



**HAL**  
open science

# Quelques aspects de physique statistique des systèmes corrélés

Maxime Clusel

► **To cite this version:**

Maxime Clusel. Quelques aspects de physique statistique des systèmes corrélés. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2005. Français. NNT: . tel-00010753v2

**HAL Id: tel-00010753**

**<https://theses.hal.science/tel-00010753v2>**

Submitted on 16 Nov 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 317

N° Bibliothèque: 05 ENSL0 317

# THÈSE

présentée devant

**l'École normale supérieure de Lyon**

pour obtenir le titre de

Docteur de l'École normale supérieure de Lyon

Spécialité : Physique

par

Maxime CLUSEL

Équipe d'accueil : physique théorique  
École doctorale de physique et d'astrophysique de Lyon (PHAST)

---

Titre de la thèse :

**Quelques aspects de physique statistique  
des systèmes corrélés**

Soutenue le 22 Juillet 2005 devant la commission d'examen

---

COMPOSITION DU JURY :

Dr	Jean-Philippe	BOUCHAUD	CEA-SPEC	Rapporteur
Pr	Steven T.	BRAMWELL	UCL Londres	Président
Pr	Vladimir	DOTSENKO	LPTHE-Paris VI	Examineur
Dr	Jean-Yves	FORTIN	LPT Strasbourg	Examineur
Pr	Peter C.W.	HOLDSWORTH	ENS Lyon	Directeur de thèse
Dr	Jorge	KURCHAN	ESPCI	Rapporteur



# Remerciements

Je tiens à remercier Peter C.W. Holdsworth d’avoir accepté d’encadrer mon travail de thèse, malgré un emploi du temps déjà bien rempli. J’ai pu bénéficier d’une grande liberté au cours de ces trois ans, ce qui m’a permis d’explorer des aspects très divers de la physique, depuis le Royal SQUID jusqu’aux algèbres de Grassmann. Son questionnement permanent (“OK. So what?”) a été l’un des moteurs de mes travaux. Son humour britannique et sa curiosité aiguisée ont grandement contribué à rendre l’atmosphère de travail agréable, y compris dans les moments de doute.

Au cours de ma période de thèse, j’ai eu la chance de travailler en étroite collaboration avec Jean-Yves Fortin. Je lui dois une grande partie des connaissances acquises pendant cette thèse, connaissances qu’il m’a transmises avec un enthousiasme constant et une grande patience. Mes nombreux séjours au Laboratoire de Physique Théorique de Strasbourg ont toujours été l’occasion de discussions passionnantes autour de divers aspects de la physique.

L’étude des fluctuations de grandeurs globales m’a conduit à traverser la Manche pour passer trois mois dans l’équipe de Steven T. Bramwell, à University College London. Je tiens à le remercier de m’avoir accueilli et de m’avoir fait partager son enthousiasme, et surtout de ne pas avoir eu peur de laisser manipuler un apprenti théoricien ! Les discussions passionnées confrontant les points de vue des théoriciens et des expérimentateurs ont été particulièrement éclairantes.

Cette thèse doit aussi beaucoup à l’équipe “théorie” du laboratoire. Je remercie en particulier Josef Schrieffer, David Carpentier et Pascal Degiovanni, qui ont été mes collaborateurs sur le projet “décohérence”. Je suis aussi particulièrement reconnaissant envers François Delduc, Pierre Pujol et Marc Magro, qui ont répondu à bon nombre de mes questions naïves. Je ne saurais oublier mes compagnons de galère, pour de nombreux cafés et les discussions qui vont avec : Christophe Winisdoerffer, Bruno Lashermes, Josef Schrieffer, Jean-Yves Delannoy, Baptiste Portelli, Sébastien Camalet, Simon T. Banks, Jalal Errami, Andrea Taroni etc.

Je tiens évidemment à remercier Jean-Philippe Bouchaud et Jorge Kurchan d’avoir accepté une charge de travail supplémentaire en rapportant mon manuscrit, ainsi que Vladimir Dotsenko d’avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin je remercie toutes les personnes qui ont contribué à cette thèse, de près ou de loin, scientifiquement ou humainement. La liste serait trop longue pour l’écrire ici, je pense qu’ils se reconnaîtront.



*Il est difficile d'attraper un chat noir dans une pièce sombre,  
surtout s'il n'y est pas.*

*Proverbe chinois.*



# Table des matières

Introduction générale	xv
-----------------------	----

---

---

<b>Partie I Fluctuations dans les systèmes corrélés</b>	<b>1</b>
---	----------

---

---

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
---------------------	----------

<b>Chapitre 1 Fluctuations de grandeurs globales</b>	<b>5</b>
--	----------

1.1 Grandeurs globales et théorème central limite . . . . .	5
1.1.1 Grandeurs globales en physique . . . . .	5
1.1.2 Cas de variables microscopiques indépendantes . . . . .	5
1.1.3 Défaut de convergence vers la loi normale . . . . .	7
1.1.4 Variables corrélées . . . . .	9
1.2 La distribution BHP . . . . .	11
1.2.1 Distribution d'aimantation dans le modèle XY 2d . . . . .	11
1.2.2 Études expérimentales . . . . .	13
1.3 Objectif du travail . . . . .	14

<b>Chapitre 2 Distribution du paramètre d'ordre dans le modèle d'Ising 2d</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Distribution du paramètre d'ordre . . . . .	21
2.2.1 Étude en champ nul . . . . .	22
2.2.2 Conditions aux bords et champ magnétique . . . . .	24
2.3 Criticalité des fluctuations à $T^*$ . . . . .	27
2.4 Propriétés physiques du système à $T^*(L)$ . . . . .	29
2.4.1 Distribution de taille des amas . . . . .	30
2.4.2 Intermittence . . . . .	34
2.5 Conclusion . . . . .	36
<b>Chapitre 3 Origine de l'analogie avec la distribution BHP</b>	<b>39</b>
3.1 Premières étapes . . . . .	39
3.1.1 Représentation par des spins continus . . . . .	39
3.1.2 Développement perturbatif . . . . .	41
3.2 Étude dynamique des fluctuations . . . . .	45
3.2.1 Pourquoi une étude dynamique . . . . .	45
3.2.2 Équations de Langevin . . . . .	46
3.2.3 Distribution des fluctuations . . . . .	47
3.2.4 Transformée de Fourier . . . . .	50
3.3 Lien avec le modèle XY . . . . .	52
3.3.1 Valeur moyenne et écart-type apparents . . . . .	52
3.3.2 Distribution de l'aimantation réduite . . . . .	55
3.3.3 Discussion . . . . .	56
3.4 Conclusion . . . . .	59
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>63</b>

---



---

## Partie II Décohérence quantique et lois larges

---



---

---

<b>Introduction</b>	<b>69</b>
1 Sommes de variables aléatoires : cas des lois larges . . . . .	69
1.1 Lois larges . . . . .	69
1.2 Lois de Lévy . . . . .	71
2 Décohérence quantique . . . . .	73
2.1 Système quantique et environnement . . . . .	74
2.2 Fonctionnelle d’influence de Feynman-Vernon . . . . .	74
2.3 Décohérence et TCL . . . . .	76
3 Décohérence induite par un bruit intermittent . . . . .	78
3.1 Déphasage induit par une dynamique de Lévy . . . . .	78
3.2 Bruit intermittent . . . . .	79
<b>Chapitre 1 Article: “Non stationary dephasing of two level system”</b>	<b>81</b>
<b>Chapitre 2 Article: ”Dephasing by a nonsationary intermittent noise”</b>	<b>89</b>
2.1 Introduction . . . . .	89
2.2 The model . . . . .	91
2.2.1 Pure dephasing by an intermittent noise . . . . .	91
2.2.2 A model for classical intermittent noise . . . . .	92
2.2.3 Decoherence at optimal points . . . . .	95
2.2.4 Spectral properties of the intermittent noise . . . . .	95
2.3 Dephasing, continuous time random walk of the phase and renewal theory .	97
2.3.1 Continuous time random walk of the phase . . . . .	97
2.3.2 Exact dephasing via renewal theory . . . . .	101
2.4 Dephasing in the symmetric models . . . . .	104
2.4.1 Dephasing at $t_p = 0$ . . . . .	104
2.4.2 Influence of a finite preparation time $t_p$ . . . . .	105
2.5 Dephasing in the asymmetric models . . . . .	110
2.5.1 The $0 < \mu < 1$ class . . . . .	111
2.5.2 The intermediate class $1 < \mu < 2$ . . . . .	112
2.6 Discussion and conclusion . . . . .	112
2.7 Appendix . . . . .	114
2.7.1 Useful results on the sprinkling time distribution . . . . .	114
2.7.2 Laplace transform and moments of $\psi(\tau), \psi_{t_p}(\tau)$ . . . . .	116

2.7.3	Explicit expressions for $\psi_{t_p}(\tau_1)$ . . . . .	120
2.7.4	Analytic results on $\Pi_0$ . . . . .	121
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>123</b>

---



---

## Partie III Fonctions de partition du modèle d’Ising

---



---

<b>Introduction</b>		<b>127</b>
<b>Chapitre 1 Modèle d’Ising et variables de Grassman</b>		<b>129</b>
1.1	Modèle d’Ising . . . . .	129
1.2	Approches analytiques pour le cas bidimensionnel . . . . .	131
1.2.1	Notations . . . . .	131
1.2.2	Deux méthodes habituelles . . . . .	133
1.2.3	Algèbre de Grassmann et modèle d’Ising . . . . .	135
1.3	Méthode de Plechko : une solution alternative . . . . .	135
1.3.1	Résolution sur réseau carré . . . . .	135
1.3.2	Passage à la limite continue, théorie effective . . . . .	137
1.4	Conclusion . . . . .	140
<b>Chapitre 2 Modèle d’Ising 2d avec champ magnétique au bord</b>		<b>141</b>
2.1	Introduction et notations . . . . .	141
2.2	Représentation mixte de la fonction de partition . . . . .	143
2.2.1	Fermionisation . . . . .	143
2.2.2	Réorganisation du produit . . . . .	143
2.3	Représentation fermionique de la fonction de partition . . . . .	146
2.3.1	Trace sur les spins du bulk . . . . .	147
2.3.2	Trace sur les spins du bord . . . . .	147

---

2.3.3	Représentation fermionique du champ magnétique . . . . .	148
2.4	Modèle d'Ising 1d avec champ magnétique homogène . . . . .	149
2.5	Intégration sur les variables de bulk : interaction effective . . . . .	152
2.5.1	Réduction du nombre de variables de Grassmann . . . . .	152
2.5.2	Intégration des variables de bulk : action 1d effective . . . . .	154
2.6	Cas d'un champ magnétique homogène au bord . . . . .	157
2.6.1	Fonction de partition et limite thermodynamique . . . . .	157
2.6.2	Fonctions de corrélation au bord . . . . .	159
2.6.3	Limite thermodynamique : aimantation au bord . . . . .	162
2.7	Conclusion . . . . .	165
<b>Chapitre 3 Application à une transition de mouillage</b>		<b>167</b>
3.1	Les transitions de mouillage . . . . .	167
3.2	Modèle étudié . . . . .	168
3.2.1	Notations . . . . .	168
3.2.2	Étude à température nulle . . . . .	168
3.3	Étude analytique . . . . .	171
3.3.1	Principe . . . . .	171
3.3.2	Fonction de partition . . . . .	174
3.3.3	Énergie libre . . . . .	175
3.4	Étude de la transition . . . . .	178
3.4.1	Système de taille finie . . . . .	178
3.4.2	Cas où $L_x \rightarrow \infty$ et $L_y \gg 1$ . . . . .	181
3.4.3	Limite thermodynamique à rapport d'aspect constant . . . . .	184
3.5	Conclusion . . . . .	185
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>187</b>
<b>Annexe A Algèbres de Grassmann</b>		<b>189</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>193</b>



# Table des figures

1.1	Courants locaux dans une jonction tunnel . . . . .	7
1.2	Fluctuations de puissance injectée : dispositif expérimental. . . . .	13
1.3	Distributions de grandeurs globales : modèle XY et turbulence . . . . .	15
1.4	Distributions obtenues dans différentes études, sur plusieurs systèmes corrélés.	17
2.1	Ernest Ising (1900-1998) . . . . .	20
2.2	Dynamique Swendsen-Wang dans la phase ferromagnétique. . . . .	21
2.3	Distributions de l'aimantation réduite $\mu$ , champ nul. . . . .	23
2.4	PDF de l'aimantation à $T^*$ : fenêtre expérimentale . . . . .	24
2.5	PDF en champ magnétique, conditions aux bords fixes . . . . .	25
2.6	PDF d'un sous-système, pour une champ magnétique $H^*$ . . . . .	26
2.7	Évolution de $T^*(L)$ avec $1/L$ . . . . .	28
2.8	Fonctions de corrélation spin-spin pour $L = 128$ et différentes températures.	29
2.9	Différentes configurations d'un réseau de taille $L = 512$ . . . . .	30
2.10	Distribution de taille relative des amas pour différentes températures. . . . .	31
2.11	Distribution de taille relative des amas pour différentes tailles de système. . .	33
2.12	Évolutions Métropolis de l'aimantation d'un système de taille $L = 64$ . . . . .	35
2.13	Diagramme de phase du modèle d'Ising 2d. . . . .	36
3.1	Exemple de flots . . . . .	42
3.2	Évolution Métropolis dans la phase ferromagnétique . . . . .	46
3.3	Test numérique des équations de Langevin . . . . .	48
3.4	Évolution schématique de l'aimantation au voisinage de $T^*$ . . . . .	49
3.5	Comparaison des PDF pour $(\langle m \rangle, \sigma)$ et pour $(\bar{m}, \bar{\sigma})$ . . . . .	54
3.6	PDF du modèle XY 2d avec une masse. . . . .	57
3.7	Comparaison entre modèle d'Ising basse température et modèle XY massique.	58
3.8	Distribution $\Pi$ pour différents propagateurs. . . . .	60
1	Résultats expérimentaux préliminaires sur $\text{CdCr}_2\text{S}_4$ . . . . .	64
1	Paul Lévy (1886-1971) et Andreï N. Kolmogorov (1903-1987). . . . .	70
2	Loi de Lévy $L_{1/2}$ . . . . .	74
1.1	Representation of a noise configuration $X(t)$ . . . . .	84

---

1.2	Dephasing factor and $\tau_\phi$ obtained by numerical inversion . . . . .	86
2.1	Low-frequency noise as a sum of contributions from telegraphic signals . . .	93
2.2	Random spike field used to model the intermittent low-frequency noise . . .	94
2.3	A configuration of the noise $X(t_p + \tau)$ . . . . .	98
2.4	Intermittent noise between $t_p$ and $t_p + t$ . . . . .	100
2.5	Dephasing factor $D_{t_p}(t)$ in the symmetric model for $\mu = 1.1$ and $t_p = 10^5$ . . .	106
2.6	Dephasing time $\tau_\phi$ in the symmetric model as a function of $g$ for $\mu = 1.1, 1.8$ . . .	107
2.7	Dephasing time $\tau_\phi$ in the symmetric model as a function of $g$ for $\mu < 1$ . . . .	108
2.8	Dephasing factor $D_{t_p}(t)$ in the symmetric model for $\mu = 0.8, t_p = 10^5$ . . . . .	109
2.9	Dephasing time $\tau_\phi$ in the asymmetric model as a function of the coupling $g$ . . .	111
2.10	Decay of $ D_{t_p}(t) $ in the asymmetric model for $\mu = 0.8$ . . . . .	113
1.1	Lars Onsager (1903-1976). . . . .	130
1.2	Notations. . . . .	132
1.3	Amas à six vertex. . . . .	133
1.4	Bijection entre le modèle d'Ising et réseau de dimères. . . . .	134
2.1	Description du modèle. . . . .	142
2.2	Domaine d'intégration pour les modes de Fourier. Ensembles $S_1$ et $S_2$ . . . . .	153
2.3	Chaleur spécifique pour un réseau carré, avec $J_1 = J_2$ . . . . .	160
2.4	Fonctions de corrélation spin-spin au bord ( $L_x = L_y = L$ ). . . . .	163
2.5	Fonctions de corrélation spin-spin au bord pour différentes tailles. . . . .	164
3.1	Description du modèle pour le mouillage. . . . .	169
3.2	Fonction de corrélation au bord, pour différents rapports d'aspect . . . . .	171
3.3	Configurations du réseau à température nulle, sous différentes conditions. . .	172
3.4	Définition des domaines $\mathcal{T}_1, \mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_2$ . . . . .	173
3.5	Énergie libre $\sigma_{\text{int}}$ dans le cas où $L_x = L_y = 20, H_s = 1.2J$ . . . . .	176
3.6	Entropie et chaleur spécifique dues à $\sigma_{\text{int}}$ , pour $J_1 = J_2, L_x = 6$ et $L_y = 24$ . . .	179
3.7	Chaleur spécifique dues à $\sigma_{\text{int}}$ , pour $L_x = 40, L_y = 200$ et $J_1 = J_2$ . . . . .	180
3.8	Diagramme de phase du système dans la limite thermodynamique. . . . .	181
A.1	Hermann Günter Grassmann (1808-1877). . . . .	190

# Introduction générale

Dans cette thèse sont présentés les différents travaux que j'ai effectués au cours des trois dernières années, sous la direction de Peter C.W. Holdsworth. De natures différentes, ils couvrent certains aspects de la physique statistique des systèmes corrélés.

Le première partie est dédiée à l'étude des fluctuations de grandeurs globales dans les systèmes corrélés. Ce projet, qui consitue le sujet original de ma thèse, a été réalisé en collaboration avec Jean-Yves Fortin et Steven T. Bramwell. Il s'agit en fait de proposer une explication à certaines observations expérimentales et numériques, faites au cours des dix dernières années, selon lesquelles une distribution, désignée par la suite par l'acronyme BHP, décrit qualitativement bien les fluctuations dans une grande variété de systèmes. Cette étude a été réalisée dans un état d'esprit pragmatique : on se propose de développer un cadre théorique permettant de comprendre une partie des observations, dans le cas particulier des systèmes à l'équilibre, en nous basant sur des résultats numériques. Pour cela, une grande partie du travail, qui n'apparaît pas ici, a consisté à identifier les bonnes questions, et à chercher le cadre naturel pour y répondre. Au final nous avons éliminé une bonne partie du coté "magique" de la distribution BHP, sans pour autant supprimer son intérêt. Nous espérons ainsi clarifier la situation et identifier des questions précises encore ouvertes.

Le travail précédent m'a naturellement conduit à m'intéresser au théorème central limite et à ses conditions d'application. En effet l'obtention de distributions non gaussiennes dans la limite thermodynamique est due à l'existence de fortes corrélations dans le système, qui rend le théorème central limite inapplicable à ces cas-là. Après avoir considéré l'effet des corrélations, je me suis penché sur le cas des lois larges, menant ainsi au théorème central limite généralisé et aux lois de Lévy. À la suite du cours de DEA de Pascal Degiovanni, j'ai proposé au groupe de travail de l'équipe de physique théorique de s'intéresser à l'effet des lois larges sur la décohérence. C'est ainsi que nous avons commencé les travaux présentés dans la deuxième partie, en collaboration avec Josef Schrieffer, David Carpentier et Pascal Degiovanni. En appliquant les méthodes des marches aléatoires à temps continu à la décohérence, nous avons abouti à une physique amusante, et dont les extensions sont nombreuses.

La troisième partie de cette thèse est consacrée au développement d'une méthode de résolution exacte du modèle d'Ising 2d avec un champ magnétique au bord. Ce travail est issue des recherches bibliographiques effectuées dans le cadre de l'étude des fluctuations dans les systèmes corrélés. En effet, pour cette dernière, nous avons choisi de travailler avec le modèle d'Ising, pour lequel un grand nombre de méthodes numériques et analytiques sont disponibles. J'ai été particulièrement intéressé par une méthode développée par V.N. Plechko pour le modèle d'Ising en champ nul, car elle me paraissait plus simple que les autres mé-

thodes, et qu'elle ne fait aucune hypothèse technique intermédiaire. En collaboration avec Jean-Yves Fortin, nous avons commencé à regarder, initialement par simple curiosité, comment le champ magnétique perturbe cette méthode. Au fur et à mesure, il est apparu que l'on pouvait obtenir de façon assez simple des résultats sur le modèle d'Ising avec champ magnétique au bord. En particulier, nous avons ainsi obtenu de nouveaux résultats exacts sur un cas particulier de champ magnétique inhomogène. Cela permet de montrer que cette méthode est un outil intéressant, qui permet de décrire assez facilement certains problèmes physiques liés au développement d'interfaces. Ces travaux préliminaires ont finalement débouché sur une étude complète, dont les perspectives sont riches et enthousiasmantes.

L'éclectisme de cette thèse est donc le fruit d'une certaine curiosité et d'interactions avec différentes personnes. J'espère parvenir à communiquer au lecteur le plaisir que j'ai pris à effectuer ces travaux, et à lui faire ainsi oublier la longueur du manuscrit.

## Première partie

# Fluctuations des grandeurs globales dans les systèmes corrélés



# Introduction

Le travail présenté dans cette partie concerne l'étude des fluctuations de grandeurs globales dans les systèmes corrélés. Il fait suite aux travaux de B.Portelli [Portelli 2002] et a été réalisé en étroite collaboration avec J.-Y. Fortin<sup>1</sup> et S. T. Bramwell<sup>2</sup>.

Depuis la fin des années 90, une grande activité de recherche est consacrée à l'étude des fluctuations de grandeurs mesurables dans les systèmes corrélés, tant théoriquement qu'expérimentalement. En particulier, S.T. Bramwell, P.C.W. Holdsworth et J.-F. Pinton ont constaté une grande ressemblance entre les distributions obtenues dans plusieurs systèmes pourtant *a priori* très éloignés [Bramwell et al. 1998, Bramwell et al. 2000]. La distribution correspondante a par la suite été appelée BHP. Cette observation a engendré un grand nombre d'études, confirmant cette analogie entre différentes distributions et la distribution BHP.

Dans cette partie, nous cherchons à comprendre l'origine de cette "superuniversalité" de la distribution BHP. Pour cela nous nous limitons à l'étude d'un système bidimensionnel à l'équilibre, le modèle d'Ising. Dans un premier temps une étude numérique, présentée dans le chapitre 1, nous permet d'étudier précisément les fluctuations du paramètre d'ordre de ce modèle, afin d'en extraire des indications sur la façon d'aborder ce problème d'un point de vue plus théorique. Dans le chapitre 2, ces indications sont utilisées pour développer une description théorique permettant de voir l'origine du lien avec la distribution BHP. Cette description est menée de façon pragmatique, l'idée étant plus d'expliquer un certain nombre de faits expérimentaux que de développer une théorie des fluctuations critiques. C'est la raison pour laquelle, tout au long de cette étude, nous garderons toujours à l'esprit ce qui est accessible à l'expérience. En conclusion de cette étude, nous proposerons une extension à d'autres systèmes que le modèle d'Ising 2d, puis nous reviendrons sur les questions encore ouvertes dans ce domaine.

---

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique théorique, Université L. Pasteur et CNRS Strasbourg.

<sup>2</sup>Department of Chemistry, University College London, UK.



# Chapitre 1

## Fluctuations de grandeurs globales

**But du chapitre :** *Dans ce chapitre est présenté un rapide tour d'horizon des études antérieures des fluctuations de grandeurs globales. Nous précisons ainsi la problématique développée dans cette première partie, en la replaçant dans le contexte général. Nous arriverons ainsi à formuler les questions que l'on se propose d'aborder dans cette partie.*

### 1.1 Grandeurs globales et théorème central limite

#### 1.1.1 Grandeurs globales en physique

En physique, les grandeurs mesurables sont souvent des grandeurs macroscopiques ou mésoscopiques. Une telle grandeur, appelée grandeur globale, est en fait la somme de grandeurs microscopiques. Il en existe un très grand nombre, dans tous les domaines de la physique. On peut par exemple citer l'aimantation dans les systèmes magnétiques, la résistance totale d'un réseau de résistances, ou l'énergie totale d'un système.

Lorsque les variables microscopiques sont aléatoires, la grandeur globale devient elle aussi une variable aléatoire. La question qui se pose alors naturellement est de connaître la fonction densité de probabilité (PDF) de la grandeur globale, en faisant un certain nombre d'hypothèses raisonnables sur la distribution des variables microscopiques qui est, elle, généralement inaccessible. La théorie des probabilités fournit à la physique un outil très puissant, le théorème central limite (TCL), qui permet de répondre de manière générique à cette question.

#### 1.1.2 Cas de variables microscopiques indépendantes

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse émettre pour commencer est de supposer que les variables microscopiques sont indépendantes, et d'utiliser le théorème central limite. Ce théorème a été démontré en 1922 par J.W. Lindeberg, qui fait suite à d'autres mathématiciens qui en avaient donné une forme plus faible. L'énoncé est le suivant [Appel 2002] :

**Théorème (TCL).** Soit  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance  $m$  et d'écart-type  $\sigma$  finis. On pose

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

et

$$Z_n = \sqrt{n}(Y_n - m).$$

Alors la suite  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers la loi normale  $\mathcal{N}[0, \sigma]$  :

$$\mathcal{N}[0, \sigma](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Il existe des généralisations de ce théorème dans le cas où les variables ne sont pas identiquement distribuées [Feller 1971], ou, sous certaines conditions, quand il existe des corrélations entre les  $X_k$  [Durrett 1995].

Les utilisations de ce théorème en physique sont très nombreuses<sup>3</sup>. On peut par exemple s'intéresser à la distribution de l'aimantation dans un modèle de  $N$  spins sur réseau. Dans la phase paramagnétique, les spins peuvent être supposés indépendants et identiquement distribués. Dans le cas du modèle d'Ising par exemple, la distribution d'un spin  $s_k$  est

$$P(s_k) = \frac{1}{2} \left( \delta(1 - s_k) + \delta(1 + s_k) \right). \quad (1.1)$$

L'aimantation totale du système est donnée par  $m_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s_k$ . La distribution (1.1) a une moyenne nulle et un écart-type  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Le TCL nous permet de dire que la quantité

$$\mu_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N s_k \quad (1.2)$$

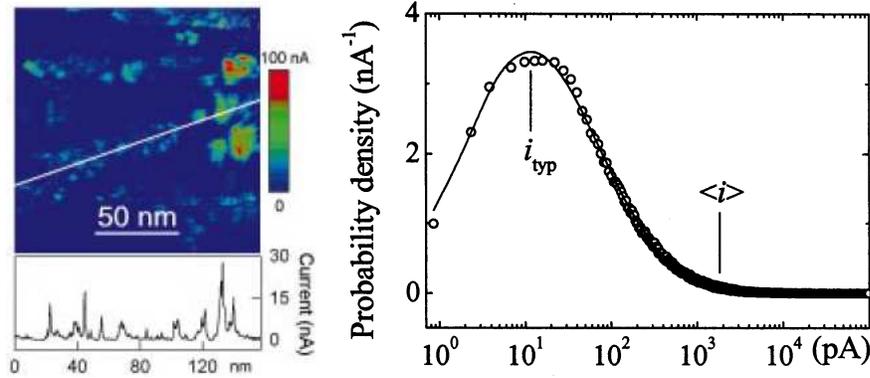
est distribuée, dans la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ , suivant une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . L'aimantation vérifiant

$$m_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \mu_N, \quad (1.3)$$

on en déduit que pour  $N \gg 1$ , l'écart-type de l'aimantation est voisin de  $\sigma_m \simeq 1/\sqrt{N}\sigma_\mu$ , et que  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(m) \rightarrow \delta(m)$ . Autrement dit, dans la limite thermodynamique, l'aimantation est nulle et ne fluctue pas. Par contre l'aimantation réduite  $\mu_N = \frac{m}{\sigma_m}$  a, elle, une distribution normale dans la limite thermodynamique. Ainsi la bonne façon d'étudier les fluctuations d'aimantation d'un système est de considérer non pas l'aimantation totale, mais l'aimantation réduite.

---

<sup>3</sup>H. Poincaré aurait d'ailleurs dit, au sujet du recours systématique à la distribution normale : "Tout le monde y croit : les expérimentateurs pensent que c'est un théorème mathématique, les mathématiciens croient qu'il s'agit d'un fait expérimental".



(a) Courants sur une sur- (b) Distribution des courants locaux dans une face d'oxyde de Cobalt. La jonction tunnel d'oxyde de Cobalt. Les symboles courbe représente le profil sont les résultats expérimentaux, et la courbe en de courant le long de la trait plein est l'ajustement par une distribution log-normale.

FIG. 1.1 – Image et distribution des courants locaux dans une jonction tunnel d'oxyde de Cobalt. D'après [Da Costa et al. 2000].

Cependant, comme tout théorème, le TCL n'est valable que sous un certain nombre d'hypothèses, qui ne sont pas toujours vérifiées par la physique, conduisant à des comportements “anormaux”. Depuis une vingtaine d'années, il y a une activité intense en physique autour de ces problèmes<sup>4</sup>. L'observation de distributions anormales<sup>5</sup> dans des expériences ou des simulations numériques est souvent la signature d'une physique intéressante, comme nous le verrons dans les deux premières parties.

### 1.1.3 Défaut de convergence vers la loi normale

La première remarque que l'on peut faire à propos du TCL est qu'il ne donne d'informations que sur la distribution dans la limite thermodynamique. Il arrive parfois que cette limite ne soit pas physiquement pertinente, même pour de grands systèmes. Ce cas est illustré ici en utilisant les travaux de F. Bardou *et al.* sur les jonctions tunnels [Bardou 1997, Da Costa et al. 2000, Da Costa et al. 2003, Romeo et al. 2003]. On s'intéresse au courant tunnel mesuré sur des jonctions métal-oxyde [Da Costa et al. 2000], en particulier dans le cas où le métal est du Cobalt. Le courant tunnel local est mesuré à l'aide d'une sonde de  $\text{Si}_3\text{N}_4$ . Les résultats obtenus (voir par exemple la figure 1 dans [Da Costa et al. 2000], reproduite ici en 1.1(a)) montrent une forte hétérogénéité des courants tunnel sur la surface du film. Cette observation semble être liée à la topographie de la surface du film. De plus, en étudiant les fluctuations des courants locaux  $i_k$ , on peut déterminer expérimentement

<sup>4</sup>Par exemple, le travail présenté dans la seconde partie de cette thèse s'inscrit dans cette étude des conséquences physiques des écarts au théorème central limite (TCL), dans le cas où les distributions des variables microscopiques ont au moins un de leurs deux premiers moments indéfinis.

<sup>5</sup>On qualifiera dans cette partie d'anormale toute distribution qui n'est pas une loi normale  $\mathcal{N}[m, \sigma]$ .

la distribution de probabilité de ces courants. Les résultats expérimentaux montrent que cette distribution peut être non gaussienne, en très bon accord avec une étude théorique de ces fluctuations [Bardou 1997]. L'idée de cette étude est de voir comment une distribution gaussienne de la distance entre la sonde et la jonction se traduit en terme de fluctuations de courant. La relation entre courant tunnel et largeur de la jonction étant très non-linéaire [Bardou 1997, Messiah 1999], la distribution des courants devient non gaussienne : on obtient une distribution log-normale [Bardou 1997, Bury 1999]

$$P(i_k) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i_k} \exp \left[ -\frac{1}{2\beta^2} (\ln(i_k) - \alpha)^2 \right], \quad (1.4)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres dépendant de la jonction. L'accord entre cette distribution et les données expérimentales est très bon, comme le montre la figure 1.1(b). On peut maintenant se demander comment est distribuée l'intensité du courant total  $I$  traversant la jonction. Les  $N$  jonctions élémentaires indépendantes étant en parallèle, on a

$$I_N = \sum_{k=1}^N i_k. \quad (1.5)$$

Ainsi le courant total est une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Tous les moments de la distribution log-normale étant finis, le TCL doit s'appliquer et on s'attend à ce que  $I_N/\sqrt{N}$  soit distribué suivant une loi gaussienne dans la limite thermodynamique. Les résultats expérimentaux montrent cependant des écarts très importants par rapport à la loi normale. Les distributions obtenues sont en fait larges et asymétriques, même pour  $N \gg 1$ . La raison de cet écart tient à la très faible vitesse de convergence vers la loi normale [Romeo et al. 2003]. En effet, si les moments de la loi log-normale sont finis, ceux-ci peuvent être très grands. Les deux premiers moments de la distribution (1.4) sont donnés par [Bury 1999] :

$$\langle i_k \rangle = e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}}, \quad (1.6)$$

$$\langle i_k^2 \rangle = e^{2\alpha + \beta^2} (e^{\beta^2} - 1), \quad (1.7)$$

et la valeur la plus probable par :

$$i_{\text{typ}} = e^{\alpha - \beta^2}. \quad (1.8)$$

L'étude d'une jonction Co/CoO<sub>x</sub> donne  $\alpha = 5.84$  et  $\beta = 1.84$ , ce qui conduit à  $\langle i_k \rangle \simeq 2 \times 10^3 i_0$ ,  $\langle i_k^2 \rangle \simeq 10^8 i_0^2$  et pour la valeur typique  $i_{\text{typ}} \simeq 10 i_0$  ! Le fait que ces deux premiers moments puissent être très grands et la grande asymétrie de la loi, signalée par l'écart de deux ordres de grandeur entre la valeur moyenne et la valeur typique, rendent la convergence vers la loi normale très lente. En fait pour un système de taille finie, tout se passe comme si ces moments étaient infinis : on observe des écarts importants au TCL, et la valeur moyenne du courant local est très différente de sa valeur typique. Cette valeur typique est par ailleurs la grandeur la plus pertinente d'un point de vue expérimental, puisque c'est celle qui a la plus grande probabilité d'être mesurée. Il est ainsi possible de donner une bonne estimation

de la valeur du courant typique traversant toute la jonction [Romeo et al. 2003], en utilisant une analogie avec les lois de Lévy [Bardou et al. 2002]. Dans ce cas, la distribution de  $I_N$  étant large et asymétrique, on s'attend à une grande variabilité des mesures de courant d'une jonction à l'autre. Cette irreproductibilité des résultats est en fait la signature des propriétés statistiques du système, indépendante de la qualité des mesures. Notons que cela pose des problèmes technologiques pour la conception des jonctions, puisque le moindre défaut de surface a des conséquences dramatiques sur la qualité de la jonction.

### 1.1.4 Variables corrélées

Une autre façon d'obtenir une distribution non gaussienne est de violer une hypothèse du TCL, par exemple en considérant le cas de variables microscopiques corrélées. Ce cas n'est pas traité de manière général en mathématiques, bien qu'il existe quelques extensions du TCL à certains types de variables corrélées [Feller 1971, Durrett 1995]. Nous allons illustrer ce point à l'aide des phénomènes critiques.

L'étude des phénomènes critiques et la théorie du groupe de renormalisation constitue une des avancées majeures en physique, tant par sa puissance que par la variété des problèmes qu'elle englobe. Le point crucial des phénomènes critiques est la divergence de la longueur de corrélation entre les objets microscopiques, au point critique. Pour les fonctions de corrélation à deux points, on a notamment :

$$G(r) \propto \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad (1.9)$$

où  $d$  est la dimension du système et  $\eta$  un exposant critique. Pour voir les conséquences de ces fortes corrélations, considérons un système de  $N$  spins  $s_k$ , corrélés sur une longueur  $\xi$ , supposée finie pour l'instant. On peut alors remplacer les spins locaux par des spins  $S_{\xi,k'}$ , moyennés sur une boule de rayon  $\xi$ . En faisant l'hypothèse que les spins sont parfaitement corrélés sur la boule de rayon  $\xi$  et complètement décorrélés au-delà, les  $N' = N \times \xi^{-d} = \left(\frac{\xi}{L}\right)^{-d}$  spins  $S_{\xi,k'}$  sont décorrélés. L'aimantation totale du système est alors :

$$M = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N s_k = \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} S_{\xi,k}. \quad (1.10)$$

Pour pouvoir appliquer le TCL, il faut se ramener à des variables indépendantes et donc utiliser la seconde partie de l'expression précédente. Dans ce cas, on obtient que la distribution  $P(M\sqrt{N'})$  tend vers une distribution normale quand  $N'$  tend vers l'infini. Cette convergence est en fait contrôlée par la valeur de la longueur de corrélation. Si  $\xi \gg 1$ , le nombre de spins  $S_{\xi,k}$  est beaucoup plus petit que le nombre de spins corrélés sur le réseau initial. Il est alors possible que même pour un système de très grande taille, la distribution n'ait pas encore convergé vers une distribution limite. Dans ce cas, on s'attend à avoir des écarts au TCL d'autant plus importants que  $\xi$  est grand.

D'autre part, on constate que si la limite thermodynamique est prise en maintenant le rapport  $\xi/L$  constant, la distribution limite est en fait celle correspondant à un système de taille

finie de même rapport  $\xi/L$  [Bramwell et al. 2001, Binney et al. 1992].

Enfin, si on est au point critique, la longueur de corrélation diverge  $\xi \rightarrow \infty$ , et l'argument précédent n'est plus valable ( $N' = 0$ ). Ce problème vient de ce que pour cet argument, nous avons supposé que les spins étaient parfaitement corrélés dans la boule de rayon  $\xi$ , ce qui n'a pas de sens dans la limite  $\xi \rightarrow \infty$ . En fait, la corrélation entre les spins n'est pas parfaite, ce qui peut être quantifié en introduisant le degré de corrélation des variables. Cependant cette correction ne change pas le fait qu'au point critique, la définition d'un nombre de degrés de liberté indépendants n'a pas beaucoup de sens : ce nombre étant toujours d'ordre 1,  $N' = \mathcal{O}(1)$ , la distribution de l'aimantation est alors non gaussienne même dans la limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ . Elle dépend *a priori* des détails de la distribution des spins  $s_k$  microscopiques. Le groupe de renormalisation peut être alors vue comme une méthode pour calculer les distributions limites dans le cas de variables fortement corrélées. De ce point de vue, il est tout à fait remarquable que des distributions microscopiques différentes conduisent à des limites identiques : c'est une façon de voir la notion de classes d'universalité, notion centrale de la théorie des phénomènes critiques [Goldenfeld 1992, LB 2002].

Dans le cas d'un système de taille  $L$ , les effets de taille finie se font sentir dès que la longueur de corrélation  $\xi$  n'est pas négligeable devant la taille du système. Dans ce cas, les grandeurs thermodynamiques dépendent de la taille du système : au comportement critique donné par la classe d'universalité, on doit ajouter des corrections contenant la taille du système [Plischke et Bergersen 1994, Binder 1981a, Cardy 1996]. Par exemple on trouve que l'aimantation au voisinage du point critique se comporte comme  $M \propto L^{-\beta/\nu}$ , où  $\beta$  et  $\nu$  sont deux exposants critiques [Goldenfeld 1992]. L'analyse des effets de taille finie permet aussi d'écrire la distribution de l'aimantation,  $P_L(M)$ , pour un système de taille  $L$ . On peut en effet former deux nombres sans dimension à partir de ces caractéristiques,  $ML^{\beta/\nu}$  et  $\xi/L$ , ce qui a conduit Binder à proposer la forme d'échelle suivante :

$$P_L(M) \propto \sigma \Pi \left( ML^{\beta/\nu}, \frac{\xi}{L} \right).$$

On peut expliciter d'avantage cette expression, en notant que la susceptibilité magnétique est reliée à l'écart-type par  $\chi \simeq N\sigma^2 \propto L^{\gamma/\nu}$  et en utilisant la relation d'échelle  $\gamma + 2\beta = \nu d$ . On obtient alors  $\sigma \propto L^{-\beta/\nu}$  et

$$P_L(M) \propto \sigma \Pi \left( \frac{M}{\sigma}, \frac{\xi}{L} \right). \tag{1.11}$$

Cette expression montre que seule la distribution  $\Pi$  a un sens dans la limite thermodynamique, et que sa forme dépend de la valeur du rapport  $\xi/L$ . En particulier, pour avoir des déviations à la loi normale dans la limite thermodynamique, il faut prendre cette limite en maintenant le rapport  $\xi/L$  constant, si c'est possible.

## 1.2 La distribution BHP

### 1.2.1 Distribution d'aimantation dans le modèle XY 2d

Le calcul de la distribution  $\Pi$  apparaissant dans (1.11) est très délicat, et ne peut être effectué que dans un très petit nombre de systèmes, parmi lesquels on trouve le modèle XY 2d, dans la limite des ondes de spin [Bramwell et al. 2001, Portelli 2002].

Le modèle XY 2d est un modèle de spins sur un réseau  $\Lambda$ , dans lequel les spins peuvent tourner dans un plan. Chaque spin  $\mathbf{S}_i$  est donc ici un vecteur du plan. Le Hamiltonien du système est

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (1.12)$$

La physique associée à ce modèle est très riche [Berezinskii 1971, Berezinskii 1972, Kosterlitz et Thouless 1973, Kosterlitz 1974, Jose et al. 1977], mais l'objectif ici n'est pas de rentrer dans les détails de ce modèle. Il suffira de garder à l'esprit que ce modèle est critique pour toute température au-dessous de la température de Kosterlitz-Thouless  $T_{KT}$ , et que la classe d'universalité dépend de la température. Enfin, dans la limite basse température  $T \ll T_{KT}$ , on peut effectuer une approximation quadratique du Hamiltonien (1.12) en ondes de spin. Le Hamiltonien ainsi obtenu présente la propriété d'être diagonal dans l'espace de Fourier,

$$\mathcal{H} = \frac{J}{2} \sum_{\mathbf{q} \in \tilde{\Lambda}} G_{\mathbf{q}}^{-1} \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}}, \quad (1.13)$$

où  $\mathbf{q}$  est un vecteur de la zone de Brillouin  $\tilde{\Lambda}$ ,  $\theta_{\mathbf{q}}$  est le transformé de Fourier de l'angle  $\theta_i$  :

$$\theta_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r} \in \Lambda} \theta_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}.$$

Le propagateur  $G_{\mathbf{q}}$  est donné par

$$G_{\mathbf{q}}^{-1} = 2(2 - \cos q_x - \cos q_y). \quad (1.14)$$

On constate que

$$\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} G_{\mathbf{q}}^{-1} = 0,$$

ce qui est la signature d'un mode de Goldstone [Binney et al. 1992, Goldenfeld 1992]. Le paramètre de ce modèle est son aimantation, qui est un vecteur défini par :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i. \quad (1.15)$$

À cause de la présence d'un mode de Goldstone, ce vecteur peut tourner librement, de sorte que  $\langle \mathbf{M} \rangle = 0$  : pour un système de taille finie, le module moyen de l'aimantation est

non nul, mais l'orientation est uniforme sur  $[0, 2\pi[$ . La grandeur globale qui a été étudiée précédemment [Archambault et al. 1997, Bramwell et al. 2001, Portelli 2002] est en fait le module de l'aimantation. Pour une configuration du réseau, l'aimantation (1.15) est non nulle et définit une direction  $\bar{\theta}$ . Autrement dit on s'intéresse aux fluctuations longitudinales de l'aimantation totale. Le module de (1.15) est alors simplement

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i - \bar{\theta}). \quad (1.16)$$

Dans l'approximation  $\theta_i - \bar{\theta} \ll 1$ , l'expression précédente se simplifie et on obtient le paramètre d'ordre linéarisé

$$M = 1 - \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q} \in \tilde{\Lambda}^*} \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}}, \quad (1.17)$$

en notant  $\theta_{\mathbf{q}}$  la transformée de Fourier de  $(\theta_i - \bar{\theta})$ , et  $\tilde{\Lambda}^*$  la zone de Brillouin privée de  $\mathbf{q} = 0$ . Par définition on ne prend donc pas en compte la contribution du mode de Goldstone  $\mathbf{q} = 0$ . Le calcul de la distribution de  $\mu = (M - \langle M \rangle) / \sigma$  a été effectué par S.T. Bramwell *et al.* [Bramwell et al. 2001], à la fois pour le paramètre d'ordre linéarisé et pour le paramètre d'ordre non-linéaire. Dans ce dernier cas, en plus de l'approximation basse température, on doit faire l'hypothèse technique supplémentaire que seuls les graphes fermés à une boucle contribuent dans la limite thermodynamique<sup>6</sup>. Dans les deux cas, la distribution obtenue est la même que pour le paramètre d'ordre linéaire, et elle s'écrit :

$$\Pi_{XY}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i\mu x} \Psi(x), \quad \text{avec} \quad \ln \Psi(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k} \left( \frac{2x^2}{g_2} \right)^{1/2}, \quad (1.18)$$

et

$$g_k = \frac{1}{N^k} \sum_{\mathbf{q} \in \tilde{\Lambda}^*} G_{\mathbf{q}}^k. \quad (1.19)$$

La transformée de Fourier (1.18) n'est pas calculable exactement, mais il est possible d'obtenir analytiquement les comportements asymptotiques pour les larges déviations, et une transformation de Fourier numérique permet de donner l'allure complète de la distribution. D'autre part, dans la fenêtre accessible aux expériences et aux simulations numériques, cette distribution est très bien approchée par une distribution de Gumbel, généralisée pour un paramètre  $a \simeq \pi/2$  [Bury 1999, Bramwell et al. 2001] :

$$G(\mu) = \mathcal{N} \exp [ab(\mu - s) - ae^{b(\mu-s)}], \quad (1.20)$$

avec  $a \simeq 1.58$ ,  $b \simeq 0.93$ ,  $s \simeq 0.37$  et  $\mathcal{N} \simeq 2.16$ .

La distribution que l'on obtient est asymétrique, avec une partie exponentielle pour les déviations négatives, et double exponentielle pour les déviations positives, comme on le voit sur la figure 1.3. Fait encore plus remarquable, la distribution obtenue ne dépend pas

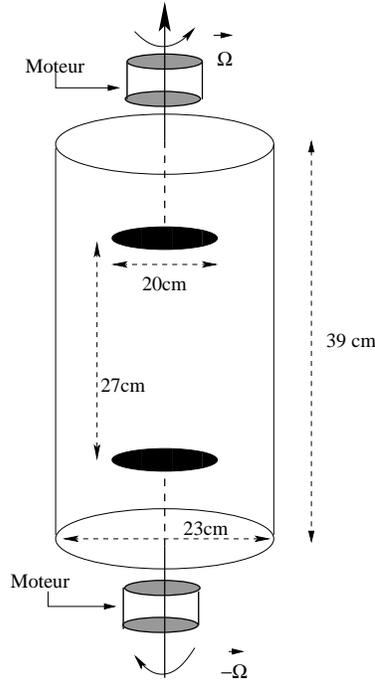


FIG. 1.2 – Fluctuations de puissance injectée : dispositif expérimental.

de la valeur de la température : autrement dit, elle est indépendante du jeu d'exposants critiques choisis, et donc de la classe d'universalité<sup>6</sup>. La distribution de Gumbel étant issue des statistiques d'extrêmes, certains auteurs [Watkins et al. 2002] ont proposé qu'il est possible de reformuler l'étude de la PDF comme un problème de statistique d'extrêmes. Cependant, comme nous venons de le dire, la distribution de Gumbel généralisée n'est valable que pour la partie de la courbe accessible expérimentalement,  $\mu \in [-8 : 3]$ , mais pas sur tout l'ensemble de définition. En particulier les asymptotes de (1.18) ne coïncident pas avec celle de la distribution de Gumbel généralisée [Bramwell et al. 2001]. C'est pourquoi il semble désormais vain de chercher une formulation de ce problème en terme de statistique d'extrêmes.

Comme nous allons le voir, la portée de ces travaux sur le modèle XY dépasse le cadre des systèmes magnétiques.

### 1.2.2 Études expérimentales

À la fin des années 90, Labbé, Pinton et Fauve ont réalisé une série d'expériences sur un écoulement turbulent confiné. Dans un cylindre, de l'air est mise en rotation par deux disques contrarotatifs, comme schématisé sur la figure 1.2. Les disques sont entraînés par deux mo-

<sup>6</sup>. En fait, S.T. Banks et S.T. Bramwell ont montré récemment que d'autres graphes que ceux pris en compte dans le calcul original contribuent à la distribution dans la limite thermodynamique [Banks 2005]. Ces graphes induisent une légère dépendance en la température. Nous reviendrons sur ce point à la fin du chapitre 3.

teurs, alimentés par deux générateurs indépendants. À l'aide d'un asservissement PID, on maintient constante la vitesse de rotation des disques en faisant varier la puissance électrique fournie aux moteurs. Les fluctuations de puissance électrique injectée traduisent ainsi les fluctuations de puissance dissipée au sein de l'écoulement turbulent [Labbé et al. 1996]. La distribution des fluctuations réduites  $\rho = \frac{P - \langle P \rangle}{\sigma}$  est obtenue simplement en calculant l'histogramme d'une série temporelle. Les résultats sont représentés sur la figure 1.3 : la comparaison avec la distribution  $\Pi_{XY}$  est impressionnante ! Il est absolument remarquable que les distributions d'un système magnétique 2d à l'équilibre et d'un écoulement turbulent 3d soient aussi semblables. Signalons une fois de plus qu'il ne s'agit pas d'un ajustement numérique. Pour expliquer cette analogie, Portelli a proposé un modèle statistique pour la turbulence, en utilisant un modèle cascade [Portelli et al. 2003].

Cette observation a amené S.T. Bramwell, P.C.W. Holdsworth et J.-F. Pinton à proposer que la distribution (1.18), qui sera par la suite appelée BHP, est une bonne approximation de la distribution pour des grandeurs globales dans de très nombreux systèmes [Bramwell et al. 1998]. Par la suite, cette proposition de l'universalité de la distribution BHP a été confirmée par un grand nombre de résultats, tant pour des systèmes à l'équilibre que pour des systèmes hors équilibre [Bramwell et al. 2000]. La figure 1.4 présente quelques uns des résultats publiés par différents auteurs, concluant à un bon accord avec la distribution BHP.

Il convient de faire deux remarques à propos de ces résultats. La première concerne la gamme de fluctuations relatives à l'écart-type accessibles : pour la plupart des systèmes, il n'y a de bonnes statistiques que sur l'intervalle  $[-6; 3]$ . D'autre part l'accord est parfois trop grossier pour conclure quant au caractère strictement universel de la distribution BHP : on note par exemple des écarts dans les queues de la distribution dont il est difficile de savoir s'ils proviennent d'un manque de statistique ou s'ils signalent un désaccord avec BHP.

## 1.3 Objectif du travail

Comme nous venons de le voir, la distribution BHP semble décrire correctement une grande variété de distributions, dans des systèmes assez compliqués. Toutefois il est difficile de conclure sur le côté universel de BHP à partir des résultats obtenus jusqu'à présent. Il ne s'agit en fait que de simulations numériques ou de résultats expérimentaux, pour lesquels il est difficile, étant donné les incertitudes de mesures, d'assurer que l'accord avec BHP est bon. D'autre part, il n'existe pas de description théorique satisfaisante pour ces systèmes, qui permettrait de comprendre l'origine de cette analogie. Pour le travail présenté dans cette partie, nous avons choisi de revenir à un modèle simple, qui laisse espérer une compréhension plus complète du phénomène. Des études préliminaires [Bramwell et al. 2000, Zheng et Trimper 2001] signalant un comportement proche de BHP pour le modèle d'Ising 2d, nous avons décidé d'étudier ce modèle, pour lequel de nombreuses techniques, tant numériques qu'analytiques, sont disponibles. D'autre part, étant donné la richesse de ce modèle et son omniprésence dans différents domaines de la physique, on pense aussi pouvoir avoir une compréhension qui dépasse le cadre des systèmes magnétiques. Le

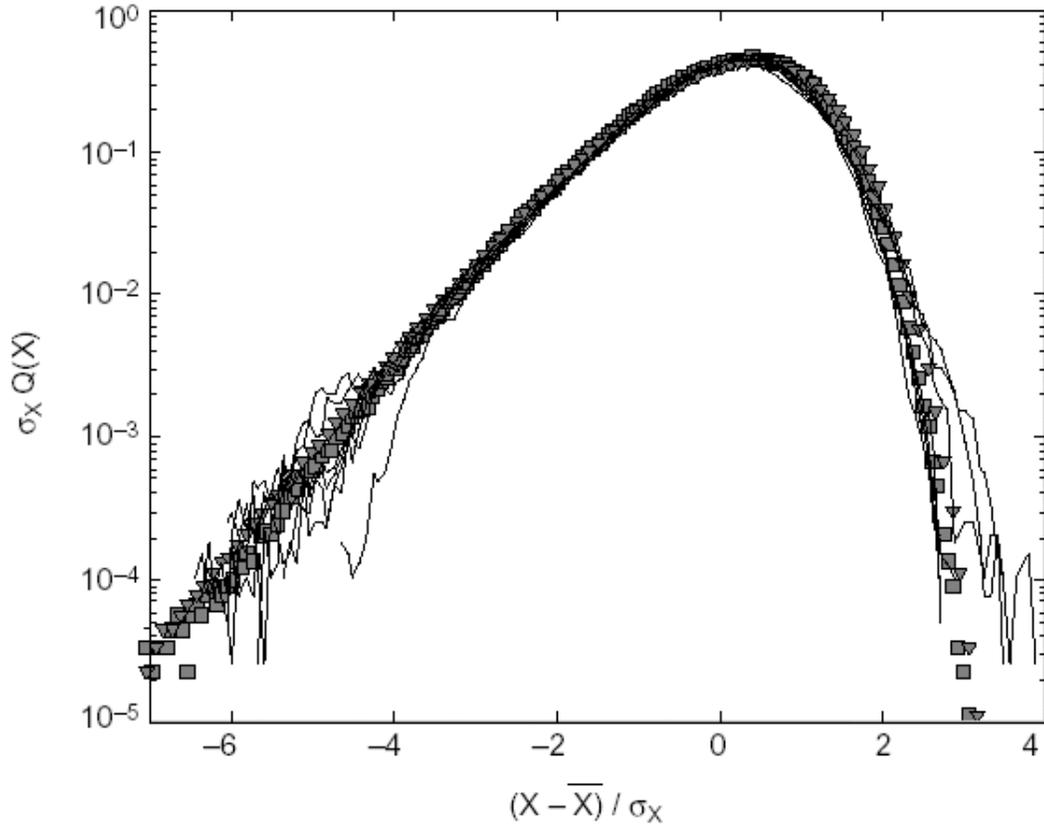
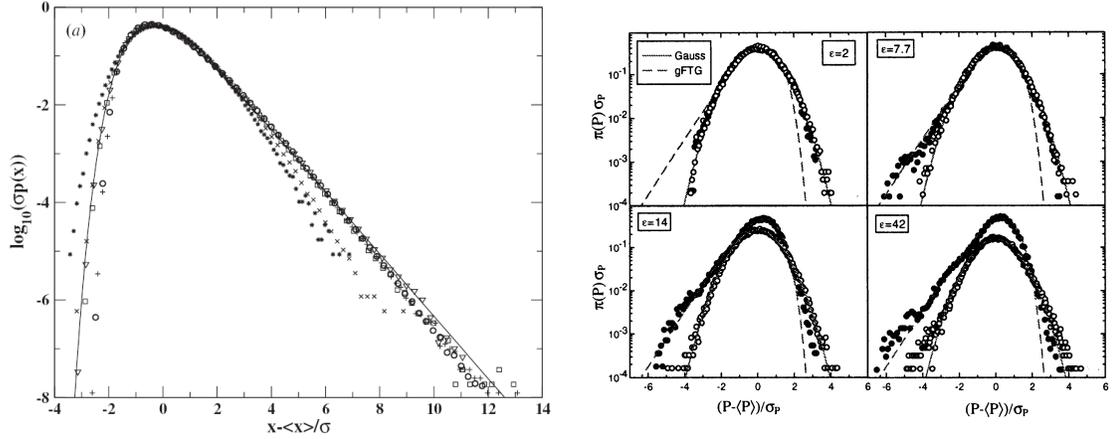


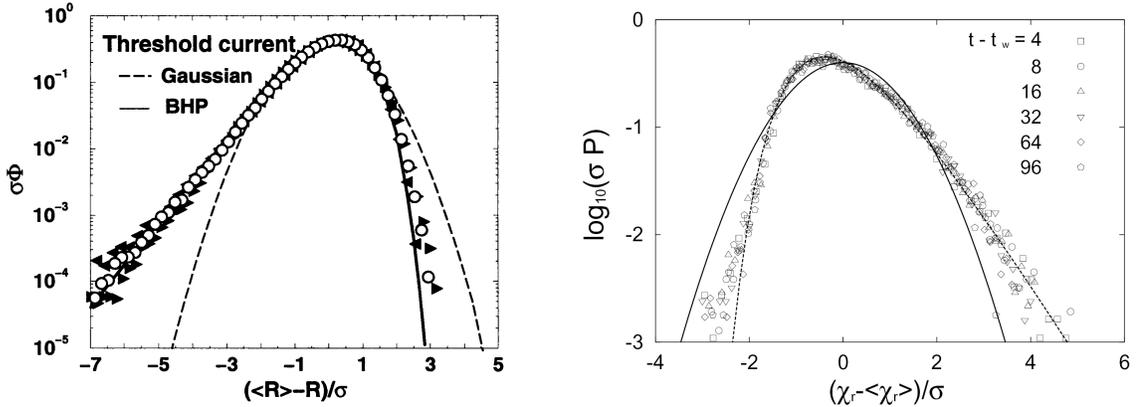
FIG. 1.3 – Comparaison des distributions obtenues en turbulence et pour le modèle XY. Les courbes en traits pleins sont obtenues pour les fluctuations de puissance injectée en turbulence, pour différents nombres de Reynolds. Les symboles représentent les résultats de simulations Monte Carlo pour le modèle XY 2d à basse température  $k_b T/J = 0.5$ , pour plusieurs tailles de système ( $N = 100(\circ)$ ,  $1024(\star)$ ,  $10^4(\triangle)$ , et à  $k_b T/J = 1.0$  pour  $N = 1024, (\square)$ . Il ne s’agit pas d’un ajustement numérique. D’après [Bramwell et al. 1998].

but de cette étude est de comprendre les origines de l'analogie entre la distribution BHP et celles d'autres systèmes à l'équilibre, et des écarts observés.

L'étude reportée dans cette partie s'est déroulée en deux temps. Au moyen de simulations numériques, nous avons commencé par voir si on pouvait retrouver BHP dans les fluctuations du modèle d'Ising, et si oui, dans quelles circonstances. L'étude numérique n'est pas vue ici comme une fin en soi, mais comme une étape préliminaire permettant d'isoler quelques points importants, qui constituent le point de départ de la seconde étape du travail, c'est-à-dire une étude analytique. Le but de cette étude est de proposer un cadre théorique permettant de comprendre l'origine de l'analogie, voire l'universalité, de la distribution BHP. Nous espérons ainsi obtenir un scénario générique, qui soit transposable dans d'autres situations.



(a) Modèle d'avalanches de Sneppen, étudié par [Dahlstedt et Jensen 2001]. Fluctuation de seuil d'instabilité  $\epsilon$ , étudié par Toth-Katona et la taille d'une avalanche moyennée sur  $T =$  Gleeson [TK et Gleeson 2003] : fluctuations de 50(+), 500( $\times$ ), 5000( $\star$ ) pas, et de la taille puissances injectées, en géométries ouverte ( $\circ$ ) et de la plus grande avalanche parmi  $T =$  confinée ( $\bullet$ ). 50( $\circ$ ), 500( $\square$ ), 5000( $\diamond$ ) avalanches consécutives. La courbe en train plein est BHP.



(c) Réseau de résistances, étudié par [Pennetta et al. 2004] : fluctuations de la résistance totale, juste avant la rupture, pour un réseau  $75 \times 75$  ( $\blacktriangleleft$ ),  $100 \times 100$  ( $\blacktriangleright$ ),  $125 \times 125$  ( $\circ$ ). La courbe en trait plein est BHP, et celle en trait pointillé, la distribution gaussienne.

(d) Modèle d'Edward-Anderson 3d, étudié par [Chamon et al. 2004] : fluctuations la réponse in-tégrée [Castillo et al. 2002] pour un système de taille  $L = 8$ , à la température  $T = 0.4$ , pour un temps d'attente  $t_w = 1000$ . La courbe en pointillés est BHP, celle en trait plein est la distribution gaussienne.

FIG. 1.4 – Distributions obtenues dans différentes études, sur plusieurs systèmes corrélés, et comparaisons avec la distribution BHP.



# Chapitre 2

## Distribution du paramètre d'ordre dans le modèle d'Ising 2d

**But du chapitre :** Dans ce chapitre, on étudie en détail les fluctuations du paramètre d'ordre dans le modèle d'Ising 2d, au moyen de simulations numériques. Cette étude a principalement deux objectifs : clarifier les observations déjà faites, et obtenir des informations pouvant guider une étude analytique.

### 2.1 Introduction

En 1922, Ernest Ising (Fig. 2.1) commence son travail de thèse, sous la direction de Wilhelm Lenz. Cette thèse, soutenue à Hamburg en 1924, portait sur une étude théorique du ferromagnétisme au moyen d'un modèle *ad hoc* [Ising 1925]. C'est ce modèle qui est désormais universellement connu sous le nom de "modèle d'Ising". Depuis il a été décliné dans de très nombreuses variations : quantique, désordonné, avec des interactions entre seconds plus proches voisins *etc.* Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, seul le cas classique bidimensionnel sera considéré. Le but du travail de thèse d'Ising était de décrire, à partir d'un modèle microscopique simple, la transition ferro/paramagnétisme observée dans certains matériaux. Dans sa version la plus simple de ce modèle considère des spins  $\sigma = \pm 1$  situés aux noeuds d'un réseau, interagissant uniquement entre plus proches voisins par le biais d'une constante de couplage  $J$ . Le hamiltonien du système s'écrit

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \quad (2.1)$$

où la somme porte sur les sites plus proches voisins. Au cours de sa thèse, E. Ising a montré que dans le cas unidimensionnel, cet hamiltonien ne présente pas de transition de phase continue à une température non nulle : l'aimantation du système n'est non nulle qu'à température nulle. La question naturelle était alors de savoir ce qu'il se passe en dimension

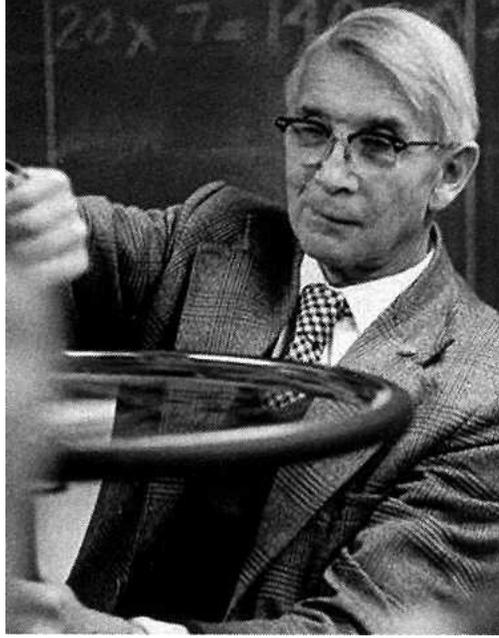


FIG. 2.1 – Ernest Ising (1900-1998)

supérieure, et malgré la simplicité apparente de l'expression du hamiltonien (2.1), répondre à cette question n'a pas été évident. Depuis ce modèle est devenu l'un des plus célèbres de la physique, conduisant à de nombreux études numériques et théoriques. La dernière partie de cette thèse est d'ailleurs consacrée à la résolution de ce modèle pour des conditions aux bords particulières.

Le paramètre d'ordre de ce système est l'aimantation totale, définie par

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i, \quad (2.2)$$

où  $N$  est le nombre total de spins  $\sigma_k$  du système. Ce système est mis en contact avec un thermostat à la température  $T$  (on travaille donc dans l'ensemble canonique). D'un point de vue probabiliste, le paramètre d'ordre est donc une somme de variables aléatoires microscopiques, et constitue donc une grandeur globale, dans le sens précisé dans le chapitre introductif. Dans le cas où les spins sont fortement corrélés, on s'attend donc à trouver éventuellement une distribution de l'aimantation non gaussienne. Ceci a été confirmé [Bruce 1981], notamment à  $T_c(L)$ <sup>7</sup>. Des études plus récentes semblent montrer qu'il existe une température, au voisinage de  $T_c(L)$ , pour laquelle la distribution de probabilité (PDF) de l'aimantation est proche de la distribution BHP [Bramwell et al. 2000, Zheng et Trimper 2001, Zheng 2003]. La première étape de l'étude numérique a consisté à confirmer et à préciser ces observations.

---

<sup>7</sup>Comme il est d'usage pour les systèmes de taille finie pour lesquels il n'y a pas rigoureusement de point critique, on définit la pseudo température critique  $T_c(L)$  comme la température donnant le maximum de la susceptibilité [Cardy 1988].

## 2.2 Distribution du paramètre d'ordre

Dans un premier temps, nous avons réalisé des simulations Monte Carlo pour déterminer numériquement la distribution du paramètre d'ordre du modèle d'Ising. Comme les systèmes considérés dans les simulations numériques sont toujours de taille finie, la physique statistique mène à la conclusion que la valeur moyenne de l'aimantation, définie par 2.2, est nulle. En effet, pour un système de taille finie, il n'y a pas en toute rigueur de transition du second ordre, et la symétrie  $Z_2$  du modèle d'Ising n'est jamais brisée, quelque soit la température. Ceci est illustré par une simulation Monte Carlo Swendsen-Wang du modèle d'Ising à basse température, représentée sur la figure 2.2. On constate cependant que la valeur typique de l'aimantation est, elle, non nulle à cette température : elle correspond à la valeur moyenne de la valeur absolue de l'aimantation :  $M_{\text{typ}} = \langle |M| \rangle$ . En fait c'est cette valeur typique qui, dans la limite thermodynamique, devient la valeur moyenne de l'aimantation. C'est la raison pour laquelle dans les simulations numériques, on définit le paramètre d'ordre comme

$$m = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N \sigma_k \right|. \quad (2.3)$$

Afin de pouvoir accéder à des systèmes de grandes tailles, nous avons choisi d'utiliser

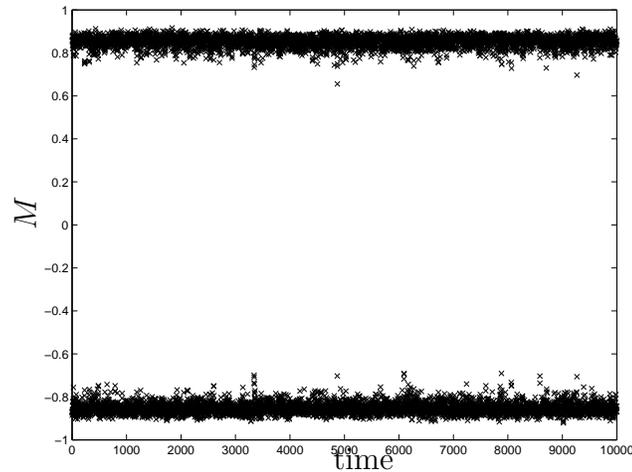


FIG. 2.2 – Exemple de dynamique Swendsen-Wang, pour le modèle d'Ising 2d de taille  $L = 64$  dans la phase ferromagnétique. La non-localité de cette dynamique permet de montrer qu'il existe deux minima de potentiel, séparés par un barrière de taille finie. Dans ce cas la valeur moyenne de (2.2) est nulle, alors que celle de (2.3) ne l'est pas, reproduisant ainsi la transition de phase d'un système de taille infinie. On constate aussi que si  $\langle M \rangle = 0$ , la probabilité que  $M = \langle M \rangle$  est très faible : on a le plus souvent  $M = M_{\text{typ}} = \langle |M| \rangle$ .

l'algorithme Monte Carlo de Swendsen-Wang (SW) [Swendsen et Wang 1987]. En effet la dynamique associée à cet algorithme a un exposant critique dynamique  $z = 0.35$  beaucoup plus faible que celui de l'algorithme Métropolis ( $z = 2$ ). Le temps de relaxation au voisinage

de  $T_c(L)$  divergeant avec la taille du système comme  $L^z$ , l'algorithme SW permet de thermaliser le système près du point critique beaucoup plus rapidement. Il est ainsi possible d'étudier des systèmes relativement grands. Le calcul numérique de la distribution est simple : une fois le système thermalisé, on le laisse évoluer suivant l'algorithme SW. À chaque pas de temps on calcule  $m$  et on construit l'histogramme de  $m$  au fur et à mesure de la simulation. Afin d'obtenir suffisamment d'évènements pour avoir une bonne définition de la PDF jusqu'à des écarts de huit écart-types, il est nécessaire d'effectuer un grand nombre de réalisations, typiquement de l'ordre de  $10^6$  à  $10^8$  pas de temps Monte Carlo. Enfin, une fois la simulation terminée, on calcule la valeur moyenne  $\langle m \rangle$  et l'écart-type  $\sigma$ , de façon à tracer la distribution de la variable réduite  $\mu = \frac{m - \langle m \rangle}{\sigma}$ .

### 2.2.1 Étude en champ nul

On s'intéresse ici au modèle d'Ising sur réseau carré de côté  $L$ . Différents résultats obtenus pour plusieurs valeurs de la température sont présentés sur la figure 2.3, dans le cas d'un système de côté  $L = 64$ . La courbe 2.3(a) correspond à la phase paramagnétique, dans laquelle le paramètre d'ordre est très petit, et les corrélations très faibles. Comme le paramètre d'ordre est la valeur absolue de l'aimantation, la distribution obtenue est une "demi" Gaussienne, en bon accord avec ce que l'on attend d'après le théorème centrale limite. Lorsque l'on baisse la température pour atteindre  $T_c(L)$ , on obtient la PDF représentée sur la figure 2.3(b). Cette forme est en bon accord avec celle précédemment obtenue par Binder [Binder 1981b]. La coupure du côté des déviations négatives vient de la contrainte  $0 \leq M \leq 1$  : le support  $\mathcal{E}$  de la distribution est donc fixé par  $\langle m \rangle$  et  $\sigma$  :  $\mathcal{E} = [-\langle m \rangle / \sigma, (1 - \langle m \rangle) / \sigma]$ . En changeant la température, on change la valeur moyenne et l'écart-type, et donc  $\mathcal{E}$ . En baissant davantage la température, le support de la distribution s'étend encore, et la distribution se rapproche de BHP, puis s'en éloigne à nouveau (voir figure 2.3(d)), pour tendre vers une distribution gaussienne correspondant à la phase ferromagnétique. La température pour laquelle la distribution du modèle d'Ising est en meilleur accord avec BHP est appelée  $T^*(L)$  dans toute la suite de cette partie.

Les simulations précédentes confirment donc l'existence d'une température légèrement inférieure à la température critique, pour laquelle la distribution est proche de BHP [Bramwell et al. 2000, Zheng et Trimper 2001, Zheng 2003]. Pour avoir un critère plus objectif qu'une simple estimation à l'œil, nous définissons la température  $T^*(L)$  comme la température vérifiant :

$$\gamma_{\text{Ising}}(T^*(L)) = \gamma_{XY} \pm 0.01, \quad (2.4)$$

où  $\gamma$  est l'asymétrie de la distribution. Ce critère permet d'obtenir un erreur de l'ordre de 2% sur la valeur de  $T^*$ . Il est évident que ce critère est arbitraire et que l'on pourrait tout à fait en choisir un autre. Toutefois comme l'accord entre les deux distributions est uniquement approximatif, choisir un autre critère raisonnable ne changera pas les conclusions de cette étude. On trouve alors que pour le système étudié,  $T^*(L = 64) = 2.11J$ , alors que  $T_c(L) = 2.33J$ .

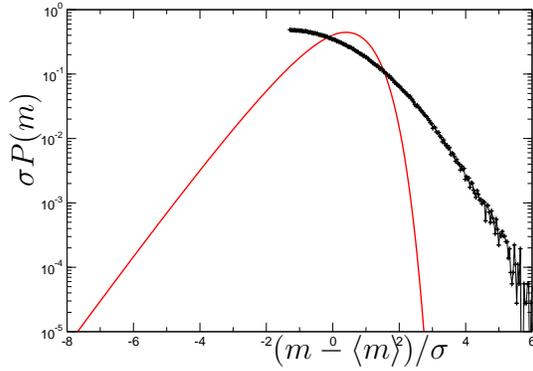
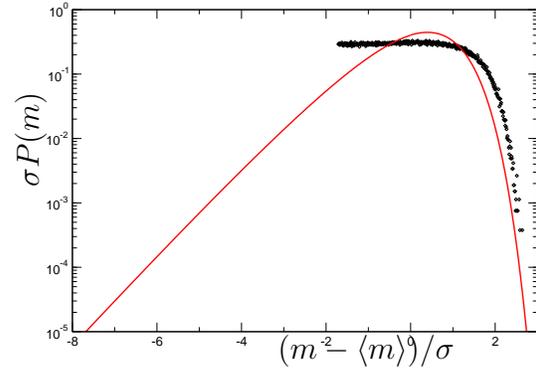
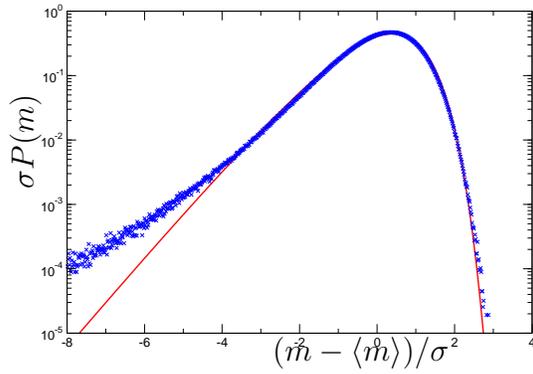
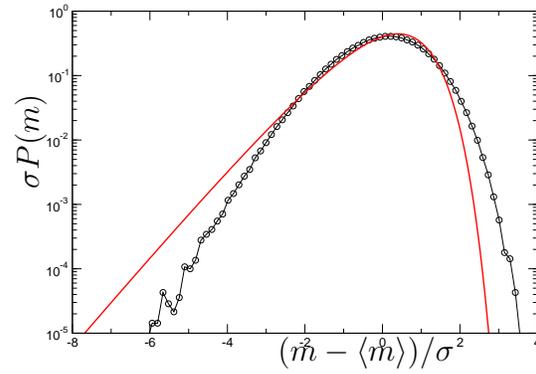

 (a)  $T = 6.7J > T_c$  : phase paramagnétique.

