



Produits de matrices aléatoires : exposants de Lyapunov pour des matrices aléatoires suivant une mesure de Gibbs, théorèmes limites pour des produits au sens max-plus

Glenn Merlet

► To cite this version:

Glenn Merlet. Produits de matrices aléatoires : exposants de Lyapunov pour des matrices aléatoires suivant une mesure de Gibbs, théorèmes limites pour des produits au sens max-plus. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT : . tel-00010813

HAL Id: tel-00010813

<https://theses.hal.science/tel-00010813v1>

Submitted on 28 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Produits de matrices aléatoires :

- exposants de Lyapunov pour des matrices aléatoires suivant une mesure de Gibbs,
- théorèmes limites pour des produits au sens $(\max, +)$.

Version du 7 octobre 2005

Glenn MERLET

7 octobre 2005

Remerciements

Je voudrais remercier ici tous ceux sans qui cette thèse n'aurait pas été la même.

Merci d'abord à mes directeurs Jean-Pierre Conze et Albert Raugi, qui m'ont proposé de travailler sur les produits de matrices aléatoires et qui m'ont accompagné avec une disponibilité constante tout au long de ces trois ans.

C'est par les travaux de Jean Mairesse que j'ai découvert $(\max, +)$. Il a toujours trouvé par la suite le temps de se replonger dans ses articles pour répondre à mes questions et finalement dans ce manuscrit pour en être le rapporteur. Merci pour tout cela.

Merci aussi à Marc Peigné d'avoir minutieusement rapporté sur cette thèse, sans doute pas toujours facile à lire. L'intérêt qu'a porté Yves Guivarc'h à mon travail, sa connaissance encyclopédique et sa disponibilité à mon égard ont été une aide régulière. C'est donc un plaisir de le voir aujourd'hui dans mon jury. De même pour Émile Le Page, qui a contribué à cette thèse à son insu, puisque ses travaux ont largement inspiré le chapitre 5.

Au chapitre des dettes scientifiques, je voudrais ajouter Yves Derriennic, à qui je dois de m'être orienté vers la théorie ergodique.

Si la "tour des maths" de Rennes est de l'avis unanime un endroit agréable pour faire sa thèse, c'est dû à la gentillesse de ceux qui l'habitent. Je pense en particulier aux personnels administratifs de l'IRMAR à beaucoup d'autres collègues. Une pensée spéciale bien sûre pour tous ceux avec qui j'ai partagé des repas au RU, régulièrement ou irrégulièrement : Benoîte, Bert, Corentin, Damien, Élise, Erwan, Gwenolé, Jean-Baptiste, Natacha, Olivier, Philippe, Sandrine, Solen, Valéry, Vincent, Yassine...

Merci à tous ceux que j'ai rencontré dans les associations de jeunes chercheurs et qui m'ont fait voir différemment le doctorat. Alban, Ronan et Sylvain en tout premier lieu.

Merci à tous les proches ou moins proches qui m'ont soutenu dans les bas de cette aventure, et qui ont réussi à me faire croire qu'ils étaient vraiment intéressés par le titre de cette thèse.

Enfin, merci à Estelle, sans qui rien ne serait pareil.

Introduction

0.1 Suites récurrentes stochastiques

Cette thèse comporte deux parties essentiellement indépendantes, la première portant sur les produits de matrices aléatoires et la seconde sur les composées d'applications topicales aléatoires. Ces deux objets d'études peuvent être regroupés dans le formalisme commun des suites récurrentes stochastiques que l'on va rappeler ici.

On donne d'abord quelques définitions fondamentales de la théorie ergodique.

Définition 0.1.1 (Système dynamique mesurable).

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X, \mathcal{G})$ un espace mesurable. On appelle variable aléatoire à valeurs dans X une application f mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(X, \mathcal{G})$. Quand X est un espace de matrices (resp. d'applications,...), on parlera de matrice (resp. d'application,...) aléatoire.

La loi de f est la probabilité image de $\mathbb{P}$ par f , notée $f_*\mathbb{P}$:

$$\forall A \in \mathcal{G}, (f_*\mathbb{P})(A) := \mathbb{P}(f^{-1}(A)).$$

2. Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans un même espace mesurable $(X, \mathcal{G})$ est dite stationnaire si pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout k -uplet $(i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k)$ d'entiers, la loi de la variable aléatoire $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ est celle de $(X_0, X_{i_2-i_1}, \dots, X_{i_k-i_1})$.
3. On appelle système dynamique mesurable (s.d.m.) un quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et θ une application $\mathcal{F}$ -mesurable de Ω dans lui même et qui laisse $\mathbb{P}$ invariante :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(\theta^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A).$$

Le système dynamique est dit inversible si θ l'est et si son inverse est mesurable. Il est dit ergodique si tous les ensembles invariants par θ sont de probabilité 0 ou 1.

Rappelons que si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite stationnaire à valeurs dans un espace $(X, \mathcal{G})$, on peut lui associer canoniquement le système dynamique $(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}^{\otimes \mathbb{N}}, \tilde{\mathbb{P}}, \theta)$, où $\tilde{\mathbb{P}}$ est la loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, considérée comme variable aléatoire à valeurs dans $X^{\mathbb{N}}$, et θ est le décalage sur $X^{\mathbb{N}}$.

On voit que pour $f : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto x_0$, la suite $(f \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a même loi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans la suite du texte, on partira indifféremment du système dynamique ou de la suite. En particulier, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ergodique signifiera que le système dynamique canonique associé l'est.

Si X est un espace polonais muni de sa tribu de Borel, on peut aussi associer canoniquement le système dynamique inversible $(X^{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}^{\otimes \mathbb{Z}}, \hat{\mathbb{P}}, \hat{\theta})$, où $\hat{\theta}$ est le décalage sur $X^{\mathbb{Z}}$ et $\hat{\mathbb{P}}$ est une probabilité telle que pour $\hat{f} : (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x_0$ la suite $(\hat{f} \circ \hat{\theta}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a même loi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définissons maintenant les suites récurrentes stochastiques.

Définition 0.1.2 (Suites récurrentes stochastiques). Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite stationnaire d'applications aléatoires d'un espace X dans lui même, on appelle suite récurrente stochastique (SRS) associée à $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de variables aléatoires à valeurs dans X vérifiant l'équation

$$X_{n+1} = A_n X_n. \quad (1)$$

On dira que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gouverne la SRS $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de raison d'être stationnaire. On va donc chercher des variables aléatoires X_0 telles que l'unique $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant l'équation (1) soit stationnaire. Pour cela, il sera intéressant de se ramener à un cas où X est compact. D'où l'utilisation d'espaces de drapeaux et d'espaces projectifs dans les deux parties. Nous montrerons des résultats de couplage avec des suites stationnaires dans ces espaces. Nous donnons ici les définitions de couplage que nous utiliserons par la suite.

Définition 0.1.3 (Couplage). Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité à valeurs dans un même espace métrique (X, d) .

1. On dit que les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ couplent si $d(X_n, Y_n)$ tend vers 0 en probabilité,
2. On dit que les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ couplent en temps fini si

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, X_n = Y_n\}) = 1.$$

Comme la suite n'est pas stationnaire, on ne peut pas utiliser le théorème de Birkhoff. L'outil fondamental pour obtenir des résultats de type loi des grands nombres sera le théorème ergodique sous-additif de Kingman [Kin73] rappelé ci-dessous.

Définition 0.1.4 (Sous-additivité). Un s.d.m. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ étant donné, une suite F_n de v.a.r. définie sur Ω est dite θ -sous-additive si elle vérifie les inégalités suivantes :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, F_{n+m} \leq F_n \circ \theta^m + F_m \quad \mathbb{P} - \text{p.s.} .$$

Théorème 0.1.5 (Théorème sous-additif de Kingman [Kin73]). Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ un s.d.m. et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite θ -sous-additive de v.a.r. telle que la partie positive $F_1^+ = \max(F_1, 0)$ de F_1 soit intégrable.

La suite $(\frac{1}{n} F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $\mathbb{P}$ -presque sûrement θ -invariante f à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que :

$$\int f d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int F_n d\mathbb{P} = \inf \frac{1}{n} \int F_n d\mathbb{P}.$$

Si cette limite est finie, et si les F_n sont $\mathbb{P}$ -intégrables, alors la convergence a lieu dans $\mathbb{L}^1$.

En particulier, si le système est ergodique, la suite $(\frac{1}{n} F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $\lim \frac{1}{n} \int F_n d\mathbb{P}$.

Dans la suite de ce chapitre d'exposition, nous présentons les différents cas de SRS auxquels nous nous sommes intéressés et les résultats obtenus dans leur contexte.

0.2 Exposants de Lyapunov

Dans la première partie, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui gouverne la suite récurrente stochastique $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'espace des matrices inversibles d'ordre d . On est dans le cas des produits de matrices aléatoires. Ce sujet a été étudié intensivement depuis les travaux de H. Fürstenberg et H. Kesten ([FK60] et [Fur63]). Le théorème ergodique multiplicatif 1.1.2 d'Oseledets [Ose68], généralisé par Raghunathan [Rag79] montre que $(\frac{1}{n} \log \|X_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement et, si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ergodique, la limite ne peut prendre que d valeurs, éventuellement égales. Ces valeurs sont appelées les exposants de Lyapunov de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et notées par ordre décroissant $\gamma_1, \dots, \gamma_d$.

Le théorème d'Oseledets donne une décomposition de A_n en blocs, dont la taille est donnée par la multiplicité des exposants. On va donc essayer de séparer les exposants de Lyapunov, c'est-à-dire de montrer que pour certains r , $\gamma_r > \gamma_{r+1}$. Ce type de résultats est d'autant plus intéressant qu'É. Le Page a montré (cf. [LP82]) que $\gamma_1 > \gamma_2$ est la condition cruciale pour prouver que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait des théorèmes limites, tels que le TCL.

De nombreux travaux ont donc été menés dans cette direction. Quand les variables aléatoires A_n sont i.i.d. de loi μ , Y. Guivarc'h et A. Raugi ont montré

(cf. [GR85] et [GR89]) que $\gamma_r > \gamma_{r+1}$ si l'action du support S_μ de μ sur l'espace $\mathcal{D}_r$ des sous-espaces de dimension r de $\mathbb{R}^d$ est proximale et irréductible. Ces travaux ont été étendus depuis à des cas de matrices en dépendance markovienne ([Gui84] et [GLP04]), et la condition d'irréductibilité a été raffinée. De plus Ya. Gol'dsheïd et G. A. Margulis ont montré ([GdM87] et [GdM89]) que les exposants sont tous différents quand le semi-groupe engendré par S_μ est Zariski-dense. L'introduction de ces concepts algébriques a donné lieu à de nouvelles avancées, comme [GG96].

Le but du chapitre 1 est de montrer le théorème 1.1.3 et ses corollaires, énoncés dans la partie 1.1. La situation est la suivante :

- Soit S un ensemble fini et A une application de S dans $GL(d, \mathbb{R})$.
- Soit T une matrice irréductible d'indices dans S et de coefficients dans $\{0, 1\}$,

$$\Sigma_T = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} T_{x_n, x_{n+1}} = 1\}$$

le sous-shift unilatère associé. On note $X_0, X_1, \dots$ les projections coordonnées de Σ_T et

$$\Sigma_T^* = \{x_1 \cdots x_k \in S^k | k \in \mathbb{N}, \forall n, T_{x_n, x_{n+1}} = 1\}$$

l'ensemble des mots finis admissibles.

Dans le cas où T est une matrice primitive (c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $T^N > 0$), R. Bowen a montré qu'il existe pour chaque fonction höldérienne f de Σ_T dans $\mathbb{R}$ une unique mesure de probabilité μ telle qu'il existe des constantes C et P telles que pour tout cylindre c de longueur n , on ait :

$$\frac{1}{C} e^{-nP + f(x) + \dots + f(\theta^{n-1}x)} \leq \mu(c) \leq C e^{-nP + f(x) + \dots + f(\theta^{n-1}x)}.$$

Cette mesure est appelée mesure de Gibbs associée au potentiel f . On utilise ici une notion qui généralise ce cas, quand T est simplement irréductible et qui est définie au chapitre 1.

Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 0.2.1 (1.1.3). *S'il existe un $s \in S$ tel que l'ensemble de matrices*

$$T_s = \{A(s_1) \cdots A(s_n) | s_1 = s, s_1 \cdots s_n s \in \Sigma_T^*\}$$

agisse de manière totalement irréductible sur la grassmannienne d'ordre r , notée $\mathcal{D}_r$, et contienne une suite qui contracte $\mathcal{D}_r$, alors, pour toute mesure de Gibbs définie par un potentiel höldérien sur Σ_T , les exposants de Lyapunov de la suite $(A \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

Les notions d'action totalement irréductible et de contraction sont définies et étudiées dans la partie 1.2. Les T_s jouent le rôle du semi-groupe engendré par

S_μ dans le cas indépendant. Ils prennent en compte l'interdiction de certaines successions de matrices.

Dans [GLP04], Y. Guivarc'h et É. Le Page étendent le critère de séparation des exposants des matrices i.i.d à des matrices en dépendance markovienne. Ils remarquent que leur cas inclut la situation présentée ici, quand Σ_T est le shift complet $S^\mathbb{N}$, c'est-à-dire quand $T_{ij} = 1$ pour tout $i, j \in S$. Nous reprenons leur démonstration et l'étendons. Être passé à un sous-shift permet ensuite d'étendre le résultat à des cocycles A dépendant d'un nombre fini de coordonnées (corollaire 1.1.4), et à des chaînes de Markov à espace d'états fini (corollaire 1.1.5).

En outre nous donnons explicitement la démonstration de la séparation du r -ième exposant, c'est-à-dire que nous remplaçons l'espace projectif par la grassmannienne d'ordre r et faisons les adaptations nécessaires.

Signalons enfin que Ch. Bonatti et C. Viana ont montré [BV04] des résultats de séparation pour des cocycles höldériens au dessus d'une mesure de Gibbs. Leur cadre est donc beaucoup plus général, mais leur hypothèse est moins explicite, car elle fait intervenir les holonomies autour d'un point périodique. Elle leur permet cependant de montrer que la situation où les exposants sont séparés est générique en plusieurs sens.

0.3 Applications topicales

0.3.1 Contexte

Dans la seconde partie, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans l'espace Top_d des applications topicales (i.e. croissantes et additivement homogènes) de $\mathbb{R}^d$ dans lui même, et pour les chapitres 2 à 4, dans le sous-espace $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^{d \times d}$ des matrices à coefficients dans le semi-anneau $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ noté $\mathbb{R}_{\max}$.

Dans ce sous-cas, l'équation (1) devient

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, (X_{n+1})_i = \max_j ((A_n)_{ij} + (X_n)_j).$$

Les suites récurrentes stochastiques $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associées à de telles applications modélisent une classe de systèmes à événements discrets. Cette classe inclut les graphes événements temporisés (F. Baccelli [Bac92]), certains réseaux de files d'attente (J. Mairesse [Mai97]) et de multiples applications. Citons par exemple les ateliers flexibles (G. Cohen et al. [CDQV85]), des réseaux ferroviaires (H. Braker [Bra93]) ou un modèle de mécanique statistique (R. Griffiths [Gri90]).

Ces suites ont fait l'objet de nombreux travaux, certains conduisant à des théorèmes limites décrivant le comportement de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de type loi des grands nombres (J.E. Cohen [Coh88], F. Baccelli et Z. Liu [BL92], F. Baccelli et J. Mairesse [BM98] dans le cas $(\max, +)$, A. Jean-Marie et G. Olsder [JMO96], J.M. Vincent [Vin97], J. Mairesse et T. Bousch [BM03] dans le cas topical),

théorème central limite (J. Resing et al. [RdVH⁺90] dans le cas $(\max, +)$) et grandes déviations (F. Toomey [Too02] dans le cas topical). Signalons le livre de F. Baccelli et al. [BCOQ92] qui reprend un grand nombre de résultats dans le cas $(\max, +)$. et celui, plus généraliste, de P. Glasserman et D. Yao [GY94].

Les résultats de convergence de $(\frac{1}{n}X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou de $(\frac{1}{n}(A_{n-1}A_{n-2} \cdots A_0)_{ij})_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelés du premier ordre. Les résultats de convergence de $((X_n)_i - (X_n)_j)_{n \in \mathbb{N}}$ ou de $((X_{n+1})_i - (X_n)_i)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dits du second ordre.

Dans tous les cas, il existe un exposant de Lyapunov maximal (théorème-définition 2.2.7), défini comme limite presque sûre de $(\frac{1}{n} \max_i (X_n)_i)_{n \in \mathbb{N}}$.

0.3.2 Résultats pour les matrices aléatoires non irréductibles

Les chapitres 2 à 4 sont consacrés à l'étude du sous-cas où les A_n sont des matrices à coefficients dans le semi-anneau $\mathbb{R}_{\max}$.

Dans les chapitres 2 et 3, on décompose les matrices aléatoires en blocs (définition 2.4.2), en fonction des coefficients toujours égaux à $-\infty$, et on montre que le comportement des suites est essentiellement déterminé par celui des blocs diagonaux. Nous suivons la démarche de [BL92] et de [Bac92], en nous affranchissant, quand c'est possible, des conditions supplémentaires présentes dans ces deux articles, ou sinon en les modifiant. Ces conditions, qui proviennent du modèle des graphes d'événements temporisés, sont principalement une condition dite de structure fixe (la place des coefficients $-\infty$ n'est pas aléatoire) et une condition de précedence (les coefficients diagonaux sont positifs).

Dans la partie 2.3, on étudie les variables aléatoires définies par l'équation

$$Y_{n+1} = \max(A_n Y_n, B_n) \quad (2)$$

où $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite stationnaire, d'applications (les A_n) et de vecteurs (les B_n) aléatoires.

Dans [BL92], les applications sont des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$, mais tout est rédigé avec les coefficients, sans introduire les matrices elles-mêmes. Dans [Bac92], les matrices sont mises en évidence mais tout n'est pas repris dans ce cadre. Dans les deux cas, $B_n = 0$, mais on peut en déduire le cas où B_n est fini en utilisant une méthode dite de résiduation. En introduisant une notion d'application topicale généralisée (définition 2.2.2), qui généralise à la fois les matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ et les applications topicales, nous obtenons des preuves plus lisibles et un cadre plus général, ce qui sera utile pour la suite.

Signalons aussi que P. Glasserman et D. Yao mènent dans [GY95] une étude unifiée des solutions d'équations du type de (2) quand A_n prend ses valeurs dans un espace de matrices à coefficients dans divers semi-anneaux. La preuve du théorème 2.3.1 revient à mener cette étude, quand A_n prend ses valeurs dans l'ensemble des applications topicales généralisées.

Nous utilisons les résultats de la partie 2.3 pour montrer (théorème 2.4.4) que l'exposant de Lyapunov maximal d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices aléatoires est le maximum des exposants des suites de blocs diagonaux, et cela sans aucune autre condition que l'ergodicité.

En revanche l'abandon de la condition de précédence introduit la possibilité de nouveaux comportements de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On doit donc imposer des conditions supplémentaires pour que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfasse une loi forte des grands nombres.

Ces conditions seront soit l'indépendance des A_n et une condition d'absence de ligne de $-\infty$ dans certains blocs de la matrice (théorème 2.4.8 et son corollaire), soit des conditions de structure fixe et d'ergodicité renforcée (théorème 2.4.10 et lemme 2.4.7).

Les exemples 1 et 2 montrent que dans chaque cas, aucune des deux conditions ne suffit.

La preuve du théorème 2.4.10 est essentiellement celle de [Bac92], alors que celle du théorème 2.4.8 apporte une contribution nouvelle, essentiellement dans le lemme 2.4.13.

Dans la partie 3.4, on montre (théorème 3.4.1) que les suites $((X_n)_i - (X_n)_j)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((X_{n+1})_i - (X_n)_i)_{n \in \mathbb{N}}$, couplent en temps fini avec une suite stationnaire, qui ne dépend pas de la condition initiale X_0 , sous trois hypothèses : une hypothèse sur les exposants de Lyapunov maximaux des blocs diagonaux, une hypothèse de couplage relative à certains blocs de la décomposition précédente, et une hypothèse sur la loi de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Les A_n sont i.i.d. ou ont la propriété de structure fixe). Remarquons que, contrairement au premier ordre, ni condition sur les $-\infty$, ni ergodicité renforcée ne sont nécessaires.

Nous étendons ainsi le résultat de [Bac92] sur le deuxième ordre. Les résultats de la partie 2.3 permettent encore de simplifier la rédaction et d'étendre les preuves.

À nouveau, la preuve du cas i.i.d. est fondée sur le lemme 2.4.13 et les méthodes de [Bac92].

0.3.3 Perte de mémoire

Dans le chapitre 4, on revient sur la propriété dite de perte de mémoire, déjà introduite dans la partie 3.2. J. Mairesse a montré (théorème 3.2.2, extrait de [Mai97]) qu'elle assure le couplage en temps fini de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec une suite

stationnaire, indépendante de la condition initiale X_0 . S. Gaubert et D. Hong, qui lui ont donné son nom, la supposent vérifiée pour prouver l'analyticité de l'exposant de Lyapunov maximal ([GH00]).

Nous prouvons (théorèmes 4.1.3 et 4.1.4) que la propriété de perte de mémoire est générique pour les produits de matrices aléatoires A_n i.i.d. à coefficients finis : si elle n'est pas satisfaite, alors le support de la loi μ de A_1 est inclus dans une union finie d'hyperplans affines et les couples d'atomes de μ sont liés par une relation linéaire.

Ce résultat est présenté dans l'article [Mer04]. Pour le prouver, on utilise les résultats et certaines méthodes de la théorie spectrale et asymptotique des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$, qui est donc rappelée dans la partie 4.2.

0.3.4 Théorèmes limites

Enfin le dernier chapitre montre que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite i.i.d. d'applications topicales et a la propriété de perte de mémoire, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie un théorème central limite (théorème 5.2.1), éventuellement avec vitesse (théorème 5.2.1), un théorème local limite (théorème 5.2.4), un théorème de renouvellement (théorème 5.2.6) et un principe des grandes déviations partiel (théorème 5.2.1). De plus, quand les A_n sont des matrices, on donne des conditions algébriques de nullité de la variance dans le TCL (théorème 5.2.9) et de non-arithméticité dans le TLL (théorème 5.2.11), qui sont vérifiées génériquement (corollaires 5.2.12 et 5.2.10).

Tous ces résultats sont obtenus par la méthode du trou spectral appliquée à la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ils sont présentés dans l'article [Mer05].

Notons que J. Resing et al. [RdVH⁺90] ont déjà prouvé un TCL dans le cas $(\max, +)$ par une méthode de martingale, mais la condition qu'ils obtiennent n'est pas explicite. Notons aussi que F. Toomey [Too02] a établi un principe des grandes déviations, sous une hypothèse de bornitude plus forte que notre condition d'intégrabilité, mais en n'exigeant pas la perte de mémoire.

0.4 Perspectives

Le résultat de F. Toomey suggère que des théorèmes limites restent vrais sans l'hypothèse de perte de mémoire. Quand $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans un ensemble de deux matrices carrées de taille 2, on peut montrer que c'est le cas. En effet, si la propriété de perte de mémoire n'est pas satisfaite, alors il existe une orbite finie dans l'espace projectif au sens $(\max, +)$.

Pour obtenir des résultats dans cette direction, un premier pas consisterait à étudier les mesures invariantes possibles. Cela permettrait aussi, sous l'hypothèse de perte de mémoire, de simplifier le théorème limite local, sous des hypothèses supplémentaires. Ces hypothèses pourraient s'inspirer de celles d'irréductibilité du

cas des matrices inversibles.

Ensuite, on peut s'intéresser au comportement des suites $A_1 \cdots A_n$ dans l'espace projectif. Dans le cas de perte de mémoire, elles écrasent l'espace sur un point au bout d'un temps fini, ce qui est à la base des résultats de J. Mairesse, et de ceux du chapitre 5. Dans les cas étudiés, elles semblent écraser l'espace sur un sous ensemble sur lequel elles ont une action isométrique. Le comportement devrait être clarifié, au moins dans le cas $(\max, +)$.

Finalement, on espère qu'une meilleure connaissance de la dynamique dans l'espace projectif permettrait de prouver des théorèmes limites sans l'hypothèse de perte de mémoire. Un autre angle d'attaque consisterait à utiliser la généricité de la perte de mémoire et étendre les résultats par densité.

Une autre direction pour étendre les théorèmes limites serait de s'affranchir de la condition d'indépendance et de prouver des théorèmes pour des SRS gouvernées par des suites mélangeantes ou provenant de systèmes dynamiques. Un point de départ dans le cas des suites mélangeantes pourrait être l'article de H. Hennion [Hen97] sur les matrices positives.

0.5 Sur le lien entre les deux parties

On peut voir les produits de matrices au sens $(\max, +)$ comme un cas limite des produits de matrices au sens usuel. En effet, si $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ n'a pas de ligne de $-\infty$, l'application A de $\mathbb{R}^d$ dans lui même définie par $(Ax)_i = \max_j (A_{ij} + x_j)$, qui correspond au produit de matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$, est limite uniforme quand λ tend vers $+\infty$ des applications A^λ définies par

$$(A^\lambda x)_i = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\sum_j e^{\lambda A_{ij}} e^{\lambda x_j} \right).$$

En utilisant cette convergence, T. Bousch et J. Mairesse ont déduit du théorème d'Oseledets pour les matrices positives ([Rag79]) la loi forte des grands nombres pour la suite $(\frac{1}{n} A_1 \cdots A_n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$, où x_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite stationnaire de matrices aléatoires et où tous les produits sont pris au sens $(\max, +)$. On appellera exposants de Lyapunov au sens $(\max, +)$ les limites de cette suite.

Génériquement, une suite de matrices aléatoires inversibles i.i.d. a d exposants de Lyapunov au sens classique, et l'espace projectif est contracté en direction d'une solution stationnaire de l'équation 1 (dite régime stationnaire).

Pour des produits au sens $(\max, +)$, nous montrons au chapitre 4 qu'une suite générique de matrices aléatoires i.i.d. a la propriété de perte de mémoire. Cela

implique qu'il n'y a qu'un seul exposant de Lyapunov au sens $(\max, +)$, mais aussi que l'espace projectif $(\max, +)$ est contracté en direction d'un unique régime stationnaire.

Les produits de matrices strictement positives contractent le cône des vecteurs positifs vers un unique régime stationnaire. Il ne semble pas facile d'en déduire un régime stationnaire pour le cas $(\max, +)$. En effet, même pour des matrices à coefficients finis, le régime stationnaire n'est pas nécessairement unique. On retrouve donc des problèmes analogues à ceux du comportement des mesures de Gibbs quand la température tend vers 0.

