



**HAL**  
open science

# Défauts topologiques en présence de désordre, et application aux réseaux de vortex dans les supraconducteurs

David Carpentier

► **To cite this version:**

David Carpentier. Défauts topologiques en présence de désordre, et application aux réseaux de vortex dans les supraconducteurs. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1999. Français. NNT: . tel-00010790

**HAL Id: tel-00010790**

**<https://theses.hal.science/tel-00010790>**

Submitted on 26 Oct 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

0



UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6**

Spécialité: **PHYSIQUE THÉORIQUE**

présentée par

**David CARPENTIER**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6**

Sujet :

**DÉFAUTS TOPOLOGIQUES EN PRÉSENCE DE DÉSORDRE,  
ET APPLICATION  
AUX RÉSEAUX DE VORTEX DANS LES SUPRACONDUCTEURS**

Soutenue le 15 Février 1999 devant le jury composé de :

M. DERRIDA BERNARD

M. FEINBERG DENIS (rapporteur)

M. KES PETER

M. LE DOUSSAL PIERRE (Directeur)

M. NATTERMANN THOMAS (rapporteur)

M. ZIMAN TIMOTHY



À mon épouse, Clémentine

*Le plus long des voyages commence par le premier pas*  
Lao Tseu



## Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure, et je remercie JEAN-LOUP GERVAIS de m'y avoir accueilli. Cela m'a également permis de bénéficier de l'efficacité et de la gentillesse des trois membres du secrétariat : NICOLE RIBET, ainsi que MARIE-CHRISTINE LAUNAY et MICHÈLE LELIEPVRE, sans qui la vie au quotidien serait bien plus pénible.

PIERRE LE DOUSSAL a accepté la lourde tâche d'encadrer mes travaux de thèse. Son enthousiasme, ses réponses précises et ses nombreux conseils m'ont été des plus utiles durant ces quatre années. Je garde en mémoire en particulier ces soirées passées devant un tableau noir à torturer des équations de renormalisation jusqu'à ce qu'à notre propre surprise apparaisse l'équation KPP. Cette période fut indubitablement pour moi la meilleure des introductions à la recherche en matière condensée.

Cette introduction était d'ailleurs complétée par les réunions hebdomadaires (en principe) du petit groupe de travail autour d'ANTOINE GEORGES, de THIERRY GIAMARCHI, de BENOÎT DOUÇOT et bien sûr de PIERRE. Présentations informelles, et discussions entre autres avec mes compagnons d'infortune EDMOND ORIGNAC et OLIVIER PARCOLLET, m'ont permis d'entrevoir de nombreux autres problèmes de recherche en matière condensée. Je remercie ainsi vivement les différents acteurs de ce petit groupe, et en particulier THIERRY GIAMARCHI avec qui j'ai eu la chance de collaborer, pour m'avoir ouvert ces petites fenêtres vers d'autres horizons (vers lesquels je vais peut-être maintenant me diriger).

Finalement je ne peut clore ces remerciements sans penser à mes camarades avec qui j'ai partagé le plus clair de mon quotidien : ALAIN BARRAT, GIULIO BIROLI, le capitaine PASCAL CHAUVE, LAURENT LALOUX, OLIVIER PARCOLLET et aussi ANUSHA HAZAREEZING. Avoir réussi à me supporter à longueur de journée (et pour certains d'entre eux, qui se reconnaîtront, m'avoir fourni généreusement des doses de café) n'est pas la moindre de leurs qualités.

Je remercie mes rapporteurs DENIS FEINBERG et THOMAS NATTERMANN qui ont accepté de relire et commenter mon manuscrit, et plus généralement tous les membres du jury qui ont bien voulu se déplacer pour venir assister à ma soutenance : BERNARD DERRIDA, PETER KES et TIMOTHY ZIMAN.

Enfin, je ne saurais assez remercier Clémentine, en particulier pour tous les sacrifices consentis au long de ces quatre années.





# Sommaire

Remerciements	v
Introduction générale de la thèse	1

## Partie introductive

<b>1 Accrochage collectif du réseau de vortex dans les supraconducteurs</b>	<b>7</b>
1.1 Approche phénoménologique des supraconducteurs: le réseau d'Abrikosov . . .	7
1.1.1 Énergie de GINZBURG-LANDAU . . . . .	8
1.1.2 Le réseau d'ABRIKOSOV . . . . .	9
1.1.3 Description élastique . . . . .	10
1.2 Description élastique du réseau en présence d'impuretés: l'accrochage collectif	12
1.2.1 Accrochage individuel et accrochage collectif . . . . .	12
1.2.2 Le modèle de LARKIN . . . . .	13
1.3 Périodicité et désordre: le verre de Bragg . . . . .	14
1.3.1 Périodicité et désordre . . . . .	14
1.4 Conclusion: le problème des défauts topologiques . . . . .	16

## Défauts topologiques bidimensionnels et gaz coulombiens 19

<b>2 Vortex et gaz coulombiens scalaires</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Modèles XY et superfluides . . . . .	25
2.2.1 Fluctuations de phase: élasticité . . . . .	25
2.2.2 Les défauts topologiques: les vortex . . . . .	26
2.2.3 Hélicité et fonctions de corrélations . . . . .	29
2.3 Modèle sur réseau: action de VILLAIN . . . . .	31
2.4 Transition de KOSTERLITZ-THOULESS . . . . .	34
2.4.1 Equations de renormalisation . . . . .	35
2.4.2 Etude de la transition . . . . .	36
2.4.3 Transition du premier ordre à grande fugacité . . . . .	38
2.5 Du gaz de Coulomb au modèle de Sine-Gordon . . . . .	39
2.5.1 Equivalence entre le gaz de Coulomb et le modèle de Sine-Gordon . .	40
2.5.2 Approximation de VILLAIN du modèle de Sine-Gordon . . . . .	41

2.6	Effet d'un champ à symétrie $\mathbb{Z}_p$ : le gaz coulombien électromagnétique . . . .	42
2.7	Conclusion . . . . .	43
Annexe A	Potentiel coulombien bidimensionnel . . . . .	45
Annexe B	Renormalisation du gaz électromagnétique . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Dislocations et gaz coulombiens vectoriels</b>	<b>53</b>
3.1	Ordres translationnel et orientationnel dans un solide bidimensionnel . . . .	55
3.1.1	Énergie de HALPERIN-GINZBURG-LANDAU d'un solide bidimensionnel	56
3.1.2	Description élastique des déformations du solide . . . . .	57
3.1.3	Fluctuations élastiques . . . . .	59
3.2	La transition de KOSTERLITZ-THOULESS-HALPERIN-NELSON-YOUNG . . .	61
3.2.1	Défauts topologiques du solide bidimensionnel : dislocations et disli- naisons . . . . .	61
3.2.2	Interaction entre dislocations : le gaz coulombien vectoriel . . . . .	64
3.2.3	Constantes élastiques renormalisées . . . . .	65
3.2.4	Equations de renormalisation de HALPERIN-NELSON-YOUNG . . . .	68
3.2.5	Etude de la transition . . . . .	72
3.2.6	Ordre orientationnel et seconde transition . . . . .	75
3.3	Effet d'un substrat ordonné . . . . .	76
3.3.1	Substrat incommensurable : stabilisation de la phase hexatique . . . .	76
3.3.2	Substrat commensurable : arguments qualitatifs . . . . .	79
3.4	Réalisations expérimentales de la fusion bidimensionnelle . . . . .	80
3.5	Conclusion . . . . .	81
Annexe A	Dislocations bidimensionnelles . . . . .	82
A.1	Champ de déplacement . . . . .	82
A.2	Fonctions d'Airy . . . . .	85
A.3	Transformée de Fourier de l'interaction entre dislocations . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Défauts topologiques bidimensionnels en présence de désordre et gaz cou- lombiens désordonnés : approche par le groupe de renormalisation</b>	<b>87</b>
4.1	Modèle XY en présence d'un champ magnétique aléatoire . . . . .	88
4.1.1	Moyenne sur le désordre et modèle répliqué . . . . .	89
4.1.2	Analyse par le groupe de renormalisation . . . . .	91
4.1.3	Modèle sans défaut topologique : la phase vitreuse de CARDY et OST- LUND . . . . .	94
4.1.4	Instabilité de la phase vitreuse vis-à-vis des défauts . . . . .	97
4.1.5	Conclusion . . . . .	98
4.2	Modèle XY avec déphasage aléatoire . . . . .	99
4.2.1	Équations de renormalisation et diagramme des phases . . . . .	100
4.2.2	Caractéristique des deux phases . . . . .	101
4.3	Conclusion . . . . .	101
Annexe A	Équations de renormalisation de CARDY-OSTLUND . . . . .	103

# Résultats de la thèse

<b>Défauts topologiques et désordre</b>	<b>105</b>
<b>5 Plans couplés de vortex en présence de désordre</b>	<b>111</b>
5.1 Introduction . . . . .	111
5.2 Le modèle . . . . .	114
5.2.1 Le modèle à un plan de vortex . . . . .	114
5.3 Analyse par le groupe de renormalisation . . . . .	117
5.3.1 Etude de renormalisation <i>via</i> le groupe de renormalisation . . . . .	117
5.3.2 Le modèle à deux plans . . . . .	120
5.3.3 Analyse du modèle à $N$ plans. . . . .	122
5.4 La méthode variationnelle avec répliques . . . . .	126
5.4.1 Le modèle de LARKIN . . . . .	127
5.4.2 Le modèle complet à $N$ plans . . . . .	130
5.4.3 Etude des transitions . . . . .	134
5.5 Effets d'un désordre corrélé . . . . .	137
5.6 Conclusion . . . . .	142
Annexe A Equations variationnelles . . . . .	144
Annexe B Solutions des équations variationnelles . . . . .	145
B.1 Solution à BSR complète . . . . .	145
B.2 Solutions à un niveau de BSR . . . . .	147
Annexe C Quelques intégrales utiles à la lecture de ce chapitre . . . . .	149
<b>Article 1: Stability of the Bragg glass phase in a layered geometry</b> . . . . .	<b>151</b>
<b>6 Fusion d'un cristal bidimensionnel en présence d'un substrat désordonné</b>	<b>153</b>
6.1 Réalisations expérimentales: films supraconducteurs sous champ magnétique	154
6.1.1 Un réseau d'Abrikosov bidimensionnel . . . . .	155
6.1.2 Transport de flux dans des canaux: M.H. Theunissen et al. . . . .	156
6.1.3 Réponse du réseau de vortex à une courant alternatif: A. Yazdani et al. . . . .	160
6.2 Solide cristallin en présence de désordre de substrat: étude en l'absence de dislocations . . . . .	165
6.2.1 Description élastique du solide en présence de désordre . . . . .	165
6.2.2 Gaz de Coulomb avec charges vectorielles . . . . .	170
6.2.3 Analyse de la statique par le groupe de renormalisation . . . . .	171
6.2.4 Étude de la dynamique par renormalisation . . . . .	175
6.3 Effet des impuretés du film cristallin sur la fusion bidimensionnelle . . . . .	177
6.3.1 Description du modèle . . . . .	177
6.3.2 Renormalisation . . . . .	180
6.3.3 Diagramme des phases . . . . .	182
6.4 Solide cristallin en présence de désordre de substrat: modification de la fusion bidimensionnelle . . . . .	183

6.4.1	Dislocations et désordre en dimension deux : le gaz de Coulomb vectoriel électromagnétique . . . . .	183
6.4.2	Étude du solide désordonné : équations de renormalisation . . . . .	188
6.4.3	Retour sur le cas du désordre de grande longueur d’onde . . . . .	191
6.4.4	Absence de fusion d’un solide désordonné, sans substrat périodique ( $\gamma = 0$ ) . . . . .	194
6.4.5	Conséquences expérimentales . . . . .	201
6.4.6	Réseau de bulles magnétiques . . . . .	203
6.5	Perspectives et prolongements de l’approche par les gaz de Coulomb vectoriels	204
Annexe A	Symétrie statistique et fonctions de corrélations pour le modèle élastique	205
Annexe B	Renormalisation du gaz de Coulomb vectoriel électromagnétique . . .	207
B.1	Reparamétrisation . . . . .	208
B.2	Fusion de charges . . . . .	209
B.3	Annihilation de charges . . . . .	210
<b>Article 2</b>	Glass phase of two-dimensional triangular elastic lattices with disorder	217
<b>Article 3</b>	Melting of two-dimensional solids on disordered substrates . . . . .	219
<b>7</b>	<b>Gel des défauts en présence de désordre à basse température</b>	<b>221</b>
7.1	Introduction . . . . .	221
7.2	Nouvelle transition dans le modèle XY avec déphasage aléatoire . . . . .	223
7.2.1	Le modèle XY avec déphasage aléatoire : rappels, et gaz de Coulomb	223
7.2.2	Argument d’énergie à un vortex . . . . .	224
7.2.3	Modification de la renormalisation . . . . .	227
7.3	Renormalisation et équation de Kolmogorov-Pétrovskii-Piscounov . . . . .	228
7.3.1	Retour sur la limite au continu du gaz de Coulomb désordonné, et énergies de coeur aléatoires . . . . .	228
7.3.2	Équations de renormalisation et répliques . . . . .	229
7.3.3	Équation de renormalisation non linéaire et fonctionnelle génératrice des moments de $P(z)$ . . . . .	236
7.3.4	L’équation de Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov et le problème de la sélection de la vitesse . . . . .	240
7.3.5	Étude de la transition induite par le désordre à $T = 0$ . . . . .	246
7.4	Transition de gel et modèle à un vortex . . . . .	253
7.4.1	Une particule dans un potentiel désordonné $d$ -dimensionnel . . . . .	254
7.4.2	Renormalisation du problème à une particule en dimension $d$ . . . . .	255
7.4.3	Lien avec le polymère dirigé sur l’arbre de Cayley, et “processus de branchements” . . . . .	259
7.4.4	Les fonctions d’onde critiques de fermions de Dirac désordonné en dimension 2 . . . . .	261
7.4.5	Approche de renormalisation et spectre multifractal . . . . .	262
7.5	Conclusion et perspectives . . . . .	263
<b>Article 4</b>	Disordered XY and CG models : Renormalization via Travelling waves	265
<b>Conclusion de la thèse</b>		<b>267</b>

Bibliographie de la thèse	269
Index	274

# Notations

Tout au long de cette thèse, les différentes contraintes ont malheureusement conduit à des différences de notation entre différents chapitres, qui ne pouvaient être réduites. Je résume ici les correspondances entre ces notations.

	Notation	Signification	Correspondance
Chapitre 2 :	$K$	raideur/hélicité	$J$ au chapitre 7
	$n * G * n$	$\sum_{\alpha \neq \beta} n_{\alpha} G(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) n_{\beta}$	valable dans toute la thèse
	$G(\mathbf{r})$	potentiel coulombien “soustrait”	valable dans toute la thèse
	$\Phi(\mathbf{r})$	partie imaginaire du logarithme	valable dans toute la thèse
Chapitre 3 :	$K_A$	constante de Franck	cf $K$ au chapitre 2
Chapitre 4 :	$p$	nombre de répliques	correspond à $m$ au chapitre 7 à ne pas confondre avec le paramètre du clock modèle (chap. 2)
Chapitre 7 :	$J$	raideur/hélicité	$K$ au chapitre 2
	$K$	$J/T$	Attention à la différence avec le chapitre 2

TAB. 1 –

# Introduction générale de la thèse

La motivation initiale des travaux présentés dans cette thèse provient de la physique des supraconducteurs sous champ magnétique. Depuis le travail d'ABRIKOSOV dans les années cinquante, nous savons que dans certains supraconducteurs, ceux de type II, ce champ magnétique pénètre dans l'échantillon sous forme de quanta de flux localisés : les vortex magnétiques (Tinkham 1980). Ces vortex s'arrangent sous la forme d'un réseau stable : le réseau d'ABRIKOSOV. La physique du supraconducteur peut alors être déterminée d'après les caractéristiques de ce réseau, en oubliant la nature précise de la supraconductivité microscopique.

L'étude de la supraconductivité, et au delà une grande partie de la matière condensée, a été complètement transformée par la découverte en 1986 de nouveaux composés supraconducteurs, dont la température critique est plus élevée que celle des supraconducteurs conventionnels ( $T_c \sim 100 K$ ). Rapidement il est devenu clair que cette nouvelle famille de composés ne pouvait pas être décrite par la théorie microscopique habituelle : la théorie BCS. Il n'existe pas à l'heure actuelle d'explication communément admise du mécanisme à l'origine de cette nouvelle supraconductivité. Malgré cela des progrès étonnants ont été réalisés dans l'étude de ces composés sous champ magnétique. En effet tous ces matériaux sont des supraconducteurs de type II, c'est à dire qu'au delà d'un champ seuil, le champ magnétique les pénètre sous forme d'un réseau d'ABRIKOSOV. En étudiant le comportement de ce réseau d'ABRIKOSOV, nous pouvons déduire celui du supraconducteur bien que nous n'ayons pas de théorie microscopique. Nous nous retrouvons donc dans la situation où nous savons, expérimentalement, que le composé est supraconducteur et qu'il se forme un réseau d'ABRIKOSOV, bien que nous ne connaissions pas l'origine de cette supraconductivité. De cette constatation il est cependant possible de dériver une étude phénoménologique du supraconducteur sous champ magnétique avec pour postulat de base ce réseau d'ABRIKOSOV. Certaines propriétés du composé sont prédites par cette théorie, qui court-circuite le problème microscopique.

## La “matière de vortex”

L'arrivée de ces nouveaux composés supraconducteurs a complètement modifié la compréhension de la phase d'ABRIKOSOV. Jusqu'alors cette phase d'ABRIKOSOV était vue comme un arrangement régulier des vortex magnétiques qui formaient un réseau hexagonal. Il était apparu cependant que des impuretés, qui détruisent localement la supraconductivité, pou-

---

Tinkham M., (1980). *Introduction to superconductivity*. Krieger.



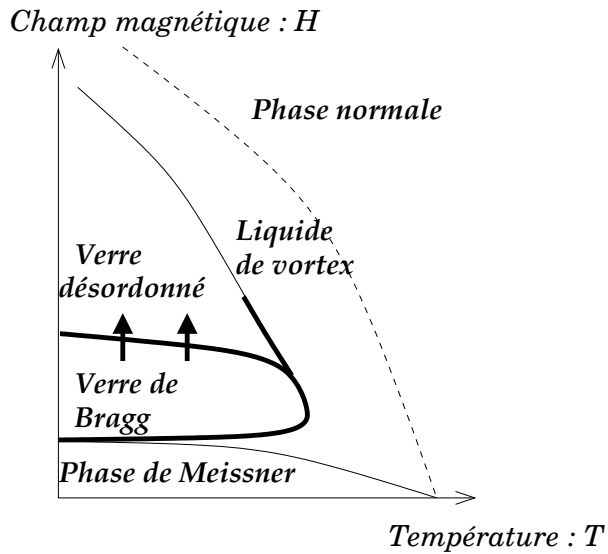


FIG. 1 – Diagramme des phases schématisé des supraconducteurs à haute température critique (YBaCuO). À basse température et faible champ une phase quasi-ordonnée existe : le verre de BRAGG. Lorsque la température est augmentée, cette phase fond. Elle est donc remplacée par un liquide de vortex. Finalement à basse température, le désordre augmente avec le champ magnétique et induit une transition vers une phase amorphe, qui pourrait être un verre de vortex. La ligne en pointillé entre le liquide de vortex et la phase normale correspond à une ligne de cross-over.

vaient accrocher le coeur des vortex, constitué d'une région de phase normale (De Gennes 1966, Larkin 1970).

Plusieurs caractéristiques des nouveaux composés ont cependant conduit à un réexamen complet de la nature de ce réseau de vortex. En effet, dans ces supraconducteurs, les fluctuations thermiques jouent un rôle bien plus important que dans les supraconducteurs conventionnels. D'une part la température critique étant bien plus grande, la phase d'ABRIKOSOV existe jusqu'à des températures de plusieurs dizaines de kelvins. D'autre part certains de ces composés sont extrêmement anisotropes : la supraconductivité apparaît dans des plans parallèles les uns aux autres. Le vortex ressemble alors à un empilement de "galettes" planaires, qui chacune fluctue dans le plan supraconducteur. Or les fluctuations thermiques sont beaucoup plus importantes en dimension deux qu'en dimension trois : les déformations correspondantes du vortex-empilement ne peuvent plus être négligées.

Une autre source de déformation des vortex, et donc du réseau qu'ils forment *a priori*, provient des impuretés du supraconducteur. Comme nous venons de le voir ces impuretés piègent les vortex. Or les nouveaux supraconducteurs sont des composés à la structure chimique complexe, et qui présente une assez grande inhomogénéité cristalline, en particulier des lacunes en oxygène. Dans ces composés le réseau de vortex est donc soumis aux fluctuations thermiques et aux forces de piégeage qui peuvent induire de grandes déformations par rapport à un réseau parfait. Cette situation a motivée de très nombreux travaux théoriques qui ont complètement renouvelé l'étude générale des systèmes élastiques en présence de désordre. En particulier le réseau d'ABRIKOSOV initial a été remplacé par différentes phases : la dénomination de "matière de vortex" est apparue (Crabtree & Nelson 1997). En effet, par analogie avec les phases habituelles d'un corps composé d'atomes, un ensemble de vortex (lignes de flux) peut, selon les valeurs du champ magnétique et la

De Gennes P., (1966). *Superconductivity of metals and alloys*. Benjamin, (New York).

Larkin A., (1970). *Soviet Physics JETP*, **31**:784.

Crabtree G. & Nelson D., (1997). *Physics Today*, **April**.

température, se comporter comme un *solide de vortex*, ou comme un *liquide de vortex* (figure 1). Dans le premier cas les interactions entre vortex l'emportent et ces derniers s'arrangent de façon régulière, alors que dans le second cas les fluctuations prédominent et le réseau d'ABRIKOSOV est détruit.

Une question demeure cependant en suspend après ces premières études : quel est l'effet du désordre sur le diagramme des phases de cette "matière de vortex" ? En effet solide et liquide de vortex sont obtenus en ne tenant compte que des interactions entre vortex et des fluctuations thermiques (Blatter, Feigel'man, Geshkenbein, Larkin & Vinokur 1994). L'accrochage par les impuretés du réseau de vortex est par ailleurs crucial pour la supraconductivité. En effet, en l'absence d'impuretés un réseau d'ABRIKOSOV parfait peut sans problème se mettre en mouvement en réponse à un petit courant  $j$  qui exerce une petite force de Lorentz sur les vortex. Ces lignes de flux en mouvement induisent à leur tour une tension  $U$  proportionnelle au courant : le composé possède maintenant une résistivité finie, il n'est plus supraconducteur ! Il est ainsi fondamental de pouvoir accrocher ce réseau pour rétablir une supraconductivité en présence d'un champ magnétique (De Gennes 1966). L'effet du désordre sur le réseau d'ABRIKOSOV a donc un intérêt d'une part fondamental dans la détermination de la nature des phases du supraconducteur, mais également pratique dans la caractérisation d'une éventuelle supraconductivité sous champ magnétique.

### Réseau élastique et désordre : le verre de BRAGG

L'effet d'un désordre sur un liquide est assez intuitif : cette phase est déjà désordonnée, et le désordre ne peut qu'augmenter les déformations. Ainsi rien ne se passe de fondamental sur ce liquide. Par contre le comportement d'une phase solide en présence de désordre est un problème complexe. Plus généralement, il peut être formulé comme celui du comportement d'un système élastique en présence de piégeage par le désordre. C'est dans ce cadre général que s'inscrit le travail de cette thèse.

Plusieurs études récentes ont portées sur ce problème. Revenons pour l'instant sur la nature du désordre qui interagit avec le réseau élastique (ici le réseau de vortex). Ce désordre provient du composé supraconducteur et n'est donc pas solidaire du réseau de vortex : il s'agit d'un désordre de substrat, qui doit être différencié d'impuretés qui serait lié au réseau élastique lui-même. Ces impuretés du substrat piègent les vortex. Une première idée est donc de les représenter par des forces aléatoires locales qui agissent sur les vortex. LARKIN, en 1970, a montré que ces impuretés piégeaient un réseau même si leur force de piégeage individuel était faible (Larkin 1970). Dans ce cas en effet le réseau reste localement ordonné, et il suffit de piéger un vortex pour que ses voisins le soient également : on parle alors de *piégeage collectif du réseau*.

Les premières études prédisaient que cet accrochage collectif des vortex détruisait complètement l'ordre du réseau. La phase obtenue était une phase amorphe vitreuse appelée *verre de vortex* (Fisher, Fisher & Huse 1990). Il n'a été réalisé que plus tard que la périodicité du réseau empêchait sa destruction complète par le désordre (Giamarchi & Le Doussal

---

Blatter G., Feigel'man M., Geshkenbein V., Larkin A., & Vinokur V., (1994). *Rev. Mod. Physics*, **66**:1125–1388.

Fisher D., Fisher M., & Huse D., (1990). *Phys. Rev. B*, **43**:130–159.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1994). *Phys. Rev. Lett.*, **72**:1530.

1994). En effet, un substrat désordonné couplé à un réseau périodique élastique donne naissance à une phase dans laquelle les corrélations translationnelles décroissent algébriquement (Nattermann 1990, Giamarchi & Le Doussal 1995). Le facteur de structure de cette phase se rapproche donc de celui d'un solide, avec des pics de BRAGG algébriques au lieu de pics exponentiels. Cette propriété a conduit à la dénomination de *verre de BRAGG* pour cette phase. Celle-ci est donc une phase localement ordonnée, dans laquelle le désordre induit des fluctuations qui croissent logarithmiquement avec la distance. Elle constitue donc l'analogie en présence de désordre de la phase d'ABRIKOSOV initiale, avec cependant des propriétés différentes.

## Dislocations et désordre

Une fois cette phase établie, nous pouvons nous intéresser à son domaine d'existence dans le diagramme des phases des supraconducteurs. Lorsque la température est augmentée, nous nous attendons à ce que ce verre de BRAGG quasi-ordonné fonde comme un solide tridimensionnel selon une transition du premier ordre.

Lorsque le champ magnétique est augmenté, l'intensité du piégeage collectif du réseau augmente également (Blatter et al. 1994). Ce désordre déforme sans doute le réseau, et nous nous attendons à une phase désordonnée à fort désordre, c'est-à-dire à fort champ magnétique (voir figure 1). Ces déformations du réseau peuvent être décrites par une prolifération de dislocations induites ici par le désordre. La description de la transition entre le verre de BRAGG et cette phase désordonnée, notée par une flèche sur le diagramme 1, a été la motivation des nombreux travaux récents. C'est un problème complexe et pour l'instant non résolu. Au delà de cette transition, c'est l'étude générale des déformations de tout réseau accroché par un substrat désordonné qui est posée et est abordé à travers les travaux présentés dans cette thèse.

Les grandes déformations d'un réseau élastique sont habituellement décrites à l'aide de la notion de défaut topologique (Chaikin & Lubensky 1995). Dans le cas de réseau cristallin, il s'agit des dislocations. Lorsque les déformations augmentent, les dislocations deviennent plus nombreuses. Elles détruisent peu à peu l'ordre du réseau initial. Étudier la destruction d'une phase ordonnée par le désordre revient donc à étudier la création de ces dislocations (ou plus généralement des défauts topologiques) par ce désordre. Cependant même en l'absence de désordre les dislocations sont des objets difficiles à étudier. Ainsi la transition de fusion d'un solide pourrait en principe être décrite à l'aide des dislocations. Malheureusement cela n'est possible analytiquement qu'en dimension deux (Chaikin & Lubensky 1995).

Les travaux que je vais présenter vont donc naturellement s'appuyer sur les études menées dans le cas pur. Celles-ci ont été faites essentiellement en dimension 2. Afin de les étendre à la présence d'un désordre, je vais donc commencer par présenter ces travaux antérieurs dans les chapitres 2 et 3. Cette présentation sera faite dans l'esprit d'introduire

---

Nattermann T., (1990). *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2454.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

Blatter G., Feigel'man M., Geshkenbein V., Larkin A., & Vinokur V., (1994). *Rev. Mod. Physics*, **66**:1125–1388.

Chaikin P. & Lubensky T., (1995). *Principles of condensed matter physics*. Cambridge Univ. Press.

et de faciliter les études en présence de désordre. Le point de vue sera souvent pédagogique : dans ce but nous nous sommes efforcé dans le chapitre 3 de développer une présentation originale de la fusion bidimensionnelle, basée sur le travail de HALPERIN et NELSON (Nelson & Halperin 1979).

Après cette introduction, nous pourrions passer aux différentes études que j'ai menées en présence de désordre. Au chapitre 5 nous considérerons la situation d'un supraconducteur dans lequel le champ magnétique est aligné avec les plans supraconducteurs (plans de  $CuO_2$ ). Dans ce cas les vortex magnétiques se situent dans ces plans parallèles les uns aux autres. Une étude théorique est possible, bien que le problème soit tridimensionnel : ce travail a permis de mettre en évidence pour la première fois la transition indiquée sur le diagramme 1, simultanément avec un autre groupe (Kierfeld, Nattermann & Hwa 1997).

La suite de la thèse concerne essentiellement les réseaux bidimensionnels, correspondant au réseau d'ABRIKOSOV dans un film supraconducteur en champ magnétique transverse. Au chapitre 6 je présenterai l'étude générale d'un cristal bidimensionnel en présence d'un substrat désordonné. Ce travail généralise ainsi l'étude de la fusion en dimension deux de HALPERIN et NELSON, et montre que cette transition disparaît en présence d'un substrat désordonné. Finalement le dernier chapitre abordera le problème difficile du gel des défauts topologiques à basse température en présence de désordre. Ce problème a nécessité le développement d'outils nouveaux, qui peuvent par ailleurs s'appliquer à d'autres problèmes que nous décrirons.

L'ensemble des résultats de cette deuxième partie est résumé après cette introduction, avec une présentation de l'organisation de la thèse.

---

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

Kierfeld J., Nattermann T., & Hwa T., (1997). *Phys. Rev B*, **55**:626.



# Chapitre 1

## Accrochage collectif du réseau de vortex dans les supraconducteurs

Dans ce premier chapitre introductif, je vais rapidement rappeler quelques notions à propos de l'accrochage collectif d'un réseau élastique par un substrat désordonné. Ce chapitre n'a pas pour but une introduction à la richesse de la nouvelle physique des vortex dans les supraconducteurs à haute température critique. Il existe sur ce sujet des revues très complètes : (Blatter et al. 1994, Feinberg 1994, Giamarchi & Le Doussal 1998). Je ne vais ici m'intéresser qu'à un seul aspect de cette physique : l'accrochage du réseau par les impuretés du supraconducteur, qui détermine les phases de vortex à basse température. Je considérerai un supraconducteur isotrope, dans lequel je négligerai la structure en "galettes" des vortex, comme dans les matériaux très anisotropes (BiSCaCuO). Le but de ce chapitre est d'introduire les idées et concepts indispensables à la compréhension et à la motivation des travaux originaux présentés dans la suite de la thèse.

### 1.1 Approche phénoménologique des supraconducteurs : le réseau d'Abrikosov

L'étude dans le cadre de la théorie de l'élasticité du comportement du réseau d'ABRIKOSOV est basée sur l'approche phénoménologique de la phase mixte des supraconducteurs : la théorie de GINZBURG-LANDAU. Rappelons avant de commencer qu'un supraconducteur est caractérisé par deux propriétés : sa conductivité infinie et l'expulsion d'une faible champ magnétique de son volume.

---

Blatter G., Feigel'man M., Geshkenbein V., Larkin A., & Vinokur V., (1994). *Rev. Mod. Physics*, **66**:1125–1388.

Feinberg D., (1994). *J. Phys. III*, **4**:169–208.

Giamarchi T. & Le Doussal P. *Statics and Dynamics of Disordered Elastic Systems*, chapter 11. A.P. Young, 1998.

### 1.1.1 Énergie de GINZBURG-LANDAU

Une grande partie des propriétés sous champ des supraconducteurs conventionnels peut être décrite à l'aide d'une théorie phénoménologique introduite par Ginzburg et Landau (Ginzburg & Landau 1950). Cette théorie postule l'existence d'un paramètre d'ordre complexe pour la supraconductivité  $\psi = |\psi|e^{i\theta}$ . L'amplitude de ce paramètre s'annule donc dans la phase normale du composé. Autour de la température critique  $T_c$  cette amplitude est faible, et si on suppose des variations lentes dans l'espace de ce paramètre d'ordre, on peut développer l'énergie libre en puissance de l'amplitude  $|\psi|$  et de ses dérivées. On obtient ainsi l'énergie libre de Ginzburg-Landau.

$$F = F_{normal} + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{4\pi} \quad (1.1)$$

Dans cette expression  $m^*$  est la masse effective des électrons (Tinkham 1980).  $\alpha$  est un paramètre qui s'annule à la température critique, et se comporte linéairement en l'écart à cette transition :  $\alpha(T) \simeq \alpha_0(T - T_c)$ .

Dans cette approche, la densité  $n_s$  d'électrons supraconducteurs (paires de Cooper) est donnée par le module au carré du paramètre d'ordre :  $n_s = |\psi|^2$ . Cette densité s'annule bien au passage vers la phase normale. Pour les supraconducteurs conventionnels, cette énergie effective de GINZBURG-LANDAU a été dérivée à partir de la théorie microscopique BCS par GORKOV. Dans le cas des supraconducteurs à haute température critique, cette énergie est le postulat de base de toute l'approche phénoménologique des supraconducteurs sous champ magnétique<sup>1</sup>. Deux longueurs caractéristiques fondamentales sont dérivées de cette forme de GINZBURG-LANDAU.

#### Longueurs caractéristiques

La première est la longueur de cohérence de la phase supraconductrice dans cette approche de GINZBURG-LANDAU. Cette longueur, notée  $\xi_{GL}$  ou simplement  $\xi$ , caractérise la décroissance de la norme du paramètre d'ordre  $|\psi|(\mathbf{r})$  à une interface entre la phase supraconductrice et une phase normale : voir la figure 1.1. L'étude de cette interface à l'aide de l'énergie de GINZBURG-LANDAU conduit à l'expression suivante en fonction des paramètres de cette énergie :

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{4m^*|\alpha|}} \quad (1.2)$$

Autour de la transition vers l'état normal, cette longueur se comporte donc comme  $\xi \sim 1/\sqrt{T_c - T}$ .

La deuxième longueur fondamentale caractéristique d'un supraconducteur est la longueur de pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur, ou longueur de pénétration de LONDON  $\lambda_L$ . Comme son nom l'indique, elle caractérise la décroissance du

---

1. Les déviations, souvent faibles, dues à une possible symétrie  $d$  du paramètre d'ordre, ont été également examinées récemment.

---

Ginzburg V. & Landau L., (1950). *Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz.*, **20**:1064.

Tinkham M., (1980). *Introduction to superconductivity*. Krieger.

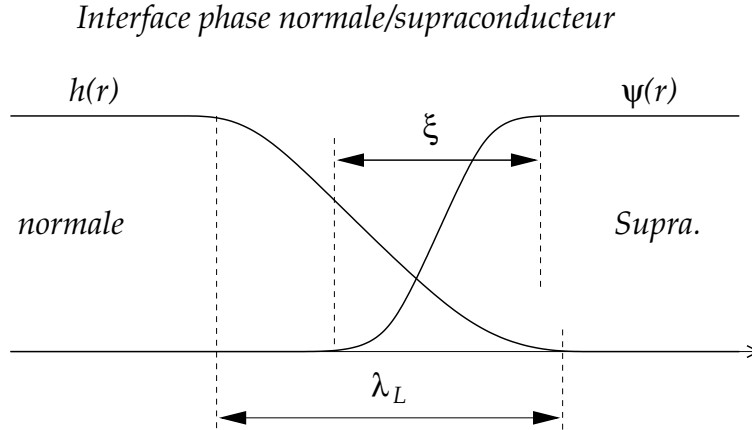


FIG. 1.1 – Schéma de l’interface entre une phase supraconductrice et une phase normale. Les deux longueurs caractéristiques  $\xi$  et  $\lambda_L$  ont été représentées.

champ magnétique à l’intérieur de l’échantillon supraconducteur. Cette longueur s’exprime comme

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*c^2}{4\pi n_s e^2}} \quad (1.3)$$

où  $n_s$  est la densité de porteurs de charge.

Un supraconducteur “classique” correspond à une grande longueur de cohérence de l’état supraconducteur :  $\xi \sim 3000 \text{ \AA}$ , et une plus petite longueur de pénétration  $\lambda_L \sim 500 \text{ \AA}$ . L’importance relative de ces deux longueurs est inversé dans les supraconducteurs à haute température critique. Des valeurs typiques sont :  $\xi \lesssim 100 \text{ \AA}$ ,  $\lambda \gtrsim 1000 \text{ \AA}$ . En effet ces composés sont caractérisés par une densité de “paires de Cooper” beaucoup plus faible : dans ce cas le *rapport de Ginzburg*  $\kappa = \lambda_L/\xi$  est plus grand que un. Or il existe deux grandes classes de supraconducteur : les supraconducteurs de type I pour lesquels  $\kappa < 1$ , et les supraconducteurs de type II avec  $\kappa > 1$ . Dans ces derniers, au delà d’une valeur seuil  $H_{c1}$ , le champ magnétique  $H$  pénètre l’échantillon sous la forme de quantum de flux  $\phi_0 = hc/2e$  localisé : les vortex magnétiques. Dans les supraconducteurs de type I, cette *phase mixte* n’existe pas : à faible champ, comme dans les supraconducteurs de type II, le champ magnétique est expulsé de l’échantillon. Lorsque ce champ magnétique est augmenté au delà d’une valeur seuil  $H_c$ , la supraconductivité est détruite.

### 1.1.2 Le réseau d’ABRIKOSOV

Revenons donc aux supraconducteurs de type II qui nous intéressent dans cette thèse. Ils sont donc caractérisés par une longueur de cohérence plus petite que la longueur de pénétration : dans ce cas l’énergie de surface à l’interface supra/normal est négative (De Gennes 1966). Ce signe entraîne la présence d’une phase mixte. Dans celle-ci le champ magnétique

---

De Gennes P., (1966). *Superconductivity of metals and alloys*. Benjamin, (New York).



pénètre l'échantillon le long de vortex, dont le coeur est une région normale de taille  $\xi$ . Autour, comme dans toute interface phase normale/supraconducteur, le champ magnétique décroît sur une longueur  $\lambda_L$ . Ces vortex interagissent et forment, dans un supraconducteur isotrope, un réseau triangulaire parfait: le réseau d'ABRIKOSOV. Le pas  $a_0$  de ce réseau, et donc la densité  $n_v = 2/(\sqrt{3}a_0^2)$  de vortex, dépend de l'intensité du champ magnétique qui pénètre l'échantillon:  $a_0^2 = (2/\sqrt{3}) \phi_0/B$ . À faible champ magnétique, le réseau de vortex est donc peu dense, cependant lorsque le champ magnétique augmente, les zones de pénétration du champ magnétique autour des vortex peu à peu s'interpénètrent. Au delà d'une valeur  $H_{c2}$ , ce champ pénètre uniformément l'échantillon et la supraconductivité est perdue.

### Interaction entre vortex

Dans la phase mixte  $H_{c2}(T) \geq H \geq H_{c1}(T)$  du supraconducteur de type II, les vortex magnétiques interagissent les uns avec les autres. Cette interaction provient du couplage entre les supercourants qui circulent autour du quantum de flux de chaque vortex pour l'écranter. Elle dépend donc naturellement du champ magnétique résiduel autour du vortex, et donc de la distance  $r$  au coeur du vortex. Son expression peut être approchée par :

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \simeq \begin{cases} \frac{\phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \log \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\lambda_L} & \text{pour } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll \lambda_L \\ \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}} \frac{\phi_0}{2\pi\lambda_L^2} \exp - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\lambda_L} & \text{pour } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \lambda_L \end{cases} \quad (1.4)$$

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons considéré implicitement un supraconducteur tridimensionnel isotrope. Dans certains matériaux récents à haute température critique (tels que ceux de la famille des BiSCaCuO), la supraconductivité a essentiellement lieu dans des régions planaires, localisées autour des plans de dioxyde de Cuivre  $\text{CuO}_2$ . Ces plans sont séparés par des régions isolantes. Un champ magnétique orthogonal à ces plans supraconducteurs va donc, dans la phase mixte, donner naissance à des vortex planaires (des "galettes") dans les plans, couplés par des vortex Josephson dans les couches isolantes. Le vortex est ainsi saucissonné par cette anisotropie. Dans cette thèse nous ne considérerons cette anisotropie qu'au chapitre 5: dans ce chapitre la situation où le champ magnétique est aligné avec les plans de  $\text{CuO}_2$  sera examinée. Dans ce cas les vortex sont donc essentiellement des vortex Josephson.

Dans la suite de ce chapitre nous négligerons tous ces effets d'anisotropie. Certaines de ses conséquences sont discutées dans la revue (Feinberg 1994), ainsi que dans (Blatter et al. 1994).

### 1.1.3 Description élastique

L'étude du réseau d'ABRIKOSOV revient donc, au point où nous en sommes, à considérer le comportement d'un réseau de vortex interagissant les uns avec les autres. Tant que les

---

Feinberg D., (1994). *J. Phys. III*, 4:169–208.

Blatter G., Feigel'man M., Geshkenbein V., Larkin A., & Vinokur V., (1994). *Rev. Mod. Physics*, 66:1125–1388.

déformations par rapport à un réseau idéal ne sont pas trop importantes, il est donc possible de décrire l'état du réseau d'ABRIKOSOV dans le cadre de la théorie de l'élasticité.

Dans ce cadre la position  $\mathbf{r}_i$  de chaque vortex est repérée par rapport à celle  $\mathbf{R}_i^0$  dans un réseau parfait d'origine. La différence entre les deux positions définit donc le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ . Dans notre cas nous avons affaire à des lignes dirigées selon l'axe  $z$  (axe du champ magnétique) : l'état du réseau est donc décrit par un champ de déformation transverse bidimensionnel  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, z)$ , défini en chaque point de l'échantillon  $\mathbf{r}, z$ . La description élastique est valable tant que le déplacement relatif entre deux vortex voisins est faible devant le pas du réseau :  $|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i+1}| \ll a_0$ . Dans cette approximation l'énergie de déformation du réseau fait intervenir trois échelles d'énergies : celle des modes de compression, associés au module d'élasticité  $c_{11}$ ; celle des modes de cisaillement ( $c_{66}$ ); et celle des modes de torsion des lignes de flux ( $c_{44}$ ). L'énergie s'exprime alors selon

$$H_{\text{élast}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{q} dq_z}{(2\pi)^3} [c_{11}(\mathbf{q}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u})^2 + c_{66}(\mathbf{q}) (\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{u})^2 + c_{44}(\mathbf{q}) q_z^2 (\mathbf{u})^2] \quad (1.5)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} dz [(c_{11} - c_{66})(\partial_\alpha u_\alpha)^2 + c_{66}(\partial_\alpha u_\beta)^2 + c_{44}(\partial_z u_\alpha)^2] \quad (1.6)$$

où  $\alpha = 1, 2$  indexe les deux directions dans le plan normal au champ (plan des fluctuations transverses). Pour passer de la première expression à la deuxième, nous devons supposer que les coefficients élastiques ne dépendent pas de la longueur d'onde, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas dispersifs. Dans le cas d'un réseau de vortex *isotrope* tridimensionnel, les modules d'élasticité de compression  $c_{11}(\mathbf{q})$  et de torsion  $c_{44}(\mathbf{q})$  dépendent du mode de Fourier alors que  $c_{66}$  n'en dépend pas (Feinberg 1998b) :

$$c_{11}(\mathbf{q}) = \frac{B^2}{4\pi} \frac{1}{1 + \lambda_L^2 q^2} \quad (1.7a)$$

$$c_{44}(\mathbf{q}) = \frac{B^2}{4\pi} \frac{1}{1 + \lambda_L^2 q^2} + \frac{\epsilon_0}{a_0^2} \ln \frac{1}{q\xi} \quad \epsilon_0 = \left( \frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \quad (1.7b)$$

$$c_{66} \simeq \frac{\phi_0 B}{(8\pi\lambda_L)^2} \quad (1.7c)$$

$\epsilon_0$  correspond à la tension de ligne des ligne de flux. Ces expressions sont valables dans la région  $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}$ . Des expressions plus précises de ces coefficients élastiques peuvent être trouvées dans la revue (Brandt 1995).

A partir de cette énergie d'élasticité, il est possible d'étudier les amplitudes des fluctuations du réseau dues aux différentes sources de déformations : l'agitation thermique d'une part et l'accrochage par les impuretés d'autre part. Ces impuretés correspondent à des régions normales de petites tailles dans le supraconducteur, et nous allons revenir sur les conséquences de leur présence dans un instant. Les fluctuations thermiques ont elles aussi une certaine importance. En utilisant diverses méthodes approchées, plusieurs travaux ont permis de montrer que le réseau de vortex fondait au delà d'un certain champ magnétique. L'étude de cette transition est difficile. La ligne correspondant dans le diagramme  $H - T$

---

Feinberg D. Vortex dans les supraconducteurs haute température. cours donné à l' Ecole ESPCI., 1998.  
Brandt E., (1995). *Reports on Progress in Physics*.

peut être déterminé à l'aide du critère phénoménologique de LINDEMANN (Blatter et al. 1994). Notre étude portant essentiellement sur l'effet du désordre sur le réseau, nous allons maintenant discuter son effet dans le cadre de la théorie de l'élasticité.

## 1.2 Description élastique du réseau en présence d'impuretés : l'accrochage collectif

Le désordre que nous considérons provient donc des impuretés du cristal du supraconducteur. Ces impuretés modifient localement la structure atomique et induisent donc des régions locales de phase normale de taille caractéristique  $\xi_p$ . Le supraconducteur baisse son énergie en faisant coïncider la région normale du coeur du vortex avec ces zones normales autour des impuretés : la conséquence est un accrochage effectif des vortex par ces impuretés ponctuelles de taille  $\xi_p$  (De Gennes 1966). L'origine de ces défauts est d'ailleurs diverse : par exemple des lacunes en oxygène, des dislocations cristallines, etc.

### 1.2.1 Accrochage individuel et accrochage collectif

Ces impuretés accrochent le réseau de vortex. Cet accrochage peut cependant être de deux types différents. La différence entre ces deux types d'accrochage provient de la comparaison entre la force élastique  $f_{el}$  exercée sur un vortex par ses voisins (cette force tient également en compte la rigidité du vortex lui-même), et la force moyenne d'accrochage d'un site  $f_p$ .

Le premier type d'accrochage est un *accrochage individuel des vortex* (voir la figure 1.2). Dans ce cas la force d'accrochage par le désordre  $f_p$  est plus importante que la force élastique  $f_{el}$  : chaque vortex va donc se déformer pour être piégé par les impuretés de son voisinage. Cette situation correspond à peu de sites de piégeage fort.

Le deuxième type de piégeage a été défini par LARKIN (Larkin 1970), et précisé presque dix ans plus tard par LARKIN et OVCHINIKOV (Larkin & Ovchinnikov 1979). L'idée initiale de LARKIN a consisté à remarquer que même dans la situation où l'énergie élastique l'emporte sur l'énergie de piégeage  $f_{el} > f_p$ , le réseau peut être piégé *collectivement* par un ensemble de pièges faibles mais nombreux. Dans ce cas, l'action des nombreux pièges est facilitée par l'énergie élastique : en effet un vortex piégé par les impuretés exerce une force de piégeage effective sur ses voisins par suite de la rigidité du réseau. La situation expérimentale dans les échantillons les plus purs semble correspondre à ce piégeage collectif<sup>2</sup>. Aussi nous allons nous intéresser maintenant à la modélisation de ce *piégeage collectif*.

---

2. D'autres sources de piégeage proviennent de défauts particuliers : ainsi des plans de macles peuvent induire des défauts corrélés sur des grandes distances que nous ne considérerons pas dans cette thèse. De même l'ancrage induit par la rugosité de la surface, qui peut avoir une incidence expérimentale, ne sera pas pris en compte dans cette étude.

---

Blatter G., Feigel'man M., Geshkenbein V., Larkin A., & Vinokur V., (1994). *Rev. Mod. Physics*, **66**:1125–1388.

De Gennes P., (1966). *Superconductivity of metals and alloys*. Benjamin, (New York).

Larkin A., (1970). *Soviet Physics JETP*, **31**:784.

Larkin A. & Ovchinnikov Y., (1979). *J. Low Temp. Phys.*, **34**:409–428.

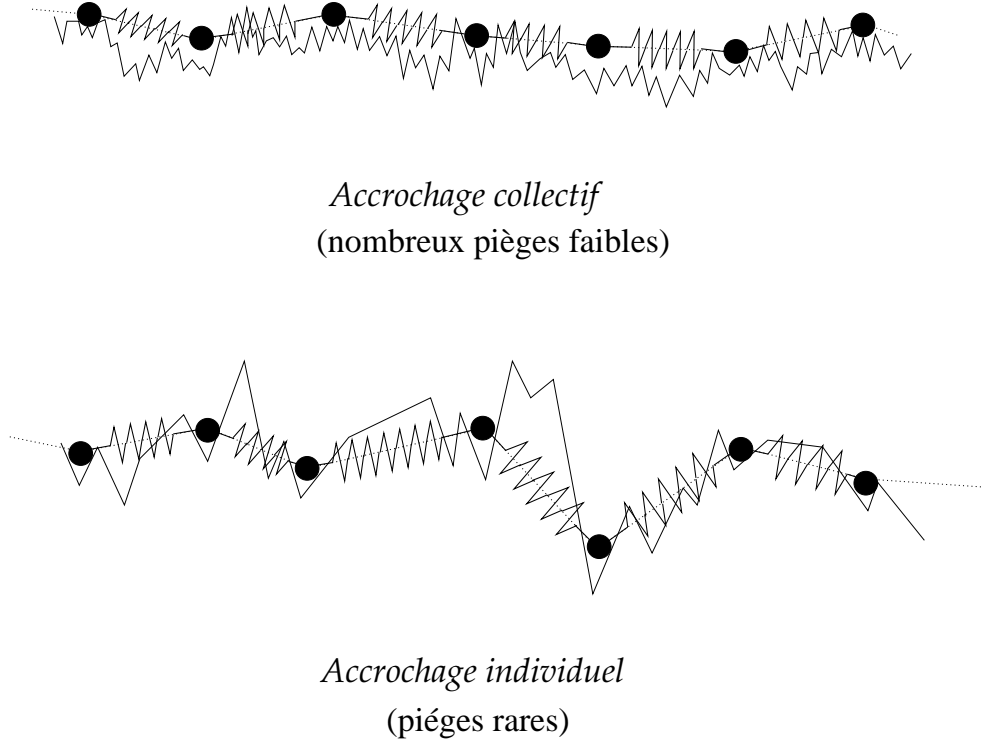


FIG. 1.2 – Représentation d’atomes d’une ligne élastique piégés collectivement (en haut) et individuellement (en bas) par un substrat désordonné.

du réseau d’ABRIKOSOV.

## 1.2.2 Le modèle de LARKIN

La première modélisation de cet accrochage collectif a bien sûr été proposée par LARKIN. Son modèle consistait à représenter l’action des impuretés comme des forces locales aléatoires et indépendantes, agissant sur les vortex. Ces forces étaient cependant corrélées sur une distance correspondant à la taille des sites de piégeage  $\xi_p$ . Le terme additionnel dans le hamiltonien s’écrit dans ce cas

$$H_{\text{Larkin}} = \int d^2\mathbf{r} dz f(\mathbf{r}, z) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, z) \quad (1.8)$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement associé au point  $\mathbf{r}, z$ .

Le modèle défini par le hamiltonien (1.8) ajouté à la partie élastique (1.5) peut alors être étudié simplement. Afin de caractériser l’ordre du réseau, nous pouvons déterminer la fonction de corrélation à deux points du paramètre d’ordre translationnel  $e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r})}$  où  $\mathbf{G}$  est un des premiers vecteurs du réseau réciproque. Cette fonction de corrélation s’écrit

$$C_{\mathbf{G}}(r) = \overline{\langle e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}(0)} \rangle} = e^{-\frac{G^2}{2}\tilde{B}(r)}$$

Dans cette expression et la suite de la thèse, le surlignage correspond à une moyenne sur le désordre, et  $\langle \rangle$  à une moyenne sur les fluctuations thermiques. Nous avons relié ci-dessus

la décroissance de la fonction de corrélation translationnelle à la croissance des corrélations du déplacement relatif :

$$\tilde{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \overline{\langle [\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(0)]^2 \rangle} \quad (1.9)$$

Si nous définissons la *longueur de LARKIN*  $R_c$  comme la distance entre deux points dont le déplacement relatif est d'ordre  $\xi_p$  :

$$|\mathbf{u}(R_c) - \mathbf{u}(0)| \sim \xi_p \quad (1.10)$$

nous obtenons pour le modèle de LARKIN ci-dessus (Giamarchi & Le Doussal 1998) :

$$\tilde{B}(r) = \xi_p^2 \left( \frac{r}{R_c} \right)^{4-d}$$

En dimension inférieure à 4, ces déplacements relatifs croissent comme une puissance de la distance, et les fonctions de corrélations translationnelles décroissent exponentiellement : l'ordre translationnel est détruit par les impuretés.

Nous allons voir cependant que ce modèle simple surestime largement l'effet du désordre à grande distance.

## 1.3 Périodicité et désordre : le verre de Bragg

NATTERMANN, ainsi que GIAMARCHI et LE DOUSSAL ont montré que la modélisation précédente du piégeage collectif cessait d'être valable lorsque les déformations relatives du réseau devenaient plus grandes (Nattermann 1990, Giamarchi & Le Doussal 1995). Pour nous en convaincre, une petite remarque suffira : dans le modèle précédent nous considérons un réseau régulier soumis à ces forces aléatoires. Si nous translatons maintenant le réseau d'une longueur donnée par le pas du réseau, chaque vortex échange sa position avec, disons, son voisin de gauche : du point de vue énergétique rien ne devrait se passer puisque les deux situations sont physiquement indiscernables. Or d'après (1.8) la différence d'énergie d'accrochage entre les deux situations est non nulle. L'origine de ce problème est donc intimement liée à la périodicité du réseau (Giamarchi & Le Doussal 1995). Pour étudier ceci plus en détails, revenons sur la définition de la longueur de LARKIN.

### 1.3.1 Périodicité et désordre

Celle-ci a été définie par  $|\mathbf{u}(R_c) - \mathbf{u}(0)| \sim \xi_p$ . Au delà de cette longueur chaque vortex commence donc à échantillonner plusieurs sites différents de tailles  $\xi_p$ , chacun associé à une force aléatoire. Il s'agit du régime de la "variété aléatoire" dans lequel la périodicité ne joue pas encore de rôle fondamental : chaque vortex est soumis à un accrochage de sites

---

Giamarchi T. & Le Doussal P. *Statics and Dynamics of Disordered Elastic Systems*, chapter 11. A.P. Young, 1998.

Nattermann T., (1990). *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2454.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

différents de ceux agissant sur ses voisins (Blatter et al. 1994). Ceci n'est plus le cas lorsque les déformations relatives deviennent du même ordre que le pas du réseau  $a_0$ . Deux vortex voisins commencent alors à entrer en compétition pour tirer avantage des mêmes sites de piégeage. Ce comportement fait intervenir la périodicité du réseau, et il correspond à des échelles supérieures à une nouvelle longueur : la *longueur de corrélation translationnelle*  $R_a$ . Celle-ci est définie par

$$|\mathbf{u}(R_a) - \mathbf{u}(0)| \sim a_0 \quad (1.11)$$

Tant que  $\xi_p$  est très différente de  $a_0$ ,  $R_c$  est plus petite que  $R_a$ , et il existe trois régimes différents : le régime de LARKIN  $r < R_c$  pour lequel la description ci-dessus reste valable. Le régime de la variété aléatoire  $R_c < r < R_a$ , et le régime du *verre de BRAGG* :  $r > R_a$ . Nous allons voir dans un instant d'où provient cette dénomination. Dans ce dernier régime il nous faut donc revoir la modélisation de l'accrochage par le désordre.

### Couplage du réseau au désordre

Un couplage naturel relie la densité de vortex du réseau régulier à un potentiel  $V(\mathbf{r})$  provenant des impuretés, et donc corrélé sur une longueur  $\xi_p$ . Le terme du hamiltonien correspondant s'écrit :

$$H_{\text{dés}} = \int d^2\mathbf{r} dz \quad \rho(\mathbf{r}, z) V(\mathbf{r}, z) \quad (1.12)$$

La densité  $\rho(\mathbf{r}, z)$  possède la symétrie de translation du réseau (en l'absence de dislocation). Elle se décompose donc en série de Fourier sur les modes propres de ce réseau (voir les détails au chapitre 6) :

$$\rho(\mathbf{r}, z) \simeq \rho_0 \left( 1 - \partial_\alpha u_\alpha + \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, z) e^{i\mathbf{G}\mathbf{u}(\mathbf{r}, z)} \right)$$

où  $V_{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, z)$  est la composante du potentiel  $V$  ayant des modes de Fourier proches du premier vecteur du réseau réciproque  $\mathbf{G}$ .

Avec cette formulation il a été montré, à l'aide d'une méthode variationnelle que nous utiliserons au chapitre 5, que le déplacement relatif augmentait beaucoup plus lentement au delà de  $R_a$  : sa croissance est alors logarithmique (Nattermann 1990, Giamarchi & Le Doussal 1995). Cette faible croissance correspond à une persistance aux grandes distances d'un *quasi-ordre* (ordre algébrique) translationnel. Ce quasi-ordre correspond à des pics de BRAGG algébrique dans le facteur de structure, propriété qui a donné son nom à cette phase de verre de BRAGG (Giamarchi & Le Doussal 1995).

Avant de conclure, je vais revenir sur la longueur de LARKIN et son utilité.

### La longueur de LARKIN et le courant critique

La longueur de LARKIN peut être déterminée par un argument de comportement d'échelle des différentes énergies. En effet, dans la formulation (1.12), le terme d'interaction avec le

---

Blatter G., Feigel'man M., Geshkenbein V., Larkin A., & Vinokur V., (1994). *Rev. Mod. Physics*, **66**:1125–1388.

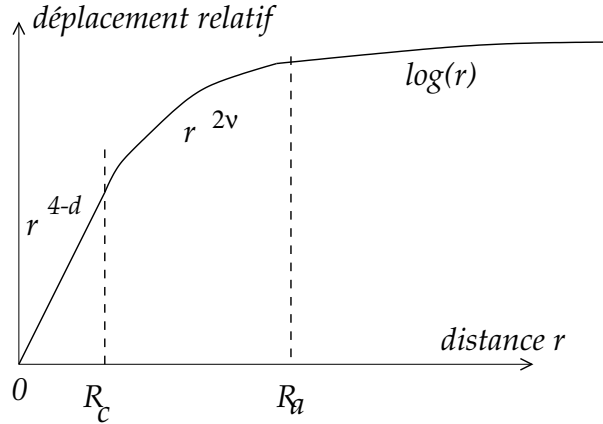


FIG. 1.3 – Représentation des trois régimes de croissance du déplacement relatif en fonction de la distance dans le verre de BRAGG.

désordre  $\int_{\mathbf{r}} e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}} V_{\mathbf{G}}$ , peut être vu comme une marche aléatoire dans un espace de dimension  $d$  (Fukuyama & Lee 1978). L'énergie correspondante se comporte donc comme la racine du nombre de sites rencontrés :

$$R_c^d c_{66} \left( \frac{\xi_p}{R_c} \right)^2 \simeq \sqrt{\Delta_{\Delta\mathbf{G}}} \left( \frac{R_c}{\xi_p} \right)^{\frac{d}{2}} \quad (1.13)$$

$$\implies R_c \simeq \left( \frac{\sqrt{\Delta_{\Delta\mathbf{G}}}}{c_{66}} \right)^{\frac{2}{d-4}} \xi_p^{-\frac{d+4}{d-4}} \quad (1.14)$$

où  $\Delta_{\mathbf{G}}$  est l'intensité de la composante  $V_{\mathbf{G}}$  du désordre.

Ce petit argument d'énergie permet également d'obtenir le comportement de la force critique  $F_c$  nécessaire pour décrocher un réseau collectivement accroché. En effet, un vortex peut être considéré comme décroché lorsque son déplacement relatif par rapport à un vortex accroché est de l'ordre de  $\xi_p$  : dans ce cas ses fluctuations lui permettent de s'échapper du site de piégeage. La force critique  $F_c$  peut ainsi être également liée à cette longueur de LARKIN, taille des domaines aux extrémités desquels le déplacement est d'ordre  $\xi_p$ . En égalant l'énergie élastique de ce domaine de LARKIN avec le travail fourni par la force  $F_c$  à tous les vortex de ce domaine nous obtenons :

$$c_{66} R_c^2 \left( \frac{\xi_p}{R_c} \right)^2 \simeq \xi_p R_c^2 F_c \implies F_c \simeq c_{66} \frac{\xi_p}{R_c^2}$$

Interprétant cette force comme une force de Lorentz induite par un courant, nous pouvons relier cette force critique à un courant critique  $j_c$ .

## 1.4 Conclusion : le problème des défauts topologiques

Dans toute l'analyse qui précède, nous avons décrit le comportement d'un *réseau élastique* en présence de désordre. Or au delà des déformations élastiques du réseau d'ABRIKOSOV,

---

Fukuyama H. & Lee P., (1978). *Phys. Rev. B*, **17**:535.

l'accrochage collectif des impuretés peut induire des déformations plus importantes correspondant à des *dislocations* du réseau de lignes de flux. Nous venons de voir que dans le cadre de l'élasticité une phase de verre de BRAGG existait pour un faible désordre. Reste maintenant à déterminer le domaine de stabilité vis-à-vis de la formation de dislocations de cette phase. D'un point de vue théorique ce problème revient à étudier la génération par le désordre d'accrochage de défauts topologiques dans un milieu élastique. Cet problème a suscité de nombreux travaux théoriques récemment.

C'est à certains aspects de cette interaction entre le désordre et les défauts topologiques que nous allons nous intéresser dans cette thèse. Auparavant, GIAMARCHI et LE DOUSSAL ont prédit une stabilité du verre de BRAGG tridimensionnel en utilisant des arguments d'énergie et une analogie avec un système élastique XY désordonné (Giamarchi & Le Doussal 1995). De leur côté, SHI et BERLINSKY avaient étudié par des simulations numériques la dynamique d'un réseau bidimensionnel en présence de dislocations et de désordre d'accrochage (Shi & Berlinsky 1991). Plus récemment FISHER d'une part, et KIERFELD, NATTERMANN et HWA ont proposé des arguments d'échelle pour l'énergie des boucles de dislocations dans le réseau tridimensionnel de vortex (Fisher 1996, Kierfeld et al. 1997) qui confirment la stabilité du verre de BRAGG en dessous d'une valeur seuil du désordre (ou du champ magnétique). Citons également le travail récent (Feinberg 1998a) sur la géométrie du diagramme des phases correspondant.

Dans cette thèse je vais aborder ce problème encore largement ouvert en considérant des géométries particulières ou des calculs analytiques précis sont possibles.

---

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

Shi A. & Berlinsky A., (1991). *Phys. Rev. Lett.*, **67**:1926.

Fisher D., (1996). *Phys. Rev. Lett.*, **78**:1964.

Kierfeld J., Nattermann T., & Hwa T., (1997). *Phys. Rev B*, **55**:626.

Feinberg D. Softening and melting of a vortex lattice in presence of point disorder. à paraître, 1998.





## Première partie

# Défauts topologiques bidimensionnels et gaz coulombiens

---



Dans cette première partie, je montrerai rapidement comment les gaz coulombiens permettent de décrire les défauts topologiques de systèmes élastiques en dimension deux. Dans le premier chapitre je m'intéresserai aux modèles dont les fluctuations sont décrites par un champ de déformation élastique unidimensionnel  $\phi$  à symétrie  $U(1)$ . Des exemples de tels champs élastiques sont l'angle décrivant les spins XY en  $d = 2$ , le champ de vitesse d'un superfluide bidimensionnel. Dans ces systèmes, les défauts topologiques (vortex) sont caractérisés par une charge scalaire et entière. Ils interagissent les uns avec les autres *via* le potentiel coulombien bidimensionnel. La renormalisation du modèle effectif de gaz de Coulomb ainsi obtenu permet de déterminer la nature des phases du modèle. Si les charges sont appariées à des petites échelles, les fluctuations dominantes sont les fluctuations élastiques du champ de déformation qui ne détruisent pas le quasi-ordre à longue distance du système : il s'agit de la phase solide. À haute température, des défauts topologiques apparaissent dans le modèle initial. Ces défauts induisent des déformations plastiques (non élastiques) qui détruisent l'ordre du réseau de spins ou du superfluide. Dans le premier chapitre je montrerai donc comment renormaliser un gaz de Coulomb scalaire général, permettant de décrire la transition de Kosterlitz-Thouless (Kosterlitz & Thouless 1973) et ses extensions. En particulier un opérateur brisant la symétrie de rotation du champ élastique peut être représenté à l'aide de charges magnétiques dans le gaz de Coulomb des défauts (charges électriques).

Dans le chapitre suivant, je m'intéresserai aux réseaux élastiques dans lequel le champ de déformation est maintenant à deux composantes, tel que dans un cristal bidimensionnel. Les défauts topologiques de ces systèmes élastiques portent une charge vectorielle. L'analyse et la renormalisation des gaz de Coulomb correspondants est un peu plus complexe que dans le cas scalaire. Leur étude permet de décrire la transition de fusion d'un cristal bidimensionnel (Nelson & Halperin 1979). La renormalisation d'un modèle de gaz coulombien électromagnétique de charges vectorielles, que j'ai développée, sera présentée ultérieurement, dans le chapitre 6.

Finalement nous passerons en revue les études précédentes de l'interaction entre un désordre présent dans le modèle initial et ces défauts topologiques au chapitre 4.

---

Kosterlitz J. & Thouless D., (1973). *J. Phys. C*, **6**:1181.

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.



## Chapitre 2

# Vortex et gaz coulombiens scalaires

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre et le suivant, je vais m'intéresser à des modèles bidimensionnels dont le paramètre d'ordre est invariant par une symétrie continue. L'exemple le plus simple correspond à la symétrie de rotation  $U(1)$  que nous allons étudier dans ce chapitre. Des exemples de modèles associés à cette symétrie sont les réseaux de spins planaires, les films superfluides dans lequel le champ de vitesse joue le rôle du spin, ou un réseau de ligne parallèles les unes aux autres (voir plus loin). Le paramètre d'ordre peut s'écrire  $|\psi|e^{i\theta}$ . Dans une phase ordonnée, le fondamental brise cette symétrie, et correspond à une phase donnée  $\theta_0$ . Dans cette situation, le fondamental est dégénéré vis-à-vis de cette symétrie : toute rotation uniforme ( $\theta(\mathbf{r}) \rightarrow \theta(\mathbf{r}) + \bar{\theta}$ ) du champ ne modifie pas l'énergie du fondamental ferromagnétique des spins planaires (voir Fig. 2.1). Par contre des rotations locales et non plus globales coûtent une énergie finie (cependant beaucoup plus faible qu'une variation du module du paramètre d'ordre).

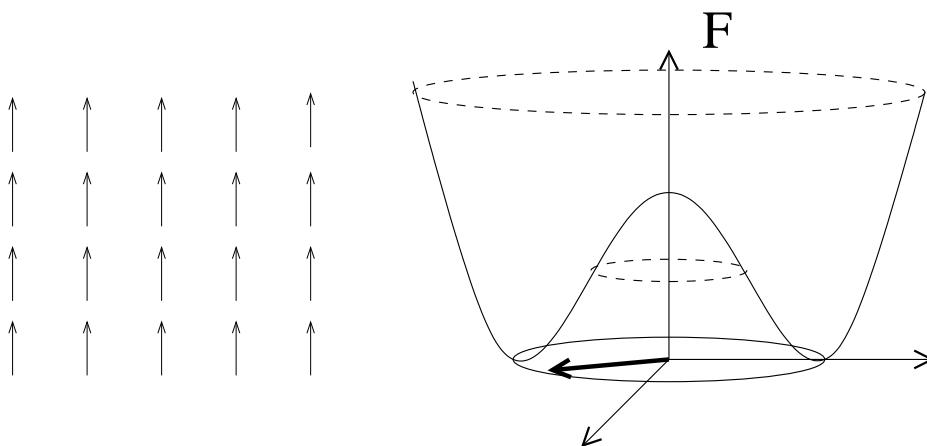


FIG. 2.1 – État fondamental ferromagnétique de spins (par exemple)  $O(2)$ , et potentiel associé pour la magnétisation.

En supposant que l'énergie libre est une fonction analytique des variations du paramètre d'ordre, le premier terme non nul du développement de l'énergie associée à ces fluctuations,

appelées *fluctuations élastiques*, s'écrit  $\frac{K}{2} \int_{\mathbf{r}} (\partial_{\mathbf{r}} \theta)^2$ . La constante élastique  $K$  (appelée module d'hélicité) donne l'échelle d'énergie associée à ces fluctuations. Plus généralement, la forme de cette énergie ne dépend que du paramètre d'ordre et de la symétrie continue associée. Le nombre de constantes élastiques est naïvement égal au nombre de générateurs de la symétrie continue. Nous verrons cependant un contre-exemple au chapitre suivant où nous étudierons les solides invariants par translation (et rotation). De nombreux autres exemples sont fournis par les différentes phases de cristaux liquides.

En dimension deux (et un), ces fluctuations élastiques détruisent tout ordre à longue portée (Hohenberg 1967, Mermin & Wagner 1966). Une transition habituelle avec brisure de symétrie continue ne peut donc pas se produire. Cependant deux types d'ordre distincts peuvent exister (Jancovici 1967) : un quasi-ordre à longue distance correspondant à une décroissance algébrique des fonctions de corrélations et une absence d'ordre (phase désordonnée) avec des fonctions de corrélations décroissant exponentiellement. Une transition peut exister entre des phases caractérisées par ces deux ordres (Hohenberg 1967). Au début des années 70, KOSTERLITZ et THOULESS ont montré qu'en dimension deux, la prolifération de défauts topologiques pouvaient induire une transition de ce type. Ces défauts sont des excitations de basse énergie du fondamental, différentes des fluctuations élastiques décrites ci-dessus. Dans le cas de la symétrie  $U(1)$  qui nous intéresse dans ce chapitre, ils sont appelés des vortex (à ne pas confondre avec les vortex magnétiques de la partie précédente).

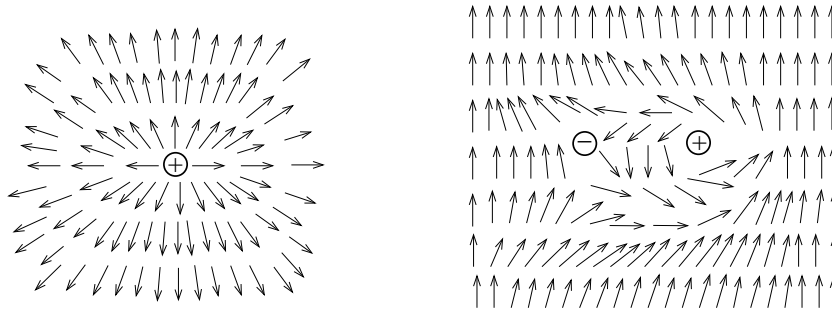


FIG. 2.2 – Exemple de vortex de charge  $+1$  (à gauche) et de paire de vortex de charges opposées.

Un vortex est caractérisé par une région de coeur dans laquelle la norme du paramètre d'ordre  $|\psi|$  s'annule. Il correspond à une singularité de la phase  $\theta$  qui devient multivaluée : lorsqu'on effectue un tour autour du coeur du vortex, le paramètre d'ordre est inchangé mais la phase est modifiée d'une quantité appelée la charge topologique du vortex.  $\psi$  ayant une valeur bien définie en chaque point, cette charge doit nécessairement être un multiple entier de  $2\pi$ . Dans la figure (2.2), j'ai représenté un vortex de charge topologique  $+2\pi$ . L'introduction de ce défaut dans un échantillon revient à modifier le paramètre d'ordre en chaque point. Sachant que  $\oint \partial_{\mathbf{r}} \theta = n \cdot 2\pi$ , on trouve que le gradient de la phase se comporte comme  $\partial_{\mathbf{r}} \theta \sim n/r$ , et donc que l'énergie associée à un vortex de charge  $n \cdot 2\pi$  diverge avec la

Hohenberg P., (1967). *Phys. Rev.*, **158**:383.

Mermin N. & Wagner H., (1966). *Phys. Rev. Lett.*, **17**:1133.

Jancovici B., (1967). *Phys. Rev. Lett.*, **19**:20.

taille du système comme  $n^2 K \pi \ln(L/a)$  ( $a$  est un cut-off ultraviolet). Cependant KOSTERLITZ et THOULESS ont remarqué que cette énergie de création pouvait être contrebalancée par l'entropie gagnée en introduisant une charge dans le système  $S = 2 \ln(L/a)$ . Lorsque  $T \geq \pi K/2$ , l'énergie libre associée à la création d'un défaut devient négative: on peut s'attendre à ce que ces défauts prolifèrent et détruisent les corrélations dans l'échantillon. C'est ce que l'on appelle la transition de KOSTERLITZ-THOULESS (Kosterlitz & Thouless 1973). En fait une paire de vortex de charges opposées n'introduit aucune variation du paramètre d'ordre à grande distance (voir Fig. 2.2). L'énergie d'une paire de défauts distants de  $R$  est finie et vaut  $E \sim n^2 K \pi \ln(R/a)$  (en plus de cette énergie, il convient de rajouter l'énergie de coeur du défaut, qui dépend de façon précise du modèle microscopique considéré). A la transition, ces défauts auront donc tendance à apparaître sous forme de paires.

Dans la suite de ce chapitre je rappellerai quelques méthodes possibles pour étudier cette transition à l'aide du groupe de renormalisation. En particulier j'introduirai le modèle de VILLAIN sur réseau qui permet une séparation exacte des fluctuations élastiques et de la contribution des vortex. J'introduirai les gaz de Coulomb bidimensionnels qui modélisent un ensemble de défauts, et permettent d'étudier la transition dans l'approche de KOSTERLITZ (Kosterlitz 1974). Dans un deuxième temps j'incorporerai dans le groupe de renormalisation l'effet d'opérateurs qui brisent la symétrie de rotation, et correspondent à des charges magnétiques dans le gaz de Coulomb. Finalement j'évoquerai la disparition de la transition de KOSTERLITZ-THOULESS lorsque l'énergie de coeur des vortex devient trop faible.

## 2.2 Modèles XY et superfluides

Dans cette partie, je vais considérer des modèles continus à symétrie  $U(1)$ . L'analyse se fera essentiellement en considérant le cas d'un film superfluide, par simplicité. Elle peut cependant s'appliquer sans problème au modèle de spins dans un plan continu. Le cas des modèles définis sur réseau sera considéré dans la partie suivante où j'introduirai en particulier le modèle de Villain.

### 2.2.1 Fluctuations de phase : élasticité

Avant de passer à l'introduction des défauts topologiques, je rappelle rapidement les propriétés du modèle induit par les fluctuations spatiales lentes (fluctuations élastiques) de la phase du paramètre d'ordre.

#### Energie de Ginzburg-Laudau

Nous considérons donc un superfluide bidimensionnel, décrit à basse température par un paramètre d'ordre  $\langle \psi \rangle = |\langle \psi \rangle| e^{i\theta}$ . L'énergie libre peut se développer en puissance de ce paramètre d'ordre et de ses dérivées. En tenant compte de la symétrie  $U(1)$  du problème,

---

Kosterlitz J. & Thouless D., (1973). *J. Phys. C*, **6**:1181.

Kosterlitz J., (1974). *J. Phys. C*, **7**:1046.



on obtient la forme de Ginzburg-Landau de cette énergie :

$$F = \int_{\mathbf{r}} \left( \frac{J_0}{2} |\nabla \langle \psi \rangle|^2 + \frac{\alpha}{2} |\langle \psi \rangle|^2 + \beta |\langle \psi \rangle|^4 \right) \quad (2.1)$$

où  $\alpha$  change de signe à la transition et  $\beta$  est positif. En dimension deux, la valeur de  $\alpha$  est très grande, due aux fluctuations divergentes. L'énergie admet donc un minimum pour une valeur de la norme du paramètre d'ordre  $|\langle \psi_0 \rangle| = \sqrt{|\alpha|/4\beta}$ . Lorsque  $\beta$  est large, les fluctuations de la norme  $|\psi|$  sont négligeables et l'on peut considérer la norme du paramètre d'ordre comme constante :  $|\langle \psi \rangle(\mathbf{r})| = \sqrt{|\alpha|/4\beta}$ . Le degré de liberté qui reste est la phase de  $\psi$ , et l'énergie de ces fluctuations de phases (fluctuations élastiques) est donnée par  $F \simeq cte + \frac{J_0}{2} \frac{\alpha}{4\beta} \int_{\mathbf{r}} (\nabla \bar{\theta})^2$ . La distribution de probabilité d'équilibre des fluctuations de  $\psi = |\psi|e^{i\theta}$  est donnée par  $P[\psi] = e^{-\frac{1}{kT} H_{XY}[\psi]}$  où le hamiltonien peut se développer de la même façon que l'énergie libre :

$$H_{XY}[\psi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} K (\nabla \theta)^2 \quad (2.2)$$

où nous avons aussi négligé les fluctuations de norme du paramètre d'ordre dans l'expression de  $H_{XY}$  et dans cette approximation nous considèrerons que  $K = J_0 |\langle \psi_0 \rangle|^2$ .

### Propriétés de basse température du modèle

A température nulle, le système est gelé dans une phase d'angle constant. A température finie, et toujours en négligeant les fluctuations de norme de  $\psi$ , on peut calculer les fluctuations de ce paramètres d'ordre :

$$\langle \psi^*(\mathbf{r})\psi(0) \rangle = |\langle \psi_0 \rangle|^2 \langle e^{i(\theta(0) - \theta(\mathbf{r}))} \rangle = |\langle \psi_0 \rangle|^2 e^{-\frac{1}{2} \langle (\theta(0) - \theta(\mathbf{r}))^2 \rangle}$$

En effectuant la moyenne gaussienne à l'aide de (2.2) on obtient

$$\langle (\theta(0) - \theta(\mathbf{r}))^2 \rangle = \frac{T}{\pi K} \ln(r/a) + \mathcal{O}(1)$$

où j'ai introduit un cut-off  $a$  au petite distance. La décroissance des fonctions de corrélation s'en déduit :

$$\langle \psi^*(\mathbf{r})\psi(0) \rangle \simeq cte. \left( \frac{r}{a} \right)^{-\frac{T}{2\pi K}} \quad (2.3)$$

Cette décroissance algébrique avec un exposant  $\eta = \frac{T}{2\pi K}$  s'oppose à la décroissance exponentielle que nous attendons dans la phase désordonnée à haute température. Le passage du comportement algébrique à l'exponentiel se produit lors d'une transition particulière qui s'accompagne d'une prolifération de défauts topologiques : les vortex. Ces vortex permettent de tenir compte de façon approchée des fluctuations de norme du paramètre d'ordre  $\psi$ .

### 2.2.2 Les défauts topologiques : les vortex

Les défauts topologiques sont définis par une région de coeur dans laquelle la phase  $\theta$  est singulière. En tournant autour de ce coeur, la phase est modifiée d'un multiple de  $2\pi$ , ce qui n'affecte pas  $\psi$ . De façon générale les charges des défauts topologiques d'un modèle

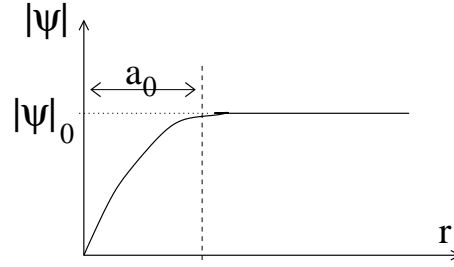


FIG. 2.3 – Comportement de la norme du paramètre d'ordre avec la distance au coeur d'un vortex XY

sont donc caractérisés par le groupe fondamental de l'espace des valeurs du paramètre d'ordre (invariant par la symétrie continue). Ici l'espace auquel appartient  $\psi$  est un cercle et  $\pi_1(S_1) = \mathbb{Z}$ : la charge des défauts est donc donnée par un entier. Dans la pratique cependant, les défauts de charges plus grande que 2 (en valeur absolue) sont énergétiquement défavorisés. Dans notre cas ces défauts peuvent être considérés comme ponctuels, mais ce sont généralement des objets caractérisés également par leur dimension (cependant seuls les défauts de codimension plus petite que la dimension de l'espace du paramètre d'ordre sont topologiquement stables).

Dans notre cas un vortex de charge  $n \in \mathbb{Z}$  situé en  $\mathbf{r}_0$  est donc défini par la relation

$$\oint_{\Gamma} d\theta(\mathbf{r}) = 2\pi n \quad (2.4)$$

où  $\Gamma$  est un chemin fermé quelconque qui entoure une seule fois le vortex. Une solution de cette condition est  $\theta_{sing} = k \cdot \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  où  $\Phi$  est la partie imaginaire du logarithme (angle par rapport à un axe de coupure arbitraire). Pour une collection de vortex de charges  $n_\alpha$  en  $\mathbf{r}_\alpha$ , cette relation peut être généralisée en

$$\epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \theta(\mathbf{r}) = 2\pi n(\mathbf{r}) \equiv 2\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \nabla \theta \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \int_{\mathcal{S}} d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

où  $n(\mathbf{r})$  est la densité de vortex,  $\epsilon$  est le tenseur antisymétrique d'ordre 2 et  $\mathcal{S}$  est une surface s'appuyant sur  $\Gamma$ .

De la définition (2.4), on déduit que la phase autour d'un vortex à l'origine se comporte avec la distance comme  $\theta \sim 1/r$  et est donc singulière au coeur du vortex. Sachant que  $\psi$  doit être défini dans le plan entier, cette divergence impose que la norme du paramètre d'ordre  $|\psi|$  s'annule dans la coeur du vortex (fig.2.3).

Ainsi l'introduction des degrés de liberté liés aux vortex dans le modèle permet de traiter de façon approximative les fluctuations de la norme de  $\psi$  (Halperin 1979b). En particulier il est possible de montrer que dans le cas des superfluides ces vortex introduisent une densité normale  $\rho_n$  non nulle correspondant à des fluctuations de  $|\psi| = \rho_s$ .

---

Halperin B. Superfluidity, melting and liquid-crystal phases in two dimensions. In *Physics of low dimensional systems*. Kyoto summer institute, 1979.

### Interaction entre vortex

Il est utile pour la discussion qui va suivre de définir l'analogie de la vitesse superfluide locale  $v_i = \partial_i \theta$ . Nous pouvons alors décomposer ce champ (de vitesse) en une partie irrotationnelle et une partie de rotationnel pur :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\parallel} + \mathbf{v}^{\perp}$  où  $\epsilon_{ij} \partial_i \mathbf{v}_j^{\parallel} = 0$  et  $\partial_i \mathbf{v}_i^{\perp} = 0$ . D'après (2.5) nous déduisons immédiatement que

$$\epsilon_{ij} \partial_i \mathbf{v}_j^{\perp} = 2\pi n(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{v}_i^{\perp} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \partial_i \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \equiv \Phi * n \quad (2.6)$$

où j'ai introduit la notation fréquemment utilisée dans la suite :  $n * V = \sum_{\alpha} n_{\alpha} V(\mathbf{r}_{\alpha})$ . Par ailleurs  $\mathbf{v}^{\parallel}$  peut toujours s'écrire (par définition) comme le gradient d'une phase monovaluée sur le plan :  $\mathbf{v}_i^{\parallel} = \partial_i \theta_{sw}$ . Il est alors naturel d'associer  $\mathbf{v}^{\parallel}$  aux fluctuations élastiques (ou ondes de spins) et  $\mathbf{v}^{\perp}$  au champ induit par les vortex. Si nous fixons comme conditions aux bords que  $\theta(\mathbf{r}) = 0$ , la vorticité totale de l'échantillon est nulle :  $\sum_{\alpha} n_{\alpha} = 0$ .

Le hamiltonien correspondant à une configuration s'écrit maintenant

$$H = \frac{K}{2} \int_{\mathbf{r}} (\mathbf{v}^{\perp} + \mathbf{v}^{\parallel})^2 = \frac{K}{2} \int_{\mathbf{r}} [(\mathbf{v}^{\perp})^2 + (\mathbf{v}^{\parallel})^2] \equiv H_v + H_{sw} \quad (2.7)$$

Le terme croisé  $\int \mathbf{v}_i^{\perp} \mathbf{v}_i^{\parallel}$  s'annule par intégration par partie. Le hamiltonien d'une configuration se scinde donc en une partie purement élastique  $H_{sw}$  et une interaction entre vortex  $H_v$ , ou autrement dit la loi de distribution des fluctuations se décompose en un produit de lois indépendantes pour les fluctuations élastiques et les fluctuations dues aux défauts topologiques. D'après l'analyse ci-dessus nous savons que seules ces dernières peuvent modifier le comportement des fonctions de corrélations de  $\psi$  et donc induire une transition.

*Remarque sur la phase duale*: le potentiel  $\Phi$  vérifie par définition  $\partial_j \Phi(\mathbf{r}) = \epsilon_{ij} \partial_i G(\mathbf{r})$  où  $G$  est le potentiel coulombien bidimensionnel ( $\partial_i \partial_i G = 2\pi \delta(\mathbf{r})$ ):  $G(\mathbf{r}) = \ln(\mathbf{r})$ . La composante  $\mathbf{v}^{\perp}$  peut donc s'écrire  $\mathbf{v}_i^{\perp} = \epsilon_{ji} \partial_j \tilde{\theta}$  où  $\tilde{\theta} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$  est la phase duale de  $\theta$  qui vérifie  $\partial_i \partial_i \tilde{\theta} = 2\pi n(\mathbf{r})$ . Cette remarque permet de développer une analogie entre le problème ci-dessus et l'électrostatique bidimensionnelle (Halperin 1979b).

Pourvus de cette remarque nous pouvons trouver une expression plus simple pour l'interaction entre vortex :

$$H_v = \frac{K}{2} \int_{\mathbf{r}} (\mathbf{v}^{\perp})^2 = -\frac{K}{2} \int_{\mathbf{r}} \tilde{\theta} \partial_i \partial_i \tilde{\theta} = -\pi K \sum_{\alpha, \beta} n_{\alpha} G_{\alpha\beta} n_{\beta} \quad (2.8)$$

où chaque paire de charges  $(\alpha, \beta)$  est comptée deux fois. Nous avons utilisé la neutralité de la configuration de vortex dans la dernière égalité. En plus de cette interaction, il faut également considérer l'énergie de coeur  $E_c$  des vortex, *a priori* uniforme : il s'agit de l'énergie locale qu'il faut fournir au système pour induire au niveau du coeur des grandes variations de  $\phi$ . Une telle énergie ne peut être calculée qu'à partir d'un modèle microscopique. Le terme additif à  $H_v$  s'écrit donc  $+\sum_{\alpha} n_{\alpha}^2 E_c$ .

---

Halperin B. Superfluidity, melting and liquid-crystal phases in two dimensions. In *Physics of low dimensional systems*. Kyoto summer institute, 1979.

### 2.2.3 Hélicité et fonctions de corrélations

La constante de couplage du hamiltonien (2.2) (ou de l'énergie libre) admet une définition naturelle en fonction de la dépendance de l'énergie libre en les conditions aux bords. Cette constante sera appelée hélicité dans ce chapitre, mais elle correspond à la densité superfluide  $\rho_s$  dans le modèle de superfluide plan, ou à la constante de raideur dans les modèles XY.

#### Conditions aux bords

En l'absence de champ extérieur, le fondamental est donné par

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}(\mathbf{r})} = -K \nabla^2 \bar{\theta} = 0 \quad (2.9)$$

Avec des conditions aux limites libres, la solution est donc une phase uniforme  $\bar{\theta}(\mathbf{r}) = \bar{\theta}_0$ . Par contre dans un système de longueur finie  $L$  où l'on impose les conditions  $\bar{\theta}(x=0) = 0$  et  $\bar{\theta}(x=L) = \bar{\theta}_0$ , la phase du paramètre d'ordre n'est plus uniforme : son gradient est constant d'après (2.9) et sa valeur est donnée par  $\bar{\theta}(\mathbf{r}) = \bar{\theta}_0 \frac{x}{L}$ . L'énergie correspondant à ce fondamental est  $F[\bar{\theta}_0] = \frac{1}{2} K \bar{\theta}_0^2$ . Cette expression permet de donner une définition de l'hélicité (fréquemment utilisée dans les simulations numériques) liée aux conditions aux bords :

$$K = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2}{\bar{\theta}_0^2} (F[\bar{\theta}_0] - F[0]) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 F[\bar{\theta}_0]}{\partial \bar{\theta}_0^2} \quad (2.10)$$

#### Hélicité effective

Nous allons maintenant utiliser cette définition pour dériver une expression de l'hélicité effective (ou hélicité renormalisée) utile dans la suite de ce chapitre.

Nous imposons donc que le gradient de  $\theta$  soit en moyenne constant, et égal à  $\mathbf{v}^0$ . Le champ de vitesse se décompose alors en  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\parallel + \mathbf{v}^0$ , ce qui correspond à une décomposition  $\theta = \theta' + \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{r}$  où le champ  $\theta'$  vérifie maintenant les conditions aux bords  $\theta' = 0$ . Cette condition indique que la moyenne dans chaque échantillon de  $\mathbf{v}^\parallel = \nabla \theta'$  (et de ses puissances) est nulle :  $\int d^2 \mathbf{r} \mathbf{v}^\parallel = 0$ . Le hamiltonien qui régit les fluctuations dans l'échantillon s'écrit  $H[\mathbf{v}^0] = \frac{K}{2} \int_{\mathbf{r}} (\mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\parallel + \mathbf{v}^0)^2$ . Nous pouvons maintenant calculer la différence entre les énergies libres correspondant aux deux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} F[\mathbf{v}^0] &= -T \operatorname{Tr} \ln e^{-\frac{1}{T} H[\mathbf{v}^0]} \\ &= \frac{K}{2} L^2 (\mathbf{v}^0)^2 - T \operatorname{Tr} \ln \left( e^{-\frac{K}{T} \int d^2 \mathbf{r} \mathbf{v}^0 \cdot (\mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\parallel)} e^{-\frac{1}{T} H[0]} \right) \\ &= \frac{K}{2} L^2 (\mathbf{v}^0)^2 + F[0] - \frac{K^2}{T} \mathbf{v}_i^0 \mathbf{v}_j^0 \int_{\mathbf{r}} \int_{\mathbf{r}'} \left\langle (\mathbf{v}_i^\perp + \mathbf{v}_i^\parallel)(\mathbf{r}) (\mathbf{v}_j^\perp + \mathbf{v}_j^\parallel)(\mathbf{r}') \right\rangle + \mathcal{O}((v^0)^4) \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, j'ai utilisé la parité de  $F[\mathbf{v}^0]$ . En utilisant le résultat sur la moyenne dans l'échantillon de  $\mathbf{v}^\parallel$ , nous trouvons donc l'expression suivante pour l'hélicité renormalisée :

$$K_R = K - \frac{K^2}{T} \hat{v}_i^0 \hat{v}_j^0 \int_{\mathbf{r}} \langle \mathbf{v}_i^\perp(\mathbf{r}) \mathbf{v}_j^\perp(0) \rangle \quad (2.11)$$

L'expression de  $\mathbf{v}^\perp$  en fonction de la densité de vortex :  $\mathbf{v}_i^\perp = \epsilon_{ji} \sum_\alpha n_\alpha \partial_j G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$  et la comportement à grande distance de  $G(\mathbf{q}) \sim_{q \rightarrow 0} 2\pi/q^2$  nous permet d'obtenir une formulation de  $K_R$  uniquement en fonction de cette densité de vortex

$$K_R = K - \frac{(2\pi K)^2}{T} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q^2} \langle n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \rangle \quad (2.12)$$

### Fonctions de corrélations

La définition précédente, qui va nous permettre de renormaliser simplement notre modèle, intervient dans le calcul des fonctions de corrélations du modèle. En effet, la décomposition du champ de déformation  $\theta = \theta_{sw} + \sum_\alpha n_\alpha \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$  nous permet d'écrire les fonctions de corrélation du paramètre d'ordre (en oubliant sa norme) sous la forme d'un produit d'une partie due aux fluctuations élastiques et d'une partie due aux défauts topologiques :

$$\langle e^{i\theta(\mathbf{r})} e^{-i\theta(\mathbf{r}')} \rangle = \langle e^{i\theta_{sw}(\mathbf{r})} e^{-i\theta_{sw}(\mathbf{r}')} \rangle_{sw} \langle e^{i\theta_v(\mathbf{r})} e^{-i\theta_v(\mathbf{r}')} \rangle = \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right)^{-\frac{T}{2\pi K}} \langle e^{-\frac{1}{2}(\theta_v - \theta_v(\mathbf{r}'))^2} \rangle$$

où j'ai utilisé la notation  $\theta_v$  pour la composante de  $\theta$  induite par les vortex. Le calcul de la fonction de corrélation de ce déplacement s'effectue en utilisant les propriétés de  $\Phi(\mathbf{r})$  (il faut faire attention aux termes de bords avec les fonctions multivaluées):

$$\begin{aligned} \langle (\theta_v(\mathbf{r}) - \theta_v(\mathbf{r}'))^2 \rangle &= \int d^2\mathbf{r}'' d^2\mathbf{r}''' \langle n(\mathbf{r}'') n(\mathbf{r}''') \rangle \\ &\quad \times [\Phi(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')] [\Phi(\mathbf{r}''' - \mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}''' - \mathbf{r}')] \\ &= -\frac{1}{4} \int d^2\rho \langle n(\mathbf{0}) n(\rho) \rangle \rho_i \rho_j \\ &\quad \times \int d^2\mathbf{R} \partial_i [\Phi(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{R} - \mathbf{r}')] \partial_j [\Phi(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{R} - \mathbf{r}')] \\ &= \frac{1}{4} \int d^2\rho \langle n(\mathbf{0}) n(\rho) \rangle \rho_i \rho_j \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \\ &\quad \times \int d^2\mathbf{R} [\Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{r}')] \partial_k \partial_l [\Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{r}')] \\ &= \pi G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int d^2\rho \rho^2 \langle n(\mathbf{0}) n(\rho) \rangle \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la neutralité du gaz  $\int_\rho n(\rho) = 0$ . Cette expression n'est valable que lorsque  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg a$  pour pouvoir négliger les termes d'ordre supérieur en  $\rho$ . En utilisant  $\lim_{q \rightarrow 0} q^{-2} \langle n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \rangle = -\frac{1}{4} \int d^2\rho \rho^2 \langle n(\mathbf{0}) n(\rho) \rangle$ , nous trouvons que les fonctions de corrélations du paramètre d'ordre s'écrivent

$$\langle e^{i(\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}'))} \rangle = \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right)^{-\frac{1}{2\pi K_R}} \quad (2.13)$$

avec  $TK_R^{-1} = TK^{-1} + (2\pi)^2 \lim_{q \rightarrow 0} q^{-2} \langle n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \rangle$ . Nous verrons que cette expression de  $K_R$  coïncide à l'ordre le plus bas en fugacité avec la définition précédente.

L'expression (2.12) va nous permettre par la suite de dériver facilement des équations de renormalisation pour ce modèle, et de décrire la transition de KOSTERLITZ et THOULESS. Cependant avant de passer à cette étude, je vais décrire dans la partie suivante une manière alternative d'introduire les vortex dans un modèle analogue au modèle XY sur réseau : le modèle de VILLAIN.

## 2.3 Modèle sur réseau : action de VILLAIN

Alors que tout ce qui précède était basé sur une formulation dans laquelle le champ  $\theta$  était défini en tout point du plan, je vais m'intéresser dans cette partie à un modèle possédant toujours la symétrie  $U(1)$ , mais défini sur un réseau carré. Le hamiltonien correspondant s'écrit

$$H = -K \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (2.14)$$

Dans ce hamiltonien la symétrie locale  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  est explicite.

Nous allons ici montrer comment retrouver dans ce modèle XY sur réseau l'apparition des vortex que nous avons introduits à la main dans le modèle continu. Le traitement discret consiste dans un premier temps à effectuer sur notre hamiltonien une approximation valable à basse température : l'approximation de VILLAIN. Nous effectuerons alors sur ce hamiltonien de VILLAIN une transformation de dualité. Le modèle dual, après élimination des degrés de liberté continus, se révèle être celui du gaz de coulomb électrique 2D (2.8) décrivant les degrés de liberté de vortex du modèle. Les charges électriques (défauts topologiques) se trouvent sur le réseau dual du réseau initial.

### Préliminaire : formule de sommation de Poisson

Je rappelle ici rapidement l'expression de la formule de sommation de Poisson qui va être utilisée intensivement dans la suite : soit  $f$  une fonction holomorphe. Je définis la fonction  $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(z+n)$  qui est supposée également holomorphe.  $F$  est une fonction 1-périodique et admet donc un développement de Fourier :

$$F(z) = \sum_n A_n \exp(2i\pi n z)$$

Exprimons  $A_n$  pour notre fonction  $F$  de période 1 :

$$A_n = \int_0^1 dx F(x) e^{-2i\pi n x} = \sum_n \int_n^{n+1} du f(u) e^{-2i\pi n u} = \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) e^{-2i\pi n u} \quad (2.15)$$

D'où le résultat :

$$\Rightarrow F(0) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) e^{-2i\pi n u} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{f}(2\pi n) \quad (2.16)$$

### Approximation de VILLAIN

Cette approximation se fait dans le cadre de l'étude de la région de basse température du modèle où la phase attendue est quasi-ordonnée. Considérons la fonction  $2\pi$ -périodique

$$\exp(\beta K \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(in\theta) I_n(\beta K) \quad (2.17)$$

où  $I_n$  est une fonction de Bessel modifiée (Itzykson & Drouffe 1989). Dans la limite  $\beta \rightarrow \infty$ , nous avons

$$\frac{I_n(\beta K)}{I_n(\beta K)} \simeq \exp\left(-\frac{n^2}{2\beta K}\right)$$

L'approximation de Villain (Villain 1975) consiste à remplacer dans l'expression (2.17) tous les termes par leur limite de basse température ci-dessus. La formule de sommation de Poisson (2.16) permet d'obtenir les deux formes de l'approximation :

$$\exp(\beta K \cos(\theta)) \xrightarrow{\text{Villain}} z(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(in\theta - \frac{n^2}{2\beta K}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sqrt{2\pi\beta K} e^{-\frac{1}{2\beta K}(\theta-2\pi n)^2} \quad (2.18)$$

L'intérêt de cette approximation vient du fait qu'elle conserve la symétrie  $U(1)$  des modèles que nous étudions. Il est donc légitime de penser que le modèle approximé appartient à la même classe d'universalité que le modèle initial. Cette hypothèse est confirmée par les résultats obtenus dans cette approximation qui sont identiques à ceux obtenus par des méthodes différentes, en particulier dans le cas du modèle 2D continu à symétrie  $O(2)$ .

### Modèle de Villain

Nous mettons maintenant en oeuvre cette approximation dans le cadre du modèle discret de spins planaires (2.14). La fonction de partition devient alors

$$Z = \prod_i \int \frac{d\theta_i}{2\pi} \prod_{\langle i,j \rangle} z(\theta_i - \theta_j)$$

où  $z(\theta)$  a été défini dans (2.18). Nous effectuons alors une transformation de dualité en suivant la méthode de JOSE ET AL (Jose, Kadanoff, Kirkpatrick & Nelson 1977). L'action correspondant au modèle ci-dessus peut s'écrire

$$A[\theta] = \sum_{\langle i,j \rangle} V(\theta_i - \theta_j)$$

où les  $i, j$  correspondent aux noeuds d'un réseau carré. Nous pouvons faire une transformation de Fourier sur chaque lien du réseau :

$$Z = \int d[\theta] \prod_{\langle i,j \rangle} \sum_{S_{ij}=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\hat{V}(S_{ij}) + iS_{ij}(\theta_i - \theta_j)\right)$$

---

Itzykson C. & Drouffe J.-M., (1989). *Théorie statistique des champs*. InterEditions/ Editions du CNRS.

Villain J., (1975). *Journ. de Phys. (France)*, **36**:581.

Jose J., Kadanoff L., Kirkpatrick S., & Nelson D., (1977). *Phys. Rev. B*, **16**:1217.

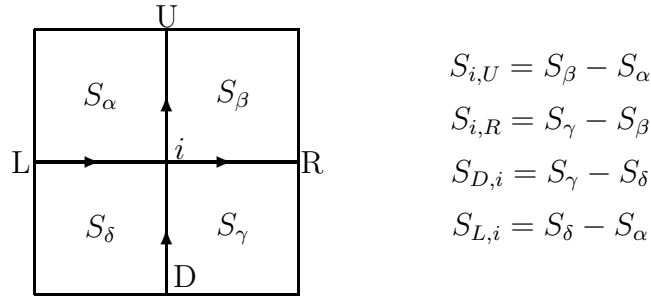
Dans cette expression,  $\exp(\hat{V})$  est définie comme la transformée de Fourier de  $e^V$ . Pour effectuer l'intégrale sur la variable continue  $\theta$ , nous adoptons la convention que  $j$  est toujours le voisin du dessous ou de gauche de  $i$  :

$$Z = \left( \prod_{\langle i,j \rangle} \sum_{S_{ij}=-\infty}^{+\infty} \right) \prod_i \Delta(i) \exp \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{V}(S_{ij})$$

Avec la convention d'écriture à chaque noeud du schéma ci-dessous la notation  $\Delta(i)$  correspond à

$$\delta(S_{i,U} + S_{i,R} - S_{D,i} - S_{L,i})$$

Cette relation de divergence discrète nulle en chaque noeud est l'analogie de la loi de Kirchoff de l'électricité et peut être traitée de la même manière : nous introduisons comme sur le schéma suivant une grandeur entière  $S_\alpha$  en chaque noeud du réseau dual.



Les entiers  $S_\alpha$  peuvent être vus comme des rotationnels discrets de  $S_{ij}$  le long des contours orientés. Sur le réseau dual, la fonction de partition s'écrit maintenant

$$Z[S] = \sum_{[S]} \exp \left( \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \hat{V}(S_\alpha - S_\beta) \right) \quad (2.19)$$

où nous avons désigné par des indices grecs les noeuds du réseau dual. Nous utilisons à nouveau la formule de sommation de Poisson :

$$Z[S] = \sum_{\{m(\bar{\alpha})\}} \prod_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Phi(\alpha) \exp \left( \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \tilde{V}(\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)) + \sum_{\alpha} 2i\pi m(\alpha) \Phi(\alpha) \right)$$

Revenons à la forme explicite de l'action de Villain : elle s'exprime d'après la première expression duale (2.19) sous la forme

$$Z_{vortex} = \sum_{\{m_\alpha\}} \exp \left( -\frac{1}{2\beta K} \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} (m_\alpha - m_\beta)^2 \right)$$

Ce modèle correspond au modèle gaussien discret utilisé dans l'étude de la transition rugueuse en l'absence de désordre (Cule & Shapir 1995). La grandeur  $m_\alpha$  joue alors le rôle de



la hauteur du crystal en chaque noeud  $\alpha$  du réseau. En utilisant cette expression de  $V(\theta)$  nous pouvons écrire la fonction de partition sous le forme attendue :

$$Z = \sum_{\{q_\alpha\}} \left( \prod_{\alpha} \int d\phi_\alpha \right) \exp \left( -\frac{1}{2\beta K} \sum_{\langle \alpha, \gamma \rangle} (\phi_\alpha - \phi_\gamma)^2 + 2i\pi \sum_{\alpha} q_\alpha \phi_\alpha \right)$$

Une fois intégrée sur les variables continues, elle correspond bien à l'expression de la fonction de partition d'un gaz de Coulomb bidimensionnel de charges électriques :

$$Z = \sum_{\{q_\alpha\}} \exp \left( \frac{\pi K}{T} \sum_{\alpha \neq \gamma} q_\alpha G_{\alpha\gamma} q_\gamma \right) \quad (2.20)$$

KADANOFF a montré qu'il était possible d'obtenir, de façon analogue, une formulation de nombreux modèles bidimensionnels (d'Ising, Potts, ...) en terme de gaz de Coulomb sur réseau avec des charges électriques et magnétiques (Kadanoff 1978). Je n'aurai pas le temps de présenter cette démarche qui a l'avantage de proposer un cadre élégant pour formuler les idées de dualité de ces modèles en dimension deux : celle-ci se transpose en la dualité électromagnétique du gaz de Coulomb (échange des composantes électrique et magnétique des charges).

## 2.4 Transition de KOSTERLITZ-THOULESS

Dans les deux parties précédentes, j'ai montré comment introduire les degrés de liberté associés aux défauts topologiques dans des modèles possédant une symétrie continue  $U(1)$ , à la fois dans le continu et sur un réseau. En particulier nous avons vu que le hamiltonien se scindait en une partie purement élastique et une contribution des vortex. Cette dernière correspondait à un gaz de Coulomb où les vortex étaient représentés par des charges électriques de densité  $n(\mathbf{r})$  :

$$H[n] = -\pi K \sum_{\alpha \neq \beta} n_\alpha G_{\alpha\beta} n_\beta + E_c \sum_{\alpha} n_\alpha^2$$

Nous avons ainsi obtenu une expression (2.12) de la constante de raideur (hélicité) renormalisée du modèle  $U(1)$  en fonction uniquement des corrélations (à deux points) du gaz de Coulomb. Cela va nous permettre de relier la physique de ce gaz à la nature des phases du modèle initial. Si la densité de charges est importante, l'hélicité est diminuée et nous pouvons nous attendre à une phase désordonnée alors qu'en l'absence de charge, la valeur effective à grande distance de cette hélicité est proche de sa valeur aux petites distances d'après (2.12), ce qui correspondra à une phase quasi-ordonnée. Une façon de déterminer la nature du gaz de Coulomb est de l'étudier par renormalisation : c'est ce qu'ont fait KOSTERLITZ et THOULESS.

---

Kadanoff L., (1978). *J. Phys. A*, **11**:1399.

### 2.4.1 Equations de renormalisation

Le point de départ de notre étude de renormalisation est donc l'expression (2.12) de la constante renormalisée  $K_R$ . La seule quantité variable qu'il nous reste à calculer, et qui comporte des divergences infrarouges, est la fonction de corrélation à deux points du gaz de Coulomb. Nous allons la développer perturbativement en puissance de la fugacité  $y = e^{-\frac{E_c}{T}}$ , ce qui nous fournira des contributions perturbatives en  $y$  à la constante  $K(l)$  à l'échelle  $ae^l$ .

#### Développement perturbatif en la fugacité

Les charges étant réparties de façon discrète dans l'espace réel, il est plus commode d'exprimer  $K_R$  en fonction de corrélation entre charges dans l'espace réel. Nous pouvons pour cela utiliser le résultat (que nous avons déjà rencontré à propos de la formule (2.13))

$$K_R = K + \frac{(\pi K)^2}{T} \int d^2\mathbf{r} r^2 \langle n(0)n(\mathbf{r}) \rangle$$

Développons maintenant  $\langle n(0)n(\mathbf{r}) \rangle$  en puissance de  $y$ . Le terme d'ordre  $y$  est nul par neutralité du gaz de Coulomb et le suivant est donné par  $\langle n(0)n(\mathbf{r}) \rangle = -2y^2(r/a)^{-2\pi K/T}$ . A l'ordre  $y^2$  nous obtenons donc l'expression de la constante renormalisée

$$K_R = K - 2\frac{(\pi K)^2}{T} \int_{|\mathbf{r}| \geq a} \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 y^2 \left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{2\pi K}{T}} + \mathcal{O}(y^4)$$

#### Équations de renormalisation

Cette expression ne doit bien sûr pas dépendre de l'échelle initiale : si nous éliminons les degrés de liberté de petites échelles en définissant une hélicité  $K(l)$  et une fugacité  $y(l)$  qui dépendent de l'échelle  $ae^l$ , cette expression doit rester inchangée. L'échelle à laquelle sont définies  $K$  et la fugacité  $y$  apparaît dans l'expression précédente à deux endroits : explicitement dans l'intégrande et dans la restriction de coeur dur de l'intégrale. Nous allons éliminer les petites échelles en incrémentant ce cut-off infinitésimalement :  $a \rightarrow \tilde{a} = ae^{dl}$  avec  $dl \ll 1$ . La contribution venant de l'intégrande s'écrit simplement comme une puissance de  $\tilde{a}/a$  :

$$y^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2-2\pi\frac{K}{T}} \longrightarrow e^{dl(4-2\pi\frac{K}{T})} \times y^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{\tilde{a}^2} \left(\frac{r}{\tilde{a}}\right)^{2-2\pi\frac{K}{T}} \quad (2.21)$$

Le changement de cut-off dans les bornes de l'intégrale est un peu plus complexe : les échelles comprises entre  $a$  et  $\tilde{a}$  sont intégrées séparément  $\int_{|\mathbf{r}| \geq a} \rightarrow \int_{|\mathbf{r}| \geq \tilde{a}} + \int_{\tilde{a} \geq |\mathbf{r}| \geq a}$ . En tenant en compte l'intégrande nous trouvons

$$y^2 \int_{|\mathbf{r}| \geq a} \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2-2\pi\frac{K}{T}} \longrightarrow 2\pi y^2 dl + y^2 \int_{|\mathbf{r}| \geq \tilde{a}} \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2-2\pi\frac{K}{T}} \quad (2.22)$$

L'expression de  $K_R$  après changement de cut-off ultraviolet est ainsi

$$K_R = K - 2\frac{(\pi K)^2}{T} 2\pi y^2 dl - 2y^2 e^{dl(4-2\pi\frac{K}{T})} \frac{(\pi K)^2}{T} \int_{|\mathbf{r}| \geq \tilde{a}} \frac{d^2\mathbf{r}}{\tilde{a}^2} \left(\frac{r}{\tilde{a}}\right)^{2-2\pi\frac{K}{T}} + \mathcal{O}(y^4) \quad (2.23)$$

Ces deux corrections peuvent donc être absorbées dans une définition d'une hélicité  $K(dl)$  et d'une fugacité  $y(dl)$  à l'échelle  $\tilde{a}$ , telles que

$$K(dl) = K - \frac{K^2}{T} 4\pi^3 y^2 dl \quad ; \quad y(dl) = ye^{dl(2-\pi\frac{K}{T})}$$

En incrémentant à nouveau le cut-off la procédure peut être poursuivie. Le résultat s'écrit de façon agréable sous la forme d'équations de renormalisation pour les deux constantes  $K(l), y(l)$  :

$$\partial_l y(l) = \left(2 - \pi\frac{K}{T}\right) y + \mathcal{O}(y^3) \quad (2.24)$$

$$\partial_l (TK^{-1}(l)) = 4\pi^3 y^2 + \mathcal{O}(y^4) \quad (2.25)$$

Ces équations sont celles obtenues par KOSTERLITZ (Kosterlitz 1974). Une méthode de renormalisation différente est présentée dans l'Annexe B : au lieu de considérer une expression formelle pour l'hélicité renormalisée  $K_R$ , nous renormalisons directement la fonction de partition du modèle.