 (b)  $T = 2.33J = T_c(L)$ 

 (c)  $T = 2.11J = T^*(L)$ 

 (d)  $T = 1.54J < T^*(L)$  : phase ferromagnétique

FIG. 2.3 – Distributions de l'aimantation réduite  $\mu = \frac{m - \langle m \rangle}{\sigma}$  en l'absence de champ magnétique, pour différentes températures, pour un système de taille  $L = 64$ . Échelle semi-logarithmique. La courbe en trait plein est la distribution BHP. Noter l'effet important de la contrainte  $m \geq 0$  pour  $T \geq T^*(L)$ .

Il est évident que même à  $T^*(L)$  l'accord avec la distribution BHP est uniquement approximatif. Cela vient du fait que dans le modèle d'Ising en taille finie, la symétrie n'est pas rigoureusement brisée, conduisant à  $P(m = 0)$  et donc  $P\left(\mu = \frac{-\langle m \rangle}{\sigma}\right)$  n'est jamais rigoureusement nulle : la PDF admet forcément une tangente horizontale en ce point. Le cas du modèle XY est particulier car avec le paramètre d'ordre (1.16), il n'y a pas de symétrie brisée au passage de la transition [Archambault et al. 1997] : c'est la raison pour laquelle la partie des déviations négatives doit être concave. Il est en effet impossible de décrire correctement la partie des déviations négatives par rapport à la moyenne à l'aide d'un terme exponentiel,

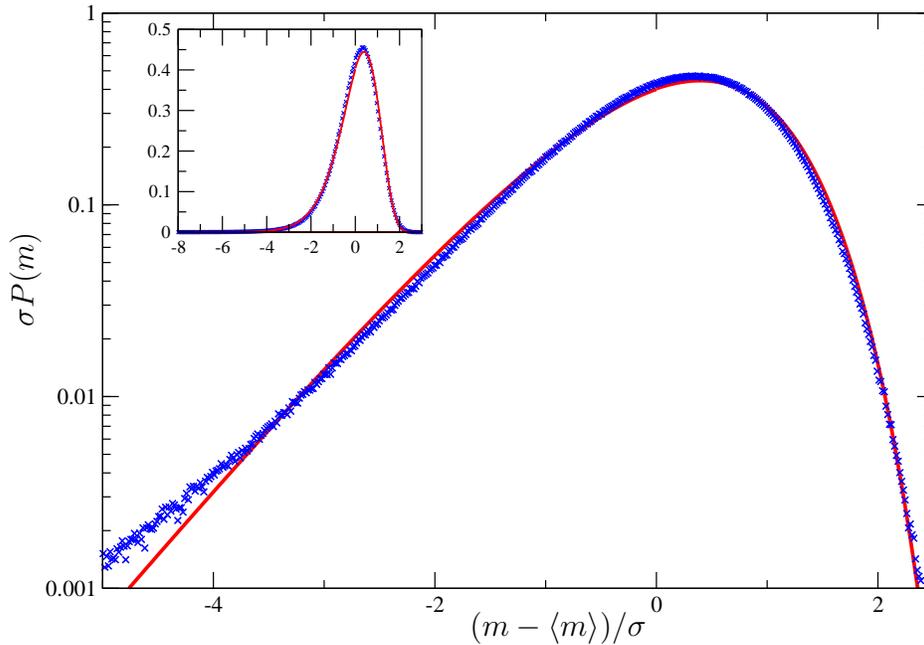


FIG. 2.4 – Distribution du paramètre d'ordre du modèle d'Ising à  $T^*(L) = 2.11J$ , pour un système de taille  $L = 64$ , en champ nul, avec des conditions aux bords périodiques, dans le gamme de valeurs de  $\mu = \frac{m - \langle m \rangle}{\sigma}$  accessibles par une expérience. La courbe pleine correspond à la distribution BHP.

pour toute température au-dessous de  $T_c$ . Il faut toutefois remarquer que dans les simulations numériques présentées ici, nous avons de bonnes statistiques pour les fluctuations jusqu'à des écarts de  $-8\sigma$ , ce qui serait tout à fait exceptionnel pour des résultats expérimentaux, comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent. D'un point de vue plus pragmatique, l'accord obtenu est correct dans la fenêtre accessible aux expériences, comme le montre la figure 2.4. Les différences observées sur les données numériques ne seraient visibles que sur des données expérimentales très précises.

### 2.2.2 Conditions aux bords et champ magnétique

Pour l'instant nous n'avons fait varier qu'un seul des paramètres à notre disposition, la température. Dans cette section nous allons nous intéresser à d'autres paramètres : la valeur du champ magnétique et les conditions aux bords. Comme nous venons de le voir en effet, on peut penser que l'accord entre le modèle d'Ising et le modèle XY du point de vue des fluctuations d'aimantation est affecté par la valeur de la probabilité d'avoir  $M = 0$ . Dans

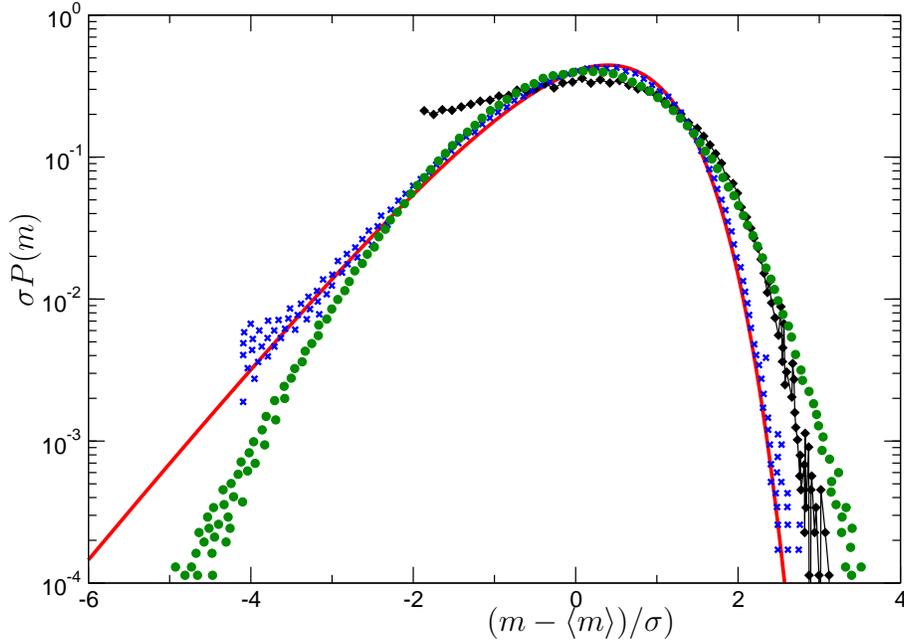


FIG. 2.5 – Distribution du paramètre d'ordre du modèle d'Ising, pour un système de taille  $L = 128$ , avec des conditions aux bords fixes  $\sigma = 1$ , à la température  $T_c(L)$ , pour différentes valeurs du champ magnétiques :  $H = 10^{-3}J$  ( $\blacklozenge$ ),  $H = 2.5 \times 10^{-3}J = H^*(L)$  ( $\times$ ),  $H = 3 \times 10^{-2}J$  ( $\bullet$ ). La courbe pleine correspond à la distribution BHP.

ce paragraphe, nous allons faire varier ce paramètre et voir s'il est ainsi possible d'améliorer significativement l'accord avec BHP.

Par exemple, en appliquant un champ magnétique au système, on brise la symétrie  $M \rightarrow -M$ , et on modifie  $P(M = 0)$ . Il en est de même lorsque l'on change les conditions aux bords périodiques, et qu'on les remplace par des conditions aux bords fixes où tous les spins de bord sont gelés à  $+1$ . La figure 2.5 présente le résultat obtenu pour plusieurs valeurs du champ magnétique, avec des conditions aux bords fixes, pour un système à la température  $T_c(L)$ . On constate alors qu'en augmentant la valeur du champ magnétique, on passe par une valeur  $H^*(L = 128) = 2.5 \times 10^{-3}J$  pour laquelle les déviations négatives sont proches de BHP. Toutefois l'effet de la contrainte  $m \geq 0$  est encore très important pour cette valeur du champ, ce qui donne une distribution tronquée à  $\mu \simeq -4$ . Lorsque le champ augmente encore, la PDF évolue lentement vers une distribution normale : un champ magnétique fort détruit les corrélations entre les spins.

Pour essayer d'étendre le support de la distribution, on peut étudier l'aimantation d'un

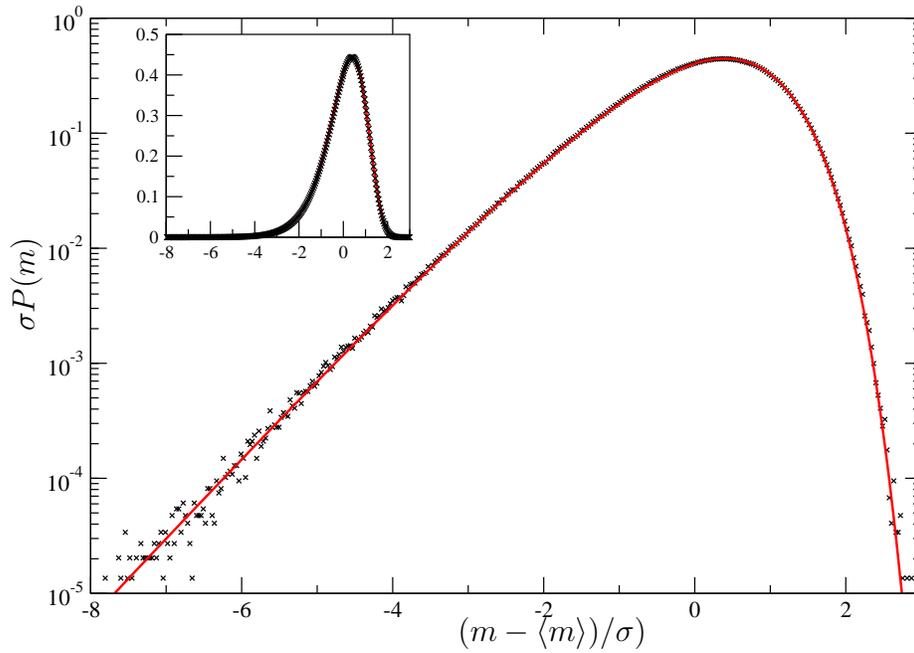


FIG. 2.6 – Distribution du paramètre d'ordre d'un sous-système de taille  $L = 32$  d'un système de taille  $L_0 = 128$ , avec des conditions aux bords fixes  $\sigma = 1$ , à la température  $T_c(L)$ , soumis à un champ magnétique  $H = 3.5 \times 10^{-3} J = H^*(L)$  ( $\times$ ). La courbe pleine correspond à la distribution BHP.

sous-système de taille  $L$  dans un système de plus grande taille<sup>8</sup>  $L_0$ . En appliquant là encore un champ magnétique  $H$  au système, à la température  $T_c(L)$ , la distribution de l'aimantation évolue rapidement, et la coupure provenant de la contrainte  $M \geq 0$  se décale rapidement vers les grandes valeurs négatives de  $\mu$ . Pour une valeur  $H^*(L)$  du champ magnétique, la PDF obtenue pour le modèle d'Ising est incroyablement proche de celle de BHP, comme le montre la figure 2.6. L'accord observé est confirmé par le calcul des coefficients d'asymétrie  $\gamma$  et d'aplatissement  $\kappa$  [Bury 1999] :

$$\begin{aligned}\gamma &= 0.890 \pm 0.01, \quad \gamma_{\text{BHP}} = 0.890, \\ \kappa &= 4.495 \pm 0.01, \quad \kappa_{\text{BHP}} = 4.489.\end{aligned}$$

À l'issue de cette première étude numérique, nous pouvons faire un bilan des observations. La première chose que l'on peut dire est qu'au-dessous de la température  $T_c(L)$ , la distribution du paramètre d'ordre du modèle d'Ising possède la même allure générale que la distribution BHP : même asymétrie, déviations positives par rapport à la moyenne beaucoup moins probables, relativement à l'écart-type, que les déviations négatives. Cet accord bien qu'approximatif est toutefois remarquable, car les deux modèles étant très différents, il n'est pas évident *a priori* que les deux distributions aient la même allure. Nous avons même constaté qu'il était possible d'améliorer considérablement l'accord en diminuant la valeur de  $P(M = 0)$ , en jouant sur différents paramètres, comme par exemple les conditions aux bords et l'application d'un champ magnétique. Autrement dit on peut contraindre le modèle d'Ising à se comporter comme le modèle XY dans le régime des ondes de spin, et le paramètre de contrôle est  $P(M = 0)$ . Toutefois l'existence même d'un minimum local de probabilité en  $m = 0$  indique que la distribution BHP ne décrit pas quantitativement bien les fluctuations d'aimantation du modèle d'Ising 2d, ce qui atténue le côté "universel" de la distribution BHP, proposé précédemment [Bramwell et al. 2000].

## 2.3 Criticalité des fluctuations à $T^*$

Dans la partie précédente nous avons défini la température  $T^*(L)$  donnant le meilleur accord avec la distribution, suivant le critère (2.4). La température  $T^*(L)$  ainsi définie étant plus basse que la température  $T_c(L)$ , on peut se demander si cette température est encore dans la région critique, et donc si les fluctuations correspondantes sont des fluctuations critiques. Une première façon de répondre à cette question consiste à étudier les variations de  $T^*(L)$  avec la taille du système. En utilisant l'algorithme Swendsen-Wang pour les simulations Monte Carlo, nous avons pu faire varier  $L$  entre 32 et 512 (en unité de pas de réseau). Pour chaque taille du système, on fait varier la température afin de trouver  $T^*(L)$ , en utilisant la définition (2.4). Les résultats montrent que  $T^*(L)$  se rapproche de  $T_c(\infty)$  quand  $L$  augmente. Plus précisément, comme le montre la figure 2.7, on a la loi d'échelle

$$|T_c(\infty) - T^*(L)| \propto L^{-1/\nu}, \quad (2.5)$$

---

<sup>8</sup>Si une telle étude peut paraître un peu torturée, elle n'est pas sans pertinence expérimentale. En effet, dans les expériences de mesure d'aimantation par diffusion de neutrons, on n'accède qu'à l'aimantation dans la zone éclairée par le faisceau de neutrons, qui est incluse dans le système total.

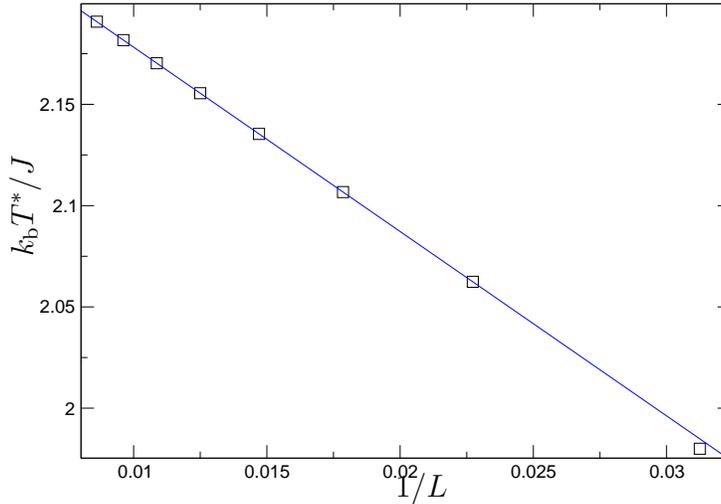


FIG. 2.7 – Évolution de  $T^*(L)$  avec  $1/L$ . La droite est le meilleur ajustement linéaire obtenu.

avec  $\nu \simeq 1$ , en bon accord avec la valeur attendue pour cet exposant pour le modèle d'Ising 2d. Cette loi d'échelle montre que  $T^*(L)$  est bien dans la région critique [Cardy 1996]. Une autre confirmation de la nature critique du phénomène observé vient de l'étude des fonctions de corrélation spin-spin, représentées pour différentes températures sur la figure 2.8. En utilisant l'expression des corrélations

$$G(r, L) = \frac{1}{r^\eta} e^{-r/\xi(L, T)}, \quad (2.6)$$

on peut alors estimer la longueur de corrélation  $\xi(L, T)$ . Le tableau 2.1 présente les valeurs de  $\xi(L, T^*(L))$  obtenues pour un système de taille  $L$  à la température  $T^*(L)$ .

L	32	36	40	44	52	56	64	128
$\xi(L)$	0.83	1.0	1.1	1.25	1.45	1.42	1.7	2.9
$\xi(L)/L$	0.026	0.028	0.027	0.028	0.028	0.025	0.026	0.026

TAB. 2.1 – Valeurs de  $\xi$  et  $\xi/L$  obtenues à  $T^*(L)$  pour différentes tailles du système, avec des conditions aux bords périodiques.

La première chose que l'on remarque est que la longueur de corrélation à  $T^*(L)$  est petite devant la taille du système. Cette observation a déjà été faite par Zheng et Trimper [Zheng et Trimper 2001], qui en concluait que le système ne saurait être critique à  $T^*(L)$

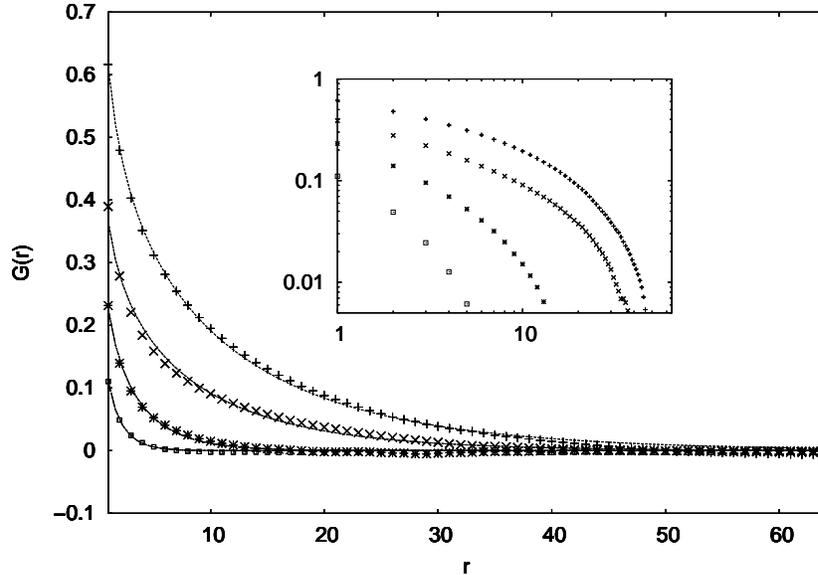


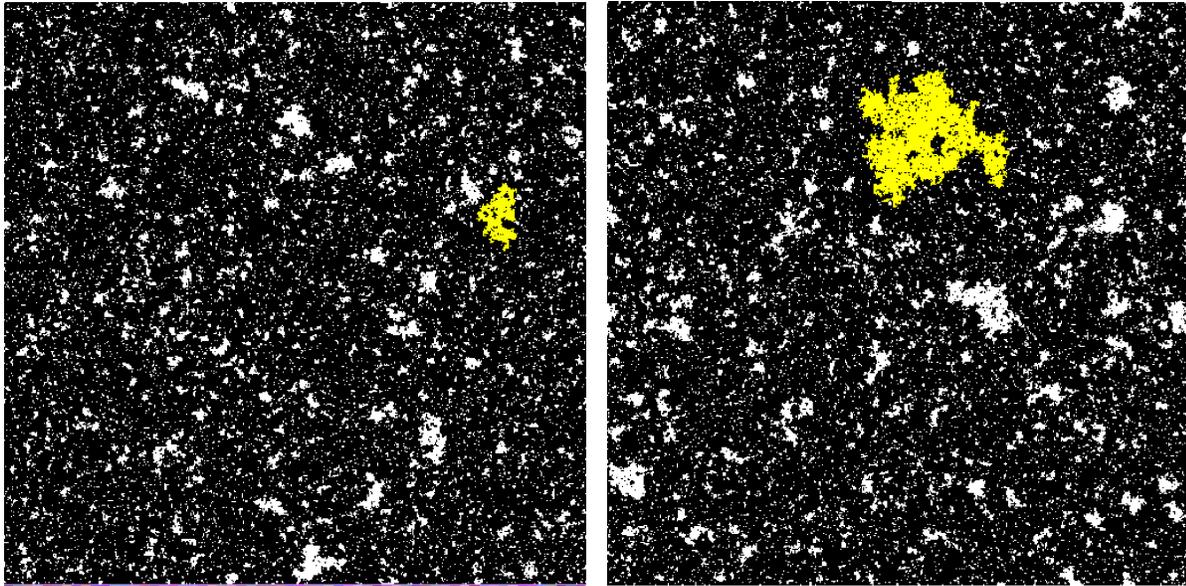
FIG. 2.8 – Fonctions de corrélation spin-spin pour  $L = 128$  et différentes températures :  $T = T_c(L) = 2.30J(+)$ ,  $2.27J(\times)$ ,  $2.24J(*)$  et  $T = T^*(L) = 2.17J(\square)$ . Les courbes en trait plein sont les meilleurs ajustements, obtenus à partir de (2.6).

avec une longueur de corrélation si faible. Toutefois on constate que dans une bonne approximation, le rapport de la longueur de corrélation sur la taille du système est en fait une constante! Ainsi, dans la limite thermodynamique, la longueur de corrélation diverge, ce qui montre que l'on a bien affaire à un phénomène critique, malgré la faible longueur de corrélation. Ce résultat est par ailleurs tout à fait compatible avec la loi d'échelle (2.5). Cette quantité petite mais néanmoins divergente joue un rôle très important dans la physique du système à  $T^*(L)$ . Ce sera en fait le point de départ de l'approche analytique qui sera présentée dans le chapitre suivant.

Nous pouvons donc conclure que les fluctuations du modèle d'Ising à  $T^*(L)$  sont bien de nature critique, comme le montrent la loi d'échelle vérifiée par  $T^*(L)$  et la divergence des corrélations dans la limite thermodynamique.

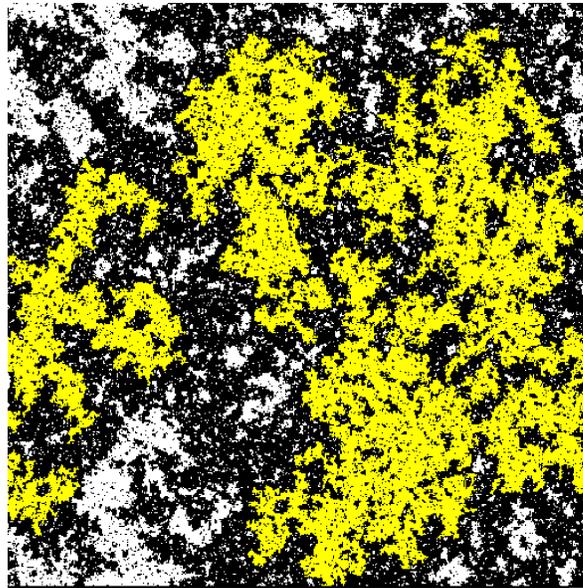
## 2.4 Propriétés physiques du système à $T^*(L)$

Après avoir défini  $T^*(L)$  et confirmé la criticalité du système à cette température, cette section cherche à caractériser quelques propriétés physiques associées à ce comportement. L'objectif est de donner une signification physique à  $T^*(L)$ , autre que le meilleur accord avec la distribution BHP.



(a) Configuration typique à  $T^*(L)$ .

(b) Évènement rare à  $T^*(L)$ , correspondant à un écart de l'aimantation de  $-4\sigma$  par rapport à leur valeur moyenne.



(c) Configuration typique à  $T_c(L)$

FIG. 2.9 – Différentes configurations d'un réseau de taille  $L = 512$ . Noter la présence d'un amas de taille bien plus grande que  $\xi^2$  dans la configuration extrême à  $T^*(L)$ .

### 2.4.1 Distribution de taille des amas

Un point important obtenu dans la section précédente est que la longueur de corrélation du système à  $T^*(L)$  diverge avec la taille du système, tout en restant deux ordres de gran-

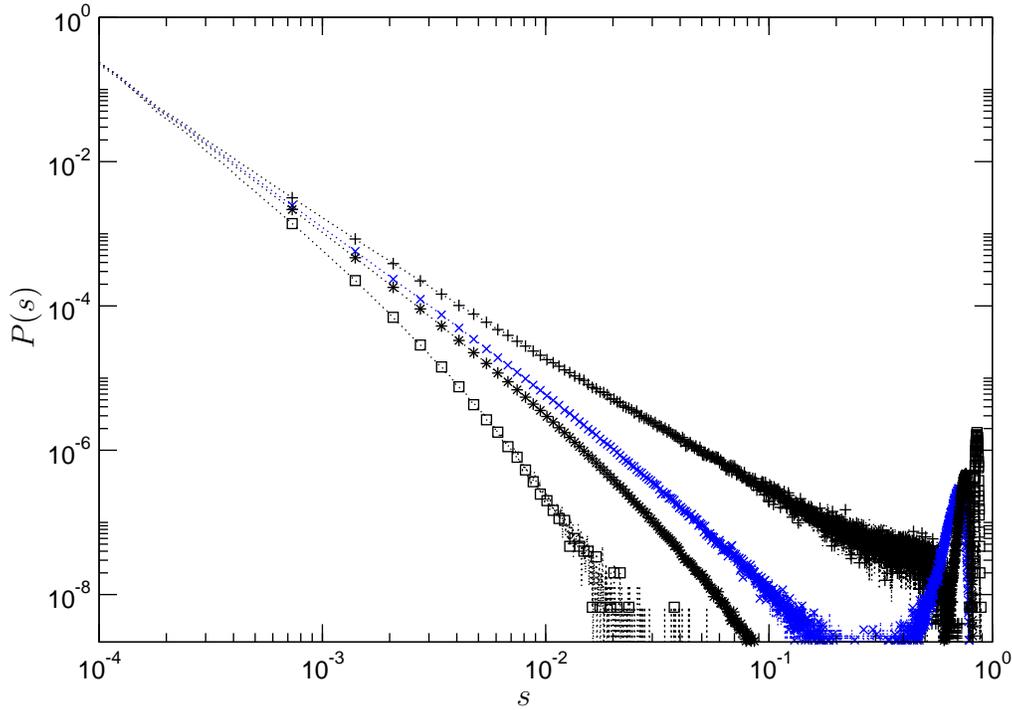


FIG. 2.10 – Distribution de taille relative des amas  $s = (\text{Nombre de sites dans l'amas})/L^2$ , pour un réseau de taille  $L = 128$ , en l'absence de champ magnétique, et pour différentes températures :  $T = 2.30J = T_c(L)(+)$ ,  $T = T^*(L) = 2.25J(\times)$ ,  $T = 2.22J(*)$ ,  $T = 2.13J(\square)$ .

deur plus petite. Ce comportement inhabituel doit avoir des conséquences sur les structures présentes dans le système à cette température. Dans le cas du modèle d'Ising, les structures naturelles sont les amas de spins parallèles. La définition précise d'un amas de spins n'est pas complètement évidente. Le plus simple est de définir comme amas un ensemble connexe de spins parallèles. Il apparaît toutefois que cette définition n'est pas satisfaisante, car elle surestime la taille des amas. La bonne façon de définir les amas est de considérer que deux spins parallèles ne sont dans le même amas qu'avec une certaine probabilité, dépendant de la température. Il s'agit en fait d'une conséquence directe des travaux de Fortuin et Kasteleyn, qui montrent qu'il est possible de représenter tous modèles de Potts par un problème de percolation, où la probabilité d'occupation d'un site est liée au hamiltonien du modèle de Potts [Kasteleyn et Fortuin 1969, Fortuin et Kasteleyn 1972, Hu 1984]. L'algorithme de Swendsen-Wang est la mise en œuvre numérique de cette représentation du modèle d'Ising

comme un problème de percolation [Landau et Binder 2000]. L'étude de la statistique des amas dans le modèle d'Ising est donc très facilement accessible en utilisant cet algorithme pour les simulations Monte Carlo : pour chaque réalisation on calcule la taille des amas construits et une moyenne sur un grand nombre<sup>9</sup> de réalisations est effectuée.

Étant donnée la valeur de la longueur de corrélation à  $T^*(L)$  on pourrait s'attendre à ce que la gamme des tailles d'amas possibles soit très resserrée au voisinage de  $\xi^2/L^2$ . Les différentes configurations du réseau présentées sur la figure 2.9 montrent qu'il n'en est rien ! La figure 2.9(a) correspond à un système d'aimantation proche de la valeur typique : on y voit clairement une grande disparité de tailles, avec une coupure pour une taille maximale, plus petite que la taille du système. Hormis cette coupure, il ne semble pas y avoir de taille caractéristique des amas. Sur la figure 2.9(b) est représentée une configuration où l'aimantation s'écarte de  $4\sigma$  de la valeur moyenne : cet écart important est dû à la présence d'un amas de grande taille. Cette situation est très différente de ce que l'on attendrait pour un système décorréolé : dans ce cas en effet, la configuration correspondant à un tel écart présenterait un grand nombre d'amas décorréolés, de taille typique  $\xi^2$ . Cela montre clairement qu'à la température  $T^*(L)$  la longueur de corrélation, reliée à la taille moyenne des amas, est différente de la taille typique de ces derniers, et que de grands amas ne sont pas exclus. De tels amas sont des événements rares, mais pas au point d'être complètement irrelevants pour le système. Cette situation est très différente de celle observée à  $T_c(L)$ , comme le montre la figure 2.9(c). Dans ce cas les structures corrélées de taille comparable à celle du système ne sont pas rares.

Cette analyse est confirmée par le calcul de la distribution de taille relative des amas,  $s = \frac{n}{L^2}$ , où  $n$  est le nombre de sites dans l'amas. Les résultats obtenus pour un système de taille  $L = 128$  sont présentés sur la figure 2.10, pour différentes températures au-dessous de la température  $T_c(L)$ . Dans cette gamme de températures, l'aimantation est non nulle : le plus grand amas est celui qui donne l'orientation de l'aimantation totale. Plus concrètement, cet amas correspond au fond noir des figures 2.9. Les statistiques présentées sur 2.10 incluent la contribution de cet amas dominant. Comme on s'y attend, lorsque l'on approche  $T_c(L)$ , la probabilité de trouver de grands amas augmente et la distribution se rapproche d'une loi de puissance tronquée au voisinage de  $s = 1$ . D'autre part, pour les températures  $T < T^*(L)$ , on observe une séparation d'échelle et l'apparition d'un gap entre l'amas dominant et le second plus gros amas. Pour  $T \geq T^*(L)$ , le gap se referme et les statistiques de l'amas dominant et du second plus gros amas se mélangent. Dans ce cas les amas de spins  $+1$  et de spins  $-1$  sont à peu près de la même taille, et la probabilité d'avoir une aimantation totale nulle devient significativement non nulle. Ceci est en accord avec les observations sur la distribution de l'aimantation, où l'on a remarqué que pour  $T > T^*(L)$ , le minimum de probabilité correspondant à  $m = 0$  rentre dans la fenêtre accessible aux simulations numériques et aux expériences, et que l'aile de la PDF n'est plus correctement approximée par une exponentielle.

À  $T^*(L)$ , la distribution de la taille des amas est bien approchée par une loi de puissance, jusqu'à  $s \simeq 0.02$ . Au-delà, comme on peut s'y attendre, on observe des corrections

---

<sup>9</sup>De l'ordre de  $10^7$  réalisations.

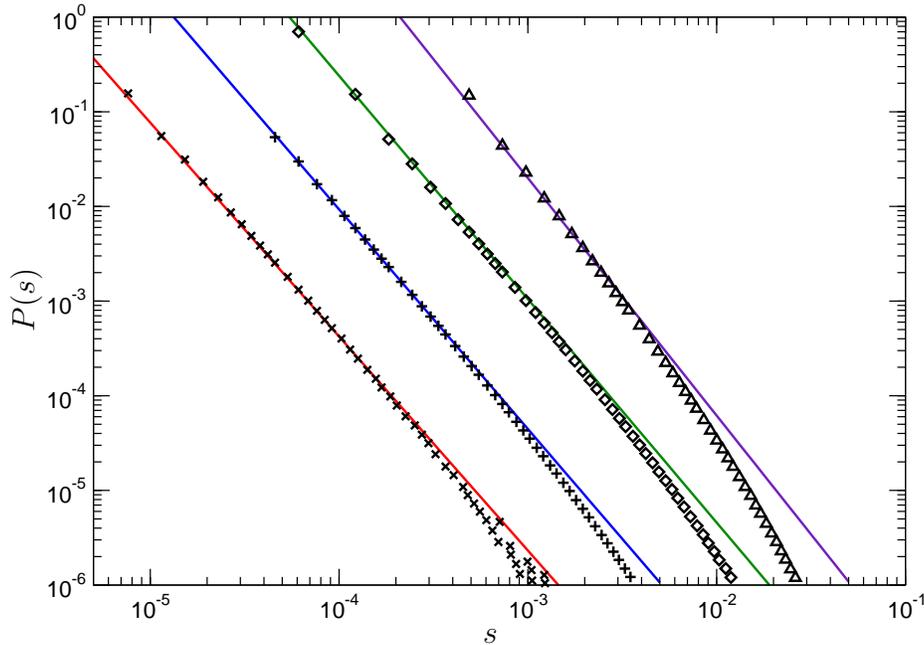


FIG. 2.11 – Distribution de taille relative des amas  $s = (\text{Nombre de sites dans l'amas})/L^2$ , à  $T^*(L)$ , en l'absence de champ magnétique, et pour différentes tailles de système :  $L = 64(\triangle)$ ,  $128(\diamond)$ ,  $256(+)$ ,  $512(\times)$ .

à cette loi d'échelle. Les différentes distributions obtenues à  $T^*(L)$  pour différentes tailles de système entre  $L = 64$  et  $L = 512$  sont représentées sur la figure 2.11. On constate que pour  $L = 512$ , la loi de puissance s'étend sur six ordres de grandeur de probabilité, et trois pour la taille du système. D'autre part l'exposant  $\tau$  de cette loi de puissance dépend de la taille du système : il vaut par exemple  $\tau = 2.1 \pm 0.1$  pour le plus grand système étudié ici. Ce résultat semble en accord avec la valeur obtenue pour l'exposant des amas percolants,  $\tau \simeq 2.1$  [Stauffer et Aharony 1992, Cambier et Nauenberg 1986, Stella et Vanderzande 1989, Duplantier et Saleur 1989], confirmant la nature critique des fluctuations étudiées.

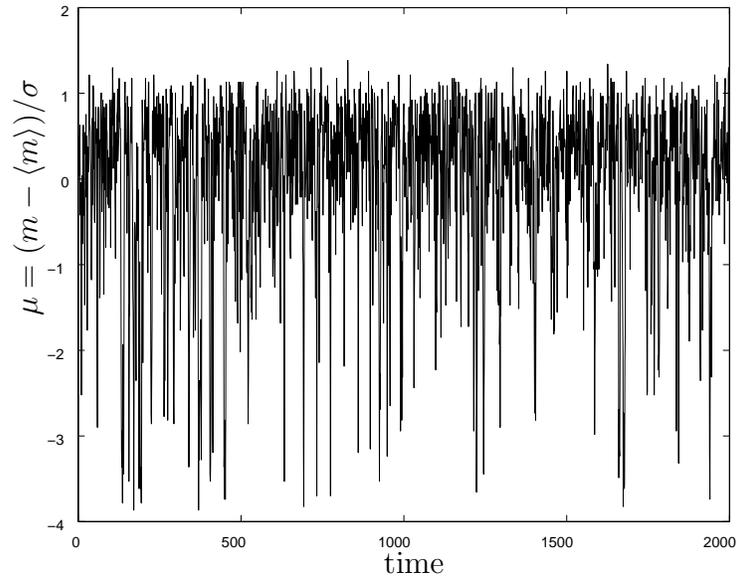
Dans cette section nous avons montré que les amas dans le modèle d'Ising à  $T^*(L)$  ont un comportement dépourvu d'échelle caractéristique, étonnamment associé à une séparation d'échelle : si les tailles de l'amas moyen, du second plus gros amas et de l'amas dominant sont fixées par la taille du système, leurs amplitudes relatives sont suffisamment différentes pour considérablement limiter les interactions entre ces trois échelles. Ce phénomène est analogue à ce qui se passe dans le modèle XY à basse température. Dans ce régime en effet

le rapport  $\sigma/\langle m \rangle$  est indépendant de la taille du système,  $\sigma/\langle m \rangle = AT/J$  avec  $A \simeq 0.04$  [Archambault et al. 1997] : on a des fluctuations critiques dont l'amplitude devient nulle dans la limite où la température tend vers zéro. Ainsi ces fluctuations critiques ne sont pas suffisantes pour permettre au système d'explorer tout l'espace des phases, et celui-ci n'explore que la région proche de la valeur moyenne de l'aimantation. Dans le cas du modèle d'Ising, les fluctuations sont critiques, mais là encore d'amplitudes trop faibles pour que le système explore tout l'espace des phases, et que les effets de la topologie de l'espace des phases se fassent sentir. Ce point semble essentiel pour la compréhension de l'apparente généralité de la distribution BHP, et sera au cœur de l'approche analytique développée dans le chapitre suivant.

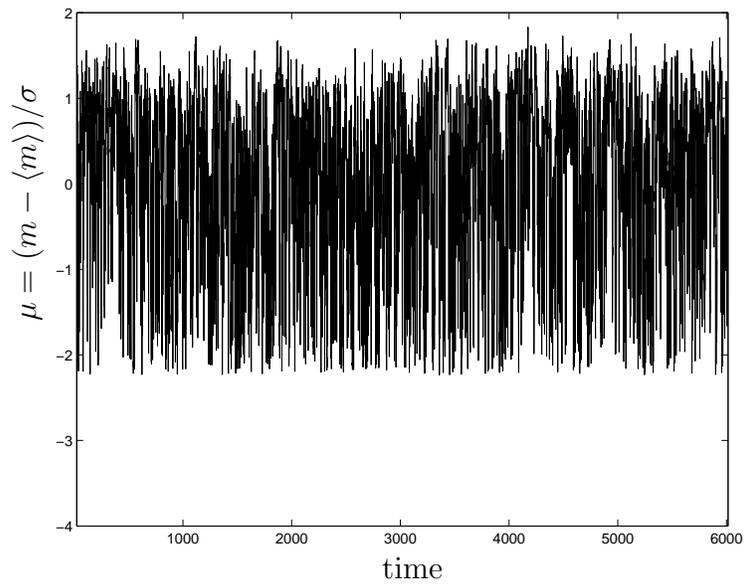
### 2.4.2 Intermittence

La figure 2.12 montre les variations de l'aimantation réduite  $\mu = (m - \langle m \rangle)/\sigma$  d'un système de taille  $L = 64$ , au cours d'une simulation Monte Carlo Métropolis, pour deux températures différentes. La grande asymétrie du signal à  $T^*(L)$  est évidente sur la figure 2.12(a). Ce signal est par ailleurs tout à fait semblable au signal mesuré pour les fluctuations de puissance injectée dans un écoulement turbulent par [Labbé et al. 1996]. Dans ces deux systèmes on retrouve en effet de grandes déviations de la grandeur globale étudiée par rapport à l'écart-type, comportement qualifié d'intermittent. Sur la figure 2.12(b) est représenté l'évolution Swendsen-Wang du même système, pris cette fois à la température  $T_c(L)$ . On voit alors immédiatement que la gamme des fluctuations de l'aimantation réduite est considérablement plus petit à  $T_c(L)$ . Ceci peut paraître surprenant du point de vue de la thermodynamique. En effet, la température critique est définie comme le maximum de la susceptibilité; elle correspond donc au maximum de l'écart-type des fluctuations [Goldenfeld 1992]. Dans ces conditions les grandes déviations par rapport à la moyenne sont coupées par les bords de l'espace des phases dans lequel les fluctuations prennent place : le support de la distribution  $\mathcal{E}$  est alors relativement étroit. Jusqu'à  $T^*(L)$  au contraire, l'écart-type des fluctuations est suffisamment faible pour que le système ne soit pas affecté par l'extension finie de  $\mathcal{E}$ . Autrement dit les fluctuations ne permettent pas au système d'explorer suffisamment l'espace pour atteindre le sommet de la barrière de potentiel en  $M = 0$  : pour le système tout se passe comme si cette barrière était de hauteur infinie et que l'espace des phases n'était pas symétrique. Le cas du modèle XY dans la limite basse température correspond précisément à ce cas [Archambault et al. 1997].

À l'issue de cette discussion il est possible de donner une caractéristique physique intrinsèque à la température  $T^*(L)$ . Si l'on prend une définition relativement faible de l'intermittence comme la possibilité pour le système d'avoir des fluctuations par rapport à la valeur moyenne sur l'échelle de l'écart-type qui sont importantes (par rapport à un comportement gaussien), alors le comportement le plus intermittent est atteint pour la température  $T^*(L)$ , et non à  $T_c(L)$ .



(a) Température  $T = T^*(L)$ .



(b) Température  $T = T_c(L)$ .

FIG. 2.12 – Évolutions Métropolis de l'aimantation d'un système de taille  $L = 64$ . On remarque la plus grande asymétrie du signal à  $T^*(L)$  qu'à  $T_c(L)$ .

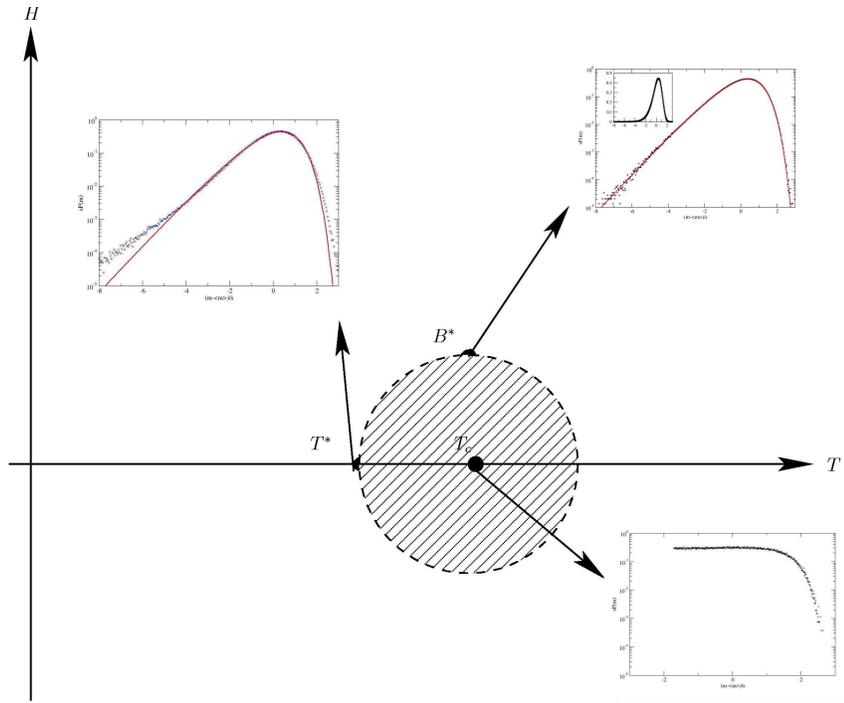


FIG. 2.13 – Résumé des distributions obtenues suivant le point du diagramme de phase du modèle d'Ising 2d considéré. La zone hachurée représente la région critique en taille finie.

## 2.5 Conclusion

L'étude numérique rapportée dans ce chapitre a permis de montrer qu'il était possible de retrouver, dans le cas du modèle d'Ising 2d, une distribution des fluctuations semblable à la distribution BHP, comme le résume la figure 2.5. En général cependant l'accord est loin d'être parfait, ce qui exclut la possibilité que les PDFs correspondent à la même fonction. L'universalité de la distribution BHP n'est donc pas établie. Ce constat légèrement négatif ne doit pas pour autant atténuer le fait que la distribution obtenue à  $T^*(L)$ , et même d'avantage à  $H^*(L)$  à la même allure que BHP : forte asymétrie, déviations négatives par rapport à la moyenne plus proche d'une exponentielle que d'une distribution gaussienne et déviations positives par rapport à la moyenne très rapidement atténuées. Les écarts étant qui plus est relativement limités dans la partie accessible expérimentalement, la distribution BHP peut être considérée comme une très bonne approximation dans certains cas. Enfin nous avons aussi montré que le point donnant le meilleur accord avec la distribution BHP correspond au maximum d'intermittence du système.

S'il semble clair que BHP n'est pas une distribution "universelle" applicable à toute grandeur globale dans un système corrélé, il reste encore à comprendre pourquoi tant de systèmes différents sont approximativement décrits par cette distribution. L'étude du modèle d'Ising a permis de soulever deux points importants pour la compréhension de ce fait remarquable. Le premier est l'importance de la probabilité d'avoir une aimantation nulle,  $P(M = 0)$ . Nous

avons en effet vu qu'en modifiant cette valeur, il était possible d'améliorer considérablement l'accord avec la distribution BHP. Au-dessous de  $T^*(L)$ , cette valeur est non nulle, mais suffisamment petite pour que le système reste localisé au voisinage d'un minimum. Au-dessus de  $T^*(L)$  la grande valeur de l'écart-type autorise le système à percevoir les bords de l'espace des phases. Le comportement à  $T^*(L)$  est le seuil où l'écart-type est suffisamment petit pour que le système ne voit pas les bords de l'espace des phases, mais où les fluctuations sont suffisamment grandes pour qu'une approximation quadratique du potentiel au voisinage du minimum d'énergie ne soit pas suffisant. Autrement dit, à  $T^*(L)$ , on observe des fluctuations importantes autour de la valeur typique de l'aimantation,  $M_{\text{typ}} = \langle m \rangle$ , mais trop faibles pour que la probabilité d'avoir  $M = 0$  soit significativement non nulle. L'autre point important que nous avons noté est que, bien qu'à  $T^*(L)$  le rapport de la longueur de corrélation sur la taille du système soit constant, il reste petit, de l'ordre de 3%.

Ces observations issues de l'étude numérique sont les deux points essentiels permettant d'avoir une idée sur l'origine de l'analogie avec la distribution BHP, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.



# Chapitre 3

## Origine de l’analogie avec la distribution BHP dans le cas du modèle d’Ising

**But du chapitre :** *Dans ce chapitre, on se propose de trouver l’origine de la similitude entre la distribution de l’aimantation du modèle d’Ising à  $T^*(L)$  et la distribution BHP. Les conclusions de l’étude numérique serviront de base à cette étude analytique du phénomène. En étudiant l’origine de l’apparente universalité de BHP dans le cas particulier du modèle d’Ising, on espère trouver certains arguments généraux, et préciser les questions encore ouvertes.*

### 3.1 Premières étapes

Dans cette section nous allons travailler sur l’expression de la fonction de partition du modèle d’Ising, afin d’obtenir une représentation du modèle, qui sera à la base du travail reporté ici.

#### 3.1.1 Représentation par des spins continus

Dans tout ce chapitre, on considère le modèle d’Ising 2d sur un réseau carré de taille  $L \times L$ , avec des conditions aux bords périodiques :  $\sigma_{mL+1} = \sigma_{m1}$  et  $\sigma_{L+1n} = \sigma_{1n}$ . On applique un champ magnétique  $H$  sur tout le réseau. On note  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  les deux vecteurs directeurs du réseau. Le Hamiltonien s’écrit alors :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - H \sum_{i=1}^N \sigma_i. \quad (3.1)$$

La somme porte cette fois encore sur les sites plus proches voisins. La fonction de partition s'obtient en sommant sur toutes les configurations de spins le poids de Boltzmann correspondant. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\{\sigma_j\}} \exp \left( \beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta H \sum_{i=1}^N \sigma_i \right), \\ &= \sum_{\{\sigma_j\}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i K_{ij} \sigma_j + \beta H \sum_{i=1}^N \sigma_i \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

où a été introduite la matrice des couplages  $\mathbf{K}$  définie par :

$$K_{ij} = K \sum_{\nu=\pm e_x, \pm e_y} \delta_{ji+\nu}. \quad (3.3)$$

Dans un premier temps on souhaite passer de spins discrets  $\sigma = \pm 1$  à des variables de spins continus  $\phi \in \mathbb{R}$ . Pour cela on peut considérer que l'expression (3.2) est le résultat d'une intégrale gaussienne, en utilisant que pour toute matrice  $\mathbf{M}$  inversible :

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left( -\frac{1}{2} {}^t \phi \mathbf{M}^{-1} \phi + {}^t \mathbf{S} \cdot \phi \right) = (\det 2\pi \mathbf{M})^{1/2} \exp \left( \frac{1}{2} {}^t \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{S} \right), \quad (3.4)$$

avec  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^N$  et  $\phi \in \mathbb{R}^N$ .

Cette transformation est connue sous le nom de transformation d'Hubbard-Stratonovitch [ZJ 2004]. Pour cela il est cependant nécessaire que la matrice des couplages  $\mathbf{K}$  soit inversible, ce qui n'est pas le cas sous la forme (3.3). En effet les valeurs propres de  $\mathbf{K}$  sont données par

$$k_{\mathbf{q}} = 2K(\cos q_x + \cos q_y), \quad (3.5)$$

où  $q_x$  et  $q_y$  sont des réels. Le déterminant de  $\mathbf{K}$  peut donc s'annuler. On peut cependant contourner cette difficulté [Parisi 1998], par exemple en ajoutant une constante au hamiltonien. Cette constante ne fait que changer le zéro d'énergie, ce qui ne change pas la physique. On écrit alors

$$K_{ij} = K \left( 2\lambda \delta_{ij} + \sum_{\nu=\pm e_x, \pm e_y} \delta_{ji+\nu} \right), \quad (3.6)$$

avec  $\lambda > 2$ . Les valeurs propres sont alors

$$k_{\mathbf{q}} = 2K(\lambda + \cos q_x + \cos q_y) > 0. \quad (3.7)$$

En appliquant la transformation d'Hubbard-Stratonovitch avec la matrice  $\mathbf{S}$  définie par

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

on peut alors écrire la fonction de partition sous la forme :

$$\mathcal{Z} = (\det 2\pi \mathbf{K})^{-1/2} \int \mathcal{D}\phi \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \phi_i K_{ij}^{-1} \phi_j + \sum_{i=1}^N \log \cosh(\phi_i + \beta H) \right). \quad (3.9)$$

On peut enfin faire le changement de variables  $\phi_i \rightarrow \sum_{j=1}^N K_{ij} \phi_j$  pour obtenir une expression plus appropriée :

$$\mathcal{Z} = \left( \frac{\det \mathbf{K}}{2\pi} \right)^{1/2} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \phi_i K_{ij} \phi_j + \sum_{i=1}^N \log \cosh \left( \sum_{j=1}^N K_{ij} \phi_j + \beta H \right) \right] \quad (3.10)$$

Après cette transformation, l'aimantation totale est la somme de contributions locales  $m_i$ , analogues au  $\sigma_i$  du modèle de départ. La valeur locale  $\sigma_i$  est définie par

$$m_i = \tanh \left( \sum_{j=1}^N K_{ij} \phi_j + \beta H \right). \quad (3.11)$$

Il faut souligner que jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse simplificatrice. L'expression finale (3.10) est la formulation du modèle d'Ising 2d comme une théorie statistique des champs sur réseau, ce qui permet d'utiliser tous les outils de la théorie des champs.

### 3.1.2 Développement perturbatif

Après ces considérations générales, nous allons à présent nous concentrer sur notre problème, c'est-à-dire la recherche de l'origine de la similitude de la PDF du modèle d'Ising à  $T^*(L)$  avec la distribution BHP. Les simulations numériques du chapitre précédent [Clusel et al. 2004] nous serviront de guide pour faire un certain nombre d'hypothèses. La première remarque que nous pouvons faire est qu'en nous intéressant aux fluctuations de l'aimantation, nous étudions des fluctuations à grande échelle. Autrement dit la grandeur étudiée est moyennée sur tout le réseau. Pour déterminer quelle hypothèse il est possible de faire pour étudier ces fluctuations à grande échelle, nous allons généraliser le critère de Ginzburg [Goldenfeld 1992].

Dans le cadre des phénomènes critiques, la théorie de Landau est introduite en moyennant l'aimantation locale sur des boules dont le rayon est la longueur de corrélation  $\xi$ . On fait ensuite une approximation quadratique, valide uniquement si

$$R_\xi = \frac{\int_a^\xi G(r) d^d r}{\int_0^\xi M(r) d^d r} \ll 1. \quad (3.12)$$

En utilisant les lois d'échelle usuelles, on montre alors que ce critère n'est pas satisfait en dimension  $d < 4$  et on conclue habituellement qu'un développement perturbatif ne permet de capturer le comportement physique du système. Considérons maintenant le cas où l'on

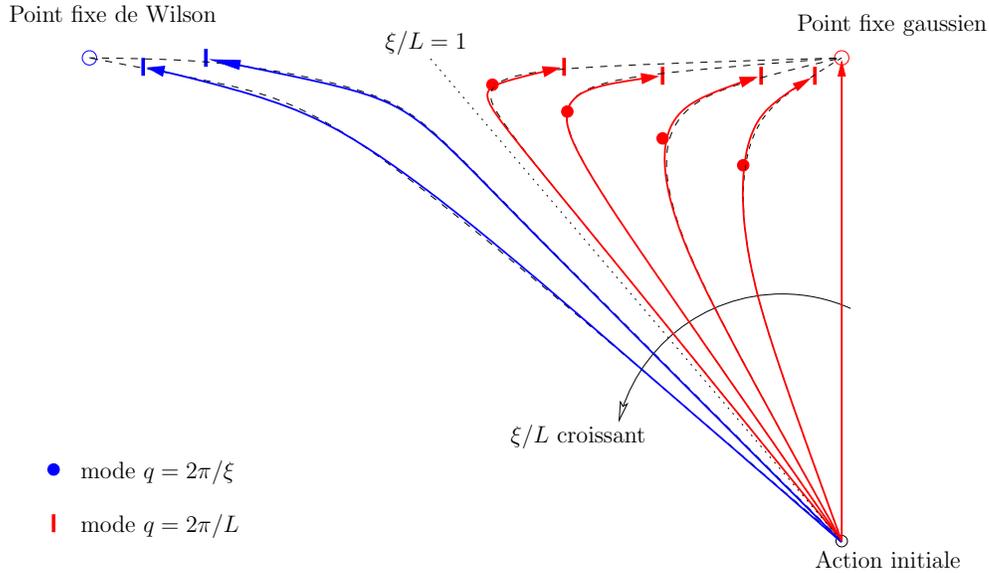


FIG. 3.1 – Schémas de flots obtenus par intégrations successives sur les modes de Fourier, depuis  $2\pi/a$  jusqu'à  $2\pi/L$ . Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du rapport  $\xi/L$ . Ce rapport augmente dans le sens de la flèche. Dans les cas  $\xi < L$ , on intègre jusqu'au mode  $q = 2\pi/L$ , alors que dans le cas  $\xi > L$ , on s'arrête au mode  $q = 2\pi/\xi$ .

fait des moyennes sur une boule de rayon  $l > \xi$ . On peut de la même manière définir un critère de Ginzburg à l'échelle  $l$  suivant

$$R_l = \frac{\int_a^l G(r) d^d r}{\int_0^l M(r) d^d r}. \quad (3.13)$$

Cette fois encore l'hypothèse d'échelle permet d'expliciter ce critère, et l'on obtient

$$R_l = \frac{\sigma^2}{M_l^2} = A \left( \frac{\xi}{l} \right)^d, \quad (3.14)$$

en notant  $M_l$  la moyenne de l'aimantation sur la boule de rayon  $l$ . La constante  $A$  est d'ordre 1 pour le modèle d'Ising. On voit alors que si le critère de Ginzburg à l'échelle  $\xi$  n'est pas satisfait, celui à l'échelle  $l$  peut l'être, à condition d'avoir  $\xi/l \ll 1$ .

L'étude numérique du chapitre précédent a permis d'observer qu'au voisinage de  $T^*(L)$ , la longueur de corrélation  $\xi$  vérifie  $\xi/L = c$ , où  $c \simeq 0.03$ . Autrement dit, le critère de Ginzburg à l'échelle intégrale  $l = L$  est satisfait, ce qui indique qu'un développement perturbatif doit permettre de décrire convenablement les fluctuations de l'aimantation totale au voisinage de  $T^*(L)$ .

On peut comprendre cette idée de la façon suivante<sup>10</sup>. On commence par l'aimantation au site  $i$ ,  $m_i$ , puis on moyenne cette aimantation sur des boules de rayon de plus en plus grand.

<sup>10</sup>Je remercie Pierre Pujol pour une discussion très éclairante sur ce point.

Dans l'espace de Fourier, cela revient à intégrer les modes de plus grand vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  : on commence par le mode  $q = 2\pi/a$ , en notant  $a$  le pas du réseau, et on intègre progressivement jusqu'au mode  $q = 2\pi/L$ . On peut ainsi construire un flot qui part de l'action initiale, et qui indique l'évolution de l'action effective avec le nombre de modes intégrés. Des exemples de tels flots sont schématisés sur la figure 3.1. Dans le cas où  $\xi < L$ , lorsque l'on intègre les modes  $2\pi/L < q < 2\pi/\xi$ , le flot se rapproche du point fixe de Wilson, et le système est de moins en moins bien décrit par une action gaussienne. Cependant, lorsque l'on commence à intégrer les modes  $q < 2\pi/\xi$ , le flot s'écarte du point de Wilson, et se rapproche du point gaussien. Dans la première partie du flot, l'approximation gaussienne n'est pas correcte, ce qui correspond au fait que  $R_\xi \gg 1$ . C'est cette première partie, obtenue en moyennant sur  $l = \xi$ , qui contient les exposants critiques du modèle, que l'on peut calculer à l'aide du groupe de renormalisation. Par contre, dans la seconde partie du flot, on a  $R_l \ll 1$  ce qui permet de faire un développement perturbatif pour approcher l'action effective à l'échelle  $l$ . On perd alors l'information sur les exposants critiques du modèle, qui sont remplacés par ceux de type champ moyen. Dans le cas où  $\xi > L$ , cette seconde phase n'existe pas et quelque soit l'échelle des fluctuations qui nous intéresse, un développement perturbatif n'est pas autorisé. Après cette discussion, en utilisant l'observation numérique qu'à  $T^*(L)$   $\xi/L \ll 1$ , on s'attend à ce qu'un développement perturbatif soit suffisant pour obtenir la distributions des fluctuations d'aimantation à l'échelle intégrale. Ce faisant on perd la trace des exposants critiques caractéristiques du modèle d'Ising, qui sont remplacés par ceux de type champ moyen. Nous reviendrons plus tard sur ce point, qui est la cause essentielle de l'apparente universalité de la distribution BHP.

Nous allons donc séparer la valeur moyenne spatiale  $\phi_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i$  et les fluctuations spatiales  $\theta_i = \phi_i - \phi_0$ , et supposer que  $\theta_i \ll \phi_0$ . En développant l'expression (3.10) à l'ordre deux en les fluctuations  $\theta_i$ , et prenant la transformée de Fourier de ces variables,

$$\theta_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\mathbf{q} \in \bar{\Lambda}} \theta_{\mathbf{q}} e^{-i(q_x i_x + q_y i_y)}, \quad (3.15)$$

on obtient finalement :

$$\mathcal{Z} = \left( \frac{\det \mathbf{K}}{2\pi} \right)^{1/2} \int d\phi_0 \prod_{\mathbf{q} \in S_1} d\theta_{\mathbf{q}} d\theta_{-\mathbf{q}} \exp \mathcal{S}[\phi_0, \theta_{\mathbf{q}}], \quad (3.16)$$

$$\mathcal{S}[\phi_0, \theta_{\mathbf{q}}] = \mathcal{S}_0(\phi_0) - \sum_{\mathbf{q} \in S_1} G_{\mathbf{q}}^{-1} \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}}, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{S}_0(\phi_0) = N \left[ -K(D + \lambda) \phi_0^2 + \log \cosh(2K(D + \lambda) \phi_0 + \beta H) \right], \quad (3.18)$$

où l'ensemble  $S_1$  est l'ensemble des points  $(q_x, q_y)$  de la zone de Brillouin tels que  $0 \leq q_x \leq \frac{L-1}{2}$  et  $0 \leq q_y \leq \frac{L-1}{2}$ . Le propagateur  $G_{\mathbf{q}}$  qui apparaît dans l'action (3.17) est défini par

$$G_{\mathbf{q}}^{-1} = k_{\mathbf{q}} [1 - (1 - \mathcal{T}^2) k_{\mathbf{q}}], \quad (3.19)$$

$$\text{avec } \mathcal{T} = \tanh(2K(D + \lambda) \phi_0 + \beta H). \quad (3.20)$$

Enfin l'aimantation instantanée , définie par

$$m_{\text{inst}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i, \quad (3.21)$$

s'obtient à partir de l'expression de  $m_i$  (3.11) développée à l'ordre deux, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} m_{\text{inst}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \tanh(2K(D + \lambda)\phi_0 + \beta H) + (1 - \mathcal{T}^2) \sum_{j=1}^N K_{ij}\phi_j - \mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \left( \sum_{j=1}^N K_{ij}\phi_j \right)^2 \right] \\ &= \mathcal{T} - \mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q} \in S_1} k_{\mathbf{q}}^2 \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

À ce stade, on peut faire un changement d'échelle en incluant une partie des  $k_{\mathbf{q}}$  dans la définition des variables  $\theta_{\mathbf{q}}$ ,  $\sqrt{k_{\mathbf{q}}}\theta_{\mathbf{q}} \rightarrow \theta_{\mathbf{q}}$ . Le jacobien de cette transformation compense le déterminant de la matrice des couplages en facteur dans l'expression (3.10), et permet de simplifier les expressions du propagateur et de l'aimantation instantanée . On trouve alors :

$$\mathcal{Z} = (2\pi)^{-N/2} \int d\phi_0 \prod_{\mathbf{q} \in S_1} d\theta_{\mathbf{q}} d\theta_{-\mathbf{q}} \exp \mathcal{S}[\phi_0, \theta_{\mathbf{q}}], \quad (3.23)$$

$$\mathcal{S}[\phi_0, \theta_{\mathbf{q}}] = \mathcal{S}_0(\phi_0) - \sum_{\mathbf{q} \in S_1} G_{\mathbf{q}}^{-1} \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}}, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{S}_0(\phi_0) = N \left[ -K(D + \lambda)\phi_0^2 + \log \cosh (2K(D + \lambda)\phi_0 + \beta H) \right], \quad (3.25)$$

$$G_{\mathbf{q}}^{-1} = 1 - (1 - \mathcal{T}^2)k_{\mathbf{q}}, \quad (3.26)$$

$$m_{\text{inst}} = \mathcal{T} - \mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q} \in S_1} k_{\mathbf{q}} \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}}. \quad (3.27)$$

L'ensemble de ces expressions constitue la base de l'étude de la distribution du paramètre d'ordre dans le modèle d'Ising. Si l'on fait l'hypothèse que les fluctuations spatiales sont négligeables, la valeur de  $\phi_0$  est donnée par le point-col de l'action (3.25), qui redonne l'équation du champ moyen :

$$\phi_0 = \tanh (2K(D + \lambda)\phi_0 + \beta H). \quad (3.28)$$

La température critique, en champ nul, est alors donnée par

$$T_c^{\text{mf}}/J = 2(D + \lambda). \quad (3.29)$$

Il peut paraître surprenant que cette température dépende la constante  $\lambda$  alors que celle-ci fixe simplement la référence d'énergie. En fait il s'agit d'un *artefact* dû au développement perturbatif : si l'on resomme tous les termes de la série perturbative, la dépendance en  $\lambda$  disparaîtrait [Parisi 1998]. Dans ce qui va suivre, on prendra  $T_c^{\text{mf}}$  comme référence de

température.

Nous avons aussi limité le développement des fluctuations à l'ordre deux, ce qui conduit au propagateur gaussien (3.26). On pourrait toutefois aller à des ordres supérieurs et resommer certains graphes, sans pour autant changer les résultats. Par exemple, si l'on va jusqu'à l'ordre 4, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = (2\pi)^{-N/2} \int d\phi_0 \prod_{q \in S_1} d\theta_q d\theta_{-q} \exp \left( \mathcal{S}_0(\phi_0) \right. \\ \left. - \sum_{q \in S_1} Gq^{-1} \theta_q \theta_{-q} - \frac{1}{12} (1 - \mathcal{T}^2) (1 - 3\mathcal{T}^2) \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}_i \in S_1} W(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \theta_{\mathbf{q}_1} \theta_{\mathbf{q}_2} \theta_{\mathbf{q}_3} \theta_{-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3} \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec  $W(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \sqrt{k_{\mathbf{q}_1} k_{\mathbf{q}_2} k_{\mathbf{q}_3} k_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3}}$ . En utilisant l'équation de Dyson [Mattuck 1992] à l'ordre des graphes à une boucle, on obtient alors le propagateur renormalisé :

$$(G_{\mathbf{q}}^r)^{-1} = 1 - (1 - \mathcal{T}^2) [1 - (1 - 3\mathcal{T}^2)G] k_{\mathbf{q}} \underset{q \rightarrow 0}{\sim} M_r^2 + q^2, \quad (3.31)$$

$$\text{avec } G = \frac{2}{N} \sum_{q \in S_1} k_q G_q. \quad (3.32)$$

Ainsi en poussant le développement à des ordres plus élevés, on change uniquement la forme précise du propagateur gaussien, mais pas son comportement près de  $q = 0$ , où il est toujours de la forme (3.31).

L'hypothèse forte que nous avons faite dans cette partie est la séparation des fluctuations de la valeur moyenne spatiale, qui conduit au développement perturbatif. Dans la suite cette hypothèse sera appelée "hypothèse statique"<sup>11</sup>. L'ordre du développement lui-même n'est pas très important car il ne change pas la forme de l'action que nous avons obtenue (3.24). À l'issue de ce travail sur la fonction de partition du modèle d'Ising, nous avons obtenus les expressions (3.24,3.25,3.26,3.27), qui sont le point de départ pour comprendre l'analogie entre la distribution de l'aimantation dans le modèle d'Ising pour  $T \lesssim T_c(L)$  et la distribution BHP.

## 3.2 Étude dynamique des fluctuations

### 3.2.1 Pourquoi une étude dynamique

Dans toute la section précédente nous avons travaillé sur la fonction de partition du système en utilisant les outils habituels de la physique statistique d'équilibre. Comme nous l'avons déjà dit, pour un modèle d'Ising de taille fini, il n'y a pas de brisure de symétrie et la moyenne de Gibbs de l'aimantation est nulle. Nous avons par ailleurs vu avec la figure 2.2 que la dynamique non-locale de Swendsen-Wang reproduit bien cette propriété d'équilibre.

<sup>11</sup>Par opposition à l'hypothèse dynamique que l'on verra plus tard.

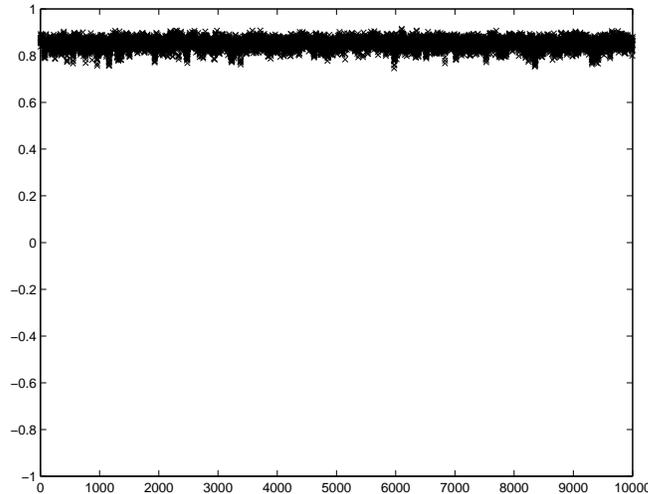


FIG. 3.2 – Extrait d’une évolution Métropolis dans la phase ferromagnétique, pour le modèle d’Ising 2d  $L = 64$  avec des conditions aux bords périodiques. L’échelle est choisie pour faciliter la comparaison avec la figure 2.2. On constate que le système reste localisé au voisinage d’un minimum, sans explorer le second.

Cependant, l’étude numérique nous montre que pour  $T \leq T^*(L)$ , la longueur de corrélation est petite devant la taille du système : on s’attend donc plutôt à ce que la dynamique réelle soit locale et donc plus proche de celle produite par l’algorithme Métropolis . La figure 3.2 donne un exemple de la dynamique Métropolis obtenue pour le modèle d’Ising. On constate alors que le système reste localisé au voisinage d’un minimum pendant la simulation<sup>12</sup>. Ainsi, si l’on s’intéresse aux fluctuations dans la phase ferromagnétique, on observe des fluctuations autour de la valeur typique de l’aimantation et non de la valeur moyenne : tout se passe comme si la symétrie était brisée. Une étude analytique basée sur la physique statistique d’équilibre ne pourra donc pas reproduire simplement les observations. Au contraire une étude dynamique permettra de travailler directement au voisinage de la valeur typique, correspondant à un maximum de probabilité. C’est la raison pour laquelle nous avons décidé de poursuivre l’étude au moyen d’une approche dynamique, basée sur les équations de Langevin.

### 3.2.2 Équations de Langevin

La dynamique du système est donnée par celles des  $N - 1$  champs  $\theta_{\mathbf{q}}$  avec  $\mathbf{q} \neq 0$  et du champ  $\phi_0$ . Les  $\theta_{\mathbf{q}}$  sont complexes, mais satisfont à la condition  $\theta_{-\mathbf{q}} = \bar{\theta}_{\mathbf{q}}$  (car les fluctuations dans l’espace réel sont des variables réelles). On va alors décomposer chacun des champs complexes  $\theta_{\mathbf{q}}$  en deux champs réels  $\phi_{\mathbf{q}}^{(1)}$  et  $\phi_{\mathbf{q}}^{(2)}$ , suivant :

$$\theta_{\mathbf{q}} = \phi_{\mathbf{q}}^{(1)} + i\phi_{\mathbf{q}}^{(2)}. \quad (3.33)$$

---

<sup>12</sup>Dans ce cas-là, il est inutile d’ajouter une valeur absolue à la définition de l’aimantation.

L'action (3.24) s'écrit alors, en terme des champs réels  $\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$  :

$$\mathcal{S}[\phi_0, \phi_{\mathbf{q}}^{(1)}, \phi_{\mathbf{q}}^{(2)}] = \mathcal{S}_0(\phi_0) - \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{S}_1} G_{\mathbf{q}}^{-1} (\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)})^2. \quad (3.34)$$

La dynamique de chacun des champs  $\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$  et  $\phi_0$  est donnée par une équation de Langevin correspondant à l'action (3.34) :

$$\dot{\phi}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(t) = -2G_{\mathbf{q}}^{-1}\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)} + \eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(t), \quad (3.35)$$

$$\dot{\phi}_0 = -\frac{\delta\mathcal{S}_0[\phi_0(t)]}{\delta\phi_0(t)} + \eta_0(t), \quad (3.36)$$

avec  $\mathcal{S}_0$  définie par (3.25),  $G_{\mathbf{q}}$  par (3.26). Les variables  $\eta_{\mathbf{q}}^{\alpha}(t)$  et  $\eta_0(t)$  sont des bruits supposés gaussiens et  $\delta$ -corrélés :

$$\langle \eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(t) \eta_{\mathbf{q}'}^{(\beta)}(t') \rangle = \Omega \delta_{\alpha,\beta} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \delta(t-t'), \quad (3.37)$$

$$\langle \eta_0(t) \eta_0(t') \rangle = \Omega \delta(t-t'). \quad (3.38)$$

D'autre part la relation d'Einstein conduit, à l'équilibre à<sup>13</sup> :

$$\Omega = 2. \quad (3.39)$$

On obtient donc  $2N - 1$  équations de Langevin (3.35,3.36). L'équation donnant l'évolution du mode  $\mathbf{q} = 0$  est non-linéaire, tandis que les  $2(N - 1)$  équations sur les modes  $\mathbf{q} \neq 0$  sont linéaires. Enfin, ces équations sont *a priori* couplées par les propagateurs  $G_{\mathbf{q}}$ , qui dépendent de  $\phi_0$ . Il est alors possible de simuler numériquement les équations de Langevin et d'obtenir ainsi la distribution de l'aimantation instantanée  $m_{\text{inst}}$ . On teste alors la validité du développement perturbatif, en regardant s'il est possible de retrouver par exemple un champ  $H_{\text{dyn}}^*$  redonnant BHP. C'est effectivement le cas, comme le montre la figure 3.3, et la valeur obtenue pour  $H_{\text{dyn}}^*(L = 64) \simeq 0.04J$  est en bon accord avec le résultat des simulations Monte Carlo exactes,  $H^*(L = 64) \simeq 0.035J$ . Le développement perturbatif n'a donc pas détruit le phénomène que l'on veut étudier, ce qui justifie *a posteriori* l'hypothèse statique.