On obtient plus facilement les régimes stationnaires directement (Théorèmes 3.2.2, 3.3.2 et 3.4.1), sous des hypothèses supplémentaires, génériques dans le cas irréductible.

Dans le cas déterministe, on peut adapter les arguments de J. Brémont [Bré03] pour le "refroidissement" des mesures de Gibbs associées à un potentiel localement constant. On montre ainsi que si V^λ est le vecteur propre positif normalisé associé au rayon spectral de la matrice positive $(e^{\lambda A_{ij}})_{1 \leq i, j \leq d}$, alors pour toute coordonnée i , $\frac{1}{\lambda} \ln(V_i^\lambda)$ converge vers une limite H_i . La limite H est un vecteur propre au sens $(\max, +)$ de la matrice A , non nécessairement unique (Proposition 4.2.4).

Finissons cette partie en signalant que la théorie des produits de matrices aléatoires classiques a été une source d'intuitions pour le chapitre 4 et de méthodes pour le chapitre 5.

Première partie

Matrices aléatoires inversibles

Chapitre 1

Séparation des exposants de Lyapunov : cas des sous-shifts de type fini

1.1 Présentation et résumé

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ un système dynamique mesurable et $M : \Omega \rightarrow M(\mathbb{R}, d)$ une matrice aléatoire.

On pose $M_0 = I$, où I désigne la matrice identité de rang d et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = M \circ \theta^{n-1} \cdots M \circ \theta M$.

Le premier résultat découle immédiatement du théorème sous-additif de Kingman et donne le comportement de $\|M_n\|$:

Théorème 1.1.1 ([FK60],[Rag79]). *Si $\log^+(\|M\|)$ est intégrable, alors la suite $(\frac{1}{n} \log(\|M_n\|))_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire γ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. De plus γ est θ invariante et*

$$\frac{1}{n} \mathbb{E} \log(\|M_n\|) \rightarrow \mathbb{E} \gamma.$$

Ce résultat avait été démontré dès 1960, sans le théorème de Kingman, par H. Furstenberg et H. Kesten [FK60] dans le cas où les matrices aléatoires $M \circ \theta^n$ sont i.i.d.. En outre γ est appelé premier exposant de Lyapunov de la suite $(M \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il coïncide avec le premier coefficient γ_1 du théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets que nous énonçons maintenant.

Théorème-Définition 1.1.2 ([Ose68]).

Si θ est inversible, si M est à valeurs dans $GL(\mathbb{R}, d)$ et si la variable aléatoire réelle $\log(\max(\|M\|, \|M^{-1}\|))$ est intégrable, alors il existe une variable aléatoire $\phi : \Omega \rightarrow GL(\mathbb{R}, d)$ et des variables aléatoires réelles $\gamma_1 \geq \gamma_2 \cdots \geq \gamma_d$,

θ -invariantes, appelées exposants de Lyapunov de la suite $(M \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$, telles que les énoncés suivants soient vérifiés presque sûrement :

- i) pour tout n , la matrice aléatoire $\phi^{-1} \circ \theta^n M_n \phi$ est diagonale par bloc ;
- ii) le i -ème vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ vérifie

$$\lim \frac{1}{n} \log \|M_n \phi e_i\| = \gamma_i$$

et i et j sont dans le même bloc d'indices pour l'énoncé i) ssi $\gamma_i = \gamma_j$.

En cas d'ambiguïté, on notera $\gamma_i(M, \theta)$ les variables ainsi définies.

M.S. Raghunathan a montré dans [Rag79] que le deuxième énoncé reste vrai pour des matrices non nécessairement inversibles dès que $\log^+(\|M\|)$ est intégrable. Sa démonstration fait apparaître les exposants de Lyapunov en fonction des limites γ obtenues en appliquant le théorème 1.1.1 aux suites $(\wedge_r M \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\wedge_r M$ est la matrice associée à l'action de M sur le r -ième produit extérieur de $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{1}{n} \log \|\wedge_r M_n\| \rightarrow \sum_{i=1}^r \gamma_i.$$

Comme annoncé dans l'introduction, nous allons montrer un théorème de séparation des exposants de Lyapunov, adapté de [GLP04]. On se place dans la situation suivante :

- Soit S un ensemble fini et A une application de S dans $GL(d, \mathbb{R})$.
- Soit T une matrice irréductible d'indices dans S et de coefficients dans $\{0, 1\}$,

$$\Sigma_T = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} T_{x_n, x_{n+1}} = 1\}$$

le sous-shift unilatère associé. On note $X_0, X_1, \dots$ les projections coordonnées de Σ_T et

$$\Sigma_T^* = \{x_1 \cdots x_k \in S^k | k \in \mathbb{N}, \forall n, T_{x_n, x_{n+1}} = 1\}$$

l'ensemble des mots finis admissibles.

- Soit p une fonction höldérienne strictement positive sur Σ_T telle que pour tout $x \in \Sigma_T$, $\sum_{s \in S, s.x \in \Sigma_T} p(s.x) = 1$. Elle définit un opérateur de Perron P et une unique mesure P -invariante μ sur Σ_T , qui est invariante par le décalage θ . La suite de variables aléatoires $(A \circ X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire et bornée donc possède des exposants de Lyapunov. Le r -ième exposant est noté γ_r ou $\gamma_r(A, \theta)$ si on veut préciser.

L'unicité de la mesure μ découle du théorème de Ruelle-Perron-Frobénius. Pour une démonstration dans le cas où T est simplement irréductible, on peut consulter [Bal00].

Dans le cas où T est une matrice primitive (c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $T^N > 0$), les mesures P -invariantes associées à de telles fonctions p

sont les mesures de Gibbs associées à des potentiels höldériens (cf. [Bow75]). Par extension, on appellera mesures de Gibbs höldérienne toutes les mesures μ associées à des fonctions p höldériennes.

Le but de ce chapitre est de prouver le critère suivant, qui assure que deux exposants consécutifs sont distincts :

Théorème 1.1.3. *S'il existe un $s \in S$ tel que le semi-groupe*

$$T_s = \{A(s_1) \cdots A(s_n) | n \in \mathbb{N}, s_1 = s, (s_1, \dots, s_n, s) \in \Sigma_T^*\}$$

agisse de manière totalement irréductible sur l'espace $\mathcal{D}_r$ des drapeaux homogènes d'ordre r et contienne une suite qui contracte $\mathcal{D}_r$, alors les coefficients de Lyapunov pour une mesure de Gibbs höldérienne sur Σ_T vérifient $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

Les notions de drapeaux, d'action totalement irréductible et de contraction sont définies et étudiées dans la partie 1.2. On a déjà remarqué que les semi-groupes T_s généralisent le semi-groupe dont l'action donnait le critère de séparation pour des matrices i.i.d..

On déduit du résultat précédent un résultat pour des fonctions dépendant d'un nombre fini de coordonnées.

Corollaire 1.1.4. *Soient S un ensemble fini, T une matrice irréductible à indices dans S et à coefficients dans $\{0, 1\}$ et A une application de Σ_T dans $G = Gl(d, \mathbb{R})$ ne dépendant que des k premières coordonnées.*

Pour $(t_1, \dots, t_k) \in \Sigma_T^$, soit $T_{t_1, \dots, t_k}$ le semi-groupe des matrices de la forme $A(s_1, \dots, s_k) \cdots A(s_{n+1}, \dots, s_{n+k})$ tels que $s_1, \dots, s_{n+k}$ vérifie :*

- $s_1 \cdots s_{n+k} \in \Sigma_T^*$
- $s_1 \cdots s_k = t_1 \cdots t_k$
- $s_{n+2} \cdots s_{n+k} = t_1 \cdots t_{k-1}$

S'il existe $(t_1, \dots, t_k) \in S^k$, tel que $T_{t_1, \dots, t_k}$ agisse de manière totalement irréductible sur $\mathcal{D}_r$ et contienne une suite qui contracte $\mathcal{D}_r$, alors les coefficients de Lyapunov de toute mesure de Gibbs associée à un potentiel höldérien sur Σ_T vérifient $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

Démonstration. Posons $\tilde{S} = S^k$, et soit $\tilde{T}$ la matrice à indices dans $\tilde{S}$ définie par

$$\tilde{T}_{(s_1, \dots, s_k), (s'_1, \dots, s'_k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } (s'_1, \dots, s'_k, s_k) \in \Sigma_T^* \text{ et } (s'_1, \dots, s'_{k-1}) = (s_2, \dots, s_k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Sigma_{\tilde{T}}$ est le sous-shift de $\tilde{S}^{\mathbb{N}}$ associé à $\tilde{T}$ et μ la mesure de Gibbs sur $\Sigma_{\tilde{T}}$ associée à la fonction $\tilde{p}$ définie par

$$\tilde{p}((s_1, \dots, s_k), (s_2, \dots, s_{k+1}) \cdots) = p(s_1, s_2 \cdots).$$

Il suffit de remarquer que le système dynamique considéré est isomorphe à $(\Sigma_{\tilde{T}}, \mu, \theta)$, que le conjugué $\tilde{A}$ de A par l'isomorphisme ne dépend que d'une coordonnée de $\Sigma_{\tilde{T}}$ et que les hypothèses de la proposition sont exactement celles pour lesquelles $(\Sigma_{\tilde{T}}, \mu, \theta)$ et $\tilde{A}$ vérifient les hypothèses du théorème 1.1.3. $\square$

La démonstration du théorème 1.1.3 se fera sur le shift bilatère. La probabilité sur les coordonnées négatives sachant $\forall n \geq 0, X_i = x_i$ est notée $\mathbb{P}_x$. Si p ne dépend que des deux premières coordonnées, les $\mathbb{P}_x$ sont les mesures d'une chaîne de Markov à états dans S , avec donnée initiale x_0 . La projection de $\hat{\mu}$ sur les coordonnées négatives est donc une mesure de Markov stationnaire. Comme $\gamma_r(\theta, A) = \gamma_r(\theta^{-1}, {}^t A)$, on en déduit :

Corollaire 1.1.5. *Soit S un ensemble fini et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans S , stationnaire et irréductible. Soit A une application de S dans $G = Gl(d, \mathbb{R})$. S'il existe un $s \in S$ tel que le semi-groupe défini par*

$$T_s = \{A(s_1) \cdots A(s_n) | s_n = s, \mathbb{P}(X_0 = s, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) > 0\}$$

agisse de manière totalement irréductible sur $\mathcal{D}_r$ et contienne une suite qui contracte $\mathcal{D}_r$, alors les coefficients de Lyapunov de la suite $(A \circ X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient $\gamma_r > \gamma_{r+1}$.

La suite du chapitre constitue la démonstration du théorème 1.1.3. On commence par introduire les différents outils algébriques dans la partie 1.2. On étudie, dans la partie 1.3, les noyaux harmoniques qui remplacent les mesures stationnaires du cas i.i.d. On montre qu'il en existe (théorème 1.3.2) et qu'ils prennent leurs valeurs dans l'ensemble des probabilités irréductibles (théorème 1.3.4). Dans la partie suivante, on montre (théorème 1.4.1) que la suite $(MM \circ \theta \cdots M \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte presque sûrement $\mathcal{D}_r$. Enfin, dans la dernière partie, on en déduit le critère de séparation.

1.2 Outils algébriques

1.2.1 Décompositions du groupe linéaire

Notations. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note I_d l'ensemble des entiers compris entre 1 et d . Soient $G = GL(\mathbb{R}, d)$, $K = O(\mathbb{R}, d)$, $N = N(\mathbb{R}, d)$ le sous-groupe de G des matrices triangulaires inférieures à éléments diagonaux égaux à 1, $A = A(\mathbb{R}, d)$ le sous-groupe de G des matrices diagonales à éléments diagonaux strictement positifs. On désignera par $\|x\|$ la norme associée au produit scalaire canonique si $x \in \mathbb{R}^d$, la norme d'application linéaire associée si $x \in G$. Cependant, la plupart des résultats seront valables pour une norme quelconque grâce à l'équivalence des normes sur les espaces de dimension finie.

Théorème-Définition 1.2.1 (Décomposition polaire).

Toute matrice $g \in G$ s'écrit $g = xa(g)k$, avec

i) $x, k \in K$

ii) $a(g) = \text{diag}(a_1(g), \dots, a_d(g)) \in A$ et $a_1(g) \geq a_2(g) \geq \dots \geq a_d(g) > 0$.

De plus $a(g)$ est unique et les $a_i(g)$ sont les racines carrées des valeurs propres de $g^t g$. En particulier, $a_1(g) = \|g\|$ et $a_d(g) = \|g^{-1}\|^{-1}$.

Une telle décomposition est dite *décomposition polaire* de g .

Démonstration. Si $g = xa(g)k$, alors $g^t g = xa^2(g)x^{-1}$, d'où la seconde partie du théorème.

En outre $g^t g$ est symétrique définie positive. Elle admet donc une base ortho-normée de vecteurs propres que l'on ordonne par valeurs propres décroissantes. Matriciellement cela s'écrit $g^t g = xa^2x^{-1}$, avec $x \in K$ et a comme souhaitée. On pose alors $k = a^{-1}x^{-1}g$ et on vérifie que $k \in K$ et $g = xak$. $\square$

Remarque 1.2.1. Si $g = xa(g)k$, alors $g^{-1} = k^{-1}a^{-1}(g)x^{-1}$, d'où $a_i(g^{-1}) = a_{d+1-i}^{-1}(g)$. De même, $\kappa g = \kappa xa(g)k$, donc $a(\kappa g) = a(g)$, $\forall \kappa \in K$.

Théorème-Définition 1.2.2 (Décomposition d'Iwasawa).

Toute matrice $g \in G$ s'écrit de façon unique $g = \eta(g)b(g)\kappa(g)$ avec

1. $\eta(g) \in N$
2. $\kappa(g) \in K$
3. $b(g) \in A$.

On note alors $b(g) = \text{diag}(b_1(g), \dots, b_d(g))$ et on appelle *décomposition d'Iwasawa* de g cette décomposition.

Démonstration. Existence :

On applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt aux vecteurs colonnes de ${}^t g^{-1}$, notés $v_1, \dots, v_d$. On obtient $u_1, \dots, u_d$ tels que la matrice de passage η de v à u soit triangulaire supérieure de diagonale I . La matrice de passage κ de $e_1, \dots, e_d$ à $\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_d}{\|u_d\|}$ est orthogonale et ${}^t g = \kappa \text{diag}(\|u_1\|^{-1}, \dots, \|u_d\|^{-1})\eta$.

Unicité :

Si $\eta b \kappa$ et $\tilde{\eta} \tilde{b} \tilde{\kappa}$ sont deux décompositions de g , alors $(\tilde{\eta} \tilde{b})^{-1} \eta b = \tilde{\kappa} \kappa^{-1}$ est orthogonale et triangulaire inférieure. C'est donc l'identité. Donc $\kappa = \tilde{\kappa}$ et $\tilde{\eta} \tilde{b} = \eta b$, d'où $\tilde{b} = b$ (c'est la restriction à la diagonale de l'égalité précédente) et $\tilde{\eta} = \eta$. $\square$

1.2.2 Produits extérieurs

Définition 1.2.3 (Produits extérieurs). Soient E un espace vectoriel de dimension finie d et $r \in I_d$.

1. On appelle r -ième produit extérieur de E , et on note $\bigwedge_r E$, l'espace des formes r -linéaires alternées sur E .
2. Un élément de $\bigwedge_r E$ est appelé r -vecteur.

3. Pour toute forme r -linéaire f sur E , l'antisymétrisée de f , notée $Alt(f)$, est donnée par :

$$Alt(f)(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} Sgn(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)})$$

4. Pour toutes formes $f \in \bigwedge_k E$ et $g \in \bigwedge_l E$, on définit le produit extérieur

$$f \wedge g \in \bigwedge_{k+l} E \text{ de } f \text{ et } g \text{ par } f \wedge g = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(f \otimes g), \text{ où}$$

$$f \otimes g(x_1, \dots, x_{k+l}) = f(x_1, \dots, x_k)g(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}).$$

5. Un r -vecteur non nul qui s'écrit $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ (E est identifié à $\bigwedge_1 E$) est dit décomposable.

Résultats :

- 1) Soit $(e_i)_{i=1}^d$ une base de E , alors $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq d}$ est une base de $\bigwedge_r E$. On identifie désormais $\bigwedge_r E$ à $\mathbb{R}^{C_d^r}$.

Via cette identification on transporte la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^{C_d^r}$ sur $\bigwedge_r E$. On a alors sur $\bigwedge_r E$ un produit scalaire $<, >$ qui vérifie pour $(u_i)_{i=1}^r \in E^r$ et $(v_i)_{i=1}^r \in E^r$:

$$< u_1 \wedge \dots \wedge u_r, v_1 \wedge \dots \wedge v_r > = det[(< u_i, v_j >)_{i,j=1}^r].$$

On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

- 2) $GL(\mathbb{R}, d)$ opère sur $\bigwedge_r E$ par :

$$\forall g \in GL(\mathbb{R}, d), \forall (u_i)_{i=1}^r \in E^r, g.(u_1 \wedge \dots \wedge u_r) = gu_1 \wedge \dots \wedge gu_r.$$

On note $\bigwedge_r g$ la matrice de $GL(\mathbb{R}, C_d^r)$ associée à cette action écrite sur la base du 1).

Les indices sont donc pris dans $\mathcal{C}_r = \{(i_1, \dots, i_r) \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq d\}$, ordonné par l'ordre lexicographique.

- 3) $< e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}, ge_{j_1} \wedge \dots \wedge ge_{j_r} >$ est égal au mineur de g obtenu en conservant uniquement les lignes $i_1, \dots, i_r$ et les colonnes $j_1, \dots, j_r$.
 $<^t ge_{i_1} \wedge \dots \wedge^t ge_{i_r}, e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_r} >$ est égal au mineur de ${}^t g$ obtenu en conservant uniquement les lignes $j_1, \dots, j_r$ et les colonnes $i_1, \dots, i_r$.
- 4) On en déduit $(\bigwedge_r g)^{-1} = \bigwedge_r (g^{-1})$ et ${}^t(\bigwedge_r g) = \bigwedge_r ({}^t g)$.

- 5) Si $g = xak$ est une décomposition polaire de g ,
alors $(\bigwedge_r g) = (\bigwedge_r x)(\bigwedge_r a)(\bigwedge_r k)$ en est une de $(\bigwedge_r g)$ et

$$\forall \iota = (i_1, \dots, i_r) \in \mathcal{C}_r, \quad a_\iota(g) := a_\iota(\bigwedge_r g) = a_{i_1} \cdots a_{i_r}(g).$$

On notera aussi ι_r pour $(1, \dots, r)$.

- 6) Si $g = \eta bk$ est la décomposition d'Iwasawa de g , alors $(\bigwedge_r g) = (\bigwedge_r \eta)(\bigwedge_r b)(\bigwedge_r k)$
est celle de $(\bigwedge_r g)$ et

$$\forall \iota = (i_1, \dots, i_r) \in \mathcal{C}_r, \quad b_\iota(g) := b_\iota(\bigwedge_r g) = b_{i_1} \cdots b_{i_r}(g).$$

1.2.3 Comparaison des décompositions

Lemme 1.2.4.

Pour tout $g \in G$ et tout $j \in I_d$, on a

$$\frac{1}{\|g^{-1}\|} = \frac{1}{a_1(g^{-1})} = a_d(g) \leq b_j(g) \leq a_1(g) = \|g\|.$$

En appliquant ce lemme à $\bigwedge_r g$, on obtient :

Corollaire 1.2.5.

Pour tout $g \in G$, tout $r \in \{1, \dots, d\}$ et tout $j = (j_1, \dots, j_r) \in \mathcal{C}_r$, on a

$$\prod_{k=1}^r a_{d-r+k}(g) \leq \prod_{k=1}^r b_{j_k}(g) \leq \prod_{k=1}^r a_k(g).$$

Démonstration du lemme. Les égalités sont claires. Soit $g = \eta bk$ une décomposition d'Iwasawa de g . Le coefficient b_j est le j^{eme} élément de la diagonale de $\eta b = g^t k$, donc $b_j = \langle g^t k e_j, e_j \rangle \leq \|g^t k\| = \|g\|$.
De même $b_j^{-1} = \langle k g^{-1} e_j, e_j \rangle \leq \|k g^{-1}\| = \|g^{-1}\|$. $\square$

Pour améliorer la minoration du lemme 1.2.4, on pose, pour tout $r \in I_d$ tout $g \in G$, et pour tout $k \in K$,

$$\Delta_r(g) = \langle e_{\iota_r}, \bigwedge_r g e_{\iota_r} \rangle \quad \text{et} \quad \phi_r(k) = \log(|\Delta_r(k)|).$$

Lemme 1.2.6.

Soient $g \in G$, $k \in K$ et $g = xa(g)\kappa$ une décomposition polaire de g . Alors :

$$\forall r \in I_d, \log(a_{i_r}(g)) + \phi_r(kx) \leq \log(b_{i_r}(kg)) \leq \log(a_{i_r}(g)).$$

Démonstration. La seconde inégalité résulte du corollaire 1.2.5 et de la remarque suivant la définition de la décomposition polaire.

Pour prouver la première inégalité, remarquons qu'on a :

$$\frac{b_{i_r}(kg)}{a_{i_r}(kg)} = \frac{\left\| \bigwedge_r^t (kg) e_{i_r} \right\|}{\left\| \bigwedge_r^t g \right\|} = \frac{\left\| \bigwedge_r^t g \bigwedge_r^t k e_{i_r} \right\|}{\left\| \bigwedge_r^t g \right\|}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{b_{i_r}(kg)}{a_{i_r}(kg)} &= \frac{\left\| \bigwedge_r^t a(g) \bigwedge_r^t x \bigwedge_r^t k e_{i_r} \right\|}{\left\| \bigwedge_r^t g \right\|} \\ &= \frac{\left(\sum_{j \in \mathcal{C}_r} a_j(g)^2 \langle e_{i_r}, \bigwedge_r^t k \bigwedge_r^t x(g) e_j \rangle^2 \right)^{1/2}}{a_{i_r}(g)} \\ &\geq \left| \langle e_{i_r}, \bigwedge_r^t k \bigwedge_r^t x(g) e_{i_r} \rangle \right|. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.2.7. $\forall r \in I_d, \forall p \in [1, +\infty], \phi_r \in \mathbb{L}^p(K, m_K)$, où m_K est la mesure de Haar normalisée sur K .

Démonstration. On fixe d et on fait un récurrence finie sur r .

Soit σ_{d-1} la loi uniforme sur S^{d-1} . Soit $p \geq 1$. Il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\begin{aligned} \int_K |\log(|\Delta_1(k)|)|^p dm_K(k) &= \int_{S^{d-1}} |\log(|\langle v, e_1 \rangle|)|^p d\sigma_{d-1}(v) \\ &\leq c \int_0^\pi |\log(|\cos(\Theta)|)|^p d\Theta \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Supposons le lemme montré jusqu'au rang $r-1$.

On admet pour l'instant la relation suivante, où $u_r(g)$ est un vecteur normé orthogonal aux vecteurs $ge_1, \dots, ge_{r-1}$:

$$|\Delta_r(g)| \geq |\Delta_{r-1}(g)| \langle ge_r, u_r(g) \rangle \quad (1.1)$$

On en déduit que l'intégrabilité de $|\phi_r|^p$ équivaut à celle de $|\log(|\langle u_r(\cdot), e_r \rangle|)|^p$. Soit X une variable aléatoire à valeur dans K de loi m_K .

$$\mathbb{E}[|\log(|\langle u_r(X), X e_r \rangle|)|^p] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|\log(|\langle u_r(X), X e_r \rangle|)|^p | X e_1, \dots, X e_{r-1}]].$$

Étant donné $(v_1, \dots, v_{r-1})$ un système de vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^d$, la distribution de Xe_r sachant $Xe_1 = v_1, \dots, Xe_{r-1} = v_{r-1}$ est la loi uniforme sur la sphère unité de l'orthogonal dans $\mathbb{R}^d$ de $\text{vect}(v_1, \dots, v_{r-1})$. On a donc l'existence de $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\log(|\langle u_r(X), Xe_r \rangle|)|^p] &= \int_{S^{d-r}} |\log(|\langle e_1, v \rangle|)|^p d\sigma_{d-q}(v) \\ &\leq C \int_0^\pi |\log(|\cos \Theta|)|^p d\Theta \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré par une récurrence finie.

Il reste à montrer la relation 1.1. C'est ce que nous faisons maintenant.

Pour tout $q \in I_d$, on note π_q le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^d$ sur $V_q = \bigoplus_{i=1}^q \mathbb{R}e_i$ et $\delta_q(g)$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre $r-1$ obtenue à partir de $(\pi_r(ge_1), \dots, \pi_r(ge_{r-1}))$ en enlevant la ligne q . On définit alors $u_r(g)$ par les relations suivantes :

$$v(g) = \sum_{i=1}^r (-1)^i \delta_i(g) e_i \text{ et } u_r(g) = \frac{v(g)}{\|v(g)\|}.$$

Alors, on a pour tout $k \in I_{r-1}$,

$$\langle v(g), ge_k \rangle = \text{Det}(\pi_r(ge_1), \dots, \pi_r(ge_{r-1}), \pi_r(ge_k)) = 0,$$

donc $v(g)$ et $u_r g$ sont bien orthogonaux aux vecteurs $ge_1, \dots, ge_{r-1}$.

Si $\Delta_{r-1}(g) = 0$, l'inégalité (1.1) est triviale. Sinon la famille $(\pi_r(ge_1), \dots, \pi_r(ge_{r-1}))$ est de rang $r-1$, donc $(\pi_r(ge_1), \dots, \pi_r(ge_{r-1}), u_r(g))$ est une base de V_r . En décomposant $\pi_r(ge_r)$ dans cette base et on développe le déterminant suivant la dernière colonne. Par l'orthogonalité de $u_r(g)$ par rapport aux autres vecteurs, tous les termes s'annulent, et il vient :

$$\begin{aligned} |\Delta_r(g)| &= |\text{Det}(\pi_r(ge_1), \dots, \pi_r(ge_r))| \\ &= |\langle u_r(g), ge_r \rangle| |\text{Det}(\pi_r(ge_1), \dots, \pi_r(ge_{r-1}), u_r(g))| \end{aligned}$$

Comme $\|v(g)\|^2 = \sum_{i=1}^r \delta_i(g)^2 = |\text{Det}(\pi_r(ge_1), \dots, \pi_r(ge_{r-1}), v(g))|$, on en déduit :

$$\begin{aligned} |\Delta_r(g)| &= |\langle u_r(g), ge_r \rangle| \|v(g)\| \\ &\geq |\langle u_r(g), ge_r \rangle| |\delta_r(g)| \\ &= |\langle u_r(g), ge_r \rangle| |\Delta_{r-1}(g)| \end{aligned}$$

□

1.2.4 Espaces des drapeaux, contractions

Dans toute la suite, $r \in I_d$ sera une dimension de sous-espace de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2.8 (Espaces des drapeaux). On appelle espace des drapeaux d'ordre r , et on note $\mathcal{D}_r$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ de dimension r .