D'après l'équation ci-dessus nous pouvons réaliser que la transition correspond à  $T_c = \pi K/2$ . Lorsque  $T < T_c$  la fugacité diminue avec l'échelle, et la valeur de  $K_R$  est finie, alors qu'à température plus élevée  $y(l)$  croît avec l'échelle et nous nous attendons donc à ce que les paires de vortex apparaissent à une échelle  $l^*$  telle que l'énergie de coeur soit nulle à cette échelle :  $E_c(l^*) = -T \ln(y(l^*)) \sim 0$ .

## 2.4.2 Etude de la transition

Le flot de renormalisation correspondant aux équations de renormalisation (2.24,2.25) est représenté sur la figure 2.4. Il existe donc une ligne de points fixes à basse température et fugacité nulle. Cette ligne se termine au point de transition correspondant à  $\lim_{l \rightarrow \infty} T/K(l) = \pi/2$ . À la transition, la valeur renormalisée de  $K/T$  passe donc d'une valeur universelle  $2/\pi$  à 0. La ligne de points fixes est caractérisée par une fugacité nulle et une valeur finie de  $K_R$ . D'après (2.13) cela correspond à une décroissance algébrique des fonctions de corrélations (sauf exactement à la transition où des corrections logarithmiques interviennent). La valeur nulle de la fugacité renormalisée indique que la densité de défauts à grande échelle est également nulle. A température plus élevée,  $y(l)$  croît avec l'échelle indiquant une prolifération de paires de vortex aux grandes échelles. Les fonctions de corrélations décroissent exponentiellement.

Afin d'étudier plus précisément cette transition, il est possible d'intégrer analytiquement le flot de renormalisation au voisinage du point de transition  $(T/K_R, y) = (\pi/2, 0)$ . Pour cela on peut définir la seconde grandeur perturbative  $x$  (après  $y$ ) par :  $KT^{-1} = K_R T^{-1}(1-x)$ . Les équations de renormalisation se réécrivent alors

$$\partial_l x = 8\pi^2 y^2 \quad (2.26a)$$

$$\partial_l y = 2xy \quad (2.26b)$$

---

Kosterlitz J., (1974). *J. Phys. C*, 7:1046.

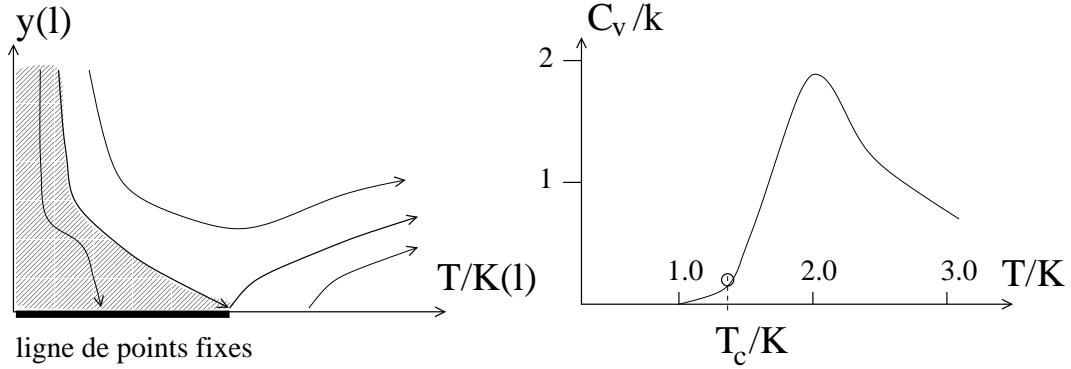


FIG. 2.4 – Flot de renormalisation (à gauche) correspondant aux équations de Kosterlitz et Thouless. La région hachurée correspond à l'ensemble des conditions initiales qui sont renormalisées vers la phase quasi-ordonnée. À droite est représentée la chaleur spécifique : le cercle correspond à la singularité essentielle non observable à  $T_c$ . À température plus élevée,  $C_v$  comporte un maximum non universel dû à la prolifération des défauts à toutes les échelles. D'après (Nelson, 1987)

Nous remarquons donc que  $y^2 - \frac{1}{4\pi}x^2$  n'est pas renormalisée : au voisinage du point de transition le flot suit donc des trajectoires hyperboliques caractérisées par une constante  $C$  :  $y^2 = \frac{1}{4\pi^2}x^2 + C$ . Pour  $C = 0$ , cette trajectoire se termine au point de transition : il s'agit des deux droites séparatrices. Le long de la séparatrice descendante, nous avons  $y = -x/2\pi \sim 1/4\pi l$ . Pour  $C < 0$ , ces trajectoires se terminent en  $y = 0$ , et nous sommes dans la phase quasi-ordonnée alors que  $C > 0$  correspond à la phase haute température.  $C$  mesure donc la distance à la transition (séparatrice). La constante  $C$  étant analytique en la température, elle est proportionnelle à  $C \propto T - T_c$  suffisamment proche de la transition. Puisque pour  $T < T_c$   $y(l) \rightarrow 0$ , nous trouvons que  $x_R = b\sqrt{T_c - T}$ .

Pour une température juste au dessus de  $T_c$ ,  $y(l)$  décroît dans un premier temps puis croît. À partir de  $y \sim 1$ , les équations de renormalisation ci-dessus n'ont plus de sens. Nous nous attendons à ce qu'au delà de l'échelle  $L^* = ae^{l^*}$  telle que  $y(l^*) \sim 1$ , la densité de vortex soit suffisamment élevée pour pouvoir utiliser l'approximation de Debye-Hückel, avec des fonctions de corrélations ayant une forme de Ornstein-Zernike :

$$\langle \psi(\mathbf{r})\psi(0) \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{r}{\xi_+(T)}}$$

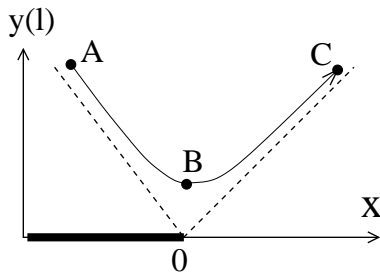


FIG. 2.5 – Flot schématique autour du point de transition (voir le texte). Le point A dépend des valeurs initiales de  $y$  et  $\epsilon$  : en particulier  $y - \frac{1}{2\pi}\epsilon \propto (T - T_c)$ . Le point B est le minimum de la courbe correspondant à  $\epsilon(l) = 0$  et en C :  $y \sim 1$

Plutôt que de résoudre explicitement les équations ci-dessus, je préfère utiliser une méthode que nous retrouverons dans la suite : considérons dans un premier temps la ligne

de flot critique. Juste sur la séparatrice nous pouvons écrire  $\partial_l x = 2x^2$  ce qui correspond à  $x(l) \sim_{l \rightarrow \infty} -1/2l$ . Si nous nous intéressons maintenant à une ligne de flot (dans la phase haute température) juste au dessus de cette séparatrice (fig. 2.5), nous pouvons écrire  $y(l) = \frac{1}{2\pi}x(l) + \mathcal{D}(l)$  où  $\mathcal{D}(l) \ll 1$ , et en première approximation  $x(l) \sim -1/2l$ . La variable  $\mathcal{D}(l)$  mesure l'écart à la transition (séparatrice) et nous avons donc  $\mathcal{D}(0) = b(T - T_c)$ . Les équations de renormalisation (2.26a,2.26b) permettent d'écrire une équation d'évolution de cet écart, qui au premier ordre est donnée par

$$\partial_l \mathcal{D}(l) = -2\mathcal{D}x \sim \frac{\mathcal{D}}{l}$$

La solution de cette équation est donc  $\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}(0)}{l_0}l$ . Cette solution n'est bien sûr valable que dans la partie descendante du flot : entre les points A et B de la figure 2.5. Le point B correspond au minimum de la courbe qui se traduit par  $\mathcal{D}(l_m) = -x/2\pi$ , soit  $l_m \sim 1/\sqrt{\mathcal{D}(0)}$ . Le même raisonnement peut être fait sur la seconde partie du flot : de B à C. Nous trouvons ainsi que  $l^* = b'/\sqrt{T - T_c}$ . Si nous identifions la longueur de corrélation avec l'échelle à laquelle  $y \sim 1$  (qui correspond en fait à la longueur d'écrantage du plasma : voir (Halperin 1979b)), nous trouvons le comportement critique de cette longueur :

$$\xi_d(T) = ae^{l^*} = cte e^{\frac{b'}{\sqrt{T-T_c}}} \quad (2.27)$$

Il est alors possible de montrer que l'énergie libre  $f$  et la chaleur spécifique possède des singularités essentielles à  $T_c$  données par  $\xi_d^2$ . De même la longueur de corrélation  $\xi_+$  des fonctions de corrélation au dessus de  $T_c$  s'identifie à  $\xi_d(T)$ .

Je n'aurai malheureusement pas la temps de discuter ici des détails du comportement de la fonction de corrélation dans la phase désordonnée à haute température. Il semble en effet que, dans cette fonction de corrélation, le préfacteur de l'exponentielle n'est pas constant au dessus de  $T_c$ , mais varie autour de  $2T_c$ . Il est possible d'étudier ce comportement soit en utilisant la correspondance du gaz de Coulomb avec le modèle de Sine-Gordon, soit avec un modèle de fermion (Halperin 1998). Il semble que dans le premier cas ce changement de comportement soit relié à l'apparition de modes couplés dans le modèle de Sine-Gordon, et corresponde à une modification de la densité de défauts. Nous pouvons également mettre en rapport ce comportement avec le travail de GAREL *et al.* sur "les lignes de désordre" d'un modèle XY modifié (Garel, Niel & Orland 1990). Ces propriétés appellent sans aucun doute des études ultérieures qui me semblent très intéressantes, sur la phase désordonnée du modèle XY (et de ses généralisations).

### 2.4.3 Transition du premier ordre à grande fugacité

Toute l'étude qui précède est basée sur une hypothèse de faible densité du gaz de vortex, ce qui est cohérent avec une hypothèse de faible fugacité (grande énergie de coeur). Ainsi

---

Halperin B. Superfluidity, melting and liquid-crystal phases in two dimensions. In *Physics of low dimensional systems*. Kyoto summer institute, 1979.

Halperin B. non publié. communication privée, 1998.

Garel T., Niel J., & Orland H., (1990). *EuroPhys. Lett.*, **11**:349.

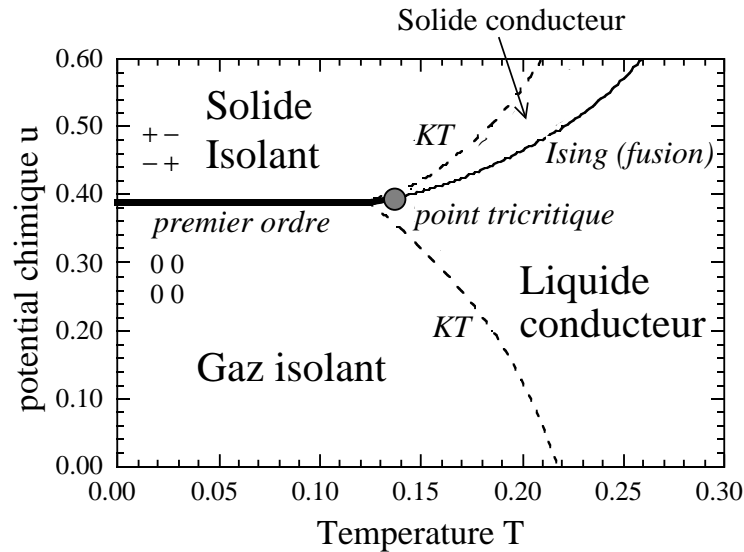


FIG. 2.6 – Diagramme des phases d'un gaz de Coulomb sur réseau avec charges  $\pm 1$ , extrait de P. Gupta et S. Teitel [GT97]

dans un système donné à symétrie  $U(1)$ , nous ne pouvons pas dire à priori si la transition sera du type KOSTERLITZ-THOULESS : cette transition peut très bien être du premier ordre avec libération d'une densité importante de défauts à la transition, contrairement au scénario précédent où, même au dessus (mais à des valeurs proches) de  $T_c$ , la densité de défauts reste faible. A priori une détermination de l'énergie de coeur des défauts permet de trancher entre les deux possibilités, mais ce calcul est dans la pratique complexe. Plusieurs auteurs ont essayé d'étudier les modifications à apporter à cette transition de KOSTERLITZ-THOULESS. En particulier comme nous nous y attendons, lorsque l'énergie de coeur des défauts baissent, la transition devient du premier ordre. Parmi les approches de renormalisation qui étendent celle de KOSTERLITZ, nous pouvons citer la méthode assez complexe de (Minnhagen & Wallin 1989), et également l'approche de (Thijssen & Knops 1988) qui dérivent une équation de renormalisation fonctionnelle pour le potentiel d'interaction effectif entre deux charges test. Malheureusement le manque de temps m'empêche de développer cette dernière méthode. Des études numériques récentes ont également vérifié cette perte de transition du second ordre lorsque la fugacité des défauts était augmentée (Gupta & Teitel 1997) : voir la figure 2.6.

## 2.5 Du gaz de Coulomb au modèle de Sine-Gordon

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés à la description des défauts topologiques de modèle à symétrie  $U(1)$  à l'aide de gaz de Coulomb de charges scalaires. Ces gaz de Coulomb sont reliés à de nombreux autres modèles bidimensionnels. Un modèle

Minnhagen P. & Wallin M., (1989). *Phys. Rev. B*, **40**:5109.

Thijssen J. & Knops H., (1988). *Phys. Rev. B*, **38**:9080.

Gupta P. & Teitel S., (1997). *Phys. Rev. B*, **55**:2756.

particulièrement important est le modèle de Sine-Gordon : en effet la correspondance avec le gaz de Coulomb permet d'envisager une renormalisation de type théorie des champs du gaz de Coulomb, à la place de la méthode de la partie 2.4.1. Bien que je ne décrirai par cette méthode développée par AMIT et ses collaborateurs (Amit, Goldschmidt & Grinstein 1980), j'utiliserai par la suite cette correspondance. Nous allons donc étudier dans cette partie cette correspondance et une définition de la constante de couplage renormalisée analogue à (2.12).

### 2.5.1 Equivalence entre le gaz de Coulomb et le modèle de Sine-Gordon

Le modèle de Sine-Gordon est défini par le hamiltonien

$$H_{sg} = \frac{1}{2} \frac{T^2}{4\pi^2 K} \int d^2\mathbf{r} (\nabla\theta_{sg})^2 - 2Ty \int d^2\mathbf{r} \cos(\theta_{sg}) \quad (2.28)$$

Où le champ  $\theta_{sg}(\mathbf{r})$  prend maintenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La fonction de partition correspondante s'écrit

$$\begin{aligned} Z_{sg} &= \int d[\theta_{sg}] \sum_n \frac{1}{n!} \left( 2y \int d^2\mathbf{r} \cos(\theta_{sg}) \right)^n e^{-\frac{T}{8\pi^2 K} \int d^2\mathbf{r} (\nabla\theta_{sg})^2} \\ &\equiv \sum_n \frac{1}{n!} (2y)^n \left\langle \left( \int d^2\mathbf{r} \cos(\theta_{sg}) \right)^n \right\rangle_0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pour calculer la valeur moyenne dans l'expression ci-dessus, il convient d'abord de remarquer que l'équivalent de la condition de neutralité du gaz de Coulomb impose ici que cette valeur moyenne n'est non nulle que pour des valeurs paires de  $n$ . En utilisant la valeur des fonctions de corrélation du champ bosonique libre nous trouvons donc

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \int d^2\mathbf{r} \cos(\theta_{sg}) \right)^{2p} \right\rangle_0 &= \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p \prod_{\alpha=1}^p \int d^2\mathbf{r}_\alpha d^2\tilde{\mathbf{r}}_\alpha \langle e^{i(\theta_{sg}(\mathbf{r}_\alpha) - \theta_{sg}(\tilde{\mathbf{r}}_\alpha))} \rangle_0 \\ &= \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p \prod_{\alpha=1}^p \int d^2\mathbf{r}_\alpha d^2\tilde{\mathbf{r}}_\alpha \\ &\quad \times \prod_{\alpha < \gamma} \left( \frac{|\tilde{\mathbf{r}}_\alpha - \tilde{\mathbf{r}}_\gamma|}{a} \right)^{+\frac{\pi K}{T}} \left( \frac{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\gamma|}{a} \right)^{+\frac{\pi K}{T}} \prod_{\alpha} \left( \frac{|\mathbf{r}_\alpha - \tilde{\mathbf{r}}_\alpha|}{a} \right)^{-\frac{\pi K}{T}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

En attachant une charge  $n_\alpha = +1$  en chaque point  $\mathbf{r}_\alpha$  et une charge  $n_\alpha = -1$  en  $\tilde{\mathbf{r}}_\alpha$  nous pouvons maintenant reporter l'expression ci-dessus dans la fonction de partition qui s'écrit :

$$Z_{sg} = \sum_p \frac{y^{2p}}{2p!} C_{2p}^p \prod_{\alpha=1}^{2p} \int d^2\mathbf{r}_\alpha \prod_{\alpha < \gamma} \left( \frac{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\gamma|}{a} \right)^{n_\alpha n_\gamma \frac{\pi K}{T}} \quad (2.31)$$

Nous reconnaissons la fonction de partition d'un gaz coulombien de charges scalaires valant  $\pm 1$ , de fugacité  $y$  et de constante de couplage  $K$  défini dans (2.8). La relation entre les constantes de couplage de ce gaz de Coulomb et celle du modèle de Sine-Gordon (2.28) fait penser à une relation de dualité entre les deux modèles. Ce parallèle possède un second avantage: il est clair d'après le développement ci-dessus que les opérateurs  $\cos(p\theta)$  avec  $p$  entier ont une dimension  $[\cos \theta] = \frac{l^2}{4\pi}$ : ils correspondent à des charges  $\pm p$  de vortex pour le gaz coulombien. Nous retrouvons donc que autour de la transition qui nous intéresse, seules les charges de norme 1 correspondent aux opérateurs les plus pertinents.

## 2.5.2 Approximation de VILLAIN du modèle de Sine-Gordon

Une méthode différente et approchée pour passer du modèle de Sine-Gordon au gaz de Coulomb consiste à utiliser l'approximation de VILLAIN (2.18) sur le potentiel en  $\cos(\theta_{sg})$  du hamiltonien (2.28):

$$\begin{aligned} Z_{sg} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d[\theta_{sg}] \exp \left( -\frac{K_{sg}}{2T} \int_{\mathbf{r}} (\nabla \theta_{sg})^2 + \int_{\mathbf{r}} 2y \cos(\theta_{sg}(\mathbf{r})) \right) \\ \xrightarrow{\text{Villain}} Z_{sgv} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d[\theta_{sg}] \sum_{[n_{\mathbf{r}}]=-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{K_{sg}}{2T} \int_{\mathbf{r}} (\nabla \theta_{sg})^2 + \int_{\mathbf{r}} i n_{\mathbf{r}} \cdot \theta_{sg}(\mathbf{r}) - n_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{4y} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $K_{sg} = T^2/4\pi^2 K$  est la constante du modèle de Sine-Gordon (2.28). Cette approximation introduit donc des charges en chaque point qui peuvent prendre toute valeur entière, et dont la fugacité vaut maintenant  $y_{sgv} = e^{-1/4y}$ . L'interaction entre ces charges s'obtient en faisant la moyenne gaussienne sur le champ  $\theta_{sg}$ :

$$\begin{aligned} H'[n] &= -\frac{1}{2} \frac{T^2}{K_{sg}} \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{q^2} n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{T^2}{2\pi K} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geq a} n_{\mathbf{r}} G_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} n_{\mathbf{r}'} = -\pi \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geq a} n_{\mathbf{r}} G_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} n_{\mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (2.33)$$

ce qui est exactement l'interaction (2.8) obtenue précédemment. Il est intéressant de remarquer que la définition de l'hélicité renormalisée utilisée dans le contexte du modèle XY (2.12) admet une expression équivalente dans le contexte de ce modèle de Sine-Gordon-Villain. Cela nous permet d'utiliser exactement le même procédé que précédemment pour renormaliser ce modèle.

### Constante de couplage renormalisée

Cette constante renormalisée s'exprime bien sûr en fonction du comportement à grande distance (grande longueur d'onde) des fluctuations élastiques. Nous définissons la valeur renormalisée de  $K_{sg}$  dans (2.32) par

$$\frac{T}{K_{sg,R}} = \lim_{q \rightarrow 0} q^2 \langle \theta_{sg,\mathbf{q}} \theta_{sg,-\mathbf{q}} \rangle \quad (2.34)$$



où  $\theta_{sg,\mathbf{q}}$  est le champ qui intervient dans l'action de Sine-Gordon-Villain. Dans cette définition et dans (2.12), je suppose que la fonction de corrélation est indépendante de la direction de  $\hat{q}$ , ce que je vérifierai explicitement dans la suite. D'après l'action du modèle de Sine-Gordon-Villain (2.32), cette définition se reformule immédiatement en fonction des fonctions de corrélation des charges  $n$  :

$$\langle \theta_{sg,\mathbf{q}} \theta_{sg,-\mathbf{q}} \rangle = \frac{T}{K_{sg} q^2} - \left( \frac{T}{K} \right)^2 \frac{1}{q^4} \langle n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \rangle$$

où la dernière moyenne est prise par rapport au hamiltonien de gaz de Coulomb (2.33). En reportant dans la définition ci-dessus nous obtenons l'expression pour  $K_{sg,R}$  :

$$\frac{T}{K_{sg,R}} = \frac{T}{K} - \left( \frac{T}{K} \right)^2 \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q^2} \langle n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \rangle \quad (2.35)$$

Si nous réexprimons cette définition en terme de l'hélicité initiale  $K$ , nous retrouvons exactement (2.12). Il faut cependant noter qu'ici le gaz de Coulomb comporte des charges de norme plus grande que 1. Cependant comme nous l'avons remarquer plus haut, autour de la transition ces charges ne jouent aucun rôle. De plus la fugacité du nouveau gaz de Coulomb est différente de la fugacité qui intervient dans (2.12):  $y_{sgv} = e^{-1/4y}$ . Cette différence ne devrait pas changer la classe d'universalité du modèle. Nous savons en particulier que différentes régularisations du même gaz de Coulomb conduisent à des valeurs différentes de la fugacité initiale, qui n'affectent pas la comportement critique universel.

## 2.6 Effet d'un champ à symétrie $\mathbb{Z}_p$ : le gaz coulombien électromagnétique

Nous nous intéressons maintenant à un modèle XY perturbé par un champ  $p$ -dégénéré. Il modélise par exemple l'absorption d'atomes sur un substrat de symétrie  $\mathbb{Z}_p$  (Jose et al. 1977). Les interactions avec le substrat sont dans l'étude qui suit supposées faibles et sont traitées en perturbation. Le cas d'une forte interaction conduirait à étudier des perturbations autour d'un état fondamental  $p$ -dégénéré ( dans le modèle qui suit, il s'agit des états de spins dirigés dans une des  $p$  directions du substrat) : ce sont à proprement parler les «clock-modèles». Nous allons voir que l'effet de cet opérateur peut être traité en incorporant dans le gaz de Coulomb étudié précédemment des charges magnétiques.

Considérons donc un modèle XY à symétrie brisée :

$$H = \frac{K}{2} \int d^2\vec{r} (\nabla\theta)^2 - h_p \int d^2\vec{r} \cos(p\theta)$$

Nous commençons par appliquer l'approximation de VILLAIN pour développer les cos :

$$e^{\frac{h_p}{T} \cos(p\theta)} \longrightarrow \sum_{m=0,\pm 1} e^{ipm\theta} e^{\ln(y_p) m^2}$$

---

Jose J., Kadanoff L., Kirkpatrick S., & Nelson D., (1977). *Phys. Rev. B*, **16**:1217.

Nous n'avons tenu compte ici que de trois valeurs pour  $m$ , car nous travaillons sous l'hypothèse  $h_p \ll 1$ . Les termes de la somme correspondant aux autres valeurs de  $m$  peuvent donc être négligés. Sous cette approximation, la fugacité des charges s'exprime selon  $y_p = 1/2 h_p/T$  (à faible champ, elle est donc faible: seules les charges  $m = 0, \pm 1$  sont susceptibles d'apparaître). Cette fugacité étant faible, nous pouvons donc négliger ces charges  $m$  dans la détermination de l'expression des charges topologiques du champ  $\theta$ : celles-ci ont donc la même forme que dans le cas du modèle XY. Après intégration sur le champ élastique  $\theta_{sw}$ , nous obtenons le hamiltonien de Gaz de Coulomb

$$-\frac{1}{T}H_{n/m} = \pi \frac{K}{T} n * G * n + \frac{p^2 T}{4\pi K} m * G * m + ip n * \Phi * m + \ln y_p \sum_{\mathbf{r}} m_{\mathbf{r}}^2 + \ln y \sum_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{r}}^2$$

Nous trouvons un gaz coulombien avec charges électriques et magnétiques scalaires dont la renormalisation est présentée dans l'Annexe B. Ce modèle possède une dualité électromagnétique:  $Z_{n/m}(K/T, y, y_p) = Z_{n/m}(Tp^2/4\pi^2 K, y_p, y)$  qui relie les régions de haute et basse température. Si le point de transition est unique, il correspond donc à  $K/T = p/2\pi$ .

En utilisant les résultats de l'annexe, nous pouvons écrire les équations du groupe de renormalisation pour ce modèle:

$$\partial_l T K^{-1} = 4\pi^3 y^2 - \frac{p^2 K^2}{T^2} y_p^2 \quad (2.36)$$

$$\partial_l y = \left(2 - \pi \frac{K}{T}\right) y \quad (2.37)$$

$$\partial_l y_p = \left(2 - \frac{p^2 T}{4\pi K} y_p\right) \quad (2.38)$$

Il est intéressant de remarquer que les charges  $n$  et  $m$  ne sont pas localisées sur le même réseau: les charges  $m$  viennent simplement de l'approximation de VILLAIN, traitée en perturbation, et sont donc situées aux noeuds du réseau initial, alors que les charges de vortex ont été introduites par la transformation de dualité habituelle, et sont donc localisées sur le réseau dual du réseau des spins (ou des atomes).

Le diagramme des phases dépend donc de la valeur de  $p$ . Les vortex n'apparaissent que pour  $T/K > \pi/2$  et le champ  $h_p$  ne devient pertinent que si  $T/K < 8\pi/p^2$ . Il n'existe une région perturbative (où notre étude est possible) que si  $p \geq 4$ . Dans le cas  $p \geq 5$ , une région entière de points fixes existe. A basse température, le modèle se trouve bloqué dans une des orientations préférées par le champ  $h_p$ .

## 2.7 Conclusion

Nous venons donc de voir rapidement comment décrire la transition de KOSTERLITZ-THOULESS qui correspond à l'apparition d'une densité finie de défauts topologiques dans un modèle à symétrie continue  $U(1)$ . Nous avons vu en particulier comment décrire un ensemble de ces défauts, qui dominent la thermodynamique autour de la transition, à l'aide d'un gaz de Coulomb avec des charges scalaires. Ce premier survol nous a permis de nous

familiariser avec ces techniques avant de passer plus loin à leur généralisation en présence d'impuretés dans le modèle à symétrie  $U(1)$ .

Bien sûr cet aperçu des défauts topologiques à charge scalaire ne saurait être complet : nous n'avons par exemple pas du tout parlé des réalisations expérimentales dans lesquelles la transition de KOSTERLITZ-THOULESS a été observée. Il est en effet toujours intéressant de comprendre quelles quantités peuvent être mesurées précisément dans des expériences de ce type, et quelles sont les comparaisons possibles avec les prédictions théoriques précédentes. D'un point de vue un peu plus formel, seule la renormalisation dans l'espace réel a été abordée : des techniques de théories des champs permettent également de renormaliser le modèle et d'étudier les ordres suivants du développement perturbatif des équations de renormalisation. Finalement, nous avons aperçu la connexion entre les gaz de Coulomb et les modèles de Sine-Gordon. La fermionisation de ces derniers permet de prolonger ce lien à des modèles fermioniques unidimensionnels, qui s'avèrent parfois bien utiles dans l'étude de la phase massive des gaz de Coulomb, où les approches de renormalisation perturbatives sont assez limitées.

Les techniques présentées dans ce chapitre constituent par ailleurs le point de départ des analyses des défauts topologiques scalaires (vortex XY) en présence de désordre, présentées au chapitre 4 et dans le travail du chapitre 7.

## Annexe A Potentiel coulombien bidimensionnel

Le potentiel coulombien  $\Gamma(\mathbf{r})$  est défini par

$$\partial_\mu \partial_\mu \Gamma(\mathbf{r}) = -2\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (2A.39)$$

où en dimension deux  $\mu = 1, 2$ . Son potentiel dual est défini à partir de  $\Gamma$  par

$$\partial_\mu \Phi(\mathbf{r}) = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \Gamma(\mathbf{r}) \quad (2A.40)$$

Le potentiel  $\Phi$  est donc multivalué. La définition ci-dessus revient à dire que  $\Gamma + i\Phi$  est analytique. De l'équation (2A.39) on déduit que  $\Gamma(\mathbf{q}) \sim q^{-2}$ . En dimension deux, ce potentiel a donc asymptotiquement le comportement d'un logarithme. Cependant il nécessite une régularisation aux courtes distances (divergence UV). Je présente rapidement dans la suite deux régularisations correspondant à deux schémas de renormalisation : une régularisation sur réseau, correspondant à une régularisation de coeur dur dans l'espace réel, et une régularisation dans l'espace réciproque.

### Régularisation sur le réseau

Sur un réseau carré le laplacien s'exprime sous la forme

$$\partial_\mu \partial_\mu \Gamma(\mathbf{r}) = \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{e}_x) + \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{e}_x) + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{e}_y) + \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{e}_y) - 4\Gamma(\mathbf{r})$$

Les vecteurs  $\mathbf{e}_{x,y}$  sont les vecteurs élémentaires du réseau carré. Si  $a$  est le pas du réseau, le potentiel  $\Gamma$  prend donc la forme

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^2 \mathbf{q}}{2\pi} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{4 - 2(\cos(q_x a) + \cos(q_y a))} \quad (2A.41)$$

Les divergences infrarouges de  $\Gamma$  sont par exemple visibles sur  $\Gamma(0)$  qui diverge comme  $\Gamma(0) \sim \ln(L/A)$  où  $a$  est la taille du réseau. Afin d'éliminer ces divergences, on introduit le potentiel soustrait  $G(\mathbf{r}) = \Gamma(0) - \Gamma(\mathbf{r})$  qui vérifie asymptotiquement (Itzykson & Drouffe 1989) :

$$G(\mathbf{r}) \sim \ln(r/a) + \mathcal{C} \quad (2A.42)$$

où  $\mathcal{C}$  est une constante :  $\mathcal{C} = \ln(2\sqrt{2}e^\gamma) \sim 1.6169$ . Dans le contexte des gaz de Coulomb, la régularisation infrarouge, *i.e* le passage de  $\Gamma$  à  $G$ , est associée à la neutralité du gaz. Les charges du gaz interagissent via le potentiel de Coulomb :  $\sum_{i,j} n_i \Gamma_{ij} n_j$ , avec la notation  $\Gamma_{ij} = \Gamma(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ . En utilisant la neutralité du gaz  $\sum_i n_i = 0$ , on peut reformuler cette interaction à l'aide de  $G$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} n_i \Gamma_{ij} n_j &= \sum_{i \neq j} n_i \Gamma_{ij} n_j + \Gamma(0) \sum_i n_i^2 \\ &= \sum_{i \neq j} n_i \Gamma_{ij} n_j - \Gamma(0) \sum_i n_i \sum_{j \neq i} n_j \\ &= - \sum_{i \neq j} n_i G_{ij} n_j \end{aligned}$$

Dans cette partie, j'ai brièvement présenté la régularisation dans l'espace réel. Cependant certains schémas de renormalisation utilisent des régularisations différentes que je présente dans la partie suivante.

### Autres régularisations

A la place d'une régularisation dans l'espace réel, il est possible d'utiliser une fonction de cut-off  $\phi(aq)$  dans l'espace réciproque. L'expression du potentiel soustrait devient alors

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{2\pi} \frac{\phi(aq)}{q^2} (1 - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}})$$

dont l'expression asymptotique est donné par  $G(\mathbf{r}) \sim \ln(r/a) + C(\phi)$  où la constante est maintenant donnée par  $C(\phi) = \int d^2 \mathbf{r} \phi(r) \ln(r)$ .

Dans le contexte des théories des champs, deux autres régularisations sont assez fréquemment utilisées. La première consiste à introduire une masse dans le progateur (et donc une longueur finie) qui est mise à zéro à la fin du calcul. Une second est la régularisation dimensionnelle habituelle (Zinn-Justin 1993) : dans cette dernière le potentiel  $\Gamma$  s'exprime en dimension  $d = 2 + \epsilon$  selon

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{q^2} = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^{d-1}} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha q^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int_0^\infty d\alpha (\pi\alpha)^{d/2} e^{-\frac{r^2}{4\alpha}} \\ &= \frac{1}{2(\pi)^{\frac{d}{2}-1}} r^{2-d} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité  $\Gamma(n)$  est la fonction d'Euler. Le développement en  $\epsilon$  se fait en utilisant  $\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon}(1 + \frac{\epsilon}{2}\psi(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2))$ . On obtient ainsi

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} - \ln(\sqrt{\pi}r) + \frac{\psi(1)}{2} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

De même  $\Gamma(0) = \frac{1}{\epsilon} + \ln a^{-1}$  où  $a^{-1}$  est un cut-off ultraviolet. L'expression du potentiel soustrait a une constante modifiée :

$$G(\mathbf{r}) = \ln(r/a) + \frac{1}{2}(\ln(\pi) - \psi(1))$$

---

Zinn-Justin J., (1993). *Quantum field theory and critical phenomena*. Clarendon (Oxford).

## Annexe B Renormalisation du gaz électromagnétique

Dans cette annexe, je vais rappeler la renormalisation d'un gaz neutre de charges électriques et magnétiques en dimension deux. La démarche que je vais suivre est celle de KOSTERLITZ (Kosterlitz 1974) (adaptée de celle de ANDERSON et YUVAL pour des problèmes unidimensionnels (Anderson, Yuval & Hamann 1970)). Dans cette approche, on considère la fonction de partition grand canonique du modèle dans lequel les charges ont un coeur dur  $a$  (analogue au pas du réseau de l'annexe précédente). En imposant que cette fonction de partition ait une forme invariante sous un changement de ce coeur dur  $a$ , on obtient des définitions pour les fugacités et la constante de couplage qui dépendent de l'échelle. Leur comportement peut être décrit par des équations de renormalisation, qui généralisent celles de KOSTERLITZ à la présence de charges magnétiques. La renormalisation de ce gaz électromagnétique se trouve dans l'article de JOSÉ ET AL. (Jose et al. 1977), et a été détaillée dans la revue de NIENHUIS (Nienhuis 1987). Je vais suivre essentiellement cette dernière approche.

### Modèle

Le hamiltonien de notre ensemble de charges entières  $\{n_i, m_i\}$ , respectivement électriques et magnétiques est donné par :

$$\frac{-H}{kT} = S\{n, m, \mathbf{r}\} = \sum_j \ln Y[n_j, m_j] + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (K^{-1} n_j n_k + K m_j m_k) G_{jk} + i \sum_{j \neq k} n_j \Phi_{jk} m_k$$

Nous prenons ici la convention de repérer par  $\mathbf{r}_j$  la position de la charge  $(e_j, m_j)$ , et nous avons posé  $G_{jk} = G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$ . Les variables  $Y[n, m]$  sont les fugacités -uniformes dans le système- des charges, et  $K$  est la constante de couplage du gaz. Celui-ci est supposé neutre :

$$\sum_i n_i = \sum_i m_i = 0$$

La renormalisation que nous allons considérer se fait sur la fonction de partition, qui s'écrit :

$$Z = \sum_{\{n, m\}} \int \prod_j \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{a^2} \frac{1}{\prod_{(n_i, m_i)} N(n_i, m_i)} e^{S[\{n, m\}]}$$

où  $N(n, m)$  est le nombre de particules de charges  $(n, m)$ .

La renormalisation de la fonction de partition du gaz de coulomb telle qu'elle a été proposée par KOSTERLITZ (Kosterlitz 1974) se fait en trois étapes :

- Dans un premier temps on fait passer le diamètre de coeur dur des charges (ou le pas du réseau dans le cas discret) de  $a$  à  $\tilde{a} = a + da = ae^{dl}$ .

---

Kosterlitz J., (1974). *J. Phys. C*, **7**:1046.

Anderson P., Yuval G., & Hamann D., (1970). *Phys. Rev.*, **131**:4464.

Jose J., Kadanoff L., Kirkpatrick S., & Nelson D., (1977). *Phys. Rev. B*, **16**:1217.

Nienhuis B., (1987). In Domb C. & Lebowitz J., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapter vol. 11. Academic Press (London).

- On regarde alors la contribution à la nouvelle fonction de partition de deux charges initialement distantes de  $a \leq r \leq a + da$ . Soit celles-ci sont des charges opposées et elles écrantent les interactions entre charges plus distantes, tel un dipôle de petit rayon : il s'agit de l'annihilation de 2 particules; sinon elles restent présentes de façon effective à la nouvelle échelle sous la forme d'une seule charge égale à la somme des deux précédentes : les deux charges fusionnent.

Dans la suite, j'utiliserai la notation  $e * G * e$  pour l'expression  $\sum_{i,j} e_i G_{ij} e_j$ . Toute la renormalisation est effectuée au premier ordre en  $da$ .

## Reparamétrisation

Le paramètre  $a$  n'apparaît qu'à deux endroits dans l'expression de la fonction de partition : dans la mesure d'intégration et dans l'expression du potentiel  $G$ . Les deux corrections correspondantes s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} - \int \prod \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{a^2} &\longrightarrow \int \prod \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{(a+da)^2} (1+dl)^2 \\ - G(r) &\longrightarrow \ln(r/(a+da)) + \ln(1+dl) \end{aligned}$$

En tenant compte de la neutralité du gaz, ces corrections se traduisent dans la modification de la fonction de partition suivante :

$$Z = \int \prod \frac{d^2 \mathbf{r}_j}{(a+da)^2} (1+dl)^{2-\frac{1}{2}K^{-1}n_j^2 - \frac{1}{2}Km_j^2} Y[n_i, m_i] \times e^{\tilde{S}} \quad (2B.43)$$

Soit au niveau des fugacités de charge :

$$\partial_l Y[n_i, m_i] = \left( 2 - \frac{1}{2K} n_i^2 - \frac{K}{2} m_i^2 \right) Y[n_i, m_i] \quad (2B.44)$$

## Fusion de deux particules

Nous considérons maintenant deux charges  $p$  et  $q$  qui ne sont pas opposées ( $n_p + n_q \neq 0$  ou  $m_p + m_q \neq 0$ ). Par soucis d'économie, il est possible d'introduire les notations

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= K^{-1} n_j n_k + K m_j m_k \\ \beta_{j,k} &= n_j m_k + m_j n_k \end{aligned}$$

Avec cette notation, la partie de l'action  $S$  qui fait intervenir les deux particules  $p$  et  $q$  s'écrit :

$$S[n, m] = \sum_{j \neq p, q} (\alpha_{j,p} G_{j,p} + \alpha_{j,q} G_{j,q} + i(\beta_{j,p} \Phi_{j,p} + \beta_{j,q} \Phi_{j,q})) + \ln Y_p + \ln Y_q + \alpha_{p,q} G_{p,q} + i\beta_{p,q} \Phi_{p,q}$$

La somme qui reste dans la fonction de partition est une somme sur toutes les configurations (et les positions des charges) qui vérifient  $\sum n = -(n_p + n_q)$ ,  $\sum m = -(m_p + m_q)$ . Dans ces configurations, nous faisons l'hypothèse que toutes les charges sont distantes les unes des autres d'au moins  $ae^{dl}$ , ce qui revient à faire une hypothèse de densité du gaz faible devant  $a^{-2}$ .

Il nous reste à sommer sur les valeurs possibles des deux charges et sur leur position. Pour cela nous développons en gradient l'exponentielle de l'action ci-dessus au premier ordre en  $\rho = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q$ . En utilisant la notation  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_p + \mathbf{r}_q)/2$ , le résultat s'exprime sous la forme

$$\frac{1}{2} \sum_{n_p, m_p, n_q, m_q} Y_{[n_p, m_p]} Y_{[n_q, m_q]} \int \frac{d^2 \rho}{a^2} e^{i\beta_{p,q}\Phi(\rho)} \times \int \frac{d^2 \mathbf{R}}{a^2} \exp \left( \sum_{j \neq p, q} ((\alpha_{j,p} + \alpha_{j,q})G(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}) + i(\beta_{j,p} + \beta_{j,q})\Phi(\mathbf{r}_j - \mathbf{R})) \right) \quad (2B.45)$$

Pour obtenir cette expression, il faut remarquer que l'intégrale sur  $\rho$  est déjà d'ordre  $dl$ , et qu'il suffit donc de trouver le terme d'ordre 0 dans le développement de l'action. Ainsi le  $G(\rho)$  ne contribue pas  $G(\rho) \sim dl$ . Le facteur  $\frac{1}{2}$  devant la somme ci-dessus vient de l'indiscernabilité des charges : il ne faut compter qu'une fois chaque configuration  $\{n/m_p, n/m_q\}$ . L'intégration sur  $\rho$  donne une contrainte sur  $\beta_{p,q}$  :

$$\int \frac{d^2 \rho}{a^2} e^{i\beta_{p,q}\Phi(\rho)} = 2\pi\delta(\beta_{p,q})$$

Après fusion, le terme ci-dessus se réécrit comme un terme d'interaction entre la charge  $(n_j, m_j)$  et une charge fusionnée  $(n_p + n_q, m_p + m_q)$  située en  $\mathbf{R}$  avec une fugacité modifiée. Mettant bout à bout tout ceci, nous pouvons exprimer la correction à la fonction de partition de la fusion :  $Z$  va s'exprimer comme une somme de deux termes : le premier  $Z_{p,q}$  comprenant les configurations de charges avec (au moins) une paire qui fusionne, et la seconde  $Z'$  les autres configurations. Après fusion des charges proches,  $Z_{p,q}$  prend la même forme que  $Z'$ , mais avec une correction pour la fugacité de chaque charge :

$$\partial_l Y[n, m] = \pi \sum_{(n', m') \neq (0, 0); (n, m)} Y[n', m'] Y[n - n', m - m'] \delta(nm' + n'm - 2n'm') \quad (2B.46)$$

La condition dans la somme évite de fusionner des charges nulles.

## Écrantage du gaz de coulomb : annihilation de particules

Nous nous intéressons maintenant au véritable calcul de l'écrantage du gaz de Coulomb par des petits dipôles issus du changement d'échelle.

Nous notons  $p$  et  $q$  les deux particules du dipôle. Le calcul va être légèrement différent de celui effectué ci-dessus car il va falloir aller jusqu'à l'ordre 2 dans le développement de l'exponentielle pour obtenir une correction en  $da$  : en effet nous effectuons maintenant l'intégrale sur  $\mathbf{R}$  et nous nous trouvons donc avant le développement en face d'un terme d'ordre  $a^{-3}da$ . Reprenons donc le développement en gradient dans le cas de deux particules



de charges opposées :

$$\begin{aligned}
\Xi_j &\equiv \alpha_{j,p} \left[ G(\mathbf{r}_j - \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho) - G(\mathbf{r}_j - \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho) \right] \\
&\quad + i\beta_{j,p} \left[ \Phi(\mathbf{r}_j - \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho) - \Phi(\mathbf{r}_j - \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho) \right] \\
&\simeq \alpha_{j,p}(-\rho) \cdot \nabla G(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}) + i\beta_{j,p}(-\rho) \cdot (\epsilon \cdot \nabla) G(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}) \\
&= -\alpha_{j,p} \frac{\rho \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{R})}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{R}|^2} - i\beta_{j,p} \frac{\rho \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{R})}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{R}|^2}
\end{aligned}$$

L'expression que nous avons donc à intégrer est à ce niveau :

$$\sum_p \int_{a \leq \rho \leq ae^{dl}} \frac{d^2\rho}{a^2} \int \frac{d^2\mathbf{R}}{a^2} \exp \left( \sum_j \Xi_j + \alpha_{p,-p} G(\rho) + i\beta_{p,-p} \Phi(\rho) \right) Y^2[n_p, m_p] \exp(S(n, m))$$

De même que précédemment nous ne nous intéressons pas au facteur de  $\alpha_{p,-p}$ , et nous développons l'exponentielle :

$$\rightarrow \int \left( 1 + \sum \Xi_j + \sum_{j < k} \Xi_j \Xi_k \right) e^{i\beta_{p,-p}\Phi(\rho)} \frac{d^2\rho}{a^2} \frac{d^2\mathbf{R}}{a^2}$$

- Premier terme : il est a priori d'ordre 0 et doit donc faire intervenir le volume exclu. Il s'exprime sous la forme  $2\pi dl \delta(\beta_{p,-p}) a^{-2} (\pi R^2 - N \times S_{exclu})$  où  $N$  est le nombre de particules restantes. Reste à calculer le volume exclu (pour des disques) :  $S_{exclu} = \left( \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a^2$
- Deuxième terme : A cet ordre nous n'avons plus à tenir compte du volume exclu et nous travaillons donc avec un domaine centré. Après changement de variable d'intégration  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} - \mathbf{r}_j$  nous obtenons donc une intégrale impaire en la variable d'intégration qui est donc nulle dans la limite d'un volume infini.
- Troisième terme : ce calcul est un peu fastidieux, car il faut traiter tous les termes du développement de  $\Xi_j \Xi_k$  séparément.

1. Cas  $j = k$  Après intégration, le terme correspondant s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{j,p}^2 - \beta_{j,p}^2) \int \frac{d^2\rho}{a^2} \frac{d^2\mathbf{R}}{a^2} \frac{\rho^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{R}|^2} \cos^2(\rho, \mathbf{r}_j - \mathbf{R}) e^{i\beta_{p,-p}\Phi(\rho)} \\
&\quad \underset{R \gg a}{\sim} (\alpha_{j,p}^2 - \beta_{j,p}^2) 2\pi^2 \ln \frac{R}{a} \frac{da}{a} \quad (2B.47)
\end{aligned}$$

L'intégrale correspondant au terme  $\alpha_{j,p}\beta_{j,p}$  s'annule par intégration angulaire sur  $\mathbf{R} - \mathbf{r}_j$ .

2. Cas  $j \neq k$

(a) Coefficient de  $\alpha_{j,p}\alpha_{k,p}$  :

$$\int \frac{d^2\rho}{a^2} \frac{d^2\mathbf{R}}{a^2} \rho_\mu \rho_\nu \partial_\mu G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_j) \partial_\nu G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) e^{i\beta_{p,-p}\Phi(\rho)}$$

La transformation  $\rho \rightarrow -\rho$  conduit à un résultat nul sauf si  $\beta_{p,-p} = 0$ . Nous pouvons donc directement réécrire cette expression :

$$\delta(\beta_{p,-p}) \int \frac{d^2\rho}{a^2} \frac{d^2\mathbf{R}}{a^2} \rho_\mu \rho_\nu \partial_\mu G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_j) \partial_\nu G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_k)$$

dans laquelle nous pouvons effectuer l'intégrale sur  $\rho$  sans problème :

$$\begin{aligned} & - \pi dl \delta(\beta_{p,-p}) \left[ \int \frac{d^2\mathbf{R}}{a^2} \partial_\mu \partial_\mu G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_j) G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \sum \oint_{\partial S_v} \partial_\mu G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_j) G(\mathbf{R} - \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{n}_\mu \right] \\ & \simeq -\pi dl \delta(\beta_{p,-p}) \left[ 2\pi G(\mathbf{r}_{jk}) - 2\pi \ln \frac{R}{a} \right] \\ & = -\pi dl \delta(\beta_{p,-p}) 2\pi \ln \frac{|\mathbf{r}_{jk}|}{R} \end{aligned}$$

Dans le calcul du second terme, nous n'avons tenu compte que du bord extérieur du domaine d'intégration, les bords internes n'intervenant pas à cet ordre ( voir remarque plus haut).

- (b) Coefficient de  $i\alpha_{j,p}\beta_{k,p}$  : ce terme est nul car  $\Phi$  est de classe  $C^2$  sur le domaine d'intégration que nous considérons à cet ordre.
- (c) Coefficient de  $-\beta_{j,p}\beta_{k,p}$  : ce terme est indentique à celui en facteur de  $\alpha_{j,p}\alpha_{k,p}$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la correction finale du terme dû à l'annihilation de particules. Avant de l'écrire, remarquons la factorisation propres aux charges scalaires qui simplifie le calcul :

$$\forall j ; \forall k \quad \alpha_{jp}\alpha_{kp} - \beta_{jp}\beta_{kp} = \left( \frac{1}{K} e_j e_k - K m_j m_k \right) \left( \frac{1}{K} e_p^2 - K m_p^2 \right) \quad (2B.48)$$

Avec cette remarque, le résultat final de l'intégration s'écrit

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2\rho}{a^2} \frac{d^2\mathbf{R}}{a^2} \left( 1 + \sum \Xi_j + \sum_{j<k} \Xi_j \Xi_k \right) e^{i\beta_{p,-p}\Phi(\rho)} \\ & = 2\pi^2 dl \delta(\beta_{p,-p}) \left[ \frac{R^2}{a^2} - N \left( \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (K^{-1} n_j n_k - K m_j m_k) (K^{-1} n_p^2 - K m_p^2) \ln \frac{|\mathbf{r}_{jk}|}{a^2} \right] \end{aligned}$$

De ces trois termes le premier est un terme que l'on oublie et qui renormalise l'énergie libre, le deuxième renormalise toutes les fugacités uniformément, et seul le troisième modifie la constante de couplage.

## Equations de renormalisation

Nous pouvons maintenant résumer les calculs précédents pour écrire les équations de renormalisation pour la constante de couplage et pour les fugacités. La propriété  $\delta(\beta_{p,-q}) =$

$\delta(n_p m_p)$  permet de simplifier la dernière expression obtenue et sélectionne seulement certaines configurations. Rassemblant les résultats et exponentiant l'expression obtenue, nous aboutissons à :

$$\partial_l K = 2K\pi^2 \left( K^{-1} \sum_n n^2 Y[n, 0] Y[-n, 0] - K \sum_m m^2 Y[0, m] Y[0, -m] \right) \quad (2B.49)$$

$$\begin{aligned} \partial_l Y[n, m] &= \left( 2 - \frac{K^{-1}}{2} n^2 - \frac{K}{2} m^2 \right) Y[n, m] \quad (2B.50) \\ &+ \pi \sum_{n', m'} Y[n', m'] Y[n - n', m - m'] \delta(nm' + n'm - 2n'm') \\ &- 2\pi^2 Y(e, m) \left( \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) \left( \sum_{n'} Y[n', 0] Y[-n', 0] + \sum_{m'} Y[0, m'] Y[0, -m'] \right) \end{aligned}$$

## Chapitre 3

# Dislocations et gaz coulombiens vectoriels

Après la symétrie  $U(1)$  dans le chapitre précédent, nous allons maintenant nous intéresser à la symétrie de translation en dimension deux. A priori les solides bidimensionnels possèdent de nombreuses similitudes avec les modèles de type XY : ils possèdent également une phase à basse température caractérisée par un quasi-ordre à longue portée et des défauts topologiques : les dislocations. On peut donc s'attendre à ce qu'un mécanisme analogue à celui du chapitre précédent induise une transition dans ces solides (Kosterlitz & Thouless 1973). Cependant une analyse de champs moyen (et des fluctuations) semble indiquer que la transition du solide vers le liquide est toujours du premier ordre, en dimension deux comme en dimension trois (Chaikin & Lubensky 1995). Dans ces conditions une transition continue induite par libération de défauts topologiques, comme celle du chapitre précédent, paraît exclue. Cette conclusion est en fait trop hâtive : un examen plus attentif de l'ordre dans les solides permet d'autoriser une transition de fusion continue analogue à celle intervenant dans les systèmes XY (Nelson & Halperin 1979).

Un solide est naturellement caractérisé par son ordre (ou quasi-ordre en  $d = 2$ ) translationnel. Le paramètre d'ordre associé (analogue au champ  $\psi$  du chapitre précédent) est  $\rho_{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) = e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$  où  $\mathbf{G}$  est un des premiers vecteurs du réseau réciproque. Dans un solide tridimensionnel nous avons donc  $\langle \rho_{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \rho_{\mathbf{G}}^*(0) \rangle \sim_{r \rightarrow \infty} \text{cte}$ . Comme nous le verrons dans la suite, en dimension deux cette fonction de corrélation décroît algébriquement : le solide est quasi-ordonné. Un deuxième type d'ordre doit être considéré, l'ordre orientationnel. Par exemple dans un solide bidimensionnel hexagonal, chaque atome est entouré de six voisins. Les liaisons (liens fictifs) entre atomes voisins sont donc réparties à  $\pi/3$  l'une de l'autre. On peut associer à cet ordre un paramètre d'ordre analogue à celui du modèle XY : si nous considérons  $\theta(\mathbf{r})$  l'angle local que fait une liaison avec un axe arbitraire,  $\mathbf{r}$  étant le milieu de cette liaison, alors ce paramètre s'écrit (Nelson & Halperin 1979)  $\psi_6(\mathbf{r}) = e^{i6\theta(\mathbf{r})}$ . Le facteur 6 provient de la symétrie liée au réseau (ici  $2\pi/6$ ). Ces deux symétries sont distinctes. Nous pouvons remarquer dans un premier temps que dans un solide parfait tridimensionnel, un ordre translationnel implique un ordre orientationnel. Cela se traduit en dimension deux

---

Kosterlitz J. & Thouless D., (1973). *J. Phys. C*, **6**:1181.

Chaikin P. & Lubensky T., (1995). *Principles of condensed matter physics*. Cambridge Univ. Press.

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

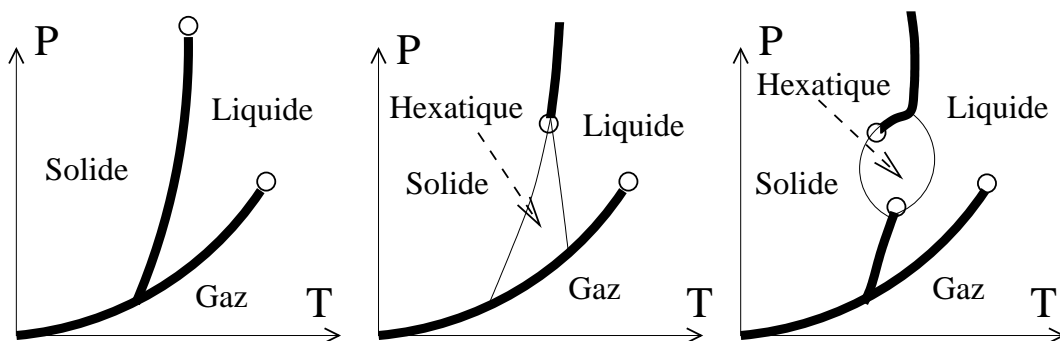


FIG. 3.1 – Différents diagrammes de Clapeyron (spéculatifs) des phases possibles de composés bidimensionnels. Les lignes en gras correspondent aux transitions du premier ordre alors que les transitions continues sont représentées par des lignes plus fines. De façon analogue au cas tridimensionnel, dans le diagramme de gauche l'ordre translationnel et l'ordre orientationnel sont perdus simultanément à la transition de fusion du premier ordre du solide. Dans les deux cas de droite, ces deux ordres sont perdus successivement en deux transitions continues. Entre les deux transitions existe une phase hexatique sans ordre translationnel, mais avec un quasi-ordre orientationnel. Les deux schémas se distinguent par la possibilité d'une transition hexatique-gaz à basse pression. D'après (D.R Nelson 1983).

par un solide quasi-ordonné translationnellement, mais ordonné orientationnellement. De plus l'absence d'ordre orientationnel empêche tout ordre translationnel : c'est le cas du liquide. Par contre il peut exister une phase sans ordre translationnel, mais avec un ordre orientationnel (des exemples sont fournis par la physique des cristaux liquides). Ainsi si l'on considère le cisaillement d'un solide le long d'un axe (ou d'un plan en dimension trois), l'ordre translationnel est perdu entre les deux moitiés du solide, alors que l'ordre orientationnel n'est pas affecté par ce défaut. Le passage du solide au liquide est donc caractérisé par la perte de deux types d'ordre (qui sont cependant liés). Il est donc légitime de penser que si le passage se fait directement du solide au liquide, c.-à-d. que les deux ordres sont perdus simultanément, la transition de fusion est du premier ordre. Par contre il est possible que le solide fonde en deux étapes, chacune caractérisée par la perte d'un ordre (voir la figure 3.1). La phase intermédiaire entre le solide et le liquide possède un (quasi)-ordre orientationnel mais pas d'ordre translationnel : par analogie avec la phase de cristaux liquides, HALPERIN et NELSON l'ont dénommée phase *hexatique*.

Dans le tableau 3.1 sont résumées les trois types de phase et leurs ordres en dimension deux. Dans le chapitre précédent nous avons vu que la transition de KOSTERLITZ-THOULESS pouvait laisser place à une transition du premier ordre en fonction de l'énergie de coeur des défauts du modèle, et donc de la densité de ces défauts à la transition. Il est possible aussi de relier ici l'ordre de la transition de fusion bidimensionnelle à l'énergie de coeur des défauts. Dans un cristal bidimensionnel, il existe deux types de défauts associés aux deux symétries : les *dislocations* et les *disclinaisons*. Les premières peuvent être considérées comme des paires de disclinaisons. Si l'énergie de coeur des dislocations est

Nelson D., (1983). In Domb C. & Lebowitz C., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapter vol. 7, page 165. Academic Press (London).

suffisamment importante, ces défauts se libéreront au delà d'une certaine température  $T_c$  et détruiront l'ordre translationnel, mais leur densité restera faible juste au dessus de la température critique. Il faudra donc atteindre une température  $T_h$  plus élevée afin que la densité de dislocations dissociées (les disclinaisons) et donc de dislocations soit suffisamment élevée pour que ces disclinaisons détruisent l'ordre orientationnel. Par contre si l'énergie de coeur des dislocations est faible (ou celle des disclinaisons très faible) il est possible qu'à la transition la densité de dislocations soit déjà suffisante pour qu'une fraction d'entre elles se dissocient en disclinaisons : dans ce cas les deux ordres seront détruits simultanément et la transition sera du premier ordre.

Dans ce chapitre je me propose de décrire rapidement le mécanisme de fusion en deux étapes continues. Sa description a été développée par HALPERIN et NELSON (Halperin 1979b), et pour certains aspects par YOUNG (Young 1979), à la suite des travaux de KOSTERLITZ et THOULESS. Elle est couramment appelée la transition KTHNY.

	Solide	Hexatique	Liquide
Ordre translationnel	quasi ordre	pas d'ordre	pas d'ordre
Ordre orientationnel	ordre	quasi ordre	pas d'ordre

TAB. 3.1 – *Tableau récapitulatif des trois phases et de leurs ordres respectifs dans le scénario de fusion bidimensionnelle de KTHNY.*

### 3.1 Ordres translationnel et orientationnel dans un solide bidimensionnel

Nous allons donc considérer un solide bidimensionnel. Par simplicité, nous nous restreindrons aux solides hexagonaux ou triangulaires : la description élastique de ces solides est identique à celle d'un cristal isotrope. Dans le cas de symétrie cristalline différente (anisotropie) telle qu'un réseau carré, nous devrions considérer des constantes élastiques supplémentaires, mais la plupart des conclusions de ce chapitre seraient inchangée (quoique que l'analyse serait dans bien des cas plus lourde).

Un solide se différencie d'un liquide par sa densité  $\rho(\mathbf{r})$  : celle-ci est périodique dans un solide alors qu'elle est uniforme dans un liquide. Dans un solide, nous pouvons donc développer cette densité sur ses modes de Fourier :

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \sum_{\mathbf{G}} \rho_{\mathbf{G}} e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$$

où la somme porte sur tout les vecteurs du réseau réciproque. Les  $\rho_{\mathbf{G}}$ , qui interviennent par exemple dans le facteur de structure, sont une mesure de l'ordre translationnel du réseau : ce sont les paramètres d'ordre translationnel dans un solide. En principe nous devrions considérer l'ensemble des  $\{\rho_{\mathbf{G}}\}_{\mathbf{G}}$ , mais dans la pratique il suffit de considérer

---

Halperin B. Superfluidity, melting and liquid-crystal phases in two dimensions. In *Physics of low dimensional systems*. Kyoto summer institute, 1979.

Young A., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:1855.

les premiers pics de Bragg pour caractériser un solide, c.-à-d. les  $\rho_{\mathbf{G}}$  pour les premiers vecteurs du réseau réciproque. Nous considérons donc les paramètres d'ordre translationnel du réseau hexagonal bidimensionnel  $\rho_{\mathbf{G}_\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, 6$  correspondant aux six vecteurs du réseau réciproque de plus petite norme.

De la même façon que pour les modèles à symétrie  $U(1)$ , nous allons négliger dans un premier temps les fluctuations de norme de ces paramètres d'ordre, et considérer les fluctuations de phase. Ces fluctuations permettent de décrire les déformations élastiques du solide. Une étude de ces fluctuations commence par une formulation de type Ginzburg-Landau de l'énergie libre associée à des variations spatiales de ces paramètres d'ordre. La présence d'une symétrie d'orientation, caractérisée par le paramètre d'ordre  $\psi(\mathbf{r})$  ci-dessus et liée à la symétrie de translation, nécessite quelque attention.

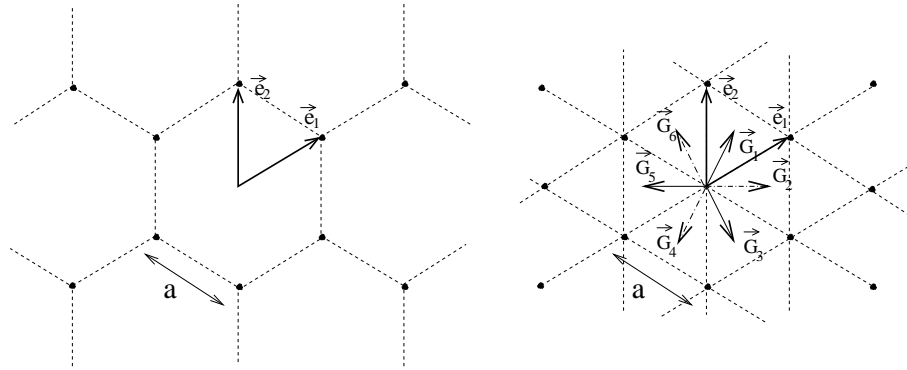


FIG. 3.2 – Représentation des deux réseaux bidimensionnels isotropes du point de vue de l'élasticité: le réseau hexagonal (gauche) et triangulaire (droite). Les deux cellules élémentaires ont été représentées en gras.

### 3.1.1 Énergie de HALPERIN-GINZBURG-LANDAU d'un solide bidimensionnel

Dans l'étude de champ moyen de la transition solide-liquide, il est possible de formuler une énergie libre effective en fonction des variations locales de densité  $\langle \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle = \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle - \rho_0$ . L'idée initiale est de décrire correctement le comportement des premiers pics de Bragg du facteur de structure  $S(\mathbf{q})$ , transformée de Fourier de  $\langle \delta\rho(\mathbf{r})\delta\rho(\mathbf{r}') \rangle$  (Alexander & MacTague 1978). Une formulation phénoménologique possible de la densité d'énergie est (Chaikin & Lubensky 1995)

$$f = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{r}} \langle \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle (r + c(\nabla^2 + m^2)) \langle \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle - w \int_{\mathbf{r}} \langle \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle^3 + u \int_{\mathbf{r}} \langle \delta\rho(\mathbf{r}) \rangle^4$$

Alexander S. & MacTague J., (1978). *Phys. Rev. Lett.*, **41**:702.

Chaikin P. & Lubensky T., (1995). *Principles of condensed matter physics*. Cambridge Univ. Press.

qui se réexprime en composantes de Fourier selon

$$f = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{G}} [r + c(G^2 - m^2)] |\rho_{\mathbf{G}}|^2 - w \sum_{\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 = 0} \rho_{\mathbf{G}_1} \rho_{\mathbf{G}_2} \rho_{\mathbf{G}_3} + u \sum_{\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4 = 0} \rho_{\mathbf{G}_1} \rho_{\mathbf{G}_2} \rho_{\mathbf{G}_3} \rho_{\mathbf{G}_4}$$

Nous pouvons remarquer la présence du terme cubique inhabituel dans l'expression ci-dessus, qui est ici autorisé par la symétrie particulière associée au cristal. Ce terme cubique induit une transition solide-liquide discontinue (voir (Chaikin & Lubensky 1995) §4.5 à propos d'une transition analogue : la transition nématique/phase isotrope dans les cristaux liquides).

Cependant, comme je l'ai dit dans l'introduction, nous n'avons tenu compte ici que des paramètres d'ordre associés à la symétrie translationnelle. La possibilité d'une transition entre un solide et une phase hexatique impose de faire intervenir dans cette énergie le paramètre d'ordre  $\psi_6(\mathbf{r})$  et donc l'orientation locale  $\theta(\mathbf{r})$ . La première idée naïve est d'ajouter à l'énergie précédente un développement en gradient et norme de  $\psi_6$ . Il faut toutefois faire attention que les deux symétries étant liées, les deux paramètres d'ordre le sont également. Ainsi le terme précédent  $(\nabla \rho_{\mathbf{G}})^2$  doit être modifié (à partir de maintenant je néglige le terme  $m^2$ ). Pour nous en convaincre, regardons l'effet d'une rotation uniforme  $\theta(\mathbf{r}) \rightarrow \theta(\mathbf{r}) + \theta_0$ . Les vecteurs du réseau réciproque sont alors modifiés selon  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G} + \theta_0 \hat{z} \times \mathbf{G}$ . Ce changement se traduit sur les paramètres d'ordres et donc sur leur gradient :  $\nabla \rho_{\alpha} \rightarrow e^{-i(\theta_0 \hat{z} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} (\nabla - i\theta_0 \hat{z} \times \mathbf{G}) \rho_{\alpha}$ . Afin de formuler un terme décrivant les variations spatiales de  $\rho_{\alpha}$  indépendantes des rotations locales, il convient donc de définir une dérivée covariante, analogue des dérivées covariantes en théorie de jauge :  $(\nabla + i\theta_0 \hat{z} \times \mathbf{G}) \rho_{\alpha}$ . Si nous tenons compte de la possibilité en dimension deux d'avoir des fluctuations longitudinales et transverses (resp. parallèles et perpendiculaires à  $\mathbf{G}$ ), nous obtenons l'énergie libre de Halperin-Ginzburg-Landau (Halperin 1979a) :

$$F = \int_{\mathbf{r}} \sum_{\alpha} \left[ \frac{J_0}{2} |\mathbf{G}_{\alpha} \cdot [\nabla + i(\theta \hat{z} \times \mathbf{G}_{\alpha})] \rho_{\alpha}|^2 + \frac{J_1}{2} |\mathbf{G}_{\alpha} \times [\nabla + i(\theta \hat{z} \times \mathbf{G}_{\alpha})] \rho_{\alpha}|^2 + \frac{r}{2} |\rho_{\alpha}|^2 - w (\rho_1 \rho_3 \rho_5 + \rho_2 \rho_4 \rho_6) \right] + \frac{K_A}{2} \int_{\mathbf{r}} (\nabla \theta)^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \quad (3.1)$$

où  $K_A$  est une nouvelle constante analogue à l'hélicité du chapitre précédent. Dans la suite nous allons négliger les fluctuations de norme des paramètres d'ordre, et poser  $|\rho_{\alpha}| = \rho_0$ . Les seules fluctuations qui restent sont des fluctuations de phase : les fluctuations élastiques.

### 3.1.2 Description élastique des déformations du solide

La position de chaque atome du réseau  $\mathbf{r}$  peut être décomposée en sa position d'équilibre (cristal parfait)  $\mathbf{r}_0$  et le déplacement local  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  :  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Dans un premier temps nous

---

Halperin B. non publié. cité par D. Nelson [Nels83], 1979.



allons négliger les défauts topologiques associés à  $\mathbf{u}$  : ce dernier champ est donc monovalué. Nous nous plaçons dans l'approximation élastique qui suppose que les déformations relatives entre deux atomes voisins sont très faibles (devant le pas du réseau) :  $|\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r} + a\hat{e})| \ll a$  où  $\hat{e}$  est un des vecteurs élémentaires du réseau. En utilisant la définition des vecteurs du réseau réciproque  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$ , nous pouvons écrire les paramètres d'ordre sous la forme  $\rho_\alpha = \rho_0 e^{i\mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})}$ . En reportant dans l'expression de l'énergie libre ci-dessus, nous obtenons une énergie pour les fluctuations élastiques qui s'écrit

$$F = \frac{K_A}{2} \int_{\mathbf{r}} (\nabla\theta)^2 + \rho_0^2 \int_{\mathbf{r}} \sum_{\alpha} \left[ \frac{J_1}{2} \left( (G_\alpha)_i (G_\alpha)_j \partial_i u_j \right)^2 + \frac{J_2}{2} \left( \epsilon_{ij} (G_\alpha)_i (G_\alpha)_k \partial_j u_k + \theta \mathbf{G}_\alpha^2 \right)^2 \right]$$

où j'ai écarté les termes ne dépendant que de  $\rho_0$ . En utilisant la propriété d'anisotropie des tenseurs définis sur un réseau hexagonal (voir la suite) nous pouvons effectuer la somme sur les premiers vecteurs du réseaux réciproque :

$$\frac{1}{N_G} \sum_{\alpha} (G_\alpha)_i (G_\alpha)_j = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (3.2a)$$

$$\frac{1}{N_G} \sum_{\alpha} (G_\alpha)_i (G_\alpha)_j (G_\alpha)_k (G_\alpha)_l = \frac{1}{8} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.2b)$$

où  $N_G$  est le nombre de vecteurs du réseau réciproque de plus petit module (6 pour un réseau hexagonal). Avec ce résultat, l'énergie ci-dessus peut se réécrire, après quelques contractions de tenseurs :

$$F = \frac{K_A}{2} \int_{\mathbf{r}} (\nabla\theta)^2 + \rho_0^2 G^4 N_G \int_{\mathbf{r}} \left[ \frac{J_1}{8} \left( 2(\partial_i u_i)^2 + (\partial_i u_j)^2 \right)^2 + J_2 \left( \frac{1}{8} (\partial_i u_j)^2 + \left( \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_j u_i + \theta \right)^2 \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

La minimisation de cette énergie par rapport au champ local d'orientation  $\theta(\mathbf{r})$  impose, si nous négligeons les dérivées les plus élevées, que cette orientation soit égale à la composante antisymétrique du tenseur des déformations :

$$\theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i u_j = \frac{1}{2} (\partial_x u_y - \partial_y u_x) \quad (3.4)$$

Dans la suite nous négligerons les fluctuations de l'orientation autour de cette valeur moyenne dans la phase solide. Avec cette restriction, et en négligeant le terme  $(\nabla\theta)^2$  qui produit des dérivées de  $u$  plus élevées, l'énergie libre du solide devient

$$F = \rho_0^2 G^4 N_G \int_{\mathbf{r}} \left[ \frac{J_1}{8} \left( 2(\partial_i u_i)^2 + (\partial_i u_j)^2 \right)^2 + \frac{J_2}{8} (\partial_i u_j)^2 \right]$$

Cette énergie peut s'exprimer en fonction de la composante symétrique du tenseur des déformations, que nous appellerons simplement tenseur des déformations dans la suite :

$$u_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (3.5)$$

En utilisant la relation  $(\partial_i u_j)^2 = 2u_{ij}^2 - u_{ii}^2$ , nous trouvons la forme habituelle d'une énergie élastique isotrope bidimensionnelle :

$$F = cte + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} 2\mu u_{ij}^2 + \lambda u_{ii}^2 \quad (3.6)$$

où nous avons posé  $\mu = \rho^2 G^4 N_G (J_1 + J_2) / 8$  et  $\lambda = \rho^2 G^4 N_G (J_1 - J_2) / 8$ .

### 3.1.3 Fluctuations élastiques

De la même façon que pour l'énergie libre dans la partie précédente, le hamiltonien qui contrôle les fluctuations translationnelles du solide peut être développé en puissance des paramètres d'ordre et de leur dérivées, et nous obtenons une forme similaire pour le hamiltonien (Landau & Lifchitz 1967) :

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} 2\mu u_{ij}^2 + \lambda u_{ii}^2 \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} u_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl} u_{kl}(\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  sont appelés coefficients de Lamé. D'autres écritures sont possibles qui rendent explicites les deux types de fluctuations élastiques : les fluctuations longitudinales pour lesquelles  $\mathbf{u}_{\mathbf{q}}$  est parallèle à  $\mathbf{q}$ , il s'agit de fluctuations qui compressent localement le solide ; et les fluctuations transverses ( $\mathbf{u}_{\mathbf{q}} \perp \mathbf{q}$ ) qui induisent des cisaillements locaux. A chaque type est associé un module d'élasticité (échelle d'énergie) : le module de compression  $c_{11} = 2\mu + \lambda$  et le module de cisaillement  $c_{66} = \mu$ . Nous avons déjà pu voir dans le paragraphe précédent que l'anisotropie de ces fluctuations compliquaient sérieusement les calculs de l'étude du comportement d'un solide, par rapport à celle des modèles à symétrie  $U(1)$ . Il est commode de définir une matrice d'élasticité du solide défini par

$$\Phi_{ij}(\mathbf{q}) = q^2 (c_{11} P_{ij}^L + c_{66} P_{ij}^T) \quad (3.8)$$

où  $P_{ji}^L = \hat{q}_i \hat{q}_j$  et  $P_{ji}^T = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j = \hat{q}_i^\perp \hat{q}_j^\perp$  sont respectivement les projecteurs transverse et orthogonaux sur  $\mathbf{q}$ . Avec cette matrice, le hamiltonien s'exprime maintenant sous la forme

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} u_i(\mathbf{q}) \Phi_{ij}(\mathbf{q}) u_j(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} [c_{66} q^2 |\mathbf{u}(\mathbf{q})|^2 + (c_{11} - c_{66}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{q}))^2] \quad (3.9)$$

Nous pouvons alors étudier les conséquences de ces fluctuations élastiques.

### Fluctuations élastiques divergentes

De même que pour la symétrie  $U(1)$ , les fluctuations élastiques liées à la symétrie de translation (comme pour tout groupe continu) sont divergentes en dimension deux. Ainsi, si nous calculons à basse température les corrélations du paramètre d'ordre, nous trouvons

$$\langle e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(0)} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle [\mathbf{G} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(0))]^2 \rangle}$$

La fonction de corrélation des fluctuations se calcule en utilisant l'inverse de la matrice élastique (voir plus loin un calcul plus détaillé de la transformée de Fourier) :

$$\begin{aligned} \langle [\mathbf{G} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(0))]^2 \rangle &= G_i G_j \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} (1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})) \frac{2T}{q^2} (c_{11}^{-1} P_{ij}^L + c_{66}^{-1} P_{ij}^T) \\ &\sim \frac{2TG^2}{4\pi} (c_{11}^{-1} + c_{66}^{-1}) \ln(r/a) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

ce qui donne une décroissance algébrique des corrélations  $\langle e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})} e^{-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}(0)} \rangle \sim e^{-\eta_G(T)}$  avec un exposant continuellement variable en fonction de  $c_{11}$  et  $c_{66}$  :

$$\eta_G(T) = \frac{TG^2}{4\pi} (c_{11}^{-1} + c_{66}^{-1}) = \frac{TG^2}{4\pi} \frac{3\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)} \quad (3.10)$$

Une quantité plus pertinente pour les expériences serait le facteur de structure, défini par  $S(\mathbf{q}) = \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}} \rangle$ . Il s'exprime facilement en fonction de la fonction de corrélation précédente :

$$\begin{aligned} S(\mathbf{q} \sim \mathbf{G}) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_2^0)} \langle e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}_1^0) - \mathbf{u}(\mathbf{r}_2^0))} \rangle \\ &\sim \int_{\mathbf{r}} e^{-\frac{1}{4} q^2 R^2} \langle \rho_{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \rho_{\mathbf{G}}(0) \rangle \\ &\sim q^{-2 + \eta_G} \end{aligned}$$

Il est instructif de regarder les corrélations de l'orientation locale dans la phase solide

### Ordre orientationnel du solide bidimensionnel

Comme nous l'avons vu précédemment, l'angle local que fait un lien avec un axe arbitraire peut s'écrire  $\theta = \frac{1}{2}(\partial_x u_y - \partial_y u_x)$ . Il est donc possible de calculer les corrélations du paramètre d'ordre translationnel  $\psi_6$  directement à partir du hamiltonien (3.9). Pour cela commençons par remarquer l'égalité suivante :

$$\epsilon_{ij} \epsilon_{kl} q_i q_k \langle u_j(\mathbf{q}) u_l(-\mathbf{q}) \rangle = T q_j^\perp q_l^\perp \Phi_{jl}^{-1}(\mathbf{q}) = T P_{jl}^T (c_{11}^{-1} P_{jl}^L + c_{66}^{-1} P_{jl}^T) = \frac{T}{c_{66}}$$

La fonction de corrélation à deux points peut donc s'exprimer simplement selon

$$\langle \psi_6(\mathbf{r}) \psi_6(0) \rangle = \exp \left( -\frac{9}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{2T}{c_{66}} (1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})) \right) \xrightarrow{r \gg a} e^{-\frac{9T}{c_{66}}} \quad (3.11)$$

Ainsi le solide bidimensionnel possède un réel ordre orientationnel à longue portée mais uniquement un quasi-ordre translationnel. Nous pouvons également remarquer d'après ce qui précède que la caractéristique essentielle du solide est un module de cisaillement non nul : si  $c_{66}$  s'annule l'ordre orientationnel est perdu d'après (3.11) de même que le quasi ordre translationnel d'après (3.10). Un module de cisaillement  $c_{66}$  fini est donc la signature d'un solide, et ce module va donc jouer un rôle analogue à l'hélicité pour les systèmes XY. D'après ces résultats, nous pouvons nous attendre à une transition entre une phase solide à basse

température et une phase sans ordre translationnel, induite par un mécanisme analogue à celui de la transition de KOSTERLITZ-THOULESS. Une étude des défauts topologiques susceptibles d'induire une telle transition s'impose donc. Nous allons voir en particulier que la présence de dislocations dans un solide réduit considérablement le module de cisaillement  $c_{66}$ , de la même manière que les vortex réduisaient l'hélicité d'un modèle XY (ou la densité superfluide d'un superfluide bidimensionnel).

## 3.2 La transition de KOSTERLITZ-THOULESS-HALPERIN-NELSON-YOUNG (KTHNY)

Comme pour les vortex, un défaut topologique est défini par rapport à un paramètre d'ordre (et donc à une symétrie). Dans notre cas nous venons de voir que le solide était caractérisé par deux symétries distinctes : la symétrie de translation et la symétrie de rotation. Les défauts associés à la première sont les dislocations dont la charge est maintenant vectorielle, alors que les disclinaisons associées à la symétrie de rotation sont les parfaits analogues des vortex du chapitre précédent.

### 3.2.1 Défauts topologiques du solide bidimensionnel : dislocations et disclinaisons

#### Les dislocations bidimensionnelles

Le paramètre d'ordre translationnel  $\rho_G(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r})}$  est invariant par toute translation du champ de déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  d'un vecteur du réseau direct  $n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2$  où  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  est une base du réseau direct. Les défauts topologiques associés à ce paramètre d'ordre vont donc être caractérisés par une charge vectoriel : un vecteur du réseau direct (autrement dit le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ ). Cette charge est appelée vecteur de Burgers de la dislocation. En dimension trois, où les dislocations sont des lignes (et non des points), une nouvelle information doit être donnée pour caractériser la dislocation, en plus de la charge topologique (Landau & Lifchitz 1967) : cette charge étant vectorielle, elle peut être soit parallèle au vecteur tangent à la ligne, on parle de dislocation vis ; soit orthogonale à ce vecteur et il s'agit d'une dislocation coin. Nous retrouvons ces deux types de composantes à propos des dislocations du réseau de vortex d'ABRIKOSOV. En dimension deux, le vecteur de Burgers étant nécessairement dans le plan (et donc orthogonal à la dislocation qui peut être vu comme une ligne orthogonale au plan) nous n'avons affaire qu'à des dislocations coin (figure 3.3). Les charges topologiques de plus petit module sont au nombre de six pour un réseau hexagonal.

De même que pour les vortex XY, ce défaut induit une multivaluation du champ élastique  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Ainsi celui ci est modifié du vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$  lorsque nous effectuons le tour de la dislocation. Cette propriété peut être vue au niveau microscopique dans un solide : si nous considérons le contour en gras de la figure 3.3, en l'absence de la dislocation, ce contour serait un contour fermé. La présence de la dislocation empêche cette fermeture, et le

---

Landau L. & Lifchitz E., (1967). *Théorie de l'élasticité*. Ed. MIR, Moscou.

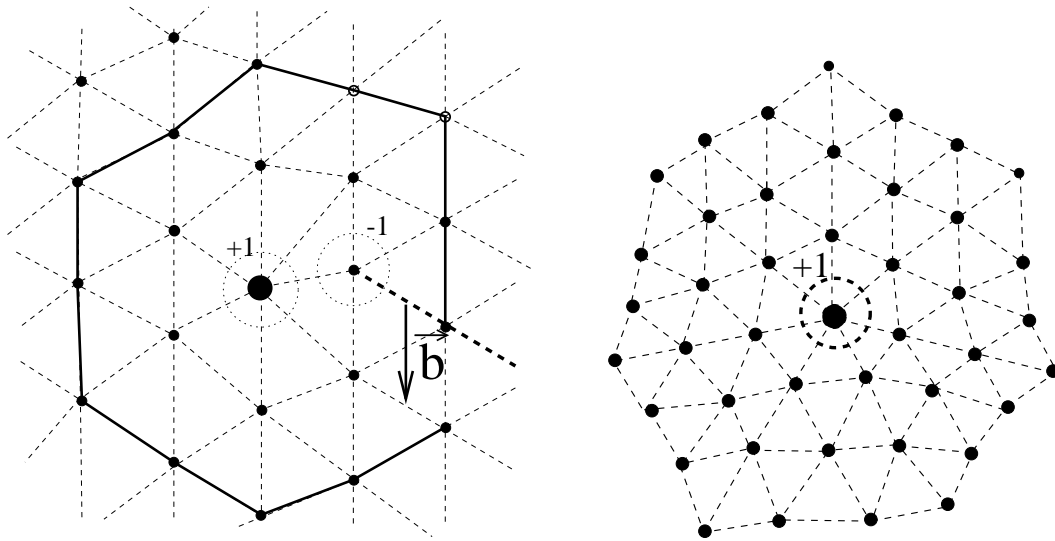


FIG. 3.3 – Représentation des deux types de défauts du cristal bidimensionnel qui nous intéressent : les dislocations (à gauche) et les disclinaisons (à droite). La dislocation correspond à une demi ligne d’atomes supplémentaire dans le cristal (en pointillé gras), et est caractérisée par le défaut de fermeture du contour en trait plein : le vecteur de burgers  $\mathbf{b}$ . La disclinaison correspond à un atome possédant plus ou moins de six voisins, cette différence étant sa charge topologique. Sur le dessin de gauche, la dislocation peut être vue comme une paire de disclinaisons (cercles) de charges opposées et distantes de  $a$ .

défaut de fermeture est exactement la charge topologique de la dislocation. Cette remarque montre que d’un point de vue microscopique, les dislocations de plus petits vecteurs de Burgers (de norme le pas du réseau) correspondent à l’ajout d’une demi ligne d’atomes. La dislocation est alors située à l’extrémité de cette demi ligne. Bien sûr rajouter une demi ligne d’atomes coûte cher en énergie et en pratique les dislocations vont apparaître par paires de charges opposées, qui correspondent à des segments de rangée d’atomes supplémentaires.

Ce point de vue microscopique permet également de comprendre l’importance des dislocations dans les solides. Remarquons tout d’abord que deux types de mouvement existe pour une dislocation planaire : soit parallèlement au vecteur de Burgers, soit orthogonalement. Dans le premier cas ce mouvement revient à bouger l’ensemble de la demie rangée d’atomes supplémentaires (voir figure 3.3). Ce mouvement est donc énergétiquement défavorable. Par contre le second type de mouvement, appelé rampement de la dislocation, peut se faire en ne bougeant que localement les atomes autour du coeur de la dislocation (figure 3.4). Ce dernier type de mouvement se produit donc très facilement. Par ailleurs le glissement d’une dislocation d’un bord à l’autre de l’échantillon permet de réduire une contrainte de cisaillement appliquée au solide, comme illustré sur la figure 3.4. Nous pouvons donc anticiper qu’une densité finie de dislocations coin dans un solide va réduire significativement son module de cisaillement. Cette remarque nous enseigne également que pour obtenir un matériau qui résiste mieux aux contraintes, il faut accrocher ces dislocations. Cet accrochage est fait en introduisant des défauts de structure qui piègent le coeur des dislocations, tel que dans les alliages. Ce problème de l’accrochage des défauts s’avère crucial dans le comportement du réseau d’ABRIKOSOV dans le supraconducteurs.

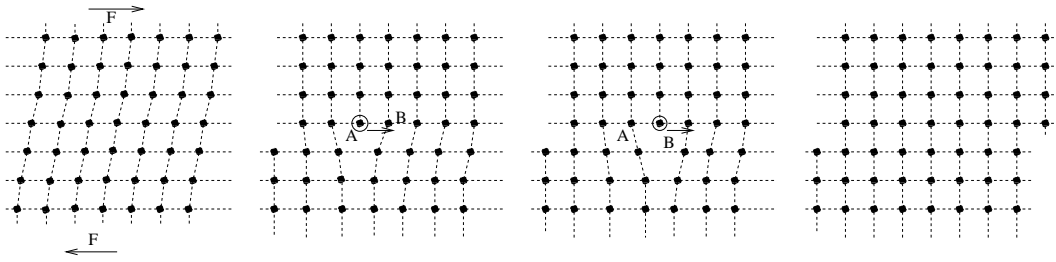


FIG. 3.4 – Représentation du glissement d'une dislocation coin. Par simplicité la dislocation a été représentée dans un réseau carré. Dans la situation de gauche, le solide est soumis à une contrainte de cisaillement. Par génération d'une dislocation et glissement de celle-ci, le solide relaxe cette contrainte vers une situation d'équilibre (droite).

Remarquons avant de passer à la suite qu'à l'intérieur du coeur de la dislocation de la figure 3.3, deux atomes ont un nombre de voisins différents de six, le nombre habituel. Cette situation correspond exactement à la présence du deuxième type de défaut : la disclinaison.

## Disclinaisons

Dans un solide parfait chaque atome est entouré d'un nombre constant de voisins. En dimension deux, le cas du réseau triangulaire correspond à six voisins. Il est possible que localement un atome soit entouré de plus ou moins que ces six voisins : il s'agit alors d'une disclinaison dont la charge topologique est la différence entre la coordinance et la coordinance moyenne (fig. 3.3). Ces disclinaisons sont des défauts topologiques du paramètre d'ordre orientationnel  $\psi_6(\mathbf{r})$ . En effet si nous prenons l'exemple d'un atome entouré de sept voisins, l'orientation locale sera modifiée de  $+\pi/3$  lorsqu'un tour de l'atome est effectué. Le paramètre d'ordre  $\psi_6(\mathbf{r}) = e^{i6\theta(\mathbf{r})}$  reste quant à lui monovalué. Ces disclinaisons sont les défauts analogues des vortex du chapitre précédent (la symétrie associée au paramètre d'ordre étant la même). D'après la remarque ci-dessus, les dislocations peuvent être représentées comme des paires de disclinaisons de charges opposées. Ainsi l'énergie pour créer une disclinaison est plus élevée que celle de création d'une dislocation : avec des conditions aux bords libres, il faut d'abord créer une dislocation avant de la dissocier en deux disclinaisons pour obtenir des disclinaisons libres dans le solide. Nous pouvons donc nous attendre à ce que les disclinaisons apparaissent à des températures plus élevées que les dislocations. Nous allons voir que la libération de ces deux types de défauts conduit à deux transitions successives dans le schéma de fusion KTHNY. Il existe dans les solides d'autres défauts qui peuvent apparaître (lacune, interstice,...) mais qui n'interviendront pas dans la suite de cette étude.

Nous pouvons maintenant passer à une étude plus quantitative d'un solide qui possède des dislocations, et en particulier de l'interaction entre ces défauts.

### 3.2.2 Interaction entre dislocations : le gaz coulombien vectoriel

D'après ce qui précède, le champ de déplacement vérifie, en présence d'une densité de dislocations  $\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$ , une formule analogue à (2.6) :

$$\oint d\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{S}} d^2\mathbf{r} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \quad (3.12)$$

Dans la suite je ne considérerai que les dislocations de charges minimales, *i.e*  $|\mathbf{b}_{\alpha}| = a$  où  $a$  est le pas du réseau. L'incorporation des défauts topologiques se fait alors de façon similaire au cas des vortex XY : le tenseur  $u_{ij}$  joue un rôle similaire au champ de vitesse dans les modèles à symétrie  $U(1)$ . Nous décomposons donc  $u_{ij}(\mathbf{r})$  en une composante due aux fluctuations élastiques  $\tilde{u}_{ij}$  et une composante  $u_{ij}^{sing}$  qui décrit les déformations induites par la densité de dislocations  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ . Malgré la notation utilisée, le tenseur  $u_{ij}^{sing}$  est monovalué (mais comporte des singularités), étant donné par la dérivée du champ de déformation. Le tenseur des déformations s'écrit donc  $u_{ij}(\mathbf{r}) = \tilde{u}_{ij} + u_{ij}^{sing}$ . Alternativement cette décomposition peut s'écrire directement sur le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{sing}$  où maintenant  $\mathbf{u}^{sing}(\mathbf{r})$  est un champ multivalué qui vérifie  $\epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \mathbf{u}^{sing} = \mathbf{b}(\mathbf{r})$ , alors que le champ induit par les déformations élastiques est parfaitement monovalué :  $\epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \tilde{\mathbf{u}} = 0$ . La détermination du champ due aux dislocations  $\mathbf{u}^{sing}(\mathbf{r})$  est un peu plus fastidieuse que pour un champ élastique scalaire, et elle est présentée dans l'Annexe A . Le résultat s'exprime sous la forme

$$u_i^{sing} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) b_{\alpha,j} \equiv \frac{1}{2\pi} \mathcal{G}_{ij} * b_j \quad (3.13)$$

où le propagateur  $\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r})$  est défini par (voir éq. (3A.51)) :

$$\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r}) = \delta_{ij} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{c_{66}}{c_{11}} \epsilon_{ij} \ln(r) + \frac{c_{11} - c_{66}}{c_{11}} \epsilon_{jk} H_{ik}(\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

L'interaction angulaire  $H_{ij}(\mathbf{r})$  est définie par  $H_{ij}(\mathbf{r}) = \hat{r}_i \hat{r}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij}$ . En reportant dans le hamiltonien (3.7) nous pouvons décomposer l'énergie d'une configuration en trois parties : une énergie des fluctuations élastiques  $H_{\tilde{u}/\tilde{u}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} 2\mu \tilde{u}_{ij}^2 + \lambda \tilde{u}_{kk}^2$ , une interaction des dislocations les unes avec les autres  $H_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$  et une composante d'interaction entre les dislocations et les déformations élastiques :  $H_{\tilde{u}/\mathbf{b}}$ . Ce dernier terme est nul. Le calcul de l'interaction entre dislocations est reproduit dans l'Annexe A et le résultat correspond à l'interaction logarithmique attendue entre les dislocations, avec également une interaction angulaire provenant de la nature vectorielle des charges topologiques des dislocations. Cette interaction s'écrit

$$H_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = \frac{1}{2} \frac{4c_{66}(c_{11} - c_{66})}{c_{11}} \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{q^2} b_i(\mathbf{q}) P_{ij}^T b_j(\mathbf{q}) \quad (3.15)$$

Le rapport  $4c_{66}(c_{11} - c_{66})/c_{11}$  correspond au module d'Young en dimension deux. Il est plus utile pour la renormalisation qui suit d'utiliser l'expression de ce hamiltonien dans l'espace

direct (formule (3A.58) de l'Annexe A )

$$H_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \left[ K_1 \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\beta \ln \left( \frac{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}{a} \right) - K_2 \left( \frac{(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{b}_\alpha (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{b}_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2} - \frac{1}{2} \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\beta \right) \right] + E_c \sum_{\alpha} \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\alpha \quad (3.16)$$

Attention : dans cette formule chaque paire de dislocations est comptée deux fois. Dans notre cas les constantes  $K_1$  et  $K_2$  sont égales toutes deux au module d'Young :

$$K_1 = K_2 = \frac{4c_{66}(c_{11} - c_{66})}{c_{11}}$$

La fonction de partition du solide se factorise en une partie de déformations élastiques et une autre correspondant aux dislocations. Nous allons oublier la première qui ne peut induire de singularité dans l'énergie libre, et nous intéresser à la seconde qui s'écrit

$$Z_{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{b}_\alpha, \sum_{\alpha} \mathbf{b}_\alpha = 0} e^{-\frac{1}{T} H_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}} \quad (3.17)$$

Cette fonction de partition est analogue à la fonction de partition (2.20) du gaz de Coulomb électrique. Cependant les charges sont maintenant vectorielles (ici à deux composantes) : cette différence autorise une nouvelle interaction angulaire  $\mathbf{b}_{\alpha,i} H_{ij}(\mathbf{r}) \mathbf{b}_{\alpha,j} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_\alpha)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_\beta) - \frac{1}{2} \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\beta$ . Son étude par le groupe de renormalisation peut se faire de façon similaire à celle du chapitre précédent, avec quelques difficultés techniques supplémentaires. Nous verrons par la suite que la présence d'un substrat peut induire une différence entre  $K_1$  et  $K_2$ . La renormalisation de ce modèle de gaz coulombien vectoriel va donc être présentée dans la cas général  $K_1 \neq K_2$ .

### 3.2.3 Constantes élastiques renormalisées

Dans l'étude des vortex XY, une hélicité renormalisée pouvait être définie (chapitre précédent), à l'aide de laquelle nous avons renormalisé correctement le modèle. Une méthode alternative consistait à renormaliser le modèle directement sur sa fonction de partition (Annexe B du chapitre précédent). Je vais présenter dans la suite une méthode de renormalisation analogue à celle du chapitre précédent, qui étend le travail de (Nelson & Halperin 1979) en incluant la possible présence d'un substrat, c'est-à-dire en autorisant  $K_1 \neq K_2$  ci-dessus. La renormalisation sur la fonction de partition a été développée dans (Young 1979). Une extension au gaz électromagnétique général sera présentée dans le chapitre 6. Dans un premier temps, il nous faut donc définir des constantes élastiques renormalisées  $c_{11}^R, c_{66}^R$ , ou de façon équivalente une matrice renormalisée  $C_{ijkl}^R$  (définition (3.7)). La définition qui suit étend (et, je pense, clarifie) celle de NELSON et HALPERIN : elle permet en effet de traiter également le cas d'un couplage incommensurable à un substrat périodique (voir la suite du chapitre), ce qui n'est pas le cas du travail présenté dans (Nelson & Halperin 1979).

---

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

Young A., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:1855.



### Définition des coefficients de Lamé renormalisés

Avant de définir les constantes renormalisées, remarquons que la définition (3.7) de la matrice  $C_{ijkl}$  peut être modifiée en définissant le tenseur *non symétrique* des déformations  $w_{ij} = \partial_i u_j$ . Le hamiltonien s'exprime alors selon

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} w_{ij} C_{ijkl} w_{kl} \quad C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \gamma \epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \quad (3.18)$$

Cette expression constituera notre définition de la matrice des couplages élastiques  $C_{ijkl}$ . Le terme  $\gamma$  tient compte d'une éventuelle antisymétrie du tenseur, absente pour un solide isotrope, mais qui servira dans l'étude d'un couplage à un substrat au paragraphe 3.3. Bien sûr tant que  $C_{ijkl}$  est symétrique en  $ij$  et  $kl$  (*i.e*  $\gamma = 0$ ), les deux définitions coïncident, mais cette définition a l'avantage d'autoriser d'éventuels couplages avec le tenseur de déformation antisymétrique (l'orientation locale), et en particulier d'étudier leur apparition sous renormalisation.

Afin de définir ces constantes élastiques renormalisées, je considère un solide élastique bidimensionnel soumis à une force extérieure  $f_i^{ext}$  uniforme sur la frontière  $\mathcal{C}$  du solide, ou de façon équivalente à une contrainte extérieure donnée par le tenseur  $\sigma_{ij}^{ext}$ . À cette force correspond un travail

$$W = \oint_{\mathcal{C}} dl f_i^{ext} \cdot n_i = \oint_{\mathcal{C}} dl u_i (\sigma_{ij}^{ext} n_j) \equiv -\sigma_{ij}^{ext} U_{ij}$$

où par définition  $U_{ij} = -\oint_{\mathcal{C}} dl u_i n_j$  et  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal au bord du solide. Une définition analogue à celle que nous avons déjà vu au chapitre précédent (2.10) consiste à définir la matrice  $C_{ijkl}^R$  renormalisée comme la susceptibilité du système par rapport à une contrainte extérieure infinitésimale  $\sigma_{ij}^{ext}$ :

$$(C^R)_{ijkl}^{-1} = \frac{T}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}^{ext}} \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}^{ext}} F[\sigma^{ext}] \quad (3.19)$$

où  $\Omega$  est l'aire du solide. L'idée derrière cette définition est qu'à grande échelle le système répond toujours de façon élastique, mais avec des constantes élastiques qui ont été renormalisées par la présence de défauts : il s'agit de ces constantes élastiques renormalisées. Le hamiltonien en présence de cette contrainte s'écrit  $H = H_{el} - \sigma_{ij}^{ext} U_{ij}$  d'après l'expression du travail ci-dessus. La définition de la matrice renormalisée  $(C^R)_{ijkl}^{-1}$  peut donc être reformulée sous la forme proposée<sup>1</sup> par HALPERIN et NELSON :

$$\begin{aligned} (C^R)_{ijkl}^{-1} &= \frac{1}{4} \frac{1}{\mu^R} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\mu^R + \lambda^R} - \frac{1}{\mu^R} \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma^R} \epsilon_{ij}\epsilon_{kl} \\ &= \frac{T}{\Omega} \langle U_{ij} U_{kl} \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

1. Pour être plus précis, l'expression utilisée par HALPERIN et NELSON utilisait le tenseur *symétrique* des déformation. Ces deux formulations sont, dans le cas présent ( $\gamma = 0$ ), équivalentes, et toute cette partie aurait pû être écrite en considérant la composante symétrique du tenseur des déformations. Cependant au paragraphe 3.3 le tenseur élastique  $C_{ijkl}$  acquiert un terme non symétrique en  $ij$ ,  $kl$ , *i.e*  $\gamma \neq 0$ , et il devient alors indispensable de définir  $C_{ijkl}^R$  comme dans ce paragraphe.

*Remarque* : une idée naturelle aurait été de définir une matrice élastique renormalisée par  $q^{-2}(\Phi^R)_{ij}^{-1} = \lim_{q \rightarrow 0} \langle \tilde{u}_i(\mathbf{q}) \tilde{u}_j(\mathbf{q}) \rangle$ , de façon similaire à la définition donnée pour le modèle de Sine-Gordon. Dans notre cas (comme dans le cas du modèle XY), cette définition n'a aucun sens car elle impliquerait la transformée de Fourier de la composante multivaluée du champ de déplacement qui interviendrait dans la fonction de corrélation ci-dessus (voir à ce sujet l'Annexe A ).

### Modules élastiques renormalisés et densité de dislocations

Afin de pouvoir éliminer les degrés de liberté de petites échelles du modèle en s'aidant de la définition (3.20), nous devons d'abord obtenir une expression explicite de la fonction de corrélation  $\langle U_{ij} U_{kl} \rangle$ . Pour cela nous commençons par décomposer le champ de déplacement en sa composante élastique et le déplacement induit par la densité de dislocations  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  :  $u_i = \tilde{u}_i + u_i^{sing}$ . La partie de phonons de  $U_{ij}$  s'exprime aisément (en mettant tous les termes de bords, *i.e* le déplacement élastique, à zéro) en fonction du tenseur de déplacement  $\tilde{w}_{ij}$  :

$$- \int_{\mathcal{C}} dl \tilde{u}_i n_j = \int d^2 \mathbf{r} \partial_j \tilde{u}_i = \int d^2 \mathbf{r} \tilde{w}_{ji} \quad (3.21)$$

Cette formule de Green ne peut bien sûr être utilisée que pour une fonction monovaluée : quelques précautions sont requises pour intégrer la seconde partie impliquant  $u_i^{sing}$ . Celle-ci s'écrit d'après (3.13) sous la forme  $u_i^{sing} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{G}_{ij} * b_j$  où  $\mathcal{G}_{ij}$  est la somme de trois termes (cf. (3.14)) dont seul le premier est multivalué. L'idée est de se ramener à une fonction monovaluée sur tout le solide et d'utiliser la formule de Green ci-dessus. Cela nous donne pour les deux termes monovalués :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} b_k^{\alpha} \oint_{\mathcal{C}} dl n_i \epsilon_{jk} \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|/a) &= 0 \\ \sum_{\alpha} b_k^{\alpha} \oint_{\mathcal{C}} dl n_i \epsilon_{kl} H_{jl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) &= \sum_{\alpha} b_k^{\alpha} \oint_{\mathcal{C}} dl n_i \epsilon_{kl} \left( (r_j - r_{\alpha,j}) \partial_l \ln(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|/a) - \frac{1}{2} \delta_{jl} \right) = 0 \end{aligned}$$

où nous avons supposé que sur le bord du solide, nous pouvions considérer que  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}| \sim cte$ , et dans la deuxième expression la propriété  $H_{ij}(\mathbf{r}) = r_i \partial_j G(r) - \frac{1}{2} \delta_{ij}$  a été utilisée. Ainsi seul le terme multivalué contribue à  $U_{ij}$ , ou autrement dit seul cette composante de multivaluation (qui ne fait donc pas intervenir les propriétés élastiques du solide) est sensible à une contrainte extérieure s'exerçant sur le bord du solide. Il nous reste donc à exprimer la contribution de cette composante multivaluée à  $U_{ij}$  en utilisant les résultats précédents :

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha} \frac{1}{2\pi} b_k^{\alpha} \oint_{\mathcal{C}} dl n_j \delta_{ik} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2\pi} b_i^{\alpha} \oint_{\mathcal{C}} dl n_j r_k \partial_k \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2\pi} b_i^{\alpha} \oint_{\mathcal{C}} dl n_j r_k \epsilon_{kl} \partial_l G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= - \sum_{\alpha} \frac{1}{2\pi} b_i^{\alpha} \int d^2 \mathbf{r} r_k \epsilon_{kl} \partial_j \partial_l G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \epsilon_{jk} r_k^{\alpha} \end{aligned}$$

Avec ce résultat,  $U_{ij}$  s'exprime maintenant assez simplement selon

$$U_{ij} = \int d^2\mathbf{r} \tilde{w}_{ji} + \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \epsilon_{jk} r_k^{\alpha} \quad (3.22)$$

En reportant dans la fonction de corrélation à deux points de (3.20) qui définit la matrice renormalisée  $(C^R)_{ijkl}^{-1}$ , nous obtenons l'expression pour cette matrice renormalisée qui va constituer le point de départ de notre analyse par renormalisation de ce solide bidimensionnel :

$$(C^R)_{ijkl}^{-1} = C_{ijkl}^{-1} + \frac{T}{\Omega} \sum_{\alpha, \beta} r_p^{\alpha} r_q^{\beta} \epsilon_{jp} \epsilon_{lq} \langle b_i^{\alpha} b_k^{\beta} \rangle_{H_{b/b}} \quad (3.23)$$

En utilisant la neutralité du gaz de dislocations, nous pouvons transformer cette expression afin de ne faire intervenir que les distances entre charges, ce qui est plus agréable pour la renormalisation qui suit :

$$\sum_{\alpha, \beta} r_p^{\alpha} r_q^{\beta} \langle b_i^{\alpha} b_k^{\beta} \rangle = \sum_{\alpha \neq \beta} r_p^{\alpha} (r_q^{\beta} - r_q^{\alpha}) \langle b_i^{\alpha} b_k^{\beta} \rangle = -\frac{1}{2} \Omega \sum_{\alpha \neq \beta} (r_p^{\beta} - r_p^{\alpha}) (r_q^{\beta} - r_q^{\alpha}) \langle b_i^{\alpha} b_k^{\beta} \rangle$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant l'invariance par translation de  $\langle b_i^{\alpha} b_k^{\beta} \rangle$  : cette fonction de corrélation ne dépend que de  $\mathbf{r}^{\alpha} - \mathbf{r}^{\beta}$ . Nous pouvons maintenant écrire l'expression dans le continu de la matrice d'élasticité renormalisée :

$$(C^R)_{ijkl}^{-1} = C_{ijkl}^{-1} - \frac{T}{2} \epsilon_{jp} \epsilon_{lq} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \frac{r_p r_q}{a^2} \langle b_i(\mathbf{o}) b_k(\mathbf{r}) \rangle_{H_{b/b}} \quad (3.24)$$

où la valeur moyenne est prise par rapport au hamiltonien du gaz de Coulomb vectoriel (3.16). Cette dernière expression permet de clarifier la méthode employée dans (Nelson & Halperin 1979) et d'établir un lien direct avec le formalisme d'écrantage électrostatique de (Kosterlitz & Thouless 1973). Nous pouvons maintenant passer à la dérivation des équations de renormalisation à l'aide de cette définition.

### 3.2.4 Equations de renormalisation de HALPERIN-NELSON-YOUNG

Le schéma de renormalisation, que nous allons considérer dans cette partie, permet d'étudier la transition entre la phase solide et la phase hexatique perturbativement en l'écart à la température de transition  $\epsilon = (T - T_c)/T_c$  et la fugacité des dislocations du solide  $y = e^{-\beta E_c}$ . Nous allons donc commencer par développer la définition de la matrice renormalisée (3.24). Cette matrice renormalisée étant, par définition, indépendante du cut-off choisi aux petites échelles, la formule (3.24) doit rester valable quel que soit ce cut-off ultraviolet  $a$ . Par contre les modules élastiques  $c_{11}, c_{66}$  et la fugacité des dislocations dépendent de ce cut-off. Lorsque, dans la suite, nous incrémentons ce cut-off de  $a$  à  $ae^{dl}$  en imposant que le développement perturbatif de (3.24) reste inchangé, nous obtenons donc des définitions pour ces grandeurs dépendant de l'échelle :  $c_{11}(l), c_{66}(l)$  et  $y(l)$ , qui peuvent

---

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

Kosterlitz J. & Thouless D., (1973). *J. Phys. C*, **6**:1181.

être écrites sous la forme d'équations de renormalisation. Une démarche différente consiste à renormaliser directement le gaz de Coulomb vectoriel sur sa fonction de partition. Cette renormalisation est présentée dans la cas plus général du gaz électromagnétique dans le chapitre 6.

### Développement perturbatif en la puissance des fugacités

Afin de développer (3.24) perturbativement en  $y$ , il est suffisant d'effectuer ce développement sur la fonction de corrélation de la densité de dislocations  $\langle b_i(\mathbf{r})b_k(\mathbf{r}') \rangle_{H_{b/b}}$ . Les deux premiers termes non nuls correspondent respectivement à des configurations à deux et trois charges (fig. 3.5) :

$$\begin{aligned} \langle b_i(\mathbf{o})b_j(\mathbf{r}) \rangle_{H_{b/b}} = & - \sum_{\mathbf{b}} b_i b_j y^2 \left( \frac{r}{a} \right)^{-\frac{K_1 b^2}{4\pi T}} e^{\frac{K_2}{4\pi T} ((\mathbf{b} \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} b^2)} \\ & + 2 \sum_{\mathbf{b} \neq \mathbf{b}'} b'_i b_j \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, r' > a} \frac{d^2 \mathbf{r}'}{a^2} e^{-\frac{1}{T} H^{(3)}} + \mathcal{O}(y^4) \end{aligned} \quad (3.25)$$

où  $H^{(3)}$  correspond au hamiltonien de la configuration neutre à trois charges en  $\{\mathbf{o}, \mathbf{r}, \mathbf{r}'\}$ .

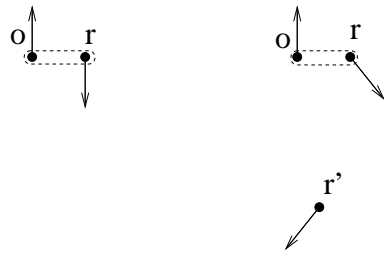


FIG. 3.5 – Configurations à deux et trois charges qui interviennent dans les deux premiers termes du développement perturbatif en la fugacité.

Contrairement au cas des charges topologiques scalaires, il existe dans ce développement un terme d'ordre  $y^3$  provenant des configurations neutres à trois charges (figure 3.5). Dans l'étude par renormalisation de ce développement, cette présence va modifier le comportement critique.

### Renormalisation sur la fonction de corrélation $r_p r_q \langle b_i(\mathbf{o})b_k(\mathbf{r}) \rangle$

Avant de retourner à la matrice d'élasticité renormalisée (3.24) afin d'obtenir une expression pour les modules élastiques dépendant de l'échelle, il est plus simple dans un premier temps d'éliminer les fluctuations de petites échelles en considérant simplement la fonction de corrélation à deux points de la densité de dislocations  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ , qui apparaît dans la formule (3.24) multipliée par  $r_p r_q / a^2$ . Pour cela nous procédons comme KOSTERLITZ pour le modèle XY (Kosterlitz 1974) en incrémentant le cut-off ultraviolet  $a$  du modèle de gaz coulombien :  $a \rightarrow \tilde{a} = ae^{dl}$ . La définition (3.24) est indépendante de l'échelle et son expression reste donc inchangée lors du changement de cut-off.

Kosterlitz J., (1974). *J. Phys. C*, **7**:1046.