## 3.2.3 Distribution des fluctuations

### 3.2.3.1 Définition

Nous nous intéressons à la fonction densité de probabilité  $P(m, \tau)$  de l'aimantation instantanée  $m_{\text{inst}}$ , définie par l'équation (3.27), à l'instant  $\tau$ . Elle est donnée par

$$\Pi(m, \tau) = \langle \delta(m - m_{\text{inst}}(\tau)) \rangle_{\{\eta_{\mathbf{q}}\}}. \quad (3.40)$$

<sup>13</sup>La dépendance en la température a été incluse dans la définition de l'action .

En utilisant la représentation intégrale de  $\delta$ , la formule (3.27), et en explicitant les moyennes, on obtient l'expression de  $\Pi$  comme une intégrale de chemin :

$$P(m, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \int \mathcal{D}\eta_0(t) \prod_{\mathbf{q} \in S_{1,\alpha}} \mathcal{D}\eta_{\mathbf{q}}^{\alpha}(t) \exp(ixm - ixT) \times \exp\left(ixT(1 - T^2) \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q} \in S_{1,\alpha}} K_{\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}}^{\alpha 2}(\tau) - \frac{1}{2\Omega} \int_0^{\tau} \eta_0(u)^2 du - \frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{q} \in S_{1,\alpha}} \int_0^{\tau} \eta_{\mathbf{q}}^{\alpha}(u)^2 du\right). \quad (3.41)$$

C'est sur cette expression que nous allons travailler afin d'éventuellement trouver un lien avec la distribution BHP.

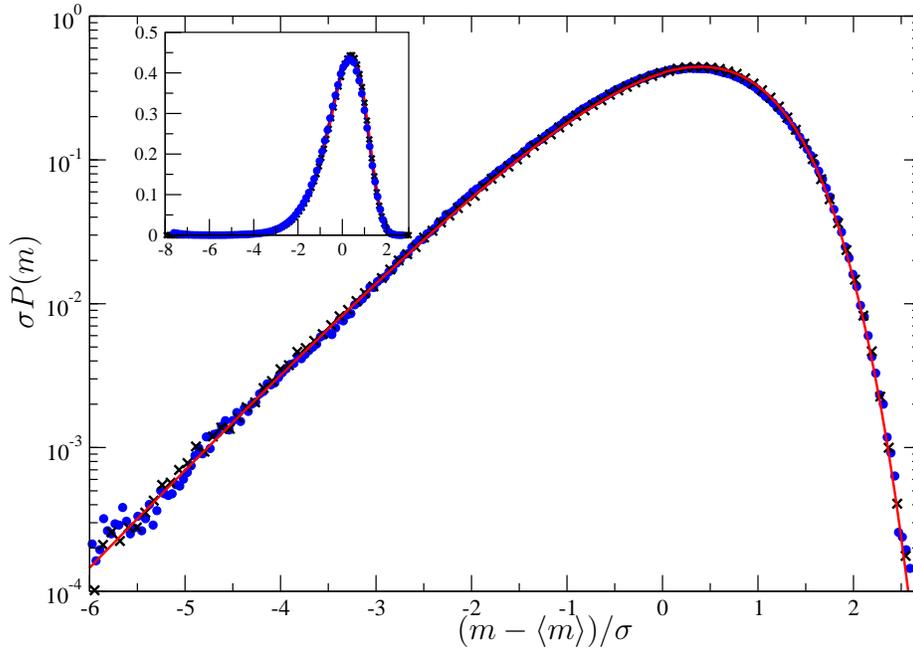


FIG. 3.3 – Test numérique des équations de Langevin. La courbe en train plein correspond à la distribution BHP. La courbe ( $\times$ ) est la distribution obtenue par des simulations Monte-Carlo pour le modèle d'Ising de taille  $L = 64$  à  $T_c(L)$ , avec un champ magnétique  $H^*(L) = 0.035J$ . La courbe ( $\bullet$ ) est la distribution de l'aimantation instantanée (3.27), obtenue par la dynamique de Langevin (3.36,3.35), à  $T_c(L)$ , pour un champ magnétique correspondant à  $H_{\text{dyn}}^*(L) = 0.04J$ . Le très bon accord entre les simulations Monte Carlo exactes et le résultat de la dynamique de Langevin montre que l'hypothèse statique capture le comportement BHP qui nous intéresse ici.

3.2.3.2 Évolution des champs  $\phi_q^{(\alpha)}$ 

Comme nous l'avons précédemment, nous nous plaçons dans le cas où le système reste le plus souvent localisé au voisinage de la valeur typique de l'aimantation, correspondant par définition à un minimum de potentiel : la dynamique locale restant au voisinage de ce minimum, la mesure que l'on fera correspond ne prend en compte que les fluctuations de faibles amplitudes  $\mathbf{q} \neq 0$ , qui restent localisées près d'un puits. Par analogie avec la physique statistique des solides, on appelle ces modes  $\mathbf{q} \neq 0$  des phonons. On ne prend pas en compte les changements de grandes amplitudes passant d'un puits à l'autre, associés au mode  $\mathbf{q} = 0$ . Cela correspond à l'idée développée plus haut de séparation entre les phonons  $\mathbf{q} \neq 0$  ayant une dynamique rapide et ne restaurant pas la symétrie, et les solitons venant du mode  $\mathbf{q} = 0$  qui eux rétablissent la symétrie. L'évolution Monte Carlo Métropolis représentée sur la figure 3.4 montre un exemple de cette décomposition, qui nous ramène à l'étude de la physique statistique des solitons [Currie et al. 1980, Leung 1982, Alexander et al. 1993]. En fait, si la densité de solitons n'est pas trop élevée, on est amené à faire une nouvelle hypothèse, dynamique celle-là, qui consiste à supposer que l'on peut découpler les solitons des phonons, et donc supposer que  $\phi_0$  est une constante sur l'échelle de temps correspondant à la dynamique des phonons. Cette hypothèse est standard pour la physique statistique des

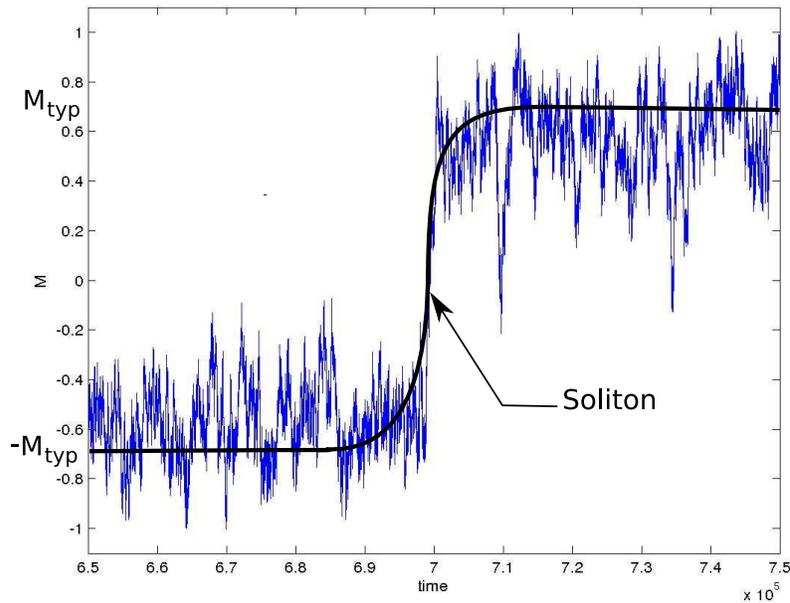


FIG. 3.4 – Représentation schématique d'une évolution de l'aimantation au voisinage de  $T^*$ . La ligne épaisse représente un soliton du mode  $\phi_0$  passant d'un minimum à l'autre. Les fluctuations correspondent aux modes  $\phi_{q \neq 0}$  autour de ce soliton. Noter que la durée pendant laquelle le soliton prend des valeurs différentes de celles des minima est courte devant la durée totale de la dynamique.

solitons [Leung 1982, Alexander et al. 1993], et l'on peut éventuellement aller au-delà. Avec cette hypothèse dynamique, on découple les équations de Langevin pour les phonons, qui peuvent être intégrées séparément. En évaluant les propagateurs à la valeur  $\phi_0 = \bar{\phi}$  correspondant au minimum de potentiel, on trouve alors les solutions formelles :

$$\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(t) = \exp(-2G_{\mathbf{q}}^{-1}t)\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(0) + \exp(-2G_{\mathbf{q}}^{-1}t) \int_0^t du \exp(2G_{\mathbf{q}}^{-1}u)\eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(u). \quad (3.42)$$

On obtient donc une relation entre les champs  $\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$  et les bruits associés  $\eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$ .

### 3.2.4 Transformée de Fourier

#### 3.2.4.1 Élimination des champs $\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$

L'expression précédente (3.42) permet d'éliminer les champs  $\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$  de l'action (3.34). En particulier, pour des temps d'observation  $\tau \gg \text{Max}(G_{\mathbf{q}})$ , on a

$$\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)2}(\tau) \simeq \exp(-4G_{\mathbf{q}}^{-1}\tau) \int_0^{\tau} du \int_0^{\tau} du' \exp(2G_{\mathbf{q}}^{-1}(u+u'))\eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(u)\eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(u'). \quad (3.43)$$

Dans l'expression (3.41), on peut commencer par intégrer les termes correspondant aux modes  $\mathbf{q} \neq 0$ . Ceci est plus facile si l'on effectue une transformation de Fourier. Pour cela, on commence par périodiser le signal : on prend comme période la durée d'observation  $\tau$ . Cela permet d'écrire

$$\eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega_n t) \tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(\omega_n), \quad (3.44)$$

avec  $\omega_n = 2\pi n/\tau$ . Comme  $\eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(t) \in \mathbb{R}$ , les coefficients de Fourier correspondants satisfont à la relation  $\tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(-\omega_n) = \tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)*}(\omega_n)$ . En utilisant la formule

$$\int_0^{\tau} du e^{2G_{\mathbf{q}}^{-1}u} e^{i\omega_n u} = \frac{1}{2G_{\mathbf{q}}^{-1} + i\omega_n} \left( e^{2G_{\mathbf{q}}^{-1}\tau} - 1 \right), \quad (3.45)$$

on peut réécrire (3.43) :

$$\phi_{\mathbf{q}}^{(\alpha)2}(\tau) \simeq \frac{1}{\tau} \sum_{m,n} \frac{\tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\omega_m)}{2G_{\mathbf{q}}^{-1} + i\omega_m} \frac{\tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\omega_n)}{2G_{\mathbf{q}}^{-1} + i\omega_n}. \quad (3.46)$$

3.2.4.2 Intégrations sur les champs  $\eta_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}$ 

On doit alors calculer les intégrales  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}^{\alpha}$  définie par

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}^{\alpha} = \int d\tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(0) \prod_{m \geq 1} d\tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\omega_m) d\bar{\tilde{\eta}}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\omega_m) e^{\mathcal{S}_{\mathbf{q}}}, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbf{q}} &= ix\mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \frac{2}{N\tau} k_{\mathbf{q}} \sum_{m,n} \frac{\tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\omega_m)}{2G_{\mathbf{q}}^{-1} + i\omega_m} \frac{\bar{\tilde{\eta}}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\omega_n)}{2G_{\mathbf{q}}^{-1} + i\omega_n} - \frac{1}{2\Omega} \sum_m \tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(-\omega_m) \bar{\tilde{\eta}}_{\mathbf{q}}^{\alpha}(\omega_m) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^*} \bar{\tilde{\eta}}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(\omega_m) A_{mn} \tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(\omega_n). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Il s'agit simplement d'une intégrale gaussienne. On doit donc calculer le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$ . Pour cela on définit la matrice  $\mathbf{A}_l$  de taille  $2l \times 2l$  par

$$\mathbf{A}_l = -\frac{1}{2\Omega} \mathbf{Id}_l + \frac{i\lambda}{N\tau} \mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) k_{\mathbf{q}} \mathbf{V}_l \cdot {}^t \bar{\mathbf{V}}_l, \quad (3.49)$$

où  $\mathbf{Id}_l$  est la matrice identité de taille  $2l \times 2l$  et où  $\mathbf{V}_l$  est un vecteur-colonne :

$$\mathbf{V}_l = \begin{pmatrix} g_{-l} \\ g_{-l+1} \\ \vdots \\ g_{-1} \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{l-1} \\ g_l \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

et

$$g_m = \frac{1}{G_{\mathbf{q}}^{-1} + i\omega_m}. \quad (3.51)$$

Pour calculer le déterminant il suffit de remarquer que la matrice  $\mathbf{V}_l \cdot {}^t \bar{\mathbf{V}}_l$  est de rang 1. La valeur propre 0 est donc dégénérée  $2l - 1$  fois : la seule valeur propre non nulle est alors la trace de la matrice. Ainsi les valeurs propres de  $\mathbf{A}_l$  sont donc  $\frac{1}{2\Omega}$ , dégénérée  $2l - 1$  fois, et  $b + {}^t \bar{\mathbf{V}}_l \cdot \mathbf{V}_l$  :

$$\text{Det } \mathbf{A}^{(\mathbf{q})} = b^{2l-1} \left( b + \sum_{m \in \mathbb{Z}_l^*} g_m \bar{g}_m \right). \quad (3.52)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathbf{q}}(l) &= \int \mathcal{D}\tilde{\eta}_{\mathbf{q}} \exp \left( \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_l^*} \bar{\tilde{\eta}}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(\omega_m) A(l)_{mn} \tilde{\eta}_{\mathbf{q}}^{(\alpha)}(\omega_n) \right), \\ &= \frac{(2\Omega)^l}{\sqrt{\tau}} \left( 1 - i\lambda\mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \frac{2\Omega k_{\mathbf{q}}}{N\tau} \sum_{m \in \mathbb{Z}_l^*} \frac{1}{4(G_{\mathbf{q}}^{-1})^2 + \omega_m^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Le préfacteur  $\frac{(2\Omega)^l}{\sqrt{\tau}}$  peut être oublié car il se factorise dans l'expression de la PDF (3.40) et disparaît par normalisation de la distribution. Pour calculer  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}$ , il suffit de prendre la limite  $l \rightarrow \infty$ . En utilisant la formule [Gradshteyn et Ryzhik 1994]

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{x^2 + m^2} = \frac{\pi}{x} \coth(\pi x),$$

on obtient finalement :

$$\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}^{\alpha} = \exp \left[ -\frac{1}{2} \log \left( 1 - ix\mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \frac{\Omega}{N} k_{\mathbf{q}} G_{\mathbf{q}} \coth \left( \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right) \right) \right]. \quad (3.54)$$

Dans la limite où l'on observe les fluctuations sur une durée très grande,  $\tau \rightarrow \infty$ , les contributions  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}^{\alpha}$  sont bien définies,  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \coth \left( \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right) = 1$ .

Dans cette section, nous avons donc pu calculer la contribution des modes  $\mathbf{q} \neq 0$ , au prix d'une hypothèse supplémentaire sur le découplage de la dynamique de ces modes d'avec celle du mode  $\mathbf{q} = 0$ .

### 3.3 Lien avec le modèle XY

En utilisant le résultat précédent (3.54), on peut réécrire la PDF de l'aimantation instantanée du modèle d'Ising sous la forme

$$P(m, \tau) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \int \mathcal{D}\eta_0(t) \exp \left( ix(m - \mathcal{T}) - \frac{1}{2\Omega} \int_0^{\tau} \eta_0^2(u) du \right) \times \exp \left[ - \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{S}_1} \log \left( 1 - ix\mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \frac{\Omega}{N} k_{\mathbf{q}} G_{\mathbf{q}} \coth \left( \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right) \right) \right]. \quad (3.55)$$

C'est sur cette expression que nous allons à présent travailler pour trouver un lien entre la distribution  $P$  et la distribution BHP. Pour cela, nous allons commencer par définir les deux paramètres nécessaires à la définition de l'aimantation instantanée réduite, puis nous verrons comment la distribution BHP apparaît.

#### 3.3.1 Valeur moyenne et écart-type apparents

Comme nous l'avons vu en introduction, l'analogie entre la distribution BHP et une grande variété de système n'est observée que pour les écarts à la valeur moyenne, rapportées à l'écart-type des fluctuations. Il est donc probable qu'il faille utiliser cette variable réduite pour voir un lien avec BHP dans (3.55).

Si l'évolution du système est donnée par une dynamique locale, comme l'évolution Métropolis ou l'évolution suivant les équations de Langevin, nous avons vu dans la première section de ce chapitre que le système évolue au voisinage d'un minimum, et que la distance entre les deux minima est beaucoup plus grande que la largeur d'un puits. En conséquence, pour une telle évolution, tout se passe comme si la symétrie  $Z_2$  était brisée, *i.e.* les fluctuations ne

permettent pas au système d'explorer l'intégralité de l'espace des phases, pour des temps accessibles expérimentalement ou numériquement. Si l'on estime la largeur des fluctuations à partir d'une série de données expérimentales ou numériques par l'écart-type  $\bar{\sigma}$  observé, on n'obtiendra pas une bonne estimation de l'écart-type  $\sigma$  donnée par la thermodynamique d'équilibre, mais une valeur correspondant uniquement aux fluctuations au sein d'un puits de potentiel. En fait, la grandeur  $\sigma$  mesure la largeur de la distribution autour de la valeur moyenne  $\langle M \rangle$ , alors que  $\bar{\sigma}$  caractérise la largeur de la distribution autour de la valeur typique  $M_{\text{typ}} = \langle m \rangle$ . En d'autres termes, la valeur estimée ne contient que la contribution des phonons, et ne prend pas en compte les solitons provenant du mode<sup>14</sup>  $\mathbf{q} = 0$ .

Dans les simulations numériques présentées au chapitre précédent, le fait de prendre comme paramètre d'ordre la valeur absolue de l'aimantation revient en fait à estimer  $\bar{\sigma}$  et non  $\sigma$ , de même que l'on mesure  $\bar{m} \neq 0$ , et non  $\langle m \rangle = 0$  : la valeur absolue, nécessaire pour observer numériquement la transition de phase à  $T_c$  à pour effet de limiter l'étude aux fluctuations dans un puits de potentiel, en éliminant le passage d'un puits à l'autre. Les résultats présentés sur la figure 3.5 montrent les différences entre la variable réduite  $\frac{m - \langle m \rangle}{\sigma}$  et  $\frac{m - \bar{m}}{\bar{\sigma}}$ .

Plus concrètement cela signifie que l'estimation de  $\bar{m}$  et  $\bar{\sigma}$  va se faire dans un puits de potentiel :  $\bar{m}$  correspond alors à la position de ce puits et  $\bar{\sigma}$ , à sa largeur. On définit donc :

$$\bar{m} = \langle m_{\text{inst}} \rangle_{\{\eta_{\mathbf{q} \neq 0}\}}, \quad (3.56)$$

$$\bar{\sigma}^2 = \langle m_{\text{inst}}^2 \rangle_{\{\eta_{\mathbf{q} \neq 0}\}} - \bar{m}^2. \quad (3.57)$$

À partir de la définition de  $m_{\text{inst}}$  (3.27), on obtient immédiatement :

$$\bar{m} = \mathcal{T} - \mathcal{T}(1 - \mathcal{T}^2) \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q} \in S_1} k_{\mathbf{q}} \langle \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}} \rangle_{\eta_{\mathbf{q} \neq 0}}.$$

La fonction de corrélation  $\langle \theta_{\mathbf{q}} \theta_{-\mathbf{q}} \rangle = \langle \phi_{\mathbf{q}}^{(1)2} \rangle + \langle \phi_{\mathbf{q}}^{(2)2} \rangle$  se calcule directement au moyen de la partie gaussienne de l'action (3.34), et l'on obtient finalement, avec  $\Omega = 2$  :

$$\bar{m} = \mathcal{T} (1 - \Omega(1 - \mathcal{T}^2)g_1), \text{ avec } g_1 = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q} \in S_1} k_{\mathbf{q}} G_{\mathbf{q}} \coth \left( \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right). \quad (3.58)$$

De la même manière, on peut calculer  $\bar{\sigma}$  en utilisant le théorème de Wick [LB 2002] et l'on obtient l'expression :

$$\bar{\sigma}^2 = \Omega^2 \mathcal{T}^2 (1 - \mathcal{T}^2)^2 g_2, \text{ avec } g_2 = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{q} \in S_1} k_{\mathbf{q}}^2 G_{\mathbf{q}}^2 \coth \left( \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right)^2. \quad (3.59)$$

<sup>14</sup>Par exemple, si l'on considère la dynamique non-locale de l'algorithme Swendsen-Wang, on peut estimer les deux grandeurs, comme nous l'avons vu plus haut : on trouve  $\sigma = 0.85$  et  $\bar{\sigma} = 0.026$ , pour un système de taille  $L = 64$  à la température  $T^*(L)$ .

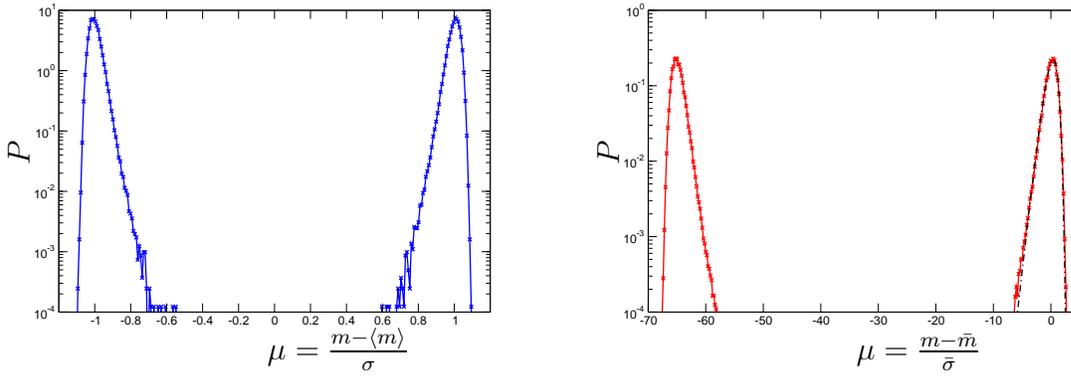
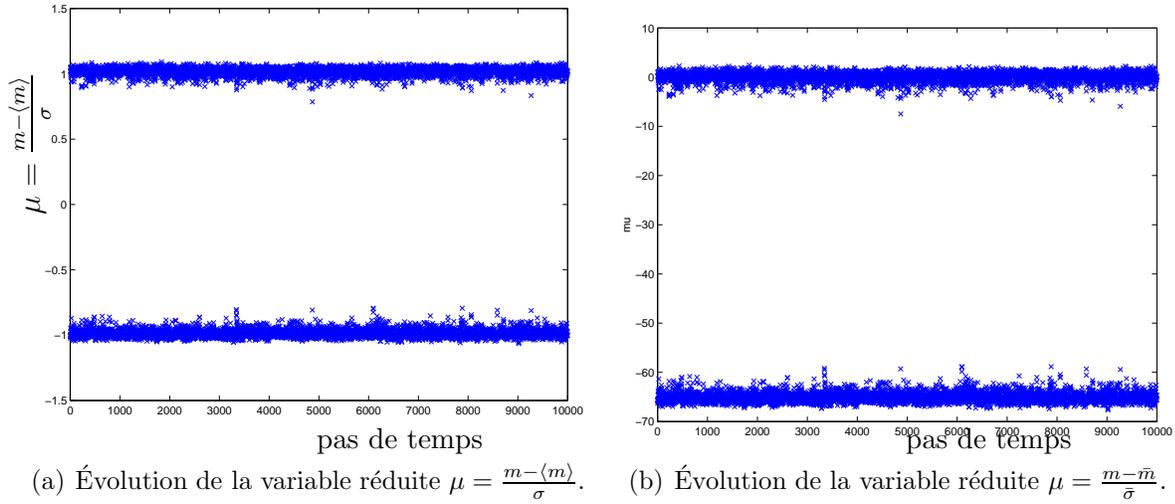


FIG. 3.5 – Évolutions et distributions obtenues par l'algorithme SW, pour le modèle d'Ising  $L = 64$  à  $T^*(L)$ . L'accord avec la distribution n'est obtenu que lorsque l'on définit la variable réduite  $\mu$  à partir de la moyenne et de l'écart-type apparents.

La variable réduite correspondant à l'aimantation instantanée est alors

$$\mu_{\text{inst}} = \frac{m_{\text{inst}} - \bar{m}}{\bar{\sigma}}. \quad (3.60)$$

Cette variable réduite correspond à celle définie pour l'étude des fluctuations de puissance injectée en turbulence [Labbé et al. 1996, Pinton et al. 1999], de résistance globale dans un réseau de résistances [Pennetta et al. 2004], ainsi qu'à la variable réduite du modèle XY [Archambault et al. 1997, Bramwell et al. 2001].

### 3.3.2 Distribution de l'aimantation réduite

Nous avons à présent défini toutes les grandeurs utiles. Nous pouvons donc travailler sur l'expression (3.55) de la distribution. En notant  $g_k = \frac{1}{N^k} \sum_{\mathbf{q} \in S_1} \left( k_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}} \coth \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right)^k$ , on peut développer en série le logarithme (3.54) :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\mathbf{q} \in S_1} \log \left( 1 - ix \mathcal{T} (1 - \mathcal{T}^2) \frac{\Omega}{N} k_{\mathbf{q}} G_{\mathbf{q}} \coth \left( \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right) \right) &= - \sum_{k=1}^{+\infty} \left( ix (1 - \mathcal{T}^2) \mathcal{T} \Omega \right)^k g_k, \\ &= ix (\bar{m}_{\text{inst}} - \mathcal{T}) - \sum_{k=2}^{+\infty} \left( ix (1 - \mathcal{T}^2) \mathcal{T} \Omega \right)^k g_k, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'expression de  $\bar{m}$  donnée par (3.58). Ainsi l'argument de l'exponentielle de (3.55) s'écrit

$$\begin{aligned} ix(m - \mathcal{T}) - \sum_{\mathbf{q} \in S_1} \log \left( 1 - ix \mathcal{T} (1 - \mathcal{T}^2) \frac{\Omega}{N} k_{\mathbf{q}} G_{\mathbf{q}} \coth \left( \frac{\tau}{G_{\mathbf{q}}} \right) \right) &= \\ ix(m - \bar{m}) + \sum_{k=2}^{+\infty} (ix)^k \Omega^k \mathcal{T}^k (1 - \mathcal{T}^2)^k g_k, \end{aligned}$$

Pour introduire complètement la variable réduite, on effectue le changement de variable  $x = \frac{y}{\bar{\sigma}}$  ce qui, avec l'expression (3.59), conduit à :

$$ix(m - \bar{m}) + \sum_{k=2}^{+\infty} (ix)^k \Omega^k \mathcal{T}^k (1 - \mathcal{T}^2)^k g_k = iy \mu_{\text{inst}} + \sum_{k=2}^{+\infty} (iy)^k \frac{g_k}{g_2^{k/2}}.$$

L'expression de la distribution de la variable réduite  $\mu_{\text{inst}}$  ainsi obtenue est :

$$\Pi[\eta_0, \tau](\mu_{\text{inst}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{g_2}{2}} \exp \left( ix \mu_{\text{inst}} + \sum_{k=2}^{\infty} (ix)^k \frac{g_k}{g_2^{k/2}} \right). \quad (3.61)$$

Cette expression correspond à l'expression obtenue dans le cas du modèle XY dans l'approximation des ondes de spin (formule (20) de [Bramwell et al. 2001]). Autrement dit, on vient de trouver un lien entre le modèle d'Ising pour une température un peu au-dessous de la

température critique et le modèle XY 2d dans l'approximation des ondes de spin. Cependant, il faut faire une remarque : pour obtenir la distribution BHP, il faudrait avoir un propagateur  $G_{\mathbf{q}}^{-1} \underset{\mathbf{q} \rightarrow 0}{\sim} q^2$ , alors qu'il est ici de la forme  $G_{\mathbf{q}}^{-1} \underset{\mathbf{q} \rightarrow 0}{\sim} q^2 + M^2$  : ce propagateur massif correspond en fait au cas du modèle XY avec un champ magnétique, étudié par Portelli *et al.* [Portelli et al. 2001, Portelli 2002]. Nous discuterons plus loin des conséquences de cette remarque, mais avant cela, nous allons continuer l'analyse de la PDF du modèle d'Ising. La distribution (3.61) dépend du bruit  $\eta_0$ , et donc de la dynamique du mode  $\phi_0$ , par l'intermédiaire des variables  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{m}$  : les variables  $\mathcal{T}$  dépendent en effet de la valeur de  $\phi_0(\tau)$ . À partir de (3.61), on obtient l'expression générale de la distribution, montrant le lien avec la distribution BHP :

$$P(\mu_{\text{inst}}, \tau) = \int \mathcal{D}\eta_0(t) \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \int_0^\tau \eta_0^2(u) du\right) \Pi[\eta_0, \tau](\mu_{\text{inst}}). \quad (3.62)$$

### 3.3.3 Discussion

#### 3.3.3.1 Modèle d'Ising à basse température

Nous pouvons par exemple considérer le cas où le bruit  $\eta_0(t) = 0$  : dans ce cas, pour des temps assez long, le champ  $\phi_0$  atteint la valeur d'équilibre  $\bar{\phi}_0$  donnée par  $\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \phi_0}(\bar{\phi}_0) = 0$ . Dans ce cas la distribution de l'aimantation instantanée est directement donnée par la distribution du modèle XY :

$$P(m_{\text{inst}}, \tau) = \Pi[\bar{\phi}_0, \tau](\mu_{\text{inst}}). \quad (3.63)$$

La distribution correspond dans ce cas à celle du modèle XY 2d en présence d'un champ magnétique, et non à la distribution BHP. La forme de la distribution dépend de la masse, comme le montre la figure 3.6. Cette situation où  $\eta_0$  est nul revient en fait à négliger toute dynamique pour  $\phi_0$ . Autrement dit, cela correspond au cas où les deux minima sont suffisamment distants pour qu'au cours de la mesure on reste localisé au voisinage d'un minimum. Il s'agit du scénario que l'on s'attend à trouver pour une température plus petite que  $T^*(L)$ , ce qui est confirmé par les résultats présentés sur la figure 3.7.

#### 3.3.3.2 Au voisinage de $T^*$

Si les deux minima de potentiel sont suffisamment proches pour que la dynamique de  $\phi_0$ , passant d'un puits à l'autre soit visible, alors la formule (3.63) n'est plus correcte. Il faut prendre en compte la dynamique du mode  $\mathbf{q} = 0$ . À partir de l'équation de Langevin pour le mode  $\mathbf{q} = 0$  (3.36), on obtient le Lagrangien pour le champ  $\phi_0$  :

$$\mathcal{L}(\phi_0, \dot{\phi}_0) = \eta_0^2 \simeq \dot{\phi}_0(t)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \phi_0}\right)^2. \quad (3.64)$$

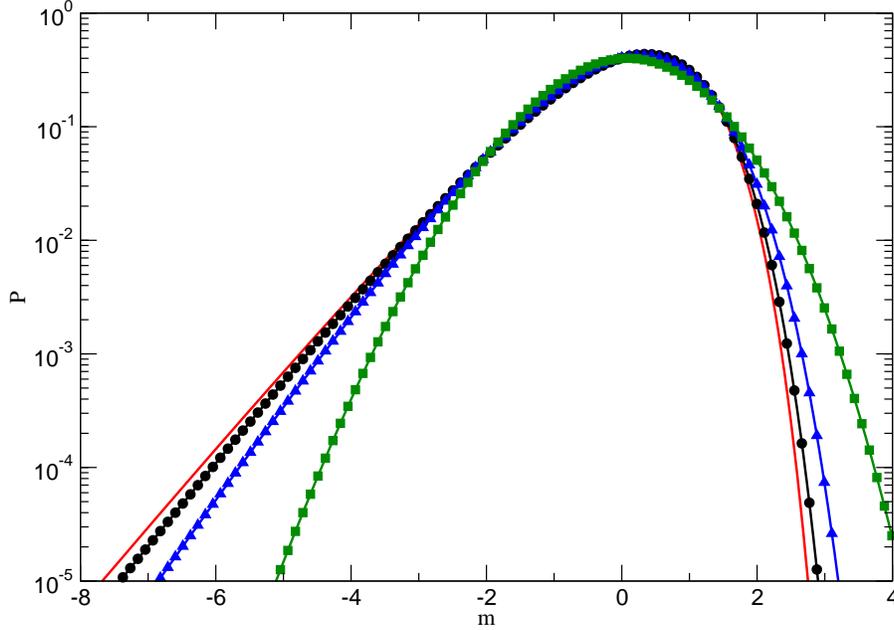


FIG. 3.6 – Distribution pour le modèle XY avec une masse, correspondant à un propagateur  $G_q^{-1} = q^2 + M^2$ , pour différentes valeurs de la masse :  $M = 0$  (ligne),  $5 \times 10^{-2}$  (●),  $10^{-1}$  (▲),  $5 \times 10^{-1}$  (■). On note que la distribution évolue depuis BHP ( $M = 0$ ) vers une distribution gaussienne  $M \gg 1$ . D'autre part, pour une masse  $M$  non nulle mais relativement petite, l'écart avec BHP est faible [Portelli et al. 2001].

Les équations du mouvement classique (sans fluctuations) incluent la solution  $\phi_0(t) = \bar{\phi}_0$  déjà discutée, mais contiennent aussi toutes les solutions correspondant à  $k$  franchissements de la barrière séparant les deux minima. Ces solutions sont les solitons kink obtenus à partir de l'équation du mouvement non-linéaire associée à (3.64). Les solitons  $\phi_k(t)$  où  $k$  est pair vérifient les conditions aux limites  $\phi_k(0) = \phi_k(\tau)$ , tandis que les  $k$  impairs correspondent à  $\phi_k(0) = -\phi_k(\tau)$ . Dans ce cas, en négligeant les fluctuations, la méthode du col permet d'écrire :

$$\int \mathcal{D}\eta_0(t) \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \int_0^\tau \eta_0^2(u) du\right) \simeq e^{-S_0(\bar{\phi}_0)} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-S_0(\phi_k)}. \quad (3.65)$$

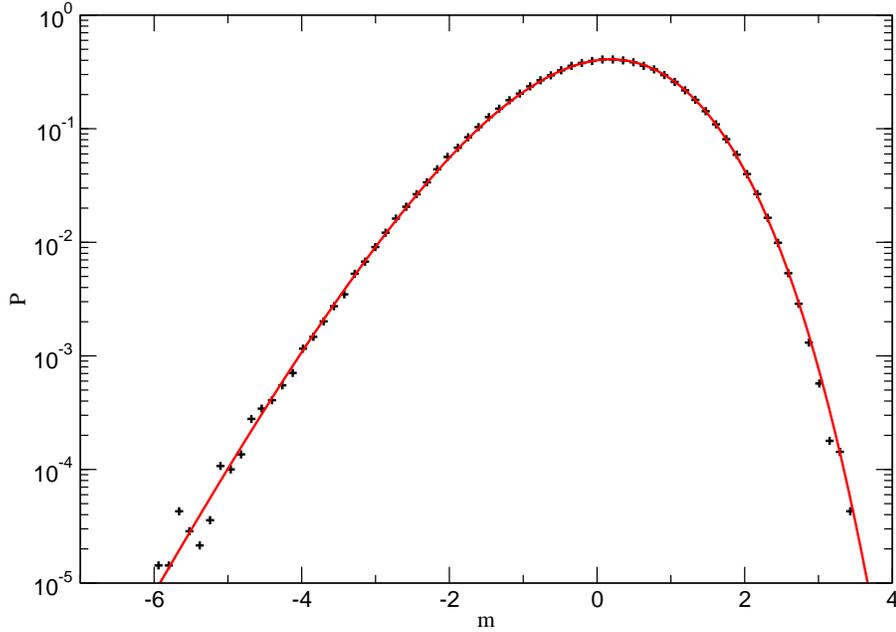


FIG. 3.7 – Distribution pour le modèle d’Ising ( $L=64$ ) pour  $T = 1.54J < T^*(L)$ . La courbe pleine correspond à la distribution du modèle XY avec une masse  $M = 2 \times 10^{-1}$ .

Pour le calcul de la PDF, il faut prendre en compte un terme supplémentaire apparaissant dans (3.61),

$$A[\phi_0(\tau), x] = \sqrt{\frac{g_2}{2\bar{\sigma}^2}} \exp\left(ix\mu_{\text{inst}} + \sum_{k=1}^{+\infty} (ix)^k \frac{g_k}{g_2^{k/2}}\right) \sqrt{\frac{g_2}{2}}. \quad (3.66)$$

Toutefois, ce terme ne contenant que la valeur de  $\phi_0$  à l’instant final  $\tau$ , il ne change pas les équations du mouvement, et donc les solutions  $\phi_k$  sont toujours données par (3.64). Par contre il pondère chacune des contributions de ces solutions à l’intégrale de chemin. On a donc :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \mathcal{D}\eta_0(t) \exp\left(-\frac{1}{2\Omega} \int_0^\tau \eta_0^2(u) du\right) A[\phi_0(\tau), x], \\ &\simeq e^{-S_0(\bar{\phi}_0)} \left( A[\bar{\phi}_0, x] + \sum_{k=1}^{\infty} A[\phi_k(\tau), x] e^{S_0(\bar{\phi}_0) - S_0(\phi_k)} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Pour obtenir la distribution de l’aimantation réduite, il reste à prendre la transformée de Fourier de  $I(x)$ . Le premier terme redonne la distribution correspondant au modèle XY

en champ magnétique. On obtient donc l'expression de la distribution de l'aimantation instantanée réduite du modèle d'Ising pour  $T \lesssim T_c(L)$  sous la forme :

$$P(\mu_{\text{inst}}, \tau) = \Pi_{XY}[\bar{\phi}_0, \mu_{\text{inst}}] + \mathcal{C}(\mu_{\text{inst}}). \quad (3.68)$$

La fonction  $\mathcal{C}$  contient toutes les corrections liées à la dynamique globale du système, donnée par  $\mathcal{S}_0$ . Elle s'écrit sous la forme

$$\mathcal{C}(\mu_{\text{inst}}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} A[\phi_k, x] e^{(\mathcal{S}_0(\bar{\phi}_0) - \mathcal{S}_0(\phi_k))}. \quad (3.69)$$

S'il est bien entendu difficile de calculer cette fonction  $\mathcal{C}$ , il est toutefois possible d'analyser l'expression (3.68) pour trouver les réponses aux questions posées en introduction, comme nous allons le voir à présent.

## 3.4 Conclusion

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de la formule (3.68), apportant un nouveau regard sur l'analogie entre la distribution du modèle d'Ising à  $T^*/H^*$  et la distribution BHP. Tout d'abord l'existence d'un point du diagramme de phase du modèle d'Ising où l'accord est le meilleur résulte d'un compromis entre les deux termes de l'expression (3.68). En effet, pour être le plus proche possible de BHP, il faut réduire le plus possible la masse apparaissant dans le propagateur (3.26) : il faut pour cela se rapprocher le plus possible de  $T_c(L)$ . Cependant il faut aussi que la contribution de  $\mathcal{C}$  reste suffisamment petite devant celle de  $\Pi$  : ce n'est pas le cas à  $T_c(L)$ , où les deux minima sont proches, et où la contribution des solitons restaurant la symétrie est dominante. La température  $T^*(L)$  correspond à la valeur de la température qui correspond à ce critère : masse petite et contribution des solitons peu importante.

Nous avons aussi remarqué que l'accord avec la distribution BHP est meilleur en présence d'un champ magnétique  $H^*$  à  $T_c(L)$  qu'à  $T^*(L)$ . Le fait d'avoir un champ magnétique brise la symétrie du potentiel, puisque le minimum correspondant au cas où l'aimantation est dans la même direction que le champ magnétique est plus bas en énergie que le cas où l'aimantation et champ magnétique sont opposés. La contribution des solitons est alors réduite par rapport au cas d'un potentiel symétrique, puisque les différences d'énergie  $\mathcal{S}_0(\phi_k) - \mathcal{S}_0(\bar{\phi}_0)$  sont plus importantes qu'en champ nul : elles contiennent en plus la différence d'énergie entre les deux minima locaux. Ainsi un petit champ magnétique permet, à  $T_c(L)$ , de considérablement réduire la contribution de  $\mathcal{C}$  et donc d'observer le très bon accord obtenu au chapitre précédent. On peut aller plus loin dans l'analyse et répondre à la question de l'universalité de BHP. Comme le montre (3.68), la distribution de l'aimantation instantanée est la somme de deux termes. Le premier résulte directement du développement perturbatif effectué à la section 3.1.2 : il suffit que l'action des modes  $\mathbf{q} \neq 0$  soit une action gaussienne avec un propagateur  $G_{\mathbf{q}}$  pour trouver ce terme. Cela donne un point de vue intéressant sur le modèle XY

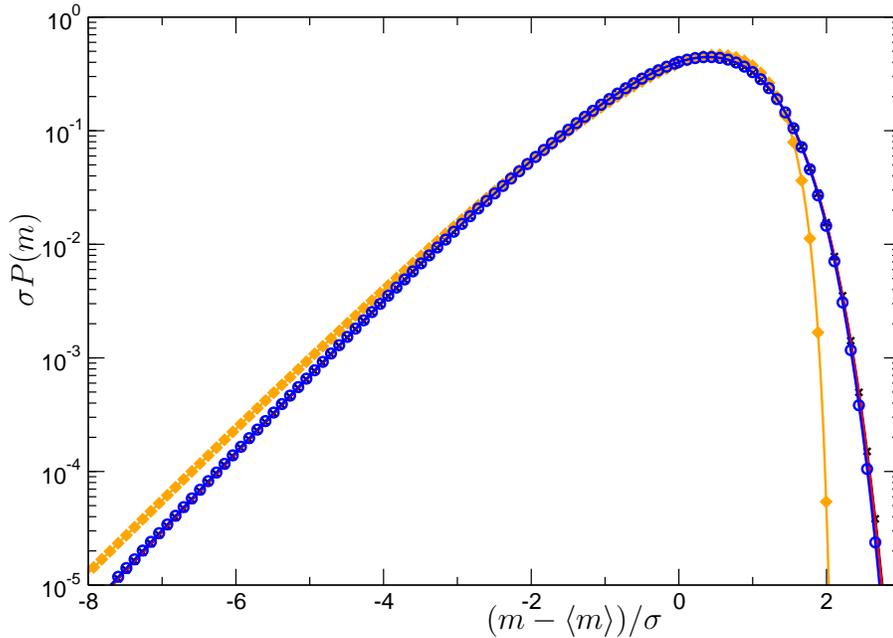


FIG. 3.8 – Distributions  $\Pi$ , obtenues par transformée de Fourier numérique, pour différents propagateurs  $G_{\mathbf{q}}$  :  $G_{\mathbf{q}}^{-1} = q^2$  (ligne),  $G_{\mathbf{q}}^{-1} = q^2 + q^4$  ( $\circ$ ),  $G_{\mathbf{q}}^{-1} = 2 - \cos q_x - \cos q_y$  ( $\times$ ), et  $G_{\mathbf{q}}^{-1} = q^2 + q^4$  ( $\diamond$ ), pour un système de taille  $L = 128$ . Les distributions obtenues se ressemblent, et ne présentent pas de changement de concavité, qui indiquerait la présence d'un second minimum de potentiel.

2d, correspondant au cas limite où  $G_{\mathbf{q}}^{-1} = q^2$  : ce cas peut simplement être considéré comme le cas limite d'une théorie de perturbation où la masse est nulle. La classe d'universalité du modèle n'apparaît pas dans ce terme, ce qui lui donne un côté "super-universel" : quelque soit le modèle, si on lui applique une théorie de perturbation, on retrouvera la contribution  $\Pi_{XY}$ . Il faut noter d'autre part que si la forme précise du propagateur modifie la distribution  $\Pi_{XY}$ , les distributions obtenues ont une forme très semblable (voir figure 3.8). Physiquement, cela vient du fait que les fluctuations distribuées suivant  $\Pi_{XY}$  sont des fluctuations localisées au voisinage de la valeur typique de l'aimantation. Elles ne sont donc sensibles qu'à la géométrie du potentiel au voisinage de ce point. En particulier elles ne sont pas sensibles à la structure globale du potentiel, structure qui dépend fortement de la classe d'universalité.

Le second terme au contraire dépend de la structure globale du potentiel, puisqu'il provient d'une dynamique du champ  $\phi_0$  qui franchit les barrières de potentiel, explorant ainsi tout le potentiel et plus seulement le voisinage d'un minimum. Ce terme va donc dépendre fortement de la classe d'universalité du système considéré. D'un point de vue plus technique, la dépendance en la classe d'universalité se fait par l'intermédiaire de l'action non gaussienne  $\mathcal{S}_0$

(3.25), qui détermine la forme des solutions solitons et par là même, donne la forme précise de  $\mathcal{C}$ .

À l'issue de cette étude, nous avons ainsi trouvé l'origine de l'analogie, signalée dans le chapitre précédent, entre la distribution du modèle d'Ising 2d pour  $T \lesssim T_c(L)$  et la distribution BHP. Il apparaît aussi clairement que l'accord ne peut être qu'approximatif, confirmant ainsi que la fonction BHP n'est pas universelle. L'allure générale de la distribution est donnée par la partie provenant du développement perturbatif, ce qui lui confère sa généralité. Les corrections sont dues à la forme générale de l'espace des phases, dépendant fortement de la classe d'universalité. L'accord peut être amélioré en jouant sur l'espace des phases du système en modifiant les paramètres de contrôle (champ magnétique, condition aux bords...).



# Conclusions et perspectives

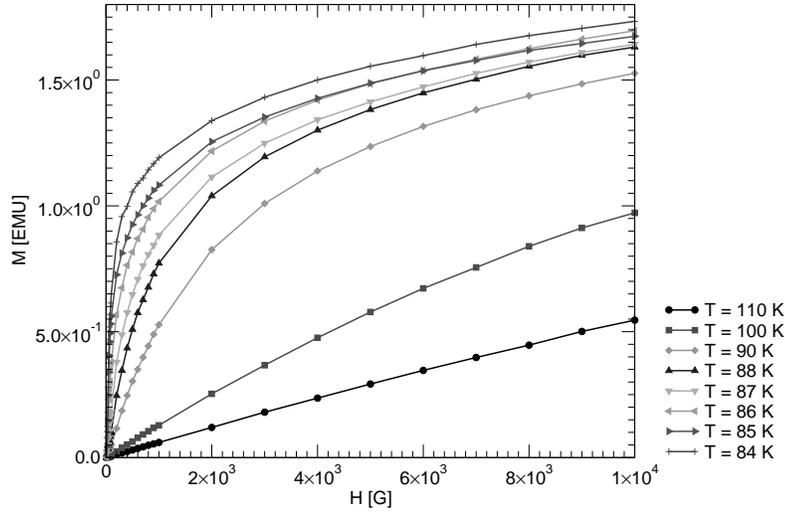
Cette étude nous a permis de trouver un lien entre la distribution des fluctuations du modèle d'Ising 2d et la distribution BHP, au moyen d'une étude dynamique des ces fluctuations. On peut toutefois remarquer que cette étude se généralise en fait à tout système critique d-dimensionnel à l'équilibre. Il suffit d'effectuer un développement perturbatif pour séparer l'action en deux parties, une partie gaussienne ne contenant que les modes de petites longueurs d'onde, et une action non linéaire portant sur le mode de plus grande longueur d'onde. La première partie donne des fluctuations type XY d-dimensionnel dans l'approximation des ondes de spins, indépendantes de la classe d'universalité, tandis que l'action non-linéaire va conduire à des corrections dépendantes de la classe d'universalité, et d'autant plus importante que l'on augmente la longueur de corrélation. Une conséquence de cela est que l'analogie avec la distribution BHP est spécifique à la dimension  $d=2$ .

Parmi les résultats expérimentaux qui ont motivé les travaux présentés dans cette partie, aucun ne concerne les systèmes magnétiques. Cela tient à la difficulté expérimentale à mesurer les fluctuations d'aimantation sur une durée suffisamment longue pour avoir des statistiques correctes. Pour pallier cette difficulté, nous avons pensé extraire de la courbe d'aimantation des informations sur la distribution du paramètre d'ordre. Au cours de l'été 2004, des travaux préliminaires ont été réalisés en collaboration avec S.T. Bramwell, au moyen du magnétomètre à SQUID commercial de la *Royal Institution of Great Britain*. Nous avons travaillé sur un échantillon de  $\text{CdCr}_2\text{S}_4$ , préparé par M. Green<sup>15</sup> [Salem et El-Ghazzawi 2004]. Les résultats, présentés sur la figure 1, sont assez prometteurs, car ils montrent qu'il est possible de rentrer dans la région critique avec un SQUID commercial et, qui plus est, que l'on peut mesurer la susceptibilité non-linéaire du matériau. Nous avons ainsi pu estimer la valeur du coefficient d'asymétrie de la distribution de l'aimantation pour ce matériau, à  $T = 86\text{K} > T_c = 84\text{K}$ . La valeur obtenue,  $\kappa = 2.7$ , montre que la distribution est non gaussienne. Il ne s'agit bien entendu que de résultats préliminaires : nous espérons dans un futur proche reprendre cette étude pour affiner nos résultats et la technique de mesure. L'objectif pourrait être de déterminer la dépendance de l'asymétrie et de l'aplatissement de la distribution avec la température.

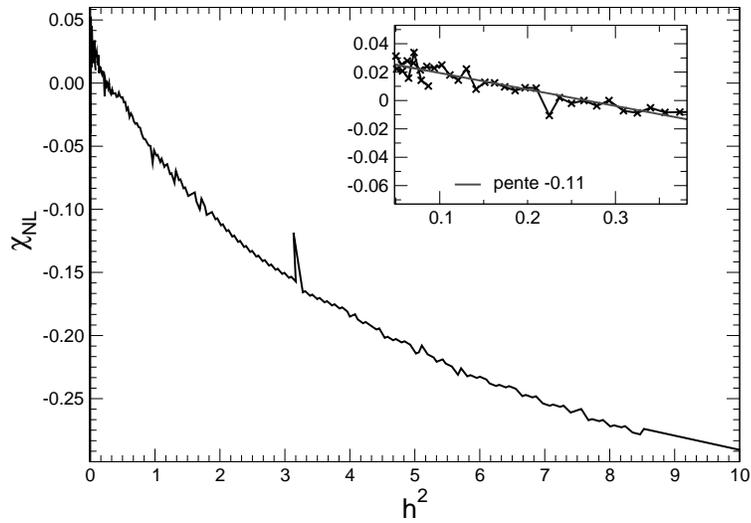
Sur le plan théorique, la principale (et difficile) question qui reste en suspens concerne les systèmes hors-équilibre. Pour ces systèmes en effet, les résultats expérimentaux montrent que les fluctuations d'énergie d'un système tridimensionnel (comme dans le cas de la turbulence dans les expériences de Labbé-Pinton-Fauve) se comporte comme les fluctuations du

---

<sup>15</sup>University College London et Royal Institution



(a) Courbes d'aimantations obtenues pour différentes températures.



(b) Susceptibilité non linéaire mesurée à  $T = 86K > T_c = 84K$ .

FIG. 1 – Résultats expérimentaux préliminaires, obtenus sur une poudre de  $\text{CdCr}_2\text{S}_4$ .

---

paramètre d'ordre d'un système bidimensionnel.

Deux points restent donc à éclaircir, à savoir pourquoi l'énergie se comporte comme un paramètre d'ordre, et enfin quelle est la raison de la réduction dimensionnelle observée dans les fluctuations.



## Deuxième partie

### Décohérence quantique et lois larges



# Introduction

Cette partie présente une étude de la décohérence d'un système quantique à deux niveaux, par un bruit classique intermittent. Issue d'un groupe de travail au sein de l'équipe de physique théorique, il a été effectué avec Josef Schrieffer, David Carpentier et Pascal Degiovanni. Ce chapitre introductif a pour but de présenter le contexte de notre étude, ainsi que les notions utiles pour la compréhension des articles reproduits dans les chapitres suivants.

## 1 Sommes de variables aléatoires : cas des lois larges

Dans la première partie, nous avons étudié les conséquences des corrélations sur les sommes de variables aléatoires, comme un écart au théorème central limite (TCL). Dans cette partie nous allons nous intéresser au cas où une autre hypothèse du TCL n'est pas satisfaite, c'est-à-dire quand la distribution des variables aléatoires microscopiques a un second moment non défini. Dans ce cas, le TCL ne s'applique plus, mais il existe une généralisation, appelée théorème central limite généralisé (GCLT). La forme de la distribution limite est moins générale que dans le cas du TCL : les différentes formes de distributions dépendent du comportement asymptotique de la distribution des variables aléatoires microscopiques.

### 1.1 Lois larges

Lorsque les queues de la loi de distribution sont données par des lois de puissance :

$$P(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x^{1+\alpha}}, \quad (1)$$

avec  $\alpha \in ]0, 2[$ , on trouve que tous les moments d'ordre  $q$ , définis par

$$\langle x^q \rangle = \int_0^\infty dx x^q P(x), \quad (2)$$

divergent pour  $q \geq \alpha$ . Ainsi pour  $\alpha \in ]1, 2[$ , l'écart-type de  $P$  n'est pas défini, et pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , ce sont la moyenne et l'écart-type qui ne sont plus définis. Dans toute cette partie on appellera loi large une telle distribution, dont le second moment n'est pas défini. Mathématiquement, Lévy et Kolmogorov ont obtenu dans les années 30 la généralisation du théorème central limite pour ce genre de lois [Lévy 1954, Kolmogorov 1960], comme nous le verrons dans la section suivante. Ce n'est qu'au cours des années 70 cependant que la physique s'est

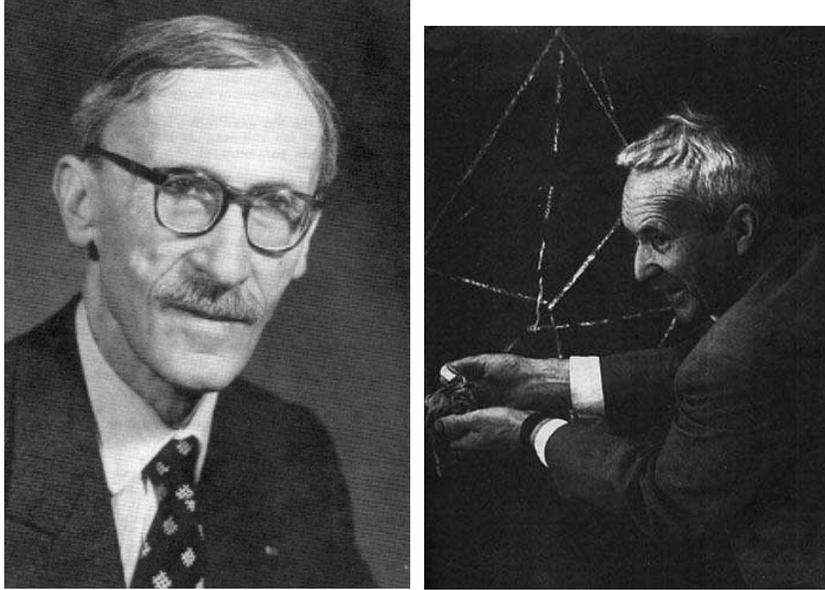


FIG. 1 – Paul Lévy (1886-1971) et Andreï N. Kolmogorov (1903-1987).

emparée de ce résultat et depuis, son application dans des domaines variés s'est révélée très riche [Bouchaud et Georges 1990, Shlesinger et al. 1993, Bertin et Bardou 2005].

Les lois larges sont évoquées dans de nombreux contextes, comme par exemple pour les phénomènes de diffusions anormales [Bouchaud et Georges 1990], ou dans les modèles de pièges pour les systèmes vitreux. Dans ce dernier cas par exemple, on peut construire un modèle dans lequel le paysage énergétique associé à un système vitreux est constitué de puits, dont la profondeur  $E$  est une variable aléatoire, distribuée de manière exponentielle [Bouchaud 1992] :

$$P(E) = \frac{1}{E_0} e^{-E/E_0}. \quad (3)$$

Si on suppose que le système est thermiquement activé, le temps de séjour dans un puits est donné par la loi d'Arrhenius,

$$\tau = \tau_0 \exp(-E/k_b T). \quad (4)$$

L'énergie  $E$  étant une variable aléatoire,  $\tau$  est aussi une variable aléatoire, distribuée suivant [Bardou et al. 2002] :

$$P(\tau) = \frac{k_b T}{E_0} \frac{\tau_0^\mu}{\tau^{1+\mu}}, \text{ avec } \mu = k_b T/E_0. \quad (5)$$

Si  $\mu \in ]0, 2[$ , le TCL ne peut pas s'appliquer et l'on obtient une dynamique anormale, pour le système vitreux. En particulier on peut obtenir un phénomène de vieillissement, lié à une brisure faible de l'ergodicité du système [Bouchaud 1992].

## 1.2 Lois de Lévy

Dans cette section sont regroupés quelques résultats sur les lois de Lévy, dans le cas où les variables aléatoires sont positives<sup>16</sup>. Elle est fortement inspirée de la présentation faite par Bardou *et al.* [Bardou et al. 2002]. Considérons un ensemble de  $N$  variables aléatoires  $x_i$  indépendantes et identiquement distribuées, suivant la densité de probabilité  $P$  dont le comportement asymptotique est donné par (1). On peut alors définir la variable aléatoire somme, ou “vol de Lévy” :

$$S_N = \sum_{i=1}^N x_i. \quad (6)$$

Si tous les moments de la distribution sont finis, alors le théorème central limite s’applique. On sait alors que la distribution limite de  $S_N/\sqrt{(N)}$  est une distribution gaussienne. Autrement dit, pour  $N \gg 1$ , il existe une variable aléatoire  $\xi$ , distribuée suivant la loi normale de moyenne nulle et d’écart-type unité, telle que

$$S_N = \langle x \rangle N + \sigma \sqrt{N} \xi. \quad (7)$$

Dans le cas où la distribution  $P$  est large, Lévy et Gnedenko ont montré qu’il est possible de généraliser la décomposition (7), à condition d’avoir une dépendance en  $N$  anormale, et que la variable aléatoire ne soit pas distribuée suivant la loi normale, mais suivant une distribution dite de Lévy,  $L_\alpha$ .

Le schéma de la démonstration permet de mettre en évidence le rôle central de la transformée de Laplace dans ce problème, ce qui explique pourquoi ce sera l’outil principal des travaux présentés dans les chapitres suivants. Si on note  $\Pi_N$  la distribution de  $S_N$ , les variables  $x_i$  étant indépendantes on a :

$$\Pi_N = \underset{i=1}{\overset{N}{\otimes}} P. \quad (8)$$

Ce produit de convolution s’écrit, en notant  $\mathcal{L}[f]$  la transformée de Laplace d’une fonction  $f$  :

$$\mathcal{L}[\Pi_N] = \mathcal{L}[P]^N. \quad (9)$$

Comme  $P$  est une distribution de probabilité, elle est à valeur positive et normalisée. Il en découle que  $\mathcal{L}[P](s) \leq 1$ , et  $\mathcal{L}[P](s=0) = 1$ . Ainsi la contribution principale à l’expression (9) est donnée par un voisinage de  $s = 0$ . On peut donc se contenter d’un développement limité de  $\mathcal{L}[P]$  au voisinage de 0. Dans le cas où  $\alpha < 1$ , on obtient :

$$\mathcal{L}[P] = 1 - \Gamma(1 - \alpha) s^\alpha + \mathcal{O}(s). \quad (10)$$

---

<sup>16</sup>Dans les chapitres suivants, ce seront des temps d’attente qui seront distribués suivant une loi large, ce qui justifie de se limiter ici au cas de variables positives. Il est possible de généraliser ces résultats à des variables aléatoires réelles [Lévy 1954, Bouchaud et Georges 1990].

Le produit (9) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}[\Pi_N](s) = \exp [N \ln (1 - \Gamma(1 - \alpha)s^\alpha + \mathcal{O}(s))], \quad (11)$$

$$\simeq \exp [N\Gamma(1 - \alpha)s^\alpha + \mathcal{O}(s)]. \quad (12)$$

Pour avoir une limite bien définie quand  $N \rightarrow \infty$ , on peut poser  $\hat{s} = \frac{s}{N^{1/\alpha}}$ , ce qui donne :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{L}[\Pi_N](\hat{s}) \simeq \exp [\Gamma(1 - \alpha)\hat{s}^\alpha]. \quad (13)$$

Maintenant nous pouvons expliciter la transformée de Laplace, en écrivant

$$\mathcal{L}[\Pi_N](s) = \int dX \Pi_N(X) e^{-sX}, \quad (14)$$

et effectuer le changement de variable  $\xi = X/N^{1/\alpha}$ , ce qui conduit à l'expression :

$$\mathcal{L}[\Pi_N](s) = \int d\xi \Pi_N(N^{1/\alpha}\xi) e^{-sN^{1/\alpha}\xi}. \quad (15)$$

En notant

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pi_N(N^{1/\alpha}\bullet) = L_\alpha, \quad (16)$$

et en prenant la limite de l'expression (15), on trouve finalement

$$\mathcal{L}[\Pi_N](\hat{s}) = \int d\xi \Pi_N(\hat{s}\xi) e^{-\hat{s}\xi} = \exp [\Gamma(1 - \alpha)\hat{s}^\alpha]. \quad (17)$$

Ainsi on obtient que pour  $N \gg 1$  on peut écrire

$$S_N = N^{1/\alpha}\xi, \quad (18)$$

où  $\xi$  est une variable distribuée sur la distribution  $L_\alpha$  définie par sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}[L_\alpha](s) = e^{-\Gamma(1-\alpha)s^\alpha}. \quad (19)$$

Les distributions  $L_\alpha$  ainsi obtenues sont appelées lois de Lévy. Le même raisonnement peut être mené pour  $1 < \alpha < 2$ , en utilisant le développement (10) adapté à ce cas. On obtient alors que pour  $N \gg 1$ ,

$$S_N = \langle x \rangle N + N^{1/\alpha}\xi, \quad (20)$$

où  $\xi$  est une variable distribuée suivant  $L_\alpha$ , définie par sa transformée de Laplace

$$\mathcal{L}[L_\alpha](s) = e^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}\Gamma(1-\alpha)s^\alpha}. \quad (21)$$

Il est possible de démontrer ces résultats en toute rigueur, ce qui conduit au théorème central limite généralisé.

**Théorème** (TCL généralisé). Soit  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires **positives**, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, suivant une densité de probabilité  $P$  telle que

$$P(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x^{1+\alpha}}, \quad (22)$$

et soit la variable aléatoire  $S_N = \sum_{i=1}^N x_i$ .  
Alors

- si  $1 < \alpha < 2$  la suite  $\{Z_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ , définie par  $Z_N = N^{1-1/\alpha} \left( \frac{S_N}{N} - \langle x \rangle \right)$ , converge en loi vers la distribution de Lévy  $L_\alpha$  définie par :  $\mathcal{L}[L_\alpha](s) = e^{-\frac{\alpha-1}{\alpha} \Gamma(1-\alpha) s^\alpha}$ .
- si  $0 < \alpha < 1$  la suite  $\{Z_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ , définie par  $Z_N = N^{-1/\alpha} S_N$ , converge en loi vers la distribution de Lévy  $L_\alpha$  définie par :  $\mathcal{L}[L_\alpha](s) = e^{-\Gamma(1-\alpha) s^\alpha}$ .

Comme dans le cas du TCL, ce théorème montre que la distribution limite ne dépend pas du détail de la distribution  $P$  initiale, mais uniquement de son comportement asymptotique. Ainsi toutes les lois larges  $P$  sont regroupées en différentes classes paramétrées par la valeur de l'exposant  $\alpha$ , conduisant à une loi de Lévy  $L_\alpha$  bien définie. Par rapport au TCL énoncé dans la première partie, on perd en généralité dans la mesure où la forme de la distribution limite dépend de la valeur de l'exposant  $\alpha$ . Dans le cas du TCL en effet la loi limite est toujours une distribution gaussienne.

Les lois de Lévy sont définies par leur transformée de Laplace, qu'il est malheureusement impossible d'inverser exactement (sauf dans quelques cas particuliers, comme  $\alpha = 1/2$ ). On peut néanmoins obtenir les comportements asymptotiques de ces distributions [Bardou et al. 2002] :

- $\forall \alpha \in ]0, 2[$ ,  $L_\alpha(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha}{x^{1+\alpha}}$ ,
- $\forall \alpha \in ]0, 1[$ ,  $L_\alpha(x < 0) = 0$ , et  $L_\alpha(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} Ax^{\frac{\alpha-2}{2(1-\alpha)}} \exp(Bx^{\alpha/(\alpha-1)})$ ,
- $\forall \alpha \in ]1, 2[$ ,  $L_\alpha(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} Cx^{\frac{\alpha-2}{2(1-\alpha)}} \exp(-D|x|^{\alpha/(\alpha-1)})$ ,

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$  sont des constantes réelles positives.

Les lois larges, les vols de Lévy et l'application du TCL généralisé font désormais partie du paysage de la physique contemporaine, dont les domaines d'applications vont du refroidissement laser [Bardou et al. 2002] à la biophysique [Bardou et Jaeger 2004] en passant par la physique des systèmes mésoscopiques [Bardou 1997, Brokmann et al. 2003, Margolin et Barkai 2004]. Le travail présenté dans cette partie s'inscrit dans ce mouvement, en étudiant l'effet des lois larges sur la décohérence d'un système quantique à deux niveaux.

## 2 Décohérence quantique

Nous allons à présent présenter quelques résultats sur la décohérence d'un système quantique. Ces résultats permettront de définir les objets de base de l'étude présentée dans les chapitres suivants.

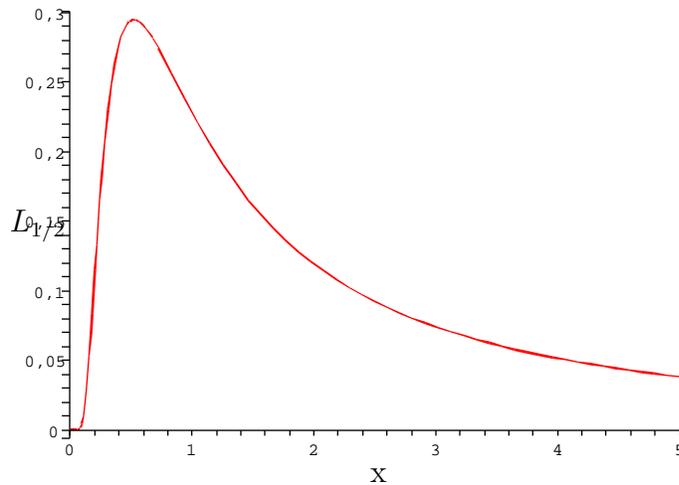


FIG. 2 – Allure de la loi de Lévy  $L_{1/2}$ . Noter la croissance très rapide à partir de  $x = 0$ , puis la lente décroissance pour  $x \gg 1$ .

## 2.1 Système quantique et environnement

Le problème de la cohérence d'un système quantique est un problème fondamental qui apparaît lorsque ce système est en interaction avec un environnement comportant un grand nombre de degrés de liberté, sur lequel on n'effectue aucune mesure. Un exemple d'une telle situation est fourni par la physique atomique. Si l'on s'intéresse au rayonnement émis ou absorbé par un ensemble d'atomes, le système quantique fermé qu'il faudrait étudier est l'ensemble des atomes et le rayonnement. Cependant, par exemple dans une expérience de spectroscopie, nous n'avons accès qu'au rayonnement, et aucune information sur les états des atomes n'est disponible. C'est cette absence d'information qui induit une perte de cohérence de la partie du système que l'on observe. Dans ce cas l'évolution du sous-système étudié n'est pas unitaire : une superposition quantique d'état évolue sous l'effet du couplage à l'environnement, vers un mélange statistique d'états incohérents.

## 2.2 Fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon

La description générale de cette perte de cohérence a été faite par Feynman et Vernon en 1963 [Feynman et Vernon 1963, Feynman et Hibbs 1965]. Considérons un système quantique  $\mathfrak{S}$  en interaction avec un environnement  $\mathfrak{E}$ . On notera  $q(t)$  les coordonnées du système et  $Q(t)$  celles de l'environnement. L'action totale du système,  $\mathcal{S}$ , se décompose suivant :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[Q(t)] + \mathcal{S}_{\mathfrak{S}}[q(t)] + \mathcal{S}_{\text{int}}[q(t), Q(t)], \quad (23)$$

où  $\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[Q(t)]$  est l'action propre à l'environnement,  $\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}[q(t)]$  celle propre au système et  $\mathcal{S}_{\text{int}}[q(t), Q(t)]$  est l'action d'interaction entre système et environnement<sup>17</sup>. Alors la probabilité que le système étudié soit en  $q_f$  à l'instant  $t_f$ , sachant qu'il était à  $q_i$  à l'instant  $t_i$ , est donnée par l'intégrale de chemin [Feynman et Hibbs 1965, Degiovanni 2003] :

$$P[(q_f, t_f); (q_i, t_i)] = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}q'(t) \mathcal{F}[q(t), q'(t)] \exp \left( i\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}[q(t)] - i\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}[q'(t)] \right), \quad (24)$$

où  $\mathcal{F}[q(t), q'(t)']$  est la fonctionnelle d'influence de Feynman-Vernon :

$$\mathcal{F}[q(t), q'(t)'] = \sum_f \int \mathcal{D}Q(t) \mathcal{D}Q'(t) \exp i \left( \mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[Q(t)] - \mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[Q'(t)] + \mathcal{S}_{\text{int}}[q(t), Q(t)] - \mathcal{S}_{\text{int}}[q'(t), Q'(t)] \right). \quad (25)$$

La somme sur  $f$  est la somme sur tous les états finals possibles pour les coordonnées de l'environnement  $Q(t_f)$  : puisqu'aucune mesure ne sera effectuée sur l'environnement, tous les états finaux sont possibles. Il faut donc sommer toutes leurs contributions. Cette fonctionnelle vérifie un certain nombre de règles, qu'on trouvera par exemple dans [Feynman et Hibbs 1965, Degiovanni 2003]. La fonctionnelle d'influence est une propriété de l'environnement qui traduit son influence sur l'évolution du système. Feynman propose de faire l'analogie entre cette fonctionnelle et une force extérieure agissant sur un système classique<sup>18</sup> [Feynman et Hibbs 1965] : la connaissance de  $\mathcal{F}$  pour un système quantique serait analogue à la connaissance de l'action de la force externe classique sur toutes les trajectoires possibles du système classique étudié.

Voyons à présent l'interprétation physique de cette fonctionnelle d'influence [Stern et al. 1990, Degiovanni 2003]. Pour cela nous allons nous intéresser à une expérience d'interférences sur le système  $\mathfrak{S}$ , par exemple un électron, au cours de laquelle ce dernier peut suivre deux trajectoires  $q$  et  $q'$ . Initialement l'environnement  $\mathfrak{E}$  est dans l'état  $|0_{\mathfrak{E}}\rangle_i$ . Si on note  $U[q]$  l'opérateur d'évolution de l'environnement quand le système suit la trajectoire  $q$ , l'état final de  $\mathfrak{E}$  est donné par :

$$|0_{\mathfrak{E}}\rangle_f = \begin{cases} U[q(t)] |0_{\mathfrak{E}}\rangle_i, & \text{si } \mathfrak{S} \text{ suit l'évolution } q, \\ U[q'(t)] |0_{\mathfrak{E}}\rangle_i, & \text{si } \mathfrak{S} \text{ suit l'évolution } q'. \end{cases} \quad (26)$$

Chacune des trajectoires  $q$  du système  $\mathfrak{S}$  contribue par une phase  $i\mathcal{S}_{\mathfrak{S}}[q(t)]$ . Ainsi l'amplitude de probabilité  $\mathcal{A}$  que l'état final de l'environnement soit  $|\phi_{\mathfrak{E}}\rangle$  dépend de la trajectoire suivie

<sup>17</sup>Cette décomposition est tout à fait semblable à celle obtenue dans le cas de la solution du modèle d'Ising à bord (voir équation (2.43), page 149). En fait, on peut voir l'intégration sur les variables de bulk conduisant à l'action 1d (2.81), page 156, comme le calcul de la fonctionnelle d'influence du bulk, considéré ici comme l'environnement, sur le système qui serait ici le champ magnétique fermionique au bord. Il s'agit là bien sûr d'une simple analogie formelle liée à l'utilisation d'intégrales de chemin.