Pour tout $\Theta \subset I_{d-1}$, on appelle drapeau de type Θ un Θ -uplet $(U_i)_{i \in \Theta}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ tels que

$$\forall i \in \Theta, \dim U_i = i \text{ et } \forall i, j \in \Theta, i < j \Rightarrow U_i \subset U_j.$$

On note $\mathcal{D}_\Theta$ l'ensemble des drapeaux de type Θ .

Remarque 1.2.2. Si $U \in \mathcal{D}_r$, et si $(u_i)_{i=1}^r$ est une base de U , on identifiera U à $\overline{u_1 \wedge \cdots \wedge u_r} \in \mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$, ce qui munit $\mathcal{D}_\Theta$ d'une structure d'espace métrique compact.

Notations.

On note, pour tout $r \in \Theta$, π_r la r -ième projection de $\mathcal{D}_\Theta$.

Le drapeau dit canonique, que l'on notera ∂_Θ est donné par :

$$\forall r \in \Theta, \pi_r(\partial_\Theta) = \overline{e_r}.$$

Le groupe G opère sur $\mathcal{D}_\Theta$ de la façon suivante :

$$\forall g \in G, \forall (U_{i_1}, \dots, U_{i_m}) \in \mathcal{D}_\Theta, g.(U_{i_1}, \dots, U_{i_m}) = (g(U_{i_1}), \dots, g(U_{i_m})).$$

Le stabilisateur de ∂_Θ pour cette action est noté P_Θ .

Définition 1.2.9 (Contractions).

1. On dit qu'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices de G contracte $\mathbb{P}\mathbb{R}^d$ s'il existe $z \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que pour toute valeur d'adhérence M de $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, M est de rang 1 et a pour image $\bar{z} = \mathbb{R} z$.
On dit alors que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathbb{P}\mathbb{R}^d$ en direction de $\bar{z}$.
2. On dit qu'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices de G contracte $\mathcal{D}_r$ si $\bigwedge_r g_n$ contracte $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R})$. On dira aussi que la suite contracte $\mathcal{D}_r$.

Remarque 1.2.3. les valeurs d'adhérence de $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelées les valeurs d'adhérence quasi-projective de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 1.2.10. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de G .

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n = x_n a(g_n) k_n$ une décomposition polaire de g_n .

- 1) $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$ si et seulement si on a les deux relations suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_2(\bigwedge_r g_n)}{a_1(\bigwedge_r g_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{r+1}(g_n)}{a_r(g_n)} = 0 \quad (1.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bigwedge_r x_n \cdot \overline{e_{i_r}} = \bar{z}. \quad (1.3)$$

- 2) si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$, alors, quitte à changer certains x_n et k_n en leurs opposés, on a :

$$\forall u \in \bigwedge_r \mathbb{R}^d, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bigwedge_r a(g_n) \bigwedge_r^t x_n u}{a_{i_r}(g_n)} = \frac{\langle u, z \rangle}{\|z\|} e_{i_r}. \quad (1.4)$$

Démonstration. Il suffit de la faire pour $r = 1$.

- 1) Remarquons qu'on peut écrire $\frac{g_n}{\|g_n\|}$ comme :

$$\frac{g_n}{\|g_n\|} = \frac{g_n}{a_1(g_n)} = x_n \text{diag} \left(1, \frac{a_2(g_n)}{a_1(g_n)}, \dots, \frac{a_d(g_n)}{a_1(g_n)} \right) k_n. \quad (1.5)$$

Supposons que les relations (1.2) et (1.3) sont vérifiées, et que M est une valeur d'adhérence de $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Par définition, il existe une suite n' telle que $(g_{n'})$ converge vers M . Comme K est compact, on peut supposer que $(x_{n'})$ et $(k_{n'})$ convergent respectivement vers x et k . En outre, le terme diagonal de la décomposition (1.5) tend vers $\text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ d'après (1.2), donc $M = x \text{diag}(1, 0, \dots, 0) k$ est de rang 1 et $(\overline{x_{n'} e_1})$ tend vers $\bar{z}$, donc $\overline{x e_1} = \bar{z}$, et $\text{Im}(M) = \bar{z}$. Donc si les relations (1.2) et (1.3) sont vérifiées, alors la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$.

Si (1.2) n'est pas vérifiée, alors il existe une suite extraite $(g_{n'})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\left(\frac{a_2(g_{n'})}{a_1(g_{n'})} \right)$ tende vers $\tau_2 > 0$. Comme K et $[0, 1]$ sont compacts, quitte à extraire encore, on peut supposer que chacun des termes de la décomposition (1.5) tend vers une limite. Notons x , k et $\text{diag}(1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ ces limites. Alors $x \text{diag}(1, \tau_2, \dots, \tau_d) k$ est une valeur d'adhérence de $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ de rang au moins 2, donc la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne contracte pas $\mathcal{D}_r$.

Si (1.3) n'est pas vérifiée, alors il existe $\bar{v} \in \mathcal{D}_r \setminus \{\bar{z}\}$ et une suite extraite $(g_{n'})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(\overline{x_{n'} e_1})$ tende vers $\bar{v}$.

Comme K et $[0, 1]$ sont compacts, quitte à extraire encore, on peut supposer que chacun des termes de la décomposition (1.5) tend vers une limite. Notons x , k et $\text{diag}(1, \tau_2, \dots, \tau_d)$ ces limites. Alors $M = x \text{diag}(1, \tau_2, \dots, \tau_d) k$ est une valeur d'adhérence de $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $\overline{xe_1} = \bar{v}$, $v \in \text{Im}(M)$ et la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne contracte pas $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$.

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a(g_n)^t x_n u}{a_1(g_n)}$ appartient au compact $[-\|u\|, \|u\|]$. D'après le 1), on sait que $\left(\frac{a(g_n)}{a_1(g_n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\text{diag}(1, 0, \dots, 0)$, donc les valeurs d'adhérence de la suite sont les $\langle^t x u, e_1 \rangle e_1$, où x est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or on sait aussi que les valeurs d'adhérence x de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient $x e_1 = \pm \frac{z}{\|z\|}$, donc $\langle^t x u, e_1 \rangle = \langle u, x e_1 \rangle = \pm \frac{\langle u, z \rangle}{\|z\|}$.

Donc, quitte à changer certains x_n et k_n en leurs opposés, $\left(\frac{a(g_n)^t x_n u}{a_1(g_n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\frac{\langle u, z \rangle}{\|z\|} e_1$.

□

Lemme 1.2.11. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de G qui contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$.

Soit $g_n = x_n a(g_n) k_n$ une décomposition polaire de g_n .

Soit $g_n = \eta_n b(g_n) \kappa_n$ la décomposition d'Iwasawa de g_n .

1) On a les relations suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{i_r}(g_n)}{a_{i_r}(g_n)} = \left| \frac{\langle z, e_{i_r} \rangle}{\|z\|} \right| \quad (1.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n \kappa_n^{-1} e_{i_r} = \bar{e}_{i_r} \quad (1.7)$$

$$\forall j \in \mathcal{C}_r \setminus \{i_r\}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{i_r} b_j}{a_{i_r}^2}(g_n) = 0. \quad (1.8)$$

2) si z et e_{i_r} ne sont pas orthogonaux, alors on a aussi :

$$\forall j \in \mathcal{C}_r \setminus \{i_r\}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_j(g_n)}{b_{i_r}(g_n)} = 0 \quad (1.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_n e_{i_r} = \frac{z}{\langle z, e_{i_r} \rangle}. \quad (1.10)$$

Démonstration. Là encore il suffit de faire la démonstration dans le cas $r = 1$.

1) Remarquons que l'on a :

$$a(g_n)^t x_n e_1 = k_n^t g_n e_1 = k_n \kappa_n^{-1} b(g_n)^t \eta_n e_1 = b_1(g_n) k_n \kappa_n^{-1} e_1. \quad (1.11)$$

La relation (1.6) provient de l'équation (1.4) du lemme précédent, et de l'égalité précédente prise en norme : $\|a(g_n)^t x_n e_1\| = b_1(g_n)$.

La relation (1.7) provient de l'équation (1.4) et de l'égalité (1.11) prise en projectif : $k_n \kappa_n^{-1} e_1 = a(g_n)^t x_n e_1$.

Par ailleurs on a, pour tout $j \in \{2, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} \langle a(g_n)^t x_n (e_1 \wedge e_j), k_n \kappa_n^{-1} (e_1 \wedge e_j) \rangle &= \langle {}^t g_n (e_1 \wedge e_j), \kappa_n^{-1} (e_1 \wedge e_j) \rangle \\ &= \langle {}^t \kappa_n b(g_n)^t \eta_n \cdot (e_1 \wedge e_j), \kappa_n^{-1} (e_1 \wedge e_j) \rangle \\ &= \langle b(g_n)^t \eta_n (e_1 \wedge e_j), e_1 \wedge e_j \rangle \\ &= b_1(g_n) b_j(g_n), \end{aligned}$$

De là, on déduit la majoration

$$0 \leq \frac{b_1(g_n) b_j(g_n)}{a_1(g_n)^2} \leq \|k_n \kappa_n^{-1} (e_1 \wedge e_j)\| \left\| \frac{a(g_n)^t x_n (e_1 \wedge e_j)}{a_1(g_n)^2} \right\| \leq \frac{a_j(g_n)}{a_1(g_n)},$$

d'où la relation (1.8), d'après l'équation (1.2).

2) La relation (1.9) découle de (1.2) et (1.4) puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_1(g_n)}{a_1(g_n)} = \left| \frac{\langle z, e_1 \rangle}{\|z\|} \right| \neq 0 \text{ (d'où } \frac{b_1(g_n)}{a_1(g_n)} \neq 0 \text{ pour } n \text{ assez grand)}$$

Pour montrer (1.10), écrivons $\eta_n e_1$ comme $\eta_n e_1 = \frac{\eta_n b(g_n) \kappa_n k_n^{-1} (k_n \kappa_n^{-1} e_1)}{b_1(g_n)}$ et décomposons $k_n \kappa_n^{-1} e_1$ sur la base canonique. On obtient :

$$\begin{aligned} \eta_n e_1 &= \sum_{j=1}^d \langle k_n \kappa_n^{-1} e_1, e_j \rangle \frac{\eta_n b(g_n) \kappa_n k_n^{-1} e_j}{b_1(g_n)} \\ &= \sum_{j=1}^d \langle k_n \kappa_n^{-1} e_1, e_j \rangle \frac{x_n a(g_n) e_j}{b_1(g_n)} \\ &= \sum_{j=1}^d \frac{a_j(g_n)}{b_1(g_n)} \langle k_n \kappa_n^{-1} e_1, e_j \rangle x_n e_j. \end{aligned} \tag{1.12}$$

D'après les équations (1.2) et (1.6), on a, pour tout $j \neq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_j(g_n)}{b_1(g_n)} = 0.$$

Or $\| \langle k_n \kappa_n^{-1} e_1, e_j \rangle x_n e_j \| \leq 1$, donc tous les termes de la somme de (1.12) tendent vers 0 sauf celui pour $j = 1$.

Estimons ce terme. D'après l'équation (1.11) , on a :

$$\begin{aligned} \langle k_n \kappa_n^{-1} e_1, e_1 \rangle x_n e_1 &= b_1(g_n)^{-1} \langle a(g_n)^t x_n e_1, e_1 \rangle x_n e_1 \\ &= b_1(g_n)^{-1} \langle {}^t x_n e_1, a(g_n) e_1 \rangle x_n e_1 \\ &= \frac{a_1(g_n)}{b_1(g_n)} \langle e_1, x_n e_1 \rangle x_n e_1. \end{aligned}$$

D'après la relation (1.3) on a, quitte à changer certains x_n et k_n en leurs opposés :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n e_1 = \frac{z}{\|z\|}.$$

Et, compte tenu de (1.6), on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1(g_n)}{b_1(g_n)} < k_n \kappa_n^{-1} e_1, e_1 > x_n e_1 = \frac{\|z\|^2}{< z, e_1 >^2} < e_1, \frac{z}{\|z\|} > \frac{z}{\|z\|} = \frac{z}{< z, e_1 >}. \quad (1.13)$$

Comme on a montré que tous les autres termes de somme dans (1.12) tendent vers 0, on a prouvé (1.10). □

1.2.5 Notions d'irréductibilité

Pour séparer les exposants de Lyapunov, on aura besoin de formaliser l'idée que l'orbite d'un r -vecteur sous l'action des matrices aléatoires sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ est assez grande. Pour cela on introduit les définitions suivantes :

Définition 1.2.12 (Espaces de type (S)). Un sous-espace V non trivial de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ est dit de type (S) s'il admet une base de r -vecteurs décomposables et s'il est contenu dans l'orthogonal d'un r -vecteur décomposable non nul.

Définition 1.2.13 (Irréductibilité faible).

1. Un semi-groupe $T \subset G$ agit de façon irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ s'il n'existe pas de sous-espace de type (S) stable par T .
Il agit de façon totalement irréductible au sens faible s'il n'existe pas de réunion finie de sous-espace de type (S) stable par T .
On dira aussi qu'il agit de façon irréductible (resp. totalement irréductible) sur $\mathcal{D}_r$.
2. Une probabilité ν sur les boréliens de $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ est dite faiblement irréductible si elle ne charge l'image d'aucun sous-espace de type (S).
3. Une probabilité sur les boréliens de $\mathcal{D}_r$ est dite irréductible si elle est faiblement irréductible en tant que probabilité sur $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$.

Une probabilité ν sur les boréliens de $\mathcal{D}_\Theta$ est dite irréductible si, pour tout $r \in \Theta$, l'image de ν par la projection π_r de $\mathcal{D}_\Theta$ sur $\mathcal{D}_r$ est irréductible.

Remarque 1.2.4. Les notions au sens fort s'obtiennent en supprimant la restriction "de type (S)" dans les définitions précédentes.

La première notion est clarifiée par le lemme suivant :

Lemme 1.2.14. *Soit $T \subset G$ un semi-groupe et H le sous-groupe fermé de G engendré par T . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) T agit de façon totalement irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$.
- ii) T ne permute aucune famille finie de sous-espace de type (S) de même dimension.
- iii) H agit de façon totalement irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$.
- iv) Tout sous-groupe d'indice fini de H agit de façon irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$.
- v) tH agit de façon totalement irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$.
- vi) Il n'existe pas de r -vecteurs décomposables $u, v_1, \dots, v_p$ tels que :

$$\forall t \in T, \prod_{k=1}^p \langle tu, v_k \rangle = 0.$$

En outre tout groupe connexe qui agit de façon irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ agit de façon totalement irréductible au sens faible.

Démonstration.

- i) $\iff$ ii). $\neg ii) \Rightarrow \neg i)$ est clair. Pour voir que $\neg i) \Rightarrow \neg ii)$, il suffit de considérer les sous-espaces de dimension maximum et de remarquer qu'ils ne peuvent s'inclure dans une union finie de sous-espaces de dimension plus petite.
- ii) $\iff$ iii). On applique le point précédent à H , car si T permute des espaces, H aussi.
- $\neg iii) \Rightarrow \neg iv)$. Si H permute les sous-espaces de type (S) V_i , on pose $H_0 = \{g \in H \mid gV_1 = V_1\}$. Pour chaque V_j , on choisit un $g_j \in H$ tel que $g_jV_1 = V_j$. Alors $H = \cup g_j H_0$, donc H_0 contredit $iv)$.
- $\neg iv) \Rightarrow \neg iii)$. Si H_0 est d'indice fini et laisse le sous-espace V de type (S) invariant, on prend $g_1, \dots, g_p$, un système de représentants de H/H_0 . Alors H laisse stable l'union de sous-espaces de type (S) $g_i V$.
- Pour démontrer que iii) $\iff$ v), le point précédent permet de se ramener à montrer que l'irréductibilité d'un groupe équivaut à l'irréductibilité du groupe transposé. C'est le cas car l'irréductibilité de H_0 est l'absence de vecteurs décomposables u, v tels que $\forall g \in H \langle gu, v \rangle = 0$, i.e. tels que $\forall g \in H \langle u, {}^t gv \rangle = 0$.

- $ii) \iff vi)$. $\neg ii) \Rightarrow \neg vi)$ est clair. Supposons donc $\neg vi)$ et notons $\mathcal{R}$ la réunion des sous-espaces orthogonaux aux $v_k, 1 \leq k \leq p$. $Tu \subset \mathcal{R}$, donc pour tous $t_1, \dots, t_m \in T$, $Tu \subset \mathcal{R} \cap t_1^{-1}\mathcal{R} \cap \dots \cap t_m^{-1}\mathcal{R}$. Comme une intersection de sous-espaces est encore un sous-espace, on construit ainsi des réunions finies de sous-espaces non triviaux de $\mathbb{R}^d$ qui contiennent Tu .
 Soit $k(t_1, \dots, t_m) = \max\{\dim(H) | H \subset \mathcal{R} \cap t_1^{-1}\mathcal{R} \cap \dots \cap t_m^{-1}\mathcal{R}\}$ et $k_0 = \min k$.
 Soit $n(t_1, \dots, t_m) = \#\{H \subset \mathcal{R} \cap t_1^{-1}\mathcal{R} \cap \dots \cap t_m^{-1}\mathcal{R} | \dim(H) = k_0\}$ et $n_0 = \min\{n(t_1, \dots, t_m) | k(t_1, \dots, t_m) = k_0\}$.
 Soient alors $s_1, \dots, s_m$ tels que $n(s_1, \dots, s_m) = n_0$ et $k(s_1, \dots, s_m) = k_0$. On vérifie facilement que tout $t \in T$ permute les sous-espaces de dimension k_0 de $\mathcal{R} \cap s_1^{-1}\mathcal{R} \cap \dots \cap s_m^{-1}\mathcal{R}$. En remplaçant les sous-espaces par ceux engendrés par leur intersection avec Tu , qui sont de type (S), on a bien $\neg i)$.
- Enfin si H est connexe et permute les $V_1, \dots, V_m$, on pose $H_0 = \{g \in H | gV_1 = V_1\}$. H/H_0 est connexe (comme image de H par la projection) et a au plus m éléments. Comme les singletons sont fermés (car H_0 l'est), on en déduit que H/H_0 est réduit à un point, i.e. $H = H_0$, donc H laisse V_1 invariant.

□

Le lien entre les deux notions d'irréductibilité est donné par le lemme suivant :

Lemme 1.2.15. *Si μ est une probabilité sur G et T_μ le semi-groupe fermé engendré par son support, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) T_μ agit de manière totalement irréductible sur $\mathcal{D}_r$.
- ii) Toute probabilité μ -invariante sur $\mathcal{D}_r$ est irréductible.

Démonstration. $\neg ii) \Rightarrow \neg i)$:

Soient ν une probabilité μ -invariante sur $\mathcal{D}_r$ non-irréductible et V un sous-espace de type (S) de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ tel que $\nu(\bar{V}) > 0$ de dimension minimale.

Pour tout couple $(y, g) \in G^2$, soit $\bigwedge_r y.V = \bigwedge_r g.V$, soit $\bigwedge_r y.V \cap \bigwedge_r g.V$ est un sous-espace de dimension strictement plus petite que celle de V . Dans le second cas, $\nu\left(\bigwedge_r y.\bar{V} \cap \bigwedge_r g.\bar{V}\right) = \nu\left(\overline{\bigwedge_r y.V \cap \bigwedge_r g.V} \cap \mathcal{D}_r\right) = 0$ car le dernier ensemble engendre un sous-espace de type (S) de dimension strictement plus petite que celle de V .

Donc pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des $\bigwedge_r g.\bar{V}$ de mesure plus grande que α est

fini. Donc $\mathcal{R} = \left\{ \bigwedge_r g.V \left| \nu\left(\bigwedge_r g.\bar{V}\right) = \sup_{x \in G} \nu\left(\bigwedge_r x.\bar{V}\right) \right. \right\}$ est non vide et fini.

Comme ν est μ -invariante, on vérifie que

$$\forall y \in G, \nu\left(\bigwedge_r y.\bar{V}\right) = \int_G \nu\left(\bigwedge_r x^{-1}y.\bar{V}\right) \mu(dx).$$

En particulier, si $\bigwedge_r y.V \in \mathcal{R}$, $\bigwedge_r x^{-1} \cdot \bigwedge_r y.V \in \mathcal{R}$ pour μ presque tout x , donc les éléments de $\mathcal{R}$ sont permutés par les x^{-1} d'un ensemble de mesure 1. Or les x qui permutent un ensemble fini de sous-espaces forment un groupe fermé, donc T_μ permute les sous-espaces de $\mathcal{R}$.

$\neg i) \Rightarrow \neg ii)$:

Si T_μ laisse invariante une famille finie $\mathcal{R}$ de sous-espaces de type (S). L'intersection avec $\mathcal{D}_r$ de l'image de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{P}\left(\bigwedge_r \mathbb{R}^d\right)$ est un compact invariant par T_μ . Il porte donc une probabilité μ -invariante, qui est non-irréductible par définition. $\square$

Si G agit continuellement sur un compact métrique E , G agit aussi sur les probabilités ρ sur E , par :

$$\forall g \in G, \forall f \in \mathcal{C}(E), g.\rho(f) = \int_E f(g.x)\rho(dx).$$

On peut alors montrer le lemme suivant, qui caractérise les contractions à l'aide des probabilités irréductibles.

Lemme 1.2.16. *Soient $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ et $\bar{z} \in \mathcal{D}_r$. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$ si et seulement si pour une (donc toute) probabilité faiblement irréductible ρ sur $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ la suite $(g_n.\rho)_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers $\delta_{\bar{z}}$.*

Démonstration.

- 1) Les valeurs d'adhérence quasi-projective de $\left(\bigwedge_r g_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de la forme $M =$

$$\bigwedge_r x \operatorname{diag}(\tau_i : i \in \mathcal{C}_r) \bigwedge_r k \text{ avec } x, k \in K \text{ et } \tau_{i_r} = 1.$$

Donc $\ker M = \operatorname{Vect}(\{k^{-1}e_i | i \in \mathcal{C}_r, \tau_i = 0\}) = \{k^{-1}e_i | i \in \mathcal{C}_r, \tau_i \neq 0\}^\perp$ est un sous-espace de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ réduit à $\{0\}$ ou de type (S) donc $\rho(\overline{\ker M}) = 0$ pour toute probabilité faiblement irréductible ρ . En particulier $M.\bar{u}$ est définie pour ρ -presque tout $\bar{u}$.

- 2) Supposons que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$.

Soit ρ une probabilité faiblement irréductible sur $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ et f une fonction continue sur $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$. De toute suite extraite de $(g_n.\rho(f))_{n \in \mathbb{N}}$, on peut extraire

une suite $(g_{\alpha_n} \cdot \rho(f))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\frac{\bigwedge_r g_{\alpha_n}}{\|\bigwedge_r g_{\alpha_n}\|} \rightarrow M$.

$g_{\alpha_n} \bar{u} \rightarrow M \bar{u} = \bar{z}$ dès que $u \notin \ker M$ donc ρ -p.s. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$g_{\alpha_n} \cdot \rho(f) \rightarrow \int_{\{u \notin \ker M\}} f(M \cdot \bar{u}) \rho(d\bar{u}) = f(\bar{z}) = \delta_{\bar{z}}(f).$$

C'est vrai pour toute suite extraite donc $g_n \cdot \rho(f) \rightarrow \delta_{\bar{z}}(f)$.

C'est vrai pour toute fonction continue f donc $g_n \cdot \rho \rightarrow \delta_{\bar{z}}$.

- 3) Réciproquement, si ρ est une probabilité faiblement irréductible sur $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$ telle que $g_n \cdot \rho(f) \rightarrow \delta_{\bar{z}}(f)$, tout valeur d'adhérence quasi-projective $\bar{M}$ de $\left(\bigwedge_r g_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie comme précédemment, pour toute fonction f continue sur $\mathbb{P}(\bigwedge_r \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\{u \notin \ker M\}} f(M \cdot \bar{u}) \rho(d\bar{u}) = \lim g_{\alpha_n} \cdot \rho(f) = \delta_{\bar{z}}(f).$$

On en déduit $M \cdot \bar{u} = \bar{z}$ pour ρ -presque tout $\bar{u}$.

Soit $g_i n G$, tel que $z = g \cdot e_{i_r}$ et posons $M \cdot \bar{u} = \bar{z}$ si $u \in \ker M$, alors :

$$\begin{aligned} M \cdot \bar{u} = \bar{z} &\iff g^{-1} M \cdot u \in \bar{e}_{i_r} \\ &\iff \forall i \in \mathcal{C}_r \setminus \{i_r\}, \langle g^{-1} \cdot M \cdot u, e_i \rangle = 0 \\ &\iff \forall i \in \mathcal{C}_r \setminus \{i_r\}, u \in ({}^t M^t g^{-1} e_i)^\perp. \end{aligned}$$

Or pour tout $i \in \mathcal{C}_r \setminus \{i_r\}$ ${}^t M^t g^{-1} e_i$ est décomposable, donc s'il était non nul $({}^t M^t g^{-1} e_i)^\perp$ serait de type (S), et donc $M \cdot \bar{u} = \bar{z}$ ne serait vérifié que sur un ensemble négligeable. Le noyau de ${}^t M$ contient donc tous les ${}^t g^{-1} e_i$ sauf un, ${}^t M$ est de rang un, et M aussi. Son image ne peut alors être que $\bar{z}$. Donc $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $\bar{z}$.

□

On reprend quelques résultats de [GG96] :

Notations. Si T est un sous-semi-groupe de G , on note :

- $\hat{T} = \left\{ u \in M(\mathbb{R}, C_d^r) \mid \exists (u_n) \in T^{\mathbb{N}}, u = \lim \frac{\bigwedge_r u_n}{\|\bigwedge_r u_n\|} \text{ et } r g(u) = 1 \right\}$
- $T_0 = \{ g \in T \mid \bigwedge_r g \text{ a une valeur propre dominante simple} \}$
- $p^+(g) = \text{Im}(g)$ si $g \in \hat{T}$, $p^+(g) = \bar{v}$ et $p^-(g) = p^+({}^t g)$ si v est vecteur propre associé à la valeur dominante de $g \in T_0$.
- $L(T) = \{ p^+(g) \mid g \in \hat{T} \}$.