Dans le premier terme du développement (3.25), ce cut-off n'apparaît qu'une seule fois et produit une contribution simple :

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{K_1 b^2}{4\pi T}} \rightarrow e^{-dl \frac{K_1 b^2}{4\pi T}} \left(\frac{r}{\tilde{a}}\right)^{-\frac{K_1 b^2}{4\pi T}} \quad (3.26)$$

En tenant compte de la correction provenant du terme  $r_p r_q / a^2$  et de la mesure d'intégration sur  $\mathbf{r}$  :

$$\frac{d^2 \mathbf{r} r_p r_q}{a^2 a^2} \rightarrow e^{4dl} \frac{d^2 \mathbf{r} r_p r_q}{\tilde{a}^2 \tilde{a}^2}$$

cette correction peut être absorbée par une définition d'une fugacité de dislocation dépendant de l'échelle :

$$y^2(l) = e^{dl \left(4 - \frac{K_1 b^2}{4\pi T}\right)} y^2 \quad (3.27)$$

Dans le deuxième terme de (3.25), ce cut-off apparaît à la fois dans l'interaction comme ci-dessus (ce qui produit la même correction que ci-dessus), et dans les bornes de l'intégrale. Lorsque le cut-off est incrémenté, deux contributions apparaissent : une provenant des configurations à trois charges avec  $a < r' < ae^{dl}$ , l'autre de  $a < |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < ae^{dl}$ . Les deux intégrales correspondantes sont déjà d'ordre  $dl$  : nous devons donc nous intéresser à la limite (à l'ordre 0 en  $dl$ ) du hamiltonien à trois charges lorsque deux des charges *fusionnent*. Dans le contexte de la renormalisation des gaz de Coulomb, ce processus est appelé la *fusion de charges* (voir l'Annexe B du chapitre précédent). En utilisant la neutralité de la configuration  $\mathbf{b}' + \mathbf{b}'' = -\mathbf{b}$ , cette limite est aisément trouvée :

$$\lim_{r' \rightarrow a} e^{-\frac{1}{T} H^{(3)}} = y^3 \left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{K_1 b^2}{4\pi T}} e^{\frac{K_2}{4\pi T} ((\mathbf{b} \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} b^2)} \times e^{-\frac{K_2}{4\pi T} ((\mathbf{b}' \cdot \hat{r}')(\mathbf{b}'' \cdot \hat{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'')}$$

La limite  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow a$  se trouve en remplaçant  $\mathbf{b}$  par  $\mathbf{b}'$ . En reportant dans le développement (3.25), ces deux corrections peuvent être écrites

$$-2dly^3 \sum_{\mathbf{b}} b_i b_j \left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{K_1 b^2}{8\pi T}} e^{\frac{K_2}{4\pi T} ((\mathbf{b} \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} b^2)} \int d\hat{r}' e^{-\frac{K_2}{4\pi T} ((\mathbf{b}' \cdot \hat{r}')(\mathbf{b}'' \cdot \hat{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'')}$$

Dans une configuration neutre de trois vecteurs de Burgers,  $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'' = -\frac{1}{2}$ , ce qui nous permet d'effectuer l'intégrale angulaire :

$$\int d\hat{r}' e^{-\frac{K_2}{4\pi T} ((\mathbf{b}' \cdot \hat{r}')(\mathbf{b}'' \cdot \hat{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'')} = 2\pi I_0 \left(\frac{K_2 b^2}{8\pi T}\right)$$

où  $I_0$  est une fonction de Bessel modifiée. Ainsi la correction finale peut s'écrire comme une contribution unique à la fugacité  $y(l)$ , d'ordre  $y^2$  :

$$\delta y = +2\pi dl y^2 I_0 \left(\frac{K_2 b^2}{8\pi T}\right) \quad (3.28)$$

Ces deux contributions (3.27) et (3.28) définissent donc le comportement à l'ordre  $y^2$  de la fugacité  $y(l)$  en fonction de l'échelle. Ces corrections peuvent être avantageusement écrites sous la forme d'une équation de renormalisation :

$$\partial_l y(l) = \left(2 - \frac{K_1 b^2}{8\pi T}\right) y + 2\pi I_0 \left(\frac{K_2 b^2}{8\pi T}\right) y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.29)$$

Finalement pour obtenir le comportement avec l'échelle des modules d'élasticité, il faut revenir à la définition de la matrice d'élasticité renormalisée (3.24).

### Renormalisation des constantes élastiques

Le développement perturbatif de la matrice d'élasticité renormalisée (3.24) s'obtient sans problème à l'aide du développement de la densité de dislocations (3.25). Lorsque le cut-off  $a$  est incrémenté, la première contribution à  $C_{ijkl}^{-1}(l)$  qui apparait est donc d'ordre  $y^2$ , et provient de la modification des bornes de l'intégrale sur  $\mathbf{r}$  :  $\int_{r>a} \rightarrow \int_{r>a} + \int_{ae^{dl}>r>a}$ , où la seconde intégrale est nécessairement d'ordre  $dl$ . Cette intégrale se formule de façon plus précise sous la forme

$$+\frac{T}{2}y^2 dl \sum_{\mathbf{b}} \epsilon_{jp} \epsilon_{lq} b_i b_k \int d\hat{r} \hat{r}_p \hat{r}_q e^{\frac{K_2}{4\pi T}((\mathbf{b} \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2}b^2)} + \mathcal{O}(dl^2)$$

Dans un premier temps calculons l'intégrale angulaire en utilisant le vecteur  $\mathbf{b}$  comme axe des abscisses :

$$\int d\hat{r} \hat{r}_p \hat{r}_q e^{\frac{K_2}{4\pi T}((\mathbf{b} \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2}b^2)} = I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) \pi \delta_{pq} + I_1 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) 2\pi (b_p b_q - \frac{1}{2} \delta_{pq})$$

Nous pouvons alors utiliser les propriétés de symétrie des tenseurs définis sur un réseau hexagonal (ou triangulaire) :

$$\sum_{\mathbf{b}} b_i b_k = 3\delta_{ik} \quad \sum_{\mathbf{b}} b_i b_j b_k b_l = \frac{3}{4} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.30)$$

Dans cette expression, la somme porte toujours sur les vecteurs de plus petit module d'un réseau hexagonal. La contraction de tenseur qui s'impose est contraignante quoique très simple : elle permet de réécrire la correction ci-dessus sous une forme agréable pour une correction à une matrice d'élasticité :

$$\delta C_{ijkl}^{-1} = +\frac{T}{2}y^2 dl \left[ 3\pi I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{3}{2}\pi I_1 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) (\epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \epsilon_{jk} \epsilon_{li} - \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \quad (3.31)$$

Afin d'exprimer cette correction sous la forme de renormalisation des coefficients de Lamé, nous devons modifier ces tenseurs pour les exprimer en fonction des tenseurs de rang quatre symétrique et antisymétrique :

$$\delta C_{ijkl}^{-1} = +\frac{T}{4}y^2 dl \left[ 3\pi I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 3\pi I_1 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 3\pi \left[ I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) + I_1 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) \right] \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \right] \quad (3.32)$$

Cette correction à la matrice d'élasticité peut s'écrire comme des corrections aux coefficients

de Lamé en utilisant la forme explicite (3.20) de  $C_{ijkl}^{-1}$  :

$$\partial_l \mu^{-1} = 3\pi I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.33a)$$

$$\partial_l (\mu + \lambda)^{-1} = 3\pi \left[ I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) - I_1 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.33b)$$

$$\partial_l \gamma^{-1} = 3\pi \left[ I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) + I_1 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.33c)$$

Un commentaire s'impose sur la dernière équation (3.33c) : dans le cas d'un cristal isotrope, la valeur de  $\gamma$  est initialement nulle. Or cette équation implique que  $\gamma$  ne peut que décroître sous le groupe de renormalisation : si le tenseur initial  $C_{ijkl}$  est symétrique, nous pouvons donc allègrement négliger cette dernière équation, ce qui nous redonne bien les équations habituelles de HALPERIN-NELSON-YOUNG (Nelson & Halperin 1979, Young 1979).

### Équations de renormalisation finales

Afin d'obtenir un ensemble fermé d'équations de renormalisation, nous devons obtenir une équation de renormalisation pour  $K_1(l)$  et  $K_2(l)$  qui interviennent dans (3.33). D'après (3.16), un solide parfaitement isotrope correspond à  $K_1 = K_2 = K$  avec  $4K^{-1} = \mu^{-1} + (\mu + \lambda)^{-1}$ . L'équation de renormalisation pour  $K(l)$  se déduit donc immédiatement de (3.33) :

$$\partial_l K^{-1} = \frac{3\pi}{4} \left[ 2I_0 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) - I_1 \left( \frac{K_2 b^2}{8\pi T} \right) \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.34)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la transition entre le solide et la phase hexatique.

### 3.2.5 Étude de la transition

Dans le cas du cristal parfaitement isotrope, le système d'équations de renormalisation qui décrit le comportement d'échelle du solide est simplement

$$\partial_l y(l) = \left( 2 - \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) y + 2\pi I_0 \left( \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.35a)$$

$$\partial_l (TK^{-1}) = \frac{3\pi}{4} \left[ 2I_0 \left( \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) - I_1 \left( \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.35b)$$

où  $b$  a été remplacé par le pas du réseau  $a_0$  (plus petit vecteur de Burgers). D'après l'équation (3.35a), une transition se produit à la température  $T_c = K a_0^2 / 16\pi$ . En dessous de cette température, la fugacité des dislocations est renormalisée vers 0, ce qui signale une phase dans laquelle la densité des dislocations est nulle (bien qu'il puisse toujours y avoir

---

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

Young A., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:1855.

quelques défauts aux petites échelles). Par contre pour  $T > T_c$ , les défauts apparaissent aux grandes échelles :  $y(l)$  augmente avec l'échelle  $ae^l$ , ce qui correspond à une énergie de coeur  $E_c(l)$  qui décroît, jusqu'à devenir nulle pour  $y(l^*) \sim 1$ . Le flot de renormalisation ressemble à celui du modèle XY (figure 2.5) avec cependant quelques différences provenant du terme quadratique  $y^2$  dans (3.35a), absent dans les équations de renormalisation du modèle XY.

### Flot de renormalisation

Autour de la transition, nous pouvons définir le petit paramètre  $x(l)$  par  $K(l)/T = 16\pi/a_0^2(1 - x(l))$ .  $x(0) < 0$  correspond à la phase basse température. Afin de simplifier l'écriture des équations de renormalisations, nous pouvons définir les constantes  $A = 12\pi^2 a_0^{-2} \left[ 2I_0 \left( \frac{Ka_0^2}{8\pi T} \right) - I_1 \left( \frac{Ka_0^2}{8\pi T} \right) \right]$  et  $B = 2\pi I_0 \left( \frac{Ka_0^2}{8\pi T} \right)$ . Autour de la transition, nous avons  $A \sim 351.579$ ,  $B \sim 14.3231$ . Avec ces conventions, les équations de renormalisation se simplifient (toujours au second ordre en  $x, y$ ) :

$$\partial_l y = 2xy + By^2 \quad \partial_l x = Ay^2$$

Avant d'étudier la transition, nous allons d'abord déterminer les séparatrices entre les différentes phases. Elles correspondent à des flots le long de droite  $y(l) = m x(l)$  autour de la transition. Si nous reportons dans les équations ci-dessus, nous trouvons deux pentes différentes :  $m_{\pm} = (B \pm \sqrt{B^2 + 8A})/(2A)$ . Ces séparatrices sont représentées sur la figure 3.6 et délimitent les régions correspondant aux phases solide ( $y_0 < m_- x_0$ ) et hexatique.

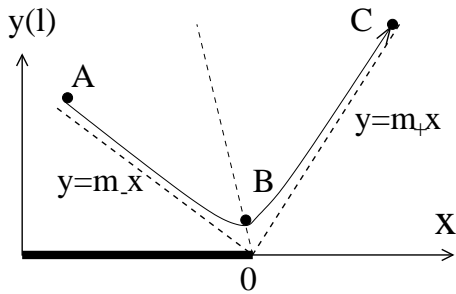


FIG. 3.6 - Flot de renormalisation schématisé à la transition de fusion. On remarquera les deux séparatrices qui ont des pentes différentes contrairement au flot XY. Le point A correspond au modèle microscopique (conditions initiales) près de la transition :  $y - m_- x \propto (T - T_c)$ . Le point B est le minimum de la courbe correspondante ( $\partial_l y = 0$ ) et en C :  $y \sim 1$

Le long de la séparatrice descendante, le comportement du flot est donné par  $x(l) \sim x_0/(1 - x_0 A m_{\pm}^2 l)$ .

### Comportement critique

Afin de déterminer le comportement critique du solide, et en particulier la fonction de corrélation au dessus de la transition, nous allons procéder comme dans l'étude de la transition KT. Ainsi nous considérons un solide juste au dessus de la transition : dans le diagramme des flots précédents le point initial (point A de la figure 3.6) est très proche de la séparatrice  $y = m_- x$ . En particulier, si nous appelons  $\mathcal{D}(l)$  la différence  $\mathcal{D}(l) = y(l) - m_- x(l)$ , elle est initialement proportionnelle à  $T - T_c$ . Tant que cet écart à la séparatrice est



suffisamment faible, il vérifie une équation de renormalisation qui s'obtient en ne conservant que les termes d'ordre 1 en  $\mathcal{D}$ . Celle-ci s'écrit

$$\partial_t \mathcal{D} = -2\mathcal{D}x$$

L'expression de  $x$  sur la séparatrice permet d'obtenir une expression pour  $\mathcal{D}$  au premier ordre:  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0(1 - x_0 Am_-^2 l)^{\frac{2}{Am_-^2}}$ . Cette expression n'est bien sûr valable que jusqu'au minimum de  $y(l)$  (partie descendante du flot de la figure 3.6: de A à C). Ce minimum est défini par  $-m_- x(l_m) = \mathcal{D}(l_m)$ , ce qui dans la limite des grands  $l$  (ou des petits  $|x_0|$ ) donne  $l_m^{-1} \sim \mathcal{D}_0 l^{\frac{2}{Am_-^2}}$ . Nous trouvons ainsi que  $l_m \sim |x_0|^{-\frac{Am_-^2}{2+Am_-^2}}$ . Sachant que la seconde partie du flot (de B à C) conduit au même résultat, nous trouvons ainsi une fonction de corrélation qui se comporte comme

$$\xi_d(T) \sim a e^{\frac{b}{|T-T_c|^\nu}} \quad \nu = \frac{Am_-^2}{2 + Am_-^2} \simeq 0.36963 \dots \quad (3.36)$$

Cette analyse nous indique également que  $TK_R^{-1} \sim (1 - c|T - T_C|^\nu)$ . Cette longueur  $\xi_d$  intervient également dans le calcul des fonctions de corrélations du paramètre d'ordre translationnel: celles-ci décroissent exponentiellement au dessus de la transition selon

$$\langle e^{i\mathbf{G} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{o}))} \rangle \sim e^{-\frac{r}{\xi_d(T)}}$$

alors que dans la phase de basse température ces fonctions de corrélations décroissent algébriquement :

$$\langle e^{i\mathbf{G} \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{o}))} \rangle \sim \left(\frac{r}{a}\right)^{-\eta_G} \quad \eta_G = \frac{TG^2}{4\pi} \left(\frac{1}{\mu_R} + \frac{1}{2\mu_R + \lambda_R}\right)$$

De même on montre que l'énergie libre admet, comme pour la transition KT, une singularité essentielle à la transition:  $F \sim \xi_d^{-2}(T)$ .

### Apparition des dislocations

Dans l'analyse qui précède, la croissance de  $y(l)$  au dessus de  $T_c$  nous a indiqué que des dislocations "libres" apparaissaient au delà d'une longueur  $\xi_d(T)$  dans le solide, et faisaient fondre celui-ci. Cette apparition de dislocations a des conséquences visibles déjà sur les équations de renormalisation (3.33): une fugacité  $y$  finie renormalise  $\mu$ , c-à-d. le module de cisaillement  $c_{66}$ , vers 0. Le module de cisaillement à grande échelle du solide est ainsi toujours plus faible qu'aux courtes distances. De plus au dessus de la transition où  $y$  est renormalisé vers une valeur finie, ce module  $c_{66}$  va être renormalisé vers 0. La caractéristique d'un solide étant un module de cisaillement fini, la transition que nous venons de voir peut bien être considéré comme une transition de fusion. Comme nous l'avions déjà vu, les dislocations permettent donc au solide de relaxer une contrainte de cisaillement, et ainsi de couler. Il est donc intuitivement assez naturel que la viscosité  $\eta$  de la phase  $T > T_c$  soit reliée à l'inverse de la densité de dislocations:  $\eta \sim \xi^2$ . La seconde équation (3.33b) nous indique que le module de compression  $c_{11} = 2\mu + \lambda$  est lui aussi renormalisé vers des petites valeurs,

comme nous pouvons nous y attendre. Ainsi si nous considérons un solide bidimensionnel incompressible, tel que par exemple un cristal de Wigner d'électrons à la surface de l'Hélium, dans lequel  $c_{11}$  est formellement infini, ce module de compression sera renormalisé vers des valeurs finies autour de la transition où cette approche de renormalisation s'applique.

Bien que la phase obtenue au dessus de la transition possède un coefficient de cisaillement nul, elle conserve quand même un quasi-ordre dans l'orientation des atomes les uns par rapport aux autres.

### 3.2.6 Ordre orientationnel et seconde transition

Dans ce qui précède, nous avons négligé les fluctuations de l'orientation locale. En effet des déformations dues aux phonons ne peuvent induire de telles fluctuations. Par contre les dislocations modifient cette orientation. Au dessus de la transition précédente, il devient donc important de tenir compte de ces fluctuations. A priori celles-ci sont régies par un hamiltonien quadratique de la forme (voir le développement (3.3)) :

$$H_{or} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} K_A (\nabla \theta)^2 \quad (3.37)$$

où  $K_A$  est appelée la constante de Franck. Si  $K_A$  est finie, nous savons d'après le chapitre précédent qu'en dessous de la température de libération des disclinaisons (qui est nécessairement supérieure à celle du paragraphe précédent), la phase possédera un quasi-ordre translationnel. Une constante nulle correspondrait à une absence d'ordre translationnel, et une constante infinie à un ordre. Déterminons donc la valeur (approximative) de  $K_A$  au dessus de la transition. Pour cela nous remarquons que  $\theta$  est homogène à  $uL^{-1}$ , et donc que  $K_A$  est homogène à une constante élastique multipliée par une surface. Cette dimension implique la relation d'échelle

$$K_A(\mu, \lambda) = e^{2l} K_A(\mu(l), \lambda(l))$$

Si nous utilisons cette relation avec  $l = l^*$  tel que  $\xi = ae^{l^*}$  (ou autrement dit  $y(l^*) = 1$ ), nous sommes ramenés au régime dans lequel les dislocations prolifèrent. Nous pouvons *a priori* appliquer dans ce régime l'approximation de Debye-Hückel qui consiste à approximer la densité de dislocation  $\mathbf{b}$  par un champ continu. D'après (3.37) (voir aussi le chapitre précédent),  $K_A$  peut être défini à partir des corrélations de l'orientation (sans disclinaison)

$$TK_A^{-1} = \lim_{q \rightarrow 0} q^2 \langle \theta(\mathbf{q}) \theta(-\mathbf{q}) \rangle$$

La seule source de déformation de l'orientation locale sont les dislocations. D'après la formule (3A.52) de l'annexe consacrée aux dislocations, la fonction de corrélation de l'orientation ci-dessus s'exprime en fonction de celle de la densité de dislocations :

$$TK_A^{-1} = \lim_{q \rightarrow 0} P_{ij}^L \langle b_i(\mathbf{q}) b_j(\mathbf{q}) \rangle \quad (3.38)$$

Dans l'approximation de Debye-Hückel cette fonction de corrélation densité/densité se calcule simplement à partir de l'interaction entre dislocations (3.16) :  $\langle b_i(\mathbf{q}) b_j(\mathbf{q}) \rangle = \frac{T}{2E_c} P_{ij}^L +$

$\frac{Tq^2}{K+q^2 2E_c} P_{ij}^T$ . Seule la composante longitudinale contribue à  $K_A$  qui admet une valeur finie :

$$K_A \sim e^{2l^*} \frac{1}{2E_c} \sim \frac{\xi^2}{2E_c} \quad (3.39)$$

D'après ce résultat (voir le chapitre précédent) les fonctions de corrélation du paramètre d'ordre décroissent donc algébriquement au dessus de la transition avec un exposant

$$e^{i6(\theta(\mathbf{r})-\theta(\mathbf{o}))} \sim \left(\frac{r}{a}\right)^{-\eta_6} \quad \eta_6(T) = \frac{18T}{\pi K_A}$$

Tous les résultats du chapitre précédent deviennent valables pour cet ordre associé à une symétrie  $U(1)$  (la symétrie réelle étant celle de rotation de  $2\pi/6$ , quelques modifications sont à apporter : les défauts topologiques sont ainsi associés à des charges de  $2\pi/6$ , etc). En particulier à une température  $T_h$  les disclinaisons, défauts associés à cet ordre orientationnel, induisent une transition où ce quasi-ordre orientationnel est perdu. Cette transition est caractérisée par le saut universel  $K_A^R/T = 72/\pi$ .

### 3.3 Effet d'un substrat ordonné

Dans la pratique un solide bidimensionnel est souvent obtenu en déposition sur un substrat. Si ce solide est microscopique (par exemple), son paramètre de maille peut être comparable à celui du substrat et celui-ci peut modifier le comportement élastique du solide en question, voire même modifier le mécanisme de fusion que nous venons de voir. Autour de cette transition, seules les fluctuations de grande longueur d'onde jouent un rôle crucial : nous devons donc nous intéresser aux couplages entre le solide et le substrat sensibles à ces fluctuations à grande échelle. Dans un couplage entre les densités d'atomes du solide et du substrat, seuls les modes correspondant aux vecteurs communs aux deux réseaux réciproques interviennent. Deux cas sont donc naturellement à distinguer : si les deux réseaux ne possèdent aucun vecteur de réseau réciproque en commun (au moins pour les plus petits d'entre eux), il s'agit du cas *incommensurable*, alors que dans le second cas on parle de situation *commensurable*.

#### 3.3.1 Substrat incommensurable : stabilisation de la phase hexatique

Dans ce cas donc, les deux réseaux ne possèdent aucun mode en commun. Une translation de l'un par rapport à l'autre ne coûte donc aucune énergie : le couplage avec le substrat ne fait donc pas intervenir le tenseur des déformations. Ce substrat peut néanmoins se coupler à l'orientation locale, qui intervient indépendamment dans le hamiltonien comme nous l'avons vu. En donnant des directions privilégiées à l'angle local  $\theta(\mathbf{r})$ , le substrat va réduire les fluctuations d'orientation. La forme précise de ce couplage dépend donc des deux symétries respectives du solide et du réseau du substrat. Par simplification, je considérerai dans la suite deux réseaux hexagonaux (dans un cas plus complexe, le paramètre  $p$  qui suit devrait être modifié).

Si nous revenons au chapitre précédent, nous avons déjà considéré un couplage qui brisait la symétrie de rotation (qui ici est une symétrie de l'angle  $6\theta$ ) : dans le cas d'un substrat à symétrie de rotation hexagonale, ce couplage se formule selon

$$\delta F = -\frac{8\gamma}{p^2} \cos(p\theta(\mathbf{r}))$$

avec  $p = 6$ . Dans l'hypothèse où les variations de  $\theta$  sont faibles, nous pouvons développer ce couplage en cos pour obtenir l'énergie libre en présence de ce couplage qui prend la forme élastique habituelle (3.6) avec une nouvelle constante élastique  $\gamma$  (qui est maintenant non nulle):

$$F = cte + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} 2\mu u_{ij}^2 + \lambda u_{kk}^2 + \gamma (\partial_x u_y - \partial_y u_x)^2 \quad (3.40)$$

A priori nous sommes donc passés d'un solide isotrope décrit par deux constantes élastiques indépendantes à trois constantes élastiques indépendantes en présence du substrat. En l'absence de dislocation cependant, cette constante  $\gamma$  peut être absorbée dans une redéfinition des modules élastiques  $c_{11}, c_{66}$  ou des coefficients de Lamé  $\lambda, \mu$  (voir Annexe A ):

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow \tilde{\mu} = \mu - \gamma & \lambda &\rightarrow \tilde{\lambda} = \lambda - 2\gamma \\ c_{11} &\rightarrow \tilde{c}_{11} = c_{11} & c_{66} &\rightarrow \tilde{c}_{66} = c_{66} - \gamma \end{aligned}$$

Le module de compression n'est donc pas modifié par la présence du substrat, alors que celui de cisaillement est réduit, comme nous aurions pu nous y attendre: les axes privilégiés du substrat sont également des axes facilitant les contraintes de cisaillement sur le solide. Cette absorption de  $\gamma$  n'est pas complètement une surprise: nous avons vu dans la partie précédente que les déformations de phonons seules (champ monovalué) n'induisaient pas de fluctuations de l'orientation indépendantes. L'orientation locale et le champ de déplacement était donc lié: le couplage de l'orientation au substrat peut donc être vu de façon équivalente comme un couplage avec le champ de déplacement. La situation est différente en présence de dislocations: dans la discussion qui précède sur l'ordre orientationnel, nous nous sommes aperçus qu'une densité de dislocations  $\mathbf{b}$  induisait des fluctuations de l'orientation indépendantes (3A.52). En particulier, d'après le résultat (3A.58) de l'annexe, ce couplage  $\gamma$  induit une dissymétrie entre les constantes de couplage logarithmique et angulaire dans l'interaction entre dislocations. Ces constantes ne s'expriment pas uniquement en fonction de  $\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{66}$ :  $\gamma$  devient une constante élastique indépendante. Nous devons donc reprendre l'analyse de la transition de fusion qui précède avec ces modifications.

### Équations de renormalisation modifiées

Les équations de renormalisation en présence d'un couplage  $\gamma$ , *i.e* pour une gaz de dislocations avec deux constantes de couplage indépendantes  $K_1, K_2$  ont été obtenues par YOUNG (Young 1979). Je montre dans ce paragraphe qu'il est possible également de les dériver selon la méthode de la partie précédente (voir également l'annexe B de (Young

---

Young A., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:1855.

1979)). L'analyse de YOUNG, basée sur une renormalisation de la fonction de partition, est une extension aisée de l' Annexe B du chapitre précédent, et un cas particulier de la renormalisation présentée au chapitre 6. Les deux constantes de couplages sont (voir l'annexe)

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{4c_{66}(c_{11} - c_{66})}{c_{11}} + \frac{4c_{66}\gamma}{c_{66} + \gamma} & K_2 &= \frac{4c_{66}(c_{11} - c_{66})}{c_{11}} - \frac{4c_{66}\gamma}{c_{66} + \gamma} \\ &= 4 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu + \lambda} \right) + 4 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) & &= 4 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu + \lambda} \right) - 4 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'analyse de renormalisation a déjà été faite dans la partie 3.2.4 ou une partie anti-symétrique avait été rajoutée au tenseur  $C_{ijkl}$ . Il nous reste simplement à exprimer les équations (3.33) sous forme de renormalisation des deux constantes indépendantes  $K_1$  et  $K_2$  pour obtenir un système fermé d'équations, ce qui est fait très facilement à l'aide des définitions ci-dessus. Les équations de renormalisation ainsi obtenues sont

$$\partial_l y(l) = \left( 2 - \frac{K_1 a_0^2}{8\pi T} \right) y + 2\pi I_0 \left( \frac{K_2 a_0^2}{8\pi T} \right) y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.42a)$$

$$\partial_l T K_1 = -\frac{3\pi}{4} \left[ (K_1^2 + K_2^2) I_0 \left( \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) - K_1 K_2 I_1 \left( \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.42b)$$

$$\partial_l T K_2 = -\frac{3\pi}{4} \left[ 2K_1 K_2 I_0 \left( \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) - \frac{1}{2} (K_1^2 + K_2^2) I_1 \left( \frac{K a_0^2}{8\pi T} \right) \right] y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.42c)$$

où nous avons utilisé les relations

$$\frac{1}{2}(K_1^2 + K_2^2) = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu + \lambda} \right)^2 + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right)^2 \quad K_1 K_2 = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu + \lambda} \right)^2 - \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right)^2$$

### Modifications de la transition de fusion

Les différences entre les équations de renormalisation ci-dessus et celle du cas isotrope (3.35) modifient légèrement les résultats que nous avons dérivés pour la transition de fusion. La première transition se produit lorsque  $K_1 T^{-1} = 16\pi/a_0^2$ . Ainsi l'exposant  $\nu$  dépend maintenant continuellement du rapport  $\alpha = K_2^R/K_1^R = 32\pi K_2^R/a_0^2$ . Son expression analytique est

$$\nu = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + \chi^2}(\sqrt{1 + \chi^2} - \chi)} \quad \chi = \frac{I_0^2(2\alpha)}{2((1 + \alpha^2)I_0(2\alpha) - \alpha I_1(2\alpha))}$$

Un résultat beaucoup plus intéressant physiquement concerne l'ordre orientationnel au dessus de cette transition. En effet d'après (3.38), la constante de Franck au dessus de la transition s'exprime selon

$$TK_A^{-1} = \lim_{q \rightarrow 0} P_{ij}^L \langle b_i(\mathbf{q}) b_j(-\mathbf{q}) \rangle \sim e^{2l^*} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{2Tq^2}{(K_1 - K_2) + 4E_c q^2} = 0 \quad (3.43)$$

Nous trouvons ainsi que l'assymétrie entre les deux constantes de couplages  $K_1$  et  $K_2$  rend la constante de Franck infinie, c'est-à-dire que la phase au dessus de la première

transition (libération des dislocations) conserve un ordre orientationnel à longue distance. Il n'y a donc plus place pour une seconde transition : dans ce schéma la phase de haute température est une phase hexatique, stabilisée par le couplage au substrat périodique aussi petit soit-il. En réalité d'autres transitions de type Ising peuvent avoir lieu qui sortent du contexte de cette thèse (Nelson 1983).

### 3.3.2 Substrat commensurable : arguments qualitatifs

Dans le cas d'un substrat commensurable avec le solide, il existe donc un ensemble de vecteurs communs aux deux réseaux réciproques. Appelons  $\mathbf{G}_\alpha$  les vecteurs de plus petit module commun aux deux réseaux réciproques. Dans le cas de deux réseaux hexagonaux ces vecteurs sont au nombre de 6, dont trois dans des directions différentes :  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ . Le couplage avec le substrat correspond à un terme additif à l'énergie libre

$$\delta F = \frac{1}{2} \gamma (\epsilon_{ij} \partial_i u_j)^2 + h [\cos(\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})) + \cos(\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})) + \cos(\mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}))]$$

Les couplages correspondant à des vecteurs  $\mathbf{G}$  plus grands sont moins pertinents que ceux que nous prenons en compte. Il est également possible de considérer un terme de compression locale, dans le cas où le cristal bidimensionnel serait comprimé (ou dilaté) afin de minimiser son couplage avec le substrat, *i.e* de devenir commensurable avec ce dernier. Ce terme agit comme un champ constant dans les interactions en cosinus. Le modèle que nous obtenons correspond en fait à l'extension à deux dimensions du modèle de Sine-Gordon. Nous avons vu au chapitre précédent que ce modèle était équivalent à un modèle de Gaz de Coulomb : la même technique peut être employée ici. Cette technique suppose cependant un champ de déformation  $\tilde{u}$  monovalué (ou plutôt prenant ses valeurs dans  $(-\infty, +\infty)$ ) : nous supposons donc que nous avons déjà tenu compte de l'effet des dislocations en remplaçant les constantes élastiques ci-dessus par leurs valeurs renormalisées. Une approche plus précise et plus rigoureuse peut être faite en utilisant les résultats du chapitre 6. Par manque de temps je ne pourrai malheureusement pas la présenter. Elle consiste à étudier le comportement du cristal en présence de dislocations et du substrat périodique : dans ce cas nous obtenons un gaz électromagnétique qui peut être étudié par renormalisation à l'aide des résultats de l'Annexe B du chapitre 6 (Carpentier & Le Doussal 1999).

En tenant compte ici approximativement des dislocations à travers  $\mu^R, \lambda^R, \gamma^R$ , la partie quadratique du hamiltonien se réexprime en fonction des modules d'élasticité réduits :  $H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} q^2 u_i [(2\mu^R + \lambda^R) P_{ij}^L + (\mu^R + \gamma^R) P_{ij}^T] u_j$ . Nous pouvons donc intégrer le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  dans la fonction de partition de notre solide : nous obtenons un gaz de Coulomb de charges vectorielles valant  $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \pm \mathbf{G}_\alpha$ . L'interaction s'obtient en inversant

---

Nelson D., (1983). In Domb C. & Lebowitz C., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapitre vol. 7, page 165. Academic Press (London).

Carpentier D. & Le Doussal P. article en préparation. , 1999.

simplement la matrice élastique ci-dessus (voir l'Annexe A ):

$$H_{\mathbf{m}/\mathbf{m}} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \left[ K_1^{sub} \mathbf{m}_\alpha \cdot \mathbf{m}_\beta \ln(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|/a) - K_2^{sub} \left( \frac{(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{m}_\alpha (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{m}_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2} - \frac{1}{2} \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\beta \right) \right] + E_c \sum_{\alpha} \mathbf{m}_\alpha \cdot \mathbf{m}_\alpha \quad (3.44)$$

où les deux constantes sont maintenant proportionnelles au carrés de la température :

$$K_1^{sub} = \frac{T^2}{4\pi} \left( \frac{1}{\mu_R + \gamma_R} + \frac{1}{2\mu^R + \lambda^R} \right) \quad K_2^{sub} = \frac{T^2}{4\pi} \left( \frac{1}{\mu_R + \gamma_R} - \frac{1}{2\mu^R + \lambda^R} \right)$$

Nous pouvons donc reprendre l'analyse du paragraphe précédent dans ce nouveau contexte : la libération de charges libres s'interprète dans ce cas comme la pertinence des couplages en cosinus, c'est-à-dire la pertinence du couplage au substrat. Ce couplage est donc pertinent pour  $T^{-1}K_1^{sub} < 16\pi/a_0^2$ , soit à basse température :  $T < T^{comm} = 64\pi^2((\mu_R + \gamma_R)(2\mu^R + \lambda^R))/(3\mu^R + \lambda^R + \gamma_R)/a_0^2$ . Alors qu'à haute température ce couplage est non pertinent et nous pouvons nous attendre à une phase incommensurable. Afin d'obtenir une phase solide commensurable, il faut donc que  $T^{comm} < T_c$ , ce qui correspond à peu près à  $|\mathbf{G}_\alpha| > \sqrt{12}G^0$  où  $G^0$  est la norme du plus petit vecteur du réseau réciproque du solide bidimensionnel.

### 3.4 Réalisations expérimentales de la fusion bidimensionnelle

Après avoir décrit ce scénario de fusion bidimensionnelle continue, il est intéressant de se demander si cette fusion de type KTHNY est observée expérimentalement. En effet une transition du premier ordre n'est pas exclue en dimension deux.

Plusieurs systèmes expérimentaux ont été utilisés pour tester les idées précédentes. Nous reviendrons sur certains d'entre eux par la suite (au chapitre 6). La liste qui suit est illustrative, et ne se veut absolument pas exhaustive.

SESHADRI et al. ont récemment étudié les réseaux de bulles magnétiques dans les grenats magnétiques (Seshadri & Westerfeld 1991, Seshadri & Westerfeld 1992, Seshadri & Westervelt 1992). Dans ce système, l'agitation thermique est simulée à l'aide d'un petit champ alternatif. L'étude du comportement du réseau de bulles se fait par imagerie directe et une manifestation d'une transition de type continue (avec prolifération de dislocations) semble être observée. Cependant dans cette expérience le substrat (le grenat) joue un rôle crucial. Nous reviendrons au chapitre 6 sur les conséquences de la présence de ce substrat non ordonné. Un autre système qui peut aussi être étudié par imagerie est celui de billes de polystyrène coincées entre deux plaques de verre (Murray & VanWinkle 1987, Murray,

---

Seshadri R. & Westerfeld R., (1991). *Phys. Rev. Lett.*, **66**:2774.

Seshadri R. & Westerfeld R., (1992). *Phys. Rev. B*, **46**:5142.

Seshadri R. & Westervelt R., (1992). *Phys. Rev. B*, **46**:5150–5161.

Murray C. & VanWinkle D., (1987). *Phys. Rev. Lett.*, **58**:1200.

Murray C., Sprenger W., & Wenk R., (1990). *Phys. Rev. B*, **42**:688.

Sprenger & Wenk 1990) . En faisant varier la distance entre ces deux plaques, il est possible de varier la densité du réseau de billes. De plus la présence ou non d'un champ électrique modifie la forme de l'interaction entre billes (celle-ci devient une interaction dipolaire en présence d'un champ). Dans les deux cas une transition de fusion continue a été observée. Ces expériences sont cependant limitées à des réseaux de billes relativement petits.

Un système idéal pour l'observation de cette fusion semble être le réseau d'électrons à la surface de l'Hélium. Contrairement au réseau d'électrons dans les hétérojonctions, pour lequel la densité d'électrons est beaucoup plus importante, le réseau d'électrons à la surface de l'Hélium superfluide se comporte comme un réseau classique. En particulier sa fusion a été étudiée et semble être en accord avec le scénario de KTHNY. En effet une borne supérieure pour l'éventuel saut d'entropie à la transition a été déterminé, et cette borne est inférieure aux prédictions des différents scénari de transition du premier ordre (Glattli, Andrei & Williams 1988). Finalement il semble maintenant possible de pouvoir directement étudier le facteur de structure de ce réseau, ce qui permettrait de préciser l'accord ou les différences avec la théorie présentée dans ce chapitre.

### 3.5 Conclusion

Nous avons ainsi vu au cours de ce chapitre comment la prolifération de dislocations pouvait induire dans un film cristallin une transition de fusion continue. Cette transition peut être étudiée dans le cadre du groupe de renormalisation en utilisant une formulation en termes de gaz de Coulomb avec des charges vectorielles représentant les dislocations coins dans le cristal. Ce scénario de fusion semble pouvoir rendre compte de diverses expériences sur cette fusion en dimension deux.

Remarquons, avant de passer à l'étude des effets du désordre sur cette fusion, que tout ce qui a été raconté dans ce chapitre concerne les cristaux bidimensionnels isotropes, c'est-à-dire les cristaux à symétrie hexagonale ou triangulaire. Comme nous l'avons vu ces cristaux ne sont décrits que par deux constantes élastiques. Il est ainsi légitime de s'attendre à des modifications de ces résultats dans la description de la fusion d'un solide anisotrope. La description des dislocations dans un solide triangulaire déformé (figure 3.7), et l'étude de leur prolifération ont été mené à bien par OSTLUND et HALPERIN (Ostlund & Halperin 1981). Si les conclusions générales de ce chapitre restent valables, les détails précis sont modifiés et peuvent maintenant dépendre précisément de l'ordre de la symétrie microscopique du cristal.

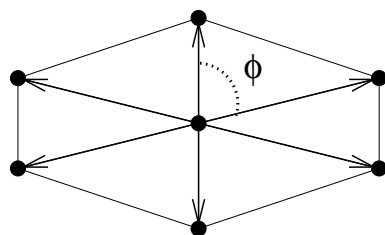


FIG. 3.7 – Représentation de la cellule élémentaire d'un solide bidimensionnel anisotrope.

Glattli D., Andrei E., & Williams F., (1988). *Phys. Rev. Lett.*, **60**:420.

Ostlund S. & Halperin B., (1981). *Phys. Rev. B*, **23**:335.



## Annexe A Dislocations bidimensionnelles

Dans cette annexe, je dérive le champ de déplacement correspondant à une densité finie de dislocations bidimensionnelles (dislocations coins), et de disclinaisons. Bien que ce calcul soit standard dans le cas d'un solide parfaitement isotrope (Nabarro 1967, Chaikin & Lubensky 1995), il est présenté ici dans le cas plus général de la présence d'un substrat. La méthode qui est ici présentée est plus directe que celle de HALPERIN et NELSON (Nelson & Halperin 1979). Elle permet également (contrairement à la méthode des fonctions d'Airy (Nelson & Halperin 1979) brièvement rappelée) d'avoir accès au champ de déformation (et non au tenseur), ce qui nous sera indispensable lorsque nous considérerons le couplage du solide à un substrat (désordonné). Cette annexe permet également de clarifier les notations et les différentes conventions utilisées dans le chapitre.

Avant de regarder l'effet des dislocations dans un solide bidimensionnel, regardons rapidement les conséquences d'un couplage du réseau élastique à un substrat périodique. Ce couplage peut être décrit dans la formulation hamiltonienne (voir le corps du chapitre) par le terme  $H = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} 2\mu u_{ij}^2 + \lambda u_{kk}^2 + \gamma(\epsilon_{ij}\partial_i u_j)^2$ . Sans dislocations, le champ de déformation dû aux phonons  $\mathbf{u}$  est monovalué et vérifie la relation  $\epsilon_{ij}\partial_i\partial_j\mathbf{u} = 0$ . En utilisant cette propriété, il est facile de montrer qu'en négligeant des termes de bords, on a

$$\int_{\mathbf{r}} (\epsilon_{ij}\partial_i u_j)^2 = 2 \int_{\mathbf{r}} (u_{ij}^2 - u_{kk}^2) \quad (3A.45)$$

ce qui implique que la constante de couplage du réseau au substrat peut être incorporée dans les coefficients de Lamé  $\lambda$  and  $\mu$ , et ne correspond donc pas à une nouvelle constante élastique indépendante du réseau bidimensionnel :

$$H = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} 2\mu u_{ij}^2 + \lambda u_{kk}^2 + 4\gamma\theta^2 \quad (3A.46a)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} 2(\mu + \gamma)u_{ij}^2 + (\lambda - 2\gamma)u_{kk}^2 \quad (3A.46b)$$

Cette transformation se réécrit en termes des constantes élastiques sous la forme  $c_{11} \rightarrow c_{11}, c_{66} \rightarrow c_{66} + \gamma$ . Cependant en présence de dislocations, le champ de déplacement devient multivalué, et la formule (3A.45) ne s'applique plus : la présence de dislocations brise la symétrie ci-dessus et le paramètre  $\gamma$  devient une constante élastique indépendante.

### A.1 Champ de déplacement

A travers cet annexe, je négligerai toujours les effets des bords du réseau.

La condition d'équilibre local pour un hamiltonien élastique (3A.46a)  $H = \frac{1}{2}u_i * M_{ij} * u_j$  s'écrit simplement

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow M_{ij} * u_j = 2\mu \partial_j u_{ij} + \lambda \partial_i u_{kk} + \gamma \epsilon_{ji} \epsilon_{mn} \partial_j \partial_m u_n = 0 \quad (3A.47)$$

---

Nabarro F., (1967). *Theory of dislocations*. Clarendon Press, Oxford.

Chaikin P. & Lubensky T., (1995). *Principles of condensed matter physics*. Cambridge Univ. Press.

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

Pour des champs non singuliers, la matrice  $M_{ij}$  se simplifie en :  $M_{ij}(\mathbf{q}) = q^2[(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})P_{ij}^L + \tilde{\mu}P_{ij}^T]$  où j'ai introduit les coefficients de Lamé modifiés  $\tilde{\mu} = \mu + \gamma$ ,  $\tilde{\lambda} = \lambda - 2\gamma$ .

### Déplacement multivalué

Les dislocations correspondent à des singularités du champ de déplacement, et induisent une multivaluation de ce champ  $\mathbf{u}$ . Pour retrouver un problème élastique habituel, nous décomposons ce champ de déformation en une partie continue  $\tilde{u}_i$  et une partie multivaluée  $u_i^s$  :  $u_i = u_i^s + \tilde{u}_i$ . Le champ  $u_i^s$  produit les singularités attendues et s'exprime donc comme :  $u_i^s = b_i * \frac{\Phi}{2\pi}$  où  $\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \mathbf{b}_{\alpha}$  est la densité de dislocations, et le potentiel  $\Phi$  a été défini au chapitre précédent. En utilisant  $\partial_i \Phi = -\epsilon_{ik} \partial_k G$ , nous pouvons écrire la contribution de  $u_i^s$  à (3A.47) :

$$u_{ij}^s = -\frac{1}{4\pi} (b_j \epsilon_{ik} + b_i \epsilon_{jk}) \partial_k G \quad (3A.48)$$

### Contrainte induite par les dislocations

La présence de dislocations libres dans l'échantillon, modélisées par le champ multivalué  $u_i^s$ , induit des contraintes locales sur le solide. Celles-ci peuvent être décrites par la force locale  $f_i^s$  :

$$f_i^s(\mathbf{r}) \equiv -M_{ij} * u_j^s = -2\mu \partial_j u_{ij}^s - \lambda \partial_i u_{kk}^s - \gamma \epsilon_{ji} \epsilon_{mn} \partial_j \partial_m u_n^s \quad (3A.49a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{r}'} b_j(\mathbf{r}') [(\mu - \gamma) \epsilon_{ik} \partial_j \partial_k + \lambda \epsilon_{jk} \partial_i \partial_k] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\Leftrightarrow f_i^s(\mathbf{q}) = -b_j(\mathbf{q}) [(\mu - \gamma) \epsilon_{ik} P_{jk}^L + \lambda \epsilon_{jk} P_{ik}^L] \quad (3A.49b)$$

La détermination de la seconde composante  $\tilde{u}_i$  du déplacement est donc un problème classique de réponse élastique du réseau à une force locale  $f_i^s$  induite par les dislocations. L'équilibre local s'écrit  $M_{ik} * \tilde{u}_k = f_i^s$ , relation qui peut être aisément inversée en transformée de Fourier :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{q}) = M_{ij}^{-1}(\mathbf{q}) f_j^s(\mathbf{q})$$

où la matrice élastique est  $M_{ij}^{-1} = \frac{1}{q^2} (\frac{1}{2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}} P_{ij}^L + \frac{1}{\tilde{\mu}} P_{ij}^T)$ . En utilisant l'expression (3A.49b) de la force, nous déduisons l'expression du champ  $\tilde{u}$  induit par cette force locale :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{q}) = -b_j \frac{1}{q^2} \left( \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \epsilon_{jk} P_{ik}^L + \frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma} \epsilon_{ik} P_{jk}^L \right)$$

La transformée de Fourier approchée de  $q^{-2} P_{ij}^L$  calculée au paragraphe suivant (A.3) ainsi que la relation  $\epsilon_{jk} \hat{r}_i \hat{r}_k = \epsilon_{ik} \hat{r}_j \hat{r}_k + \epsilon_{ij}$  nous permet d'exprimer ce champ dans l'espace réel :

$$\tilde{u}_i(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}'} \frac{b_j(\mathbf{r}')}{2\pi} \left( \frac{\tilde{\mu}^2 - \gamma(3\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}{\tilde{\mu}(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})} \epsilon_{ij} \ln(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})(\tilde{\mu} - \gamma)}{\tilde{\mu}(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})} \epsilon_{jk} H_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \quad (3A.50)$$

où j'ai utilisé les coefficients de Lamé modifiés. Ainsi le champ de déplacement total dû à une densité de dislocations  $\mathbf{b}$  s'exprime à l'aide d'une fonction de Green  $u_i = \frac{1}{2\pi} \mathcal{G}_{ij} * b_j$ , qui

est donnée, dans le cas général d'un solide en présence d'un substrat ordonné, par

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{ij}(r) &= \delta_{ij}\Phi(r) + \frac{\mu^2 - \gamma(\mu + \lambda)}{(\mu + \gamma)(2\mu + \lambda)}\epsilon_{ij}\ln(r) + \frac{\mu(\mu + \lambda - \gamma)}{(\mu + \gamma)(2\mu + \lambda)}\epsilon_{jk}H_{ik}(r) \quad (3A.51) \\ &= \delta_{ij}\Phi(r) + \frac{c_{66}^2 - \gamma(c_{11} - c_{66})}{c_{11}(c_{66} + \gamma)}\epsilon_{ij}\ln(r) + \frac{c_{66}(c_{11} - c_{66} - \gamma)}{c_{11}(c_{66} + \gamma)}\epsilon_{jk}H_{ik}(r)\end{aligned}$$

### Rotations locales du réseau

Avant de passer au calcul de l'interaction entre dislocations, remarquons qu'une densité finie de dislocations  $\mathbf{b}$  induit non seulement une déformation à grande distance, mais aussi une rotation locale du réseau décrite par une variation de l'angle local  $\theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i u_j$  défini dans le corps du chapitre. En utilisant la décomposition précédente du déplacement en  $\mathbf{u}^s$  et  $\tilde{\mathbf{u}}$ , cet angle s'écrit  $\theta^s + \tilde{\theta}$  avec les deux contributions

$$\begin{aligned}\theta^s(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i u_j^s = -\frac{1}{4\pi}b_j * \partial_j G \Rightarrow \theta^s(\mathbf{q}) = \frac{i}{2}\frac{b_j(\mathbf{q})q_j}{q^2} \\ \tilde{\theta}(\mathbf{q}) &= \frac{i}{2}\frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma}\frac{b_i q_i}{q^2}\end{aligned}$$

Ce qui donne pour la contribution finale d'une densité  $\mathbf{b}$  de dislocations à l'orientation locale :

$$\theta(\mathbf{q}) = i\frac{\mu}{\mu + \gamma}b_j\frac{q_j}{q^2} \Leftrightarrow \theta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2\mu}{\mu + \gamma}\int_{\mathbf{r}'} b_j(\mathbf{r}')\partial_j G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3A.52)$$

### Interaction entre dislocations

Pour obtenir l'interaction effective entre dislocations, dans un premier temps nous exprimons le tenseur des déformations à l'aide du champ de déplacement ci-dessus  $u_{ij} = u_{ij}^s + \tilde{u}_{ij}$  avec :

$$\begin{aligned}u_{ij}^s(\mathbf{q}) &= \frac{i}{2q^2}(b_j\epsilon_{ik} + b_i\epsilon_{jk})q_k \\ \tilde{u}_{ij}(\mathbf{q}) &= -\frac{i}{2q^2}b_l\left(\frac{2\lambda}{2\mu + \lambda}\epsilon_{lk}q_i P_{jk}^L + \frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma}(\epsilon_{jk}q_i + \epsilon_{ik}q_j)P_{lk}^L\right)\end{aligned}$$

Nous pouvons alors reporter ce tenseur des déformations et l'angle local  $\theta_{\mathbf{q}}$  dans le hamiltonien (3A.46a) et non dans (3A.46b), à cause de la multivaluation du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ . Les quatre contributions provenant de la décomposition  $u_{ij} = u_{ij}^s + \tilde{u}_{ij}$  s'expriment selon

$$\begin{aligned}u_{ij}^s C_{ijkl} u_{kl}^s &= \frac{1}{q^2}b_i(\mathbf{q})b_j(\mathbf{q})\left(\mu P_{ij}^L + (2\mu + \lambda)P_{ij}^T\right) \\ \tilde{u}_{ij} C_{ijkl} u_{kl}^s &= -\frac{1}{q^2}b_i(\mathbf{q})b_j(\mathbf{q})\left(\frac{\mu(\mu - \gamma)}{\mu + \gamma}P_{ij}^L + \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda}P_{ij}^T\right) \\ \tilde{u}_{ij} C_{ijkl} \tilde{u}_{kl} &= \frac{1}{q^2}b_i(\mathbf{q})b_j(\mathbf{q})\left(\frac{\mu(\mu - \gamma)^2}{(\mu + \gamma)^2}P_{ij}^L + \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda}P_{ij}^T\right) \\ \gamma\theta(\mathbf{q})\theta(-\mathbf{q}) &= \frac{1}{q^2}b_i(\mathbf{q})b_j(\mathbf{q})\frac{\gamma\mu^2}{(\mu + \gamma)^2}P_{ij}^L\end{aligned}$$

En sommant ces quatre contributions, nous obtenons l'interaction suivante entre les dislocations du solide :

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} b_i(\mathbf{q}) b_j(\mathbf{q}) \frac{1}{q^2} \left( \frac{4\mu\gamma}{\mu + \gamma} P_{ij}^L + \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} P_{ij}^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} b_i(\mathbf{q}) b_j(\mathbf{q}) \frac{1}{q^2} \left( \frac{4c_{66}\gamma}{c_{66} + \gamma} P_{ij}^L + \frac{4c_{66}(c_{11} - c_{66})}{c_{11}} P_{ij}^T \right) \end{aligned} \quad (3A.53)$$

La correction en  $\gamma$  aurait pu être obtenu plus facilement à partir du résultat sans substrat ( $\gamma = 0$ ) : il suffit de remarquer que (Nelson & Halperin 1979)  $\partial_\gamma H = 2 \int_{\mathbf{q}} \gamma \theta(\mathbf{q}) \theta(-\mathbf{q})$  ce qui donne directement le premier terme de l'interaction précédente.

Une autre façon de trouver cette interaction, qui a l'avantage de pouvoir facilement être étendue à la présence de disclinaisons, utilise les fonctions d'Airy.

## A.2 Fonctions d'Airy

Nous considérons ici à la fois une densité  $n(\mathbf{r})$  de disclinaisons et  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  de dislocations, qui sont définies par

$$\epsilon_{ij} \partial_i \partial_j u_k = b_k \quad ; \quad \epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \theta = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \partial_i \partial_j \partial_k u_l = n(\mathbf{r})$$

Tant que nous nous intéressons aux tenseurs de contraintes et de déformations (et non au champ de déformation  $\mathbf{u}$  lui-même) il est utile de paramétriser le tenseur symétrique  $\sigma_{ij}$ , qui satisfait  $\partial_i \sigma_{ij} = 0$ , par

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \partial_k \partial_l \chi$$

où  $\chi$  est appelée une fonction d'Airy. En utilisant l'expression du tenseurs des contraintes en terme de  $\sigma_{ij}$ , on obtient l'expression désirée de ce tenseur en fonction de  $\chi$  (Chaikin & Lubensky 1995)

$$\frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} q^4 \chi(\mathbf{q}) = -\epsilon_{ik} \epsilon_{jl} q_k q_l u_{ij}(\mathbf{q}) = n(\mathbf{q}) - i \epsilon_{ij} q_j b_i(\mathbf{q}) \equiv \tilde{n}(\mathbf{q}) \quad (3A.54)$$

En revenant au hamiltonien nous trouvons

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \sigma_{ij}(\mathbf{q}) u_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{q}} \frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} q^4 \chi_{\mathbf{q}} \chi_{-\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \frac{4\mu(\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{q^4} \tilde{n}_{\mathbf{q}} \tilde{n}_{-\mathbf{q}} \quad (3A.55)$$

qui redonne (3A.53) sans disclinaison.

## A.3 Transformée de Fourier de l'interaction entre dislocations

La formule (3A.53) exprime l'interaction entre dislocations dans l'espace réciproque. Pour obtenir une expression dans l'espace direct de cette interaction, nous devons calculer la transformée de Fourier de

$$V_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^2} (A P_{ij}^L + B P_{ij}^T)$$

---

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

Chaikin P. & Lubensky T., (1995). *Principles of condensed matter physics*. Cambridge Univ. Press.

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes. La transformée de Fourier est divergente dans l'infrarouge et l'ultraviolet. Nous introduisons une fonction de cut-off  $\phi(aq)$  (avec  $\phi(0) = 1$ ) pour la régularisation de la fonction aux courtes distances. Dans la suite,  $V_{ij}(\mathbf{r})$  sera toujours contracté avec un champ qui vérifie  $\int_{\mathbf{r}} n(\mathbf{r}) = 0$ , ce qui nous permet de considérer la transformée de Fourier "soustraite" :

$$V_{ij}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{\phi(aq)}{q^2} (1 - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) (A P_{ij}^L + B P_{ij}^T) \quad (3A.56)$$

Cette expression a une composante sur le projecteur sur  $\mathbf{r}$  :  $\hat{r}_i \hat{r}_j$  et une sur le projecteur orthogonal  $\hat{r}_i^\perp \hat{r}_j^\perp = \delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j$ , et donc s'écrit de façon équivalente

$$V_{ij}(\mathbf{r}) = E(r) \delta_{ij} + F(r) \hat{r}_i \hat{r}_j$$

La deuxième composante s'écrit pour  $i \neq j$  :

$$\begin{aligned} F(r) \hat{r}_x \hat{r}_y &= \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{\phi(aq)}{q^2} (1 - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) (A - B) q_x q_y \\ &= (A - B) \hat{r}_x \hat{r}_y \int \frac{dq}{2\pi} \frac{\phi(aq)}{q} J_2(qr) \\ &\underset{r \gg a}{\sim} \frac{1}{4\pi} (A - B) \hat{r}_x \hat{r}_y \end{aligned}$$

La première composante se déduit de la trace de  $V_{ij}$  :  $2E(r) = \text{Tr}(V) - F(r)$ . Cette trace se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(V) &= (A + B) \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{\phi(aq)}{q^2} (1 - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}) \\ &\underset{r \gg a}{\sim} \frac{A + B}{2\pi} (\ln(r/a) + C(\phi)) \end{aligned}$$

où  $C(\phi)$  est une constante non universelle qui dépend du choix du cut-off. Ainsi la transformée de Fourier finale s'écrit à grande distance :

$$V_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{A + B}{4\pi} (\ln(r/a) + C(\phi)) \delta_{ij} + \frac{1}{4\pi} (A - B) \left( \hat{r}_i \hat{r}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \quad (3A.57)$$

Le cas de l'interaction entre dislocations correspond à  $A = 4c_{66}\gamma/(c_{66} + \gamma)$  et  $B = 4c_{66}(c_{11} - c_{66})/c_{11}$ , ce qui nous donne un hamiltonien pour une densité de dislocation  $\mathbf{b} = \sum_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha}$  qui s'écrit dans l'espace réel sous la forme

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \left[ K_1 \mathbf{b}_{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{\beta} \ln(|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|/a) \right. \\ &\quad \left. - K_2 \left( \frac{(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \cdot \mathbf{b}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \cdot \mathbf{b}_{\beta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|^2} - \frac{1}{2} \right) \right] + E_c \sum_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha} \cdot \mathbf{b}_{\alpha} \quad (3A.58) \end{aligned}$$

où  $E_c$  est l'énergie de coeur des dislocations qui ici est reliée d'un point de vue technique à la régularisation aux courtes distances du propagateur. Les deux constantes de couplages sont données par

$$K_1 = \frac{4c_{66}(c_{11} - c_{66})}{c_{11}} + \frac{4c_{66}\gamma}{c_{66} + \gamma} \quad K_2 = \frac{4c_{66}(c_{11} - c_{66})}{c_{11}} - \frac{4c_{66}\gamma}{c_{66} + \gamma} \quad (3A.59)$$

## Chapitre 4

# Défauts topologiques bidimensionnels en présence de désordre et gaz coulombiens désordonnés : approche par le groupe de renormalisation

Dans les deux premiers chapitres de cette partie, nous avons étudié la description des défauts topologiques en dimension deux à l'aide de gaz de Coulomb. Cette description nous a permis d'étudier les transitions induites par ces défauts dans les superfluides, modèles de spins XY ou les solides bidimensionnels. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux conséquences sur cette description de la présence de désordre dans le système à symétrie  $U(1)$  ou le solide. Dans le cas du solide ce désordre peut être un désordre de structure, lié au solide : des impuretés dans la composition de ce solide bidimensionnel; ce peut être également un désordre lié au substrat. Ces deux types de désordre complètement différents correspondent pour le modèle de spins XY respectivement à un déphasage aléatoire entre les spins, et à un champ magnétique aléatoire. Nous allons voir dans ce chapitre comment traiter avec des techniques de gaz de Coulomb modifiés, les modèles XY avec les deux types de désordre. Ces modèles s'appliquent également, en l'absence de vortex, à la croissance cristalline sur un substrat désordonné. Nous traiterons également le cas du film cristallin avec un désordre de structure. Par contre le traitement du substrat désordonné ne sera abordé que dans la partie suivante au chapitre (6) car il nécessite un travail technique plus lourd qui n'a été réalisé que très récemment.

Dans un premier temps nous allons nous intéresser au modèle XY dans un champ magnétique aléatoire qui a été étudié par CARDY et OSTLUND (Cardy & Ostlund 1982). Puis nous passerons à l'étude du déphasage aléatoire. Un choix peut-être plus naturel aurait été de commencer par traiter le désordre interne au modèle (le déphasage aléatoire), avant de passer au désordre externe provenant d'un substrat. Cependant l'ordre dans lequel je vais présenter ces deux études, qui par ailleurs coïncident avec l'ordre chronologique, permet de simplifier la présentation : en effet l'analyse de renormalisation de CARDY et OSTLUND a permis de montrer qu'un champ magnétique aléatoire générerait un nouveau

---

Cardy J. & Ostlund S., (1982). *Phys. Rev. B*, **25**:6899–6909.

type de désordre dans le modèle XY à grande échelle. RUBINSTEIN et ses collaborateurs (Rubinstein, Schraiman & Nelson 1983) ont ensuite étudié le modèle XY avec un déphasage aléatoire pour se rendre compte que leur étude de renormalisation était un cas particulier de celle de CARDY et OSTLUND: le désordre généré par le champ magnétique aléatoire correspondait en fait à un déphasage aléatoire. En commençant par l'analyse de CARDY et OSTLUND nous faisons donc d'une pierre deux coups en développant le cadre technique nécessaire aux deux études.

## 4.1 Modèle XY en présence d'un champ magnétique aléatoire

Nous commençons donc par étudier un modèle de spins XY en présence d'un champ magnétique aléatoire  $\mathbf{h}$ . L'exemple d'un champ magnétique constant a été traité au paragraphe 2.6. La partie quadratique du modèle est celle du modèle XY (chapitre 2) à laquelle s'ajoute une interaction avec le champ aléatoire:  $+\int_{\mathbf{r}} \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \psi$  où  $\psi$  est le paramètre d'ordre  $U(1)$  du modèle, dans notre cas un spin XY. Si l'on néglige les fluctuations d'amplitude de  $\psi$ , en posant  $|\psi| = 1$  pour simplifier les notations; le hamiltonien s'écrit donc

$$H[\{\mathbf{h}\}] = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \frac{K}{2} (\nabla\theta)^2 + h_x \cos(\lambda\theta) + h_y \sin(\lambda\theta) \quad (4.1)$$

Le paramètre  $\lambda$  additionnel dans les couplages au désordre permet de décrire également un champ aléatoire associé à une symétrie de rotation  $\lambda$  fois dégénérée (rotation de  $2\pi/\lambda$ ). Le cas initial correspond bien sûr à  $\lambda = 1$ . Ce hamiltonien dépend donc explicitement de la configuration du champ magnétique aléatoire, de même que l'énergie libre associée à un échantillon. Afin de spécifier complètement le désordre il nous faut donc donner la loi de distribution du champ aléatoire, qui nous permet de connaître les fluctuations statistiques de ce désordre entre deux échantillons différents. Dans notre cas nous allons choisir par simplification un champ  $\mathbf{h}$  qui est tiré indépendamment entre deux sites de l'échantillon: les valeurs de  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  dans l'échantillon sont donc indépendantes les unes des autres. De plus la loi de distribution de  $\mathbf{h}(\mathbf{r})$  est choisie gaussienne, ce qui n'est pas restrictif dans notre cas. Cette loi est donnée par

$$P[\{\mathbf{h}_r\}] = \exp \left\{ -\frac{1}{2g} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \mathbf{h}^2(\mathbf{r}) \right\} \quad \overline{h_i(\mathbf{r})h_j(\mathbf{r}')} = ga^2\delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.2)$$

À partir de maintenant et pour le reste de la thèse, la notation  $\overline{A}$  pour un opérateur  $A$  dépendant du désordre dénote une moyenne sur le désordre avec la distribution associée. Dans la formule ci-dessus cette moyenne correspond donc au second moment de la distribution qui est parfaitement définie par cette valeur.

Comme dans toute étude de système désordonné (voir par exemple le chapitre 8 de (Cardy 1996)) il faut différencier un désordre gelé d'un désordre recuit. Dans le second cas

---

Rubinstein M., Schraiman B., & Nelson D., (1983). *Phys. Rev. B*, **27**:1800.

Cardy J., (1996). *Scaling and renormalization in statistical physics*. Cambridge university press.

la valeur des paramètres de désordre fluctuent dans un échantillon donné alors que dans le premier cas elle est fixée. Nous nous intéressons ici au cas d'un champ magnétique gelé. Dans ce cas le désordre n'est pas un degré de liberté du système statistique que nous considérons : la fonction de partition ne comporte aucune somme sur ces degrés de liberté désordonnés et nous récupérons donc *in fine* une énergie libre qui dépend de l'échantillon, c'est-à-dire de la réalisation du désordre. D'un point de vue expérimental cependant nous aimerions pouvoir prédire des quantités thermodynamiques pour un film superfluide en présence de désordre. Ceci peut être fait dans l'absolu en prédisant la loi de distribution de cette énergie libre. Si cette loi est piquée autour de la valeur typique de l'énergie libre, nous pouvons nous contenter de trouver cette valeur typique, ou plus simplement la valeur moyenne de l'énergie libre. Dans les cas plus complexes, des informations plus fines sur cette loi de distribution deviennent indispensables pour prédire le comportement thermodynamique du système.

Toutes les études présentées dans ce chapitre se concentrent sur la valeur moyenne de l'énergie libre, et donc les valeurs moyennes des quantités thermodynamiques (fonctions de corrélations, etc). Nous reviendrons plus loin dans la thèse sur d'éventuels problèmes liés au comportement de la loi de distribution de l'énergie libre (chapitre 7).

#### 4.1.1 Moyenne sur le désordre et modèle répliqué

Dans bien des cas, même l'étude de la moyenne de l'énergie libre n'est pas possible exactement. Pour les modèles à une particule, il est possible d'utiliser la méthode supersymétrique (Itzykson & Drouffe 1989), tome 2). Une approximation souvent employée par ailleurs est l'approximation des répliques qui consiste à utiliser l'identité exacte  $\ln Z = \lim_{p \rightarrow 0} (Z^p - 1)/p$ . Pour un  $p$  entier, la puissance de la fonction de partition  $Z^p$  s'interprète comme la fonction de partition du système répliqué  $p$  fois. La moyenne sur le désordre  $\overline{Z^p}$  induit alors des couplages entre ces différentes répliques. L'approximation non contrôlée consiste à utiliser les résultats calculés pour  $p$  entier pour prendre la limite  $p \rightarrow 0$ . Dans bien des cas, et en particulier pour un désordre de site tel le champ magnétique aléatoire, cette approximation est acceptée comme étant exacte, ce qui est confirmé par des calculs utilisant d'autres techniques (Rubinstein et al. 1983, Goldschmidt & Houghton 1982). Cependant dans le cas de désordre frustrant le système (verre de spins, etc), la notion de brisure de symétrie de permutation des répliques du système a été proposée pour continuer à prendre la limite du modèle à  $p$  entier. Cette notion reviendra plus loin dans cette thèse. Nous supposons dans la suite de ce chapitre que la limite naïve des répliques peut être prise. Nous discuterons par la suite (dans la dernière partie de la thèse) cette hypothèse.

Appliquons donc cette méthode des répliques sur le hamiltonien (4.1) : le hamiltonien répliqué avant moyenne sur le désordre s'exprime comme

$$H^{(p)}[\mathbf{h}] = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{a^2} \sum_{a,b=1}^p K \delta^{ab} \nabla \theta_a(\mathbf{r}) \nabla \theta_b(\mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r}} \left( h_x \sum_a \cos(\lambda \theta_a) + h_y \sum_a \sin(\lambda \theta_a) \right) \quad (4.3)$$

---

Itzykson C. & Drouffe J.-M., (1989). *Théorie statistique des champs*. InterEditions/ Editions du CNRS.  
 Goldschmidt Y. & Houghton A., (1982). *Nuclear Physics*, **B210**:155.



et la fonction de partition à moyenner est  $Z^p = \int d[\theta_1] \dots d[\theta_p] \exp(-\frac{1}{T}H^{(p)})$ . La moyenne sur le désordre se fait alors aisément :

$$\begin{aligned} & \overline{\exp \left\{ -\frac{1}{T} \int_{\mathbf{r}} \left( h_x \sum_a \cos(\lambda\theta_a) + h_y \sum_a \sin(\lambda\theta_a) \right) \right\}} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{g}{T^2} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \sum_{a,b} (\cos(\lambda\theta_a) \cos(\lambda\theta_b) + \sin(\lambda\theta_a) \sin(\lambda\theta_b)) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{g}{T^2} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \sum_{a,b} \cos \lambda(\theta_a - \theta_b) \right\} \end{aligned}$$

Ainsi comme prévu la moyenne sur le désordre induit des couplages entre les différentes répliques. Le hamiltonien final du modèle répliqué moyenné est donc un modèle de Sine-Gordon à plusieurs composantes :

$$H^{(p)} = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^p K^{ab} \nabla\theta_a(\mathbf{r}) \nabla\theta_b(\mathbf{r}) + \frac{g}{2T} \sum_{a,b} \cos \lambda(\theta_a - \theta_b) \quad (4.4)$$

où pour l'instant la matrice  $K^{ab}$  est une matrice diagonale :  $K^{ab} = K\delta^{ab}$ .

### Contrainte aléatoire locale

Nous pouvons rajouter au hamiltonien initial (4.1) un terme de contrainte aléatoire  $\mathbf{A}$  qui se couple au gradient de la phase  $\nabla\theta$ . Ce champ est l'analogie pour le modèle XY du tenseur des contraintes dans un film cristallin. Bien que ce terme ne soit pas présent dans le hamiltonien initial, il va être généré par le groupe de renormalisation et il est intéressant de l'inclure dès le début de notre analyse. Le hamiltonien devient alors

$$H[\{\mathbf{h}\}, \{\mathbf{A}\}] = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \frac{K}{2} (\nabla\theta)^2 + \mathbf{A} \cdot \nabla\theta + h_x \cos(\lambda\theta) + h_y \sin(\lambda\theta) \quad (4.5)$$

Nous choisissons, de même que pour  $\mathbf{h}$ , un champ de contrainte  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  décorrélé entre deux points différents (en fait entre deux liens), et distribué selon une loi gaussienne caractérisée par

$$\overline{A_i(\mathbf{r}) A_j(\mathbf{r}')^A} = \Delta \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.6)$$

Après réplification de ce modèle et moyenne sur le désordre, le hamiltonien répliqué prend exactement la forme (4.4) mais avec maintenant une matrice de couplage répliquée non diagonale :

$$K^{ab} = K\delta^{ab} - \frac{\Delta}{T}$$

### Symétrie statistique

Il est utile de remarquer que le hamiltonien ci-dessus possède, en l'absence de défaut topologique, une symétrie spécifique aux systèmes désordonnés (Schulz, Villain, Brezin &

---

Schulz U., Villain J., Brezin E., & Orland H., (1988). *Journ. of Statistical Phys.*, **51**:1.

Orland 1988). Dans un premier temps remarquons qu'il est possible de réécrire le hamiltonien répliqué ci-dessus sous la forme

$$H^{(p)} = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p} \left( K - p \frac{\Delta}{T} \right) \left( \nabla \sum_a \theta_a(\mathbf{r}) \right)^2 + \frac{K}{2p} \sum_{a \neq b} (\nabla(\theta_a - \theta_b)(\mathbf{r}))^2 \right] + \frac{g}{2T} \sum_{a,b} \cos \lambda(\theta_a - \theta_b)$$

Nous remarquons ainsi que le champ  $\sum_a \theta_a(\mathbf{r})$  se découple du reste du hamiltonien, si nous considérons un champ  $\theta$  sans défaut topologique. Ce découplage implique que la constante de couplage  $K$ , qui n'apparaît pas dans le reste du hamiltonien impliquant  $\theta_a - \theta_b$ , n'est pas renormalisée à tout les ordres en la fugacité  $g$ .

La symétrie statistique sous jacente sera décrite dans l'Annexe A du chapitre 6, ainsi que dans la dernière annexe de l'article joint à ce chapitre.

### 4.1.2 Analyse par le groupe de renormalisation

CARDY et OSTLUND ont renormalisé le modèle directement sur le hamiltonien répliqué (4.4) en utilisant une méthode similaire à celle de KOSTERLITZ pour le cas pur, et à la méthode de l'Annexe B. La différence vient ici de la nature des charges qui deviennent des vecteurs à  $p$  composantes. Au lieu de suivre leur méthode je vais procéder selon une voie légèrement différente qui permet d'envisager les généralisations qui suivent. L'esprit de la méthode reste bien sûr le même.

Notre point de départ sera le hamiltonien (4.3) et non (4.4), en incluant le couplage au champ de contrainte locale. Ce hamiltonien est suffisant si nous désirons étudier un système avec un champ  $\theta$  non périodique, par exemple dans le cas où  $\theta$  correspond à la hauteur d'une surface cristalline (modèle de croissance de cristaux) ou encore au déplacement d'un réseau de lignes en dimension 1+1 (voir le chapitre 5). Par contre si  $\theta$  est  $2\pi$  périodique, correspondant par exemple à la phase d'un paramètre d'ordre  $U(1)$ , il faut également que nous tenions compte des degrés de liberté de vortex du modèle. Nous allons donc commencer par inclure ces vortex dans notre modèle, quitte à la fin de notre étude à les exclure selon le modèle en mettant leur fugacité à zéro (ce qui correspond à une énergie de coeur infinie).

#### Introduction des vortex

La construction au chapitre 2 du champ de déplacement associé aux vortex partait de la condition d'équilibre local du modèle (4.1). Ici, en prenant en compte le champ de contrainte locale cette condition s'exprime comme

$$K \nabla^2 \theta + \nabla \cdot \mathbf{A} - h_x \sin(\lambda \theta) + h_y \cos(\lambda \theta) = 0 \quad (4.7)$$

L'étude que nous allons mener est perturbative en l'amplitude  $g$  des fluctuations du champ magnétique autour de 0. Nous faisons donc l'hypothèse qu'en première approximation le champ de vortex n'est pas sensible à la présence de ce champ aléatoire en chaque site. Les vortex peuvent alors être introduits comme dans le cas pur en décomposant le champ

de fluctuations élastiques  $\theta$  en une partie monovaluées  $\tilde{\theta}$  (onde de spins) et un champ de déformation dus aux vortex  $\theta^{sing}$  qui est multivalué. L'analyse du chapitre 2 se transpose ici très facilement : nous décomposons le champ de vitesse  $\nabla\theta$  et le champ de désordre  $\mathbf{A}$  en une partie irrotationnelle et une composante de divergence nulle

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^s & \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} &= 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{A}^s = 0 \\ \nabla\theta &= \nabla\tilde{\theta} + \nabla\theta^{sing} & \nabla \cdot \nabla\tilde{\theta} &= 0 \quad ; \quad \nabla \times \nabla\theta^{sing} = 0 \Leftrightarrow \theta^{sing} = \Phi * n \end{aligned}$$

où  $n(\mathbf{r})$  est le champ de vorticité. En reportant dans le hamiltonien initial (qui dépend toujours de la réalisation du désordre), nous trouvons deux termes distincts : le premier correspondant aux ondes de spins et le second représentant le champ de déformation dû aux vortex :

$$\begin{aligned} H[\{\mathbf{A}, \mathbf{h}\}] &= \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \left[ \frac{K}{2} (\nabla\tilde{\theta})^2 - \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla\tilde{\theta} + \frac{K}{2} (\nabla\theta^{sing})^2 - \mathbf{A}^s \cdot \nabla\theta^{sing} \right] \\ &\quad + \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} |\mathbf{h}|(\mathbf{r}) \cos \left( \lambda(\theta^s + \tilde{\theta}) + \phi_{\mathbf{r}} \right) \quad (4.8) \end{aligned}$$

La phase  $\phi_{\mathbf{r}}$  du champ  $\mathbf{h}_{\mathbf{r}}$ , dont la loi de distribution est uniforme entre 0 et  $2\pi$ , a été introduite.

### Approximation de Villain

Nous sommes maintenant en mesure d'utiliser l'approximation de VILLAIN, introduite au paragraphe 2.3. Cette approximation permet de découpler la norme de  $\mathbf{h}$  des champs  $\theta^s$  et  $\tilde{\theta}$ , et dans la limite des petits champs  $\mathbf{h}$ , elle consiste à introduire en chaque site des charges  $m(\mathbf{r})$  valant  $\pm 1$  et de fugacité aléatoire  $|\mathbf{h}(\mathbf{r})|$  :

$$\begin{aligned} H_V[\{\mathbf{A}, \mathbf{h}\}] &= \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \left[ \frac{K}{2} (\nabla\tilde{\theta})^2 - \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla\tilde{\theta} + \frac{K}{2} (\nabla\theta^{sing})^2 - \mathbf{A}^s \cdot \nabla\theta^{sing} \right] \\ &\quad + i \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} m(\mathbf{r}) \cdot \left( \lambda(\tilde{\theta} + \theta^s)(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}) \right) + \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} m^2(\mathbf{r}) T \ln(T^{-1} |\mathbf{h}(\mathbf{r})|) \end{aligned}$$

Dans la fonction de partition correspondante, comme dans le cas pur le champ d'onde de spin  $\tilde{\theta}$  peut être intégré pour fournir une expression de la fonction de partition d sordonn e en terme d'un gaz de Coulomb électromagnétique, dont l'action  $\mathcal{A} = -\frac{1}{T}H$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\{n, m, \mathbf{A}, \mathbf{h}\}] &= \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^2 T}{2\pi K} m * G * m + 2\pi \frac{K}{T} n * G * n \right) - n * V + i\lambda m * \Phi * n \\ &\quad - i \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} m(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \{ \ln(|\mathbf{h}(\mathbf{r})|/T) m^2(\mathbf{r}) + \ln y n^2(\mathbf{r}) \} \quad (4.9) \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous avons défini un potentiel désordonné  $V(\mathbf{r})$  qui est couplé linéairement à la densité de vortex  $n(\mathbf{r})$ . Ce potentiel provient du champ de contrainte aléatoire  $\mathbf{A}^s$  et il s'exprime en fonction de celui-ci comme  $V(\mathbf{r}) = T^{-1} \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{a^2} A_i(\mathbf{r}') \epsilon_{ij} \partial_j \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Son corrélateur se déduit donc simplement de celui de  $\mathbf{A}$  :

$$\overline{(V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}'))^2}^{(V)} = -2 \frac{\Delta}{T^2} (\Gamma(0) - \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = 2 \frac{\Delta}{T^2} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.10)$$

où  $G$  est le potentiel coulombien bidimensionnel défini au chapitre 2.

### Moyenne sur le désordre : gaz électromagnétique vectoriel

Nous pouvons maintenant moyenner sur le désordre le hamiltonien précédent exactement de la même manière que pour l'obtention de (4.4) : nous commençons par répliquer le modèle avant d'effectuer la moyenne sur les deux types de désordre encore présents :  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{h}$ . La réplication du modèle de gaz de Coulomb consiste simplement à introduire des charges  $n, m$  à  $p$  composantes au lieu de charges scalaires. La moyenne sur la phase  $\phi(\mathbf{r})$  du champ  $\mathbf{h}$  donne une condition sur la structure des charges  $m^a(\mathbf{r})$  :

$$\overline{\exp(i\phi(\mathbf{r}) \cdot \sum_a m^a(\mathbf{r}))} = 2\pi\delta\left(\sum_a m^a(\mathbf{r})\right) \implies \forall \mathbf{r} \sum_a m^a(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.11)$$

Cette condition s'ajoute bien sûr à la condition de neutralité des composantes électriques et magnétiques du gaz :

$$\forall \mathbf{r} \quad \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} n^a(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} m^a(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.12)$$

Pour dériver cette condition de neutralité, nous avons supposé que le champ de contrainte  $\mathbf{A}$  s'annulait sur les bords de l'échantillon. D'autres conditions aux bords peuvent conduire à imposer une charge globale  $Q$  non nulle (électrique ou magnétique).

Passons maintenant à la moyenne sur la norme  $\mathbf{h}$  : le résultat général est donné par l'intégrale

$$\int_0^\infty dh h \left(\frac{h}{T}\right)^{\sum_a m_a^2} e^{-\frac{h^2}{2g}} = \frac{1}{2} T^{-\sum_a m_a^2} (2g)^{1+(\sum_a m_a^2)/2} \Gamma\left(1 + \sum_a m_a^2/2\right)$$

Dans la suite nous allons nous restreindre aux opérateurs les plus pertinents de ce modèle qui correspondent aux charges possédants deux composantes non nulles et valant  $\pm 1$ . Dans ce cas l'expression précédente peut se simplifier en  $\exp((2g/T) \cdot \sum_a m_a^2)$ , ce qui donne une fugacité  $\sqrt{y} = 2g$  aux charges  $m$ . Reste le potentiel  $V$  qui interagit avec les charges électriques  $n$ . En utilisant la relation provenant de la neutralité électrique  $\sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta V_\alpha V_\beta = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} (V_\alpha - V_\beta)^2 n_\alpha n_\beta$ , nous pouvons écrire l'action finale sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\{\mathbf{n}, \mathbf{m}\}] = & \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda^2 T}{2\pi} \sum_{a,b} K_{ab}^{-1} m^a * G * m^b + 2\pi \frac{1}{T} \sum_{a,b} K_{ab} n^a * G * n^b \right) \\ & + i\lambda \sum_{a,b} m^a * \Phi * n^b + \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \left( \ln \sqrt{y} \sum_a (m^a)^2(\mathbf{r}) + \ln y \sum_a (n^a)^2(\mathbf{r}) \right) \quad (4.13) \end{aligned}$$

où la matrice de couplage est celle obtenue précédemment :  $K^{ab} = K\delta^{ab} - \frac{\Delta}{T}$ . La différence entre cette action et celle obtenue à partir du hamiltonien de Sine-Gordon répliqué (4.4) provient de la nature des charges  $m$  : avec notre procédure ces charges sont vectorielles avec  $p$  composantes, alors que l'approximation de Villain sur le modèle (4.4) conduit à des charges matricielles à  $p(p-1)$  composantes. Les deux analyses de renormalisation sont cependant similaires autour de la transition où l'universalité est attendue. Les équations de renormalisation correspondantes sont déduites des résultats du chapitre 6 dans l'Annexe A . Dans les paragraphes suivants nous étudions le diagramme des phases qui s'en déduit.

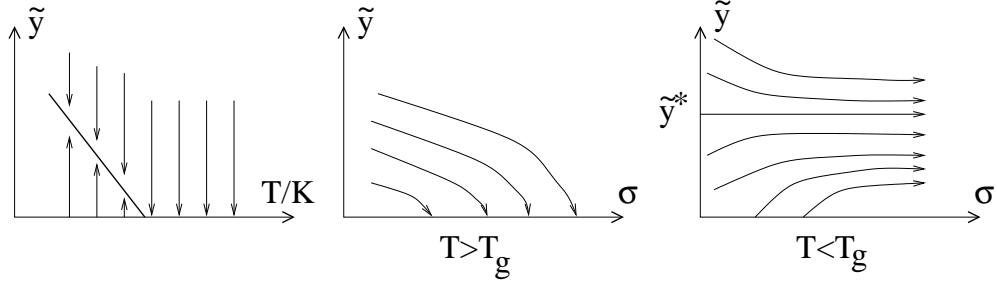


FIG. 4.1 – Deux projections du flot de renormalisation schématisé de CARDY et OSTLUND.

### 4.1.3 Modèle sans défaut topologique : la phase vitreuse de CARDY et OSTLUND

Dans le contexte de la croissance cristalline, le modèle (4.1) intervient avec un champ  $\theta$  représentant la hauteur de la surface du solide.  $\theta$  prend donc des valeurs entre  $-\infty$  et  $+\infty$  (champ non compactifié) : ainsi le modèle ne possède plus de défaut topologique. Son comportement à grande échelle peut donc s'étudier à partir des équations de renormalisation (4A.28) de l'annexe en imposant une énergie de coeur infinie pour les vortex ( $y = 0$ ), condition qui est préservée par la renormalisation. Les équations correspondantes s'écrivent

$$\partial_l(TK^{-1}) = 0 \quad (4.14a)$$

$$\partial(T^{-2}\Delta) = 2\pi\lambda^2\tilde{y}^2 \quad (4.14b)$$

$$\partial_l\tilde{y} = \left(2 - \frac{T\lambda^2}{2\pi K}\right)\tilde{y}^2 - 2\pi\tilde{y}^2 + \mathcal{O}(\tilde{y}^3) \quad (4.14c)$$

#### Phase de haute température

L'équation (4.14a) nous indique que  $K$  n'est pas renormalisé en l'absence de vortex. Ce résultat est non perturbatif en  $y$  comme l'indique la symétrie statistique du modèle. De l'équation (4.14c) nous tirons le domaine de pertinence de l'opérateur associé au champ magnétique : pour une température  $T$  supérieure à  $T_g = 4\pi K/\lambda^2$  ( $K$  étant non renormalisé, c'est directement sa valeur initiale qui rentre dans cette définition), le champ désordonné n'est pas pertinent à grande distance,  $\tilde{y}(l) \rightarrow 0$ . Dans cette partie du diagramme des phases, le comportement à grande distance est celui d'un modèle XY sans défaut, et soumis à un champ de contrainte locale aléatoire  $\mathbf{A}$  dont l'intensité est finie à grande échelle :  $\Delta(l) \rightarrow \Delta^* < +\infty$ . Cette phase est donc dominée par les fluctuations thermiques (et celles de  $\mathbf{A}$ ).

#### Phase vitreuse à basse température

À basse température  $T < T_g$ , au contraire, le champ de désordre  $\mathbf{h}$  induit les fluctuations dominantes : à grande échelle son intensité  $\tilde{y}$  est renormalisée vers une valeur finie perturbative :  $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y}^* = (1 - T/T_g)/\pi$ . La température  $T_g$  correspond donc à une température de transition entre ces deux régimes. Le flot de renormalisation autour de ce point est représenté schématiquement dans la figure (4.1).

La présence de ce point fixe *perturbatif* entre une phase où le désordre est pertinent et une phase à haute température où il ne l'est pas, a suscité de nombreuses études récemment, qui utilisaient des méthodes de théorie des champs ou des méthodes variationnelles. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Cependant dans ce que je viens de dire, un point pourrait paraître curieux : le caractère perturbatif du point de transition. En effet la valeur renormalisée de l'intensité du désordre  $\tilde{\gamma}$  le long de la ligne de points fixes de basse température est bien perturbative autour du point de transition. Mais un coup d'oeil à l'équation (4.14b) nous permet de voir qu'une valeur renormalisée finie de  $\tilde{\gamma}$  implique une divergence linéaire avec  $l$  de l'intensité  $\Delta$  du champ  $\mathbf{A}$ . Cette divergence est cependant un peu particulière en raison de la symétrie statistique : voir à ce sujet le travail du chapitre 6.

Dans la suite j'appellerai cette phase une phase vitreuse dans le sens assez approximatif d'une phase dont le comportement est dominé par des effets du désordre (ici le champ  $\mathbf{A}$ ). Au sens strict du terme il conviendrait d'étudier la dynamique à long temps de cette phase et en particulier son vieillissement afin de caractériser ses propriétés dynamiques vitreuses. Une possible caractérisation statique est donnée par l'étude des larges fluctuations d'échantillon à échantillon de différentes susceptibilités de cette phase (Hwa & Fisher 1994).

Cette dénomination de phase vitreuse sera précisée dans le chapitre 6 où nous étudierons la dynamique lente associée. Nous allons dans la suite déterminer le comportement des fonctions de corrélation de cette phase vitreuse, qui semble caractéristique des quasi-points fixes qui la caractérisent.

## Fonctions de corrélations

Les fonctions de corrélations du modèle se calculent simplement en utilisant la méthode des répliques (Toner & DiVicenzo 1990). Celle-ci consiste à utiliser la relation entre les moyennes des fonctions de corrélations connexes ou non et les fonctions de corrélations entre composantes du champ répliqués. Les deux relations que nous allons utiliser sont

$$\overline{\langle \mathcal{O}(\theta) \rangle} = \lim_{p \rightarrow 0} \langle \mathcal{O}(\theta_a) \rangle_{H^{(p)}} \quad (4.15)$$

$$\overline{\langle \mathcal{O}_1(\theta) \rangle \langle \mathcal{O}_2(\theta) \rangle} = \lim_{p \rightarrow 0} \langle \mathcal{O}_1(\theta_a) \mathcal{O}_2(\theta_{b \neq a}) \rangle_{H^{(p)}} \quad (4.16)$$

où  $a$  est un indice quelconque de réplique.

Nous allons ici nous intéresser aux fonctions de corrélations de la phase relatives  $\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o})$  qui, en l'absence de désordre, permettent de caractériser la nature de la phase du modèle (phase rugueuse ou plate dans le modèle de croissance cristalline). Si nous nous contentons de regarder les fonctions de corrélations à deux points, deux types de corrélation

---

Hwa T. & Fisher D., (1994). *Phys. Rev. Lett.*, **72**:2466.

Toner J. & DiVicenzo D., (1990). *Phys. Rev. B*, **41**:632.

sont intéressantes : les fonctions de corrélations respectivement connexes et non connexes

$$\begin{aligned} \overline{\langle \theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o})^2 \rangle} &= \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} 2(1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a})) \left( \overline{\langle \theta(\mathbf{q}) \theta(-\mathbf{q}) \rangle} - \overline{\langle \theta(\mathbf{q}) \rangle} \overline{\langle \theta(-\mathbf{q}) \rangle} \right) \\ \overline{\langle \theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o})^2 \rangle} &= \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} 2(1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a})) \overline{\langle \theta(\mathbf{q}) \theta(-\mathbf{q}) \rangle} \end{aligned}$$

En l'absence de désordre ces deux fonctions de corrélations sont égales et mesurent l'intensité des fluctuations thermiques dans l'échantillon. La présence d'un champ désordonné induit une différence entre ces deux fonctions de corrélations : cette différence est une mesure moyenne des fluctuations des déformations (ici de  $\theta$ ) provoquées par ce désordre.

D'après (4.15) et (4.16) ces deux types de fonctions de corrélations se déduisent de celles du champ répliqués  $\theta^a(\mathbf{r})$ . Celles-ci peuvent s'exprimer en fonction des corrélations de densité du gaz de charges répliqués  $m^a$  en utilisant la forme des fonctions de corrélation pour un modèle de Sine-Gordon-Villain (voir la discussion après la formule 2.34 du chapitre 2) :

$$\Gamma^{ab}(\mathbf{q}, K, \Delta, \tilde{y}) \equiv \langle \theta^a(\mathbf{q}) \theta^b(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{T}{q^2} (K^{-1})^{ab} - \frac{\lambda^2 T^2}{q^4} (K^{-1})^{ac} (K^{-1})^{bd} \langle m^c(\mathbf{q}) m^d(\mathbf{q}) \rangle \quad (4.17)$$

Afin d'évaluer le membre de droite de l'équation précédente, nous pouvons commencer par utiliser une relation d'échelle afin de se placer dans le régime asymptotique du groupe de renormalisation. Dans notre schéma de renormalisation,  $\theta$  est homogène à une longueur, ce qui donne la relation d'échelle suivante

$$\Gamma^{ab}(\mathbf{q}, K, \Delta, \tilde{y}) = e^{2l} \Gamma^{ab}(e^l \mathbf{q}, K(l), \Delta(l), \tilde{y}(l)) \quad (4.18)$$

où, par définition, les grandeurs  $K, \Delta, \tilde{y}(l)$  sont définies à l'échelle  $ae^l$ . À l'aide de cette relation nous pouvons évaluer le membre de droite de (4.17).

Dans la phase  $T > T_g$ ,  $\tilde{y}(l)$  tend vers 0 asymptotiquement. Appelons  $l^*$  l'échelle à laquelle  $\tilde{y}(l^*) \simeq 0$ , en utilisant la relation (4.18) avec  $l = l^*$  et l'égalité (4.17) pour évaluer  $\Gamma^{ab}$  à l'échelle  $l^*$  (sachant qu'à cette échelle  $\langle mm \rangle \simeq 0$ ), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Gamma^{ab}(\mathbf{q}, K, \Delta, \tilde{y}) &= e^{2l^*} \Gamma^{ab}(e^{l^*} \mathbf{q}, K, \Delta(l^*), \tilde{y}(l^*)) \\ &= \frac{T}{q^2} \left( \frac{1}{K} \delta^{ab} + \frac{\Delta(l)}{K(KT - p\Delta(l))} \right) = \frac{T}{q^2} \left( \frac{1}{K} \delta^{ab} + \frac{\Delta^\infty}{K(KT - p\Delta^\infty)} \right) \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité j'ai pris la limite  $l^* \rightarrow \infty$ . En reportant dans l'expression des fonctions de corrélations de la phase relative nous obtenons le résultat suivant

$$\overline{\langle \theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o})^2 \rangle} = \int_{\mathbf{q}} 2(1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a})) \frac{T}{q^2} \left( \frac{1}{K} + \frac{\Delta^\infty}{K^2 T} \right) = \frac{T}{2\pi K} \left( 1 + \frac{\Delta^\infty}{KT} \right) \ln \frac{r}{a} \quad (4.19)$$

$$\overline{\langle \theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o})^2 \rangle} - \overline{\langle \theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o}) \rangle}^2 = \int_{\mathbf{q}} 2(1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{r}}{a})) \frac{T}{q^2} \frac{1}{K} = \frac{T}{2\pi K} \ln \frac{r}{a} \quad (4.20)$$

Dans la phase vitreuse le champ  $\mathbf{A}$  (et donc les charges  $m$ ) est pertinent. Nous utilisons la relation (4.18) en imposant  $qe^l = 1/a$  où  $a$  est le pas du réseau (cut-off aux petites

distances). La limite de grande distance  $r \rightarrow \infty$  correspond avec cette condition à la limite  $l \rightarrow \infty$ . Dans cette limite  $\tilde{y}$  peut être approximé par sa valeur asymptotique  $\tilde{y}^*$ . Autour de la transition nous travaillons perturbativement dans cette valeur renormalisée  $\tilde{y}^*$  : dans l'évaluation de  $\Gamma^{ab}$  nous allons donc supposé que nous pouvons négliger le second terme du membre de droite de (4.17). Si nous définissons  $l_c$  comme l'échelle à partir de laquelle nous pouvons supposé que  $\tilde{y}(l) \simeq \tilde{y}^*$ , l'expression que nous obtenons pour  $\Gamma^{ab}$  dans la limite  $p \rightarrow 0$  est

$$\Gamma^{ab} = \frac{1}{a^2 q^2} \frac{T a^2}{K} \left( 1 + \frac{1}{KT} (\Delta(l_c) - \lambda^2 2\pi (\tilde{y}^*)^2 T^2 (\ln(qa) + l_c)) \right)$$

Le dernier terme est le terme dominant dans la limite  $r \rightarrow \infty, q \rightarrow 0$ , il correspond à une croissance inhabituelle des fonctions de corrélations en  $\ln^2(r)$  :

$$\overline{\langle \theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o})^2 \rangle} = \frac{\lambda^2 T^2 (\tilde{y}^*)^2}{2K^2} \ln^2 \frac{r}{a} + \mathcal{O}(\ln r) \quad (4.21)$$

où le rapport devant le  $\ln^2$  est universel au sens du groupe de renormalisation. La détermination de cette fonction de corrélation a fait l'objet d'une récente controverse. A ce calcul de renormalisation, s'opposaient des approches variationnelles avec répliques. L'étude de cette corrélation a également donnée lieu à plusieurs simulations numériques (Batrouni & Hwa 1994, Zeng, Middleton & Shapir 1996, Marinari, Monasson & Ruiz-Lorenzo 1995). Un accord quantitatif acceptable entre ces simulations et les résultats du groupe de renormalisation n'a cependant été possible qu'après que le coefficient du  $\ln^2$  ait été obtenu correctement dans les travaux présentés au chapitre (6) (Carpentier & Le Doussal 1997).

La fonction de corrélation connexe est quant à elle identique à celle de la phase haute température. Par ailleurs la non renormalisation de  $K$  indique également que cette fonction de corrélation prend les mêmes valeurs que dans le cas pur (sans champ magnétique aléatoire et sans vortex!).

*Petite remarque* : dans le calcul de cette fonction de corrélation, nous avons choisi comme ordre particulier des limites de prendre la limite des répliques  $p \rightarrow 0$  avant de prendre celle de grande distance  $l \rightarrow \infty$ . Si nous avions pris l'ordre inverse la fonction de corrélation  $\Gamma^{ab}$  divergerait dans cette phase dû à la divergence de  $\Delta(l)$  :  $\Gamma^{ab} \sim K^{-1} \delta^{ab} - 1/(pKT)$ .

#### 4.1.4 Instabilité de la phase vitreuse vis-à-vis des défauts

Une question naturelle après l'étude qui suit est la stabilité de cette nouvelle phase vitreuse vis-à-vis de la création de défaut topologique dans le modèle. D'après le chapitre 2 nous savons que dans le cas pur ces défaut n'apparaissent qu'au dessus de la température  $T_c = \pi K_R/2$ . Afin d'obtenir une fenêtre entre les deux températures  $T_g < T < T_c$  dans laquelle nous puissions étudier perturbativement le comportement à grande échelle du modèle, nous cherchons, en reportant naïvement le résultat du cas pur ici, à avoir  $T_g = 4\pi K_R/\lambda^2 < T_c = \pi K_R/2$ , c'est-à-dire  $\lambda > 2\sqrt{2}$ . Dans le cas de l'existence d'une phase sans défaut, le diagramme des phases attendu est représenté sur la figure (4.2).

Batrouni G. & Hwa T., (1994). *Phys. Rev. Lett.*, **72**:4133.

Zeng C., Middleton A., & Shapir Y., (1996). *Phys. Rev. Lett.*, **77**:3204.

Marinari E., Monasson R., & Ruiz-Lorenzo J., (1995). *J. Phys. A*, **28**:3975.

Carpentier D. & Le Doussal P., (1997). *Phys. Rev. B*, **55**:12128.



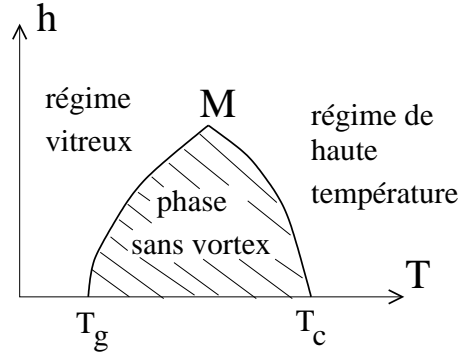


FIG. 4.2 – Diagramme des phases du modèle XY avec champ magnétique aléatoire dans le cas  $\lambda > 2\sqrt{2}$ , obtenu par CARDY et OSTLUND.

Les équations (4A.28) de l'annexe montrent qu'en fait la situation est plus complexe. La valeur propre de la fugacité des vortex est  $(2 - \pi(KT - \Delta)/T)$ , ce qui correspond à une température de pertinence de ces vortex qui dépend de  $\Delta$  (voir le paragraphe 4.2). De plus la présence des vortex empêche maintenant toute divergence de  $\Delta$  : si nous partons d'une situation sans défaut où le flot de renormalisation converge vers la ligne de point fixe précédente,  $\Delta$  augmente et fait donc diminuer la valeur propre de  $y$ , jusqu'à la rendre négative. Les vortex prolifèrent alors et d'après l'équation (4A.28b) font finalement diminuer  $\Delta$ .

La transition a été étudiée en détail par CARDY et OSTLUND (Cardy & Ostlund 1982) dans les cas  $\lambda = 3, 4$ . Cependant des résultats récents invalident une partie de leur étude à basse température, comme nous le verrons dans le chapitre 7. Par ailleurs le cas  $\lambda = 1$  sera traité en détails plus loin dans cette thèse au chapitre 6 lorsque nous considérerons le problème de la fusion d'un film cristallin sur un substrat désordonné.

#### 4.1.5 Conclusion

Ainsi se terminent les rappels sur le travail de CARDY et OSTLUND. Ces travaux, et en particulier la nature singulière de la ligne de points fixes à basse température en l'absence de désordre, ont motivées de nombreuses études que je n'aurai pas le temps de présenter. En particulier une méthode variationnelle avec répliques, présentée au chapitre 5, a été utilisée sur ce modèle (sans défaut). Elle permet également d'obtenir un transition, mais propose une croissance des fonctions de corrélation en  $\ln r$  (avec un coefficient gelé) au lieu du  $\ln^2 r$  précédemment trouvé. Cette différence a en partie été expliquée par une approche de renormalisation sur un modèle à  $N$  composantes, dans lequel le coefficient du  $\ln^2 r$  s'annule dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , limite dans laquelle la méthode variationnelle est supposée s'appliquer (Bauer & Bernard 1996). Un accord qualitatif semble maintenant se dessiner entre ces approches analytiques et les simulations numériques (Batrouni & Hwa 1994, Zeng

Cardy J. & Ostlund S., (1982). *Phys. Rev. B*, **25**:6899–6909.

Bauer M. & Bernard D., (1996). *Europhysics Letters*, **33**:255.

Batrouni G. & Hwa T., (1994). *Phys. Rev. Lett.*, **72**:4133.

Zeng C., Middleton A., & Shapir Y., (1996). *Phys. Rev. Lett.*, **77**:3204.

et al. 1996) (voir à ce sujet le chapitre 6 où une expression correcte pour le coefficient du  $\ln^2$  sera déterminée autour de  $T_g$ ). Finalement ce modèle simple de verre, qui propose un des rares exemples de point fixe perturbatif désordonné, a été utilisé pour proposer une caractérisation sur la statique d'une phase vitreuse: HWA et FISHER ont montré que les fluctuations d'échantillon à échantillon de la susceptibilité de la phase vitreuse par rapport au champ magnétique (dans le contexte du réseau  $1 + 1$  de lignes de flux) étaient très importantes, contrairement aux fluctuations dans la phase à haute température (Hwa & Fisher 1994). L'intensité de ces fluctuations est également reliée à la symétrie statistique que nous avons rencontrée.

## 4.2 Modèle XY avec déphasage aléatoire

Nous allons maintenant nous intéresser à un modèle XY avec uniquement un champ de contrainte aléatoire correspondant au hamiltonien

$$H = \frac{K}{2} \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} (\nabla\theta - \mathbf{a})^2 \quad (4.22)$$

où  $\mathbf{a}$  est une variable aléatoire, indépendante de site à site, et de loi de distribution gaussienne de variance  $\sigma$ . Ce modèle a été étudié par le groupe de renormalisation par RUBINSTEIN, SCHRAIMAN et NELSON: le modèle ci-dessus permet en effet d'étudier des spins XY en présence d'une interaction de Dzyaloshinslii-Moriya aléatoire en négligeant les fluctuations de la norme de la constante de couplage. Le hamiltonien de ce modèle de spins s'écrit

$$H = -K \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} \mathbf{S}_\alpha \cdot \mathbf{S}_\beta - \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle} J'_{\alpha\beta} \epsilon_{ij} S_{\alpha,i} \cdot S_{\beta,j}$$

Le modèle effectif (4.22) que nous obtenons peut également s'écrire sur un réseau de pas  $a$  sous la forme

$$H = \frac{K}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j - a_{ij})$$

Cette formulation a l'avantage de rendre explicite la symétrie  $O(2)$  du modèle. Par ailleurs elle montre que sur le réseau le champ  $\mathbf{A}$  correspond à un déphasage entre spins voisins, aléatoire sur chaque lien, qui provient de l'interaction de Dzyaloshinslii-Moriya. Le modèle dans sa formulation continue peut être étudié de manière identique au modèle désordonné précédent. Son étude est même considérablement plus simple car le champ aléatoire  $\mathbf{a}$ , qui ici est présent dans le modèle initial, correspond au champ aléatoire généré à grande distance par le champ magnétique aléatoire dans la partie précédente, comme l'ont remarqué RUBINSTEIN et ses collaborateurs. Ces derniers proposent une méthode alternative à la méthode utilisée dans la partie précédente, qui n'utilise pas les répliques. Les résultats obtenus par les deux méthodes sont parfaitement identiques. Cette alternative permet de valider a posteriori la méthode des répliques utilisée dans le contexte des techniques de renormalisation de ce chapitre.

### 4.2.1 Équations de renormalisation et diagramme des phases

Comme nous l'avons dit les équations de renormalisation s'obtiennent aisément à partir de celle de CARDY et OSTLUND en l'absence du champ magnétique aléatoire, c'est-à-dire en l'absence des charges  $m_r$ . Il convient de remarquer que le champ  $a$  est proportionnel au champ aléatoire  $\mathbf{A}$  de la partie précédente:  $A = Ka$ , ce qui donne au niveau des variances des distributions  $\Delta = \sigma K^2$ . En imposant un fugacité  $\tilde{y}$  nulle, condition qui est préservée par le groupe de renormalisation (ce qui indique que  $\mathbf{A}$  ne génère pas de champ magnétique aléatoire), nous obtenons donc à partir de (4A.28) les équations de renormalisation suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_l(T/K) &= 4\pi^3 y^2 \\ \partial(\sigma K^2/T^2) &= -8\pi^3 \frac{\sigma K^3}{T^3} y^2 \\ \partial_l y &= \left(2 - \pi \left(\frac{K}{T} - \frac{\sigma K^2}{T^2}\right)\right) y + \mathcal{O}(y^3)\end{aligned}$$

où  $y$  est la fugacité des vortex. Ces équations sont plus commodément écrites en utilisant les variables  $K, \sigma$  et  $y$ :

$$\partial_l(T/K) = 4\pi^3 y^2 \tag{4.24a}$$

$$\partial\sigma = 0 \tag{4.24b}$$

$$\partial_l y = \left(2 - \pi \left(\frac{K}{T} - \frac{\sigma K^2}{T^2}\right)\right) y + \mathcal{O}(y^3) \tag{4.24c}$$

#### Flot de renormalisation et diagramme des phases

La stabilité des phases se déduit comme d'habitude de l'équation de renormalisation de la fugacité des vortex (4.24c). Selon la valeur de la température et du désordre, deux phase peuvent exister : une phase sans défaut, quasi-ordonnée à longue portée, et une phase désordonnée dans laquelle les vortex sont soit induits par les fluctuations thermiques, soit par le désordre.

L'équation (4.24b) nous indique que l'intensité  $\sigma$  du désordre n'est pas renormalisée à l'ordre où nous travaillons. Nous pouvons donc nous concentrer sur les variables  $K$  et  $y$  et traiter  $\sigma$  comme un paramètre. D'après l'équation (4.24c), il existe une valeur critique du désordre  $\sigma_c = \pi/8$  au dessus de laquelle  $\partial_l y > 0$  à toutes les températures. Ainsi pour  $\sigma > \sigma_c$ , les vortex apparaissent toujours dans l'échantillon, induits à haute température par les fluctuations thermiques et à basse température par le désordre (les fluctuations thermiques seules étant insuffisantes pour générer ces défauts d'après le cas pur). Par contre en dessous de cette valeur critique, deux températures fonctions de ce désordre apparaissent :  $T_{\pm}(\sigma) = K_R \sigma^{-1} (1 \pm \sqrt{1 - \sigma/\sigma_c})$ . Entre ces deux températures  $y(l)$  est renormalisé vers  $O$  et les défauts sont donc absents à grande échelle. Ce résultat prédit donc une phase quasi-ordonnée réentrante à basse température. Cette réentrance paraît étonnante et aucune interprétation physique simple ne permet de la comprendre (Rubinstein et al. 1983). Le

---

Rubinstein M., Schraiman B., & Nelson D., (1983). *Phys. Rev. B*, **27**:1800.

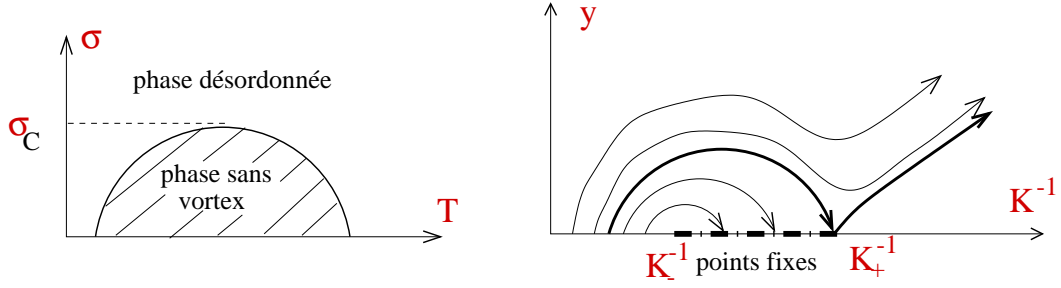


FIG. 4.3 – Flot de renormalisation schématique et diagramme des phase du modèle XY avec déphasage aléatoire, obtenu par RUBINSTEIN et al. Ce diagramme est incorrect comme le montre l'étude du chapitre 7.

diagramme des phases et le flot de renormalisation correspondant sont représentés sur la figure 4.3.

## 4.2.2 Caractéristique des deux phases

Comme dans le cas pur nous obtenons une décroissance algébrique des fonctions de corrélation à deux points dans la phase sans défaut, et exponentielle dans la phase désordonnée. L'analyse du comportement autour du point de transition  $K_+$  qui gouverne les transitions (voir la figure 4.3) est en tout point similaire à l'étude de la transition de KOSTERLITZ-THOULESS dans le cas pur (voir la partie 2.4.2) : cette transition correspond à la transition habituelle de libération des vortex sous l'effet des fluctuations thermiques. En particulier nous trouvons un exposant  $\eta$  de décroissance de la fonctions de corrélation  $\langle \exp i(\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{o})) \rangle$  qui vaut à la transition

$$\eta(\sigma) = \frac{T}{2\pi K} + \frac{\sigma}{2\pi} \rightarrow \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_c}}}{8} + \frac{\sigma}{2\pi}$$

Dans la phase désordonnée, l'exposant avec lequel la longueur de corrélation diverge est le même que pour le modèle XY pur :

$$\xi \sim e^{\frac{ct_c}{\sqrt{|T-T_c|}}}$$

Voilà pour ce modèle.

## 4.3 Conclusion

Nous avons ainsi rencontré dans ce chapitre deux exemples de modèles XY désordonnés. Ces deux modèles peuvent être étudiés à l'aide d'une approche de renormalisation initiée par le travail de CARDY et OSLTUND. Les travaux que nous allons maintenant présenter trouvent leur source dans cette approche. En particulier nous allons étendre les travaux précédents aux dislocations bidimensionnelles, objets vectoriels au lieu des vortex XY scalaires. Comme nous allons le voir cette extension est loin d'être triviale : l'approche de

(Cardy & Ostlund 1982) ne peut plus être utilisée (voir l'Annexe B du chapitre 6). Par ailleurs une extension vers la dimension trois sera étudiée au chapitre 5.

Finalement notre étude au chapitre 7 nous indiquera que les approches de renormalisation utilisées dans ce chapitre cessent d'être valables à basse température : une nouvelle technique de renormalisation doit alors être développée.