<sup>18</sup>Pour une introduction à l'intégrale de chemin au moyen d'analogies avec la mécanique classique et l'optique, on peut se reporter à l'article original de Feynman [Feynman 1948].

par le système :

$$\mathcal{A} = e^{i\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[q(t)]} \langle \phi_{\mathfrak{E}} | U[q(t)] | 0_{\mathfrak{E}} \rangle_{\mathfrak{i}}, \quad (27)$$

$$\mathcal{A}' = e^{i\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[q'(t)]} \langle \phi_{\mathfrak{E}} | U[q'(t)] | 0_{\mathfrak{E}} \rangle_{\mathfrak{i}}. \quad (28)$$

Le terme d'interférence entre les deux trajectoires  $q$  et  $q'$ , sachant que l'état final de l'environnement est  $|\phi_{\mathfrak{E}}\rangle$  est :

$$V[q, q'; |\phi_{\mathfrak{E}}\rangle] = 2\Re(\mathcal{A}\mathcal{A}'^*). \quad (29)$$

Si l'on ne fait aucune mesure sur l'environnement, il faut sommer sur tous les états finaux possibles pour celui-ci, ce qui conduit à :

$$V[q, q'] = 2\Re\left(e^{i(\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[q] - \mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[q'])} \cdot \mathcal{F}[q, q']\right). \quad (30)$$

En général la fonctionnelle d'influence est complexe : on peut l'écrire sous la forme  $\mathcal{F}(t) = D(t) e^{i\Psi(t)}$ , avec  $D(t)$  le module et  $\Psi(t)$  la phase de  $\mathcal{F}(t)$ . Alors on obtient

$$V[q, q'] = D(t) \cos\left(\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[q(t)] - \mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[q'(t)] + \Psi(t)\right). \quad (31)$$

La structure de ce facteur est très semblable à ce que l'on obtient en optique ondulatoire [Born et Wolf 1999]. La plupart du temps les franges ainsi obtenues ont des variations rapides données par la partie en cosinus, et une modulation plus lente, donnée par le préfacteur  $D(t)$ <sup>19</sup>. Ainsi le module de la fonctionnelle d'influence,  $D(t)$ , apparaît comme le facteur de contraste des franges d'interférences : c'est l'analogie classique de la visibilité des franges en optique ondulatoire. Dans les expériences sur les Qubits [Makhlin et al. 2001, Nakamura et al. 2002, Schrieffer 2005], la quantité mesurable est ce facteur  $D(t)$ , qui est appelé le facteur de cohérence du Qubit. C'est donc l'objet central de l'étude reportée dans cette partie.

## 2.3 Décohérence et TCL

### 2.3.1 Cas d'un environnement classique aléatoire

À partir de maintenant nous allons supposer que l'environnement  $\mathfrak{E}$  est classique. Dans ce cas la trajectoire suivie par l'environnement,  $Q_c$ , est déterminée par les équations classiques du mouvement. On a alors  $\mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[Q(t)] = \mathcal{S}_{\mathfrak{E}}[Q_c(t)]$ . Par conséquent, la fonctionnelle d'influence (25) devient :

$$\mathcal{F}[q(t), q'(t)] = \exp i\left(\mathcal{S}_{\text{int}}[q(t), Q_c(t)] - \mathcal{S}_{\text{int}}[q'(t), Q_c(t)]\right). \quad (32)$$

---

<sup>19</sup>Ceci n'est qu'une approximation. On ne peut pas *a priori* exclure un comportement plus "pathologique" de l'argument du cosinus, où cette structure ne serait plus valable. Celle-ci ne sera justifiée en fait que par les résultats expérimentaux.

Dans ce cas l'action de l'environnement sur le système se fait par l'intermédiaire d'un potentiel classique  $V[q(t), t]$  :

$$\mathcal{S}_{\text{int}}[q(t), Q_{c(t)}] = - \int_{t_i}^{t_f} dt V[q(t), t]. \quad (33)$$

L'influence de l'environnement est incluse dans la définition du potentiel. En fait, l'équation (32) fait apparaître la quantité

$$\Phi[q(t), q'(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( V[q(t), t] - V[q'(t), t] \right), \quad (34)$$

qui est la différence de phase accumulée par le système entre les trajectoires  $q$  et  $q'$ .

Le cas qui va nous intéresser dans la suite de cette partie est celui d'un potentiel d'interaction aléatoire. Dans ce cas, la phase accumulée est elle-même une variable aléatoire, de sorte que :

$$\mathcal{F} = \int d\Phi \Pi(\Phi) e^{i\Phi} = \langle e^{i\Phi} \rangle_{\Pi}, \quad (35)$$

où  $\Pi$  est la distribution de la phase. L'équation ci-dessus montre que dans le cas d'un environnement classique couplé aléatoirement avec le système, la fonctionnelle d'influence se réduit à la fonctionnelle génératrice de la distribution de la phase.

### 2.3.2 Distribution normale de la phase

Entre les instants  $t_i$  et  $t_f = t_i + \tau$ , la phase accumulée par le système s'écrit :

$$\Phi(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt \phi(t). \quad (36)$$

où  $\phi(t)$  est l'incrément de phase à l'instant  $t$ . Ainsi si  $\phi$  est une variable aléatoire, la phase accumulée effectue une marche aléatoire en temps continue [Bouchaud et Georges 1990]. Pour aller un peu plus loin dans l'analyse, discrétisons l'intégrale précédente. Entre  $t_i$  et  $t_f$ , le système reçoit  $N(\tau)$  impulsions élémentaires de phase, à des instants  $t_k$ . L'intégrale précédente s'écrit alors :

$$\Phi(t_i, t_f) = \sum_{k=1}^{N(\tau)} \phi(t_k). \quad (37)$$

Dans cette expression de la phase, il y a deux grandeurs aléatoires : la première est l'amplitude de l'incrément de phase aux instants  $t_k$ , la seconde est associée aux instants  $t_k$  eux-mêmes. Dans le cas où les instants  $t_k$  sont régulièrement espacés, si l'on fait les hypothèses suivantes :

1. Les incréments de phases sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi  $P$  ;
2. Les deux premiers moments de la distribution  $P$  sont finis ;

alors le théorème central limite (1.1.2) s'applique. Ainsi la variable aléatoire  $\xi_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\Phi$  est distribuée, pour  $N \gg 1$  selon une distribution gaussienne  $\mathcal{N}_{\bar{\xi},\sigma}(\xi)$ , où  $\bar{\xi}$  est la valeur moyenne de  $\xi$  et  $\sigma$  son écart-type. Dans ce cas, à couplage faible, il est possible de calculer simplement la fonctionnelle d'influence, dans la cas où  $N \gg 1$  :

$$\mathcal{F} = \int d\xi \mathcal{N}_{\bar{\xi},\sigma}(\xi) e^{i\sqrt{N(t)}\xi} = e^{i\bar{\xi}\sqrt{N}} \cdot e^{-\frac{N\sigma^2}{2}}. \quad (38)$$

Ainsi le facteur de visibilité des franges est :

$$V(t) = e^{-\frac{N(t)\sigma^2}{2}}. \quad (39)$$

On peut alors définir un temps caractéristique pour l'atténuation des franges, appelé temps de déphasage  $\tau_\phi$ , par :

$$\frac{N(\tau_\phi)\sigma^2}{2} = 1. \quad (40)$$

En utilisant  $N(t) \sim t/\tau_0$ , on trouve que le temps de déphasage est  $\tau_\phi \sim \frac{\tau_0}{\sigma^2}$ , où  $\tau_0$  est un temps caractéristique microscopique. Le temps de déphasage est d'autant plus court que la distribution est large.

### 3 Décohérence induite par un bruit intermittent

Nous venons de décrire le scénario de décohérence standard, basé sur des hypothèses assurant l'application du TCL, et un espacement régulier des incréments de phase. Une question naturelle est donc de voir ce qu'il se passe quand ces hypothèses ne sont pas satisfaites, et donc lorsque la distribution de la phase est anormale.

#### 3.1 Déphasage induit par une dynamique de Lévy

La première extension possible est de considérer le cas où les impulsions de phase sont largement distribuées, mais où les instants  $t_k$  sont toujours régulièrement espacés. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\phi(t_k) = h + \kappa\xi_k, \quad (41)$$

où  $h$  et  $\kappa$  sont des constantes. La variable aléatoire  $\xi_k$ , de moyenne nulle, est distribuée suivant une loi large :

$$P(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\xi^{1+\nu}}. \quad (42)$$

D'après le théorème central limite généralisé présenté page 73, la phase accumulée après  $N$  impulsions s'écrit :

$$\Phi_N = Nh + \kappa N^{1/\nu}\xi, \quad (43)$$

où  $\xi$  est distribuée suivant une loi de Lévy  $L_{\nu,\beta}$ , où  $\beta \in [-1, 1]$  caractérise l'asymétrie de la loi [Bouchaud et Georges 1990, Bardou et al. 2002]. Le calcul de la fonctionnelle d'influence dans ce cas a été réalisé par Lutz [Lutz 2002] pour  $\nu \neq 1$ , et on obtient, en notant  $\tau_0$  une échelle de temps microscopique :

$$\mathcal{F} = e^{-C\kappa^\nu t/\tau_0} \cdot \exp i \left( h - C\beta\kappa^\nu \tan \left( \frac{\pi\nu}{2} \right) \frac{t}{\tau_0} \right). \quad (44)$$

Le facteur de cohérence subit donc toujours une décroissance exponentielle, dont le temps de déphasage est donné par

$$\tau_\phi \propto \kappa^{-\nu}. \quad (45)$$

On retrouve dans le cas  $\nu = 2$  le cas gaussien présenté dans la section précédente. Le scénario de décohérence est le même que dans le cas gaussien, mais avec un temps caractéristique différent.

### 3.2 Bruit intermittent

L'étude présentée dans les chapitres suivants s'intéresse au cas où les incréments de phase sont distribués suivant une loi qui appartient au bassin d'attraction de la loi normale, mais où la distribution des temps  $t_k$  est large. Un peu à la manière des modèles de pièges [Bouchaud 1992], on suppose que la durée  $\tau$  entre deux impulsions de phase consécutives est largement distribuée :

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\tau^{1+\mu}}. \quad (46)$$

Nous avons commencé par étudier les propriétés statistiques de ce modèle de bruit. Il possède des propriétés de vieillissement et un spectre en  $1/f$  quand  $\mu \rightarrow 1$ . Ces deux propriétés rendent ce modèle de bruit particulièrement intéressant, car il semble que la limite ultime de cohérence pour un Qubit solide soit justement la présence d'un bruit en  $1/f$  vieillissant. L'origine précise de ce bruit en  $1/f$  n'est pas encore clairement établie. C'est pourquoi un grand nombre d'études sont consacrées à la décohérence par divers modèles de bruits en  $1/f$ , par exemple [Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003, Martinis et al. 2003, Makhlin et Shnirman 2004]. D'autre part certaines expériences semblent montrer que l'amplitude du bruit décroît dans le temps, mettant ainsi en évidence un phénomène de vieillissement. Ces différents points sont autant de motivations pour l'étude de la décohérence induite par un bruit en  $1/f$  vieillissant. À l'aide de ce modèle, nous avons pu calculer le facteur de décohérence pour différentes valeurs de  $\mu$ . Les scénarios ainsi obtenus s'écartent d'une simple décroissance exponentielle. Nous avons de plus mis en évidence les effets du vieillissement du bruit sur la décohérence du système.

Tous ces résultats sont présentés en détail dans les deux articles reproduits dans les chapitres suivants. Le premier présente le modèle du bruit et les résultats obtenus pour la décohérence par un bruit de moyenne nulle [Schrieffer et al. 2005b]. Les détails techniques concernant la méthode pour obtenir ces résultats, ainsi qu'une extension au cas d'un bruit ayant une moyenne non nulle, sont donnés dans le second article [Schrieffer et al. 2005a].



# Chapitre 1

## Non stationary dephasing of two level systems

J.Schrieff, M. Clusel, D. Carpentier et P. Degiovanni  
article publié dans *Europhysics Letters*, **12** : 1 (2005).

**Abstract** We investigate the influence of nonstationary  $1/f^\mu$  noise, produced by interacting defects, on a quantum two-level system. Adopting a simple phenomenological model for this noise we describe exactly the corresponding dephasing in various regimes. The nonstationarity and pronounced non-Gaussian features of this noise induce new anomalous dephasing scenarii. Beyond a history-dependent critical coupling strength the dephasing time exhibits a strong dependence on the age of the noise and the decay of coherence is not exponential.

The question of the phase coherence of a quantum two level system (TLS) in a noisy environment has motivated numerous recent works. In particular it is of crucial interest in the context of quantum computing with solid state quantum bits[Makhlin et al. 2001]. In this case it is now believed that dephasing of the TLS by a low-frequency ( $1/f$ ) noise is a limiting mechanism which certainly deserves further studies. The microscopic origin of these low-frequency fluctuations depends on the considered system and is mostly not understood[Nakamura et al. 2002]. Hence, in previous works on this problem the  $1/f$  environment was modeled phenomenologically either by a set of harmonic modes (*e.g.* spin-Boson model)[Makhlin et al. 2003] or by an ensemble of independent bistable fluctuators (Dutta-Horn model)[Weissman 1988, Paladino et al. 2002]. The first model assumes a Gaussian distribution for the fluctuations and stationarity of the noise. As this low frequency noise appears to be an essentially out of equilibrium phenomenon, this last hypothesis is questionable[Galperin et al. 2003]. The Dutta-Horn model does not suffer from this restriction[Paladino et al. 2002], but assumes the presence of a broad distribution of relaxation times for the independent fluctuators, or equivalently a flat distribution for their random energy barriers. However, both the nature of these fluctuators and the origin of these long

relaxation times are beyond the current experimental knowledge. We consider the interactions between the fluctuators as a possible source for these slow dynamics. In this letter, we explore the consequences of this interaction on the nonstationarity of the dephasing by considering a simple phenomenological model for a strongly coupled cluster of fluctuators. Let us thus consider a dissipative quantum two-level system (qubit) described by the Hamiltonian :

$$\mathcal{H} = \epsilon \sigma^z + \Delta \sigma^x - \frac{1}{2} X \sigma^z + \mathcal{H}_{\text{env}} , \quad (1.1)$$

where  $\epsilon$  and  $\Delta$  are control parameters which we assume to be time-independent and  $X$  describes the fluctuating extra bias (noise) induced by the environment described by  $\mathcal{H}_{\text{env}}$ . Within a Dutta-Horn model[Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003], the noise  $X = \sum_i \gamma_i g(\mathbf{r}_i) \sigma_i^z$  consists in the sum of contributions from independent fluctuators, modeled as random two-level systems coupled to an equilibrium bath (*e.g.* the phonons). This bosonic bath induces an elastic or electromagnetic coupling  $\gamma_i g(\mathbf{r}_i)$  between the qubit and the fluctuator in  $\mathbf{r}_i$ , but also mutual couplings of *same origin* between the fluctuators,  $J_{ij} = \lambda_j \lambda_i g(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ , which are usually neglected. The interaction  $g(r)$  and the couplings between the qubit/fluctuators and the bosonic field  $\lambda_i, \gamma_i$  depend on the nature of the coupling to the bath : both elastic strain (phonons) and dipolar electric coupling correspond to a long-range dipolar interaction  $g(r) \simeq r^{-3}$  [Black et Halperin 1977]. The source of the noise can thus be described by the Hamiltonian<sup>20</sup>

$$\mathcal{H}_{\text{env}} = \sum_i (E_i \sigma_i^z + t_i \sigma_i^x) + \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (1.2)$$

where  $E_i$  and  $t_i$  are respectively the random energy difference and tunneling amplitude of the fluctuators. The motivation to consider these couplings  $J_{ij}$  between the fluctuators comes in part from the analogous physics of TLS in amorphous solids : the relevance of these TLS couplings was stressed by Yu and Leggett [Yu et Leggett 1988], and found recent experimental evidence in the dielectric response of amorphous films[Ludwig et al. 2003]. These interactions are a possible source of broad distribution of relaxation times of the bath : in particular, using the language of pseudospins for the fluctuators in (1.2), a strong ferromagnetic coupling  $J$  between an ensemble of  $N$  spins forces these spins to tunnel simultaneously, therefore reducing exponentially ( $t \sim e^{-N}$ ) the tunneling amplitude of the cluster. Such a nonlinear relation between the size of a cluster and the corresponding relaxation time would naturally lead to a broad distribution for these times. Moreover, for randomly located fluctuators elastically coupled, we expect the interactions  $J_{ij}$  to be random and frustrating [Black et Halperin 1977]. It is then natural to consider the noise produced by a mesoscopic ensemble of  $N$  interacting fluctuators<sup>21</sup>. We expect these interactions and the associated frustration to bring very slow relaxational dynamics for the cluster. However this problem is

---

<sup>20</sup>Notice that these couplings were already present in [Galperin et al. 2003] on dephasing, but treated approximately within the framework of spectral diffusion[Black et Halperin 1977].

<sup>21</sup>Note that the physics associated with huge degeneracy of the classical ground state should be irrelevant in such mesoscopic clusters.

a formidable task, still unsolved in the case of classical spin glasses ( $t_i = 0$  in (1.2)). We therefore adopt a phenomenological approach and focus on the expected general consequences of its physics.

As in the case of independent fluctuators [Galperin et al. 2003, Paladino et al. 2002] we will focus on a classical description of the noise  $X(t)$ , considering an incoherent environment and neglecting back-action effects of the qubit. A common picture to describe the evolution of a glassy system is a random walk in phase space with broadly distributed time intervals  $\tau$  between the 'flips of the environment'. Hence, by analogy with the phase space trap models of classical glassy systems[Bouchaud 1992], we consider a general random intermittent noise, with randomly distributed heights  $x_i$  and durations  $\tau_i^\uparrow$  of the plateaus, and waiting times  $\tau_i$  between them (see Fig.1.1). For simplicity, we will focus on the case where the  $\tau_i^\uparrow$  are much shorter than the  $\tau_i$ , and given by their average  $\tau_0^\uparrow$ . On time scales  $\tau \gg \tau_0^\uparrow$ , the plateau is seen as a spike shifting the phase by  $x_i \tau_0^\uparrow$ . Moreover, to focus on dephasing and eliminate the drift of the accumulated phase of the qubit, the distribution  $\mathcal{P}(x)$  is assumed to have zero mean and a finite width  $g^2 = \langle x^2 \rangle (\tau_0^\uparrow)^2$ : It will be taken as Gaussian without loss of generality. Finally, we consider an algebraic distribution of waiting times  $\tau_i$  characterized by an exponent  $\mu$ :

$$P(\tau) = \frac{\mu}{\tau_0} \left( \frac{\tau_0}{\tau_0 + \tau} \right)^{1+\mu}, \quad \mathcal{P}(x) = \frac{\tau_0^\uparrow}{g\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x\tau_0^\uparrow)^2}{2g^2}\right) \quad (1.3)$$

where  $\tau_0$  is a microscopic time. The slow algebraic decay of  $P(\tau)$  thereby implies divergences of all moments  $\overline{\tau^n} = \int_0^\infty d\tau P(\tau) \tau^n$  with  $n \geq \mu$ . It turns out that three different classes of  $\mu$  have to be distinguished: (i) If both  $\overline{\tau}$  and  $\overline{\tau^2}$  are finite ( $\mu > 2$ ), the dephasing induced by the noise in our model and within the usual model of Poissonian telegraph noise[Galperin et al. 2003, Paladino et al. 2002] are identical. Thus, we will call it the *Poissonian class*. However, in the case of slow dynamics, *i.e.* for  $\mu < 2$ , the dephasing scenario differs considerably from the Poissonian class. (ii) For  $1 < \mu < 2$ , when  $\overline{\tau}$  is still finite, but already the second moment  $\overline{\tau^2}$  diverges, the waiting times  $\tau_i$  start to fluctuate strongly around their average  $\overline{\tau}$  and important corrections with respect to dephasing due to Poissonian class arise. (iii) For  $0 < \mu < 1$ , the divergence of the first moment  $\overline{\tau}$  makes it even impossible to define a characteristic time between two consecutive spikes. In this case the two-point noise correlation function decays as

$$\overline{X(t+t')X(t)} - \overline{X(t)} \overline{X(t+t')} \simeq \overline{X(t)^2} (t/t')^{1-\mu}, \quad (1.4)$$

where the overline denotes an average over realizations of  $X(t)$ . Eq.(1.4) implies that the power spectrum exhibits a  $1/f^\mu$  divergence at low frequencies. Note that the explicit dependence of the correlator (1.4) on  $t$  implies a nonstationarity of the noise and consequently a time dependence of the amplitude of the noise<sup>22</sup>. In our model, a single source of noise with  $\mu = 1$  can lead to a  $1/f$  power spectrum whereas infinitely many independent fluctuators are

<sup>22</sup>For a single Poissonian fluctuator, nonstationary effects arise in the transient regime of times smaller than  $\tau_0$ .

necessary in the Dutta-Horn approach [Paladino et al. 2002]. Within this latter approach, nonstationary of the noise comes from the choice of initial conditions for the slow fluctuators. In our model, nonstationarity finds its origin in the very slow dynamics underlying the noise, not in a specific choice of an initial condition.

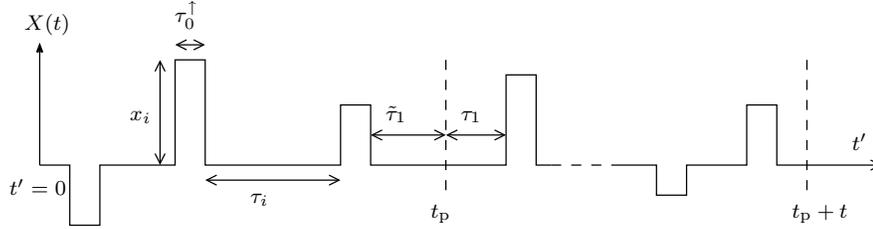


FIG. 1.1 – Representation of a noise configuration  $X(t)$

When describing decoherence due to this noise it appears sufficient to discuss only the case of longitudinal fluctuations,  $\Delta = 0$  in (2.1). Indeed, for low-frequency noise, transverse linear coupling ( $\Delta \neq 0$ ) is equivalent to quadratic longitudinal coupling [Makhlin et al. 2003], which leads in our case essentially to a renormalization (reduction) of the coupling strength,  $\tilde{g} \sim (\sqrt{\langle x^2 \rangle} / \Delta)g$ . The nonstationarity of the noise leads us to pay special attention to the dependence of dephasing on the age of the noise (denoted by  $t_p$  below), *i.e.* a history dependence. To be definite we consider situations where the noise has been initialized at time  $t' = 0$ . The coupling to the qubit is turned on after a time  $t_p$ , the preparation time of the qubit. Consequently, the two qubit states  $|\pm\rangle$  accumulate a random relative phase between time  $t_p$  and  $t_p + t$ :  $\Phi(t_p, t) = \int_{t_p}^{t_p+t} dt' X(t')$ . The corresponding dephasing factor is defined by the average over many realizations of noise

$$D(t_p, t) = \overline{\exp(i \Phi(t_p, t))} \quad (1.5)$$

and the dephasing time  $\tau_\phi$  as its characteristic decay time:  $D(t_p, \tau_\phi) = e^{-1}$ . In the following we will always consider preparation times  $t_p$  that are large compared to the microscopic time  $\tau_0$ . Under this assumption dephasing properties derived below do not depend on the imposed initial condition of the noise (at  $t' = 0$ ). In particular, the noise is stationary for  $\mu > 2$ , as in the case of usual Poissonian noise treated in [Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003].

Within the model (1.3), the accumulated phase  $\Phi(t_p, t)$  performs a *continuous time random walk* (CTRW)[Haus et Kehr 1987]. The explicit dependence of  $D(t_p, t)$  on  $t_p$  can be accounted for using renewal theory[Feller 1971]. The times  $\tau_i$  between two successive spikes being independent from each other (and thus of the history of the noise), the  $t_p$ -dependence of  $\Phi(t_p, t)$  and  $D(t_p, t)$  are consequences of the  $t_p$ -dependence of the distribution of  $\tau_1$ , the time interval between  $t_p$  and the first subsequent spike (see Fig. 1.1). Indeed, the previous spike did not occur at  $t_p$  but at some time  $t_p - \tilde{\tau}_1$ . Hence  $\tilde{\tau}_1 + \tau_1$  is distributed according to  $P(\tau)$  in (1.3), whereas  $\tau_1$  is distributed according to a new distribution  $H_{t_p}(\tau_1)$  which explicitly depends on  $t_p$ . As we show, this distribution  $H_{t_p}(\tau_1)$  contains all information about the history of the noise. Following general ideas from renewal theory we separate noise configurations that have their first spike at  $t_p + \tau_1$  from the others to obtain an expression for

---

$H_{t_p}(\tau_1) :$

$$H_{t_p}(\tau_1) = P(t_p + \tau_1) + \int_0^{t_p} P(\tau_1 + \tilde{\tau}_1) S(t_p - \tilde{\tau}_1) d\tilde{\tau}_1, \quad (1.6)$$

where  $S(t)$  denotes the renewal distribution, *i.e.* the density distribution of spike at time  $t$ . The behavior of  $S(t)$  follows from another renewal equation,

$$S(t) = P(t) + \int_0^t P(\tau) S(t - \tau) d\tau, \quad (1.7)$$

which states that a flip occurring at time  $t$  is either the first one, or that a previous flip occurred at time  $t - \tau$ , where  $\tau$  is distributed according to (1.3). Denoting by  $L[f]$  the Laplace transform of the function  $f$ , Eq.(1.7) can be rewritten as  $L[S] = L[P]/(1 - L[P])$ . For  $\mu > 2$ ,  $S$  is constant and  $H_{t_p}(\tau_1)$  coincides with  $P(\tau_1)$  at times  $t_p \gg \tau_0$ . After a transient regime, the noise has lost memory of its initial condition : the probability to flip to another state does not depend on the history of the noise. For  $\mu < 2$ , the time dependence of  $S(t)$  implies an explicit history dependence of  $H_{t_p}(\tau_1)$ . For instance, for  $1 < \mu < 2$ ,  $S(t) \simeq \bar{\tau}^{-1}(1 + (\tau_0/t)^{\mu-1})$ , and the average value of  $\langle \tau_1 \rangle$  increases as  $t_p^{2-\mu}$ . In the case  $\mu < 1$  of diverging mean value,  $\bar{\tau} = \infty$ , the density of spikes  $S(t)$  decreases as  $1/t^{1-\mu}$  and  $H_{t_p}$  differs therefore considerably from  $P$ .

Now understanding the origin of aging, we decompose noise configurations into those without any event between  $t_p$  and  $t_p + t$ , and those with at least one event in the same interval, the first of which occurring at time  $t_p + \tau$ . In the latter case, the first event contributes a factor  $\langle e^{ix\tau_0^\dagger} \rangle$ , reinitializing simultaneously the noise at  $t_p + \tau$  :

$$D(t_p, t) = \Pi_0(t_p, t) + f(g) \int_0^t H_{t_p}(\tau) D(0, t - \tau) d\tau. \quad (1.8)$$

In this equation,  $f(g) = \langle e^{ix\tau_0^\dagger} \rangle = \exp(-g^2/2)$  is the characteristic function of  $\mathcal{P}(x)$  and  $\Pi_0(t_p, t) = \int_t^{+\infty} d\tau H_{t_p}(\tau)$  denotes the probability that no spike occurs between  $t_p$  and  $t_p + t$ . More conveniently, denoting by  $L[D_{t_p}](s)$  the Laplace transform of  $D(t_p, t)$  considered as a function of  $t$ , and specializing (1.8) to  $t_p = 0$ , we find  $L[D_0](s) = s^{-1}(1 - L[P](s))/(1 - f(g)L[P](s))$ . Plugging it back into the Laplace transform of (1.8) we obtain

$$L[D_{t_p}](s) = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{(1 - f(g))L[H_{t_p}]}{1 - f(g)L[P]} \right). \quad (1.9)$$

This expression is one of the central results of this letter. Indeed, we can apply a numerical Laplace Transform inversion to obtain the complete behavior of the dephasing factor  $D(t_p, t)$ . Some of these results are shown in Fig. 1.2. The behavior of  $D(t_p, t)$  is shown for  $\mu = 0.8$ ,  $\mu = 1.1$  and both weak and strong coupling.

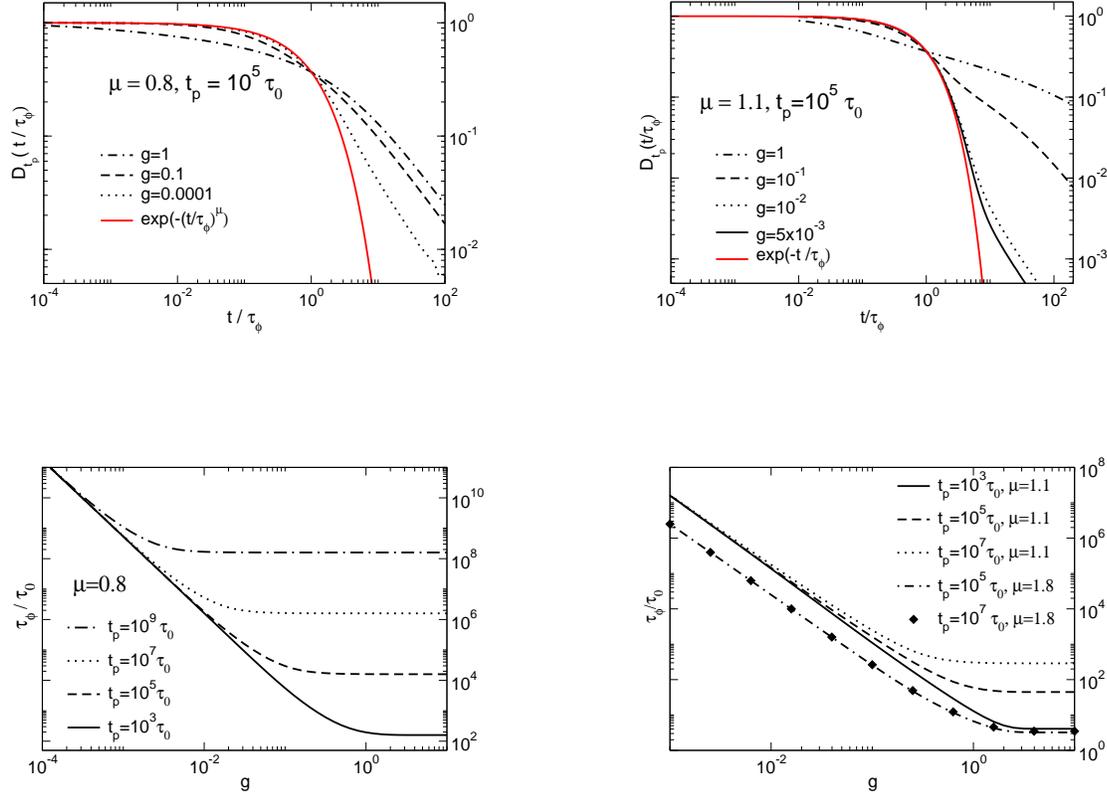


FIG. 1.2 – Dephasing factor and  $\tau_\phi$  obtained by numerical inversion of (1.9) for  $\mu < 1$  (left) and  $1 < \mu < 2$  (right). For weak coupling,  $g < g_c(t_p)$ , the decay is exponential for  $t < \tau_\phi$ . For times  $t > \tau_\phi$  ( $\mu < 1$ ) -  $t \gg \tau_\phi$  ( $1 < \mu < 2$ ) - and for strong coupling the decay is algebraic. For strong coupling and  $\mu < 1$  the dephasing time exhibits a  $t_p$ -dependence, which disappears as  $\mu$  increases to higher values. Note the explicit  $t_p$ -dependence of the critical coupling  $g_c$  in the case  $\mu < 1$ .

We now turn to a discussion of the results we can derive exactly from Eq.(1.9). As discussed above, the dephasing scenario differs qualitatively and quantitatively depending on the value of  $\mu$ . Generally, two regimes appear as a function of the coupling constant  $g$ , separated by a critical coupling constant  $g_c$ : While the dephasing time depends on  $g$  in the weak coupling regime,  $g < g_c$ , it saturates for  $g > g_c$  as a function of  $g$  (see Fig. 1.2). As expected, it turns out that the critical coupling strength  $g_c$  is of order 1 for the Poissonian class ( $\mu > 2$ ) as well as for  $1 < \mu < 2$ . However, in the case  $\mu \leq 1$ , we find that the range of the strong coupling regime increases with the age of the noise, *i.e.*  $g_c$  decreases as a function of  $t_p$ :  $g_c(t_p) = \lambda(\mu)(\tau_0/t_p)^{\mu/2}$ . This implies that any qubit surrounded by a noise with  $0 < \mu < 1$  will eventually end up in the strong coupling regime.

In the following we will discuss in detail the decay of  $D(t_p, t)$  as a function of  $t$  and the scaling laws of  $\tau_\phi$  as functions of  $g$  for the three different classes of  $\mu$  and for both weak and

strong coupling. In particular, we will compare our results with those for the Poissonian class. For  $\mu > 2$ ,  $H_{t_p}(\tau) \simeq P(\tau)$  and from (1.9)  $D(t_p, t) \simeq D(0, t)$ . As expected, after a transient regime ( $t_p \lesssim \tau_0$ ),  $D(t_p, t)$  becomes independent of  $t_p$ . The results of [Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003] for a single fluctuator are then recovered for the Poissonian class.

For  $1 < \mu < 2$ , strong corrections with respect to the Poissonian class ( $\mu > 2$ ) occur in the strong coupling regime,  $g > 1$ . In that regime, the decay law of  $D(t_p, t)$  is no longer an exponential but becomes algebraic  $D(t_p, t) \simeq [\tau_0/(\tau_0 + t)]^{\mu-1} - [\tau_0/(\tau_0 + t + t_p)]^{\mu-1}$ . The dephasing time thereby exhibits an explicit  $t_p$ -dependence,  $\tau_\phi \simeq \tau_0[1/e + (\tau_0/t_p)^{\mu-1}]^{-1/(\mu-1)}$ . Note that this  $t_p$  dependence is only important for values of  $\mu$  close to one and disappears as  $\mu$  approaches higher values (see Fig. 1.2). For weak coupling,  $g < 1$ , the initial decay of  $D(t_p, t)$  is very well described within a Gaussian approximation (second cumulant expansion). The decay is exponential,  $D(t_p, t) = \exp(-t/\tau_\phi)$ , and  $\tau_\phi$  scales as  $\tau_\phi \simeq \tau_0 g^{-2}$ . Corrections with respect to Poissonian class are only subdominant for  $t \lesssim \tau_\phi$  and disappear as  $\mu$  increases to higher values. However, for times large compared to the dephasing time,  $t \gtrsim \tau_\phi \log(\tau_\phi/\tau_0)$ , the above Gaussian approximation breaks down and the decay crosses over to a much slower power law (see Fig. 1.2).

In the case of  $0 < \mu < 1$ , the decay of coherence differs considerably from the Poissonian class in all regimes, due to the absence of a characteristic time scale in the waiting times distribution. For weak coupling  $g < g_c(t_p)$  the decay for  $t \lesssim \tau_\phi$  is accurately described by an exponential,  $D(t_p, t) \simeq \exp[-(t/\tau_\phi)^\mu]$  with  $\tau_\phi = \tau_0 A(\mu) g^{-2/\mu}$ . Dephasing is therefore insensitive to the preparation time  $t_p$ . This result can be recovered using the previously mentioned Gaussian approximation. However, we emphasize the anomalous scaling of  $\tau_\phi$  as a function of  $g$  (see Fig. 1.2). But  $D(t_p, t)$  is not fully described within this approximation. First of all, even at weak coupling, the Gaussian approximation breaks down for times  $t > \tau_\phi$ . In this regime, the exponential decay is replaced by a much slower algebraic one :  $D(t_p, t) \simeq B(\mu) (t/\tau_\phi)^{-\mu}$ . This new behavior can be understood by noting that in this case and for  $t > \tau_\phi$   $D(t_p, t) \simeq D(t_p, \tau_\phi) \Pi_0(\tau_\phi, t - \tau_\phi) \simeq (t/\tau_\phi - 1)^{-\mu}$ . The second term of (1.8) corresponds to the anomalous random walk spreading of the phase  $\Phi$  : it leads to the exponential decay (see above) which is subleading beyond  $\tau_\phi$ . Hence, the leading term corresponds to the contribution of the noise configurations that did not change between  $\tau_\phi$  and  $t$ . This situation of a main contribution induced by rare configurations is analogous to the physics of Griffiths singularities in disordered systems. In the strong coupling regime  $g > g_c(t_p)$ ,  $D(t_p, t)$  is dominated by the first term of Eq.(1.8). In this limit, the distribution of the phase of the qubit starts spreading over  $[0, 2\pi]$ . Hence, most noise configurations produce a vanishing contribution to  $D(t_p, t)$  and the whole average is dominated by those noise configurations that do not evolve during the experiment. The physics of this strong coupling regime is closely related to the physics of mean-field trap models of glassy materials[Bouchaud 1992], since the difference between quenched and annealed disorder is irrelevant in this case. The dephasing time then saturates as a function of  $g$  and becomes proportional to  $t_p$  as seen in Fig. 1.2. Note that, at strong coupling, the Gaussian approximation breaks even down for short times and the decay of  $D(t_p, t)$  is algebraic : it decays as  $D(t_p, t) \simeq 1 - \sin(\pi\mu)/(\pi\mu)(t/t_p)^{1-\mu}$ . For longer times,  $t > t_p$ , it crosses over to a much slower decay,  $D(t_p, t) \simeq (t_p/t)^\mu$ .

Finally, in the marginal case  $\mu = 1$  of pure  $1/f$  noise the above analysis is confirmed

qualitatively. We mainly find logarithmic corrections to the above results, e.g. the critical coupling scales as  $g_c(t_p) = [2(\tau_0/t_p) \ln(t_p/\tau_0)]^{1/2}$ . For weak coupling,  $g < g_c(t_p)$ , the dephasing time is insensitive to  $t_p$  and scales as  $\tau_\phi \simeq 2\tau_0 |\ln g| / g^2$ , whereas for strong coupling it depends algebraically on  $t_p$ .

In summary, we have studied decoherence of a qubit due to the noise generated by a slow collective environment. Within a simple phenomenological model, we have derived exact expressions for the dephasing factor in various regimes. The crucial consequences of the nonstationarity of the noise are first the appearance of a history dependent coupling  $g_c(t_p)$  which separate the weak and strong coupling regimes and, second, a non exponential decrease of the dephasing factor  $D(t_p, t)$ . Depending on the broadness ( $\mu$ ) of the distribution of relaxation times of the environment, this nonexponential decay appears either before ( $\mu < 1$ ) or after  $\tau_\phi$ , but is a clear signature of the nonstationarity of the noise (*i.e.*  $\mu < 2$  in our model). In a more refined description of a collective noise source consisting of a collection of coupled clusters, we expect the nonstationarity of the dephasing to be related to the number of contributing clusters. Similarly to the studies of Paladino *et al.* [Paladino et al. 2002] for usual telegraphic fluctuators, the nonstationary dephasing in our model will survive provided the phase  $\Phi(t_p, t)$  is dominated by a few strongly coupled slow clusters. In the opposite limit of many contributing clusters, the usual Gaussian stationary dephasing should be recovered. Thus the search for such nonstationarity in the dephasing of simple solid state qubits would be of main interest for the correct characterization of the source of  $1/f$  noise in these samples. Note however that dephasing is experimentally studied by repeated interference experiments without noise reinitialization in between. The dephasing is then characterized by a time-average instead of the average over configurations  $D(t_p, t)$ . In the case of a nonstationary noise these two expressions will differ (non ergodicity for  $0 < \mu \leq 1$ ) and special care should be given in analyzing the experimental results.

J. Schrieffer thanks Yu. Makhlin for very useful discussions. P. Degiovanni thanks the Institute for Quantum Computing (Waterloo) and Boston University for support and hospitality during completion of this work.

# Chapitre 2

## Dephasing by a nonsationary classical intermittent noise

J.Schrieffl, M. Clusel, D. Carpentier et P. Degiovanni  
article publié dans *Physical Review B*, **72**, 035328, 2005.

We consider a new phenomenological model for a  $1/f^\mu$  classical intermittent noise and study its effects on the dephasing of a two-level system. Within this model, the evolution of the relative phase between the  $|\pm\rangle$  states is described as a continuous time random walk (CTRW). Using renewal theory, we find exact expressions for the dephasing factor and identify the physically relevant various regimes in terms of the coupling to the noise. In particular, we point out the consequences of the non-stationarity and pronounced non-Gaussian features of this noise, including some new anomalous and aging dephasing scenarii.

### 2.1 Introduction

Recent experimental progress in the study of solid-state quantum bits (Josephson qubits) [Makhlin et al. 2001] has stressed the importance of low-frequency noise in the dephasing or decoherence of these two-level systems [Nakamura et al. 2002, Vion et al. 2002, Simmonds et al. 2004]. It now appears that the coupling to low-frequency noise is the main limitation in obtaining long lived phase coherent states of qubits necessary for quantum computation. However, a complete understanding of the microscopic origin of  $1/f$  noise in solid state physics is not available yet [Weissman 1988] and therefore, theoretical studies of the dephasing by such a noise are based on phenomenological models. In the spin-boson model, the environment of the qubit is modeled by a set of harmonic oscillators, with an adequate frequency spectrum [Makhlin et al. 2003, Makhlin et Shnirman 2004]. Another commonly used model for a low-frequency noise consists in considering the contributions from many independent bistable fluctuators [Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003]. In the semi-classical limit, the noise from each fluctuator is approximated by a telegraph noise of characteristic switching rate  $\gamma$ . For a broad distribution  $\sim 1/\gamma$  of switching rates  $\gamma$ , a  $1/f$  spectrum is recovered when summing contributions of all fluctuators.

Such a model is based on observations of telegraph like fluctuations in nano-scale devices [Buehler et al. 2004, Zimmerli et al. 1992], but a precise characterization and justification of the broad distribution of switching rates is still lacking although the localization of these fluctuators [Farmer et al. 1987, Zorin et al. 1996] as well as their collective or individual nature [Welland et Koch 1986] have been investigated for a long time.

In this paper, we consider a new phenomenological model for the classical low-frequency noise. This model can be viewed as the intermittent limit of the sum of telegraphic signals. In this limit, the duration of each plateau of the telegraphic signal is assumed to be much shorter than the waiting time between plateaus [Buehler et al. 2004]. A  $1/f$  power spectrum for the intermittent noise is then recovered for a distribution of waiting times  $\tau$  behaving as  $\tau^{-2}$  for large times. Because the average waiting time is infinite, no time scale characterizes the evolution of the noise which is nonstationary. The purpose of this article is to study the effects of such a low-frequency intermittent noise on the dephasing of a two-level system in order to identify possible signatures of intermittence.

As we will show, in this model the relative phase  $\Phi$  between the states of the qubit performs a continuous time random walk [Montroll et Weiss 1965, Haus et Kehr 1987] (CTRW) as time goes on. Such a CTRW was considered in the context of  $1/f$  current noise by Tunaley [Tunaley 1976], extending the previous work of Montroll and Scher on electronic transport [Montroll et Scher 1973]. However, in the present paper it is the integral of noise, and not the noise itself, which performs a CTRW. Moreover to our knowledge, the precise consequences of CTRWs non-stationarity on dephasing have not been studied. On the other hand aging CTRW were previously considered in the context of trap models in glassy materials [Monthus et Bouchaud 1996] and in the study of fluorescence of single nanocrystals [Jung et al. 2002, Barkai et Cheng 2003]. Technically, the dephasing factor that we will consider corresponds to the average Fourier transform of the positional correlation function of the random walk. Some of the asymptotic behaviors of this correlation function were already obtained in ref. [Monthus et Bouchaud 1996]. However, in the present paper we will extend these results to all possible regimes and we will present all of these results in a unified framework. The use of renewal theory [Feller 1971] greatly enlightens the origin of non stationarity and enables us to interpret some features of the dephasing scenarii.

This paper is organized as follows : in section 2.2, we present our model for the noise and define the quantity of interest, *i.e* the dephasing factor of a two-level system coupled to this noise. In section 2.3, the exact expression for the single Laplace transform of the dephasing factor will be derived and, from this result, the physically relevant weak and strong coupling regimes are identified. Moreover, we clarify the origin of non-stationarity and show the relation of our problem to renewal theory. For completeness and pedagogy, the effects of standard anomalous diffusion of the phase and of randomness of waiting times on dephasing are compared showing the importance of intermittence in the non-stationarity properties of the dephasing scenarii. In sections 2.4 and 2.5, we present a complete study of the behavior of the dephasing factor respectively for a noise with a vanishing average amplitude (symmetric noise) and with a finite average one (asymmetric noise). The general discussion of the results is postponed to section 2.6.

## 2.2 The model

### 2.2.1 Pure dephasing by an intermittent noise

In this paper, we consider a quantum bit defined as a two-level system with controllable energy difference  $\hbar\omega_0$  and tunneling amplitude  $\Delta$  between the two states  $|-\rangle$  and  $|+\rangle$  (eigenstates of  $\sigma_z$ ). The effect of the environment on this two-level system will be accounted for by a fluctuating shift  $\hbar X$  of the energy difference  $\hbar\omega_0$ . Thus the Hamiltonian describing this model is written as

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar}{2} (\omega_0 \sigma_z + \Delta \sigma_x - X \sigma_z) , \quad (2.1)$$

In this paper, we will mainly focus on the case of pure dephasing ( $\Delta = 0$ ). However, as explained below in section 2.2.3, our discussion will also apply to other operating points ( $\Delta \neq 0$ ), including the special points where a careful choice of control parameters considerably lower the qubit sensitivity to low frequency noise [Vion et al. 2002].

Here, we will focus on the effects of a low-frequency classical noise on the qubit. The noise is represented by a classical stochastic function corresponding to the fluctuations of the noise in a given sample. Within this statistical approach, we focus on the statistical properties (*e.g.* the average) of physical quantities associated with the qubit such as the so-called (*average*) dephasing factor. As we shall see now, its meaning can be understood by considering a typical Ramsey (interference) experiment on the qubit [Ramsey 1950].

In such an experiment, the qubit is prepared at initial time  $t_p$  in a superposition of the eigenstates of  $\sigma_z$ , *e.g.*  $|+\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ . Note that throughout this paper,  $t = 0$  will correspond to the origin of time for the noise (*e.g.* the time at which the sample reached the experiment's temperature). At some later time  $t_p + \tau_{\text{exp}} > t_p$ , we consider the projection of the evolved qubit state on  $|\uparrow\rangle$ . In the mean time, the state has evolved under Hamiltonian (2.1) ( $\Delta = 0$ ) and both states  $|\uparrow\rangle$  and  $|\downarrow\rangle$  have accumulated a random relative phase  $\Phi(t_p, \tau_{\text{exp}})$  defined by

$$\Phi(t_p, \tau_{\text{exp}}) = \int_{t_p}^{t_p + \tau_{\text{exp}}} X(t) dt. \quad (2.2)$$

For a given accumulated phase  $\Phi = \Phi(t_p, \tau_{\text{exp}})$ , the quantum probability  $P_{\Phi, \tau_{\text{exp}}}(|\uparrow\rangle)$  to find the qubit in state  $|+\rangle$  at time  $t_p + \tau_{\text{exp}}$  is given by

$$P_{\Phi, \tau_{\text{exp}}}(|+\rangle) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\omega_0 \tau_{\text{exp}} - \Phi(t_p, \tau_{\text{exp}}))] \quad (2.3)$$

Note that in a given sample,  $P_{\Phi, \tau_{\text{exp}}}(|+\rangle)$  oscillates between 0 and 1 as a function of  $\tau_{\text{exp}}$  (although possibly nonperiodically). The experimental determination of the probability for finding the qubit in the  $|+\rangle$  state at time  $t_p + t$  usually requires many experimental runs of same duration  $\tau_{\text{exp}}$ . The phase fluctuations between different runs induce an attenuation of the amplitudes of these oscillations (analogously to destructive interference effects in optics).

Using Bayes theorem, the corresponding statistical frequency to find the qubit in state  $|+\rangle$  after a duration  $\tau_{\text{exp}}$  is given by the probability

$$\begin{aligned} P_{t_p, \tau_{\text{exp}}}(|+\rangle) &= \int d\Phi P_{\Phi, \tau_{\text{exp}}}(|+\rangle) \mathcal{P}(\Phi = \Phi(t_p, \tau_{\text{exp}})) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \Re (D_{t_p}(\tau_{\text{exp}}) e^{-i\omega_0 \tau_{\text{exp}}})) \end{aligned} \quad (2.4)$$

In this expression, the decay rate of these oscillations is encoded in the dephasing factor  $D_{t_p}(\tau_{\text{exp}})$  defined as

$$D_{t_p}(\tau_{\text{exp}}) = \overline{\exp(i\Phi(t_p, \tau_{\text{exp}}))}. \quad (2.5)$$

In this formula (and only here), the overline denotes an average over all possible configurations of noise  $X(t)$  during the experiment.

Note that in deriving eq.(2.4), statistical independence of the phases  $\Phi$  between different runs has been assumed. This is not necessarily true for successive runs in a given sample as correlations of the noise might lead to a dependence of the distribution of the phase  $\Phi(t_p, \tau_{\text{exp}})$  on the starting date  $t_p$  of the run. Hence throughout this paper, for self-consistency, we will keep track of this effect through a possible  $t_p$  dependence of the dephasing factor  $D_{t_p}(\tau_{\text{exp}})$ . Its possible implications will be discussed together with our results in section 2.6.

### 2.2.2 A model for classical intermittent noise

In several experimental situations, the low-frequency noise acting on the qubit is supposed to be due to contributions from background charges in the substrate [Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003]. When the dephasing is dominated by the low-frequency fluctuators, a semi-classical approach, in which the noise is modeled by a classical field, appears sufficient [Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003, Falci et al. 2003]. In this case, the noise is described by a Dutta-Horn model [Dutta et Horn 1981]. In its simplest form, the potential  $X(t)$  is written as the sum of the contributions of many telegraphic signals, each with a characteristic switching rate  $\gamma$  between the up and down states (see figure 2.1a).

For switching rates distributed according to an algebraic distribution  $p(\gamma) \simeq 1/\gamma$ , the power spectrum of the corresponding noise has a  $1/f$  low-frequency behavior.

In this paper, motivated by several noise signatures [Zimmerli et al. 1992, Zorin et al. 1996], we will focus on the intermittent limit for such a Dutta-Horn model, and propose a phenomenological spike field to study its effects on qubit dephasing. By intermittence, we mean for the case of the telegraphic noise that the switching rate  $\gamma_+$  from the up to the down states is much larger than the switching rate  $\gamma_-$  from the down to the up states (or vice-versa). In this limit, the total noise reduces to a collection of well defined events, separated by waiting times  $\tau_i$  (see figure 2.1b). If considered on times much longer than the typical duration  $\tau_0$  of these events (or at frequencies smaller than  $1/\tau_0$ ), we can approximate this noise by a spike field consisting of a succession of delta functions of weight  $x_i$  corresponding to the integral over time of the corresponding events of the intermittent

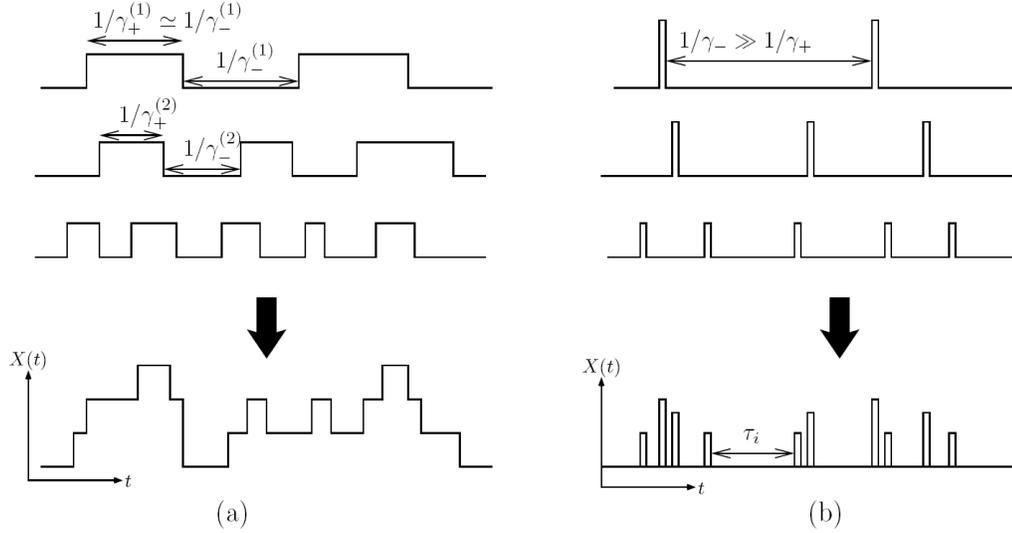


FIG. 2.1 – Representation of a low-frequency noise as a sum of contributions from telegraphic signals (a). In this first case, the switching rates for the up ( $\gamma_+$ ) and down ( $\gamma_-$ ) states are comparable, and a  $1/f$  spectrum is recovered for a distribution of switching rates  $\sim 1/\gamma$ . The intermittent limit (b) corresponds to the limit where the noise stays in the down states most of the time ( $\gamma_+ \gg \gamma_-$ ). In this paper, we will approximate this intermittent noise by a spike field. For this intermittent noise, a  $1/f$  spectrum implies a non stationarity whose consequences on dephasing are studied in this paper.

field (Fig.2.1b). More precisely, denoting by  $t = 0$  the origin of time, and by  $\tau_i$  the successive waiting times between the spikes (or events), we know that the  $n$ th spike occurs at time  $t_n = \sum_{i=1,n} \tau_i$ . The value of the stochastic intermittent classical noise  $X(t)$  (see Fig. 2.2) is then

$$X(t) = \sum_i x_i \delta(t - t_i). \quad (2.6)$$

In the following, we will consider the dephasing produced by this spike field. We expect any short time details like the specific shape of the real pulses to be irrelevant in the limit of typical dephasing time long compared to  $\tau_0$ . Within this approximation, a noise signal is fully characterized by the collection of waiting times  $\tau_i$  and pulse amplitudes  $x_i$  that occur as time goes on. We will assume these two quantities to be independent from each other, and completely uncorrelated in time. We will then characterize such a noise solely by two independent probability distributions  $\psi(\tau)$  and  $p(x)$  for the  $\tau_i$  and  $x_i$  respectively.

The distribution of pulse amplitudes  $p(x)$  will be assumed to have at least its two first

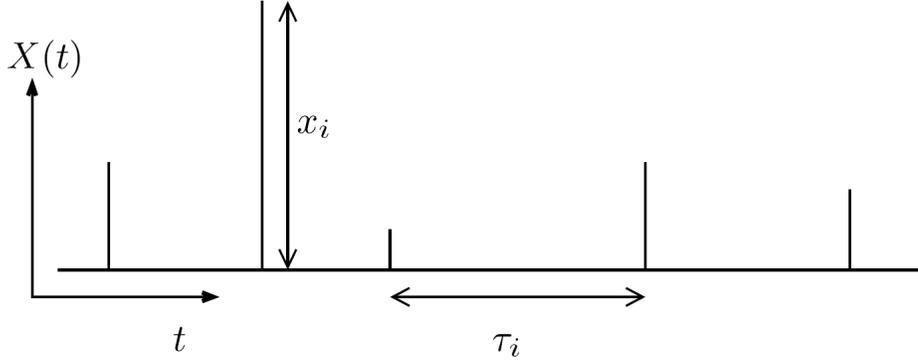


FIG. 2.2 – Representation of the random spike field used to model the intermittent low-frequency noise in this work. This noise is described by the distributions of the phase pulses  $x_i$  and of the waiting time intervals  $\tau_i$  between the spikes.

moments finite, and denoted in the following by

$$h = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx, \quad (2.7a)$$

$$g = \sqrt{\overline{x^2}} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx \right)^{1/2}. \quad (2.7b)$$

We will consider separately the case of zero average (symmetric noise) and of non-zero average (asymmetric noise) since the latter induces specific features of the dephasing factor, discussed in section 2.5. We will consider algebraic distribution of waiting times  $\psi(\tau)$ , parametrized by a single parameter  $\mu$  :

$$\psi(\tau) = \frac{\mu}{\tau_0} \left( \frac{\tau_0}{\tau_0 + \tau} \right)^{1+\mu}, \quad \tau > 0. \quad (2.8)$$

As we will show in section 2.2.4, a  $1/f^\mu$  power spectrum for this intermittent spike field follows naturally from such a choice for  $\psi(\tau)$ . As we shall see in this paper, the above algebraic distribution of waiting times allows to correctly capture the essential features of the dephasing scenarii generated by an intermittent noise. The first and second moments of  $\psi$  are finite respectively for  $\mu > 1$  and  $\mu > 2$  and are given by

$$\langle \tau \rangle = \frac{\tau_0}{\mu - 1} \quad ; \quad \langle \tau^2 \rangle = \frac{2\tau_0^2}{(\mu - 1)(\mu - 2)} \quad (2.9)$$

Let us note that the above defined pulse noise contains two independent potential sources of dephasing : The randomness of the pulse weights and the randomness the waiting times. Their respective effects will be compared in section 2.3.

### 2.2.3 Decoherence at optimal points

Before turning to the detailed study of pure dephasing ( $\Delta = 0$  in (2.1)), let us mention that our discussion can be easily extended to the study of dephasing in the presence of a transverse coupling in (2.1), in particular at the so-called optimal points. They correspond to configurations where the fluctuations of the effective qubit level splitting are only quadratic in the noise amplitude. The qubit can be operated at these optimal points by a careful choice of the control parameters  $\omega_0$  and  $\Delta$  of the qubit and then, the influence of low frequency noise can be reduced considerably [Vion et al. 2002]. For the Hamiltonian considered in the present work (2.1) such an optimal point is reached for transverse coupling to the noise ( $\omega_0 = 0$  and  $\Delta \neq 0$ ). In this case and assuming the amplitude of the noise to be small compared to the control parameter  $\Delta$ , the effective qubit level splitting is given by  $\sqrt{\Delta^2 + X(t)^2} \approx \Delta + X(t)^2/(2\Delta)$ . Hence, the dephasing effect of a linear transverse noise can be accounted for using an effective quadratic longitudinal noise. The corresponding dephasing factor is then given by (2.5) and (2.2) with the replacement  $X \rightarrow X^2/(2\Delta)$ .

In addition, the transverse noise at an optimal point induces transitions between the eigenstates of the qubit, *i.e.* it leads to relaxation. The Fermi Golden Rule relaxation rate  $\Gamma_r$ , which is used for estimating the relaxation contribution to dephasing, involves the power spectrum of the noise at the resonance frequency of the qubit [Makhlin et al. 2001]. The total dephasing rate is obtained by summing the contribution of relaxation given by  $\Gamma_r/2$  and the contribution of pure dephasing due to the above effective longitudinal noise.

In general the statistics of  $X$  and  $X^2$  are very different and a special treatment is needed to derive the dephasing factor at optimal points [Makhlin et al. 2003]. However, for the noise considered in the present work, the effective quadratically coupled longitudinal noise can be viewed as an effective linearly coupled noise of the same type but with renormalized parameters. The renormalized distribution of the spike intensities is now given by ( $x \geq 0$ ) :

$$\tilde{p}(x) = \sqrt{\frac{\Delta\tau_0}{8x}} \left\{ p\left(\sqrt{2x\Delta\tau_0}\right) + p\left(-\sqrt{2x\Delta}\right) \right\}, \quad (2.10)$$

where  $\tau_0$  is a microscopic time scale needed to regularize the square of delta functions. Therefore, our results for the longitudinal noise presented in section 2.2.1 can also be used to describe the effect of a transverse noise.

### 2.2.4 Spectral properties of the intermittent noise

#### 2.2.4.1 One and two point correlation functions

To make contact with other descriptions of low-frequency noise, we will determine the behavior of the two time correlation function of our noise, or equivalently of its spectral density. However, as we will see, this spectral density is far from enough to characterize the statistics of the noise for small  $\mu$ , in particular due to its non stationarity. We will consider for simplicity the case of a non zero average  $h = \bar{x}$ .

**Time dependent average** Let us consider the average of the noise amplitude  $X(t)$ . In our case, it reduces to two independent averages : over the amplitudes  $x_i$  of the spikes and over the waiting times  $\tau_i$  between them. Noting that  $X(t)$  vanishes except if a spike occurs at time  $t$ , we can express its average in terms of the average density  $S(t)$  of pulses at time  $t$  also called the sprinkling time distribution in ref. [Bardou et al. 2002] :

$$\overline{\langle X(t) \rangle} = h S(t). \quad (2.11)$$

Using the expressions (2.48), (2.54) for  $S(t)$  (see appendix 2.7.1), we obtain for the average of  $X$  :

$$\overline{\langle X(t) \rangle} = \frac{h}{\langle \tau \rangle} = \frac{h}{\tau_0} (\mu - 1) \quad \text{for } \mu > 2, \quad (2.12a)$$

$$\overline{\langle X(t) \rangle} = \frac{h}{\langle \tau \rangle} \left( 1 + \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^{\mu-1} \right) \quad \text{for } 1 < \mu < 2, \quad (2.12b)$$

$$\overline{\langle X(t) \rangle} = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{h}{\tau_0} \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^{1-\mu} \quad \text{for } \mu < 1. \quad (2.12c)$$

Hence the non-stationarity of the noise manifests itself already in the time dependence of this single time average. While it is only a subleading algebraic correction for  $1 < \mu < 2$ , this time dependence becomes dominant for  $0 < \mu < 1$ .

**Two time function** Following the same lines of reasoning, we can derive the expression of the two time correlation functions (with  $t > 0$ ) :

$$\langle X(t_p) X(t_p + t) \rangle = h^2 S(t_p) S(t). \quad (2.13)$$

The first factor  $S(t_p)$  corresponds to the probability that a spike occurs at time  $t_p$ , while the second factor  $S(t)$  reads the probability of having a pulse at time  $t_p + t$ , knowing that there was one at  $t_p$ . This reflects the reinitialization of the noise once a spike has occurred at time  $t_p$ . From (2.11,2.13), we obtain the connected two points functions :

$$C(t_p, t) = \langle X(t_p) X(t_p + t) \rangle_c = h^2 S(t_p) (S(t) - S(t_p + t)). \quad (2.14)$$

#### 2.2.4.2 $1/f$ noise spectrum

We will define the spectral density of the noise as the Fourier transform of the connected two points functions restricted to  $t > 0$  :

$$S_X(t_p, \omega) = 2 \int_0^{+\infty} C(t_p, t) \cos(\omega t) dt. \quad (2.15)$$

The correlation function  $C(t_p, t)$  generically depends on both times  $t_p$  and  $t_p + t$  thus showing that in general  $X$  is not a stationary process. However, to extract the low-frequency behavior of  $S_X(t_p, \omega)$ , it appears sufficient to consider the quasi stationary regime  $|t| \ll t_p$  which

corresponds to experiment durations much smaller than the age of the noise. In this regime, the connected correlation function (2.14) reduces for  $t > 0$  to

$$C(t_p, t) \simeq h^2 S(t_p) (S(t) - S(t_p)) . \quad (2.16)$$

The associated effective power spectrum is defined for frequencies  $\omega$  large compared to  $1/t_p$  and reads :

$$S_X(t_p, \omega) \simeq 2h^2 S(t_p) \Re(L[S](-i\omega)) \quad (2.17)$$

where  $L[S]$  denotes the Laplace transform of  $S(t)$ . Note that in this quasi-stationary regime, the nonstationarity of the noise manifests itself only through the  $t_p$  dependent amplitude  $S(t_p)$ . Using explicit expressions for  $L[S]$  (see appendix 2.7.1), we obtain the effective power spectra :

$$S_X(t_p, \omega) \simeq \left[ h^2 S(t_p) \frac{\cos(\pi\mu/2)}{\Gamma(1-\mu)} \right] (\omega\tau_0)^{-\mu} \quad (2.18)$$

for  $0 < \mu < 1$ , and

$$S_X(t_p, \omega) \simeq \left[ h^2 S(t_p) \sin\left(\frac{\pi(\mu-1)}{2}\right) (\mu-1)^{\mu-1} \right] (\omega\langle\tau\rangle)^{\mu-2} \quad (2.19)$$

for the intermediate class  $1 < \mu < 2$ . The common  $1/\omega$  dependence of the spectral density is recovered in the limit  $\mu \rightarrow 1$ . More precisely, the Laplace transform of  $S$  for  $\mu = 1$ , obtained in appendix 2.7.1, gives a logarithmic correction to a  $1/\omega$  effective power spectrum :

$$S_X(t_p, \omega) \simeq \frac{\pi h^2 S(t_p)}{\omega\tau_0 (\log(\omega\tau_0))^2} . \quad (2.20)$$

Let us stress finally that this effective power spectrum, although useful to compare our approach with other noise models, is not sufficient to characterize the statistical properties of the spike field noise relevant for dephasing. As we shall see in this paper, it does not account precisely for the non-stationarity of the dephasing factor. Besides this, non Gaussian properties of the noise have strong effects on the dephasing factor in many regimes.

## 2.3 Dephasing, continuous time random walk of the phase and renewal theory

### 2.3.1 Continuous time random walk of the phase

Having defined our model for the intermittent noise field  $X(t)$ , we will now study its effects on the dephasing of the two-level system, characterized by the dephasing factor (2.5). Note that *a priori* this dephasing has several origins : the randomness of the pulses amplitudes  $x_i$ , and the randomness of the waiting times  $\tau_i$ . These two dephasing sources are assumed to be independent from each other in this work. For clarity and pedagogical reasons, we first start by considering the effect of randomness of the pulse amplitudes before turning to the effect of waiting time randomness.

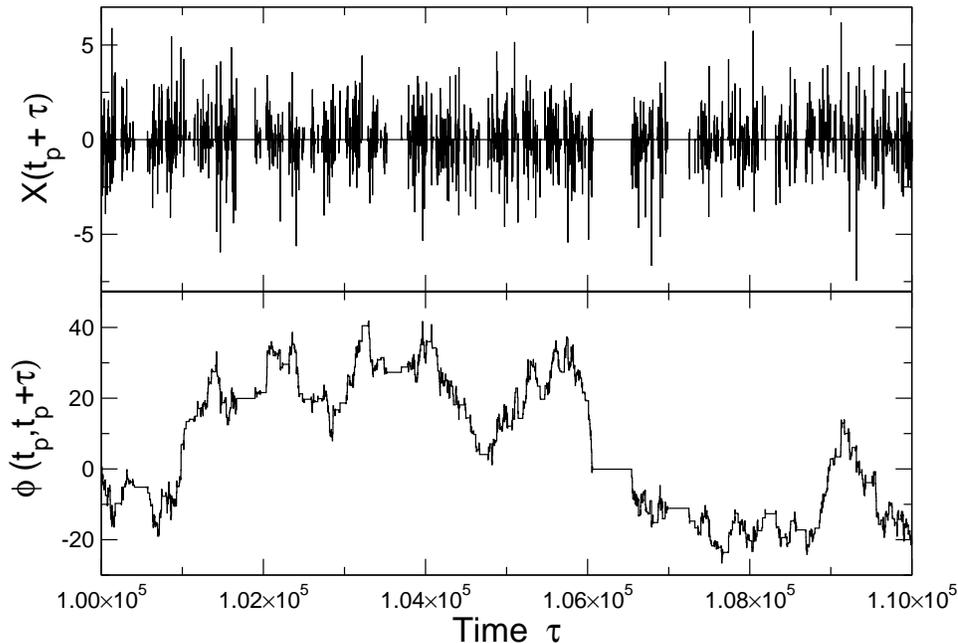


FIG. 2.3 – A configuration of the noise  $X(t_p + \tau)$  in our model (as a function of  $\tau$ ) between  $t_p = 10^5 \tau_0$  and  $t_p + \tau = 1.1 \cdot 10^5 \tau_0$ . In this figure,  $h = 0$  and the waiting times are distributed with an algebraic distribution  $P(\tau_i) \simeq \tau_i^{-2.1}$ . The bottom part of the figure shows the corresponding continuous time random walk of the accumulated phase of the TLS between  $t_p$  and  $t_p + \tau$ .

### 2.3.1.1 Dephasing by random phase pulses : the random walk of the phase

Here, we assume that all waiting times are equal  $\tau_i = t_i - t_{i-1} = \tilde{\tau}$ . In this case, the phase  $\Phi(t_p, t)$  accumulated between  $t_p$  and  $t_p + t$  performs a usual random walk characterized by the distribution  $p(x)$  of phase pulses : at the dates  $t_n = n\tilde{\tau}$ ,  $\Phi(t_p, t)$  is increased by a random value  $x_i$ . In the limit  $|x| \ll 1$ , the phase slowly diffuses and dephasing is achieved only after a large number of pulses  $n = t_n/\tilde{\tau}$ . Then, the distribution of the phase  $\Phi(t_p, t_n)$  can be well approximated by a Gaussian distribution (apart from some irrelevant tails) and the dephasing factor is easily computed. It decays exponentially with characteristic time  $\tau_\phi = \frac{2\tilde{\tau}}{g^2 - h^2}$ .

Note that this diffusive regime can also be studied when the distribution  $p(x)$  lacks a finite second or even first moment. An anomalous diffusion of the phase is expected [Bouchaud et Georges 1990]. Let us assume that  $x_i = h + \kappa\xi_i$  where the probability distribution of  $\xi_i$  has zero average and belongs to the attraction bassin of the stable law  $L_{\nu,\beta}$  characterized by the exponent  $0 < \nu < 2$  of the algebraic tails for large values of  $\xi_i$  and the asymmetry parameter  $|\beta| \leq 1$ . Then, according to the generalized central limit theorem, the

accumulated phase after  $n$  pulses is  $\Phi_n = nh + \kappa n^{1/\nu} \xi$  where  $\xi$  is distributed according to  $L_{\nu,\beta}$ . Consequently, in the diffusive limit ( $n \gg 1$ ), the dephasing factor is the product of the homogenous phase  $e^{iht/\tilde{\tau}}$  by the characteristic function of  $L_{\nu,\beta}$  evaluated for  $k \simeq g(t/\tilde{\tau})^{1/\nu}$ . For  $\nu < 2$  and  $\nu \neq 1$ , this leads to :

$$D_{t_p}(t) = e^{-C\kappa^\nu t/\tilde{\tau}} e^{i(h-C\beta \tan(\pi\nu/2)\kappa^\nu)t/\tilde{\tau}}. \quad (2.21)$$

where  $C$  is a numerical constant which can be absorbed in a rescaling of  $\kappa$ . Thus, in this case, the decay is still exponential and stationary although non Gaussian features of the noise lead to an anomalous dependance of the dephasing time on the coupling constant  $\kappa$  that characterizes the scale of the fluctuations of phase pulses [Lutz 2002].

### 2.3.1.2 Dephasing by random waiting times and continuous time random walk

Let us now turn to the situation where the phase pulses happen at random times. In this case, the accumulated relative phase  $\Phi(t_p, \tau)$  (see eq.(2.2)) does not perform a random walk as  $\tau$  increases, but rather a continuous time random walk [Montroll et Weiss 1965, Haus et Kehr 1987] (CTRW) on the unit circle. In other words, after some random waiting time  $\tau_i$ ,  $\Phi(t_p, \tau)$  is incremented by a random value  $x_i$  (see figure 2.3). Thus, on a technical level, the dephasing properties of the two level system are now related to some correlation function of the corresponding CTRW. The corresponding dephasing factor can differ from results obtained in the previous section due to the additional source of dephasing given by the randomness of waiting times. To illustrate this point, let us consider the case where all phase pulses have the same intensity  $p(x) = \delta(x - h)$ . The accumulated phase after  $N$  events is exactly  $Nh$ . Thus, dephasing comes only from the randomness of the number  $N[t_p, t_p + t]$  of events occurring between  $t_p$  and  $t_p + t$  and the phase diffusion is governed by the probability distribution for  $N[t_p, t_p + t]$ . The time needed to obtain  $N$  events is the sum over the  $N$  first waiting times after  $t_p$  :  $t_N = \sum_{j=1}^N \tau_j$ . At  $t_p = 0$ , all  $\tau_j$ s are distributed according to the same probability distribution and therefore, in the limit of large  $N$ , the generalized central limit theorem [Bouchaud et Georges 1990] can be used (the case  $t_p \neq 0$  will be discussed below). It provides the limit law for  $t_N$  at large  $N$  which in turn determines the probability law for the number of events. According to this theorem, three classes must be considered depending on whether the moments (2.9) are finite :

1. The case  $\mu > 2$  where both  $\langle \tau \rangle$  and  $\langle \tau^2 \rangle$  are finite. In this case, the probability distribution for the number of events is gaussian with a vanishing relative uncertainty.
2. The case  $1 < \mu < 2$  where the average of  $\tau$  is finite but the second moment diverges.
3. The case  $\mu < 1$  where all moments diverge.

The usual model for telegraphic noise assumes a Poissonian distribution for the number of events in a given time interval and corresponds to  $\psi(\tau) = \gamma e^{-\gamma\tau}$ . We will refer it as the *Poissonian case* and it belongs to the  $\mu > 2$  class.

Note that non trivial behavior is expected in the last two cases where  $\psi$  has infinite first or second moments. In particular, for  $\mu < 1$ , as  $\psi(\tau)$  does not have any average, no time scale characterizes the evolution of the noise and, as we will see, nonstationarity follows.

This case deserves a special attention as we showed that a  $1/f$  spectrum is found precisely for  $\mu \rightarrow 1$ . Before turning to the general formal expressions for the dephasing factor, we will focus on the origin of this nonstationarity.