Remarque 1.2.5. Soit $g \in T_0$ de valeur propre dominante λ . Il suffit d'écrire la

décomposition de Dunford de $\bigwedge_r g$ pour voir que $\frac{r}{\lambda^n}$ tend vers une projection P sur $p^+(g)$. On en déduit l'inclusion

$$p^+(T_0) \subset L(T). \quad (1.14)$$

En outre $\frac{r}{\lambda^n}$ tend vers tP , donc $\ker P = \text{Im } {}^tP^\perp = p^-(g)^\perp$. Donc $\bigwedge_r g^n \cdot \bar{y}$ tend vers $p^+(g)$, si $y \notin p^-(g)^\perp$.

En guise de réciproque à l'inclusion 1.14, on a :

Lemme 1.2.17. *Si T agit de façon irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ et si $\hat{T} \neq \emptyset$, alors :*

- $p^+(T_0)$ est dense dans $L(T)$.
- pour tout $x \in \mathcal{D}_r$, $L(T) \subset \overline{T.x}$. En particulier, $L(T)$ est le plus petit fermé non vide T -invariant de $\mathcal{D}_r$.

Démonstration. Si $g \in \hat{T}$, alors il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^\mathbb{N}$ telle que $g =$

$$\lim_r \frac{\bigwedge g_n}{\|\bigwedge_r g_n\|}.$$

Si $p^+(g) \not\subset \ker g$, alors g est à valeur propre dominante simple et donc $\bigwedge_r g_n$ aussi pour n grand (cf par exemple [Ser02]). De plus la suite des valeurs propres dominantes tend vers celle de g et donc $p^+(g) = \lim p^+(g_n)$. (On vérifie facilement que c'est la seule valeur d'adhérence possible.)

Sinon, comme le noyau de g est de type (S), l'irréductibilité de T assure l'existence d'un $h \in T$ tel que $h.p^+(g) \not\subset \ker g$, et comme $p^+(g \bigwedge_r h) = p^+(g) \not\subset$

$\bigwedge_r h^{-1} \ker g = \ker g \bigwedge_r h$, on est ramené au cas précédent. Dans les deux cas, on a bien $p^+(g) \in \overline{p^+(T_0)}$.

Soit maintenant $\bar{x} \in \mathcal{D}_r$, si $x \notin \ker g$, $g_n \bar{x}$ tend vers $p^+(g)$, sinon on prend $h \in T$ tel que $h.x \notin \ker g$, et $(g_n h \bar{x})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $p^+(g)$ donc dans les deux cas $p^+(g) \in \overline{T.x}$. $\square$

Corollaire 1.2.18. *Si T agit de façon irréductible au sens faible sur $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$, alors $\hat{T} \neq \emptyset$ si et seulement si $T_0 \neq \emptyset$.*

Mais $({}^tT)_0 = {}^tT_0$, ce qui, combiné au lemme 1.2.14, nous donne :

Corollaire 1.2.19. *Le sous-semi-groupe $T \subset G$ agit de façon totalement irréductible sur $\mathcal{D}_r$ et possède une suite contractante $\mathcal{D}_r$ si et seulement si tT agit de façon totalement irréductible sur $\mathcal{D}_r$ et possède une suite contractante $\mathcal{D}_r$.*

1.3 Étude des noyaux markoviens harmoniques

Désormais, le décalage θ est supposé localement sur Σ_T : pour un certain $\rho < 1$, on a $\forall x, y \in \Sigma_T, d(\theta ax, \theta ay) \leq \rho d(x, y)$. Il suffit pour cela de mettre une métrique adaptée sur Σ_T .

Notations :

On pose $p_n(x) = p(x)p(\theta x) \cdots p(\theta^{n-1}x)$. Si ν est une mesure, $\|\nu\|$ désignera sa variation totale.

On note $Y_1, Y_2 \cdots$ les projections sur les coordonnées strictement négatives de $\hat{\Sigma}_T = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in S^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{Z}, T_{x_n, x_{n+1}}\} = 1$ et $X_0, X_1, \cdots$ celles sur les coordonnées positives.

On définit alors :

- L'application linéaire P de $\mathcal{C}(\Sigma_T)$ dans lui même, par :

$$\forall h \in \mathcal{C}(\Sigma_T), \forall x \in \Sigma_T, Ph(x) = \sum_{s \in S, s.x \in \Sigma_T} p(s.x)h(s.x).$$

Par définition de μ , $\mu P = \mu$, donc P est l'application duale du shift pour la mesure μ .

- Pour $s \in S$, on note $X_s = \{x \in \Sigma_T | x_0 = s\}$ et $Y_s = \{y \in \Sigma_T | y_0 = s\}$. Pour tout $x \in X_s$, $\mathbb{P}_x$ la mesure de Markov associée sur Y_s : si f ne dépend que de n coordonnées, $\mathbb{P}_x(f) = \sum_{s_n \cdots s_1.x \in \Sigma_T} p_n(s_n \cdots s_1.x)f(s_1, \cdots, s_n)$.

On peut alors identifier $\hat{\Sigma}_T$ et $\bigcup_{s \in S} Y_s \times X_s$, et le calcul suivant montre que $\hat{\mu} = \int \mathbb{P}_x \otimes \delta_x \mu(dx)$ est invariante par θ :

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{P}_x \otimes \delta_x \mu(dx) ([Y_n = y_n, \cdots, Y_1 = y_1, X_0 = x_0, \cdots, X_m = x_m]) \\ &= \int_{[X_0=x_0, \cdots, X_m=x_m]} \sum_{s_n \cdots s_1.x \in \Sigma_T} p_n(s_n \cdots s_1.x) 1_{[Y_1=y_1, \cdots, Y_n=y_n]}(s_1, \cdots, s_n) \mu(dx) \\ &= \int \sum_{s_n \cdots s_1.x \in \Sigma_T} p_n(s_n \cdots s_1.x) 1_{[X_0=y_n, \cdots, X_{n-1}=y_1]}(s_n \cdots s_1.x) 1_{[X_0=x_0, \cdots, X_m=x_m]}(x) \mu(dx) \\ &= \int \sum_{s_n \cdots s_1.x \in \Sigma_T} p_n(s_n \cdots s_1.x) 1_{[X_1=y_n, \cdots, X_n=y_1]}(s_n \cdots s_1.x) 1_{[X_n=x_0, \cdots, X_{m+n}=y_m]}(s_n \cdots s_1.x) \mu(dx) \\ &= \int P^n 1_{[X_1=y_n, \cdots, X_n=y_1, X_n=x_0, \cdots, X_{m+n}=y_m]} d\mu \\ &= \mu([X_1 = y_n, \cdots, X_n = y_1, X_n = x_0, \cdots, X_{m+n} = y_m]). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1. On vérifie sur les fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, que si p est α -höldérienne, de constante de Hölder M , alors, on a :

$$\|\mathbb{P}_x - \mathbb{P}_y\| \leq M d^\alpha(x, y) \sum_{n \geq 0} \rho^{-n\alpha}.$$

Définition 1.3.1 (Noyaux harmoniques). Soit Θ un ensemble d'indices et $x \mapsto \nu_x$ un noyau markovien continu en topologie vague de Σ_T dans $\mathcal{D}_\Theta$. Il est dit harmonique s'il vérifie pour tout élément x de Σ_T :

$$\nu_x = \sum_{s.x \in \Sigma_T} p(s.x) A(s) \cdot \nu_{s.x}.$$

Remarque 1.3.2. Si $x \mapsto \nu_x$ est un noyau harmonique de Σ_T dans $\mathcal{D}_\Theta$, et si $\tilde{\Theta} \subset \Theta$, alors la projection de ν sur $\mathcal{D}_{\tilde{\Theta}}$ est encore harmonique.

Théorème 1.3.2. *Pour tout ensemble d'indices Θ , il existe un noyau harmonique à valeurs dans $\mathcal{D}_\Theta$ continu en variation.*

Démonstration. On note N , le convexe des noyaux markoviens de Σ_T dans $\mathcal{D}_\Theta$ continus en topologie vague, muni de la métrique de la convergence uniforme.

a) On définit l'opérateur R sur les noyaux, par :

$$(R\nu)_x = \sum_{s.x \in \Sigma_T} p(s.x) A(s) \cdot \nu_{s.x}.$$

Si m est une probabilité sur $\mathcal{D}_\Theta$, et $\hat{m}$ le noyau défini par $\hat{m}_x = m$, alors :

$$(R^n \hat{m})_x = \sum_{s_n \cdots s_1.x \in \Sigma_T} p_n(s_n \cdots s_1.x) A(s_1) \cdots A(s_n) \cdot m.$$

$$\text{D'où } \|(R^n \hat{m})_x - (R^n \hat{m})_{x'}\| \leq \|\mathbb{P}_x - \mathbb{P}_{x'}\|.$$

b) $N_0 = \{\eta \in N \mid \|\eta_x - \eta_{x'}\| \leq \|\mathbb{P}_x - \mathbb{P}_{x'}\|\}$ est un convexe compact de N , par le théorème d'Ascoli et la continuité en variation de $\mathbb{P}_x$.

c) Considérons la suite de noyaux

$$\hat{m}^n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} R^k \hat{m}.$$

Le a) assure que les $\hat{m}^n$ sont des éléments de N_0 , donc par le b) on peut extraire une sous-suite convergeant vers le noyau $\eta \in N_0$.

De la relation $R\hat{m}^n = \hat{m}^n + \frac{1}{n}(R^{n+1}\hat{m} - \hat{m})$, on déduit que $R\eta = \eta$, i.e. que η est harmonique.

□

Définition 1.3.3 (Semi-groupes R_s). Pour tout $s \in S$, on note R_s le sous-semi-groupe de G défini par :

$$R_s = \{A(s_1) \cdots A(s_n) | s_n \cdots s_1 s \in \Sigma_T^*, s_n = s\}.$$

Théorème 1.3.4. Si ν est un noyau harmonique à valeurs dans $\mathcal{D}_r$ continu en variation et s'il existe un $s \in S$, tel que l'action de R_s sur $\mathcal{D}_r$ soit totalement irréductible, alors pour tout $x \in \Sigma_T$, ν_x est une mesure irréductible.

Pour alléger les notations, on identifiera les sous-ensembles de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ et leurs images dans $\mathcal{D}_r$.

La preuve va utiliser les lemmes suivants :

Lemme 1.3.5. Soit ν une probabilité sur $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{H}_\nu$ l'ensemble des sous-espaces H de type (S) de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ de dimension minimale tels que $\nu(H) > 0$, et $m = \sup\{\nu(H) | H \in \mathcal{H}_\nu\}$. Alors l'ensemble des $H \in \mathcal{H}_\nu$ tels que $\nu(H) = m$ est non vide et fini. De plus, il existe $\varepsilon_\nu > 0$ tels que pour tout $H \in \mathcal{H}_\nu$, on ait $\nu(H) = m$ ou $\nu(H) \leq m - \varepsilon_\nu$. En outre si H et H' sont deux éléments distincts de $\mathcal{H}_\nu$, on a $\nu(H \cap H') = 0$.

Démonstration. Commençons par la dernière assertion : $\nu(H \cap H') = 0$, car c'est la mesure de l'image du sous-espace engendré par les r -vecteurs décomposables de $H \cap H'$, qui est de type (S) et de dimension strictement inférieure à celle de H et H' . On en déduit que pour tout $A > 0$ l'ensemble des $H \in \mathcal{H}_\nu$ tels que $\nu(H) \geq A$ a au plus $\frac{1}{A}$ éléments, ce qui donne le reste du lemme en prenant $0 < A < m$. □

Lemme 1.3.6. Avec les notations précédentes, soit k un entier, $\mathcal{H}$ une famille de réunions de k sous-espaces. Alors $h(x) = \sup\{\nu_x(W) | W \in \mathcal{H}\}$ définit une fonction h continue sur Σ_T . En particulier, elle atteint son maximum sur un fermé non vide.

Démonstration. À W fixé, $|\nu_x(\overline{W}) - \nu_{x'}(\overline{W})| \leq \|\nu_x - \nu_{x'}\|$, donc $|h(x) - h(x')| \leq \|\nu_x - \nu_{x'}\|$, ce qui prouve la continuité de h . □

Démonstration du théorème 1.3.4. Supposons que $x \mapsto \nu_x$ soit un noyaux harmonique tel que ν_x ne soit pas toujours irréductible. Pour tout l , on note $\mathcal{H}_l$ l'ensemble des sous-espaces de type (S) de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ de dimension l . Posons :

$$\begin{aligned} p &= \min\{l \in \mathbb{N} | \exists x \in \Sigma_T, \exists H \in \mathcal{H}_l, \nu_x(H) > 0\}, \\ m &= \sup\{\nu_x(H) | x \in \Sigma_T, H \in \mathcal{H}_p\}, \\ E &= \{x \in \Sigma_T | \exists H \in \mathcal{H}_p, \nu_x(H) = m\}, \\ H_x &= \{H | \nu_x(H) = m\} \text{ et } W_x = \cup_{H \in H_x} H. \end{aligned}$$

Tout d'abord E est un fermé non vide d'après le lemme 1.3.6 et, si $x \in E, W_x$ est toujours une union finie de sous-espaces de type (S) d'après le lemme 1.3.5.

De la relation d'harmonicité, on déduit,

$$\forall x \in E, \forall s \in S, s.x \in \Sigma_T \Rightarrow (s.x \in E, A(s)^{-1}H_x \subset H_{s.x})$$

et finalement $E = \Sigma_T$.

Soit $n_0 = \sup \#H_x$ qui est atteint car le lemme 1.3.5 implique $\#H_x m \leq 1$. On refait le raisonnement précédent avec $\mathcal{H}'$ l'ensemble des unions de n_0 sous-espaces de type (S) de $\bigwedge_r \mathbb{R}^d$ de dimension p et on en déduit que

$$\{x | \#H_x = n_0\} = \left\{ x \left| \sup_{H \in \mathcal{H}'} \nu_x(H) = n_0 m \right. \right\} = \Sigma_T$$

et que $A(s)^{-1}H_x = H_{s.x}$, d'où

$$W_{s.x} = A(s)^{-1}W_x. \quad (1.15)$$

Montrons maintenant que $x \mapsto H_x$ est localement constante : soit x fixé, on applique le lemme 1.3.5 à ν_x , ce qui donne un $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $H \in \mathcal{H}_p$, $\nu_x(H) = m$ ou $\nu_x(H) \leq m - \epsilon$. Or il existe un voisinage U de x dont les éléments y vérifient $\|\nu_y - \nu_x\| < \epsilon$. Si $y \in U$ et $H \in H_y$, alors $\nu_x(H) \geq \nu_y(H) - \|\nu_y - \nu_x\| > m - \epsilon$, donc $\nu_x(H) = m$ et $H \in H_x$. Alors $H_y \subset H_x$ et par cardinalité $H_y = H_x$. Pour $s \in S$, $x \mapsto W_x$ est localement constante sur le compact $\{x_0 = s\}$ et $W = \cup_{x_0=s} W_x$ est donc une union finie de sous-espaces de type (S) de dimension p , invariante par R_s d'après l'équation (1.15). Pour le s de l'hypothèse, c'est une contradiction. $\square$

1.4 Propriétés de contraction

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. *S'il existe un $s \in S$ tel que R_s agisse de manière totalement irréductible sur $\mathcal{D}_r$, et une suite $(s_1^n, \dots, s_{k_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Σ_T telle que $(s_1^n \cdots s_{k_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$, alors pour tout $x \in \Sigma_T$ et $\mathbb{P}_x$ -presque tout $y \in Y_{x_0}$, la suite $(y_1 \cdots y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$, en direction de $z(y)$. En outre $x \mapsto z(\mathbb{P}_x)$ est l'unique noyau harmonique à valeurs dans $\mathcal{D}_r$ continu en variation.*

On commence par deux lemmes :

Lemme 1.4.2. *Si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices convergeant vers $M \neq 0$ et ν_n une suite de probabilités irréductibles sur $\mathcal{D}_r$ convergeant en variation vers ν , alors $M_n \cdot \nu_n$ converge étroitement vers $M \cdot \nu$.*

Démonstration. Il est clair que ν est irréductible. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_r)$, alors :

$$\begin{aligned} |M_n \cdot \nu_n(f) - M \cdot \nu(f)| &\leq |M_n \cdot \nu_n(f) - M_n \cdot \nu(f)| + |M_n \cdot \nu(f) - M \cdot \nu(f)| \\ &\leq \|\nu_n - \nu\| \|f\|_\infty + \int |f \circ M_n(u) - f \circ M(u)| \nu(du). \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers zéro par hypothèse. Puisque ν est irréductible $f \circ M_n(u)$ tend vers $f \circ M(u)$ pour ν -presque tout u et par le théorème de convergence dominée le second terme tend aussi vers zéro. $\square$

Lemme 1.4.3. *Si ν est un noyau harmonique de Σ_T dans $\mathcal{D}_r$, alors pour tout $x \in \Sigma_T$ et $\mathbb{P}_x$ -presque tout $y \in Y_{x_0}$:*

- i) *La suite $(A(y_1) \cdots A(y_n) \cdot \nu_{y_n \cdots y_1, x})_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers une probabilité notée $\pi(y, x)$,*
- ii) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tous les $s_1^n, \dots, s_k^n \in S$ tels que $s_k^n \cdots s_1^n y_n \cdots y_1 x \in \Sigma_T$, $(A(y_1) \cdots A(y_n) A(s_1^n) \cdots A(s_k^n) \cdot \nu_{s_k^n \cdots s_1^n y_n \cdots y_1 x})_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers $\pi(y, x)$.*

Démonstration. Le point clef de la démonstration consiste à montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_r)$, les variables aléatoires f_n définies sur Y_s par

$$f_n(y) = A(y_1) \cdots A(y_n) \cdot \nu_{y_n \cdots y_1, x}(f)$$

forment une martingale sous $\mathbb{P}_x$ pour la filtration naturelle des applications coordonnées. Ceci est donné par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} &\int_{\{Y_i = y_i^0\}_{i=1, \dots, n}} f_{n+1}(y) \mathbb{P}_x(dy) \\ &= \sum_{s: sy_n^0 \cdots y_1^0 x \in \Sigma_T} p_{n+1}(sy_n^0 \cdots y_1^0 x) A(y_1^0) \cdots A(y_n^0) A(s) \cdot \nu_{sy_n^0 \cdots y_1^0 x}(f) \\ &= p_n(y_n^0 \cdots y_1^0 x) \sum_{s: sy_n^0 \cdots y_1^0 x \in \Sigma_T} p(sy_n^0 \cdots y_1^0 x) A(s) \cdot \nu_{sy_n^0 \cdots y_1^0 x}(f \circ A(y_1^0) \cdots A(y_n^0)) \\ &= p_n(y_n^0 \cdots y_1^0 x) (\nu P)_{y_n^0 \cdots y_1^0 x}(f \circ A(y_1^0) \cdots A(y_n^0)) \\ &= p_n(y_n^0 \cdots y_1^0 x) A(y_1^0) \cdots A(y_n^0) \cdot \nu_{y_n^0 \cdots y_1^0 x}(f) \\ &= \int_{\{Y_i = y_i^0\}_{i=1, \dots, n}} f_n(y) \mathbb{P}_x(dy). \end{aligned}$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par $\|f\|_\infty$, donc elle converge presque sûrement vers une limite $\pi(y, x)(f)$.

Montrons maintenant la seconde propriété. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_r)$, on a :

$$\begin{aligned}
& \int \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{s_1^n, \dots, s_k^n} p_k(s, y_n \cdots y_1 \cdot x) (f_n(y) - A(y_1) \cdots A(y_n) A(s_1^n) \cdots A(s_k^n) \cdot \nu_{s_k^n \cdots s_1^n y_n \cdots y_1 x}(f))^2 \mathbb{P}_x(dy) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int (f_n(y) - f_{n+k}(y))^2 \mathbb{P}_x(dy) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int f_n^2(y) \mathbb{P}_x(dy) - \int f_{n+k}^2(y) \mathbb{P}_x(dy) \right) \\
&\leq k \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{P}_x$ -presque sûrement le terme général de la série tend vers zéro, c'est-à-dire, puisque p admet un minimum strictement positif, que pour toutes les suites finies $(s_i^n)_{i \in I_k}$ admissibles, la suite de mesures

$$(A(y_1) \cdots A(y_n) A(s_1^n) \cdots A(s_k^n) \cdot \nu_{s_k^n \cdots s_1^n y_n \cdots y_1 x}(f))_{n \in \mathbb{N}}$$

tend vers $\pi(y, x)(f)$.

On applique maintenant ces résultats à un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{C}(\mathcal{D}_r)$, ce qui conclut la démonstration du lemme. $\square$

Démonstration du théorème 1.4.1 . Soit ν un noyau harmonique à valeurs dans $\mathcal{D}_r$ continu en variation (le théorème 1.3.2 en assure l'existence). Soit $y \in X_s$ vérifiant les conclusions du lemme 1.4.3, on va montrer que la suite $(A(y_1) \cdots A(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$. Soit donc M une valeur d'adhérence de cette suite. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\left(\frac{A(y_1) \cdots A(y_n)}{\|A(y_1) \cdots A(y_n)\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers M et que $y_n \cdots y_1 \cdot x$ converge vers x' . Alors le lemme 1.4.2 donne $\pi(x, y) = M \cdot \nu_{x'}$, mais aussi $\pi(x, y) = M A(s_1) \cdots A(s_k) \cdot \nu_{s_k \cdots s_1 \cdot x'}$, pour tout $(s_1, \dots, s_k)$ tels que $s_k \cdots s_1 \cdot x' \in \Sigma_T$. Il suffit de montrer que $\pi(y, x)$ est une mesure de Dirac en z , car alors, comme $\nu_{x'}$ est irréductible, l'image de M sera z (la caractérisation des suites contractantes par leur action sur les probabilités irréductibles reste valable pour des applications quasi-projectives). Comme T est irréductible, quitte à changer M , on peut supposer que $x'_0 = s$, où le s est celui de l'énoncé. Par hypothèse, il existe une suite $(s_1^n, \dots, s_{k_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(A(s_1^n) \cdots A(s_{k_n}^n))_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction d'un z . Quitte à extraire, on peut supposer que s_1 est constante et comme T est irréductible, que $T_{s_1, s} = 1$. Comme l'action de R_s est irréductible, il existe $a_1 \cdots a_k \in Y_s$, tels que $A(a_1) \cdots A(a_k) z \notin \ker M$, donc $(M A(a_1) \cdots A(a_k) A(s_1^n) \cdots A(s_{k_n}^n))_{n \in \mathbb{N}}$ contracte $\mathcal{D}_r$ en direction de $M A(a_1) \cdots A(a_k) z$. En extrayant et en appliquant encore une fois le lemme 1.4.2, on obtient $\pi(y, x) = \delta_{M A(a_1) \cdots A(a_k) z}$.

On a ainsi montré que pour tout noyau harmonique à valeurs dans $\mathcal{D}_r$ continu en variation $\pi(y, x) = \delta_z(y)$. Vérifions sur une fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathcal{D}_r)$ que $z(\mathbb{P}_x) = \nu_x$:

$$\begin{aligned}
z(\mathbb{P}_x)(\varphi) &= \int \varphi(z(y)) \mathbb{P}_x(dy) \\
&= \int \lim_n A(y_1) \cdots A(y_n) \cdot \nu_{y_n \cdots y_1, x}(\varphi) \mathbb{P}_x(dy) \\
&= \lim_n \int A(y_1) \cdots A(y_n) \cdot \nu_{y_n \cdots y_1, x}(\varphi) \mathbb{P}_x(dy) \quad (\text{convergence dominée}) \\
&= \nu_x(\varphi) \quad (\text{harmonicité de } \nu).
\end{aligned}$$

□

1.5 Séparation des exposants

On va démontrer le théorème 1.1.3. Pour cela on utilisera le lemme de théorie ergodique bien connu suivant :

Lemme 1.5.1. *Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta)$ est un système dynamique et f une fonction $\mathbb{P}$ -intégrable telle que les sommes de Birkhoff $S_n f$ tendent presque sûrement vers $-\infty$, alors $\int f d\mathbb{P} < 0$.*

On va maintenant construire le système dynamique auquel appliquer ce lemme. Pour $0 \leq k \leq d$ on introduit les fonctions σ_k sur $G \times \mathcal{D}_k$ et $G \times \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ désigne l'espace des drapeaux complets, définies par :

- $\sigma_0 = 1$,
- $\forall v \in \bigwedge_k \mathbb{R}^d, \forall g \in G, \quad \sigma_k(g, \bar{v}) = \frac{\|\bigwedge_k gv\|}{\|v\|},$
- $\forall \partial \in \mathcal{D}, \forall g \in G, \quad \sigma_k(g, \partial) = \sigma_k(g, \pi_k(\partial)).$

On note P_k l'extension de P à $\Sigma_T \times \mathcal{D}_k$ définie pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\Sigma_T \times \mathcal{D}_k)$ par $P_k \varphi(x, \bar{v}) = \sum_{s.x \in \Sigma_T} \varphi(s.x, A(s) \cdot \bar{v}) p(s.x)$ et P_c l'extension analogue sur $\Sigma_T \times \mathcal{D}$. On note M^c et M^k les convexes formés des probabilités respectivement P_c - et P_k -invariantes.

Pour tout k et tout $\eta \in M^k$, on pose :

$$I_\eta^k = \int \sum_{s.x \in \Sigma_T} p(s.x) \log \sigma_k(A(s), v) \eta(dx, dv).$$

Si η_k est la projection de $\eta \in M^c$ sur $\Sigma_T \times \mathcal{D}_k$, alors $\eta_k \in M^k$ et on note $I_{\eta_k}^k$ pour $I_{\eta_k}^k$.

On peut maintenant démontrer le lemme suivant, qui donnera la probabilité du s.d.m. auquel appliquer le lemme 1.5.1 :

Lemme 1.5.2. *Pour tout $0 \leq k \leq d$:*

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i = \sup_{\eta \in M^k} I_\eta^k = \sup_{\eta \in M^c} I_\eta^k$$

et il existe un $\eta \in M^c$ pour lequel tous les sup sont atteints.