## Annexe A Équations de renormalisation de CARDY-OSTLUND

Les équations de renormalisation pour un gaz de charges scalaires électriques et magnétiques avec interaction logarithmique ont été dérivées dans l'Annexe B. Il est possible d'étendre le travail de cette annexe à un gaz de charges vectorielles à composantes scalaires. Dans ce cas il faut systématiquement remplacer les termes  $n^2 K$  par un produit scalaire  $\sum_{a,b} K^{ab} n_b$  (et de même pour les charges électriques). Le résultat s'obtient également en particulierisant l'étude de l'Annexe B du chapitre 6. Dans cette annexe un gaz de Coulomb plus général est considéré (où les composantes des charges appartiennent à un réseau quelconque). La restriction des résultats de cette annexe au gaz de Coulomb que nous considérons ici nous donne les équations de renormalisation suivantes pour le modèle (4.9)

$$\partial_l (K^{-1})^{ab} = 2\pi^2 (K^{-1})^{ac} \left( \frac{2\pi}{T} K^{bd} \sum_{n^a} n^c n^d Y^2[\mathbf{n}, 0] - \frac{T\lambda^2}{2\pi} (K^{-1})^{bd} \sum_{\mathbf{m}} m^c m^d Y^2[0, \mathbf{m}] \right) \quad (4A.25a)$$

$$\partial_l Y[\mathbf{n}, 0] = \left( 2 - \frac{\pi}{T} n^a \cdot K^{ab} \cdot n^b \right) Y[\mathbf{n}, 0] + \pi \sum_{\mathbf{n}' \neq 0} Y[\mathbf{n}', 0] Y[\mathbf{n} - \mathbf{n}', 0] \quad (4A.25b)$$

$$\partial_l Y[0, \mathbf{m}] = \left( 2 - \frac{T\lambda^2}{4\pi} m^a \cdot K_{ab}^{-1} \cdot m^b \right) Y[0, \mathbf{m}] + \pi \sum_{\mathbf{m}' \neq 0} Y[0, \mathbf{m}'] Y[0, \mathbf{m} - \mathbf{m}'] \quad (4A.25c)$$

Les équations (4A.25b, 4A.25c) nous indiquent qu'*a priori* les charges avec le plus petit nombre de composantes non nulles et de plus petite valeur sont les plus pertinentes. Nous allons donc nous restreindre aux charges  $\mathbf{n}$  avec une seule composante non nulle valant  $\pm 1$  et aux charges  $\mathbf{m}$  possédant deux composantes opposées de norme 1. La structure de ces dernières charges est imposée par la condition (4.11). Avec cette restriction ces équations se réécrivent

$$\partial_l (K^{-1})^{ab} = 2\pi^2 (K^{-1})^{ac} \left( \frac{2\pi}{T} K^{bd} \sum_{n^a} n^c n^d y^2 - \frac{T\lambda^2}{2\pi} (K^{-1})^{bd} \sum_{\mathbf{m}} m^c m^d \tilde{y}^2 \right) \quad (4A.26a)$$

$$\partial_l y = \left( 2 - \frac{\pi}{T} \left( K - \frac{\Delta}{T} \right) \right) y + \mathcal{O}(y^3) \quad (4A.26b)$$

$$\partial_l \tilde{y} = \left( 2 - \frac{T\lambda^2}{2\pi K} \right) \tilde{y}^2 + (p-2)\pi \tilde{y}^2 + \mathcal{O}(\tilde{y}^3) \quad (4A.26c)$$

Il nous reste maintenant à expliciter les deux sommes de l'équation (4A.26a). Pour cela nous utilisons la notation  $\delta_{(\alpha;\beta)}^a = \delta_\alpha^a - \delta_\beta^a$  pour les charges  $\mathbf{m}$  les plus pertinentes. Les deux sommes donnent alors

$$\sum_{\mathbf{n}} n^c n^d = \sum_{\alpha=1}^p \delta^{c,\alpha} \delta^{d,\alpha} = \delta^{cd} \quad \sum_{\mathbf{m}} m^c m^d = \sum_{\alpha \neq \beta} \delta_{(\alpha;\beta)}^c \delta_{(\alpha;\beta)}^d = 2(n\delta^{cd} - 1)$$

En utilisant l'expression de l'inverse de  $K$  :  $K_{ab}^{-1} = K^{-1}\delta^{ab} + \Delta/(K(KT - p\Delta))$  nous obtenons les équations de renormalisation finales :

$$\partial_l K^{-1} = 2\pi^2 \left( \frac{2\pi}{T} y^2 - \frac{T\lambda^2}{2\pi} \frac{2p}{K^2} \tilde{y}^2 \right) \quad (4A.27a)$$

$$\partial \frac{\Delta}{K(KT - p\Delta)} = +2\pi^2 \frac{T\lambda^2}{2\pi} \frac{2}{K^2} \tilde{y}^2 \quad (4A.27b)$$

$$\partial_l y = \left( 2 - \frac{\pi}{T} \left( K - \frac{\Delta}{T} \right) \right) y + \mathcal{O}(y^3) \quad (4A.27c)$$

$$\partial_l \tilde{y} = \left( 2 - \frac{T\lambda^2}{2\pi K} \right) \tilde{y}^2 + (p-2)\pi \tilde{y}^2 + \mathcal{O}(\tilde{y}^3) \quad (4A.27d)$$

La limite  $p \rightarrow 0$  de ces équations donne le résultat final

$$\partial_l (TK^{-1}) = 4\pi^3 y^2 \quad (4A.28a)$$

$$\partial (T^{-2}\Delta) = 2\pi p^2 \tilde{y}^2 - 8\pi^3 \frac{\Delta K}{T^3} y^2 \quad (4A.28b)$$

$$\partial_l y = \left( 2 - \pi \left( \frac{K}{T} - \frac{\Delta}{T^2} \right) \right) y + \mathcal{O}(y^3) \quad (4A.28c)$$

$$\partial_l \tilde{y} = \left( 2 - \frac{T\lambda^2}{2\pi K} \right) \tilde{y}^2 - 2\pi \tilde{y}^2 + \mathcal{O}(\tilde{y}^3) \quad (4A.28d)$$

Deuxième partie

Défauts topologiques et désordre

---





## Introduction de la deuxième partie

Dans cette deuxième partie nous allons donc nous intéresser à l'interaction entre ces défauts topologiques et des impuretés dans le système élastique que nous considérons. Notre motivation essentielle provient des réseaux de vortex que nous avons évoqués au chapitre 1. Les impuretés du supraconducteur agissent sur ce réseau comme un substrat désordonné qui piège collectivement les vortex magnétiques. L'intérêt d'une étude des défauts topologiques en présence de désordre dépasse cependant de loin ce cadre.

Nous venons de voir dans la partie introductive précédente comme certaines transitions étaient reliées à l'apparition des défauts topologiques. Il existe différentes réalisations expérimentales de systèmes bidimensionnels dans lequel une transition de ce type (KT) semble observée. Mais naturellement, dans toutes ces réalisations le système bidimensionnel est réalisé en déposition sur un substrat. Ainsi le cristal d'électrons est déposé à la surface de l'hélium ou à une interface entre deux semi-conducteurs. La comparaison entre ces différentes expériences et les théories de type KOSTERLITZ-THOULESS impose donc de considérer l'effet du substrat sur le comportement du système. En particulier les irrégularités de ce substrat agissent comme un désordre d'accrochage et peuvent *a priori* modifier le comportement du réseau élastique. Le problème général qui nous intéresse est donc celui du comportement à grandes distances d'un réseau en présence de désordre.

Les déformations de ce réseau peuvent être décrites par deux composantes différentes : les déformations élastiques, et les déformations plastiques ici décrites à l'aide des défauts topologiques. En l'absence de désordre ces déformations sont induites par les fluctuations thermiques. La réponse du modèle résulte de la compétition dans le réseau entre les forces de rappel élastiques et les fluctuations thermiques. Lorsque les secondes l'emportent, les défauts topologiques apparaissent. En présence de désordre, le comportement est plus complexe, puisque nous avons maintenant trois types de forces en présence. Ainsi les défauts peuvent maintenant apparaître en réponse aux fluctuations thermiques ou à l'accrochage du réseau par le désordre. Ce problème apparaît donc bien plus complexe que ceux traités dans la partie précédente.

### Rôle de la dimension

La dimension du réseau élastique joue ici un rôle particulier : en effet cette dimension détermine la nature des défauts topologiques à décrire. Pour un réseau d'ABRIKOSOV en dimension  $2 + 1$ , ces défauts topologiques (dislocations) sont des lignes, qui interagissent de façon non locale. Il n'existe donc pas pour l'instant d'outils analytiques permettant de décrire leur comportement. La situation est identique en dimension  $3+0$  : il n'existe ainsi pas de théorie précise de la fusion d'un cristal tridimensionnel. La ligne de transition peut dans ce cas être décrite par un critère de LINDEMANN heuristique qui ne permet pas de caractériser cette transition.

Dans notre étude de l'interaction entre désordre et défauts topologiques, le choix de la dimension est donc crucial. Une idée naturelle consiste à partir des situations qui possèdent une description analytique dans le cas pur. Ces situations ont été décrites dans la première partie de cette thèse : elles correspondent soit au réseau en dimension  $2+0$ , soit en dimension  $1+1$ . De ces deux géométries seule la première admet des défauts topologiques. Nous allons étudier en détails la réponse d'un tel réseau bidimensionnel en présence d'un sub-

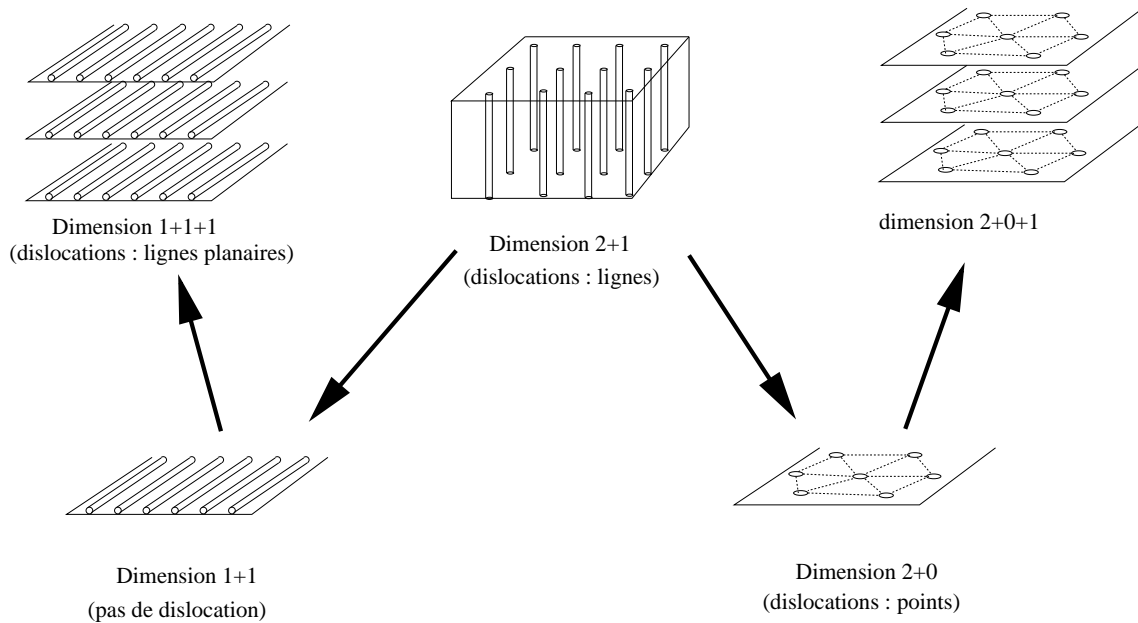


FIG. 4.4 – Schéma des différentes réductions de la dimension dans l'étude théorique du comportement d'un réseau élastique de vortex.

strat désordonné au chapitre 6. Nous montrerons ainsi que la transition thermodynamique de fusion du cristal disparaît en présence de ce substrat désordonné.

Une autre direction consiste à partir du réseau de lignes 1+1, décrit par un modèle de Sine-Gordon aléatoire (chapitre 4). Dans cette géométrie, les lignes ne pouvant pas se terminer dans le plan, aucun défaut topologique n'est autorisé. Cependant nous pouvons étudier différents plans de lignes couplés élastiquement les uns aux autres. De grandes déformations relatives sont alors autorisées entre les plans, ce qui correspond à la présence de boucles de dislocations parallèles aux plans des lignes, et situées entre deux plans consécutifs. Une extension des techniques de renormalisation de la partie précédente, et l'utilisation d'une méthode variationnelle avec répliques permettent alors d'étudier analytiquement le comportement de ce réseau particulier de lignes de flux. Nous verrons que le désordre induit une transition de découplage à basse température, où les dislocations prolifèrent entre les plans. Cette étude fournit ainsi une description analytique du premier exemple connu de transition dans un réseau d'ABRIKOSOV tridimensionnel entre une phase de verre de BRAGG et une phase désordonnée (voir le chapitre 1).

Ces deux études en dimensions réduites permettent de comprendre quelques aspects essentiels de l'interaction entre défauts et désordre. Une physique nouvelle apparaît lorsque le désordre prédomine sur les fluctuations thermiques et piège les défauts topologiques. À basse température le système devient alors extrêmement inhomogène. Nous nous intéresserons à ce problème au chapitre 7. En particulier nous montrerons qu'il est indispensable de décrire correctement ces inhomogénéités pour obtenir le comportement à grande distance du système élastique. Le problème théorique de cette description est complexe. Nous devons en effet développer un nouvel outil analytique car aucune des méthodes existantes ne permet la description d'un tel système inhomogène en dimension deux (ou supérieure).

Nous présenterons dans ce chapitre une nouvelle méthode de renormalisation fonction-

---

nelle qui permet d'étudier le comportement à basse température des défauts topologiques, en présence de piégeage. Cette méthode nous amènera à découvrir des liens avec un autre domaine de la physique : celui des phénomènes non linéaires et de la propagation de fronts; ainsi que des connexions vers des modèles exactement solubles.



## Chapitre 5

# Plans couplés de vortex en présence de désordre

### 5.1 Introduction

Ce chapitre comprend une première étude des défauts topologiques dans un réseau élastique en présence de désordre et se concentre sur un réseau de lignes situées dans des plans parallèles les uns aux autres. Cette géométrie est assez particulière et correspond, dans le contexte des supraconducteurs anisotropes, à un champ magnétique appliqué parallèlement au plan (ab) de l'échantillon. Dans cette situation le champ pénètre le supraconducteur sous la forme de vortex Josephson localisés entre les plans conducteurs  $CuO_2$ . Une petite déviation du champ par rapport à l'alignement avec ces plans ou des fluctuations thermiques importantes peuvent en principe permettre des sauts de vortex d'un plan à l'autre. Dans les situations habituelles, ces sauts se produisent à des échelles très grandes et peuvent donc être négligés en première approximation. Dans ce cas les déplacements des vortex se font dans les plans.

#### Motivation

L'intérêt du modèle, et de la géométrie, que nous allons présenter est qu'il permet en principe d'étudier un réseau *tridimensionnel* de lignes avec des techniques analytiques. Il constitue donc le premier cas (et le seul pour l'instant) d'un réseau tridimensionnel de lignes de flux dans lequel nous pouvons étudier précisément la compétition entre les fluctuations thermiques, l'élasticité et l'accrochage collectif du réseau. En particulier nous pouvons sur ce modèle étudier indirectement la création *par le désordre* de boucles de dislocations en dimension 3. Dans cette géométrie, ces dislocations sont situées entre les plans de vortex (figure 5.1). Elles possèdent une composante coin dans la direction du champ magnétique (des lignes de flux), et une composante vis dans la direction orthogonale. Dans le cadre de ce modèle, une prolifération de ces boucles de dislocations correspond à un découplage des plans. Ainsi de l'étude du couplage effectif entre les plans de vortex nous pouvons déduire la présence ou non de boucles de dislocation induites soit par les fluctuations thermiques, soit (ce qui est beaucoup plus intéressant pour nous) par le désordre.

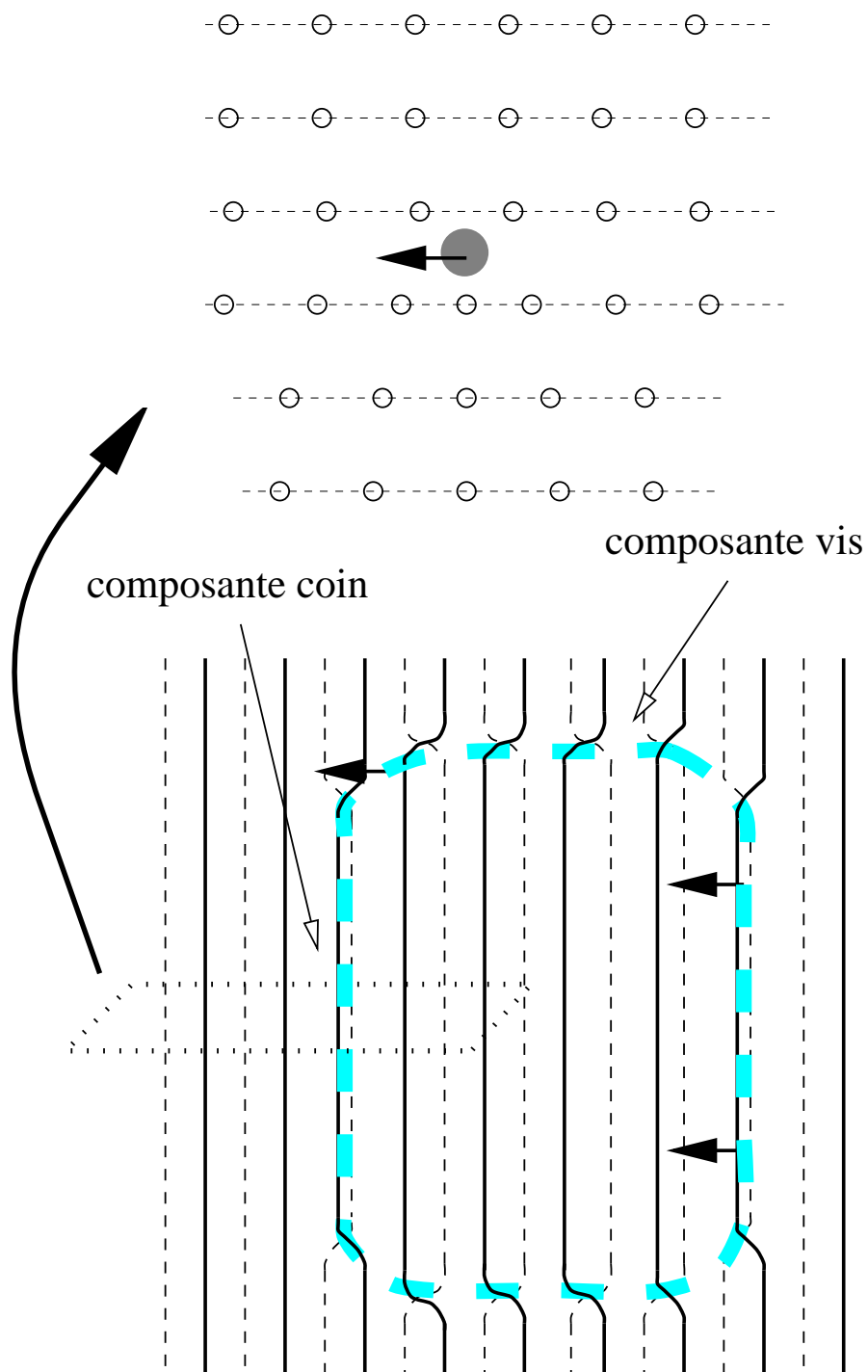


FIG. 5.1 – Représentation en coupe et vue de dessus d'une dislocation planaire située entre deux plans de vortex.

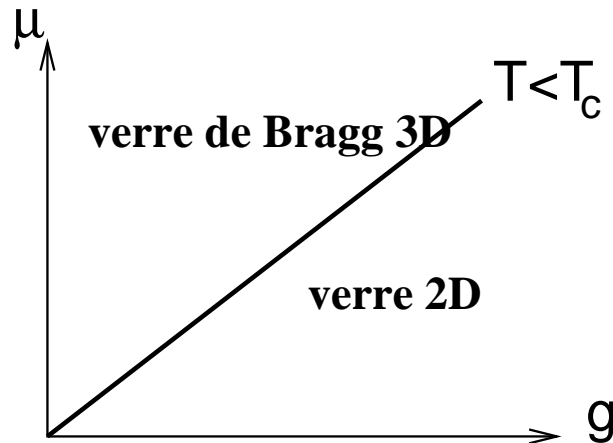


FIG. 5.2 – Diagramme des phases obtenus par les méthodes de ce chapitre.  $g$  est l'intensité du désordre et  $\mu$  est le couplage entre plans.

## Résultats

Par deux méthodes complètement différentes, nous allons montrer dans ce chapitre qu'il existe pour ce modèle (i) une transition de découplage thermique à une température élevée  $T_c$  (ii) pour toute température  $T < T_c$  en dessous de  $T_c$ : un découplage induit par le désordre survient le long d'une ligne de transition qui est représentée sur le diagramme 5.2 dans les variables intensité du désordre ( $g$ )/ couplage entre plans ( $\mu$ ). En particulier pour une valeur donnée du couplage entre plans, des dislocations apparaissent entre les plans, générées par l'accrochage collectif des vortex, pour une valeur critique de désordre  $g = g_c(\mu)$ . La constante de couplage  $\mu$  peut être interprétée comme un module effectif de cisaillement entre plans  $c_{66}$ .

Ce travail propose donc le premier exemple d'une transition induite par le désordre depuis une phase quasi-ordonnée de verre de BRAGG tridimensionnel vers une phase amorphe dans laquelle les boucles de dislocations prolifèrent. Cette transition est l'analogue dans cette géométrie de celle dont il a été question dans le chapitre 1 d'introduction, dans un réseau d'ABRIKOSOV tridimensionnel isotrope. Cette transition (dans la géométrie de plans couplés) a été obtenue simultanément par un autre groupe qui a utilisée des méthodes différentes de celles présentées dans ce chapitre (Kierfeld et al. 1997).

Le reste du chapitre va consister en une étude assez technique du comportement du modèle décrivant cette géométrie. En plus d'une étude par le groupe de renormalisation, nous allons étudier ce modèle à l'aide d'une méthode variationnelle par rapport à des hamiltoniens gaussiens avec brisure de symétrie des répliques (GVM). Nous montrerons comment cette méthode permet également d'étudier le modèle de plans couplés, en parallèle avec le groupe de renormalisation, et de traiter de façon indirecte l'interaction entre défauts topologiques du réseau de vortex en plans couplés et le désordre.

Les résultats ont été présentés dans l'article inclus en annexe.



## 5.2 Le modèle

Dans cette première partie nous allons considérer un réseau de vortex parallèles les uns aux autres dans un plan, avant de passer à l'étude de tels plans couplés dans la suite du chapitre. Cette première étude va nous permettre d'illustrer les méthodes employées par la suite sur un exemple plus simple et de définir les deux phases du réseau en présence de défauts ponctuels.

### 5.2.1 Le modèle à un plan de vortex

Nous considérons donc un ensemble de lignes qui, à température nulle et en l'absence de désordre sont parallèles les unes aux autres selon la direction  $z$  et espacées d'une distance  $a$  (figure 5.3). Une ligne de flux ne pouvant pas se terminer dans l'échantillon, les dislocations dans chaque plan sont exclues (figure 5.3). Il est donc possible de repérer ces lignes par un indice entier  $n \in \mathbb{Z}$ . La position de la ligne  $n$  dans le cristal parfait est choisie *arbitrairement* comme étant  $x = R_n = n.a$ , ce qui définit le champ de déplacement unidimensionnel dans le réseau déformé :  $x = R_n + u_n$ . Il est impossible de définir la position  $R_n$  à partir d'une configuration physique du réseau (en présence de fluctuations thermiques). Ainsi il est possible de translater uniformément toutes ces positions  $R_n$  d'une constante arbitraire  $r_0$ , ce qui revient à modifier uniformément le champ de déformation  $u_n \rightarrow u_n - r_0$ . Cette remarque nous rappelle que le champ de déformation  $u_n$  (une fois la limite du continu prise), ne peut apparaître dans la définition de l'énergie du système que sous la forme de grandeur invariante par translation uniforme telles que les gradients de  $u$ .

Les fluctuations des lignes autour du réseau parfait peuvent être décrite comme des fluctuations élastiques tant que les déformations relatives entre deux points voisins sont faibles.

Nous considérons le cas où ces lignes interagissent avec un désordre corrélé uniquement aux courtes distances, que par simplicité nous représentons par un désordre complètement décorréolé entre deux sites. Ce désordre  $V(x, z)$  se couple directement à la densité des lignes  $\rho(x, z) = \sum_n \delta(x - (R_n + u_n(z)))$ .

Dans le cas de lignes de flux réparties sous la forme de plans parallèles, les déplacements ne se font qu'à l'intérieur de ces plans. Nous introduisons donc une série de champs unidimensionnels de déplacement  $u_\alpha = a\phi_\alpha(\mathbf{r})/2\pi$  où  $\alpha = 1, \dots, N$  indexe le plan et  $a$  est le pas du réseau bidimensionnel. Chaque plan peut être ainsi modélisé par un modèle XY en champ magnétique dans lequel les défauts topologiques sont exclus. Le couplage entre les densités de vortex de deux plans voisins  $\alpha$  et  $\alpha+1$  induit un couplage entre les champs de déplacement dans ces deux plans. MIKHEEV et KOLOMEISKY ont montré qu'à faible champ ce couplage correspondait à un terme additionnel dans le hamiltonien :  $\cos(\phi_\alpha(x) - \phi_{\alpha+1}(x))$  (Mikheev & Kolomeisky 1991). Nous obtenons ainsi un système de  $N$  modèles XY désordonnés, couplés

---

Mikheev L. & Kolomeisky E., (1991). *Phys. Rev. B*, **43**:10431–10435.

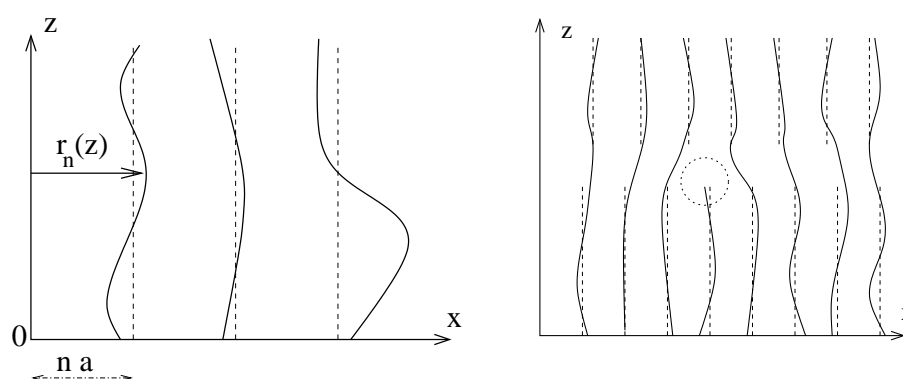


FIG. 5.3 – Représentation schématique du réseau de lignes (à gauche) et dislocation (ici exclue) dans un tel réseau (à droite). Le réseau de lignes est dirigé selon l'axe  $z$ . Les lignes ne pouvant pas se terminer dans le plan, nous pouvons les repérer par un indice entier  $n$ , leur position moyenne correspondant à  $x = n.a$ . Les fluctuations autour de cette position sont paramétrées par le champ unidimensionnel  $r_n(z) = n.a + u_n(z)$ .

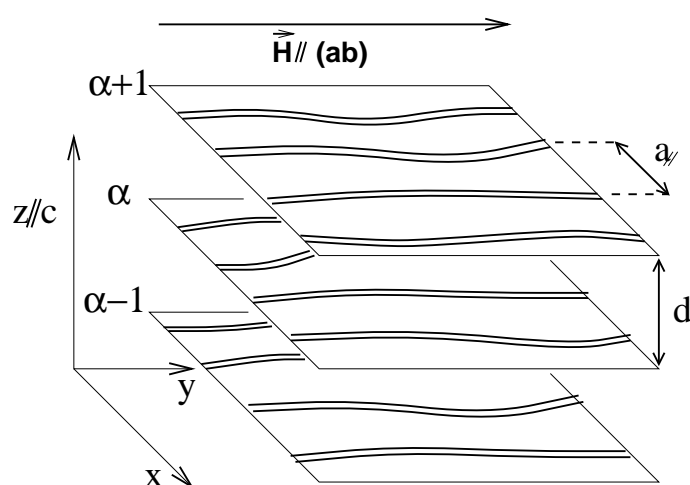


FIG. 5.4 – Représentation schématique de la géométrie du modèle. Les plans de lignes de flux, orthogonaux à l'axe  $z$  sont repérés par un indice grec. La champ magnétique est parallèle à l'axe  $y$ .

les uns aux autres. Le hamiltonien obtenu s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{H}{T} &= \int d^2\mathbf{r} \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} K_{\alpha\beta}^{-1} \nabla\phi_\alpha(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi_\beta(\mathbf{r}) - \mu_{\alpha\beta} \cos(\phi_\alpha(\mathbf{r}) - \phi_\beta(\mathbf{r})) \\ &\quad - \sum_{\alpha} \eta_\alpha(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi_\alpha(\mathbf{r}) - \zeta_\alpha(\mathbf{r}) \cdot e^{i\phi_\alpha(\mathbf{r})} \end{aligned} \quad (5.1)$$

La distribution du désordre sera choisie gaussienne, caractérisée par les corrélateurs isotropes suivants :

$$\overline{\eta_\alpha^i(\mathbf{r})\eta_\beta^j(\mathbf{r}')^j} = \Delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.2)$$

$$\overline{\zeta_\alpha^i(\mathbf{r})\zeta_\beta^j(\mathbf{r}')^j} = 2g_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.3)$$

Comme nous venons de le voir, le modèle initial est défini par un nombre restreint de paramètres :

$$K_{\alpha\beta}^{-1} = K_c^{-1}\delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \mu_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{2}(\delta_{\alpha+1,\beta} + \delta_{\alpha-1,\beta}) \quad ; \quad g_{\alpha\beta} = g\delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \Delta_{\alpha\beta} = 0 \quad (5.4)$$

Il convient en fait de tenir compte des termes supplémentaires dans le hamiltonien (5.2) car ils seront générés par renormalisation. Nous devons ainsi les inclure dans la hamiltonien dès le début de notre analyse. En particulier, des couplages  $\mu_{\alpha\beta}$  entre plans distants, une constante de raideur non diagonale, c'est-à-dire dans ce contexte un couplage de grande longueur d'onde entre plans de vortex, ainsi qu'un désordre de grande longueur d'onde d'intensité  $\Delta$  apparaîtront dans ce modèle. L'écriture du hamiltonien (5.2) contient ainsi tous les opérateurs pertinents autorisés par la symétrie du modèle.

Rappelons que dans le modèle ci-dessus, deux composantes différentes du désordre interviennent : un terme provenant des composantes de Fourier de modes proches du premier vecteur du réseau réciproque planaire  $q \sim 2\pi/a$  dont l'intensité est donnée par  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , et une contrainte aléatoire locale correspondant aux modes  $q \sim 0$ , et dont l'intensité est  $\Delta_{\alpha\alpha}$ . Cette décomposition sera décrite en détails dans le chapitre suivant. En plus de ce désordre déjà présent dans l'étude d'un seul modèle XY désordonné (chapitre 4), nous devons également tenir compte ici de la possibilité d'un couplage entre les fluctuations de différents plans *via* ce désordre. Cette possibilité est contenue dans les matrices de corrélation des deux types de désordre  $\Delta_{\alpha\beta}$  et  $g_{\alpha\beta}$ . Dans toute notre étude nous ne tiendrons compte que des premières harmoniques du désordre (voir la décomposition présentée au chapitre suivant), car il s'agit des opérateurs les plus pertinents du point de vue du groupe de renormalisation.

La moyenne sur le désordre de l'énergie libre est effectuée en utilisant la méthode des répliques. Après avoir introduit  $m$  champs de déplacements  $u^a(\mathbf{r})$ , nous pouvons moyenner sur les deux types de désordre, ce qui induit un couplage effectif entre répliques différentes :

$$\frac{H_{rep}}{T} = \int d^2\mathbf{r} \sum_{ab,\alpha\beta} \frac{1}{2} [K^{-1}]_{\alpha\beta}^{ab} \nabla\phi_\alpha^a(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi_\beta^b(\mathbf{r}) - \mathcal{M}_{\alpha\beta}^{ab} \cos(\phi_\alpha^a(\mathbf{r}) - \phi_\beta^b(\mathbf{r})) \quad (5.5)$$

La matrice de couplage comporte maintenant un terme non diagonal induit par le désordre :

$$[K^{-1}]_{\alpha\beta}^{ab} = K_{\alpha\beta}^{-1}\delta_{ab} - \Delta_{\alpha\beta}$$

De même les couplages en cosinus entre champs de déplacement tiennent compte à la fois des couplages entre densités de vortex et du désordre de petite longueur d'onde  $q \sim 2\pi/a$ :

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^{ab} = \mu_{\alpha\beta}\delta_{ab} + g_{\alpha\beta}$$

Comme nous l'avons déjà dit le hamiltonien initial comporte bien sûr un nombre réduit de constantes de couplage indépendantes. Ainsi les constantes de couplage du hamiltonien répliqué correspondant au modèle (5.4)) s'écrivent :

$$[K^{-1}]_{\alpha\beta}^{ab} = \frac{1}{K}\delta_{\alpha,\beta}\delta^{a,b} \quad \mathcal{M}_{\alpha\beta}^{ab} = \frac{\mu}{2}(\delta_{\alpha+1,\beta} + \delta_{\alpha-1,\beta})\delta^{a,b} - g\delta_{\alpha,\beta} \quad (5.6)$$

Nous pouvons maintenant utiliser les techniques que nous avons présentées au chapitre 2 pour renormaliser ces modèles XY couplés.

### 5.3 Analyse par le groupe de renormalisation

Dans cette partie, nous allons dériver les équations de renormalisation décrivant le comportement à grande distance du modèle (5.5). Cette analyse de renormalisation utilisera une formulation du modèle en terme de gaz de Coulomb qui étend le travail présenté dans l'annexe du chapitre 2. Les équations de renormalisation peuvent également être dérivées d'après le modèle fermionique associé, chaque ligne de flux correspondant à la ligne d'univers d'un fermion.

#### 5.3.1 Etude de renormalisation *via* le groupe de renormalisation

Dans tout ce chapitre, nous utiliserons la notation  $i = (a, \alpha)$  pour l'indice couplé de plan/replique: l'indice grec repère le plan de vortex alors que l'indice latin  $a$  correspond à l'indice de réplique. Le hamiltonien répliqué ci-dessus se reformule alors avec ce nouvel indice :

$$\frac{H}{T} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} [K^{-1}]_{ij} \nabla\phi_i(\mathbf{r})\nabla\phi_j(\mathbf{r}) - \mathcal{M}_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j)(\mathbf{r}) \quad (5.7)$$

L'idée de la méthode est de dériver des équations de renormalisation pour les matrices  $g_{ij}$  et  $M_{ij}$  quelconques puis de particulariser ces équations à notre modèle particulier. Nous obtiendrons ainsi la renormalisation des opérateurs pertinents, y compris ceux qui ne sont pas inclus dans le modèle initial, mais qui sont autorisés par cette paramétrisation générale. Dans tous les modèles XY précédents, les défauts topologiques (vortex) sont exclus par construction: ils correspondraient à une ligne de flux (vortex magnétique) se terminant dans l'échantillon, ce qui est exclu énergétiquement (voir la figure précédente). Nous pouvons donc étendre dans chaque plan le domaine de définition de  $\phi_\alpha^a \equiv \phi_i$  à  $] - \infty, +\infty[$ . Le modèle qui résulte de cette remarque est un modèle de Sine-Gordon étendu avec un champ  $\phi_i$  vectoriel, et une perturbation  $\cos(\phi_i - \phi_j)$  d'intensité  $\mathcal{M}_{ij}$ . Par analogie avec l'étude du modèle à une composante, notre approche de renormalisation sera donc perturbative en toutes les composantes de ce couplage  $\mathcal{M}_{ij}$  et de l'écart à la transition donné par l'écart des coefficients de la matrice de couplage à sa valeur critique:  $K_{ij}^{-1} - \frac{1}{4\pi}\delta_{ij}$ . Le schéma est alors

parfaitement analogue à celui de KOSTERLITZ sur le modèle XY (Nienhuis 1987, Kosterlitz 1974). Nous allons dans un premier temps obtenir une formulation en termes de gaz de Coulomb vectoriel en utilisant une approximation de VILLAIN des couplages en cosinus. Autour de la ligne de points fixes gaussiens nous ne retiendrons que les charges les plus pertinentes, c'est-à-dire celles de plus petite norme. Après avoir obtenu une expression pour la matrice de couplage renormalisée  $(K_{ij}^R)^{-1}$ , nous éliminerons progressivement les degrés de liberté des petites échelles en incrémentant le cut-off  $a$  qui correspond au diamètre des charges du gaz de Coulomb. La forme de l'expression de la matrice renormalisée  $K^R$  pourra être laissée invariante par cette procédure en définissant des constantes de couplage  $K_{ij}(l)$  et  $\mathcal{M}_{ij}(l)$  dépendant de l'échelle considérée. Ces définitions peuvent alors se traduire sous forme d'équations de renormalisation.

Commençons donc par utiliser l'approximation de VILLAIN (déjà rencontrée au chapitre 2) sur les couplages entre champs de déplacements :

$$e^{\mathcal{M}_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j)} \simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{2\mathcal{M}_{ij} \cos(\phi_i + \theta) \cos(\phi_j + \theta)} \simeq \sum_{[n], \sum_i n_i = 0} e^{i \sum_i n_i \phi_i + \ln \mathcal{M}_{ij} n_i^2 n_j^2}$$

Comme d'habitude, cette approximation revient à remplacer une interaction non linéaire par un couplage linéaire avec des charges fictives introduites en chaque site  $\mathbf{r}$ . Dans le modèle ci-dessus, les charges  $n_i(\mathbf{r})$  introduites sont vectorielles : elles ont plusieurs composantes de répliques, et une fugacité dépendant de la matrice  $\mathcal{M}_{ij}$ .

En moyennant sur la phase aléatoire  $\theta$ , nous induisons une contrainte locale sur la structure de ces charges (voir l'étude du chapitre 4):

$$\sum_i n_i(\mathbf{r}) = 0$$

Les charges de plus petites normes qui satisfont cette condition ont ainsi seulement deux composantes non nulles de signes opposés et de norme 1 :  $n^{i_0} = -n^{i_1} = +1$ . A ce stade de la transformation, le hamiltonien s'écrit :

$$\frac{1}{T} \tilde{H} = \int_{\mathbf{r}} (-K_{ij}^{-1} \nabla \phi_i(\mathbf{r}) \nabla \phi_j(\mathbf{r}) + i n_i(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}) + \ln \mathcal{M}_{ij} n_i^2(\mathbf{r}) n_j^2(\mathbf{r})) \quad (5.8)$$

En utilisant une méthode similaire à celle employée par NELSON (Nelson 1983), nous allons renormaliser le modèle correspondant à ce hamiltonien en considérant la fonction de corrélation à deux points  $\langle \phi_i(\mathbf{q}) \phi_j(-\mathbf{q}) \rangle$  à partir de laquelle il est possible de définir naturellement la matrice de couplage renormalisée (voir la discussion de l'hélicité effective dans la chapitre 2) :

$$(K_R)_{ij} = \lim_{q \rightarrow 0} q^2 \langle \phi_i(\mathbf{q}) \phi_j(-\mathbf{q}) \rangle_{\tilde{H}} = K_{ij} - q^{-2} K_{il} K_{jk} \langle n_k(\mathbf{q}) n_l(-\mathbf{q}) \rangle_{H_{c_0}} \quad (5.9)$$

---

Nienhuis B., (1987). In Domb C. & Lebowitz J., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapitre vol. 11. Academic Press (London).

Kosterlitz J., (1974). *J. Phys. C*, **7**:1046.

Nelson D., (1983). In Domb C. & Lebowitz C., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapitre vol. 7, page 165. Academic Press (London).

où dans la dernière fonction de corrélation,  $H_{cg}$  correspond au hamiltonien du gaz de Coulomb obtenu en effectuant dans la fonction de partition répliquée l'intégrale gaussienne sur le champ de déplacement répliqué  $\phi_i$  :

$$H_{cg}[n] = \frac{1}{2} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geq a} \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \frac{d^2\mathbf{r}'}{a^2} K_{ij} n_i(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') n_j(\mathbf{r}') \quad (5.10)$$

Comme précédemment, l'interaction  $G(\mathbf{r})$  est donnée par le potentiel coulombien bidimensionnel, régularisé aux petites distances par un cut-off  $a$  :  $G(\mathbf{r}) \simeq -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est une constante qui dépend de la régularisation choisie : voir à ce sujet l'annexe A de (Carpentier & Le Doussal 1997). En reportant cette définition du gaz de Coulomb dans l'expression de la matrice renormalisée  $K_R$ , nous obtenons la formule utile suivante :

$$(K_R)_{ij} = K_{ij} + \frac{\pi}{2} K_{ik} K_{jl} \int_{r \geq a} \frac{d^2\mathbf{r}}{2\pi a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \langle n_k(\mathbf{0}) n_l(\mathbf{r}) \rangle \quad (5.11)$$

Nous pouvons maintenant obtenir un développement perturbatif (formel) de cette matrice renormalisée en développant la fonction de corrélation du gaz de Coulomb  $\langle n_k(\mathbf{0}) n_l(\mathbf{r}) \rangle$  en puissance de la fugacité des charges, c'est-à-dire en puissance de la constante de couplage  $\mathcal{M}$ . Pour cela nous nous restreignons aux charges de plus petite norme qui correspondent aux opérateurs les plus pertinents et qui, comme nous venons de le voir, correspondent aux charges à deux composantes  $\pm$  opposées :  $n_i(\mathbf{r}) = \delta_{i_0}^i - \delta_{i_1}^i \equiv \delta_{i_0; i_1}^i$ .

Une fois ce développement effectué, nous pouvons appliquer notre procédure d'élimination des petites échelles : nous incrémentons la cut-off  $a \rightarrow \tilde{a} = ae^{dl}$  tout en laissant le développement de (5.11) invariant, ce qui se fait bien sûr en définissant des matrices dépendants de l'échelle. Les degrés de liberté de petite échelle sont de deux types : ils correspondent dans le gaz de Coulomb soit à des dipôles de taille plus petite que  $\tilde{a}$ , soit à des paires de charges distantes de moins de  $\tilde{a}$ , et qui doivent être fusionnées. Les équations de renormalisation que nous obtenons par cette procédure s'écrivent à l'ordre  $\mathcal{M}^2$  :

$$\partial_l \mathcal{M}_{i \neq j} = \left( 2 - \frac{1}{4\pi} \sum_{k,l} \delta_{i;j}^k K_{kl} \delta_{i;j}^l \right) \mathcal{M}_{ij} + c_2 \sum_{k \neq i, k \neq j} \mathcal{M}_{ik} \mathcal{M}_{jk} \quad (5.12a)$$

$$\partial_l K_{ij}^{-1} = \frac{c_1}{2} \sum_{i_0 \neq i_1} \delta_{i_0; i_1}^i \delta_{i_0; i_1}^j \mathcal{M}_{i_0 i_1}^2 \quad (5.12b)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes non universelles qui dépendent de la régularisation, mais dont le rapport  $c_1/c_2^2 = 1/(4\pi)$  est universel. Nous pouvons maintenant particulariser ces équations au modèle initial en passant des indices mixtes  $i$  aux indices de plans  $\alpha$  et de répliques  $a$ . En utilisant (5.6) nous obtenons des équations de renormalisation, valides dans le régime perturbatif donné en  $K_{\alpha\beta}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \delta_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta} \ll 1$ . En introduisant les petits paramètres  $k_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \delta_{\alpha\beta}$ , nous obtenons les équations

$$\partial_l \sum_{\beta} k_{\alpha\beta} = 0 \quad ; \quad \partial_l \Delta_{\alpha\beta} = \frac{c_1}{4\pi} g_{\alpha\beta}^2 \quad ; \quad \partial_l k_{\alpha\beta} = -\frac{c_1}{4\pi} (\bar{\mu}_{\alpha\beta}^2 - g_{\alpha\beta}^2) \quad (5.13a)$$

$$\begin{aligned} \partial_l g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} (k_{\alpha\alpha} + k_{\beta\beta} + 2\Delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\alpha} - \Delta_{\beta\beta}) \\ + \frac{c_2}{4\pi} \left( 2 \sum_{\gamma \neq \alpha} (\bar{\mu} - g)_{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} - g_{\alpha\beta} (g_{\alpha\alpha} + g_{\beta\beta}) \right) \end{aligned} \quad (5.13b)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \bar{\mu}_{\alpha\neq\beta} = 2\bar{\mu}_{\alpha\beta} (k_{\alpha\alpha} - k_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\alpha}) \\ + \frac{c_2}{4\pi} \left( \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} (\bar{\mu} + g)_{\alpha\gamma} (\bar{\mu} - g)_{\gamma\beta} - 2g_{\alpha\alpha} g_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (5.13c)$$

La première équation n'est valable que pour  $\alpha \neq \beta$ .

Dans l'écriture de ces équations, nous avons également utilisé les notations pour les couplages  $\mu_{\alpha\alpha} = -g_{\alpha\alpha}$  et  $\bar{\mu}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}$ . Ainsi la constante  $\mu_{\alpha\alpha}$  est éliminée de cette écriture.

Ces équations de renormalisation sont une extension de celles pour un seul plan : le modèle XY en champ magnétique aléatoire sans vortex, que nous avons rencontré et étudié au chapitre 4. En posant  $y_{ij} = \tilde{y}^2$  et  $K_{ij}^{-1} = K_c \delta_{ij} - \Delta$  nous retrouvons les équations que nous avons alors dérivées. Avant de passer à l'étude du comportement de  $N$  plans couplés, il est assez instructif de considérer dans un premier temps 2 plans de vortex couplés. Nous verrons en effet que les deux études diffèrent peu, et que la seconde est plus aisée à mener. Nous étendrons par la suite notre étude à la présence d'un désordre corrélé orthogonalement aux plans (partie 5.5).

### 5.3.2 Le modèle à deux plans

Les résultats de cette partie ont été présentés dans l'article joint en annexe (Carpentier, Le Doussal & Giamarchi 1996). Par symétrie entre les deux plans, le nombre de constantes de couplage entre ces plans est réduit : en particulier  $k_{11} = k_{22}$ ,  $k_{12} = k_{21}$ . Nous définissons alors la constante de raideur relative entre les deux plans :  $k = k_{11} - k_{12}$  et la constante de raideur à l'intérieur des plans  $k_c = k_{11} + k_{12}$ . En l'absence de désordre, les équations de renormalisation qui décrivent le modèle sont d'après (5.13) :

$$H = \int_{\mathbf{r}} \frac{1}{4} \left( k_c + \frac{1}{4\pi} \right) [\nabla(\phi_1 + \phi_2)]^2 + \frac{1}{4} \left( k + \frac{1}{4\pi} \right) [\nabla(\phi_1 - \phi_2)]^2 + \mu_{12} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Comme nous pouvions nous y attendre les deux plans se découplent sous l'effet des fluctuations thermiques, au delà d'une certaine température. La transition de découplage est dans ce cas de type BEREZINSKII-KOSTERLITZ-THOULESS et se produit pour des valeurs des constantes renormalisées  $k = 0$ , c'est-à-dire pour  $k_{11} = k_{12}$ .

Avec du désordre ponctuel dans chaque plan, et des conditions aux limites périodiques, mais sans couplage entre les plans, *i.e*  $\mu_{12} = 0$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $\Delta_{12} = 0$ , dans chaque plan se produit

---

Carpentier D., Le Doussal P., & Giamarchi T., (1996). *Europhys. Lett.*, **35**:379.

la transition à température finie que nous avons déjà rencontrée au chapitre 4. Dans ce cas la phase de basse température ( $k_c > 0$ ) est caractérisée par une ligne de points fixes (Cardy & Ostlund 1982) :  $g^* = k_c$  et l'intensité du désordre de grande longueur d'onde  $\delta$  diverge linéairement avec  $l$  :  $\delta(l) \rightarrow \infty$ . A haute température, le désordre de courte longueur d'onde n'est pas pertinent :  $g(l) \rightarrow 0$ ,  $\delta(l) \rightarrow \delta^*$ .

En incluant à la fois le désordre et le couplage entre plans avec des conditions aux bords périodiques (ce qui revient en fait à introduire une infinité de plans couplés à leurs plus proches voisins), nous pouvons paramétriser le comportement d'échelle du modèle en introduisant les constantes  $\Delta = \delta_{11} - \delta_{12}$ ,  $\mu = \mu_{12} + g_{12}$ . Comme dans les cas précédents, la raideur relative entre plans  $k$  et le couplage élastique  $\mu$  contrôle la nouvelle transition de découplage, alors que  $k_c$  n'est pas renormalisée. Les équations décrivant ces deux plans se formulent selon :

$$\partial_l k = \frac{1}{2}(\mu^2 - g_{12}^2) \quad ; \quad \partial_l \delta = \frac{1}{4}(g^2 - g_{12}^2) \quad (5.14a)$$

$$\partial_l g = (k + k_c)g + \mu g_{12} - g_{12}^2 - g^2 \quad (5.14b)$$

$$\partial_l \mu = 2(-\delta + k)\mu - g_{12}g \quad (5.14c)$$

$$\partial_l g_{12} = (-2\delta + k + k_c)g_{12} + \mu g - 2g_{12}g \quad (5.14d)$$

Nous devons également tenir compte des équations supplémentaires  $\partial_l k_c = 0$ ,  $\partial_l \Delta_{11} = g^2/4$ . D'après l'expression (5.4) du hamiltonien initial (aux petites échelles), les conditions initiales pour le flot de renormalisation s'écrivent  $g_{11} = g_0$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $\mu_{12} = \mu_0$ ,  $K_{12}^{-1} = k_{12} = 0$ ,  $K_{11}^{-1} = \frac{1}{4\pi} + k_c$ ,  $\delta_{11} = \delta_{12} = 0$ . Pour étudier le flot de ces équations (5.14) en fonction des valeurs de ces paramètres initiaux, nous intégrons numériquement les équations (5.14) avec les conditions initiales ci-dessus. Cette intégration a été faite à l'aide d'un programme Mathematica<sup>®</sup> dont le principal avantage est de faciliter la détection des singularités du flot (nous verrons dans la suite l'importance de ces dernières). Ces intégrations nous donnent alors, en plus des deux phases présentes dans le cas pur - une phase tridimensionnelle solide où le couplage entre plans est pertinent ( $\mu \rightarrow \infty$ ) et une phase découplée solide ( $\mu \rightarrow 0$ )- une phase bidimensionnelle dans laquelle le désordre est pertinent. Cette dernière correspond à une prolifération de boucles de dislocations entre les plans, induites par le désordre d'accrochage. Elle est l'analogue, dans cette géométrie tridimensionnelle, de la phase de CARDY-OSTLUND (Cardy & Ostlund 1982). Ce diagramme des phases extrapole donc naturellement entre les deux cas particuliers que nous venons de rappeler.

Ces trois phases sont donc décrites par des points fixes non perturbatifs : la phase vitreuse bidimensionnelle correspond comme pour un seul plan à la divergence d'une des intensités du désordre, mais peut néanmoins être étudiée perturbativement. Par contre il est naturel qu'une phase tridimensionnelle ne puisse être atteinte perturbativement par une approche partant de la dimension deux. Les trois points fixes sont donc définis par

1. *phase tridimensionnelle désordonnée* :  $\mu, g_{11}, g_{12}, \Delta \rightarrow \infty$ ;  $k \rightarrow k^* < \infty$
2. *phase liquide découplée* :  $\mu, g_{11}, g_{12} \rightarrow 0$ ;  $\Delta \rightarrow \Delta^* < \infty$ ;  $k \rightarrow k^* < \infty$
3. *phase désordonnée découplée* :  $\mu, g_{12} \rightarrow 0$ ;  $g_{11} \rightarrow g_{11}^* < \infty$ ;  $\Delta \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow k^* < \infty$



La transition de découplage habituelle de FRIEDEL entre solide et liquide se produit lorsque  $k = 0$ , alors que la nouvelle transition induite par le désordre se produit le long d'une ligne de transition approximativement droite :  $\mu \approx C g$  (for  $k > 0$ ) où  $C \approx 0.5 - 0.6$ , et qui ne dépend que faiblement de la température. Nous allons maintenant étudier plus en détails cette nouvelle transition. Certaines caractéristiques seront cependant expliquées dans l'étude du modèle à  $N$  plans.

Plaçons nous tout d'abord dans la phase désordonnée liquide. Dans cette phase  $g_{12}(l)$  et  $\mu(l)$  s'annulent à une échelle finie  $l^*$  (voir la figure 5.6). Augmentons maintenant la valeur initiale de  $\mu_0$  : ces deux grandeurs prennent des valeurs de plus en plus importantes aux échelles plus petites que  $l^*$ , tout en continuant à rester nulles au delà. A la transition, la longueur  $ae^{l^*}$  reste finie, et  $g_{12}(l)$  et  $\mu(l)$  divergent. Cette longueur  $ae^{l^*}$ , finie à la transition, peut être identifiée avec la longueur de LARKIN dans chaque plan (Larkin & Ovchinnikov 1979, Giamarchi & Le Doussal 1995). Aux températures (élevées) autour de la transition, cette longueur de LARKIN est indifférentiable de la longueur de corrélation translationnelle  $R_a$  au delà de laquelle l'ordre est perdu dans chaque plan. Elle s'exprime donc selon  $\ln(R_a/a) = l_{LO}(g) = \frac{1}{2k_c} \log \frac{1}{g} + cte$ . Une comparaison précise de la dépendance de ces deux longueurs en l'intensité du désordre de courte longueur d'onde confirme cette identification : voir le figure 5.5.

Les flots de renormalisation étant non perturbatifs dans les deux phases, nous ne pouvons pas exclure un scénario invalidant complètement notre approche. Cependant la comparaison avec la méthode variationnelle suivante semble confirmer cette analyse de renormalisation : nous pouvons alors interpréter la divergence de ces deux constantes  $g_{12}(l)$  et  $\mu(l)$  sur une longueur finie comme la manifestation d'une transition du premier ordre (aucune divergence critique de la longueur caractéristique).

### 5.3.3 Analyse du modèle à $N$ plans.

Nous passons maintenant au modèle décrivant  $N$  plans couplés en présence de désordre ponctuel, où nous allons en fait faire tendre  $N$  vers l'infini pour nous affranchir des problèmes de bords. La difficulté essentielle provient maintenant du nombre infini de constantes de couplage dont nous devons étudier le comportement d'échelle : en effet nous devons *a priori* considérer des couplages élastiques possibles entre toute paire de plans  $(\alpha, \beta)$ . Les valeurs propres des équations de renormalisation de toutes ces constantes de couplage étant différentes et indépendantes, nous ne pouvons nous ramener à un nombre fini de constantes sans approximation. Deux choix possibles se présentent à nous : soit tronquer de façon auto-cohérente la série infinie des constantes de couplage à une distance donnée, soit considérer une approximation de type champ moyen dans laquelle chaque plan est couplé de façon égale avec tous ses voisins. Nous n'allons pas considérer la seconde possibilité, apparemment moins réaliste physiquement, et utiliserons plutôt une procédure de troncation de la matrice de couplage. Nous ne considérerons que les couplages entre premiers et seconds plus proches voisins : dans ce cadre la présence d'une phase tridimensionnelle se manifestera par des valeurs comparables de ces deux types de couplage. Bien sûr l'approximation utilisée

---

Larkin A. & Ovchinnikov Y., (1979). *J. Low Temp. Phys.*, **34**:409–428.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

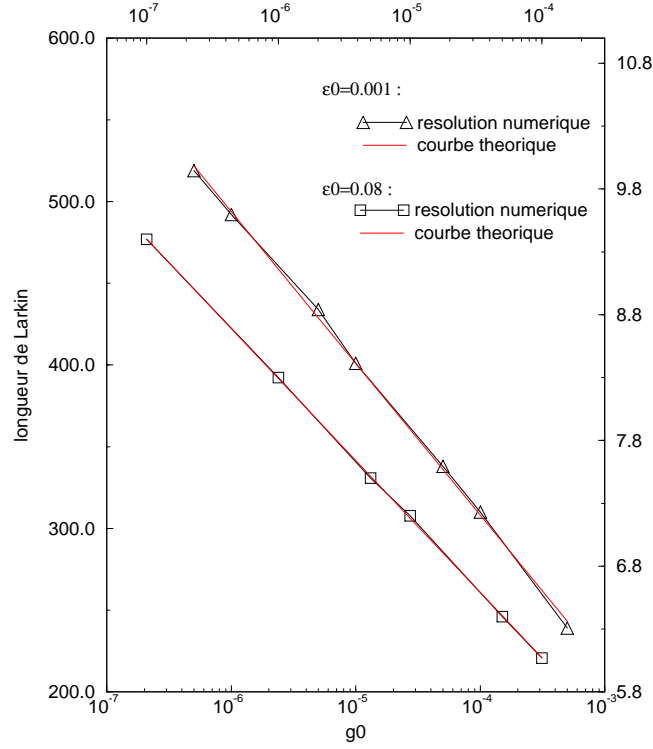


FIG. 5.5 – *Comparison entre la dépendance en l'intensité du désordre de la longueur théorique de LARKIN et la valeur numérique de la longueur de corrélation  $ae^{l^*}$  de la phase désordonnée 2D à la transition.*

cesse alors d'être valide. Ceci ne se passe heureusement qu'au voisinage immédiat de la transition qui se trouve être du premier ordre : nous pouvons donc raisonnablement espérer pouvoir décrire correctement la diagramme des phases.

Pour être plus précis, mettons donc en oeuvre cette approximation. Pour toute série de couplages  $k_{\alpha,\beta}$ , nous ne gardons dans toutes les équations de renormalisation que les trois premiers termes : le couplage intra-plans  $k_0 \equiv k_{\alpha,\alpha}$ , celui entre plus proches voisins  $k_1 \equiv k_{\alpha,\alpha\pm 1}$ , et celui entre seconds voisins  $k_2 \equiv k_{\alpha,\alpha\pm 2}$ . Avec cette approximation les équations de renormalisation se reformulent selon

$$\partial_l \Delta_i = \frac{1}{4} g_i^2 \quad ; \quad i = 0, 1, 2 \quad (5.15a)$$

$$\partial_l k_i = -\frac{1}{4}(\bar{\mu}_i^2 - g_i^2) \quad ; \quad i = 1, 2 \quad \partial_l k_0 = \frac{1}{4}(\bar{\mu}_1^2 + \bar{\mu}_2^2 - g_1^2 - g_2^2) \quad (5.15b)$$

$$\partial_l g_0 = 2g_0 k_0 + [2(\bar{\mu} - g)_1 g_1 + 2(\bar{\mu} - g)_2 g_2 - g_0^2] \quad (5.15c)$$

$$\partial_l g_1 = 2g_1(k_0 + \delta_1 - \delta_0) + [(\bar{\mu} - g)_1(g_0 + g_2) + \bar{\mu} - g)_2 g_1 - g_0 g_1] \quad (5.15d)$$

$$\partial_l g_2 = 2g_2(k_0 + \delta_2 - \delta_0) + [(\bar{\mu} - g)_1 g_1 + (\bar{\mu} - g)_2 g_0 - g_0 g_2] \quad (5.15e)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \bar{\mu}_1 = 2\bar{\mu}_1(k_0 - k_1 + \Delta_1 - \Delta_0) \\ + \frac{1}{2}[(\bar{\mu} + g)_1(\bar{\mu} - g)_2 + (\bar{\mu} + g)_2(\bar{\mu} - g)_1 - 2g_0 g_1] \end{aligned} \quad (5.15f)$$

$$\partial_l \bar{\mu}_2 = 2\bar{\mu}_2(k_0 - k_2 + \Delta_2 - \Delta_0) + \frac{1}{2}[(\bar{\mu} + g)_1(\bar{\mu} - g)_1 - 2g_0 g_2] \quad (5.15g)$$

Comme dans la partie précédente dans l'étude de deux plans, nous avons étudié numériquement ces équations de renormalisation couplées. Cette intégration est réduite à la sous-variété correspondant aux conditions initiales  $\Delta_i = 0 \forall i$  ;  $k_i = g_i = 0 \quad i = 1, 2$  ;  $\bar{\mu}_2 = 0$ . Nous ignorons les points fixes ne jouant aucun rôle dans cette sous-variété (ils existent !). De façon analogue au cas précédent, trois différentes phases sont observées :

1. *une phase tridimensionnelle désordonnée (3D)*:  $k_0, g_0, g_1, g_2, \mu_1, \mu_2 \rightarrow \infty, k_1, k_2 \rightarrow -\infty$
2. *la phase découplée désordonnée (CO)*:  $k_0 \rightarrow k_0^* < \infty, g_0 \rightarrow g_0^* > 0, k_1, k_2 \rightarrow k_1^*, k_2^* < 0, \Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Delta_1^*, \Delta_2^* < \infty, g_1, g_2, \mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$
3. *Une phase découplée liquide.*

Aux deux transitions vers la phase liquide découplée, toutes les longueurs caractéristiques divergent, ce qui est interprété comme la manifestation d'une transition continue. Cette transition survient lorsque la température renormalisée vaut  $T_c$ , soit pour une température initiale légèrement en dessous de  $T_c$ :  $T^* \lesssim T_c$ . Nous ne nous intéressons pas plus à cette transition sachant que cette température de transition semble être supérieure à la température de la transition supraconducteur-normal dans l'échantillon (Efetov 1979, Mikheev & Kolomeisky 1991, Korshunov & Larkin 1992).

La transition entre les deux phases désordonnées (tridimensionnelle et bidimensionnelle) s'étend au contraire jusqu'à la température nulle. De même que pour le cas de deux plans, cette transition peut être caractérisée précisément bien que les phases de part et d'autre correspondent à des points fixes non perturbatifs dans notre approche. Ainsi si nous nous focalisons sur la constante de couplage  $\mu_1(l)$ , son comportement est très différent dans les deux phases : il passe d'une divergence aux grandes échelles dans la phase tridimensionnelle, à une annulation dans l'autre phase (voir la figure 5.6). De plus dans la phase bidimensionnelle, le régime asymptotique est atteint au delà d'une échelle finie correspondant à  $l^*$ . Or cette longueur de corrélation ne diverge pas à la transition mais reste finie, ce qui correspond à une transition du premier ordre entre les deux phases désordonnées. Cette longueur

---

Efetov K., (1979). *Sov. Phys. JETP*, **49**:905.

Mikheev L. & Kolomeisky E., (1991). *Phys. Rev. B*, **43**:10431–10435.

Korshunov S. & Larkin A., (1992). *Phys. Rev. B*, **46**:6395–6399.

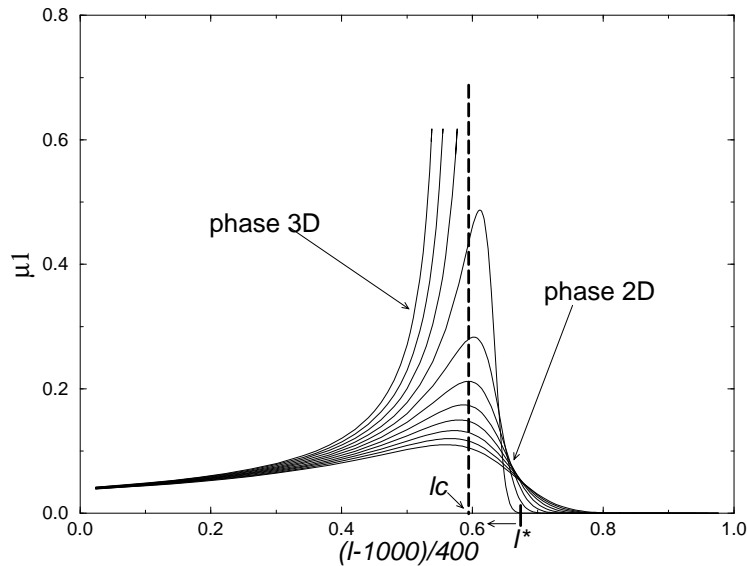


FIG. 5.6 – Constante de couplage entre plans plus proches voisins  $\mu_1(l)$  en fonction du logarithme de l'échelle, au voisinage de transition entre les deux verres. Deux comportements sont facilement identifiés : le régime bidimensionnel qui est atteint au bout d'une longueur  $l^*$ , et le régime tridimensionnel. A la transition cette longueur  $l^*$  demeure constante, et égale à la longueur de LARKIN  $l_c$ . Sur cette figure, la valeur initiale du couplage  $\mu_1^0$  est variée, avec toutes les autres valeurs initiales constantes.

finie à la transition, qui dépend de l'intensité initiale du désordre de petite longueur d'onde, peut être indentifiée à la longueur de LARKIN dans chaque plan (fig. 5.6).

Une détermination numérique précise de cette longueur  $l^*$  à la transition a été faite, et les résultats sont représentés sur la figure 5.7. Contrairement au cas bidimensionnel, nous pouvons observer une légère différence entre cette longueur et la longueur de LARKIN théorique, qui doit sans doute être imputée à notre hypothèse de travail (troncature de la série des couplages).

La séparatrice correspondant à cette transition du premier ordre peut également être déterminée numériquement. Ici encore une légère différence avec le modèle à deux plans est observée. Remarquons d'abord que la divergence des flots de renormalisation autour de la transition se fait très brutalement. Cette propriété nous permet de vérifier que l'indétermination sur la séparatrice est faible : en effet dès que le flot quitte le régime perturbatif, notre analyse cesse d'être valable. Nous escomptons alors une phase tridimensionnelle, mais ne pouvons la décrire précisément. Ce régime où notre analyse est invalidée est réduit du fait de cette divergence rapide à une échelle finie. Deux séparatrices sont représentées sur la figure 5.8. Elles sont décrites par des équations de la forme  $\mu_1 = C g^{1+\epsilon}$  où  $\epsilon$  est un très petit paramètre positif qui dépend de la température. Ce résultat est en parfait

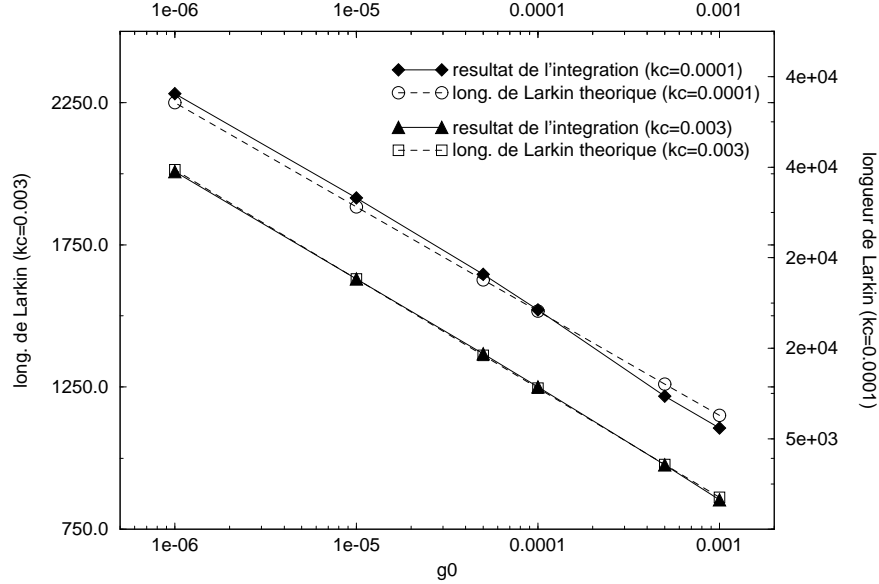


FIG. 5.7 – Détermination numérique de la longueur caractéristique finie à la transition et expression théorique de la longueur de LARKIN .

accord avec l'analyse que nous allons maintenant mener avec une méthode variationnelle complètement différente de ce groupe de renormalisation. Dans ce cas une valeur non nulle de l'intensité du désordre de grande longueur d'onde  $\Delta_0$  induit une déviation par rapport à une séparatrice linéaire dans le plan  $\mu, g$ .

## 5.4 La méthode variationnelle avec répliques

Après notre analyse de renormalisation, nous allons maintenant utiliser une méthode complètement différente. Celle-ci, introduite par SHAKNOVITCH et GUTIN (Shakhnovich & Gutin 1989), est une méthode variationnelle dans laquelle les hamiltoniens d'essai appartiennent à la famille des hamiltoniens gaussiens dans lesquels la symétrie de permutation des répliques est brisée. Cette méthode a par la suite été largement développée par MÉZARD et PARISI (Mézarid & Parisi 1991), puis par GIAMARCHI et LE DOUSSAL dans le contexte de l'étude des systèmes élastiques en présence de désordre.

Avant de passer à l'étude du modèle général, nous allons introduire cette méthode dans l'étude d'un modèle simplifié dans lequel le désordre agit comme une force indépendante sur chaque vortex. Ce modèle est appelé, pour des raisons historiques, un modèle de LARKIN

Shakhnovich E. & Gutin A., (1989). *J. Phys. A*, **22**:1647.

Mézarid M. & Parisi G., (1991). *J. Phys. I*, **1**:809–836.

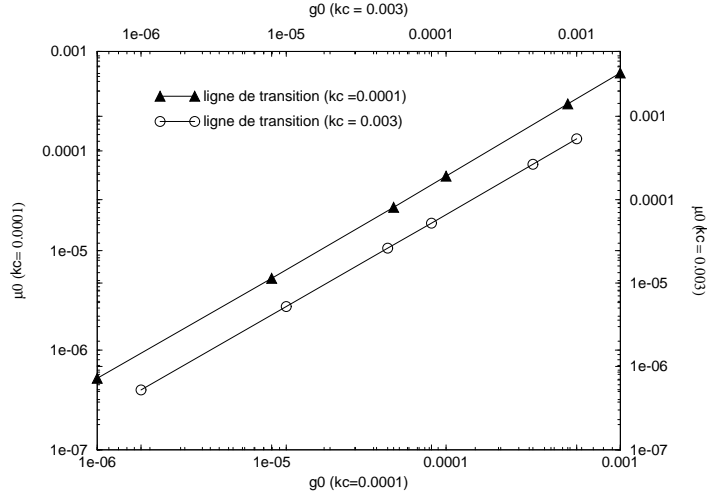


FIG. 5.8 – Détermination numérique de la séparatrice entre les deux phases vitreuses (méthode de renormalisation). Cette séparatrice est représentée ici dans une double échelle logarithmique.

(Larkin & Ovchinnikov 1979). Son étude est instructive, car elle contient la plupart des ingrédients du cas général, et considérablement simplifiée car ce modèle est un modèle gaussien pour lequel il n'est pas besoin de faire appel à la notion délicate de brisure de symétrie des répliques. Nous nous attendons cependant à ce qu'il surévalue l'influence du désordre aux grandes échelles (Giamarchi & Le Doussal 1995). Ce modèle a déjà été introduit dans le chapitre 1 d'introduction.

#### 5.4.1 Le modèle de LARKIN

Nous commençons donc par étudier ce modèle de LARKIN. Le couplage entre plans reste de la même forme que dans le modèle complet précédent, par contre le désordre intervient sous la forme de forces aléatoires locales  $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r})$ :

$$\frac{1}{T}H_{Lark} = \sum_{\alpha} \int_{\mathbf{r}} \frac{K_c}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha})^2(\mathbf{r}) + \mathbf{f}_{\alpha}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{r}) + \mu \cos \mathbf{K}_0 \cdot (\mathbf{u}_{\alpha+1}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{r})) \quad (5.16)$$

Les forces  $\mathbf{f}_{\alpha}(\mathbf{r})$  sont indépendantes de site à site, et sont distribuées selon une loi gaussienne de corrélateur  $f_{\alpha}^i(\mathbf{r}) f_{\beta}^j(\mathbf{r}') = g_L \delta^{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$ . Nous moyennons alors sur cette distribution la fonction de partition répliquée  $m$  fois. La méthode variationnelle gaussienne consiste alors à approximer le hamiltonien répliqué moyenné par rapport à un hamiltonien gaussien dépendant d'un champ  $\phi^a$  à  $m$  composantes, caractérisée par une matrice des fluctuations

Larkin A. & Ovchinnikov Y., (1979). *J. Low Temp. Phys.*, **34**:409–428.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

$G$ :

$$H_0 = \sum_{\alpha} \int_{\mathbf{q}} u_{\alpha}^a [G^{-1}]_{\alpha\beta}^{ab} u_{\beta}^b \quad (5.17)$$

La procédure particulière à suivre en présence d'un hamiltonien variationnel répliqué est de chercher les extrema (maxima) de l'énergie libre puis de prendre la limite  $m \rightarrow 0$ . L'énergie libre variationnelle se formule selon l'expression habituelle:  $F_{var} = F_0 + \langle H - H_0 \rangle_0$  où  $F_0$  est l'énergie libre correspondant au hamiltonien  $H_0$ . Nous pouvons alors évaluer chacun des membres de cette définition:

$$\frac{F_0}{mN\Omega} \xrightarrow{m \rightarrow 0} -\frac{T}{2} \frac{1}{mN} \int_{\mathbf{q}} Tr \ln G(\mathbf{q}) + \text{cte} \quad (5.18)$$

$$\langle H - H_0 \rangle_0 \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{T}{2} \frac{1}{mN} \int_{\mathbf{q}} Tr (K^{-1}G) + \tilde{\mu}mN \quad (5.19)$$

Dans cette expression nous avons défini un couplage effectif entre plans  $\tilde{\mu}$  qui s'exprime selon  $\tilde{\mu} = \mu \exp(-\frac{1}{2}B_{\alpha,\alpha+1}^{aa})$  avec le corrélateur à deux points entre plans voisins  $B_{\alpha,\alpha+1}^{aa} = 2T \int_{\mathbf{q},q_z} (1 - \cos q_z) G^{aa}(\mathbf{q}, q_z)$ . Dans tout ce qui précède,  $Tr$  correspond à la trace dans l'espace des répliques, et  $\Omega$  à la superficie d'un plan. Nous omettrons systématiquement dans la suite les termes qui disparaissent dans la limite  $m \rightarrow 0$  afin de ne pas alourdir l'étude. Dans l'expression du corrélateur ci-dessus, nous sommes également passés aux transformées de Fourier dans la direction  $z$ , en introduisant le moment  $q_z$  selon l'axe  $z$ , et nous utilisons les notations  $\int d^2\mathbf{q}/(2\pi)^2 \rightarrow \int_{\mathbf{q}}$ ;  $l \int_{-\pi/l_z}^{\pi/l_z} dq_z/(2\pi) \rightarrow \int_{q_z}$  où  $l_z$  est la distance entre deux plans voisins. Les transformées de Fourier correspondent alors à  $\phi_{\alpha}^a(\mathbf{q}) = \int_{q_z} \phi^a(\mathbf{q}, q_z) \exp(i\alpha q_z l)$ ;  $G(\mathbf{q})_{\alpha,\beta}^{ab} = \int_{q_z} G^{ab}(\mathbf{q}, q_z) \exp(i(\alpha - \beta)q_z l)$ , et  $G^{ab}(\mathbf{q}, q_z) = \sum_{\alpha} \exp(i(\alpha - \beta)q_z) G(q)_{\alpha\alpha,\beta\beta}^{-1}$  qui est indépendant de  $\beta$  par invariance par translation.

Les extrema de l'énergie libre intensive répliquée  $F_{var}/(N\Omega)$  correspondent, avec ces notations, à la transformée de Fourier de  $G$ :

$$\begin{aligned} [G^{-1}(\mathbf{q}, q_z)]_{ab} &= (K_c q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z)) \delta_{ab} - g_L \\ &= G_c^{-1} \delta_{ab} - g_L \end{aligned} \quad (5.20)$$

Cette fonction  $G$  dépend du couplage effectif  $\tilde{\mu}$ . En reportant dans la définition du hamiltonien d'essai, nous obtenons une expression auto-cohérente pour ce couplage  $\tilde{\mu}$ :

$$4\pi \int_{\mathbf{q},q_z} (1 - \cos(q_z l)) G^{aa}(\mathbf{q}, q_z) \simeq -1 - \ln \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} + \frac{g_L}{2\tilde{\mu}} \quad (5.21)$$

Dans cette dernière expression, nous avons introduit un cut-off infrarouge  $\sqrt{\Lambda}$ , et nous n'avons retenu que les termes dominants dans la limite de grand  $\Lambda$ . Les effets de cut-off finis seront discutés ultérieurement<sup>1</sup>.

Nous pouvons dès maintenant remarquer que la solution  $\tilde{\mu} = 0$  est une solution auto-cohérente de la définition (5.21). Cependant d'autres solutions existent, correspondant à des valeurs positives de  $\tilde{\mu}$ , c'est-à-dire à des phases "couplées". Reportons l'expression (5.21) dans la définition de  $\tilde{\mu}$ , nous obtenons l'égalité suivante:

1. Les intégrales nécessaires à la détermination des solutions de cette méthode variationnelle ont été regroupées en annexe.

$$f(\tilde{\mu}) \equiv \left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{1-\tilde{T}} e^{\tilde{T} \frac{g_L}{2\tilde{\mu}}} = \frac{\mu}{\Lambda} e^{\tilde{T}} \quad (5.22)$$

avec une température réduite  $\tilde{T} = T/4\pi = T/T_c$ . Dans le régime  $T < T_c$ , la fonction  $f(\tilde{\mu})$  prend son valeur minimale sur  $\mathbb{R}^+$  au point  $\tilde{\mu} = g_L \tilde{T} / (2(1 - \tilde{T}))$  qui correspond à la valeur

$$f_{min} = \left( \frac{g_L \tilde{T}}{2\Lambda(1 - \tilde{T})} \right)^{1-\tilde{T}} e^{1-\tilde{T}}$$

Ce minimum disparaît lorsque l'intensité du désordre s'annule:  $g_L \rightarrow 0$ . Ainsi dans la région  $T < T_c$  nous venons de trouver l'existence d'une phase couplée  $\tilde{\mu} \neq 0$ . Le domaine d'existence est limitée par la ligne

$$\frac{\mu}{\Lambda} = \left( \frac{g_L \tilde{T}}{2\Lambda(1 - \tilde{T})} \right)^{1-\tilde{T}} e^{1-2\tilde{T}} \quad (5.23)$$

Pour  $\mu > \mu_{critique}$ , cette équation admet des solutions: une phase tridimensionnelle existe. Cette ligne a été représentée sur le diagramme 5.9. Si nous atteignons cette ligne en venant de la phase couplée, le couplage effectif  $\tilde{\mu}$  ne s'annule pas, mais garde une valeur finie, donnée par  $\tilde{\mu} = g_L \tilde{T} / (2(1 - \tilde{T}))$ . La transition de découplage entre les deux phases, induite par le désordre, semble donc être du premier ordre.

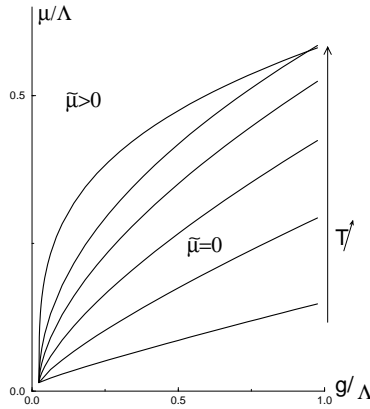


FIG. 5.9 – *Domaine d'existence de la phase couplée correspondant à  $\tilde{\mu} \neq 0$  dans le modèle de LARKIN. Cette phase existe au dessus de la ligne de transition. Différentes lignes ont été représentées pour différentes valeurs de la température, les valeurs les plus faibles de cette dernière correspondant aux lignes du bas de la figure.*

Pour une température plus faible que  $T_c$ , deux phases sont ainsi possibles: une phase tridimensionnelle ( $\tilde{\mu} > 0$ ) stable pour un couplage  $\mu$  suffisamment fort, ou un désordre  $g_L$  suffisamment faible; et une phase dans laquelle les plans sont découplés ( $\tilde{\mu} = 0$ ). Pour des valeurs faibles et constantes de  $(g, \mu)$ , la phase tridimensionnelle disparaît lorsque nous augmentons la température.



Ce modèle gaussien permet donc déjà de trouver une transition induite par le désordre correspondant à une prolifération de boucles de dislocations entre les plans. Nous nous attendons cependant à ce que la transition réelle arrive à des valeurs de l'intensité du désordre plus grande : en effet dans la modélisation précédente de l'accrochage, l'effet du désordre est surévalué aux grandes échelles. Afin d'obtenir une détermination plus précise de cette ligne de transition, nous passons donc maintenant à l'étude du modèle général, dans lequel la périodicité du réseau est correctement prise en compte dans la modélisation du désordre (voir le chapitre suivant pour une dérivation détaillée de cette modélisation).

### 5.4.2 Le modèle complet à $N$ plans

Nous revenons maintenant au modèle initial correspondant à une infinité de plans couplés élastiquement les uns aux autres en présence d'un désordre ponctuel. Rappelons que ce modèle est décrit ici par un hamiltonien répliqué

$$H = \int_{\mathbf{r}} \sum_{a,b,\alpha,\beta} \frac{1}{2} (\delta_{ab} \delta^{\alpha\beta} - \Delta) \nabla \phi_{\alpha}^a(\mathbf{r}) \nabla \phi_{\beta}^b(\mathbf{r}) \quad (5.24)$$

$$- \sum_{a,\alpha,\beta} \frac{\mu}{2} (\delta_{\alpha+1,\beta} + \delta_{\alpha-1,\beta}) \cos(\phi_{\alpha}^a(\mathbf{r}) - \phi_{\beta}^a(\mathbf{r})) - g \sum_{ab,\alpha} \cos(\phi_{\alpha}^a(\mathbf{r}) - \phi_{\alpha}^b(\mathbf{r}))$$

Nous allons donc approximer ce modèle par le hamiltonien d'essai quadratique (5.17). Le propagateur  $G(q)_{a\alpha,b\beta}^{-1}$  de ce dernier va être déterminé en optimisant l'énergie libre variationnelle qui lui est associée :  $F_{var} = -T \ln Tr \exp(-H_0/T) + \langle H - H_0 \rangle_{H_0}$ . Les équations de point col associées à cette énergie libre sont dérivées dans l'Annexe A . Nous allons ici les particulariser au cas de  $N$  plans couplés dans la limite d'un nombre infini de plans  $N \rightarrow \infty$ . Cette limite est prise avec des conditions aux bords périodiques. Le modèle est alors invariant par translation discrète selon l'axe  $z$  (les plans sont indifférentiables) : nous utilisons les mêmes conventions de transformée de FOURIER que dans l'étude du modèle de LARKIN. Les équations de point col de l'Annexe A s'écrivent alors :

$$G(q, q_z)_{ab}^{-1} = \delta_{ab} [q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos(q_z l))] - \Delta q^2 + \sigma_{ab} \quad (5.25a)$$

$$\sigma_{ab} = -2g \left( e^{-1/2B_{\alpha,\alpha}^{ab}} - \delta_{ab} \sum_c e^{-1/2B_{\alpha,\alpha}^{ac}} \right) \quad (5.25b)$$

où le couplage effectif entre plans est défini de la même manière que précédemment  $\tilde{\mu} = \mu e^{-1/2B_{a\alpha,a\alpha+1}}$  avec les corrélations à deux points dans le plan et entre deux plans voisins :

$$B_{\alpha,\alpha+1}^{aa} = 2T \int_{\mathbf{q}, q_z} (1 - \cos(q_z l)) G_{aa}(\mathbf{q}, q_z) \quad (5.26)$$

$$B_{\alpha,\alpha}^{ab} = 2T \int_{\mathbf{q}, q_z} (G_{aa}(\mathbf{q}, q_z) - G_{ab}(\mathbf{q}, q_z)) \quad (5.27)$$

D'après les différentes études sur les cas isotropes bidimensionnel et tridimensionnel, nous nous attendons à trois types de solutions différentes : une solution avec brisure complète

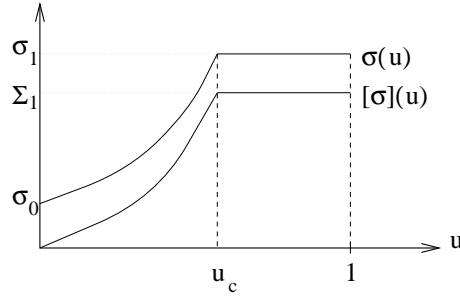


FIG. 5.10 – Représentation schématique de la forme des fonctions  $\sigma(u)$  et  $[\sigma](u)$  qui caractérisent une solution des équations de points col brisant complètement la symétrie des répliques. Elles sont caractérisées par un point de brisure  $u_c$ .

de la symétrie des répliques, décrivant une phase tridimensionnelle désordonnée, une solution avec une brisure des répliques à un niveau correspondant à un verre bidimensionnel (plans découplés), et une solution invariante par permutations des répliques pour la phase liquide découplée. Nous nous attendons à ce que le verre tridimensionnel soit un exemple de verre de BRAGG dans cette géométrie particulière (Giamarchi & Le Doussal 1995), alors que la phase vitreuse bidimensionnelle correspondrait à une phase désordonnée dans laquelle les dislocations planaires prolifèrent (voir à ce sujet l'introduction : chapitre 1).

### La solution avec brisure complète de la symétrie des répliques

Nous cherchons donc une solution des équations de point col (5.25) qui brise complètement la symétrie des répliques (Mézarid & Parisi 1991). Les formes des fonctions  $\sigma(u)$  et  $[\sigma](u)$  (voir ci-dessous) pour ce genre de solution sont représentées sur la figure 5.10, et sont caractérisées par un point de brisure  $u_c$ .

Pour étudier ces solutions, nous décomposons la fonction  $G$  de chaque hamiltonien d'essai selon  $[G^{-1}]_{ab}(\mathbf{q}, q_z) = G_c^{-1} \delta^{ab} - \Delta q^2 - \sigma_{ab}$ . Dans le cas de solutions brisant complètement la symétrie des répliques (BSR complète), les équations de point col se transposent (avec ces notations) en

$$G_c^{-1}(\mathbf{q}, q_z) = q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos(q_z l)) \quad \sigma(u) = 2ge^{-1/2B_{\alpha,\alpha}(u)} \quad (5.28)$$

avec le couplage  $\tilde{\mu} = \mu \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{B}_{\alpha,\alpha+1}\right)$  dans lequel les corrélateurs prennent la forme

$$\tilde{B}_{\alpha,\alpha+1} = 2T \int_{\mathbf{q}, q_z} (1 - \cos(q_z l)) \tilde{G}(\mathbf{q}, q_z) \quad (5.29)$$

$$B_{\alpha,\alpha}(u) = 2T \int_{\mathbf{q}, q_z} (\tilde{G}(\mathbf{q}, q_z) - G(\mathbf{q}, q_z, u)) \quad (5.30)$$

Après quelques manipulations détaillées dans l'annexe B.1 nous pouvons en déduire la forme

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

Mézarid M. & Parisi G., (1991). *J. Phys. I*, **1**:809–836.

de la solution en dessous du point de brisure  $u < u_c$  (5B.66,5B.67) :

$$\sigma(u) = 2\tilde{\mu} \frac{u\tilde{T}^{-2}}{\sqrt{1-u^2\tilde{T}^{-2}}} \quad [\sigma](u) = 2\tilde{\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{1-u^2\tilde{T}^{-2}}} - 1 \right) \quad (5.31)$$

où nous avons de nouveau utilisé la température réduite  $\tilde{T} = T/T_c = T/4\pi$ . Cette solution BSR complète sera parfaitement déterminée lorsque nous aurons les valeurs du point de brisure  $u_c$  et du couplage effectif  $\tilde{\mu}$ . Les équations qui régissent leur comportement sont, d'après les formules (5B.71a,5B.74a) de l'annexe :

$$\left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{1-\tilde{T}} = \frac{g\tilde{T}}{\Lambda} g_{\tilde{T}}(v_c) \quad \left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{1-\tilde{T}(1+\Delta)} = \frac{\mu}{\Lambda} f_{\tilde{T}}(v_c) \quad (5.32)$$

où nous avons adopté la notation pour le point de brisure  $v_c = u_c/\tilde{T}$ . Les fonctions  $f_{\tilde{T}}(v_c)$  et  $g_{\tilde{T}}(v_c)$  sont définies par les équations (5B.71b,5B.74b). Une simple comparaison entre les deux formules de l'équation (5.32) induit la détermination auto-cohérente de  $u_c$  :

$$\underbrace{\phi_{\tilde{T}}(v_c) (g_{\tilde{T}}(v_c))^{\frac{\Delta\tilde{T}}{1-\tilde{T}}}}_{\Psi_{\tilde{T}}(v_c, \Delta)} = \frac{\Lambda}{\mu} \left( \frac{g\tilde{T}}{\Lambda} \right)^{1-\frac{\Delta\tilde{T}}{1-\tilde{T}}} \quad (5.33)$$

$$\phi_{\tilde{T}}(v_c) = \frac{f_{\tilde{T}}(v_c)}{g_{\tilde{T}}(v_c)} = \frac{2v_c}{1 + \sqrt{1-v_c^2}} \exp \left[ (1 + \tilde{T}) \sqrt{\frac{1-v_c}{1+v_c}} - 1 \right] \quad (5.34)$$

La solution BSR complète, c'est-à-dire les fonctions  $\sigma(u)$  et  $[\sigma](u)$ , est ainsi complètement déterminée par les valeurs autorisées de  $u_c$  d'après les équations (5.33,5.34), et la valeur du couplage  $\tilde{\mu}$  sortie de (5B.74b). Le diagramme des phases qui s'en déduit va être analysé un peu plus loin.

### Les solutions à un niveau de brisure de la symétrie des répliques

Les résultats sur le réseau planaire de lignes de flux parallèles les unes aux autres nous indiquent que dans le modèle à un seul plan, la phase vitreuse à basse température est caractérisée par une solution à un niveau de brisure de la symétrie des répliques (1 niveau de BSR). Nous nous attendons donc au même genre de solution pour la phase vitreuse découplée dans laquelle le couplage effectif entre plans est nul, et dans chaque plan le réseau de vortex se trouve dans la phase vitreuse précédemment étudiée. Ces solutions sont caractérisées par des fonctions  $\sigma(u)$  et  $[\sigma](u)$  en escalier à deux marches, représentées sur la figure 5.11. Elles correspondent aux définitions

$$\sigma(u) = \sigma_0 \quad [\sigma](u) = 0 \quad u < u_c \quad (5.35)$$

$$\sigma(u) = \sigma_1 \quad [\sigma](u) = \Sigma_1 \quad u > u_c \quad (5.36)$$

Ainsi ces fonctions sont caractérisées par trois paramètres:  $u_c$ ,  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  (ou de façon équivalente  $\Sigma_1$ ). Pour déterminer ces paramètres, nous suivons pas à pas la méthode utilisée

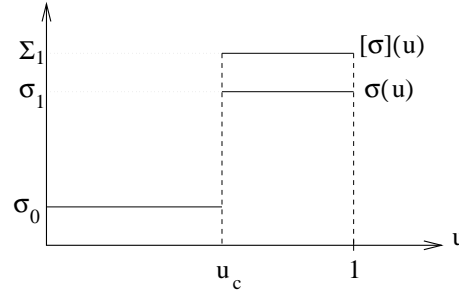


FIG. 5.11 – Représentation schématique de la forme des fonctions  $\sigma(u)$  et  $[\sigma](u)$  pour une solution à un niveau de BSR.

dans le cas bidimensionnel (Giamarchi & Le Doussal 1995). Les calculs étant assez lourds, ils ont été reportés dans une annexe spéciale B.2 de ce chapitre. D’après les résultats de cette annexe, les équations variationnelles par rapport aux constantes  $\sigma_0$  et  $\Sigma_1$  s’écrivent

$$G_c^{-1} = q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z) \quad (5.37)$$

$$g_2 - g_1 = \frac{\Sigma_1}{2u_c} \quad (5.38)$$

où  $g_1, g_2$  et le couplage entre plans  $\tilde{\mu}$  ont été définis dans l’annexe B.2. L’équation variationnelle par rapport au point de brisure  $1/u_c$  se formule de façon moins simple :

$$\frac{T}{2} \int_{q, q_z} \left( \frac{\Sigma_1}{G_c^{-1} + \Sigma_1} - \log(1 + \Sigma_1 G_c) \right) + u_c^2 (g_2 - g_1) = u_c g_1 T \int_{q, q_z} \frac{\Sigma_1 G_c}{G_c^{-1} + \Sigma_1} \quad (5.39)$$

Nous pouvons ici remarquer que  $\sigma_0$  n’apparaît que dans la définition de  $\tilde{\mu}$ . Pour fixer sa valeur, nous dérivons l’énergie libre par rapport à  $G_c$ , ce qui nous impose  $\sigma_0 = 2g_1$ . L’équation (5.38) entraîne alors  $\sigma_1 = 2g_2$ .

Un détail, qui a son importance, concerne l’effet d’une petite intensité de désordre de grande longueur d’onde  $\Delta$  : cette intensité n’intervient également que dans l’expression du couplage effectif  $\tilde{\mu}$ . Ainsi contrairement aux solutions avec BSR complète, les solutions que nous étudions ici, à un niveau de BSR, ne sont pas affectées par ce type de désordre :  $\sigma_0, \sigma_1, u_c$  ne dépendent pas de  $\Delta$ . De plus l’expression du couplage  $\tilde{\mu}$  est exactement la même que dans le cadre de la solution à BSR complète : cette remarque peut conduire à une évaluation approchée de la transition de découplage induit le désordre, argument qui est présenté dans l’article en annexe.

### Solution quasi-bidimensionnelle

Nous pouvons contraindre la solution à un niveau de BSR à correspondre à une solution bidimensionnelle en imposant à  $\tilde{\mu}$  d’être nul. Cette contrainte peut en fait être considérée comme un ansatz dans la résolution des équations (5B.79, 5B.83). Nous déterminons ainsi la solution correspondante ( $u_c, \sigma_0, \sigma_1$ ) que nous reportons ensuite dans l’expression du couplage effectif  $\tilde{\mu}$ . De l’expression ainsi obtenue, nous pouvons déduire le domaine d’existence de la solution bidimensionnelle à un niveau de BSR.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

Annuler  $\tilde{\mu}$  revient à remplacer  $G^{-1}$  par  $q^2$  : dans les équations (5B.77-5B.78) cela nous donne les valeurs des deux fonctions auxiliaires  $g_1 = 0; g_2 = g\left(\frac{\Sigma_1}{\Lambda}\right)^{\tilde{T}}$ . L'évaluation des intégrales dans (5.39) en utilisant  $\Sigma_1 = 2u_c g_2$  nous permet de déterminer le point de brisure  $-\tilde{T}\Sigma_1 + u_c \Sigma_1 = 0$  qui admet comme solution évidente  $u_c = \tilde{T}$ . Cette valeur de  $u_c$  peut alors être utilisée pour obtenir la valeur du plateau de  $[\sigma]$  :

$$\frac{\Sigma_1}{\Lambda} = \left(\frac{2g\tilde{T}}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{1-\tilde{T}}} \quad (5.40)$$

La solution bidimensionnelle à un niveau de BSR est maintenant déterminée. Remarquons qu'elle est indépendante de la valeur du désordre  $\Delta$ . Nous déterminerons dans la partie suivante son domaine d'existence en restreignant l'équation (5B.81) à cette solution.

En plus de cette solution bidimensionnelle, il existe des solutions à un niveau de BSR pour lesquelles le couplage entre plans est non nul :  $\tilde{\mu} \neq 0$ . Ces solutions correspondent donc à des phases tridimensionnelles. Nous nous attendons à ce que ces phases soient instables. Bien qu'un calcul complet de stabilité dans l'esprit de l'analyse de DE DOMINICIS et KONDOR (Temesvari, De Dominicis & Kondor 1994, Carlucci, De Dominicis & Temesvari 1996) n'ait pas été effectué, nous négligerons dans la suite ces solutions. En effet la connaissance des solutions dans les situations extrêmes bidimensionnelles et tridimensionnelles nous apprend que ces solutions sont dans ces cas instables : elles doivent donc être négligées face aux solutions qui extrapolent entre ces situations connues. Une étude des solutions à un niveau de BSR  $\tilde{\mu} \neq 0$  est cependant présenté dans l'annexe B.2 afin de compléter cette présentation.

### 5.4.3 Etude des transitions

Pour déduire le diagramme des phases de l'analyse des solutions qui précède, il nous reste maintenant à déterminer les différents domaines de stabilité. Heureusement les problèmes ardu de stabilité des solutions par rapport aux fluctuations autour des points cols peuvent être évités en utilisant la connaissance que nous avons des cas limites (2D ou 3D). Nous n'avons ainsi plus qu'à nous concentrer sur les domaines d'existence des solutions de BSR complète (verre 3D), de solution à BSR à un niveau avec  $\tilde{\mu} = 0$ , (verre 2D) et de solution complètement symétrique (phase liquide).

Dans le cas de la phase à BSR complète, l'existence correspond à une valeur non nulle du couplage effectif  $\tilde{\mu} > 0$  et une valeur autorisée pour le paramètre de brisure  $u_c$  :  $0 < u_c < 1$ . La même condition s'applique pour l'existence de la phase à un niveau de BSR, sans compter la condition auto-cohérente sur le couplage  $\tilde{\mu} = 0$ . Finalement la solution symétrique existe pour toute valeur des paramètres, mais est considérée comme instable vis-à-vis de toute autre phase existante. Le diagramme des phases se déduit donc uniquement de considérations sur les phases brisant la symétrie des répliques.

---

Temesvari T., De Dominicis C., & Kondor I., (1994). *J. Phys. A.*, **27**:7569.

Carlucci D., De Dominicis C., & Temesvari T., (1996). *Jour. de Phys. I*, **6**:1031.

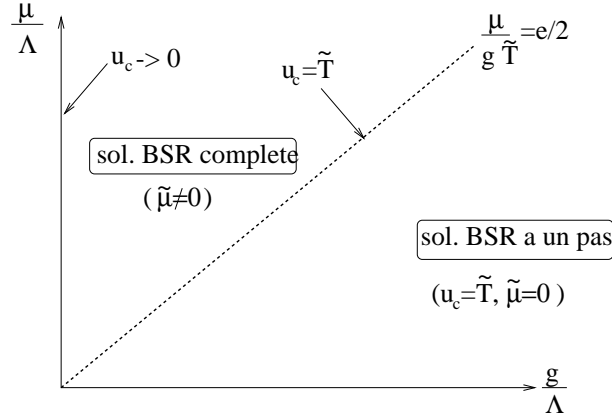


FIG. 5.12 – Diagramme des phases à basse température  $\tilde{T} \leq T_c$  obtenu par la méthode variationnelle, en l'absence de désordre de grande longueur d'onde  $\Delta = 0$ .

### Transition entre les deux verres.

◇ Transition continue lorsque  $\Delta = 0$ .

Commençons par le domaine d'existence de la phase à BSR complète en l'absence de désordre de grande longueur d'onde. Nous nous concentrons donc sur l'équation avec  $\Delta = 0$ .

La fonction  $\phi_{\tilde{T}}(v_c)$  admet un maximum pour  $v_c = 1$  qui correspond à  $u_c = \tilde{T}$ . La solution BSR complète existe donc dans le domaine de point de brisure  $0 \leq u_c \leq \tilde{T}$ , ce qui correspond d'après (5.33) à la condition

$$\frac{g\tilde{T}}{\mu} \leq \frac{2}{e} \quad (5.41)$$

La séparatrice entre le verre bidimensionnel et le verre tridimensionnel est donc dans ce cas une droite. Le long de cette ligne,  $\tilde{\mu}$  s'annule lorsque nous venons de la phase tridimensionnelle : il n'y a donc pas de saut de couplage à la transition (voir la formule (5.32)).

Par ailleurs la valeur du plateau  $\Sigma_1$  est à la transition :  $\Sigma_1/\Lambda \rightarrow \left(2g\tilde{T}/\Lambda\right)^{\frac{1}{1-\tilde{T}}}$ . Ainsi nous passons continuellement le long de cette ligne de la solution BSR complète à la solution à un niveau de BSR correspondante (5.40) : il s'agit d'une transition continue. Sachant que d'après l'équation (5B.74b) le couplage  $\tilde{\mu}$  est positif :  $\tilde{\mu} > 0$  pour tout point de brisure  $0 < u_c < 1$ , nous obtenons le diagramme des phases de la figure 5.12 à basse température  $0 \leq T \leq T_c$ .

◇ Transition faiblement du premier ordre lorsque  $\Delta \neq 0$ .

Nous pouvons maintenant étudier l'effet sur cette transition d'une faible intensité de désordre de grande longueur d'onde. L'équation qui détermine le point de brisure  $u_c$  est modifiée :

$$\Psi_{\tilde{T}}(v_c) = \phi_{\tilde{T}}(v_c) (g_{\tilde{T}}(v_c))^{\frac{\Delta\tilde{T}}{1-\tilde{T}}} = \frac{\Lambda}{\mu} \left(\frac{g\tilde{T}}{\Lambda}\right)^{1-\frac{\Delta\tilde{T}}{1-\tilde{T}}} \quad (5.42)$$

où la fonction  $\phi_{\tilde{T}}$  est définie en (5.34). La valeur correspondante du couplage  $\tilde{\mu}$  est donnée par l'équation (5B.74b). Puisque  $f_{\tilde{T}}(v) > 0$  pour toute valeur de  $v$ , nous déduisons de cette

dernière équation que la condition  $\tilde{\mu} > 0$  n'est vérifiée que pour une température plus basse que  $T^*$  :  $T \leq T^* = T_c/(1 + \Delta)$ .

Déterminons maintenant la maximum de la fonction  $\Psi_{\tilde{T}}(v)$ . Pour alléger le calcul, nous prenons la dérivée logarithmique des fonctions  $g_{\tilde{T}}$  et  $\phi_{\tilde{T}}$  :

$$\partial_v \ln(g_{\tilde{T}}(v)) = -\frac{1}{v} + \frac{\tilde{T} - v}{1 - v^2} \quad (5.43)$$

$$\partial_v \ln(\phi_{\tilde{T}}(v)) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{1 - v\tilde{T}}{v(1 + v)} \quad (5.44)$$

Les extrema sont alors donnés par

$$v_{max} = \frac{(1 - \tilde{T})^2 - (\Delta\tilde{T})^2}{(1 - \tilde{T})^2 + (\Delta\tilde{T})^2} \quad \text{ou} \quad v_c = \frac{1}{\tilde{T}} \quad (5.45)$$

Il est aisé de vérifier que le premier point correspond à un maximum alors que la fonction  $\Psi_{\tilde{T}}(v)$  est minimale au deuxième. Appelons  $\Psi_{\tilde{T}}^{max} = \Psi_{\tilde{T}}(v_{max})$  où  $v_{max}$  est la première valeur dans l'équation (5.45). La ligne de transition est alors définie par

$$\frac{\Lambda}{\mu} \left( \frac{g_{\tilde{T}}}{\Lambda} \right)^{1 - \frac{\Delta\tilde{T}}{1 - \tilde{T}}} = \Psi_{\tilde{T}}^{max} \quad (5.46)$$

Contrairement au cas précédent sans  $\Delta$ , la limite des solutions à BSR complète à la transition ne correspond pas à la solution à un pas de BSR de l'autre côté de cette transition. Regardons par exemple la valeur de  $\Sigma_1$  :  $\Sigma_1 = \tilde{\mu} \frac{(1 - \tilde{T} - \Delta\tilde{T})^2}{\Delta\tilde{T}(1 - \tilde{T})}$ . Par contre le couplage effectif  $\tilde{\mu}$  ne s'annule plus à la transition : d'après (5.32), sa valeur le long de la ligne de transition est maintenant donnée par

$$\left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{1 - \tilde{T}} = \frac{g_{\tilde{T}}}{\Lambda} \frac{1 - \tilde{T} + \Delta\tilde{T}}{1 - \tilde{T} - \Delta\tilde{T}} \left( \frac{1 - \tilde{T}}{\Delta\tilde{T}} \right)^{\tilde{T}} \quad (5.47)$$

où  $g_{\tilde{T}}/\Lambda = (\mu\Psi_{\tilde{T}}^{max}/\Lambda)^{\frac{1 - \tilde{T}}{1 - \tilde{T} - \Delta\tilde{T}}}$ . La forme des solutions à un niveau de BSR n'étant pas affectée par la présence de ce désordre à grande longueur d'onde ( $\Delta$ ), nous en déduisons que nous passons discontinuellement d'une solution à une autre à la transition. La transition entre les deux verres devient donc faiblement du premier ordre en présence d'une petite intensité  $\Delta$ . Le saut du couplage effectif à cette transition du premier ordre donne une idée de l'intensité de la discontinuité qui lui est associée. Ce saut du couplage est donnée par la formule (5.47). Pour être complet, nous devons également donner l'expression de la fonction  $\Psi_{\tilde{T}}^{max}$  qui entre dans cette expression :

$$\Psi_{\tilde{T}}^{max} = 2 \frac{1 - \tilde{T} - \Delta\tilde{T}}{1 - \tilde{T} + \Delta\tilde{T}} \left( \frac{2\Delta\tilde{T}(1 - \tilde{T})}{(1 - \tilde{T})^2 - \Delta\tilde{T}^2} \left( \frac{1 - \tilde{T}}{\Delta\tilde{T}} \right)^{\tilde{T}} \right)^{\frac{\Delta\tilde{T}}{1 - \tilde{T}}} \exp \left( \Delta\tilde{T} \frac{1 + \tilde{T}}{1 - \tilde{T}} - 1 \right) \quad (5.48)$$

Remarquons également que lorsque la température réduite  $\tilde{T}$  tend vers  $T_c = 1/(1 + \Delta)$ , l'expression du couplage effectif  $\tilde{\mu}$  tend continuellement vers 0. De plus dans cette limite  $T \rightarrow T_c$ , la séparatrice (5.46) tend également vers une courbe limite  $\frac{\mu}{\Lambda} = e^{-1/(1 + \Delta)}$  indépendante de l'intensité du désordre  $g$ .

### Transition continue vers la phase liquide

◇ *La transition entre le verre bidimensionnel et la phase liquide.*

Les propriétés des phases liquide et vitreuse bidimensionnelle ne dépendent pas de l'intensité du désordre  $\Delta$ , la transition entre ces deux phases n'est pas affectée par la présence de ce désordre de grande longueur d'onde. Pour étudier cette transition, prenons la limite  $\tilde{T} \rightarrow 1$  de la solution à un niveau de BSR avec  $\tilde{\mu} = 0$ . Dans cette limite,  $u_c$  tend vers 1 alors que dans le même temps  $\sigma_0$  s'annule. Cette limite correspond exactement à une solution symétrique (invariante par permutation des répliques)  $\sigma(u) = 0; \tilde{\mu} = 0$ . La transition est ainsi continue.

◇ *Transition entre verre de BRAGG et phase liquide*

Nous savons que la solution correspondant au verre de BRAGG (phase avec BSR complète) dépend de l'intensité du désordre de grande longueur d'onde  $\Delta$ . Nous allons donc nous intéresser dans un premier temps au cas sans  $\Delta$ . Afin de prendre avec précaution la limite  $\tilde{T} \rightarrow 1$  de la solution BSR complète, nous revenons aux équations (5B.65-5B.70) initiales qui la définissent. Cette dernière se simplifie dans cette limite pour donner  $\sigma_1 = \frac{g}{\Lambda} \left( \frac{\sigma_1}{u_c} + \sigma_1 \right)$ . La condition  $u_c = g/\Lambda(1 - g/\Lambda)^{-1}$  ne pouvant être satisfaite pour toute valeur de  $\mu$ , nous en déduisons qu'alors  $\sigma_1 = 0; \tilde{\mu} = 0$ . Ce résultat plaide donc en faveur d'une transition continue vers la phase liquide.

Ajoutons maintenant une petite intensité  $\Delta \neq 0$ . Ce cas est différent du précédent : comme il est possible de le voir sur l'expression du point de brisure (5.45), dans ce cas la solution BSR complète cesse d'exister pour des températures plus grande que  $T^* = T_c/(1 + \Delta)$ , qui est plus petite que  $T_c$  pour un  $\Delta$  fini. Juste au dessous de  $T^*$ , le domaine d'existence de la phase verre de BRAGG est considérablement réduit (comme dans l'étude du modèle de LARKIN, et la ligne de transition est donnée par (5.46)). Près de  $T_c$ , la solution n'existe plus que dans un domaine non perturbatif ou cette approche ne s'applique plus. De plus une analyse précise de stabilité serait alors nécessaire.

Le diagramme des phases final est résumé sur la figure 5.13.

## 5.5 Effets d'un désordre corrélé

Dans cette partie nous utilisons les méthodes de renormalisation précédentes pour étudier (par simple curiosité<sup>2</sup>) l'effet d'un désordre corrélé orthogonalement aux plans de lignes de flux. Le hamiltonien correspondant se déduit de (5.1,5.4) en imposant des corrélations au potentiel :  $\Delta \equiv \delta_{11} = \delta_{12}, g = g_{11} = g_{12}$ . Nous obtenons alors le modèle

$$\frac{H}{T} = \int_{\mathbf{r}} \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2(\mathbf{r}) - \mu_{12} \cos(\phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r})) - \sum_i [\eta_i \cdot \nabla_i(\mathbf{r}) - \zeta_i^x \cos(\phi_i(\mathbf{r})) - \zeta_i^y \sin(\phi_i(\mathbf{r}))] \quad (5.49)$$

Comme précédemment nous allons nous concentrer sur les premiers harmoniques du potentiel, correspondant aux opérateurs les plus pertinents. La géométrie du modèle est

---

2. L'étude présentée dans cette partie n'a pas été publiée et est susceptible d'être étendue et précisée dans des travaux à venir.