### 2.3.1.3 Origin of the non-stationarity in CTRW : the first waiting time distribution.

Within our model, the waiting times between successive pulses are chosen independently according to the distribution  $\psi$ . Consequently, all the  $t_p$  dependence of  $\Phi(t_p, t)$  will come from the choice of  $\tau_1$  defined as the waiting time between  $t_p$  and the first spike that follows  $t_p$  (see figure 2.4). Indeed, at time  $t_p + \tau_1$ , the CTRW starts anew :  $\tau_2$  is chosen without any

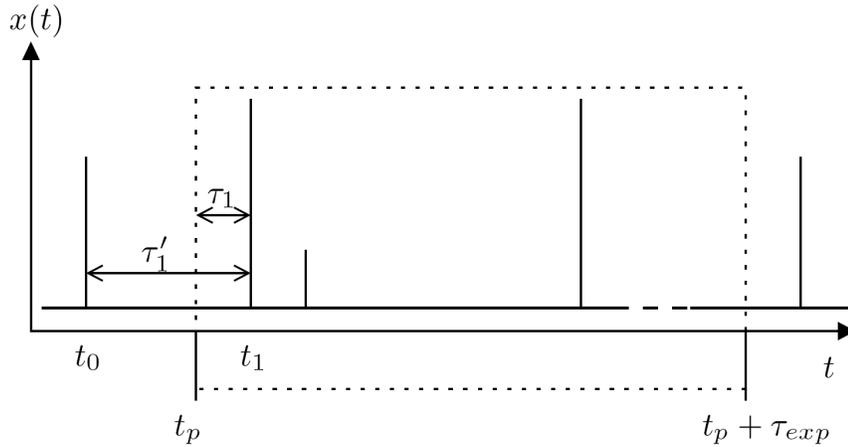


FIG. 2.4 – Intermittent noise between  $t_p$  and  $t_p + t$

correlation to the history of the CTRW. Hence given the probability distribution of  $\tau_1$ , we can forget about the history of the CTRW of the phase and describe its behavior starting at  $t_p$ . This remark is at the core of the use of renewal theory. In the following, the probability distribution of  $\tau_1$  will be denoted by  $\psi_{t_p}$  and *a priori*, it may depend on  $t_p$ . In fact, as we shall see later, its behavior can be quite counter-intuitive.

First of all, note that a given  $\tau_1$  can be obtained from many different noise configurations that differ from the time of the last event occurring before  $t_p$ . Separating noise configurations (starting at  $t = 0$ ) that have their first spike at time  $t_p + \tau_1$  from the others leads to an integral equation that determines  $\psi_{t_p}$  in terms of  $\psi$  ( $S$  is determined from  $\psi$  through an integral equation (2.45)) :

$$\psi_{t_p}(\tau_1) = \psi(t_p + \tau_1) + \int_0^{t_p} d\tau \psi(\tau_1 + \tau)S(t_p - \tau). \quad (2.22)$$

The integral in the r.h.s. comes from noise configurations that have a spike between 0 and  $t_p$ . Equation (2.22) is the starting point for deriving analytic results about  $\psi_{t_p}$  in appendix

2.7.2 and 2.7.3 using Laplace transform techniques. Before computing exactly the dephasing factor, let us show some of the counter-intuitive properties of  $\psi_{t_p}(\tau_1)$ . In particular from (2.22), we can derive the following expression for the average of  $\tau_1$  valid for  $\mu > 2$  :

$$\langle \tau_1 \rangle_{\psi_{t_p}} = \frac{\langle \tau^2 \rangle}{2 \langle \tau \rangle} = \frac{\langle \tau \rangle}{2} + \frac{\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2}{2 \langle \tau \rangle}. \quad (2.23)$$

This first term corresponds to the case of regularly spaced pulses averaged over the origin of times. The second term is the contribution of fluctuations. This result means that irregularities in the event spacings increase the average waiting time of the first event following  $t_p$ . The r.h.s. of (2.23) does not depend on  $t_p$ , as expected from the stationarity of the CTRW for  $\mu > 2$  after a short transient regime at small  $t_p$ . On the other hand, for  $\mu < 2$ , eq. (2.23) is expected to break down since  $\langle \tau^2 \rangle$  diverges. This divergence signals that in some noise configurations  $\tau_1$  can become of the order of  $t_p$  and, as a consequence, the average properties of the CTRW after  $t_p$ , depend on this age of the noise. Indeed, we can show from (2.22) that  $\langle \tau_1 \rangle_{\psi_{t_p}}$  scales with the age as  $t_p^{2-\mu}$ . Note that in the diffusion regime, many phase pulses are necessary to dephase the qubit. Therefore, we expect that, in this regime, the aging effect on  $\psi_{t_p}(\tau_1)$  only brings weak corrections to the dephasing scenario as will be confirmed below by exact computations. However, we shall see in the following that the  $t_p$  dependence of  $\psi_{t_p}$  for  $\mu \leq 1$  has much more spectacular consequences on the dephasing factor than in the  $1 < \mu < 2$ .

We will now show that, knowing the Laplace transform of  $\psi_{t_p}$ , an explicit expression for the Laplace transform of the average dephasing factor can be obtained.

## 2.3.2 Exact dephasing via renewal theory

### 2.3.2.1 Dephasing factor

Among all noise configurations that are to be taken into account, some of them (possibly very few) do not have any event between  $t_p$  and  $t_p + t$ . Their total weight is given by  $\Pi_0(t_p, t)$  which is

$$\Pi_0(t_p, t) = \int_t^{+\infty} \psi_{t_p}(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

All other histories have at least one event between  $t_p$  and  $t_p + t$ . Let us assume that it happens at  $t_p + \tau$  where  $\tau$  lies between 0 and  $t$ . Then after this event, the noise starts anew. The jump itself contributes by  $\overline{e^{ix}}$  to the dephasing factor and the rest of the noise configuration contributes by  $D_0(t - \tau)$  (*i.e.*  $t_p = 0$  in eq.(2.5)). The probability that the first event after  $t_p$  happens at time  $t_p + \tau$  is nothing but  $\psi_{t_p}(\tau)$ . Hence the contributions to  $D_{t_p}(t)$  from all possible noise configurations take the form of the following renewal equation :

$$D_{t_p}(t) = \Pi_0(t_p, t) + \overline{e^{ix}} \int_0^t \psi_{t_p}(\tau) D_0(t - \tau) d\tau. \quad (2.25)$$

Note that the Laplace transform of this expression is very simple :

$$L[D_{t_p}] = L[\Pi_0] + (1 - f) (L[\psi_{t_p}] \cdot L[D_0]) . \quad (2.26)$$

where  $f = 1 - \overline{e^{ix}}$ . Specializing  $t_p = 0$ , one gets an expression for  $D_0(t)$  that contains  $\Pi_0(0, t)$ . Since  $\Pi_0(0, t) = \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau$  an explicit expression for the Laplace transform of  $D_0$  can be found :

$$L[D_0] = \frac{1}{s} \frac{1 - L[\psi]}{1 - (1 - f) L[\psi]} . \quad (2.27)$$

Plugging expression (2.27) into equation (2.26) gives :

$$L[D_{t_p}] = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{f L[\psi_{t_p}]}{1 - (1 - f) L[\psi]} \right) . \quad (2.28)$$

This exact expression will be extensively used to derive both analytic expressions and numerical plots by Laplace inversion. Before proceeding along, let us express  $L[D_{t_p}]$  in terms of the density of events. It is then convenient to define  $S_{t_p}(t) = S(t_p + t)$  (see appendix 2.7.1). From the expressions in this appendix of  $L[S_{t_p}]$  and  $L[S]$  in terms of  $L[\psi]$  and  $L[\psi_{t_p}]$ , we obtain

$$L[D_{t_p}] = \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{f L[S_{t_p}]}{1 + f L[S]} \right) . \quad (2.29)$$

Equation (2.28) and (2.29) enable analytical estimates of the dephasing factor in various limiting regimes. Equation (2.29) is useful in the limit of small coupling (*i.e.*  $f \rightarrow 0$ ) whereas eq. (2.28) will be useful in the opposite limit of a wide distribution of spikes' heights (*i.e.*  $f \rightarrow 1$ ).

### 2.3.2.2 Weak and strong coupling regimes

In the limit of very strong coupling ( $f = 1$ ), the phase spreading of a single spike is sufficient to dephase the qubit. In this case, eq.(2.25) immediately leads to  $D_{t_p}(t) = \Pi_0(t_p, t)$ . This means that the whole average is dominated by the rare noise configurations that do not evolve during the experiment. As we shall see later, this leads to a strong  $t_p$  dependence of  $D_{t_p}(t)$  for  $\mu < 2$ .

At much lower couplings ( $|f| \ll 1$ ), it is not a priori clear whether the renewal equation for  $D_{t_p}(t)$  induces a strong dependence of  $D_{t_p}(t)$  on  $t_p$ . Pushing the above analysis forward amounts to compare the time dependence of the two terms in the r.h.s. of the renewal equation (2.25). As we will see now, it will provide a better understanding of the physics underlying the dephasing scenario.

Let us first assume that  $\Pi_0(t_p, t)$  decays much faster than  $D_0(t)$ . Since  $\psi_{t_p}(\tau) = -\partial_\tau \Pi_0(t_p, \tau)$ , it also decays much faster than  $D_0$ . Consequently, we can approximate  $\psi_{t_p}(\tau) D_0(t - \tau)$  by  $\psi_{t_p}(\tau) D_0(t)$  in Eq.(2.25). Then, after a short initial decay due to both

$D_0(t)$  and  $\Pi_0(t_p, t)$ ,  $D_{t_p}(t)$  decays as  $D_0(t)$ . Consequently, the dephasing time does not depend on  $t_p$ . For instance, we expect this situation to occur at weak coupling when the average waiting time  $\langle \tau \rangle$  is finite since the probability that no event occurs between  $t_p$  and  $t_p + t$  vanishes quite fast when  $t$  increases. Note that in the limit of vanishing coupling, the spreading of the phase can become much slower than the decay of  $\Pi_0(t_p, t)$  and thus our starting point hypothesis is valid.

The opposite case where the decay of  $D_0(t)$  is much faster than the decay of  $\Pi_0(t_p, t)$  can be discussed more conveniently by integrating the renewal equation (2.25) by parts. Considering again  $g \ll 1$  we get :

$$D_{t_p}(t) \simeq D_0(t) - \int_0^t \Pi_0(t_p, t - \tau) D_0'(\tau) d\tau. \quad (2.30)$$

Approximating  $\Pi_0(t_p, t - \tau) \approx \Pi_0(t_p, t)$  in this equation yields  $D_{t_p}(t) = D_0(t) + \Pi_0(t_p, t)(1 - D_0(t))$ . As a consequence, once  $D_0(t)$  has decayed, the dephasing factor is almost equal to  $\Pi_0(t_p, t)$ . This is the same behavior than in the very strong coupling regime  $f = 1$ , although here, we assumed  $|f| \ll 1$ . This regime is expected to occur when the decaying time scales of  $D_0(t)$  and of  $\Pi_0(t_p, t)$  are comparable. This is obviously the case at very strong coupling but, surprisingly, as we shall see now it can also be obtained for  $|f| \ll 1$ !

First of all, the above discussion shows that such a regime can only happen if the average waiting time is infinite, *i.e.* for  $\mu < 1$ . In this case,  $\Pi_0(t_p, t)$  can be evaluated analytically (see eq. (2.82)) : it is shown to be independent of  $\tau_0$  and to exhibit aging behavior (*i.e.* to depend only on  $t/t_p$ ). Therefore, the decaying time scale of  $\Pi_0(t_p, t)$  scales as  $t_p$ . Comparing this time scale with the dephasing time scale for  $|f| \ll 1$ , leads to a  $t_p$  dependent cross-over coupling constant  $f_c(t_p)$ . In the case of aging  $\Pi_0$ , the crossover coupling decays to lower and lower values by increasing  $t_p$ .

For  $|f| \gtrsim f_c(t_p)$ , the dephasing factor behaves as  $\Pi_0(t_p, t)$  and the dephasing time saturates as a function of  $f$ . Such a saturation of the dephasing time as a function of the amplitude of the noise has already been discussed for a Poissonian fluctuator [Falci et al. 2003, Galperin et al. 2003]. In this case  $\Pi_0(t_p, t) = \Pi_0(0, t) = e^{-t/\langle \tau \rangle}$  decays very fast, on a time scale  $\langle \tau \rangle$ . The cross-over between weak and strong coupling regime happens precisely at the point where the dephasing time assuming weak coupling  $\langle \tau \rangle/g^2$  is of the same order as this decay time, *i.e.* for  $g \sim 1$ . Note that in this case, as expected from our discussion, the crossover scale is independent of the age of the noise  $t_p$ . We expect this reasoning to break down in our model because of the broad distribution of waiting times ( $\mu < 2$ ). Understanding the various dephasing scenarii and computing the  $t_p$  dependence of the crossover coupling in our case requires the computation of  $\Pi_0(t_p, t)$  and of  $D_0(t)$ . These quantitative results will be presented in forthcoming sections.

To summarize the above discussion, we have argued that the dephasing time is bounded by the typical decay time of both  $\Pi_0(t_p, t)$  and  $D_0(t)$ . This suggests to distinguish between two regimes : on one hand, a *weak coupling regime* for which  $D_0(t)$  decays much slower than  $\Pi_0(t_p, t)$  and for which the dephasing time - in that case just the decay time of  $D_0(t)$  - is not sensitive to  $t_p$ . On the other hand, a *strong coupling regime* for which  $D_0(t)$  decays faster than  $\Pi_0(t_p, t)$ . In that case, the dephasing time is given by the decay time of  $\Pi_0(t_p, t)$  and

thus possibly  $t_p$ -dependent. As the above discussion shows, the cross-over between these two regimes may happen for a possibly  $t_p$  dependent cross-over coupling  $f_c(t_p) \ll 1$ . Note that in the strong coupling regime, the dephasing time becomes independent of the amplitude of the noise whereas in the weak coupling regime, it is expected to depend on the amplitude and to diverge in the vanishing coupling limit.

## 2.4 Dephasing in the symmetric models

In this section we present our results for the situation of a symmetric distribution of the spikes,  $p(-x) = p(x)$ . Under this assumption the average random accumulated phase vanishes, *i.e.*  $f$  and consequently  $D_{t_p}(t)$  are real. For  $g \ll 1$ ,  $f$  may be expanded in moments of  $p(x)$ ,  $f \approx g^2 \ll 1$  where  $g$  measures the typical scale of the fluctuations of the spikes.

### 2.4.1 Dephasing at $t_p = 0$

Before discussing the decoherence factor for arbitrary preparation time  $t_p$ , it is useful to investigate the case  $t_p = 0$ . Rewriting the Laplace transform of  $D_0(t)$  (2.27) as

$$L[D_0](s) = \frac{1}{s} \left( 1 + \frac{fL[\psi]}{1 - L[\psi]} \right)^{-1} \quad (2.31)$$

suggests to introduce a scale  $\gamma_g$  related to the strength of the coupling :

$$\left. \frac{fL[\psi]}{1 - L[\psi]} \right|_{s=\gamma_g} = 1. \quad (2.32)$$

Note that  $\gamma_g$  vanishes with the coupling  $g$ . Investigating the behavior of  $D_0$  for  $t \ll \tau_0$  requires evaluating the Laplace transform for  $s\tau_0 \ll 1$ . In this regime, the Laplace transform  $L[\psi]/(1 - L[\psi])$  can be approximated by  $1/(1 - L[\psi])$ . Within this approximation, we shall now derive explicit expressions for  $L[D_0]$  which can be Laplace inverted explicitly. This leads to expressions for  $D_0(t)$  valid at  $t \gg \tau_0$  for the different classes of  $\mu$ .

In the case of finite average waiting time ( $\mu > 1$ ), we can expand  $L[\psi] \approx 1 - s\langle\tau\rangle$  to find the leading contribution to  $D_0(t)$  for  $\langle\tau\rangle \ll \gamma_g t < 1$ . This gives :

$$D_0(t) \simeq L^{-1} \left[ \frac{\langle\tau\rangle}{s\langle\tau\rangle + f} \right] = e^{-t/\tau_\phi}, \quad (2.33)$$

with the dephasing time  $\tau_\phi = \gamma_g^{-1} = \langle\tau\rangle/f$  (see eq. (2.32)). Note that this expression is exact only for  $\psi(\tau) = \frac{1}{\langle\tau\rangle} e^{-\tau/\langle\tau\rangle}$ . At finite non integer  $\mu$ , taking into account the fluctuations of the waiting times requires keeping all terms in  $1 - L[\psi]$  up to the first non integer power  $(s\tau_b)^\mu$ . For  $1 < \mu < 2$ , we get algebraic subleading corrections to (2.33) :  $\log(D_0(t)) \simeq -\gamma_g t - fc(\mu)(t/\tau_0)^{2-\mu}$ , where  $c(\mu) = (\mu - 1)/(2 - \mu)$ . These corrections being weak for  $g \ll 1$ , the dephasing time  $\tau_\phi$  remains equal to  $\gamma_g^{-1} = \langle\tau\rangle/g^2$  in this regime.

For  $\mu < 1$ , the first term in the expansion of  $1 - L[\psi]$  is proportional to  $(\tau_0 s)^\mu$ . Therefore, plugging in  $(1 - L[\psi])/L[\psi] \simeq \Gamma(1 - \mu)(s\tau_0)^\mu$  and performing the inverse Laplace transform of (2.31) gives :

$$D_0(t) \simeq L^{-1} \left[ \frac{s^{-1}}{1 + f(s\tau_0)^{-\mu}} \right] = E_\mu [ - (\gamma_g t)^\mu ], \quad (2.34)$$

where  $E_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\mu n)}$  denotes the Mittag-Leffler function [Erdelyi 1955]. For values of  $\mu$  close to one and  $z \lesssim 1$  this function can be approximated by a simple exponential, whereas for  $\mu \sim 0$  it is similar to an algebraic function  $E_\mu(z) \sim (1+z)^{-1}$ . For large values of the argument ( $|z| \gg 1$ ) and  $|\arg(-z)| < (1 - \mu/2)\pi$ , we obtain [Erdelyi 1955]  $E_\mu(z) \approx (-z\Gamma(1 - \mu))^{-1}$ . This change of behavior from an exponential to an algebraic behavior was interpreted in ref. [Schrieffer et al. 2005b] as a Griffith effect.

Computing long time behavior ( $\gamma_g t \gg 1$ ) of the dephasing factor can be done by expanding (2.31) as follows :

$$L[D_0](s) \simeq \frac{1}{s} \frac{1 - L[\psi]}{fL[\psi]}. \quad (2.35)$$

For  $\gamma_g t \gg 1$  ( $s \ll \gamma_g$ ) we can safely replace  $L[\psi] \approx 1$  in the denominator. The inverse Laplace transform can then be done easily and reads for  $\gamma_g t \gg 1$  :

$$D_0(t) \simeq \frac{1}{f} \int_t^\infty \psi(\tau) d\tau = \frac{1}{f} \left( \frac{\tau_0}{\tau_0 + t} \right)^\mu. \quad (2.36)$$

For  $\mu < 1$ , (2.36) is nothing but the asymptotic behavior of (2.34) for  $\gamma_g t \gg 1$ . Note that for  $g \gg 1$ ,  $\gamma_g^{-1}$  is of the order of  $\tau_0$  and the decay is algebraic at all times  $t > \tau_0$ , given by (2.36). For  $1 < \mu < 2$  and  $g \ll 1$ , only at large times ( $\gamma_g t \sim \ln(1/f)$ ), when the qubit has almost completely dephased, the decay crosses over to the power law (2.36).

## 2.4.2 Influence of a finite preparation time $t_p$

We will now discuss in detail the  $t_p$ -dependence of the dephasing scenario and of the crossover coupling strength  $g_c$  for the different classes of  $\mu$ . Simple analytical expressions for  $D_{t_p}(t)$  can be derived in the weak ( $g \ll g_c$ ) and strong ( $g \gg g_c$ ) coupling regimes.

### 2.4.2.1 Infinite fluctuations of the waiting times : $1 < \mu < 2$

For  $1 < \mu < 2$ , the decay of  $D_0(t)$  is accurately described by (2.33) and (2.36). On the other hand,  $\Pi_0(t_p, t)$  exhibits an explicit dependence on the age of the noise (see appendix 2.7.4) :

$$\Pi_0(t_p, t) \simeq \left( \frac{\tau_0}{\tau_0 + t} \right)^{\mu-1} - \left( \frac{\tau_0}{\tau_0 + t + t_p} \right)^{\mu-1} \quad (2.37)$$

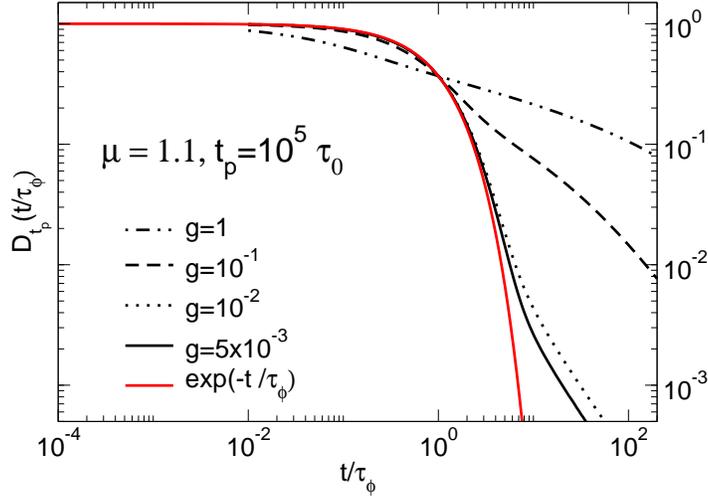


FIG. 2.5 – Dephasing factor  $D_{t_p}(t)$  in the symmetric model obtained by numerical Laplace inversion for  $\mu = 1.1$  and  $t_p = 10^5$  and various values of  $g$ . At small couplings, the decay is exponential. But at longer times  $t \gg \tau_\phi$  and for strong coupling the decay is algebraic.

for  $t_p \gg \tau_0$ . We will arbitrarily define the typical time scale of the decay of any function as the time at which its modulus reaches a fixed value  $0 < \alpha < 1$  ( $\alpha = 1/e$  in all the figures of this paper). The cross-over between a weak and strong coupling regime is defined as the value of  $g$  where the typical decay times of  $D_0(t)$  and  $\Pi_0(t_p, t)$  coincide (see section 2.3.2.2). In the present case, the cross-over coupling gets a weak  $t_p$  dependence :

$$(g_c(t_p))^2 \simeq \frac{1}{\mu - 1} \left[ \alpha + \left( \frac{\tau_0}{t_p} \right)^{\mu-1} \right]^{1/(\mu-1)}. \quad (2.38)$$

Note that  $g_c$  is a decreasing function of  $t_p$  since increasing  $t_p$  slows down the decay of  $\Pi_0(t_p, t)$  (remember that the average time of the first occurring spike after  $t_p$  increases as  $t_p^{2-\mu}$ ). But since the average waiting time is finite,  $g_c$  has a non zero lower bound. Note also that the  $t_p$ -dependence of  $g_c$  is only visible for values of  $\mu$  close to one and disappears as  $\mu$  increases to higher values. This can be seen on the numerical results depicted on fig. 2.6 :  $g_c(t_p)$  is the crossover coupling where the dephasing time start to saturate as a function of  $g$ .

In the case of very strong coupling ( $g \gg g_c(t_p)$ ), the decay of  $D_{t_p}(t)$  coincides with  $\Pi_0(t_p, t)$  and is thus algebraic at all times (see fig. 2.5). On the other hand, at weak coupling ( $g \ll g_c$ ), the dephasing factor  $D_{t_p}(t)$  follows  $D_0(t)$  up to times of the order of the dephasing time, *i.e.* it decays exponentially :  $D_{t_p}(t) = \exp(-t/\tau_\phi)$ , where  $\tau_\phi = \gamma_g^{-1} = \tau_0 g^{-2}$ . In this weak coupling regime, the dephasing is thus described accurately using a second cumulant expansion. However, for times large compared to the dephasing time,  $t \gtrsim \tau_\phi \ln(\tau_\phi/\tau_0)$ , higher

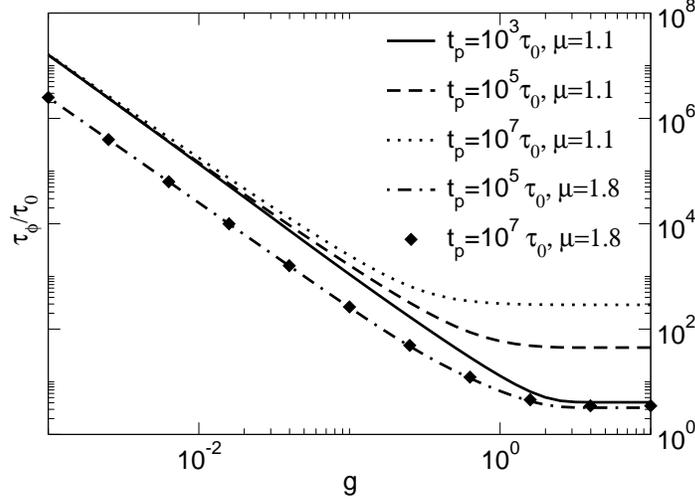


FIG. 2.6 – Dephasing time  $\tau_\phi$  in the symmetric model as a function of  $g$  for  $\mu = 1.1$ ,  $\mu = 1.8$  and for various values of  $t_p$ . At strong coupling the dephasing time exhibits  $t_p$ -dependence, which disappears as  $\mu$  increases to higher values. Note that the critical coupling  $g_c$  has a weak  $t_p$ -dependence for  $\mu$  close to one.

cumulants contribute and the decay goes over to a much slower power law. If  $t_p < \tau_\phi$  the asymptotic decay of  $D_{t_p}(t)$  continues to follow  $D_0(t)$  behavior given in (2.36) whereas, in the opposite case  $t_p > \tau_\phi$  it is given by  $\Pi_0(t_p, t)$  (2.37).

#### 2.4.2.2 Infinite average waiting time : $0 < \mu < 1$

For  $0 < \mu < 1$  the influence of a finite preparation time  $t_p$  becomes even more drastic, due to the absence of a characteristic time scale in the waiting time distribution. In this case  $\Pi_0(t_p, t)$  only depends on the ratio  $t/t_p$  (aging behavior) :

$$\Pi_0(t_p, t) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu} \left(\frac{t_p}{t}\right)^\mu {}_2F_1\left(1, \mu; 1 + \mu; -\frac{t_p}{t}\right), \quad (2.39)$$

where  ${}_2F_1$  denotes a hypergeometric function [Gradshteyn et Ryzhik 1994]. Consequently, the typical decay time of  $\Pi_0(t_p, t)$  is proportional to  $t_p$ . On the other hand,  $D_0(t)$  is given by (2.34) and its decay time thus scales as  $\tau_\phi = \gamma_g^{-1} \propto \tau_0/f^{1/\mu} \approx \tau_0/g^{2/\mu}$  in the limit  $g \ll 1$ . As a consequence, the crossover coupling strength  $g_c$  exhibits a strong  $t_p$  dependence :

$$g_c(t_p) = \lambda(\mu) \left(\frac{\tau_0}{t_p}\right)^{\mu/2} \ll 1, \quad (2.40)$$

where  $\lambda(\mu)$  is a function of  $\mu$  that can be obtained by inversion of (2.39) and (2.34). As in the case  $1 < \mu < 2$ ,  $g_c$  is a decreasing function of  $t_p$  : the range of the strong coupling regime

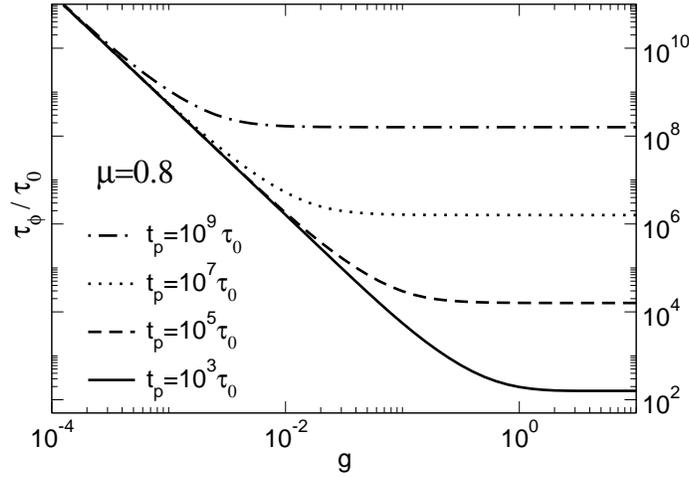


FIG. 2.7 – Dephasing time  $\tau_\phi$  in the symmetric model as a function of  $g$  for  $\mu < 1$  and for various values of  $t_p$ . At strong coupling the dephasing time exhibits a  $t_p$ -dependence, which disappears as  $\mu$  increases to higher values. Note the explicit  $t_p$ -dependence of the critical coupling  $g_c$ .

increases with the age of the noise. However, contrarily to the case  $1 < \mu < 2$ ,  $g_c$  has no lower bound, *i.e.* it decays to zero as we increase  $t_p$ . Consequently, any qubit surrounded by a noise with  $0 < \mu < 1$  will eventually end up in the strong coupling regime. This can be seen on results depicted on figure 2.7.

At strong coupling ( $g > g_c(t_p)$ ),  $D_{t_p}(t)$  is given by  $\Pi_0(t_p, t)$  and therefore is only a function of  $t/t_p$ . In this regime, the dephasing time is proportional to  $t_p$ , as shown on fig. 2.8. The initial decay of coherence is quite fast since, for  $t \ll t_p$ ,  $\Pi_0(t_p, t) \approx 1 - A(\mu)(t/t_p)^{1-\mu}$  with  $A(\mu) = \sin(\pi\mu)/[(1-\mu)\pi]$ . Consequently, for  $\mu$  close to one  $D_{t_p}(t)$  decays substantially for times short compared to the preparation time  $t_p$ . For  $t \gtrsim t_p$ , the decay slows down considerably and goes over to a power law  $\Pi_0(t_p, t) \propto (t_p/t)^\mu$ .

At weak coupling ( $g < g_c(t_p)$ ), the decay of  $D_{t_p}(t)$  is accurately described by (2.34). For  $\mu$  close to 1 and  $\gamma_g t < 1$ , the Mittag-Leffler function can be approximated by an exponential decay  $D_{t_p}(t) \approx \exp[-(\gamma_g t)^\mu]$ , whereas for  $0 < \mu \ll 1$  and  $\gamma_g t \lesssim 1$ , the decay is rather algebraic,  $D_{t_p}(t) \approx [1 + (\gamma_g t)^\mu]^{-1}$ . In any case, the typical decay time scales as  $\tau_\phi = \gamma_g^{-1} \propto g^{-2/\mu}$ . As for  $1 < \mu < 2$ , this dephasing time can be recovered using a second cumulant expansion of the phase. Obviously, for larger times,  $t > \tau_\phi$ , higher cumulants contribute and the decay goes over to a power law,  $D_{t_p}(t) \propto (\tau_0/t)^\mu$ , as shown in Fig (2.8).

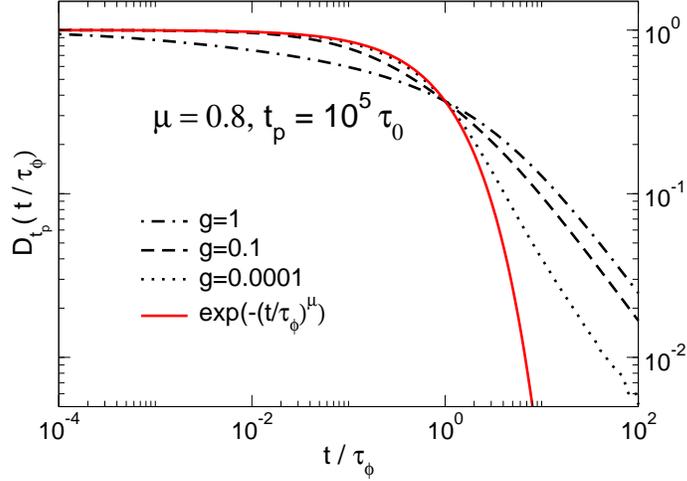


FIG. 2.8 – Dephasing factor  $D_{t_p}(t)$  in the symmetric model obtained by numerical Laplace inversion for  $\mu = 0.8$ ,  $t_p = 10^5 \tau_0$  and various values of  $g$ . For weak coupling,  $g < g_c(t_p)$ , the decay is exponential for  $t < \tau_\phi$ . For times  $t \gtrsim \tau_\phi$  at weak coupling and for strong coupling the decay is algebraic.

### 2.4.2.3 On the marginal case : $\mu = 1$

Finally, in the marginal case  $\mu = 1$  corresponding to  $1/f$  noise, the above analysis is confirmed qualitatively. We mainly find logarithmic corrections to the above results, leading to behaviors intermediate between the classes  $\mu < 1$  and  $1 < \mu < 2$ . The crossover coupling  $g_c$  in this case turns out to be

$$g_c(t_p) = \left( \frac{\tau_0}{t_p} \ln(t_p/\tau_0) \right)^{1/2}, \quad (2.41)$$

showing a strong dependence on the preparation time  $t_p$ . As in the case  $\mu < 1$ , it decays to zero for  $t_p \rightarrow \infty$ .

Computing  $D_0(t)$  requires to invert (2.31). This cannot be done exactly because of the complicated form of  $L[\psi] \simeq 1 - s\tau_0 |\ln(s\tau_0)|$  for  $s\tau_0 \ll 1$ . However,  $D_0(t)$  may be estimated considering  $\ln(s\tau_0)$  as a constant and replacing  $s$  by  $1/t$  in its argument. This leads to :

$$D_0(t) \simeq \exp\left(-f \frac{t/\tau_0}{\ln(t/\tau_0)}\right) \quad \text{for } t \lesssim \frac{\tau_0}{f} |\ln f|. \quad (2.42)$$

Hence, for weak coupling,  $D_{t_p}(t)$  decays due to the contribution of  $D_0(t)$  on a characteristic time scale  $\tau_\phi \simeq (\tau_0/f) |\ln f|$ . Again, for times large compared to the dephasing time, the decay slows down considerably and goes over to a power law (2.36),  $D_{t_p}(t) \propto t^{-1}$ .

At strong coupling ( $g > g_c(t_p)$ ),  $D_{t_p}(t)$  follows  $\Pi_0(t_p, t)$ , which reads in the present case :

$$\Pi_0(t_p, t) \simeq \frac{1}{\ln(1 + t_p/\tau_0)} \ln \left( 1 + \frac{t_p}{\tau_0 + t} \right). \quad (2.43)$$

Consequently, the dephasing time exhibits a strong dependence on the preparation time  $t_p$ . However, since  $\Pi_0(t_p, t)$  is not a function of  $t/t_p$  the dephasing time does not scale linearly with  $t_p$  (as for  $\mu < 1$ ) but has a weaker  $t_p$  dependence which depends on the parameter  $\alpha$  used to define  $\tau_\phi$  ( $D_{t_p}(\tau_\phi) = \alpha$ ).

## 2.5 Dephasing in the asymmetric models

In this section, we consider asymmetric distributions  $p(x)$  of the pulse amplitudes with a non vanishing average  $h = \bar{x}$ . This obviously corresponds to the generic case for our intermittent noise, but it also appears naturally in the context of decoherence at optimal points discussed in section 2.2.3.

Similar expansions of the exact expression (2.28) can be performed to derive the detailed decay of  $D_{t_p}(t)$  in the case of a finite mean value of the noise,  $\bar{x} \neq 0$ . Nevertheless, analytic expressions are much harder to obtain since in this case  $f = 1 - \overline{e^{ix}}$  is complex. Therefore, in this section, we will mainly derive scaling laws of  $\tau_\phi$ , the critical coupling  $g_c$  and present numerical computations of  $D_{t_p}(t)$  in various regimes. Note that at strong coupling, the dephasing is due to single events of the noise, *i.e.*  $D_{t_p}(t) \simeq \Pi_0(t_p, t)$ . As a consequence, dephasing only depends on  $\psi(\tau)$ , not on the details of  $p(x)$ . In this regime, the results reduce to those previously derived for the symmetric case ( $h = \bar{x} = 0$ ) in the strong coupling regime. Differences with respect to the symmetric case only arise in the weak coupling regime on which we shall focus in the following.

Before proceeding along, let us recall the notations (2.7) for the moments of  $p(x)$  :  $h = \bar{x}$  and  $g^2 = \overline{x^2}$ . At weak coupling,  $f$  may be expanded in moments of  $p(x)$  :  $f \approx -ih + g^2/2 + \dots$ . As expected for  $h \ll g^2$ , the finite mean value does not modify the results of the previous section, *i.e.* the dominant dephasing is the same as in the  $h = 0$  case (symmetric noise). However, as  $h$  gets of the same order as  $g^2$  the decay of  $D_{t_p}(t)$  and the scaling of  $\tau_\phi$  are modified. Understanding precisely the possibly nonlinear effect of a small bias on the dephasing factor is related to the fluctuation/dissipation issue in CTRW and is out of the scope of the present paper. Therefore we shall now focus on the case of huge asymmetry where  $h \gg g^2$ . In this limiting regime, the pulse dispersion can be forgotten and  $h$  is the only coupling parameter. Note that in this specific variant of the asymmetric model,  $\Phi_{t_p}(t)$  is proportional to the number of events  $N[t_p, t_p + t]$  that occur between  $t_p$  and  $t_p + t$  and therefore, the dephasing factor as a function of  $h$  is the characteristic function of the probability distribution for  $N[t_p, t_p + t]$ . Contrarily to the case of Poissonian telegraph noise [Paladino et al. 2002, Galperin et al. 2003] where a finite mean value of the noise just adds a global phase to  $D_{t_p}(t)$ , we will see that strong fluctuations in the occurrence times of the spikes induce dephasing even for a fixed value of the phase pulses.

### 2.5.1 The $0 < \mu < 1$ class

In the  $0 < \mu < 1$  case, we can use the same method as for the derivation of (2.34) to find the scaling law of  $\tau_\phi$  as a function of the coupling strength. The dephasing factor in the weak coupling regime decays as  $|D_{t_p}(t)| = |E_\mu(iz)|$  where  $z \simeq -h(t/\tau_0)^\mu/\Gamma(1-\mu)$  and  $E_\mu$  denotes the Mittag-Leffler function previously used. Using the series expansion that defines  $E_\mu$ , it can be shown easily that  $|E_\mu(iz)|$  only depends on  $z^2$ . As a consequence, the dephasing time in the weak coupling regime scales as  $\tau_\phi \propto \tau_0/h^{1/\mu}$ , as shown in Fig. 2.9.

The cross-over between weak and strong coupling regime is obtained by comparing this time scale with the typical decay time of  $\Pi_0(t_p, t)$ , which is proportional to  $t_p$  for  $0 < \mu < 1$ . Therefore the critical coupling strength scales as  $h_c \propto t_p^{-\mu}$ . Fig. 2.10 shows  $D_{t_p}(t)$  for  $\mu = 0.8$

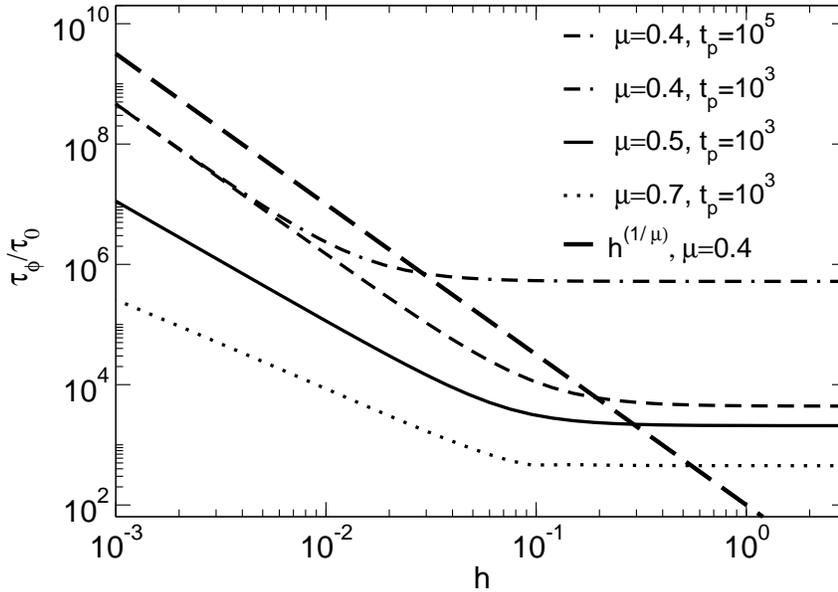


FIG. 2.9 – Dephasing time  $\tau_\phi$  in the asymmetric model as a function of the coupling  $g$  for a huge asymmetry  $h \gg g^2$ , and different values of  $\mu < 1$ . At weak coupling,  $h < h_c(t_p)$ , the dephasing time scales as  $\tau_\phi \propto 1/h^{1/\mu}$ , whereas it becomes proportional to  $t_p$  for  $h > h_c(t_p)$ . Note the  $t_p$ -dependence of the critical coupling  $h_c$ , visualized for  $\mu = 0.4$ .

and different values of the coupling strength from the weak coupling regime to slightly above  $h_c$ . The initial decay, up to the dephasing time, follows the previous exponential decay. At larger times the decay crosses over to a power law,  $D_{t_p}(t) \propto 1/t^\mu$ , as in the symmetric case. Between these two asymptotic behaviors, beatings may occur, due to interferences between different noise histories, as already seen in other models [Falci et al. 2003]. However,

in this reference, oscillations appear in the strong coupling regime. They arise from interferences between noise histories associated with different initial conditions. Such a strong initial condition dependence is expected at strong coupling for a Poissonian fluctuator. In our case, oscillations are also present at  $t_p = 0$  in the diffusion regime and therefore cannot be explained by an initial condition dependence. Nevertheless they are still associated with an interference effect between noise histories.

To illustrate this point, let us mention that for  $D_0(t)$ , a numerical investigation shows that in the situation considered here ( $h \gg g^2$ ), these oscillations are only present for  $\mu > 1/2$ . More precisely, the probability distribution for the accumulated phase  $\Phi_0(t)$  can be computed analytically in the diffusion regime. In this limit  $\Phi_0(t) = hN[0, t]$  can be viewed as a positive real number. For  $0 < \mu < 1$ , its probability distribution is highly non Gaussian and given by

$$P_{0,t}(\phi) = \frac{t}{\mu \tau_\phi(h) \phi^{1+1/\mu}} L_\mu \left( \frac{t/\tau_\phi(h)}{\phi^{1/\mu}} \right) \quad (2.44)$$

where  $\tau_\phi(h) = \tau_0 (\Gamma(1 - \mu)/h)^{-1/\mu}$  and  $L_\mu$  denotes the fully asymmetric Lévy distribution of index  $\mu$ . For  $\mu < 1/2$ , it decays monotonically whereas for  $\mu > 1/2$ , it grows towards a maximum before decreasing rapidly for large values. This maximum can be viewed as a precursor of the maximum expected for  $1 < \mu < 2$  close the average value  $ht/\langle \tau \rangle$  of the phase (for  $1 < \mu < 2$ ,  $P_{0,t}$  is a truncated Lévy distribution whereas for  $\mu \geq 2$  it is Gaussian). It is precisely this local maximum that leads to oscillations in the modulus of the dephasing factor. Note that these oscillations might be related to the Griffith effect mentioned in ref. [Schrieffer et al. 2005b].

### 2.5.2 The intermediate class $1 < \mu < 2$

In the intermediate case of diverging variance,  $1 < \mu < 2$ , it is even harder to find scaling laws analytically. Numerically, one finds that the decay time of  $D_{t_p}(t)$  in the weak coupling regime scales as  $\tau_\phi \propto \tau_0/h$ . This leads to a critical coupling  $h_c(t_p)$  equal to the r.h.s of (2.38). At weak coupling, the decay roughly follows an exponential  $\exp(-t/\tau_\phi)$  up to times of the order of  $\tau_\phi$ . At larger times it crosses over to a power law,  $D_{t_p}(t) \propto 1/t^\mu$ . Again, at intermediate times and in the weak coupling regime  $D_{t_p}(t)$  shows a transient regime. Note also that the cross-over between the weak and strong coupling regimes happens in a much larger ( $\mu$ -dependent) range of the coupling strength than in the symmetric case.

## 2.6 Discussion and conclusion

To conclude, we have proposed a new model for an intermittent classical noise with a  $1/f$  power spectrum. Within this model, the noise consists in a succession of pulses, separated by random waiting times. We have shown within this context that the intermittence associated with the  $1/f$  characteristics implies a non-stationarity of the noise. Non-stationarity effects are present in some of the regimes of the dephasing of a two level system coupled to this noise

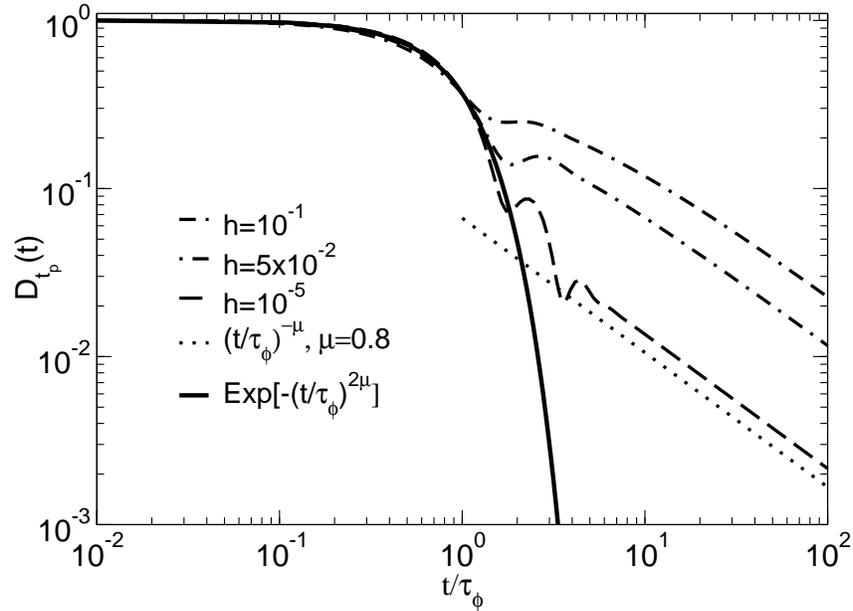


FIG. 2.10 – Decay of  $|D_{t_p}(t)|$  in the asymmetric model for  $\mu = 0.8$ ,  $t_p = 10^3\tau_0$  and different values of the coupling strength  $h$ . Here  $h_c(10^3\tau_0) \simeq 10^{-2.4}$

as summarized on tables 2.1 and 2.2 for the symmetric model. In particular, in the strong coupling regime, the dephasing factor decays algebraically in time, with a characteristic time of decay (dephasing time) depending on the age  $t_p$  of the noise. On the other hand, in the weak coupling regime an initial exponential decay of this dephasing factor is found. However, for low frequency noises and contrarily to the usual behavior, this exponential is stretched and the dephasing time shows an anomalous dependence on the coupling to the noise. After this initial decay, the dephasing factor decays algebraically. An important observation is that the critical coupling strength separating the weak and strong coupling regimes does depend on the age of the noise when it is non-stationary. More precisely, it decays to zero with the age, such that any qubit coupled to a non-stationary noise will eventually fall in the strong coupling regime.

One should be careful that the dephasing factor that we studied is defined as a configuration average, or *ensemble average* over the noise (see eq. (2.5)). In the usual experimental protocols, information on the quantum statistics of the qubit is collected in a given sample in successive runs. This corresponds to a *time average* in a given configuration. These two averages do not coincide in general for non-stationary or aging phenomena. Indeed, the non-stationarity of the  $1/f$  noise that we considered is closely related to the weak ergodicity breaking found in similar trap models for glassy materials [Bouchaud 1992]. Thus one should

Exponent $\mu$	Critical coupling $g_c(t_p)$	Dephasing time $\tau_\phi$	
		$g < g_c$	$g > g_c$
$1 < \mu < 2$	$g_c(t_p)^2 = \frac{1}{\mu-1} \left[ \frac{1}{e} + \left( \frac{T_{u_0}}{t_{\text{mathrmp}}} \right)^{\mu-1} \right]^{1/(\mu-1)}$	$\tau_\phi = \tau_0 g^{-2}$	$\tau_\phi = \tau_0 [1/e + (\tau_0/t_p)^{\mu-1}]^{-1/(\mu-1)}$
$\mu = 1$	$g_c(t_p)^2 = \frac{\tau_0}{t_p} \ln(t_p/\tau_0)$	$\tau_\phi = \frac{\tau_0}{f_g}  \ln f_g $	$\tau_\phi = \tau_0 (t_p/\tau_0)^{1-1/e}$
$0 < \mu < 1$	$g_c(t_p)^2 \propto \left( \frac{\tau_0}{t_p} \right)^\mu$	$\tau_\phi = \tau_0 g^{-2/\mu}$	$\tau_\phi \propto t_p$

TAB. 2.1 – Critical coupling and dephasing time in the symmetric model for different waiting time distributions.

Exponent $\mu$	$g > g_c$	$g < g_c$	
		$t \ll \tau_\phi$	$t \gg \tau_\phi$
$1 < \mu < 2$	$\left( \frac{\tau_0}{\tau_0+t} \right)^{\mu-1} - \left( \frac{\tau_0}{\tau_0+t_p+t} \right)^{\mu-1}$	$\exp(-t/\tau_\phi)$	$t_p < \tau_\phi : \exp(-t/\tau_\phi)$ $t_p > \tau_\phi : \left( \frac{\tau_0}{\tau_0+t} \right)^{\mu-1}$
$\mu = 1$	$\frac{1}{\ln(1+t_p/\tau_0)} \ln \left( 1 + \frac{t_p}{\tau_0+t} \right)$	$\exp \left( -f_g \frac{t/\tau_0}{\ln(t/\tau_0)} \right)$	$1/t$
$0 < \mu < 1$	$t \ll \tau_\phi$	$t \gg \tau_\phi$	$\left( \frac{\tau_0}{t} \right)^\mu$
	$1 - A(\mu)(t/t_p)^{1-\mu}$	$(t_p/t)^\mu$	

 TAB. 2.2 – Summary of the different expressions of the decoherence factor  $D_{t_p}$  in the symmetric model.

be careful in interpreting the non-stationary dephasing factor that we found in some regimes. We nevertheless hope that the questions raised by our results might lead to some possible experimental setup to better characterize the low frequency noise in mesoscopic solids.

## 2.7 Appendix

### 2.7.1 Useful results on the sprinkling time distribution

#### 2.7.1.1 Definition

This distribution  $S(t)$  is defined as the probability density that an event occurs exactly at time (date)  $t$ . Hence  $S(t)$  satisfies the equation

$$S(t) = \psi(t) + \int_0^t dt' \psi(t-t') S(t'), \quad (2.45)$$

which states that the spike at  $t$  is either the first one, or follows a previous spike at time  $t-t'$ . In Laplace transform, this reads :

$$L[S](s) = \frac{L[\psi](s)}{1 - L[\psi](s)}. \quad (2.46)$$

Whenever  $\psi(\tau)$  has a finite mean,  $S(t)$  is constant, equal to  $1/\langle\tau\rangle$  with possible large fluctuations ( $\mu > 1$ ).

### 2.7.1.2 Explicit expressions

In the case of a Poissonian waiting time distribution  $\psi(\tau) = \gamma e^{-\gamma\tau}$ ,  $S(t)$  is a constant equal to  $1/\langle\tau\rangle$  for all times. When  $\psi$  has algebraic tails at long times, we expect this result to be modified since the rate of events is expected to decrease with the sampling of the algebraic tail of  $\psi$ .

**Case  $1 < \mu < 2$**  The small  $s$  expansion of  $L[\psi](s)$  is given by :

$$L[\psi](s) \simeq 1 - A\tau_0 s - \Gamma(1 - \mu) (s\tau_0)^\mu$$

where  $A$  is a numerical constant which depends on the small time behavior of  $\psi(\tau)$ . It is given by  $A = 1/(\mu - 1)$  for the specific case of (2.8). Using this form, in the vanishing  $s$  limit, we have :

$$L[\psi](s) \simeq \frac{1}{A\tau_0 s} \left( 1 - \frac{\Gamma(1 - \mu)}{A} (\tau_0 s)^{\mu-1} - A\tau_0 s + \mathcal{O}(s^2) \right). \quad (2.47)$$

Taking the inverse Laplace transform gives the following asymptotics for  $t \gg \tau_0$  :

$$S(t) \simeq \langle\tau\rangle^{-1} \left( 1 + \frac{A^{-1}}{\mu - 1} \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^{\mu-1} \right).$$

For the specific case of (2.8),

$$S(t) \simeq \langle\tau\rangle^{-1} \left( 1 + \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^{\mu-1} \right). \quad (2.48)$$

The sprinkling time distribution decreases algebraically towards its asymptotic value  $S(\infty) = 1/\langle\tau\rangle$ . This algebraic tail is the signature of the slow decay of  $\psi(\tau)$  for very large times.

**Case  $\mu = 1$**  In this case, the Laplace transform of  $\psi$  is given by

$$L[\psi](s) = 1 + s\tau_0 e^{s\tau_0} \text{Ei}(s\tau_0) \quad (2.49)$$

where Ei denotes the exponential integral function which has the following expansion valid for  $x > 0$  (eq.8.214 in ref. [Gradshteyn et Ryzhik 1994]) :

$$\text{Ei}(-x) = C + \log(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n! n}. \quad (2.50)$$

Therefore, keeping only the most singular term in the limit  $s\tau_0 \rightarrow 0$  we get :

$$L[S](s) = \frac{-1}{s\tau_0 \log(s\tau_0)}. \quad (2.51)$$

The inverse Laplace transform cannot be found exactly but its asymptotic behavior at large times can be estimated as :

$$S(t) \simeq \frac{1}{\tau_0 \log(t/\tau_0)}. \quad (2.52)$$

In this case, the sprinkling time distribution decays to zero when  $t \rightarrow +\infty$ . This means that events are more and more rare.

**Case  $0 < \mu < 1$**  In this case, we find

$$L[S](s) \simeq_{s \rightarrow 0} \frac{(\tau_0 s)^{-\mu}}{\Gamma(1 - \mu)} \quad (2.53)$$

which corresponds to

$$S(t) \simeq_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{1-\mu} \quad (2.54)$$

In this case also, the sprinkling time distribution decays to zero when  $t \rightarrow +\infty$ .

### 2.7.1.3 Translated sprinkling time distribution

Let us denote by  $S_{t_p}(t)$  the density of events at time  $t_p + t$ . By definition  $S_{t_p}(t) = S(t_p + t)$ . Using the same idea as above, we can decompose noise histories in two classes : the one that do not have any event between  $t_p$  and  $t_p + t$  and the ones who do have. This leads to an integral equation expressing  $S_{t_p}(t)$  in terms of  $\psi$  and  $\psi_{t_p}$  defined as the probability distribution for the time between  $t_p$  and the first event occurring after  $t_p$ . This integral equation, analogous to (2.45) is :

$$S_{t_p}(t) = \psi_{t_p}(t) + \int_0^t \psi(t - \tau) S_{t_p}(\tau) d\tau. \quad (2.55)$$

Taking its Laplace transform leads to :

$$L[S_{t_p}] = \frac{L[\psi_{t_p}]}{1 - L[p]}. \quad (2.56)$$

## 2.7.2 Laplace transform and moments of $\psi(\tau), \psi_{t_p}(\tau)$

### 2.7.2.1 Laplace Transform and moments of $\psi(\tau)$

Let us recall some known results on Laplace Transform of algebraic distributions. The distribution (2.8) can be expressed in terms of the reduced variable  $x = \tau/\tau_0$  :

$$\psi(x) = \mu (1 + x)^{-1-\mu} . \quad (2.57)$$

It is useful to notice that the Laplace transform of (2.8) reads exactly

$$L[\psi](s) = \mu(s\tau_0)^\mu e^{s\tau_0} \Gamma(-\mu, s\tau_0). \quad (2.58)$$

Here  $\Gamma(-\mu, s\tau_0)$  is the incomplete Gamma function [Gradshteyn et Ryzhik 1994] :  $\Gamma(z, \alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ . The moments of this distribution exist up to order  $[\mu]$  where  $[\mu]$  corresponds to the largest integer smaller than  $\mu$ . They read :

$$\begin{aligned} \langle x^n \rangle &= \mu \int_0^\infty dx x^n (1+x)^{-1-\mu} \\ &= \mu \int_0^1 dy y^n (1-y)^{\mu-1-n} \\ &= \mu B(n+1, \mu-n) \equiv \mu \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(\mu+1)} \end{aligned}$$

where  $B(x, y)$  is the beta function.

We are interested in the relation between the existence of these moments, and the small  $s$  behavior of the Laplace transform (2.58). Expanding the incomplete Gamma function  $\Gamma(\mu, s)$  in the Laplace Transform (2.58) gives :

$$\begin{aligned} L[\psi](s) &= \mu s^\mu e^s \left( \Gamma(-\mu) - s^{-\mu} \sum_0^\infty \frac{(-1)^k s^k}{k!(k-\mu)} \right) \\ &= \mu \Gamma(-\mu) s^\mu e^s + \mu \sum_{n=0}^\infty s^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!(\mu+k-n)} \end{aligned}$$

valid for non-integer  $\mu$ . The coefficient of  $s^n$  in this expansion reads :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k}}{k!(n-k)!(\mu+k-n)} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k}}{k!(n-k)!} \int_0^1 dt t^{k+\mu-n-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 dt (1-t)^n t^{\mu-n-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} B(n+1, \mu-n). \end{aligned}$$

Restoring  $\tau_0$ , we thus get an explicit expression for the Laplace Transform of  $\psi$  :

$$L[\psi](s) = \mu \Gamma(-\mu) (s\tau_0)^\mu e^s + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} (s\tau_0)^n \langle x^n \rangle \quad (2.59)$$

The terms  $n < \mu$  of the last expansion corresponds to the moments of  $\psi(x)$ , and we recover the expected results : the small  $s$  expansion of  $L[\psi](s)$  consist in a integer function that gives the existing moments of  $\psi$  and a second part that is specific of the tails of  $\psi(x)$  if it decays more slowly than an exponential (algebraic tails).

### 2.7.2.2 Double Laplace transform of $\psi_{t_p}(\tau_1)$

In Ref. [Godrèche et Luck 2001], Godrèche and Luck used a direct CTRW method to derive the double Laplace transform of  $\psi_{t_p}(\tau_1)$ . Their results can be recovered straightforwardly from the renewal equation (2.22). We will use the following notation for the double Laplace transform

$$L_{t_p, \tau_1}[\psi_{t_p}(\tau_1)](u, s) = \int_0^{+\infty} d\tau_1 e^{-s\tau_1} \int_0^{+\infty} dt_p e^{-ut_p} \psi_{t_p}(\tau_1) \quad (2.60)$$

Let us first focus on the  $t_p$ -Laplace transform of the integral in eq. (2.22). Changing the integration variable from  $t_p$  to  $t' = t_p - \tau_1$ , it reads

$$\int_0^{+\infty} dt_p e^{-ut_p} \int_0^{t_p} d\tau S(t_p - \tau) \psi(\tau_1 + \tau) = L[S](u) \int_0^{\infty} d\tau e^{-u\tau} \psi(\tau_1 + \tau) \quad (2.61)$$

This provides the following expression for the double Laplace transform of  $\psi_{t_p}(\tau_1)$  :

$$\begin{aligned} L[\psi_{t_p}](u, s) &= (1 + L[S](u)) L_{t_p, \tau_1}[\psi(t_p + \tau_1)](u, s) \\ &= \frac{L_{t_p, \tau_1}[\psi(t_p + \tau_1)](u, s)}{1 - L[\psi](u)} \end{aligned} \quad (2.62)$$

The final result can be obtained by considering the double Laplace transform of  $\psi(\tau_1 + t_p)$  : using  $\int_{\tau_1}^{+\infty} \psi(\tau) e^{-s\tau} d\tau = L[\psi](s) - \int_0^{\tau_1} \psi(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ , we obtain (with  $\tau = \tau_1 + t_p$ )

$$\begin{aligned} L_{t_p, \tau_1}[\psi(t_p + \tau_1)](u, s) &= \int_0^{+\infty} d\tau_1 e^{-(s-u)\tau_1} \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau e^{-u\tau} \psi(\tau) \\ &= \frac{L[\psi](u)}{s-u} - \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau e^{-(s-u)\tau_1} e^{-u\tau} \psi(\tau) \\ &= \frac{1}{s-u} (L[\psi](u) - L[\psi](s)) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Plugging (2.63) into (2.62), we obtain [Godrèche et Luck 2001] :

$$L[\psi_{t_p}](u, s) = \frac{1}{s-u} \frac{L[\psi](u) - L[\psi](s)}{1 - L[\psi](u)}. \quad (2.64)$$

This equation can be used to infer explicit expressions for  $\psi_{t_p}(t)$  by performing the appropriate inverse Laplace transforms (see appendix 2.7.3).

### 2.7.2.3 Moments of $\psi_{t_p}(\tau)$

The expansion of  $L[\psi](s)$  in powers of  $s$  can be used to extract the long  $t_p$  behavior of the moments of  $\psi_{t_p}(\tau)$ . For  $\mu > 1$ , we expect  $\psi_{t_p}$  to have the same algebraic decay than  $\psi$  at infinity. Therefore, only the first  $[\mu]$  moments of  $\psi_{t_p}$  are expected to exist. We will expand the double Laplace transform (2.64) of  $L[\psi_{t_p}](u, s)$  into powers of  $s$  for small values of  $u$ .

The first coefficients of the  $s$  expansion corresponds to the Laplace transform with respect to  $t_p$  of the moments of  $\psi_{t_p}(\tau)$  which we denote here by  $T_n(t_p) = \langle \tau_1^n \rangle_{\psi_{t_p}}$ . When considering eq. (2.64), two different contributions from  $(L[\psi](u) - L[\psi](s))/(s - u)$  appear. The non integer powers can be expressed as

$$\frac{u^\mu - s^\mu}{u - s} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k u^{\mu-1-k} - \sum_{k=0}^{\infty} s^{\mu+k} u^{-k-1}, \quad (2.65)$$

while integer powers give a finite sum :

$$\frac{u^n - s^n}{u - s} = \sum_{k=0}^{n-1} s^k u^{n-1-k}. \quad (2.66)$$

Note that fractional powers are of the form  $s^{\mu+k}$  where  $k \geq 0$ , which confirms that only the first  $[\mu]$  moments exist. Assuming the following notation :

$$L[\psi](s) = \sum_{n=0}^{[\mu]} \frac{(-s)^n}{n!} \langle \tau^n \rangle - \frac{\tau_\mu}{\Gamma(\mu)} s^\mu, \quad (2.67)$$

the coefficient of the  $s^N$  term in the expansion of (2.64) in powers of  $s$  is given by :

$$\frac{1}{1 - L[\psi](u)} \left( \frac{\tau_\mu}{\Gamma(\mu)} u^{\mu-1-N} - \sum_{m=N+1}^{[\mu]} \frac{\langle \tau^m \rangle}{m!} (-1)^m u^{m-1-N} \right).$$

Note that the second term is present only for  $N \leq [\mu] - 1$ . Assuming that  $\mu > 1$ ,  $1 - L[\psi](u)$  can safely be replaced by  $\langle \tau \rangle u$  in order to extract the low  $u$  behavior of the above expression. From this, we infer the Laplace transform of  $T_N(t_p)$  :

$$L_{t_p}[T_N](u) = (-1)^N \frac{N! \tau_\mu}{\Gamma(\mu) \langle \tau \rangle} u^{\mu-2-N} - \sum_{m=-1}^{[\mu]-m-2} \frac{(-1)^m (m+1)! \langle \tau^{N+m} \rangle}{(N+m)! \langle \tau \rangle} u^m. \quad (2.68)$$

This formula shows that for  $N < [\mu]$ , there is a limiting value for  $t_p$  going to infinity, given by the  $u^{-1}$  term in the sum (2.68). Regular terms that appear in the sum (2.68) contain the short time behavior in  $t_p$  and, in the large  $t_p$  limit, the non integer power in the r.h.s gives an algebraic decaying contribution. The limiting value of  $T_N(t_p)$  for  $N \leq [\mu] - 1$  is given by :

$$T_N(\infty) = \frac{\langle \tau^{N+1} \rangle}{(N+1) \langle \tau \rangle}. \quad (2.69)$$

This result coincides with (2.23) found previously for  $N = 1$  as soon as  $\mu > 1$ . For  $N = [\mu]$ , the regular contribution to (2.68) is not there anymore. The  $[\mu]$ th moment has an algebraic sublinear dependance in  $t_p$  :

$$T_{[\mu]}(t_p) \sim \frac{\tau_\mu}{\langle \tau \rangle} t_p^{1-(\mu-[\mu])}. \quad (2.70)$$

To summarize, the algebraic tail of  $\psi(\tau)$  contaminates  $\psi_{t_p}$  not only through the divergence of its high moments but also through algebraic corrections of the lower ones and the sublinear algebraic behavior of the last finite one.

In particular these results imply :

- For  $1 < \mu < 2$ , the first moment  $\langle \tau_1 \rangle(t_p)$  increases sublinearly as obtained from a direct computation.
- For  $2 < \mu < 3$ , the second moment also increases sublinearly although it is finite for any  $t_p$ . Only when  $\mu > 3$  do we have finite limits for both the first and second moments of  $\psi_{t_p}$  in the limit  $t_p$  going to infinity.

### 2.7.3 Explicit expressions for $\psi_{t_p}(\tau_1)$

#### 2.7.3.1 Expression of $\psi_{t_p}(\tau_1)$ for $1 < \mu < 2$

The small  $s$  expansion of  $L[\psi](s)$  reads  $L[\psi](s) = 1 - s\langle \tau \rangle + \mu\Gamma(-\mu)(s\tau_0)^\mu$  (we have to keep all the terms up to the first non-integer power). Once again, we set  $\tau_0 = 1$  for simplicity. Plugging it into (2.64) gives :

$$\begin{aligned} L[\psi_{t_p}](u, s) &= \left( \langle \tau \rangle - \mu\Gamma(-\mu) \frac{s^\mu - u^\mu}{s - u} \right) \frac{1}{u\langle \tau \rangle - \mu\Gamma(-\mu)u^\mu} \\ &= \left( \frac{1}{s} - A \frac{s^\mu - u^\mu}{s(s - u)} \right) (1 + A s^{\mu-1}) \end{aligned} \quad (2.71)$$

where  $\tau_0$  has been set to one for simplicity and  $A = \mu\Gamma(-\mu)/\langle \tau \rangle = -\Gamma(1 - \mu)/\langle \tau \rangle = \Gamma(2 - \mu)$  (we used  $\langle \tau \rangle = \tau_0/(\mu - 1)$ ). Doing the inverse Laplace transform over  $s$  yields

$$L[\psi_{t_p}](u) = \left( 1 + \frac{A t_p^{1-\mu}}{\Gamma(2 - \mu)} \right) + A u^{\mu-1} \left( e^{ut_p} \frac{\Gamma(1 - \mu, ut_p)}{\Gamma(1 - \mu)} - 1 \right) + O(u^2, u^{2(\mu-1)}) \quad (2.72)$$

Note that the first constant reads

$$1 + \frac{A t_p^{1-\mu}}{\Gamma(2 - \mu)} = 1 + \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{\tau_0}{t_p} \right)^{\mu-1} \quad (2.73)$$

Restoring  $\tau_0$ , the inverse Laplace transform over  $u$  gives :

$$\psi_{t_p}(\tau_1) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \left( \left( \frac{\tau_0}{\tau_1} \right)^\mu - \left( \frac{\tau_0}{\tau_1 + t_p} \right)^\mu \right). \quad (2.74)$$

#### 2.7.3.2 Expression of $\psi_{t_p}(\tau_1)$ for $0 < \mu < 1$

Let us use the small  $s$  expansion (2.59) of  $L[\psi](s)$  :  $L[\psi](s) = 1 + \mu\Gamma(-\mu)(s\tau_0)^\mu$ . Using the double Laplace transform (2.64) and setting  $\tau_0 = 1$  for simplicity, we get :

$$L[\psi_{t_p}](s, u) = \frac{1}{u - s} \left( 1 - \left( \frac{u}{s} \right)^\mu \right) \quad (2.75)$$

The only assumption in deriving this expression is that both  $t_p$  and  $\tau_1$  are large compared to  $\tau_0$  (we retained only the first terms of the  $s$  and  $u$  expansions). This expression can be exactly Laplace inverted in  $s$  :

$$L[\psi_{t_p}](u) = e^{ut_p} \frac{\Gamma(\mu, st_p)}{\Gamma(\mu)}. \quad (2.76)$$

We can now perform the inverse Laplace transform over  $u$  to obtain :

$$\psi_{t_p}(\tau_1) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \frac{1}{\tau_1 + t_p} \left( \frac{t_p}{\tau_1} \right)^\mu. \quad (2.77)$$

Note that in this case, the short time scale  $\tau_0$  does not appear in  $\psi_{t_p}(\tau_1)$  contrarily to the cases  $\mu > 1$ . For  $\tau_1 \gg t_p$ , this distribution behaves like

$$\psi_{t_p}(\tau_1) \simeq \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu} \left( \frac{t_p}{\tau_0} \right)^\mu \psi(\tau_1), \quad (2.78)$$

which shows that for very large waiting times, we have the same algebraic tail than  $\psi$  up to a  $t_p$  dependent renormalization factor. For  $\tau_1 \ll t_p$ , we get another algebraic tail :

$$\psi_{t_p}(\tau_1) \simeq \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} \frac{1}{t_p} \left( \frac{t_p}{\tau_1} \right)^\mu. \quad (2.79)$$

### 2.7.3.3 Expression of $\psi_{t_p}(\tau_1)$ for $\mu = 1$

In the marginal case  $\mu = 1$ , because of its logarithmic variation,  $S(t_p - \tau)$  can be replaced by  $\frac{1}{\tau_0 \log(t_p/\tau_0)}$  in the integral equation (2.22). This approximation leads to :

$$\psi_{t_p}(\tau_1) \approx \psi(\tau_1 + t_p) + \frac{1}{\log(t_p/\tau_0)} \frac{1}{\tau_1 + t_p + \tau_0} \frac{t_p}{\tau_1 + \tau_0}. \quad (2.80)$$

In the following we always consider situations in which  $t_p, \tau_1 \gg \tau_0$ , for which the first term in (2.80) can be neglected. Therefore, we get the following asymptotics :

$$\psi_{t_p}(\tau_1) \simeq \frac{1}{\log(t_p/\tau_0)} \frac{1}{\tau_1 + t_p} \frac{t_p}{\tau_1}. \quad (2.81)$$

Note that in this case, the average  $\langle \tau_1 \rangle_{\psi_{t_p}}$  is infinite.

### 2.7.4 Analytic results on $\Pi_0$

Explicit expressions for  $\Pi_0(t_p, t)$  immediately follow from its definition and from explicit expressions for  $\psi_{t_p}(t)$  in the limit  $t \gg \tau_0$ . In the case  $0 < \mu < 1$ , the result of integration is an hypergeometric function [Gradshteyn et Ryzhik 1994] :

$$\Pi_0(t_p, t) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu} \left( \frac{t_p}{t} \right)^\mu {}_2F_1(\mu, 1; 1 + \mu; -\frac{t_p}{t}), \quad (2.82)$$

In this case,  $\Pi_0$  does not depend anymore on the cutoff  $\tau_0$  and exhibits an aging behavior since it only depends on the ratio of time scales  $t/t_p$ . Using the inversion properties of hypergeometric function [Gradshteyn et Ryzhik 1994, eq. 9.131.1], an alternative expression can be obtained :

$$\Pi_0(t_p, t) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi\mu} \left( \frac{t_p}{t_p + t} \right)^\mu {}_2F_1\left(\mu, \mu; 1 + \mu; \frac{t_p}{t_p + t}\right). \quad (2.83)$$

Equation (2.82) is well suited to the limit  $t \ll t_p$  whereas eq. (2.83) is better suited to the study of the  $t_p \ll t$  limit.

In the case  $1 < \mu < 2$ , the final result still depends on  $\tau_0$ . Using eq. (2.74), we get :

$$\Pi_0(t_p, t) \simeq \left( \frac{\tau_0}{t} \right)^\mu - \left( \frac{\tau_0}{t_p + t} \right)^\mu \quad (2.84)$$

In the limit of vanishing  $\tau_0$ ,  $\Pi_0(t_p, t)$  vanishes. Hence in this limit, on times scales long compared to  $\bar{\tau}$ , there are always some events in time intervals of duration  $t$  contrarily to the case where  $\mu < 1$ .

In the  $\mu = 1$  case, using eq. (2.81), we get :

$$\Pi_0(t, t) \simeq \frac{\log\left(1 + \frac{t_p}{t}\right)}{\log(t_p/\tau_0)}, \quad (2.85)$$

which shares some characteristics with the two previous cases. On one hand, as in the  $1 < \mu < 2$  case, it still decays to zero at fixed  $t_p$  and  $t$  in the limit  $\tau_0 \rightarrow 0$ . On the other hand, exactly as in the  $0 < \mu < 1$  case, the limits  $t/t_p \rightarrow 0$  and  $t/t_p \rightarrow 1$  satisfy :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_0(t_p, t) = 0, \quad (2.86)$$

$$\lim_{t_p \rightarrow \infty} \Pi_0(t_p, t) = 1. \quad (2.87)$$

# Conclusions et perspectives

Au cours de cette partie ont été mis en évidence les effets d'un bruit en  $1/f$  vieillissant sur la décohérence d'un système quantique à deux niveaux. Pour cela nous avons défini un modèle phénoménologique de bruit, présentant à la fois un spectre en  $1/f$  et des propriétés de vieillissement. Par l'utilisation de la théorie du renouvellement, on obtient une expression de la transformée de Laplace du facteur de cohérence du système : cette expression peut alors être inversée numériquement, et les comportements asymptotiques dans divers régimes peuvent être calculés analytiquement. Il apparaît que le scénario de décohérence est affecté par le vieillissement, mais de manières différentes suivant si la distribution des temps d'attentes a un premier moment fini ou non. Les effets de vieillissement sont très marqués pour  $\mu < 1$ .