Démonstration. On note $\Gamma_k = \sum_{i=1}^k \gamma_i$ et, pour tout $\hat{x} \in \hat{\Sigma}_T$, $\hat{x} = (y, x)$. Posons, pour $(\hat{x}, v) \in \hat{\Sigma}_T \times \mathcal{D}_k$, $\tilde{\theta}(\hat{x}, v) = (\theta^{-1}\hat{x}, A(y_1).v)$ et $f_k(\hat{x}, v) = \log \sigma_k(A(y_1), v)$. Si $\eta \in M^k$, on munit $\Sigma_T \times \mathcal{D}_r$ de la loi $\tilde{\eta}$ définie comme $\int \delta_{(x,v)} \otimes \mathbb{P}_x \eta(dx, dv)$, qui est $\tilde{\theta}$ -invariante. On vérifie facilement que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_k \circ \tilde{\theta}^i(\hat{x}, v) = \log \sigma_k(A(y_n) \cdots A(y_1), v). \quad (1.16)$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_\eta^k &= \int f_k(\hat{x}, v) \tilde{\eta}(d\hat{x}, dv) \\ &= \frac{1}{n} \int \log \sigma_k(A(y_n) \cdots A(y_1), v) \mathbb{P}_x(dy) \eta(dx, dv) \\ &\leq \frac{1}{n} \int \log \left\| \bigwedge_k A(y_n) \cdots A(y_1) \right\| \mathbb{P}_x(dy) \eta(dx, dv) \\ &= \frac{1}{n} \int \log \left\| \bigwedge_k A(y_n) \cdots A(y_1) \right\| \mathbb{P}_x(dy) \mu(dx) \\ &\quad \text{(La projection de } \eta \text{ sur } \Sigma_T \text{ est } Q\text{-invariante)} \\ &= \frac{1}{n} \int \log \left\| \bigwedge_k A(y_n) \cdots A(y_1) \right\| \hat{\mu}(d\hat{x}). \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers Γ_k , d'où $\Gamma_k \geq \sup_{\eta \in M^k} I_\eta^k \geq \sup_{\eta \in M^c} I_\eta^k$.

Pour démontrer les inégalités inverses, on utilise que, pour tout $g \in G$, si m_K désigne la mesure de Haar sur $K = O(d, \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \log \left\| \bigwedge_k g \right\| - \int \log \sigma_k(g, \kappa \cdot \overline{e_{i_k}}) m_K(d\kappa) \\ &= \log a_{i_k}(g) - \int \log \left\| \bigwedge_k a(g) \bigwedge_k \kappa e_{i_k} \right\| m_K(d\kappa) \\ &\leq \log a_{i_k}(g) - \int \log \left\langle \bigwedge_k a(g) \bigwedge_k \kappa e_{i_k}, e_{i_k} \right\rangle m_K(d\kappa) \\ &= \log a_{i_k}(g) - \int \log \left\langle \bigwedge_k \kappa e_{i_k}, \bigwedge_k a(g) e_{i_k} \right\rangle m_K(d\kappa) \\ &= \|\phi_k\|_{\mathbb{L}^1(K, m_K)}. \end{aligned}$$

Où ϕ_k est la fonction définie sur K par $\phi_k(\kappa) = \log \langle \kappa, e_{i_k}, e_{i_k} \rangle$ dont on sait qu'elle est m_K -intégrable (cf lemme 1.2.7). On notera $C = \sum_{k=1}^d \|\phi_k\|_{\mathbb{L}^1(K, m_K)}$. On a donc, si ∂_0 désigne le drapeau complet canonique :

$$0 \leq \sum_{k=1}^d \left| \int m_K(d\kappa) \int \left(\log \left\| \bigwedge_k A(y_n) \cdots A(y_1) \right\| - \log \sigma_k(A(y_n) \cdots A(y_1), \kappa \partial_0) \right) \hat{\mu}(d\hat{x}) \right| \leq C.$$

Le lemme de Fatou et la majoration assurent que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^d \frac{1}{n} \left| \int \left(\log \left\| \bigwedge_k A(y_n) \cdots A(y_1) \right\| - \log \sigma_k(A(y_n) \cdots A(y_1), \kappa \partial_0) \right) \hat{\mu}(d\hat{x}) \right| = 0 \text{ } m_K\text{-p.s.}$$

En particulier, il existe un $\kappa \in K$ et une suite extraite n' tels que pour tout $k \in I_d$, on ait :

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{1}{n'} \int \log \sigma_k(A(y_n) \cdots A(y_1), \kappa \partial_0) \hat{\mu}(d\hat{x}) = \lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{1}{n'} \int \log \left\| \bigwedge_k A(y_n) \cdots A(y_1) \right\| \hat{\mu}(d\hat{x}) = \Gamma_k.$$

On pose donc $f'_k(x, \partial) = \int f_k(\hat{x}, \pi_k(\partial)) \mathbb{P}_x(dy) = \sum p(s, x) \log \sigma_k(A(s), \partial)$ et en intégrant l'équation (1.16) par rapport à $\hat{\mu}$, on trouve, pour tout k :

$$\sum_{i=0}^{n'-1} P_c^i(\mu \times \delta_{\kappa \partial_0})(f'_k) = \int \log \sigma_k(A(y_n) \cdots A(y_1), \kappa \partial_0) \hat{\mu}(d\hat{x}).$$

On prend alors pour η , une valeur d'adhérence de la suite $\frac{1}{n'} \sum_{i=0}^{n'} P_c^i(\mu \times \delta_{\kappa \partial_0})$, ce qui assure $\eta \in M^c$ et la relation précédente donne $I_\eta^k = \eta_k(f'_k) = \Gamma_k$. $\square$

Démonstration du théorème 1.1.3. On prend le η donné par le lemme. On pose

$$\sigma = \frac{\sigma_{r+1} \sigma_{r-1}}{\sigma_r^2}.$$

Alors on a :

$$\int \log \sigma \, d\eta = I_\eta^{r+1} + I_\eta^{r-1} - 2I_\eta^r = \gamma_{r+1} - \gamma_r.$$

On garde les notations du lemme précédent et on définit $g(\partial, y) = \log \sigma(A(y_1), \partial)$ et $\hat{\eta} = \int \delta_{(x, \partial)} \otimes \mathbb{P}_x \eta(dx, d\partial)$. Comme précédemment pour f_k , on a :

$$(**) \quad \log \sigma(A(y_n) \cdots A(y_1), \partial) = \sum_{i=0}^n g \circ \tilde{\theta}^i(\partial, y).$$

Grâce au corollaire 1.2.19, on peut appliquer le théorème 1.4.1 au système obtenu en remplaçant les éléments de S par leurs transposées, ce qui assure que

${}^t(A(y_n) \cdots A(y_1))$ contracte $\mathcal{D}_r$, $\mathbb{P}_x$ -presque sûrement pour tout x , en direction de $\bar{z}$. Soit $\partial \in \mathcal{D}$ tel que $(\pi_{r-1}(\partial), \pi_r(\partial), \pi_{r+1}(\partial)) = (\bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'')$ fixé, avec v, v', v'' normalisés. On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma(A(y_n) \cdots A(y_1), \partial) &= \frac{\|A(y_n) \cdots A(y_1)v\| \cdot \|A(y_n) \cdots A(y_1)v''\|}{\|A(y_n) \cdots A(y_1)v'\|^2} \\ &\leq \frac{a_{i_{r-1}}(A(y_n) \cdots A(y_1)) \cdot a_{i_{r+1}}(A(y_n) \cdots A(y_1))}{\|A(y_n) \cdots A(y_1)v'\|^2} \\ &= \left(\frac{a_{i_r}({}^t(A(y_n) \cdots A(y_1)))}{\|A(y_n) \cdots A(y_1)v'\|} \right)^2 \frac{a_{r+1}({}^t(A(y_n) \cdots A(y_1)))}{a_r({}^t(A(y_n) \cdots A(y_1)))}. \end{aligned}$$

Le lemme 1.2.10 nous dit que quand ${}^t(A(y_n) \cdots A(y_1))$ contracte $\mathcal{D}_r$ vers un $z(y)$, la seconde fraction tend vers 0 et l'inverse de la première vers $\frac{|<v', z(y)>|}{\|z(y)\|}$. Or cette dernière valeur est non nulle, $\mathbb{P}_x$ -presque sûrement pour tout x , car $z(\mathbb{P}_x) = \nu_x$ est irréductible (théorème 1.3.4). Donc pour tout $\partial \in \mathcal{D}$, $\sigma(A(y_n) \cdots A(y_1), \partial)$ tend vers 0 $\mathbb{P}_x$ -presque sûrement pour tout x . Donc $\sigma(A(y_n) \cdots A(y_1), \partial)$ tend vers 0 $\hat{\eta}$ -presque sûrement et d'après(**),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n g \circ \tilde{\theta}^i(\partial, y) = -\infty \quad \hat{\eta}\text{-p.s..}$$

On en conclut grâce au lemme 1.5.1 que :

$$\gamma_{r+1} - \gamma_r = \int \log \sigma \, d\eta = \int g \, d\hat{\eta} < 0.$$

□

Remarque 1.5.1. La démonstration a montré que les exposants sont séparés, dès qu'il existe un T_s totalement irréductible, et une suite contractante de matrices dans $\{A(s_n) \cdots A(s_1) | n \in \mathbb{N}, (s_1, \dots, s_n) \in \Sigma_T^*\}$. En fait cette condition n'est pas plus faible que celle du théorème 1.1.3 car l'irréductibilité de T permet d'en déduire une suite de T_s contractante. (On fait comme dans la démonstration de 1.4.1.)

Deuxième partie

Applications topicales aléatoires

Chapitre 2

Matrices aléatoires dans $(\mathbb{R}, \max, +)$: ordre 1

2.1 Présentation et résumé

Beaucoup de systèmes où plusieurs tâches sont exécutées successivement peuvent se modéliser par des équations "(max+)-linéaires" et donc par des suites récurrentes stochastiques gouvernées par des applications "(max+)-linéaires". Pour des exemples, le lecteur est renvoyé à l'introduction et aux références qui y sont données. On introduit maintenant le semi-anneau $\mathbb{R}_{\max}$ et les structures algébriques associées, puis on présente le plan du chapitre. Les principaux résultats sont commentés dans l'introduction générale de la thèse.

Pour tout entier k on notera I_k l'ensemble des entiers compris entre 1 et k .

Définition 2.1.1 (Algèbre $(\max, +)$).

i) L'ensemble $\mathbb{R}_{\max} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est muni des lois $\otimes, \oplus$ définies par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{\max}, \begin{cases} x \oplus y := \max(x, y) \\ x \otimes y := x + y. \end{cases}$$

ii) Pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}_{\max}^d$ est muni d'une structure analogue à celle d'espace vectoriel par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{\max}^d, \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\max}, \forall i \leq d, \begin{cases} (x \oplus y)_i := x_i \oplus y_i \\ (\alpha \otimes x)_i := \alpha \otimes x_i. \end{cases}$$

iii) Pour tout $k, l, m \in \mathbb{N}$, deux matrices $A \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times l}$ et $B \in \mathbb{R}_{\max}^{l \times m}$ ont pour produit la matrice $AB \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times m}$ définie par :

$$\forall i \in I_k, \forall j \in I_m, (AB)_{ij} := \bigoplus_{p=1}^l A_{ip} \otimes B_{pj}.$$

On note $A^{\otimes n}$ la n ème puissance de A pour cette opération.

En particulier, si $x \in \mathbb{R}_{\max}^l$, alors $Ax \in \mathbb{R}_{\max}^k$ est définie par :

$$\forall i \in I_k, (Ax)_i = \bigoplus_{j=1}^l A_{ij} \otimes x_j.$$

Proposition 2.1.2.

- i) Les lois de $\mathbb{R}_{\max}$ sont associatives et commutatives, la multiplication $\otimes$ est distributive par rapport à l'addition $\oplus$. La multiplication admet 0 comme élément neutre, l'addition $-\infty$. L'ensemble $\mathbb{R}_{\max}$ n'est pas un anneau car $\oplus$ n'est pas inversible, par contre on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}_{\max}, x \oplus x = x$ et on dit donc que $\mathbb{R}_{\max}$ est idempotent.
- ii) La restriction à $\mathbb{R}^d$ des "droites" de $\mathbb{R}_{\max}^d$ (les ensembles de la forme $\mathbb{R} \otimes x$) sont les droites affines de $\mathbb{R}^d$ de vecteur directeur ${}^t(1, \dots, 1)$. Deux éléments d'une même droite $(\max, +)$ sont dits proportionnels au sens $(\max, +)$.
- iii) La matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{k \times l}$ définit l'application $(\max, +)$ -linéaire $\tilde{A}$ de $\mathbb{R}_{\max}^l$ dans $\mathbb{R}_{\max}^k$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\max}^l, \tilde{A}(x) := Ax,$$

et le produit des matrices correspond à la composition des applications. Si A n'a pas de ligne de $-\infty$, elle définit aussi une application de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^k$.

- iv) L'image de $\tilde{A}$ est stable par les opérations de $\mathbb{R}_{\max}^l$. C'est le sous-espace $(\max, +)$ -vectoriel engendré par les colonnes de A . En fait, on a comme dans le cas linéaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\max}^k, Ax = \bigoplus_{j \in I_k} x_j \otimes A_j.$$

Démonstration. il suffit de le vérifier par des calculs. Après le i), ce sont les mêmes calculs que dans un corps, car on ne fait ni division ni soustraction. $\square$

La multiplication à gauche par une matrice ne comportant pas de ligne de $-\infty$ est une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ croissante pour l'ordre produit et additivement homogène. Une telle application est dite topicale :

Définition 2.1.3 (Fonctions topicales). On note $\vec{1}$ pour ${}^t(1, \dots, 1)$ et $\vec{0}$ pour ${}^t(0, \dots, 0)$. Une application A de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^l$ est dite topicale si elle vérifie :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}, A(x + \lambda \vec{1}) &= Ax + \lambda \vec{1} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^k, (\forall i \in I_k, x_i \leq y_i) &\Rightarrow (\forall i \in I_l, (Ax)_i \leq (Ay)_i). \end{aligned} \quad (2.1)$$

L'ensemble des applications topicales de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même est noté Top_d .

Ce type d'application a été introduit par J. Gunawardena et M. Keane dans [GK95]. Remarquons simplement que Top_d est stable par composition et par les opérations $\min$, $\max$ et $+$.

Notations : Dans tout le texte $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ sera un système dynamique mesurable et A une application mesurable de Ω à valeurs dans un ensemble d'applications d'un espace dans lui même. En général il s'agira de l'ensemble $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ des matrices carrées de taille d à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$, identifiées aux applications associées, ou de l'ensemble Top_d . On notera indifféremment $A \circ \theta^n$ ou $A(n)$.

On s'intéresse au comportement asymptotique des variables $x(n, x_0)$ définies par :

$$\begin{cases} x(0, x_0) &= x_0 \\ x(n+1, x_0) &= A(n)x(n, x_0). \end{cases} \quad (2.2)$$

On définit aussi le produit $A^n := A(n-1)A(n-2) \cdots A(0)$ tel que $x(n, x_0) = A^n x_0$ et la suite $y(n, x_0) := A(1) \cdots A(n)x_0$.

On rappelle dans la partie 2.2 différents résultats du premier ordre : loi forte des grands nombres pour $(y(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$, où X_0 est une variable aléatoire, sous une simple condition d'intégrabilité, et pour $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ sous des hypothèses supplémentaires.

Les exemples 1 et 2 montrent que l'on ne peut pas espérer de loi forte des grands nombres pour la suite $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ sous des hypothèses aussi larges que celles qui assurent la loi forte des grands nombres pour $(y(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$. En revanche la loi faible des grands nombres pour $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ découle de celle pour $(y(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

On étend dans la partie 2.3 certains résultats de [BL92] et de [Bac92] sur les suites de variables aléatoires définies par l'équation

$$Y(n+1) = A(n)Y(n) \oplus B(n) \quad (2.3)$$

du cas $B = 0$ au cas $B \in \mathbb{L}^1$. On s'affranchit aussi de la condition dite de précédence qui interdit aux éléments diagonaux de prendre la valeur $-\infty$, et on remplace les matrices dans $\mathbb{R}_{\max}$ par des applications topicales généralisées.

Signalons aussi que P. Glasserman et D. Yao mènent dans [GY95] une étude unifiée des solutions d'équations du type de (2) quand A_n prend ses valeurs dans un espace de matrices à coefficients dans divers semi-anneaux. La preuve du théorème 2.3.1 revient à mener cette étude, quand A_n prend ses valeurs dans l'ensemble des applications topicales généralisées.

Suivant en cela [Bac92], nous utilisons les résultats de la partie 2.3 pour montrer (théorème 2.4.4) que l'exposant de Lyapunov maximal d'une matrice A est le maximum des exposants des blocs diagonaux, et cela sans aucune autre condition que l'ergodicité.

En revanche l'abandon de la condition de précédence introduit la possibilité de nouveaux comportements de la suite $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$. On doit donc imposer des conditions supplémentaires pour assurer la loi forte des grands nombres.

Ces conditions seront soit l'indépendance des $A(n)$ et une condition d'absence de ligne de $-\infty$ dans certains blocs de la matrice (théorème 2.4.8 et son corollaire), soit des conditions de structure fixe et d'ergodicité renforcée (théorème 2.4.10 et lemme 2.4.7).

L'exemple 1 montre que ni la structure fixe ni la condition sur les blocs n'assure seule la loi forte des grands nombres. L'exemple 2 montre que l'indépendance, et donc l'ergodicité renforcée, non-plus.

2.2 Cas général

Dans de nombreux cas, on veut éviter que $x(n, X_0)$ prenne des valeurs infinies. On a vu que la condition minimale est l'absence de ligne de $-\infty$ dans les matrices. On définit donc la condition suivante :

Définition 2.2.1 (Condition de topicalité). On dit qu'une matrice aléatoire A vérifie la condition T si $\mathbb{P}(\forall i \in I_d, \exists j \in I_d, A_{ij} \neq -\infty) = 1$.

M.Crandall et L.Tartar ont remarqué (cf. [CT80]) que les applications topicales sont exactement les applications additivement homogènes 1-lipschitziennes pour la norme infinie. On en déduit que si A est à valeurs dans Top_d , et si $\left(x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une loi forte des grands nombres, alors pour toute condition initiale X_0 intégrable, $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait aussi une loi forte des grands nombres. On se restreindra donc désormais au cas $X_0 = \vec{0}$.

Pour pouvoir traiter le cas des matrices aléatoires non-irréductibles, on devra considérer des sous-matrices, qui ne vérifieront pas la condition T. On définit donc un ensemble un peu plus grand que les applications topicales, qui inclut à la fois les matrices avec des lignes de $-\infty$ et les applications topicales.

Définition 2.2.2 (Fonctions topicales étendues). On note $Tope_d$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_{\max}^d$ dans lui même, vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_{\max}^d, \forall \lambda \in \mathbb{R}_{\max}, A(x + \lambda \vec{1}) &= Ax + \lambda \vec{1} \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_{\max}^d, (\forall i \in I_k, x_i \leq y_i) &\Rightarrow (\forall i \in I_l, (Ax)_i \leq (Ay)_i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il est clair que $Tope_d$ contient $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$. A. Burbanks et C. Sparrow ont montré dans [BS99] que toute application de Top_d se prolonge en une application de $Tope_d$. En effet la monotonie permet de définir les applications sur $\mathbb{R}_{\max}^d$, et les propriétés de monotonie et d'homogénéité sont préservées.

L'ensemble $Tope_d$ est stable par composition et par les opérations $\min$, $\max$ et $+$.

Définition 2.2.3 (Espace projectif $(\max, +)$).

1. On appelle espace projectif au sens $(\max, +)$ et on note $\mathbb{PR}_{\max}^d$ l'espace $\mathbb{R}^d$ quotienté par la relation $\sim$ de colinéarité dans $\mathbb{R}_{\max}^d$:

$$x \sim y \Leftrightarrow (\forall i, j \in I_d, (x - y)_i = (x - y)_j).$$

On note $\bar{x}$ le projeté de $x \in \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{PR}_{\max}^d$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \overline{\alpha \otimes x} = \bar{x}.$$

2. L'application $\bar{x} \mapsto (x_i - x_j)_{i < j}$ fait de $\mathbb{PR}_{\max}^d$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\frac{d(d-1)}{2}}$ de dimension $d-1$. La norme infinie de $\mathbb{R}^{\frac{d(d-1)}{2}}$ induit donc une norme sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$ que l'on notera $|\bar{x}|_{\mathcal{P}} := \max x_i - \min x_i$. Par abus d'écriture, on notera parfois aussi $|x|_{\mathcal{P}}$ pour $|\bar{x}|_{\mathcal{P}}$.
3. On appelle distance projective sur $\mathbb{R}_{\max}^d \setminus \{(-\infty)^d\}$ la pseudo distance δ définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^d, \delta(\bar{u}, \bar{v}) = \bigoplus_i (u_i - v_i) + \bigoplus_i (v_i - u_i), \quad (2.5)$$

avec la convention " $-\infty - -\infty = 0$ ". Si les coordonnées de u et v qui valent $-\infty$ sont les mêmes, alors $\delta(u, v) = |\bar{u} - \bar{v}|_{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}$. Si elles sont différentes, alors $\delta(u, v) = +\infty$.

4. Pour tout $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$, on appelle diamètre projectif de A la quantité

$$D(A) := \sup_{u, v \in \mathbb{R}^d} \delta(Au, Av).$$

Proposition 2.2.4.

1. Une application topicale A agit sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$ par $A\bar{x} := \overline{Ax}$. L'application qu'elle définit ainsi ne dépend que de son projeté dans $\mathbb{PR}_{\max}^{d \times d}$.
2. Pour toute suite $({}^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(\bar{{}^n x})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{PR}_{\max}^d$ vers $\bar{x}$ si et seulement si pour tous les $i, j \in I_d$, la suite $({}^n x_i - {}^n x_j)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $x_i - x_j$.
3. Si $A \in \text{Top}_d$, alors l'application qu'elle définit sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$ est 1-lipschitzienne :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^d, \delta(Au, Av) \leq \delta(u, v).$$

4. Pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \delta(Au, Bu) \leq \delta(A, B), \quad (2.6)$$

où $\delta(A, B)$ est la pseudo-distance sur l'ensemble $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$.

Démonstration. Seules les deux dernières affirmations nécessitent une démonstration. Pour l'affirmation 3, on remarque que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$u \leq v + \bigoplus_i (u_i - v_i) \vec{1}.$$

Donc on a,

$$Au \leq Av + \bigoplus_i (u_i - v_i) \vec{1}, \quad (2.7)$$

donc aussi $\bigoplus_i ((Au)_i - (Av)_i) \leq \bigoplus_i (u_i - v_i)$ et

$$\begin{aligned} \delta(Au, Av) &= \bigoplus_i ((Au)_i - (Av)_i) + \bigoplus_i ((Av)_i - (Au)_i) \\ &\leq \bigoplus_i (u_i - v_i) + \bigoplus_i (v_i - u_i) \\ &= \delta(u, v). \end{aligned}$$

Démontrons l'affirmation 4. Pour tout $i \in I_d$, il existe un $j \in I_d$ tel que $(Au)_i = A_{ij} + u_j$. Comme $(Bu)_i \geq B_{ij} + u_j$, on a :

$$(Au)_i - (Bu)_i \leq A_{ij} - B_{ij} \leq \bigoplus_j (A_{ij} - B_{ij}).$$

D'où l'on déduit

$$\bigoplus_i ((Au)_i - (Bu)_i) \leq \bigoplus_{i,j} (A_{ij} - B_{ij}).$$

Et d'après (2.5), on a :

$$\begin{aligned} \delta(Au, Bu) &= \bigoplus_i ((Au)_i - (Bu)_i) + \bigoplus_i ((Bu)_i - (Au)_i) \\ &\leq \bigoplus_{i,j} (A_{ij} - B_{ij}) + \bigoplus_{i,j} (B_{ij} - A_{ij}) \\ &= \delta(A, B). \end{aligned}$$

□

Comme les matrices sans lignes de $-\infty$ sont exactement celles qui laissent stable $\mathbb{R}^d$, elles sont stables par composition. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.2.5. *Si A vérifie la condition T , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n la vérifie aussi et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $x(n, x_0) \in \mathbb{R}^d$ et $y(n, x_0) \in \mathbb{R}^d$.*

Quand A est à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{k \times k}$, on supposera parfois que les coefficients de A sont soit toujours finis, soit jamais. Ainsi A^n et la n ème puissance au sens du produit $(\max, +)$ ont les mêmes coefficients infinis, et ces coefficients ne dépendent pas de ω . Dans ce cas on parle de structure fixe :

Définition 2.2.6 (Structure fixe). On dit qu'une matrice aléatoire A est à structure fixe (en abrégé SF), ou qu'elle a la propriété de structure fixe, si pour tous les indices $i, j \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}(A_{ij} = -\infty) \in \{0, 1\}$.

On dit qu'une suite stationnaire $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices aléatoires est à structure fixe si $A(1)$ l'est.

Théorème-Définition 2.2.7 (Exposant de Lyapunov maximal).

Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un système dynamique mesurable.

Si A est une variable aléatoire à valeurs dans Tope_d telle que $\max_i (A \vec{0})_i^+$ est intégrable, alors la suite $\left(\frac{1}{n} \max_i x_i(n, \vec{0}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire γ à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}$.

En outre la convergence a lieu dans $\mathbb{L}^1$ si $A \vec{0}$ est intégrable. Si $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ est ergodique, alors γ est une constante, appelée exposant de Lyapunov maximal de la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$. On le notera $\gamma(A, \theta)$ ou $\gamma((A(n))_{n \in \mathbb{N}})$, ou même $\gamma(A)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 2.2.1. Quand A est une matrice aléatoire, $\max_i (A \vec{0})_i = \max_{ij} A_{ij}$: la condition d'intégrabilité et la convergence portent sur le plus grand coefficient de la matrice.

Démonstration. Il suffit de montrer que la suite $\left(\max_i x_i(n, \vec{0}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est θ -sous-additive à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}$ et d'appliquer le théorème de Kingman.

Pour montrer la sous-additivité, on utilise la monotonie et l'homogénéité de $A^m \circ \theta^n$ et l'inégalité évidente :

$$x(n, \vec{0}) \leq \vec{0} + \max_i x_i(n, \vec{0}) \vec{1}.$$

On en déduit :

$$x(n+m) \leq x(m, \vec{0}) \circ \theta^n + \max_i x_i(n, \vec{0}) \vec{1},$$

d'où la sous-additivité de $\left(\max_i x_i(n, \vec{0}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Le théorème suivant reprend les principaux résultats du premier ordre. Il faut y ajouter le théorème 2.4.6 de D. Hong ([Hon01]), qui sera énoncé quand on aura introduit les définitions nécessaires.

Théorème 2.2.8. Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique, A une variable aléatoire à valeurs dans Top_d telle que $A \vec{0}$ soit intégrable. On a les résultats suivants :

1. J.E. Cohen [Coh88] : Si A est à valeurs dans l'ensemble des matrices à coefficients finis, alors la suite $\left(\frac{1}{n} x(n, \vec{0}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et pour tout $j \in I_d$, la suite $\left(\frac{1}{n} A_{\cdot j}^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent presque sûrement vers $\gamma(A, \theta) \vec{1}$.