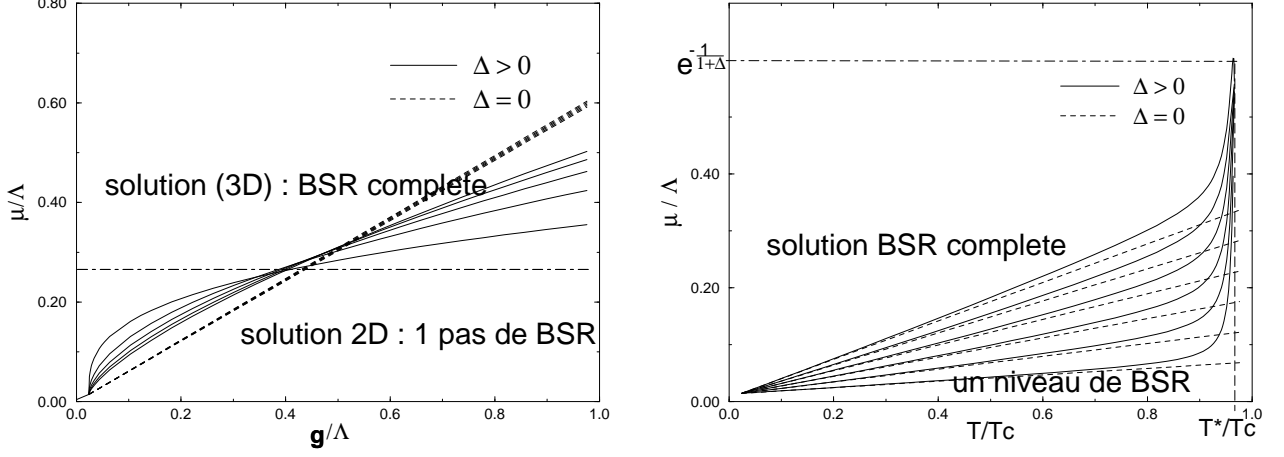


FIG. 5.13 – Diagramme des phases du modèle de plans couplés obtenu par la méthode variationnelle, pour différentes valeurs de la température  $T$  à gauche, et du désordre  $g/\Delta$  à droite. Les diagrammes avec et sans intensité  $\Delta$  sont représentés.

représentée sur la figure 5.14. Il est intéressant en particulier de remarquer que le signe de la constante de couplage  $\mu_{12}$  est relié aux positions relatives l'un par rapport à l'autre des réseaux de vortex de deux plans voisins.

Nous pouvons directement utiliser les équations (5.14) en les particulierisant à ce nouveau modèle. Nous utilisons les notations de la partie 5.3.2 :  $k = \epsilon_{11} - \epsilon_{12}$ ,  $k_c = \epsilon_{11} + \epsilon_{12}$ ,  $\mu = \mu_{12} + g$ . Le comportement à grande distance du modèle est alors déterminé par les équations

$$\partial_l k = \beta_k = \frac{1}{2}(\mu^2 - g^2) \quad (5.50a)$$

$$\partial_l \mu = \beta_\mu = 2k\mu - g^2 \quad (5.50b)$$

$$\partial_l g = \beta_g = (k + k_c)g + \mu g - 2g^2 \quad (5.50c)$$

$$\partial_l k_c = 0 \quad (5.50d)$$

$$\partial_l \Delta = g^2/4 \quad (5.50e)$$

En regardant ces équations nous pouvons vérifier que l'ensemble des hamiltoniens avec un désordre corrélé selon  $z$  correspond bien à un sous espace stable : les conditions  $\delta_{11} = \delta_{12}$  et  $g_{11} = g_{12}$  sont invariantes par renormalisation. Nous pouvons également identifier d'autres sous espaces laissés stables par le flot de renormalisation.

◇ *Sous espaces stables* : le plan  $\mu - g = k - k_c = 0$  est une sous-variété stable de l'espace des paramètres. Si nous réduisons notre étude à ce plan nous retrouvons les équations de renormalisation obtenues par CARDY et OSTLUND dans leur étude du modèle XY en présence d'un champ magnétique aléatoire (Cardy & Ostlund 1982). En particulier les points fixes de CARDY et OSTLUND sont ici des points fixes perturbatifs pour le modèle

Cardy J. & Ostlund S., (1982). *Phys. Rev. B*, **25**:6899–6909.

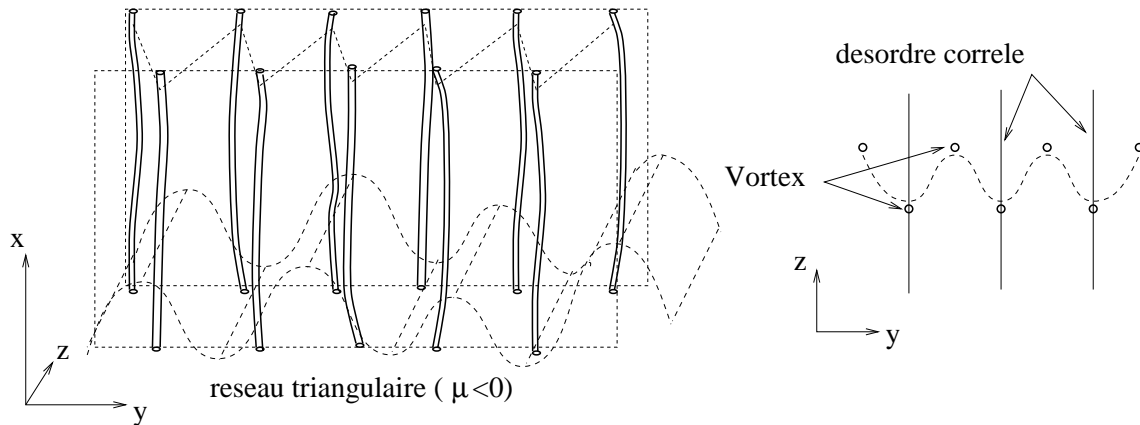


FIG. 5.14 – *Geométrie du modèle en présence d'un désordre corrélé dans le cas  $\mu_{12} \leq 0$ . Le potentiel désordonné est maintenant invariant par translation selon l'axe  $z$ . Le signe  $-$  du couplage  $\mu_{12}$  correspond à un réseau triangulaire : les vortex sont décalés d'un plan à l'autre. L'étude proposée correspond en fait à la situation  $\mu_{12} \geq 0$  : dans l'autre cas le désordre corrélé n'a quasiment aucun effet (voir le texte) : l'énergie gagnée par les déplacements dans un plan est alors perdue dans le plan voisin. La situation est différente pour le réseau carré ( $\mu_{12} \geq 0$ ).*

complet :

$$\text{point fixe CO} \quad \begin{cases} k = k_c & ; \quad \mu = g \\ \Delta \rightarrow \infty \\ g^* = \mu^* = 2k_c \geq 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

Un point fixe correspondant à une phase à haute température est également présent dans ce sous espace. Le diagramme de flot de renormalisation dans ce plan stable est représenté sur la figure 5.15. Nous pouvons déduire des équations de renormalisation que  $k$  n'est pas renormalisé, et que le flot est entièrement déterminé par le comportement d'échelle de  $g$ .

◇ *Points fixes:*

Le flot de renormalisation est dominé par trois différents points fixes perturbatifs. Dans

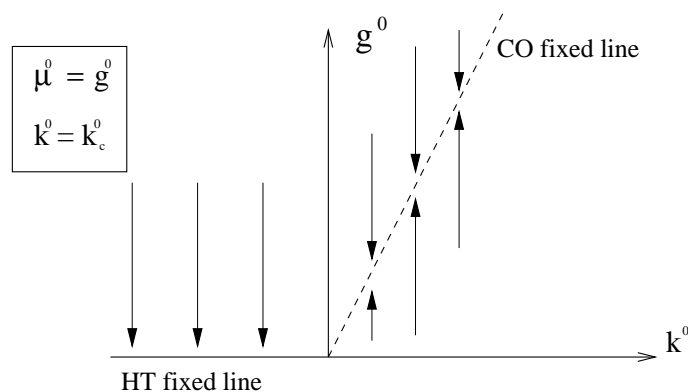


FIG. 5.15 – *Flot de renormalisation du modèle avec désordre corrélé, restreint au plan  $\mu=g, k = k_c$ .*

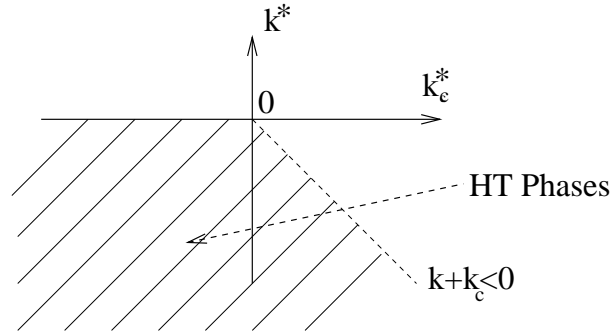


FIG. 5.16 – Région de stabilité de la ligne de points fixes de haute température (zone hachurée).

notre étude, nous allons considérer  $k_c$  comme un paramètre. De plus nous pouvons remarquer que l'intensité du désordre  $\Delta$  se découple du reste du hamiltonien par suite de la symétrie statistique du modèle identique à celle du modèle planaire (Hwa & Fisher 1994, Toner & DiVicenzo 1990) (voir aussi à ce sujet le chapitre suivant).

Afin de déterminer la nature des points fixes, nous allons étudier les valeurs propres de la matrice de stabilité associée à chacun de ces points fixes. Cette dernière est définie en fonction des fonctions  $\beta$  du groupe de renormalisation par  $M_{ij} = \partial\beta_i/\partial x_j$ . Pour nos équations de renormalisation (5.50), elle est définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mu & -g \\ 2\mu & 2k & -2\mu \\ g & g & (k + k_c) + \mu - 4g \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Le premier point fixe que nous étudions appartient à la ligne de points fixes habituels de haute température. Cette ligne est stable pour  $k^* \leq 0$  et  $k^* + k_c^* \leq 0$  (voir la figure 5.16).

Le second point fixe perturbatif correspond à la ligne de points fixes de CARDY-OSTLUND définis pour  $k_c > 0$ . Les valeurs propres de la matrice de stabilité associée sont, dans les coordonnées  $(k, \mu, g)$  : une valeur propre  $(-k_c)$  associée au plan  $\{[1, 0, 1]; [-1, 1, 0]\}$  et une valeur propre positive  $(+k_c)$  associée à la direction  $[1, 2, 1]$ . Ce point fixe est donc associé à une transition.

Finalement le point désordonné anti-ferromagnétique (AD) est défini par  $\mu^* = -g^* = 2k^*$ ;  $k^* = -\frac{1}{7}k_c$  qui n'existe que pour  $k_c \geq 0$  (demi-ligne de points fixes). Les valeurs propres négatives  $(k, 3k)$  de la matrice de stabilité sont associées au plan  $\{[1, 0, 1]; [0, -1, 1]\}$  alors que le vecteur propre correspondant à la valeur propre positive  $(-k)$  est défini par les coordonnées  $[-1, 1, 0]$ . Ce point correspond donc à un point fixe de transition.

Le flot peut également quitter le domaine perturbatif, ce qui correspond à un comportement tridimensionnel dans lequel les plans sont couplés les uns aux autres.

Ainsi le flot de renormalisation à  $k_c \leq 0$  possède deux points fixes de transition, qui tous deux sont associés à deux surfaces critiques. Les directions des vecteurs propres associés aux valeurs propres positives correspondent aux directions "pertinentes".

Hwa T. & Fisher D., (1994). *Phys. Rev. Lett.*, **72**:2466.

Toner J. & DiVicenzo D., (1990). *Phys. Rev. B*, **41**:632.

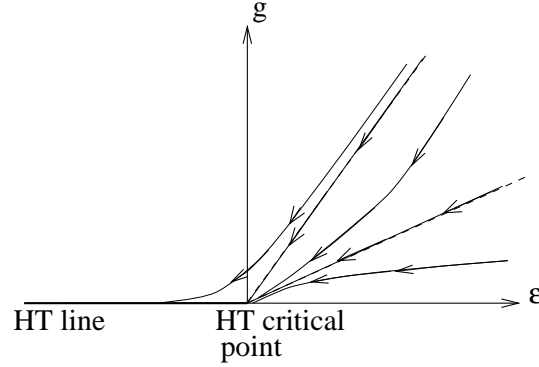


FIG. 5.17 – Flot de renormalisation autour du point de transition  $KT$  ( $\mu = g = 0, k = -k_c$ ).

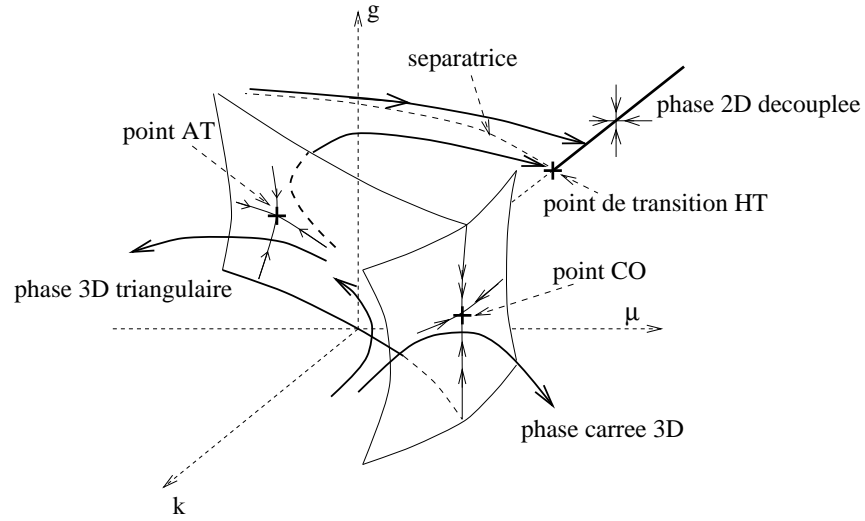
Le diagramme des phases qui se déduit de tout ceci est représenté sur la figure 5.18 pour  $k_c \geq 0$ . Les deux phases tridimensionnelles sont : une phase désordonnée caractérisée par  $(\mu, g, k \rightarrow \infty)$  et une phase correspondant à un réseau tridimensionnel d'Abrikosov triangulaire pur (AT), dans laquelle les réseaux de lignes sont décalés d'un plan à l'autre ( $g \rightarrow 0, \mu \rightarrow -\infty, k \rightarrow \infty$ ). La non pertinence du désordre autour de ce point fixe AT peut paraître étonnante *a priori* : nous nous attendrions à ce que ce désordre détruise cette phase à température nulle. Cependant nous devons nous souvenir que nous ne prenons en compte ici que la première harmonique du désordre qui a une périodicité égale à  $a$ . Un simple regard à la figure 5.14 suffit pour nous convaincre qu'un tel désordre ne sera pas efficace dans la destruction d'un réseau tridimensionnel. Cependant les harmoniques plus élevés du désordre déstabiliserait sans aucun doute ce point fixe, à une température cependant plus faible que  $T_c$ .

Autour du plan critique  $KT$ , le flot est dominé par la renormalisation de  $g$  et  $\epsilon = k + k_c$  puisque  $\mu$  est d'ordre  $g^2$ . Dans ce régime les équations de renormalisation s'écrivent :

$$\begin{aligned}\partial_l g &= \epsilon g - 2g^2 \\ \partial_l \epsilon &= -\frac{1}{2}g^2\end{aligned}$$

La pente locale de la ligne de flot  $\lambda(l) = g(l)/\epsilon(l)$  satisfait l'égalité  $\lambda'(l) = \lambda(\lambda^2/2 - 2\lambda + 1)\epsilon(l)$ . Il existe donc deux lignes invariantes sous ces équations de renormalisation, qui correspondent aux pentes  $\lambda^* = 2 \pm \sqrt{2}$ . Puisque  $\epsilon(l)$  ne peut que décroître, le flot se rapproche du point critique le long de ces lignes. La recherche d'une valeur limite finie pour  $\lambda^*$  avec  $\epsilon^* = g^* = 0$  nous amène à une incohérence dans les équations ci-dessus : la ligne  $g = (2 + \sqrt{2})\epsilon$  est donc la séparatrice entre le bassin d'attraction du point fixe critique de haute température et de la région qui converge vers la ligne de points fixes à  $k < k_c$ . Le flot complet est reporté sur la figure 5.18

Le diagramme des phases dans la région  $k_c \leq 0$  est beaucoup moins intéressant et ne sera pas étudié ici.

FIG. 5.18 – Flot de renormalisation pour  $k_c \geq 0$ .

## 5.6 Conclusion

Nous venons ainsi d'étudier un modèle de plans de vortex parallèles les uns aux autres. À l'aide du groupe de renormalisation et de la méthode variationnelle avec répliques nous avons montré que le désordre induisait dans ce modèle une transition du premier ordre correspond à une prolifération de boucles de dislocations induite par le substrat désordonné. Des arguments d'énergies (pour une boucle de dislocation) et une méthode variationnelle sans répliques ont été utilisées dans (Kierfeld & Hwa 1996) pour obtenir des résultats comparables.

Cette étude montre donc, dans un cas certes particulier, que la phase de verre de BRAGG est bien stable en dimension trois, et est détruite par un désordre trop fort. Ce désordre induit alors des boucles de dislocations dans le réseau. Cette étude est donc en accord avec les résultats de (Giamarchi & Le Doussal 1995).

Afin de mieux comprendre cette transition, nous pouvons la relier à quelques longueurs caractéristiques de ce réseau. Dans la phase tridimensionnelle (verre de BRAGG), dans chaque plan le réseau n'est couplé aux plans voisins qu'à des échelles plus grandes qu'une longueur  $R_{3d}$ . Celle-ci peut être évaluée simplement en développant le couplage en cosinus (dans la limite d'un couplage effectif important) et en utilisant un argument d'échelle :  $c(a/R_{3d})^2 \sim \tilde{\mu}a^2(2\pi/a)^2$  où  $\tilde{\mu}$  est le couplage effectif entre plan (voir le corps du chapitre). Ceci nous donne une évaluation de  $R_{3d}$  :  $R_{3d} \sim 2\pi\sqrt{c/\tilde{\mu}}$ . D'après l'expression (5.22) du couplage effectif, nous obtenons

$$R_{3d} \sim \left( \frac{\mu e^{\tilde{T}}}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{2(1-\tilde{T})}}$$

Chaque plan est par ailleurs également caractérisé par la longueur translationnelle bidi-

---

Kierfeld J. & Hwa T., (1996). *Phys. Rev. Lett.*, **77**:4233.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

mensionnelle  $R_a \sim a(2\pi\Lambda/Tg)^{\frac{1}{2(1-T)}}$ . Comme l'étude de renormalisation nous le suggère (et ce qui apparaît physiquement raisonnable), nous retrouvons la transition (5.23) de découplage du premier ordre lorsque ces deux longueurs deviennent du même ordre. Ce lien entre couplage effectif et ordre bidimensionnel dans les plans se trouve déjà dans la définition de  $\tilde{\mu}$ . Ainsi si la longueur  $R_a$  est plus grande que  $R_{3d}$ , le désordre est trop faible pour détruire l'ordre du réseau en dessous de  $R_{3d}$ : les vortex se couplent donc entre plans (au delà de  $R_{3d}$ ) comme dans le cas pur. Dans le second cas au contraire le désordre est suffisamment fort dans chaque plan pour induire des déplacements relatifs de l'ordre de  $a$  en dessous de  $R_{3d}$ . Ces déplacements empêchent le couplage entre plan et conduisent à une phase amorphe.

En conclusion, remarquons que la généralisation de notre étude au cas général du réseau tridimensionnel isotrope paraît cependant délicate: dans le cas général nous devons considérer des boucles de dislocations qui ne sont plus planaires, mais peuvent fluctuer dans les trois directions. De tels défauts topologiques auraient *a priori* une énergie plus faible que les boucles de dislocations planaires dans le cas général.

## Annexe A Equations variationnelles

Dans cet annexe nous établissons les équations variationnelles générales pour le hamiltonien :

$$H = \int d^2\mathbf{r} \frac{1}{2} K_{ij}^{-1} \nabla \phi_i \nabla \phi_j - \mathcal{M}_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j) \quad (5A.53)$$

Les hamiltoniens gaussiens d'essai sont défini par une matrice  $G$  :

$$H_0 = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \phi_i(\mathbf{q}) [G(\mathbf{q})^{-1}]_{ij} \phi_j(-\mathbf{q}) \quad (5A.54)$$

L'énergie variationnelle est, quant à elle, donnée par

$$\begin{aligned} F_{var} &= -T \ln Tr \exp(-H_0/T) + \langle H - H_0 \rangle_{H_0} \\ &= \frac{T}{2} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} Tr [-\ln G(\mathbf{q}) + q^2 K G(\mathbf{q})] - \sum_{ij} \mathcal{M}_{ij} \exp\left(-\frac{1}{2} B_{ij}\right) \end{aligned} \quad (5A.55)$$

avec les corrélateurs

$$B_{ij} = T \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} (G(\mathbf{q})_{ii} + G(\mathbf{q})_{jj} - 2G(\mathbf{q})_{ij})$$

La maximisation de cette énergie libre par rapport aux coefficients de la matrice  $G_{ij}(\mathbf{q})$  donne les équations de point col suivantes :

$$G(q)_{ij}^{-1} = K_{ij} q^2 + \sigma_{ij} \quad (5A.56)$$

$$\sigma_{ij} = 2 \left( \delta_{ij} \sum_k \mathcal{M}_{ik} e^{-\frac{1}{2} B_{ik}} - \mathcal{M}_{ij} e^{-\frac{1}{2} B_{ij}} \right) \quad (5A.57)$$

Nous pouvons maintenant particulariser ces équations au modèle (5.5) en décomposant l'indice  $i$  en un indice de réplique  $a$  et un indice de plan  $\alpha$  :  $i = (a, \alpha)$  où  $a \in [1, \dots, m]$ . En utilisant la condition (5.6), nous obtenons

$$G(\mathbf{q})_{a\alpha, b\beta}^{-1} = K_{a\alpha, b\beta}^{-1} q^2 + \sigma_{a\alpha, b\beta} \quad \sigma_{a\alpha, b\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^c \delta_{ab} + \bar{\sigma}_{a\alpha, b\beta} \quad (5A.58)$$

où nous avons décomposé l'énergie libre en une somme de sa partie connexe  $\sigma_{\alpha\beta}^c$ , qui va modifier la valeur du couplage  $\mu$  entre plan, et une composante  $\bar{\sigma}_{a\alpha, b\beta}$  qui modifie le désordre. Cette dernière vérifie  $\sum_b \bar{\sigma}_{a\alpha, b\beta} = 0$ . Cette énergie devient ainsi

$$\sigma_{\alpha\beta}^c = 2 \left( \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \mu_{\alpha\gamma} e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, a\gamma}} - \mu_{\alpha\beta} e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, a\beta}} \right) \quad (5A.59)$$

$$\begin{aligned} &+ \delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} \sum_b e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, b\gamma}} - g_{\alpha\beta} \sum_b e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, b\beta}} \\ \bar{\sigma}_{a\alpha, b\beta} &= -2g_{\alpha\beta} \left( e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, b\beta}} - \delta_{ab} \sum_c e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, c\beta}} \right) \end{aligned} \quad (5A.60)$$

Si nous nous restreignons encore un peu plus en ne gardant que les termes présents dans la hamiltonien initial (5.4), il ne nous reste plus que

$$\sigma_{\alpha\beta}^c = \tilde{\mu} (2\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha+1,\beta} - \delta_{\alpha-1,\beta}) \quad (5A.61)$$

$$\tilde{\mu} = \mu e^{-1/2 B_{a\alpha, a\alpha+1}} \quad (5A.62)$$

$$\bar{\sigma}_{a\alpha, b\beta} = -2g\delta_{\alpha\beta} \left( e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, b\alpha}} - \delta_{ab} \sum_c e^{-\frac{1}{2} B_{a\alpha, c\alpha}} \right) \quad (5A.63)$$

où nous avons imposé des conditions aux limites périodiques dans la direction  $z$ .

## Annexe B Solutions des équations variationnelles

### B.1 Solution à BSR complète

Dans cette partie, nous recherchons des solutions des équations variationnelles (5.25) qui brisent complètement la symétrie de permutations des répliques, et sont donc paramétrisées par (5.28). En utilisant les formules d'inversion de matrice hiérarchiques (Mézard & Parisi 1991) :

$$B_{\alpha, \alpha}(u) = B_{\alpha, \alpha}(u_c) + 2T \int_{q, q_z} \int_u^{u_c} dv \frac{\sigma'(v)}{(G_c^{-1}(q, q_z) + [\sigma](u))^2}$$

et en dérivant par rapport au paramètre  $u$  l'équation pour  $\sigma(u)$  ci-dessus, nous obtenons

$$1 = \sigma(u) \int_{q, q_z} \frac{T}{(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos(q_z l)) + [\sigma](u))^2} \quad (5B.64)$$

Après intégration cela nous donne

$$\frac{\sigma(u)}{\sqrt{[\sigma](u)(4\tilde{\mu} + [\sigma](u))}} = \frac{T_c}{T} \quad (5B.65)$$

avec  $T_c = 4\pi$ . Puisque  $[\sigma](0) = 0$ , cette équation implique que  $\sigma(0) = 0$ . En utilisant la relation  $[\sigma](u)' = u\sigma(u)'$  nous obtenons la forme de la solution à BSR complète pour  $u < u_c$ :

$$\sigma(u) = 2\tilde{\mu} \frac{u\tilde{T}^{-2}}{\sqrt{1 - u^2\tilde{T}^{-2}}} \quad (5B.66)$$

$$[\sigma](u) = 2\tilde{\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - u^2\tilde{T}^{-2}}} - 1 \right) \quad (5B.67)$$

avec la température réduite  $\tilde{T} = T/T_c$ . Il nous reste maintenant à déterminer le point de brisure  $u_c$ , qui est défini implicitement en même temps que  $\tilde{\mu}$  par les deux équations



couplées suivantes :

$$\frac{\sigma(u_c)}{2g} = \exp \left( -T \int_{q,q_z} \frac{1}{G_c^{-1}(q, q_z) + [\sigma](u)} \right) \quad (5B.68)$$

$$\tilde{\mu} = \mu \exp \left( -T \int_{q,q_z} (1 - \cos(q_z l)) \tilde{G}(q, q_z) \right) \quad (5B.69)$$

Les intégrales de ces équations se calculent à l'aide de l'annexe suivante et déterminent la valeur du point de brisure (5B.68,5B.69). Afin de remédier à leur divergence infrarouge, nous introduisons un cut-off uniforme  $\sqrt{\Lambda}$  pour l'impulsion  $\mathbf{q}$ . En gardant les termes dominants dans la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  nous obtenons l'équation auto-cohérente (5B.68), qui permet de déterminer le point de brisure  $u_c$ . Cela nous donne

$$\frac{\sigma(u_c)}{2g} = \left( \frac{[\sigma](u_c) + 2\tilde{\mu} + \sqrt{[\sigma](u_c)([\sigma](u_c) + 4\tilde{\mu})}}{2\Lambda} \right)^{\tilde{T}} \quad (5B.70)$$

qui peut se réécrire en s'aidant de (5B.65) et (5.31) sous la forme

$$\left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{1-\tilde{T}} = \frac{g\tilde{T}}{\Lambda} g_{\tilde{T}}(v_c) \quad (5B.71a)$$

$$g_{\tilde{T}}(v) = \frac{\sqrt{1-v^2}}{v} \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \quad (5B.71b)$$

où nous avons utilisé la notation  $v_c = u_c/\tilde{T}$ . Revenons maintenant à la deuxième équation (5B.69). La formule d'inversion nous donne

$$\tilde{G}(q, q_z) = \Delta q^2 G_c^2(q, q_z) + G_c(q, q_z) \left( 1 + \int_0^1 \frac{du}{u^2} [\sigma](u) (G_c^{-1}(q, q_z) + [\sigma](u))^{-1} \right)$$

De la même manière que ci-dessus nous obtenons

$$\left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{1-\tilde{T}(1+\Delta)} = \frac{\mu}{\Lambda} \exp \left( \tilde{T}(1+2\Delta) - \frac{\tilde{T}}{2\tilde{\mu}} \int_0^1 \frac{h(u)}{u^2} du \right) \quad (5B.72)$$

où

$$h(u) = [\sigma](u) - \sqrt{[\sigma](u)([\sigma](u) + 4\tilde{\mu})} + 2\tilde{\mu} \ln \left( \frac{2\tilde{\mu} + [\sigma](u) + \sqrt{[\sigma](u)([\sigma](u) + 4\tilde{\mu})}}{2\tilde{\mu}} \right) \quad (5B.73)$$

Nous pouvons maintenant utiliser l'expression (5.31) pour  $[\sigma](u)$  dans la fenêtre  $0 < u < u_c$ , et  $T < T_c$ . Le résultat final prend la forme assez simple

$$\left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{1-\tilde{T}(1+\Delta)} = \frac{\mu}{\Lambda} f_{\tilde{T}}(v_c) \quad (5B.74a)$$

$$f_{\tilde{T}}(v_c) = \left( \sqrt{\frac{1+v_c}{1-v_c}} \right)^{\tilde{T}} \frac{2\sqrt{1-v_c^2}}{1+\sqrt{1-v_c^2}} \times \exp \left[ (1+\tilde{T}) \sqrt{\frac{1-v_c}{1+v_c}} - 1 \right] \quad (5B.74b)$$

L'équation qui détermine  $u_c$  est alors obtenue en combinant les équations (5B.71a,5B.74a) (voir le corps du chapitre).

## B.2 Solutions à un niveau de BSR

Revenons tout d'abord à l'expression de l'énergie libre (5A.55). Dans le cas de matrices à un niveau de BSR, les formules d'inversion donnent (Mézard & Parisi 1991)

$$\begin{aligned}\tilde{G}(q, q_z) &= \frac{1}{u_c} G_c(q, q_z) + \left(1 - \frac{1}{u_c}\right) \frac{1}{G_c^{-1}(q, q_z) + \Sigma_1} + (\sigma_0 + \Delta q^2) G_c^2(q, q_z) \\ G(q, q_z, u) &= \begin{cases} \frac{\Sigma_1 G_c(q, q_z)}{u_c(G_c^{-1}(q, q_z) + \Sigma_1)} + (\sigma_0 + \Delta q^2) G_c^2(q, q_z) & \text{pour } u > u_c \\ (\sigma_0 + \Delta q^2) G_c^2(q, q_z) & \text{pour } u < u_c \end{cases} \\ [G](q, q_z, u) &= \begin{cases} \frac{\Sigma_1 G_c(q, q_z)}{G_c^{-1}(q, q_z) + \Sigma_1} & \text{pour } u > u_c \\ 0 & \text{pour } u < u_c \end{cases}\end{aligned}$$

Nous avons également besoin de la relation (Mézard & Parisi 1991)

$$\frac{1}{m} Tr \log G \underset{m \rightarrow 0}{\simeq} \log \left( \tilde{G} - \langle G \rangle \right) + \frac{G(0)}{\tilde{G} - \langle G \rangle} - \int_0^1 \frac{du}{u^2} \log \left( \frac{\tilde{G} - \langle G \rangle - [G](u)}{\tilde{G} - \langle G \rangle} \right)$$

En utilisant ces formules, nous pouvons écrire l'énergie libre sous la forme

$$\begin{aligned}F_{var} &= \frac{T}{2} \int_{q, q_z} \left[ q^2 (\tilde{G}(q, q_z) - \Delta G_c(q, q_z)) - \left[ \log \left( \tilde{G} - \langle G \rangle \right) + \frac{G(0)}{\tilde{G} - \langle G \rangle} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 \frac{du}{u^2} \log \left( \frac{\tilde{G} - \langle G \rangle - [G](u)}{\tilde{G} - \langle G \rangle} \right) \right] \right] - \tilde{\mu} + u_c g_1 + (1 - u_c) g_2 \quad (5B.75)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les variables auxiliaires

$$\tilde{\mu} = \mu \exp \left[ -T \int_{q, q_z} (1 - \cos q_z) \tilde{G}(q, q_z) \right] \quad (5B.76)$$

$$g_2 = g \exp \left[ -T \int_{q, q_z} \frac{1}{G_c^{-1} + \Sigma_1} \right] \quad (5B.77)$$

$$g_1 = g_2 \exp \left[ -T \int_{q, q_z} \frac{\Sigma_1 G_c}{u_c (G_c^{-1} + \Sigma_1)} \right] \quad (5B.78)$$

La forme explicite de  $G_c^{-1}$  nous permet alors de calculer  $\tilde{\mu}$ ,  $g_1$  et  $g_2$ . Il est utile de remarquer que l'expression pour  $g_2$  est identique à celle de  $\sigma_1$  pour la solution à BSR complète.

Nous introduisons un cut-off infrarouge  $\sqrt{\Lambda}$  pour les moments  $q$  dans l'expression de  $g_2$ , de façon analogue à l'étude de la solution à BSR complète. Nous obtenons ainsi

$$g_1 = g_2 \left( \frac{2\tilde{\mu}}{\Sigma_1 + 2\tilde{\mu} + \sqrt{\Sigma_1(\Sigma_1 + 4\tilde{\mu})}} \right)^{\frac{\hat{T}}{u_c}} \quad (5B.79)$$

$$g_2 = g \left( \frac{\Sigma_1 + 2\tilde{\mu} + \sqrt{\Sigma_1(\Sigma_1 + 4\tilde{\mu})}}{2\Lambda} \right)^{\hat{T}} \quad (5B.80)$$

$\tilde{\mu}$  peut maintenant être calculé à l'aide de (5B.72) qui est toujours valable :

$$\frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} = \frac{\mu}{\Lambda} \left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{\tilde{T}(1+\Delta)} \times \exp \left( \tilde{T}(1+2\Delta - \frac{\sigma_0}{2\tilde{\mu}}) - \frac{\tilde{T}}{2\tilde{\mu}} (\frac{1}{u_c} - 1) h(1) \right) \quad (5B.81)$$

avec

$$h(1) = \Sigma_1 - \sqrt{\Sigma_1(\Sigma_1 + 4\tilde{\mu})} + \ln \left( 1 + \frac{\Sigma_1 + \sqrt{\Sigma_1(\Sigma_1 + 4\tilde{\mu})}}{2\tilde{\mu}} \right) \quad (5B.82)$$

Revenons maintenant à l'équation variationnelle (5.39). Après une intégration rapide, et avec l'aide de l'expression de  $g_1$  et  $g_2$ , elle se transforme en

$$-\frac{\tilde{T}}{2} \sqrt{\Sigma_1(\Sigma_1 + 4\tilde{\mu})} + u_c^2(g_2 - g_1) = u_c(u_c g_1 - \tilde{\mu}) \ln \frac{g_2}{g_1} \quad (5B.83)$$

L'étude de la solution bidimensionnelle de cette équation a déjà été faite dans le corps du chapitre. Nous allons maintenant rapidement commenter ses solutions tridimensionnelles.

◇ *Solution tridimensionnelles à un niveau de BSR*

Comme nous allons le voir, il n'est pas nécessaire pour trouver le domaine de stabilité d'une solution tridimensionnelle de résoudre explicitement cette équation. Nous pouvons directement prendre la limite  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$  de la solution.

Dans la limite d'un faible couplage effectif  $\tilde{\mu}$ , les équations (5B.79-5B.83) deviennent

$$g_1 \approx \frac{g}{\Lambda} \left( \frac{\Sigma_1}{\Lambda} \right)^{\tilde{T} - \frac{\tilde{T}}{u_c}} \left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{\frac{\tilde{T}}{u_c}} \quad (5B.84)$$

$$g_2 \approx g \left( \frac{\Sigma_1}{\Lambda} \right)^{\tilde{T}} \quad (5B.85)$$

$$\frac{g_1}{\tilde{\mu}} \approx \frac{g}{\mu} e^{2\tilde{T}\Delta} \left( \frac{\tilde{\mu}}{\Lambda} \right)^{\tilde{T}\Delta} \exp \left( \tilde{\mu} \left( \frac{g_1}{\tilde{\mu}} - \frac{1}{u_c} \right) \right) \quad (5B.86)$$

$$u_c \approx \tilde{T} + \frac{2\tilde{T}}{\Sigma_1} \tilde{\mu} \ln \tilde{\mu} \quad (5B.87)$$

où nous n'avons gardé que les termes dominants dans la limite d'un grand cut-off  $\Lambda$ . Ainsi dans la limite  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ ,  $g_1$  s'annule continuellement : nous retrouvons donc la solution bidimensionnelle. Les équations (5B.85-5B.87) donnent la forme de la solution dans ce cas limite (avec  $\Delta = 0$ ) :

$$u_c \rightarrow \tilde{T} \quad \frac{\Sigma_1}{\Lambda} \rightarrow \left( \frac{2\tilde{T}g}{\Lambda} \right)^{\frac{1}{1-\tilde{T}}}$$

Cette forme correspond exactement à la solution bidimensionnelle : nous passons donc continuellement d'une solution à l'autre. Dans ce cas la détermination du domaine d'existence devient cruciale. En combinant (5B.84) et (5B.86), nous obtenons cette détermination :

$$\frac{g\tilde{T}}{\tilde{\mu}} = \frac{\sqrt{e}}{2} \quad (5B.88)$$

Une analyse de stabilité suivant les études (Temesvari et al. 1994, Carlucci et al. 1996) serait donc nécessaire pour montrer que cette solution 3D est partout instable lorsqu'elle coexiste avec la solution 2D correspondante. Cette étude n'est cependant pas au programme de ce chapitre.

## Annexe C Quelques intégrales utiles à la lecture de ce chapitre

Nous rappelons ici la valeur de quelques intégrales qui sont nécessaires à l'application de la méthode variationnelle au modèle étudié dans ce chapitre. Leur expression dominante dans la limite d'un grand cut-off  $q_{max} = \sqrt{\Lambda}$  est également fournie. .

---

Temesvari T., De Dominicis C., & Kondor I., (1994). *J. Phys. A.*, **27**:7569.

Carlucci D., De Dominicis C., & Temesvari T., (1996). *Jour. de Phys. I*, **6**:1031.

- ◇  $I_1 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{1}{q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z) + [\sigma]} \approx \log(2\Lambda^2) - \log\left(2\tilde{\mu} + [\sigma] + \sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])}\right)$
- ◇  $I_2 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{1}{(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z) + [\sigma])^2} \approx \frac{1}{\sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])}}$
- ◇  $I_3 = 4\pi \int_{q,q_z} \log(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z) + [\sigma])$   
 $\approx -\Lambda + (2\tilde{\mu} + [\sigma] + \Lambda) \log(\Lambda) + \sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])}$   
 $- (2\tilde{\mu} + [\sigma]) \log\left(\frac{2\tilde{\mu} + [\sigma] + \sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])}}{2}\right)$
- ◇  $I_4 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{q^2}{q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z)} \approx -2\tilde{\mu} \log \Lambda + 2\tilde{\mu} \log(e\tilde{\mu}) + \Lambda$
- ◇  $I_5 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{(1 - \cos q_z)}{q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z)} \approx -1 + \ln \frac{\Lambda}{\tilde{\mu}}$
- ◇  $I_{5b} = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{(1 - \cos q_z)}{q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z) + [\sigma]}$   
 $\approx \frac{1}{2\tilde{\mu}} (\sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])} - (2\tilde{\mu} + [\sigma])) - \log\left(\frac{(2\tilde{\mu} + [\sigma] + \sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])})}{2\Lambda}\right)$
- ◇  $I_6 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{(1 - \cos q_z)}{(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z))(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z) + [\sigma])}$   
 $\approx \frac{1}{2\tilde{\mu}} - \frac{1}{2\tilde{\mu}} \sqrt{\frac{4\tilde{\mu} + [\sigma]}{[\sigma]}} + \frac{1}{[\sigma]} \log\left(\frac{2\tilde{\mu} + [\sigma] + \sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])}}{2\tilde{\mu}}\right)$   
 $\approx \frac{1}{2\tilde{\mu}} \quad \text{for } [\sigma] = 0$
- ◇  $I_7 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{q^4}{(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z))^2} \approx \Lambda - 4\tilde{\mu} \log \Lambda + 6\tilde{\mu} + 4\tilde{\mu} \log \tilde{\mu}$
- ◇  $I_8 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{q^2}{(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z))^2} \approx \log \Lambda - 1 - \log \tilde{\mu}$
- ◇  $I_9 = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{q^2}{(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z))(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z) + [\sigma])} = I_1 - 2\tilde{\mu}I_6$   
 $\approx \log(2\Lambda) - 1 + \sqrt{\frac{4\tilde{\mu} + [\sigma]}{[\sigma]}} - \frac{2\tilde{\mu}}{[\sigma]} \log\left(\frac{2\tilde{\mu} + [\sigma] + \sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])}}{2\tilde{\mu}}\right)$   
 $- \log\left(2\tilde{\mu} + [\sigma] + \sqrt{[\sigma](4\tilde{\mu} + [\sigma])}\right)$
- ◇  $I_{10} = 4\pi \int_{q,q_z} \frac{q^2(1 - \cos q_z)}{(q^2 + 2\tilde{\mu}(1 - \cos q_z))^2} \approx \log \Lambda - 2 - \log \tilde{\mu}$

Article 1

Stability of the Bragg glass phase in a layered  
geometry



## Chapitre 6

# Fusion d'un cristal bidimensionnel en présence d'un substrat désordonné

Dans ce chapitre nous allons considérer l'effet de différents type de désordre sur le comportement aux grandes échelles d'un cristal bidimensionnel. La première motivation de ce travail est celle de cette partie en générale : la compréhension de l'interaction entre défauts topologiques et désordre, problème dans lequel entrent en jeu les forces élastiques, l'accrochage par le désordre et les fluctuations thermiques. Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre, la voie naturelle dans cette étude correspond à commencer par des géométries particulières où la situation en l'absence de désordre est comprise. De ce point de vue nous allons donc étudier l'effet du désordre sur la théorie de la fusion bidimensionnelle présentée au chapitre 3. Cette étude correspond ainsi au cas de l'interaction entre des dislocations ponctuelles et le désordre.

Une motivation toute aussi importante provient de résultats expérimentaux. Bien que nous ayons parlé essentiellement des réseaux tridimensionnels de vortex magnétiques, des expériences très précises ont été menées sur des réseaux d'ABRIKOSOV bidimensionnels. Ces réseaux sont obtenus lorsque des couches minces de supraconducteurs sont placées sous un champ magnétique transverse. Ils constituent par ailleurs d'excellents candidats sur lesquels tester les idées théoriques du chapitre 3 concernant la fusion bidimensionnelle. Nous savons également que dans les supraconducteurs, les impuretés microscopiques piègent les vortex magnétiques, agissant comme un substrat désordonné (Kes & Tsuei 1983). En étudiant les résultats des expériences, nous pouvons ainsi obtenir une première idée de l'influence de ce désordre sur la fusion. Nous allons voir en particulier deux types d'expériences, qui semblent apparemment contradictoires : dans l'une une transition de type KTHNY semble observée alors que dans l'autre la manifestation de cette fusion semble dépendre de l'échelle. Cette contradiction entre des résultats expérimentaux différents appelle ainsi une étude sur les modifications à apporter aux résultats du chapitre 3 en présence de désordre.

Pour cela nous allons incorporer successivement les difficultés dans la description d'un solide en présence de désordre : dans un premier temps nous étudierons l'effet sur la fusion d'impuretés situées dans le cristal bidimensionnel. Ces impuretés n'accrochent pas le réseau, et, pour une intensité faible, ne font que modifier le comportement critique associé à la transition de fusion. Un désordre de substrat général a des conséquences différentes : la



transition est détruite par ce type de désordre. Ceci signifie que même à basse température, des dislocations sont générées dans le cristal : elles sont induites par le désordre. Cependant à basse température, ces dislocations n'apparaissent qu'aux très grandes échelles. En dessous de ces échelles, le cristal peut être défini par une phase vitreuse, obtenue en négligeant les dislocations. D'un point de vue technique, cette dernière phase est plus simple à décrire que celle du cristal avec dislocations, et nous commencerons par elle.

La génération de dislocations à très grandes échelles par le désordre permet d'expliquer qualitativement les différentes expériences présentées : selon l'échelle d'échantillonnage du cristal, une fusion apparente peut être ou non observée. Si cette échelle d'échantillonnage est plus petite que la distance entre dislocations à basse température, une fusion est observée.

Les détails techniques de l'étude de la phase vitreuse sans dislocation se trouvent dans le long papier inclu en annexe. Les résultats de l'étude générale avec dislocations et désordre sont également présentés dans la lettre qui suit. Techniquement cette étude revient à renormaliser un gaz de Coulomb électromagnétique vectoriel, qui n'avait jamais été considéré auparavant. Ce modèle généralise tous ceux précédemment étudiés (voir pour cela l'introduction de la première partie). Sa renormalisation est assez lourde : elle est présentée dans l'Annexe B . Les équations de renormalisation qui y sont dérivées, ainsi que la preuve de la renormalisabilité de ce modèle (au second ordre perturbatif) sont parmi les résultats importants de cette thèse.

## 6.1 Réalisations expérimentales : films supraconducteurs sous champ magnétique

Avant de passer à l'étude théorique des cristaux bidimensionnels en présence d'un désordre de substrat, nous allons passer en revue brièvement quelques-unes des situations expérimentales auxquelles notre étude s'applique. Cela permettra de motiver cette dernière en mettant en évidence une contradiction entre les résultats de ces expériences.

Les expériences visant à mettre en évidence une fusion d'un cristal bidimensionnel selon un scénario de type KTHNY ont été nombreuses, des expériences sur les colloïdes au cristal de Wigner, mais je ne décrirai ici rapidement que certaines d'entre elles pour lesquelles un désordre de substrat joue un rôle important.

En premier lieu bien sûr nous reviendrons sur le réseau de vortex d'Abrikosov bidimensionnel. Dans les couches minces de supraconducteurs (ici des supraconducteurs conventionnels amorphes), ce réseau peut être considéré comme bidimensionnel. Son accrochage par les impuretés du réseau cristallin du supraconducteur peut être décrit par l'approche développée dans ce chapitre. Essentiellement deux expériences retiendront notre attention, dans lesquelles le réseau de vortex est échantillonné sur une longueur finie : une expérience, réalisée dans le groupe de P. KES, d'écoulement de vortex dans des canaux; et une autre dans le groupe de A. KAPITULNIK de réponse à un courant alternatif de ce réseau bidimensionnel. Dans la première expérience, une possible manifestation d'une fusion du réseau de vortex est observée, sur laquelle nous reviendrons à la fin de ce chapitre. Les résultats de la deuxième sont différents : ils diffèrent à grandes échelles de ceux attendus en présence de fusion. Comment ces deux expériences peuvent-elles être compatibles?

Finalement, je parlerai rapidement des réseaux de bulles magnétiques dans les films

de<sup>1</sup> “grenats magnétiques”, dans lesquels une fusion a également été observée, et qui sont soumis à un désordre d'accorchage.

### 6.1.1 Un réseau d'Abrikosov bidimensionnel

Nous allons dans la suite considérer le réseau d'Abrikosov dans un film supraconducteur sous un champ magnétique transverse. Dans cette géométrie bidimensionnelle, le champ magnétique ne peut plus être expulsé du volume du supraconducteur, et  $H_{c1}$  est donc nul. Si nous considérons (ce qui est le cas dans les expériences qui suivent) un film d'épaisseur  $d$  plus petite que la longueur de pénétration  $\lambda$  :  $d \ll \lambda$ , le courant autour des vortex peut être supposé uniforme en épaisseur. L'interaction entre vortex supraconducteurs dépend alors de la distance : en dessous de la longueur de pénétration bidimensionnelle effective  $\Lambda = 2\lambda^2/d$ , l'interaction est logarithmique :

$$V(r) \simeq -\frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\Lambda} \ln\left(\frac{r}{\xi}\right) \quad \text{pour } \xi \ll r \ll \Lambda$$

Cette longueur de pénétration effective peut, dans bien des cas, être plus grande que la taille de l'échantillon  $L$ . Au delà de cette longueur, l'interaction décroît algébriquement :

$$V(r) \simeq \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{r} \quad \text{pour } r \gg \Lambda$$

Pour des champs magnétiques faibles face à  $H_{c2}$ , il est possible de considérer que le réseau est bidimensionnel (Fisher 1980), et décrit par les deux coefficients de Lamé :  $\lambda$  est formellement infini (bien que ce module soit renormalisé vers des valeurs grandes mais finies par une faible densité d'interstices ou de lacunes), et  $\mu$  est donné par

$$\mu(T) = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\Lambda} \frac{B}{6\Phi_0}$$

Nous pouvons donc nous attendre à ce qu'un tel réseau fonde sous l'effet des fluctuations thermiques, et à ce que cette fusion soit de type KTHNY (Fisher 1980).

Cette hypothèse qui ramène l'étude du réseau à celle d'un réseau bidimensionnel suppose que les fluctuations des lignes le long du champ magnétique sont négligeables. Or ces fluctuations peuvent être de deux natures : d'origine thermique, ou dues au désordre. L'importance de ces deux types de fluctuations peut être évaluée à l'aide de longueurs caractéristiques. Notons  $L_c$  la longueur minimale d'un vortex telle que ses fluctuations transverses dues au désordre soient de l'ordre du pas du réseau  $a$ . Cette longueur  $L_c$  est reliée à la longueur de Larkin bidimensionnelle  $R_c$  par la relation  $L_c \sim \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{66}}} R_c$ . Dans les échantillons des expériences qui suivent,  $R_c$  est de l'ordre de quelques  $\mu m$ , et  $L_c$  vaut à peu près une centaine de microns :  $L_c \sim 100\mu m$ . Sachant que l'épaisseur des films considérés est bien plus petite, nous pouvons négliger ces fluctuations dues au désordre. La longueur  $L_z$

---

1. Je dois confesser ici que cette traduction française du terme anglais “magnetic garnets”, que je n'ai pas réussi à trouver par ailleurs, est de mon cru et donc absolument pas garantie

associée aux fluctuations thermiques dépend de la tension de ligne  $\epsilon_1$  (et donc du champ magnétique), et de la température ( $L_z \sim \epsilon_1/(2kTn)$ ). Elle est également bien plus grande que l'épaisseur des échantillons dans les expériences qui suivent, pour des valeurs de champ intermédiaires.

Dans les expériences qui suivent, les fluctuations dominantes du réseau d'Abrikosov sont donc essentiellement celles d'un réseau élastique bidimensionnel. L'accrochage du réseau semble également être un accrochage collectif du réseau élastique, comme l'ont montré KES et TSUEI (Kes & Tsuei 1983).

Nous pouvons maintenant passer à la description de ces expériences, sachant maintenant qu'elles sont *a priori* décrites par notre approche de l'accrochage collectif des réseaux bidimensionnels.

### 6.1.2 Transport de flux dans des canaux : M.H. Theunissen et al.

Les expériences menées dans le groupe de P. Kes à Leiden (Pay-Bas) permettent d'étudier l'écoulement dans un canal d'un réseau de vortex bidimensionnels (voir figure 6.1). Dans cette expérience, un film de supraconducteur amorphe de basse  $T_c$  (du  $Nb_3Ge$ ) est recouvert d'une fine couche de supraconducteur à fort piégeage : du NbN. Les courants critiques usuels dans les films de  $Nb_3Ge$  étant assez faibles, nous pouvons nous attendre à un piégeage collectif faible du réseau dans ce matériau (Kes & Tsuei 1983). Par comparaison, les courants critiques dans la couche de fort piégeage sont à peu près  $10^3$  fois supérieurs à ceux dans le  $Nb_3Ge$ .

Une fois le film recouvert de la couche de NbN, 300 canaux sont découpés dans le film. L'épaisseur du film au fond des canaux est alors de 310 nm, et celle entre ces canaux de 600 nm. En présence d'un champ magnétique normal au film, un courant  $I$  dans le plan du film mais orthogonal aux canaux induit une force de Lorentz dans la direction de ces canaux. Les vortex situés entre les canaux étant fortement piégés, seuls ceux des canaux se mettent en mouvement et donnent un flux de champ magnétique dans l'échantillon. L'étude de la réponse de l'échantillon au courant  $I$  permet ainsi d'étudier la réponse du réseau de vortex dans un canal de largeur  $w$ .

En fonction de la nature de la phase, la réponse de l'échantillon est donc complètement différente.

- Dans une phase solide, la réponse du réseau (à l'échelle  $w$ ) est caractérisée par un module de cisaillement fini  $c_{66}$ . Les vortex du bord du canal étant piégés, la réponse du solide de vortex se fait par décrochages successifs de ce réseau par rapport aux bords. La densité de force de décrochage doit alors être de l'ordre de  $c_{66}a/w^2$ . La résistivité de l'échantillon dans cette phase présente une succession de pics en fonction du courant, correspondant à ces décrochages (Theunissen 1997)
- Dans une phase "de type liquide", caractérisée non pas par un module de cisaillement mais par une viscosité de cisaillement  $\eta$ , nous obtenons un écoulement de vortex dans le canal. L'intensité de cet écoulement est bien sûr liée à la viscosité de la phase,

---

Kes P. H. & Tsuei C., (1983). *Phys. Rev. B*, **28**:5126.

Theunissen M., (1997). *Properties of the flux-line solid and liquid in amorphous Nb<sub>3</sub>Ge films*. PhD thesis, Leiden.

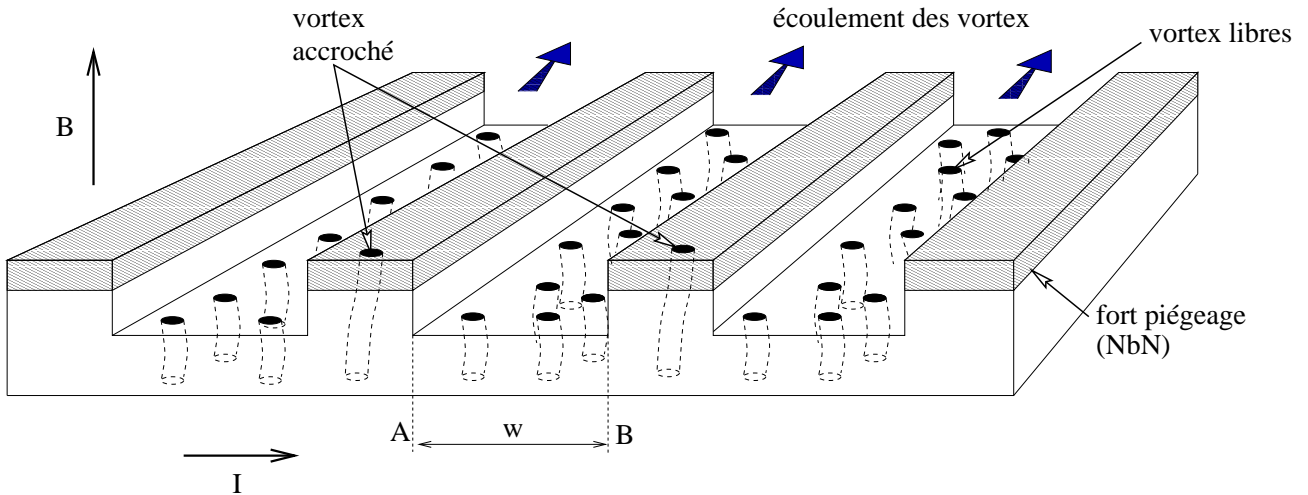


FIG. 6.1 – Schéma de l'expérience d'écoulement de vortex dans des canaux. Le supraconducteur conventionnel est du  $Nb_3Ge$ . Seuls trois canaux ont été représentés schématiquement.

c'est-à-dire à la densité de dislocations qui relaxent les contraintes dans le canal. Nous allons maintenant nous intéresser un peu plus en détails aux résultats expérimentaux dans cette phase "de type liquide".

### Réponse de la phase liquide

Commençons par étudier l'écoulement dans un canal de largeur  $w$  d'une phase liquide, caractérisée par un coefficient de viscosité  $\eta$ . Les conditions aux limites correspondant à la situation expérimentale ci-dessus se traduisent par une vitesse nulle aux bords du canal :  $\mathbf{v}(y = \pm w/2) = 0$ .

Chaque vortex, en plus des interactions avec ses voisins et de la force de Lorentz, est soumis à une force dissipative de Bardeen-Stephen (Tinkham 1980), due au mouvement de la région normale du coeur du vortex dans le supraconducteur. Dans une phase liquide, l'interaction entre voisins se ramène à une force de viscosité. En nous plaçant dans l'approximation où nous pouvons considérer un champ de vitesse continu à l'intérieur du canal, le profil de vitesse se déduit alors de l'équation hydrodynamique

$$-\gamma \mathbf{v} + \eta \partial_y^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_{Lorentz} = 0$$

où  $\gamma$  est le coefficient de Bardeen-Stephen.

Les profils de vitesse solutions de cette équation avec les conditions aux bords  $\mathbf{v}(y = \pm w/2) = 0$  décroissent exponentiellement aux bords du canal sur une longueur caractéristique  $\delta = \sqrt{\eta/\gamma}$ . Plus la viscosité est importante, moins les vortex coulent, et donc plus cette longueur est grande. Quelques profils de vitesse sont représentés sur la figure 6.2 (d'après la thèse de M.H. Theunissen).

À partir d'un profil de vitesse donné, caractérisé par une longueur  $\delta$ , nous pouvons intégrer la vitesse entre  $-w/2$  et  $+w/2$  pour obtenir la résistivité d'un canal dans la phase

Tinkham M., (1980). *Introduction to superconductivity*. Krieger.

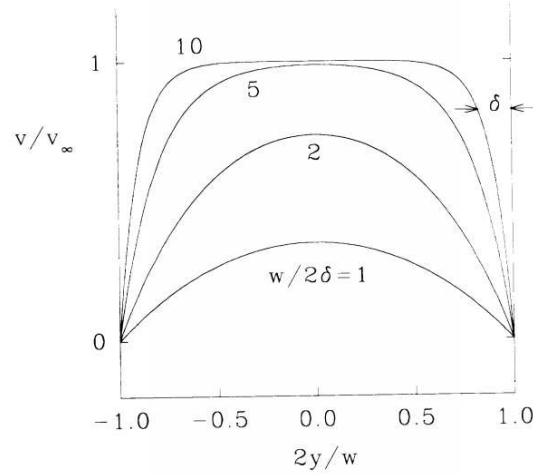


FIG. 6.2 – *Profil de vitesse des vortex dans le canal du supraconducteur. Ce profil est fonction de la viscosité du réseau et de la largeur  $w$  du canal.*

“de type liquide”. L’expression théorique de la résistivité de l’échantillon s’en déduit alors en tenant compte de la présence de 300 canaux parallèles dans le film. L’expression obtenue dépend donc du rapport entre la longueur  $\delta$  et la largeur  $w$  du canal :

$$\rho_f = \rho_f^0 \left[ 1 - \frac{2\delta}{w} \tanh\left(\frac{w}{2\delta}\right) \right] \quad (6.1)$$

avec  $\rho_f^0 = B^2/\gamma$ .

Ainsi en mesurant la résistivité d’un échantillon en fonction de la température ou du champ magnétique (dans la phase liquide), il est possible d’en déduire le comportement de  $\delta$  et donc de la viscosité  $\eta$  en fonction de la température ou du champ magnétique. Le protocole expérimental est décrit dans la thèse (Theunissen 1997), je reporte ici simplement les courbes expérimentales de la résistivité (en courant alternatif) des échantillons de même taille mais avec des canaux de largeurs différentes, soit en fonction de la température, soit en fonction du champ magnétique.

Les courbes de viscosité qui s’en déduisent d’après (6.1) sont reportées dans la figure (6.4). La courbe continue sur la figure (6.4) correspond au comportement attendu de cette viscosité dans un schéma de fusion de type KTHNY. En effet, au dessus de la transition de fusion, la densité de dislocations libres augmente. Ces dislocations peuvent alors relaxer une contrainte de cisaillement. Il est donc naturel d’associer cette viscosité à l’inverse de la densité  $n_f$  de dislocations libres (Nelson & Halperin 1979). Cette densité étant proportionnelle à  $\xi_+^{-2}$  au dessus de la transition, nous obtenons un comportement critique de la viscosité

$$\eta(T) \sim \xi_+^2(T) \quad (6.2)$$

Theunissen M., (1997). *Properties of the flux-line solid and liquid in amorphous Nb3Ge films*. PhD thesis, Leiden.

Nelson D. & Halperin B., (1979). *Phys. Rev. B*, **19**:2457.

Le champ (ou la température) de fusion thermodynamique étant déterminé dans l'échantillon de référence sans canal, la courbe pleine de la figure 6.4 correspond donc à ce comportement de type KTHNY attendu. L'accord avec l'échantillon dont les canaux ont une largeur de 637 nm est donc excellent autour de la transition. Bien sûr la divergence critique de la viscosité est ici stoppée lorsque la distance entre dislocations  $\xi_+(T)$  atteint la largeur  $w$ . Les écarts des autres courbes par rapport à la prédiction théorique n'ont pas d'explication évidente. Les irrégularités dans les bords et le fond des canaux peuvent éventuellement induire un désordre effectif sur le réseau qui, comme nous allons le voir, décalent les champs  $B_m$  de transition. D'autres incertitudes d'origine expérimentale peuvent entrer en jeu.

La conclusion de ces premiers résultats, est qu'en étudiant la réponse d'une phase "de type liquide" à des petites échelles, un comportement critique de type KTHNY est observé. Nous allons maintenant nous intéresser à une autre expérience qui permet de localiser une transition éventuelle de fusion de type KTHNY en échantillonnant le réseau sur une longueur finie.

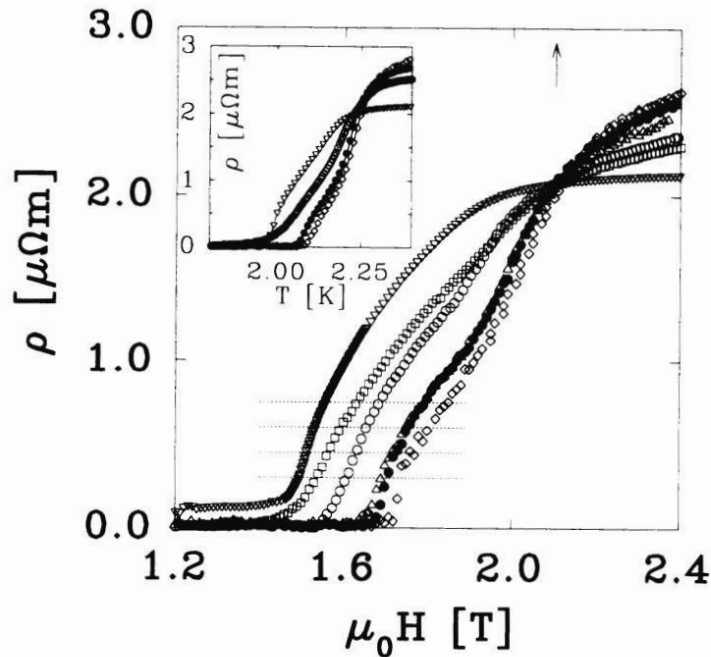


FIG. 6.3 – Résistivité des échantillons (en courant alternatif de fréquence faible) en fonction du champ magnétique, et de la température. Différentes largeurs de canaux sont représentées: ( $\nabla$ ) échantillon de référence (limite thermodynamique), ( $\square$ )  $w=1185\text{nm}$ , ( $\circ$ )  $637\text{nm}$ , ( $\triangle$ )  $373\text{nm}$ , ( $\bullet$ )  $306\text{nm}$ , ( $\diamond$ )  $245\text{nm}$ . Extrait de Theunissen, thèse (1997)

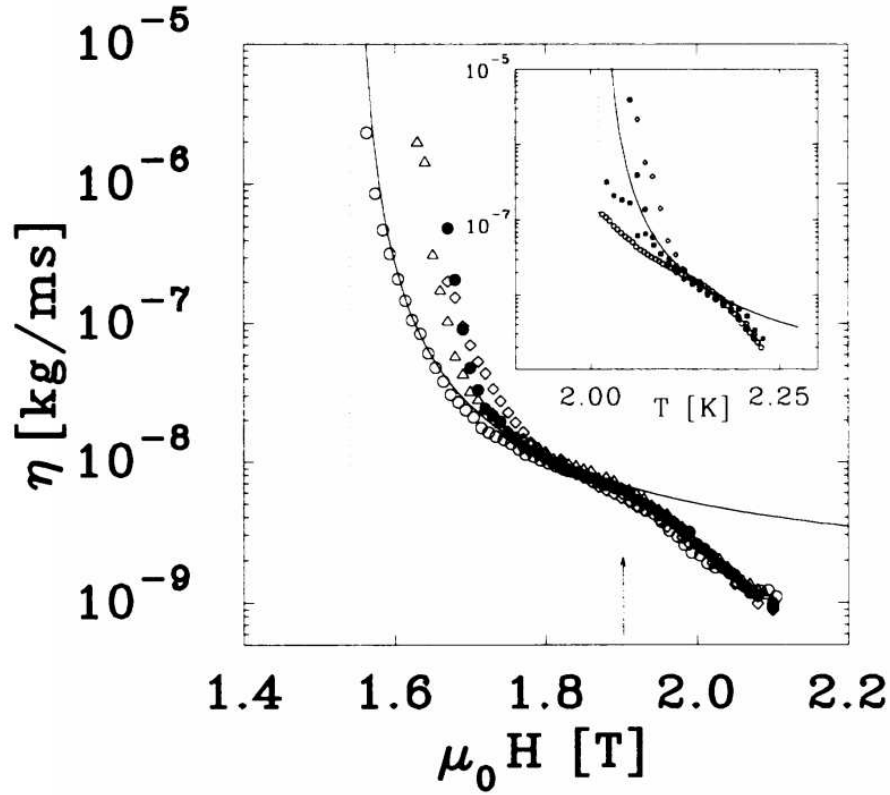


FIG. 6.4 – Viscosité de la phase liquide de vortex en fonction du champ magnétique, et de la température. Les valeurs pour différentes largeurs de canaux sont représentées: ( $\nabla$ ) échantillon de référence (limite thermodynamique), ( $\square$ )  $w=1185\text{nm}$ , ( $\circ$ )  $637\text{nm}$ , ( $\triangle$ )  $373\text{ nm}$ , ( $\bullet$ )  $306\text{ nm}$ , ( $\diamond$ )  $245\text{nm}$ . Extrait de Theunissen, thesis (1997)

### 6.1.3 Réponse du réseau de vortex à une courant alternatif: A. Yazdani et al.

Les travaux expérimentaux dont je vais parler ici rapidement sont décrits dans la thèse de Ali Yazdani (Yazdani 1994). Ils ont fait l'objet de plusieurs publications (Yazdani, Howald, White, Beasley & Kapitulnik 1994) et (Yazdani, White, Hahn, Gabay, Beasley & Kapitulnik 1993).

Ces travaux consistent à étudier la réponse à différentes échelles du réseau bidimensionnel de vortex en analysant sa réponse à un courant alternatif de pulsation  $\omega$ . En effet, dans un réseau peu déformé, nous pouvons toujours supposer que la relaxation des contraintes induites par le courant se fait par glissement des dislocations. Si nous appelons  $D_{disloc}$  la constante de diffusion typique des dislocations dans le réseau, durant une période  $2\pi/\omega$  de

Yazdani A., (1994). *Phase transitions in two-dimensional superconductors*. PhD thesis, Stanford.

Yazdani A., Howald C., White W., Beasley M., & Kapitulnik A., (1994). *Phys. Rev. B*, **50**:16117–16120.

Yazdani A., White W., Hahn M., Gabay M., Beasley M., & Kapitulnik A., (1993). *Phys. Rev. Lett.*, **70**:505–508.

la contrainte alternative, ces dislocations parcourent une distance typique  $l_\omega$  qui satisfait

$$D_{disloc} \sim \frac{l_\omega^2 \omega}{4\pi} \Rightarrow l_\omega \sim \sqrt{\frac{4\pi D_{disloc}}{\omega}} = a_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi D_{disloc}}{a_0^2}}$$

Ainsi en variant la fréquence du courant alternatif imposé au réseau, nous échantillons ce réseau sur une *longueur finie*  $l_\omega$ . Il faut alors tenir compte de cette longueur dans l'analyse de la transition éventuelle du réseau de vortex. En effet, le réseau aura apparemment fusionner sur la longueur  $l_\omega$  lorsque la contrainte sera parfaitement relaxée à cette échelle, c'est-à-dire lorsque la distance moyenne entre dislocations  $\xi_+(T)$  sera de l'ordre de la longueur d'échantillonnage  $l_\omega$ , ce qui définit une température de transition effective  $T_\omega$  à la pulsation  $\omega$  :

$$l_\omega \sim \xi_+(T_\omega) \sim a e^{\frac{b'}{|T_m - T_\omega|^\nu}} \Rightarrow \frac{T_\omega}{T_m} = 1 + \left( \frac{b'}{\ln \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}} \right)^{\nu^{-1}} \quad (6.3)$$

où  $\nu \simeq 0.3696 \dots$  est l'exposant de divergence de la fonction de corrélation à la transition KTHNY pure ( $b'$  est une constante indéterminée).

L'idée de l'expérience est alors, pour différentes pulsations  $\omega$ , d'obtenir une détermination de cette température de fusion  $T_\omega^{exp}$  en faisant varier la température, puis de comparer le comportement de cette température de fusion  $T_\omega^{exp}$  avec la prédiction ci-dessus (6.3).

La détermination expérimentale de la température de fusion à l'échelle  $l_\omega$  se fait à l'aide du comportement de la conductance à la pulsation  $\omega$ .

### Détermination expérimentale de la température de fusion $T_\omega^{exp}$

Bien que les courbes de conductance obtenues expérimentalement ne soient pas, à ma connaissance, comprises quantitativement d'un point de vue théorique, il est possible de les utiliser pour déterminer l'apparition dans l'échantillon de dislocations libres, et donc la fusion du réseau. En effet, si nous considérons les deux courbes de droite de la figure 6.5, nous nous apercevons que la partie imaginaire  $G_I$  de la conductance s'annule brutalement autour d'une température  $T_\omega^{exp}$ , qui correspond également à un pic dans la partie réelle de la conductance. La composante imaginaire de cette conductance est habituellement associée à la présence d'une force de rappel (proportionnelle à  $c_{66}$ ) dans le réseau, alors que la partie réelle rend compte de la dissipation. La température  $T_\omega^{exp}$  peut donc être associée à la température de fusion du réseau à l'échelle  $l_\omega$  : en effet cette fusion correspond à l'apparition d'une densité de dislocations libres dans l'échantillon qui induisent une augmentation de la dissipation d'une part, et relaxent les contraintes de cisaillement à l'échelle  $l_\omega$  d'autre part, conduisant à un saut de  $c_{66}$  à zéro et donc à l'annulation brutale de  $G_I$ .

Comme il est manifeste sur les courbes de la figure 6.5, l'épaisseur du film et donc le désordre effectif qui piège le réseau modifie la forme du pic (ou du saut) de la conductance à  $T_\omega^{exp}$ . Pour un désordre faible (film de 300 nm), le pic de  $G_R$  est étroit et l'annulation de  $G_I$  se fait brutalement. Un désordre plus important (film de 30 nm) élargit la région du pic. Cet élargissement peut se comprendre comme une apparition progressive des dislocations dans l'échantillon : contrairement à la transition KTHNY où une densité finie de dislocations



apparaît brutalement, le désordre semble induire des dislocations en dessous de la transition pure, qui dissipent et conduisent à un élargissement du pic. Cette image semble indiquer, comme l'étude théorique de la suite de ce chapitre va le confirmer, que la présence de désordre tend à transformer la transition de fusion en un cross-over plus progressif entre deux régimes différents.

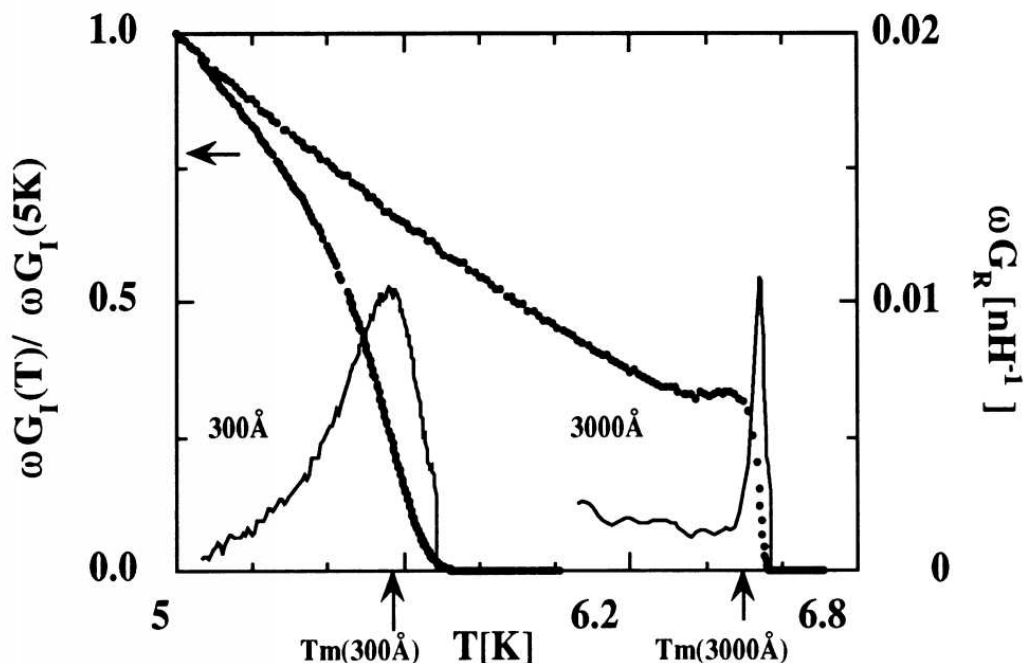


FIG. 6.5 – Partie imaginaire ( $G_I$ ) et réelle  $G_R$  de la conductance du film en fonction de la température. Les deux courbes représentent les données dans un film d'épaisseur 30 nm (fort désordre, à gauche), et 300 nm, à la fréquence de 10kHz sous un champ de 1 T. Les conductances ont été normalisées par leur valeur à 5K, et les flèches indiquent les températures de transition évaluées. Extrait de Yazdani, thesis (1994)

Quoiqu'il en soit, si nous déterminons la température de fusion du réseau de vortex à l'aide du pic de conductance<sup>2</sup>, nous pouvons étudier le comportement de cette température de fusion  $T_{\omega}^{exp}$  avec l'échelle  $l_{\omega}$  (ou autrement dit la pulsation). La courbe correspondante est représentée dans la figure 6.6. Nous nous apercevons alors qu'au dessus d'une pulsation  $\omega^*$ , les déterminations expérimentales de la température de fusion  $T_{\omega}^{exp}$  sont en accord avec la prédiction théorique (6.3) (à un paramètre libre), mais qu'en dessous de cette pulsation  $\omega^*$  ces déterminations s'écartent de cette prédiction et suivent plutôt un comportement de type activé ( $\omega\tau \sim \exp(-U/T_{\omega})$ ). De plus cette pulsation  $\omega^*$  ne semble pas dépendre de l'intensité du champ magnétique appliqué sur l'échantillon, comme l'indique la figure 6.19.

Cette pulsation  $\omega^*$ , qui semble être une caractéristique intrinsèque à l'échantillon, nous

2. La détermination de Yazdani et al. consiste à identifier le minimum du pic avec la transition. Il apparaît qu'en fait la transition de fusion correspondrait plutôt au début du pic, lorsque la conductance réelle se met à augmenter. Cette différence peut induire une légère erreur dans la détermination de  $T_{\omega}^{exp}$  des courbes présentées ici.

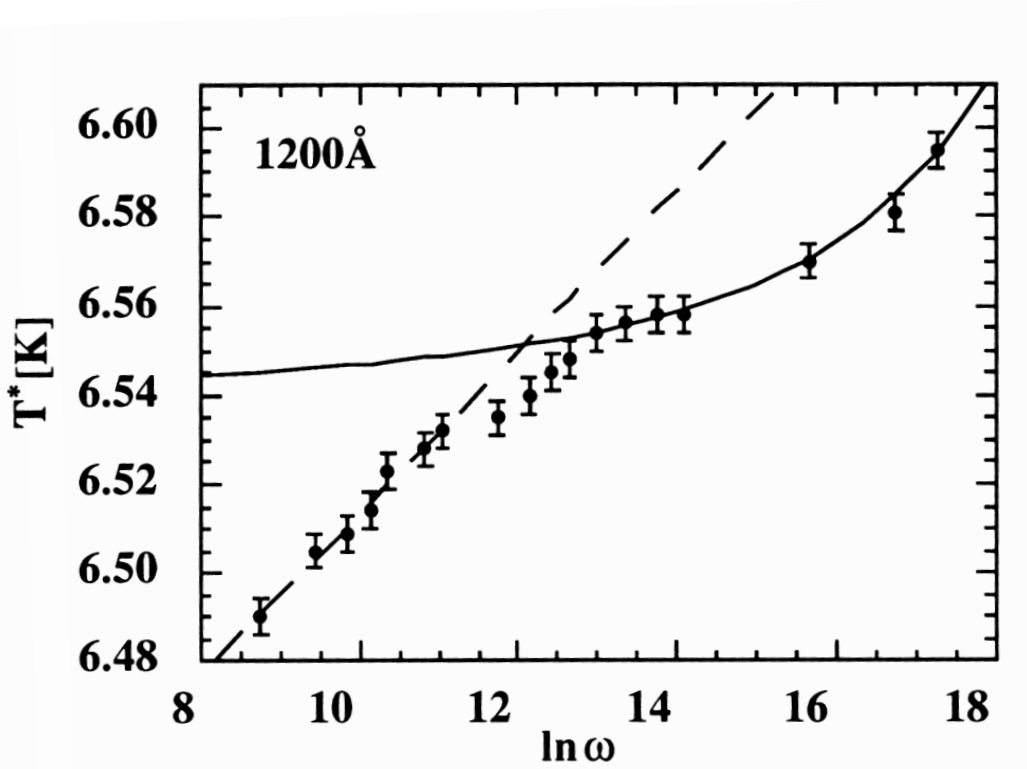


FIG. 6.6 – Comportement de la température de transition expérimentale (notée ici  $T^*$  et dans le texte  $T_{\omega}^{exp}$ ) en fonction de la fréquence du courant alternatif, c'est-à-dire de l'échelle d'échantillonnage. La courbe en trait plein correspond à la courbe théorique  $T_{\omega}$  de transition de type KTHNY (dans laquelle le paramètre libre  $b'$  a été ajusté). La courbe en pointillé correspond à un comportement activé. Extrait de Yazdani, thesis (1994)

donne une échelle  $R_{\omega} = l_{\omega^*}$  de cross-over dans le réseau entre deux régimes : aux petites échelles  $L < R_{\omega}$  (ou  $\omega > \omega^*$ ), le réseau semble fondre à une température qui est celle attendue dans le schéma de KTHNY, alors qu'aux grandes échelles  $L > R_{\omega}$ , la réponse du réseau est de type activée, et KTHNY ne s'applique plus. Cette image suggère que la nature du réseau aux grandes échelles est différente de celle aux petites échelles, qui correspond à un réseau quasi-ordonné qui fond comme dans le cas pur.

### Contradiction apparente

La comparaison entre les résultats de ces deux expériences nous incite donc à reconsidérer le comportement d'un film cristallin autour de la transition de fusion, lorsqu'un substrat est présent. En effet dans un type d'expérience, une fusion continue est observée, en accord avec le scénario KTHNY. L'autre expérience, sur un système expérimental similaire, montre que cette théorie de la fusion ne permet pas de rendre compte des mesures. Une origine naturelle à cette différence entre les deux expériences pourrait être la présence d'un désordre cristallin qui accroche le réseau d'Abrikosov.

Cette situation expérimentale a motivée un réexamen de la fusion KTHNY en présence

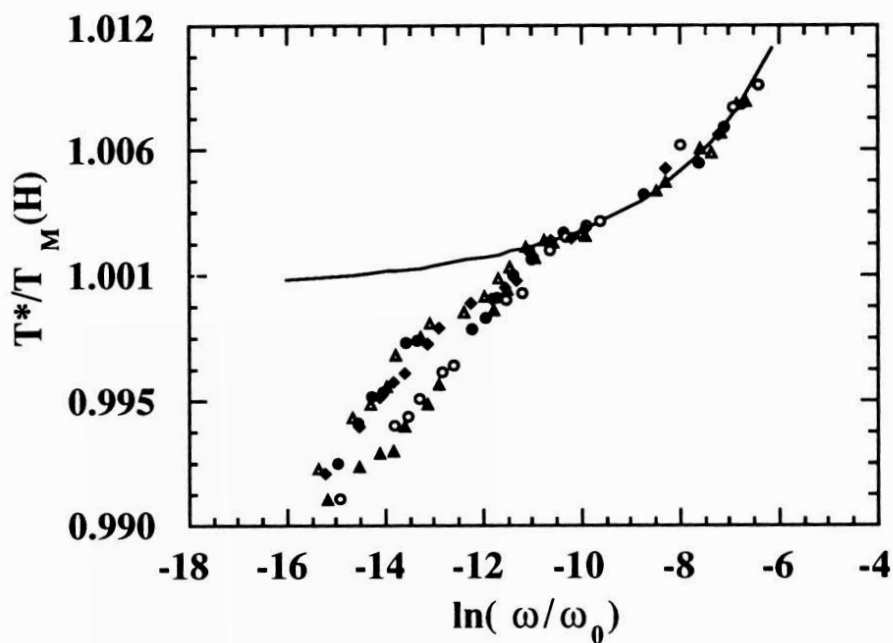


FIG. 6.7 – Comportement de la température de transition expérimentale (notée ici  $T^*$  et dans le texte  $T_{\omega}^{exp}$ ) en fonction de la fréquence du courant alternatif, pour différentes intensités de champ magnétique : 0.2, 0.5, 0.7, 1, 1.5 et 1.8 T. Ces courbes correspondent à un échantillon de 120 nm d'épaisseur. Extrait de Yazdani, thesis (1994)

de ce substrat désordonné. Les travaux que je présente permettent d'apporter une explication naturelle à la différence de comportement observé entre les deux expériences. En particulier nous mettrons en évidence une réponse élastique du cristal qui, en présence de ce substrat, dépend fortement de l'échelle. Cette dépendance intervient naturellement dans les deux expériences présentées, dans lesquelles le réseau est échantillonné sur une échelle finie.

## 6.2 Solide cristallin en présence de désordre de substrat : étude en l'absence de dislocations

Nous passons donc maintenant à la description théorique de ce film cristallin en présence de désordre. Nous allons considérer dans l'ordre deux types de désordre : le premier correspond soit à un désordre provenant d'impuretés dans le cristal lui-même, soit d'un substrat très éloigné. Ce désordre varie lentement dans l'espace et n'accroche pas le cristal. Le second ne peut provenir que d'un substrat désordonné : il s'agit d'une composante de désordre qui varie rapidement dans l'espace. Les effets de ces deux types de désordre sont complètement différents.

Nous allons donc dans l'ordre commencer par montrer comment un désordre provenant d'un substrat se décompose en ces deux différentes contributions. Nous commencerons par l'étude de ces deux types de désordre en l'absence de dislocation (c'est-à-dire en les excluant explicitement dans le modèle), ce qui correspond à une approximation qui peut se justifier à basse température et à échelle finie, comme le montrera la suite du chapitre. Ensuite nous étudierons successivement l'effet des deux types de désordre sur les dislocations du cristal, en autorisant maintenant les dislocations.

Les détails de l'étude sans dislocation se trouvent dans le premier papier en annexe.

### 6.2.1 Description élastique du solide en présence de désordre

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, un cristal bidimensionnel triangulaire peut être décrit dans l'approximation élastique par le hamiltonien isotrope (3.7) :

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} 2\mu u_{ij}^2 + \lambda u_{ii}^2 \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} u_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl} u_{kl}(\mathbf{r}) \quad (6.4a)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} u_i(\mathbf{q}) \Phi_{ij}(\mathbf{q}) u_j(\mathbf{q}) \quad (6.4b)$$

où  $\Phi_{ij}(\mathbf{q}) = q^2(c_{11}P_{ij}^L + c_{66}P_{ij}^T)$  avec les projecteurs  $P_{ij}^L = \hat{q}_i\hat{q}_j$  et  $P_{ij}^T = \delta_{ij} - \hat{q}_i\hat{q}_j = \hat{q}_i^\perp\hat{q}_j^\perp$ , et les coefficients élastiques sont reliés aux coefficients de Lamé par  $c_{11} = 2\mu + \lambda$  et  $c_{66} = \mu$ .

En plus des fluctuations élastiques décrites par le hamiltonien ci-dessus, nous avons rencontré dans ce chapitre 3 les fluctuations plastiques décrites par des dislocations (ici bidimensionnelles). Dans le cas pur, ces dislocations peuvent être introduites simplement à travers une décomposition du tenseur des déformations  $u_{ij}$ . Nous allons voir qu'en présence de désordre, il nous faut décomposer le champ de déformation  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  lui-même.

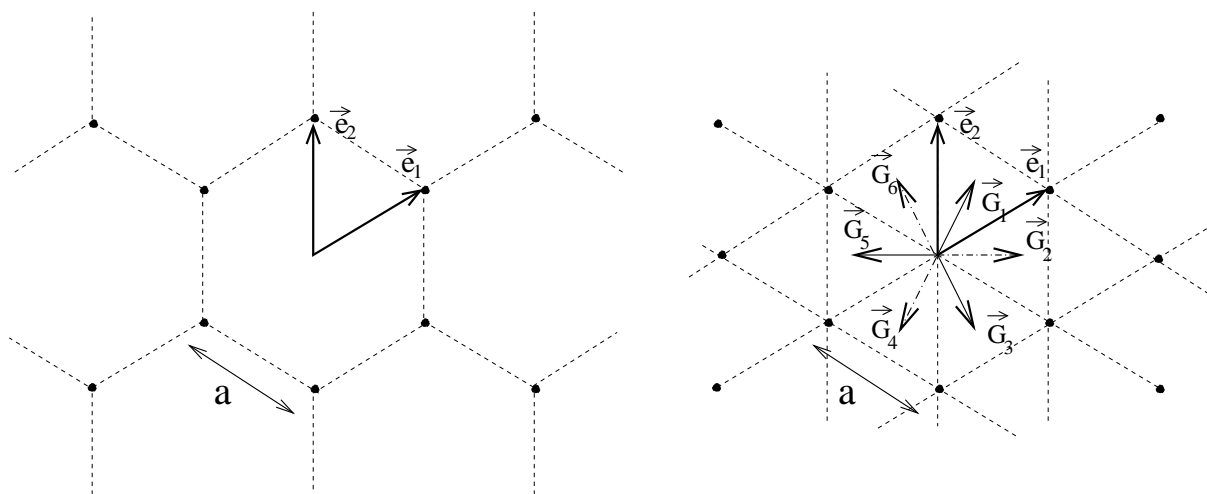


FIG. 6.8 – Représentation d’un réseau hexagonal, des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  composant la cellule élémentaire et des premiers vecteurs du réseau réciproque  $\mathbf{G}_{\alpha=1,6}$

### Couplage à un substrat

Avant d’aller plus loin dans notre analyse, une petite remarque s’impose concernant la nature physique du champ de déformation. Dans un solide parfaitement invariant par translation auquel s’applique la description élastique ci-dessus, le champ  $\mathbf{u}$  n’est pas une grandeur physiquement pertinente, étant défini à une translation près du réseau. Le champ décrivant l’amplitude des fluctuations correspond plutôt à sa dérivée, le tenseur des déformations  $u_{ij}$ , et le hamiltonien correspondant (6.4a) ne fait intervenir que ce tenseur de déformation. Dans un tel solide bidimensionnel, il est ainsi naturel d’introduire les dislocations en décomposant le tenseur de déformations  $u_{ij}$  et non le champ  $\mathbf{u}$  en une composante de fluctuations élastiques et une composante induite par les dislocations, comme au chapitre 3.

La présence d’impuretés de structure, internes au cristal, ne modifie pas cette invariance par translation, et l’analyse peut suivre celle du cas pur (voir le chapitre 4). Par contre la présence d’un substrat externe avec lequel le cristal interagit brise cette invariance dans un échantillon donné. Le champ de déformation  $\mathbf{u}$  devient alors parfaitement défini<sup>3</sup> et l’analyse du comportement du cristal ne peut plus se faire uniquement sur  $u_{ij}$ .

Plus précisément, considérons pour l’instant le cas d’un substrat ordonné dans un but pédagogique. Si nous omettons pour l’instant le couplage entre modes communs à deux solides commensurables (voir le paragraphe 3.3), la présence d’un substrat induit dans le solide des orientations préférentielles. D’après le chapitre 3, l’orientation locale dans le solide a été modélisée par le champ  $\theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_x u_y - \partial_y u_x)$ . L’existence d’une orientation préférentielle induit donc un “coût en énergie” pour les fluctuations locales de l’orientation, correspondant à une nouvelle constante élastique  $\gamma$ . Le hamiltonien comporte ainsi un terme

<sup>3</sup>. pour être plus précis, ce champ de déformation n’est défini qu’à une translation d’un pas du réseau près.

supplémentaire :

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} u_{ij} C_{ijkl} u_{kl} + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} \gamma \theta^2(\mathbf{r}) \quad (6.5)$$

En l'absence de dislocations (c'est-à-dire pour un champ de déplacement monovalué), cette nouvelle constante n'est pas indépendante des constantes  $c_{11}$  et  $c_{66}$ , et elle peut être absorbée dans une redéfinition<sup>4</sup> de  $c_{66}$  (voir l'Annexe A du chapitre 3) :

$$c_{11} \rightarrow c_{11} \quad c_{66} \rightarrow \bar{c}_{66} = c_{66} + \gamma \quad (6.6)$$

Par contre la présence de dislocations découple cette nouvelle constante de  $c_{11}, c_{66}$  : la redéfinition ci-dessus ne peut plus se faire et le comportement élastique du solide est alors décrit par *trois* constantes élastiques. Dans la suite de ce paragraphe, nous utiliserons donc les constantes  $c_{11}, \bar{c}_{66}$ , puis nous reviendrons à  $c_{11}, c_{66}$  lorsque nous incorporons les dislocations dans notre étude.

### Désordre de substrat

Revenons au cas du substrat désordonné. Nous le représentons par un potentiel aléatoire  $V(\mathbf{r})$ , choisi gaussien, et de corrélation (à courte portée)  $\overline{V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')} = h(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Chaque atome du solide se trouve en présence de ce potentiel, et nous obtenons donc naturellement un couplage entre  $V(\mathbf{r})$  et la densité  $\rho(\mathbf{r})$  d'atomes du cristal bidimensionnel :

$$H_{des} = \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r})$$

Nous pouvons alors utiliser la décomposition en modes de Fourier de la densité  $\rho(\mathbf{r})$  et du potentiel aléatoire  $V(\mathbf{r})$  pour exprimer la partie pertinente à grande distance du couplage ci-dessus.

### Décomposition de la densité

Nous reprenons ici la décomposition de la densité  $\rho(\mathbf{r})$  utilisée dans le contexte des modèles de bosons en dimension 1+1 (Haldane 1981) et les ondes de densité de charge (Fukuyama & Lee 1978), ou encore celui des réseau de vortex (Giamarchi & Le Doussal 1995). Une attention spéciale doit être accordée à la présence de dislocations dans l'utilisation de cette décomposition.

Commençons par la décomposition en l'absence de défaut topologique, c'est-à-dire, dans la limite du continu, avec un champ de déplacement  $u(\mathbf{r})$  monovalué. La densité d'atomes s'exprime à l'aide de ce champ de déplacement selon

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \delta^{(2)}(\mathbf{r} - (\mathbf{R}_{\alpha} + \mathbf{u}(\mathbf{R}_{\alpha})))$$

---

4. Il convient ici de remarquer que la notation  $c_{66}$  est utilisée à la place de  $\bar{c}_{66}$  dans l'article joint en annexe.

---

Haldane F., (1981). *Phys. Rev. Lett.*, **47**:1840.

Fukuyama H. & Lee P., (1978). *Phys. Rev. B*, **17**:535.

Giamarchi T. & Le Doussal P., (1995). *Phys. Rev. B*, **52**:1242.

où la somme porte sur tous les atomes du réseau. La position  $\mathbf{R}_\alpha$  de l'atome  $\alpha$  correspond à sa position dans un réseau parfait, qui est donc arbitraire. Afin de s'affranchir de cette référence à un réseau arbitraire, nous introduisons le champ  $\Upsilon(\mathbf{r})$  qui donne la position  $\mathbf{R}_\alpha$  dans le réseau parfait à partir de la position  $\mathbf{r}$  dans le réseau déformé :

$$\Upsilon(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{u}(\Upsilon(\mathbf{r}))$$

En dimension deux, ce champ a donc deux composantes. Si en l'absence de dislocation on peut assigner sans ambiguïté à chaque atome une position dans un réseau parfait choisi, il n'en est pas tout à fait de même en présence de défauts topologiques. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.

La densité peut maintenant s'exprimer en fonction de ce champ  $\Upsilon(\mathbf{r})$  :

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \delta^{(2)}(\Upsilon(\mathbf{r}) - \mathbf{R}_\alpha) \det(\partial_i \Upsilon_j)(\mathbf{r})$$

Les positions  $\mathbf{R}_\alpha$  correspondant aux sites d'un réseau parfait de pas  $a$ , nous pouvons exprimer la somme ci-dessus en termes des vecteurs du réseau réciproque  $\mathbf{K}$  de ce réseau :

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \sum_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K}\Upsilon(\mathbf{r})} \det(\partial_i \Upsilon_j)(\mathbf{r})$$

En développant le déterminant en gradient du déplacement dans l'approximation élastique :

$$\det(\partial_i \Upsilon_j) = \partial_x \Upsilon_x \partial_y \Upsilon_y - \partial_x \Upsilon_y \partial_y \Upsilon_x = 1 + (\partial_x u_x + \partial_y u_y) + \mathcal{O}((\partial_i u_j)^2)$$

et en négligeant la différence entre  $u(\Upsilon(\mathbf{r}))$  et  $u(\mathbf{r})$  (à des termes de gradient près), nous obtenons l'expression désirée pour la densité du réseau :

$$\rho(\mathbf{r}) \simeq \rho_0 \left[ 1 - \partial_\alpha u_\alpha(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}-u(\mathbf{r}))} \right] \quad (6.7)$$

En présence de dislocations, nous utiliserons la même décomposition en remplaçant le champ  $\mathbf{u}$  par ses deux composantes  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_{sing}$ . Bien que le dérivation précédente ne soit plus valable pour un champ de déformation  $\mathbf{u}$  multivalué, il est naturel de penser que la décomposition (6.7) reste valable loin du coeur des dislocations (où les déformations varient lentement).

### Hamiltonien effectif

Nous pouvons maintenant utiliser cette écriture de la densité en décomposant de même le potentiel aléatoire  $V(\mathbf{r})$  sur ses modes de Fourier :

$$\int_{\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}} \left( [-\rho_0 V(\mathbf{r})] \partial_i u_i + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{K}} (V_{\mathbf{K}} e^{i\mathbf{K} \cdot u(\mathbf{r})} + V_{-\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{K} \cdot u(\mathbf{r})}) \right)$$

où nous avons supposé (sans perte de généralité) que  $\int_{\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) = 0$ , et  $V_{\mathbf{q} \sim \mathbf{K}} = \rho_0 V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}$ . Les deux premières contributions peuvent se réécrire sous la forme d'un tenseur de contraintes

locales aléatoires  $\sigma_{ij}$  provenant des modes de grande longueur d'onde du potentiel  $V(\mathbf{r})$ , et d'une contribution, provenant des modes au voisinage des premiers vecteurs du réseau réciproque, qui est modélisée par une phase locale aléatoire  $\phi_\nu$  répartie uniformément sur  $[0, 2\pi]$  pour chaque vecteur du réseau réciproque :

$$-\frac{1}{T}H_{des} = \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij} u_{ij} + 2\sqrt{g} \sum_{\nu=1,2,3} \cos(\mathbf{K}_\nu \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \phi_\nu(\mathbf{r})) \quad (6.8)$$

La distribution de  $\sigma_{ij}$  est choisie gaussienne avec un corrélateur qui s'exprime en fonction de deux constantes  $\Delta_{11}, \Delta_{66}$  :

$$\overline{\sigma_{ij}\sigma_{kl}} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{1}{T} [(\Delta_{11} - 2\Delta_{66})\delta_{ij}\delta_{kl} + \Delta_{66}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})] \quad (6.9)$$

où d'après la dérivation ci-dessus  $\Delta_{66} = 0$  initialement (mais cette constante est renormalisée vers des valeurs non nulles) et  $\Delta_{11} = \rho_0 h_{q=0}/T$ . Les constantes provenant des modes non nuls correspondent à  $g = \rho_0 h_{q=K_0}/T$  où  $\rho_0$  est la densité moyenne d'atomes dans le cristal. Le corrélateur de la phase est

$$\overline{e^{i(\phi_\nu(\mathbf{r}) - \phi_\nu(\mathbf{r}'))}} = \delta_{\nu\nu'} \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.10)$$

### Orientation locale et champ aléatoire

Nous avons déjà vu quelques pages auparavant qu'un substrat ordonné induisait un nouveau terme quadratique dans le hamiltonien, qui pouvait être cependant absorbé dans la densité d'énergie habituelle. De la même façon un substrat désordonné va favoriser des orientations *locales* distribuées aléatoirement. Le nouveau champ aléatoire qui se couple à l'orientation locale  $\theta(\mathbf{r})$ , correspond à un terme additionnel dans le hamiltonien

$$H_{sub} = \int_{\mathbf{r}} A(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r}) \quad \text{avec} \quad \overline{A(\mathbf{r})A(\mathbf{r}')} = 4\Delta_\gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.11)$$

En l'absence de dislocations, cette intensité  $\Delta_\gamma$  du nouveau champ peut également être absorbée dans une redéfinition de l'intensité  $\Delta_{66}$  :

$$\Delta_{11} \rightarrow \Delta_{11} \quad \Delta_{66} \rightarrow \overline{\Delta}_{66} = \Delta_{66} + \Delta_\gamma \quad (6.12)$$

Ceci ne sera plus le cas en présence des dislocations.

Le modèle que nous allons considérer est donc décrit par la somme des deux hamiltoniens (6.4) et la partie de désordre (6.8). Dans (6.8), nous avons négligé les harmoniques plus élevés du potentiel  $V$  car, comme nous allons le voir dans la suite, ces harmoniques correspondent à des charges plus élevées dans la formulation de gaz de Coulomb ci-dessous, et donc à des opérateurs moins pertinents que ceux de (6.8) autour des points fixes qui nous intéressent dans la suite de notre étude.

Nous pouvons maintenant étudier ce modèle par renormalisation en le transformant en un gaz de Coulomb où nous pourrions utiliser les techniques précédentes.



## 6.2.2 Gaz de Coulomb avec charges vectorielles

### Modèle de Sine-Gordon répliqué

Avant d'obtenir le gaz de Coulomb, nous commençons par moyenner sur les réalisations du désordre l'énergie libre en utilisant la méthode des répliques, ce qui nous conduit à exprimer le  $p^{ième}$  moment de la fonction de partition du modèle ci-dessus :

$$\overline{Z^p} = \overline{\left( \int d[\mathbf{u}(\mathbf{r})] e^{-\frac{1}{T}(H_{el} + H_{des})} \right)^p} = \prod_{a=1}^p \int d[\mathbf{u}^a(\mathbf{r})] \exp \left( -\frac{1}{T} H^{(p)}[\mathbf{u}^a] \right)$$

avec le hamiltonien répliqué

$$H^{(p)}[\mathbf{u}^a] = \frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{a,b=1}^p u_i^a(\mathbf{q}) \Phi_{ij}^{ab}(\mathbf{q}) u_j^b(\mathbf{q}) - g \sum_{\nu=1,2,3} \sum_{a,b=1}^p \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \cos(\mathbf{K}_\nu \cdot (\mathbf{u}^a(\mathbf{r}) - \mathbf{u}^b(\mathbf{r}))) \quad (6.13)$$

Dans cette définition nous avons utilisé une matrice d'élasticité répliquée qui généralise la définition du cas pur (formule (6.4b)) à des coefficients élastiques matricielles  $c_{11}^{ab}, \bar{c}_{66}^{ab}$  :

$$\Phi_{ij}^{ab}(\mathbf{q}) = q^2 (c_{11}^{ab} P_{ij}^L + \bar{c}_{66}^{ab} P_{ij}^T) \quad (6.14a)$$

où dans notre cas ces matrices d'élasticité sont définies par

$$c_{11}^{ab} = c_{11} \delta^{ab} - \Delta_{11} \quad ; \quad \bar{c}_{66}^{ab} = \bar{c}_{66} \delta^{ab} - \bar{\Delta}_{66} \quad (6.14b)$$

Le modèle que nous obtenons est donc l'analogie pour une champ à deux composantes du modèle XY désordonné étudié au chapitre (4).

### Approximation de Villain et gaz de Coulomb

Si nous répliquons le modèle initial en ne moyennant pour l'instant que sur le tenseur de contraintes locales  $\sigma_{ij}$ , nous obtenons le hamiltonien suivant :

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \sum_{a,b=1}^p u_i^a(\mathbf{q}) \Phi_{ij}^{ab}(\mathbf{q}) u_j^a(\mathbf{q}) + 2\sqrt{g}T \int \frac{d^2\mathbf{r}}{a^2} \sum_a \sum_{\nu=1,2,3} \cos(\mathbf{K}_\nu \cdot \mathbf{u}^a(\mathbf{r}) + \phi_\nu(\mathbf{r}))$$

En utilisant l'approximation de Villain pour chaque couplage en cosinus, nous introduisons des charges vectorielles sur les sites du réseau cristallin :

$$\begin{aligned} & \exp \{ -2\sqrt{g} \cos(\mathbf{K}_\nu \cdot \mathbf{u}^a(\mathbf{r}) + \phi_\nu(\mathbf{r})) \} \\ & \longrightarrow \sum_{n^a(\nu, \mathbf{r}) \in \mathbb{Z}} \exp \{ -in^a(\nu, \mathbf{r}) (\mathbf{K}_\nu \cdot \mathbf{u}^a(\mathbf{r}) + \phi_\nu) + \ln \sqrt{g} (n^a(\nu, \mathbf{r}))^2 \} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi en chaque site un ensemble de charges  $\{n^a(\nu, \mathbf{r}) \mathbf{K}_\nu\}$  qui se couplent au champ de déplacement. En chaque site, nous avons trois vecteurs  $\mathbf{K}_\nu$  du réseau réciproque

de plus petite norme (modulo un signe), et pour chacun de ces vecteurs une charge répliquée  $n^a(\nu, \mathbf{r})$  à  $p$  composantes entières. Nous allons utiliser la notation  $\mathbf{n}_\nu^a(\mathbf{r}) = n^a(\nu, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{K}_\nu$  pour les charges dans les trois directions en chaque point. Dans la suite il est important de différencier la structure géométrique de ces charges, analogue à celle qui apparaît dans l'étude de la fusion pure, de la composante de répliques qui est déjà apparue dans l'étude du modèle XY dans un champ magnétique aléatoire au chapitre 4. Heureusement pour nous, nous allons pouvoir, dans notre étude par le groupe de renormalisation, nous restreindre aux charges correspondant aux opérateurs de plus petites dimensions (les plus pertinents). Comme dans le cas pur, il s'agit des charges de plus petite norme (voir cependant à ce sujet le travail du chapitre suivant). Il nous reste auparavant à moyenner sur les phases aléatoires  $\phi_\nu(\mathbf{r})$  pour trouver la structure définitive de ces charges vectorielles. Cette moyenne se fait très aisément et impose en chaque site, et pour chacune des trois directions  $\nu = 1, 2, 3$

$$\sum_a n^a(\nu, \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r}, \nu$$

Les charges de plus petit module correspondent donc à celles pour lesquelles une seule des trois charges  $\mathbf{n}_\nu^a$  est non nulle et comporte, afin de satisfaire la condition ci-dessus, une seule composante  $a_1$  de répliques de valeur  $+1$ , et une autre ( $a_2$ ) de valeur  $-1$  :  $n^a(\nu, \mathbf{r}) = \delta^{a,a_1} - \delta^{a,a_2}$  où  $1 < a_1, a_2 < p$ . L'intégration (gaussienne) explicite sur le champ de déplacement répliqué  $u^a(\mathbf{r})$  du hamiltonien obtenu par cette approximation de Villain conduit à un gaz de Coulomb avec les charges décrites ci-dessus. La composante géométrique de ces charges étant analogue à celle qui survient dans l'étude de la fusion KTHNY, l'interaction entre ces charges a la même forme que pour le gaz de Coulomb dans ce cas (formule (3.16) du chapitre 3), la structure répliquée des charges conduisant à des matrices (au lieu de constantes) de couplage dans cette interaction. En utilisant la neutralité du gaz  $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{n}_\nu^a(\mathbf{r}) = 0$  nous obtenons ainsi la fonction de partition de gaz de Coulomb

$$\overline{Z^p} = Z_{cg} = \sum_{[n^a(\nu, \mathbf{r})]} \exp \left\{ + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu'} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|>a} \mathbf{n}_{\nu,i}^a(\mathbf{r}) V_{ij}[\kappa_3^{ab}, \kappa_4^{ab}] (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\nu',j}^b(\mathbf{r}') \right\} \quad (6.15)$$

où l'interaction  $V_{ij}$ , inverse de la matrice  $\Phi_{ij}^{ab}$ , est donnée par

$$V_{ij}[\kappa_3^{ab}, \kappa_4^{ab}] (\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \left( \delta_{ij} \kappa_3^{ab} \ln \frac{r}{a} - \kappa_4^{ab} \left( \frac{r_i r_j}{r^2} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \right)$$

$$\kappa_3^{ab} = \frac{T}{4} ([\overline{c}_{66}^{-1}]^{ab} + [c_{11}^{-1}]^{ab}) \quad \kappa_4^{ab} = \frac{T}{4} ([\overline{c}_{66}^{-1}]^{ab} - [c_{11}^{-1}]^{ab})$$

### 6.2.3 Analyse de la statique par le groupe de renormalisation

L'analyse par le groupe de renormalisation est présentée en détail dans l'article joint en annexe. Je reprend ici l'analyse du flot de renormalisation.

Les équations de renormalisation qui décrivent le comportement du solide en l'absence de dislocations s'écrivent, au second ordre en l'intensité du désordre  $g$  (avec  $\overline{\Delta}_{66} = \Delta_{66} + \Delta_\gamma$ ):

$$\partial_l c_{11} = \partial_l c_{66} = 0 \quad (6.16a)$$

$$\partial_l \Delta_{11} = T B_{11}(\alpha) g^2 + \mathcal{O}(g^3) \quad (6.16b)$$

$$\partial_l \bar{\Delta}_{66} = T B_{66}(\alpha) g^2 + \mathcal{O}(g^3) \quad (6.16c)$$

$$\partial_l g = \left( 2 - \frac{K_0^2}{\pi} \kappa_3 \right) g - B_g(\alpha) g^2 + \mathcal{O}(g^3) \quad (6.16d)$$

où les coefficients dépendent explicitement des constantes élastiques, qui ne sont pas renormalisées :

$$B_{11}(\alpha) = \frac{3\pi}{4} K_0^2 (2I_0(\alpha) + I_1(\alpha)) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{TK_0^2}{4\pi} \left( \frac{1}{\bar{c}_{66}} - \frac{1}{c_{11}} \right) \quad (6.17a)$$

$$B_{66}(\alpha) = \frac{3\pi}{4} K_0^2 (2I_0(\alpha) - I_1(\alpha)) \quad (6.17b)$$

$$B_g(\alpha) = -2\pi (I_0(\alpha) - 2I_0(\alpha/2)) \quad (6.17c)$$

et  $\kappa_3 = \frac{T}{4} (c_{66}^{-1} + c_{11}^{-1})$ .  $K_0$  est la norme des premiers vecteurs du réseau réciproque.

Les constantes élastiques n'étant pas renormalisées (suite à l'invariance statistique du modèle), le flot est entièrement déterminé par le comportement des différentes intensités du désordre  $g, \Delta_{11}, \Delta_{66}$ .

Ces équations sont la généralisation pour un modèle avec un champ  $\mathbf{u}$  à deux composantes de celles obtenues par Cardy et Ostlund. Le flot de renormalisation correspondant est représenté sur la figure 6.9.

### Phase quasi-solide à haute température

Nous obtenons à haute température, pour  $T > T_g$  telle que  $\kappa_3(T_g) = 2\pi/K_0^2$  (qui est bien définie sachant que  $\kappa_3$  n'est pas renormalisée), une ligne de points fixes correspondant à un désordre d'accrochage (d'intensité  $g_\infty = 0$ ) nul à grandes distances, et à un désordre lentement variable d'intensités renormalisées finies  $\Delta_{11}^\infty$  et  $\Delta_{66}^\infty$  (et  $\Delta_\gamma^\infty$ ). Il convient de remarquer que bien qu'étant nul initialement, cette dernière constante  $\Delta_{66}^\infty$  est renormalisée vers une valeur finie. Ainsi dans cette phase, seul le désordre lentement variable, modélisé par le tenseur de contraintes locales  $\sigma_{ij}$ , est pertinent à grande distance. Ce désordre joue absolument le même rôle que les impuretés de structure considérées précédemment. En l'absence de dislocations, il ne modifie donc pas le type d'ordre de la phase du cristal : ainsi la fonction de corrélation de l'ordre translationnel décroît algébriquement :

$$\left\langle e^{i\mathbf{K}_0 \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}'))} \right\rangle \simeq \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right)^{-\nu_{K_0}(T)} \quad (6.18)$$

avec un exposant modifié non universel :

$$\nu_{K_0}(T) = \frac{1}{2} \frac{TK_0^2}{\pi} \left( \frac{1}{c_{11}} + \frac{\Delta_{11}^\infty}{c_{11}^2} + \frac{1}{c_{66} + \gamma} + \frac{\Delta_{66}^\infty + \Delta_\gamma^\infty}{(c_{66} + \gamma)^2} \right) \quad (6.19)$$

Cette phase est donc l'analogue de la phase solide dans le cas sans impureté, et son quasi-ordre ne peut être détruit qu'en autorisant la présence des dislocations dans le modèle.