Ce travail ouvre deux types de perspectives. Tout d'abord du point de vue de la décohérence quantique, le fait d'obtenir un scénario de décohérence non-stationnaire n'est pas sans poser quelques problèmes d'un point de vue expérimental. En effet, les expériences permettant de mesurer le facteur de cohérence suppose généralement l'invariance par translation dans le temps du phénomène, qui permet de remplacer les moyennes sur toutes les histoires de l'environnement par des moyennes sur des séquences de mesure sur la même histoire du bruit. Dans le cas d'un bruit en  $1/f$  vieillissant, l'invariance par translation est violée, et il faut donc réfléchir à un autre protocole expérimental pour mesurer le facteur de cohérence. D'une manière plus général, il serait intéressant d'utiliser le modèle de bruit présenté ici pour calculer les expressions d'autres grandeurs accessibles expérimentalement, comme les échos de spins [Schrieffer 2005]. D'un point de vue plus théorique cete fois, il serait intéressant de généraliser notre étude à des situations différentes : cas où les temps d'attente dans les deux états du bruit sont distribués suivant des lois larges, cas où le bruit se décompose en une partie gaussienne et une partie intermittente. On pourrait regarder aussi s'intéresser au cas où le bruit est engendré par plusieurs sources intermittentes. Ces différentes approches pourraient éclairer certains aspects de la décohérence. L'autre perspective concerne le modèle de bruit lui-même. Il présente en effet l'avantage d'être suffisamment simple ppour permettre une étude analytique poussée, tout en présentant deux propriétés physique intéressante : spectre en  $1/f$  et vieillissement. Une première piste de travail serait de poursuivre l'étude de ce bruit, afin de le caractériser d'avantage. On pourrait par exemple calculer l'exposant de persistance. Enfin il pourrait être utilisé pour décrire d'autres systèmes physiques.



## Troisième partie

# Fonctions de partition du modèle d'Ising



# Introduction

Dans la première partie, le comportement critique du modèle d'Ising a servi de test à l'étude des fluctuations du paramètre d'ordre dans la région critique. Cela m'a naturellement conduit à m'intéresser au modèle d'Ising en lui-même, en particulier à la thermodynamique de ce système. Le côté intrigant du modèle d'Ising est que la simplicité du hamiltonien cache une physique très riche, et une complexité technique redoutable, le tout étant intimement lié au comportement collectif des spins. À l'issue d'une recherche bibliographique, j'ai été particulièrement intéressé par une méthode originale, développée par V.N. Plechko [Plechko 1988] : celle-ci permet de résoudre le cas bidimensionnel en champ nul de manière considérablement plus simple que les solutions habituelles. En collaboration avec Jean-Yves Fortin<sup>23</sup>, nous nous sommes demandé comment cette méthode se comporte en présence d'un champ magnétique. Nous avons rapidement constaté qu'un champ magnétique homogène dans le bulk rend la méthode inefficace, mais qu'il est possible de traiter certains cas de champs magnétiques au bord. Ce sont ces travaux qui sont reportés dans cette partie.

Dans un premier temps nous avons étendu la méthode de Plechko dans le cas du modèle d'Ising 2d sur réseau, avec un champ magnétique sur un bord. Nous avons ensuite testé notre méthode sur le cas particulier d'un champ magnétique homogène au bord, qui avait déjà été résolu par McCoy et Wu dans les années 70. Ce travail technique est présenté dans le chapitre 2. Dans un second temps, nous avons deux possibilités : soit utiliser notre méthode sur réseau pour prendre la limite continue et faire des liens avec certains résultats de théorie conforme, soit de l'appliquer à un système physiquement intéressant, pour montrer l'intérêt pratique de notre méthode. C'est cette deuxième possibilité qui a été choisie, et qui est présentée dans le chapitre 3. Nous avons appliqué notre méthode à un cas particulier de champ magnétique inhomogène au bord, dont un raisonnement à température nulle montre qu'il induit une transition de phase, liée au développement d'une interface dans le système. Dans une moindre mesure notre stratégie est donc analogue à celle de D.B. Abraham qui, après avoir développé une technique de calcul permettant de résoudre le modèle d'Ising avec des conditions aux bords fixes, l'a ensuite appliquée pour décrire la physique des transitions de mouillage dans les systèmes magnétiques [Abraham 1978b, Abraham et Maciolek 2002]. Avant de présenter cette étude, il a semblé utile toutefois de la replacer dans le cadre des solutions exactes du modèle d'Ising, ce qui est fait dans le chapitre 1.

---

<sup>23</sup>Laboratoire de physique théorique, CNRS-Université Louis Pasteur, Strasbourg.



# Chapitre 1

## Modèle d'Ising et variables de Grassmann

**But du chapitre :** *Ce chapitre propose une introduction au modèle d'Ising et à ses solutions exactes. Après une rapide présentation du modèle lui-même, on présentera les approches standards pour le cas bidimensionnel. La dernière partie présentera la méthode de Plechko, qui sert de base aux chapitres suivants.*

### 1.1 Modèle d'Ising

Le modèle d'Ising, comme nous l'avons vu dans la première partie, a été proposé par Lenz et Ising, pour expliquer la transition ferro/paramagnétisme dans les matériaux aimantés. Les travaux d'Ising montre qu'à une dimension, le modèle ne présente malheureusement pas de transition de phase. Bien que la méthode qu'il utilise ne s'applique pas en dimension supérieure, Ising écrit dans son article que la conclusion en  $d = 3$  sera la même. Le modèle d'Ising apparaît alors comme un mauvais modèle du ferromagnétisme [Ising 1925]. Dans les années 30, le modèle d'Ising commence à devenir un objet mathématique en soi, indépendant de toute idéalisation d'un quelconque système, notamment par les travaux de Fowler *et al.* à Cambridge. Un progrès significatif est obtenu en 1935 par Peierls qui, en raisonnant sur les parois de domaine, montre qu'il existe en fait un ordre magnétique à longue portée dans ce modèle en  $d \geq 2$ . Ce résultat a relancé l'activité autour du modèle d'Ising. De nombreux physiciens, parmi lesquels Kirkwood, Kramers et Wannier, ont permis d'obtenir des résultats approchés dans les limites haute et basse températures [Brush 1967]. Il faut attendre 1942 pour que la première résolution exacte du modèle d'Ising bidimensionnel soit présentée par Onsager [Onsager 1944]. On pourrait dire que ce résultat, obtenue par une méthode tout à fait virtuose, marque le début de l'ère "moderne" du modèle d'Ising. Par la suite, d'autres auteurs ont obtenu le même résultat par des méthodes simplifiées [Kaufman 1949, Newell et Montroll 1953].

On pourrait se demander pourquoi tant d'énergie a été dépensée pour calculer la fonction de

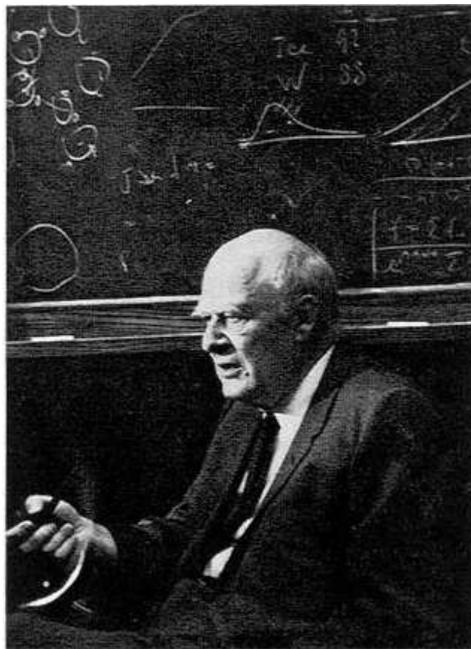


FIG. 1.1 – Lars Onsager (1903-1976).

partition de ce modèle pourtant *a priori* bien éloigné des systèmes magnétiques réels. Cela tient sans doute à l'importance des modèles dans le développement de la physique. Pour décrire la formidable complexité des systèmes réels, il est la plupart du temps vain d'essayer d'obtenir une théorie exacte et complète. L'approche la plus fructueuse consiste à développer des méthodes approchées permettant d'obtenir les informations pertinentes sur le système. Les solutions exactes de modèles simplifiés permettent alors de tester efficacement les qualités et les limitations de ces méthodes. Le modèle d'Ising est un bon exemple de ce rôle. En effet, devant la difficulté pour résoudre le modèle d'Ising en dimension  $d > 1$ , la première méthode a consisté en une approche de type "champ moyen", dans laquelle on remplace les interactions entre spins par une interaction effective avec le champ moyen créé par les autres spins. On obtient alors une description *a priori* satisfaisante du ferromagnétisme, puisque l'on trouve une température de transition non nulle. La première indication que cette méthode ne peut pas être toujours valide est que l'on obtient une température critique  $T_c$  non nulle en dimension  $d = 1$ , alors que la solution exacte conduit à  $T_c = 0$  en  $d = 1$ . On peut de plus calculer les exposants critiques correspondants, ce qui donne par exemple pour l'exposant critique associé au paramètre d'ordre  $\beta = 1/2^{24}$ . C'est alors que le travail de Onsager pour résoudre de façon exacte le cas  $d = 2$  joue un rôle crucial. En utilisant une méthode combinatoire complexe qui constitue un véritable tour de force, Onsager a pu établir, sans approximation, la valeur de la température critique et même celle de l'exposant  $\beta = 1/8$  [Onsager 1944]. L'écart entre la solution exacte et la prédiction de la théorie

---

<sup>24</sup>En fait cette valeur de l'exposant est correcte en dimension  $d \geq 4$ .

du champ moyen a ainsi montré que cette dernière n'est pas suffisante pour décrire le comportement critique du système. La volonté de développer une méthode d'approximation qui permette d'obtenir une bonne estimation de la température et des exposants critiques a été un des défis du siècle dernier. Elle a conduit à la théorie du groupe de renormalisation, un des outils les plus efficaces pour décrire la physique statistique des systèmes critiques [LB 2002, Goldenfeld 1992].

C'est la raison pour laquelle il est encore aujourd'hui intéressant de rechercher les solutions exactes des modèles "simples". En ce qui concerne le modèle d'Ising, de nombreux problèmes restent encore ouverts à ce jour : cas 2d avec un champ magnétique dans le cœur [Delfino 2004], cas 3d avec et sans champ magnétique, cas des liens ou d'un champ magnétique aléatoires ... Ces problèmes sont extraordinairement difficiles et, peut-être, inaccessibles. Certains résultats ont tout de même pu être obtenus dans ces cas, par des techniques très élaborées. Par exemple, dans le cas du modèle d'Ising 2d avec un champ magnétique dans le bulk à  $T_c$  [Delfino 2004], A. Zamolodchikov [Zamolodchikov 1989a, Zamolodchikov 1989b] a montré l'existence de quantités conservées, dans le cadre des théories conformes, et donc que ce modèle est intégrable à  $T_c$ . G. Mussardo *et al.* ont réussi à calculer les fonctions de corrélation dans le bulk de ce modèle [Delfino et Mussardo 1995, Konk et al. 1996] .

Avant de s'attaquer à ces cas difficiles, on cherche à obtenir des méthodes de résolution des cas connus qui soient les plus simples possibles. Cette volonté de simplification est au centre du travail présenté dans cette partie.

## 1.2 Approches analytiques pour le cas bidimensionnel

Dans cette section sont rapidement présentées deux méthodes usuelles de résolution du modèle d'Ising 2d en champ nul. Le but n'est pas de rentrer dans les détails de ces méthodes mais simplement d'en présenter le principe, et de montrer l'émergence des algèbres de Grassmann dans le modèle d'Ising .

### 1.2.1 Notations

Dans tout ce qu'il suit, on considère le modèle d'Ising 2d classique avec interaction entre plus proche voisins, en champ nul. Le système est à l'équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température  $T$  (ensemble canonique). Les  $N$  spins  $\sigma_{ij}$  sont disposés sur un réseau carré, de taille  $L \times L$ , et les couplages entre les spins est  $J_1$  dans une direction et  $J_2$  dans l'autre (voir Fig.1.2). Le hamiltonien peut alors s'écrire sous la forme

$$\mathcal{H} = J_1 \sum_{i,j=1}^L \sigma_{ij} \sigma_{i+1j} + J_2 \sum_{i,j=1}^L \sigma_{ij} \sigma_{ij+1}, \quad (1.1)$$

en choisissant des conditions aux bords périodiques,  $\sigma_{L+1n} = \sigma_{1n}$  et  $\sigma_{mL+1} = \sigma_{m1}$ . La fonction qui nous intéresse dans ce chapitre est la fonction de partition canonique du système, définie

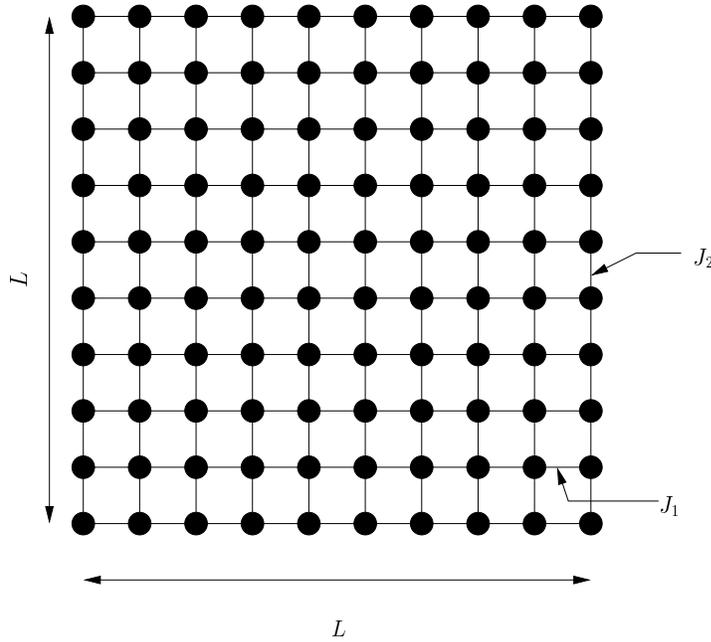


FIG. 1.2 – Notations.

par

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma\}} \exp -\beta\mathcal{H}, \quad (1.2)$$

où  $\beta = 1/k_b T$ , et où la somme porte sur toutes les configurations des spins sur le réseau. En utilisant la propriété  $\sigma^2 = 1$ , on peut réécrire cette expression sous la forme :

$$\mathcal{Z} = 2^N (\cosh \beta J_1)^N (\cosh \beta J_2)^N \sum_{\{\sigma\}} \prod_{i,j=1}^L (1 + t_1 \sigma_{ij} \sigma_{i+1j}) (1 + t_2 \sigma_{ij} \sigma_{ij+1}), \quad (1.3)$$

avec  $t_1 = \tanh \beta J_1$  et  $t_2 = \tanh \beta J_2$ . Dans la suite on notera

$$\mathcal{Q} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{i,j=1}^L (1 + t_1 \sigma_{ij} \sigma_{i+1j}) (1 + t_2 \sigma_{ij} \sigma_{ij+1}) \quad (1.4)$$

la fonction de partition réduite.

Résoudre exactement un modèle consiste à trouver l'expression de la fonction de partition de ce modèle dans le cas le plus général possible. Dans le cas unidimensionnel, la méthode de résolution la plus simple est la technique de la matrice de transfert . Le cas du modèle d'Ising 2d est bien plus difficile : la recherche de solutions toujours plus simples est encore d'actualité !

## 1.2.2 Deux méthodes habituelles

Les deux principales méthodes de résolution que l'on trouve dans la littérature sont la généralisation de la matrice de transfert, et la représentation du modèle d'Ising en terme de dimères. Nous allons nous intéresser ici à ces méthodes, le but n'étant pas ici de rentrer dans les détails techniques mais plutôt de présenter les principes de chacune d'elles, afin d'entrevoir un lien avec les algèbres de Grassmann <sup>25</sup>.

L'idée la plus naturelle pour résoudre le cas 2d est de généraliser la méthode de la matrice de transfert, puisque qu'elle est très efficace en 1d. C'est d'ailleurs l'idée exploitée par Onsager, et qui a conduit à la première résolution de ce modèle [Onsager 1944]. Cette approche a été considérablement simplifiée par Schultz, Lieb et Mattis [Schultz et al. 1964, Lieb et al. 1961, Lieb et Mattis 1962]. Dans leur version, on commence par écrire la matrice de transfert pour passer d'une colonne à la suivante, que l'on représente en terme de matrices de Pauli. Ensuite, à l'aide de la transformation de Jordan-Wigner [Itzykson et Drouffe 1989], on associe à chaque paire de sites adjacents un élément d'une algèbre de Clifford, qui est l'algèbre de représentation des opérateurs fermioniques de création et d'annihilation. On obtient ainsi une représentation fermionique de la fonction de partition. À ce stade de la démonstration, on peut continuer à travailler directement avec l'algèbre de Clifford, pour diagonaliser la matrice de transfert et obtenir la fonction de partition. On peut aussi choisir de passer de l'algèbre de Clifford à une algèbre de Grassmann (voir Annexe A). Dans ce cas, on obtient une représentation intégrale de la fonction de partition : celle-ci apparaît en effet comme l'intégrale de chemin, sur l'algèbre de Grassmann, d'une action fermionique gaussienne [Nojima 1998]. Le calcul de cette intégrale se fait en passant en transformée de Fourier. On obtient alors la fonction de partition et l'énergie libre du modèle d'Ising.

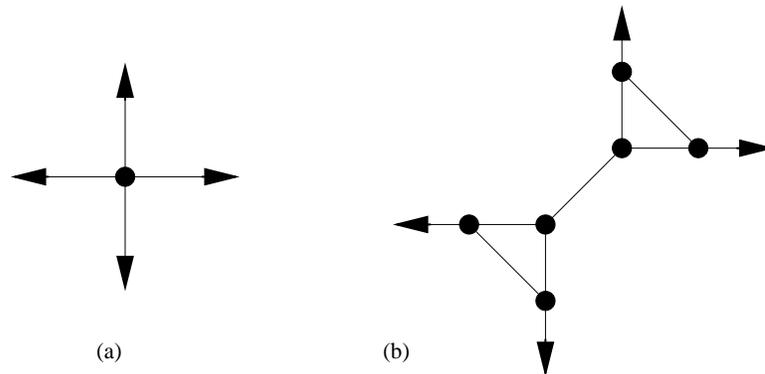


FIG. 1.3 – Correspondance entre un vertex d'Ising (a) et un amas à six vertex du réseau de dimère (b).

<sup>25</sup>Une présentation des points essentiels concernant les algèbres de Grassmann est donnée dans l'annexe A page ??.

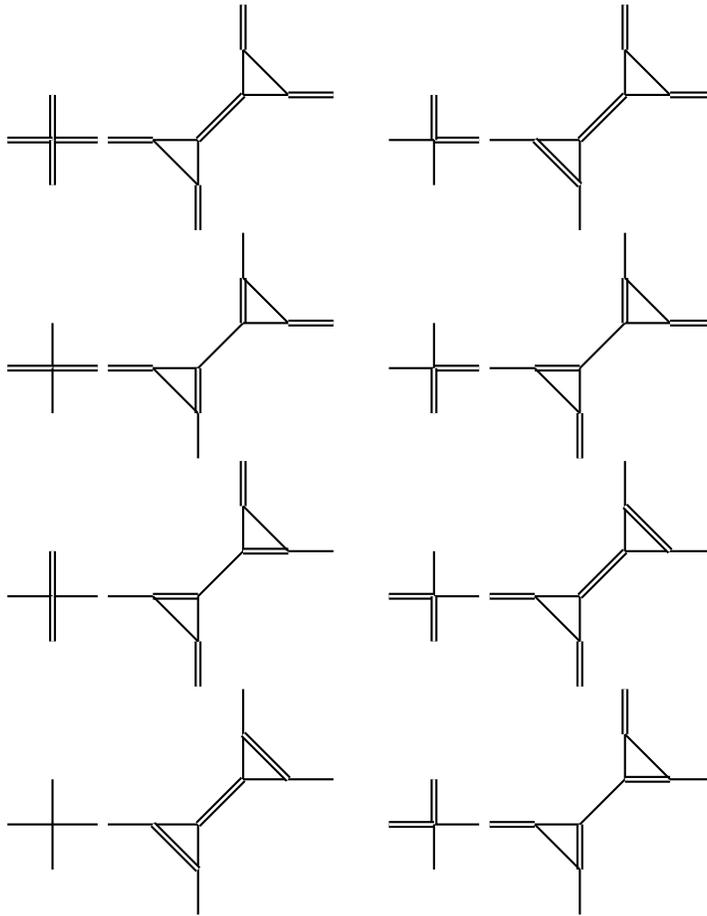


FIG. 1.4 – Bijection entre les configurations de dimères sur un vertex d'Ising et sur l'amas à six vertex.

L'autre méthode standard consiste à passer du modèle d'Ising à un modèle de dimères. Pour cela, on associe à chaque vertex du modèle d'Ising un amas de six vertex, comme représenté sur la figure 1.3. Sur le réseau d'Ising, on place un dimère sur le lien entre deux spins de même signe<sup>26</sup> On obtient alors huit configurations pour chaque vertex du modèle d'Ising . Il est alors possible de mettre ces configurations en bijection avec des configurations des dimères sur l'amas à six vertex. Cette bijection est représentée sur la figure 1.4. Une fois ce passage réalisé, le calcul de la fonction de partition du modèle d'Ising revient au calcul de la fonction de partition des dimères sur le réseau à six vertex. Ensuite, en supposant que l'on impose des conditions au bord libre, il est possible de montrer [McCoy et Wu 1973] que la fonction de partition cherchée est le Pfaffien<sup>27</sup> d'une certaine matrice. On calcule ensuite

---

<sup>26</sup>En chimie, un dimère est un composé formé par l'association non covalente de deux molécules. Par analogie on désigne ici par dimère un objet reliant deux sites du réseau.

<sup>27</sup>Définition dans l'annexe A.

les valeurs propres de cette matrice, ce qui conduit à la fonction de partition et à l'énergie libre du modèle.

### 1.2.3 Algèbre de Grassmann et modèle d'Ising

Il existe bien d'autres solutions [Baxter 1982], mais ces deux méthodes sont représentatives de la difficulté rencontrée : de nombreuses étapes sont nécessaires, et les techniques mises en jeu sont difficiles. D'autre part les algèbres de Grassmann sont déjà "cachées" dans ces deux solutions. Dans la méthode de la matrice de transfert, l'utilisation d'une algèbre de Grassmann et de la notion d'intégrale associée permettent de simplifier les calculs et font un lien naturel avec la théorie des champs. Dans la solution par les dimères, le point-clef est d'exprimer la fonction de partition en terme de Pfaffien, qui s'interprète naturellement dans une algèbre de Grassmann comme le résultat d'une intégrale gaussienne (voir Annexe A). Le lien entre les algèbres de Grassmann et le modèle d'Ising est en fait très profond. C'est la manifestation de la structure fermionique sous-jacente [Nojima 1998], à la fois en 2d et 3d. Dans ce dernier cas, Polyakov et Dotsenko ont proposé une représentation du modèle d'Ising 3d en terme de théorie des cordes libres fermioniques [Dotsenko 1987, Polyakov 1987]. Toutefois, l'utilisation d'une algèbre de Grassmann pour étudier le modèle d'Ising arrive toujours comme une sorte d'astuce permettant de simplifier un calcul. On peut alors se demander s'il est possible de construire une méthode de résolution donnant un rôle central aux variables de Grassmann .

## 1.3 Méthode de Plechko : une solution alternative

Dans une série d'articles, V.N. Plechko a proposé une méthode de résolution qui donne ce rôle central aux variables de Grassmann [Plechko 1985, Plechko 1988, Plechko et Sobolev 1991, Hayn et Plechko 1994, Plechko 1999]. Cette solution évite un grand nombre de problèmes techniques, et permet d'obtenir des résultats intéressants dans de nombreux cas. Nous allons à présent décrire rapidement le principe de cette méthode, qui sera détaillée dans le chapitre suivant, et montrer deux applications.

### 1.3.1 Résolution sur réseau carré

Le système considéré est toujours le modèle d'Ising 2d sur un réseau, avec le même couplage dans les deux directions. Par souci de simplicité on considère ici des conditions aux bords antipériodiques<sup>28</sup>. Le hamiltonien est donc toujours donné par l'équation (1.1) :

$$\mathcal{H} = J \sum_{i,j=1}^L \sigma_{ij} \sigma_{i+1j} + J \sum_{i,j=1}^L \sigma_{ij} \sigma_{ij+1}. \quad (1.5)$$

---

<sup>28</sup>Dans ce cas en effet la fonction de partition est donnée par une seule intégrale de chemin grassmannienne. Dans le cas périodique par exemple on obtient en fait une combinaison linéaire de quatre intégrales de chemin [McCoy et Wu 1973, Plechko 1985]. Une discussion des différentes conditions aux bords est donnée par Plechko [Plechko 1985].

La fonction de partition réduite s'écrit :

$$\mathcal{Q} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{i,j=1}^L (1 + t\sigma_{ij}\sigma_{i+1j})(1 + t\sigma_{ij}\sigma_{ij+1}), \quad (1.6)$$

avec  $t = \tanh \beta J$ . La solution proposée par Plechko repose sur l'introduction, à ce stade, d'une algèbre de Grassmann, afin de représenter les différents termes couplant les spins. Ainsi, pour chaque lien entre un spin  $\sigma$  et un spin  $\sigma'$ , on introduit une paire de variables de Grassmann  $(a, a^*)$  pour écrire :

$$1 + t\sigma\sigma' = \int da^* da (1 + a\sigma)(1 + ta^*\sigma')e^{aa^*} = \int_{a,a^*} \left( (1 + a\sigma)(1 + ta^*\sigma') \right). \quad (1.7)$$

Cette sorte de fermionisation permet de découpler les spins  $\sigma$  et  $\sigma'$ , qui sont chacun incorporés dans un monôme différent. En appliquant cette identité pour tous les termes de la fonction de partition réduite, on obtient une représentation mixte de  $\mathcal{Q}$ .

La seconde étape consiste en la réorganisation du produit, afin de regrouper les différents monômes contenant le même spin. Dans ce cas en effet il est possible d'effectuer la trace sur chacun des spins, indépendamment les uns des autres. Pour obtenir ce regroupement des termes, il faut utiliser l'anticommution des variables de Grassmann, l'associativité du produit de ces variables, ainsi qu'une réorganisation en symétrie miroir, proposée par Plechko [Plechko 1985] : si on a un ensemble  $\{O_i, O_i^*\}$  de variables anticommutes, et tel que les appariements  $(O_i O_i^*)$  commutent, alors on a :

$$\begin{aligned} (O_1 O_1^*)(O_2 O_2^*) \cdots (O_n O_n^*) &= (O_1 O_2 \cdots O_n)(O_n^* \cdots O_2^* O_1^*), \\ &= (O_n O_{n-1} \cdots O_1)(O_1^* \cdots O_{n-1}^* O_n^*). \end{aligned}$$

Une fois que les termes contenant le même spin sont regroupés, on peut effectuer la trace sur les spins. On obtient alors une représentation de la fonction de partition purement en terme de variables de Grassmann, qui s'écrit :

$$\mathcal{Q} = \int \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c e^{\mathcal{S}},$$

avec  $\mathcal{D}c^* \mathcal{D}c = \prod_{m,n=1}^L (dc_{mn}^* dc_{mn})$ , et l'action  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \sum_{m,n=1}^L [c_{mn}c_{mn}^* + t(c_{mn}^* + c_{mn})(c_{m-1n} - c_{mn-1}^*) - t^2 c_{m-1n}c_{mn-1}^*], \quad (1.8)$$

Cette intégrale se calcule facilement, en passant en transformée de Fourier, pour conduire à la fonction de partition réduite :

$$\mathcal{Q}^2 = \prod_{p,q=1}^L \left[ (1 + t^2)^2 - 2t(1 - t^2) \left( \cos \frac{2\pi(p + \frac{1}{2})}{L} + \cos \frac{2\pi(q + \frac{1}{2})}{L} \right) \right]. \quad (1.9)$$

Dans la limite thermodynamique, la fonction de partition réduite admet un zéro à la température critique  $T_c$  telle que

$$\begin{aligned} (1 + t_c^2)^2 - 4t_c(1 - t_c^2) &= 0, \\ t_c &= \sqrt{2} - 1, \end{aligned} \tag{1.10}$$

et l'on retrouve la valeur de la température critique  $T_c/J = 1/\operatorname{atanh}(\sqrt{2} - 1) \simeq 2.27$ . On notera que par cette méthode, la fonction de partition réduite est donnée par un produit, alors que par les méthodes reposant sur le calcul d'un déterminant, elle est généralement obtenue comme une somme : cela permet d'obtenir facilement l'énergie libre du système.

En utilisant cette méthode, Plechko a pu résoudre le modèle d'Ising sur une très large gamme de réseaux : réseaux triangulaires décorés [Plechko 1988], réseau triangulaire avec des lacunes [Plechko et Sobolev 1991], réseau fractal de Sierpinski [Plechko et Sobolev 1993].

Un des avantages de cette méthode est qu'elle n'impose pas de passer à la limite thermodynamique, ni même de faire l'hypothèse que le système est grand,  $L \gg 1$ . Cela ouvre la voie à une étude précise des effets de taille finie. Wu et Hu ont par exemple pu étudier comment la température correspondant au maximum de la chaleur spécifique,  $T_c(L)$ , se rapproche de  $T_c$  quand  $L \rightarrow \infty$  [Wu et Hu 2002]. En effet l'étude des effets de taille finie conduit à la relation d'échelle déjà vue dans la première partie [Goldenfeld 1992] :

$$\text{pour } L \gg 1, |T_c - T_c(L)| \propto \frac{1}{L}.$$

En résolvant le modèle d'Ising sur différents réseaux (triangulaire-plan, hexagonal et en nid d'abeilles), avec différentes conditions aux bords (périodique et antipériodique), Wu et Hu ont pu montrer [Wu et Hu 2002] que la loi précédente doit être corrigée pour des réseaux de petites tailles. Ils ont aussi pu établir que la correction dépend fortement du type de réseau, et des conditions au bord.

### 1.3.2 Passage à la limite continue, théorie effective

À partir de l'intégrale de chemin fermionique obtenue sur réseau par la méthode de Plechko, il est possible de prendre la limite continue, et de cette manière, de trouver la théorie effective dans le continu.

Pour cela, on définit l'opérateur dérivation sur réseau par

$$\partial_m x_{mn} = x_{mn} - x_{m-1n}, \quad \partial_n x_{mn} = x_{mn} - x_{mn-1}.$$

Alors l'action (1.8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \sum_{m,n=1}^L & \mu c_{mn} c_{mn}^* - \lambda c_{mn}^* \partial_m c_{mn} + \lambda c_{mn} \partial_m c_{mn}^* \\ & - t c_{mn} \partial_m c_{mn} + t c_{mn}^* \partial_n c_{mn}^* - t^2 (\partial_m c_{mn}) (\partial_n c_{mn}^*), \end{aligned} \tag{1.11}$$

avec

$$\mu = 1 - 2t - t^2, \text{ et } \lambda = t(1 + t). \quad (1.12)$$

L'équation (1.11) est encore une action sur réseau, mais sa structure permet de passer simplement à une théorie continue en faisant :

$$\begin{aligned} (m, n) \in \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \sum_{mn} &\rightarrow \int d^2\mathbf{x}, \\ \partial_m &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \\ \partial_n &\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}, \\ (c_{mn}, c_{mn}^*) &\rightarrow (\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (1.13)$$

En négligeant les termes de second ordre, et en utilisant le fait que, pour tous champs fermioniques  $\phi$  et  $\varphi$ ,

$$\int d^2\mathbf{x} \left( \phi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right) = \int d^2\mathbf{x} \left( \varphi \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \right),$$

l'action dans le continu s'écrit alors

$$\mathcal{S} = \int d^2\mathbf{x} \left[ \mu \psi \bar{\psi} + \psi \left( -\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{\psi} + \frac{t}{\lambda} \left( -\lambda \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \lambda \bar{\psi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right) \right]. \quad (1.14)$$

Cette action (1.14) décrit le comportement du système près du point critique (1.10), dû aux modes de grandes longueurs d'onde<sup>29</sup>. En restant près du point critique, on peut remplacer  $t/\lambda$  par sa valeur à  $T_c$  :

$$\omega_c = \frac{t}{\lambda} \Big|_{T=T_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.15)$$

Nous allons à présent écrire l'action (1.14) sous une forme plus habituelle. Pour cela, on réalise un changement de base, paramétré par une matrice  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ . Les nouveaux champs fermioniques  $(\phi, \bar{\phi})$  sont obtenus par la relation :

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

La matrice  $\mathbf{M}$  est choisie telle que l'action, exprimée en terme des champ  $(\phi, \bar{\phi})$  ne contient plus de termes croisés du type  $\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_\nu}$  et  $\bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}$ . D'autre part, pour avoir une transformation laissant la mesure invariante, on a la condition supplémentaire

$$\det \mathbf{M} = 1.$$

---

<sup>29</sup>Dans l'espace de Fourier, le passage au continu revient à l'approximation  $e^{ip} \simeq 1 + ip$ .

Un choix possible est la matrice

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2i \sin \frac{\pi}{4}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -e^{i\pi/4} & -e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

qui conduit à l'expression de l'action suivante :

$$\mathcal{S} = \int d^2 \mathbf{x} \left[ \mu \phi \bar{\phi} + \frac{1}{2} \phi \left( \lambda \frac{\partial}{\partial x} + i \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi + \frac{1}{2} \bar{\phi} \left( -\lambda \frac{\partial}{\partial x} + i \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{\phi} \right]. \quad (1.18)$$

En faisant un changement d'échelle  $(x, y) \rightarrow (x/\lambda, y/\lambda)$ , on trouve finalement l'action de Majorana :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} & m \\ -m & -\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

$$m = \frac{1 - 2t - t^2}{t_c \sqrt{2}}. \quad (1.20)$$

Cette action peut aussi s'écrire de manière plus condensée en introduisant les matrices de Pauli [Das 1993] pour représenter le propagateur. On trouve alors, en notant

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{x}) \\ \bar{\phi}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{x}) [m + \hat{\partial}] \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \quad (1.22)$$

avec  $\hat{\partial} = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y}$ , et  $\tilde{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}^T(i\sigma_3)$ , où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve alors que l'action du modèle d'Ising 2d près du point critique s'écrit comme l'action d'une paire de fermions de Majorana libres. On peut aller un peu plus loin, pour faire un lien avec les champs de Dirac. Pour cela il est nécessaire de prendre deux copies des fermions de Majorana  $\mathbf{\Phi}$  et  $\mathbf{\Phi}'$ , on écrit alors l'action de Dirac :  $\mathcal{S}_{\text{Dirac}} = \mathcal{S}(\mathbf{\Phi}) + \mathcal{S}(\mathbf{\Phi}')$ . En définissant les champs de Dirac par

$$\mathbf{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) + i \mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) \right), \quad (1.23)$$

$$\bar{\mathbf{\Psi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) - i \mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) \right), \quad (1.24)$$

on obtient l'action de Dirac :

$$\mathcal{S}_{\text{Dirac}} = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{x} \bar{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{x}) [m + \hat{\partial}] \mathbf{\Psi}(\mathbf{x}). \quad (1.25)$$

Ainsi l'action obtenue sur réseau par la méthode de Plechko permet, en passant à la limite continue, de retrouver la formulation du modèle d'Ising 2d au voisinage du point critique

comme une théorie de fermions libres décrits par l'action de Dirac.

L'approche par la théorie des champs, dans la limite continue, permet d'obtenir des informations sur le comportement critique du système. Par exemple, en passant dans l'espace réciproque, et en utilisant

$$\det[m + \hat{\partial}] = m^2 + \mathbf{p}^2, \quad (1.26)$$

on trouve que la partie singulière de l'énergie libre est donnée par

$$-\beta f_{\text{sing}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{4\pi^2} \ln(m^2 + \mathbf{p}^2), \quad (1.27)$$

$$= \frac{1}{8\pi} m^2 \ln \frac{C}{m^2} + \dots, \quad (1.28)$$

où  $C$  est une constante. On dérive alors (1.27) deux fois par rapport à la masse  $m$ . En utilisant qu'au voisinage du point critique,  $m \simeq 2 \ln(1 + \sqrt{2})\tau$  où  $\tau = \frac{T-T_c}{T_c}$  est la température réduite, la partie singulière de la chaleur spécifique s'écrit

$$\frac{C}{k_b} \Big|_{\text{sing}} = A_C \left| \ln |\tau| \right|, \quad (1.29)$$

avec l'amplitude

$$A_C = \frac{2}{\pi} \left( \ln(1 + \sqrt{2}) \right)^2. \quad (1.30)$$

On retrouve ainsi la valeur de l'exposant  $\alpha = 0$  et la divergence logarithmique de la chaleur spécifique à  $T_c$ .

## 1.4 Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous avons vu que les algèbres de Grassmann sont un outil intéressant pour résoudre exactement le modèle d'Ising en champ nul. Dans les solutions standards, ces algèbres ne sont utilisées que pour simplifier les dernières étapes de calcul. En leur donnant un rôle primordial, Plechko a développé une technique très efficace, permettant d'accéder à la fonction de partition et à l'énergie libre du modèle d'Ising sur réseau, quelque soit la taille du système. Cette solution, basée sur la représentation de la fonction de partition par une intégrale de chemin grassmannienne, s'étend facilement à une large classe de réseaux et de conditions au bord. Ne faisant aucune hypothèse sur la taille du réseau, elle permet une étude précise des effets de taille finie. Enfin, l'action sur réseau obtenue permet de faire un lien direct avec la formulation du modèle d'Ising comme une théorie des champs fermioniques, dans la limite continue. La difficulté principale, comme nous allons le voir, est de trouver la bonne organisation des produits.

# Chapitre 2

## Modèle d'Ising 2d avec champ magnétique au bord

**But du chapitre :** *On s'intéresse ici au modèle d'Ising avec un champ magnétique sur un bord. Pour calculer la fonction de partition et l'énergie libre on généralisera la méthode de Plechko pour prendre en compte le champ magnétique. Les résultats ainsi obtenus sont alors comparés, dans le cas d'un champ magnétique homogène, à ceux de McCoy et Wu, afin de valider notre méthode.*

### 2.1 Introduction et notations

Le modèle d'Ising a été utilisé pour étudier certains effets de bord. Dans une série d'articles, McCoy et Wu ont calculé la fonction de partition et les fonctions de corrélation sur le bord, pour le modèle d'Ising 2d avec un champ magnétique au bord d'un réseau carré, en utilisant une extension des statistiques de dimères [Wu 1966, Wu 1966, McCoy et Wu 1967a, Cheng et Wu 1967, McCoy et Wu 1967b, McCoy et Wu 1973]. En utilisant la matrice de transfert et la représentation spinorielle, Abraham a lui aussi pu traiter certains problèmes de conditions au bord fixes, correspondant à un champ magnétique infini [Abraham 1980, Abraham 1982, Abraham 1988]. D'autres approches ont aussi été proposées dans le cadre de la théorie quantique de champs [Chatterjee 1990] ou la théorie des champs conforme [Konk et al. 1996]. Nous allons proposer une méthode alternative pour résoudre ce problème, en généralisant la méthode proposée par V.N. Plechko [Plechko 1985].

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au modèle d'Ising 2d sur un réseau carré  $L \times L$ , auquel on ajoute un champ magnétique  $h_n$  sur un bord. Aucune hypothèse n'est faite *a priori* sur le champ magnétique, qui peut éventuellement être inhomogène. Les constantes de couplage sont  $J_1$  suivant la direction  $m$  et  $J_2$  suivant la direction  $n$ . Les conditions aux bords sont les suivantes :

- Bords périodiques dans la direction  $n$  :  $\sigma_{mL+1} = \sigma_{m1}$  ;
- Bords libres dans la direction  $m$ , formellement équivalent à  $\sigma_{0n} = \sigma_{L+1n} = 0$  ;

– Champ magnétique  $h_n$  sur les sites  $\sigma_{1n}$ .

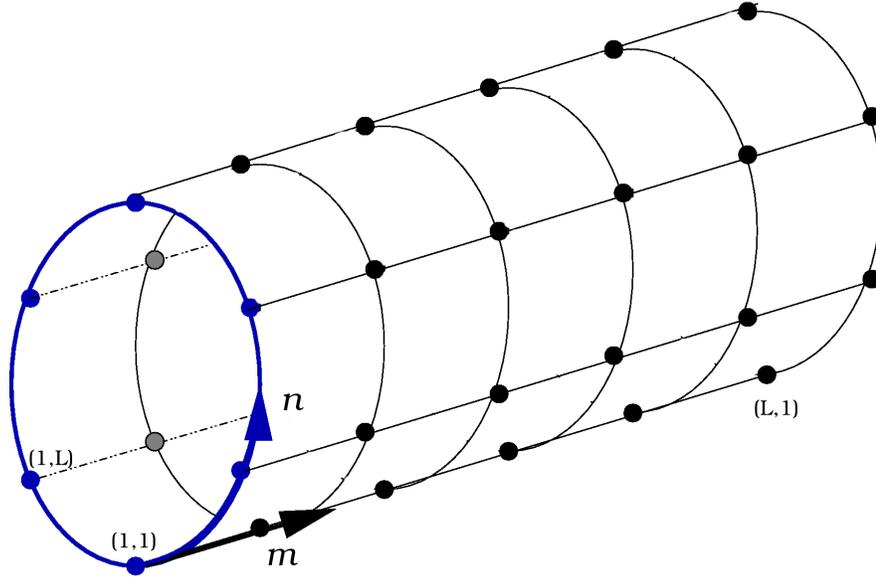


FIG. 2.1 – Description du modèle.

Le réseau ainsi obtenu est présenté sur la figure 2.1. Le hamiltonien considéré s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{m,n=1}^L \sigma_{mn} \sigma_{m+1n} - J_2 \sum_{m,n=1}^L \sigma_{mn} \sigma_{mn+1} - \sum_{n=1}^L h_n \sigma_{1n}. \quad (2.1)$$

Le but de notre chapitre est donc de calculer

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma_{mn}\}} \exp(-\beta \mathcal{H}) \text{ et } -\beta f_{\text{int}} = \ln \mathcal{Z}, \quad (2.2)$$

avec  $\beta = 1/k_b T$ . Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il est utile de développer la fonction de partition pour écrire, en utilisant  $\sigma^2 = 1$  :

$$\mathcal{Z} = [\cosh(\beta J_1) \cosh(\beta J_2)]^{L^2} \prod_{n=1}^L \cosh(\beta h_n) \times \mathcal{Q}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\{\sigma\}} \left[ \prod_{n=1}^L (1 + u_n \sigma_{1n}) \prod_{m,n=1}^L (1 + t_1 \sigma_{mn} \sigma_{m+1n}) (1 + t_2 \sigma_{mn} \sigma_{mn+1}) \right], \quad (2.4)$$

avec  $t_1 = \tanh(\beta J_1)$ ,  $t_2 = \tanh(\beta J_2)$  et  $u_n = \tanh(\beta h_n)$ . La fonction  $\mathcal{Q}$  est appelée la fonction de partition réduite du système, et c'est elle que nous allons calculer.

## 2.2 Représentation mixte de la fonction de partition

### 2.2.1 Fermionisation

Comme pour le cas du modèle d'Ising à champ nul, la première étape consiste en l'obtention d'une représentation mixte de la fonction de partition réduite, en terme de spins et de variables de Grassmann. Le point-clef est l'identité suivante, qui découple les spins en insérant une paire de variables de Grassmann  $(a, a^*)$  :

$$1 + t\sigma\sigma' = \int da^* da (1 + a\sigma)(1 + ta^*\sigma')e^{aa^*} = \mathfrak{Tr}[(1 + a\sigma)(1 + ta^*\sigma')]. \quad (2.5)$$

On "fermionise" la fonction de partition en insérant cette identité dans chacun des termes de la fonction de partition réduite (2.4).

Soient les variables de lien

$$\psi_{mn}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + t_1\sigma_{mn}\sigma_{m+1n}, \quad (2.6)$$

$$\psi_{mn}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + t_2\sigma_{mn}\sigma_{mn+1}. \quad (2.7)$$

En appliquant la relation (2.5), on obtient :

$$\psi_{mn}^{(1)} = \mathfrak{Tr} [A_{mn}A_{m+1n}^*], \quad (2.8)$$

$$\psi_{mn}^{(2)} = \mathfrak{Tr} [B_{mn}B_{mn+1}^*], \quad (2.9)$$

avec les monômes

$$A_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + a_{mn}\sigma_{mn}, \quad A_{mn}^* \stackrel{\text{def}}{=} 1 + t_1a_{m-1n}^*\sigma_{mn}, \quad (2.10)$$

$$B_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + b_{mn}\sigma_{mn}, \quad B_{mn}^* \stackrel{\text{def}}{=} 1 + t_2b_{mn-1}^*\sigma_{mn}. \quad (2.11)$$

Les indices des monômes correspondent à ceux du spin qu'ils contiennent. La fonction de partition réduite s'écrit alors

$$\mathcal{Q} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{m=1}^L \prod_{n=1}^L \left[ \left( \mathfrak{Tr}_{\{a,a^*\}} A_{mn}A_{m+1n}^* \right) \left( \mathfrak{Tr}_{\{b,b^*\}} B_{mn}B_{mn+1}^* \right) \right]. \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Réorganisation du produit

Après avoir introduit les variables de Grassmann, le but est de regrouper les termes contenant les mêmes spins, afin de pouvoir effectuer simplement la trace sur les spins.

Pour cela, on utilise l'organisation en miroir introduite par Plechko et on déplace les objets anticommutants [Plechko 1985, Plechko 1988]. Ces opérations ne sont applicables qu'avec l'opérateur trace  $\mathfrak{Tr}$ . Par exemple les fonctions  $\psi_{mn}^{(1)}$  et  $\psi_{mn}^{(2)}$  sont réelles, ainsi elles commutent entre elles. Nous pouvons écrire de même

$$\psi_{mn}^{(1)}\psi_{mn}^{(2)} = \mathfrak{Tr} [(A_{mn}A_{m+1n}^*)(B_{mn}B_{mn+1}^*)].$$

À l'intérieur des crochets [...], les deux groupes  $(A_{mn}A_{m+1n}^*)$  et  $(B_{mn}B_{mn+1}^*)$  peuvent être déplacés librement, puisque nous effectuerons finalement la trace sur chacun d'eux indépendamment, conduisant à des quantités réelles et donc commutantes. Ces quantités peuvent alors être déplacées et insérées librement. On a par exemple

$$\begin{aligned}\psi_{mn}^{(1)}\psi_{mn}^{(2)} &= \psi_{mn}^{(2)}\psi_{mn}^{(1)}, \\ &= \mathfrak{Tr} [(A_{mn}A_{m+1n}^*)(B_{mn}B_{mn+1}^*)] = \mathfrak{Tr} [(B_{mn}B_{mn+1}^*)(A_{mn}A_{m+1n}^*)], \\ &= \mathfrak{Tr} [(B_{mn}(A_{mn}A_{m+1n}^*)B_{mn+1}^*)] = \mathfrak{Tr} [(A_{mn}(B_{mn}B_{mn+1}^*)A_{m+1n}^*)],\end{aligned}\tag{2.13}$$

où les parenthèses (...) définissent les groupes de variables de Grassmann commutants. De manière plus générale, si  $\{(\mathcal{O}_i\mathcal{O}_i^*)\}_{i=1..3}$  sont trois groupes commutants d'objets anticommutants, on obtient la symétrie miroir introduite par Plechko :

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_1^*\mathcal{O}_1)(\mathcal{O}_2^*\mathcal{O}_2)(\mathcal{O}_3^*\mathcal{O}_3) &= (\mathcal{O}_1^*(\mathcal{O}_2^*(\mathcal{O}_3^*\mathcal{O}_3)\mathcal{O}_2)\mathcal{O}_1) \\ &= (\mathcal{O}_3^*(\mathcal{O}_2^*(\mathcal{O}_1^*\mathcal{O}_1)\mathcal{O}_2)\mathcal{O}_3).\end{aligned}\tag{2.14}$$

Afin d'obtenir une expression valable pour toute taille  $L$  du système, il est nécessaire de traiter avec soin les termes de bords. Dans la direction  $n$ , parallèle à la ligne de champ magnétique, la variable de lien correspondante peut s'écrire

$$\psi_{mL}^{(2)} = \mathfrak{Tr} [B_{mL}B_{mL+1}^*] = \mathfrak{Tr} [B_{m1}^*B_{mL}],\tag{2.15}$$

avec  $B_{m1}^* = 1 + t_2 b_{m0}^* \sigma_{m1}$ . L'égalité (2.15) associée aux définitions (2.10) conduit à la condition au bord pour les variables de Grassmann :

$$b_{m0}^* = -b_{mL}^*.\tag{2.16}$$

Ainsi la condition au bord périodique pour les spins se traduit par une condition antipériodique pour les variables de Grassmann. Dans la direction  $m$ , transverse à la ligne de champ magnétique, nous avons imposé une condition au bord libre. Cela implique

$$a_{0n}^* = 0,\tag{2.17}$$

et on a donc  $A_{1n}^* = 1$ .

On introduit la notation suivante pour les produits orientés :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\prod}_{k=1}^N A_k &= A_1 \cdot A_2 \cdots A_N, \\ \overleftarrow{\prod}_{k=1}^N A_k &= A_N \cdot A_{N-1} \cdots A_1.\end{aligned}$$

À partir des définitions (2.10), on trouve pour le premier terme de bord :

$$\prod_{n=1}^L \psi_{Ln}^{(1)} = \mathfrak{Tr} \left[ \overrightarrow{\prod}_{n=1}^L A_{Ln} \right].\tag{2.18}$$

De même on a

$$\prod_{m=1}^L \psi_{mL}^{(2)} = \mathfrak{Tr} \left[ \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{m1}^* B_{mL}} \right]. \quad (2.19)$$

En utilisant la symétrie miroir (2.14) on peut réécrire ce terme comme :

$$\prod_{m=1}^L \psi_{mL}^{(2)} = \mathfrak{Tr} \left[ \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{m1}^*} \cdot \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mL}} \right]. \quad (2.20)$$

Le produit  $\Pi_\partial$  des termes (2.18) et (2.20) peut lui aussi être réorganisé suivant

$$\Pi_\partial = \prod_{n=1}^L \psi_{Ln}^{(1)} \cdot \prod_{m=1}^L \psi_{mL}^{(2)}, \quad (2.21)$$

$$= \mathfrak{Tr} \left[ \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{m1}^*} \left( \prod_{n=1}^L \psi_{Ln}^{(1)} \right) \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mL}} \right], \quad (2.22)$$

$$= \mathfrak{Tr} \left[ \left( \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{m1}^*} \right) \cdot \left( \overrightarrow{\prod_{n=1}^L A_{Ln}} \right) \cdot \left( \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mL}} \right) \right]. \quad (2.23)$$

À présent nous allons effectuer le même genre de manipulation sur les termes de bulk. En utilisant (2.10) et (2.14), on a :

$$\prod_{m=1}^L \psi_{mn}^{(2)} = \mathfrak{Tr} \left[ \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{mn} B_{mn+1}^*} \right] = \mathfrak{Tr} \left[ \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mn}} \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{mn+1}^*} \right]. \quad (2.24)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \left( \prod_{n=1}^{L-1} \prod_{m=1}^L \psi_{mn}^{(2)} \right) \Pi_\partial &= \mathfrak{Tr} \left[ \left( \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{m1}^*} \right) \cdot \overleftarrow{\prod_{n=1}^{L-1}} \left( A_{Ln} \prod_{m=1}^L \psi_{mn}^{(2)} \right) A_{LL} \cdot \left( \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mL}} \right) \right], \\ &= \mathfrak{Tr} \left[ \left( \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{m1}^*} \right) \cdot \overleftarrow{\prod_{n=1}^{L-1}} \left( A_{Ln} \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mn}} \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{mn+1}^*} \right) A_{LL} \cdot \left( \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mL}} \right) \right]. \end{aligned}$$

En regroupant les termes contenant le même indice  $m$  cette expression s'écrit :

$$\left( \prod_{n=1}^{L-1} \prod_{m=1}^L \psi_{mn}^{(2)} \right) \Pi_\partial = \prod dn = 1L \left[ \left( \overrightarrow{\prod_{m=1}^L B_{mn}^*} \right) A_{Ln} \left( \overleftarrow{\prod_{m=1}^L B_{mn}} \right) \right]. \quad (2.25)$$

Il reste maintenant à ajouter les produits sur les  $\psi_{mn}^{(1)}$ . On a :

$$\Pi = \left( \prod_{m=1}^{L-1} \prod_{n=1}^L \psi_{mn}^{(1)} \right) \left( \prod_{m=1}^L \prod_{n=1}^{L-1} \psi_{mn}^{(2)} \right) \Pi_{\partial} = \prod_{n=1}^{\overrightarrow{L}} \left[ \left( \prod_{m=1}^{\overrightarrow{L-1}} B_{mn}^* \psi_{mn}^{(1)} \right) B_{nL}^* A_{Ln} \left( \prod_{m=1}^{\overleftarrow{L}} B_{mn} \right) \right].$$

En utilisant (2.10), on peut réorganiser une partie du produit précédent :

$$\left( \prod_{m=1}^{\overrightarrow{L-1}} B_{mn}^* \psi_{mn}^{(1)} \right) B_{nL}^* A_{Ln} = \prod_{m=1}^{\overrightarrow{L-1}} (B_{mn}^* A_{nm} A_{m+1n}^*) B_{nL}^* A_{Ln}, \quad (2.26)$$

$$= B_{1n}^* A_{1n} \prod_{m=2}^{\overrightarrow{L}} A_{mn}^* B_{mn}^* A_{mn}. \quad (2.27)$$

On trouve alors :

$$\Pi = \prod_{n=1}^{\overrightarrow{L}} \left[ B_{1n}^* A_{1n} \left( \prod_{m=2}^{\overrightarrow{L}} A_{mn}^* B_{mn}^* A_{mn} \prod_{m=2}^{\overleftarrow{L}} B_{mn} \right) B_{1n} \right]. \quad (2.28)$$

En fait, comme nous n'avons pas encore traité le terme  $(1 + u_n \sigma_{1n})$  provenant du champ magnétique au bord, nous avons simplement appliqué la méthode de Plechko [Plechko 1985] dans le cas des conditions aux bords périodiques/libres. Ce terme magnétique n'ayant pas encore été fermionisé, il peut être inséré dans le produit sur  $n$ .

Après ces manipulations algébriques, on obtient la représentation mixte de la fonction de partition réduite, contenant à la fois des variables commutantes (les spins) et anticommutes (les variables de Grassmann) :

$$\mathcal{Q}[h] = \text{Tr}_{\{\sigma_{mn}\}} \mathfrak{T} \left[ \prod_{n=1}^{\overrightarrow{L}} B_{1n}^* A_{1n} (1 + u_n \sigma_{1n}) \left( \prod_{m=2}^{\overrightarrow{L}} A_{mn}^* B_{mn}^* A_{mn} \cdot \prod_{m=2}^{\overleftarrow{L}} B_{mn} \right) B_{1n} \right]. \quad (2.29)$$

Les termes contenant les spins  $\sigma_{mn}$  sont organisés de sorte que la trace sur les spins peut être effectuée. Cette expression est la base du travail présentée dans cette partie.

## 2.3 Représentation fermionique de la fonction de partition

Le point-clef de la formule (2.29) est que sa structure permet de calculer itérativement la trace sur les spins, conduisant à une représentation purement fermionique de la fonction de partition réduite.

### 2.3.1 Trace sur les spins du bulk

Dans le formule (2.29), on constate que tous les termes contenant le spin  $\sigma_{Ln}$  sont regroupés : on peut donc commencer par tracer sur ce spin. Or on a l'égalité

$$A_{mn}^* B_{mn}^* A_{mn} B_{mn} = (1 + t a_{m-1n}^* \sigma_{mn})(1 + t b_{mn-1}^* \sigma_{mn})(1 + a_{mn} \sigma_{mn})(1 + b_{mn} \sigma_{mn}).$$

La trace sur le spin  $\sigma_{mn} = \pm 1$  conduit à l'exponentielle d'une forme quadratique :

$$\text{Tr}_{\sigma_{mn}} [A_{mn}^* B_{mn}^* A_{mn} B_{mn}] = \exp(\mathbb{Q}_{mn}), \quad (2.30)$$

avec

$$\mathbb{Q}_{mn} = a_{mn} b_{mn} + t_1 t_2 a_{m-1n}^* b_{mn-1}^* + (t_1 a_{m-1n}^* + t_2 b_{mn-1}^*)(a_{mn} + b_{mn}). \quad (2.31)$$

Ainsi, après la première trace sur le spin  $\sigma_{Ln}$ , on obtient l'exponentielle d'une forme quadratique, qui commute avec tous les autres termes de la représentation mixte de la fonction de partition. Après avoir sorti cette partie commutante, les termes contenant le spin  $\sigma_{L-1n}$  sont alors regroupés, et ainsi de suite. C'est cette organisation du produit permettant de faire les traces partielles sur les spins du bulk qui fait la force de la méthode de Plechko. On obtient finalement

$$\text{Tr}_{\{\sigma_{mn}\}_{m=2..L}} \left[ \prod_{m=2}^{\overrightarrow{L}} A_{mn}^* B_{mn}^* A_{mn} \cdot \prod_{m=2}^{\overleftarrow{L}} B_{mn} \right] = \exp \left( \sum_{m=2}^L \mathbb{Q}_{mn} \right). \quad (2.32)$$

Ainsi après avoir calculé la trace sur tous les spins de bulk, la fonction de partition réduite s'écrit

$$\mathcal{Q}[h] = \mathfrak{T} \left[ \exp \left( \sum_{n=1}^L \sum_{m=2}^L \mathbb{Q}_{mn} \right) \cdot \prod_{n=1}^{\overrightarrow{L}} \underbrace{\text{Tr}_{\sigma_{1n}} ((1 + u_n \sigma_{1n}) B_{1n}^* A_{1n} B_{1n})}_{\text{spins de bord } \sigma_{1n}} \right]. \quad (2.33)$$

Maintenant les termes contenant les spins de bord  $\sigma_{1n}$  sont regroupés et ordonnés simplement.

### 2.3.2 Trace sur les spins du bord

Dans l'expression (2.33), on peut effectuer la trace sur chaque spin indépendamment les uns des autres, conduisant à :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\sigma_{1n}} [(1 + u_n \sigma_{1n}) B_{1n}^* A_{1n} B_{1n}] &= 1 + a_{1n} b_{1n} + t_2 b_{1n-1}^* (a_{1n} + b_{1n}) + u_n \mathbb{L}_n + u_n t_2 b_{1n-1}^* a_{1n} b_{1n}, \\ \mathbb{L}_n &= a_{1n} + b_{1n} + t_2 b_{1n-1}^*. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La présence du champ magnétique sur le bord introduit un terme linéaire en variables de Grassmann,  $\mathbb{L}_n$ , qui ne commute plus<sup>30</sup>. Il faut alors calculer le produit dans (2.33) avec soin.

<sup>30</sup>Nous verrons plus loin que c'est l'apparition de ce terme linéaire qui est à l'origine de l'échec de cette méthode dans le cas d'un champ magnétique dans le bulk.

Nous pouvons changer artificiellement les conditions aux bords libres en des conditions aux bords périodiques. Cela simplifiera les calculs à venir, notamment pour les transformations de Fourier. La partie quadratique de l'expression (2.34) est égale à  $\mathbb{Q}_{1n}$  avec condition aux bords libres ( $a_{0n}^* = 0$ ). En effet, on peut écrire

$$\mathbb{Q}_{1n} = \mathbb{Q}_{1n}^P - t_1 a_{Ln}^* \mathbb{L}_n, \quad (2.35)$$

$$\mathbb{Q}_{1n}^P = a_{1n} b_{1n} + t_1 t_2 a_{0n}^* b_{1n-1}^* + (t_1 a_{0n}^* + t_2 b_{1n-1}^*) (a_{1n} + b_{1n}), \quad (2.36)$$

où l'on a cette fois  $a_{0n}^* = a_{Ln}^*$ . La quantité quadratique  $\mathbb{Q}_{1n}^P$  correspond à une condition périodique sur les variables de Grassmann, ce qui correspond à une condition aux bords antipériodique sur les spins. On a alors :

$$\text{Tr}_{\sigma_{1n}} [(1 + u_n \sigma_{1n}) B_{1n}^* A_{1n} B_{1n}] = \exp (\mathbb{Q}_{1n}^P + u_n \mathbb{L}_n - t_1 a_{Ln}^* \mathbb{L}_n). \quad (2.37)$$

La correction à la condition libre est contenue dans le terme  $-t_1 a_{Ln}^* \mathbb{L}_n$ .

### 2.3.3 Représentation fermionique du champ magnétique

Nous allons à présent introduire une paire de variables de Grassmann  $(\tilde{h}_n, \tilde{h}_n^*)$  associée au champ magnétique sur le bord, en utilisant l'identité

$$\exp(u_n \mathbb{L}_n) = 1 + u_n \mathbb{L}_n = \int d\tilde{h}_n^* d\tilde{h}_n (1 + u_n \tilde{h}_n) (1 + \tilde{h}_n^* \mathbb{L}_n) e^{\tilde{h}_n \tilde{h}_n^*}. \quad (2.38)$$

Pour chacun des termes du produit de (2.33), on trouve alors

$$\text{Tr}_{\sigma_{1n}} [(1 + u_n \sigma_{1n}) B_{1n}^* A_{1n} B_{1n}] = \int_{\tilde{h}_n, \tilde{h}_n^*} \mathfrak{Tr} \left[ \exp \left( \mathbb{Q}_{1n}^P + (\tilde{h}_n^* - t_1 a_{Ln}^*) \mathbb{L}_n + u_n \tilde{h}_n \right) \right].$$

La structure de l'argument de l'exponentielle conduit naturellement à effectuer une translation du champ magnétique fermionique, suivant

$$H_n = \tilde{h}_n, \quad H_n^* = \tilde{h}_n^* - t a_{Ln}^*, \quad (2.39)$$

ce qui conduit à :

$$\prod_{n=1}^{\overrightarrow{L}} \text{Tr}_{\sigma_{1n}} [(1 + u_n \sigma_{1n}) B_{1n}^* A_{1n} B_{1n}] = \int_{H_n, H_n^*} \mathfrak{Tr} \left[ \exp \left( \sum_{n=1}^L \mathbb{Q}_{1n}^P + H_n^* \mathbb{L}_n + H_n t_1 a_{Ln}^* \right) \cdot \prod_{n=1}^{\overrightarrow{L}} e^{u_n H_n} \right].$$

Le terme  $H_n t_1 a_{Ln}^*$  provient de la définition de l'opérateur trace :  $\tilde{h}_n \tilde{h}_n^* = H_n (H_n^* + t a_{Ln}^*)$ . Le produit d'exponentielles peut être réécrit, pour faire apparaître une action non locale sur le bord :

$$\prod_{n=1}^{\overrightarrow{L}} e^{u_n H_n} = \exp \left( \sum_{n=1}^L u_n H_n + \sum_{m=1}^{L-1} \sum_{n=m+1}^L u_m u_n H_m H_n \right). \quad (2.40)$$

En reportant l'équation (2.40) dans (2.33), nous obtenons une représentation de la fonction de partition réduite uniquement au moyen de variables de Grassmann :

$$\mathcal{Q}[h] = \int \mathcal{D}a^* \mathcal{D}a \mathcal{D}b^* \mathcal{D}b \mathcal{D}H^* \mathcal{D}H \exp \mathcal{S}[a, a^*, b, b^*, H, H^*], \quad (2.41)$$

avec l'action fermionique  $\mathcal{S}$  définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \sum_{mn=1}^L (\mathbb{Q}_{mn}^p + a_{mn} a_{mn}^* + b_{mn} b_{mn}^*) + \sum_{n=1}^L H_n^* \mathbb{L}_n + \sum_{n=1}^L H_n t_1 a_{Ln}^* \\ & + \sum_{m<n} u_m u_n H_m H_n + \sum_{n=1}^L H_n H_n^*. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Cette action peut être séparée en trois termes,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{bulk}} + \mathcal{S}_{\text{int}} + \mathcal{S}_{\text{field}} \quad (2.43)$$

avec

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}} = \sum_{mn=1}^L (\mathbb{Q}_{mn}^p + a_{mn} a_{mn}^* + b_{mn} b_{mn}^*), \quad (2.44)$$

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \sum_{n=1}^L H_n^* \mathbb{L}_n + \sum_{n=1}^L H_n t_1 a_{Ln}^*, \quad (2.45)$$

$$\mathcal{S}_{\text{field}} = \sum_{m<n} u_m u_n H_m H_n + \sum_{n=1}^L H_n H_n^*. \quad (2.46)$$

Ainsi la fonction de partition est réduite à une intégrale gaussienne sur un ensemble de variables de Grassmann. De plus la structure de l'action obtenue permet d'intégrer tout d'abord l'action  $\mathcal{S}_{\text{bulk}} + \mathcal{S}_{\text{int}}$  sur les variables de Grassmann du bulk,  $(a, a^*, b, b^*)$ , conduisant ainsi à une nouvelle action gaussienne unidimensionnelle, ne dépendant plus que du champ magnétique fermionique.

## 2.4 Modèle d'Ising 1d avec champ magnétique homogène

La manière de calculer (2.41) est en fait très proche de la résolution du modèle d'Ising 1d avec un champ magnétique, en utilisant les algèbres de Grassmann. C'est la raison pour

laquelle nous allons nous intéresser à ce problème dans cette section. D'autre part comme on connaît la solution de ce modèle par la matrice de transfert, cela nous permettra de vérifier que la méthode est correcte.

Le système est une ligne de spins classiques, couplés par une constante de couplage  $J$ . La longueur de la chaîne est notée  $L$ , supposée paire, et on choisit d'avoir des conditions aux bords périodiques sur les spins. Sur chaque site, on applique un champ magnétique  $h$ . Le développement de la fonction de partition permet de se ramener à l'étude d'une fonction de partition réduite. En introduisant  $t = \tanh \beta J$  et  $u = \tanh \beta h$ , la diagonalisation de la matrice de transfert conduit à [Baxter 1982] :

$$2^L \mathcal{Q}_{1d}(h) = \left(1 + t + \sqrt{(1-t)^2 + 4tu^2}\right)^L + \left(1 + t - \sqrt{(1-t)^2 + 4tu^2}\right)^L. \quad (2.47)$$

En introduisant comme précédemment une paire de variables de Grassmann  $(a_n, a_n^*)$  pour chaque lien entre les spins de la ligne, et une paire de variables  $(H_n, H_n^*)$  pour le champ magnétique, on obtient une expression similaire à (2.41) pour le cas 1d :

$$\mathcal{Q}_{1d}(h) = \int \mathcal{D}a^* \mathcal{D}a \mathcal{D}H^* \mathcal{D}H \exp(\mathcal{S}_{\text{bulk}} + \mathcal{S}_{\text{int}} + \mathcal{S}_{\text{field}}), \quad (2.48)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{bulk}} &= \sum_{n=1}^L (a_n a_n^* + t a_{n-1}^* a_n), \quad \mathcal{S}_{\text{int}} = \sum_n H_n^* \mathbb{L}_n, \\ \mathcal{S}_{\text{field}} &= \sum_n H_n H_n^* + u^2 \sum_{m < n} H_m H_n, \quad \mathbb{L}_n = a_n + t a_{n-1}^*. \end{aligned}$$

La périodicité des spins se traduit par des conditions aux bords antipériodiques sur les variables de Grassmann  $a_n$  et  $H_n$ . On réalise alors un changement de base pour ces variables, qui s'apparente à une transformation de Fourier discrète pour des variables de Grassmann :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q=0}^{L-1} r_{q+\frac{1}{2}}^n a_{q+\frac{1}{2}}, \quad (2.49)$$

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{q=0}^{L-1} r_{q+\frac{1}{2}}^n H_{q+\frac{1}{2}}, \quad (2.50)$$

avec  $r_q = e^{i\pi q/L}$ . Dans cette nouvelle base, l'action fermionique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{bulk}} + \mathcal{S}_{\text{int}} &= \sum_{q=0}^{L/2-1} (1 - t r_{q+\frac{1}{2}}) a_{q+\frac{1}{2}} a_{q+\frac{1}{2}}^* + (1 - t \bar{r}_{q+\frac{1}{2}}) a_{-q-\frac{1}{2}} a_{-q-\frac{1}{2}}^* \\ &+ \sum_{q=0}^{L/2-1} H_{q+\frac{1}{2}}^* (a_{q+\frac{1}{2}} + t \bar{r}_{q+\frac{1}{2}} a_{-q-\frac{1}{2}}^*) + \sum_{q=0}^{L/2-1} H_{-q-\frac{1}{2}}^* (a_{-q-\frac{1}{2}} + t r_{q+\frac{1}{2}} a_{q+\frac{1}{2}}^*), \end{aligned} \quad (2.51)$$

où la barre désigne le complexe conjugué. La somme non locale qui apparaît dans l'action  $\mathcal{S}_{\text{field}}$  s'écrit dans la base de Fourier :

$$\sum_{m < n} H_m H_n = \sum_{q=0}^{L-1} \frac{1}{r_{q+\frac{1}{2}} - 1} H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} = \sum_{q=0}^{L/2-1} \left( \frac{1}{r_{q+\frac{1}{2}} - 1} - \frac{1}{\bar{r}_{q+\frac{1}{2}} - 1} \right) H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}.$$

La somme (2.51) se sépare en blocs indépendants de quatre variables de Grassmann  $(a_{q+\frac{1}{2}}, a_{q+\frac{1}{2}}^*, a_{-q-\frac{1}{2}}, a_{-q-\frac{1}{2}}^*)$ . Pour calculer les intégrales de chacun de ces blocs, on utilise une intégrale gaussienne translatée sur les variables de Grassmann :

$$\int da^* da db^* db \exp(\alpha a a^* + \bar{\alpha} b b^* + v a + v^* a^* + w b + w^* b^*) = \alpha \bar{\alpha} \exp\left(-\frac{w w^*}{\bar{\alpha}} - \frac{v v^*}{\alpha}\right),$$

où  $(v, v^*, w, w^*)$  sont des variables de Grassmann et  $(\alpha, \bar{\alpha})$ , deux nombres complexes indépendants. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{1d}(h) = \mathcal{Q}_{1d}(0) \int \mathcal{D}H^* \mathcal{D}H \exp\left(\sum_{q=0}^{L/2-1} H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* \right. \\ \left. + \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{\text{1d}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* H_{q+\frac{1}{2}}^* + u^2 \delta_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}\right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec

$$\mathcal{Q}_{1d}(0) = \prod_{q=0}^{L/2-1} |1 - t r_{q+\frac{1}{2}}|^2, \quad \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{\text{1d}} = \frac{2it \sin \theta_{q+\frac{1}{2}}}{1 - 2t \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} + t^2}, \quad (2.53)$$

$$\delta_{q+\frac{1}{2}} = -i \cot\left(\frac{1}{2}\theta_{q+\frac{1}{2}}\right), \quad \theta_{q+\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{L} \left(q + \frac{1}{2}\right). \quad (2.54)$$

La dernière intégrale sur les variables  $(H, H^*)$  se calcule facilement en utilisant

$$\int da^* da db^* db \exp(aa^* + bb^* + \alpha a^* b^* + \beta ab) = 1 - \alpha\beta, \quad (2.55)$$

avec  $(a, a^*, b, b^*)$  des variables de Grassmann,  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres complexes. Après simplification on trouve :

$$\mathcal{Q}_{1d}(h) = \prod_{q=0}^{L/2-1} \left(1 + t^2 - 2t \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} + 4tu^2 \cos^2\left(\frac{1}{2}\theta_{q+\frac{1}{2}}\right)\right). \quad (2.56)$$

Dans la limite thermodynamique sur la formule (2.56) on a :

$$-\beta f_{1d}^{\infty}(u) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Q \simeq \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \ln(1 + t^2 + 2u^2 t - 2t(1 - u^2) \cos \theta), \quad (2.57)$$

ce qui conduit, après intégration [Gradshteyn et Ryzhik 1994], à la formule :

$$-\beta f_{1d}^{\infty}(u) = \ln \left[ \frac{1 + t + \sqrt{4u^2 t + (1 - t)^2}}{2} \right], \quad (2.58)$$

qui correspond exactement à ce que l'on obtient à partir de l'expression (2.47), dans la limite thermodynamique.

Pour le cas 1d, l'utilisation des variables de Grassmann ne simplifie rien, au contraire, mais elle permet de valider la manière dont on traite le champ magnétique dans le cadre des algèbres de Grassmann. Nous verrons d'autre part que la résolution du cas 2d se fait de façon similaire.