2. F. Baccelli et Z. Liu [Bac92] et [BL92] : Si A est à valeurs dans $(\mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\})^{d \times d}$ et a la propriété de structure fixe, si toutes les coordonnées diagonales sont finies et si $\mathbb{P}$ est θ^k -ergodique pour tout $k \leq d$, alors la suite $\left(\frac{1}{n}x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement.
3. J.M. Vincent [Vin97] : Si A est à valeurs dans Top_d , et si $A \vec{0}$ est intégrable, alors les suites $\left(\frac{1}{n} \max_i x_i(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n} \min_i x_i(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent presque sûrement.
4. F. Baccelli et J. Mairesse [BM98] : Si A est à valeurs dans Top_d , si $\mathbb{P}$ est θ -ergodique et s'il existe un n tel que $\mathbb{P}(D(A^n) < +\infty) > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n}x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $\gamma(A, \theta) \vec{1}$.
5. T. Bousch et J. Mairesse [BM03] : Si A est à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ et satisfait la condition T, alors la suite $\left(\frac{1}{n}y(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement.
6. T. Bousch et J. Mairesse [BM03] : Si A est à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ et satisfait la condition T et si θ est inversible, alors il existe une variable aléatoire χ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que l'on ait :

$$\frac{1}{n}x(n, \vec{0}) - \chi \circ \theta^n \rightarrow 0.$$

De plus les convergences ont aussi lieu dans $\mathbb{L}^1$.

On commente maintenant chacun de ces résultats, soit pour donner une idée de sa démonstration, soit pour préparer l'utilisation que l'on souhaite en faire.

1. L'assertion 1. peut se déduire de l'assertion 4. En effet une matrice est de diamètre projectif fini, si et seulement si elle a tous ses vecteurs colonnes soit finis soit égaux à $-\infty \vec{1}$.

L'assertion 4. se traduit donc dans le cas $(\max, +)$ par les deux énoncés suivants, dont le premier implique le point 1. :

Si A est à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ et vérifie la condition T, si $\mathbb{P}$ est θ -ergodique et s'il existe un n tel qu'avec probabilité strictement positive tous les coefficients de A^n sont finis, alors la suite $\left(\frac{1}{n}x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $\gamma(A, \theta) \vec{1}$.

Si A est à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ et a la propriété SF, si $\mathbb{P}$ est θ -ergodique, et si A est presque sûrement irréductible et apériodique, alors la suite $\left(\frac{1}{n}x_i(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $\gamma(A, \theta) \vec{1}$. De plus, pour tout $i, j \in I_d$, $\left(\frac{1}{n}A_{ij}^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $\gamma(A, \theta)$.

2. Les résultats du point 2. sont repris et généralisés dans la partie 2.4. Dans ces généralisations comme dans [Bac92] et [BL92], les limites sont exprimées en fonction des exposants de Lyapunov des sous-matrices diagonales.

3. L'assertion 3. découle du théorème de Kingman et des relations 2.1, comme la convergence vers l'exposant de Lyapunov dans le théorème-définition 2.2.7. En fait la convergence de $\left(\frac{1}{n} \max_i x_i(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est déjà contenue dans le théorème-définition 2.2.7.

Quand le système est ergodique, les limites sont des constantes. La première est l'exposant de Lyapunov maximal $\gamma(A, \theta)$ et la seconde sera notée $\gamma_b(A, \theta)$.

De même on montre que $\left(\frac{1}{n} \max_i y_i(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n} \min_i y_i(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent presque sûrement.

4. L'assertion 4. découle de l'assertion 3., de l'ergodicité et du fait que si $D(A^n) < +\infty$, alors $D(A^{n+1}) < +\infty$.
5. En fait T. Bousch et J. Mairesse montrent aussi ce résultat pour des applications dites uniformément topicales, qui incluent les applications $(\max, +)$, mais pas toutes les applications topicales. Mais la restriction du cas uniformément topical au cas $(\max, +)$, donne une condition d'intégrabilité un peu plus forte : $\max_{i,j: A_{ij} \neq -\infty} |A_{ij}|$ intégrable.
6. Là encore, T. Bousch et J. Mairesse montrent aussi ce résultat pour les applications uniformément topicales. On n'a énoncé ici que la restriction du théorème au cas $(\max, +)$.

Comme on le voit, si $\max_{i,j: A_{ij} \neq -\infty} |A_{ij}|$ est intégrable, alors $\left(\frac{1}{n} x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une loi forte des grands nombres ssi χ est une constante. Cela permet de déduire les points 1., 2. et la restriction au cas $(\max, +)$ des points 3. et 4. à partir de ce point. Notons toutefois que, sauf pour le point 2., la condition d'intégrabilité sera légèrement plus forte. Par contre, le point 2. sera obtenu sous la seule hypothèse que la diagonale est positive. (La preuve est donnée dans [BM03]).

La suite $\left(\frac{1}{n} x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne vérifie pas toujours une loi forte des grands nombres, même avec la structure fixe (cf. exemple 1) ou l'indépendance (cf. exemple 2).

En revanche, si le s.d.m. est inversible, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x(n, \vec{0})$ a même loi que $x(n, \vec{0}) \circ \theta^{-n-1} = A(-1) \cdots A(-n) \vec{0}$, qui correspond au $y(n, \vec{0})$ associé à la suite $(A(-n-1))_{n \in \mathbb{N}}$. En posant

$$l := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right),$$

on voit que la suite $\left(\frac{1}{n} x(n, 0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ couple avec la suite $(l \circ \theta^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

En particulier, $\left(\frac{1}{n} x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi, et ce résultat ne nécessite pas l'inversibilité, car on peut faire la démonstration sur le s.d.m. canonique inversible associé comme dans l'introduction.

En outre $\max_i l_i = \gamma(A, \theta)$ et $\min_i l_i = \gamma_b(A, \theta)$. Pour montrer que $\left(\frac{1}{n}x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $\gamma(A, \theta) \vec{1}$, il suffit donc de montrer que la limite de $\left(\frac{1}{n}A(-1) \cdots A(-n) \vec{0}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est proportionnelle à $\vec{1}$. C'est ainsi que l'on procédera dans ce chapitre.

Avant d'aller plus loin, on donne deux exemples qui montrent que ni la structure fixe, ni l'indépendance ne suffisent à assurer une loi des grands nombres.

Exemple 1 ([Mai95], Exemple 6.9.4). Soient $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, θ l'application qui échange ω_0 et ω_1 et $\mathbb{P} = \frac{1}{2}(\delta_{\omega_0} + \delta_{\omega_1})$. Soit A , de Ω dans $\mathbb{R}_{\max}^{2 \times 2}$ définie par

$$A(\omega_0) = \begin{pmatrix} -\infty & 0 \\ 0 & -\infty \end{pmatrix} \text{ et } A(\omega_1) = \begin{pmatrix} -\infty & 1 \\ 0 & -\infty \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ est un système dynamique, et que la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de structure fixe. De plus cette structure est irréductible. La suite est une chaîne de Markov dégénérée : $A \circ \theta^n = A(\omega_0) \iff A \circ \theta^{n+1} = A(\omega_1)$.

Or $A(\omega_0)$ permute les coordonnées, et $A(\omega_1)$ fait de même, et augmente ensuite la première coordonnée de 1. Donc la suite est entièrement déterminée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x(2n, z)(\omega_0) &= {}^t(z_1 + n, z_2) \text{ et } x(2n + 1, z)(\omega_0) = {}^t(z_2, z_1 + n) \\ x(2n, z)(\omega_1) &= {}^t(z_1, z_2 + n) \text{ et } x(2n + 1, z)(\omega_0) = {}^t(z_2 + n + 1, z_1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Donc la suite $\left(\frac{1}{n}x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge presque sûrement pas.

Exemple 2 ([BM]). Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de variables i.i.d. prenant les valeurs

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & -\infty \end{pmatrix}$$

avec les probabilités respectives $p > 0$ et $1 - p > 0$. Calculons l'action de B et C sur les vecteurs de la forme ${}^t(0, x, y)$, avec $x, y \geq 0$:

$$B^t(0, x, y) = {}^t(0, 0, \max(x, y) + 1) \text{ et } C^t(0, x, y) = {}^t(0, y, x).$$

Donc $x_1(n, \vec{0}) = 0$ et $\max_i x_i(n + 1, \vec{0}) = \#\{0 \leq k \leq n | A(k) = B\}$. En particulier, si $A(n) = B$, alors $x(n + 1, \vec{0}) = {}^t(0, 0, \#\{0 \leq k \leq n | A(k) = B\})$, et si $A(n) = C$ et $A(n - 1) = B$, alors $x(n + 1, \vec{0}) = {}^t(0, \#\{0 \leq k \leq n | A(k) = B\}, 0)$. Comme $\left(\frac{1}{n}\#\{0 \leq k \leq n | A(k) = B\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend presque sûrement vers p , on voit que :

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n}x_1(n, \vec{0}) &= 0 \text{ p.s.} \\ \forall i \in \{2, 3\}, \liminf_n \frac{1}{n}x_i(n, \vec{0}) &= 0 \text{ et } \limsup_n \frac{1}{n}x_i(n, \vec{0}) = p \text{ p.s.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donc la suite $\left(\frac{1}{n}x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge presque sûrement pas.

2.3 Récurrence affine

On se donne maintenant deux suites conjointement stationnaires à valeurs dans $Tope_d$ et $\mathbb{R}_{\max}^d : (\Omega, \theta, \mathbb{P})$ est toujours un système dynamique mesurable, A une application mesurable de Ω dans $Tope_d$ et B une application mesurable de Ω dans $\mathbb{R}_{\max}^d$. On pose $A(n) := A \circ \theta^n$ et $B(n) := B \circ \theta^n$. On s'intéresse au comportement de la suite définie par :

$$\begin{cases} Y_{n+1}(Y) = A(n)Y_n(Y) \oplus B(n) \\ Y_0(Y) = Y. \end{cases} \quad (2.10)$$

où Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^d$.

Cette situation a été étudiée indépendamment par F. Baccelli et Z. Liu d'une part (cf. [BL92] et [Bac92]) et P. Glasserman et D. Yao (cf. [GY95]) d'autre part, dans le cas où $A(n)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$. Notre apport consiste à remplacer $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ par $Tope_d$, ce qui sera utile pour la preuve du théorème 3.4.2.

Remarque 2.3.1. La suite de terme général ${}^t(Y_n, \vec{0})$ vérifie une relation de récurrence linéaire :

$${}^t(Y_{n+1}, \vec{0}) = \begin{pmatrix} A(n) & B(n) \\ (-\infty)^d & 0 \end{pmatrix} {}^t(Y_n, \vec{0}). \quad (2.11)$$

Les résultats de cette partie peuvent s'interpréter comme des résultats du second ordre sur $\left({}^t(Y_n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour commencer, calculons Y_n en fonction de Y :

$$\begin{aligned} Y_n(Y) &= A(n-1) \cdots A(0)Y \\ &\quad \oplus A(n-1) \cdots A(1)B(0) \oplus \cdots \oplus A(n-1)B(n-2) \oplus B(n-1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Supposons maintenant que θ soit inversible. Alors $Y_n(Y)$ a même loi que $M_n(Y) := Y(n) \circ \theta^{-n}$. Écrivons $M_n(Y)$:

$$M_n(Y) = A(-1) \cdots A(-n)Y \circ \theta^{-n} \oplus \bigoplus_{k=1}^n A(-1) \cdots A(-k+1)B(-k) \quad (2.13)$$

On voit que la suite $(M_n(B(-1)))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et que

$$M_n(Y) = A(-1) \cdots A(-n)Y \circ \theta^{-n} \oplus M_{n-1}(B(-1)). \quad (2.14)$$

On note donc M_n pour $M_n(B(-1))$ et M_∞ pour la limite (éventuellement infinie) de M_n .

Remarques 2.3.2. Pour l'instant on n'a utilisé aucune condition d'intégrabilité.

Comme M_n ne prend pas la valeur $+\infty$,

$$(M_\infty)_i = +\infty \iff \limsup (A(-1) \cdots A(-n)B(-n-1))_i = +\infty.$$

M_n et M_∞ vérifient respectivement les relations suivantes :

$$M_{n+1} \circ \theta = A(0)M_n \oplus B(0) \quad (2.15)$$

d'où

$$M_\infty \circ \theta^n = Y_n(M_\infty). \quad (2.16)$$

On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 ($\gamma < 0$). *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique et inversible, et $A : \Omega \rightarrow \text{Tope}_d$ une application aléatoire telle que $(\max_i (A \vec{0})_i)^+$ soit intégrable. Soit $B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^d$ un vecteur aléatoire tel qu'on ait :*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \max_i B_i(-n) \leq 0. \quad (2.17)$$

Si $\gamma(A, \theta) < 0$, alors $M_\infty \in \mathbb{R}_{\max}$ presque sûrement et pour tout Y tel que $(\max_i Y_i)^+$ soit intégrable, $M_n(Y) \rightarrow M_\infty$ p.s.. De plus si $(M_\infty)_i$ est fini, alors $(M_n(Y))_i = (M_\infty)_i$ à partir d'un certain rang.

Remarque 2.3.3. Une hypothèse naturelle pour assurer la relation (2.17) est l'intégrabilité de $(\max_j B_j)^+$, mais on aura besoin de la condition plus faible (2.17) dans la preuve du théorème 2.4.4.

Démonstration. On sait que la suite $\left(\frac{1}{n} \max_i \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\gamma(A, \theta)$ presque sûrement et en moyenne.

Pour tout $i \in I_d$, on a :

$$\begin{aligned} & \limsup \frac{1}{n} (A(-1) \cdots A(-n)B(n)) \\ & \leq \limsup \frac{1}{n} \left(\max_i \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i + \max_i B_i(n) \right) \\ & \leq \gamma(A, \theta) + 0 < 0 \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$\limsup (A(-1) \cdots A(-n)B(-n-1))_i = -\infty.$$

donc $M_n(B(-1))$ est constante à partir d'un certain rang et $M_\infty \in \mathbb{R}_{\max}^d$.

De même, on a :

$$\limsup (A(-1) \cdots A(-n)Y \circ \theta^{-n})_i = -\infty.$$

D'après l'équation (2.14), si $(M_\infty)_i \in \mathbb{R}$, alors $M_n(Y)$ est égal à $M_{n-1}(B(-1))$ à partir d'un certain rang, donc aussi à M_∞ à partir d'un autre rang. Si $(M_\infty)_i = -\infty$, alors $M_n(Y) = (M_{n-1}(B(-1)))_i = -\infty$ pour tout n , donc la suite de terme général $(M_n(Y))_i = (A(-1) \cdots A(-n)Y \circ \theta^{-n})_i$ tend vers $-\infty$. $\square$

Corollaire 2.3.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, si M_∞ est finie presque sûrement, alors la suite $(Y_n(Y))_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec la suite $(M_\infty \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$, et M_∞ est l'unique solution stationnaire de partie positive intégrable de l'équation (2.10).*

Démonstration. Les ensembles $\mathcal{A}_N := \{\forall n \geq N, Y_n(Y) = M_\infty \circ \theta^n\}$ forment une suite croissante dont l'union est notée $\mathcal{A}$. D'après les équations (2.16) et (2.10), on remarque que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N &= \{\forall n \geq N, Y_n(Y) = Y_n(M_\infty)\} \\ &= \{Y_N(Y) = Y_N(M_\infty)\} \\ &= \{Y_N(Y) = M_\infty \circ \theta^N\} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A}) &= \lim \mathbb{P}(\mathcal{A}_N) \\ &= \lim \mathbb{P}(\theta^N(\mathcal{A}_N)) \\ &= \lim \mathbb{P}(\{M_N(Y) = M_\infty\}) \\ &\geq \lim \mathbb{P}(\{\forall n \geq N, M_n(Y) = M_\infty\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\exists N, \forall n \geq N, M_n(Y) = M_\infty\}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du théorème 2.3.1.

Supposons maintenant que $(Y \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution de (2.10), c'est à dire que pour tout n , $Y \circ \theta^n = Y_n(Y)$. On appelle $\mathcal{B}$ l'ensemble sur lequel M_∞ et Y coïncident. On remarque que

$$\theta^{-n}(\mathcal{B}) = \{M_\infty \circ \theta^n = Y \circ \theta^n\} = \{Y_n(M_\infty) = Y_n(Y)\} = \mathcal{A}_n,$$

D'après l'équation (2.10), $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$, donc $\lim_n \mathbb{P}(\mathcal{A}_n) = \mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1$. On en déduit que $\lim_n \mathbb{P}(\theta^{-n}(\mathcal{B})) = 1$, c'est à dire que $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1$. $\square$

Dans le cas $\gamma > 0$, en l'absence de la condition de précédence qui assurait dans [Bac92] que $\mathbb{P}((M_\infty)_i = +\infty) \in \{0, 1\}$, on n'a pas nécessairement la convergence presque sûre d'une coordonnée vers $+\infty$.

En effet, considérons la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple 1. Comme tous les termes sont positifs, on a, pour le choix $B(n) = \vec{0}$, $Y_n(\vec{0}) = x(n, \vec{0})$, donc $M_n = x(n, \vec{0}) \circ \theta^{-n}$. Les calculs de la page 56, montrent donc que

$$M_\infty(\omega_0) = {}^t(+\infty, 0) \text{ et } M_\infty(\omega_1) = {}^t(0, +\infty).$$

Remarquons que le même raisonnement peut être fait avec la suite $A(n)$ de l'exemple 2. Alors M_∞ prend les valeurs ${}^t(0, 0, +\infty)$ et ${}^t(0, +\infty, 0)$ avec probabilités p et $1 - p$.

On a tout de même le résultat suivant, qui sera suffisant pour montrer le théorème 2.4.4 :

Théorème 2.3.3 ($\gamma > 0$). Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ est un s.d.m. ergodique et inversible, et $A : \Omega \rightarrow \text{Tope}_d$ telle que $\max_i (A \vec{0})_i^+$ soit intégrable.

Si $\gamma(A, \theta) > 0$ et si $B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^k$ est telle que $(\min_i B_i)^-$ soit intégrable, alors $\max_i (M_\infty)_i = +\infty$ presque sûrement et, pour tout Y , on a :

$$\max_i (Y_n(Y))_i \rightarrow +\infty \text{ p.s. .}$$

Démonstration. On sait toujours que la suite $\left(\frac{1}{n} \max_i \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\gamma(A, \theta)$ presque sûrement et en moyenne.

Comme $(\min_i B_i)^-$ est intégrable, $\liminf \frac{1}{n} \min_i B_i(-n) \geq 0$. Donc pour tout $i \in I_d$,

$$\liminf \frac{1}{n} \max_i (A(-1) \cdots A(-n) B(-n-1))_i \quad (2.18)$$

$$\geq \liminf \frac{1}{n} \left(\max_i \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i + \min_j B_j(-n-1) \right) \quad (2.19)$$

$$\geq \gamma(A, \theta) + 0 > 0 \quad (2.20)$$

En particulier, on a :

$$\lim_n \max_i (A(-1) \cdots A(-n) B(-n-1))_i = +\infty.$$

Comme $\max_i (M_n(B(-1)))_i \geq \max_i (A(-1) \cdots A(-n) B(-n-1))_i$, la limite $\max_i (M_\infty)_i$ de cette quantité vaut $+\infty$.

De même, on a $Y_n(Y) \geq x(n, B(0))$ et presque sûrement

$$\lim_n \frac{1}{n} \max_i x_i(n, B(0)) = \gamma(A, \theta) > 0,$$

d'où la seconde assertion. □

Remarque 2.3.4 ($\gamma = 0$). Dans le cas $\gamma = 0$, on ne peut pas espérer de comportement indépendant de B . Ainsi dans le cas le plus simple : $d = 1$, $A = 0$, $M_n = \max_{k \in I_{n+1}} B(-k)$, donc $M_\infty = \inf \{c \in \mathbb{R} | \mathbb{P}(B(0) > c) = 0\}$ est dans $\mathbb{R}_{\max}$ ssi $B(0)$ est borné supérieurement.

2.4 Matrices réductibles

2.4.1 Résultats

A est maintenant une matrice aléatoire vérifiant la condition T. On cherche à quelles conditions la suite $\left(\frac{1}{n} x(n, X_0) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une loi forte des grands nombres. En fait on ne donnera que des conditions suffisantes.

On commence par quelques éléments de théorie des graphes.

Définition 2.4.1 (Graphe orienté).

1. On appelle graphe orienté $\mathcal{G}$ une paire (V, E) où V est un ensemble fini d'éléments appelés noeuds, $E \subset V^2$ est l'ensemble des arcs. Par abus de notation, on écrira $i \in \mathcal{G}$ pour $i \in V$.
2. On appelle chemin sur $\mathcal{G}$ de longueur n une suite finie de $n + 1$ noeuds de V , $ch = (i_1, \dots, i_{n+1}) \in V^{n+1}$ telle que pour tout $j \in I_{n+1}$, (i_j, i_{j+1}) soit un arc de $\mathcal{G}$. La longueur n est notée $|ch|$. On considère parfois ch comme le graphe $(\{i_j\}_{j \in I_{n+1}}, \{(i_j, i_{j+1})\}_{j \in I_n})$.

Un circuit sur $\mathcal{G}$ est un chemin fermé ($i_1 = i_{n+1}$) et une boucle est un circuit de longueur 1.

On appelle chemin élémentaire tout chemin ne contenant pas de sous-chemin strict fermé. Cela signifie que $ch = (i_1, \dots, i_{n+1}) \in V^{n+1}$ est élémentaire si et seulement s'il vérifie :

$$\forall j, k \in I_{n+1}, i_j = i_k \Rightarrow (j = k \text{ ou } \{j, k\} = \{1, n+1\}).$$

3. Un graphe $\mathcal{G}$ est dit fortement connexe si pour tous noeuds $i, j \in \mathcal{G}$, il existe un chemin sur $\mathcal{G}$ de i vers j .

On appelle ensembles fortement connexes les sous-ensembles $F \subset V$ tels que pour tout $(i, j) \in F^2$ il existe un chemin sur $\mathcal{G}$ de i vers j .

On appelle composantes fortement connexes de $\mathcal{G}$ les ensembles fortement connexes maximaux pour l'inclusion. On appelle composantes fortement connexes triviales de $\mathcal{G}$ les $\{i\}$ tels qu'il n'existe pas de circuit sur $\mathcal{G}$ passant par i . Les composantes fortement connexes (y compris triviales) forment une partition de $\mathcal{G}$.

La cyclicité d'un graphe fortement connexe est le pgcd des longueurs de ses circuits. Celle d'un graphe en général est le ppcm des cyclicités des composantes fortement connexes.

Commençons par associer à notre matrice aléatoire un graphe qui permettra de décomposer le problème. Les notations seront conservées dans la suite du texte.

Définition 2.4.2 (Graphe d'incidences possibles). Soit A une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}_{\max}^{I_d}$ et tout ensemble $I \subset I_d$, on pose :

$$x^I := (x_i)_{i \in I}.$$

- i) On appelle graphe d'incidences possibles de A et on note $\mathcal{G}(A)$ le graphe orienté dont l'ensemble des noeuds est I_d et dont les arcs sont les couples (i, j) tels que $\mathbb{P}(A_{ij} \neq -\infty) > 0$.
- ii) On note $c_1, \dots, c_K$ les composantes fortement connexes de $\mathcal{G}(A)$. Dans la suite on dira simplement composantes de $\mathcal{G}(A)$.

À toute composante c_m , on associe les éléments suivants :

$$A^{(m)} := (A_{ij})_{i,j \in c_m}, \gamma^{(m)} := \gamma(A^{(m)}, \theta) \text{ et } x^{(m)}(n, x_0) := (A^{(m)})^n x_0$$

- iii) On dit qu'une composante c_l est accessible depuis une composante c_m , si $m = l$ ou s'il existe un chemin sur $\mathcal{G}(A)$ qui va d'un noeud dans c_m à un noeud dans c_l . On note alors $m \rightarrow l$. À toute composante c_m , on associe les éléments suivants :

$$E_m := \{l \in I_K | m \rightarrow l\}, \gamma^{[m]} := \max_{l \in E_m} \gamma^{(l)},$$

$$F_m := \bigcup_{l \in E_m} c_l, A^{[m]} := (A_{ij})_{i,j \in F_m} \text{ et } x^{[l]}(n, x_0) := (A^{[l]})^n x_0.$$

- iv) On dit qu'une composante c_m est terminale (ou source, d'après la terminologie des systèmes à événements discrets) si pour tout $l \in I_K$, on a :

$$m \rightarrow l \Rightarrow l = m.$$

On dit qu'elle est initiale si, pour tout $l \in I_K$, on a :

$$l \rightarrow m \Rightarrow l = m.$$

On appelle triviale une composante constituée d'un seul noeud i tel que $\mathbb{P}(A_{ii} > -\infty) = 0$.

- v) On dit qu'une composante c_l domine une composante c_m si elle vérifie :

$$m \rightarrow l \text{ et } \gamma^{[l]} = \gamma^{[m]}.$$

À toute composante c_m , on associe les ensembles suivants :

$$G_m := \{l \in E_m | \gamma^{[l]} = \gamma^{[m]}\}, H_m := \bigcup_{l \in G_m} c_l,$$

$$A^{\{l\}} := (A_{ij})_{i,j \in H_l} \text{ et } x^{\{l\}}(n, x_0) := (A^{\{l\}})^n x_0.$$

- vi) On dit qu'une composante c_l est dominante si elle n'est dominée par aucune autre composante, c'est-à-dire si pour tout $m \in I_K$, on a :

$$l \rightarrow m \Rightarrow (l = m \text{ ou } \gamma^{(l)} > \gamma^{(m)}).$$

La proposition suivante regroupe quelques remarques évidentes mais très utiles pour la suite.

Proposition 2.4.3. *Soit A une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$. On reprend les notations de la définition 2.4.2.*

- i) *Pour tout $l \in I_K$, $x^{[m]}(n, x_0) = x^{F_m}(n, x_0)$.*
- ii) *Pour tout $l \in I_K$, et tout $i \in c_l$, on a :*

$$x_i^{c_l}(n, \cdot) \geq x_i^{\{l\}}(n, \cdot) \geq x_i^{(l)}(n, \cdot).$$

- iii) *La relation $\rightarrow$ est une relation d'ordre. Les composantes initiales et terminales sont les éléments minimaux et maximaux pour cette relation.*
- iv) *Si A vérifie la condition T , alors pour tout $l \in I_K$, $A^{[l]}$ vérifie la condition T . En particulier les composantes terminales ne sont jamais triviales.*
- v) *Pour tout $l \in I_K$, G_l est constitué de l'ensemble des noeuds par lesquels passe un chemin de $\mathcal{G}(A)$ allant d'un élément de c_l à un élément d'une composante c_m telle que $\gamma^{(m)} = \gamma^{[l]}$.*

Le premier résultat concerne les exposants de Lyapunov :

Théorème 2.4.4. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique, et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire telle que $(\max_{i,j} A_{ij})^+$ soit intégrable. Alors $\gamma(A, \theta) = \max_l \gamma^{(l)}$.*

Ce résultat est déjà présent dans [BL92]. Il y est énoncé sous des hypothèses plus restrictives, correspondant au cas des graphes d'événements temporisés, mais la démonstration s'adapte facilement au cas général.