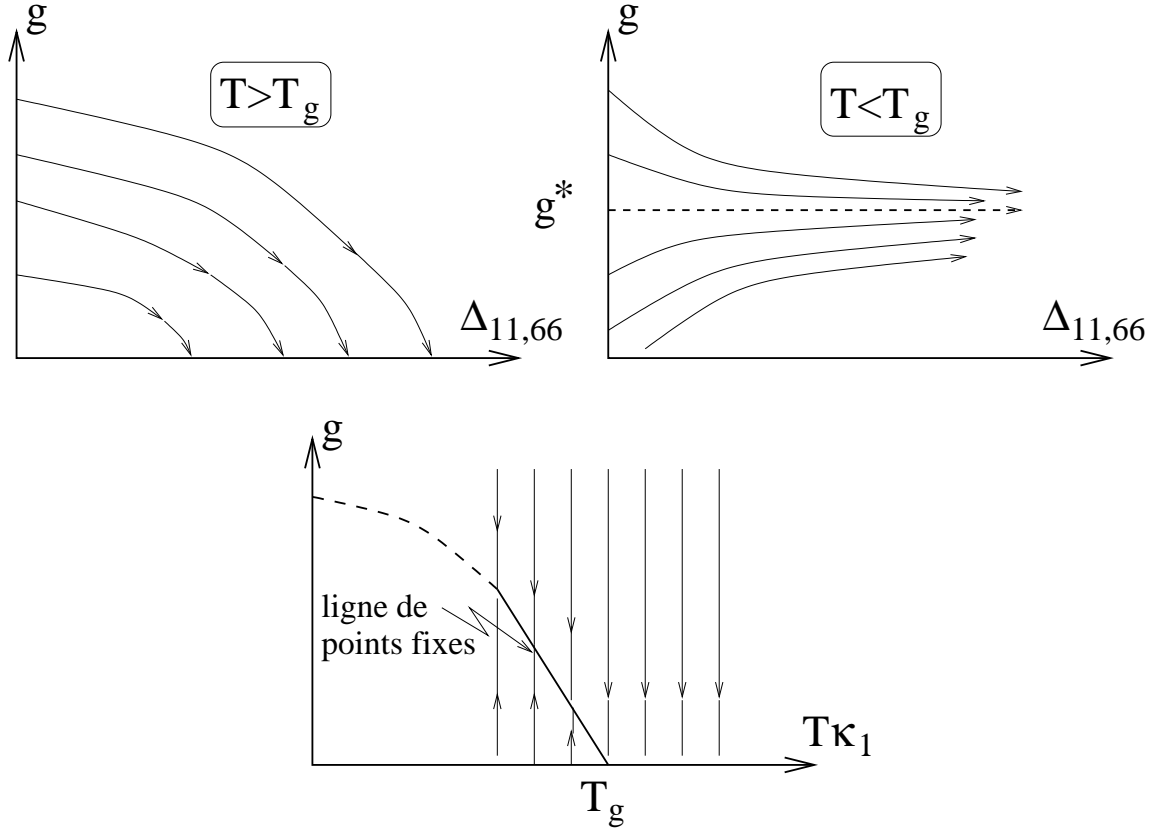


FIG. 6.9 – Flot schématique autour de la ligne de transition pour un cristal bidimensionnel sans dislocations, et en présence d'un substrat désordonné

### Ligne de points fixes “divergents” et symétrie statistique

À basse température, nous obtenons une ligne de quasi-points fixes correspondant à une valeur finie de l'intensité  $g = g^* = 2(T_g - T)/(T_g B_g(\alpha))$ . Cependant le long de cette ligne de points fixes,  $\Delta_{11}^\infty$  et  $\Delta_{66}^\infty$  croissent linéairement en  $l$ .

Ce point fixe est de type particulier : les constantes  $\Delta$  croissent avec l'échelle. Il peut cependant être étudié perturbativement (en  $g$ ), grâce à la symétrie statistique du modèle. Nous allons ici étudier plus précisément ses conséquences sur les caractéristiques de cette phase vitreuse de basse température. Cette symétrie des lois de distributions des fonctionnelles génératrices du modèle est présentée pour le cas particulier du modèle à une composante dans l'appendice IV de l'article joint en annexe, dans la suite de ce paragraphe et dans l'Annexe A pour le modèle élastique complet.

Le hamiltonien du modèle s'écrit donc

$$\frac{1}{T}H = \frac{1}{2T} \int_{\mathbf{r}} u_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl} u_{kl}(\mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij} u_{ij}(\mathbf{r}) - 2\sqrt{g} \sum_{\nu} \int_{\mathbf{r}} \cos(\mathbf{K}_{\nu} \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \phi_{\nu}(\mathbf{r}))$$

avec le tenseur d'élasticité symétrique  $C_{ijkl} = (c_{11} - 2\bar{c}_{66})\delta_{ij}\delta_{kl} + \bar{c}_{66}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ . Notons avant d'aller plus loin que le tenseur de contrainte locale aléatoire  $\sigma_{ij}$  peut être formulé à

l'aide d'un champ de déplacement aléatoire local  $A_i$  qui s'écrit

$$A_k(\mathbf{q}) = iT \frac{q_j}{q^2} C_{kjl}^{-1} \sigma_{lm}(\mathbf{q}) \quad (6.20)$$

Pour chaque distribution du désordre  $\{\sigma_{ij}(\mathbf{r}), \phi_\nu(\mathbf{r})\}$  nous pouvons alors translater *localement* le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  du modèle ci dessus selon  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \rightarrow \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , ce qui nous donne le nouveau hamiltonien

$$\frac{1}{T} H = \frac{1}{2T} \int_{\mathbf{r}} \hat{u}_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl} \hat{u}_{kl}(\mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}(\mathbf{r}) - 2\sqrt{g} \sum_{\nu} \int_{\mathbf{r}} \cos(\mathbf{K}_{\nu} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) + \phi'_{\nu}(\mathbf{r}))$$

où la nouvelle phase  $\phi'_{\nu}(\mathbf{r}) = \phi_{\nu}(\mathbf{r}) + \mathbf{K}_{\nu} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$  a la même distribution que la phase initiale (uniforme sur  $[0, 2\pi]$ ).

La contrainte locale  $\sigma_{ij}$  se découple donc complètement du reste du hamiltonien. Il est ainsi possible, pour toutes intensités  $\Delta_{11}$  et  $\overline{\Delta}_{66}$  aussi grandes soient elles, de revenir à un modèle sans contrainte locale. Cette propriété nous permet donc d'étudier perturbativement la ligne de points fixes de basse température malgré la divergence des intensités  $\Delta_{11}, \overline{\Delta}_{66}$ . La procédure de translation locale ci-dessus peut être répétée sur les fonctionnelles génératrices du modèle. Elle permet ainsi de montrer que la non renormalisation des constantes élastiques  $c_{11}$  et  $c_{66}$  (et  $\gamma$ ) est valable à tous les ordres en  $g$  (voir l'article en annexe), mais aussi de fixer la forme asymptotique des fonctions de corrélation du modèle, et ceci indépendamment de l'approche perturbative suivie pour dériver les équations de renormalisation du modèle. La dérivation de cette forme asymptotique à partir de la symétrie statistique est faite dans l'Annexe A .

Le résultat correspond à un comportement dominant des fonctions de corrélations à deux points qui est isotrope et donné par

$$C_{K_0}(\mathbf{r}) = \overline{\langle e^{i\mathbf{K}_0 \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{0}))} \rangle} \simeq e^{-\frac{1}{2}b(\alpha)\tau^2 \ln^2\left(\frac{r}{\xi}\right)} \quad (6.21)$$

où  $\xi$  est une longueur caractéristique de corrélation de l'ordre translationnel, qui, à faible désordre ( $g$ ), s'identifie avec l'expression de la longueur de corrélation  $R_a$ , et le coefficient  $b(\alpha)$  dans l'équation ci-dessus dépend continuellement du rapport de Poisson du cristal bi-dimensionnel. La variable  $\alpha$  est définie par  $\alpha = (K^2 T / 4\pi)(\bar{c}_{66}^{-1} - c_{11}^{-1})$ . À la transition, où  $T = T_g = 8\pi K^{-2} c_{11} \bar{c}_{66} / (c_{11} + \bar{c}_{66})$ , cette variable ne dépend plus que du rapport de Poisson  $\sigma$  et vaut

$$\alpha(T_g) = 2 \frac{c_{11} - \bar{c}_{66}}{c_{11} + \bar{c}_{66}} = 2 \frac{1 + \sigma}{3 - \sigma} \quad \sigma = 1 - 2 \frac{\bar{c}_{66}}{c_{11}}$$

La fonction  $b(\alpha)$  est alors définie par

$$b(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\tau^2 T T_g}{B_g^2(\alpha)} \left( \frac{B_{11}(\alpha)}{c_{11}^2} + \frac{B_{66}(\alpha)}{\bar{c}_{66}^2} \right) = 6 \frac{2I_0(\alpha) \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2\right) - \alpha I_1(\alpha)}{(2I_0(\alpha/2) - I_0(\alpha))^2}$$

où les fonctions  $I_0$  et  $I_1$  sont des fonctions de Bessel modifiées.

Par ailleurs la composante sous dominante de cette fonction de corrélation comporte une partie anisotrope universelle qui peut être exprimée à l'aide du rapport

$$\frac{C_{K_0}(\mathbf{r} \parallel \mathbf{K}_0)}{C_{K_0}(\mathbf{r} \perp \mathbf{K}_0)} \simeq \left( \frac{r}{\xi} \right)^{-\frac{1}{2}b(\alpha)\tau^2}$$

où

$$\tilde{b}(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \frac{4\tau^2 T T_g}{B_g^2(\alpha)} \left( \frac{B_{66}(\alpha)}{c_{66}^2} - \frac{B_{11}(\alpha)}{c_{11}^2} \right) = 6 \frac{I_1(\alpha) \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2\right) - 2\alpha I_0(\alpha)}{(2I_0(\alpha/2) - I_0(\alpha))^2}$$

Nous avons donc montré qu'en l'absence de dislocation, la phase vitreuse du cristal à basse température correspondait à une croissance lente des déplacements élastiques. Ce comportement est l'analogie en dimension deux de celui de la phase de BRAGG prédite en dimension trois. Avant de passer à l'étude de la stabilité de ce point fixe vis-à-vis de la formation de dislocations, nous allons rapidement étudier la dynamique de ce verre.

### 6.2.4 Étude de la dynamique par renormalisation

Dans la partie précédente, la phase de basse température était caractérisée par la pertinence du désordre à grande échelle, et donc appelée en conséquence "verre". Une caractérisation plus précise de cette phase peut être donnée par ses propriétés dynamiques que nous allons brièvement étudier dans cette partie.

La méthode employée consiste à considérer une dynamique de type Langevin du modèle, décrite par l'équation

$$\eta \partial_t u_i(\mathbf{r}, t) = - \frac{\delta H}{\delta u_i(\mathbf{r}, t)} + \zeta_i(\mathbf{r}, t) \quad (6.22)$$

où  $\eta$  est le coefficient de friction<sup>5</sup> et  $\zeta_i(\mathbf{r}, t)$  est un bruit thermique gaussien de corrélation

$$\langle \zeta_i(\mathbf{r}, t) \zeta_j(\mathbf{r}', t') \rangle = 2\eta T \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

Afin de se ramener à un problème classique de théorie des champs, nous nous intéressons alors à la fonctionnelle génératrice de de Dominicis-Janssen, ou Martin-Siggia-Rose, qui peut être moyennée sur le désordre. En étudiant la renormalisation au second ordre perturbatif en le désordre, nous pouvons d'une part retrouver l'analyse statique précédente, et d'autre part obtenir le comportement dynamique du cristal autour des points fixes du groupe de renormalisation. Les équations de renormalisation que nous obtenons généralisent donc celles de la statique (6.16) :

$$\partial_l \Delta_{11} = T B_{11}(\alpha) g^2(l) + \mathcal{O}(g^3) \quad (6.23a)$$

$$\partial_l \Delta_{66} = T B_{66}(\alpha) g^2(l) + \mathcal{O}(g^3) \quad (6.23b)$$

$$\partial_l g = \left( 2 - \frac{K_0^2}{\pi} \kappa_3 \right) g(l) - B_g(\alpha) g^2(l) + \mathcal{O}(g^3) \quad (6.23c)$$

$$\partial_l \eta(l) = T B_\eta(c_{11}, \bar{c}_{66}) \eta(l) g(l) \quad (6.23d)$$

et  $c_{11}, \bar{c}_{66}$  ne sont pas renormalisées. Les coefficients dépendent de façon générale de la procédure de régularisation utilisée (voir l'article en annexe): cependant pour une fonction de régularisation donnée, tout la dépendance peut être absorbée dans une redéfinition de l'intensité  $g$ , et nous pouvons alors utiliser les définitions (6.17) pour les fonctions  $B_{11,66}(\alpha)$  et  $B_g(\alpha)$  alors que  $B_\eta$  est définie par

$$B_\eta(c_{11}, \bar{c}_{66}) = \frac{3}{2} e^\gamma K_0^2 \frac{1}{\bar{c}_{66}} \left( \frac{\bar{c}_{66}}{c_{11}} \right)^{\frac{\bar{c}_{66}}{c_{11} + \bar{c}_{66}}} \quad (6.24)$$

---

5. Attention : dans ce paragraphe,  $\eta$  désigne la friction et non plus la viscosité.

avec  $\gamma$  la constante d'Euler.

L'exposant dynamique du modèle à la transition peut être extrait du comportement d'échelle de la friction  $\eta$  qui se comporte selon  $\eta(L) \sim L^{z-2}$ , ce qui peut s'écrire  $\partial_l \ln \eta(l) = 2 - z$ . Ainsi au voisinage du point de transition  $T = T_g$ , nous obtenons

$$z - 2 = T_g B(c_{11}, c_{66}) g^* = 3\tau e^\gamma \frac{2 + \alpha}{2I_0(\alpha/2) - I_0(\alpha)} \left( \frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} \right)^{\frac{2-\alpha}{4}} \quad (6.25)$$

Cet exposant dynamique  $z$  plus grand que deux est une caractéristique d'une dynamique lente.

### Caractéristique vitesse-force du cristal

En suivant la méthode de NOZIERES (Noziers & Gallet 1987), nous pouvons tirer de cette analyse de renormalisation la réponse du cristal à une force uniforme  $f$ . Au dessus de la transition, le solide réagit à cette force avec une vitesse proportionnelle à cette force :  $v = \mu f$ , c'est-à-dire suivant un comportement ohmique.

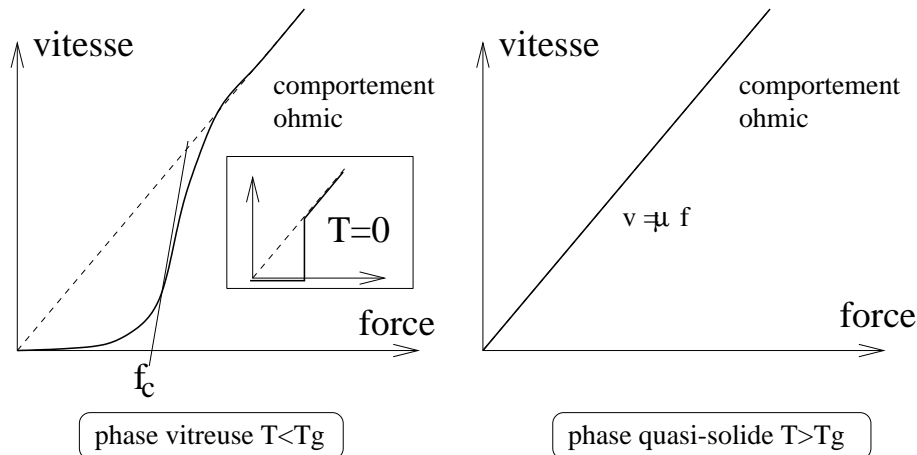


FIG. 6.10 – Représentation de la caractéristique vitesse-force dans les phases vitreuse et quasi-solide

Dans la phase vitreuse au contraire, le cristal est accroché par le substrat désordonné en dessous de  $T_g$ . A température nulle sa vitesse serait donc nulle pour des faibles forces. Cependant lorsque la force  $f$  dépasse une force critique effective  $f_c$ , le solide se décroche et reprend un mouvement à vitesse proportionnelle à la force (voir l'encart dans la figure 6.10). Autour de la température de transition (finie)  $T_g$ , les fluctuations thermiques permettent au solide accroché d'avoir une vitesse très faible mais non nulle, et conduisent à une caractéristique  $v - f$  fortement non linéaire. La définition de la force seuil effective  $f_c$  est plus délicate (figure 6.10), et marque le passage du régime ohmique (grande force) au régime non linéaire. La relation entre la vitesse et la force extraite de notre analyse de

renormalisation s'écrit

$$v \sim \mu_0 f \left( \frac{f}{f_c} \right)^{\frac{z}{2}-1} \quad f \ll f_c \quad (6.26a)$$

$$v \sim \mu_0 f \quad f \gg f_c \quad (6.26b)$$

où la force seuil  $f_c$  est reliée à la longueur de Larkin  $R_c$  par la relation  $f_c = cte/R_c^2$ .

L'approche de renormalisation développée dans ce chapitre permet donc de vérifier la théorie phénoménologique de LARKIN (à température finie), et de déterminer précisément les caractéristiques vitesse-force dans la phase vitreuse.

### 6.3 Effet des impuretés du film cristallin sur la fusion bidimensionnelle

La description des déformations d'un film cristallin doit bien sûr inclure les dislocations en plus des déplacements élastiques que nous venons de décrire. En l'absence de substrat nous savons que ceux sont ces dislocations qui induisent une fusion du cristal. Leur comportement en présence d'un potentiel désordonné provenant d'un substrat est le sujet du reste de ce chapitre.

Nous venons de voir dans l'étude qui précède que ce substrat désordonné induisait deux types de désordre : une contrainte aléatoire locale et un champ d'accrochage. La complexité du problème en présence des dislocations nous incite à étudier l'effet de ces deux composantes de désordre sur les dislocations séparément. Nous allons dans un premier temps considérer un modèle qui ne comporte qu'un champ  $\sigma_{ij}$  de contrainte aléatoire. Nous verrons que ce modèle décrit également la présence d'impuretés de structure dans le cristal. Puis nous incluons la composante d'accrochage du désordre dans cette première étude.

Commençons par considérer un film cristallin contenant des impuretés qui compressent ou dilatent localement le cristal (figure 6.3). Nous allons voir que cette situation correspond à n'inclure que la composante  $\sigma_{ij}$  d'un désordre de substrat.

Si le temps caractéristique de diffusion de ces impuretés est très grand devant le temps caractéristique de relaxation du solide, typiquement l'échelle de temps de diffusion d'une dislocation, alors nous pouvons considérer ce type de désordre comme gelé.

Cette situation physique a été étudié par NELSON (Nelson 1983), toujours à l'aide des mêmes outils théoriques de renormalisation *via* les gaz coulombiens.

#### 6.3.1 Description du modèle

Nous considérons comme précédemment un cristal hexagonal décrit par une théorie élastique linéaire isotrope. Dans un cristal bidimensionnel décrit par une matrice d'élasticité  $C_{ijkl} = c_{11}\delta_{ij}\delta_{kl} + c_{66}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - 2\delta_{ij}\delta_{kl})$ , où  $c_{11}, c_{66}$  sont respectivement les modules de compression et de cisaillement, la contrainte locale en présence de déformations  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$

---

Nelson D., (1983). In Domb C. & Lebowitz C., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapter vol. 7, page 165. Academic Press (London).



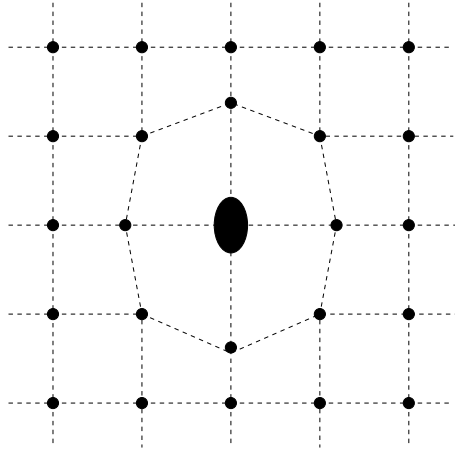


FIG. 6.11 – Représentation d'une impureté non isotrope dans un cristal. Celui-ci est choisi carré par simplicité.

correspond au tenseur

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}u_{kl} = 2\mu u_{ij} + \lambda \delta_{ij}u_{kk}$$

La présence d'impuretés comme celle de la figure 6.3 va bien sûr ajouter à cette contrainte structurelle une contrainte locale aléatoire qui, dans la limite du continu, peut être modélisée par un tenseur aléatoire. Dans le cas d'impuretés parfaitement isotropes, considéré par NELSON, la grandeur caractérisant cette distribution d'impuretés est leur densité (ou plus précisément la variation de leur densité  $\delta c(\mathbf{r})$ ). Cette grandeur étant scalaire, le seul tenseur symétrique de contrainte que l'on peut construire est un tenseur de la forme  $w\delta c(\mathbf{r})\delta_{ij}$ . Ainsi une telle densité d'impuretés n'induit que des compressions locales. Dans cette situation le tenseur de contraintes induit par les impuretés s'écrit

$$\sigma_{ij}^{sing}(\mathbf{r}) = w_1(\mathbf{r})\delta_{ij} \quad \overline{\sigma_{ij}^{imp}\sigma_{kl}^{imp}} = \Delta_{11}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

où nous avons choisi une distribution gaussienne pour la variable aléatoire  $w_1$ . Par contre si les impuretés sont anisotropes, chaque impureté est également caractérisée par son orientation  $\mathbf{A}$  qui est un champ aléatoire locale. Nous pouvons introduire cette orientation locale de deux façons équivalentes (au moins en l'absence de dislocation) : soit en introduisant une composante du tenseur symétrique des contraintes de la forme  $A_i A_j$  qui généralement va contribuer à la fois au cisaillement et à la compression du cristal; ou en remarquant que cette orientation locale des impuretés se couple naturellement au champ d'orientation locale  $\theta$  défini au chapitre 3. Si nous définissons  $\zeta(\mathbf{r})$  le champ local qui se couple à l'orientation selon  $\delta H = \int_{\mathbf{r}} \zeta(\mathbf{r})\theta(\mathbf{r})$ , de distribution gaussienne avec variance<sup>6</sup>  $\overline{\zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}')} = 4\Delta_{66}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , nous pouvons réexprimer ce champ aléatoire locale comme une contribution au corrélateur du tenseur des contraintes locales (voir l'Annexe A du chapitre 3) :

$$\overline{\sigma_{ij}^{imp}\sigma_{kl}^{imp}} = \Delta_{11}\delta_{ij} + \Delta_{66}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - 2\delta_{ij}\delta_{kl}) \quad (6.27)$$

Ce tenseur de contrainte s'ajoute à celui du cristal pur  $\sigma_{ij}$ . Le hamiltonien du modèle devient donc

$$H = \int_{\mathbf{r}} \frac{1}{2} u_{ij} C_{ijkl} u_{kl} + \sigma_{ij}^{imp} u_{ij} \quad (6.28)$$

où  $C_{ijkl}$  est la matrice élastique du cristal pur.

6. En fait la constante de couplage de ce corrélateur devrait plutôt se noter  $\Delta_\gamma$  (par analogie avec la constante élastique  $\gamma$  du cas pur) : cette constante s'ajoute alors à un  $\Delta_{66}$  initialement nul.

## Introduction des dislocations

Comme dans le cas pur, nous décomposons le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  en une partie élastique  $\tilde{u}(\mathbf{r})$  et une composante provenant des dislocations (partie plastique)  $\mathbf{u}^{sing}(\mathbf{r})$ , qui est multivaluée. Sachant que le désordre ici ne se couple qu'au tenseur des déformations, qui est bien monovalué, nous n'avons pas besoin de travailler directement avec le champ de déformations et les difficultés qui accompagnent sa multivaluation. Cette avantage provient directement de la nature du désordre que nous considérons qui ne brise pas l'invariance statistique de translation du cristal<sup>7</sup> : si nous tirons (assez doucement) sur le film, les impuretés que nous considérerons vont suivre le cristal. Ainsi, en l'absence de référentiel absolu, seules les variations du déplacement acquiert une signification physique. Cette situation est à mettre en opposition au cas d'un substrat (désordonné ou non), que nous traiterons dans la suite de ce chapitre, et qui requiert un appareil technique plus développé. La décomposition ci-dessus du déplacement se transpose de façon équivalente sur le tenseur des déformations :  $u_{ij} = \tilde{u}_{ij} + u_{ij}^{sing}$  où  $u_{ij}^{sing}$  a été déterminé dans l'Annexe A du chapitre 3. En reportant dans le hamiltonien nous obtenons

$$H[\sigma^{imp}] = \int_{\mathbf{r}} \frac{1}{2} \tilde{u}_{ij} C_{ijkl} \tilde{u}_{kl} + \tilde{u}_{ij} (C_{ijkl} u_{kl}^{sing} + \sigma_{ij}^{imp}) + \frac{1}{2} u_{ij}^{sing} C_{ijkl} u_{kl}^{sing} + \sigma_{ij}^{imp} u_{ij}^{sing}$$

Le terme croisé  $\tilde{u}_{ij} C_{ijkl} u_{kl}^{sing}$  s'annule comme dans le cas pur et nous obtenons deux contributions différentes à l'énergie : une partie gaussienne de fluctuations purement élastiques qui peut être intégrée sans problème, et une contribution des dislocations. Le terme d'interaction des dislocations  $u_{ij}^{sing} C_{ijkl} u_{kl}^{sing}$  se simplifie en utilisant les résultats de l'Annexe A du chapitre 3). Il nous reste également un terme de couplage des dislocations avec les impuretés. Comme dans les modèles précédents nous n'allons nous intéresser qu'à la valeur moyenne de l'énergie libre (et donc des fonctions de corrélation), et pour cela nous utilisons la méthode des répliques.

## Hamiltonien répliqué

En introduisant  $p$  répliques de la fonction de partition correspondant au hamiltonien ci-dessus, et en moyennant sur la distribution gaussienne du tenseur  $\sigma_{ij}^{imp}$ , nous sommes donc amenés à considérer le hamiltonien

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} \sum_{a=1}^p u_{ij}^{sing,a} C_{ijkl} u_{kl}^{sing,a} - \frac{1}{T} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} \sum_{a,b=1}^p u_{ij}^{sing,a} u_{kl}^{sing,b} \overline{\sigma_{ij}^{imp}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}^{imp}(\mathbf{r})}$$

La moyenne s'effectue en utilisant le corrélateur (6.27) défini ci-dessus et nous obtenons ainsi en reportant la définition de la matrice d'élasticité

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} \sum_{a,b=1}^p u_{ij}^{sing,a} \left[ \left( c_{11} \delta^{ab} - \frac{\Delta_{11}}{T} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \left( c_{66} \delta^{ab} - \frac{\Delta_{66}}{T} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}) \right] u_{kl}^{sing,b}$$

Nous pouvons ainsi utiliser simplement l'expression de l'interaction entre dislocations dans le cas pur en échangeant les coefficients élastiques par des matrices répliquées de couplage

7. Ceci est faux en présence de désordre et à basse température : voir le chapitre 7

élastiques :

$$c_{11}^{ab} = c_{11}\delta^{ab} - \frac{\Delta_{11}}{T} \quad c_{66}^{ab} = c_{66}\delta^{ab} - \frac{\Delta_{66}}{T} \quad (6.29)$$

*In fine* nous nous trouvons en face d'un gaz de coulomb avec des charges portant maintenant à la fois une composante vectorielle sur le réseau cristallin (le vecteur de Burgers) et une composante de répliques:  $\mathbf{n}^a(\mathbf{r}) = \mathbf{G}.n^a(\mathbf{r})$  où  $n^a(\mathbf{r}) \in \mathbb{Z}$ . L'interaction entre ces charges est celle du cas pur avec des constantes de couplage matricielles :

$$H_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = -\frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_{a,b} n_{\alpha}^a K^{ab} n_{\beta}^b \left[ \mathbf{G}_{\alpha} \cdot \mathbf{G}_{\beta} \ln(|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|/a) - \left( \frac{(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \cdot \mathbf{G}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}) \cdot \mathbf{G}_{\beta}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\beta}|^2} - \frac{1}{2} \mathbf{G}_{\alpha} \cdot \mathbf{G}_{\beta} \right) \right] + E_c \sum_{\alpha} \sum_a (n_{\alpha}^a)^2 \mathbf{G}_{\alpha} \cdot \mathbf{G}_{\alpha} \quad (6.30)$$

où la matrice  $K^{ab}$  vaut dans la limite  $p \rightarrow 0$  (qui est la seule chose qui nous intéresse par la suite) :

$$K^{ab} = 4c_{66} \left( 1 - \frac{c_{66}}{c_{11}} \right) \delta^{ab} - 4 \left( \frac{\Delta_{11}}{T} \left( \frac{c_{66}}{c_{11}} \right)^2 + \frac{\Delta_{66}}{T} \left( 1 - 2\frac{c_{66}}{c_{11}} \right) \right) \quad (6.31)$$

Nous allons utiliser dans la suite la notation  $\sigma K^2/T$  pour la partie non diagonale de  $K^{ab}$ . Nous pouvons maintenant étendre l'analyse du chapitre 3 à ce gaz de charges vectorielles.

### 6.3.2 Renormalisation

Malheureusement pour nous la méthode que nous avons employée au chapitre 3 pour renormaliser le modèle élastique du film cristallin est basée sur une formulation de la matrice élastique renormalisée, et donc des coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$  et non directement de la constante de couplage  $K$ . Une renormalisation sur la fonction de partition répliquée, qui sera d'ailleurs abondamment utilisée dans la suite de ce chapitre, permettrait de faire l'économie d'une définition de matrice de Lamé répliquée (c'est d'ailleurs la méthode utilisée par NELSON (Nelson 1983)). Nous allons cependant suivre dans un but de clarté et d'unité de cette présentation la présentation basée sur la définition de ces matrices renormalisées.

#### Définition des matrices de Lamé renormalisées

De la relation entre les coefficients de Lamé et les modules élastiques  $c_{11}, c_{66}$ , nous déduisons la définition des matrices de Lamé répliquées :

$$\mu^{ab} = c_{66}\delta^{ab} - \frac{\Delta_{66}}{T} \quad \lambda^{ab} = (c_{11} - 2c_{66})\delta^{ab} - \frac{\Delta_{11} - 2\Delta_{66}}{T} \quad (6.32)$$

---

Nelson D., (1983). In Domb C. & Lebowitz C., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapitre vol. 7, page 165. Academic Press (London).

La matrice élastique répliquée inverse s'écrit donc (toujours dans la limite  $p \rightarrow 0$ ) :

$$[C^{-1}]_{ijkl}^{ab} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{c_{66}} \delta^{ab} + \frac{\Delta_{66}}{c_{66}^2 T} \right] (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{c_{11} - c_{66}} - \frac{1}{c_{66}} \right) \delta^{ab} + \left( \frac{\Delta_{11} - \Delta_{66}}{T(c_{11} - c_{66})^2} - \frac{\Delta_{66}}{T c_{66}^2} \right) \right] \delta_{ij} \delta_{kl}$$

En utilisant la définition (3.24) de la matrice élastique renormalisée dans le cas pur nous pouvons écrire celle de la matrice répliquée renormalisée dans notre cas :

$$[C_R^{-1}]_{ijkl}^{ab} = [C^{-1}]_{ijkl}^{ab} - \frac{T}{2} \epsilon_{jp} \epsilon_{lq} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{a^2} \frac{r_p r_q}{a^2} \langle \mathbf{n}_i^a(\mathbf{o}) \mathbf{n}_i^a(\mathbf{r}) \rangle \quad (6.33)$$

### Équations de renormalisation

Une fois arrivés à ce point, le travail est quasiment terminé : dans le membre de droite le seul changement par rapport au cas pur est la composante de réplique des charges. Si nous nous restreignons aux charges les plus pertinentes autour du point de transition, nous pouvons ne considérer que les charges avec une seule composante  $a_0$  de répliques non nulle. Le premier terme du développement en fugacité  $y$  de la fonction de corrélation fait ainsi intervenir une somme de la forme  $\sum_{a_0} \delta^{a,a_0} \delta^{b,a_0} = \delta^{ab}$ . Ainsi seules les parties diagonales de la matrice élastique sont renormalisées. De même l'interaction entre ces charges les plus pertinentes ne fait intervenir que la partie diagonale de la matrice de couplage  $K$ . À partir du résultat du cas pur, nous obtenons ainsi sans peine les équations de renormalisations

$$\partial_l c_{66}^{-1} = 3\pi I_0(\tilde{\alpha}) y^2 \quad (6.34a)$$

$$\partial_l \frac{\Delta_{66}}{c_{66}^2} = 0 \quad (6.34b)$$

$$\partial_l (c_{11} - c_{66})^{-1} = 3\pi [I_0(\tilde{\alpha}) - I_1(\tilde{\alpha})] y^2 \quad (6.34c)$$

$$\partial_l \frac{\Delta_{11} - \Delta_{66}}{(c_{11} - c_{66})^2} = 0 \quad (6.34d)$$

où j'ai défini le paramètre  $\tilde{\alpha} = (K - \sigma K^2/T)G^2/8\pi T$  qui intervient dans toutes les fonctions de Bessel. En plus de ces équations il nous reste à dériver l'équation de renormalisation pour la fugacité qui s'obtient simplement à partir de la forme de l'interaction (dans notre cas aucune fusion de charges répliquées n'intervient pour les charges les plus pertinentes) :

$$\partial y = \left( 2 - \frac{b^2}{8\pi} \left( \frac{K}{T} - \sigma \frac{K^2}{T^2} \right) \right) y + 2\pi I_0(\tilde{\alpha}) y^2$$

où  $K$  est ici la partie diagonale de la matrice répliquée  $K^{ab}$ . À partir de ces équations nous pouvons maintenant obtenir un système fermé d'équations pour la matrice  $K^{ab}$  et la fugacité. Il est assez aisé, en s'aidant du lien entre  $K_{ab}^{-1}$  et la matrice élastique, de passer

du système ci-dessus au suivant, beaucoup plus simple :

$$\partial_l y = \partial y = \left( 2 - \frac{b^2}{8\pi} \left( \frac{K}{T} - \sigma \frac{K^2}{T^2} \right) \right) y + 2\pi I_0(\tilde{\alpha}) y^2 \quad (6.35a)$$

$$\partial_l K^{-1} = \frac{1}{4} (\partial_l c_{66}^{-1} + \partial_l (c_{11} - c_{66})^{-1}) = \frac{3\pi}{4} (2I_0(\tilde{\alpha}) - I_1(\tilde{\alpha})) y^2 \quad (6.35b)$$

$$\partial_l \sigma = \partial_l \frac{\Delta_{66}}{c_{66}^2} - \partial_l \frac{\Delta_{11} - \Delta_{66}}{(c_{11} - c_{66})^2} = 0 \quad (6.35c)$$

Ces équations sans le terme  $\Delta_{66}$  ont été dérivées par NELSON avec la méthode de YOUNG, et avec le terme  $\Delta_{66}$  elles sont apparues récemment dans (Carpentier & Le Doussal 1998) (voir la suite du chapitre) avec cependant un méthode différente de celle que j'ai utilisée dans cette partie. Nous pouvons maintenant passer à l'étude du diagramme des phases.

### 6.3.3 Diagramme des phases

Si nous y regardons de près, les équations (6.35) ressemblent beaucoup à celles du modèle XY avec déphasage aléatoire (4.24). Le désordre que nous venons de traiter est en fait l'analogue pour un film cristallin du désordre précédent pour le modèle XY. Le diagramme des phases et le diagramme de flot sont quasiment identiques à ceux de la figure 4.3. Seuls les coefficients des équations de renormalisation changent entre les deux modèles, mais pas leur structure. En conséquence seuls les détails du comportement critique sont différents, sans compter le fait que nous travaillons ici avec un champ bidimensionnel.

Pour une valeur faible du désordre :  $\sigma < \sigma_c = a^2/64\pi$ , nous trouvons ainsi une phase solide quasi-ordonnée entre deux températures, c'est-à-dire pour  $T_- < T < T_+$  où  $T_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - \sigma/\sigma_c}) a^2 K_R / 32\pi$ . L'analyse de la fusion se transpose ici autour du point de transition (figure 4.3).  $\sigma$  n'étant pas renormalisé, il intervient comme un paramètre dans cette analyse. Autour du point de transition nous pouvons linéariser les équations de renormalisation en utilisant la variable  $x(l)$  définie par  $K(l)/T = (1 - x(l))(1 + \sqrt{1 - \sigma/\sigma_c})/2\sigma$ . Les équations de renormalisation se réécrivent alors

$$\partial_l = Ay^2 \partial_l y = 2xy + By^2$$

qui sont les mêmes équations que celles obtenues dans l'étude de la fusion bidimensionnelle, avec des constantes qui valent maintenant

$$A(\sigma) = \frac{3\pi}{4} \frac{1 + \sqrt{1 - \sigma/\sigma_c}}{2\sigma} (2I_0(\tilde{\alpha}) - I_1(\tilde{\alpha})) \quad B(\sigma) = 2\pi I_0(\tilde{\alpha}) \quad (6.36)$$

En reportant l'analyse de la fusion, nous trouvons alors deux séparatrices linéaires autour du point de transition, de pentes  $m_{\pm} = (B \pm \sqrt{B^2 + 8A})/(2A)$ . La fonction de corrélation moyennée à deux points décroît exponentiellement au dessus de la transition avec une longueur de corrélation  $\xi(T) \sim \exp(cte. |T - T_+|^{-\nu})$  où  $\nu$  vaut

$$\nu(\sigma) = \frac{A m_+^2}{2 + A m_-^2} \quad (6.37)$$

Cette exposant varie entre le résultat de la fusion pur sans désordre (*i.e* pour  $\sigma = 0$ ) et 0 pour  $\sigma = \sigma_c$ .

Nous pouvons par ailleurs directement transposer ici l'analyse de l'ordre hexatique au dessus de la transition : en l'absence de couplage à un substrat périodique, la phase au dessus de la transition possède un quasi-ordre hexatique, et une seconde transition avec libération des disclinaisons est donc nécessaire. Cependant cet argument ne tient pas compte de la possibilité du couplage d'un champ aléatoire à l'orientation locale qui détruirait à grande distance ce quasi-ordre. De même que dans le cas pur, la constante de Franck  $K_A$  peut être évalué au dessus de la transition :  $K_A \sim \xi^2(T)$ .

## 6.4 Solide cristallin en présence de désordre de substrat : modification de la fusion bidimensionnelle

Nous passons maintenant à la situation plus générale d'un désordre de substrat décrit par deux composantes différentes. Nous avons vu dans la partie (6.2) que dans l'approximation de Villain la composante d'accrochage du désordre (provenant des modes  $q \sim 2\pi/a$ ) pouvait être décrite par un gaz de Coulomb avec des charges vectorielles. Par ailleurs la description des dislocations dans un film cristallin fait elle aussi intervenir des charges vectorielles interagissant *via* le potentiel coulombien. Étudier le comportement des dislocations en présence de ce désordre d'accrochage revient ainsi à considérer un gaz de Coulomb électromagnétique vectoriel complètement nouveau. Au lieu du gaz de Coulomb (6.15) qui ne comportait qu'un type de charge, nous allons devoir étudier un gaz de Coulomb avec des charges à la fois de types électrique et magnétique, qui n'avait jamais été étudié auparavant, et dont la renormalisation se révèle beaucoup plus lourde que celle des études précédentes. Celle-ci sera d'ailleurs reportée, dans sa forme la plus générale, dans l'Annexe B . Les résultats de cette étude par renormalisation ont fait l'objet d'un court article qui est également joint en annexe et d'un article long en préparation.

Dans la première partie je présenterai la description élastique d'un cristal comportant des dislocations, en présence de désordre d'accrochage. En particulier l'obtention du gaz de Coulomb électromagnétique vectoriel sera détaillée. Dans la suite les résultats du groupe de renormalisation seront étudiées autour de la transition pure.

### 6.4.1 Dislocations et désordre en dimension deux : le gaz de Coulomb vectoriel électromagnétique

#### Introduction des dislocations

Pour un solide isotrope du point de vue de l'élasticité, dont les fluctuations élastiques sont décrites par le hamiltonien élastique (6.4a), les dislocations sont introduites dans le modèle en incorporant dans le tenseur de déformation  $u_{ij}(\mathbf{r})$  une composante induite par les dislocations (voir l'étude précédente). Comme expliqué plus haut, en présence d'un substrat (ici désordonné), nous devons introduire ces dislocation via le champ de déformation : la composante  $\mathbf{u}_d$  créée par une densité de vecteur de Burgers  $\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \mathbf{b}_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$  s'écrit,

d'après l'Annexe A du chapitre 3 :

$$\begin{aligned}
u_{d,i}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^2\mathbf{r}'}{a^2} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') b_j(\mathbf{r}') \\
\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r}) &= \delta_{ij} \Phi(\mathbf{r}) + \left( \frac{c_{66}}{c_{11}} - \frac{\gamma}{c_{66} + \gamma} \right) \epsilon_{ij} G\left(\frac{r}{a}\right) + \left( \frac{c_{66}}{c_{66} + \gamma} - \frac{c_{66}}{c_{11}} \right) \epsilon_{jk} H_{ik}
\end{aligned} \tag{6.38}$$

où les potentiels  $G(\mathbf{r})$  et  $\Phi(\mathbf{r})$  ont été définis au paragraphe 2.2.2. L'interaction angulaire  $H_{ik}(\mathbf{r})$  a, quant à elle, déjà été rencontrée à propos de l'étude de la fusion bidimensionnelle, et s'exprime selon  $H_{ik}(\mathbf{r}) = (r_i r_k / r^2) - \frac{1}{2} \delta_{ik}$ . Dans l'expression ci-dessus, nous avons conservé dans un but de généralité la constante élastique  $\gamma$  qui est générée en présence d'un substrat ordonné.

Nous pouvons maintenant reporter dans le hamiltonien (6.4a,6.8) cette décomposition  $\mathbf{u} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_d$ , où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est la composante élastique du champ de déplacement. La partie quadratique en  $\mathbf{u}$  du hamiltonien étant la même que dans le cas pur, nous pouvons utiliser l'analyse de l'Annexe A du chapitre 3 pour la réécrire sous la forme d'un terme d'interaction des dislocations, et un terme purement élastique :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} (u_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl} u_{kl}(\mathbf{r}) + \gamma \theta^2(\mathbf{r})) = \\
\frac{1}{2} \int_{\mathbf{r}} (\tilde{u}_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl} \tilde{u}_{kl}(\mathbf{r}) + \gamma \tilde{\theta}^2(\mathbf{r}))
\end{aligned} \tag{6.39a}$$

$$- \frac{T}{2\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} b_{\alpha,i} \left( \kappa_1 \delta_{ij} G\left(\frac{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}{a}\right) - \kappa_2 H_{ij}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \right) b_{\beta,j} + E_c \sum_{\alpha} \mathbf{b}_\alpha^2$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{T} \left( (c_{11} - c_{66}) \frac{c_{66}}{c_{11}} + \gamma \frac{c_{66}}{\gamma + c_{66}} \right) \tag{6.39b}$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{T} \left( (c_{11} - c_{66}) \frac{c_{66}}{c_{11}} - \gamma \frac{c_{66}}{\gamma + c_{66}} \right) \tag{6.39c}$$

Dans cette équation, la neutralité du gaz de dislocations a été utilisée:  $\sum_{\alpha} \mathbf{b}_\alpha = 0$ . Notons également qu'en l'absence de couplage à un substrat périodique (mais non commensurable), les deux constantes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  se ramènent à celles du chapitre 3.

Nous allons, à partir d'ici, utiliser la notation  $V_{ij}(\kappa_1, \kappa_2)$  pour l'interaction entre les dislocations :

$$V_{ij}(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\pi} \left\{ \kappa_1 \delta_{ij} G\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a}\right) - \kappa_2 H_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\}$$

Avec cette notation (et la notation de contraction  $b_i * V_{ij} * b_j = \sum_{\alpha \neq \beta} b_{\alpha,i} * V_{ij}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) * b_{\beta,j}$

du chapitre 3), la fonction de partition (non moyennée) du modèle s'écrit pour l'instant :

$$\begin{aligned}
 Z &= \int d[\tilde{\mathbf{u}}] \sum_{[\mathbf{b}_\alpha]} e^{S[\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{b}]} \\
 S[\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{b}] &= -\frac{1}{2T} \int_{\mathbf{r}} \tilde{u}_{ij}(\mathbf{r}) C_{ijkl} \tilde{u}_{kl}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} b_i * V_{ij}(\kappa_1, \kappa_2) * b_j - \frac{E_c}{T} \sum_{\alpha} \mathbf{b}_\alpha^2 \\
 &\quad + \frac{1}{T} \int_{\mathbf{r}} A(\mathbf{r}) (\tilde{\theta} + \theta^d)(\mathbf{r}) \\
 &\quad + \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) (\tilde{u}_{ij} + u_{ij}^d)(\mathbf{r}) + 2\sqrt{y_m} \int_{\mathbf{r}} \sum_{\nu=1,2,3} \cos [\mathbf{K}_\nu \cdot (\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d)(\mathbf{r}) + \phi_\nu] \quad (6.40)
 \end{aligned}$$

### Moyenne sur le désordre et modèle répliqué

Afin d'effectuer la moyenne sur les différentes composantes du désordre, nous utilisons comme précédemment la méthode des répliques. Comme pour le modèle sans dislocation étudié dans la partie 6.2, nous allons d'abord introduire  $p$  copies du modèle, puis utiliser l'approximation de Villain pour les couplages en cos et finalement moyenner sur le désordre.

Après avoir répliqué le modèle précédent, nous utilisons donc exactement la même approximation de Villain qu'au paragraphe 6.2.2, qui ici correspond au remplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 &\exp \left\{ -2\sqrt{g} \cos [\mathbf{K}_\nu \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^a + \mathbf{u}^{d,a})(\mathbf{r}) + \phi_\nu(\mathbf{r})] \right\} \\
 &\quad \longrightarrow \sum_{n^a(\nu, \mathbf{r}) \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ -in^a(\nu, \mathbf{r}) [\mathbf{K}_\nu \cdot (\tilde{\mathbf{u}}^a + \mathbf{u}^{d,a})(\mathbf{r}) + \phi_\nu(\mathbf{r})] + \ln \sqrt{g} (n^a(\nu, \mathbf{r}))^2 \right\}
 \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous utilisons la notation  $\mathbf{n}_\nu^a(\mathbf{r}) = n^a(\nu, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{K}_\nu$  pour représenter les charges entières  $n^a(\nu, \mathbf{r}) \in \mathbb{Z}$  que nous venons d'introduire, couplées aux vecteurs du réseau réciproque  $\mathbf{K}_\nu$ , dans les trois directions  $\nu = 1, 2, 3$ .

Nous allons maintenant devoir moyenner sur les différentes composantes du désordre :  $\phi_\nu, \sigma_{ij}, A$ .

#### 1. Moyenne sur $\phi_\nu(\mathbf{r})$

Cette moyenne se fait très facilement : rien n'est changé par rapport au modèle sans dislocation :  $\phi_\nu(\mathbf{r})$  se couple linéairement à  $i \sum_a n^a(\nu, \mathbf{r})$ , et sa moyenne entre 0 et  $2\pi$  induit donc une contrainte simple sur les charges  $n^a(\nu, \mathbf{r})$  :

$$\sum_a n^a(\nu, \mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r}, \nu \quad (6.41)$$

#### 2. Moyenne sur $\sigma_{ij}$ et $A$

Revenons au terme du hamiltonien répliqué qui contient la contrainte aléatoire locale (et le champ  $\mathbf{A}$  défini par (6.20)) : il s'exprime sous la forme

$$\exp \left\{ \int_{\mathbf{r}} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \sum_a \left( u_{ij}^a + u_{ij}^{d,a} \right)(\mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r}} A(\mathbf{r}) \sum_a \left( \theta^a + \theta^{d,a} \right)(\mathbf{r}) \right\}$$



La moyenne gaussienne sur les variables aléatoires  $A(\mathbf{r})$  et  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$  conduit donc simplement au terme quadratique en  $u_{ij}$  :

$$\exp \frac{1}{2T} \left\{ \int_{\mathbf{r}} \sum_{a,b} \left( u_{ij}^a + u_{ij}^{d,a} \right) \left[ (\Delta_{11} - 2\Delta_{66})\delta_{ij}\delta_{kl} + \Delta_{66}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right] \left( u_{kl}^b + u_{kl}^{d,b} \right) (\mathbf{r}) \right. \\ \left. + \int_{\mathbf{r}} \sum_{a,b} \Delta_{\gamma}(\theta^a + \theta^{d,a})(\theta^b + \theta^{d,b})(\mathbf{r}) \right\}$$

Ce terme est donc l'exact analogue pour le tenseur  $\sum_a u_{ij}^a$  du hamiltonien élastique en présence de dislocations: sans aucun calcul nous savons donc que nous pouvons le scinder en deux termes distincts. Le premier, quadratique en  $\tilde{u}_{ij}^a$ , est l'analogue du terme élastique en l'absence de dislocations; le second est un terme d'interaction entre dislocations. Dans ces deux termes, les constantes élastiques  $c_{11}, c_{66}, \gamma$  ont été remplacées par les intensités de désordre  $\Delta_{11}, \Delta_{66}, \Delta_{\gamma}$ . Commençons par introduire les matrices de couplage

$$\begin{aligned} c_{11}^{ab} &= c_{11}\delta^{ab} - \Delta_{11} & c_{66}^{ab} &= c_{66}\delta^{ab} - \Delta_{66} & \gamma^{ab} &= \gamma\delta^{ab} - \Delta_{\gamma} \\ T \kappa_1^{ab} &= (c_{11}^{ac} - c_{66}^{ac})c_{66}^{cd} [c_{11}^{-1}]^{db} + \gamma^{ac}c_{66}^{cd} [(\gamma + c_{66})^{-1}]^{db} \\ T \kappa_2^{ab} &= (c_{11}^{ac} - c_{66}^{ac})c_{66}^{cd} [c_{11}^{-1}]^{db} - \gamma^{ac}c_{66}^{cd} [(\gamma + c_{66})^{-1}]^{db} \end{aligned} \quad (6.42)$$

où la sommation sur les indices répétés est supposée.

Nous pouvons maintenant ajouter ces deux termes aux deux premiers de (6.40) en les écrivant sous la forme

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2T} \int_{\mathbf{r}} \sum_{ab} \left( \tilde{u}_{ij}^a(\mathbf{r}) \left[ (c_{11}^{ab} - 2c_{66}^{ab})\delta_{ij}\delta_{kl} + c_{66}^{ab}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right] \tilde{u}_{kl}^b(\mathbf{r}) + \gamma^{ab}\tilde{\theta}^a(\mathbf{r})\tilde{\theta}^b(\mathbf{r}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} b_i^a * V_{ij}(\kappa_1^{ab}, \kappa_2^{ab}) * b_j^b \end{aligned} \quad (6.43)$$

### Gaz de Coulomb électromagnétique vectoriel

La fonction de partition répliquée  $\overline{Z^p}$ , telle que nous l'avons formulée, consiste maintenant en une intégrale sur les configurations du champ répliqué  $\tilde{u}^a(\mathbf{r})$ , et une somme sur toutes les configurations (neutres) de charges répliquées  $b^a(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{n}_{\nu}^a(\mathbf{r})$ . Afin d'obtenir une formulation de gaz de Coulomb de toutes ces fonctions de partition (quel que soit  $p$ ), il nous reste à effectuer l'intégrale gaussienne sur ce champ monovalué  $\tilde{u}^a(\mathbf{r})$ . Cette intégrale ayant déjà été calculée au paragraphe 6.2.2 (voir la formule (6.15)), je reporte ici simplement son expression :

$$\begin{aligned} \int d[\tilde{u}^a(\mathbf{r})] \exp \frac{1}{2T} \left\{ \int_{\mathbf{r}} \sum_{a,b} \left( \tilde{u}_{ij}^a(\mathbf{r}) C_{ijkl}^{ab} \tilde{u}_{kl}^b(\mathbf{r}) + \gamma^{ab}\tilde{\theta}^a(\mathbf{r})\tilde{\theta}^b(\mathbf{r}) \right) + i \int_{\mathbf{r}} \sum_{\nu} \sum_a \mathbf{n}_{\nu}^a(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a(\mathbf{r}) \right\} \\ = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu, \nu'} \mathbf{n}_{\nu}^a * V(\kappa_3^{ab}, \kappa_4^{ab}) * \mathbf{n}_{\nu'}^b \right\} \end{aligned}$$

avec les constantes de couplage

$$\kappa_3^{ab} = \frac{T}{4} \left( [(c_{66} + \gamma)^{-1}]^{ab} + [c_{11}^{-1}]^{ab} \right) \quad \kappa_4^{ab} = \frac{T}{4} \left( [(c_{66} + \gamma)^{-1}]^{ab} - [c_{11}^{-1}]^{ab} \right) \quad (6.44)$$

Cette partie de l'action totale correspond donc exactement à l'action du gaz de Coulomb électrique dans l'étude du solide sans dislocation de la partie précédente.

En plus de cette interaction entre charges  $\mathbf{n}$ , nous avons également un terme d'interaction entre dislocations répliquées  $\mathbf{b}$  (provenant de (6.43)), et une interaction croisée  $\mathbf{n}/\mathbf{b}$ . Cette dernière définit une nouvelle forme d'interaction  $W$  : d'après (6.38)

$$i \int_{\mathbf{r}} \sum_{\nu} \mathbf{n}_{\nu}^a(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}^{d,a}(\mathbf{r}) = i n_{\nu,i}^a * W_{ij}(\kappa_5^{ab}, \kappa_6^{ab}) * b_j^b$$

avec 
$$W_{ij}(\kappa_5^{ab}, \kappa_6^{ab})(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \left( \delta_{ij} \delta^{ab} \Phi(\mathbf{r}) + \kappa_5^{ab} \epsilon_{ij} G\left(\frac{r}{a}\right) + \kappa_6^{ab} \epsilon_{jk} H_{ik} \right) \quad (6.45)$$

et les matrices de couplages

$$\kappa_5^{ab} = c_{66}^{ac} [c_{11}^{-1}]^{cb} - \gamma^{ac} [(\gamma + c_{66})^{-1}]^{cb} \quad (6.46)$$

$$\kappa_6^{ab} = c_{66}^{ac} [(\gamma + c_{66})^{-1}]^{cb} - c_{66}^{ac} [c_{11}^{-1}]^{cb} \quad (6.47)$$

Le gaz de Coulomb électromagnétique vectoriel que nous obtenons ainsi est défini par la fonction de partition

$$Z_{cg} = \overline{Z^p} = \sum_{[\mathbf{b}, \mathbf{n}]} \exp(S_{cg})$$

avec l'action suivante :

$$S_{cg}[\mathbf{b}, \mathbf{n}] = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{b}^a * V(\kappa_1^{ab}, \kappa_2^{ab}) * \mathbf{b}^b + \mathbf{n}^a * V(\kappa_3^{ab}, \kappa_4^{ab}) * \mathbf{n}^b \right\} + i \mathbf{n}^a * W(\kappa_5^{ab}, \kappa_6^{ab}) * \mathbf{b}^b \quad (6.48)$$

Rappelons que dans ce gaz de Coulomb les charges  $\mathbf{b}^a$  appartiennent au réseau direct alors que les charges  $\mathbf{n}^a$  appartiennent au réseau dual (réseau réciproque).

Dans notre cas particulier, les matrices de couplage du modèle  $\kappa_{1,\dots,6}$  sont définies par les relations (6.42,6.44,6.46), et les charges  $\mathbf{n}_{\nu}^a(\mathbf{r})$  sont contraintes par la condition (6.41). En plus de celle-ci, les configurations de charges  $\mathbf{b}, \mathbf{n}$  doivent satisfaire les conditions usuelles de neutralité:

$$\forall a, \nu \quad \sum_{\alpha} \mathbf{b}^a(\mathbf{r}_{\alpha}) = 0 \quad \sum_{\alpha} \mathbf{n}_{\nu}^a(\mathbf{r}_{\alpha}) = 0 \quad (6.49)$$

Avant de passer à son étude par renormalisation, quelques petites remarques s'imposent sur la nature de ce nouveau gaz de Coulomb.

Défini de façon général par les 6 constantes de couplages  $\kappa_{1,\dots,6}$ , ce gaz de Coulomb diffère, par la nature des potentiels d'interaction, à fois du gaz électromagnétique scalaire (Annexe B du chapitre 2) et du gaz de Coulomb électrique vectoriel (chapitre 3 sur la fusion KTHNY). La principale différence (outre l'interaction angulaire  $H_{ij}(\mathbf{r})$  déjà présente dans l'étude de la fusion pure) est la nature de l'interaction croisée  $S_{b/m}$ , différente d'un simple

terme topologique  $\Phi(\mathbf{r})$ . Ce terme, spécifique à ce nouveau gaz de Coulomb, va compliquer l'analyse de renormalisation par rapport aux situations classiques. La dérivation (6.45) nous montre qu'il est directement issu de la définition du champ de déplacement des dislocations. Comme nous l'avons vu précédemment, ce champ n'apparaît explicitement que lorsque la symétrie par translation du cristal est brisée. Ainsi de façon générale, les différentes variantes de ce gaz de Coulomb vont permettre de décrire le comportement à grande distance de cristaux bidimensionnels perturbés par des substrats désordonnés ou non, périodiques ou pas (et éventuellement commensurables avec le cristal). L'analyse générale effectuée dans l'Annexe B nous permet d'étudier l'effet de ces différentes perturbations sur la transition de fusion KTHNY présentée au chapitre 3. Cette étude fait également l'objet d'un article en cours de rédaction.

### 6.4.2 Étude du solide désordonné : équations de renormalisation

La renormalisation du modèle (6.48) général est présentée dans l'Annexe B. L'analyse qui est menée dans cette annexe montre également la renormalisabilité de ce modèle à l'ordre 2 en fugacité, qui n'était a priori pas évidente en présence de l'interaction  $W(\mathbf{r})$  nouvelle par rapport aux gaz de Coulomb plus classiques.

#### Charges minimales

Les équations de renormalisation générales se trouvant dans l'annexe, nous pouvons directement les spécialiser à notre modèle particulier. Pour cela, nous devons commencer par identifier les opérateurs les plus pertinents autour de la transition de fusion pure. Ils correspondent d'une part aux charges de plus petites normes, c'est-à-dire aux charges  $\mathbf{b}^a$  avec une seule composante de réplique non nulle, égale à l'un des vecteurs de la cellule élémentaire du réseau hexagonal :  $\mathbf{b}^a = \mathbf{b}_0 \delta^{a,a_0}$  ; et d'autre part aux charges  $\mathbf{n}_\nu^a$  correspondant à un seul vecteur  $\mathbf{K}_{\nu_0}$  portant une composante de réplique avec deux composantes ( $a_0$  et  $a_1$ ) non nulles et égales à  $\pm 1$  :  $n_{\nu_0}^a = \delta^{a,a_0} - \delta^{a,a_1}$ . Pour ces charges minimales, les matrices  $\Gamma$  et  $\tilde{\Gamma}$  de l'Annexe B vérifient :

$$\Gamma^{ac} = \sum_{b^a} b^a b^c = \delta^{ac} \quad \tilde{\Gamma}^{ac} = \sum_{n^a} n^a n^c = p(\delta^{ac} - 1) \quad (6.50)$$

où  $p$  est le nombre de répliques.

#### Fusion de charges

Dans les équations (6B.113a,6B.113b), les termes non linéaires correspondent à des termes de fusion de charges. Afin de calculer les deux coefficients  $A_{\mathbf{b}/\mathbf{b}'}$  et  $A_{\mathbf{n}/\mathbf{n}'}$ , nous devons identifier les fusions possibles entre ces charges de plus petites normes. Pour les charges  $\mathbf{b}^a$  qui n'ont qu'une seule composante de réplique non nulle, les fusions possibles sont celles qui dans une même composante de répliques additionnent deux vecteurs de Burgers différents pour en donner un troisième de même norme (voir la figure 6.12). Pour ces charges, le facteur  $A_{\mathbf{b}'/\mathbf{b}''}$  s'écrit :

$$A_{\mathbf{b}'/\mathbf{b}''} = 2\pi I_0(\alpha/2)$$

où  $\alpha$  est défini par

$$\alpha = \frac{a^2}{\pi} (\kappa_2 - \Delta_{\kappa_2}) \quad (6.51)$$

où nous avons utilisé la notation  $\kappa_i^{ab} = \kappa_i \delta^{ab} - \Delta_{\kappa_i}$  avec  $i = 1, \dots, 6$ .

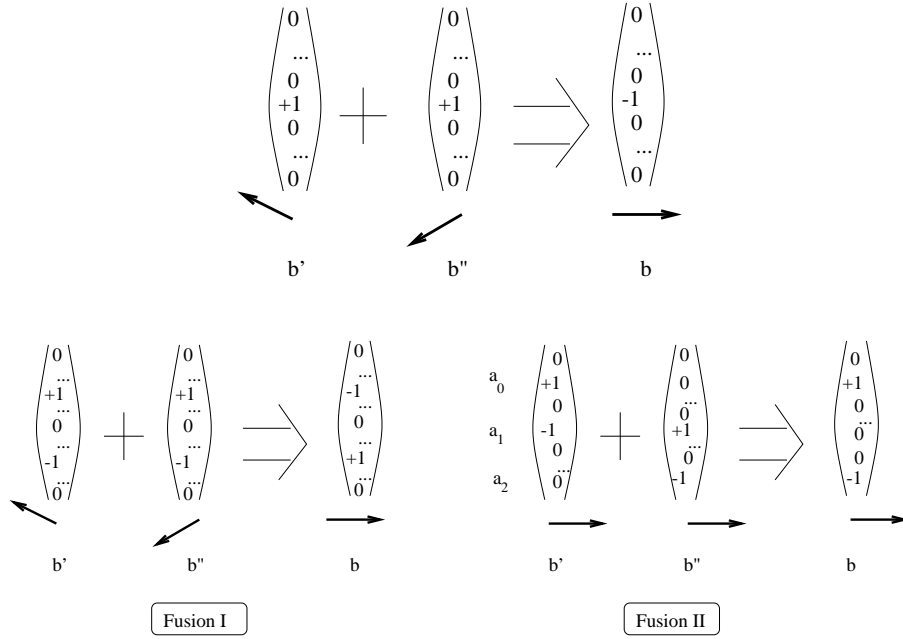


FIG. 6.12 – Fusion entre charges de plus petite norme dans l'analyse de la renormalisation du gaz électromagnétique : fusion de charge  $\mathbf{b}$  (en haut), et de charges  $\mathbf{n}$  (en bas)

Les charges  $\mathbf{n}^a$  de plus petit module admettent quant à elles les mêmes types de fusion que les charges  $\mathbf{b}$  portant sur deux indices de répliques (fusion I), ainsi que des fusions spécifiques à leur structure répliquée (fusion II), dans lesquelles une charge de type  $(+1, a_0); (-1, a_1)$  est additionnée à une charge  $(+1, a_1); (-1, a_2)$  (avec  $p - 2$  choix possibles pour  $a_1 \neq a_0, a_2$ ) pour former une charge  $(+1, a_0); (-1, a_2)$  (voir la figure 6.12). Pour ces deux types de fusion, le facteur  $A_{\mathbf{n}/\mathbf{n}'}$  s'écrit

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{n}/\mathbf{n}'} &= 2\pi I_0(\tilde{\alpha}/2) && \text{pour une fusion de type I} \\ A_{\mathbf{n}/\mathbf{n}'} &= 2\pi I_0(\tilde{\alpha}/4) && \text{pour une fusion de type II} \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\alpha} = \frac{K_0^2 \kappa_2}{2\pi c_{66}^2} \quad (6.52)$$

### Équations de renormalisation complètes

En utilisant les notations  $Y[\mathbf{b}] = y_b$  et  $Y[\mathbf{n}] = y_m$  pour les charges de plus petit module, et en reportant les définitions (6.42, 6.44, 6.46) des matrices de couplages répliquées  $\kappa_{1\dots 6}^{ab} = \bar{\kappa}_{1\dots 6} \delta^{ab} - \Delta_{\kappa_{1\dots 6}}$  en fonction des matrices élastiques, nous obtenons les équations de renormalisation à partir des résultats de l'Annexe B :

$$\partial_l y_b = \left( 2 - \frac{1}{2\pi} b^a \kappa_1^{ac} b^c \right) y_b + 2\pi I_0(\alpha/2) y_b^2 \quad (6.53a)$$

$$\partial_l y_m = \left( 2 - \frac{1}{2\pi} m^a \kappa_3^{ac} m^c \right) y_m + 2\pi (I_0(\tilde{\alpha}/2) + (p-2)I_0(\tilde{\alpha}/4)) y_m^2 \quad (6.53b)$$

$$\begin{aligned} \partial_l c_{11}^{ab} = & -3\pi \Gamma^{cd} [(c_{66}^{ac} c_{66}^{bd} I_0 + (c_{11} - c_{66})^{ac} (c_{11} - c_{66})^{bd} \{I_0 - I_1\}) y_b^2 \\ & + \frac{3}{2} \pi \tilde{\Gamma}_{ab} \left[ \tilde{I}_0 + \frac{1}{2} \tilde{I}_1 \right] y_m^2 \end{aligned} \quad (6.53c)$$

$$\partial_l c_{66}^{ab} = -3\pi \Gamma^{cd} c_{66}^{ac} c_{66}^{bd} I_0 y_b^2 + \frac{3}{4} \pi \tilde{\Gamma}_{ab} \tilde{I}_0 y_m^2 \quad (6.53d)$$

$$\partial_l \gamma^{ab} = -3\pi \Gamma^{cd} \gamma^{ac} \gamma^{bd} (I_0 + I_1) y_p^2 + \frac{3}{4} \pi \tilde{\Gamma}_{ab} (\tilde{I}_0 - \tilde{I}_1) y_m^2 \quad (6.53e)$$

où la sommation sur les indices répétés est supposée. Dans les trois dernières équations, nous avons utilisé la notation simplifiée  $I_{0/1} = I_{0/1}(\alpha)$  et  $\tilde{I}_{0/1} = I_{0/1}(\tilde{\alpha})$ .

En utilisant les expressions des matrices  $\Gamma$  et  $\tilde{\Gamma}$ , et les définitions des matrices élastiques, nous obtenons ainsi les équations finales pour le modèle élastique :

$$\partial_l y_b = \left( 2 - \frac{|\mathbf{n}|^2}{2\pi} (\kappa_1 - \Delta_{\kappa_1}) \right) y_b + 2\pi I_0(\alpha/2) y_b^2 \quad (6.54a)$$

$$\partial_l y_m = \left( 2 - \frac{2|\mathbf{m}|^2}{2\pi} \kappa_3 \right) y_m + 2\pi (I_0(\tilde{\alpha}/2) - 2I_0(\tilde{\alpha}/4)) y_m^2 \quad (6.54b)$$

$$\partial_l c_{11} = -3\pi [\{c_{66}^2 + (c_{11} - c_{66})^2\} I_0 - (c_{11} - c_{66})^2 I_1] y_b^2 \quad (6.54c)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \Delta_{11} = & -\frac{6\pi}{T} \left[ c_{66} \Delta_{66} I_0 + (c_{11} - c_{66})(\Delta_{11} - \Delta_{66}) \{I_0 - I_1\} \right] y_b^2 \\ & + \frac{3T}{2} |\mathbf{m}|^2 \pi \left[ \tilde{I}_0 + \frac{1}{2} \tilde{I}_1 \right] y_m^2 \end{aligned} \quad (6.54d)$$

$$\partial_l c_{66} = -\frac{3\pi}{T} c_{66}^2 I_0 y_b^2 \quad (6.54e)$$

$$\partial_l \Delta_{66} = -\frac{6\pi}{T} c_{66} \Delta_{66} I_0 y_b^2 + \frac{3T}{4} |\mathbf{m}|^2 \pi \tilde{I}_0 y_m^2 \quad (6.54f)$$

$$\partial_l \gamma = -\frac{3\pi}{T} \gamma^2 (I_0 + I_1) y_p^2 \quad (6.54g)$$

$$\partial_l \Delta_\gamma = -\frac{6\pi}{T} \gamma \Delta_\gamma (I_0 + I_1) y_p^2 + \frac{3T}{4} |\mathbf{m}|^2 \pi (\tilde{I}_0 - \tilde{I}_1) y_m^2 \quad (6.54h)$$

### Cas particuliers

Nous pouvons rapidement vérifier que ces équations se simplifient en celles de la partie précédente en l'absence de dislocations, lorsque  $y_b = 0$ , et avec  $\bar{c}_{66} = c_{66} + \gamma$  et  $\bar{\Delta}_{66} = \Delta_{66} + \Delta_\gamma$ . Un autre cas particulier correspond au modèle en l'absence de désordre de petites longueurs d'onde :  $y_m = 0$ . Dans ce cas nous retrouvons, après quelques transformations, une extension des équations de NELSON présentées au chapitre 4. Finalement ces équations se simplifient naturellement en celles de l'étude de la fusion KTHNY en l'absence de désordre :  $\Delta_{11} = \Delta_{66} = \Delta_\gamma = y_m = 0$ .

**Choix de variables en l'absence de substrat périodique :  $\gamma = 0$** 

Dans la suite de notre étude, nous allons utiliser des variables particulières qui facilitent l'étude des équations de renormalisation ci-dessus autour de la transition de fusion pure. Ces variables sont définies par

$$K = 4T\bar{\kappa}_1 = 4T\bar{\kappa}_2 = 4(c_{11} - c_{66})\frac{c_{66}}{c_{11}} \quad (6.55)$$

$$\sigma K^2 = 2T^2(\Delta_{\kappa_1} + \Delta_{\kappa_2}) = 2\Delta_{66} \left(1 - 2\frac{c_{66}}{c_{11}}\right) + 2\Delta_{11} \left(\frac{c_{66}}{c_{11}}\right)^2 \quad (6.56)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{8} \left[ \Delta_{66} \frac{c_{66}(c_{11} - 2c_{66})}{(c_{66}(c_{11} - c_{66}))^2} + \frac{\Delta_{11}}{(c_{11} - c_{66})^2} \right]$$

$$\delta = 4\Delta_\gamma \quad \alpha = \frac{K_0^2 K T}{16\pi c_{66}^2} \quad \tilde{\alpha} = \frac{a^2}{8\pi} \left( \frac{K}{T} - \frac{\sigma K^2}{T^2} + \frac{\delta}{T^2} \right) \quad (6.57)$$

Avec ces variables, les équations de renormalisation s'écrivent plus simplement sous la forme

$$\partial_l y = \left[ 2 - \frac{a^2}{8\pi} \left( \frac{K}{T} - \frac{\delta + \sigma K^2}{T^2} \right) \right] y + 2\pi \tilde{I}_0 y^2 \quad (6.58a)$$

$$\partial_l g = \left[ 2 - \frac{p^2 K_0^2 T}{4\pi c_{66}} \left( 2 - \frac{K}{4c_{66}} \right) \right] g - B_m(\alpha) g^2 \quad (6.58b)$$

$$\partial_l K^{-1} = \frac{3\pi}{4T} (2\tilde{I}_0 - \tilde{I}_1) y^2 \quad (6.58c)$$

$$\partial_l c_{66}^{-1} = \frac{3\pi}{T} \tilde{I}_0 y^2 \quad (6.58d)$$

$$\partial_l \delta = 3\pi T^2 K_0^2 (I_0 - I_1) g^2 \quad (6.58e)$$

$$\partial_l \sigma = \frac{3\pi K_0^2 T^2}{(4c_{66} K)^2} \left( (4c_{66} - K)^2 (I_0 + I_1) + K^2 I_0 \right) g^2 \quad (6.58f)$$

avec  $B_m(\alpha) = 2\pi[2I_0(\alpha/2) - I_0(\alpha)]$ . Nous pouvons maintenant passer à l'étude de ces équations de renormalisation.

**6.4.3 Retour sur le cas du désordre de grande longueur d'onde**

Nous avons étudié précédemment dans ce chapitre le comportement à grande échelle d'un solide soumis à un désordre structural, et réalisé que la composante à grande distance du désordre, qui correspond au tenseur de contraintes aléatoires  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ , est l'analogue de ce désordre structural. La différence avec le travail de Nelson (Nelson 1983) provient du corrélateur de ce tenseur aléatoire. Nelson a considéré le cas d'impuretés sphériques dans un cristal isotrope. Dans ce cas le corrélateur de  $\sigma_{ij}$  est uniquement caractérisé par  $\Delta_{11}$ . J'ai montré au paragraphe 6.3 que la prise en compte d'impuretés anisotropes conduisait au corrélateur (6.27) qui dépend maintenant de deux constantes  $\Delta_{11}$  et  $\Delta_{66}$ . Dans ce même

---

Nelson D., (1983). In Domb C. & Lebowitz C., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapitre vol. 7, page 165. Academic Press (London).

paragraphe, j'ai étendu la méthode du chapitre 3 pour traiter cette contrainte aléatoire. Une méthode alternative est présentée dans (Nelson 1983), et les équations de renormalisations finales (6.35) peuvent bien sûr également s'obtenir à partir des équations (6.58) ci-dessus dans lesquelles l'intensité  $g$  des variations rapides du désordre est mise à zéro :  $g = 0$ . Ceci peut se faire de façon cohérente avec les équations de renormalisation ci-dessus, car une valeur de  $g$  initialement nulle le reste par renormalisation.

La restriction des équation ci-dessus permet également de tenir compte du champ aléatoire d'intensité  $\Delta_\gamma$ , généré par renormalisation, et qui se couple à l'orientation locale. Dans ce cas à la fois  $\sigma$  et  $\delta$  ne sont par renormalisées, et les équations de renormalisation finales s'écrivent :

$$\partial_l y = \left[ 2 - \frac{a^2}{8\pi} \left( \frac{K}{T} - \frac{\delta + \sigma K^2}{T^2} \right) \right] y + 2\pi \tilde{I}_0 y^2 \quad (6.59a)$$

$$\partial_l K^{-1} = \frac{3\pi}{4T} (2\tilde{I}_0 - \tilde{I}_1) y^2 \quad (6.59b)$$

$$\partial_l c_{66}^{-1} = \frac{3\pi}{T} \tilde{I}_0 y^2 \quad (6.59c)$$

Nous verrons au chapitre suivant que ces équations de renormalisation doivent être modifiées à basse température ( $T < T_m^0/2$ ). Nous allons pour l'instant nous concentrer sur le comportement critique du réseau autour de la transition pure.

Le diagramme des phases dans ce cas est paramétrisé par l'intensité du désordre  $\sigma$ , reliée à  $\Delta_{11}$  et  $\Delta_{66}$ , et à la constante de raideur  $K$ , définie en fonction des constantes élastiques  $c_{11}$  et  $c_{66}$ . Ce diagramme est représenté sur la figure 6.13. L'analyse du flot de renormalisation a déjà été menée au paragraphe 6.3. Nous rappelons ici les résultats, en rendant explicite la dépendance en l'intensité  $\delta$  (ou  $\Delta_\gamma$ ), car ils seront utiles pour la suite de l'analyse que nous ferons.

### Transition autour de $T_m$

Notre analyse est donc ici restreinte au comportement critique associé à la ligne de points fixes  $T_m/2 < T < T_m$  (voir la figure 6.13).

D'après les équations (6.59), la phase solide existe pour une intensité du désordre suffisamment faible :  $\sigma + \frac{\delta}{K_R^2} < \sigma_c \equiv \frac{a^2}{64\pi}$ . Contrairement à la situation de la partie 6.3, cette condition d'existence de la phase solide porte à la fois sur l'intensité  $\sigma$  du désordre de grande longueur d'onde, et sur celle du champ aléatoire  $\delta$ . La valeur  $\sigma_c$  est par contre la même que précédemment. En dessous de cette valeur critique du désordre, les équations (6.59) prédisent l'existence d'une phase solide dans la fenêtre de température  $T_- < T < T_+$  où

$$T_\pm = (2\sigma_c K_R) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma_c} \left( \frac{\delta}{K_R^2} + \sigma \right)} \right)$$

---

Nelson D., (1983). In Domb C. & Lebowitz C., editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapitre vol. 7, page 165. Academic Press (London).

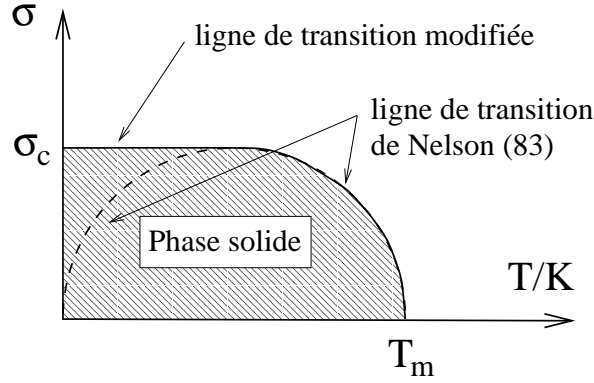


FIG. 6.13 – Diagramme des phases du solide en présence uniquement d'un désordre lentement variable d'intensité  $\sigma$ . La température  $T_m$  est la température de la fusion d'un cristal pur. La région hachurée correspond à la phase quasi-solide, alors qu'au delà de la transition le quasi-ordre translationnel est perdu (phase hexatique).

Nous allons ici étudier uniquement la transition autour de  $T_+(\sigma, \delta, K_R)$ . Cette transition correspond également à la valeur de la constante de raideur  $K(l)$  :

$$K_c(\sigma, \delta) = \frac{T}{2\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_c} \left( 1 + \frac{4\sigma_c\delta}{T^2} \right)} \right)$$

Autour de cette transition, il est possible de linéariser le flot comme dans la partie 6.3. Pour cela nous définissons l'écart à la transition  $x(l)$  par  $K(l) = K_c(1 - x(l))$ . Au deuxième ordre en  $x$  et  $y$ , les équations de renormalisation (6.59) se traduisent en

$$\partial_l y = 2Cxy + By^2 \quad \partial_l x = Ay^2 \quad (6.60)$$

avec les constantes

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\pi}{4T} K_c(\sigma, \delta) (2I_0(\tilde{\alpha}) - I_1(\tilde{\alpha})) \\ B &= 2\pi I_0(\tilde{\alpha}) \\ C &= 2 - 4\sigma_c \left( \frac{K_c(\sigma, \delta)}{T} - 2\frac{\delta}{T^2} \right) \end{aligned}$$

et  $\tilde{\alpha} \simeq 2 + \frac{\sigma^2}{4\pi} \delta/T^2$  autour de la transition. Les deux séparatrices sont asymptotiquement linéaires  $y = m_{\pm}x$  avec une pente  $m_{\pm} = (B \pm \sqrt{B^2 + 8AC})/(2A)$ . La fonction de corrélation  $\xi_+^0(T)$  diverge exponentiellement à la transition  $\xi_+^0 \sim \exp(cte/|T - T_m|^\nu)$  avec un exposant  $\nu$  qui dépend de  $\sigma$  et  $\delta$  :

$$\nu(\sigma, \delta) = \frac{Am_-^2}{2 + Am_-^2} \quad (6.61)$$

Par ailleurs la décroissance algébrique des fonctions de corrélation  $\overline{\langle \exp\{i\mathbf{K}_0 \cdot (\mathbf{u}(r) - \mathbf{u}(0))\} \rangle}$  dans la phase solide est caractérisée par l'exposant  $\eta$  qui dépend lui aussi de l'intensité du désordre :



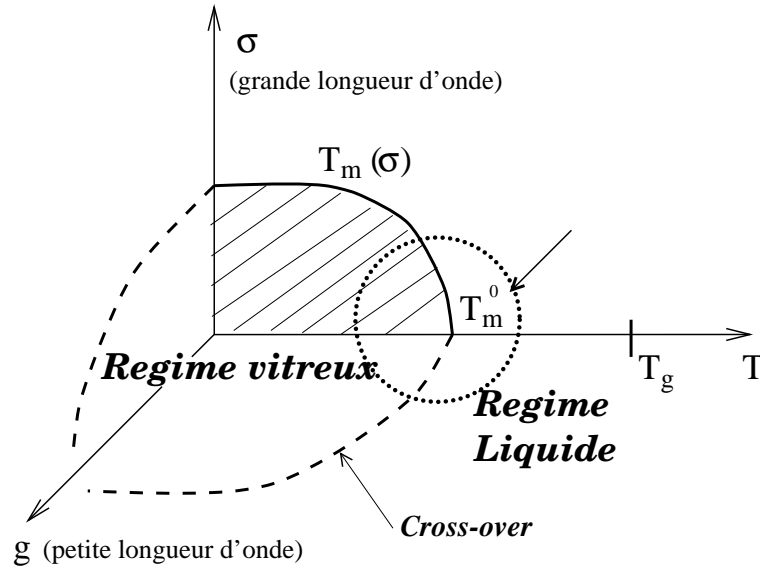


FIG. 6.14 – Représentation du diagramme des phases d'un solide bidimensionnel en présence d'un substrat désordonné. La région entourée et repérée par une flèche correspond au domaine d'application de notre étude perturbative en  $y$  et  $g$ .

$$\eta = \frac{K_0^2 T}{4\pi} \left( c_{11}^{-1} + c_{66}^{-1} + \frac{\Delta_{11}}{c_{11}^2} + \frac{\Delta_{66}}{c_{66}^2} \right) \quad (6.62)$$

Nous pouvons maintenant étudier l'effet des variations spatiales rapides du désordre.

#### 6.4.4 Absence de fusion d'un solide désordonné, sans substrat périodique ( $\gamma = 0$ )

Par rapport à la situation précédente, l'étude de l'effet d'un désordre général sur le comportement du solide autour de la transition de fusion pure  $T_m^0$  comporte une constante supplémentaire : l'intensité de la première harmonique pertinente à grande distance :  $g$  (ainsi que celle des autres harmoniques éventuelles). Nous allons étudier perturbativement (en  $g$  et  $y$ ) l'effet de ce type de désordre sur le diagramme des phases précédent. Le diagramme des phases obtenu est représenté sur la figure 6.14.

En considérant les équations (6.58), nous réalisons que la présence de cette constante  $g$  entraîne la renormalisation des deux autres intensités du désordre  $\sigma$  et  $\delta$  (qui dans le paragraphe précédent n'étaient pas renormalisées). Ainsi les constantes élastiques du modèle ( $K, c_{66}$ ) sont renormalisées par la présence de dislocations à l'échelle  $l$  (*i.e* par  $y(l)$ ), alors que les composantes de grandes longueurs d'onde du désordre ne sont renormalisées que par les composantes de petites longueur d'onde de ce même désordre. Par contre l'évolution de l'intensité de ces fluctuations aléatoires de longueur d'onde  $q \sim K$  dépend elle de la présence de dislocations (par l'intermédiaire des constantes  $K$  et  $c_{66}$ ).

Une analyse du flot de renormalisation associé aux équations (6.58) montre qu'un désordre de longueur d'onde  $q \sim K$  déstabilise le solide de basse température, aussi faible que soit son intensité. Autrement dit, *un désordre infinitésimal rapidement variable dans*

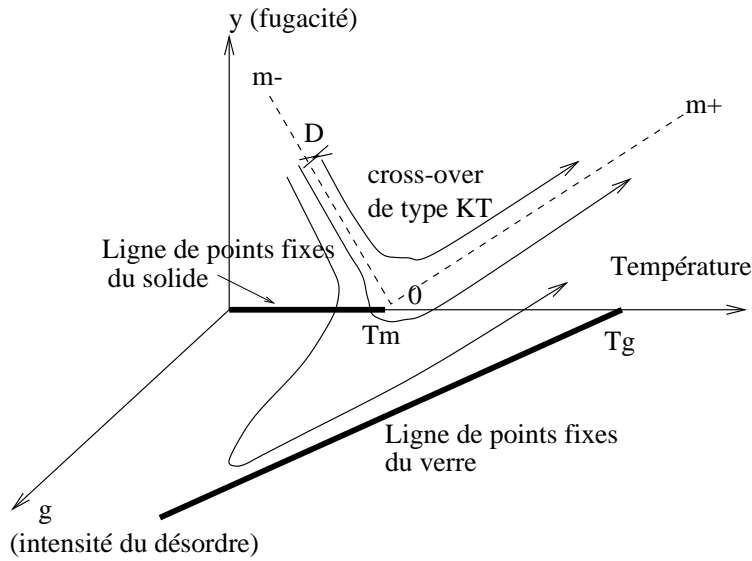


FIG. 6.15 – Représentation schématique du cross-over à basse température entre les deux lignes de points fixes (solide et verre)

l'espace induit des dislocations à basse température, qui détruisent l'ordre translationnel. La transition thermodynamique de fusion KTHNY est donc détruite par un désordre de substrat général. Cependant si l'intensité du désordre est faible, cette transition est remplacée par un cross-over bien marqué que nous allons maintenant étudier.

### Cross-over à basse température

Le flot correspondant aux équations (6.58) peut être intégré numériquement. Il indique que pour une valeur faible de  $g$ , deux régimes différents apparaissent en fonction de la température. Dans les deux régimes le flot est asymptotiquement non perturbatif : à très grande distance  $y$  diverge toujours, signalant l'apparition des dislocations.

◇ Régime liquide à haute température

À haute température  $T \gtrsim T_m^0$ , les fluctuations thermiques induisent déjà des dislocations en l'absence du **désordre de piégeage** d'intensité  $g$ . Ce désordre ne peut qu'augmenter les déformations du réseau; ainsi la phase de haute température est une phase "de type liquide". Nous caractériserons dans la suite l'ordre orientationnel de cette phase, qui permet d'écarter la possibilité d'une phase hexatique : cette phase est une phase liquide. Afin de déterminer la distance moyenne entre dislocations, définie par  $\xi = a e^{l^*}$  et  $y(l^*) = 1$ , nous pouvons remarquer que des fluctuations thermiques importantes diminuent les effets du désordre de piégeage : ce dernier est moyenné localement par ces fluctuations, et n'accroche plus le réseau (son effet se rapproche alors de celui du désordre de grande longueur d'onde). Ceci est confirmé par l'analyse numérique de la figure 6.16 où  $g$  est asymptotiquement renormalisé à 0 lorsque  $y$  augmente. Ainsi la distance entre dislocations  $\xi(T)$  est la même qu'en l'absence de désordre de piégeage (voir la figure 6.18). Cette phase est caractérisée par une viscosité finie inversement proportionnelle à la densité de dislocations  $\eta_{visc} \sim \xi^2(T)$  (et un module d'élasticité  $c_{66}$  nul au delà de  $\xi(T)$ ).

◇ Régime vitreux à basse température

À basse température, et pour une valeur faible de  $g$ , le flot de renormalisation est dominé par les deux lignes de points fixes que nous avons rencontrées précédemment dans ce chapitre : la ligne de points fixes du solide en l'absence de désordre de piégeage  $g = 0$ , rencontrée dans le paragraphe ci-dessus; et la ligne de points fixes du verre en l'absence de dislocation ( $y = 0$ ) étudiée dans la partie 6.2. Cette dernière est caractérisée par une valeur de  $g$  finie, et assez importante autour de  $T_m^0$  (car  $T_g > T_m^0$ ); alors que la ligne du solide correspond à  $y$  et  $g$  nuls en dessous de  $T_m(\sigma)$ .

A basse température, le flot de renormalisation se trouve dans le bassin d'attraction de la ligne de points fixes du solide (elle-même instable par rapport à la formation des dislocations) :  $y$  diminue rapidement à zéro, signalant la disparition des dislocations aux petites échelles (figure 6.16). Cependant le désordre d'accrochage est pertinent autour de cette ligne de points fixes : lorsque  $y$  atteint des valeurs extrêmement faibles (ce qui correspond à de très grandes valeurs de l'énergie de coeur  $E_c$ ),  $g$  se met lentement à augmenter. Le flot est alors attiré par la ligne de points fixes du verre, au voisinage du plan  $y = 0$ . Pendant ce temps,  $y$  étant négligeable,  $c_{66}$  et  $K$  ne sont pas renormalisées et restent finis (fig.6.16). Arrivée à une valeur constante autour de la ligne de points fixes,  $g$  entraîne la croissance linéaire avec  $l$  de  $\sigma$ , qui finalement atteint la valeur critique  $\sigma_c$ . La fugacité  $y$  des dislocations augmente alors de nouveau. Cependant, sa valeur à cette échelle étant extrêmement faible, sa croissance est lente initialement, jusqu'à s'emballer à la longueur  $l_c = \ln(\xi_d/a)$  où elle atteint  $y \sim 1$ , ce qui correspond à l'apparition des dislocations. Le flot est alors attiré par un point fixe non perturbatif  $y, \sigma = \infty; g, c_{66} = 0$ .

Ainsi dans ce régime,  $y_b$  est quasi-nulle jusqu'à l'échelle  $\xi_d(T)$ , ce qui indique que les dislocations n'apparaissent dans le réseau qu'à des échelles  $L > \xi_d$ . Bien que dans la limite thermodynamique les deux régimes correspondent à des phases topologiquement désordonnées (et donc indifférentiables du point de vue des symétries), leurs caractéristiques physiques seront différentes. En particulier la viscosité du régime vitreux  $\eta_{visc} \sim \xi_d^2(T)$  sera bien plus grande que celle du régime liquide (son comportement est donné en échelle logarithmique par le double du comportement de la figure 6.18). De plus la réponse élastique du réseau dans le régime vitreux dépend de l'échelle considérée : un échantillon de taille plus petite que  $\xi_d$  répondra comme un solide de module de cisaillement fini (voir la figure 6.16) alors que pour des plus grandes tailles il répondra comme un liquide de très grande viscosité.

Afin de caractériser plus précisément ce régime nous allons maintenant déterminer analytiquement le comportement de cette longueur  $\xi_d$  dans deux régions différentes : autour de la transition  $g = 0$  (cross-over de type KT), et à basse température (cross-over de type vitreux).

### Cross-over (critique) de type KT

Dans cette partie nous allons étudier le cross-over autour du point de transition à  $g = 0$ . Dans ce cas, le comportement de  $\sigma$  et  $g$  peut se déduire de l'étude de la phase vitreuse sans dislocation (voir l'article joint en annexe et l'étude précédente). En particulier à petit  $l$  le flot se comporte comme  $\sigma \sim \sigma_0 + \delta_\sigma$  avec  $\delta_\sigma \sim g_0^2 e^{4\tau_g l}$  où  $\tau_g = (T - T_g)/T_g$ . Nous pouvons par ailleurs également utiliser l'étude précédent en l'absence de désordre de courte longueur d'onde pour étudier le comportement autour de la transition à  $g = 0$ . En utilisant la paramétrisation  $K(l) = K_c(\sigma_0)(1 - x(l))$ , les équations de renormalisation se simplifient

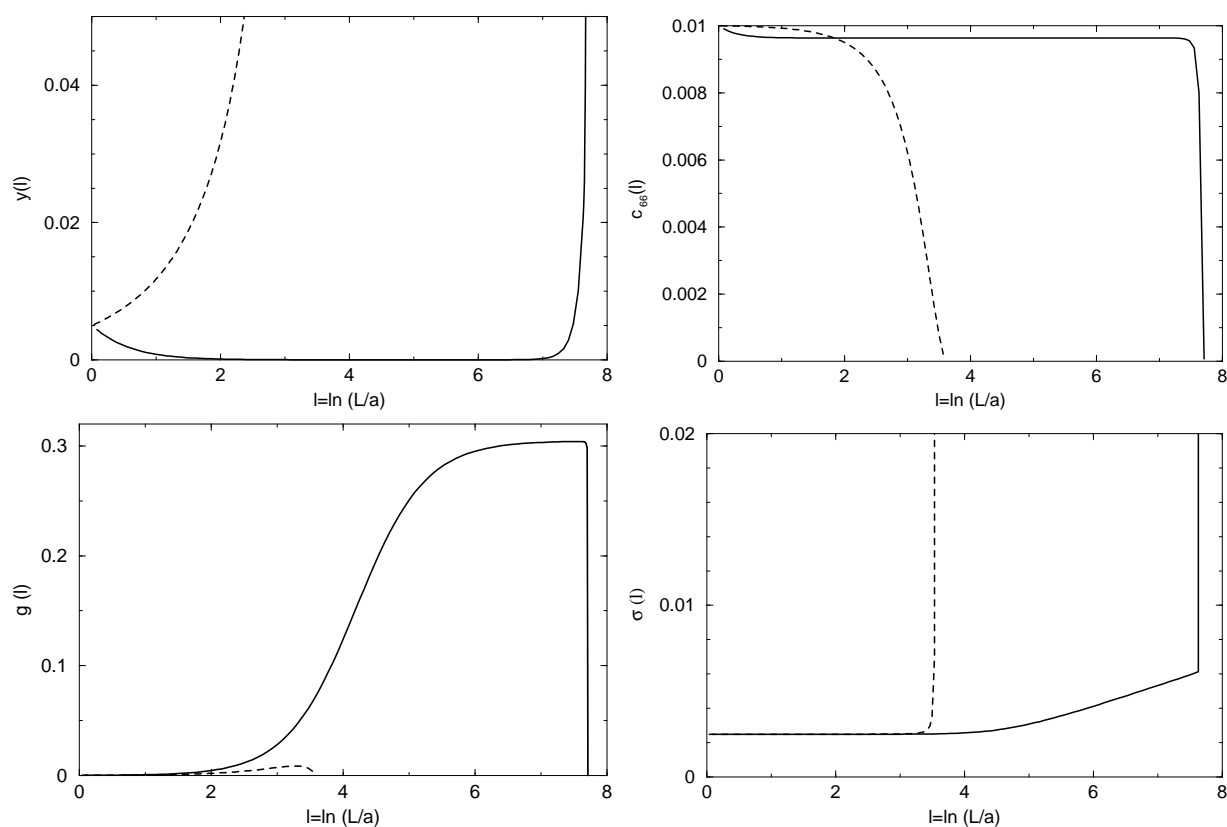


FIG. 6.16 – Comportement d'échelles des différentes constantes obtenues par résolution numérique des équations de renormalisation. Les courbes en pointillé correspondent au régime vitreux de basse température, et les courbes en train plein au régime liquide à haute température.

alors pour donner (voir l'équation (6.60)) :

$$\partial_l y = (2Cx + \lambda_1 \delta_\sigma) y + By^2 \quad \partial_l x = Ay^2$$

où  $A, B, C$  ont été définies après l'équation (6.60), et  $\lambda_1$  est une constante sans importance pour la suite. Dans ces équations  $x$  et  $\delta_\sigma$  sont supposés petits.

Les séparatrices linéaires dans le cas  $g = 0$  correspondent à  $y = m_\pm x$  où  $m_\pm = (B \pm \sqrt{B^2 + 8AC})/(2A)$ . Comme dans l'étude du comportement critique autour de ce point de transition, nous introduisons l'écart  $\mathcal{D}(l)$  par rapport à cette séparatrice ( $m_-$ ) défini par  $y = m_- x(l) + \mathcal{D}(l)$ . Nous pouvons alors analyser le flot de renormalisation au voisinage de cette séparatrice, qui correspond à  $\mathcal{D}(l) \ll x(l)$ . Notons également que le long de la séparatrice,  $x(l) \sim -1/(Am_-^2 l)$ . Si nous reportons la définition de  $\mathcal{D}(l)$  dans l'équation ci-dessus, nous obtenons au premier ordre en  $\mathcal{D}$  :

$$\partial_l \mathcal{D} = -2Cx(l)\mathcal{D}(l) + \lambda_1 \delta_\sigma(l)m_- x(l) = \underbrace{\frac{2C}{Am_-^2}}_a \frac{\mathcal{D}(l)}{l} + \underbrace{\frac{-\lambda_1 g_0^2}{Am_-}}_b \frac{e^{4\tau l}}{l}$$

La dernière égalité a été obtenue en utilisant les expressions de  $x(l)$  et  $\delta_\sigma(l)$ . En intégrant cette équation nous obtenons  $\mathcal{D} \sim \epsilon \times \lambda_2 \cdot l^a + b \frac{e^{4\tau g l}}{l}$  où  $\epsilon$  est l'écart initial à la séparatrice et  $\lambda_2$  un constante.

Afin de déterminer la longueur  $\xi_d$  (ou  $l_d = \ln(\xi_d/a)$ ), nous commençons par caractériser la longueur  $l^*$  correspondant au minimum de la fugacité  $y$ . D'après les équations de renormalisation ci-dessus, ce minimum est défini par  $\mathcal{D}(l^*) = \frac{1}{Bl^*} - \frac{\lambda_1}{B} \delta_\sigma(l^*)$ . En utilisant l'expression intégrée de  $\mathcal{D}$  ci dessus, nous obtenons finalement :

$$\epsilon \lambda_2 (l^*)^a + b \frac{e^{4\tau g l^*}}{l^*} \sim \frac{1}{Bl^*} - \frac{g_0^2 \lambda_1}{B} e^{4\tau g l^*} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \tilde{\lambda}_2 (l^*)^a \sim \frac{1}{l^*} - \lambda_1 g_0^2 e^{4\tau g l^*} \quad (6.63)$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon \tilde{\lambda}_2 (\ln L^*)^{a+1} + \lambda_1 g_0^2 (L^*)^{4\tau g} \ln L^* \sim 1 \quad (6.64)$$

$$\Rightarrow \quad \ln L^* \left( \frac{L^*}{R_c} \right)^{4\tau g} + \text{cte} \left( \frac{\ln L^*}{\ln \xi_0} \right)^{\frac{1}{\nu}} \sim 1 \quad (6.65)$$

Nous remarquons que, d'après la première ligne les variations de  $\delta_\sigma(l)$  dans la dérivation de  $\mathcal{D}(l)$  sont négligeables pour déterminer  $l_c$ . Dans la dernière équation  $\xi_\pm^0$  correspond à la longueur de corrélation en l'absence de  $g$  et vaut d'après les études précédents  $\xi_\pm^0 \sim \exp\{\epsilon^{-\nu}\}$  avec l'exposant  $\nu^{-1} = a + 1$ . Par ailleurs  $R_c$  correspond à la longueur de Larkin (voir l'étude du verre sans dislocation), et vérifie  $R_c \sim g_0^{-\frac{1}{2\tau g}}$ .

Sachant que la longueur pour que  $y$  atteigne 1 partant de son minimum est du même ordre que  $L^*$ , nous pouvons extraire de l'équation ci-dessus le comportement de  $\xi_d(T)$  dans le régime qui nous intéresse. Pour cela nous utilisons la paramétrisation suivante (voir la figure 6.17):

$$L = \xi_0^f \quad R_c = z(f) \xi_0^f (\ln \xi_0^f)^{\frac{1}{4\tau g}} \quad (6.66)$$

Bien sûr l'exposant  $f$  et  $z(f)$  dépendent du régime que nous considérons (voir la figure 6.17).

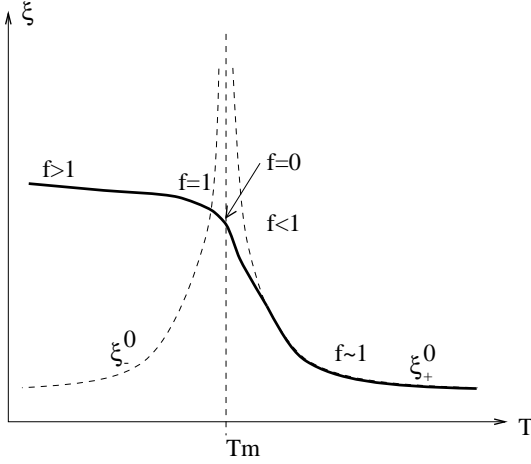


FIG. 6.17 – Comportement de l'exposant  $f$  -utilisé pour paramétriser  $\xi_d$ - en fonction de la température

En reportant dans la relation (6.65), nous obtenons  $z(f)^{-4\tau_g} = 1 \pm \Lambda f^{\frac{1}{\nu}}$ . Les deux signes correspondent aux deux possibilités pour l'écart initial à la séparatrice  $\epsilon < 0$  ou  $\epsilon > 0$ .

Au premier ordre en  $\ln R_c$  nous pouvons écrire  $f \equiv \frac{\ln R_c}{\ln \xi_0}$  ce qui nous donne l'expression finale :

$$L \approx \frac{R_c}{(\ln R_c)^{\frac{1}{4\tau_g}}} \left( 1 \pm \Lambda \left( \frac{\ln R_c}{\ln \xi_{\pm}^0} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right)^{\frac{1}{4\tau_g}} \quad (6.67)$$

où  $\Lambda$  est une constante.

### Cross-over à basse température

Comme nous venons de le voir ce régime est dominé par la ligne de points fixes du verre sans défauts. Pour déterminer  $\xi_d$  dans ce régime à basse température, nous pouvons négliger les termes d'ordre  $y^2$  dans les équations de renormalisation, car  $y$  est renormalisée à des valeurs très petites jusque précisément  $\xi_d$ . Ainsi  $c_{66}$  et  $K$  (ou  $x$ ) peuvent être considérées comme constants. Avec cette approximation, les équations de renormalisation peuvent s'écrire sous la forme simplifiée

$$\partial_l \ln y_b = (2C x + \sigma(l)) \quad (6.68)$$

$$\partial_l \sigma = Dg^2(l) \quad (6.69)$$

Autour de la ligne de points fixes du verre,  $g$  est quasiment constant :  $g \sim g^*$  où  $g^*$  est la valeur au point fixe. D'après la deuxième équation et l'analyse de la phase vitreuse sans dislocation (voir la papier joint en annexe), nous obtenons le comportement dominant à grande distance de  $\sigma$  :  $\sigma(l) \sim D(l - l_c)$ . En reportant dans l'équation ci-dessus pour  $y$ , nous obtenons finalement  $\ln y_b(l) \sim -2C|x|l + D(l - l_c)^2$  où  $l_c = \ln(R_c/a)$  ( $R_c$  est la longueur de Larkin).

La longueur  $\xi_d$  est définie comme l'échelle à laquelle apparaissent les dislocations, et plus précisément par  $y(l_d) = 1$ . En reportant dans l'expression de  $y$  ci-dessus, nous obtenons la relation qui définit  $l_d$  :  $l_d = l_c + \sqrt{2C|x|/D} l_c$  où  $x$  est toujours proportionnel à l'écart à la transition en l'absence de  $g$ .

## Fusion avec désordre

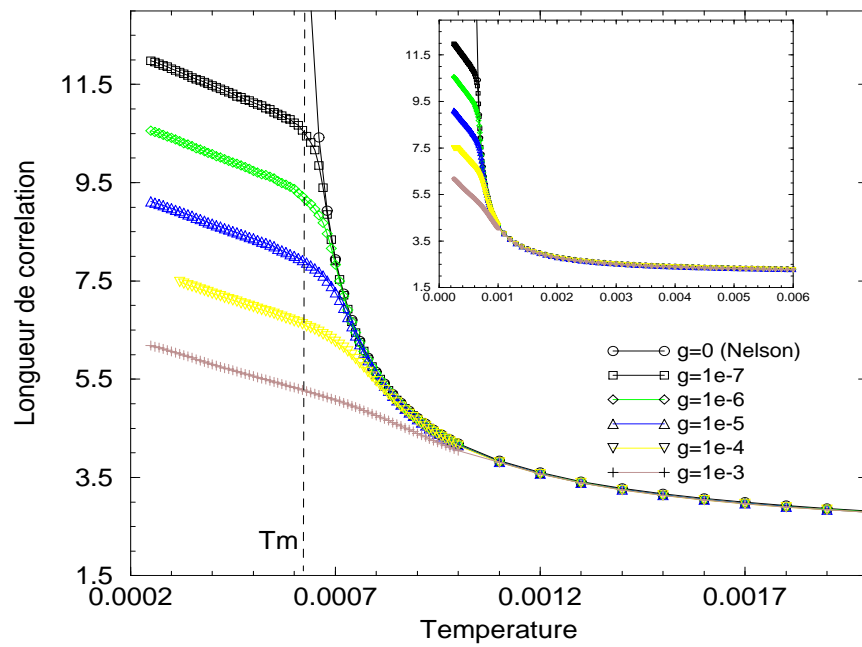


FIG. 6.18 – Distance moyenne entre dislocations  $\xi_d$  (en échelle logarithmique) en fonction de la température. Le comportement à basse température (régime vitreux) est représenté pour plusieurs valeurs de  $g$ .

Ainsi l'expression de la distance entre dislocations induites par le désordre est à basse température

$$\xi_d(T) \sim aR_c e^{b\sqrt{\ln R_c}} \quad \text{avec} \quad b = \sqrt{\frac{2C|x|}{D}} \quad (6.70)$$

Différentes valeurs de  $\xi_d$  obtenues par intégration numérique des équations de renormalisation ( $l_c$  était alors définie comme la longueur à laquelle apparaissait la singularité de  $y$ : voir la figure 6.16) sont représentées en échelle logarithmique dans la figure 6.18, pour différentes valeurs de  $g_0$ . À haute température la longueur  $\xi_d$  correspond exactement à la distance  $\xi_0(T)$  entre dislocations sans désordre de piégeage  $g = 0$ , alors qu'à l'approche de la transition sans  $g$ ,  $\xi_d$  s'écarte de  $\xi_0(T)$  pour prendre une valeur finie qui dépend de  $g_0$  en dessous de  $T_m$ . Pour des valeurs importantes de  $g_0$ , le cross-over disparaît et la distance  $\xi_d$  à basse température est du même ordre qu'à haute température: la phase est liquide à toute température.

Cette phase liquide ne possède pas d'ordre orientationnel à grande distance (il ne s'agit donc pas d'une phase hexatique): en effet l'intensité  $\Delta_\gamma$  du champ aléatoire qui se couple à l'orientation est renormalisée vers une valeur finie dans cette phase. Or, d'après l'étude du chapitre 4, nous savons que ce champ détruit le quasi-ordre orientationnel (pour toute valeur finie de  $\Delta_\gamma$  et à basse température). Cette perte de l'ordre orientationnel avait été anticipé dans (Toner 1991).

### 6.4.5 Conséquences expérimentales

Nous pouvons maintenant comparer les résultats de notre étude théorique avec ceux des expériences présentées au début de ce chapitre.

En premier lieu, notre étude nous a appris que l'effet principal du désordre à basse température était un comportement du réseau qui dépendait de la taille du système (ou de la longueur d'échantillonnage). Dans un échantillon plus petit que  $\xi_d$  à basse température, cet effet peut passer complètement inaperçu, le réseau se comportant comme un solide (sans dislocations). On peut donc voir une fusion apparente du réseau dans un tel échantillon (voir la figure 6.18). C'est sans doute la situation des expériences d'écoulement dans des canaux du groupe de P. Kes. En effet si la largeur  $w$  de ces canaux est plus petite que  $\xi_d$  (ou que le désordre est suffisamment faible pour ça) le canal ne contient aucune dislocation d'équilibre et le réseau répond de façon élastique. Par contre une étude pour des canaux de largeur plus importante devrait permettre de voir d'une part un déplacement de la température à laquelle la "transition apparente" se produit, d'autre part un comportement extrêmement visqueux pour les plus grands canaux.

Dans les expériences en courant alternatif, le réseau est également échantillonné sur une longueur finie variable. Au vu de notre analyse la longueur de cross-over  $R_\omega$  de la conductance observée dans ces expériences s'interprète comme la nouvelle distance entre dislocations induite par le désordre  $\xi_d(T)$ . Ainsi à des échelles plus petites le réseau répond comme un solide avec un module de cisaillement  $c_{66}$  fini: lorsque la température est variée à cette échelle, les dislocations apparaissent à la même température que dans la transition



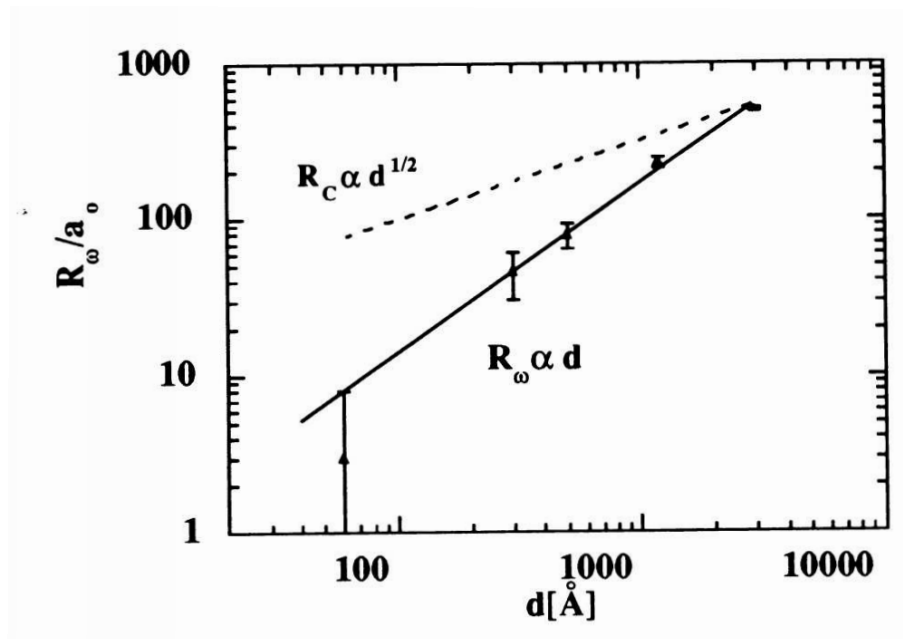


FIG. 6.19 – Comportement de la longueur de cross-over  $R_\omega$  en fonction de l'épaisseur du film  $d$ . Le comportement de la longueur de Larkin est donné en comparaison. Extrait de Yazdani, thesis (1994)

KTHNY (modifiée pour tenir compte de  $\sigma$ ). Par contre à de plus grandes distances, les dislocations sont toujours présentes, et le changement de réponse du réseau correspond au décrochage des dislocations. Cette interprétation est confirmée par l'analyse de A. Yazdani et al. de la dépendance en l'épaisseur du film de leur nouvelle longueur. Nous savons que le désordre effectif dans un film, se comporte d'après la théorie bidimensionnelle de l'accrochage collectif, comme l'inverse de l'épaisseur du film. C'est-à-dire que la longueur de Larkin bidimensionnelle augmente avec l'épaisseur  $d$  du film selon  $\sqrt{d}$ . Or le comportement de la longueur de cross-over  $R_\omega$  avec l'épaisseur  $d$ , représenté sur la figure 6.19, exclu d'identifier  $R_\omega$  avec  $R_c$  (ou  $R_a$ ), ce que confirment les comparaisons avec des valeurs de  $R_c$  extraites de mesures de courant critique dans ces films (Yazdani 1994). Ce comportement avec l'épaisseur  $d$  semble cohérent avec le comportement que nous attendons pour la distance  $\xi_d$  entre dislocations.

Le travail de ce chapitre permet donc de comprendre qualitativement les deux réponses du réseau, extraites des expériences précédemment décrites. L'idée essentielle est que la réponse du réseau de vortex dépend maintenant fortement de l'échelle que l'expérience fait intervenir. Bien sûr un travail quantitatif plus précis est nécessaire pour compléter cette compréhension: ce travail est actuellement en cours, et pourrait être complété par de nouvelles expériences.

Un autre système expérimental sur lequel notre étude s'applique est celui des bulles magnétiques. Nous allons très rapidement établir un lien entre les résultats obtenus sur ces systèmes et nos travaux.

---

Yazdani A., (1994). *Phase transitions in two-dimensional superconductors*. PhD thesis, Stanford.

### 6.4.6 Réseau de bulles magnétiques

Un autre type de réseau bidimensionnel dans lequel le désordre modifie a priori le comportement critique autour de la transition de fusion correspond au réseau de bulles magnétiques dans les grenats magnétiques. Ces réseaux ont été étudiés par R. Seshadri and R.M. Westervelt (Seshadri & Westerfeld 1991, Seshadri & Westerfeld 1992, Seshadri & Westervelt 1992).

