluids A*, 7(2) :223–225, 1995.
- [128] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer : an experimental study. *Journal of Fluid Mechanics*, 197 :453–477, 1988.
- [129] T. Passot and A. Pouquet. Numerical simulation of compressible homogeneous in the turbulent regime. *Journal of Fluid Mechanics*, 181 :441–466, 1987.
- [130] T.J. Poinso and S.K. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101 :104–129, 1992.
- [131] S.B. Pope. An explanation of the turbulent round jet/plane jet anomaly. *AIAA Journal*, 16(3) :279–281, 1978.
- [132] A. Powell. On the noise emanating from a two dimensional jet above the critical pressure. *Aeronaut. Q.*, 4 :103–122, 1953.
- [133] M. Rahimi, I. Owen, and J. Mistry. Impingement heat transfer in an under-expanded axisymmetric air jet. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46 :263–272, 2003.
- [134] G. Raman. Advances in understanding supersonic jet screech : review and perspective. *Progress in Aerospace Sciences*, 34 :45–106, 1998.

- [135] G.L. Morrison R.E. DeOtte, Jr and R.D. Sewell. LDV measurements of the velocity field in an underexpanded supersonic jet. In *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, number AIAA 92-0504, pages 1–12, 1992.
- [136] J.R. Ristorcelli. A representation for the turbulent mass flux contribution to reynolds stress and two equations closures for compressible turbulence. Technical Report NACA TN 3255, 1993.
- [137] J.C. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.M. Moschetta. Shock wave instability and the carbuncle phenomenon : same intrinsic origin ? *Journal of Fluid Mechanics*, 417 :237–263, 2000.
- [138] W. Rodi. Examples of turbulence models for incompressible flows. *AIAA Journal*, 20(7) :872–879, 1981.
- [139] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 3 :357–372, 1981.
- [140] P.L. Roe and J. Pike. *Efficient construction and utilisation of approximate Riemann solutions*. Amsterdam : North Holland.
- [141] S.K. Lele S. Lee and P. Moin. Eddy shocklets in decaying compressible turbulence. *Physics of Fluids A*, 3(4) :657–664, 1991.
- [142] G. Erlebacher S. Sarkar and M.Y. Hussaini. Compressible homogeneous shear :simulation and modeling. 1991.
- [143] M.Y. Hussain S. Sarkar, G. Erlebacher and H.O. Kreiss. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 227 :473–493, 1991.
- [144] M. Samimy S.A. Arnette and G.S. Elliot. On streamwise vortices in high Reynolds number supersonic axisymmetric jets. *Physics of Fluids A*, (1) :187–202, 1993.
- [145] M. Samimy, M.F. Reeder, and G.S. Elliot. Compressibility effects on large scale structures in free shear flows. *Physics of Fluids A*, 4(6) :1251–1258, 1992.
- [146] S. Sarkar. The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 163–186, 1995.
- [147] S. Sarkar and C. Pantano. A study of compressibility effects in the high speed turbulent shear layer using direct simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, pages 329–371, 2002.
- [148] M. Satyanarayana and N. Balakrishnan. Adaptive unstructured mesh supersonic jet calculation using afvs scheme. In *Third Asian Computational Fluid Dynamics Conference*, volume 2, pages 378–383, 1998.
- [149] Dr. H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill Classic Textbook Reissue, seventh edition, 1987.
- [150] M.C. Lai S.G. Chuech and G.M. Faeth. Structure of turbulent sonic underexpanded free jets. *AIAA Journal*, 27(5) :549–559, 1989.
- [151] S. Crist P.M. Sherman and D.R. Glass. Study of the highly underexpanded sonic jet. *AIAA Journal*, 4(1) :68–71, 1965.
- [152] W. Shyy and V.S. Krishnamurty. Compressibility effects in modelling complex turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 33 :587–645, 1997.
- [153] G.A. Sod. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 27 :1–31, 1978.