## 2.5 Intégration sur les variables de bulk : interaction effective

Dans cette partie, nous calculons l'intégrale gaussienne donnant  $\mathcal{Q}$  (2.41). Pour cela on commence par réduire le nombre de variables de Grassmann par lien, puis nous intégrons sur les variables de bulk pour obtenir une action 1d, exprimée en terme du champ magnétique fermionique. Enfin, dans le cas d'un champ magnétique au bord homogène, nous montrerons que l'on retrouve les résultats de McCoy et Wu.

### 2.5.1 Réduction du nombre de variables de Grassmann

Dans le cas 2d, il est possible de réduire le nombre de variables par lien en intégrant par exemple sur les variables  $(a_{mn}, b_{mn})$  en utilisant l'identité :

$$\int dbda e^{ab+aL+b\bar{L}} = e^{\bar{L}L}. \quad (2.59)$$

Puisque la mesure originale est  $db^*db da^*da$ , déplacer le terme  $db$  à la droite de  $da^*$  induit un changement de signe global. Après l'intégration, on renomme les variables, suivant  $c_{mn} = a_{mn}^*$  et  $c_{mn}^* = -b_{mn}^*$  : le jacobien de cette transformation entraîne lui aussi un changement de signe, qui compense le premier. Après intégration les nouvelles actions sont :

$$\mathcal{S}_{\text{bulk}} = \sum_{m,n=1}^L c_{mn}c_{mn}^* + (c_{mn}^* + c_{mn})(t_1c_{m-1n} - t_2c_{mn-1}^*) - t_1t_2c_{m-1n}c_{mn-1}^*, \quad (2.60)$$

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \sum_{n=1}^L t_1H_n c_{0n} + (t_2c_{1n-1}^* + c_{1n}^* + c_{1n})H_n^*, \quad (2.61)$$

$$\mathcal{S}_{\text{field}} = \sum_{m < n} u_m u_n H_m H_n + \sum_{n=1}^L H_n H_n^*. \quad (2.62)$$

Comme dans le cas 1d, on fait un changement de base pour travailler dans la base de Fourier. Afin de respecter les conditions aux bords, on pose :

$$c_{mn} = \frac{1}{L} \sum_{p,q=0}^{L-1} r_p^m r_{q+\frac{1}{2}}^n c_{pq+\frac{1}{2}}, \quad c_{mn}^* = \frac{1}{L} \sum_{p,q=0}^{L-1} \bar{r}_p^m \bar{r}_{q+\frac{1}{2}}^n c_{pq+\frac{1}{2}}^*. \quad (2.63)$$

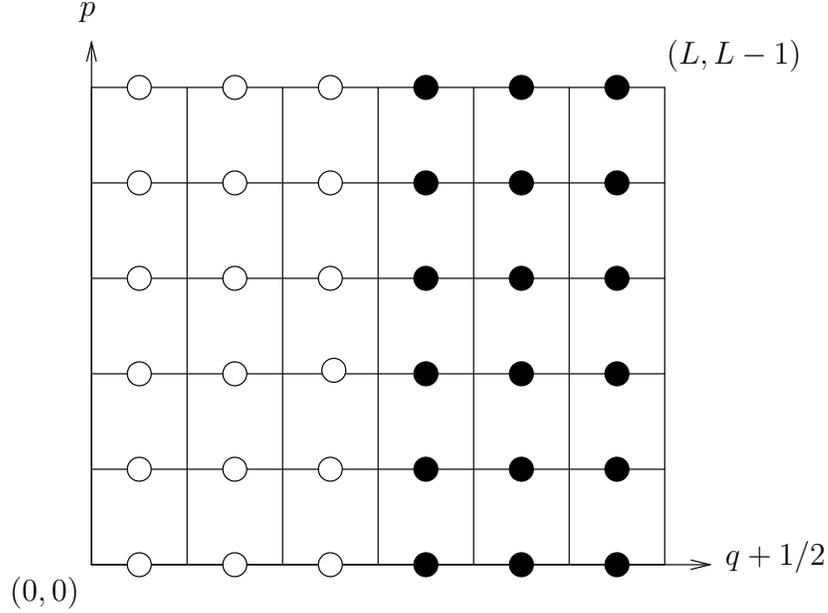


FIG. 2.2 – Domaine d'intégration pour les modes de Fourier, dans le cas où  $L$  est pair ( $L=6$ ). L'ensemble des modes  $S_1$  correspond aux points blancs. Les autres modes (ensemble  $S_2$ ) sont obtenus à partir de  $S_1$  par la symétrie  $(p + 1/2, q) \rightarrow (L - p, L - q - 1/2)$  modulo  $L$ .

Par exemple l'action du bulk devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{bulk}} = & \sum_{p,q=0}^{L-1} \left( 1 - t_2 \bar{r}_p - t_1 r_{q+\frac{1}{2}} - t_1 t_2 \bar{r}_p r_{q+\frac{1}{2}} \right) c_{pq+\frac{1}{2}} c_{pq+\frac{1}{2}}^* + \\ & - t_2 \bar{r}_p c_{pq+\frac{1}{2}} c_{L-pL-q-\frac{1}{2}} + t_1 r_{q+\frac{1}{2}} c_{pq+\frac{1}{2}}^* c_{L-pL-q-\frac{1}{2}}^*. \end{aligned} \quad (2.64)$$

On note un couplage entre les modes  $(p, q + \frac{1}{2})$  et  $(L - p, L - q - \frac{1}{2}) \sim (-p, -q - \frac{1}{2})$ . Tout comme dans le cas 1d, la somme peut être vue comme une somme sur des blocs indépendants ne contenant que les variables  $c_{pq+\frac{1}{2}}, c_{-p-q-\frac{1}{2}}, c_{pq+\frac{1}{2}}^*$  et  $c_{-p-q-\frac{1}{2}}^*$ . Ces blocs sont en effet indépendants si l'on se restreint aux modes  $(p, q)$  correspondant aux points blancs de la figure 2.2 (ensemble  $S_1$ ). Dans ce cas les ensembles  $S_1$  et  $S_2$  remplissent complètement la zone de Brillouin, évitant ainsi un double comptage. En restreignant les sommes à l'ensemble  $S_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{bulk}} = & \sum_{p,q \in S_1} \left( \alpha_{pq+\frac{1}{2}} c_{pq+\frac{1}{2}} c_{pq+\frac{1}{2}}^* + \bar{\alpha}_{pq+\frac{1}{2}} c_{-p-q-\frac{1}{2}} c_{-p-q-\frac{1}{2}}^* + \beta_p^{(1)} c_{pq+\frac{1}{2}} c_{-p-q-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \beta_{q+\frac{1}{2}}^{(2)} c_{pq+\frac{1}{2}}^* c_{-p-q-\frac{1}{2}}^* \right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec

$$\alpha_{pq+\frac{1}{2}} = 1 - t_1 \bar{r}_p - t_2 r_{q+\frac{1}{2}} - t_1 t_2 \bar{r}_p r_{q+\frac{1}{2}}, \quad (2.66)$$

$$\beta_p^{(1)} = t_1 (r_p - \bar{r}_p), \quad (2.67)$$

$$\beta_p^{(2)} = t_2 (r_q - \bar{r}_q). \quad (2.68)$$

D'autre part l'action d'interaction devient

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{int}} = & \frac{1}{L} \sum_{p,q \in S_1} c_{pq+\frac{1}{2}} (r_p H_{q+\frac{1}{2}}^* - t_1 H_{-q-\frac{1}{2}}) + c_{pq+\frac{1}{2}}^* \bar{r}_p (1 + t_2 r_{q+\frac{1}{2}}) H_{-q-\frac{1}{2}}^* \\ & + c_{-p-q-\frac{1}{2}} (\bar{r}_p H_{-q-\frac{1}{2}}^* - t_1 H_{q+\frac{1}{2}}) + c_{-p-q-\frac{1}{2}}^* r_p (1 + t_2 r_{q+\frac{1}{2}}) H_{q+\frac{1}{2}}^*. \end{aligned} \quad (2.69)$$

La dernière action,  $\mathcal{S}_{\text{field}}$ , est la même que dans le cas 1d et s'écrit :

$$\mathcal{S}_{\text{field}} = \sum_{q=0}^{L/2-1} H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* + \sum_{q,q'=0}^{L-1} \Delta_{q,q'}[u] H_{q+\frac{1}{2}} H_{q'+\frac{1}{2}}, \quad (2.70)$$

avec

$$\Delta_{q,q'}[u] = \frac{1}{L} \sum_{m < n} u_m u_n r_{q+\frac{1}{2}}^m r_{q'+\frac{1}{2}}^n. \quad (2.71)$$

## 2.5.2 Intégration des variables de bulk : action 1d effective

Après ces manipulations algébriques, nous pouvons intégrer l'action  $\mathcal{S}_{\text{bulk}} + \mathcal{S}_{\text{int}}$ . Pour cela on utilise une nouvelle fois une intégrale gaussienne translatée sur des variables de Grassmann, semblable à la formule (2.52) :

$$\begin{aligned} & \int da^* da db^* db \exp(\alpha a a^* + \bar{\alpha} b b^* + \beta a b + \bar{\beta} a^* b^* + a v + b w + a^* v^* + b^* w^*) \\ & = (\alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta}) \exp \left[ \frac{1}{\alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta}} (\bar{\alpha} v^* v + \alpha w^* w + \bar{\beta} v w + \beta v^* w^*) \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c e^{\mathcal{S}_{\text{bulk}} + \mathcal{S}_{\text{int}}} = & \prod_{p,q \in S_1} \left( \alpha_{pq+\frac{1}{2}} \bar{\alpha}_{pq+\frac{1}{2}} - \beta_p^{(1)} \beta_{q+\frac{1}{2}}^{(2)} \right) \times \exp \left( \gamma_{pq+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* H_{q+\frac{1}{2}}^* \right. \\ & \left. + \lambda_{pq+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + \bar{\lambda}_{pq+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* + \epsilon_{pq+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (2.73)$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} \gamma_{pq+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{L} \frac{1}{\alpha_{pq+\frac{1}{2}} \bar{\alpha}_{pq+\frac{1}{2}} - \beta_p^{(1)} \beta_{q+\frac{1}{2}}^{(2)}} \left( -\alpha_{pq+\frac{1}{2}} (1 + t_2 \bar{r}_{q+\frac{1}{2}}) + \bar{\alpha}_{pq+\frac{1}{2}} (1 + t_2 r_{q+\frac{1}{2}}) \right. \\ & \left. + \beta_p^{(1)} (1 + t_2 r_{q+\frac{1}{2}}) (1 + t_2 \bar{r}_{q+\frac{1}{2}}) + \bar{\beta}_{q+\frac{1}{2}}^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (2.74)$$

et

$$\lambda_{pq+\frac{1}{2}} = \frac{1}{L} \frac{1}{\alpha_{pq+\frac{1}{2}} \bar{\alpha}_{pq+\frac{1}{2}} - \beta_p^{(1)} \beta_{q+\frac{1}{2}}^{(2)}} \left( t_1 r_p \beta_{q+\frac{1}{2}}^{(2)} + t_1 r_p \alpha_{pq+\frac{1}{2}} (1 + t_2 \bar{r}_{q+\frac{1}{2}}) \right), \quad (2.75)$$

$$\epsilon_{pq+\frac{1}{2}} = \frac{1}{L} \frac{t_1^2 \beta_{q+\frac{1}{2}}}{\alpha_{pq+\frac{1}{2}} \bar{\alpha}_{pq+\frac{1}{2}} - \beta_p^{(1)} \beta_{q+\frac{1}{2}}^{(2)}}. \quad (2.76)$$

Le produit qui apparaît en tête du produit (2.73) est en fait, à des termes de bords près, la fonction de partition de bulk à champ nul  $\mathcal{Q}_0$  et s'écrit :

$$\mathcal{Q}_0^2 = \prod_{p,q=0}^{L-1} \left[ (1+t_1^2)(1+t_2^2) - 2t_1(1-t_2^2) \cos \theta_p - 2t_2(1-t_1^2) \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.77)$$

En champ nul, dans la limite thermodynamique, la fonction de partition admet un pôle pour la température solution de l'équation

$$(1+t_1^2)(1+t_2^2) - 2t_1(1-t_2^2) - 2t_2(1-t_1^2) = 0.$$

En particulier, dans le cas où le couplage est le même dans les deux directions,  $t_1 = t_2$ , on retrouve l'expression de la température critique  $T_c/J = 1/\text{atanh}(\sqrt{2}-1) \simeq 2.27$ . On peut encore simplifier le résultat (2.73) en utilisant les propriétés de symétrie des coefficients (2.74).

Le coefficient  $\gamma_{p,q+\frac{1}{2}}$  vérifie :

$$\gamma_{p,q+\frac{1}{2}} = -\gamma_{L-p,L-q-\frac{1}{2}}.$$

On peut alors écrire

$$\sum_{p,q \in \mathcal{S}_1} \gamma_{pq+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* H_{q+\frac{1}{2}}^* = \sum_{q=0}^{L/2-1} \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{-q-\frac{1}{2}}^* H_{q+\frac{1}{2}}^*,$$

avec

$$\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{L-1} \left( \gamma_{pq+\frac{1}{2}} - \gamma_{p-q-\frac{1}{2}} \right).$$

Après simplification, on obtient

$$\gamma_{pq+\frac{1}{2}}^{2d} = \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} \frac{2it_2 \sin \theta_{q+\frac{1}{2}}}{(1+t_1^2)(1+t_2^2) - 2t_1(1-t_2^2) \cos \theta_p - 2t_2(1-t_1^2) \cos \theta_{q+\frac{1}{2}}}. \quad (2.78)$$

Dans le cas unidimensionnel, les coefficients  $\gamma^{1d}$  correspondent à des interactions entre plus proches voisins. Dans le cas 2d, les coefficients  $\gamma_{pq+\frac{1}{2}}^{2d}$ , plus complexes, jouent le rôle de coefficients de Fourier d'une action effective entre les spins de bord, sous l'effet du champ

magnétique.

Les coefficients  $\lambda_{pq+\frac{1}{2}}$  ont une symétrie différente des  $\gamma_{pq+\frac{1}{2}}$

$$\lambda_{pq+\frac{1}{2}} = \bar{\lambda}_{-p-q-\frac{1}{2}},$$

qui conduit, après le même genre de manipulations, à l'expression

$$\Lambda_{q+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{L-1} (\lambda_{pq+\frac{1}{2}} + \bar{\lambda}_{p-q-\frac{1}{2}}), \quad (2.79)$$

$$\Lambda_{q+\frac{1}{2}} = \frac{t_1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} \frac{(1-t_2^2) \cos \theta_p - t_1(1+2t_2 \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} + t_2^2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2) - 2t_1(1-t_2^2) \cos \theta_p - 2t_2(1-t_1^2) \cos \theta_{q+\frac{1}{2}}}. \quad (2.80)$$

On peut alors écrire

$$\sum_{p,q \in S_1} \lambda_{pq+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + \bar{\lambda}_{pq+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* = \sum_{q=0}^{L/2-1} \Lambda_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^*.$$

Enfin on a aussi :

$$\sum_{p,q \in S_1} \epsilon_{pq+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} = \sum_{q=0}^{L/2-1} t_1^2 \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{-q-\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}.$$

Finalement, à l'issue de ces manipulations, on a réduit le problème du champ magnétique au bord à **une action gaussienne unidimensionnelle**, donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1d} = \sum_{q=0}^{L/2-1} & \left[ (1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}}) H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + (1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* \right. \\ & \left. + \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{-q-\frac{1}{2}}^* H_{q+\frac{1}{2}}^* - t_1^2 \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} \right] + \sum_{q,q'=0}^{L-1} \Delta_{q,q'}[u] H_{q+\frac{1}{2}} H_{q'+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

avec

$$\Delta_{q,q'}[u] = \frac{1}{L} \sum_{m < n} u_m u_n r_{q+\frac{1}{2}}^m r_{q'+\frac{1}{2}}^n.$$

Cette action a la même forme que celle issue du problème 1d (2.51). On note toutefois la présence de termes additionnels,  $\Lambda$  et  $-t_1^2 \gamma^{2d}$ . Ce dernier terme provient de la condition au bord libre, tandis que les termes  $\Lambda$  résultent de l'intégration sur les variables de bulk, et représentent l'effet du bulk ramené sur le bord : on peut interpréter ces termes comme une interaction entre deux spins du bord *via* des boucles d'interaction passant dans le bulk.

Finalement la fonction de partition réduite du modèle d'Ising 2d avec un champ magnétique quelconque est donnée par une intégrale gaussienne unidimensionnelle :

$$\mathcal{Q}[h] = \mathcal{Q}_0 \int dH^* dH \exp(\mathcal{S}_{1d}). \quad (2.82)$$

On peut écrire aussi :

$$\mathcal{Q}[h] = \mathcal{Q}_0 \left\langle \exp \left( \sum_{q,q'=0}^{L-1} \Delta_{qq'}[u] H_{q+\frac{1}{2}} H_{q'+\frac{1}{2}} \right) \right\rangle_{\mathcal{S}_{1d}}.$$

Ce résultat général est valable, nous l'avons déjà dit, pour toute configuration du champ magnétique, quelque soit la température et la taille du système. Elle permet en particulier d'envisager le cas, encore non résolu exactement, où il existe une interface entre deux orientations du champ magnétique sur le bord, comme nous le verrons dans le chapitre suivant [Clusel et Fortin 2005]. Cependant, avant de passer à ce cas plus compliqué, il est nécessaire de vérifier que notre méthode permet de retrouver les résultats déjà obtenus dans le cas homogène par McCoy et Wu [McCoy et Wu 1973].

## 2.6 Cas d'un champ magnétique homogène au bord

### 2.6.1 Expression de la fonction de partition et limite thermodynamique

Dans le cas particulier d'un champ homogène, l'action (2.81) se réduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1d} = & \sum_{q=0}^{L/2-1} \left[ (1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}}) H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + (1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* \right. \\ & \left. + \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{-q-\frac{1}{2}}^* H_{q+\frac{1}{2}}^* - t_1^2 \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} \right] + u^2 \sum_{q=0}^{L-1} \delta_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

avec  $\delta_{q+\frac{1}{2}}$  défini par l'équation (2.54). L'intégration sur les différents blocs indépendants s'effectue exactement comme dans le cas 2d, et l'on obtient finalement

$$\mathcal{Q}(h) = \mathcal{Q}_0 \prod_{q=0}^{L/2-1} Z_{q+\frac{1}{2}}(u), \quad (2.84)$$

avec :

$$Z_{q+\frac{1}{2}}(u) \equiv (1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}})(1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) + \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} (u^2 \delta_{q+\frac{1}{2}} - t_1^2 \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d}). \quad (2.85)$$

On peut alors factoriser cette expression pour séparer les effets de bord à champ nul et la contribution due au champ magnétique :

$$\mathcal{Q}(h) = \mathcal{Q}_0 \prod_{q=0}^{L/2-1} \left[ (1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}})(1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) - t_1^2 (\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d})^2 \right] \left[ 1 + \frac{u^2 \delta_{q+\frac{1}{2}} \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d}}{(1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}})(1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) - t_1^2 (\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d})^2} \right].$$

L'énergie libre totale s'écrit alors :

$$F(h) = -Lk_b T \ln \cosh(\beta h) - k_b T \ln \mathcal{Q}_0 + Lf_b + Lf_{\text{field}}, \quad (2.86)$$

où  $f_b$  est un effet de bord pur (indépendant du champ magnétique) :

$$\beta f_b = -\frac{1}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \ln \left[ (1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}})(1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) - t_1^2 (\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d})^2 \right], \quad (2.87)$$

et  $f_{\text{field}}$  est la contribution magnétique à l'énergie libre

$$\beta f_{\text{field}} = -\frac{1}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \ln \left[ 1 + \frac{u^2 \delta_{q+\frac{1}{2}} \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d}}{(1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}})(1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) - t_1^2 (\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d})^2} \right]. \quad (2.88)$$

Cette décomposition est en accord avec les précédents résultats de McCoy et Wu [McCoy et Wu 1973, McCoy et Wu 1967a].

Une vérification supplémentaire est possible en prenant la limite thermodynamique des énergies obtenues. Par simplicité, nous nous limiterons ici au cas où les deux constantes de couplage sont identiques ( $t_1 = t_2 = t$ ). En utilisant la relation suivante valable pour  $a > b$  [Gradshteyn et Ryzhik 1994],

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{(a-b)(a+b)}}, \quad (2.89)$$

on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_p}{2\pi} \frac{1}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(\cos \theta_p + \cos \theta_{q+\frac{1}{2}})} = \frac{1}{\sqrt{R(\theta_{q+\frac{1}{2}})}},$$

avec la fonction  $R$  définie par :

$$R(\theta) = [(1+t^2)^2 + 2t(1-t^2)(1-\cos \theta)] [(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(1+\cos \theta)]. \quad (2.90)$$

À partir de cette relation on trouve les expressions des différents coefficients dans la limite thermodynamique :

$$\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} = \frac{2it \sin \theta_{q+\frac{1}{2}}}{\sqrt{R(\theta_{q+\frac{1}{2}})}}, \quad (2.91)$$

$$\Lambda_{q+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1+t^2)(1-2t \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} - t^2)}{\sqrt{R(\theta_{q+\frac{1}{2}})}}. \quad (2.92)$$

Avec ces résultats, on obtient sans difficulté l'expression de la contribution magnétique à l'énergie libre, dans la limite thermodynamique :

$$-\beta f_{\text{field}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \ln \left( 1 + \frac{4u^2 t(1 + \cos \theta)}{(1+t^2)(1-2t \cos \theta - t^2) + \sqrt{R(\theta)}} \right). \quad (2.93)$$

Ce résultat est identique à celui obtenu par McCoy et Wu. La formule (2.88) permet de calculer numériquement les grandeurs thermodynamiques intéressantes, comme la chaleur spécifique. La figure 2.3(a) présente par exemple la chaleur spécifique pour un système de taille  $L = 20$  et différentes valeurs du champ magnétique : le déplacement du pic observé est en bon accord avec des résultats antérieurs de Au-Yang et Fisher [AY et Fisher 1975].

## 2.6.2 Fonctions de corrélation au bord

Dans cette section, on calcule les fonctions de corrélation spin-spin sur le bord, entre les sites  $(1, k)$  et  $(1, l)$ , avec  $k < l$ . L'intérêt de ce calcul est double : tout d'abord il permet de calculer, dans la limite thermodynamique, l'aimantation sur le bord, et d'autre part il fournira les briques élémentaires pour l'étude d'un cas de champ inhomogène qui sera présentée dans le chapitre suivant.

En partant de l'équation (2.4), on a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle &\propto \text{Tr}_{\sigma} [\sigma_{1k} \sigma_{1l} e^{-\beta \mathcal{H}}], \\ &= \text{Tr}_{\sigma} \left[ \prod_{m,n=1}^L \psi_{mn}^{(1)} \psi_{mn}^{(2)} \cdot \prod_{n=1}^L \sigma_{1k} \sigma_{1l} (1 + u \sigma_{mn}) \right]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Dans le cas où  $u \neq 0$ , on peut écrire

$$\sigma_{1k} (1 + u \sigma_{1k}) = u \left( 1 + \frac{1}{u} \sigma_{1k} \right), \quad (2.95)$$

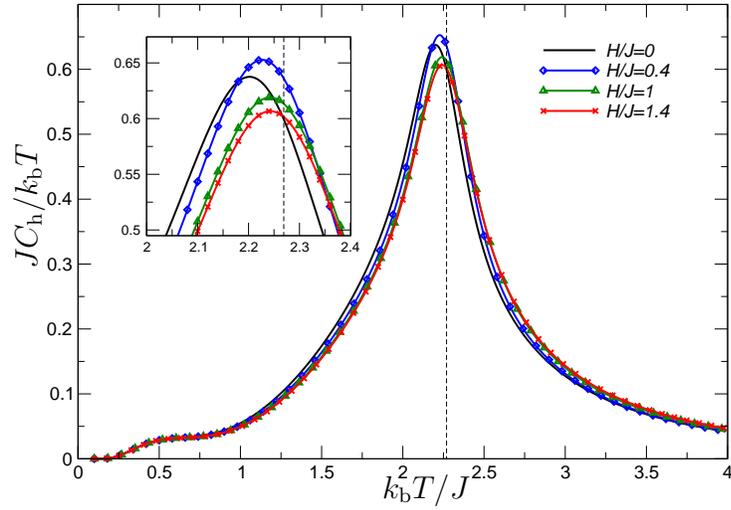
et on introduit les champs magnétiques locaux :

$$u_n = u + (u^{-1} - u)(\delta_{kn} + \delta_{ln}). \quad (2.96)$$

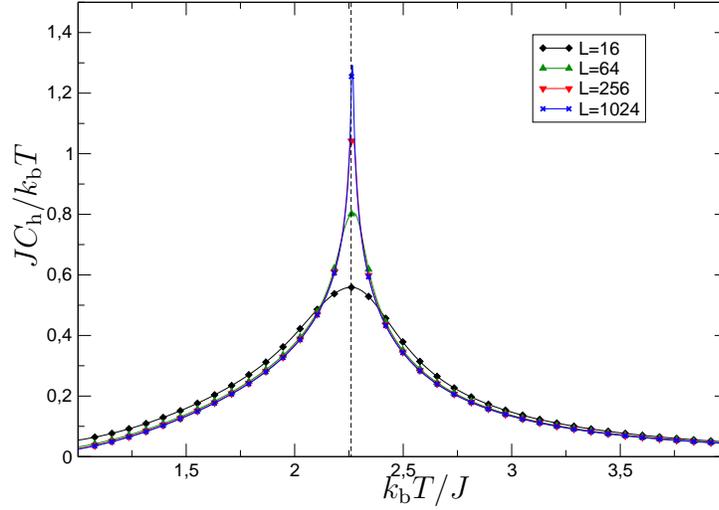
La fonction de corrélation s'écrit alors

$$\langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle \propto u^2 \text{Tr}_{\sigma} \left[ \prod_{m,n=1}^L \psi_{mn}^{(1)} \psi_{mn}^{(2)} \cdot \prod_{n=1}^L (1 + u_n \sigma_{mn}) \right].$$

Ainsi, en notant l'analogie avec l'expression (2.4), le calcul des fonctions de corrélation de bord se réduit au calcul de la fonction de partition réduite du modèle d'Ising 2d avec cas particulier de champ magnétique **inhomogène** au bord, défini par (2.96). La fermionisation et l'intégration sur les variables de bulk sont les mêmes que précédemment. Seule l'action 1d est modifiée : la différence apparaît uniquement dans le terme de couplage non local entre les champs magnétiques fermioniques  $H_n$  :



(a)  $L = 20$ , pour différents champs magnétiques.



(b)  $H/J = 1.6$ , pour différentes tailles.

FIG. 2.3 – Chaleur spécifique pour un réseau carré, avec  $J_1 = J_2$ . La ligne verticale en pointillés indique la position de la température critique.

$$\overrightarrow{\prod}_{m=1}^L e^{u_n H_n} = \exp \left[ \sum_{n=1}^L u_n H_n + \sum_{m=1}^{L-1} \sum_{n=m+1}^L u_m u_n H_m H_n \right]. \quad (2.97)$$

En utilisant l'expression des champs magnétiques locaux (2.96) la somme ordonnée s'écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{m < n} u_m u_n H_m H_n &= u^2 \sum_{m < n} H_m H_n + (1 - u^2)(H_k L_k + H_l L_l) + \frac{1 - u^2}{u^2} H_k H_l, \\ L_k &= \sum_{n=k}^L H_n - \sum_{n=1}^{k-1} H_n. \end{aligned} \quad (2.98)$$

On peut alors développer le produit (2.97) comme :

$$\overrightarrow{\prod}_{n=1}^L e^{u_n H_n} = \overrightarrow{\prod}_{n=1}^L e^{u H_n} \cdot \left[ 1 + (1 - u^2)(H_k L_k + H_l L_l) + \frac{1 - u^2}{u^2} H_k H_l + (1 - u^2)^2 H_k L_k H_l L_l \right].$$

Le premier terme correspond à un champ magnétique homogène sur le bord  $u$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle &= u^2 + u^2(1 - u^2) \langle H_k L_k + H_l L_l \rangle + (1 - u^2) \langle H_k H_l \rangle \\ &+ u^2(1 - u^2)^2 \langle H_k L_k H_l L_l \rangle, \end{aligned}$$

où les fonctions de corrélation  $\langle H_k H_l \rangle$ ,  $\langle H_k L_k \rangle$ , et  $\langle H_k L_k H_l L_l \rangle$  sont calculées au moyen de l'action (2.83) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1d} &= \sum_{q=0}^{L/2-1} \left[ (1 + \Lambda_{q+\frac{1}{2}}) H_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}}^* + (1 + \Lambda_{-q-\frac{1}{2}}) H_{-q-\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}^* \right. \\ &\left. + \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{-q-\frac{1}{2}}^* H_{q+\frac{1}{2}}^* - t^2 \gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d} H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} \right] + u^2 \sum_{q=0}^{L-1} \delta_{q+\frac{1}{2}} H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

On peut de même calculer la valeur moyenne d'un spin au bord :

$$\langle \sigma_{1k} \rangle = u + u(1 - u^2) \langle H_k L_k \rangle. \quad (2.99)$$

Ceci permet d'exprimer la fonction de corrélation connexe au moyen des fonctions de corrélation fermioniques :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle_c &= \langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle - \langle \sigma_{1k} \rangle \langle \sigma_{1l} \rangle \\ &= (1 - u^2) \langle H_k H_l \rangle - u^2(1 - u^2)^2 (\langle H_k L_l \rangle \langle H_l L_k \rangle + \langle H_k H_l \rangle \langle L_k L_l \rangle). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Comme l'action (2.83) est gaussienne, le théorème de Wick s'applique, et la fonction de corrélation à quatre points  $\langle H_k L_k H_l L_l \rangle$  s'exprime donc au moyen des fonctions de corrélation à deux points suivant :

$$\langle H_k L_k H_l L_l \rangle = \langle H_k L_k \rangle \langle H_l L_l \rangle - \langle H_k L_l \rangle \langle H_l L_k \rangle - \langle H_k H_l \rangle \langle L_k L_l \rangle. \quad (2.101)$$

En se plaçant dans la base de Fourier, en utilisant les définitions usuelles, les fonctions de corrélation à deux points s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle H_k H_l \rangle &= \frac{2i}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \left\langle H_{q+\frac{1}{2}} H_{-q-\frac{1}{2}} \right\rangle \sin \left[ \theta_{q+\frac{1}{2}} (k-l) \right], \\ &= \frac{2}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \frac{i\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d}}{Z_{q+\frac{1}{2}}(u)} \sin \left[ \theta_{q+\frac{1}{2}} (k-l) \right], \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\langle H_k L_l \rangle = -\frac{1}{L} \sum_{q=1}^{L/2-1} \frac{i\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d}}{Z_{q+\frac{1}{2}}(u)} \frac{\cos[\theta_{q+\frac{1}{2}}(k-l+1/2)]}{\sin(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2)}, \quad (2.103)$$

$$\langle L_k L_l \rangle = \frac{2}{L} \sum_{q=1}^{L/2-1} \frac{i\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2d}}{Z_{q+\frac{1}{2}}(u)} \frac{\sin[\theta_{q+\frac{1}{2}}(k-l)]}{\sin(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2)^2}. \quad (2.104)$$

Ces fonctions de corrélation, nous le verrons dans le chapitre suivant, sont en fait très utiles pour étudier des configurations du champ magnétique plus compliquées.

Les figures 2.4 et 2.5 présentent différentes fonctions de corrélation calculées à partir de (2.100).

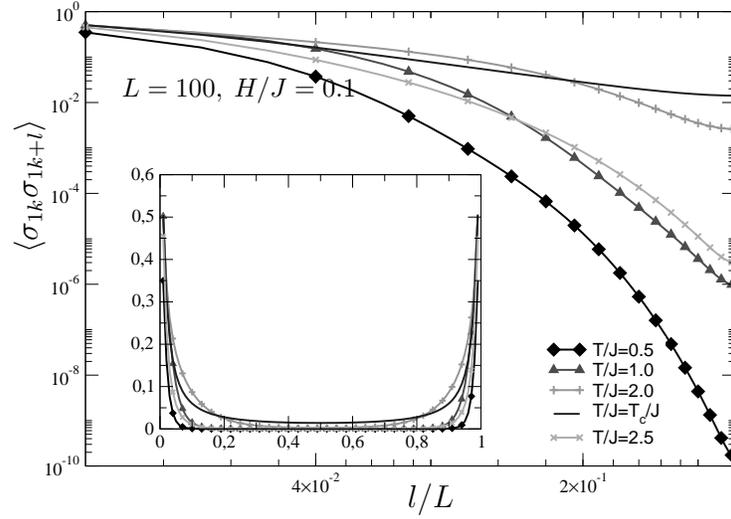
### 2.6.3 Limite thermodynamique : aimantation au bord

En prenant la limite thermodynamique des expressions précédentes, il est possible d'obtenir des informations sur le comportement de l'aimantation par spin sur le bord, au voisinage de la température critique  $T_c$ . Pour cela on utilise la définition usuelle de l'aimantation, comme limite de la fonction de corrélation spin-spin lorsque la séparation des spins  $r = |k-l|$  est grande :

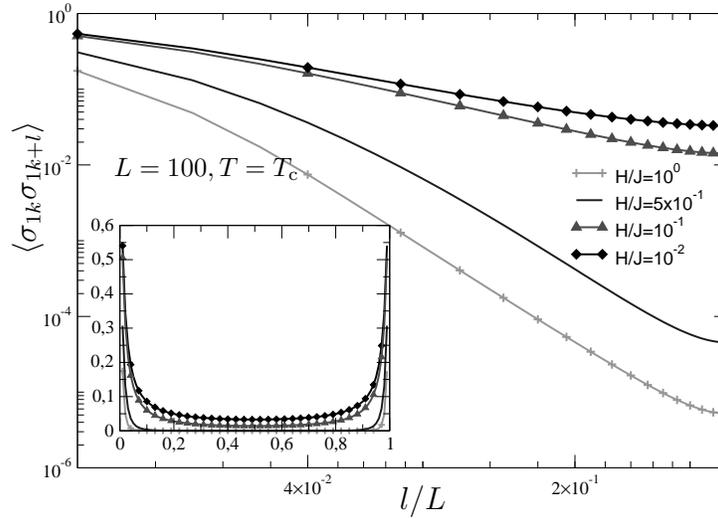
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle = m^2. \quad (2.105)$$

Pour obtenir la contribution dominante de l'expression (2.102), au voisinage de  $T_c$ , on utilise les expressions des coefficients (2.91) pour calculer  $Z_{q+\frac{1}{2}}(0)$  dans (2.102). On développe ensuite les différentes quantités autour de  $t_c = \sqrt{2} - 1$ , dans la phase basse température ( $t > t_c$ ). On écrit tout d'abord la fonction de corrélation spin-spin comme une intégrale :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle = \frac{2t}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin(\theta) \sqrt{R(\theta)}}{S(\theta)} \sin(\theta r), \quad (2.106)$$



(a)  $L = 100, H/J = 0.1$  et différentes températures



(b)  $L = 100, T = T_c$  et différents champs magnétiques

FIG. 2.4 – Fonctions de corrélation spin-spin au bord ( $L_x = L_y = L$ ) en échelle logarithmique. Encart : même courbes en échelle linéaire.

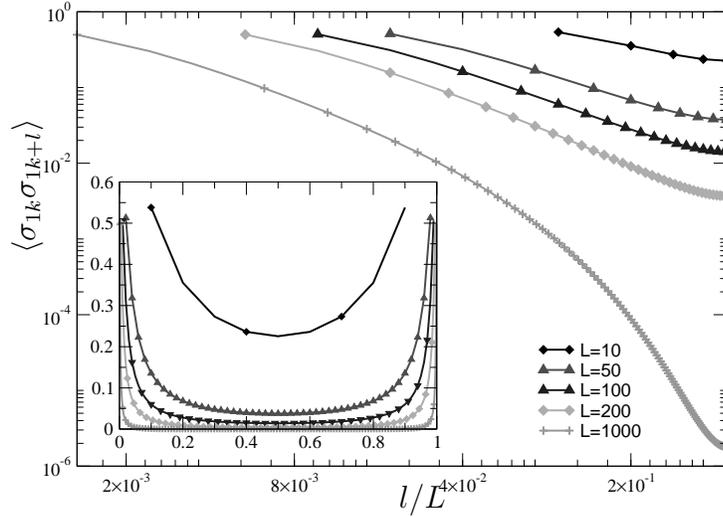


FIG. 2.5 – Fonctions de corrélation spin-spin au bord en échelle logarithmique, pour  $T = T_c$ ,  $H/J = 0.1$  et différentes tailles  $L$ . Encart : même courbes en échelle linéaire.

avec la fonction  $S(\theta)$  définie par

$$S(\theta) = \frac{1}{4} \left[ \sqrt{R(\theta)} + (1+t^2)(1-2t \cos \theta - t^2) \right]^2 + 4t^4 \sin^2 \theta. \quad (2.107)$$

En notant  $\Delta t = t - t_c$ , on développe  $R$  et  $S$  pour  $\Delta t \ll 1$  et  $\theta \ll 1$ , puisque c'est la région qui donne la contribution principale à l'intégrale. Pour  $R$ , on obtient le développement suivant :

$$\begin{aligned} \sqrt{R(\theta)} &= \Delta t (1+t_c^2)(1+t_c+\sqrt{2}) \left[ 1 + \frac{t_c(1-t_c^2)}{2(1+t_c+\sqrt{2})} \tilde{\theta}^2 + \dots \right], \\ &= \Delta t (R_0 + R_2 \tilde{\theta}^2 + \dots), \end{aligned}$$

où l'on définit  $\tilde{\theta} \Delta t = \theta$ ,  $R_0 = (1+t_c^2)(1+t_c+\sqrt{2})$  et  $R_2 = t_c(1-t_c^4)/2$ . Pour  $S$  le même développement conduit à :

$$S(\theta) = \Delta t^2 \left( S_0 + S_2 \tilde{\theta}^2 + \dots \right),$$

avec  $S_0 = 16(3-2\sqrt{2}) \simeq 2.745$  et  $S_2 = 4t_c^4 \simeq 0.118$ . Le comportement près de  $T_c$  de la fonction de corrélation à deux points est donné par l'intégrale suivante :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle \sigma_{1k} \sigma_{1l} \rangle \simeq \frac{2t\Delta t}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{x R_0}{S_0 (r\Delta t)^2 + S_2 x^2} \sin x, \quad (2.108)$$

$$\simeq R_0 \frac{t\Delta t}{S_2} e^{-\sqrt{\frac{S_0}{S_2}} r \Delta t}. \quad (2.109)$$

Pour  $r\Delta t$  suffisamment petit, on a donc

$$m \propto (t - t_c)^{1/2}. \quad (2.110)$$

l'exposant critique ainsi obtenu pour l'aimantation au bord est  $\beta = 1/2$  : on note que cette valeur correspond à un exposant de type champ moyen. On peut de la même manière évaluer  $\langle \sigma_{1k} \rangle$  à  $T_c$  et à champ faible. En effet, en utilisant (2.99), on a dans ces conditions :

$$\langle \sigma_{1k} \rangle \simeq u \langle H_k L_k \rangle = \frac{ut}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{(1 + \cos \theta) \sqrt{R(\theta)}}{S(\theta) + 2tu^2(1 + \cos \theta) \sqrt{R(\theta)}}. \quad (2.111)$$

D'autre part, à  $t_c$ , les fonctions  $R$  et  $S$  s'écrivent

$$\begin{aligned} R(\theta) &= 16C_0(1 - \cos \theta)(3 - \cos \theta), \\ S(\theta) &= 8C_0(1 - \cos \theta) \left[ 3 - \cos \theta + \sqrt{2(1 - \cos \theta)(3 - \cos \theta)} \right], \end{aligned}$$

avec  $C_0 = 17 - 12\sqrt{2} \simeq 0.0294$ . Là encore, la contribution principale à (2.111) provient de  $\theta \ll 1$ , où le dénominateur est petit. Dans ce cas nous avons  $\sqrt{R(\theta)} \simeq 4\sqrt{C_0}\theta$  et  $S(\theta) \simeq 8C_0\theta^2$ . En insérant ces expressions dans (2.111), la limite  $u \ll 1$  conduit à :

$$\langle \sigma_{1k} \rangle \simeq \frac{ut}{\pi} \int_0^\pi d\theta \frac{1}{\sqrt{C_0}\theta + 2tu^2} \simeq -\frac{2t}{\pi\sqrt{C_0}} u \log u. \quad (2.112)$$

Les deux résultats obtenus dans la limite thermodynamique, l'aimantation (2.110) et la moyenne (2.112), sont identiques à ceux obtenus par McCoy et Wu [McCoy et Wu 1973].

## 2.7 Conclusion

La méthode présentée dans cette partie est une généralisation de la méthode de Plechko. En donnant un rôle central à la représentation de la fonction de partition par une algèbre de Grassmann, elle permet d'obtenir une expression générale pour la fonction de partition, au moyen d'une action gaussienne unidimensionnelle (2.82), valable pour toute configuration du champ magnétique. En nous limitant au cas d'un champ homogène, nous avons vu que l'on peut obtenir l'énergie libre du système, valable pour toute taille du système, toute amplitude du champ magnétique et toute température (2.86). D'autre part il est possible de calculer les fonctions de corrélation spin-spin de bord (2.100), pour toutes les valeurs des paramètres. Dans la limite thermodynamique, la comparaison avec les résultats de McCoy et Wu permet d'assurer la validité de cette méthode.

Cette méthode peut désormais être utilisée pour traiter des configurations de champs magnétiques plus complexes, et encore non résolues exactement par d'autres méthodes. Dans le chapitre suivant, nous appliquerons cette méthode à un problème physique, faisant intervenir le champ magnétique inhomogène le plus simple.



# Chapitre 3

## Application à l'étude d'une transition de mouillage

**But du chapitre :** *On cherche à utiliser la méthode précédente pour étudier une transition de type mouillage, induite par un défaut du champ magnétique au bord. La configuration de ce champ constitue en effet le cas inhomogène le plus simple. À partir des grandeurs thermodynamiques ainsi obtenues, on veut décrire le diagramme de phase du système.*

### 3.1 Les transitions de mouillage

Une des applications usuelles du modèle d'Ising est l'étude des interfaces entre deux domaines d'aimantations opposées. Ce genre d'étude dépasse le simple cadre des systèmes magnétiques, puisque que le modèle d'Ising peut être vu comme un modèle de gaz sur réseau [Goldenfeld 1992], où les spins  $+1$  représentent par exemple une goutte de liquide et les spins  $-1$  un bulle de vapeur, les deux phases interagissant uniquement à courte portée. Il s'agit là bien évidemment d'une forte limitation à la généralisation aux fluides réels, puisque dans ces derniers les interactions à longue portée type Van der Waals jouent un rôle important dans tous les problèmes d'interface. L'utilisation des modèles de gaz sur réseau présente néanmoins l'avantage de pouvoir utiliser tout l'arsenal numérique développé pour les systèmes magnétiques [Landau et al. 2000], ainsi que les méthodes telles que la théorie du champ moyen ou les études d'échelles [Nakanishi et Fisher 1983].

Quoiqu'il en soit l'étude *per se* du développement d'interfaces dans les domaines magnétiques est devenue, depuis les années 70, un thème de recherche actif tant théorique que numérique. Sur le plan théorique, une avancée majeure a été faite par D.B. Abraham à la fin des années 70. En utilisant une approche par la matrice de transfert et les algèbres de spineurs, Abraham est parvenu à résoudre le modèle d'Ising 2d en imposant différentes conditions au bord fixes [Abraham 1978b, Abraham 1978c, Abraham 1978a]. Il a ainsi pu considérer le cas d'un réseau d'Ising dans lequel on fixe les spins sur deux bords opposés (ce qui est équivalent

à imposer des champs magnétiques infinis sur les bords), et ainsi étudier le développement d'une interface parallèle aux bords fixes [Abraham 1980]. De nombreuses études ont alors suivi [Forgacs et al. 1988, Ebner et al. 1990, Maciolek et Stecki 1996, Abraham et al. 2004]. En particulier, certains résultats ont été obtenus dans le cas où, sur un bord, les spins sont contraints à une orientation sur une partie et dans la direction opposée sur l'autre partie [Abraham 1982, Abraham 1984] : dans ce cas, le point de changement de direction sur le bord est une sorte de défaut qui sert d'encrage à une interface. Cette dernière se développe cette fois perpendiculairement au bord.

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode développée au chapitre précédent pour résoudre exactement, sur réseau, le cas où l'on impose un champ magnétique **fini** changeant d'orientation sur un des bords. Nous verrons que l'on peut ainsi décrire une transition du premier ordre au cours de laquelle une interface se développe, perpendiculairement au bord.

## 3.2 Modèle étudié

Le modèle étudié dans cette partie décrit le mouillage induit par un défaut sur le champ magnétique au bord.

### 3.2.1 Notations

On considère un modèle d'Ising bidimensionnel sur un réseau carré, avec la même constante de couplage  $J$  dans les deux directions du réseau. Le système (voir Fig.3.1) est de taille  $L_x \times L_y$ . Comme dans la partie précédente, on choisit des conditions aux limites périodiques suivant la direction  $n$  et libre dans la direction  $m$ . Enfin, le champ magnétique imposé au bord présente une interface entre le site  $(1, l)$  et le site  $(1, l + 1)$ . Il est défini par :

$$h_n = \begin{cases} +h & \text{pour } 1 \leq n \leq l \\ -h & \text{pour } l + 1 \leq n \leq L_y. \end{cases} \quad (3.1)$$

Le hamiltonien de ce système s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -J \sum_{m,n=1}^{L_x, L_y} (\sigma_{mn} \sigma_{m+1n} + \sigma_{mn} \sigma_{mn+1}) - \sum_{n=1}^{L_y} h_n \sigma_{1n}, \\ &= -J \sum_{m,n=1}^{L_x, L_y} (\sigma_{mn} \sigma_{m+1n} + \sigma_{mn} \sigma_{mn+1}) - h \left( \sum_{n=1}^l \sigma_{1n} - \sum_{n=l+1}^{L_y} \sigma_{1n} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Il est donc possible d'étudier ce système avec la méthode présentée au chapitre 2.

### 3.2.2 Étude à température nulle

Toutefois, avant de se lancer dans la résolution exacte de ce modèle, il est utile de comprendre la physique que l'on s'attend à décrire, en faisant un raisonnement à température

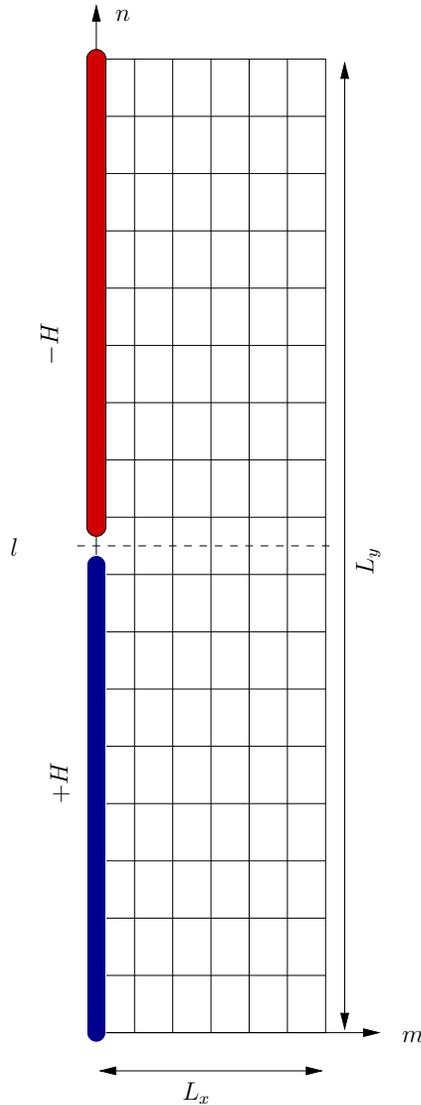


FIG. 3.1 – Description du modèle pour le mouillage.

nulle, où aucun effet entropique n'intervient.

Considérons tout d'abord le cas où le rapport d'aspect du réseau vaut 1 :  $L_x = L_y$ . À température nulle et en l'absence de champ magnétique au bord, pour une réalisation du réseau d'Ising, l'aimantation totale vaut  $\pm 1$  : tous les spins sont orientés dans la même direction. Si on ajoute le champ magnétique (3.8), on facilite l'orientation de chacun des spins du bord dans le sens de ce champ : pour une partie des spins, celle où l'aimantation totale et le champ sont de même signe, ce champ ne fait que renforcer l'orientation présente en champ nul. Par contre pour l'autre partie du bord, où le champ magnétique est opposé à l'aimantation totale, cet effet d'orientation est défavorisé, à champ magnétique suffisamment faible (voir figure

3.3(a)). Dans ce régime, on s'attend donc à un coût énergétique  $\sigma_{\text{int}}$  dû au champ :

$$\sigma_{\text{int}} = HL_y. \quad (3.3)$$

Si l'on augmente progressivement l'amplitude du champ, on atteint finalement une valeur du champ magnétique  $H_s$ , où il est énergétiquement favorable pour le système de céder à l'effet d'orientation du champ magnétique : on frustre alors le lien ferromagnétique entre les spins  $\sigma_{n1}$  et  $\sigma_{n2}$ , pour  $1 \leq n \leq l$ , comme figuré sur 3.3(b). Un rapide bilan énergétique conduit à la valeur du champ seuil  $H_s$  :

$$H_s = J \left( 1 + \frac{4}{L_y} \right). \quad (3.4)$$

Le coût énergétique de cette interface est alors :

$$\sigma_{\text{int}} = H_s L_y. \quad (3.5)$$

Toutefois l'interface ainsi créée, parallèle à la ligne de champ magnétique, n'est pas forcément stable. En effet, si on autorise  $L_x \neq L_y$ , il peut être énergétiquement favorable pour le système de déplacer cette interface pour en créer une perpendiculaire à la ligne de champ, entre les spins  $\sigma_{ml}$  et  $\sigma_{ml+1}$ , pour  $1 \leq m \leq L_x$ , suivant la valeur du rapport d'aspect  $\zeta = L_x/L_y$  et l'amplitude du champ magnétique. Une fois encore, un simple bilan énergétique conduit à l'expression du rapport d'aspect seuil :

$$\zeta_s = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2}{L_y} \right). \quad (3.6)$$

On note que  $\zeta_s \rightarrow 1/4$  dans la limite thermodynamique : cette valeur est directement reliée aux conditions aux bords périodiques dans la direction  $n$ . Si l'on avait des conditions libres dans cette direction, on trouverait  $1/2$  au lieu de  $1/4$ . L'interprétation physique de cette valeur du rapport d'aspect est facilitée par l'étude de la fonction de corrélation spin-spin au bord, dans le cas où  $L_x \neq L_y$ . Il s'agit d'une simple généralisation du calcul présenté dans le chapitre précédent. Le résultat, présenté sur la figure 3.2, met en évidence le cross-over obtenu en faisant varier le rapport d'aspect du réseau : pour  $L_x \ll L_y$ , on trouve une décroissance exponentielle des corrélations. Puis si l'on augmente le rapport d'aspect, ce comportement exponentiel s'atténue pour laisser la place à une décroissance beaucoup plus lente des corrélations. Le passage entre un comportement type 1d et un comportement type 2d se produit pour  $\zeta \simeq 1/4$ .

Si  $\zeta < \zeta_s$ , le champ seuil dépend du rapport d'aspect du réseau :

$$H_s (\zeta < \zeta_s) = 4\zeta J. \quad (3.7)$$

Ainsi si  $\zeta < \zeta_s$ , pour  $H > H_s$ , on s'attend à trouver la situation décrite sur la figure 3.3(c). On obtient alors deux domaines d'aimantations opposées, séparés par une interface. L'aimantation totale du système est donc nulle.

Donc à température nulle, pour  $\zeta < \zeta_s$ , on s'attend à observer une transition entre une

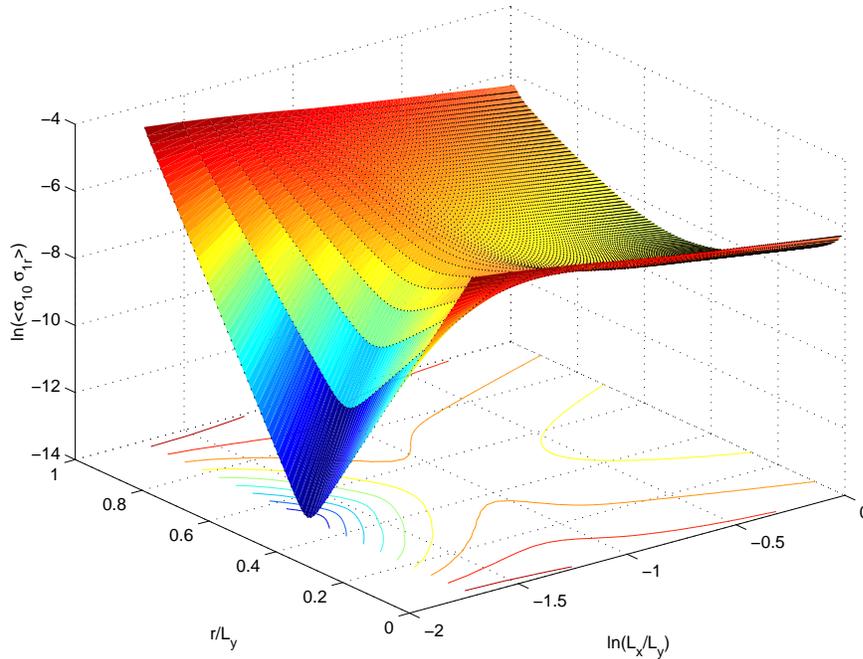


FIG. 3.2 – Fonction de corrélation au bord, pour  $T = 2J$ ,  $H/J = 0.1$  et différents rapports d’aspect. Noter que le crossover entre un comportement type 1d et un comportement type 2d se fait au passage de  $\zeta = 1/4$ .

phase d’aimantation non nulle, pour  $H < H_s(\zeta)$ , et une phase d’aimantation nulle pour  $H > H_s(\zeta)$ . À température nulle, cette transition est du premier ordre, car le paramètre d’ordre est discontinu au passage de la transition. Malgré les nombreuses études consacrées au problème du mouillage dans le modèle d’Ising, ce cas-là n’a semble-t-il pas encore été résolu exactement. Cela tient sans doute à la difficulté à traiter analytiquement les conditions au bord inhomogènes. Il s’agit par contre d’un problème accessible par la méthode présentée au chapitre précédent.

## 3.3 Étude analytique

### 3.3.1 Principe

La résolution analytique de ce problème est un simple cas particulier de l’étude précédente. L’idée est d’essayer de se ramener au cas du champ homogène, afin de clairement séparer la contribution du “défaut” sur le bord.

Pour cela, il faut remarquer que les actions  $\mathcal{S}_{\text{bulk}}$  (2.44) et  $\mathcal{S}_{\text{int}}$  (2.45) ne dépendent pas de

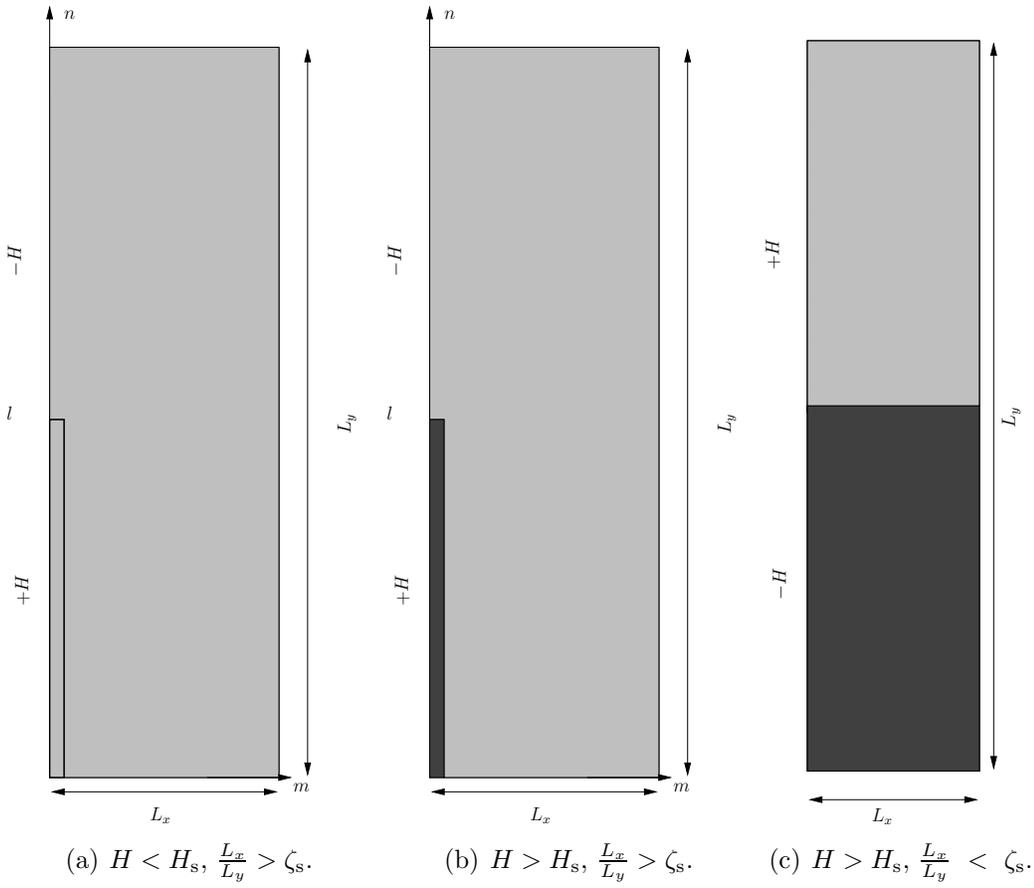
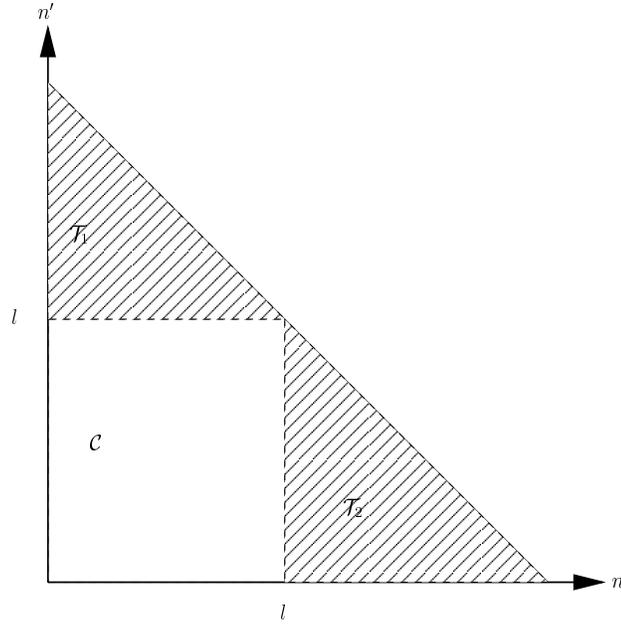


FIG. 3.3 – Configurations du réseau à température nulle, sous différentes conditions.


 FIG. 3.4 – Définition des domaines  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}_2$ .

la configuration du champ magnétique au bord, puisque<sup>31</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{bulk}} &= \sum_{mn=1}^L (\mathbb{Q}_{mn}^p + a_{mn}a_{mn}^* + b_{mn}b_{mn}^*), \\ \mathcal{S}_{\text{int}} &= \sum_{n=1}^L H_n^* \mathbb{L}_n + \sum_{n=1}^L H_n t_1 a_{Ln}^*. \end{aligned}$$

La seule dépendance en la configuration provient d'une partie de l'action propre au champ  $\mathcal{S}_{\text{field}}$  (2.46) :

$$\mathcal{S}_{\text{field}} = \underbrace{\sum_{m<n} u_m u_n H_m H_n}_{\text{Seule dépendance en } h_n} + \sum_{n=1}^L H_n H_n^*.$$

Ainsi l'étude des différentes conditions de champs magnétiques au bord se réduit à l'étude de la somme ordonnée  $\sum_{m<n} u_m u_n H_m H_n$ .

Dans le cas considéré ici, on a :

$$u_m u_n = \begin{cases} -u^2 & \text{pour } (m, n) \in \mathcal{T}_1, \\ +u^2 & \text{pour } (m, n) \in \mathcal{C}, \\ -u^2 & \text{pour } (m, n) \in \mathcal{T}_2, \end{cases} \quad (3.8)$$

<sup>31</sup>On rappelle les notations suivantes :  $u_n = \tanh \beta h_n$ ,  $t_1 = \tanh \beta J_1$  et  $t_2 = \tanh \beta J_2$ .

où  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{T}_2$  sont définis sur la figure 3.4. Si on note  $\mathcal{D} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{T}_2$ , on a alors la relation :

$$\sum_{(m,n) \in \mathcal{D}} u_m u_n H_m H_n = u^2 \sum_{(m,n) \in \mathcal{D}} H_m H_n - 2u^2 \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}_1} H_m H_n, \quad (3.9)$$

en utilisant l'anticommutation de  $H_m$  et  $H_n$ . C'est cette relation (3.9) qui permet de se ramener au cas d'un champ homogène. La solution exacte de ce modèle est donc facile à obtenir.

### 3.3.2 Fonction de partition

Une fois l'intégration sur les variables de bulk effectuée, l'action 1d  $\mathcal{S}_{1d}$  du modèle s'écrit, en utilisant (3.9) :

$$\mathcal{S}_{1d} = \mathcal{S}_h(u) - 2u^2 \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}_1} H_m H_n, \quad (3.10)$$

où  $\mathcal{S}_h$  est l'action 1d correspond à un modèle avec champ magnétique au bord d'amplitude  $h$ . La fonction de partition du modèle avec une interface au bord entre le site  $(1, l)$  et le site  $(1, l + 1)$  s'écrit alors :

$$\mathcal{Q}(h, l) = \mathcal{Q}_0 \int \mathcal{D}H \mathcal{D}\bar{H} \exp \left( \mathcal{S}_h(u) - 2u^2 \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}_1} H_m H_n \right). \quad (3.11)$$

Toutes les quantités intervenant dans l'action étant quadratiques, on peut séparer l'exponentielle en produit de deux exponentielles. D'autre part, pour toute paire<sup>32</sup> de variables de Grassmann  $(a, b)$ , on a

$$e^{ab} = 1 + ab.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(h, l) &= \mathcal{Q}_0 \int \mathcal{D}H \mathcal{D}\bar{H} \left( 1 - 2u^2 \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}_1} H_m H_n \right) e^{\mathcal{S}_h(u)}, \\ &= \mathcal{Q}(h) - 2u^2 \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}_1} \mathcal{Q}_0 \int \mathcal{D}H \mathcal{D}\bar{H} H_m H_n e^{\mathcal{S}_h(u)}, \\ &= \mathcal{Q}(h) \left( 1 - 2u^2 \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}_1} \langle H_m H_n \rangle_{\mathcal{S}_h(u)} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les fonctions de corrélation à deux points  $\langle H_m H_n \rangle_{\mathcal{S}_h(u)}$  sont celles que l'on a calculées au chapitre précédent (2.102). On obtient alors la fonction de partition du modèle :

---

<sup>32</sup>Ce développement est en fait valable si  $a$  et  $b$  sont des combinaisons linéaires de variables de Grassmann.

$$\frac{\mathcal{Q}(h,l)}{\mathcal{Q}(h)} = 1 + \frac{4u^2}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \frac{i\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2D}}{Z_{q+\frac{1}{2}}(u)} \frac{\sin \theta_{q+\frac{1}{2}} l}{1 - \cos \theta_{q+\frac{1}{2}}}. \quad (3.13)$$

Les coefficients  $\gamma^{2D}$  et  $Z_{q+\frac{1}{2}}(u)$  sont respectivement définis par les relations (2.78) et (2.85). Ce calcul illustre bien l'intérêt de la méthode : une fois le cas du champ homogène résolu, l'extension à ce cas inhomogène est simple. D'autre part le fait d'obtenir le rapport  $\mathcal{Q}(h,l)/\mathcal{Q}(h)$  permet d'accéder directement à la correction due au défaut sur le bord.

### 3.3.3 Énergie libre

L'équation (3.13) conduit immédiatement à la contribution énergétique du changement d'orientation du champ, qu'on appellera dans la suite tension interfaciale :

$$-\beta\sigma_{\text{int}} = \ln \left( 1 + 4u^2 \frac{1}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \frac{i\gamma_{q+\frac{1}{2}}^{2D}}{Z_{q+\frac{1}{2}}(u)} \frac{\sin \theta_{q+\frac{1}{2}} l}{1 - \cos \theta_{q+\frac{1}{2}}} \right), \quad (3.14)$$

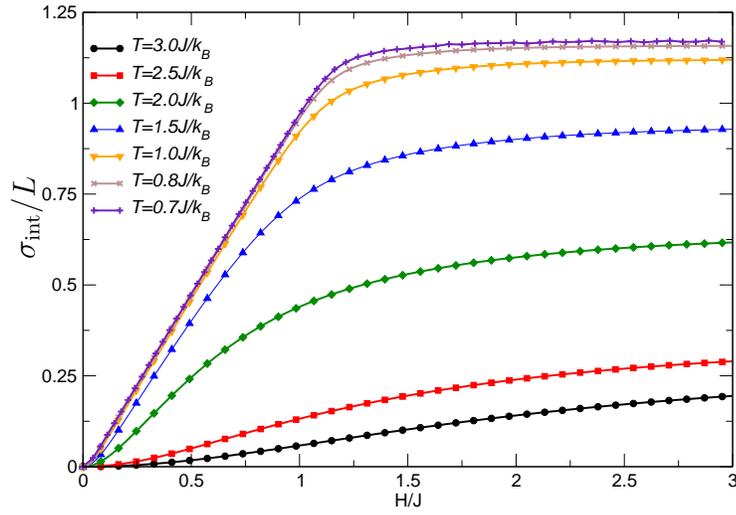
qui s'ajoute à la contribution (2.86) pour donner l'énergie libre totale du système. La seule dépendance en la position de l'interface étant en  $\sin \theta_{q+\frac{1}{2}} l$ , l'effet de l'interface est maximal pour  $l = L_y/2$  (si  $L_y$  est pair). On a alors  $\sin \theta_{q+\frac{1}{2}} l = (-1)^q$ . Dans la suite de ce chapitre nous nous limiterons à cette position de l'interface.

Les courbes présentées sur la figure (3.5(a)) sont les valeurs de l'énergie  $\sigma_{\text{int}}/L_y$ , pour différentes températures, dans le cas  $L_x = L_y$ . On constate que lorsque la température diminue, on distingue deux régimes : dans un premier temps, à champ faible,  $\sigma_{\text{int}}/L_y$  varie linéairement avec  $H/J$ , avec un coefficient de proportionnalité égal à un, puis dans un second temps,  $\sigma_{\text{int}}/L_y$  sature à une valeur  $\sigma_{\text{int}}/L_y \simeq 1.2$ . Ce comportement est en accord avec les résultats de l'étude à température nulle, où l'on trouvait  $H_s(L_x = L_y = 20) \simeq 1.2J$ . Dans le cas d'un réseau  $L_x \times L_x$ , avec  $L_x \gg 1$ , le comportement à basse température et champ faible peut être obtenu à partir de (3.14), qui s'écrit dans ces conditions :

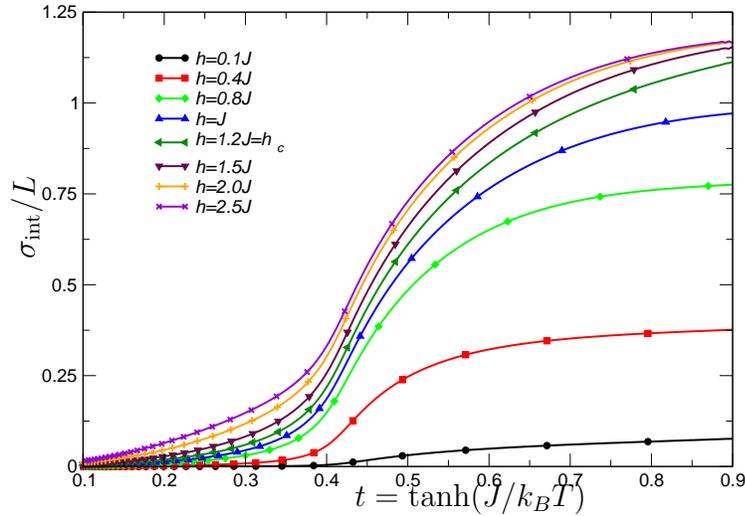
$$-\beta\sigma_{\text{int}} = \ln \left( 1 - \frac{16tu^2}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} (-1)^q \cot(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2) \times \frac{1}{(1+t^2)(1-2t \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} - t^2) + 4tu^2(1 + \cos \theta_{q+\frac{1}{2}}) + \sqrt{R(\theta_{q+\frac{1}{2}})}} \right), \quad (3.15)$$

avec la fonction  $R$  définie en (2.90) :

$$R(\theta) = [(1+t^2)^2 + 2t(1-t^2)(1-\cos\theta)] [(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(1+\cos\theta)].$$



(a) Dépendance en  $H$ , pour différentes températures. Noter la transition pour  $h = h_c$ , correspondant au renversement de la moitié des spins du bord.



(b) Dépendance en la température pour différentes valeurs du champ magnétique.

FIG. 3.5 – Énergie libre  $\sigma_{\text{int}}$  dans le cas où  $L_x = L_y = 20$ ,  $H_s = 1.2J$ .

En faisant un développement à  $H/J \ll 1$  et  $T/J \ll 1$ , c'est-à-dire en posant  $t \simeq 1$  et  $u \simeq 1 - 2 \exp(-2\beta h)$ , l'énergie libre  $\sigma_{\text{int}}$  devient :

$$-\sigma_{\text{int}} \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 - 4u^2 \frac{1}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \frac{(-1)^q \cot(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2)}{(1+u^2) - (1-u^2) \cos \theta_{q+\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.16)$$

La somme contenue dans cet équivalent peut être évaluée exactement dans ce cas-là en utilisant encore une fois le système 1d équivalent.

Considérons donc une chaîne d'Ising classique, à la température  $T$ , de longueur  $L$  supposée paire, sur laquelle on applique un champ magnétique  $+h$  pour les sites situés entre 1 et  $L/2$ , et  $-h$  entre  $L/2 + 1$  et  $L$ . Ce problème se résout par la méthode de la matrice de transfert pour conduire à l'expression de l'énergie libre suivante :

$$\begin{aligned} -\beta \sigma_{\text{int}}^{\text{1D}} &= -\ln[(1-t)^2 + 4tu^2] \\ &+ \ln \left( (1-t)^2 + \frac{8tu^2[4t(1-u^2)]^{L/2}}{(1+t - \sqrt{(1-t)^2 + 4tu^2})^L + (1+t - \sqrt{(1-t)^2 + 4tu^2})^L} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si on étudie le même système, cette fois au moyen des variables de Grassmann (comme au chapitre 2), on obtient :

$$-\beta \sigma_{\text{int}}^{\text{1D}} = \ln \left( 1 - \frac{8tu^2}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \frac{(-1)^q \cot(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2)}{1+t^2 - 2t \cos(\theta_{q+\frac{1}{2}}) + 4tu^2 \cos(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2)^2} \right). \quad (3.18)$$

Les deux expressions (3.17) et (3.18) étant nécessairement égales, on trouve la formule utile suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \sum_{q=0}^{L/2-1} \frac{(-1)^q \cot(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2)}{1+t^2 - 2t \cos(\theta_{q+\frac{1}{2}}) + 4tu^2 \cos(\theta_{q+\frac{1}{2}}/2)^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1-t)^2 + 4tu^2} \\ &- \frac{[4t(1-u^2)]^{L/2}}{\left(1+t + \sqrt{(1-t)^2 + 4tu^2}\right)^L + \left(1+t - \sqrt{(1-t)^2 + 4tu^2}\right)^L}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dans le cas particulier où  $t = 1$ , on peut alors écrire la formule (3.15) sous la forme :

$$\sigma_{\text{int}} \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-1}{\beta} \ln \left( \frac{2(1-u^2)^{L/2}}{(1-u)^L + (1+u)^L} \right) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} hL. \quad (3.20)$$

On retrouve bien le comportement à champ faible que l'on avait décrit à température nulle (3.3).

## 3.4 Étude de la transition

Nous allons à présent étudier l'effet de l'interface sur le bord sur le comportement thermodynamique du système, à température non nulle. Dans un premier temps nous utiliserons l'expression de l'énergie interfaciale  $\sigma_{\text{int}}$  (3.14) pour regarder le comportement d'un système et obtenir l'allure du diagramme de phase. Dans un second temps nous confirmerons la nature de la transition par l'étude de  $\sigma_{\text{int}}$  dans la limite thermodynamique.