Dans ces grenats magnétiques, des bulles de magnétisation d'un signe donné (disons  $\uparrow$ ) dans un environnement de magnétisation opposée ( $\downarrow$ ) s'ordonnent en un réseau triangulaire régulier, qui est soumis à un accrochage par le cristal, et à une agitation thermique simulée par un champ magnétique alternatif (Seshadri & Westerfeld 1992). Il est alors possible d'observer en imagerie directe le comportement du réseau, et à l'aide d'une triangulation de Delauney de caractériser les défauts topologiques de ce réseau de bulles magnétiques. A l'aide de cette triangulation, la densité de dislocations en fonction de la densité  $\rho$  de bulles peut être obtenue. D'après ces données, une transition de type KTHNY semble survenir lorsque la densité des bulles varie (Seshadri & Westervelt 1992). Je reporte ici simplement les données montrant le comportement des longueurs de corrélation translationnelles  $\xi_T$  et orientationnelles  $\xi_\theta$  en fonction de la densité  $\rho$  du réseau de bulles. Il est intéressant de remarquer que contrairement à la phase hexatique en l'absence de désordre, en dessous de la densité critique, les deux longueurs  $\xi_T$  et  $\xi_\theta$  sont finies.

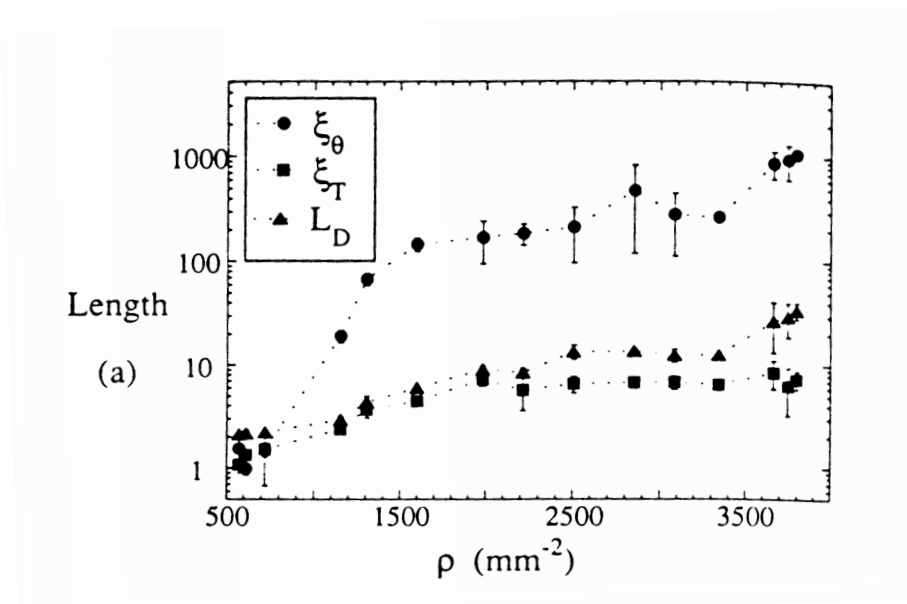


FIG. 6.20 – Longueur de corrélation orientationnelle  $\xi_\theta$  et translationnelle  $\xi_T$  en fonction de la densité de bulles magnétiques. Les longueurs sont exprimées en unités de pas du réseau *a*. Extrait de Seshadri et Westervelt (1992)

Ainsi dans ces expériences l'effet du désordre d'accrochage est bien marqué : la distance

Seshadri R. & Westerfeld R., (1991). *Phys. Rev. Lett.*, **66**:2774.

Seshadri R. & Westerfeld R., (1992). *Phys. Rev. B*, **46**:5142.

Seshadri R. & Westervelt R., (1992). *Phys. Rev. B*, **46**:5150–5161.

entre dislocations  $\xi_T$  et la longueur orientaiionnelle sont toutes deux finies en dessous de la transition de fusion. Il serait très intéressant d'approfondir cette remarque afin de comparer l'ordre de grandeur de  $\xi_T$  dans ce système avec la longueur de Larkin correspondante.

## 6.5 Perspectives et prolongements de l'approche par les gaz de Coulomb vectoriels

Ainsi se termine notre étude de la modification de la fusion bidimensionnelle en présence de désordre. Nous avons ainsi pu montrer qu'un substrat d esordonn e général, c'est-à-dire dont le potentiel associ e varie rapidement dans l'espace, détruisait la transition thermodynamique de fusion. Ce désordre génère à basse température des dislocations à de très grandes échelles, induisant un régime vitreux dans le réseau. Nous avons également discut e le lien entre cette étude de la disparition de la fusion KTHNY et les expériences sur les cristaux bidimensionnels. D'un point de vue technique, cette étude nous a conduit à renormaliser un gaz de Coulomb étendu et général.

Bien sûr de nombreux prolongements à ce travail s'imposent : tout d'abord ce nouveau gaz de Coulomb nous permet d'étudier l'effet de nombreuses perturbations sur la fusion bidimensionnelle. A titre d'exemple, nous pouvons citer l'effet d'un substrat périodique sur les résultats précédents. Dans le cas d'un substrat incommensurable, l'analyse revient simplement à considérer une constante de couplage  $\gamma$  finie (pour les fluctuations locales de l'orientation  $\theta$ ), alors que le couplage à un substrat commensurable avec le solide correspond à des opérateurs  $\cos \mathbf{G}^{(0)} \cdot \mathbf{u}$  où  $\mathbf{G}^{(0)}$  est le plus petit vecteur commun aux deux réseaux réciproques. L'analyse de ces différentes perturbations fait l'objet d'un article à venir.

Par ailleurs le lien avec les résultats expérimentaux nécessite un travail plus d etaill e de comparaison avec les prédictions de l'étude de renormalisation de ce chapitre. De nouvelles expériences permettraient également de tester certaines propositions concernant la dépendance en l'échelle de la réponse visco-élastique du réseau à basse température. Un système expérimental apparait également très intéressant dans l'étude de l'effet des différentes composantes du désordre : le réseau d'électrons à la surface de l'Hélium superfluide (Williams 1992). Dans ce système, le rôle du substrat d esordonn e est jou e par le fond du récipient. En faisant varier l'épaisseur du film d'Hélium (distance au substrat), il est alors possible de faire varier l'échelle typique de variation du potentiel d esordonn e à la surface de l'Hélium. Ce procédé expérimental permettrait donc en principe d'étudier précisément la dépendance en l'intensité du désordre d'accrochage de la fusion du réseau d'électrons. Les idées du chapitre suivant pourraient également être testées. Un projet de mesure du facteur de structure du réseau d'électrons, qui permettrait une étude précise de la transition de fusion, a été formul e.

## Annexe A Symétrie statistique et fonctions de corrélations pour le modèle élastique

Pour dériver les expressions des fonctions de corrélations, commençons par considérer les fonctions de corrélations à deux points de l'ordre translationnel :

$$C_{K_0}(\mathbf{r}) = \overline{e^{i\mathbf{K}_0(\mathbf{u}(\mathbf{r})-\mathbf{u}(0))}} \Big|_{\Delta_{11,66}}$$

où la dépendance en les constantes  $\Delta_{11}$  et  $\Delta_{66}$  est rendue explicite. Nous pouvons appliquer la translation locale définie après l'équation (6.20) à cette expression, et nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned} C_{K_0}(\mathbf{r}) &= \overline{e^{i\mathbf{K}_0(\mathbf{A}(\mathbf{r})-\mathbf{A}(0))} \times e^{i\mathbf{K}_0(\mathbf{u}(\mathbf{r})-\mathbf{u}(0))}} \Big|_{\Delta_{11,66}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}K_{0,i}K_{0,j}(A_i(\mathbf{r})-A_i(0))(A_j(\mathbf{r})-A_j(0))^A} \times \overline{e^{i\mathbf{K}_0(\mathbf{u}(\mathbf{r})-\mathbf{u}(0))}} \Big|_{\Delta_{11,66}=0} \end{aligned} \quad (6A.71)$$

La dépendance des fonctions de corrélations en  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{66}$  se factorise donc explicitement, ce qui permet de ramener le calcul de ces fonctions de corrélations à celui en l'absence de  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ . Il est possible de montrer qu'en fait le facteur dominant à grande distance dans la factorisation ci-dessus est le terme dépendant du champ  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire de  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{66}$ . En effet, cette prépondérance est directement reliée à la divergence des deux constantes  $\Delta_{11}$  et  $\Delta_{66}$  à grande distance. Ainsi, bien que le tenseur  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$  puisse être éliminé du hamiltonien pour toute valeur finie de  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{66}$ , c'est la divergence de son intensité qui contraint le comportement à grande distance du cristal à basse température.

Dans le cas des fonctions de corrélation ci-dessus, nous avons besoin du corrélateur du champ  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  pour aller plus loin. Celui se déduit des corrélations (6.27) du tenseur  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$  :

$$\overline{A_i(\mathbf{q})A_m(\mathbf{q}')} = T^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') C_{ijkl}^{-1} C_{mnr s}^{-1} \frac{q_j q_n}{q^4} \overline{\sigma_{kl}(\mathbf{q})\sigma_{rs}(\mathbf{q})} \quad (6A.72)$$

$$= \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \frac{T}{4} \left[ (\Delta_{11} - \Delta_{66}) \left( \frac{2}{c_{66}} - \frac{1}{c_{11} - c_{66}} \right)^2 \frac{q_i q_m}{q^4} + \delta_{im} \frac{1}{q^2} \frac{\Delta_{66}}{c_{66}^2} \right] \quad (6A.73)$$

avec

$$C_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{c_{66}} - \frac{1}{c_{11} - c_{66}} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4c_{66}} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Si nous reportons dans la décomposition (6A.71) des fonctions de corrélation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \ln C_{K_0}(\mathbf{r}) \Big|_{\Delta_{11,66}} &= \ln C_{K_0}(\mathbf{r}) \Big|_{\Delta_{11,66}=0} \\ &+ \frac{TK_0^2}{4} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}{q^2} \left[ (\Delta_{11} - \Delta_{66}) \left( \frac{2}{c_{66}} - \frac{1}{c_{11} - c_{66}} \right)^2 (\hat{q} \cdot \hat{K}_0)^2 + \frac{\Delta_{66}}{c_{66}^2} \right] \end{aligned} \quad (6A.74)$$

Nous pouvons maintenant incorporer dans cette équation les informations concernant le comportement d'échelle des différentes constantes. Ceci s'écrit commodément sous la forme d'une équation de Callan-Symanzik : si  $d_{K_0}^*$  est la dimension anormale de l'opérateur de vertex  $e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})}$ , la fonction de corrélation à deux points de cet opérateur satisfait la loi d'échelle

$$C_{K_0}(\mathbf{r}, \Delta_{11}(0), \Delta_{66}(0), g(0)) = e^{-d_{K_0}^* l} C_{K_0}(\mathbf{r}e^{-l}, \Delta_{11}(l), \Delta_{66}(l), g(l))$$

L'invariance de cette fonction de corrélation sous un changement de cut-off ultraviolet  $a \rightarrow ae^l$ , se traduit en l'équation

$$\left( -\frac{\partial}{\partial \ln r} - d_{K_0}^* + \left[ \partial_l \Delta_{11} \frac{\partial}{\partial \Delta_{11}} + \partial_l \Delta_{66} \frac{\partial}{\partial \Delta_{66}} \right] + \partial_l g \frac{\partial}{\partial g} \right) C_{K_0}(r) = 0$$

Soit le long de la ligne de points fixes ( $\partial_l g = 0$ )

$$\frac{\partial}{\partial \ln r} C_{K_0}(r) = \left( -d_{K_0}^* + \left[ \partial_l \Delta_{11} \frac{\partial}{\partial \Delta_{11}} + \partial_l \Delta_{66} \frac{\partial}{\partial \Delta_{66}} \right] \right) C_{K_0}$$

C'est ici que nous pouvons utiliser la factorisation (6A.74) propre à ce modèle : dans l'équation ci-dessus, la dépendance en  $\Delta_{11}$  et  $\Delta_{66}$  de la fonction de corrélation est connue explicitement. Elle permet d'obtenir le comportement à grande distance des fonctions de corrélations, de façon identique au calcul de la dernière annexe du long papier joint en annexe.

## Annexe B Renormalisation du gaz de Coulomb vectoriel électromagnétique

Dans cette annexe je présente la renormalisation du gaz de Coulomb avec charges vectorielles électriques et magnétiques. J'utiliserai les notations de contractions pour les indices de composantes des charges et leur position :

$$\mathbf{n} * V * \mathbf{n} = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} n_i(r_\alpha) V_{ij}(r_\alpha - r_\beta) n_j(r_\beta)$$

La notation  $\mathbf{n}.K.\mathbf{n} = \sum_{a,b} n_a K^{ab} n_b$  correspondant à la contraction sur la structure interne des charges. La contraction double se notant  $\mathbf{n} * V * \mathbf{n}$ .

L'action correspondant à une distribution de charges électriques  $\mathbf{n}$  et magnétiques  $\mathbf{m}$  s'écrit :

$$S[b, m] = \frac{1}{2} (\mathbf{n} * V(\kappa_1, \kappa_2) * \mathbf{n} + \mathbf{m} * V(\kappa_3, \kappa_4) * \mathbf{m}) + i \mathbf{m} * W(\kappa_5, \kappa_6) * \mathbf{n} \quad (6B.75)$$

où les différentes interactions sont définies par

$$V_{ij}(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\pi} (\kappa_1 \delta_{ij} G - \kappa_2 H_{ij}) \quad (6B.76)$$

$$W(\kappa_5, \kappa_6) = \frac{1}{2\pi} (\mathbb{I} \delta_{ij} \Phi + \kappa_5 \epsilon_{ij} G + \kappa_6 \epsilon_{jk} H_{ik}) \quad (6B.77)$$

Les constantes de couplages  $\kappa_{1\dots 6}$  ne sont pas spécifiées pour l'instant, et peuvent être des matrices. Les potentiels coulombiens habituels sont

$$G(r) + i\Phi(r) = \ln(\mathbf{r}/a) \quad (6B.78)$$

$$H_{ij}(r) = \hat{r}_i \hat{r}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} = r_i \partial_j G(r) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (6B.79)$$

L'interaction  $W$  n'étant pas symétrique, l'ordre  $\mathbf{n}, \mathbf{m}$  importe dans ce terme. La fonction de partition correspondante s'écrit

$$Z = \sum_{[n],[m]} \frac{1}{C(n, m)} \prod_{i=1}^p \int \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{a^2} Y[\mathbf{n}_i, \mathbf{m}_i] e^{S[b, m]} \quad (6B.80)$$

où la condition de neutralité (nécessitée par la divergence infrarouge du potentiel coulombien) est implicite:  $\sum \mathbf{n} = \sum \mathbf{m} = 0$ . A partir de maintenant, et par soucis de clarté, j'utiliserai la notation  $V^{(1)}, V^{(3)}$  à la place de  $V(\kappa_1, \kappa_2), V(\kappa_3, \kappa_4)$  et  $W$  pour  $W(\kappa_5, \kappa_6)$  chaque fois qu'aucune ambiguïté n'est permise.

### Dualité électromagnétique

Dans le contexte des gaz de Coulomb, la dualité au sens de KRAMERS-WANNIER correspond à l'échange des composantes électrique et magnétique des charges :  $\mathbf{n} \leftrightarrow \mathbf{m}$ . Dans

la gaz électromagnétique scalaire, cela se traduit par un échange habituel des régimes de fort et faible couplage:  $K \leftrightarrow K^{-1}$  où  $K$  est la constante de couplage entre charges. Pour le gaz de charges vectorielles que nous considérons ici, cette dualité correspond maintenant à l'échange

$$\kappa_1 \leftrightarrow \kappa_3 \ ; \ \kappa_2 \leftrightarrow \kappa_4 \ ; \ \kappa_5 \leftrightarrow -\kappa_5 \ ; \ \kappa_6 \leftrightarrow \kappa_6 \quad (6B.81)$$

La symétrie par renversement du champ magnétique  $B \rightarrow -B$  (ou renversement du temps) correspond simplement à la conjugaison complexe de l'action, et n'affecte que l'interaction  $\mathbf{n}/\mathbf{m}$ .

## Renormalisation du gaz vectoriel

Je vais suivre dans la suite l'approche à la KOSTERLITZ de la renormalisation de la fonction de partition du gaz électromagnétique. De même que dans le cas scalaire, trois contributions différentes doivent être étudiées: le changement d'échelle naïf, la fusion de charges et l'annihilation de charges (écranage du potentiel coulombien) sous l'effet d'une augmentation du cut-off.

### B.1 Reparamétrisation

Un simple changement de cut-off  $a$  dans la mesure d'intégration et dans l'interaction coulombienne donne les valeurs propres des fugacités:

$$\partial_l Y[\mathbf{n}, \mathbf{m}] = \left( 2 - \frac{1}{2\pi} (\mathbf{n} \cdot \kappa_1 \cdot \mathbf{n} + \mathbf{m} \cdot \kappa_3 \cdot \mathbf{m}) \right) Y[\mathbf{n}, \mathbf{m}] \quad (6B.82)$$

Dans la suite de ce calcul, nous considérons la situation où deux charges  $\mathbf{n}_p, \mathbf{m}_p$  et  $\mathbf{n}_q, \mathbf{m}_q$  situées en deux points  $\mathbf{r}_p$  et  $\mathbf{r}_q$  qui doivent être fusionnés après le changement de cut-off:  $a < |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q| < ae^l$ . La partie de l'action qui contient ces deux charges s'écrit  $\tilde{S} = S_{p,q} + S_\alpha$  où les deux composantes sont

$$S_{p,q} = \mathbf{n}_p \cdot V^{(1)} \cdot \mathbf{n}_q + \mathbf{m}_p \cdot V^{(3)} \cdot \mathbf{m}_q + i (\mathbf{m}_p \cdot W \cdot \mathbf{n}_q + \mathbf{m}_q \cdot W \cdot \mathbf{n}_p) \quad (6B.83)$$

$$S_\alpha = \mathbf{n}_p \cdot V^{(1)} \cdot \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{m}_p \cdot V^{(3)} \cdot \mathbf{m}_\alpha + i (\mathbf{m}_p \cdot W \cdot \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{m}_\alpha \cdot W \cdot \mathbf{n}_p) + (p \leftrightarrow q) \quad (6B.84)$$

Comme dans le cas scalaire, je considérerai que toutes les longueurs dans le système, exceptée  $\rho = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q$ , sont bien plus grandes que  $a$ . Il est possible de développer  $S_\alpha$  en puissance de  $\rho$ , c.-à.-d. en puissance du cut-off  $a$ . A l'ordre 0 en  $dl$ , les charges  $p$  et  $q$  sont situées en  $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_p + \mathbf{r}_q)$ . Le développement prend alors la forme

$$\begin{aligned}
S_\alpha = & \left\{ (\mathbf{n}_p + \mathbf{n}_q) \cdot V^{(1)} \star \mathbf{n}_\alpha + (\mathbf{m}_p + \mathbf{m}_q) \cdot V^{(3)} \star \mathbf{m}_\alpha \right. \\
& \left. + i [(\mathbf{m}_p + \mathbf{m}_q) \cdot W \star \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{m}_\alpha \star W \cdot (\mathbf{n}_p + \mathbf{n}_q)] \right\} \\
& + \frac{1}{2} \rho_\eta \cdot \left\{ (\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_q) \cdot \partial_\eta V^{(1)} \star \mathbf{n}_\alpha + (\mathbf{m}_p - \mathbf{m}_q) \cdot \partial_\eta V^{(3)} \star \mathbf{m}_\alpha \right. \\
& \left. + i [(\mathbf{m}_p - \mathbf{m}_q) \cdot \partial_\eta W \star \mathbf{n}_\alpha - \mathbf{m}_\alpha \star \partial_\eta W \cdot (\mathbf{n}_p - \mathbf{n}_q)] \right\} + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{6B.85}$$

En conséquence, la partie de la fonction de partition qui implique ces deux charges s'écrit

$$Z_{p,q} = \sum_{(\mathbf{n}/\mathbf{m})_{p,q}} Y[\mathbf{n}_p, \mathbf{m}_p] Y[\mathbf{n}_q, \mathbf{m}_q] \int \frac{d^2 \mathbf{R}}{a^2} \frac{d^2 \rho}{a^2} \left( 1 + \sum_\alpha S_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} S_\alpha S_\beta \right) e^{S_{p,q}} \tag{6B.86}$$

Pour aller plus loin il faut distinguer deux cas : soit la somme des deux charges est nulle  $\mathbf{n}_p/\mathbf{m}_p + \mathbf{n}_q/\mathbf{m}_q = 0$  et il s'agit de l'annihilation de charges (ou écrantage de Debye), soit elle ne l'est pas et il s'agit de la fusion.

## B.2 Fusion de charges

Dans ce cas, nous avons donc  $\mathbf{n}_p + \mathbf{n}_q \neq 0$  ou/et  $\mathbf{m}_p + \mathbf{m}_q \neq 0$ . Après augmentation de la taille du coeur dur il reste donc une charge effective non nulle en  $\mathbf{R}$  donnée par la charge totale. La seule intégrale qui reste à faire dans (6B.86) est celle sur  $\rho$  : nous devons donc garder dans l'intégrande les termes d'ordre zéro en  $a$ . Après réexponentiation le résultat s'écrit

$$Z_{p,q} \approx dl \sum_{\substack{(n/m)_{p,q} \\ (n,m)_p + (n,m)_q \neq 0}} Y[\mathbf{n}_p, \mathbf{m}_p] Y[\mathbf{n}_q, \mathbf{m}_q] \int \frac{d^2 \mathbf{R}}{a^2} \left( \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}} \right) e^{\sum_\alpha S_{p+q/\alpha}} \tag{6B.87}$$

Cette correction peut donc être absorbée par un changement de fugacité (pour les charges non nulles) :

$$\partial_l Y[\mathbf{n}, \mathbf{m}] = \sum_{\mathbf{n}', \mathbf{m}' \neq 0} A_{(n,m)/(n',m')} Y[\mathbf{n}', \mathbf{m}'] Y[\mathbf{n} - \mathbf{n}', \mathbf{m} - \mathbf{m}'] \tag{6B.88}$$

où  $A_{p,q} = \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}}$ . Comme nous ne considérons que les termes d'ordre 0 en  $a$ , nous pouvons écrire

$$A_{p,q} = \int d\hat{\rho} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \mathbf{n}_{\mathbf{p}_i} \cdot \kappa_2 H_{ij} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{q}_j} - \frac{1}{\pi} \mathbf{m}_{\mathbf{p}_i} \cdot \kappa_4 H_{ij} \cdot \mathbf{m}_{\mathbf{q}_j} + \frac{i}{2\pi} \mathbf{m}_{\mathbf{p}_i} \cdot (\mathbb{I} \delta_{ij} \Phi + \kappa_6 \epsilon_{jk} H_{ik}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{p}_j} \right\} \tag{6B.89}$$



### B.3 Annihilation de charges

Dans ce cas le premier terme dans l'expression de l'action (6B.85) s'annule. En conséquence le terme  $S_\alpha$  dans (6B.86) donne une contribution nulle par symétrie  $\rho \rightarrow -\rho$ . Pour calculer l'intégrale qui reste, je vais utiliser les définitions

$$J_0(p, q) = \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}} \quad (6B.90)$$

$$\frac{1}{a^2} \int d\hat{\rho} \rho_\eta \rho_\gamma e^{S_{p,q}} = \frac{1}{2} \delta_{\gamma\eta} J_0 + (K_\gamma K_\eta - \frac{1}{2} \delta_{\gamma\eta}) J_1 \quad (6B.91)$$

Le calcul de cette intégrale est assez pénible, mais est cependant détaillé dans la suite de cet appendice de façon précise. Elle s'écrit explicitement sous la forme

$$\begin{aligned} dl \sum_{p,q} & Y[\mathbf{n}_p, \mathbf{m}_p] Y[-\mathbf{n}_p, -\mathbf{m}_p] \int d^2\mathbf{R} \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}} \hat{\rho}_\eta \hat{\rho}_\gamma \\ & \times (\mathbf{n}_p \cdot \partial_\eta V^{(1)} \star \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{m}_p \cdot \partial_\eta V^{(3)} \star \mathbf{m}_\alpha + i (\mathbf{m}_p \cdot \partial_\eta W \star \mathbf{n}_\alpha - \mathbf{m}_\alpha \star \partial_\eta W \cdot \mathbf{n}_p)) \\ & \times (\mathbf{n}_p \cdot \partial_\gamma V^{(1)} \star \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{m}_p \cdot \partial_\gamma V^{(3)} \star \mathbf{m}_\alpha + i (\mathbf{m}_p \cdot \partial_\gamma W \star \mathbf{n}_\alpha - \mathbf{m}_\alpha \star \partial_\gamma W \cdot \mathbf{n}_p)) \end{aligned} \quad (6B.92)$$

Nous avons donc à définir les six tenseurs relatifs aux intégrations sur  $\hat{\rho}$  et  $\mathbf{R}$  :

$$[M_1]_{\gamma\eta}^{ik} = \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}} \hat{\rho}_\eta \hat{\rho}_\gamma (\mathbf{n}_p)^i (\mathbf{n}_p)^k \quad (6B.93)$$

$$[M_2]_{\gamma\eta}^{ik} = \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}} \hat{\rho}_\eta \hat{\rho}_\gamma (\mathbf{m}_p)^i (\mathbf{m}_p)^k \quad (6B.94)$$

$$[M_3]_{\gamma\eta}^{ik} = \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}} \hat{\rho}_\eta \hat{\rho}_\gamma (\mathbf{m}_p)^i (\mathbf{m}_p)^k \quad (6B.95)$$

$$[I_1^{(1,3)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} = \int_{\mathbf{R}} \partial^\eta V_{ij}^{(1)}(\mathbf{R}) \partial^\gamma V_{kl}^{(3)}(\mathbf{R} + \mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6B.96)$$

$$[I_2^{(1)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} = \int_{\mathbf{R}} \partial^\eta V_{ij}^{(1)}(\mathbf{R}) \partial^\gamma W_{kl}(\mathbf{R} + \mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6B.97)$$

$$[I_3]_{ij;kl}^{\gamma\eta} = \int_{\mathbf{R}} \partial^\eta W_{ij}(\mathbf{R}) \partial^\gamma W_{kl}(\mathbf{R} + \mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6B.98)$$

Avec ces définitions, l'intégrale (6B.92) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} & \mathbf{n}_\alpha \star \left\{ [M_1]_{\gamma\eta}^{ik} [I_1^{(1,1)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} + 2i [M_2]_{\gamma\eta}^{ik} [I_2^{(1)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} - [M_3]_{\gamma\eta}^{ik} [I_3]_{ij;kl}^{\gamma\eta} \right\} \star \mathbf{n}_\alpha \\ & + \mathbf{m}_\alpha \star \left\{ [M_3]_{\gamma\eta}^{ik} [I_1^{(3,3)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} - 2i [M_2]_{\gamma\eta}^{ik} [I_2^{(3)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} - [M_1]_{\gamma\eta}^{ik} [I_3]_{ij;kl}^{\gamma\eta} \right\} \star \mathbf{m}_\alpha \\ & + 2\mathbf{m}_\alpha \star \left\{ [M_2]_{\gamma\eta}^{ik} [I_1^{(1,3)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} + i [M_3]_{\gamma\eta}^{ik} [I_2^{(3)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} \right. \\ & \quad \left. - i [M_2]_{\gamma\eta}^{ik} [I_3]_{ij;kl}^{\gamma\eta} - [M_1]_{\gamma\eta}^{ik} [I_2^{(1)}]_{ij;kl}^{\gamma\eta} \right\} \star \mathbf{n}_\alpha \end{aligned} \quad (6B.99)$$

Le travail à finir est maintenant de faire les intégrations sur  $\hat{\rho}$  (sur une demie couronne par indiscernabilité,  $\frac{1}{2} \sum_{b_p^a} b_p^a b_p^c = \delta^{ac}$ ) pour calculer les tenseurs  $M_{1\dots 3}$ , sur  $\mathbf{R}$  pour les tenseurs  $I_{1\dots 3}$ , et finalement effectuer les contractions ci-dessus. Le résultat donnera les corrections aux différentes interactions. Si (6B.99) peut être entièrement exprimée à l'aide des interactions  $V$  et  $W$  avec des constantes de couplages modifiées, la théorie sera renormalisable à l'ordre  $Y^2$ .

### Intégration sur $\rho$

Je vais présenter ici le calcul de  $M_1$  explicitement, les deux autres intégrales étant similaires. Comme dans le cas scalaire, nous travaillons à l'ordre 0 en  $dl$  dans l'action (6B.93). En négligeant les termes d'ordre au moins  $dl$  l'action s'écrit

$$S_{p,q} = -\frac{\mathcal{A}}{2} \cos 2(\hat{n}, \hat{\rho}) - \frac{\mathcal{B}}{2} \cos 2(\hat{m}, \hat{\rho}) - i\mathcal{C} \sin(\hat{n}, \hat{\rho}) \cos(\hat{m}, \hat{\rho}) + i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\Phi(\rho) \quad (6B.100)$$

La symétrie  $\rho \rightarrow -\rho$  dans l'intégrale (6B.93) donne la condition  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$ . Il nous reste donc une intégrale angulaire. En écrivant  $\rho_\eta = \cos(\hat{n}, \hat{\rho})n_\eta + \sin(\hat{n}, \hat{\rho})n_\eta^\perp$ , et avec l'aide de la relation  $n_\eta^\perp n_\gamma^\perp = \delta_{\eta\gamma} - n_\eta n_\gamma$  nous obtenons l'expression pour  $M_1$  avec la notation suivante  $\theta = (\hat{n}, \hat{\rho})$ :

$$[M_1]_{\gamma\eta}^{ik} = \int d\theta e^{S_{pq}} \left( \cos 2\theta (n_\eta n_\gamma n_i n_k) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) (\delta_{\eta\gamma} n_i n_k) + 2 \cos \theta \sin \theta (\epsilon_{\mu\eta} n_\gamma n_\mu n_i n_k) \right)$$

Le tenseur  $n_\gamma n_\mu n_i n_k$  étant symétrique, le dernier terme s'annule. En utilisant la symétrie  $\theta \rightarrow -\theta$ , on obtient donc bien des intégrales réelles. En notant  $\phi$  l'angle entre la charge  $\mathbf{m}$  et la charge  $\mathbf{n}$ :  $\phi = (\hat{m}, \hat{n})$ , le résultat des intégrales angulaires donne

$$L_{\gamma\eta} = \int d\hat{\rho} e^{S_{p,q}} \hat{\rho}_\eta \hat{\rho}_\gamma = \frac{1}{2} \delta_{\gamma\eta} J_0(p, q) + (n_\gamma n_\eta - \frac{1}{2} \delta_{\gamma\eta}) J_1(p, q) \quad (6B.101)$$

Finalement nous utilisons les propriétés d'isotropie des tenseurs définis sur les réseaux directe et réciproques<sup>8</sup>:

$$\langle n_i n_j \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (6B.102)$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{1}{8} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \equiv A_{ijkl} \quad (6B.103)$$

qui nous donne l'expression finale des deux matrices.

### Intégration sur $\mathbf{R}$

Les intégrations se font aisément en utilisant les transformées de Fourier des interactions  $V, W$  dans la limite de grand  $r$ . En utilisant les projecteurs  $P_{ij}^L = \hat{q}_i \hat{q}_j$  et  $P_{ij}^T = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j = \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} P_{kl}^L$ , et en remarquant que  $W_{ij}(\kappa_5, \kappa_6) = \frac{1}{2\pi} (\delta_{ij} \Phi + \pi \epsilon_{kj} V_{ik}(\kappa_5, \kappa_6))$  nous trouvons

---

8. Aucune différence n'est faite entre le réseau direct et le réciproque car les vecteurs de plus petit module manquant dans l'un ou l'autre (réseau hexagonal au lieu de triangulaire) sont générés par renormalisation.

$$\begin{aligned}
V_{ij}(\kappa_1, \kappa_2) &\simeq \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} (1 - e^{iq \cdot r}) \frac{2}{q^2} [(\kappa_1 - \kappa_2) P_{ij}^L + (\kappa_1 + \kappa_2) P_{ij}^T] \\
\Rightarrow \partial_\eta V_{ij} &= -2i [(\kappa_1 - \kappa_2) \delta_{ik} \delta_{jl} + (\kappa_1 + \kappa_2) \epsilon_{ik} \epsilon_{jl}] \times \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{q_\eta}{q^2} P_{kl}^L \\
&\equiv -2i C_{ij}^{kl}(\kappa_1, \kappa_2) \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{q_\eta}{q^2} P_{kl}^L \\
\Rightarrow \partial_\eta W_{ij} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{\eta\mu} \partial_\mu V_{ij}(1, 0) + \epsilon_{mj} \partial_\eta V_{im}(\kappa_5, \kappa_6)) \\
&= -i [\epsilon_{\eta\mu} C_{ij}^{kl}(1, 0) + \epsilon_{mj} \delta_{\eta\mu} C_{im}^{kl}(\kappa_5, \kappa_6)] \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{q_\mu}{q^2} P_{kl}^L \\
&\equiv -i D_{ij, \eta}^{kl, \mu} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{q_\mu}{q^2} P_{kl}^L
\end{aligned}$$

où les tenseurs suivants ont été définis :

$$C_{ij}^{kl}(\kappa_1, \kappa_2) = (\kappa_1 - \kappa_2) \delta_{ik} \delta_{jl} + (\kappa_1 + \kappa_2) (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6B.104)$$

$$\begin{aligned}
D_{ij, \eta}^{kl, \mu} &= \epsilon_{\eta\mu} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}] \\
&\quad + \epsilon_{mj} \delta_{\eta\mu} [(\kappa_5 - \kappa_6) \delta_{ik} \delta_{ml} + (\kappa_5 + \kappa_6) (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{mk})]
\end{aligned} \quad (6B.105)$$

Toutes les divergences infrarouges de ces intégrales disparaissent par neutralité du gaz. Avec ces transformations, la seule intégrale qu'il nous reste à calculer est donc

$$\begin{aligned}
Q_{klmn}^{\eta\mu} &= + \int d^2 \mathbf{R} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 \mathbf{q}'}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{q}' \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{r}))} \frac{1}{q^4 (q')^4} (q_\eta q_k q_l q'_\mu q'_m q'_n) \\
&= \frac{\partial^6}{\partial_\eta \partial_\mu \partial_k \partial_l \partial_m \partial_n} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^8} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}
\end{aligned}$$

En utilisant la représentation de Schwinger de l'intégrale :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^8} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{6} \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty du u^3 e^{-uq^2 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{12} \int_0^\infty \frac{du}{2\pi u} u^3 e^{-\frac{r^2}{4u}}$$

et en dérivant six fois nous trouvons

$$\frac{\partial^6}{\partial_\eta \partial_\mu \partial_k \partial_l \partial_m \partial_n} \left( e^{-\frac{A}{2} r^2} \right) = -A^3 \delta_{\eta\mu} \delta_{kl} \delta_{mn} + p.c. (15 \text{ termes}) \quad (6B.106)$$

$$+ A^4 r_\eta r_\mu \delta_{kl} \delta_{mn} + p.c. (45 \text{ termes}) \quad (6B.107)$$

$$- A^5 r_\eta r_\mu r_k r_l \delta_{mn} + p.c. (15 \text{ termes}) \quad (6B.108)$$

$$+ A^6 r_\eta r_\mu r_k r_l r_m r_n \quad (6B.109)$$

où l'abréviation p.c. signifie une somme sur toutes les permutations circulaires des indices (le nombre de permutations correspondantes est noté entre parenthèse). Sachant que  $\int_0^\infty du u^\beta e^{-u} = \Gamma(\beta + 1)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
12 \times Q_{klmn}^{\eta\mu} &= \frac{1}{16\pi} Ei\left(-\frac{R^2}{4L^2}\right) (\delta_{\eta\mu}\delta_{kl}\delta_{mn} + p.c.) \\
&+ \frac{1}{8\pi} \hat{R}_\eta \hat{R}_\mu \delta_{kl}\delta_{mn} + p.c. \\
&- \frac{1}{4\pi} \hat{R}_\eta \hat{R}_\mu \hat{R}_k \hat{R}_l \delta_{mn} + p.c. \\
&+ \frac{1}{\pi} \hat{R}_\eta \hat{R}_\mu \hat{R}_k \hat{R}_l \hat{R}_m \hat{R}_n
\end{aligned}$$

Dans cette expression,  $L$  correspond au cut-off infrarouge. Par ailleurs nous utilisons la limite asymptotique de l'exponentielle-intégrale  $Ei(-x) \simeq \gamma + \ln(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Pour obtenir les intégrales  $I_{1,\dots,3}$ , il nous reste à faire les contractions suivantes (en utilisant la relation  $\hat{r}_i \hat{r}_j^\perp - \hat{r}_j \hat{r}_i^\perp = \epsilon_{ij}$ ) :

$$[I_1]_{ij;kl}^{\gamma\eta} = C_{ij}^{mn} \cdot C_{kl}^{pq} \cdot Q_{mnpq}^{\gamma\eta} \quad (6B.110)$$

$$[I_2]_{ij;kl}^{\gamma\eta} = C_{ij}^{mn} \cdot D_{kl;\nu}^{pq;\eta} \cdot Q_{mnpq}^{\gamma\nu} \quad (6B.111)$$

$$[I_3]_{ij;kl}^{\gamma\eta} = D_{ij,\mu}^{mn;\gamma} \cdot D_{kl;\nu}^{pq;\eta} \cdot Q_{mnpq}^{\mu\nu} \quad (6B.112)$$

### Contraction finales des tenseurs

Finalement la contraction finale des tenseurs (6B.110,6B.111,6B.112) a été réalisée à l'aide d'un programme Mathematica<sup>®</sup>. Elle permet de montrer le résultat non trivial de la renormalisabilité de ce gaz de Coulomb étendu : la correction (6B.99) se met sous la forme uniquement d'une correction aux constantes de couplage  $\kappa_{1,\dots,6}$ . Ces corrections peuvent être écrites sous la forme d'équations de renormalisation que nous formulons maintenant dans le cas général.

## Résultat final

$$\partial_l Y[\mathbf{n}] = \left( 2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{a,c} n^a \kappa_1^{ac} n^c \right) Y[\mathbf{n}] + \sum_{\mathbf{n}' \neq (0,\mathbf{n})} A_{\mathbf{n}/\mathbf{n}'} Y[\mathbf{n}'] Y[\mathbf{n} - \mathbf{n}'] \quad (6B.113a)$$

$$\partial_l Y[\mathbf{m}] = \left( 2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{a,c} m^a \kappa_3^{ac} m^c \right) Y[\mathbf{m}] + \sum_{\mathbf{m}' \neq (0,\mathbf{m})} A_{\mathbf{m}/\mathbf{m}'} Y[\mathbf{m}'] Y[\mathbf{m} - \mathbf{m}'] \quad (6B.113b)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \kappa_1^{ab} &= -3\pi \Gamma^{cd} \left( (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) I_0(\alpha/2) - \kappa_1 \kappa_2 I_1(\alpha/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{n}] \\ &+ \frac{3}{4} \pi \tilde{\Gamma}^{cd} \left( (1 + \kappa_5^2 + \kappa_6^2) I_0(\tilde{\alpha}/2) - (\kappa_6 + \kappa_5 \kappa_6) I_1(\tilde{\alpha}/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{m}] \end{aligned} \quad (6B.113c)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \kappa_2^{ab} &= -3\pi \Gamma^{cd} \left( 2\kappa_1 \kappa_2 I_0(\alpha/2) - \frac{1}{2} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) I_1(\alpha/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{n}] \\ &+ \frac{3}{4} \pi \tilde{\Gamma}^{cd} \left( -2\kappa_5 \kappa_6 I_0(\tilde{\alpha}/2) + \frac{1}{2} (1 + 2\kappa_5 + \kappa_5^2 + \kappa_6^2) I_1(\tilde{\alpha}/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{m}] \end{aligned} \quad (6B.113d)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \kappa_3^{ab} &= \frac{3}{4} \pi \Gamma^{cd} \left( (1 + \kappa_5^2 + \kappa_6^2) I_0(\alpha/2) - (\kappa_6 - \kappa_5 \kappa_6) I_1(\alpha/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{n}] \\ &- 3\pi \tilde{\Gamma}^{cd} \left( (\kappa_3^2 + \kappa_4^2) I_0(\tilde{\alpha}/2) - \kappa_3 \kappa_4 I_1(\tilde{\alpha}/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{m}] \end{aligned} \quad (6B.113e)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \kappa_4^{ab} &= \frac{3}{4} \pi \Gamma^{cd} \left( 2\kappa_5 \kappa_6 I_0(\alpha/2) + \frac{1}{2} (1 - 2\kappa_5 + \kappa_5^2 + \kappa_6^2) I_1(\alpha/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{n}] \\ &- 3\pi \tilde{\Gamma}^{cd} \left( 2\kappa_3 \kappa_4 I_0(\tilde{\alpha}/2) - \frac{1}{2} (\kappa_3^2 + \kappa_4^2) I_1(\tilde{\alpha}/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{m}] \end{aligned} \quad (6B.113f)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \kappa_5^{ab} &= +3\pi \Gamma^{cd} \left( (-\kappa_1 \kappa_5 + \kappa_2 \kappa_6) I_0(\alpha/2) - \frac{1}{2} (\kappa_2 - \kappa_2 \kappa_5 + \kappa_1 \kappa_6) I_1(\alpha/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{n}] \\ &- 3\pi \tilde{\Gamma}^{cd} \left( (\kappa_3 \kappa_5 + \kappa_4 \kappa_6) I_0(\tilde{\alpha}/2) - \frac{1}{2} (\kappa_4 + \kappa_4 \kappa_5 + \kappa_3 \kappa_6) I_1(\tilde{\alpha}/2) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{m}] \end{aligned} \quad (6B.113g)$$

$$\begin{aligned} \partial_l \kappa_6^{ab} &= -3\pi \Gamma^{cd} \left( I_0(\alpha/2) (\kappa_1 \kappa_6 - \kappa_2 \kappa_5) - \frac{1}{2} I_1(\alpha/2) (\kappa_1 - \kappa_1 \kappa_5 + \kappa_2 \kappa_6) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{n}] \\ &- 3\pi \tilde{\Gamma}^{cd} \left( I_0(\tilde{\alpha}/2) (\kappa_3 \kappa_6 + \kappa_4 \kappa_5) - \frac{1}{2} I_1(\tilde{\alpha}/2) (\kappa_3 + \kappa_3 \kappa_5 + \kappa_4 \kappa_6) \right)_{cd}^{ab} Y^2[\mathbf{m}] \end{aligned} \quad (6B.113h)$$

où

$$A_{\mathbf{n}/\mathbf{n}'} = \int d^2 \rho e^{n_i \cdot \kappa_2 H_{ij}(\rho) (n - n')_j} \quad A_{\mathbf{m}/\mathbf{m}'} = \int d^2 \rho e^{(m')_i \cdot \kappa_4 H_{ij}(\rho) (m - m')_j}$$

avec

$$\alpha = \frac{|\mathbf{n}|^2}{\pi} \sum_{a,b} n^a \kappa_2^{ab} n^b \quad (6B.114)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{|\mathbf{m}|^2}{\pi} \sum_{a,b} m^a \kappa_4^{ab} m^b \quad (6B.115)$$

Dans cette page la notation  $(\kappa_1 \kappa_2)_{cd}^{ab} = (\kappa_1)^{ac} (\kappa_2)^{bd}$  a été utilisée.



**Article 2**

**Glass phase of two-dimensional triangular elastic  
lattices with disorder**





**Article 3**

**Melting of two-dimensional solids on disordered  
substrates**



## Chapitre 7

# Gel des défauts en présence de désordre à basse température

Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps nous intéresser au comportement des défauts topologiques à basse température en présence d'un désordre de grande longueur d'onde (déphasage aléatoire dans le modèle XY ou impuretés dans un cristal bidimensionnel). L'étude de cette physique à basse température nous conduira à développer un nouveau groupe de renormalisation fonctionnel, dont nous explorerons quelques conséquences en fin de chapitre, en particulier les liens qu'il permet d'établir avec des modèles d'énergies aléatoires exactement solubles.

### 7.1 Introduction

Dans toutes les études qui précèdent, aussi bien pour des modèles purs que désordonnés, nous avons étudié les défauts topologiques de modèles élastiques en les décrivant à l'aide de gaz de Coulomb. Les études de renormalisation étaient ensuite menées dans la limite d'une fugacité des défauts  $y = e^{-\beta E_c}$  faible, ou autrement dit d'une énergie de coeur  $E_c$  élevée. Cette énergie de coeur, nécessaire pour créer localement un défaut, était considérée comme indépendante du site où le défaut était créé : autrement dit la fugacité était *supposée uniforme dans l'échantillon*. Si cette hypothèse est bien sûr naturelle dans le cas d'un système sans impureté, il en va a priori différemment en présence de désordre. En effet dans ce cas le potentiel désordonné peut favoriser certains sites dans l'échantillon dans lesquelles il sera plus facile de créer des défauts, alors que dans la plupart des autres sites cette création sera énergétiquement défavorable. Nous nous attendons par ailleurs à ce que cette inhomogénéité des énergies de coeur des défauts topologiques ne devienne cruciale qu'à basse température : à température élevée, les fluctuations thermiques l'emportent sur l'énergie de piégeage des défauts, et nous retrouvons une situation homogène que nous avons décrite précédemment. Par contre à basse température la description de ces inhomogénéités devient nécessaire. Dans ce cas, cependant, toutes les approches précédentes, basées sur une *fugacité moyenne dans l'échantillon*, ne peuvent plus s'appliquer. Nous devons alors développer de nouvelles techniques capables de décrire ces inhomogénéités et leurs propriétés universelles autour des transitions, ce qui fait l'objet de ce chapitre.

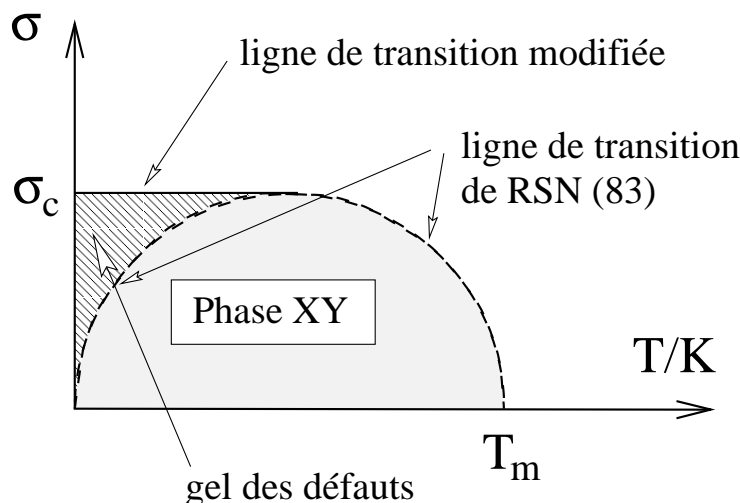


FIG. 7.1 – Diagramme des phases du modèle XY avec déphasage aléatoire. En pointillé est représenté le diagramme proposé par Rubinstein et al. (83), et en trait plein de diagramme modifié proposé par Nattermann et al. (95). La région hachurée entre ces deux lignes de transition à basse température correspond à la région où les variations spatiales de la fugacité des défauts topologiques deviennent importantes.

De façon plus précise nous allons considérer en détails le cas d'un système élastique (solide ou modèle XY) soumis à un désordre de grande longueur d'onde. Nous nous concentrerons, par simplicité, sur le cas du modèle XY avec déphasage aléatoire rencontré au chapitre 4, les conséquences sur le comportement d'un cristal en présence d'impuretés s'en déduisant directement.

### Le modèle XY avec déphasage aléatoire

Le modèle XY avec déphasage aléatoire a déjà été rencontré au paragraphe 4.2 du chapitre 4, où les résultats obtenus par RUBINSTEIN et al. ont été présentés (Rubinstein et al. 1983).

Le diagramme des phases était alors celui en pointillé de la figure 7.1, avec une réentrance de la ligne de transition à basse température et faible désordre. NATTERMANN et ses collaborateurs (Nattermann, Scheidl, Korshunov & Li 1995) ont, depuis, proposé une modification de ce diagramme des phases : dans les variables renormalisées, la réentrance disparaît et une nouvelle transition apparaît pour  $0 \leq T < T_c/2$  et une intensité du désordre  $\sigma = \sigma_c$ . Dans la région hachurée de la figure 7.1, les configurations favorables pour la création de vortex dominent la physique. Dans leur article original, NATTERMANN et al. ont développé un argument basé sur l'énergie libre d'un vortex dans un échantillon de taille  $L$  : cet argument, présenté dans le paragraphe 7.2.2, est l'analogue de l'argument d'énergie de KOSTERLITZ et THOULESS qui prédit la transition du modèle XY dans le cas pur. Dans le cas présent il prédit à température nulle une transition à  $\sigma = \sigma_c$  entre une phase XY à faible désordre

Rubinstein M., Schraiman B., & Nelson D., (1983). *Phys. Rev. B*, **27**:1800.

Nattermann T., Scheidl S., Korshunov S., & Li M., (1995). *J. Phys. I (France)*, **5**:565.

et une phase désordonnée à grand  $\sigma$  (Nattermann et al. 1995, Korshunov & Nattermann 1996a). Ainsi cet argument contredit le diagramme des phases de RUBINSTEIN et al., et interdit une réentrance de la ligne de transition à basse température. Il ne permet cependant pas d'étudier la classe d'universalité de cette nouvelle transition : plusieurs tentatives de description de ce comportement critique ont été proposées (Nattermann et al. 1995, Korshunov & Nattermann 1996a, Tang 1996, Scheidl 1997), mais nous montrerons qu'*aucune* ne prend correctement en compte les rares sites favorables à la création d'un défaut, et donc ne décrit correctement cette nouvelle transition. Cette transition est caractérisée par une prolifération de défauts induits par le désordre. Une nouvelle méthode de renormalisation fonctionnelle sera présentée dans la partie 7.3 : elle permet de renormaliser directement la loi de distribution des fugacités dans l'échantillon. L'accent sera mis dans cette partie sur le schéma de dérivation utilisé, et sur les résultats concernant la nouvelle classe d'universalité obtenue, les détails techniques de la dérivation se trouvant dans un article long en préparation (Carpentier & Le Doussal 1999).

Cette nouvelle technique relie la détermination des exposants critiques associés à la transition avec un problème bien connu dans le monde des équations non linéaires : celui de la détermination de la vitesse d'un front se propageant dans un état instable. De plus l'équation de renormalisation obtenue, appelée équation de Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov, permet d'établir des relations entre la physique de basse température du modèle XY désordonné et un autre modèle désordonné, exactement soluble : le polymère dirigé sur l'arbre de Cayley. Cette connexion sera étudiée plus en détails dans la partie 7.4 où nous considérerons le modèle simplifié d'un seul vortex dans l'échantillon de taille  $L$ . Les liens avec le problème des lois limites pour le minimum de  $n$  tirages (statistiques extrêmes de variables corrélées) seront discutés. Finalement les extensions et applications possibles de cette nouvelle méthode seront exposées.

## 7.2 Nouvelle transition dans le modèle XY avec déphasage aléatoire

### 7.2.1 Le modèle XY avec déphasage aléatoire : rappels, et gaz de Coulomb

Ce modèle XY désordonné a été présenté dans la partie 4.2 du chapitre 4 : sur un réseau carré il est défini par le hamiltonien

$$H[\theta, \mathbf{A}] = -\frac{J}{\pi} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j - A_{ij}) \quad (7.1)$$

où les variables de sites  $\theta_i$  sont les angles des vecteurs  $XY$  avec un axe quelconque :  $\theta_i \in [0, 2\pi]$ , alors que les variables aléatoires de liens  $A_{ij}$  sont des réels tirés selon une

---

Korshunov S. & Nattermann T., (1996). *Phys. Rev. B*, **53**:2746.

Tang L., (1996). *Phys. Rev. B*, **54**:3350.

Scheidl S., (1997). *Phys. Rev. B*, **55**:457–471.

Carpentier D. & Le Doussal P. article en préparation. , 1999.

distribution gaussienne, indépendantes de site à site, et de variance

$$\overline{A_{ij}^2} = \pi \sigma$$

Comme pour le modèle pur, le comportement du modèle dépend de deux types de degrés de liberté : les ondes de spins correspondant à des variations lentes de  $\theta_i$ , et les vortex, situés sur le réseau dual, et correspondant à des rotations de  $2\pi$  autour de la plaquette considérée. Seuls ces derniers peuvent induire une transition de phase, et le hamiltonien associé s'écrit :

$$H_{cg} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'} 2J n_{\mathbf{r}} G_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} n_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{r}} \quad (7.2)$$

où les sommes portent sur les sites du réseau dual (centre des plaquettes) et  $n_{\mathbf{r}}$  correspond à la charge topologique (entière) de l'éventuel vortex se trouvant au site  $\mathbf{r}$ . Ces charges interagissent entre elles via le potentiel coulombien bidimensionnel usuel (voir l'Annexe A du chapitre 2) :

$$G_{\mathbf{r}} = \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\pi e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{2 - \cos(k_x a) - \cos(k_y a)}$$

Elles sont également soumises à un potentiel aléatoire  $V(\mathbf{r})$  corrélé logarithmiquement à grande distance :

$$V_{\mathbf{r}} = 2J \sum_{\mathbf{r}'} G_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} q_{\mathbf{r}'} \quad \text{avec les charges réelles aléatoires} \quad q_{\mathbf{r}'} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{O}'} A_{ij} = \frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A} \quad (7.3)$$

Ce qui correspond bien aux corrélations  $\overline{V_{\mathbf{k}} V_{-\mathbf{k}}} = 2\sigma J^2 G_{\mathbf{k}}$  soit à grande distance :

$$\overline{(V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}'))^2} = 4\sigma J^2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + \mathcal{O}(1) \quad (7.4)$$

C'est le caractère logarithmique de ces corrélations du désordre qui sera responsable de l'existence d'une caractéristique vitreuse à basse température.

En effet, la variance de la loi de distribution du potentiel  $V_{\mathbf{r}}$  en chaque point se comporte comme le logarithme de la taille du système :  $\overline{V_{\mathbf{r}}^2} \sim \ln L$ . Ainsi, dans ce système, la variance de la distribution du désordre en un site est du même ordre que l'énergie élastique de création d'un défaut. Nous reviendrons par la suite sur le passage à la limite continue de ce modèle de gaz de Coulomb désordonné. Nous pouvons pour l'instant rappeler d'après l'analyse d'un gaz de Coulomb pur (chapitre 2) que dans la limite continue le terme d'interaction entre charges dans le hamiltonien 7.2 donne lieu à la fois à une interaction logarithmique entre charges et à une fugacité  $y$  constante pour toutes les charges (ou autrement dit indépendante du site).

## 7.2.2 Argument d'énergie à un vortex

Il arrive souvent pour des transitions de type KOSTERLITZ-THOULESS que l'étude de l'énergie libre d'un seul défaut dans un échantillon de taille finie  $L$  permette de prédire la transition thermodynamique. Ainsi la transition du modèle XY pur s'obtient en contrebalançant l'énergie élastique de création d'un vortex par l'entropie associée à la présence de ce

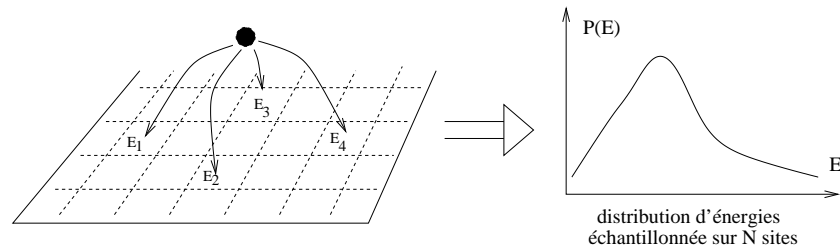


FIG. 7.2 – Particule en dimension deux en présence d’un potentiel aléatoire indépendant de site à site.

défaut. Dans notre situation, où le vortex est soumis à un potentiel désordonné  $V(\mathbf{r})$ , nous allons considérer son énergie libre à température nulle : l’entropie du vortex gelé est alors nulle. Cet argument présenté dans (Nattermann et al. 1995) et développé plus en détails dans (Korshunov & Nattermann 1996b) revient à négliger les corrélations du potentiel  $V(\mathbf{r})$ . Dans cette approximation, le modèle à une particule devient exactement équivalent au modèle d’énergies aléatoires, le REM, défini et résolu exactement par B. DERRIDA (Derrida 1981).

L’énergie élastique pour créer un vortex dans un échantillon carré de côté  $L$  est toujours  $E_0 \simeq J \ln L$ . En plus de cette énergie, le vortex est soumis à un potentiel désordonné  $V(\mathbf{r})$  distribué selon une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance (d’après (7.3)) :

$$\Delta(L) \simeq \sqrt{2\sigma} J (\ln L)^{\frac{1}{2}} \quad (7.5)$$

Naïvement, les fluctuations de ce potentiel ne semblent pas suffisamment importantes pour contrebalancer l’énergie élastique : cette dernière croît comme  $\ln L$  avec la taille du système alors que les premières se comportent comme  $\sqrt{\ln L}$ . Au passage, remarquons que cet argument est aussi en complet désaccord avec le diagramme des phases de (Rubinstein et al. 1983) à température nulle, car il est en faveur d’une phase XY pour toute valeur de  $\sigma$ . Cependant dans un échantillon réel, le vortex peut explorer tous les sites, chacun étant associé à une valeur différente du potentiel aléatoire. À température nulle, l’énergie minimale pour créer un vortex va donc dépendre de la *valeur minimale* de  $V(\mathbf{r})$  dans l’échantillon (figure 7.2).

Nous travaillons dans un premier temps dans l’approximation de (Korshunov & Nattermann 1996b) des énergies  $V(\mathbf{r})$  indépendantes. Nous allons donc nous intéresser au problème de la détermination de la valeur minimale sur  $N$  tirages d’une variable aléatoire tirée selon une loi  $p(V)$ . Dans notre cas bien sûr le nombre de tirages correspond au nombre de sites :  $N = (L/a)^2$  où  $a$  est le pas du réseau (cut-off dans le système). Pour être plus précis cette valeur minimale  $V_{min}^{(N)}$  dépend elle-même des  $N$  tirages de  $V$  et est donc elle-même une variable aléatoire, qui admet une certaine distribution. L’étude de ses propriétés correspond à ce que l’on appelle les statistiques extrêmes sur lesquelles nous allons revenir dans la deuxième partie de ce chapitre. Nous allons ici étudier la valeur moyenne de ce minimum

Nattermann T., Scheidl S., Korshunov S., & Li M., (1995). *J. Phys. I (France)*, **5**:565.

Korshunov S. & Nattermann T., (1996). *Physica B*, **222**:280–286.

Derrida B., (1981). *Phys. Rev. B*, **24**:2613.

Rubinstein M., Schraiman B., & Nelson D., (1983). *Phys. Rev. B*, **27**:1800.



$\overline{V_{min}}$  et les fluctuations de  $V_{min}$  autour de cette moyenne. Il est important de noter qu'à température nulle, cette valeur  $V_{min}$  correspond, à une constante  $E_0$  près, à l'énergie libre de la particule, et qu'étudier la distribution de  $V_{min}$  revient donc à étudier la distribution d'énergie libre du REM à température nulle (Derrida 1981).

La distribution de  $V(\mathbf{r})$  est donc donnée d'après (7.5) par

$$p(V) = \frac{1}{(2\pi\Delta^{(N)})} e^{-\frac{V^2}{2(\Delta^{(N)})^2}}$$

Tirer une valeur minimale  $V_{min}$  parmi  $N$  tirages revient à tirer d'une part  $V_{min}$  dans un des  $N$  tirages et  $N - 1$  autres valeurs plus grandes, ce qui s'écrit au niveau des distributions

$$\overline{p}(V_{min}) = N p(V_{min}) \left( \int_{V_{min}}^{+\infty} p(V) dV \right)^{N-1} = -\frac{d}{dV_{min}} \left( \int_{V_{min}}^{+\infty} p(V) dV \right) \quad (7.6)$$

où  $\overline{p}$  désigne la distribution de  $V_{min}$  (qui dépend bien sûr de  $N$ ). La valeur la plus probable de  $V_{min}$  dans l'échantillon correspond au maximum de la fonction  $\overline{p}(V_{min})$ . Dérivant l'équation (7.6) par rapport à  $V_{min}$ , nous obtenons la condition

$$\begin{aligned} N p(V_{min}^*) + \frac{V_{min}}{(\Delta^{(N)})^2} &\simeq 0 \\ \implies (V_{min}^*)^2 &\simeq 2(\Delta^{(N)})^2 \left( \ln N + \ln \frac{\Delta^{(N)}}{|V_{min}^*|} \right) \underset{N \gg 1}{\simeq} 2(\Delta^{(N)})^2 \ln N \quad (7.7) \end{aligned}$$

où  $V_{min}^*$  est la valeur la plus probable de  $V_{min}$  dans l'échantillon. En exprimant  $\Delta^{(N)}$  nous obtenons l'expression pour la valeur la plus probable  $V_{min}^*$  :

$$V_{min}^* \simeq -\sqrt{8\sigma} J \ln L \quad (7.8)$$

Il est également possible d'évaluer le second moment de  $\overline{p}(V_{min})$  (Derrida 1981, Korshunov & Nattermann 1996b), ce qui montre que les fluctuations de  $V_{min}$  sont d'ordre 1. La valeur moyenne de l'énergie minimale d'un vortex à température nulle est donc donnée par  $\overline{F}_{min} = (1 - \sqrt{8\sigma}) J \ln L$ . Cette énergie décroît donc avec l'échelle pour un désordre important ( $\sigma > \sigma_c = \frac{1}{8}$ ).

Ainsi pour  $\sigma > \sigma_c = \frac{1}{8}$  le potentiel désordonné l'emporte sur l'énergie élastique  $E_0$  et le vortex est créé (mais piégé) : nous sommes dans une phase désordonnée. En dessous de  $\sigma_c$ , l'énergie élastique l'emporte sur le désordre : l'énergie libre moyenne pour créer un défaut croît avec la taille de l'échantillon (et diverge dans la limite thermodynamique) et la phase reste quasi-ordonnée. Ainsi cet argument d'énergie permet de prédire la transition correctement à température nulle, et invalide le résultat de (Rubinstein et al. 1983). Il montre également l'importance à basse température des queues des distributions des variables désordonnées, et donc la difficulté d'une description précise du comportement d'échelle du modèle. Cependant il laisse en suspend une question importante : la nature

---

Derrida B., (1981). *Phys. Rev. B*, **24**:2613.

Korshunov S. & Nattermann T., (1996). *Physica B*, **222**:280–286.

Rubinstein M., Schraiman B., & Nelson D., (1983). *Phys. Rev. B*, **27**:1800.

précise des phases, c'est-à-dire le problème de l'écrantage du désordre et de l'interaction coulombienne entre *plusieurs* défauts à basse température. Nous venons en effet de voir qu'à  $\sigma > \sigma_c$  il était énergétiquement favorable de créer un défaut dans l'échantillon. Mais apparemment ce défaut est piégé au fond d'un puit de potentiel: peut-il réellement écranter une interaction ?

### 7.2.3 Modification de la renormalisation

NATTERMANN et ses collaborateurs se sont lancés à l'assaut de la description de cette nouvelle transition (Nattermann et al. 1995). Une extension de l'argument précédent à un gaz de Coulomb dans l'approximation de dipôles indépendants (c'est à dire en décomposant l'énergie libre en la somme des énergies libres des dipôles du système) a été proposée par KORSHUNOV et NATTERMANN (Korshunov & Nattermann 1996a). TANG a repris l'analogie entre le gaz de Coulomb bidimensionnel et l'électrodynamique bidimensionnelle en incorporant l'effet des dipôles gelés induits par le désordre (Tang 1996). Il a également repris l'analogie entre le problème à une particule et le REM, et deviné que les corrélations du désordre transformeraient l'analogie avec le REM (toujours pour une particule) en une analogie avec le polymère dirigé sur l'arbre de Cayley, que nous allons découvrir dans la deuxième partie de ce chapitre. Nous verrons également que ce modèle intervient directement dans notre traitement de renormalisation du modèle XY complet. Finalement SCHEIDL a proposé un traitement par les répliques de la renormalisation du modèle (Scheidl 1997). Contrairement à une proposition de KORSHUNOV (Korshunov 1993) qui prédisait une disparition complète de la phase XY, SCHEIDL a montré qu'en tenant compte des paires de charges (dipôles) répliquées à plusieurs composantes non nulles, le diagramme des phases de la figure 7.1 était retrouvé. Les analyses de SCHEIDL et TANG donnent les mêmes résultats, en particulier une renormalisation de l'intensité du désordre  $\sigma$ , qui n'est pas contenue dans (Korshunov & Nattermann 1996a). Plus explicitement les équations de renormalisation des deux derniers travaux donnent avec nos notations :

$$\partial_l y^2 = 2 \left[ 2 - \tau^* \frac{J}{T} \left( 1 - \tau^* \frac{\sigma J}{T} \right) \right] y^2 \quad ; \quad \tau^* = \min(1, T/(2\sigma J)) \quad (7.9a)$$

$$\partial_l (\beta J)^{-1} = 4\pi^2 \tau^* y^2 \quad (7.9b)$$

$$\partial_l \sigma = 4\pi^2 (1 - \tau^*) y^2 \quad (7.9c)$$

où  $0 < \tau^* < 1$  est la fraction de dipôles non gelés, c'est-à-dire qui peuvent écranter les interactions. Ces équations conduisent au diagramme des phases 7.1.

Cependant ces approches ont supposé que la distribution du désordre *restait gaussienne à toutes les échelles*. En réalité, nous allons voir qu'un traitement correct de la limite continue impose une décomposition du désordre en une composante corrélée à grande distance,

---

Nattermann T., Scheidl S., Korshunov S., & Li M., (1995). *J. Phys. I (France)*, **5**:565.

Korshunov S. & Nattermann T., (1996). *Phys. Rev. B*, **53**:2746.

Tang L., (1996). *Phys. Rev. B*, **54**:3350.

Scheidl S., (1997). *Phys. Rev. B*, **55**:457–471.

Korshunov S., (1993). *Phys. Rev. B*, **48**:1124–1127.

et un désordre local (énergie de coeur aléatoire). Ce dernier n'a pas du tout une distribution gaussienne. La description correcte des événements rares dans l'échantillon impose donc une analyse du comportement d'échelle d'une loi de distribution complète, c'est-à-dire la construction d'un nouveau groupe de renormalisation fonctionnel.

## 7.3 Renormalisation et équation de Kolmogorov-Pétrovskii-Piscounov

Nous allons maintenant passer à la définition de cette procédure de renormalisation fonctionnelle en dimension deux. La difficulté de cette entreprise rendra parfois l'évolution assez technique, mais l'idée générale est que le comportement thermodynamique du modèle est dominé à basse température par les configurations du désordre local. De façon inattendue, l'équation de renormalisation de la distribution de ce désordre local sera reliée à une équation non linéaire connue : l'équation<sup>1</sup> de KOLMOGOROV-PETROVSKII-PISCOUNOV. Quelques résultats sur les solutions de front de cette équation seront donnés au paragraphe 7.3.4, et nous permettrons en 7.3.5 de dériver le comportement critique du modèle à température nulle. Afin de mieux comprendre le lien entre cette nouvelle méthode et des modèles exactement solubles, nous reviendrons en fin de chapitre sur le problème précédent à un vortex (ou une charge dans le cadre du gaz de Coulomb).

### 7.3.1 Retour sur la limite au continu du gaz de Coulomb désordonné, et énergies de coeur aléatoires

Commençons par revenir sur le modèle de gaz de Coulomb considéré. Sur un réseau carré de pas  $a$ , il est défini par le hamiltonien (7.2). Dans la suite de cette étude, nous ne considérerons que les charges de norme 1, et nous vérifierons à la fin de ce chapitre que les charges plus élevées sont moins pertinentes que ces charges minimales dans la région critique qui nous intéresse. Le passage au continu dans ce gaz de Coulomb se fait d'une part en choisissant une distribution de charge de taille  $a$  pour les charges du gaz de Coulomb définies dans le continu : dans la suite nous considérerons des charges avec un coeur dur de diamètre  $a$ , mais d'autres régularisations peuvent être utilisées (voir la première annexe de l'article long du chapitre précédent). D'autre part nous devons prendre la limite du continu de l'interaction coulombienne sur le réseau, ce qui a été fait dans l'Annexe A du chapitre 2, et également du potentiel désordonné  $V(\mathbf{r})$ . Ce potentiel est lui même associé à la distribution d'une charge du gaz de Coulomb, et il occupe donc dans notre cas une aire circulaire de diamètre<sup>2</sup>  $a$ . Nous devons donc prendre soigneusement la limite du continu du corrélateur de ce potentiel. En utilisant la même limite que dans l'Annexe A du chapitre 2, nous obtenons le corrélateur du potentiel  $V_{\mathbf{r}}$  dans le continu :

$$\overline{(V_{\mathbf{r}} - V_{\mathbf{r}'})^2} \sim 4\sigma J^2 \left[ \ln \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right) + \mathcal{C} \right] \left( 1 - \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(a)} \right) \quad (7.10)$$

1. parfois appelée équation de FISHER

2. La définition de ce potentiel dans le continu est donc arbitraire aux petites distances, car elle dépend de la régularisation choisie. Cependant son corrélateur à grande distance (en fait quelques  $a$ ) ne dépend pas de ces détails, et détermine la procédure de renormalisation suivante.

où la fonction de  $\delta^{(a)}$  associée au cut-off  $a$  est définie par

$$\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}^{(a)} = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La constante  $\mathcal{C}$  a été définie dans l'Annexe A. Des deux termes dans ce corrélateur, l'un dépend explicitement de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  et correspond donc à une corrélation à grande distance, l'autre est constant et correspond donc au corrélateur d'un désordre local, complètement décorrélé entre deux points distants d'au moins  $a$ . Nous pouvons donc, d'après ce corrélateur de la distribution gaussienne de  $V_{\mathbf{r}}$ , décomposer ce potentiel en deux contributions différentes : un désordre<sup>3</sup>  $V_{\mathbf{r}}^>$  corrélé logarithmiquement à longue distance et un désordre local  $v_{\mathbf{r}}$  dont les corrélations initiales sont :

$$\overline{(V_{\mathbf{r}}^> - V_{\mathbf{r}'}^>)^2} = 4\sigma J^2 \ln \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right) (1 - \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}^{(a)}) \quad (7.11a)$$

$$\overline{v_{\mathbf{r}}v_{\mathbf{r}'}} = 2\sigma J^2 \mathcal{C} \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}^{(a)} \quad (7.11b)$$

Cette décomposition, qui n'avait pas été obtenue et prise en compte dans les approches précédentes, permet donc de comprendre déjà dans le modèle initial les inhomogénéités des énergies de coeur dans l'échantillon : dans le hamiltonien du gaz de Coulomb, cette énergie locale  $v_{\mathbf{r}}$  peut être absorbée dans une nouvelle énergie de coeur (pour des charges<sup>4</sup>  $\pm 1$ ), qui dépend maintenant du site, et du signe de la charge qui s'y trouve :

$$y \rightarrow ye^{\pm\beta v_{\mathbf{r}}} = z_{\pm}$$

Si nous choisissons une distribution gaussienne pour le potentiel  $V_{\mathbf{r}}$ , celle de  $v_{\mathbf{r}}$  l'est également, cependant nous verrons par la suite qu'elle ne le reste pas lors de la renormalisation. Nous pouvons dès maintenant anticiper que des fluctuations importantes de  $v_{\mathbf{r}}$  (*i.e* fluctuations de l'énergie de coeur locale) dans un échantillon vont invalider à basse température les approches basées sur une fugacité moyenne, qui néglige donc le potentiel  $v_{\mathbf{r}}$  au cours de la renormalisation. Le travail qui nous reste donc est de développer une méthode de renormalisation qui puisse correctement décrire le comportement d'échelle de la loi de distribution des fugacités  $P(ye^{\beta v}, ye^{-\beta v})$ .

### 7.3.2 Équations de renormalisation et répliques

Afin de dériver le comportement d'échelle de notre modèle - en particulier de ses deux potentiels désordonnés - nous allons utiliser la méthode des répliques pour moyenner les moments de la distribution de l'énergie libre. Pour nous ramener à un gaz de coulomb de type vectoriel, il nous faudra cependant faire attention à l'ordre dans lequel nous effectuerons les différentes limites. Nous obtiendrons ainsi une infinité d'équations de renormalisation (en tenant compte de toutes les valeurs finies du nombre  $m$  de répliques), dont il nous faudra

3. Attention : la notation  $V^>$  ne doit pas être confondue avec celle utilisée dans les schémas de renormalisation dans l'espace réciproque. Le signe  $>$  se reporte ici aux distances dans l'espace réel, c'est-à-dire aux grandes échelles.

4. Nous allons à partir d'ici nous restreindre à ces charges de module  $\pm 1$ . Celles-ci correspondent en effet aux opérateurs les plus pertinents : voir la lettre jointe en annexe.

extraire dans la limite  $m \rightarrow 0$  les équations régissant les paramètres du modèle :  $\sigma, J$  et la loi de distribution  $P(z_+, z_-)$ . En utilisant une fonctionnelle génératrice pour les moments de cette dernière distribution nous obtiendrons finalement une équation non linéaire fameuse : l'équation de Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov.

Pour ce qui nous concerne ici, commençons donc par définir le modèle répliqué.

### Ordre des limites : une affaire de régularisation

Nous allons donc utiliser la méthode des répliques pour exprimer les moments  $\overline{Z_{res}^m}$ . Nous considérons pour l'instant le *modèle sur réseau*, sur lequel cette technique des répliques est appliquée. Ensuite nous prendrons la limite du continu du modèle répliqué discret. Après renormalisation, nous reviendrons finalement à la limite  $m \rightarrow 0$ .

Sur ce réseau carré, le modèle répliqué non moyenné a donc comme hamiltonien

$$\beta \tilde{H}_{res}^{(m)} = -\beta J \sum_{\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'} \sum_{a=1}^m n_{\mathbf{r}}^a G_{res}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_{\mathbf{r}'}^a + \sum_{\mathbf{r}} \sum_{a=1}^m n_{\mathbf{r}}^a V_{\mathbf{r}}$$

En moyennant sur le désordre complet  $V_{\mathbf{r}}$ , nous obtenons un hamiltonien répliqué classique :

$$\beta H_{res}^{(m)} = - \sum_{\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'} [\beta J \delta^{ab} - \sigma \beta^2 J^2] n_{\mathbf{r}}^a G_{res}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_{\mathbf{r}'}^b \quad (7.12)$$

Dans cette équation, et à partir de maintenant, la sommation sur les indices répétés est supposée. Nous définissons également la matrice de couplage répliquée  $K^{ab} = \beta J \delta^{ab} - \sigma \beta^2 J^2$ . Les charges  $\mathbf{n}_{\mathbf{r}}$ , situées sur les sites du réseau, sont des vecteurs à  $m$  composantes :  $a = 1, \dots, m$  où chaque composante est soit nulle soit de module 1 :  $n_{\mathbf{r}}^a = 0, \pm 1$ . Nous pouvons maintenant passer à la limite continue, qui correspond à des charges de coeur dur de diamètre  $a$ , et une interaction  $G_{res}$  approximée par

$$G_{res(\mathbf{r})} \rightarrow G_{cont}(\mathbf{r}) = \left[ \ln \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right) + \mathcal{C} \right] \left( 1 - \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}^{(a)} \right)$$

La fonction de partition répliquée s'écrit donc maintenant :

$$\overline{Z^m} = 1 + \sum_{N=2}^{\infty} \sum_{\{n_1^a \dots n_N^a\}'} \prod_{i=1}^N \int_{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > a} \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{a^2} Y[\mathbf{n}_i] \exp \left( \sum_{i \neq j} K^{ab} n_i^a \ln \left( \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{a} \right) n_j^b \right) \quad (7.13)$$

où chaque charge  $\mathbf{n}_i$  se trouve située en  $\mathbf{r}_i$  et la somme  $\sum'$  porte sur toutes les configurations discernables de charges à composantes  $0, \pm 1$ . Dans cette fonction de partition, nous avons introduit les fugacités  $Y[\mathbf{n}]$  de charges vectorielles à  $m$  composantes. Initialement ces fugacités s'expriment en fonction de la constante de couplage  $K^{ab}$  :

$$Y[\mathbf{n}] = \exp \left( -\mathcal{C} n^a K^{ab} n^b \right) \quad (7.14)$$

Nous pourrions donc naturellement penser, comme dans les études précédentes, que cette forme reste invariante sous le groupe de renormalisation, et donc que seules deux constantes de couplage sont nécessaires pour décrire le comportement d'échelle de l'ensemble infini des

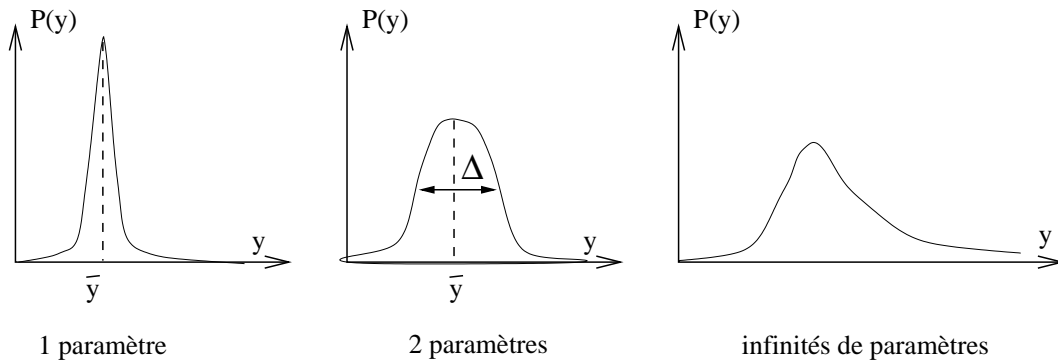


FIG. 7.3 – Liens entre le nombre de paramètres décrivant les fugacités  $Y[\mathbf{n}]$  et le forme de la loi de distribution de la fugacité des défauts réels dans l'échantillon. Le premier cas est valable autour de  $T_m$ . (i) fonction étroite de type delta (ii) log-normale (iii) arbitraire.

fugacités : la partie connexe  $E = \mathcal{C}K$  et non diagonale  $\bar{E} = \mathcal{C}\bar{K}$  de la matrice  $E^{ab} = \mathcal{C}K^{ab}$  où  $K^{ab} = K\delta^{ab} - \bar{K}$ . Cependant nous verrons que ceci n'est pas le cas : cette paramétrisation n'est plus valable aux grandes échelles. Il nous faudra alors utiliser une paramétrisation plus générale. Le modèle étant invariant par le groupe des permutations des  $m$  répliques, ces fugacités pour des charges à composantes  $0, \pm 1$  ne dépendent que de  $\sum (n^a)^2$  et  $\sum n^a$ .

Ce gaz de Coulomb avec charges vectorielles peut maintenant être étudié par les mêmes techniques de renormalisation que les gaz de Coulomb que nous avons rencontré précédemment. La renormalisation à la *Kosterlitz* revient à considérer trois processus (voir l'Annexe B du chapitre 2) : la reparamétrisation, l'annihilation de charges et la fusion de charges. Nous allons nous attarder un instant sur cette dernière qui présente des caractéristiques spécifiques à ce modèle, les deux autres étant identiques par rapport au travail du chapitre précédent.

### Charges pertinentes et distribution des fugacités

Avant de considérer cette fusion, il nous faut déterminer les charges à retenir, c'est-à-dire les charges les plus pertinentes. Ce point est assez délicat à cause de la limite  $m \rightarrow 0$ . De plus il est également relié au nombre de fugacités indépendantes (ou de paramètres servant à les caractériser) que nous avons à considérer, et donc, comme nous allons le voir, à la distribution des fugacités dans l'échantillon (figure 7.3). Ainsi si nous ne considérons que des charges pertinentes à une seule composante  $n^a = \pm\delta^{a,a_1}$ , toutes les fugacités  $Y(\mathbf{n})$  ne dépendent plus que d'un paramètre  $y$ , la fugacité uniforme des charges réelles dans l'échantillon :  $Y[n^{a_1}] = y$ . Ce cas correspond à une fonction delta pour la distribution des fugacités dans l'échantillon, approximation qui est valable si le comportement critique du gaz de Coulomb ne dépend pas des fluctuations de fugacités (autour de  $T_m$ ) : seul la valeur moyenne  $\bar{y}$  de la distribution intervient dans ce cas. Cette situation était celle qu'ont considérée RUBINSTEIN et al., qui conduit au diagramme en pointillé de la figure 7.1.

Cependant comme l'a montré S. SCHEIDL (Scheidl 1997), les charges à plusieurs composantes non nulles deviennent importantes à basse température, voire plus pertinentes que celles à une seule composante à température nulle (voir la suite de l'analyse). Plusieurs at-

Scheidl S., (1997). *Phys. Rev. B*, **55**:457–471.

titudes sont alors possibles : SCHEIDL a supposé que la forme (7.14) restait valable à toute les échelles. Cela correspond à considérer deux constantes indépendantes pour paramétriser l'ensemble des fugacités des charges pertinentes. Nous verrons par la suite que cela revient aussi à supposer que la distributions des fugacités est gaussienne, et peut donc être décrites par ses deux premiers moments : la valeur moyenne  $\bar{y} = e^{-E}$  des fugacités et la variance de la distribution, reliée à  $\bar{E}$ .

Nous montrerons par la suite que cette distribution ne reste pas gaussienne par renormalisation, et que le comportement critique de la transition induite par le désordre sur le figure 7.1 n'est pas correctement décrit dans cette approximation. La distribution de fugacité développe des queues ( $y \sim \mathcal{O}(1)$ ) qui dominant le comportement critique. Elle doit alors être décrite par une infinités de moments, ce qui correspond à une infinité de paramètres décrivant les fugacités des charges pertinentes. Rappelons que pour décrire l'ensemble du comportement critique, nous devons donc considérer toutes les charges à nombre quelconque de composantes non nulles, et ceci pour tout  $m$ . La pertinence des charges dépend bien sur du point de transition considéré : autour de  $T_m$  seules les charges à une composante non nulle sont pertinentes, alors qu'à température nulle ce sont les charges à  $m$  composantes non nulles qui sont les plus pertinentes. La paramétrisation générale que nous choisissons, consiste à introduire, à l'échelle  $ae^l$ , une fonction positive  $\Phi_l(z_+, z_-)$  de deux variables *positives* qui vérifie

$$\begin{aligned} Y[\mathbf{n}] &= Y[n_+, n_-] = \int dz_+ dz_- z_+^{n_+} z_-^{n_-} \Phi_l(z_+, z_-) \\ &= \int dz_+ dz_- \prod_a [\delta_{n^a, 0} + z_+ \delta_{n^a, +} + z_- \delta_{n^a, -}] \Phi_l(z_+, z_-) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Comme nous l'avons vu, dans cette paramétrisation, la fugacité d'une charge  $n$  ne dépend que du nombre  $n_+$  de composantes +1 et  $n_-$  de composantes -1.

### Équations de renormalisation à $m$ fini, et fusion de charges répliquées

Nous pouvons maintenant écrire les équations de renormalisation pour le gaz de Coulomb, en considérant les charges générales à composantes  $0, \pm 1$ . L'étude de la reparamétrisation et de l'annihilation des charges se fait comme dans l'analyse du gaz scalaire. Nous allons par contre nous appesantir un peu sur la fusion de charges répliquées.

Puisque nous ne considérons que les charges les plus pertinentes, il nous faut étudier les possibilités de fusions de charges pertinentes qui produisent également des charges pertinentes. Dans la situation précédente où seules les charges avec une seule composante non nulle et de norme 1 étaient considérées, ces fusions étaient exclues (exemple à gauche ci-dessous) : en effet une fusion de deux telles charges conduisaient soit à des charges à deux composantes de norme 1, soit à des charges à une composante de norme 2. Dans les deux cas ces charges étaient considérées comme moins pertinentes que les premières, et la fusion était donc exclue du traitement de (Rubinstein et al. 1983). Par contre dès que nous considérons des charges à plusieurs composantes, cette fusion doit absolument être considérée dans une renormalisation cohérente à l'ordre  $Y^2[\mathbf{n}]$  : en effet des fusions entre,

---

Rubinstein M., Schraiman B., & Nelson D., (1983). *Phys. Rev. B*, **27**:1800.

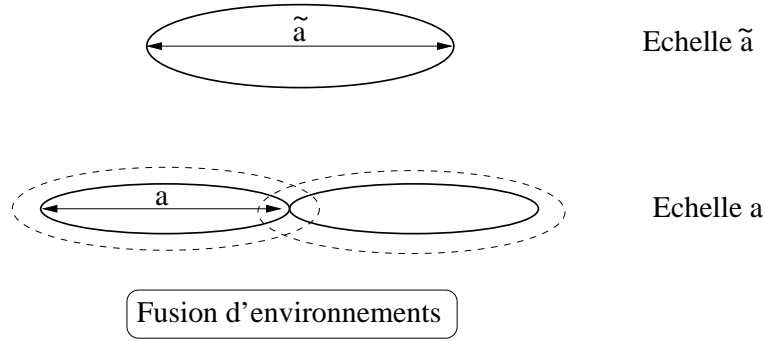


FIG. 7.4 – Représentation de la fusion des domaines associés à chaque distribution de désordre local (fugacité). Le paramètre  $a$  correspond au cut-off aux petites distances du modèle, et donc à la taille des domaines ci-dessus qui change par renormalisation.

par exemple, des charges à deux composantes  $\pm 1$  peuvent conduire à des charges de même type (à droite ci-dessous).

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ +1 \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

L'importance de cette fusion, qui n'avait pas été prise en compte dans les études précédentes, se comprend si l'on pense à la relation entre l'ensemble des fugacités  $\{Y[\mathbf{n}]\}$  et la loi de distributions  $P(y)$ . En effet pour décrire le comportement d'échelle de cette loi de distribution, il faut d'une part tenir compte des contributions du potentiel corrélé à longue distance  $V_{\mathbf{r}}^>$  au potentiel local  $v_{\mathbf{r}}$ , mais aussi du changement de taille des "domaines" associés à ces variables  $v_{\mathbf{r}}$  indépendantes. En effet, si nous considérons des domaines circulaires de diamètre  $a$ , et que nous incrémentons ce cut-off  $a \rightarrow \tilde{a} = ae^l$ , il faut tenir compte de la fusion de domaines voisins en un seul nouveau domaine de nouveau diamètre  $\tilde{a}$  (figure 7.4). Ce processus s'accompagne bien sûr d'une modification de la loi de distribution des fugacités associées à chaque domaine.

Nous reviendrons dans la suite sur cette loi de fusion des loi de distributions  $P(z)$ . Pour l'instant concentrons nous sur le gaz de Coulomb de charges répliquées. De façon analogue à l'analyse de l'Annexe B du chapitre 2, ce terme de fusion s'écrit ici

$$\partial_l Y(\mathbf{n}) = c_2 \sum_{\substack{\mathbf{n}' + \mathbf{n}'' = \mathbf{n} \\ \mathbf{n}', \mathbf{n}'' \neq 0}} Y[\mathbf{n}'] Y[\mathbf{n}'']$$

où la somme porte sur toutes les paires différentes de charges *non nulles* à composantes  $0, \pm 1$ . Le coefficient  $c_2$ , qui dépend de la régularisation choisie, vaut pour notre choix de



coeur dur  $c_2 = \pi$ . En tenant compte de la reparamétrisation et de l'annihilation de charges (écranage du potentiel coulombien), nous obtenons les équations de renormalisation suivantes :

$$\partial_l (K^{-1})^{ab} = c_1 \sum_{\mathbf{n}} n^a n^b Y[\mathbf{n}] Y[-\mathbf{n}] \quad (7.16a)$$

$$\partial_l Y[\mathbf{n}] = (2 - n^a K^{ab} n^b) Y[\mathbf{n}] + c_2 \sum_{\substack{\mathbf{n}' + \mathbf{n}'' = \mathbf{n} \\ \mathbf{n}', \mathbf{n}'' \neq 0}} Y[\mathbf{n}'] Y[\mathbf{n}''] \quad (7.16b)$$

où  $c_1 = 2\pi^2$ ,  $c_2 = \pi$ . Ces équations doivent être considérées pour toute valeur du nombre de répliques  $m$ , ce qui correspond donc à une infinité de fugacités possibles. Nous devons maintenant prendre de façon cohérente la limite  $m \rightarrow 0$  de toutes ces équations : nous allons le faire en utilisant la paramétrisation (7.15) qui fait intervenir une fonction de deux variables  $\Phi(z_+, z_-)$ .

### Limite $m \rightarrow 0$ et paramétrisation des fugacités $Y[\mathbf{n}]$

En utilisant cette paramétrisation (7.15), nous pouvons exprimer un à un les termes des équations (7.16) comme des renormalisations de la fonction  $\Phi(z_+, z_-)$ . En fonction des termes, une autre paramétrisation pourra s'avérer plus utile : elle correspond à écrire les fugacités  $z_+$  et  $z_-$  sous la forme  $z_{\pm} = e^{\beta(u \pm v)}$  où  $\beta$  est l'inverse de la température. Parallèlement à la fonction  $\Phi(z_+, z_-)$ , nous pouvons donc définir une fonction  $\tilde{\Phi}(u, v)$  qui vérifie pour toute paire d'entiers  $p = n_+ + n_-$  et  $q = n_+ - n_-$  caractérisant une charge  $\mathbf{n}$  :

$$Y[\mathbf{n}] = \int dz_+ dz_- z_+^{\frac{p+q}{2}} z_-^{\frac{p-q}{2}} \Phi(z_+, z_-) = \int dudv e^{\beta pu} e^{\beta qv} \tilde{\Phi}(u, v) \quad (7.17)$$

ce qui correspond à  $\tilde{\Phi}(u, v) = 2z_+ z_- \Phi(z_+, z_-)$ . Nous pouvons maintenant commencer à étudier la reformulation du terme linéaire en  $Y[\mathbf{n}]$  dans la renormalisation (7.16b) de  $Y$ .

◇ *Terme linéaire : opérateur de diffusion*

Nous pouvons exprimer le membre de gauche de l'équation (7.16b) en utilisant la paramétrisation (7.17) :

$$\partial_l Y[\mathbf{n}] = \int dudv e^{\beta pu} e^{\beta qv} \partial_l \tilde{\Phi}(u, v) \quad \text{pour toute charge } \mathbf{n} \text{ ou paire } p, q$$

Le terme linéaire du membre de droite s'exprime de la même manière, en utilisant la définition de la matrice  $K^{ab} = \beta J \delta^{ab} - \sigma (\beta J)^2$ . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} (2 - n_a K^{ab} n_b) Y[\mathbf{n}] &= (2 - [\beta J p - \beta J^2 q^2]) \int_{u,v} e^{\beta pu} e^{\beta qv} \tilde{\Phi}(u, v) \\ &= \int_{u,v} \tilde{\Phi}(u, v) \left( 2 - \left[ J \frac{\partial}{\partial u} - \sigma J^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] \right) e^{\beta pu} e^{\beta qv} \\ &= \int_{u,v} e^{\beta pu} e^{\beta qv} \left( 2 + \left[ J \frac{\partial}{\partial u} + \sigma J^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] \right) \tilde{\Phi}(u, v) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Cette équation doit être vérifiée pour toute charge  $\mathbf{n}$  à composantes  $n^a = 0, \pm 1$  et pour tout nombre de répliques  $m$ . Ainsi pour trouver une fonction qui vérifie (7.18) il est suffisant<sup>5</sup> de chercher une fonction  $\tilde{\Phi}$  solution de l'équation différentielle

$$\partial_l \tilde{\Phi}(u, v) = \left( 2 + J \frac{\partial}{\partial u} + \sigma J^2 \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \right) \tilde{\Phi}(u, v) \quad (7.19)$$

Nous pouvons maintenant exprimer cette condition dans l'autre paramétrisation, c'est-à-dire repasser dans les variables  $z_+, z_-$ .  $\Phi(z_+, z_-)$  vérifie de même une équation différentielle linéaire :

$$\begin{aligned} \partial_l \Phi(z_+, z_-) &= (2 + \mathcal{O}) \Phi(z_+, z_-) \\ \text{avec l'opérateur } \mathcal{O} &= \beta J (2 + z_+ \partial_{z_+} + z_- \partial_{z_-}) + \sigma \beta^2 J^2 (z_+ \partial_{z_+} - z_- \partial_{z_-})^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

◇ *Fusion de charges*

La même procédure peut être appliquée au terme non linéaire (de fusion) dans l'équation (7.16b). L'idée de la procédure est dans un premier temps d'étendre la définition (7.15) à une charge fictive nulle, ce qui définit une fugacité  $Y[\mathbf{0}] = \int dz_+ dz_- \Phi(z_+, z_-)$ . Le terme de fusion dans (7.16b) peut alors être détaillé en examinant les règles de fusion de charges avec des composantes  $0, \pm 1$  : au niveau d'une composante, cela correspond soit à  $(0) + (\pm 1) \rightarrow (\pm 1)$  soit à  $(-1) + (+1) \rightarrow (0)$ . En utilisant les notations  $Y[\mathbf{n}'] = \int_{z'_\pm} (z'_+)^{n'_+} (z'_-)^{n'_-} \Phi(z'_\pm)$  et  $Y[\mathbf{n}'' ] = \int_{z''_\pm} (z''_+)^{n''_+} (z''_-)^{n''_-} \Phi(z''_\pm)$  nous obtenons la nouvelle écriture du terme quadratique de (7.16b) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathbf{n}' + \mathbf{n}'' = \mathbf{n} \\ \mathbf{n}', \mathbf{n}'' \neq \mathbf{0}}} Y[\mathbf{n}'] Y[\mathbf{n}'' ] \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{n}' + \mathbf{n}'' = \mathbf{n} \\ \mathbf{n}', \mathbf{n}'' \neq \mathbf{0}}} \int_{z'_+, z'_-} \int_{z''_+, z''_-} \Phi(z'_+, z'_-) \Phi(z''_+, z''_-) (z'_+)^{n'_+} (z'_-)^{n'_-} (z''_+)^{n''_+} (z''_-)^{n''_-} \\ &= \int_{z'_+, z'_-} \int_{z''_+, z''_-} \Phi(z'_+, z'_-) \Phi(z''_+, z''_-) \\ & \quad \left[ (1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-)^m \left( \frac{z'_+ + z''_+}{1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-} \right)^{n_+} \left( \frac{z'_- + z''_-}{1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-} \right)^{n_-} \right. \\ & \quad \left. - ((z'_+)^{n_+} (z'_-)^{n_-} + (z''_+)^{n_+} (z''_-)^{n_-}) \right] \\ & - \delta_{n_+, 0} \delta_{n_-, 0} \int_{z'_+, z'_-} \int_{z''_+, z''_-} \Phi(z'_+, z'_-) \Phi(z''_+, z''_-) [(1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-)^m - 2] \end{aligned}$$

Cette relation peut se traduire comme précédemment en une équation pour la fonction

---

5. Nous ne savons pas montrer ici que cette condition est nécessaire. Cependant la suite va nous permettre de déterminer une fonction  $\tilde{\Phi}$  qui possède les propriétés attendues et vérifie l'égalité (7.18), ce qui est suffisant dans cette approche.

$\Phi(z_+, z_-)$ , qui, après la limite  $m \rightarrow 0$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_l \Phi(z_+, z_-) = & c_2 \left\langle \delta \left( z_+ - \frac{z'_+ + z''_+}{1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-} \right) \delta \left( z_- - \frac{z'_- + z''_-}{1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-} \right) \right\rangle_{\Phi(z'_\pm), \Phi(z''_\pm)} \\ & - 2c_2 \mathcal{N} \Phi(z_+, z_-) + c_2 \delta(z_+) \delta(z_-) \mathcal{N}^2 \end{aligned} \quad (7.21)$$

où  $\mathcal{N}$  correspond à la norme de la fonction  $\Phi(z_+, z_-)$ , et nous avons utilisé la notation  $\langle A(z_+, z_-) \rangle_\Phi = \int_{z_+, z_-} A \Phi(z_+, z_-)$ . L'équation finale de renormalisation de  $\Phi_l(z_+, z_-)$  est donc

$$\begin{aligned} \partial_l \Phi(z_+, z_-) = & (2 + \mathcal{O}) \Phi(z_+, z_-) \\ & + c_2 \left\langle \delta \left( z_+ - \frac{z'_+ + z''_+}{1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-} \right) \delta \left( z_- - \frac{z'_- + z''_-}{1 + z'_- z''_+ + z'_+ z''_-} \right) \right\rangle_{\Phi, \Phi} \\ & - 2c_2 \mathcal{N} \Phi(z_+, z_-) + c_2 \delta(z_+) \delta(z_-) \mathcal{N}^2 \end{aligned} \quad (7.22)$$

◇ *Annihilation : renormalisation de  $J$  et  $\sigma$*

La renormalisation de la matrice  $K^{ab}$  peut se réécrire comme une renormalisation de ses deux composantes indépendantes, c'est-à-dire de  $J$  et  $\sigma$  :

$$\partial_l ((\beta J)^{-1} + \sigma) = \frac{c_1}{m} \sum_{a=1}^m \sum_{\mathbf{n} \neq 0} n^a n^a Y[\mathbf{n}] Y[-\mathbf{n}] \quad (7.23)$$

$$\partial_l \sigma = \frac{c_1}{m(m-1)} \sum_{a \neq b=1}^m \sum_{\mathbf{n} \neq 0} n^a n^{b \neq a} Y[\mathbf{n}] Y[-\mathbf{n}] \quad (7.24)$$

À l'aide des mêmes techniques que ci-dessus, nous obtenons des équations de renormalisation de  $J$  et  $\sigma$  en fonction de la fonction  $\Phi_l(z_+, z_-)$  :

$$\partial \sigma = c_1 \left\langle \left( \frac{z'_+ z''_- - z'_- z''_+}{1 + z'_+ z''_- + z'_- z''_+} \right)^2 \right\rangle_{\Phi(z') \Phi(z'')} \quad (7.25a)$$

$$\partial K^{-1} = c_1 \left\langle \frac{z'_+ z''_- + z'_- z''_+ + 4z'_+ z''_- z'_- z''_+}{(1 + z'_+ z''_- + z'_- z''_+)^2} \right\rangle_{\Phi(z') \Phi(z'')} \quad (7.25b)$$

### 7.3.3 Équation de renormalisation non linéaire et fonctionnelle génératrice des moments de $P(z)$

Après ce travail assez technique, nous avons obtenu une équation différentielle (7.22) pour la fonction  $\Phi(z_+, z_-)$ , couplée à deux équations (7.25) pour la constante de raideur du modèle XY et l'intensité  $\sigma$  du désordre  $V^>$  corrélé à grande distance. Cependant pour l'instant, ces équations ne peuvent être résolues (sauf par une méthode numérique qui ne sera pas détaillée ici) et nous ne pouvons en tirer le diagramme des phases du modèle. De plus le lien avec la physique de ce modèle, et en particulier le gel des défauts ne paraît pas pour l'instant très clair. Il nous faut donc encore un peu travailler pour obtenir une

description plus simple du comportement d'échelle du modèle. Pour cela dans un premier temps nous allons nous intéresser à l'équation différentielle non linéaire (7.22) d'évolution de  $\Phi_l(z_+, z_-)$ .

### Passage à une loi de probabilité $P(z_+, z_-)$

La démarche que nous allons suivre consiste à relier la fonction  $\Phi(z_+, z_-)$  à une loi de distribution  $P(z_+, z_-)$ , c'est-à-dire une fonction normée et positive, des variables  $z_+$  et  $z_-$  qui correspondent maintenant aux fugacités en un site associées respectivement à une charge  $+1$  et  $-1$  (voir à ce sujet la discussion du paragraphe 7.3.1). Dans cette idée, nous nous *restreignons uniquement aux valeurs non nulles de  $z_+, z_-$* , des fugacités étant des variables non nulles. La restriction  $\Phi_{>}(z_+, z_-)$  de  $\Phi(z_+, z_-)$  à ces valeurs strictement positives  $z_+, z_- > 0$  est donc définie par  $\Phi = \Phi_{>} + (\mathcal{N} - \mathcal{N}_{>})\delta(z_-)\delta(z_+)$  où  $\mathcal{N}, \mathcal{N}_{>}$  sont respectivement les normes des fonctions  $\Phi$  et  $\Phi_{>}$ . Restreignant l'équation de renormalisation (7.22) aux valeurs  $z_+, z_- > 0$ , nous obtenons que la norme  $\mathcal{N}_{>}$  vérifie

$$\partial_l \mathcal{N}_{>} = 2\mathcal{N}_{>} - c_2 \mathcal{N}_{>}^2$$

Ainsi la norme de la fonction  $\Phi_{>}$  converge rapidement vers une valeur finie  $\mathcal{N}_{>}^* = 2/c_2$ . Dans cette limite, la fonction normée à 1  $P(z_+, z_-)$  vérifie l'équation plus simple que (7.22) :

$$\begin{aligned} \partial_l P(z_+, z_-) = & \mathcal{O}P(z_+, z_-) - 2P(z_+, z_-) \\ & + 2 \left\langle \delta\left(z_+ - \frac{z'_+ + z''_+}{1 + z'_+ z''_+ + z'_+ z''_+}\right) \delta\left(z_- - \frac{z'_- + z''_-}{1 + z'_- z''_- + z'_- z''_-}\right) \right\rangle_{P(z'_\pm)P(z''_\pm)} \end{aligned} \quad (7.26a)$$

Le même changement de fonction dans les équations (7.25) pour les constantes  $\sigma$  et  $J$  conduit aux nouvelles équations de renormalisation

$$\beta^{-1} \partial_l J^{-1} = \frac{4c_1}{c_2^2} \left\langle \frac{z'_+ z''_- + z'_- z''_+ + 4z'_+ z''_- z'_- z''_+}{(1 + z'_+ z''_- + z'_- z''_+)^2} \right\rangle_{P(z'_\pm)P(z''_\pm)} \quad (7.26b)$$

$$\partial_l \sigma = \frac{4c_1}{c_2^2} \left\langle \frac{(z'_+ z''_- - z'_- z''_+)^2}{(1 + z'_+ z''_- + z'_- z''_+)^2} \right\rangle_{P(z'_\pm)P(z''_\pm)} \quad (7.26c)$$

Ces équations avec celle pour la distribution (7.26a) constituent l'ensemble complet d'équations décrivant le comportement du système. Une petite remarque s'impose concernant ces trois équations : leurs coefficients apparaissent comme universels. En effet dans la renormalisation du gaz de Coulomb,  $c_1$  et  $c_2$  dépendent de la procédure de régularisation choisie. Par contre le rapport  $c_1/c_2^2$  est universel (voir à ce sujet le premier appendice du papier long joint en annexe au chapitre 6) : or les coefficients des équations (7.26) font soit intervenir ce rapport universel, soit un coefficient qui l'est aussi. Ainsi le coefficient 2 correspond à la dimension de l'espace dans lequel évoluent les charges du gaz de Coulomb : il est relié à l'aire d'intégration des degrés de liberté d'une paire de charges fusionnée. Cette remarque ne peut que nous conforter dans la validité de ces équations.

Ces équations restent cependant trop complexes pour être analysées directement. Afin de simplifier leur étude, nous allons maintenant faire une hypothèse qui sera validée par les résultats de notre analyse, et qui s'est vérifiée compatible avec les simulations numériques que nous avons effectuées.

### Étude des évènements rares : restriction à une équation unidimensionnelle

Si nous revenons au problème physique que nous essayons de résoudre, il correspond d'après le paragraphe 7.3.1 à une forte hétérogénéité qui domine le diagramme des phases à basse température. Dans cette limite, nous avons également anticipé que le comportement à grande échelle du modèle XY, ou du gaz de Coulomb, est dominé par les rares sites dans l'échantillon favorables à la création d'un défaut, c'est-à-dire tels que l'énergie de coeur  $y$  est très faible (voire nulle ou négative). D'après le paragraphe 7.3.1 nous savons également que la fugacité (ou l'énergie de coeur) en un site dépend du signe de la charge. Les deux variables  $z_+, z_-$  que nous avons introduites précédemment, peuvent s'interpréter comme ces deux fugacités pour les deux signes de la charge. Ce lien est confirmé par une dérivation sans réplique des équations de renormalisation, présentée dans l'article en annexe. Ainsi pour décrire la partie à basse température du diagramme des phases, nous devons nous concentrer sur les grandes valeurs des fugacités :  $z_{\pm} \sim 1$ . Mais, si la valeur moyenne de la fugacité est faible, en un site *au plus une* des deux fugacités  $z_+$  ou  $z_-$  peut être d'ordre 1. En effet les fluctuations de la distribution des fugacités sont alors directement reliées aux fluctuations du désordre local  $v_r$  que nous avons défini en (7.11), et qui se couple linéairement à la charge. Si  $v_r$  est grand, il ne va ainsi favoriser soit que les charges  $+1$  soit que les charges  $-1$ . Dans la distribution  $P(z_+, z_-)$ , nous ne sommes donc intéressés que par les queues correspond à  $z_+ \sim 1$  ou  $z_- \sim 1$ . Cette remarque nous permet de nous ramener à une loi de distribution d'une seule variable qui va pouvoir être étudiée analytiquement.

Pour être plus précis, le petit paramètre qui sous-tend cette analyse est la densité dans l'échantillon de sites favorables aux défauts, c'est à dire  $P(z_+ \sim 1)$ . Si nous nous rappelons l'étude du comportement critique de la transition de KOSTERLITZ-THOULESS, la distance entre dislocations est évaluée comme l'échelle à laquelle  $y(l) \sim 1$ . Ce qui revient à dire qu'à cette échelle l'énergie de coeur est nulle. Le comportement critique de la longueur obtenue ne dépend pas de la valeur précise de  $y$  choisie pour évaluer cette échelle. La situation est ici similaire : un site sera occupé avec une forte probabilité par un défaut si l'énergie de coeur en ce site est nulle (ou négative), c'est-à-dire  $z_+ \sim 1$  ou  $z_- \sim 1$ . Plus ces sites seront nombreux, et plus ils déstabiliseront l'ordre de la phase XY de faible désordre. Nous pouvons donc comprendre que  $P(z_+ \sim 1)$  soit un paramètre adapté à l'analyse de cette région de basse température. Dans notre analyse, nous ne garderons donc que les termes d'ordre le plus bas (deux) en  $P(z_+ \sim 1)$  (que nous noterons maintenant  $P(1)$ ).

Il est possible de montrer d'après (7.26a) que la probabilité des configurations où à la fois  $z_+ \sim 1$  et  $z_- \sim 1$  est d'ordre  $P^2(1)$ . Dans la renormalisation de  $J$  et  $\sigma$ , ces configurations interviennent avec un poids au moins  $P^3(1)$ , et peuvent donc être négligées. Seules vont donc intervenir dans (7.26c, 7.26b) des configurations de poids  $P^2(1)$  où une seule des deux fugacités est d'ordre 1. En introduisant la loi de distribution  $P_l(z) = \int dz_+ P_l(z_+, z) = \int dz_- P_l(z, z_-)$ , nous pouvons simplifier les équations de renormalisation (7.26). De même que pour l'équation à deux variables, nous pouvons préférer à la variable  $z$  l'énergie de coeur  $e$  associée, *via*  $z = e^{\beta e}$ , et sa distribution d'énergie  $\tilde{P}(e)$  définie par  $\tilde{P}(e)de = P(z)dz$ .

D'après (7.26a), l'équation d'évolution de  $P_l(z)$  se simplifie en

$$\begin{aligned} \partial_l P(z) = & [\beta J(1 + z\partial_z) + \sigma(\beta J)^2(1 + z\partial_z)^2] P(z) - 2P(z) \\ & + 2 \int_{z', z'' > 0} dz' dz'' \delta(z - (z' + z'')) P(z') P(z'') \end{aligned} \quad (7.27)$$

Le terme de diffusion peut être simplifié, au détriment du terme de fusion, en utilisant la variable d'énergie  $e$ . L'ensemble final d'équations de renormalisation pour les grandeurs d'échelle  $J, \sigma, P(e)$  est ainsi

$$\begin{aligned} \partial_l \tilde{P}(e) = & (J\partial_e + \sigma J^2 \partial_e^2) \tilde{P}(e) - 2\tilde{P}(e) \\ & + 2 \int_{e', e''} \tilde{P}(e') \tilde{P}(e'') \delta\left(e - \frac{1}{\beta} \ln(e^{\beta e'} + e^{\beta e''})\right) \end{aligned} \quad (7.28a)$$

$$\partial_l(J^{-1}) = \frac{8c_1}{c_2^2} \left\langle \frac{\beta e^{-\beta(e'+e'')}}{(1 + e^{-\beta(e'+e'')})^2} \right\rangle_{\tilde{P}(e') \tilde{P}(e'')} \quad (7.28b)$$

$$\partial_l(\sigma) = \frac{8c_1}{c_2^2} \left\langle \frac{1}{(1 + e^{-\beta(e'+e'')})^2} \right\rangle_{\tilde{P}(e') \tilde{P}(e'')} \quad (7.28c)$$

### Renormalisation de $P(z)$ et équation KPP à température nulle

Pour simplifiées qu'elles soient, ces équations n'en ont toujours pas pour autant un comportement simple à étudier. Nous allons donc finir cette série de transformations techniques en introduisant une fonctionnelle  $G(x)$  des moments de la loi de distribution  $P(z)$ . Pour cela, commençons par étudier la limite de température nulle de l'équation (7.27) ci-dessus. La température n'intervient que dans la loi de fusion : la limite de température nulle revient simplement à prendre la limite de la loi de fusion des énergies de deux environnements différents :  $(e', e'') \rightarrow e = \frac{1}{\beta} \ln(e^{\beta e'} + e^{\beta e''})$ . À température nulle, cette loi se ramène, comme nous pourrions nous y attendre, à une loi du maximum :  $(e', e'') \rightarrow e = \max(e', e'')$ , et l'équation pour  $\tilde{P}(e)$  devient

$$\partial_l \tilde{P}(e) = (J\partial_e + \sigma J^2 \partial_e^2) \tilde{P}(e) - 2\tilde{P}(e) + 4\tilde{P}(e) \int_{e \geq e''} \tilde{P}(e'')$$

En définissant une nouvelle fonction<sup>6</sup>

$$G_l(x) = \int_{x-E_l}^{+\infty} de \tilde{P}(e) \quad (7.29)$$

où  $E_l = \int_0^l J_l dl'$ , nous aboutissons à l'équation de KOLMOGOROV-PETROVSKII-PISCOUNOV ou équation de FISHER, sur laquelle nous allons bientôt revenir :

$$\frac{1}{2} \partial_l G_l(x) = \frac{\sigma J^2}{2} \partial_x^2 G + G(1 - G) \quad (7.30)$$

---

6. Le décalage de  $x$  par  $E_l$  nous permet de nous affranchir du terme proportionnel à  $J$  dans l'équation précédente.