- [154] M. Sommerfeld. The influence of solid particles on the structure of supersonic free jet flows. In *17th International Symposium on Shock Waves and Shock Tubes*, pages 745–750, 1990.
- [155] D.B. Spalding. Concentration fluctuations in a round turbulent fre jet. *Chemical Engineering Science*, 26 :95–107, 1971.
- [156] A.L. Perepelkin S.S. Kutateladze, S.A. Novopashin and V.N. Yarygin. Fine structure of the flow of a supersonic, underexpanded turbulent jet. *Soviet Physics - Doklady*, 295(1-3) :556–558, 1987.
- [157] J.L. Steger and R.G Warming. Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with applications to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 40 :263–293, 1981.
- [158] C. Sun.
- [159] R. Ishii T. Matsuda, Y. Umeda and A. Yasuda. Numerical and experimental studies on choked underexpanded jets. In *AIAA 19th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, AIAA-87-1378, pages 1–11, 1987.
- [160] K. Takayama and Z. Jiang. Shock wave reflection over wedges : a benchmark test for cfd and experiments. *Shock Waves*, 7 :191–203, 1997.
- [161] C.K.W. Tam and H.K. Tanna. Shock associated noise of supersonic jets from convergent-divergent nozzles. *Journal of Sound and Vibration*, 81(3) :337–358, 1982.
- [162] C. Teodorescu-Tintea, R. Dorneanu, L. Jude, and I. Hunyady. Contributions à l'étude des jets libres sous-détendus. *Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl.*, 23(4) :513–520.
- [163] B.H. Timmerman and D.W. Watt. Tomographic holographic interferometry for unsteady compressible flows. In *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering - Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, Bellingham, WA, USA*, volume 2546, pages 287–296, 1995.
- [164] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, second edition, 1999.
- [165] Y. Umeda and R. Ishii. Existence of Mach cones and helical vortical structures around the underexpanded circular jet in the helical oscillation mode. *Journal of Acoustical Society of America*, 112(11) :107, 2002.
- [166] S.A. Novopashin V.A. Mal'tsev and A.L. Perepelkin. Effects of the plenum chamber diameter on the turbulent characteristics of a supersonic jet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 40(6) :1057–1060, 1999.
- [167] D. Vandromme. *Contribution à la modélisation et la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable*. PhD thesis, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1983.
- [168] D. Vandromme. Introduction to the modelling of compressible turbulence - notes de cours, 1997.
- [169] A.W. Vreman, N.D. Sandham, and K.H. Luo. Compressible mixing layer growth rate and turbulence characteristics. pages 235–258, *Journal of Fluid Mechanics*.
- [170] J. Ware W. Speares and M. Berzins. Numerical investigation of steady and unsteady compressible jets. (95.32), 1995.
- [171] W.R. Waren. *A. J. Aeronaut. Sci.*, 22(3) :205–207, 1955.
- [172] D.C. Wilcox. A half century historical review of the k-w model. Number AIAA-91-0615.
- [173] P.O. Witze. *Fluid Mechanics of Mixing*, page A revoir. ASME, 1973. A generalised theory for the turbulent mixing of axially symmetric compressible free jets.



- [174] P. Woodward and P. Colella. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 54 :115–173, 1984.
- [175] T. Kitagawa Y. Tsubakishita and T. Yoshikawa. Fast adaptive grid method for compressible flows. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 32(98) :217–227, 1990.
- [176] K.B. Yüceil and M.V. Ötügen. Underexpanded sonic jets : A PIV study. 2000.
- [177] K.B. Yüceil and M.V. Ötügen. Scaling parameters for underexpanded supersonic jets. *Physics of Fluids*, 14(12) :4206–4215, 2002.
- [178] V.I. Zapryagaev. Structure of supersonic jet with varied geometry of the nozzle entrance. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 43(4) :538–543, 2002.
- [179] V.I. Zapryagaev and N.G. Bobrikov. Investigation of the streamwise vortices in a shear layer of the initial region of the supersonic underexpanded jet. In *EUROMECH COLLOQUIUM 403*, pages 63–72, 1999.
- [180] V.I. Zapryagaev and A.V. Solotchin. Three dimensional structure of flow in a supersonic underexpanded jet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 4 :42–47, 1992.
- [181] V.I. Zapryagaev and A.V. Solotchin. Development of streamwise vortices in the initial section of a supersonic non-isobaric jet in the presence of microroughness of the inner nozzle surface. *Fluid Dynamics*, 32(3) :465–469, 1997.
- [182] O. Zeman. Dilatation dissipation : the concept and application in modelling compressible mixing layers. *Physics of Fluids A (Fluid Dynamics)*, pages 176–188, 1990.