En appliquant ce théorème à la matrice aléatoire $A^{[l]}$, on obtient que $\gamma(A^{[l]}, \theta) = \gamma^{[l]}$. Compte tenu du i) de la proposition précédente, on en déduit :

Corollaire 2.4.5. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique, et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire telle que $(\max_{i,j} A_{ij})^+$ soit intégrable. Alors pour tout composante c_l de $\mathcal{G}(A)$,*

$$\lim_n \frac{1}{n} \max_{i \in F_l} x_i(n, \vec{0}) = \gamma^{[l]} \text{ p.s. } \text{ et } \limsup_n \frac{1}{n} x^{c_l}(n, \vec{0}) \leq \gamma^{[l]} \vec{1} \text{ p.s. .}$$

Pour montrer des lois des grands nombres, on va décomposer le système comme expliqué précédemment. Alors il suffira de savoir que les systèmes associés aux composantes dominantes satisfont une lois des grands nombres, pour en déduire que le système complet aussi.

Pour traiter les composantes dominantes, on peut utiliser l'un des résultats du théorème 2.2.8. On donne aussi un résultat simple dans le cas de matrices aléatoires à structure fixe, (lemme 2.4.7) et on rappelle le théorème de D. Hong [Hon01] suivant :

Théorème 2.4.6 (D. Hong). *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ telle que $A(1) \vec{0}$ soit intégrable, $A(1)$ vérifie la condition T et $\mathcal{G}(A)$ soit fortement connexe. Alors, on a la loi des grands nombres suivante :*

$$\lim_n \frac{1}{n} x(n, \vec{0}) = \gamma(A, \theta) \vec{1} \text{ p.s. .}$$

Lemme 2.4.7. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. tel que pour tout $k \in I_d$, θ^k soit ergodique, et soit $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T telle que $A \overrightarrow{0}$ soit intégrable. Supposons que A a la propriété de structure fixe et que $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, alors on a :*

$$\lim_n \frac{1}{n} x(n, \overrightarrow{0}) = \gamma(A, \theta) \overrightarrow{1} \text{ p.s..}$$

Grâce au théorème 2.4.6, on obtient par la méthode exposée :

Théorème 2.4.8. *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ telle que $A(1)$ vérifie la condition T et $A(1) \overrightarrow{0}$ soit intégrable. Si pour toute composante c_m , $A^{\{m\}}$ vérifie la condition T, alors pour toute composante c_l , on a :*

$$\lim_n \frac{1}{n} x^{c_l}(n, \overrightarrow{0}) = \gamma^{[l]} \overrightarrow{1} \text{ p.s..} \quad (2.21)$$

Si pour toute composante fortement connexe c_m , $A^{(m)}$ vérifie la condition T, alors les $A^{\{l\}}$ la vérifient aussi. On a donc le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.9. *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ telle que $A(1)$ vérifie la condition T et $A(1) \overrightarrow{0}$ soit intégrable.*

Si pour toute composante c_m , $A^{(m)}$ vérifie la condition T, alors pour toute composante c_l , on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} x^{c_l}(n, \overrightarrow{0}) = \gamma^{[l]} \overrightarrow{1} \text{ p.s..}$$

Remarque 2.4.1. Dans un article en cours de rédaction [BM], T. Bousch et J. Mairesse donnent une condition nécessaire et suffisante sur la place des $-\infty$ dans les valeurs prises par A pour que $\left(\frac{1}{n} x(n, \overrightarrow{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement, quelles que soient les valeurs prises par les coordonnées finies.

Les hypothèses du théorème 2.4.8 portent sur les $A^{\{l\}}$, donc sur les exposants de Lyapunov des composantes fortement connexes de $\mathcal{G}(A)$. Ce théorème n'est donc pas contenu dans les résultats de [BM].

En revanche le corollaire 2.4.9 donne la convergence sous une hypothèse ne dépendant que de la place des $-\infty$. Il est donc contenu dans ces résultats.

Dans le cas de structure fixe, la condition T pour les $A^{\{l\}}$ est automatiquement vérifiée (lemme 2.4.16). La condition d'indépendance peut être affaiblie en la condition "pour tout $n \in I_d$, θ^n est ergodique", comme le montre le théorème suivant, combiné au lemme 2.4.7. Cette propriété d'ergodicité renforcée est vérifiée dès que la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est mélangeante.

Théorème 2.4.10. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m., et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T telle que $A \overrightarrow{0}$ soit intégrable. Supposons que A a la propriété SF et que, pour toute composante dominante c_m , on a :*

$$\lim_n \frac{1}{n} x^{(m)}(n, \overrightarrow{0}) = \gamma^{(m)} \overrightarrow{1} \text{ p.s..}$$

Alors pour toute composante c_l , $\lim_n \frac{1}{n} x^{c_l}(n, \vec{0}) = \gamma^{[l]} \vec{1}$ p.s. .

Pour finir cette partie, on donne le résultat crucial pour la démonstration des théorèmes 2.4.8 et 2.4.10 .

Théorème 2.4.11. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T telle que $A \vec{0}$ est intégrable.*

Soit (I, J) une partition de I_d , telle que la matrice aléatoire A se décompose en blocs suivant I et J de la manière suivante :

$$A = : \begin{pmatrix} B & D \\ -\infty & C \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Supposons que $\mathcal{G}(B)$ est fortement connexe ou que $B = -\infty$ p.s., que D n'est pas identiquement égal à $(-\infty)^{I \times J}$ et que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- i) $\gamma(C) \geq \gamma(B)$
- ii) $\lim_n \frac{1}{n} C^n \vec{0} = \gamma(C) \vec{1}$ p.s. .

Si A vérifie en outre l'une des conditions suivantes :

- a) *les matrices aléatoires $A(n)$ sont i.i.d.*
- b) *la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété SF,*

alors on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} x(n, \vec{0}) = \gamma(C) \vec{1} = \gamma(A) \vec{1} \text{ p.s. .} \quad (2.23)$$

2.4.2 Démonstration du résultat sur les exposants de Lyapunov

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 2.4.4 .

Pour cela, on se place dans le cadre de la partie 2.3 avec $B = Y = 0$ et on note M_n pour $M_n(Y)$. Remarquons que comme B est fini, M_∞ est finie dans le théorème 2.3.1 . On peut alors montrer le résultat suivant, qui est à la base de la démonstration du théorème 2.4.4 .

Proposition 2.4.12. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. inversible ergodique, et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire telle que $(\bigoplus_{i,j} A_{ij})^+$ soit intégrable.*

Si $\max_{l \leq K} \gamma^{(l)} < 0$, alors $M_\infty < +\infty$ presque sûrement.

Montrons que cette proposition implique le théorème.

Démonstration du théorème 2.4.4. Comme $A_{ij}^n \geq (A^{(l)})_{ij}^n$ pour $i, j \in c_l$, il est clair que $\gamma(A, \theta) \geq \max_l \gamma^{(l)}$. Supposons que $\gamma(A, \theta) > \delta > \max_l \gamma^{(l)}$. Alors $\tilde{A} := (A_{ij} - \delta)_{i,j \in I_d}$ vérifie $\gamma(\tilde{A}, \theta) = \gamma(A, \theta) - \delta > 0$. Quitte à changer Ω , on peut supposer θ inversible et définir les $\tilde{M}_n$ associés. D'après le théorème 2.3.3, $\max_i (\tilde{M}_\infty)_i = +\infty$ p.s. . Mais $\max_l \gamma^{(l)}(\tilde{A}) = \max_l \gamma^{(l)}(A) - \delta < 0$, donc, d'après la proposition 2.4.12, $\tilde{M}_\infty$ est fini presque sûrement. L'inégalité stricte est donc impossible. $\square$

Démonstration de la proposition 2.4.12. On démontre la proposition par récurrence sur le nombre K de composantes de $\mathcal{G}(A)$:

Si $K = 1$, c'est un cas particulier du théorème 2.3.1.

Supposons le résultat démontré à l'ordre $K-1$. On partitionne I_K en une composante initiale I et son complémentaire J . Quitte à renuméroter les coordonnées, on a alors une écriture de A par blocs suivant l'équation (2.22) :

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ -\infty & C \end{pmatrix}$$

Et si M_n se décompose en M_n^I et M_n^J , on a

$$M_{n+1}^I \circ \theta = B(0)M_n^I \oplus D(0)M_n^J \oplus \vec{0} \quad (2.24)$$

$$M_{n+1}^J \circ \theta = C(0)M_n^J \oplus \vec{0}. \quad (2.25)$$

Le graphe $\mathcal{G}(C)$ a $K-1$ composantes, qui sont les $K-1$ composantes de $\mathcal{G}(A)$ autres que I , donc par l'hypothèse de récurrence, $M_\infty^J < +\infty$ p.s. .

La première équation nous montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n^I est majorée par N_n définie par $N_0 = M_0 = \vec{0}$ et $N_{n+1} \circ \theta = B(n)N_n \oplus D(n)M_\infty^J \oplus \vec{0}$. Comme $\gamma(B, \theta) < 0$, il suffit de montrer $\tilde{B} := DM_\infty^J \oplus 0$ vérifie la relation (2.17) pour appliquer le théorème 2.3.1 et en déduire que $N_\infty < +\infty$, donc aussi $M_\infty^I < +\infty$.

Pour vérifier (2.17), remarquons que $(\bigoplus_j \tilde{B}_j)^+ \leq (\bigoplus_{i,j} D_{ij}^+ \bigoplus_j (M_\infty^J)_j^+)$ et que $\bigoplus_{i,j} D_{ij}^+$ est intégrable. Il suffit donc de montrer que $f := \bigoplus_j (M_\infty^J)_j^+$ vérifie $\lim \frac{1}{n} f \circ \theta^{-n} = 0$. Cela résulte de la relation $M_\infty^J \circ \theta = CM_\infty^J \oplus 0$ dont on déduit $f \circ \theta \leq (f + \bigoplus_{ij} C_{ij})^+ \leq f + (\bigoplus_{ij} C_{ij})^+$, d'où $(f \circ \theta - f)^+ \in \mathbb{L}^1$. Alors le théorème de Birkhoff assure que

$$E(f \circ \theta - f) = \lim \frac{1}{n} (f \circ \theta^n - f) = \lim \frac{1}{n} f \circ \theta^n$$

et cette limite est positive, car $f \geq 0$. On applique encore le théorème de Birkhoff, cette fois pour θ^{-1} et on trouve

$$E(f \circ \theta - f) = \lim \frac{1}{n} (f \circ \theta - f \circ \theta^{-n}) = - \lim \frac{1}{n} f \circ \theta^{-n}$$

et cette limite est négative, car $f \geq 0$. On en conclut que :

$$\lim \frac{1}{n} f \circ \theta^{-n} = E(f \circ \theta - f) = 0.$$

□

2.4.3 Démonstration du théorème 2.4.11

La démonstration du théorème 2.4.11 repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.4.13. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique, et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T. On suppose qu'il existe une partition (I, J) de I_d telle que A se décompose suivant l'équation (2.22), avec $\mathcal{G}(B)$ fortement connexe. Posons pour tout $i \in I$,*

$$\mathcal{A}_i := \left\{ \omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N} \left(B(1) \cdots B(n) D(n+1) \vec{0} \right)_i = -\infty \right\}.$$

1. *Si $\omega \in \mathcal{A}_i$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists i_n \in I (B(1) \cdots B(n))_{ii_n} > -\infty$.*
2. *Si les matrices aléatoires $A(n)$ sont i.i.d., et si $\mathbb{P}(D = (-\infty)^{I \times J}) < 1$, alors pour tout $i \in I$, on a $\mathbb{P}(\mathcal{A}_i) = 0$.*

Démonstration.

1. Soit $\omega \in \mathcal{A}_i$. On fait la preuve par récurrence sur n .

D'après la condition T, il existe un $i_1 \in I_d$, tel que $A_{ii_1}(1) > -\infty$. Comme $\left(D(1) \vec{0} \right)_i = -\infty$, cela signifie que tous les coefficients de la ligne i de $D(1)$ valent $-\infty$, c'est à dire $A(1)_{ij} = -\infty$ pour tout $j \in J$, et donc $i_1 \in I$. Donc $B_{ii_1}(1) = A_{ii_1}(1) > -\infty$.

Supposons la suite construite jusqu'au rang n . D'après la condition T, il existe un $i_{n+1} \in I_d$, tel que $A_{i_n i_{n+1}}(n+1) > -\infty$.

Comme $\omega \in \mathcal{A}_i$, on a :

$$-\infty = \left(B(1) \cdots B(n) D(n+1) \vec{0} \right)_i \geq (B(1) \cdots B(n))_{ii_n} + \left(D(n+1) \vec{0} \right)_{i_n},$$

$$\text{donc } \left(D(n+1) \vec{0} \right)_{i_n} = -\infty.$$

Cela signifie que tous les coefficients de la ligne i_n de $D(n+1)$ valent $-\infty$, c'est à dire $A(n+1)_{i_n j} = -\infty$ pour tout $j \in J$, donc $i_{n+1} \in I$ et $B_{i_n i_{n+1}}(n+1) = A_{i_n i_{n+1}}(n+1) > -\infty$.

Finalement, on a bien la relation :

$$(B(1) \cdots B(n+1))_{ii_{n+1}} \geq (B(1) \cdots B(n))_{ii_n} + B_{i_n i_{n+1}}(n+1) > -\infty$$

2. À toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$, on associe la matrice $\widehat{A}$ définie par $\widehat{A}_{ij} = -\infty$ si $A_{ij} = -\infty$ et $\widehat{A}_{ij} = 0$ sinon. On remarque pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$, on a $\widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$.

La suite de terme général $R(n) := \widehat{B(1) \cdots B(n)}$ est une chaîne de Markov dont les états sont des matrices $I \times I$ à coefficients dans $\{0, -\infty\}$ et les transitions sont définies par :

$$\mathbb{P}(R(n+1) = F \mid R(n) = E) = \mathbb{P}(\widehat{EB(1)} = F).$$

Elle vérifie $R(n)_{ij} = 0$ ssi $(B(1) \cdots B(n))_{ij} \neq -\infty$.

Soit E un état récurrent pour cette chaîne. Supposons qu'il existe un $k \in I_d$ tel que $E_{ik} = 0$. D'après la forte connexité de $\mathcal{G}(B)$, il existe pour tout $j \in I$ un $p \in \mathbb{N}$, tel que $\mathbb{P}\left((B(1) \cdots B(p))_{kj} \neq -\infty\right) > 0$, donc il existe un état F de la chaîne, accessible depuis l'état E et tel que $F_{ij} \neq -\infty$. Comme E est récurrent, F l'est aussi et E et F sont dans la même classe de récurrence. Fixons $(i, j) \in I$. Dans chaque classe de récurrence de la chaîne de Markov, soit il existe une matrice F telle que $F_{ij} = 0$, soit toutes les matrices ont tous les coefficients de leur ligne i égaux à $-\infty$.

On fixe $(l, j) \in I \times J$, tels que $\mathbb{P}(A_{lj} \neq -\infty) > 0$. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble contenant exactement une matrice F de chaque classe de récurrence telle que $F_{il} \neq -\infty$ si une telle matrice existe dans la classe. Soit S_n la date du n ième passage de $(R(m))_{m \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}$.

Comme $\mathcal{E}$ contient un élément de chaque classe de récurrence de la chaîne de Markov à espace d'états fini, S_n est presque sûrement fini. Par définition de $\mathcal{E}$, on a pour presque tout $\omega \in \Omega$, soit $(B(1) \cdots B(S_n))_{il} \neq -\infty$ soit $\forall m \in I (B(1) \cdots B(S_n))_{im} = -\infty$

D'après le *i*), si $\omega \in \mathcal{A}_i$, on est dans le premier cas. On a donc pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}_i] \leq \mathbb{P}\left[\forall n \in I_N, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] \quad (2.26)$$

Or

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left[\forall n \in I_N, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left[S_N = k, \forall n \in I_N, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left[S_N = k, \left(D(k + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty, \forall n \in I_{N-1}, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left[\left(D(k + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] \mathbb{P}\left[S_N = k, \forall n \in I_{N-1}, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\left(D(1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] \mathbb{P}\left[\forall n \in I_{N-1}, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right], \end{aligned}$$

car $\left\{\omega \in \Omega \mid S_N = k, \forall n \in I_{N-1}, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right\}$ ne dépend que des matrices aléatoires $A(1), \dots, A(k)$.

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}\left[\forall n \in I_N, \left(D(S_n + 1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right] = \left(\mathbb{P}\left[\left(D(1) \vec{0}\right)_l = -\infty\right]\right)^N,$$

et d'après l'équation (2.26) et le choix de l , on a $\mathbb{P}(\mathcal{A}_i) = 0$.

□

Démonstration du théorème 2.4.11. Sans perte de généralité, on peut supposer que θ est inversible.

On a remarqué à la suite du théorème 2.2.8 (point 5.), qu'il suffit de montrer que :

$$\lim_n \frac{1}{n} A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} = \gamma(C) \vec{1} \text{ p.s.} \quad (2.27)$$

De même, l'hypothèse *ii)* se traduit par $\gamma(C) = \gamma_b(C)$, donc aussi :

$$\lim_n \frac{1}{n} C(-1) \cdots C(-n) \vec{0} = \gamma(C) \vec{1} \text{ p.s.}$$

Supposons que $\mathcal{G}(B)$ est fortement connexe.

Soit $i \in I$. Si A vérifie *b)*, alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ et un $j \in J$, tels que l'on ait presque sûrement :

$$(B(-1) \cdots B(-k) D(-k-1))_{ij} > -\infty. \quad (2.28)$$

Si A vérifie *a)*, alors d'après le lemme 2.4.13, il existe pour presque tout $\omega \in \Omega$, des entiers $k \in \mathbb{N}$ et $j \in J$ dépendants de ω vérifiant l'équation (2.28).

Pour tout ω tel que k et j sont définis, et pour tout $n \geq k(\omega)$, on a :

$$\left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i \geq (B(-1) \cdots B(-k) D(-k-1))_{ij} + \left(C(-k-1) \cdots C(-n) \vec{0} \right)_j. \quad (2.29)$$

Donc, si $\mathcal{G}(B)$ est fortement connexe, on a :

$$\liminf_n \frac{1}{n} \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i \geq \lim_n \frac{1}{n} \left(C(-k-1) \cdots C(-n) \vec{0} \right)_j = \gamma(C). \quad (2.30)$$

Si au contraire $B = -\infty$, alors pour tout $i \in I_d$, $\left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i \geq \max_j A_{ij}(0) + \min_j \left(C(-2) \cdots C(-n) \vec{0} \right)_j$, donc l'équation 2.30 est aussi vérifiée.

Mais, d'après le théorème 2.4.4, on a $\gamma(A) = \gamma(C)$, donc aussi :

$$\limsup_n \frac{1}{n} \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i \leq \gamma(C).$$

On en conclut que l'équation 2.27 est vérifiée, donc aussi la conclusion du théorème. □

2.4.4 Démonstration des lois des grands nombres

Le but de cette partie est de démontrer les théorèmes 2.4.8 et 2.4.10. On dispose pour cela du théorème 2.4.11. Il nous permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.4.14. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T telle que $A \vec{0}$ soit intégrable. Supposons que toutes les composantes terminales c_k du graphe $\mathcal{G}(A)$ vérifient :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x^{(k)}(n, \vec{0}) = \gamma(A, \theta) \vec{1} \text{ p.s. .}$$

Si A vérifie en outre l'une des conditions suivantes :

- a) les matrices aléatoires $A(n)$ sont i.i.d.
- b) la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété SF,

alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x(n, \vec{0}) = \gamma(A, \theta) \vec{1} \text{ p.s. .}$$

Démonstration de la proposition 2.4.14. On fait une récurrence sur le nombre K de composantes de $\mathcal{G}(A)$.

Si $K = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc que le résultat est démontré quand $\mathcal{G}(A)$ a au plus $K - 1$ composantes fortement connexes, et que $\mathcal{G}(A)$ a K composantes.

Soit c_l une composante initiale de $\mathcal{G}(A)$. Quitte à renuméroter les coordonnées, on peut supposer que les premières coordonnées correspondent à c_l . On note $I = c_l$ et $J = I_d \setminus I$. Alors A se décompose selon l'équation (2.22), avec $B = A^{(l)}$. Il est clair que $\mathcal{G}(C)$ a $K - 1$ composantes, qui sont les composantes de $\mathcal{G}(A)$ autres que c_l et que la relation d'accessibilité $\rightarrow$ associée à $\mathcal{G}(C)$ est la restriction de celle associée à $\mathcal{G}(A)$. En particulier, les composantes terminales de $\mathcal{G}(C)$ sont des composantes terminales de $\mathcal{G}(A)$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x^J(n, \vec{0}) \rightarrow \gamma(C) \vec{1} \text{ p.s. .}$$

A priori, $\gamma(A) \leq \gamma(C)$, mais, comme l'hypothèse de convergence vers $\gamma(A) \vec{1}$ implique que les composantes terminales c_k vérifient $\gamma^{(k)} = \gamma(A)$, on sait que $\gamma(C) = \gamma(A)$, donc on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x^J(n, \vec{0}) \rightarrow \gamma(A) \vec{1} \text{ p.s. .} \quad (2.31)$$

Si $D = (-\infty)^{I \times J}$, alors c_l est une composante terminale de $\mathcal{G}(A)$, donc on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x^I(n, \vec{0}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x^{(c_l)}(n, \vec{0}) \rightarrow \gamma(A) \vec{1} \text{ p.s. .}$$

Ce qui conclut la démonstration dans ce cas.

Si $D \neq (-\infty)^{I \times J}$, alors c'est le théorème 2.4.11 qui conclut la démonstration de la proposition. $\square$

Remarquons d'abord que d'après le corollaire 2.4.5, on a, pour toute composante c_l ,

$$\lim_n \frac{1}{n} \max_{i \in F_l} x_i(n, \vec{0}) = \gamma^{[l]} \text{ p.s. .}$$

En particulier, on en déduit :

$$\limsup_n \frac{1}{n} x^{c_l}(n, \vec{0}) \leq \gamma^{[l]} \vec{1},$$

et il suffit donc de montrer que, pour toute composante c_l , on a :

$$\liminf_n \frac{1}{n} x^{c_l}(n, \vec{0}) \geq \gamma^{[l]} \vec{1}.$$

Mais d'après la proposition 2.4.3, $x^{c_l}(n, \vec{0}) \geq \left(x^{\{l\}}(n, \vec{0}) \right)_{i \in c_l}$.

Il suffit donc de montrer la relation suivante pour conclure les preuves des théorèmes 2.4.8 et 2.4.10 :

$$\lim_n \frac{1}{n} x^{\{l\}}(n, \vec{0}) = \gamma^{[l]} \vec{1} \text{ p.s. .} \quad (2.32)$$

Or les matrices aléatoires $A^{\{l\}}$ ont la propriété suivante :

Lemme 2.4.15. *Pour toute composante c_l de $\mathcal{G}(A)$, les composantes terminales c_k du graphe $\mathcal{G}(A^{\{l\}})$ vérifient :*

$$\gamma^{(k)} = \gamma(A^{\{l\}}, \theta) = \gamma^{[l]}.$$

Démonstration du lemme 2.4.15. Les composantes de $\mathcal{G}(A^{\{l\}})$ sont les composantes c_k de $\mathcal{G}(A)$ telles que $k \in G_l$. Soit c_k une telle composante. Comme $k \in G_l$, on a $l \rightarrow k$, et donc $\gamma^{(k)} \leq \gamma^{[l]}$.

Supposons que $\gamma^{(k)} < \gamma^{[l]}$. Soit c_j une composante de $\mathcal{G}(A)$ telle que $\gamma^{(j)} = \gamma^{[k]}$. Comme $k \rightarrow j$, $\gamma^{[j]} \leq \gamma^{[k]}$, donc $\gamma^{[j]} = \gamma^{[k]}$. Or, par définition de G_l , $l \rightarrow k$, donc $l \rightarrow j$, et $\gamma^{[k]} = \gamma^{[l]}$, donc $\gamma^{[j]} = \gamma^{[l]}$. On a donc montré que $j \in G_l$, mais comme $\gamma^{(k)} < \gamma^{(j)}$, $j \neq k$, donc c_k n'est pas terminale dans $\mathcal{G}(A^{\{l\}})$.

Par contraposition, on a montré que toutes les composantes terminales c_k du graphe $\mathcal{G}(A^{\{l\}})$ vérifient $\gamma^{(k)} = \gamma^{[l]}$.

D'après le théorème 2.4.4, $\gamma(A^{\{l\}}, \theta) = \max_{k \in G_l} \gamma^{(k)}$. Comme $G_l \subset E_l$, on a :

$$\gamma(A^{\{l\}}, \theta) \leq \max_{k \in E_l} \gamma^{(k)} = \gamma^{[l]}.$$

Mais comme $\mathcal{G}(A^{\{l\}})$ admet au moins une composante terminale c_k et comme $\gamma^{(k)} = \gamma^{[l]}$, on a égalité dans l'inégalité précédente. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 2.4.8. Plaçons nous sous les hypothèses du théorème 2.4.8. Soit c_l une composante de $\mathcal{G}(A)$.

Pour toute composante terminale c_k de $\mathcal{G}(A^{\{l\}})$, $A^{(k)}$ vérifie la condition T, donc le théorème 2.4.6 appliqué à $A^{(k)}$ prouve que $\lim_n \frac{1}{n} x^{(k)}(n, \vec{0}) = \gamma^{(k)}$. D'après le lemme 2.4.15, $\gamma^{(k)} = \gamma(A^{\{l\}}, \theta)$, donc $A^{\{l\}}$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.4.14. D'après cette proposition, on a donc

$$\lim_n \frac{1}{n} x^{\{l\}}(n, \vec{0}) = \gamma(A^{\{l\}}).$$

Mais toujours d'après le lemme 2.4.15 $\gamma(A^{\{l\}}) = \gamma^{[l]}$, donc c'est exactement la relation (2.32), ce qui conclut la preuve du théorème 2.4.8. $\square$

Pour obtenir la relation (2.32) sous les hypothèses du théorème 2.4.10 et conclure la preuve du théorème 2.4.10, on combine le lemme 2.4.15, la proposition 2.4.14 et le lemme suivant :

Lemme 2.4.16. *Si une matrice aléatoire A a la propriété SF et vérifie la condition T, alors pour toute composante c_l de $\mathcal{G}(A)$, la matrice aléatoire $A^{\{l\}}$ vérifie la condition T.*

Démonstration. Soit c_l une composante de $\mathcal{G}(A)$ et $i \in H_l$.