### 3.4.1 Système de taille finie

L'énergie libre  $\sigma_{\text{int}}$  peut être évaluée numériquement pour les systèmes de taille finie. Cependant, lorsque la taille augmente, il apparaît un problème numérique :  $\sigma_{\text{int}}$  contient en effet une somme alternée, c'est-à-dire la différence de sommes. Quand la taille du système augmente, chacune de ces sommes augmentent, mais leur différence reste petite. C'est ce qui pose un problème pour calculer  $\sigma_{\text{int}}$  à partir de (3.14) pour des systèmes de grande taille. Pour une taille suffisamment petite, on peut calculer numériquement  $\sigma_{\text{int}}$  et par dérivation numérique, obtenir la contribution de  $\sigma_{\text{int}}$  à l'entropie totale et à la chaleur spécifique totale du système. Puisque toute l'information concernant le détail de la configuration du champ au bord est contenue dans  $\sigma_{\text{int}}$ , on doit pouvoir détecter la transition de mouillage dans ces quantités. Les isothermes correspondantes sont présentées sur la figure 3.6.

Le pic qui apparaît dans la contribution à la chaleur spécifique, sur la figure 3.6(b), est associé à la transition de mouillage : à température constante, on attend une valeur seuil pour le champ magnétique pour laquelle les spins sur le bord s'orientent dans le sens du champ. La valeur du seuil  $H_s$  dépend de la température, comme on le voit sur les courbes 3.7. En particulier on trouve qu'à basse température,  $H_s$  se rapproche de  $H_s(0)$  défini en (3.4). Dans le plan  $(T, H)$ , le lieu des maxima de susceptibilité est donné par l'équation  $H_s(T) \propto \sqrt{T_w(L_y) - T}$ . Une étude en fonction de  $L_y$  permet d'établir que  $T_w(L_y)$  se rapproche de  $T_c$  quand  $L_y$  augmente. La loi d'échelle obtenue est :

$$T_c - T_w(L_y) \propto L_y^{-1/\delta}, \quad (3.21)$$

avec  $\delta \simeq 3.0$ . On trouve une fois encore un exposant de champ moyen associé à cet effet de bord. Sur les figures 3.7, on observe une vallée, pour  $T > T_c$ , correspondant à une contribution négative à la chaleur spécifique totale du système. Cela indique que dans cette région, la présence du champ magnétique au bord réduit les fluctuations des spins : cela s'explique par le fait que comme dans la phase paramagnétique les corrélations entre les spins sont faibles, les spins du bord s'orientent dans le sens du champ et fluctuent moins que si le champ magnétique était nul. En fait ce minimum de chaleur spécifique est déjà présent dans le cas d'un champ magnétique homogène et n'est donc pas associé à la transition qui nous intéresse ici.

Ces observations conduisent naturellement au diagramme de phase du système, représenté sur la figure 3.8. On obtient une ligne de transition du premier ordre, qui se termine, dans la limite thermodynamique, par un point critique. Cette situation est tout à fait analogue à celle de la transition liquide/gaz. Il faut noter que pour un système de taille finie, la ligne

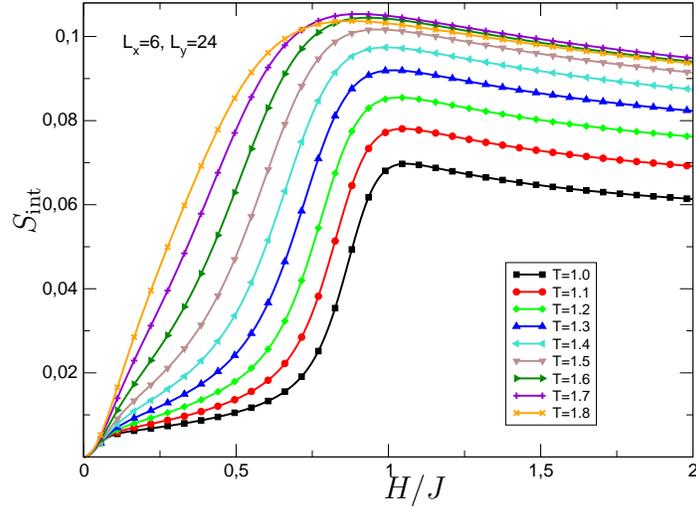
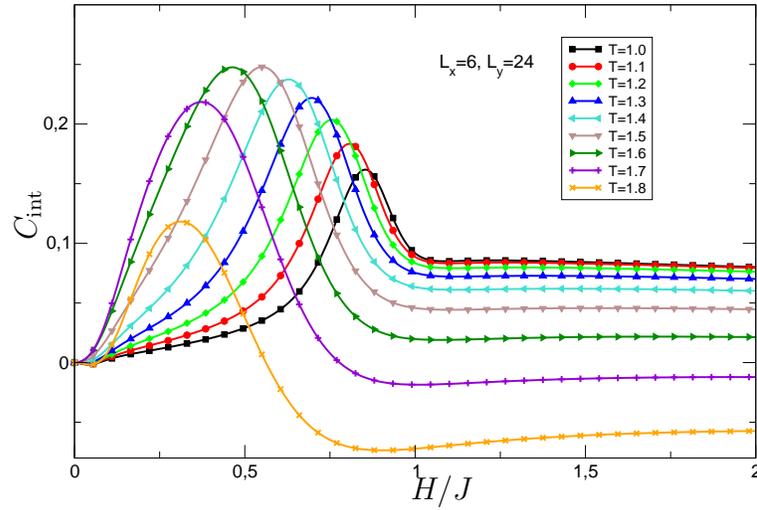
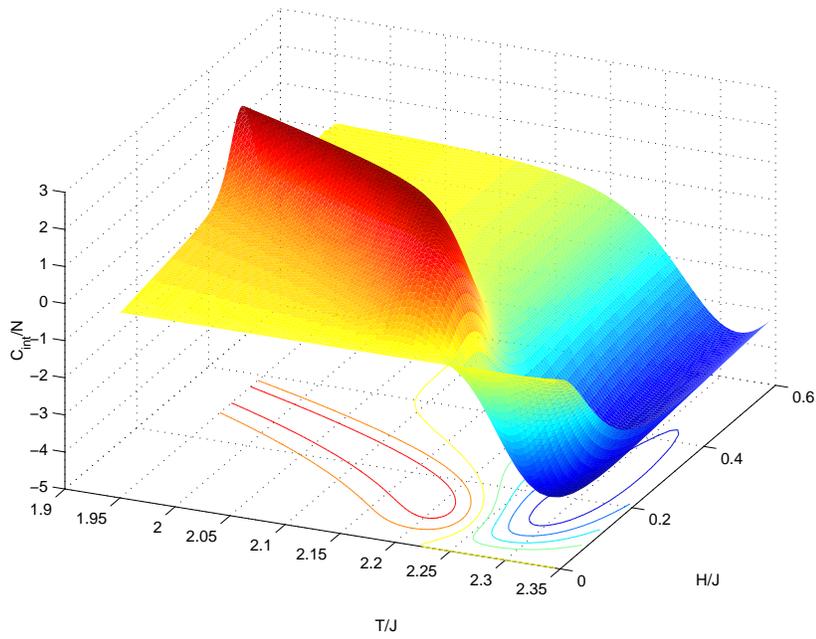
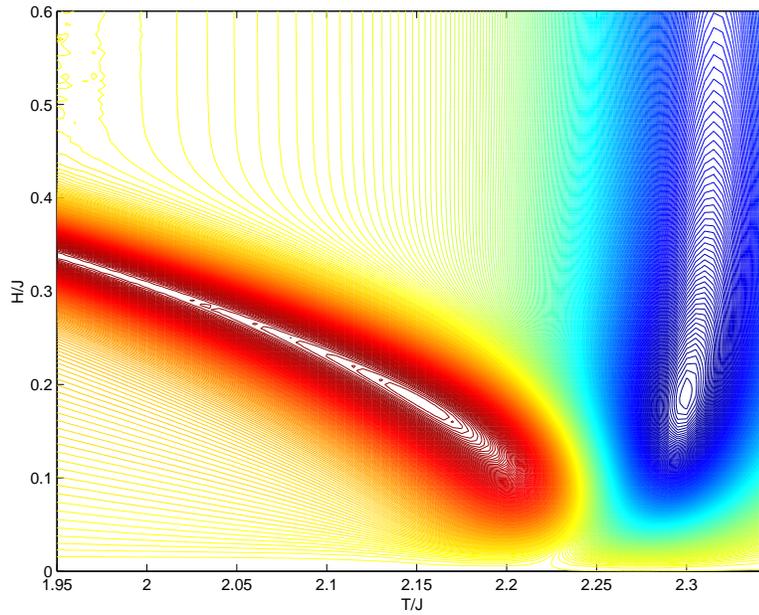
(a) Contribution entropique due à  $\sigma_{\text{int}}$ (b) Contribution à la chaleur spécifique de  $\sigma_{\text{int}}$ .

FIG. 3.6 – Contributions à l'entropie et à la chaleur spécifique dues à  $\sigma_{\text{int}}$ , pour  $J_1 = J_2$ ,  $L_x = 6$  et  $L_y = 24$ .



(a) Évolution de la contribution de  $\sigma_{\text{int}}$  à la chaleur spécifique, en fonction de  $T/J$  et  $H/J$ .



(b) Lignes de niveaux de la contribution à la chaleur spécifique de  $\sigma_{\text{int}}$  dans le plan  $(T/J, H/J)$ .

FIG. 3.7 – Contribution à la chaleur spécifique due à  $\sigma_{\text{int}}$ , pour  $L_x = 40$ ,  $L_y = 200$  et  $J_1 = J_2$ .

de transition du premier ordre n'atteint pas la ligne  $H = 0$ , comme on le voit sur 3.7. Or pour un système de taille finie la fonction de partition n'a pas de zéro, et il ne peut donc pas y avoir de transition du second ordre. Dans ce cas la ligne de transition du premier ordre s'atténue, puis disparaît avant de toucher l'axe  $H = 0$ , comme on le voit sur les figures 3.7.

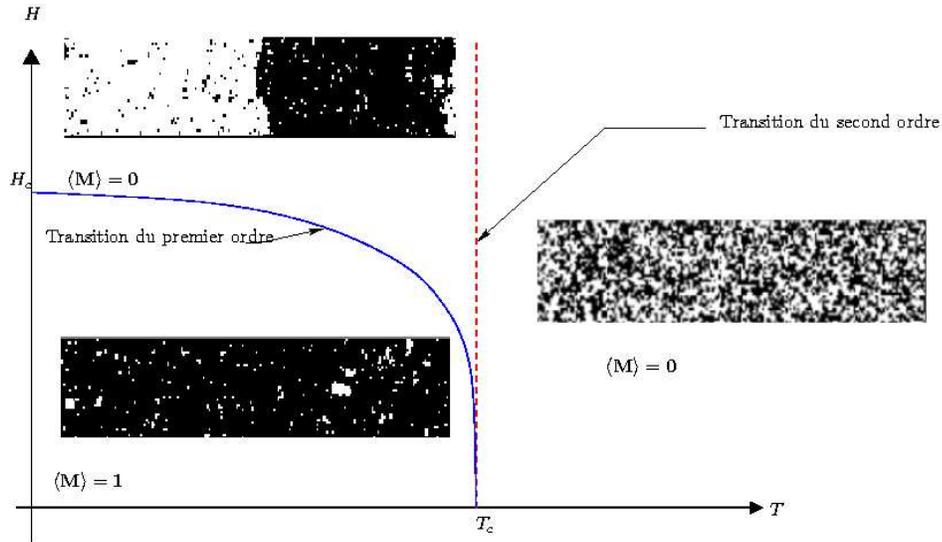


FIG. 3.8 – Diagramme de phase du système dans la limite thermodynamique. La ligne pointillée verticale indique la position de la transition de phase du second ordre dans le bulk. Les images superposées sont des configurations du réseau typiques, obtenues par simulation Monte Carlo.

### 3.4.2 Cas où $L_x \rightarrow \infty$ et $L_y \gg 1$ .

Dans un premier temps, nous allons considérer la situation où l'on prend d'abord la limite  $L_x \rightarrow \infty$ , en gardant  $L_y$  grand mais fini. Dans ces conditions, on peut utiliser directement l'expression (3.15), où les coefficients  $\gamma^{2d}$  et  $\Lambda$  ont été calculés dans cette limite. On cherche à établir le comportement à  $L_y \gg 1$ , en gardant la première correction due à la taille finie. La difficulté provient de la somme contenue dans (3.15), qui est de la forme :

$$S[f] = \frac{2}{L_y} \sum_{q=0}^{L_y/2-1} (-1)^q \cot\left(\frac{\theta_{q+\frac{1}{2}}}{2}\right) f(\cos(\theta_q)), \quad (3.22)$$

avec  $\theta_{q+\frac{1}{2}} = 2\pi(q + \frac{1}{2})/L$ , et avec la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{8tu^2}{(1+t^2)(1-2tx-t^2) + 4tu^2(1+x) + \sqrt{R(x)}}. \quad (3.23)$$

En utilisant la périodicité de  $f(\cos(\theta_{q+\frac{1}{2}}))$ , on peut étendre les bornes de la somme, suivant :

$$\begin{aligned} S[f] &= \frac{1}{2} \frac{2}{L_y} \sum_{q=0}^{L_y/2-1} (-1)^q \cot \left[ \frac{\pi}{L} \left( q + \frac{1}{2} \right) \right] f \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{L} \left( q + \frac{1}{2} \right) \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{2}{L_y} \sum_{q=L_y/2}^{L_y-1} (-1)^{L_y-1-q} \cot \left[ \frac{\pi}{L} \left( L_y - 1 - q + \frac{1}{2} \right) \right] f \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{L} \left( L_y - 1 - q + \frac{1}{2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

On obtient alors

$$S[f] = \frac{1}{L_y} \sum_{q=0}^{L_y-1} (-1)^q \cot \left[ \frac{\pi}{L} \left( q + \frac{1}{2} \right) \right] f \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{L} \left( q + \frac{1}{2} \right) \right) \right]. \quad (3.25)$$

D'autre part, on peut décomposer en série de Fourier la fonction  $f(\cos(\bullet))$  :

$$f(\cos(\theta_{q+\frac{1}{2}})) = \sum_{p=0}^{+\infty} C_p \cos(p\theta_{q+\frac{1}{2}}), \quad (3.26)$$

avec

$$C_p = \Re \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ipx} \right] = \Re(A_p). \quad (3.27)$$

Pour calculer  $S[f]$ , il suffit de calculer  $S[\cos(p\theta_{q+\frac{1}{2}})]$ , pour tout  $p$ . Pour cela on peut établir la relation de récurrence, en utilisant les formules trigonométriques :

$$S[\cos(p\bullet)] = S[\cos((p-1)\bullet)] - T_p - T_{p-1}, \quad (3.28)$$

avec

$$T_p = \frac{1}{L_y} \sum_{q=0}^{L_y-1} (-1)^q \sin(p\theta_{q+\frac{1}{2}}). \quad (3.29)$$

En fait les  $T_p$  sont nuls, sauf si il existe  $k$  entier tel que  $p = L_y/2 + kL_y$  : si c'est le cas  $T_{L_y/2+kL_y} = (-1)^k$ . La résolution de la relation de récurrence conduit à la relation

$$S[\cos(p\bullet)] = S[1] - T_p - 2\Sigma_p, \text{ avec } \Sigma_p = \sum_{k=1}^{p-1} T_k, \quad (3.30)$$

$$S[\cos(\bullet)] = S[1] - T_1, \quad (3.31)$$

avec de plus  $S[1] = 1$ . On obtient alors :

$$S[f] = C_0 + C_1(1 - T_1) + \sum_{p=2}^{+\infty} C_p (1 - T_p - 2\Sigma_p). \quad (3.32)$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} C_p - \sum_{p=0}^{+\infty} C_p T_p - 2 \sum_{p=2}^{+\infty} C_p \Sigma_p. \quad (3.33)$$

Un peu de combinatoire permet de montrer que  $\Sigma_p = 0$  sauf s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  et  $k' \in [1 \dots L_y - 1]$  tel que  $p = L_y/2 + 2kL_y + k'$ , où  $\Sigma_p = 1$ . En remarquant que  $\sum_{p=0}^{+\infty} C_p = f(1)$ , on obtient finalement :

$$S[f] = f(1) - \sum_{k=0}^{+\infty} C_{L_y/2+2kL_y} - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k'=1}^{L_y-1} C_{L_y/2+2kL_y+k'}. \quad (3.34)$$

Pour continuer le calcul, il faut connaître la forme des coefficients de Fourier  $C_p$  de la fonction  $f$ . En nous limitant au comportement à basse température, un développement à l'ordre 3 en  $t - 1$  du dénominateur de la fonction  $f$  conduit à

$$f(x) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{8u^2t}{a - bx}, \quad (3.35)$$

$$\text{avec } a = 4 \left( u^2 + t + \frac{1}{2}(1-t)^3 \right), \quad b = 4 \left( t - u^2 + \frac{1}{2}(1-t)^3 \right). \quad (3.36)$$

La fonction  $f$  ayant des pôles dans le plan complexe, les coefficients de Fourier  $A_p$  peuvent être obtenu par le théorème des résidus [Appel 2002]. On trouve alors :

$$A_p = \frac{8u^2tr_y(u, t)^p}{\sqrt{a^2 - b^2}} = C_p, \quad (3.37)$$

$$r_y(u, t) = \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}, \quad (3.38)$$

$$= \frac{t + u^2 + \frac{1}{2}(1-t)^3}{t - u^2 + \frac{1}{2}(1-t)^3} + 2\sqrt{2}u \frac{\sqrt{1-t+3t^2+t^3}}{t^3 - 3t^2 + t - 1 + u^2}. \quad (3.39)$$

On peut alors resommer les différents termes de l'équation (3.34). En gardant la correction de taille finie dominante, on obtient :

$$S[f] = f(1) - C_y r_y^{L_y/2}, \quad C_y = \frac{8u^2t}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{ut\sqrt{2}}{\sqrt{1-t+3t^2+t^3}}. \quad (3.40)$$

Ainsi l'énergie libre s'écrit, dans la limite  $L_y \gg 1$  et  $L_x \rightarrow \infty$  :

$$- \beta\sigma_{\text{int}} = - \ln \left( 1 - f(1) + C_y r_y^{L_y/2} \right). \quad (3.41)$$

À partir de l'expression de  $f$  (3.23), on constate que si  $T > T_c$  alors  $f(1) \neq 1$ . Dans ce cas la correction de taille finie n'est pas pertinente, et  $\sigma_{\text{int}}/L_y$  tend vers zero dans la limite  $L_y \rightarrow \infty$ . Par contre, si  $T < T_c$ , on a  $f(1) = 1$ , et la correction est essentielle. On trouve alors que  $\sigma_{\text{int}}$  augmente comme  $L_y/2$  :

$$\beta\sigma_{\text{int}} = \frac{L_y}{2} \ln(r_y) + \ln(C_y), \quad (3.42)$$

ce qui est compatible avec le résultat obtenu à température nulle. Dans ces conditions le coût énergétique de l'interface est proportionnelle à  $L_y$ , ce qui montre que celle-ci reste localisée au voisinage du bord. Cela confirme l'analyse à température nulle, car en prenant les limites thermodynamiques indépendamment pour  $L_x$  et  $L_y$ , on est dans le cas où le rapport d'aspect est nul. On trouve par ailleurs que la transition n'est obtenue que pour  $T \leq T_c$ .

### 3.4.3 Limite thermodynamique à rapport d'aspect constant

Pour trouver la signature de la transition de phase obtenue à température nulle, il est essentielle de prendre simultanément la limite thermodynamique dans les deux directions, afin de pouvoir maintenir le rapport d'aspect fixe. Pour cela, on doit chercher la correction dominante en  $L_x$  dans l'expression de la tension interfaciale  $\sigma_{\text{int}}$ . Elle provient en fait du terme en  $f(1)$ , qui n'est pas rigoureusement égal à 1 au-dessous de  $T_c$  si  $L_x$  est grand mais fini.

La correction de  $f(1)$  quand  $L_x \gg 1$  et fini est obtenue en calculant la première correction de taille finie des coefficients  $i\gamma_q$  et  $\Lambda_q$ . Ces derniers sont définis par

$$i\gamma_q = -2t \sin \theta_{q+\frac{1}{2}} \frac{1}{L_x} \sum_{p=1}^{L_x-1} g(\cos \theta_p) = -2t \sin \theta_{q+\frac{1}{2}} S_1[g], \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{q+\frac{1}{2}} &= \frac{t}{L} \sum_{p=0}^{L-1} \frac{(1-t^2) \cos \theta_p - t(1+2t \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} + t^2)}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2) \cos \theta_p - 2t(1-t^2) \cos \theta_{q+\frac{1}{2}}}, \\ &= t(1-t^2) S_2[g] - t^2(1+2t \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} + t^2) S_1[g], \end{aligned} \quad (3.44)$$

avec la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \frac{1}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2) \cos \theta_{q+\frac{1}{2}} - 2t(1-t^2)x}, \quad (3.45)$$

$$= \frac{1}{A - Bx}. \quad (3.46)$$

Les sommes sont définies par

$$S_1[g] = \frac{1}{L_x} \sum_{p=0}^{L_x-1} g(\cos(\theta_p)), \quad \theta_p = \frac{2\pi p}{L_x}, \quad (3.47)$$

$$S_2[g] = \frac{1}{L_x} \sum_{p=0}^{L_x-1} \cos(\theta_p) g(\cos(\theta_p)). \quad (3.48)$$

On peut calculer ces deux sommes comme dans la section précédente, en développant  $g(\cos \bullet)$  en série de Fourier. Le calcul des coefficients de Fourier se fait en utilisant le théorème des résidus, puis on peut resommer les expressions obtenues. Finalement on trouve :

$$S_1[g] = \frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}} \frac{1}{1 + r_x^{L_x}}, \quad (3.49)$$

$$S_2[g] = \frac{r_x}{2\sqrt{A^2 - B^2}} + \frac{A}{B\sqrt{A^2 - B^2}} \frac{r_x^{L_x}}{1 - r_x^{L_x}}, \quad (3.50)$$

$$r_x(t) = \frac{A}{B} - \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - 1} = \frac{1-t}{t(1+t)}. \quad (3.51)$$

Il suffit ensuite d'insérer ces expressions dans la définition de  $i\gamma_{q+\frac{1}{2}}$  et  $\Lambda_{q+\frac{1}{2}}$ . On peut ainsi calculer la première correction de taille finie en  $L_x$  à  $f(1)$ . Avec un peu de patience, on finit

par constater que dans la région  $T \leq T_c$  la première correction en  $L_x$  est un terme d'ordre 2 :

$$f(1) = 1 - C_x r_x^{2L_x}, \quad (3.52)$$

$$C_x = \frac{(1+t^2)(t^2+2t-1)}{4u^2t}. \quad (3.53)$$

Finalement, pour  $T \leq T_c$ , l'énergie interfaciale s'écrit :

$$\beta\sigma_{\text{int}} = \ln \left( C_x r_x(t)^{2L_x} + C_y r_y(u, t)^{L_y/2} \right). \quad (3.54)$$

Si le second terme domine, on retrouve le résultat précédent, et  $\sigma_{\text{int}}$  augmente avec  $L_y/2$ . Par contre, si le premier terme domine, l'énergie interfaciale se comporte comme  $2L_x$  : c'est en accord avec le résultat obtenu lors de l'étude à température nulle. On peut prendre la limite thermodynamique en gardant  $\zeta$  constant. Suivant la valeur du rapport d'aspect, on peut éventuellement trouver un couple  $(u_s, t_s)$  traduisant la transition entre le cas où le second terme domine vers le cas où le premier terme est dominant. L'énergie interfaciale est alors continue au passage de la transition, mais sa dérivée première sera, elle, discontinue : cela confirme que la transition observée est du premier ordre. D'autre part, on constate que si le premier terme domine, il n'y a plus de dépendance de  $\sigma_{\text{int}}$  en le champ magnétique au bord, dans la limite thermodynamique. Dans ce cas, on peut considérer que le système se sépare en deux sous-systèmes avec champ magnétique homogène au bord, séparés par l'interface : l'énergie interfaciale est alors donnée par  $r_x$  et devient indépendante de la valeur du champ magnétique. À partir de l'expression (3.54) on doit pouvoir obtenir l'allure du diagramme de phase à basse température, en fonction du rapport d'aspect du réseau. Des résultats préliminaires semblent montrer que pour  $H > 0$ , on a bien une ligne de transition du premier ordre, qui se termine par un point critique à  $T_c$  pour  $H = 0$ . D'autre part il semble que l'équation de la ligne de transition à basse température soit

$$H = 4\zeta - T \frac{\ln 2}{2}, \quad (3.55)$$

ce qui correspond aux résultats numériques pour un système de taille finie. L'étude plus précise de cette transition est encore en cours, notamment pour ce qui est du comportement à champ faible, au voisinage de  $T_c$ .

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons utilisé la méthode développée au chapitre précédent pour étudier, de manière exacte, l'effet d'un champ magnétique présentant un changement d'orientation sur le bord. Cette situation se ramène en fait au calcul des fonctions de corrélation fermioniques dans le cas d'un champ homogène. L'obtention de la fonction de partition et de l'énergie libre pour ce système est donc une extension simple du calcul présenté au chapitre

précédent. C'est là le point fort de notre méthode, qui se révèle être particulièrement efficace pour ce type de conditions au bord.

Par une étude numérique, nous avons pu établir le diagramme de phase du système, et identifier une ligne de transition du premier ordre se terminant par un point critique, à la manière de ce que l'on obtient pour la transition liquide/gaz. Ces résultats ont été confirmés par l'étude de l'énergie interfaciale dans la limite thermodynamique à rapport d'aspect constant. On peut ainsi espérer calculer exactement le diagramme de phase en partant du hamiltonien du système, ce qui montre l'efficacité de notre méthode dans ce cas.

# Conclusions et perspectives

Dans cette partie, nous avons présenté une méthode de résolution du modèle d'Ising particulièrement efficace pour traiter les problèmes de champs magnétiques au bord. Cette méthode a été validée par la comparaison avec les résultats précédents concernant le cas d'un champ magnétique homogène, obtenus par McCoy et Wu. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse technique : le champ magnétique est quelconque, de même que la température du système. D'autre part, et c'est là un grand intérêt, on peut garder la taille du système arbitraire jusqu'à la fin du calcul : on peut ainsi calculer les grandeurs thermodynamiques d'un système de taille arbitraire. Cela permet aussi de maîtriser complètement le passage à la limite thermodynamique, et de calculer les effets de taille finie. L'application de cette méthode au cas particulier présenté au chapitre précédent a permis de montrer l'efficacité de la méthode, puisque ce cas particulier inhomogène est obtenu par une extension simple du cas homogène. L'énergie libre obtenue permet de détecter la signature d'une transition de phase du premier ordre, qui est confirmée par des résultats de simulation Monte Carlo. Il est d'autre part possible de prendre la limite thermodynamique de l'énergie libre obtenue tout en maintenant constant le rapport d'aspect du système, ce qui permet d'étudier la transition de phase du premier ordre induite par l'inhomogénéité du champ. L'étude précise est encore en cours.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses et variées. Dans un premier temps il serait intéressant de voir si l'on peut traiter par une méthode similaire le cas du modèle d'Ising 2d avec deux lignes de champ magnétique sur des bords opposés. Ce cas ayant été résolu par la matrice de transfert, on pourrait alors tester les résultats avant de traiter des cas où les champs sont inhomogènes. Cela permettrait d'obtenir de nouveaux résultats exacts sur des problèmes de développement d'interface. Toujours en 2d, en utilisant l'action 1d effective obtenue au chapitre 2, il serait intéressant de considérer le cas d'un champ magnétique aléatoire : cela permettrait de voir l'effet du désordre en taille finie, et de voir comment est approchée la limite thermodynamique, où ce désordre est irrelevant [Cardy 1991]. Ce problème pourrait être abordé en utilisant certains résultats de la théorie des matrices aléatoires. Enfin, nous pensons qu'il est possible d'utiliser une variante de cette méthode pour traiter le cas d'un modèle d'Ising 1d en champ nul, mais avec des interactions entre les  $n$  premiers voisins. En particulier, moyennant une hypothèse sur la décroissance du couplage avec la distance, il pourrait être possible de résoudre exactement un système avec interaction à longue portée. À l'heure actuelle, cette méthode basée sur les algèbres de Grassmann n'est pas très utilisée, mais nous pensons qu'elle peut permettre d'aborder certains problèmes physiques intéressants, pour lesquels il n'existe actuellement que des approches de type champ moyen.



# Annexe A

## Algèbres de Grassmann

**But du chapitre :** Dans cette annexe sont présentées les principales notions sur les algèbres de Grassmann, qui sont nécessaires pour l'étude du modèle d'Ising avec un champ magnétique au bord (partie III).

### Définition

Une algèbre de Grassmann  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est engendrée par un ensemble de  $n$  objects  $\{c_i\}_{i=1..n}$  anti-commutants vis-à-vis de la multiplication interne, *i.e.* satisfaisants à la relation :

$$\forall(i, j), c_i c_j + c_j c_i = 0. \tag{A.1}$$

Les deux autres lois de composition de l'algèbre sont la multiplication externe avec les éléments de  $\mathbb{K}$  et l'addition.

Tout élément  $a \in \mathcal{A}$  est une combinaison des  $c_i$ , avec des coefficients dans  $\mathbb{K}$  :

$$a = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i + \sum_{i < j} \alpha_{ij} c_i c_j + \dots, \tag{A.2}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{\{i_m\}_{1 \leq m \leq k}} \alpha_{i_1 \dots i_k} c_{i_1} \dots c_{i_k}, \tag{A.3}$$

où les  $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{K}$  sont anti-symétriques sous l'échange de deux indices.

Exemple : Dans le cas particulier  $n = 2$ , les éléments de l'algèbre engendrée par  $\{c_1, c_2\}$  sont de la forme :

$$a = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_{12} c_1 c_2. \tag{A.4}$$

Les fonctions agissant sur  $\mathcal{A}$  sont définies par leur développement de Taylor, tronqué à l'ordre  $n$ .

**Exemple :** la fonction exponentielle est définie, pour  $n = 1$ , par :  $e^a = 1 + a$ .



FIG. A.1 – Hermann Günther Grassmann (1808-1877).

## Dérivation et intégration

Une particularité intéressante des algèbres de Grassmann est qu'il est possible de définir sur ces algèbres des notions de dérivation et d'intégration analogues à celles sur  $\mathbb{R}$ . L'introduction de ces notions est due à Berezin [Berezin 1966].

### Dérivation

La dérivation (à gauche) est définie par son action sur les générateurs  $\{c_i\}$  de l'algèbre  $\mathcal{A}$  :

$$\frac{\partial c_j}{\partial c_i} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

La dérivation anti-commute avec les  $c_i$ . La dérivée d'un produit s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial c_i}(c_j c_k) = \delta_{ij} c_k - \delta_{ik} c_j. \quad (\text{A.6})$$

On peut alors montrer facilement que

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial c_j} + \frac{\partial}{\partial c_j} \frac{\partial}{\partial c_i} = 0, \quad (\text{A.7})$$

ce qui montre en particulier que l'opérateur dérivation (à gauche) est nilpotent.

---

## Intégration

La notion d'intégration sur les algèbres de Grassmann surprend un peu, puisqu'elle s'identifie à la dérivation [Itzykson et Drouffe 1989] ! En fait, si on note  $I$  l'opération d'intégration, et  $D$  la dérivation (à gauche), une bonne définition de l'intégration sera un opérateur linéaire sur les fonctions tel que [Nakahara 1999] :

1.  $ID = DI = 0$  ;
2.  $f$  et  $g$  étant deux fonctions sur  $\mathcal{A}$ , on a l'implication :

$$Df = 0 \implies I(gf) = I(g). \quad (\text{A.8})$$

Ces propriétés sont satisfaites par l'intégration sur  $\mathbb{R}$ , et on constate qu'elles sont également satisfaites par la dérivation sur  $\mathcal{A}$  définie dans la section précédente. C'est ce qui conduit à la définition suivante.

Si  $f$  est une fonction définie sur  $\mathcal{A}$  par  $(c_1, \dots, c_n) \rightarrow f(c_1, \dots, c_n)$ , alors on définit l'intégrale de  $f$  sur  $\mathcal{A}$  par :

$$\int dc_1 dc_2 \dots dc_n f(c_1, \dots, c_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{D}c f(c) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial c_1} \frac{\partial}{\partial c_2} \dots \frac{\partial}{\partial c_n} f(c_1, \dots, c_n). \quad (\text{A.9})$$

## Règles d'intégration

À partir des définitions précédentes, on peut construire un ensemble de règles de calcul, semblables à celles dont on dispose sur  $\mathbb{R}$ .

### Changement de variables

Si  $f$  est une fonction sur  $\mathcal{A}$ , on considère l'intégrale

$$I = \int \mathcal{D}c f(c). \quad (\text{A.10})$$

On effectue alors le changement de variables de Grassmann

$$c_i \rightarrow c'_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} c_j. \quad (\text{A.11})$$

L'utilisation des règles d'intégration et de dérivation précédentes conduit à la formule de changement de variables :

$$\int \mathcal{D}c f(c) = \det \mathbf{A} \int \mathcal{D}c' f(c'). \quad (\text{A.12})$$

Notons que le préfacteur est  $\det \mathbf{A}$  et non l'inverse, comme c'est le cas sur  $\mathbb{R}$ .

## Intégrales gaussiennes

**Première formule d'intégration gaussienne** Soient  $\mathbf{c}$  et  $\bar{\mathbf{c}}$  deux vecteurs-colonnes de  $n$  éléments de  $\mathcal{A}$  indépendants. Alors pour toute matrice  $\mathbf{M} \in M_{nn}(\mathbb{K})$ , on a la formule d'intégration gaussienne suivante :

$$\int d\bar{c}_1 dc_1 \dots d\bar{c}_n dc_n \exp(-{}^t\bar{\mathbf{c}}\mathbf{M}\mathbf{c}) = \det\mathbf{M}. \quad (\text{A.13})$$

**Seconde formule d'intégration gaussienne** Soit  $\mathbf{c}$  un vecteur-colonne de  $2n$  éléments de  $\mathcal{A}$ . Alors pour toute matrice  $\mathbf{M} \in M_{2n, 2n}(\mathbb{K})$  antisymétrique, on a la formule d'intégration suivante :

$$\int dc_{2n} dc_{2n-1} \dots dc_1 \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t\mathbf{c}\mathbf{M}\mathbf{c}\right) = \text{Pfaff } \mathbf{M}, \quad (\text{A.14})$$

où  $\text{Pfaff } \mathbf{M}$  est le Pfaffien de la matrice  $\mathbf{M}$  définie par :

$$\text{Pfaff } \mathbf{M} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\text{permutations } P \text{ de } \{i_1, \dots, i_{2n}\}} \sigma(P) a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{2n-1} i_{2n}}, \quad (\text{A.15})$$

et  $\sigma(P)$  est la signature de la permutation  $P$ . Cette définition du Pfaffien n'est pas très utilisable en pratique : on a très souvent recourt à la propriété remarquable du Pfaffien :

$$\left(\text{Pfaff } \mathbf{M}\right)^2 = \det\mathbf{M}. \quad (\text{A.16})$$

Le Pfaffien peut donc être vu comme le résultat d'une intégrale gaussienne sur une algèbre de Grassmann.

**L'effet de la translation sur l'intégration gaussienne** Les formules présentes se généralisent pour le cas de gaussiennes translattées, pour conduire aux formules suivantes.

Soient  $\mathbf{c}$ ,  $\bar{\mathbf{c}}$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\bar{\mathbf{k}}$  quatre vecteurs-colonnes de  $n$  éléments de  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{M} \in M_{nn}(\mathbb{K})$ . On a alors :

$$\int d\bar{c}_1 dc_1 \dots d\bar{c}_n dc_n \exp\left(-{}^t\bar{\mathbf{c}}\mathbf{M}\mathbf{c} + {}^t\bar{\mathbf{k}}\mathbf{c} + {}^t\bar{\mathbf{c}}\mathbf{k}\right) = \det\mathbf{M} \cdot \exp\left({}^t\bar{\mathbf{k}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}\right). \quad (\text{A.17})$$

Soient  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{k}$  deux vecteurs-colonnes de  $2n$  éléments de  $\mathcal{A}$  et  $\mathbf{M} \in M_{2n, 2n}(\mathbb{K})$  une matrice antisymétrique. On a alors :

$$\int dc_{2n} dc_{2n-1} \dots dc_1 \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t\mathbf{c}\mathbf{M}\mathbf{c} + {}^t\mathbf{k}\mathbf{c}\right) = \text{Pfaff } \mathbf{M} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t\mathbf{k}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{k}\right), \quad (\text{A.18})$$

Il est aussi possible de travailler sur des ensembles constitués à la fois de variables commutantes de variables de Grassmann, sur lesquels on peut encore définir une intégration analogue à l'intégration usuelle. Ce genre de mathématiques dites "supersymétriques" est utilisé par exemple en physique des hautes énergies [Wess et Bagger 1992] et en matière condensée [Efetov 1992].

# Bibliographie

- [Abraham et al. 2004] D. B. ABRAHAM, VILLE MUSTONEN et A. J. WOOD, « Wetting Effects at a Grain Boundary », *Physical Review Letters*, vol. 93, n°7, 2004, p. 076101.
- [Abraham et Maciolek 2002] D.B. ABRAHAM et A. MACIOLEK, « Filling Transition : Exact Results for Ising Corners », *Physical Review Letters*, vol. 89, 2002, p. 286101.
- [Abraham 1978a] D.B. ABRAHAM, « N-point Functions for the Rectangular Ising Ferromagnet », *Communications in Mathematical Physics*, vol. 60, 1978, p. 205.
- [Abraham 1978b] D.B. ABRAHAM, « Odd Operators and Spinor Algebras in Lattice Statistics : N-point Functions for the Rectangular Ising Model », *Communications in Mathematical Physics*, vol. 59, 1978, p. 17.
- [Abraham 1978c] D.B. ABRAHAM, « Pair Functions for the Rectangular Ising Ferromagnet », *Communications in Mathematical Physics*, vol. 60, 1978, p. 181.
- [Abraham 1980] D.B. ABRAHAM, « Solvable model with a roughening transition for a planar Ising ferromagnet », *Physical Review Letters*, vol. 44, n°18, 1980, p. 1165.
- [Abraham 1982] D.B. ABRAHAM, « Exact solution of an intrinsic interface profile », *Physical Review B*, vol. 25, n°7, 1982, p. 4922.
- [Abraham 1984] D.B. ABRAHAM, « Intrinsic structure and long-ranged correlations in interfaces », *Physical Review B*, vol. 29, 1984, p. 525.
- [Abraham 1988] D.B. ABRAHAM, « Interface at general orientation in a two-dimensional Ising model », *Physical Review B*, vol. 37, 1988, p. 3835.
- [Alexander et al. 1993] F.J. ALEXANDER, S. HABIB et A. KOVNER, « Statistical mechanics of kinks in 1+1 dimensions : Numerical simulations and double-Gaussian approximation », *Physical Review E*, vol. 48, n°6, 1993, p. 4284.
- [Appel 2002] W. APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H&K, 2002.
- [Archambault et al. 1997] P. ARCHAMBAULT, S. T. BRAMWELL et P. C. W. HOLDSWORTH, « Magnetic Fluctuations in a Finite Two-dimensional XY Model », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 30, 1997, p. 8363.
- [AY et Fisher 1975] H. AU-YANG et M.E. FISHER, « Bounded and inhomogeneous Ising models. II. Specific-heat scaling function for a strip », *Physical Review B*, vol. 11, n°10, 1975, p. 3469.
- [Banks 2005] SIMON T. BANKS, Thèse de doctorat, Department of Chemistry, University College London, 2005.

- [Bardou et al. 2002] F. BARDOU, J.-P. BOUCHAUD, A. ASPECT et C. COHEN-TANNOUJI, *Lévy statistics and Laser cooling*, Cambridge University Press, 2002.
- [Bardou et Jaeger 2004] F. BARDOU et L. JAEGER, « Large phenotype jumps in biomolecular evolution », *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 69, n°3, 2004, p. 031908.
- [Bardou 1997] F. BARDOU, « Rare events in quantum tunneling », *Europhysics letters*, vol. 39, n°3, 1997, p. 239.
- [Barkai et Cheng 2003] ELI BARKAI et YUAN-CHUNG CHENG, « Aging continuous time random walks », *The Journal of Chemical Physics*, vol. 118, n°14, 2003, p. 6167–6178.
- [Baxter 1982] R.J. BAXTER, *Exactly solved models in Statistical Mechanics*, Academic Press, 1982.
- [Berezin 1966] F.A. BEREZIN, *The Method of second quantization*, Academic Press, New-York and London, 1966.
- [Berezinskii 1971] V.L. BEREZINSKII, « Destruction of long-range order in 1-dimensional and 2-dimensional systems possessing a continuous symmetry group I : Classical systems », *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 32, n°3, 1971, p. 493.
- [Berezinskii 1972] V.L. BEREZINSKII, « Destruction of long-range order in 1-dimensional and 2-dimensional systems possessing a continuous symmetry group II : Quantum systems », *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 34, n°3, 1972, p. 610.
- [Bertin et Bardou 2005] E. BERTIN et F. BARDOU, *From glasses to laser cooling : dynamics with broad distributions of sojourn times*, 2005, cond-mat/0503150.
- [Binder 1981a] K. BINDER, « Critical properties from Monte Carlo Coarse Graining and Renormalization », *Physical Review Letters*, vol. 47, n°9, 1981, p. 693.
- [Binder 1981b] K. BINDER, « Finite size scaling analysis of Ising model block distribution-functions », *Zeitschrift für Physik B - Condensed Matter*, vol. 43, 1981, p. 119.
- [Binney et al. 1992] J.J. BINNEY, N.J. DOWRICK, A.J. FISHER et M.E.J. NEWMAN, *The theory of critical phenomena*, Clarendon, Oxford, 1992.
- [Black et Halperin 1977] J.L. BLACK et B.I. HALPERIN, « Spectral diffusion, phonon echoes, and saturation recovery in glasses at low temperatures », *Physical Review B*, vol. 16, n°6, 1977, p. 2879.
- [Born et Wolf 1999] M. BORN et E. WOLF, *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Cambridge University Press, 1999, 7th édition.
- [Bouchaud et Georges 1990] J.-P. BOUCHAUD et A. GEORGES, « Anomalous diffusion in disordered media : Statistical mechanisms, models and physical applications », *Physics Report*, vol. 195, 1990, p. 127.
- [Bouchaud 1992] J.-P. BOUCHAUD, « Weak ergodicity breaking and aging in disordered systems », *Journal de Physique I*, vol. 2, 1992, p. 1705.

- 
- [Bramwell et al. 1998] S.T. BRAMWELL, P.C.W. HOLDSWORTH et J.-F. PINTON, « Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena », *Nature*, vol. 396, 1998, p. 552.
- [Bramwell et al. 2000] S.T. BRAMWELL, K. CHRISTENSEN, J.-Y. FORTIN, P.C.W. HOLDSWORTH, H.J. JENSEN, S. LISE, J. LÓPEZ, M. NICODEMI, J.-F. PINTON et M. SELLITTO, « Universal fluctuations in correlated system », *Physical Review Letter*, vol. 84, 2000, p. 3744.
- [Bramwell et al. 2001] S. T. BRAMWELL, J.-Y. FORTIN, P. C. W. HOLDSWORTH, S. PEYSSON, J.-F. PINTON, B. PORTELLI et M. SELLITTO, « Magnetic fluctuations in the classical XY model : The origin of an exponential tail in a complex system », *Physical Review E*, vol. 63, 2001, p. 041106.
- [Brokman et al. 2003] X. BROKMANN, J.-P. HERMIER, G. MESSIN, P. DESBIOLLES, J.-P. BOUCHAUD et M. DAHAN, « Statistical Aging and Nonergodicity in the Fluorescence of Single Nanocrystals », *Physical Review Letters*, vol. 90, n°12, 2003, p. 120601.
- [Bruce 1981] A. D. BRUCE, « Probability density functions for collective coordinates in Ising-like systems », *Journal of Physics C*, vol. 14, 1981, p. 3667.
- [Brush 1967] S.G. BRUSH, « History of the Lenz-Ising model », *Review of Modern Physics*, vol. 19, n°4, 1967, p. 883.
- [Buehler et al. 2004] T. M. BUEHLER, D. J. REILLY, R. P. STARRETT, V. C. CHAN, A. R. HAMILTON, A. S. DZURAK et R. G. CLARK, « Observing sub-microsecond telegraph noise with the radio frequency single electron transistor », *Journal of Applied Physics*, vol. 96, n°11, 2004, p. 6827–6830.
- [Bury 1999] K. BURY, *Statistical distributions in Engineering*, Cambridge University Press, 1999.
- [Cambier et Nauenberg 1986] J.L. CAMBIER et M. NAUENBERG, « Distribution of fractal clusters and scaling in the Ising model », *Phys. Rev. B*, vol. 34, n°1, 1986, p. 8071.
- [Cardy 1988] JOHN CARDY (éd.), *Finite-size Scaling*, North-Holland, 1988.
- [Cardy 1991] J. CARDY, « The Ising model in a random boundary field », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 24, 1991, p. L1315.
- [Cardy 1996] JOHN CARDY, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*, Cambridge University Press, 1996.
- [Castillo et al. 2002] HORACIO E. CASTILLO, CLAUDIO CHAMON, LETICIA F. CUGLIANDOLO et MALCOLM P. KENNETT, « Heterogeneous Aging in Spin Glasses », *Physical Review Letters*, vol. 88, n°23, 2002, p. 237201.
- [Chamon et al. 2004] C. CHAMON, P. CHARBONNEAU, L.F. CUGLIANDOLO, D.R. REICHMAN et M. SELLITTO, « Out-of-equilibrium dynamical fluctuations in glassy systems », *Journal of Chemical Physics*, vol. 121, 2004, p. 10120.
- [Chatterjee 1990] R. CHATTERJEE, « Exact partition function and boundary state of 2D massive Ising field theory with boundary magnetic field », *Nuclear Physics B*, vol. 468, n°3, 1990, p. 439.

- [Cheng et Wu 1967] H. CHENG et T.T. WU, « Theory of Toeplitz Determinants and the Spin Correlations of the Two-Dimensional Ising Model. III », *Physical Review*, vol. 164, 1967, p. 719.
- [Clusel et al. 2004] M. CLUSEL, J.-Y. FORTIN et PETER C.W. HOLDSWORTH, « Criterion for universality-class-independent critical fluctuations : Example of the 2D Ising model », *Physical Review E*, vol. 70, 2004, p. 046112.
- [Clusel et Fortin 2005] MAXIME CLUSEL et JEAN-YVES FORTIN, « 1D action and partition function for the 2D Ising model with a boundary magnetic field », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 38, n°13, 2005, p. 2849–2871.
- [Currie et al. 1980] J.F. CURRIE, J.A. KRUMHANSL, A.R. BISHOP et S.E TRULLINGER, « Statistical mechanics of one-dimensional solitary-wave-bearing scalar field : Exact results and ideal-gaz phenomenology », *Physical Review B*, vol. 22, n°2, 1980, p. 477.
- [Da Costa et al. 2000] V. DA COSTA, Y. HENRY, F. BARDOU, M. ROMEO et K. OUNADJELA, « Experimental evidence and consequences of rare events in quantum tunneling », *European Physical Journal B*, vol. 13, 2000, p. 297.
- [Da Costa et al. 2003] V. DA COSTA, M. ROMEO et F. BARDOU, « Statistical properties of currents flowing through tunnel junctions », *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, n°258-259, 2003, p. 90.
- [Dahlstedt et Jensen 2001] KAJSA DAHLSTEDT et HENRIK JELDTOFT JENSEN, « Universal fluctuations and extreme-value statistics », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 34, n°50, 2001, p. 11193–11200.
- [Das 1993] A. DAS, *The special theory of relativity*, Springer Verlag, 1993.
- [Degiovanni 2003] P. DEGIOVANNI, *Cohérence quantique*, rapport technique, ENS Lyon, 2002/2003, Cours du DEA de Physique théorique rhône alpin.
- [Delfino et Mussardo 1995] G. DELFINO et G. MUSSARDO, « The spin-spin correlation function in the two-dimensional Ising model in a magnetic field at  $T = T_c$  », *Nuclear Physics B*, vol. 455, 1995, p. 724.
- [Delfino 2004] GESUALDO DELFINO, « Integrable field theory and critical phenomena : the Ising model in a magnetic field », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 2004, p. R45.
- [Dotsenko 1987] V.S. DOTSENKO, « 3D Ising model as a free fermion string theory », *Nuclear Physics B*, vol. 285, 1987, p. 45.
- [Duplantier et Saleur 1989] B DUPLANTIER et H SALEUR, « Exact fractal dimension of 2D Ising clusters », *Physical Review Letters*, vol. 63, 1989, p. 2536.
- [Durrett 1995] R. DURRETT, *Probability : Theory and examples*, Duxbury Press, 1995, 2nd édition.
- [Dutta et Horn 1981] P. DUTTA et P.M. HORN, « Low-frequency fluctuations in solids :  $1/f$  noise », *Review of Modern Physics*, vol. 53, 1981, p. 497.
- [Ebner et al. 1990] C. EBNER, F. HAYOT et J. CAI, « Lattice model of defect-plane wetting », *Physical Review B*, vol. 42, 1990, p. 8187.

- 
- [Efetov 1992] K EFETOV, *Supersymmetry in disorder and chaos*, Cambridge University Press, 1992.
- [Erdelyi 1955] ERDELYI (éd.), *Higher transcendental functions*, Mac Graw Hill, New-York, 1955.
- [Falci et al. 2003] G. FALCI, E. PALADINO et R. FAZIO, *Quantum Phenomena in Mesoscopic Systems*, IOS Press, 2003.
- [Farmer et al. 1987] K.R. FARMER, C.T. ROGERS et R.A. BUHRMAN, « Localized-State Interactions in Metal-Oxide-Semiconductor Tunnel Diodes », *Physical Review Letters*, vol. 58, n°21, 1987, p. 2255.
- [Feller 1971] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, J.Wiley, 1971, 3rd édition.
- [Feynman et Hibbs 1965] R. FEYNMAN et A.R. HIBBS, *Quantum mechanics and path integrals*, *International Series in Pure and Applied Physics*, McGraw-Hill, 1965, International Series in Pure and Applied Physics.
- [Feynman et Vernon 1963] V. FEYNMAN et F. VERNON, « The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system », *Annals of Physics*, vol. 24, 1963, p. 118.
- [Feynman 1948] R. FEYNMAN, « Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics », *Review of Modern Physics*, vol. 20, 1948, p. 237.
- [Forgacs et al. 1988] G. FORGACS, N.M. SVRAKIC et V. PRIVMAN, « First-order wetting transition in d=2 systems with short-range interactions : Exact solution », *Physical Review B*, vol. 37, 1988, p. 3818.
- [Fortuin et Kasteleyn 1972] C.M. FORTUIN et P.W. KASTELEYN, « Random-cluster model .1. Introduction and relation to other models », *Physica*, vol. 57, n°4, 1972, p. 536.
- [Galperin et al. 2003] Y.M. GALPERIN, B.L. ALTSHULER et D.V. SHANTSEV, « Low-frequency noise as a source of dephasing of a Qubit », *Proceeding of Fundamental Problems of Mesoscopic Physics : Interactions and Decoherence*, NATO/Euresco, 2003, cond-mat/0312490.
- [Godrèche et Luck 2001] C. GODRÈCHE et J.M. LUCK, « Statistics of the Occupation Time of Renewal Processes », *Journal of Statistical Physics*, vol. 104, n°3-4, 2001, p. 489.
- [Goldenfeld 1992] N. GOLDENFELD, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley, 1992.
- [Gradshteyn et Ryzhik 1994] I.S. GRADSHTEYN et I.M. RYZHIK, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, 1994, 5th édition.
- [Haus et Kehr 1987] J.W. HAUS et K.W. KEHR, « Diffusion in regular and disordered lattices », *Physics Reports*, vol. 150, n°5-6, 1987, p. 263.
- [Hayn et Plechko 1994] R HAYN et V.N. PLECHKO, « Grassmann variable analysis for dimer problems in two dimensions », *J.Phys.A : Math. Gen.*, vol. 27, n°14, 1994, p. 4753.

- [Hu 1984] CHIN-KUN HU, « Percolation, clusters, and phase transitions in spin models », *Physical Review B*, vol. 29, 1984, p. 5103.
- [Ising 1925] E. ISING, « Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus », *Z. Physik*, vol. 31, 1925, p. 253, traduction en anglais : [http://www.fh-augsburg.de/harsch/anglica/Chronology/20thC/Ising/isi\\_fm00.html](http://www.fh-augsburg.de/harsch/anglica/Chronology/20thC/Ising/isi_fm00.html).
- [Itzykson et Drouffe 1989] C. ITZYKSON et J.-M. DROUFFE, *Statistical Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Jose et al. 1977] J.V. JOSE, L.P. KADANOFF, S. KIRKPATRICK et D.R. NELSON, « Renormalization, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model », *Physical Review B*, vol. 16, n°3, 1977, p. 1217.
- [Jung et al. 2002] Y.J. JUNG, E. BARKAI et J. SILBEY, « Lineshape theory and photon counting statistics for blinking quantum dots : a Lévy walk process », *Chemical Physics*, vol. 284, n°1-2, 2002, p. 181.
- [Kasteleyn et Fortuin 1969] P.W. KASTELEYN et C.M. FORTUIN, « Phase transitions in lattice systems with random local properties », *Journal of the physical society of Japan*, vol. 26, 1969, p. 11.
- [Kaufman 1949] B. KAUFMAN, « Crystal statistics. II. Partition function evaluated by spinor analysis », *Physical Review*, vol. 76, n°8, 1949, p. 1232.
- [Kolmogorov 1960] A.N. KOLMOGOROV, *Foundations of the theory of probability*, Chelsea Pub Co, 1960.
- [Konk et al. 1996] R. KONK, A. LECLAIR et G. MUSSARDO, « On Ising correlation functions with boundary magnetic field », *International Journal of Modern Physics A*, vol. 11, 1996, p. 2765.
- [Kosterlitz et Thouless 1973] J M KOSTERLITZ et D J THOULESS, « Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems », *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. 6, n°7, 1973, p. 1181–1203.
- [Kosterlitz 1974] J M KOSTERLITZ, « The critical properties of the two-dimensional xy model », *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. 7, n°6, 1974, p. 1046–1060.
- [Labbé et al. 1996] R. LABBÉ, J.-F. PINTON et S. FAUVE, « Power fluctuations in turbulent swirling flows », *Journal de Physique II*, vol. 6, July 1996, p. 1099.
- [Landau et al. 2000] D.P. LANDAU, A.M. FERRENBURG et K. BINDER, « The Ising model as a playground for the study of wetting and interface behavior », *Brazilian Journal of Physics*, vol. 30, n°4, 2000, p. 748.
- [Landau et Binder 2000] D.P. LANDAU et K. BINDER, *A Guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*, Cambridge University Press, 2000.
- [LB 2002] M. LE BELLAC, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, EDP Sciences, 2002.
- [Leung 1982] K.M. LEUNG, « Path-integral approach to the statistical mechanics of solitons », *Physical Review B*, vol. 35, n°1, 1982, p. 226.

- 
- [Lieb et al. 1961] E.H. LIEB, T.D. SCHULTZ et D.C. MATTIS, « Two soluble models of an antiferromagnetic chain », *Annals of Physics*, vol. 16, 1961, p. 407.
- [Lieb et Mattis 1962] E.H. LIEB et D.C. MATTIS, « Theory of Ferromagnetism and the Ordering of Electronic Energy Levels », *Physical Review*, vol. 125, 1962, p. 164.
- [Ludwig et al. 2003] S. LUDWIG, P. NALBACH, D. ROSENBERG et D. OSHEROFF, « Dynamics of the Destruction and Rebuilding of a Dipole Gap in Glasses », *Physical Review Letters*, vol. 90, n°10, 2003, p. 105501.
- [Lutz 2002] E. LUTZ, « Anomalous Lévy decoherence », *Physics Letters A*, vol. 293, n°3-4, 2002, p. 123.
- [Lévy 1954] PAUL LÉVY, *Théorie de l'addition de variables aléatoires*, J. Gabay, 1954, 2nd édition, (réédition en 2003).
- [Maciolek et Stecki 1996] A. MACIOLEK et J. STECKI, « d=2 Ising strip with two surface fields solved using the transfer-matrix method », *Physical review B*, vol. 54, 1996, p. 1128.
- [Makhlin et al. 2001] Y. MAKHLIN, G. SCHÖN et A. SHNIRMAN, « Quantum-state engineering with Josephson-junction devices », *Review of Modern Physics*, vol. 73, n°2, 2001, p. 357.
- [Makhlin et al. 2003] Y. MAKHLIN, G. SCHÖN et A. SHNIRMAN, « Dissipative effects in Josephson qubits », *Chemical Physics*, vol. 296, n°2-3, 2003, p. 315.
- [Makhlin et Shnirman 2004] YURIY MAKHLIN et ALEXANDER SHNIRMAN, « Dephasing of Solid-State Qubits at Optimal Points », *Physical Review Letters*, vol. 92, n°17, 2004, p. 178301.
- [Margolin et Barkai 2004] G. MARGOLIN et E. BARKAI, « Aging correlation functions for blinking nanocrystals, and other on-off stochastic processes », *Journal of Chemical Physics*, vol. 121, n°3, 2004, p. 1566.
- [Martinis et al. 2003] JOHN M. MARTINIS, S. NAM, J. AUMENTADO, K. M. LANG et C. URBINA, « Decoherence of a superconducting qubit due to bias noise », *Physical Review B*, vol. 67, n°9, 2003, p. 094510.
- [Mattuck 1992] R.D. MATTUCK, *A Guide to Feynman diagrams in the Many-Body Problem*, Dover, 1992, 2nd édition.
- [McCoy et Wu 1967a] B MCCOY et T.T. WU, « Theory of Toeplitz Determinants and the Spin Correlations of the Two-Dimensional Ising Model. IV », *Physical Review*, vol. 162, 1967, p. 436.
- [McCoy et Wu 1967b] B MCCOY et T.T. WU, « Theory of Toeplitz Determinants and the Spin Correlations of the Two-Dimensional Ising Model. V », *Physical Review*, vol. 174, 1967, p. 546.
- [McCoy et Wu 1973] B MCCOY et T.T. WU, *The two-dimensional Ising Model*, Harvard University Press, 1973.
- [Messiah 1999] A. MESSIAH, *Quantum Mechanics*, Dover, 1999.

- [Monthus et Bouchaud 1996] CÉCILE MONTHUS et JEAN-PHILIPPE BOUCHAUD, « Models of traps and glass phenomenology », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 29, n°14, 1996, p. 3847–3869.
- [Montroll et Scher 1973] E.W. MONTROLL et H. SCHER, « a trouver », *Journal of Statistical Physics*, vol. 9, 1973, p. 101.
- [Montroll et Weiss 1965] ELLIOTT W. MONTROLL et GEORGE H. WEISS, « Random Walks on Lattices. II », *Journal of Mathematical Physics*, vol. 6, n°2, 1965, p. 167–181.
- [Nakahara 1999] M NAKAHARA, *Geometry, topology and physics*, Institut of Physics, 1999, 2nd édition.
- [Nakamura et al. 2002] Y. NAKAMURA, YU. A. PASHKIN, T. YAMAMOTO et J. S. TSAI, « Charge Echo in a Cooper-Pair Box », *Physical Review Letters*, vol. 88, n°4, 2002, p. 047901.
- [Nakanishi et Fisher 1983] H. NAKANISHI et M.E. FISHER, « Critical point shifts in films », *Journal of Chemical Physics*, vol. 78, 1983, p. 3279.
- [Newell et Montroll 1953] G.F. NEWELL et E.W. MONTROLL, « On the Theory of the Ising Model of Ferromagnetism », *Review of Modern Physics*, vol. 25, n°2, 1953, p. 353.
- [Nojima 1998] K. NOJIMA, « The Grassmann representation of 2d Ising model », *International Journal of Modern Physics B.*, vol. 12, n°20, 1998, p. 1995.
- [Onsager 1944] L. ONSAGER, « Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition », *Physical Review*, vol. 65, 1944, p. 117.
- [Paladino et al. 2002] E. PALADINO, L. FAORO, G. FALCI et ROSARIO FAZIO, « Decoherence and  $1/f$  Noise in Josephson Qubits », *Physical Review Letters*, vol. 88, n°22, 2002, p. 228304.
- [Parisi 1998] G. PARISI, *Statistical field theory*, *Frontiers in physics*, Parseus Press, 1998, *Frontiers in physics*.
- [Pennetta et al. 2004] C. PENNETTA, E. ALFINITO, L. REGGIANI et S. RUFFO, « Non-Gaussianity of resistance fluctuations near electrical breakdown », *Semicond. Sci. Technol.*, vol. 19, n°4, 2004, p. S164.
- [Pinton et al. 1999] JEAN-FRANÇOIS PINTON, PETER C.W. HOLDSWORTH et RAÚL LABBÉ, « Power fluctuations in a closed turbulent shear flow », *Physical Review E*, vol. 60, n°3, 1999, p. R2452.
- [Plechko et Sobolev 1991] V.N. PLECHKO et I.K. SOBOLEV, « Specific heat of highly decorated 2D Ising models on a triangular lattice net with holes », *Physics Letter A*, vol. 157, n°6-7, 1991, p. 335.
- [Plechko et Sobolev 1993] V. N. PLECHKO et I. K. SOBOLEV, « Phase transitions in regularly diluted 2D Ising models with a complicated inherent structure of a lattice cell », *Physica A : Statistical and Theoretical Physics*, vol. 197, n°3, 1993, p. 323.
- [Plechko 1985] V.N. PLECHKO, « Simple solution of the two-dimensional Ising model on a torus in terms of Grassmann integrals », *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 64, n°1, 1985, p. 748.

- 
- [Plechko 1988] V.N. PLECHKO, « Grassmann path-integral solution for a class of triangular type decorated Ising models », *Physica A*, vol. 152, 1988, p. 51–97.
- [Plechko 1999] V.N. PLECHKO, « Free fermions in two-dimensional Ising model », *Journal of Physical Studies*, vol. 3, n°3, 1999, p. 312.
- [Plischke et Bergersen 1994] MICHAEL PLISCHKE et BINGER BERGERSEN, *Equilibrium statistical physics*, World Scientific, 1994.
- [Polyakov 1987] A.N. POLYAKOV, *Gauge Fields and Strings, Contemporary Concepts in Physics*, CRC Press, 1987, Contemporary Concepts in Physics.
- [Portelli et al. 2001] B. PORTELLI, P.C.W. HOLDSWORTH, M. SELLITTO et S.T. BRAMWELL, « Universal magnetic fluctuations with a field-induced length scale », *Physical Review E*, vol. 64, 2001, p. 036111.
- [Portelli et al. 2003] B. PORTELLI, P. C. W. HOLDSWORTH et J.-F. PINTON, « Intermittency and Non-Gaussian Fluctuations of the Global Energy Transfer in Fully Developed Turbulence », *Physical Review Letters*, vol. 90, n°10, 2003, p. 104501.
- [Portelli 2002] BAPTISTE PORTELLI, *Fluctuations des grandeurs globales dans les systèmes fortement corrélés*, Thèse de doctorat, École normale supérieure de Lyon, 2002.
- [Ramsey 1950] N.F. RAMSEY, « A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields », *Physical Review*, vol. 78, n°6, 1950, p. 695.
- [Romeo et al. 2003] M. ROMEO, V. DA COSTA et F BARDOU, « Broad distribution effects in sums of lognormal random variables », *European Journal of Physics B*, vol. 32, 2003, p. 513.
- [Salem et El-Ghazzawi 2004] A M SALEM et M E EL-GHAZZAWI, « Structural and optical properties of chemically deposited CdCr<sub>2</sub>S<sub>4</sub> thin films », *Semiconductor Science and Technology*, vol. 19, n°2, 2004, p. 236–241.
- [Schrieffl et al. 2005a] J. SCHRIEFL, M. CLUSEL, D. CARPENTIER et P. DEGIOVANNI, « Dephasing by a non-stationary classical intermittent noise », *Physical Review B*, vol. 72, 2005, p. 035328.
- [Schrieffl et al. 2005b] J. SCHRIEFL, M. CLUSEL, D. CARPENTIER et P. DEGIOVANNI, « Non-stationary dephasing of two-level systems », *Europhysics Letters*, vol. 69, n°2, 2005, p. 156.
- [Schrieffl 2005] J. SCHRIEFL, *Decoherence in Josephson Qubits*, Thèse de doctorat, ENS-Lyon/ Karlsruhe Universität, 2005.
- [Schultz et al. 1964] T.D. SCHULTZ, D.C. MATTIS et E.H. LIEB, « Two-Dimensional Ising Model as a Soluble Problem of Many Fermions », *Review of Modern Physics*, vol. 36, n°3, 1964, p. 856.
- [Shlesinger et al. 1993] M.F. SHLESINGER, G.M. ZASLAVSKY et J. KLAFTER, « Strange kinetics », *Nature*, vol. 363, 1993, p. 31.
- [Simmonds et al. 2004] R. W. SIMMONDS, K. M. LANG, D. A. HITE, S. NAM, D. P. PAPPAS et JOHN M. MARTINIS, « Decoherence in Josephson Phase Qubits from Junction Resonators », *Physical Review Letters*, vol. 93, n°7, 2004, p. 077003.

- [Stauffer et Aharony 1992] D. STAUFFER et A. AHARONY, *Introduction to percolation theory*, Taylor and Francis, 1992.
- [Stella et Vanderzande 1989] A.L. STELLA et C. VANDERZANDE, « Scaling and fractal dimension of Ising clusters at the  $d=2$  critical point », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, 1989, p. 1067.
- [Stern et al. 1990] A. STERN, Y. AHARONOV et Y. IMRY, « Phase uncertainty and loss of interference : A general picture », *Physical Review A*, vol. 41, n°7, 1990, p. 3436.
- [Swendsen et Wang 1987] R.H. SWENDSEN et J.-S. WANG, « Nonuniversal critical dynamics in Monte Carlo simulations », *Physical Review Letters*, vol. 58, 1987, p. 86.
- [TK et Gleeson 2003] T. TÓTH-KATONA et J. GLEESON, « Distribution of injected power fluctuations in electroconvection », *Physical Review Letters*, vol. 91, 2003, p. 264501.
- [Tunaley 1976] J.K.E. TUNALEY, « Theory of  $1/f$  current noise based on a random-walk problem », *Journal of statistical physics*, vol. 15, n°2, 1976, p. 149.
- [Vion et al. 2002] D. VION, A. AASSIME, A. COTTET, P. JOYEZ, H. POTHIER, C. URBINA, D. ESTEVE et M.H. DEVORET, « Manipulating the Quantum State of an Electrical Circuit », *Science*, vol. 296, Mai 2002, p. 889.
- [Watkins et al. 2002] N. W. WATKINS, S. C. CHAPMAN et G. ROWLANDS, « Comment on “Universal Fluctuations in Correlated Systems” », *Physical Review Letters*, vol. 89, n°20, 2002, p. 208901.
- [Weissman 1988] M.B. WEISSMAN, «  $1/f$  noise and other slow, nonexponential kinetics in condensed matter », *Review of Modern physics*, vol. 60, n°2, 1988, p. 537.
- [Welland et Koch 1986] M. E. WELLAND et R. H. KOCH, « Spatial location of electron trapping defects on silicon by scanning tunneling microscopy », *Applied Physics Letters*, vol. 48, n°11, 1986, p. 724–726.
- [Wess et Bagger 1992] J. WESS et J. BAGGER, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, 1992, 2nd édition.
- [Wu et Hu 2002] MING-CHYA WU et CHIN-KUN HU, « Exact partition functions of the Ising model on  $M \times N$  planar lattices with periodic/aperiodic boundary conditions », *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 35, n°25, 2002, p. 5189–5206.
- [Wu 1966] T.T. WU, « Theory of Toeplitz Determinants and the Spin Correlations of the Two-Dimensional Ising Model. I », *Physical Review*, vol. 149, 1966, p. 380.
- [Yu et Leggett 1988] C.C. YU et A.J. LEGGETT, « Low temperature properties of amorphous materials : Through a glass darkly », *Comments in Condensed Matter Physics*, vol. 14, n°4, 1988, p. 231.
- [Zamolodchikov 1989a] A.B. ZAMOŁODCHIKOV, « Integrable field theory from conformal field theory », *Advanced Studies in Pure Mathematics*, vol. 19, 1989, p. 641.
- [Zamolodchikov 1989b] A.B. ZAMOŁODCHIKOV, « Integrals of motion and S-matrix of the (scaled)  $T = T_c$  Ising model with magnetic field », *International Journal of Modern Physics A*, vol. 4, 1989, p. 4235.

- 
- [Zheng et Trimper 2001] B. ZHENG et S. TRIMPER, « Comments on "Universal Fluctuations in Correlated Systems" », *Physical Review Letter*, vol. 87, 2001, p. 188901.
- [Zheng 2003] B. ZHENG, « Generic features of fluctuations in critical systems », *Physical Review E*, vol. 67, 2003, p. 026114.
- [Zimmerli et al. 1992] G. ZIMMERLI, T. M. EILES, R. L. KAUTZ et JOHN M. MARTINIS, « Noise in the Coulomb blockade electrometer », *Applied Physics Letters*, vol. 61, n°2, 1992, p. 237–239.
- [ZJ 2004] J. ZINN-JUSTIN, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford University Press, 2004, 5th édition.
- [Zorin et al. 1996] A.B. ZORIN, F.-J AHLERS, J. NIEMEYER, T. WEIMANN, H. WOLF, V.A. KRUPENIN et S.V. LOTKHOV, « Background charge noise in metallic single-electron tunneling devices », *Physical Review B*, vol. 53, n°20, 1996, p. 13682.





# Résumé

Les travaux regroupés dans cette thèse traitent de différents aspects de la physique statistique des systèmes corrélés. Dans la première partie de cette thèse on s'intéresse aux fluctuations de grandeurs globales dans les systèmes corrélés, dont de nombreux travaux sur des systèmes variés proposent qu'elles soient bien décrites par la distribution BHP. Le modèle d'Ising 2d est utilisé pour tester cette proposition et la quantifier. En utilisant des observations issues de simulations Monte Carlo, une étude analytique montre que l'apparente universalité de BHP est reliée au modèle gaussien obtenu par perturbation. et que des écarts à BHP d'importance variable existe, provenant de la contribution d'un terme non-gaussien. Dans la seconde partie, on s'intéresse à l'étude de la décohérence d'un système quantique à deux niveaux, induite par un bruit intermittent présentant un spectre en  $1/f$  et du vieillissement. Un tel bruit peut schématiser l'effet d'un environnement corrélé sur un Qbit. En utilisant des résultats de probabilité, on peut calculer le facteur de décohérence dans de nombreux régimes. On obtient alors des scénarios de décohérence anormaux, présentant une décroissance en loi de puissance aux temps longs, ainsi que de la non-stationnarité. Enfin la dernière partie est dédiée à l'étude des solutions exactes du modèle d'Ising 2d classique, avec un champ magnétique sur un bord. En généralisant une méthode due à Plechko, on obtient la fonction de partition de ce système au moyen d'une action gaussienne fermionique unidimensionnelle. Dans le cas d'un champ homogène, on retrouve les résultats précédents de McCoy et Wu. On peut aller au-delà en considérant le cas où le champ magnétique change de direction une fois au bord. Cette méthode permet alors de décrire une transition de type mouillage, induite par ce défaut d'orientation. Il est en particulier possible d'obtenir analytiquement le diagramme de phase de ce système.

**Mots-clés:** Physique statistique, fluctuations, modèle d'Ising, cohérence quantique, bruit en  $1/f$ , marches aléatoires, algèbre de Grassmann, mouillage.

---

## Abstract

This thesis deals with different aspects of statistical physics of correlated systems. The first part is related to the fluctuations of global quantities in correlated systems. Various studies claim that such fluctuations are well described by the BHP distribution. We use the 2D Ising model to test and quantify this proposition. Using observations from Monte Carlo simulations, we build a theoretical analysis, showing that the apparent universality of the BHP distribution is related to the Gaussian model obtained from perturbation expansion. Deviations from BHP, due to a non-linear term are expected. In the second part we consider a new model for a  $1/f$  classical intermittent noise and study its effects on the dephasing of a two-level system. Within this model, the evolution of the relative phase between the two states is described as a continuous time random walk. Using renewal theory, we find exact expressions for the dephasing factor and identify the physically relevant various regimes in terms of the coupling to the noise. In particular, we point out the consequences of the non-stationarity and pronounced non-Gaussian features of this noise, including some new anomalous and aging dephasing scenarios. In the last part we present an alternative method to obtain some exact results for the 2D Ising model with a boundary magnetic field, for a finite size system. This method is a generalisation of ideas from Plechko presented for the 2D Ising model in zero field, based on the representation of the Ising model using a Grassmann algebra. A Gaussian 1D action is obtained for a general configuration of the boundary magnetic field. When the magnetic field is homogeneous, our results are in agreement with McCoy and Wu's previous work. This 1D action is used to compute in an efficient way the free energy in a special case of inhomogeneous boundary magnetic field. This allows us to compute the phase diagram of a wetting transition induced by a boundary defect.

**Keywords:** Statistical physics, fluctuations, Ising model, quantum coherence,  $1/f$  noise, random walks, Grassmann Algebra, wetting.