De plus pour tout  $l$  (à toute échelle), la fonction  $G_l(x)$  vérifie à cause de sa définition (et de  $\int_z P(z) = 1$ ) :

$$\begin{cases} G_l(x) \rightarrow 1 \text{ quand } x \rightarrow -\infty \\ G_l(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (7.31)$$

Dans cette limite de température nulle, les équations de renormalisation (7.28b,7.28c) s'expriment également à l'aide de cette nouvelle paramétrisation :

$$\partial_l(J^{-1}) = \frac{8c_1}{c_2^2} \int de \partial_x G(e + E_l) \partial_x G(-e + E_l) \quad (7.32a)$$

$$\partial_l(\sigma) = \frac{8c_1}{c_2^2} \int_{e'+e'' \geq 0} de' de'' \partial_x G(e' + E_l) \partial_x G(e'' + E_l) \quad (7.32b)$$

Nous allons, pour analyser ces trois équations, utiliser les connaissances sur l'équation KPP pour dériver le comportement critique de la transition à température nulle. Pour l'instant, étendons cette fonction  $G_l(x)$  aux températures finies.

### Extension à température finie

Il est remarquable qu'il soit possible d'étendre à température finie la définition (7.29) de la fonction  $G_l(x)$  de façon à toujours transformer l'équation (7.28a) en l'équation KPP. Cette extension, qui avait été utilisée dans (Derrida & Spohn 1988) est définie par

$$\begin{aligned} G_l(x) &= 1 - \int_0^{+\infty} dz e^{-ze^{\beta(x-E_l)}} P_l(z) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} de e^{-e^{\beta(x+e-E_l)}} \tilde{P}(e) \end{aligned} \quad (7.33)$$

Il est aisé de vérifier qu'en reportant dans l'équation (7.28a) cette définition nous trouvons à nouveau que l'équation qui régit le comportement d'échelle de  $G_l(x)$  est l'équation KPP (7.30). Par contre à température finie les équations issues de l'écrantage (7.28b,7.28c) n'admettent pas d'expression simple en fonction de  $G_l(x)$  uniquement.

### 7.3.4 L'équation de Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov et le problème de la sélection de la vitesse

Nous venons juste de voir qu'à toute température, la renormalisation de  $G_l$ , qui est reliée à celle de  $P_l(z)$ , est donnée par l'équation KPP. Cette équation a été beaucoup étudiée dans le contexte de la propagation de fronts, et nous allons rappeler quelques résultats à son sujet. *A priori* la connexion que nous venons de découvrir est étonnante, car elle relie deux domaines de la physique assez différents, où les motivations sont également différentes. De plus cette connexion apparait ici dans le contexte du groupe de renormalisation : afin de mieux comprendre cette correspondance nous étudierons dans la deuxième partie de ce chapitre un modèle simplifié qui permet de s'affranchir des complications techniques inhérentes au modèle considéré dans cette partie. Pour l'instant revenons à cette équation KPP.

---

Derrida B. & Spohn H., (1988). *J. Stat. Phys.*, **51**:817–840.

### Propagation d'un front dans un état instable

Nous considérons donc l'équation KPP qui de façon générale s'écrit

$$\frac{1}{2}\partial_l\phi = D\partial_x^2\phi + f(\phi) \quad (7.34)$$

La variable  $l$  va jouer le rôle du temps, et  $x$  celle d'une variable d'espace en dimension 1. Dans cette équation le coefficient  $D$  est un coefficient de diffusion constant, et la fonction  $f(\phi)$  est une fonction continue et positive entre 0 et 1 qui vérifie  $f'(0) = 1$  et  $f'(\phi) \leq 1$  entre 0 et 1. Le cas que nous venons de rencontrer ci-dessus (7.30) correspond à  $f(\phi) = \phi - \phi^2$  mais d'autres situations peuvent être considérées comme nous le verrons dans la suite. Nous souhaitons étudier cette équation avec les conditions aux bords

$$\phi(x, l) \geq 0 \quad \forall x \quad ; \quad \phi(x, l) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \quad ; \quad \phi(x, l) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall l \quad (7.35)$$

Cette équation, avec ces conditions, a été beaucoup étudié dans le domaine des équations non linéaires. En effet elle constitue l'archétype de l'équation décrivant la propagation d'une phase stable dans une phase instable. Les situations de ce genre sont bien sûr variées : R. A. FISHER a, en 1937, considéré cette équation pour étudier la propagation d'une population de bactéries, mais les applications sont par la suite apparues dans des domaines allant de l'étude de la combustion, de la propagation d'une réaction chimique, à l'hydrodynamique. Au passage, une application récente à la physique des supraconducteurs peut être citée : la propagation d'une phase Meissner dans une phase normale d'un supraconducteur, lorsque le champ magnétique varie, a été récemment décrite à l'aide d'une équation KPP (di Bartolo & Dorsey 1996). Pour une introduction générale à cette physique, voir par exemple (Van Saarloos 1997).

Dans toutes ces situations, les solutions de l'équation (7.34) avec les conditions aux bords (7.35) convergent vers des solutions de front. Afin de comprendre intuitivement cette propagation, nous pouvons utiliser deux images différentes (Van Saarloos 1997).

◇ *Équation de Landau*

Il est possible, pour tout terme non linéaire  $f(\phi)$ , de réécrire l'équation (7.34) comme une équation de LANDAU

$$\partial_l\phi = -\frac{\partial F(\phi)}{\partial\phi} \quad \text{avec l'énergie} \quad F(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - U(\phi)$$

où le potentiel  $U(\phi)$  est défini à une constante près par  $f(\phi) = -dU(\phi)/d\phi$ .  $F(\phi)$  correspond donc à une énergie avec un premier terme de courbure et un terme d'énergie potentielle  $-U(\phi)$ , qui par construction possède un maximum local pour  $\phi = 1$  et un minimum pour  $\phi = 0$ . Cette équation décrit la dynamique non conservative de  $\phi(x, l)$  dans ce potentiel. Nous pouvons dans un premier temps nous intéresser aux solutions uniformes dans ce système ( $\partial_x\phi = 0$ ). Pour cela nous vérifions bien que l'énergie de ce système ne peut que décroître :  $dF/dl = \int_x(\partial F/\partial\phi)(\partial\phi/\partial l) = -\int_x(\partial F/\partial\phi)^2 \leq 0$ . Une conséquence

---

di Bartolo S. & Dorsey A., (1996). *Phys. Rev. Lett.*, **77**:4442.

Van Saarloos W. Three basic issues concerning interface dynamics in nonequilibrium pattern formation. In *Altenberg summer school on fundamental problems in statistical physics (1997)*, 1997.



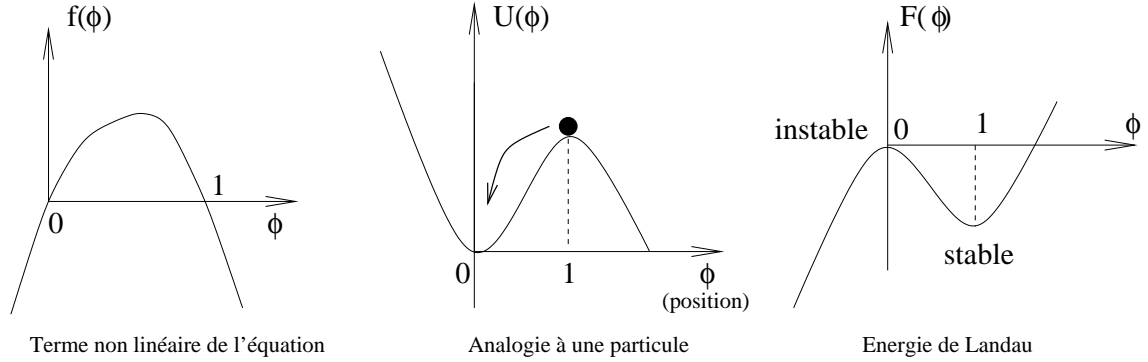


FIG. 7.5 – Représentation du potentiel  $U(\phi)$  dans l'analogie avec le problème à une particule, et de l'énergie de Landau associée à l'équation KPP.

directe de cette remarque est donc que  $\phi(x) = 0$  correspond à un état instable du système alors que  $\phi(x) = 1$  correspond à un état stable: en effet  $\phi = 0$  correspond à un maximum local de l'énergie de Landau  $F(\phi)$  alors que  $\phi = 1$  est un minimum local (voir la figure 7.5). Nous pouvons d'ores et déjà anticiper qu'avec une condition vérifiant (7.35), nous allons obtenir un front se propageant de l'état  $\phi = 1$  dans l'état  $\phi = 0$ , ce qui correspond bien à la propagation d'un état stable dans un état instable. De plus, nous pouvons également nous rendre compte que notre condition initiale doit vérifier  $\phi(x, t) \geq 0$ . En effet si nous considérons une petite perturbation de  $\phi(x, l) \leq 0$ , celle-ci va croître et tendre vers des valeurs de plus en plus négatives d'après la forme du potentiel  $F(\phi)$  (fig. 7.5). Nous obtenons dans ce cas une solution qui s'écroule vers les valeurs négatives. Un front ne sera donc possible que si de telles fluctuations sont exclues. Cette remarque est centrale dans l'analyse de la stabilité marginale (Ebert & Saarloos 1998). Une fois que nous savons que la solution de l'équation (7.34) est un front, il nous reste à le caractériser, et en particulier à déterminer sa vitesse de propagation. Afin de mieux comprendre le problème, nous pouvons maintenant utiliser une seconde interprétation de l'équation (7.34).

◇ *Analogie avec une particule soumise à une force de friction et un potentiel  $U$*

Si nous cherchons une solution de (7.34) se propageant à la vitesse  $c$ , nous pouvons écrire  $\phi(x, l) = \phi_c(\xi)$  où  $\xi = x - cl$  et  $\phi_c$  est la solution de front, caractérisé par sa vitesse  $c$ . En reportant dans l'expression de l'équation KPP, nous obtenons que cette fonction  $\phi_c$  doit vérifier  $c\partial_\xi\phi_c + \partial_\xi^2\phi_c + f(\phi_c) = 0$ . Si nous interprétons  $\phi_c$  comme une variable d'espace (entre 0 et 1) et  $\xi$  comme une nouvelle variable de temps, nous obtenons l'équation d'évolution d'une particule dans un potentiel  $U(\phi_c)$ , soumise à une force de friction de coefficient donné par  $c$  (figure 7.5) :

$$\partial_\xi^2\phi_c = -c\partial_\xi\phi_c - \partial_{\phi_c}U(\phi_c)$$

Il apparaît alors qu'il faut une friction seuil  $c_{min}$  (et donc une vitesse minimale pour le front solution de KPP) pour que la particule lâchée en  $\phi = 1$  à  $\xi = -\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$  pour tout  $l$ ) ne dépasse par le point  $\phi = 0$ , faute de quoi elle continuerait vers les  $\phi$  négatifs. Par contre, apparemment pour toute valeur de la friction plus grande que  $c_{min}$ , la particule finira toujours par arriver en  $\phi = 0$ , après un temps plus long. La question de savoir quelle

est la vitesse de la solution de front de l'équation KPP, étant donnée une condition initiale, n'est donc pas du tout évidente. Nous avons *a priori* un continuum de vitesses autorisées. Ce problème difficile est connu sous le nom de problème de sélection de la vitesse. Nous allons voir maintenant que la vitesse du front est "sélectionnée" asymptotiquement par la décroissance de la condition initiale du côté de l'état instable ( $\phi = 0$ ).

### Le problème de la sélection de la vitesse

Le problème de convergence des solutions de l'équation (7.34) vers le front se propageant à vitesse  $c$  a été étudié à la fois par des mathématiciens (Aronson & Weinberger 1978, Bramson 1983), des physiciens (pour une revue récente du sujet (Ebert & Saarloos 1999)) et auparavant des biologistes (par exemple (Murray 1989)). Le problème est dans un premier temps, celui de la détermination de la vitesse et de la décroissance de la solution à l'avant du front. La forme exacte du front n'a été déterminée que dans un cas particulier, et de plus elle dépend de la non-linéarité  $f(\phi)$  choisie dans l'équation (7.34). Ainsi la sélection se fait par l'avant du front, qui se trouve du côté de l'état instable. De ce côté, l'étude est simplifiée car la fonction  $\phi_c$  est très petite et nous pouvons négliger les non-linéarités dans l'équation (7.34). Nous allons commencer par cette étude de l'équation KPP linéarisée avant de passer aux résultats concernant la sélection de la vitesse proprement dit.

#### ◇ Équation KPP linéarisée

Du côté  $\xi \gg 1$ ,  $\phi_c$  est petite et nous pouvons linéariser la fonction  $f(\phi_c)$ :  $f(\phi_c) = \phi_c + \mathcal{O}(\phi_c^2)$ . L'équation qui régit le comportement du front dans ce régime est simplement

$$\frac{1}{2} \partial_t \phi = D \partial_x^2 \phi_c + \phi_c$$

Si nous supposons une décroissance exponentielle de la fonction  $\phi_c(\xi)$  dans cette région (ce qui sera le cas dans notre étude de renormalisation):  $\phi_c(\xi) \underset{\xi \gg 1}{\sim} e^{-\mu \xi}$ , nous déduisons aisément de l'équation ci-dessus que la vitesse du front se trouve reliée à  $\mu$  selon

$$c(\mu) = 2 \left( \frac{1}{\mu} + D\mu \right) \quad (7.36)$$

Nous avons ainsi deux branches de coefficients  $\mu$  dans cette fonction  $c(\mu)$  (voir la figure 7.6). Nous retrouvons également la vitesse minimale de l'argument sur la particule:  $c_{min} = 2\sqrt{D}$  qui est associé au coefficient de décroissance  $\mu_c = 1/\sqrt{D}$ .

Réciproquement un front évoluant à la vitesse  $c$  aura une queue avant superposition des deux exponentielles  $e^{-\mu_1 \xi}$  et  $e^{-\mu_2 \xi}$  vérifiant  $c(\mu_1) = c(\mu_2) = c$ . Nous comprenons aisément que l'exponentielle avec le coefficient  $\mu$  le plus faible sera dominante à grand  $\xi$ : ainsi seule la branche de gauche de la figure 7.6 intervient dans ce cas. Il nous reste cependant à choisir la vitesse sélectionnée parmi un continuum entier de vitesses autorisées. Ce problème est plus difficile que cette petite analyse.

---

Aronson D. & Weinberger H., (1978). *Adv. Math.*, **30**:33.

Bramson M., (1983). *Mem. of the Am. Math. Soc.*, **44**(285).

Ebert U. & Saarloos W. V. Front propagating uniformly into unstable states : universal algebraic rate of convergence of pulled fronts. preprint, 1999.

Murray J., (1989). *Mathematical biology*. Springer (Berlin).

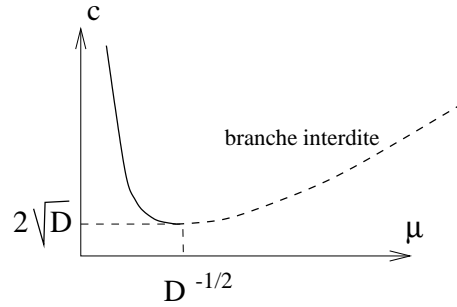


FIG. 7.6 – Représentation des deux branches de la relation vitesse ( $c$ ) -coefficient de décroissance du front ( $\mu$ ).

Remarquons également qu’il est possible, pour chaque fonction  $f(\phi_c)$ , d’effectuer une analyse similaire sur l’arrière du front, en linéarisant l’équation par rapport à  $1 - \phi_c(\xi)$ . Ce petit calcul permet de prédire la décroissance de  $1 - \phi_c(\xi)$  à l’arrière du front pour chaque vitesse  $c$ . Dans le cas de  $f(\phi_c) = \phi_c - \phi_c^2$ , nous trouvons que  $1 - \phi_c(\xi) \underset{\xi \rightarrow -\infty}{\sim} e^{\lambda \xi}$  avec  $\lambda = (\sqrt{c^2 + 4D} - c)/(2D)$ . Cependant cette décroissance dépend généralement du terme non linéaire choisi.

◇ *Sélection de la vitesse* Le problème de la détermination de la vitesse dans les deux branches de la figure 7.6 a été abordé à la fois par des méthodes rigoureuses dans certains cas (Aronson & Weinberger 1978, Bramson 1983) et également par des méthodes approchées plus générales parmi lesquelles le critère de la stabilité marginale (Van Saarloos 1989) et également des méthodes de renormalisation (Paquette, Chen, Goldenfeld & Oono 1994). Je vais ici essentiellement me baser sur les résultats de (Bramson 1983), bien que les résultats concernant la vitesse soient plus anciens (Aronson & Weinberger 1978). Un théorème précis sera donné ci-dessous. Le principal résultat est que pour toute condition initiale vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x, l=0) e^{\mu_0 x} = 0$  avec  $\mu_0 \geq \mu_c$  (c’est à dire une décroissance sur la branche de droite de la figure 7.6), la vitesse de la solution de front asymptotique est donnée par  $c^* = c_{min} = 2\sqrt{D}$ . Dans ce cas la solution  $\phi_{c^*}$  décroît à l’avant du front comme  $e^{-\mu_c \xi}$ . Par contre sur la branche de gauche, la vitesse est donnée par  $c(\mu_0)$  où la condition initiale décroît comme  $e^{-\mu_0 x}$ . Certaines conditions doivent cependant être imposées sur la non-linéarité. En particulier des non-linéarités faisant intervenir des dérivées de  $\phi$  peuvent induire une violation de ce résultat. On parle alors de “front poussé” (pushed front) par opposition aux “fronts tirés” lorsque la vitesse n’est pas déterminée par ces non-linéarités supplémentaires. Le théorème de BRAMSON donné ci-dessous permet de définir des conditions d’obtention de “fronts tirés”.

Aronson D. & Weinberger H., (1978). *Adv. Math.*, **30**:33.

Bramson M., (1983). *Mem. of the Am. Math. Soc.*, **44**(285).

Van Saarloos W., (1989). *Phys. Rev. A*, **39**:6367.

Paquette G., Chen L.-Y., Goldenfeld N., & Oono Y., (1994). *Phys. Rev. Lett.*, **72**:76.

### Corrections à la vitesse asymptotique

Nous venons ainsi de voir que toute une classe d'équations de type KPP avaient la même solution quelles que soient les non-linéarités dans (7.34) vérifiant les conditions données après cette équation, et quelle que soit la condition initiale pourvue qu'elle décroisse suffisamment vite à l'infini. Ce résultat fait penser à la notion d'universalité dans le contexte du groupe de renormalisation : cette analogie a motivé une approche de cette sélection par renormalisation dans un référentiel bougeant avec le front (Paquette et al. 1994). Cependant si nous effectuons une simulation numérique de l'équation (7.34), ou si nous étudions une situation expérimentale décrite par cette équation, il y a peu de chances que nous observions la vitesse asymptotique  $c^*$  prédite. En effet les corrections à cette limite sont très importantes dans la phase où la vitesse est "gelée" à la valeur  $c^*$ . Nous allons ici étudier ces corrections car nous verrons qu'elles sont cruciales dans l'étude de renormalisation qui nous intéresse.

Nous allons voir que non seulement la vitesse asymptotique est "universelle" mais aussi ses premières corrections, ce qui est remarquable. Ces résultats ont été obtenues par BRAMSON, et étendus très récemment dans une étude quasi-simultanée avec le travail que je présente dans ce chapitre (Ebert & Saarloos 1999). Le théorème essentiel, dû à BRAMSON, se formule comme suit dans le cas de l'équation (7.34) (voir la formule 1.26 de (Bramson 1983)) : la position  $m(l)$  du front à l'instant  $l$  est donnée par

$$m(l) = \begin{cases} \sqrt{D} (4l - \frac{3}{2} \ln l + \mathcal{O}(1)) & \text{pour } \mu > \mu_c = D^{-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{D} (4l - \frac{1}{2} \ln l + \mathcal{O}(1)) & \text{pour } \mu = \mu_c = D^{-\frac{1}{2}} \\ & \text{(sans préfacteur devant l'exponentielle)} \\ 2(D\mu + \mu^{-1})l & \text{pour } \mu < \mu_c = D^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (7.37)$$

Il est intéressant de noter que la correction dans le cas  $\mu = \mu_c$  est exactement celle que l'on obtient avec une équation KPP linéarisée (voir la suite du chapitre). Nous avons également négligé les corrections exponentielles à la position du front dans le cas  $\mu < \mu_c$ . Nous obtenons ainsi, lorsque  $\mu$  augmente, un gel à  $\mu = \mu_c$  de la vitesse asymptotique  $c^*$ , et un saut brutal des corrections universelles à cette vitesse. Les études récentes permettent également d'étudier la forme du front à une date  $l$  finie (Brunet & Derrida 1997, Ebert & Saarloos 1998, Ebert & Saarloos 1999).

#### ◇ *Forme du front*

D'après ces travaux, nous devons distinguer deux régions dans l'avant du front de la solution de l'équation KPP à la date  $l$ , si nous sommes dans la situation "gelée" (branche de droite de la figure 7.6). Dans ce cas, la fonction initiale décroît à grand  $x$  comme  $\phi(x, l=0) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\mu_0 x}$  avec  $\mu_0 > \mu_c$  (le cas  $\mu_0 = \mu_c$  est différent, et dépend du préfacteur devant l'exponentiel). Il est aisé de réaliser que si la solution à l'instant  $l$  converge vers la solution asymptotique dans la région juste à l'avant du front, appelée "intérieur" du front, cette convergence ne peut se propager jusqu'à une distance très grande devant le front

---

Ebert U. & Saarloos W. V. Front propagating uniformly into unstable states : universal algebraic rate of convergence of pulled fronts. preprint, 1999.

Brunet E. & Derrida B., (1997). *Phys. Rev. E*, **56**:2597.

Ebert U. & Saarloos W. V., (1998). *Phys. Rev. Lett.*, **80**:1650.

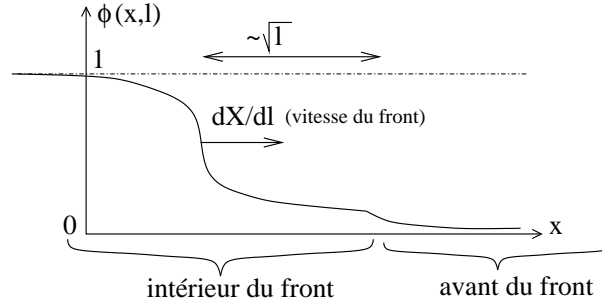


FIG. 7.7 – Représentation schématique d'une solution de l'équation KPP. Les régions d'intérieur du front et de front lointain (avant du front) ont été représentées.

où l'évolution de  $\phi$  est toujours déterminée par l'équation linéarisée, et la décroissance donnée par la condition initiale. Dans l'intérieur du front qui est de taille  $\sqrt{l}$  devant le front proprement dit, la solution converge (beaucoup plus rapidement que la vitesse (Ebert & Saarloos 1998)) vers la forme du front correspondant à la vitesse instantanée à la date  $l$ :  $\partial_l m(l) = c^* - \frac{3\sqrt{D}}{2l} + O(l^{-\frac{3}{2}})$  avec une forme du front correspondante:  $\phi(x, l) \simeq \phi_{\partial_l m}(x - m(l))$ . Par contre très à l'avant du front  $\phi(x, l) \simeq e^{-\mu_0(x-m(l))}$ , dans la région intermédiaire  $x - m(l) \gtrsim \sqrt{Dl}$  appelée front lointain, le front se comporte comme

$$\phi(x, l) \approx A \left( \frac{x - m(l)}{\sqrt{D}} + cte + O(l^{-\frac{1}{2}}) \right) e^{-\mu_c(x-m(l))} e^{-\frac{(x-m(l))^2}{8Dl}} \quad (7.38)$$

Ainsi se clôt notre survol des résultats concernant l'équation KPP, et dont nous allons maintenant avoir besoin.

### 7.3.5 Étude de la transition induite par le désordre à $T = 0$

Après cet intermède, revenons à notre modèle XY. Au point où nous l'avons laissée, notre étude avait montré que le comportement d'échelle de la loi de distribution  $P(z)$  pouvait être paramétrisé par une fonctionnelle  $G_l(x)$  qui vérifiait l'équation KPP comme équation de renormalisation. Nous pouvons donc maintenant utiliser notre connaissance des résultats sur les solutions de l'équation KPP pour remonter à la distribution  $P_l(z)$ . Cela nous permettra finalement d'étudier le diagramme des phases et les comportements critiques autour des transitions de ce diagramme. Nous n'étudierons dans cette thèse que le comportement critique à température nulle, qui est *a priori* le plus intéressant car différent des études précédentes, et révélateur de la physique de l'accrochage des défauts par le désordre de grande longueur d'onde. Nous allons commencer par transposer les résultats de la partie précédente dans le contexte de notre étude. Pour cela nous allons supposer que l'évolution avec  $l$  du coefficient de diffusion de l'équation (7.30) peut être négligé dans l'étude du comportement critique du modèle, ce que nous vérifierons dans notre étude de la transition.

Ebert U. & Saarloos W. V., (1998). *Phys. Rev. Lett.*, **80**:1650.

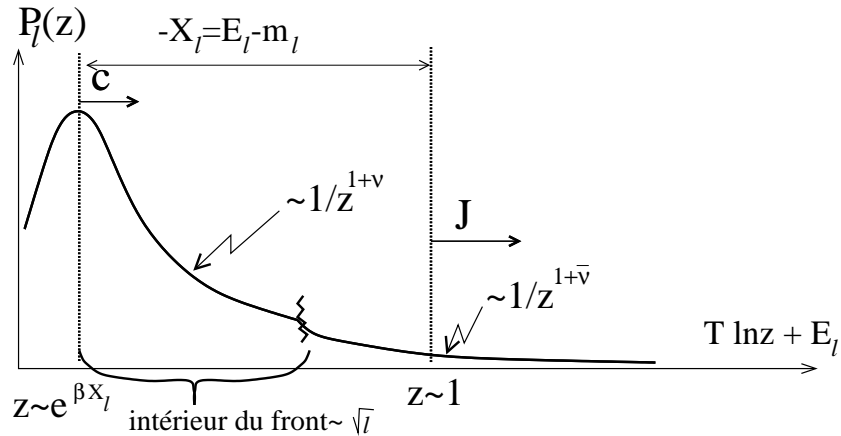


FIG. 7.8 – Forme de la distribution à basse température.

### Forme de la distribution $P(z)$

Avant toute chose commençons par remarquer qu’il est légitime d’utiliser les résultats précédents sur l’équation (7.34) car notre fonction  $G_l(x)$  vérifie bien les conditions aux bords (7.31) requises pour les conditions initiales des solutions de front de l’équation KPP. Pour pouvoir transposer les résultats de la partie 7.3.4 dans l’étude de la distribution  $P(z)$ , nous devons retourner à la définition de  $G_l(x)$  en fonction de  $P_l(z)$ . Ce lien s’exprime plus simplement à température nulle qu’à température finie : dans cette limite le passage d’une solution de l’équation KPP à  $P_l(z)$  correspond simplement à une dérivation. À température finie, nous pouvons également extraire des solutions de front les formes de la distribution.

#### ◊ Forme de la distribution à température nulle

À température nulle, d’après les conditions (7.31), la fonction  $G_l(x)$  décroît plus vite qu’une exponentielle à grand  $x$ . Nous savons donc qu’elle va converger vers une solution de front dont la position est donnée par  $m(l) = \sqrt{D} (4l - \frac{3}{2} \ln l + \mathcal{O}(1))$ . De plus nous savons également, d’après l’analyse à  $l$  fini de la forme de la solution de (7.34), que la queue de la fonction  $G_l(x)$  du côté de  $x \geq m(l)$  est composée de deux régions : une front intérieur et un front lointain. D’après (7.29),  $\tilde{P}_l(e)$  se déduit alors de  $G_l(x)$  à l’aide de la relation  $\tilde{P}(e) = \partial_x G(e + E_l)$ . La région autour du maximum de la distribution  $\tilde{P}_l(e)$  correspond donc naturellement à la région du front de la solution de l’équation KPP, et l’avant du front se transpose en la queue de la distribution du côté des faibles énergies de coeur  $e$ , c’est-à-dire l’analogue à température finie des grandes fugacités  $z$  : c’est la partie de  $\tilde{P}_l(e)$  qui nous intéresse physiquement : voir la figure 7.8. Le front solution de KPP est centré autour de la position  $x = m(l)$ , ce qui entraîne, d’après le décalage par  $E_l$  entre les deux fonctions, que la distribution  $\tilde{P}(e)$  est centrée en  $e = m(l) - E_l$  : sa vitesse peut donc être positive ou négative selon les croissances relatives de  $m(l)$  et  $E_l$ . Nous allons rediscuter ce point ci-dessous.

#### ◊ Forme de la distribution à basse température

La plupart de ces résultats se transposent à température finie avec la paramétrisation (7.33). Il est dans ce cas plus commode de travailler avec la fugacité  $z$  (qui n’a pas de sens

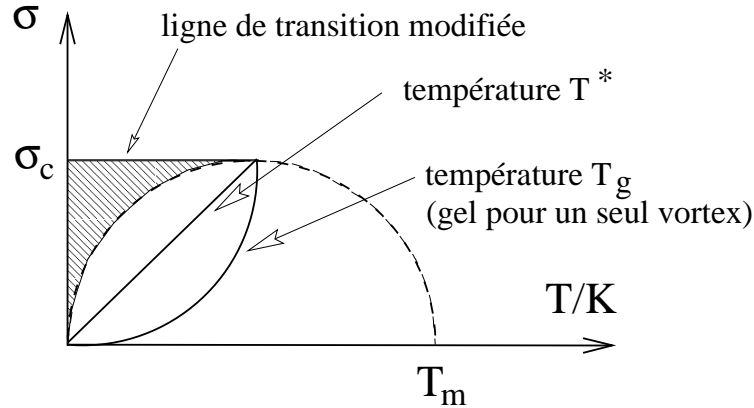


FIG. 7.9 – Représentation des deux températures  $T^*$  et  $T_g$  dans le diagramme des phases du modèle. La première sert à paramétrer la forme de  $P_l(z)$  alors que la seconde correspond à la température de transition de gel dans le modèle à un seul vortex.

à température nulle). D’après (7.33), la fonction  $G_l(x)$  initiale décroît à grand  $x$  selon

$$G_l(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\beta x}$$

Ainsi c’est l’inverse de la température  $\beta$  qui va jouer le rôle du paramètre  $\mu$  de l’étude des solutions de l’équation KPP. Nous savons qu’il existe alors une température de “gel”  $T_g$  définie par  $T_g = \sqrt{D} = J\sqrt{\sigma/2}$  où  $D$  est le coefficient de diffusion de l’équation (7.30). Lorsque  $T > T_g$ , la fonction  $G_0(x)$  décroît moins vite que  $e^{-x/T_g}$  : dans ce cas sa vitesse est donnée par  $c_\beta = 2(\beta^{-1} + D\beta)$  et  $G$  décroît comme  $e^{-\beta(x-m(l))}$  à l’avant du front. Cette décroissance est alors aussi celle de  $P_l(z)$ . Par contre dans la région  $T < T_g$  (voir la figure 7.9), la vitesse de la fonction  $G_l(x)$  à la date  $l$  se “gèle” à la valeur  $c_l^* = \sqrt{D} \left(4 - \frac{3}{2l} + \mathcal{O}(l^{-\frac{3}{2}})\right)$ . Dans ce cas nous savons que, comme à température nulle, la queue de la distribution  $P_l(z)$  comporte trois régions : une région intérieure juste à l’avant du front de taille  $\sqrt{l}$ , une région intermédiaire et un front lointain. D’après (7.38), la distribution  $P_l(z)$  décroît comme  $P_l(z) \sim z^{-(1+\nu)}$  où  $\nu = T/T_g$ . Dans la région lointaine, la fonction  $G_l(x)$  évolue selon l’équation KPP linéarisée : la décroissance de  $P_l(z)$  se fait dans cette région avec un exposant différent :  $P_l(z) \sim P_l(1)z^{-(1+\bar{\nu})}$  où  $\bar{\nu} = T/T^*$  et la température  $T^*$  est définie par  $T^* = 2\sigma J$  (fig. 7.9). La valeur correspondant à  $z \sim 1$ , qui se trouve dans cette région à basse température, est donnée par  $P_l(1) \sim \exp\left[\left(2 - \frac{1}{4\sigma}\right)l\right]$ , qui est le petit paramètre de notre étude.

Nous sommes maintenant capable de déterminer le diagramme des phases. D’après ce que nous avons vu précédemment, pour une distribution étroite, la transition est localisée sur la ligne délimitant deux régions : celle où la valeur moyenne de la fugacité  $\bar{z}$  décroît à zéro : la phase XY ; et celle où cette valeur augmente : la phase désordonnée. Dans notre cas où la distribution  $P_l(z)$  est large, ce qui est manifestement le cas pour  $T < T^*, T_g$ , la physique est déterminée par la densité  $P_l(1)$  de sites où  $z \sim 1$ . C’est donc son comportement avec l’échelle qui va déterminer la nature de la phase. Or nous connaissons maintenant l’évolution de cette densité : elle est directement reliée à la vitesse de la loi de distribution  $P_l(z)$ . Si cette vitesse est positive, la distribution et son maximum se translatent du côté des grands  $z$  : ainsi la valeur de  $P_l(1)$  ne peut qu’augmenter puisque le

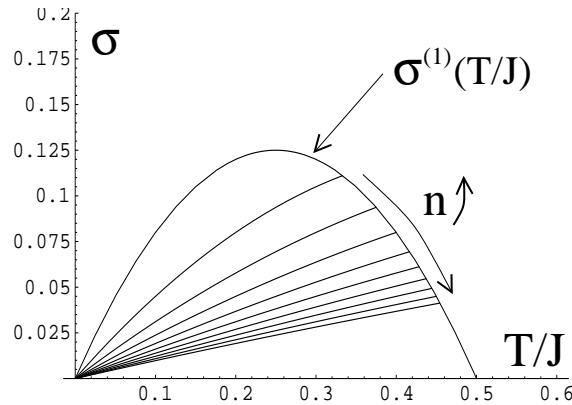


FIG. 7.10 – Représentation dans le diagramme des phases  $T/J, \sigma$  des lignes de divergence à grande échelle des moments successifs  $\langle z^n \rangle$  de la distribution  $P_l(z)$ .

maximum de la distribution se rapproche de  $z = 1$ . Nous sommes dans ce cas dans une phase topologiquement désordonnée. Dans le cas contraire, la vitesse négative de la distribution entraîne une décroissance de  $P_l(1)$ : nous sommes dans la phase XY, avec des défauts gelés (voir le tableau 7.1). D’après le travail ci-dessus, cette vitesse de la loi  $P_l(z)$  vaut  $v = \partial_l(m(l) - E_l) = \partial m_l - J = J(\sqrt{8\sigma} - 1)$ . À basse température, c’est-à-dire, d’après ce que nous venons de voir, dès que la distribution  $P_l(z)$  n’a plus de premier moment, la diagramme des phases est donc le suivant (fig. 7.9): à faible désordre  $\sigma < \sigma_c = \frac{1}{8}$  nous avons une phase XY et à fort désordre  $\sigma > \sigma_c$  une phase désordonnée. Ces résultats, obtenus par une analyse plus cohérente, confirment remarquablement les prédictions de NATTERMANN et ses collaborateurs (Nattermann et al. 1995, Korshunov & Nattermann 1996a, Tang 1996, Scheidl 1997). Nous pouvons maintenant, en outre, étudier le comportement critique associé à cette nouvelle transition. Auparavant il nous faut également montrer que notre nouvelle méthode permet de retrouver le diagramme des phases conventionnel à température plus élevée.

Nature de la phase	Vitesse de $P_l(z)$	Évolution de $\partial_l P_l(1)$
Phase XY “gelée”	$< 0$	$\searrow$
Phase désordonnée	$> 0$	$\nearrow$

TAB. 7.1 – Tableau rappelant le lien entre la vitesse  $v = \partial_l m(l) - J$  et la nature de la phase à basse température.

◇ *Forme de la distribution autour de  $T_m$*

Si nous revenons à la définition (7.33), nous pouvons formellement développer  $G_l(x)$  en

Nattermann T., Scheidl S., Korshunov S., & Li M., (1995). *J. Phys. I (France)*, **5**:565.

Korshunov S. & Nattermann T., (1996). *Phys. Rev. B*, **53**:2746.

Tang L., (1996). *Phys. Rev. B*, **54**:3350.

Scheidl S., (1997). *Phys. Rev. B*, **55**:457–471.



puissance de la fugacité  $z$ . Nous obtenons

$$G_l(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle z^n \rangle_{P_l(z)} e^{-n\beta(x-E_l)}$$

où  $\langle z^n \rangle_{P_l(z)}$  correspond au  $n^{\text{ième}}$  moment de  $P_l(z)$ . En reportant ce développement dans l'équation KPP (7.30), selon laquelle  $G_l(x)$  évolue, et en identifiant terme à terme les facteurs des exponentielles  $e^{-n\beta x}$  nous en tirons une série d'équations de renormalisation pour les moments de la loi de distribution  $P_l(z)$ :

$$\begin{aligned} \partial_l \langle z^n \rangle &= (2 - n\beta J + \sigma(n\beta J)^2) \langle z^n \rangle \\ &+ \int dz' dz'' [(z' + z'')^n - (z')^n - (z'')^n] P_l(z') P_l(z'') \end{aligned} \quad (7.39)$$

En négligeant le terme quadratique en  $P_l(z)$ , nous obtenons une série de courbes  $\sigma^{(n)}(J) = (T/nJ) - 2(T/nJ)^2$  correspondant aux lignes délimitant les régions où  $\langle z^n \rangle$  diverge avec l'échelle (ce qui correspond à une loi relativement large). La courbe  $\sigma^{(1)}(J)$  redonne exactement le diagramme des phases de (Rubinstein et al. 1983) comme nous pouvions nous y attendre: elle correspond à la divergence du premier moment de  $P_l(z)$ , c'est-à-dire la valeur moyenne de la fugacité  $z$ . En regardant la figure 7.10 nous nous apercevons qu'en baissant la température où en augmentant le désordre à l'intérieur de la région d'existence de la phase XY, la distribution de fugacités  $P_l(z)$  s'élargit progressivement jusqu'à perdre son premier moment au delà de  $\sigma^{(1)}(J)$ .

### Transition à température nulle

Revenons maintenant à la transition à température nulle qui intervient lorsque la vitesse linéaire s'annule: le point  $z = 1$  se trouve alors dans la région intérieure du front qui croit comme  $\sqrt{l}$ . Nous pouvons alors développer les équations (7.32) en puissance de  $P_l(1)$ , et ne garder que les termes d'ordre  $P_l^2(1)$ . Pour cela nous appelons  $h(x - m(l)) = G_l(x)$  la solution de front de l'équation KPP. Les équations (7.32) se formulent, après réindexation de intégrales, selon

$$\partial_l \sigma = \frac{8c_1}{c_2^2} \int du' h'(u') \int_{-u'-2(m(l)-E_l)} du'' h'(u'') \quad (7.40a)$$

$$\partial_l (J^{-1}) = \frac{8c_1}{c_2^2} \int du h'(u) h'(-u - 2(m(l) - E_l)) \quad (7.40b)$$

À grand  $l$ , ce qui correspond au grand temps dans l'équation KPP, le terme dominant de ces deux intégrales sera donc

$$\partial_l J^{-1} = -\frac{8d'}{d^2} h'_l(-2X_l) \quad ; \quad \partial_l \sigma = \frac{8d'}{d^2} h(-2X_l)$$

Ces deux équations sont bien d'ordre  $P_l^2(1)$  comme prévu. Nous pouvons dès ici vérifier notre hypothèse selon laquelle les variations du coefficient de diffusion  $D$  sont négligeables. D'après ces deux équations, nous pouvons donc écrire l'équation que vérifie  $D = \sigma J^2/2$  :

$$\partial_l(2D) = (8c/d^2)J^2h(-2X_l)(\sqrt{8\sigma} - 1 - 3\sqrt{\sigma/2}\frac{\ln l}{l})$$

La forme (7.38), correspondant à la région intermédiaire du front où se trouve le point  $x - m(l) = 2E_l - m(l)$ , a été utilisée pour la détermination de ce comportement d'échelle. Cette dépendance en  $l$  peut donc être négligée autour de la transition  $\sigma = 1/8$ .

Pour obtenir le comportement critique, il ne nous reste plus qu'à exprimer à la fois la valeur de la solution de front  $h(x)$  et de sa dérivée  $h'(x)$  au point  $x = 2(E_l - m(l))$ . Pour cela nous allons utiliser une nouvelle variable  $g$  qui correspond à  $g = P_l(1)$ , et projeter le flot de renormalisation sur le plan  $(\sigma, g)$  ce qui est suffisant pour déterminer le comportement critique. D'après la forme du front (7.38), nous avons ainsi  $g \sim h(E_l - m(l)) \sim e^{-\frac{E_l - m(l)}{\sqrt{D}}}$  et  $h(2(E_l - m(l))) \sim g^2$ . En reportant dans la première équation ci-dessus :

$$\partial_l \sigma = g^2 + \mathcal{O}(g^3) \quad (7.41a)$$

Si nous négligeons les variations de  $J$ , le comportement d'échelle de  $g \sim e^{-\frac{E_l - m(l)}{\sqrt{D}}}$  est donc directement relié à la vitesse  $v = J - \partial_l m(l)$ , et donc à la vitesse du front de KPP. De plus nous devons tenir compte des corrections d'ordre  $1/l$  dans l'équation pour  $\partial_l g$  : dans notre cas ce sont elles qui déterminent le comportement critique de la nouvelle classe d'universalité de la transition. De ces corrections  $\partial_l m(l) = \sqrt{D}(4 - \frac{3}{2l} + \mathcal{O}(l^{-\frac{3}{2}}))$  nous tirons

$$\partial_l g = \left(16(\sigma - \sigma_c) - \frac{3}{2l}\right) g \quad (7.41b)$$

où  $\sigma_c = \frac{1}{8}$ . Le coefficient  $\frac{3}{2}$  dans cette équation provient directement de la correction à la vitesse de la solution de l'équation KPP. Le comportement critique associé à ces deux équations (7.41) correspond à  $g(l) \sim l^{-\frac{3}{2}}$  et une longueur de corrélation  $\xi \sim \exp(cte/|\sigma - \sigma_c|)$ . Ces caractéristiques sont différentes de celles des autres transitions que nous avons rencontrées jusqu'ici. Elles sont associées à une nouvelle classe d'universalité de transitions "de type KOSTERLITZ-THOULESS" induites ici par le désordre et non par les fluctuations thermiques (transition de température nulle).

### Conclusion et universalité autour de la transition

Ainsi, si nous résumons le travail que nous venons de faire, nous avons dérivé une renormalisation de la loi de distribution des fugacités  $P_l(z)$  et des constantes  $\sigma$  et  $J$ . Cette dérivation peut paraître complexe au premier abord, mais cette complexité est reliée et inhérente à la difficulté de décrire analytiquement une situation physique fortement inhomogène. Nous avons utilisé les équations de renormalisation obtenues pour étudier le comportement critique de la transition à température nulle, qui présente des caractéristiques nouvelles et différentes des résultats des études précédentes.

Dans notre étude, la loi de distribution  $P_l(z)$  est reliée à une solution de front  $G_l(x)$  de l'équation KPP. Le gel de la vitesse de ce front, caractéristique du problème de la sélection

de la vitesse, intervient à une température  $T_g$  dans le diagramme des phases (voir la figure 7.9) qui est reliée à une transition de gel dans le problème à un vortex que nous allons maintenant étudier. Cependant, le centre de  $\tilde{P}_l(e)$  étant décalé de  $E_l$  par rapport au front  $G(x - m(l))$ , la “vitesse” (par rapport à l’échelle) de  $P_l(z)$  n’est pas brutalement modifiée à  $T_g$  : cette ligne ne constitue pas *a priori* une transition pour le modèle XY ou le gaz de Coulomb. La transition entre les phases XY et désordonnée n’intervient que lorsque le comportement avec l’échelle  $l$  de la densité de sites favorables se modifie, c’est-à-dire lorsque la vitesse  $v$  de la distribution  $P_l(z)$  change de signe (voir le tableau 7.1). Cette transition correspond à la prolifération de défauts, et n’intervient que pour  $\sigma = \sigma_c$  et  $T < T_m/2$  (figure 7.9). Par contre au dessus de  $T_g$  nous pouvons reprendre l’analyse de RUBINSTEIN et al. qui est contenu dans notre nouvelle approche.

Par ailleurs ce lien entre le comportement critique à la transition  $T = 0$  et  $\sigma = \sigma_c$  et la sélection de la vitesse du front solution de l’équation KPP est assez exceptionnel : d’après la littérature récente sur ces solutions de front (Ebert & Saarloos 1999), la correction (7.37) à la vitesse du front dans le régime “gelé” est universelle pour les fronts “tirés”. En particulier cette correction ne dépend pas des détails de la non linéarité  $f(\phi)$  dans l’équation KPP (7.34). Or, d’après la dérivation de cette équation comme équation de renormalisation, ce terme non linéaire est relié à la contribution de la *fusion d’environnements* associés à des fugacités  $z'$  et  $z''$  indépendantes, et la forme précise de cette contribution dépend de la régularisation choisie. Ainsi l’invariance par rapport à la nonlinéarité de la correction  $\frac{3}{2l}$  de la vitesse, et donc du comportement critique (7.41), induit l’universalité par rapport à la régularisation (schéma de renormalisation) choisi. Ce lien entre l’universalité au sens de la renormalisation, et la généralité du mécanisme de sélection de la vitesse d’un front se propageant dans un état instable est assez remarquable. Nous reviendrons sur cette notion d’universalité dans la suite de ce chapitre. Nous allons en effet nous intéresser à un problème simplifié à une particule afin de mieux comprendre cette connexion entre fronts et lois de distribution, et en particulier la signification de la température  $T_g$ .

Auparavant nous pouvons revenir sur les études précédentes et les comparer avec notre nouvelle approche. En particulier le travail de SCHEIDL peut être réinterprété dans le cadre de notre renormalisation fonctionnelle. Dans ce travail, la distribution de  $P_l(z)$  est supposée gaussienne à toutes les échelles. En négligeant la fusion, il est alors possible de définir des fugacités de dipôles et non plus de charges :  $z_{dip}^+ = z'_+ z''_-$  où  $z'_\pm, z''_\pm$  sont les fugacités des charges (dans notre formalisme), et de même  $z_{dip}^- = z'_- z''_+$ . Les résultats de Scheidl sont alors retrouvés si on choisit une loi de distribution pour la fugacité des charges

$$P_{scheidl}(z_+, z_-) = \delta(y - y_l) \exp(-\beta^2 \frac{v^2}{4}) \quad \text{avec} \quad z_\pm = y e^{\beta \pm v}$$

La largeur  $\hat{E}_l$  de la distribution du désordre local  $v$  vérifie l’équation de renormalisation  $\partial_l \hat{E} = \sigma(\beta J)^2$ , et la fugacité uniforme  $\partial_l y_l = \beta J$ . Dans cette approximation, nous retrouvons également deux régimes XY : à haute température  $\hat{E}_l$  croît moins vite que  $y_l$  ne décroît vers zéro : la thermodynamique de la phase peut être décrite simplement par  $y_l$ . À basse température  $T < T^*$  il en est différemment : en l’absence de fusion, donc de terme non

---

Ebert U. & Saarloos W. V. Front propagating uniformly into unstable states : universal algebraic rate of convergence of pulled fronts. preprint, 1999.

linéaire dans (7.30) ( $F(\phi) = \phi$ ), la fonction  $G$  est non bornée et croît avec  $l$ , ce qui correspond à  $\int P \sim e^{2l}$ . En effet, dans ce cas le nombre de site ne diminue pas avec l'échelle, ce qui entraîne ce facteur  $e^{2l}$  proportionnel à l'aire associée à chaque distribution. La distribution de l'énergie de coeur  $e$  reste gaussienne et vérifie

$$\tilde{P}_l(e) \simeq \frac{e^{2l}}{J\sqrt{\sigma l}} e^{-\frac{(e-2Jl)^2}{8\sigma J^2 l}}$$

Dans ce cas la densité  $P_l(1)$  se comporte comme  $P_l(1) \sim e^{(4-\frac{2}{\sigma})l}$  et la transition se produit donc toujours pour  $\sigma = \sigma_c$ . Cependant le passage d'un front normé à la propagation d'une fonction divergente par diffusion modifie la correction à la vitesse (Cette propriété semble être naturelle dans le contexte de la propagation de front<sup>7</sup>): de  $\frac{3}{2l}$  celle-ci devient  $\frac{1}{2l}$  et change le comportement critique. Cette interprétation du travail de SCHEIDL permet de mieux comprendre l'importance cruciale de la fusion d'environnements dans la description du comportement échelle de la loi de distribution (normée!) des fugacités. L'analyse de ce chapitre diffère également en ce sens, et par ses résultats, des études de (Tang 1996, Korshunov & Nattermann 1996a). La description d'une loi de distribution complète, que j'ai ici présentée, s'avère indispensable pour déterminer qualitativement et quantitativement le comportement thermodynamique de ce modèle XY désordonné.

## 7.4 Transition de gel et modèle à un vortex

Nous venons ainsi de découvrir, dans le contexte du groupe de renormalisation, une connexion entre la description d'une loi de distribution d'une variable aléatoire et celle d'un front se propageant en une dimension selon l'équation KPP. En fait il était déjà apparu une connection similaire, qui comme nous allons le voir n'est pas étrangère à la nôtre: en étudiant le modèle d'un polymère dirigé en présence d'énergies aléatoires sur un arbre de Cayley, DERRIDA et SPOHN avaient remarqué un lien entre la loi de distribution de l'énergie libre de ce polymère et les solutions de l'équation KPP (Derrida & Spohn 1988). Afin d'approfondir un peu tous ces liens, nous allons nous concentrer maintenant sur le modèle que nous avons déjà rencontré initialement: celui d'un seul vortex dans le modèle XY. De façon plus générale, nous allons considérer le problème d'une particule (un vortex) en dimension  $d$ , dans un potentiel désordonné. En fonction du type de corrélation de ce potentiel, la physique est différente: du cas décorréolé décrit par le REM, aux corrélations linéaires (modèle de Sinai) en passant par les corrélations logarithmiques qui nous intéressent ici.

Notre intérêt essentiel se portera bien sûr sur le cas des corrélations logarithmiques en dimension deux. Nous verrons qu'au delà du contexte précédent, ce modèle est relié aux propriétés de localisation de la fonction d'onde critique d'un fermion de Dirac bidimensionnel dans un champ magnétique aléatoire. La technique précédente peut également être

---

7. Wim Van Saarloos, communication privée.

Tang L., (1996). *Phys. Rev. B*, **54**:3350.

Korshunov S. & Nattermann T., (1996). *Phys. Rev. B*, **53**:2746.

Derrida B. & Spohn H., (1988). *J. Stat. Phys.*, **51**:817–840.

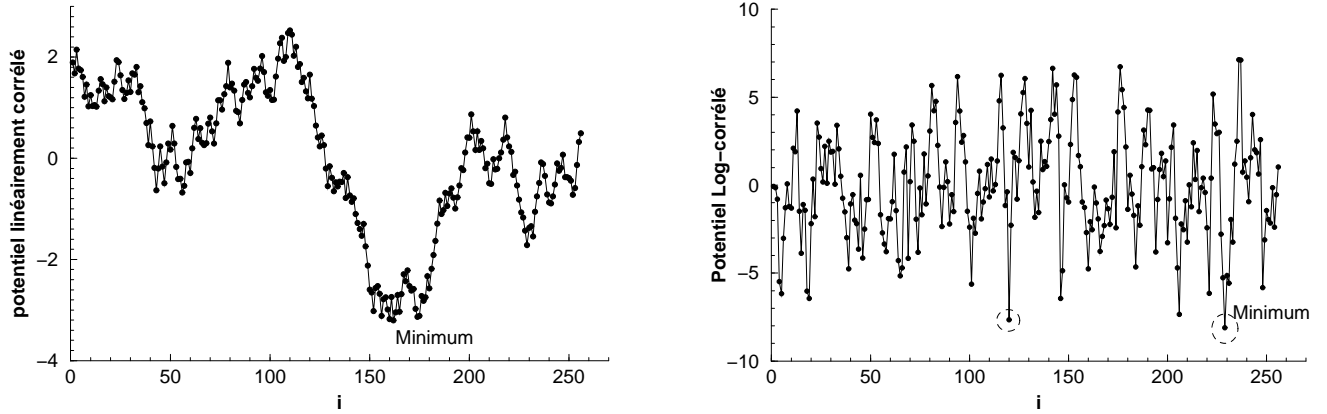


FIG. 7.11 – Réalisation typique d'un désordre corrélé linéairement (à gauche) et logarithmiquement (à droite) en dimension un. La présence de minima éloignés quasi-dégénérés dans le cas logarithmique contrairement au cas linéaire laisse supposer une physique très différente à basse température dans les deux modèles.

appliquée à ce modèle, et permet *via* l'équation KPP d'établir un lien avec le polymère dirigé sur l'arbre de Cayley de DERRIDA et SPOHN. Finalement nous discuterons rapidement de ce cas des corrélations logarithmiques dans un contexte plus général à la fin du chapitre.

### 7.4.1 Une particule dans un potentiel désordonné $d$ -dimensionnel

Nous retournons donc au problème d'une particule que nous avons rencontré au paragraphe 7.2.2. Cependant contrairement à ce cas précédent d'un vortex, nous allons laisser de côté l'énergie élastique de création d'un défaut  $E_0 \sim J \ln L$  qui ne dépend pas du site, et ne va donc pas modifier les propriétés qui nous intéressent ici. Nous avons déjà vu que sa présence modifiait cependant le diagramme des phases : il translatait la ligne  $T_g$  du diagramme 7.9 en la ligne de transition  $\sigma = \sigma_c$ . Étant ici intéressés par les propriétés induites par le désordre et en particulier les événements rares, nous pouvons donc oublier ce terme pour l'instant.

Nous considérons donc une particule en dimension  $d$  (choisie égale à un pour l'instant), dont la fonction de partition est définie par

$$Z[V] = \sum_{\mathbf{r}} e^{-\beta V(\mathbf{r})} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (7.42)$$

Nous allons nous intéresser au cas du potentiel corrélé logarithmiquement. En taille finie, ce potentiel est défini par

$$\overline{V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}')} = -\sigma \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + a^2}{L^2} \quad (7.43)$$

ce qui correspond à

$$\overline{(V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}'))^2} \sim 4\sigma \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \quad \text{pour} \quad a \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll L \quad (7.44)$$

$a$  joue ici le rôle d'un cut-off aux courtes distances, et  $L$  est la taille du système.

## 7.4.2 Renormalisation du problème à une particule en dimension $d$

Nous allons ici reprendre la renormalisation que nous avons rencontrée précédemment et l'appliquer au problème d'une particule en taille finie, en dimension  $d$  quelconque. L'étude de ce modèle présente quelques différences par rapport à celle du gaz de Coulomb : en particulier nous ne pouvons plus faire ici appel à la neutralité puisqu'il ne reste qu'une seule charge dans l'échantillon. En contrepartie le modèle doit dans ce cas être défini en taille finie pour éviter l'annulation de l'énergie libre de la particule. De plus, dans ce cas particulier, la méthode des répliques n'est pas nécessaire : nous pouvons effectuer l'ensemble de la renormalisation pour un moment d'ordre  $m$  fini.

### Moments de la fonction de partition et régularisation

Ainsi nous allons considérer l'ensemble des moments  $\overline{Z^m}$  de la loi de distribution  $P[Z]$  de la fonction de partition (7.42). Ces moments s'écrivent d'après (7.42)

$$\overline{Z^m} = \int \frac{d^d \mathbf{r}_1}{a^d} \dots \frac{d^d \mathbf{r}_m}{a^d} e^{\frac{\beta^2}{2} \overline{(\sum_i V(\mathbf{r}_i))^2}} \quad (7.45)$$

où les intégrales sont supposées être étendues à tout l'échantillon de taille  $L$ . Le corrélateur dans l'exponentielle peut se développer en utilisant l'expression (7.43) pour les corrélations de  $V$  :

$$\overline{\left( \sum_{i=1}^m V(\mathbf{r}_i) \right)^2} = \sum_i \overline{V^2(\mathbf{r}_i)} + \sum_{i \neq j} \overline{V(\mathbf{r}_i)V(\mathbf{r}_j)} \quad (7.46)$$

$$= -\sigma \left( m^2 \ln \left( \frac{L}{a} \right) + \sum_{i \neq j} \ln \left( \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{a} \right) \right) \quad (7.47)$$

Nous choisissons maintenant une régularisation particulière pour chaque moment  $\overline{Z^m}$ , qui consiste à ordonner les  $m$  charges de l'expression précédente en *colonnes* de taille  $a$ . Pour être plus précis, nous associons à chaque charge située en  $\mathbf{r}_i$  son indice de réplique  $i$ . Nous pouvons alors considérer que la charge d'indice  $i$  est une charge vectorielle à  $m$  composantes dont seule la  $i^{\text{ème}}$  est non nulle :  $\mathbf{n}(\mathbf{r}_i) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . L'intégrale de (7.45) doit alors être formulée plus précisément : dans l'expression (7.47), nous avons implicitement supposé que deux charges  $n_i$  et  $n_j$  étaient distantes d'au moins  $a$ , faute de quoi le deuxième terme de (7.47) s'annule et les deux charges n'interagissent plus. Nous adoptons la convention selon laquelle dès que deux charges  $i$  et  $j$  sont plus proches que  $a$  l'une de l'autre :  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < a$ , elles constituent dans la nouvelle régularisation une nouvelle charge vectorielle avec maintenant *deux composantes non nulles* : les composantes  $i$  et  $j$  :  $\mathbf{n} = (0, \dots, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ . Bien sûr nous pouvons alors avoir des charges à 2, 3, ...  $m$  composantes non nulles. Dans cette nouvelle régularisation, le moment ci-dessus se réécrit comme une somme sur toutes les configurations différentes de telles charges vectorielles, avec la condition  $\sum_\alpha \sum_b n_\alpha^b = m$  où

$\alpha$  indexe les charges vectorielles et  $b$  leurs composantes :

$$\overline{Z^m} = \left(\frac{L}{a}\right)^{\beta^2 \sigma m^2} \sum_{\{n_\alpha^b\}} \prod_{\alpha} \int_{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta| \geq a} \frac{d^d \mathbf{r}_\alpha}{a^d} \exp\left(-\beta^2 \sigma 2 \sum_{\alpha < \beta} \sum_{b,c} n_\alpha^b n_\beta^c \ln \frac{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}{a}\right) \quad (7.48)$$

L'interaction dans l'exponentielle ne dépend plus, pour chaque charge vectorielle, que de la somme de ses composantes  $n_\alpha = \sum_b n_\alpha^b$ . En introduisant des fugacités  $Y[\mathbf{n}_\alpha]$  pour ces charges vectorielles, qui pour l'instant sont égales à 1, nous obtenons l'écriture finale de chaque moment :

$$\overline{Z^m} = \left(\frac{L}{a}\right)^{\beta^2 \sigma m^2} \sum_{\{n_\alpha^b\}} \prod_{\alpha} Y[\mathbf{n}_\alpha] \int_{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta| \geq a} \frac{d^d \mathbf{r}_\alpha}{a^d} \exp\left(-\beta^2 \sigma 2 \sum_{\alpha < \beta} n_\alpha n_\beta \ln \frac{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}{a}\right) \quad (7.49)$$

Nous pouvons maintenant renormaliser avec les techniques habituelles ce gaz de Coulomb inhabituel.

## Renormalisation

Cette renormalisation à la *Kosterlitz* procède en deux temps contrairement à celle d'un gaz neutre. En effet, toutes les charges étant du même signe (composante +1), il n'est plus possible d'avoir de l'annihilation de charges, et donc de l'écrantage d'un potentiel coulombien. Par contre la fusion de charges est toujours possible. Nous commençons donc par incrémenter infinitésimalement le cut-off  $a \rightarrow \tilde{a} = ae^{dl}$ . Dans la fonction de partition (7.49), deux contributions différentes doivent être prises en compte.

La mesure d'intégration produit une contribution habituelle

$$Y[\mathbf{n}_\alpha] \rightarrow Y[\mathbf{n}_\alpha] e^{d \cdot dl}$$

et un terme supplémentaire par rapport au gaz de Coulomb neutre dans la limite thermodynamique :

$$\left(\frac{L}{a}\right)^{\beta^2 \sigma m^2} \rightarrow \left(\frac{L}{\tilde{a}}\right)^{\beta^2 \sigma m^2} e^{dl(\beta^2 \sigma m^2)}$$

D'un autre côté l'apparition explicite de  $a$  dans l'interaction logarithmique induit une autre correction. Cependant nous ne pouvons plus utiliser ici la neutralité du gaz pour reformuler ce terme en une expression locale. Il faut utiliser à la place la relation

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} = m \quad \Rightarrow \quad \sum_{\beta \neq \alpha} n_{\beta} = m - n_{\alpha}$$

Avec cette égalité, la contribution du cut-off dans l'interaction logarithmique s'écrit

$$e^{-2dl\beta^2\sigma\sum_{\alpha<\beta}n_\alpha n_\beta} = e^{-\beta^2\sigma dl} e^{\beta^2\sigma\sum_{\alpha}n_\alpha^2}$$

Le premier facteur annule exactement le terme supplémentaire dans la reparamétrisation ci-dessus.

◇ *Équations de renormalisation finales*

La fusion, quant à elle, se formule de façon identique, et nous obtenons les équations de renormalisation pour les fugacités :

$$\partial_l Y[n_\alpha] = (d + \beta^2\sigma) Y[n_\alpha] + \frac{S_{d-1}}{2} \sum'_{n_1^\alpha + n_2^\alpha = n_\alpha} Y[n_1] Y[n_2] \quad (7.50)$$

où la somme primée compte toutes les paires de charges autorisées une seule fois.  $S_{d-1}$  est le volume de la sphère unité en dimension  $d$ .  $\sigma$  n'est pas renormalisée.

### Passage à l'équation KPP

En analogie avec le travail sur le modèle XY présenté précédemment, nous choisissons maintenant une paramétrisation pour les fugacités en fonction d'une fonction  $\Phi(z)$  qui ne dépend plus maintenant que d'une seule variable (il n'y a plus de charge négative) :

$$Y[n_\alpha] = \int dz \Phi_l(z) z^{n_\alpha} = \int du \tilde{\Phi}_l(u) e^{\beta n_\alpha u}$$

Les différents termes de l'équation de renormalisation des fugacités  $Y(\mathbf{n})$  se traduisent alors dans ce nouveau formalisme en

$$n_\alpha^2 Y_{n_\alpha} = \int du e^{\beta n_\alpha u} (\beta^{-1} \partial_u)^2 \tilde{\Phi}_l(u) \quad (7.51)$$

$$\sum'_{n_1^\alpha + n_2^\alpha = n_\alpha} Y[n_1] Y[n_2] = \int_{z', z''} \Phi_l(z') \Phi_l(z'') \delta(z - z' - z'') - 2\mathcal{N} \Phi_l(z) + \delta(z) \mathcal{N}^2 \quad (7.52)$$

où  $\mathcal{N}$  est la norme de la fonction  $\Phi$  :  $\mathcal{N} = \int_z \Phi_l(z)$ . En se restreignant aux valeurs positives de  $z$  et en se plaçant dans la limite où  $\mathcal{N}$  a déjà convergé vers sa limite  $\mathcal{N} = 2d/S_{d-1}$ , nous pouvons introduire une loi de distribution  $P_l(z)$ , définie à partir de  $\Phi_l$  par la relation  $P_l(z) = \mathcal{N}^{-1} \Phi_l(z)$ . L'équation de renormalisation de  $P_l(z)$  s'écrit :

$$\partial_l \tilde{P}_l(u) = \sigma \partial_u^2 \tilde{P} + 2(d-1) \tilde{P}(u) + d \int dz' dz'' P_l(z') P_l(z'') \delta(z - (z' + z'')) \quad (7.53)$$

Nous pouvons alors utiliser la même paramétrisation que précédemment pour obtenir l'équation KPP :

$$G_l(x) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} du \tilde{P}(u) e^{-e^{\beta(u-x)}} \quad (7.54)$$



qui vérifie l'équation en fonction de l'échelle :

$$\partial_l G = \sigma \partial_x^2 G + d G(1 - G) \quad (7.55)$$

Nous remarquons ici deux différences avec l'obtention de l'équation KPP dans le cadre du modèle XY. La première est qu'en l'absence de charges négatives, l'équation KPP est obtenue directement, sans hypothèse concernant la queue de la distribution : la loi de fusion est directement celle qui correspond à l'équation KPP :  $z' + z'' \rightarrow z$ . Nous devons cependant tempérer ce qui vient d'être dit : en l'absence de renormalisation de  $\sigma$ , la densité  $P_l(1)$  n'intervient plus directement dans les équations de renormalisation. Nous ne pouvons donc plus justifier *a priori* la nécessité d'une renormalisation perturbative en  $Y$ , qui correspondait à une renormalisation perturbative en  $P_l(1)$ . Cette renormalisation est cependant destinée à décrire correctement les queues de la distribution du désordre local  $v_r$  à l'échelle  $l$ . Si la physique que nous obtenons dépend crucialement du comportement de ces queues de distribution, notre approche sera validée *a posteriori*. La deuxième remarque qu'il est possible de faire concerne la procédure technique. Dans notre démarche sur ce modèle à une particule, nous n'avons pas utilisé de limite  $m \rightarrow 0$  : toute la dérivation a été faite à  $m$  fini. Nous avons alors trouvé une distribution dont le comportement d'échelle reproduit le comportement d'échelle de tous ces moments. Cependant ceci ne prouve pas du tout l'unicité de cette distribution. Ainsi les résultats que nous allons présenter dépendent de cette hypothèse concernant le lien entre ces moments et la loi de distribution associée.

### Résultats : distribution de la fonction de partition

Pour utiliser l'approche de renormalisation précédente, nous éliminons les petites échelles suivant ce schéma, jusqu'à se retrouver avec un seul site dans l'échantillon :  $ae^{l^*} = L$ . La fonction de partition s'exprime alors simplement comme la fugacité du dernier site où se trouvent toutes les charges :  $\overline{Z^m} \sim Y[n^*] = \overline{z^m(l^*)}$  où  $z$  est moyenné sur la distribution  $P_{l^*}(z)$ . Sachant que cette égalité est vérifiée pour tout  $m$ , nous avons égalité entre tous les moments de la loi de distribution de  $Z$  :  $P[Z]$  et tous les moments de la loi de distribution à l'échelle  $l^*$  de  $z$ . Nous faisons alors l'hypothèse que ces deux lois de distribution sont égales. En utilisant la paramétrisation suivante du logarithme (Derrida & Spohn 1988) :

$$\frac{1}{\beta} \overline{\ln z(l)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\overline{e^{-e^{-\beta x}} - e^{-z(l)e^{-\beta x}}}}{e^{-e^{-\beta x}} - e^{-z(l)e^{-\beta x}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (G_0(x) - G_l(x)) \quad (7.56)$$

nous obtenons que pour une fonction  $G$  solution de KPP ( front localisé allant de 1 à 0), l'énergie libre moyenne de la particule est donnée par la position du front :

$$-\beta^{-1} \overline{\ln Z} \sim -\beta^{-1} \overline{\ln z(l^*)} \underset{L \gg 1}{\simeq} m_\beta(l^*) \quad (7.57)$$

où  $m_\beta(l)$  est la position du front de  $G(l)$ . En définissant la température de transition  $\beta_c = \sqrt{d/\sigma}$ , et en utilisant les résultats de la partie (7.3.4), nous obtenons ainsi que

$$\beta f(\beta) = \begin{cases} -\left(1 + \left(\frac{\beta}{\beta_c}\right)^2\right) & \text{pour } \beta \leq \beta_c \\ -2\frac{\beta}{\beta_c} & \text{pour } \beta \geq \beta_c \end{cases} \quad (7.58)$$

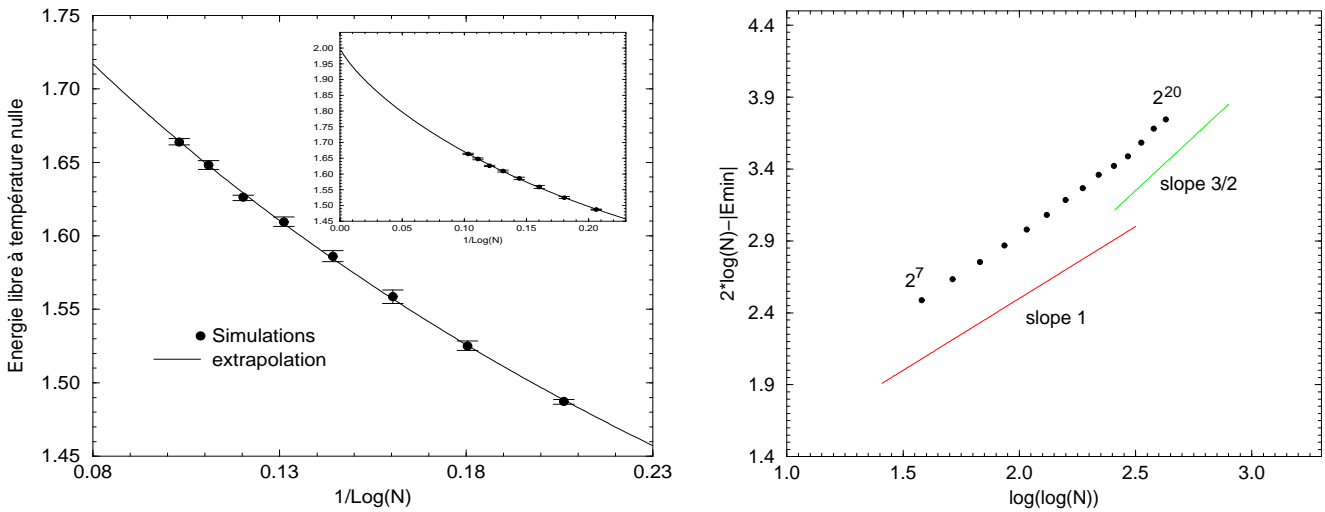


FIG. 7.12 – Corrections à l'énergie libre de la particule en taille finie. Ces résultats ont été obtenus par simulation numérique du problème en dimension un, la dimension ne modifiant pas ces corrections. La convergence très lente des valeurs numériques vers la limite thermodynamique est en accord avec les prédictions issues du traitement par le groupe de renormalisation. Nous avons obtenu une confirmation numérique de l'existence de corrections en  $\ln \ln L$  avec un coefficient compatible avec  $3/2$  (voir la figure de droite). Il est intéressant de remarquer que même pour des systèmes de taille  $2^{20} \sim 10^6$ , les corrections à la valeur thermodynamique de l'énergie libre sont très importantes.

où  $f(\beta)$  est l'énergie libre intensive de la particule :  $f(\beta) = -N^{-1}\beta^{-1}\overline{\ln Z}$  où  $N = \ln(L/a)^d$ . Ainsi une transition de gel de la particule se produit à  $T_g$ . Nous allons détailler cette transition dans un instant.

Remarquons pour l'instant que nous pouvons faire plus : nous pouvons également prédire les corrections en taille finie de cette énergie libre.

### 7.4.3 Lien avec le polymère dirigé sur l'arbre de Cayley, et “processus de branchements”

Nous pouvons rapidement remarquer la connexion entre ce problème à une particule, et par delà le problème de modèle XY précédent, avec le modèle désordonné du polymère dirigé sur l'arbre de Cayley. Ce problème est défini comme suit : nous considérons un arbre de Cayley dont les liens portent des énergies aléatoires et indépendantes (figure 7.13). Le polymère de longueur  $L$  a une extrémité en haut de cet arbre, et l'autre en bas. L'énergie associée à une configuration (un chemin) de ce polymère est la somme des énergies aléatoires des liens qu'il rencontre entre ses deux extrémités. Ce problème correspond donc à un modèle de champ moyen du polymère dirigé en milieu aléatoire. DERRIDA et SPOHN ont étudié ce modèle et ont découvert une remarquable connexion entre le comportement avec la longueur  $L$  de la loi de distribution de l'énergie libre du polymère et les solutions de front

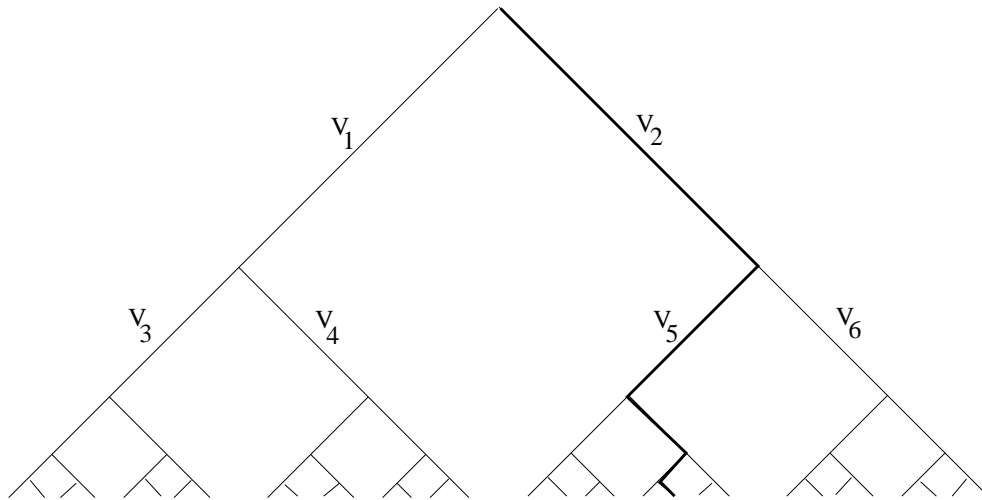


FIG. 7.13 – *Modèle du polymère dirigé sur l'arbre de Cayley.*

de l'équation KPP précédente (Derrida & Spohn 1988). La paramétrisation utilisée était exactement celle définie en (7.29).

Ainsi *via* l'équation KPP un lien apparaît entre le problème de la particule dans un potentiel aléatoire corrélé logarithmiquement et le problème du polymère dirigé sur l'arbre de Cayley. Ce lien avait été anticipé (approximativement) par TANG. Celui-ci a présenté dans (Tang 1996) un découpage du plan autour de chaque vortex en anneaux de rayon  $R^{(n)}$  tels que le rapport  $R^{(n+1)}/R^{(n)}$  est constant. En faisant correspondre chaque anneau avec un noeud de l'arbre, il obtenait une correspondance entre la répartition spatiale des énergies que la particule pouvait explorer et les énergies sur l'arbre de Cayley.

Notre renormalisation *du problème infinitésimal* peut être réinterprété à la lumière de cette correspondance. Pour être précis nous devons utiliser dans la correspondance ci-dessus un rapport *infinitésimal* entre rayons successifs. Il convient alors de considérer la “version continue” de l'arbre de Cayley : un processus de branchement (Derrida & Spohn 1988). Une fois répartie les sites du plan selon ce schéma, nous pouvons associer le rayon d'un disque  $R^{(n)}$  avec la taille de la particule un fois les échelles plus petites éliminées. Notre renormalisation peut dans ce cas être vue comme une décimation infinitésimale de l'arbre de Cayley, les branches les plus basses étant éliminées au fur et à mesure de la procédure.

Les problèmes ne sont cependant pas équivalents : dans notre étude par renormalisation la mesure du désordre est invariante par translation alors que dans le problème sur l'arbre de Cayley nous devons fixer un point arbitraire correspondant au sommet de l'arbre.

Nous passons maintenant à l'étude succincte d'un problème relié à celui de la particule que nous venons de voir : le problème d'un fermion de Dirac dans un champ magnétique aléatoire.

---

Derrida B. & Spohn H., (1988). *J. Stat. Phys.*, **51**:817–840.

Tang L., (1996). *Phys. Rev. B*, **54**:3350.

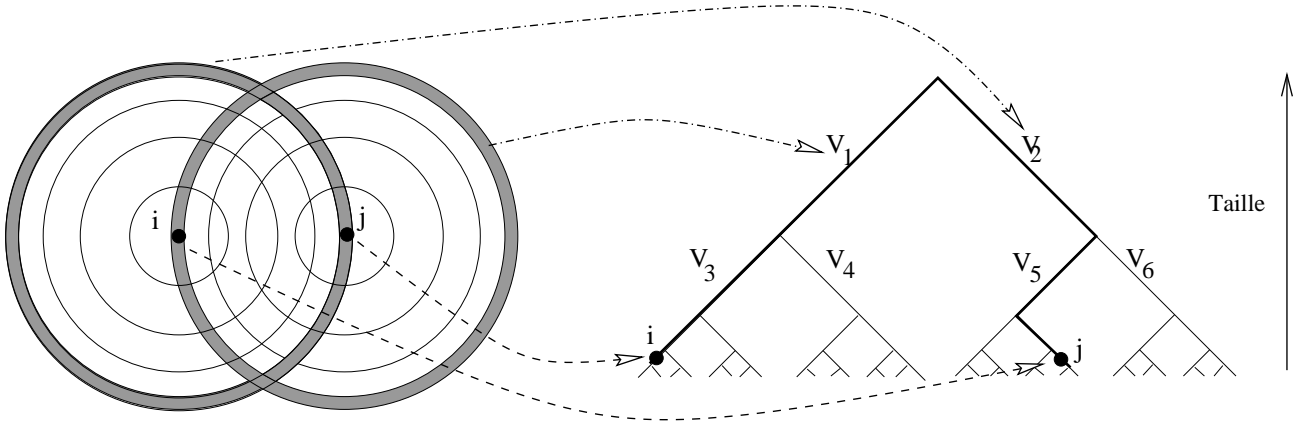


FIG. 7.14 – Lien entre la répartition spatiale des énergies dans le modèle à une particule dans un potentiel log-corrélé et le polymère dirigé sur l'arbre de Cayley. Inspiré de (L.H. Tang, 1997). Dans cette image, chaque cercle dans le plan correspond à un lien de l'arbre de Cayley, associé à une énergie aléatoire : la somme des potentiels  $V(\mathbf{r})$  dans le cercle. La taille du cercle se transpose dans la profondeur du lien dans l'arbre.

#### 7.4.4 Les fonctions d'onde critiques de fermions de Dirac désordonné en dimension 2

Nous considérons donc un fermion de Dirac en dimension deux dans un champ magnétique aléatoire. Ce problème a été récemment très étudié dans le cadre de l'analyse des transitions entre différents plateaux dans l'effet Hall quantique entier. Nous allons nous intéresser aux fonctions d'onde d'énergies nulles  $E = 0$  qui correspondent aux fonctions d'onde au point critique dans ce cadre. Ces dernières s'écrivent donc

$$\sigma_\mu (i\partial_\mu - A_\mu) \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (7.59)$$

où les matrices  $\sigma_{1,2}$  sont les matrices de PAULI  $2 \times 2$  et  $\mu = 1, 2$ . Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est défini d'après le potentiel de jauge aléatoire  $\mathbf{A}$  qui est ici distribué selon une loi gaussienne, avec une moyenne satisfaisant  $\overline{\mathbf{B}(\mathbf{r})} = 0$ . Dans la jauge de Coulomb, nous pouvons introduire un potentiel scalaire  $\phi$  défini par  $A_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ ,  $B(\mathbf{r}) = -\partial_\mu^2 \phi(\mathbf{r})$ . La loi de distribution de  $\phi(\mathbf{r})$  est choisie comme

$$P[\phi] = cte \times e^{-\frac{1}{2g} \int_{\mathbf{r}} (\partial_\mu \phi(\mathbf{r}))^2} \quad (7.60)$$

où  $g$  paramétrise l'intensité du champ magnétique. La fonction d'onde (en taille finie), qui satisfait (7.59), peut être écrite sous la forme  $\Psi_0(\mathbf{r}) = cte.(e^{-\phi(\mathbf{r})}, 0)$ .

Les propriétés de localisation de cette fonction d'onde seront ici étudiées en utilisant les rapports de participation inverses. Ces derniers sont définis d'après la fonction d'onde normalisée  $\tilde{\Psi}_0(\mathbf{r})$  dans un système de taille finie  $L$  par

$$R_q(L) = \int d^2\mathbf{r} |\tilde{\Psi}_0(\mathbf{r})|^{2q} = \int d^2\mathbf{r} \frac{e^{-2q\phi(\mathbf{r})}}{(\int_{\mathbf{r}} e^{-2\phi(\mathbf{r})})^q} \quad (7.61)$$

La nature de la fonction d'onde peut alors se déduire du comportement d'échelle de ces rapports de participation inverse. Pour un état (exponentiellement) localisé,  $R_q(L)$  se

comporte comme  $R_q(L) \sim 1$  quel que soit  $q \neq 0$ . Pour un état étendu, correspondant à une fonction d'onde plane, ce comportement dépendra au contraire de  $q$ :  $R_q(L) \sim L^{2-2q}$ . La caractérisation peut donc se faire en utilisant l'exposant  $\tau(q)$  défini par

$$\tau(q) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln R_q(L)}{\ln(1/L)} \quad (7.62)$$

Entre les états localisés et délocalisés peuvent exister des états intermédiaires: ils correspondent à des fonctions d'onde multifractales caractérisées par un exposant  $\tau(q)$  non linéaire en  $q$ . Ces fonctions d'onde ne peuvent être caractérisées par une seule longueur.

Pour déterminer  $\tau(q)$  de la fonction d'onde critique ( $E = 0$ ), nous utilisons l'analogie entre cette fonction d'onde et le problème à une particule placée dans le potentiel aléatoire  $V(\mathbf{r}) = 2\phi(\mathbf{r})$  avec

$$Z = \sum_{\mathbf{r}} e^{-\beta V(\mathbf{r})} ; \quad \overline{(V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}'))^2} = \frac{4g}{\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \quad (7.63)$$

Nous pouvons alors exprimer les rapport de participation inverses  $R_q(L) = Z(q)/Z(1)^q$ . Dans un système de taille  $L$ , nous avons donc  $(\frac{L}{a})^2$  énergies indépendantes dans le problème à une particule, ce qui correspond à  $N = 2 \ln(\frac{L}{a})$  états. L'énergie libre intensive s'écrit donc  $f(\beta) = -(N\beta)^{-1} \ln Z(\beta)$ , ce qui correspond à un exposant

$$\tau(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} 2(f_0(q) - qf_0(1)) \quad (7.64)$$

### 7.4.5 Approche de renormalisation et spectre multifractal

Nous pouvons utiliser exactement la même procédure de renormalisation ci-dessus pour obtenir les propriétés de la particule. De la paramétrisation

$$G(x) = 1 - \langle e^{-ze^{-\beta x}} \rangle_{P(z)} \quad (7.65)$$

nous tirons immédiatement, pour une solution de l'équation KPP  $G(x, t) = g(x - m_\beta(l))$ , que l'énergie libre de la particule est reliée à la vitesse du front KPP:  $-\beta^{-1} \langle \ln z \rangle = -m_\beta(l)$  où  $m_\beta(l)$  est la position du front. Cette dernière est donnée par  $m_\beta(l) = c_\beta 2l$  (à des termes d'ordre  $1/\sqrt{l}$ ) où  $c_\beta$  est la vitesse du front. En utilisant  $N = 2 \ln(L/a) = 2l^*$ , nous obtenons l'expression de l'énergie libre

$$\beta f(\beta) = \begin{cases} - \left( 1 + \left( \frac{\beta}{\beta_c} \right)^2 \right) & \text{pour } \beta \leq \beta_c \\ -2 \frac{\beta}{\beta_c} & \text{pour } \beta \geq \beta_c \end{cases} \quad (7.66)$$

où  $\beta_c = q_c = \sqrt{2\pi/g}$ . Les exposants correspondant sont

$$\tau(q) = \begin{cases} 2(q-1) \left( 1 - \frac{q}{q_c^2} \right) & \text{pour } q \leq q_c = \sqrt{\frac{2\pi}{g}} \\ 2q \left( 1 - \frac{1}{q_c} \right)^2 & \text{pour } q \geq q_c \end{cases} \quad (7.67)$$

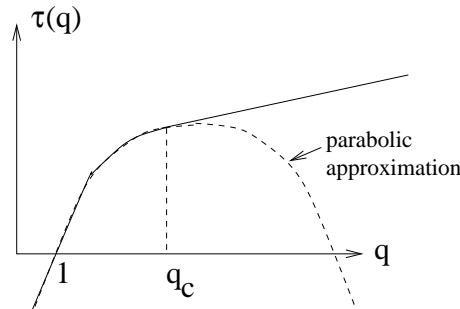


FIG. 7.15 – Spectre multifractal de la fonction d’onde critique de Dirac en champ magnétique aléatoire.

Nous retrouvons donc ainsi le résultat de (Castillo, de C Chamon, Fradkin, Goldbart & Mudry 1997) par une méthode de renormalisation complètement différente (et complémentaire: (Carpentier & Le Doussal 1999)).

Dans la limite d’un désordre fort, *i.e* pour  $q_c \leq 1$ , l’expression ci-dessus devient

$$\tau(q) = \begin{cases} -2 \left(1 - \frac{q}{q_c}\right)^2 & \text{pour } q \leq q_c = \sqrt{\frac{2\pi}{g}} \\ 0 & \text{pour } q \geq q_c \end{cases} \quad (7.68)$$

Dans ce dernier cas, le rapport de participation inverse ne dépend donc plus de la taille du système, ce qui est la manifestation d’un état localisé.

## 7.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons donc développé une nouvelle méthode de renormalisation applicable aux problèmes faisant intervenir des potentiels aléatoires corrélés logarithmiquement. Cette méthode fonctionnelle nous a permis de décrire correctement le comportement à basse température du modèle XY avec un déphasage aléatoire. Nous l’avons ensuite appliqué au problème d’une seule particule dans un potentiel corrélé logarithmiquement. Il nous a alors permis d’établir une connexion avec le modèle du polymère dirigé sur l’arbre de Cayley.

L’étude que nous avons menée du problème de la particule peut, à température nulle, être replacé dans un cadre plus large. En effet dans cette limite de température nulle, l’énergie libre de la particule est exactement la valeur minimale des  $N$  énergies des sites du système. Le problème est donc relié à un problème mathématique bien posé: trouver la valeur minimale, et sa loi de distribution, de  $N$  tirages (dans la limite de  $N$  grand). Le domaine correspondant est celui de l’étude des statistiques extrêmes (Galambos 1987). La loi limite pour ce minimum dépend bien sûr des corrélations entre les variables aléatoires tirées. Le problème que nous avons étudié correspond donc aux corrélations logarithmiques. Les théorèmes généraux connus (Galambos 1987) ne s’applique pas à ce problème à ma

---

Castillo H., de C Chamon C., Fradkin E., Goldbart P., & Mudry C., (1997). *Phys. Rev. B*, **56**:10668.

Carpentier D. & Le Doussal P. article en préparation. , 1999.

Galambos, (1987). *The asymptotic theory of extreme order statistics*. Krieger.

connaissance. Le parallèle, que nous avons découvert, entre la description de ces lois de distributions limites et les solutions d'équations non linéaires peut en fait se prolonger à d'autres types de corrélations (Carpentier & Le Doussal 1999). Dans le cas de variables non corrélées, l'étude de ces statistiques extrêmes a été également reliée au cadre de la théorie des répliques (Bouchaud & Mézard 1997). Notons qu'elles ont également été utilisées dans le contexte de la dynamique vitreuse (Rammal 1985, Vinokur, Marchetti & Chen 1996).

Finalement il est bien sûr tentant d'essayer de comparer cette nouvelle méthode avec d'autres outils utiles en dimension deux, telles que les théories conformes bidimensionnelles. Malheureusement pour l'instant ces méthodes ne sont pas applicables directement au problème du modèle XY aléatoire. Il est raisonnable d'espérer que dans un avenir proche un lien avec ces outils émerge en particulier dans ce contexte des fermions de Dirac sur lequel nous avons conclu ce chapitre.

---

Carpentier D. & Le Doussal P. article en préparation. , 1999.

Bouchaud J. & Mézard M., (1997). *J. Phys. A*, **30**:7997–8015.

Rammal R., (1985). *J. Physique*, **46**:1837.

Vinokur V., Marchetti C., & Chen L., (1996). *Phys. Rev. Lett.*, **77**:1845.

Article 4

**Disordered XY models and Coulomb gases :  
Renormalization via Travelling waves**





# Conclusion de la thèse

Nous avons ainsi traité, au cours de cette thèse, différents aspects de l'interaction entre défauts topologiques et désordre. Nous avons choisi des situations qui permettent des approches analytiques. Dans le premier travail (chapitre 5) nous avons étudié des boucles de dislocations planaires dans un réseau d'ABRIKOSOV de lignes de flux magnétiques. Nous avons montré que ces boucles de dislocations prolifèrent au dessus d'une valeur seuil du désordre et induisent une transition du premier ordre vers une phase vitreuse sans ordre topologique tridimensionnel. Ceci renforce l'idée qu'une transition analogue peut exister dans le diagramme des phases des supraconducteurs à haute  $T_c$ . Nous avons ensuite étudié en détail le comportement de défauts topologiques dans un environnement désordonné bidimensionnel dans les chapitres 6 et 7. Dans le chapitre 6 nous nous sommes concentrés sur la région de température proche de la fusion d'un cristal pur. Dans ce cas le désordre se décompose en deux contributions : l'une dite de "grande longueur d'onde" ne fait que modifier sans la détruire la transition de fusion, l'autre appelée "désordre d'accrochage" qui détruit la transition dans la limite thermodynamique. Nous avons étudié dans ce chapitre le cross-over qui en résulte et ses conséquences expérimentales. Enfin dans le chapitre suivant nous nous sommes intéressés à la région de basses températures en étudiant uniquement l'effet du désordre de grande longueur d'onde sur les défauts topologiques : ce désordre induit un gel des défauts que nous avons décrit à l'aide d'une nouvelle technique de renormalisation fonctionnelle.

Au delà des résultats de cette étude, nous pouvons penser aux prolongements naturels de notre approche. En premier lieu nous pensons bien sûr à l'extension du travail du chapitre 7 à un désordre général incluant à la fois les petites et les grandes longueurs d'onde. Ce travail devrait être possible dans le cadre des techniques de gaz de Coulomb que nous avons abondamment utilisées ici.

Par ailleurs notre étude du gaz de Coulomb vectoriel général de l'annexe du chapitre 6 peut s'appliquer à de nombreuses autres situations que celle de la fusion bidimensionnelle en présence de désordre que nous avons étudiée dans ce chapitre. Nous pouvons en particulier étudier le comportement d'un cristal soumis à différentes perturbations d'un substrat commensurable. Un autre axe de recherche prometteur consisterait à étudier plusieurs cristaux bidimensionnels couplés les uns aux autres dans l'esprit du chapitre 5. Cette géométrie permettrait de décrire des boucles de dislocations plus générales en dimension trois.

Finalement la nouvelle technique développée au chapitre 7 nous a permis d'étudier une transition induite par le désordre en dimension deux. En l'absence de désordre, la plupart des transitions bidimensionnelles peuvent être classées et caractérisées en utilisant l'outil des théories conformes. Le développement d'un cadre analogue en présence de désordre est un objectif très intéressant. Des progrès pourraient être fait dans cette direction dans

le cadre des fermions de Dirac aléatoires, problème pour lequel des approches de théories conformes non unitaires ont récemment été utilisées.

## Bibliographie de la thèse

- Alexander, S. & MacTague, J. (1978). Should all crystals be bcc? landau theory of solidification and crystal nucleation, *Phys. Rev. Lett.* **41**: 702.
- Amit, D., Goldschmidt, Y. & Grinstein, G. (1980). Renormalisation group analysis of the phase transition in the 2d coulomb gas, sine-gordon and xy model, *J. Phys. A* **13**: 585.
- Anderson, P., Yuval, G. & Hamann, D. (1970). Exact results in the kondo problem ii. scaling theory, qualitatively correct solution and some new results on one-dimensional classical statistical models, *Phys. Rev.* **131**: 4464.
- Aronson, D. & Weinberger, H. (1978). , *Adv. Math.* **30**: 33.
- Batrouni, G. & Hwa, T. (1994). Dynamic and static properties of the randomly pinned planar flux array, *Phys. Rev. Lett.* **72**: 4133.
- Bauer, M. & Bernard, D. (1996). The large-n random phase sine-gordon model, *Europhysics Letters* **33**: 255.
- Blatter, G., Feigel'man, M., Geshkenbein, V., Larkin, A. & Vinokur, V. (1994). Vortices in high-temperature superconductors, *Rev. Mod. Physics* **66**: 1125–1388.
- Bouchaud, J. & Mézard, M. (1997). Universal classes for extreme value statistics, *J. Phys. A* **30**: 7997–8015.
- Bramson, M. (1983). Convergence of solutions of the kolmogorov equation to travelling waves, *Mem. of the Am. Math. Soc.* **44**(285).
- Brandt, E. (1995). The flux-line lattice in superconductors, *Reports on Progress in Physics* .
- Brunet, E. & Derrida, B. (1997). Shift in the velocity of a front due to a cut-off, *Phys. Rev. E* **56**: 2597.
- Cardy, J. (1996). *Scaling and renormalization in statistical physics*, Cambridge university press.
- Cardy, J. & Ostlund, S. (1982). Random symmetry-breaking fields and the xy model, *Phys. Rev. B* **25**: 6899–6909.
- Carlucci, D., De Dominicis, C. & Temesvari, T. (1996). Stability of the mezard-parisi solution for random manifolds, *Jour. de Phys. I* **6**: 1031.
- Carpentier, D. & Le Doussal, P. (1997). Glass phase of two-dimensional triangular elastic lattices with disorder, *Phys. Rev. B* **55**: 12128.
- Carpentier, D. & Le Doussal, P. (1998). Melting of two-dimensional solids on disordered substrates, *Phys. Rev. Lett.* **81**: 1881.
- Carpentier, D. & Le Doussal, P. (1999). article en préparation. .

- Carpentier, D., Le Doussal, P. & Giamarchi, T. (1996). Stability of a bragg glas phase in a layered geometry, *Europhys. Lett.* **35**: 379.
- Castillo, H., de C Chamon, C., Fradkin, E., Goldbart, P. & Mudry, C. (1997). Exact multifractal exponents of the critical wavefunctions of dirac fermions in a random magnetic field, *Phys. Rev. B* **56**: 10668.
- Chaikin, P. & Lubensky, T. (1995). *Principles of condensed matter physics*, Cambridge Univ. Press.
- Crabtree, G. & Nelson, D. (1997). Vortex physics in high-temperature superconductors, *Physics Today* **April**.
- Cule, D. & Shapir, Y. (1995). Glassy roughness of a crystalline surface upon a disordered substrate, *Phys. Rev. Lett.* **74**: 114.
- De Gennes, P. (1966). *Superconductivity of metals and alloys*, Benjamin, (New York).
- Derrida, B. (1981). Random energy model : an exactly solvable model of disordered systems, *Phys. Rev. B* **24**: 2613.
- Derrida, B. & Spohn, H. (1988). Polymers on disordered trees, spin glasses, and travelling waves, *J. Stat. Phys.* **51**: 817–840.
- di Bartolo, S. & Dorsey, A. (1996). Velocity selection for propagating fronts in superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **77**: 4442.
- Ebert, U. & Saarloos, W. V. (1998). Universal algebraic relaxation of fronts propagating into an unstable state, *Phys. Rev. Lett.* **80**: 1650.
- Ebert, U. & Saarloos, W. V. (1999). Front propagating uniformly into unstable states : universal algebraic rate of convergence of pulled fronts. preprint.
- Efetov, K. (1979). Fluctuations in layered superconductors in a parallel magnetic field, *Sov. Phys. JETP* **49**: 905.
- Feinberg, D. (1994). Vortex lines in layered superconductors i. from 3d to 2d behaviour, *J. Phys. III* **4**: 169–208.
- Feinberg, D. (1998a). Softening and melting of a vortex lattice in presence of point disorder. à paraître.
- Feinberg, D. (1998b). Vortex dans les supraconducteurs haute température. cours donné à l' Ecole ESPCI.
- Fisher, D. (1980). Flux-lattice melting in thin-films superconductors, *Phys. Rev. B* **22**: 1190–1199.
- Fisher, D. (1996). Stability of elastic glass phases in random xy magnets and vortex lattices in type ii superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **78**: 1964.
- Fisher, D., Fisher, M. & Huse, D. (1990). Thermal fluctuations, quenched disorder, phase transitions, and transport in type-ii superconductors, *Phys. Rev. B* **43**: 130–159.
- Fukuyama, H. & Lee, P. (1978). Dynamics of the charge-density wave. i. impurity pinning in a single chain, *Phys. Rev. B* **17**: 535.
- Galambos (1987). *The asymptotic theory of extreme order statistics*, Krieger.
- Garel, T., Niel, J. & Orland, H. (1990). Disorder lines and nonmonotoneous renormalization group flows : application to the two-dimensional xy model, *EuroPhys. Lett.* **11**: 349.
- Giamarchi, T. & Le Doussal, P. (1994). Elastic theory of pinned flux lattices, *Phys. Rev. Lett.* **72**: 1530.

- Giamarchi, T. & Le Doussal, P. (1995). Elastic theory of flux lattices in presence of weak disorder, *Phys. Rev. B* **52**: 1242.
- Giamarchi, T. & Le Doussal, P. (1998). *Statics and Dynamics of Disordered Elastic Systems*, A.P. Young, chapter 11.
- Ginzburg, V. & Landau, L. (1950). , *Zh. Eksperim. i. Teor. Fiz.* **20**: 1064.
- Glattli, D., Andrei, E. & Williams, F. (1988). Thermodynamic measurement on the melting of a two-dimensional electron solid, *Phys. Rev. Lett.* **60**: 420.
- Goldschmidt, Y. & Houghton, A. (1982). Field theoretic treatment of the 2d planar model with random p-fold symmetry-breaking field, *Nuclear Physics* **B210**: 155.
- Gupta, P. & Teitel, S. (1997). Phase diagram of two dimensional lattice coulomb gas, *Phys. Rev. B* **55**: 2756.
- Haldane, F. (1981). Effective harmonic-fluid approach to low-energy properties of one-dimensional quantum fluids, *Phys. Rev. Lett.* **47**: 1840.
- Halperin, B. (1979a). non publié. cité par D. Nelson [Nels83].
- Halperin, B. (1979b). Superfluidity, melting and liquid-crystal phases in two dimensions, *Physics of low dimensional systems*, Kyoto summer institute.
- Halperin, B. (1998). non publié. communication privée.
- Hohenberg, P. (1967). Existence of long-range order in one and two dimensions, *Phys. Rev.* **158**: 383.
- Hwa, T. & Fisher, D. (1994). Vortex glass phase and universal susceptibility variations in planar array of flux lines, *Phys. Rev. Lett.* **72**: 2466.
- Itzykson, C. & Drouffe, J.-M. (1989). *Théorie statistique des champs*, InterEditions/ Editions du CNRS.
- Jancovici, B. (1967). Infinite susceptibility without long-range order : the two-dimensional harmonic solid, *Phys. Rev. Lett.* **19**: 20.
- Jose, J., Kadanoff, L., Kirkpatrick, S. & Nelson, D. (1977). Renormalization, vortices and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model, *Phys. Rev. B* **16**: 1217.
- Kadanoff, L. (1978). Lattice coulomb gas representation of two-dimensional problems, *J. Phys. A* **11**: 1399.
- Kes, P. H. & Tsuei, C. (1983). Two-dimensional collective flux pinning, defects, and structural relaxation in amorphous superconducting films, *Phys. Rev. B* **28**: 5126.
- Kierfeld, J. & Hwa, T. (1996). Interacting arrays of steps and lines in random media, *Phys. Rev. Lett.* **77**: 4233.
- Kierfeld, J., Nattermann, T. & Hwa, T. (1997). Topological order in the vortex-glass phase of high-temperature superconductors, *Phys. Rev B* **55**: 626.
- Korshunov, S. (1993). Possible destruction of the ordered phase in josephson-junction arrays with positional disorder, *Phys. Rev. B* **48**: 1124–1127.
- Korshunov, S. & Larkin, A. (1992). Problem of josephson-vortex-lattice melting in layered superconductors, *Phys. Rev. B* **46**: 6395–6399.
- Korshunov, S. & Nattermann, T. (1996a). Absence of reentrance in superconducting arrays with positional disorder, *Phys. Rev. B* **53**: 2746.

- Korshunov, S. & Nattermann, T. (1996b). Phase diagram of a josephson junction array with positional disorder, *Physica B* **222**: 280–286.
- Kosterlitz, J. (1974). The critical properties of the two-dimensional xy model, *J. Phys. C* **7**: 1046.
- Kosterlitz, J. & Thouless, D. (1973). Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems, *J. Phys. C* **6**: 1181.
- Landau, L. & Lifchitz, E. (1967). *Théorie de l'élasticité*, Ed. MIR, Moscou.
- Larkin, A. (1970). Effects of inhomogeneities on the structure of the mixed state of superconductors, *Soviet Physics JETP* **31**: 784.
- Larkin, A. & Ovchinnikov, Y. (1979). Pinning in type ii superconductors, *J. Low Temp. Phys.* **34**: 409–428.
- Marinari, E., Monasson, R. & Ruiz-Lorenzo, J. (1995). How (super) rough is the glassy phase of a crystalline surface with a disordered substrate?, *J. Phys. A* **28**: 3975.
- Mermin, N. & Wagner, H. (1966). Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one or two-dimensional isotropic heisenberg models, *Phys. Rev. Lett.* **17**: 1133.
- Mézard, M. & Parisi, G. (1991). Replica field theory for random manifolds, *J. Phys. I* **1**: 809–836.
- Mikheev, L. & Kolomeisky, E. (1991). Melting of a flux-line fluid confined by  $\text{CuO}_2$  planes: Lindemann-criterion failure, *Phys. Rev. B* **43**: 10431–10435.
- Minnhagen, P. & Wallin, M. (1989). Results for the phase diagram of the two-dimensional coulomb gas, *Phys. Rev. B* **40**: 5109.
- Murray, C., Sprenger, W. & Wenk, R. (1990). Comparison between melting in three and two dimensions: microscopy of colloidal spheres, *Phys. Rev. B* **42**: 688.
- Murray, C. & VanWinkle, D. (1987). Experimental observation of two-stage melting in a classical two-dimensional screened coulomb system, *Phys. Rev. Lett.* **58**: 1200.
- Murray, J. (1989). *Mathematical biology*, Springer (Berlin).
- Nabarro, F. (1967). *Theory of dislocations*, Clarendon Press, Oxford.
- Nattermann, T. (1990). Scaling approach to pinning: Charge density waves and giant flux creep in superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **64**: 2454.
- Nattermann, T., Scheidl, S., Korshunov, S. & Li, M. (1995). Absence of reentrance in the two-dimensional xy-model with random phase shift, *J. Phys. I (France)* **5**: 565.
- Nelson, D. (1983). Defect-mediated phase transitions, in C. Domb & C. Lebowitz (eds), *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Academic Press (London), chapter vol. 7, p. 165.
- Nelson, D. & Halperin, B. (1979). Dislocation-mediated melting in two dimensions, *Phys. Rev. B* **19**: 2457.
- Nienhuis, B. (1987). Coulomb gas formulation of two-dimensional phase transitions, in C. Domb & J. Lebowitz (eds), *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Academic Press (London), chapter vol. 11.
- Nozieres, P. & Gallet, F. (1987). The roughening transition of crystal surfaces (i), *J. de Physique (France)* **48**: 353.
- Ostlund, S. & Halperin, B. (1981). Dislocation-mediated melting of anisotropic layers, *Phys. Rev. B* **23**: 335.

- Paquette, G., Chen, L.-Y., Goldenfeld, N. & Oono, Y. (1994). Structural stability and renormalization group for propagating fronts, *Phys. Rev. Lett.* **72**: 76.
- Rammal, R. (1985). Spin dynamics and glassy relaxation on fractals and percolation structures, *J. Physique* **46**: 1837.
- Rubinstein, M., Schraiman, B. & Nelson, D. (1983). Two-dimensional xy magnets with random dzyaloshinski-moriya interactions, *Phys. Rev. B* **27**: 1800.
- Scheidl, S. (1997). Glassy vortex state in a two-dimensional disordered xy model, *Phys. Rev. B* **55**: 457–471.
- Schulz, U., Villain, J., Brezin, E. & Orland, H. (1988). Thermal fluctuations in some random field models, *Journ. of Statistical Phys.* **51**: 1.
- Seshadri, R. & Westerfeld, R. (1991). Hexatic-to-liquid melting transition in two-dimensional magnetic-bubble lattices, *Phys. Rev. Lett.* **66**: 2774.
- Seshadri, R. & Westerfeld, R. (1992). Statistical mechanics of magnetic bubble arrays i. topology and thermalization, *Phys. Rev. B* **46**: 5142.
- Seshadri, R. & Westervelt, R. (1992). Statistical mechanics of magnetic bubble arrays ii. observations of two-dimensional melting, *Phys. Rev. B* **46**: 5150–5161.
- Shakhnovich, E. & Gutin, A. (1989). Frozen states of a disordered globular heteropolymer, *J. Phys. A* **22**: 1647.
- Shi, A. & Berlinsky, A. (1991). Pinning and i-v characteristics of a two-dimensional defective flux-line lattice, *Phys. Rev. Lett.* **67**: 1926.
- Tang, L. (1996). Vortex statistics in a disordered two-dimensional xy model, *Phys. Rev. B* **54**: 3350.
- Temesvari, T., De Dominicis, C. & Kondor, I. (1994). Block diagonalizing ultrametric matrices, *J. Phys. A* **27**: 7569.
- Theunissen, M. (1997). *Properties of the flux-line solid and liquid in amorphous Nb<sub>3</sub>Ge films*, PhD thesis, Leiden.
- Thijssen, J. & Knops, H. (1988). Analysis of a new set of renormalization equations for the kosterlitz-thouless transition, *Phys. Rev. B* **38**: 9080.
- Tinkham, M. (1980). *Introduction to superconductivity*, Krieger.
- Toner, J. (1991). Orientational order in disordered superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **67**: 1810.
- Toner, J. & DiVicenzo, D. (1990). Super-roughening: a new phase transition on the surfaces of crystals with quenched bulk disorder, *Phys. Rev. B* **41**: 632.
- Van Saarloos, W. (1989). Front propagation into unstable states. ii. linear versus nonlinear marginal stability and rate of convergence, *Phys. Rev. A* **39**: 6367.
- Van Saarloos, W. (1997). Three basic issues concerning interface dynamics in nonequilibrium pattern formation, *Altenberg summer school on fundamental problems in statistical physics (1997)*.
- Villain, J. (1975). Theory of one and two-dimensional magnets with an easy magnetization plane (ii), *Journ. de Phys. (France)* **36**: 581.
- Vinokur, V., Marchetti, C. & Chen, L. (1996). Glassy motion of elastic manifolds, *Phys. Rev. Lett.* **77**: 1845.



- Williams, F. (1992). Experiments on melting in classical and quantum two-dimensional electron systems, *Helv. Phys. Act.* **65**: 297.
- Yazdani, A. (1994). *Phase transitions in two-dimensional superconductors*, PhD thesis, Stanford.
- Yazdani, A., Howald, C., White, W., Beasley, M. & Kapitulnik, A. (1994). Competition between pinning and melting in the two-dimensional vortex lattice, *Phys. Rev. B* **50**: 16117–16120.
- Yazdani, A., White, W., Hahn, M., Gabay, M., Beasley, M. & Kapitulnik, A. (1993). Observation of kosterlitz-thouless-type melting of the disordered vortex lattice in thin films of a-moge, *Phys. Rev. Lett.* **70**: 505–508.
- Young, A. (1979). Melting and the vector coulomb gas in two dimensions, *Phys. Rev. B* **19**: 1855.
- Zeng, C., Middleton, A. & Shapir, Y. (1996). Ground-state roughness of the disordered substrate and flux lines in  $d=2$ , *Phys. Rev. Lett.* **77**: 3204.
- Zinn-Justin, J. (1993). *Quantum field theory and critical phenomena*, Clarendon (Oxford).

# Index

- **Symboles** –
- énergie de coeur aléatoire ..... 234  
équation KPP ..... 246
- **A** –
- accrochage collectif ..... 12
- **C** –
- Cardy-Ostlund (modèle de) ..... 88  
champ magnétique aléatoire ..... 88  
coefficients de Lamé ..... 59  
coefficients de Lamé renormalisés .... 66, 68  
constante de Franck ..... 75  
contrainte  
    aléatoire ..... 183  
    tenseur des contraintes ..... 183  
corrections à la vitesse ..... 250  
cristal anisotrope ..... 81  
cross-over de fusion ..... 200
- **D** –
- disclinaisons ..... 63  
dislocations bidimensionnelles ..... 61, 82  
    champ de déplacement ..... 64, 83  
    induites par le désordre ..... 200  
    interaction ..... 64, 84  
distribution de fugacités ..... 237  
désordre  
    décomposition ..... 174, 235
- **E** –
- élasticité bidimensionnelle  
    dérivation de l'énergie ..... 57  
    matrice d'élasticité ..... 59
- **F** –
- fonction d'Airy ..... 85  
fonctions de corrélation connexes ..... 95  
fusion de charges ..... 194, 215, 238
- **G** –
- gaz de Coulomb  
    électromagnétique ..... 42, 213  
    électromagnétique répliqué ..... 93  
    renormalisation (scalaire) ..... 47  
    renormalisation (vectoriel) ..... 68, 213  
    vectoriel ..... 65, 176, 192, 213  
Ginzburg-Landau (énergie de)  
    à symétrie  $U(1)$  ..... 25  
    d'un solide 2d ..... 56  
    d'un supraconducteur ..... 7
- **H** –
- hélicité  
    définition ..... 29  
    renormalisée ..... 29
- **L** –
- Larkin  
    longueur ..... 15  
    modèle ..... 12, 127  
limite continue ..... 234  
longueur de cohérence ..... 8  
longueur de pénétration ..... 8
- **M** –
- modèle de Sine-Gordon ..... 39  
modèle de Sine-Gordon-Villain ..... 41  
modèle XY ..... 25
- **O** –
- ordre orientationnel ..... 53, 60, 75  
ordre translationnel ..... 53, 59  
orientation locale d'un solide ..... 58
- **P** –
- polymère dirigé ..... 264  
potentiel coulombien 2d ..... 45

– **R** –

## répliques

brisure de la symétrie .....	131
fonctions de corrélation .....	95
méthode générale .....	89, 95
méthode variationnelle .....	98, 126

## réseau d'Abrikosov

bidimensionnel .....	161
coefficients élastiques .....	11

– **S** –

spectre multifractal .....	268
substrat ordonné .....	76
symétrie statistique .....	90, 179, 211
sélection de la vitesse .....	249

– **T** –

transition de fusion KTHNY .....	61
transition de gel .....	259
transition Kosterlitz-Thouless .....	34

– **V** –

verre .....	95, 179, 181
verre de Bragg .....	14
Villain	
approximation .....	31
modèle .....	32
vortex d'Abrikosov .....	9
interaction .....	10
vortex XY .....	26
interaction .....	27