Si i est dans une composante c_k de $\mathcal{G}(A)$, alors il existe un chemin de i vers une composante c_m de $\mathcal{G}(A)$ telle que $\gamma^{(m)} = \gamma^{[k]}$. Soit j le premier noeud suivant i sur ce chemin. j est dans une composante c_p telle que $k \rightarrow p \rightarrow m$, donc on a :

$$\gamma^{[k]} \geq \gamma^{[p]} \geq \gamma^{[m]} \geq \gamma^{(m)} = \gamma^{[k]}.$$

Donc on a $\gamma^{[p]} = \gamma^{[k]}$. Or, par définition de G_l , $\gamma^{[k]} = \gamma^{[l]}$, donc $\gamma^{[p]} = \gamma^{[l]}$. Finalement, $p \in G_l$, donc $i \in H_l$.

Par définition de $\mathcal{G}(A)$, on a $\mathbb{P}(A_{ij} \neq -\infty) > 0$. Et d'après la propriété SF, $\mathbb{P}(A_{ij} \neq -\infty) = 1$. Donc $A^{\{l\}}$ vérifie la condition T. $\square$

Nous terminons cette partie par la démonstration du lemme 2.4.7.

Démonstration du lemme 2.4.7. Sans perte de généralité, on peut supposer que θ est inversible. On a remarqué à la suite du théorème 2.2.8 (point 5.), qu'il suffit de montrer que :

$$\lim_n \frac{1}{n} A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} = \gamma(A, \theta) \vec{1} \text{ p.s. }$$

Posons pour tout $i \in I_d$,

$$L_i := \lim_n \frac{1}{n} \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i.$$

Ces limites existent d'après le théorème 2.2.8 5, appliqué à $(\Omega, \theta^{-1}, \mathbb{P})$.

D'après l'irréductibilité de $\mathcal{G}(A)$ et la propriété SF, pour tous $i, j \in I_d$, il existe un $k_{ij} \in I_d$, tel que l'on ait presque sûrement :

$$(A(-1) \cdots A(-k_{ij}))_{ij} > -\infty.$$

On en déduit que

$$L_i \leq L_j \circ \theta^{-k_{ij}} \text{ p.s. .} \quad (2.33)$$

En particulier, pour $i = j$, on en déduit que $L_i \geq L_i \circ \theta^{k_{ii}}$ presque sûrement. Alors $L_i = L_i \circ \theta^{k_{ii}}$ p.s., et par l'ergodicité de $\theta^{k_{ii}}$, L_i est presque sûrement constante.

L'équation (2.33) devient donc $L_i \geq L_j$, et par symétrie $L_i = L_j$. Or pour presque tout ω , il existe un $p(\omega) \in I_d$ tel que $\max_i \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_i = \left(A(-1) \cdots A(-n) \vec{0} \right)_p$ pour une infinité de n . Soit $j \in I_d$ tel que $\mathbb{P}(p = j) > 0$. Alors $L_j = \gamma(A)$, donc pour tout $i \in I_d$, $L_i = \gamma(A)$. □

2.5 Tableaux de synthèse.

Le tableau 2.1 reprend les résultats généraux du premier ordre sur les applications $(\max, +)$. On suppose toujours que la matrice aléatoire A satisfait la condition T et que le système dynamique sous-jacent $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ est ergodique. Notons aussi que toutes les convergences ont lieu presque sûrement, et aussi en norme $\mathbb{L}^1$ à partir de la deuxième colonne.

Quantité intégrable	Conclusion	Énoncé	Référence
$\max_{ij} A_{ij}^+$	$\frac{1}{n} \max_i x_i(n, \vec{0}) \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}_{\max}$	Théorème-définition 2.2.7	[Coh88]
$A \vec{0}$	$\frac{1}{n} \min_i x_i(n, \vec{0}) \rightarrow \gamma_b \in \mathbb{R}$	Théorème 2.2.8 point 3	[Vin97]
	$\frac{1}{n} y(n, \vec{0}) \rightarrow \chi \in (\mathbb{R}^d)^\Omega$	Théorème 2.2.8 point 5	[BM03]
$\max_{ij, A_{ij} \neq -\infty} A_{ij} $	$\frac{1}{n} x(n, \vec{0}) - \chi \circ \theta^n \rightarrow 0.$	Théorème 2.2.8 point 6	[BM03]

TAB. 2.1 – Conditions d'intégrabilité

Le tableau 2.2 reprend les résultats de loi forte des grands nombres pour $(x(n, \vec{0}))_{n \in \mathbb{N}}$ obtenus sur les applications $(\max, +)$, sous des conditions de structure données dans la première colonne et des conditions sur l'aléa données dans la première ligne. On suppose toujours que la matrice aléatoire A satisfait la condition T, que $A \vec{0}$ est intégrable et que le système dynamique sous-jacent $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ est ergodique. La mention Ex. x signifie que les conditions ne suffisent pas à assurer la LGN, comme le montre le contre-exemple Exemple x. La mention Th. x signifie que les conditions assurent la LGN, comme le montre le théorème x. Le sigle SF signifie que A a la propriété de structure fixe, le sigle FC exprime que $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe et la mention 2.4.8 veut dire que A vérifie l'hypothèse de structure du théorème 2.4.8 : pour toute composante c_m , $A^{\{m\}}$ vérifie la condition T.

	$(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ ergodique	Ergodicité renforcée	$(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d.
2.4.8	Ex. 1	??	Th. 2.4.8
SF	Ex. 1	Th. 2.4.10+Lemme 2.4.7	Th. 2.4.10+Lemme 2.4.7
FC	Ex. 1	??	Th. 2.4.6 [Hon01]
SF+FC	Ex. 1	Lemme 2.4.7	Th. 2.4.6 ou Lemme 2.4.7

TAB. 2.2 – Lois forte des grands nombres

Chapitre 3

Matrices aléatoires dans $(\mathbb{R}, \max, +)$: ordre 2

3.1 Présentation et résumé

On s'intéresse toujours à des systèmes du même type que dans la partie 2. On cherche maintenant des résultats du second ordre. Ces résultats seront des résultats de couplage, au sens défini dans l'introduction.

On reprend dans les parties 3.2 et 3.3 les principaux résultats de [Mai97], étendus sans difficulté supplémentaire au cas des applications topicales dans le cas de la partie 3.2. Ce sont des résultats du deuxième ordre, obtenus sous des hypothèse d'ergodicité et de perte de mémoire. Les résultats de la partie 3.2 seront cruciaux pour obtenir les théorèmes limites de la partie 5.

Dans la partie 3.4, nous montrons (théorème 3.4.1) que les suites $((X_n)_i - (X_n)_j)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((X_{n+1})_i - (X_n)_i)_{n \in \mathbb{N}}$, couplent en temps fini avec des suites stationnaires, qui ne dépendent pas de la condition initiale X_0 , sous trois hypothèses : une hypothèse sur les exposants de Lyapunov maximum des blocs diagonaux, une hypothèse de couplage relative à certains blocs (déterminés par la place des $-\infty$), et une hypothèse sur la loi de $A(n)$ (Les $A(n)$ sont i.i.d. ou ont la propriété de structure fixe). Remarquons que, contrairement au premier ordre, ni condition sur les $-\infty$ ni ergodicité renforcée ne sont nécessaires.

Nous étendons ainsi les résultats du deuxième ordre de [Bac92]. Les résultats de la partie 2.3 permettent encore de simplifier la rédaction et d'étendre la portée des preuves.

3.2 Perte de mémoire

Remarque 3.2.1. Il suffit de s'intéresser aux quantités $x_i(n, x_0) - x_j(n, x_0)$. En effet on a la relation :

$$x_i(n+1, x_0) - x_j(n, x_0) = \bigoplus_l (A_{il}(n, x_0) + x_l(n, x_0)) - x_j(n, x_0) \quad (3.1)$$

$$= \bigoplus_l (A_{il}(n) + (x_l(n, x_0) - x_j(n, x_0))), \quad (3.2)$$

ce qui permettra de déduire la convergence des $(x_i(n, x_0) - x_j(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ de la convergence des $(x_i(n+1) - x_j(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

On va donc travailler dans l'espace projectif au sens $(\max, +)$.

On pourra utiliser l'analogie avec l'espace projectif classique et rechercher des contractions de cet espace. La convergence de $x(n, x_0)$ dans cet espace assurera la convergence des différences $(x_i(n, x_0) - x_j(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ et, grâce à la remarque 3.2.1, celle des $(x_i(n+1) - x_j(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Dire que $\bar{x}(n, x_0)$ ne dépend pas de la condition initiale x_0 , c'est dire que A^n a pour image une droite de $\mathbb{R}_{\max}^k$. Par analogie avec l'algèbre linéaire on dit que A^n est de rang 1 :

Définition 3.2.1 (Perte de mémoire).

1. On dit qu'une application topocale $B \in Top_d$ est de rang 1 si B définit sur $\mathbb{P}\mathbb{R}_{\max}^d$ une application constante. On note alors $rg(B) = 1$.
2. On dit qu'une suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications topocales aléatoires a la propriété de perte de mémoire (MLP) s'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}(rg(A^N) = 1) > 0.$$

Si la suite est $(A \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on dira que (A, θ) a la MLP.

Remarques 3.2.2.

1. Si la notion de rang 1 est claire, la notion de dimension dans toute sa généralité ne se transpose pas bien (cf [CG79] et [Wag91]).
2. La matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ sans ligne de $-\infty$ est donc de rang 1 si toutes ses colonnes sont proportionnelles au sens de $\mathbb{R}_{\max}^d$. C'est le cas si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}^d$ et $b \in \mathbb{R}_{\max}^d$ tels que pour tout $(i, j) \in I_k^2$ $A_{ij} = a_i + b_j$.
3. La composée d'une application topocale de rang 1 et d'une autre application topocale est de rang 1.
4. Si B est une matrice de rang 1, alors pour toute matrice C de taille compatible sans ligne de $-\infty$, $rg(BC) = 1$ ou $rg(CB) = 1$.

5. La propriété MLP dépend de la loi de $A(1)$ et non de son seul support : si $(U(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables réelles i.i.d. telles que le support de $U(1)$ soit l'intervalle $[0, 1]$, et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ est définie par

$$A(n) = \begin{pmatrix} -U(n) & 0 \\ 0 & -U(n) \end{pmatrix},$$

alors $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété MLP ssi $\mathbb{P}(U(n) = 0) > 0$.

La condition plus faible "il existe une application de rang 1 dans le semi-groupe engendré par le support de la loi de $A(1)$ " est introduit sous le non de perte de mémoire asymptotique dans la partie 3.3.

On peut enfin énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 ([Mai97]). *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique et inversible, et A une variable aléatoire de Ω dans Top_d . Si (A, θ) a la MLP, alors il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{P}\mathbb{R}_{\max}^d$ telle qu'on ait :*

$$Y \circ \theta = AY \quad \mathbb{P} - p.s. \quad (3.3)$$

et $(\bar{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple avec $(Y \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en temps fini, uniformément en x_0 .

Nous reprenons infra la preuve de [Mai97] en remplaçant simplement les matrices dans $(\max, +)$ par des applications topicales.

Corollaire 3.2.3. *Sous les mêmes hypothèses, il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^{d^2}$ telle que pour tout $i, j \in I_d$, la suite $(x_i(n+1, x_0) - x_j(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple avec la suite $(Z_{ij} \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en temps fini, uniformément en x_0 .*

Démonstration. D'après la remarque 3.2.1, il suffit de poser $Z_{ij} = \bigoplus_k (A_{ik} + Y_{kj})$, où $Y_{kj} = y_k - y_j$ si $Y = \bar{y}$. $\square$

Corollaire 3.2.4. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique, et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T. Si (A, θ) a la propriété MLP, alors $\bar{x}(n, x_0)$ converge en variation totale uniformément en x_0 vers une probabilité ne dépendant pas de x_0 .*

Démonstration. Construisons d'abord Y . Par définition de la propriété MLP, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(rg(A^{n_0}) = 1) > 0$. Posons

$$\mathcal{B} := \{\omega \in \Omega \mid \exists n \, rg(A(-1) \cdots A(-n)) = 1\}.$$

D'après la remarque sur les matrices de rang 1, on vérifie que

$$\begin{aligned} \theta(\mathcal{B}) &= \{\omega \in \Omega \mid \exists n \, rg(A(-2) \cdots A(-n-1)) = 1\} \\ &\subset \{\omega \in \Omega \mid \exists n \, rg(A(-1) \cdots A(-n-1)) = 1\} \\ &\subset \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Comme le s.d.m. est ergodique, $\mathbb{P}(\mathcal{B})$ est 0 ou 1. Or

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}) \geq \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid rg(A(-1) \cdots A(-n_0)) = 1\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid rg(A^{n_0}) = 1\}) > 0,$$

donc $\mathbb{P}(\mathcal{B}) = 1$.

On pose alors $N(\omega) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid rg(A(-1) \cdots A(-n)) = 1\}$ et,

$$\forall \omega \in \mathcal{B}, Y(\omega) := \overline{A(-1) \cdots A(-N(\omega))}_1. \quad (3.4)$$

Hors de $\mathcal{B}$ on fixe Y arbitrairement.

Montrons que Y vérifie les propriétés souhaitées.

Par définition de $N(\omega)$, $A(-1) \cdots A(-N(\omega))$ est de rang 1, donc $Y(\omega) = \overline{(A(-1) \cdots A(-N(\omega)))x_0}$ pour tout x_0 . En particulier, on a :

$$\forall n \geq N(\omega), Y(\omega) = \overline{(A(-1) \cdots A(-n))}_1.$$

En remplaçant ω par $\theta(\omega)$, on obtient que $Y(\theta(\omega)) = \overline{(A(0) \cdots A(-n))}_1$ pour tout $n \geq N(\theta(\omega)) - 1$. En prenant $n \geq \max(N(\omega), N(\theta(\omega)) - 1)$, on en déduit que :

$$Y \circ \theta = AY \text{ p.s..}$$

Remarquons que grâce à la relation $Y \circ \theta = AY$ il suffit d'avoir la relation $\bar{x}(n, x_0) = Y \circ \theta^n$ pour $n = n_0$ pour l'avoir pour tout $n \geq n_0$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x}(n, Y) = Y \circ \theta^n$ p.s..

Posons $\mathcal{C} := \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}, rg(A(n) \cdots A(0)) = 1\}$. D'après la remarque sur les matrices de rang 1, on a :

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(\mathcal{C}) &= \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}, rg(A(1) \cdots A(n+1)) = 1\} \\ &\subset \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N}, rg(A(0) \cdots A(n+1)) = 1\} \\ &\subset \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(\mathcal{C}) \geq \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid rg(A^{n_0}) = 1\}) > 0$, donc par l'ergodicité de θ , $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$.

De $rg(A^n) = 1$, on déduit $\bar{x}(n, x_0) = \bar{x}(n, Y) = Y \circ \theta^n$, donc sur $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$, les suites $(\bar{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ coïncident à partir d'un certain rang. $\square$

Le théorème 3.2.2 admet la réciproque suivante :

Théorème 3.2.5. ([Mai97, 7.5]) Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m., A une application aléatoire à valeurs dans Top_d vérifiant la condition T . S'il existe un Y vérifiant les conclusions du théorème 3.2.2, alors la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de perte de mémoire.

Remarque 3.2.3. L'hypothèse d'uniformité en x_0 de la convergence est cruciale, comme le montre le cas des matrices réductibles. En effet les résultats de la partie 3.4 donnent des exemples de suites n'ayant pas la MLP (à cause de blocs de $-\infty$ presque sûrs) telles que $(\bar{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec un unique régime stationnaire.

Démonstration. Si $Y \circ \theta^n = \bar{x}(n, x_0) = A^n \bar{x}_0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^k$, alors $rg(A^n) = 1$. Donc on a :

$$\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega | rg(A^n) = 1\}) = 1$$

et il existe n_0 tel que $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | rg(A^{n_0}) = 1\}) > 0$.

□

Remarque 3.2.4. On définit Y comme une limite (atteinte) de produits à droite, ce qui ouvre la voie à la généralisation au cas où la limite n'est pas atteinte. C'est l'objet de la partie suivante.

3.3 Perte de mémoire à l'infini

Pour énoncer la CNS de convergence, on a besoin de définir les matrices qu'on peut approcher par des produits $A^n(\omega)$. Pour des raisons techniques, on considère les matrices dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$. Cette partie pourrait aussi s'étendre au cas d'applications topicales. Mais pour cela, il faudrait munir Top_d de la topologie de la convergence uniforme, ce qui n'est pas naturel, comme nous le montre la proposition 3.3.9. Comme les résultats de cette partie ne sont pas réutilisés dans la suite, on se contente du cas des matrices et on reprend tels quels certains résultats de [Mai97].

Définition 3.3.1 (Perte de mémoire à l'infini). On appelle matrices limites à gauche (resp. à droite) les éléments de l'ensemble T^g (resp. T^d) défini comme suit :

$$T^g := \{B \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d} | \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mathbb{P}(\delta(A^n, B) < \varepsilon) > 0\}$$

$$T^d := \{B \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d} | \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \mathbb{P}(\delta(A(1) \cdots A(n), B) < \varepsilon) > 0\}$$

où δ est la distance projective sur $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$.

On dit qu'une suite de matrice a la propriété de perte de mémoire asymptotique à gauche (resp. à droite) notée PMAG (resp. PMAD) si T^g (resp. T^d) contient un élément de rang 1.

Remarque 3.3.1. Si les $A(n)$ sont i.i.d., alors $T^g = T^d$ contient le sous semigroupe fermé engendré par le support de la loi de $A(1)$.

Théorème 3.3.2 ([Mai97]).

- i) Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T et la PMAD. Alors, presque sûrement, la suite $(\bar{y}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément en x_0 vers une limite ne dépendant pas de x_0 .
- ii) Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique inversible et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T et la PMAG. Alors la suite $(\bar{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple uniformément en x_0 avec une suite stationnaire ne dépendant pas de x_0 .

Corollaire 3.3.3. Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T et la PMAG. Alors $(\bar{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement, uniformément en x_0 .

La démonstration utilise les résultats suivants sur le diamètre projectif :

Proposition 3.3.4.

1. Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$, $D(A) = 0$ ssi $rg(A) = 1$.
2. Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$, $D(A) = \bigoplus_{i,j} \delta(A_{.i}, A_{.j})$.
3. Donc $D(A) < \infty$ ssi les vecteurs colonnes de A appartiennent à $\mathbb{R}^d \cup \{(-\infty)^d\}$.
4. Si tous les coefficients de A sont finis, alors $D(A) \leq 2|A|_{\mathcal{P}}$.
5. Pour toutes matrices A et B de tailles compatibles sans ligne de $-\infty$, l'inclusion des images prouve que

$$D(AB) \leq D(A).$$

Comme les matrices sont 1-lipschitziennes sur l'espace projectif, on a aussi, si A n'a pas de ligne de $-\infty$

$$D(AB) \leq D(B).$$

Démonstration du théorème 3.3.2.

- i) Montrons que $D(A(1) \cdots A(n)) \rightarrow 0$ p.s.. Cela conclura la démonstration car :
- $\delta(y(n, x_0), y(n+m, x_0)) = \delta((y(n, x_0), y(n, y(m, x_0) \circ \theta^n)) \leq D(A(1) \cdots A(n))$, donc $\bar{y}(n, x_0)$ sera une suite de Cauchy, uniformément en x_0 .
 - $\delta(y(n, x_0), y(n, x_1)) \leq D(A(1) \cdots A(n))$, donc la limite ne dépendra pas de x_0 .

Notons que la suite $(D(A(1) \cdots A(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ est presque sûrement décroissante : cela résulte de la condition T et de la proposition 3.3.4.

Soit $\eta > 0$. D'après la PMAG, il existe une matrice M de rang 1 et un $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\delta(A(1) \cdots A(i), B) < \eta) > 0$. Alors par l'ergodicité de θ et la proposition 3.3.4, l'événement

$$\mathcal{A} := \{\omega \in \Omega \mid \exists N \in \mathbb{N}, \delta(A(N) \cdots A(N+i), B) < \eta\}$$

est de probabilité 1. Or, si $\delta(B, M) \leq \eta$, on a :

$$\begin{aligned} D(B) &= \sup_{u,v} \delta(Bv, Bu) \\ &\leq \sup_v \delta(Bv, Mv) + D(M) + \sup_u \delta(Mu, Bu) \\ &\leq \delta(B, M) + 0 + \delta(M, B) \\ &\leq 2\eta. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\omega \in \mathcal{A}$, il existe un N (dépendant de ω) tel qu'on ait :

$$D(A(1) \cdots A(N+i)) \leq D(A(N) \cdots A(N+i)) \leq 2\eta.$$

Donc la probabilité de l'événement

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists n, D(A(1) \cdots A(n)) \leq 2\eta\}$$

est de probabilité 1.

Comme $D(A(1) \cdots A(n))$ est une suite décroissante, l'événement

$$\{\omega \in \Omega \mid D(A(1) \cdots A(n)) \rightarrow 0\} = \bigcap_k \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists n, D(A(1) \cdots A(n)) \leq \frac{1}{k+1} \right\}$$

est de probabilité 1.

- ii) La suite stationnaire est $(Y \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où Y est obtenu en appliquant le i) à (Ω, θ^{-1}, A) . C'est possible car l'ensemble T^d associé à A et θ^{-1} est exactement l'ensemble T^g associé à A et θ . On remarque alors que Y vérifie $Y \circ \theta = AY$ et par récurrence, $Y \circ \theta^n = A^n Y = x(n, Y)$.

On a montré au i), que $D(A(-1) \cdots A(-n)) \rightarrow 0$ p.s. . La convergence a aussi lieu en probabilité et comme $\mathbb{P}(D(A^n) \leq \eta) = \mathbb{P}(D(A(-1) \cdots A(-n)) \leq \eta)$, la suite $(D(A^n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 en probabilité.

D'après la proposition 3.3.4, $D(A^n) = D(A(n) \cdots A(0))$ est une suite décroissante, donc elle converge presque sûrement. Sa limite ne peut être que 0.

On conclut la démonstration en notant que

$$\delta(\bar{x}(n, x_0), Y \circ \theta^n) = \delta(A^n \bar{x}_0, A^n Y) \leq D(A^n).$$

□

La remarque 3.2.1 permet d'en déduire que :

Corollaire 3.3.5. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique inversible et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T . Si (A, θ) a la PMAG, alors il existe une variable aléatoire $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ telle que pour tout $i, j \in I_d$ la suite $(|x(n+1, x_0)_i - x(n, x_0)_j - Z_{ij} \circ \theta^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tende presque sûrement vers 0, uniformément en x_0 . En particulier la suite $(x(n+1, x_0)_i - x(n, x_0)_j)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une loi ne dépendant pas de x_0 .*

Démonstration. On pose $Z_{ij} = \bigoplus_k (A_{ik} + Y_{kj})$ et on conclut comme pour 3.2.3.

□

La convergence en loi se déduit alors du lemme suivant, qui généralise l'implication classique de la convergence en loi par la convergence en probabilité.

Lemme 3.3.6. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. et (E, δ) un espace polonais. Soient X_n et Y des variables aléatoires à valeurs dans E . Alors si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ couplent, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers Y en loi.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_b(E)$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme E est polonais, il existe un compact K de E tel que $\mathbb{P}(Y \notin K) < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}$. La compacité de K assure alors qu'il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \forall y \in E, \delta(x, y) \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On décompose alors la différence des espérances ainsi :

$$\begin{aligned} |E(f(X_n)) - E(f(Y))| &= |E(f(X_n)) - E(f(Y \circ \theta^n))| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(Y \circ \theta^n \notin K) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\delta(X_n, Y \circ \theta^n) \geq \eta) + \varepsilon \\ &\leq 3\varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\delta(X_n, Y \circ \theta^n) \geq \eta) \end{aligned}$$

Le second terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc pour n assez grand, $|E(f(X_n)) - E(f(Y))| \leq \varepsilon$. Donc $E(f(X_n)) \rightarrow E(f(Y))$ pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E)$. $\square$

La condition du théorème 3.3.2 est nécessaire comme le montrent les résultats suivants :

Théorème 3.3.7 ([Mai97]).

- i) *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire. On suppose que la suite $(\bar{y}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement, uniformément en x_0 , vers une limite ne dépendant pas de x_0 . Alors la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la PMAD.*
- ii) *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. inversible et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T. On suppose qu'il existe $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_{\max}^k)$ telle que la suite $(\delta(\bar{x}(n, x_0), Y \circ \theta^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0, uniformément en x_0 . Alors la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la PMAG.*

Jean Mairesse montre aussi le résultat suivant, qui dit que la condition d'uniformité en la condition initiale est automatiquement vérifiée dans le cas où il n'y a pas trop de $-\infty$:

Lemme 3.3.8 ([Mai97]). *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique inversible et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T. On suppose qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A^{n_0} \in \mathbb{R}^{d \times d}) > 0$ et que pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d$, $\delta(x(n, x_0), x(n, x_1)) \rightarrow 0$ en probabilité. Alors il existe une variable aléatoire $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_{\max}^d)$ telle que la suite $(\delta(\bar{x}(n, x_0), Y \circ \theta^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0, uniformément en x_0 .*

Remarque 3.3.2. L'hypothèse $\mathbb{P}(A^{n_0} \in \mathbb{R}^{d \times d}) > 0$ est cruciale, comme le montre le cas des matrices réductibles. En effet les résultats de la partie 3.4 donnent des exemples de suites n'ayant pas la PMAG (à cause de blocs de $-\infty$ presque sûrs) telles que $(\bar{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec un unique régime stationnaire. De tels exemples sont donnés dans la partie 8 de [Mai97]

Concluons cette partie par une remarque sur l'extension de la perte de mémoire asymptotique au cas topical. Pour refaire la démonstration du théorème 3.3.2, il faudrait avoir une application de rang 1 approchée en norme uniforme. Mais la norme uniforme n'est pas adaptée pour travailler dans Top_d , comme le montre la proposition suivante. En particulier, cette proposition implique que le support d'une probabilité sur $(Top_d, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas défini.

Proposition 3.3.9.

- i) Pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'espace Top_d muni de la distance de la convergence uniforme sur tout compact est un espace σ -compact, donc en particulier un espace polonais.
- ii) Pour tout $d \geq 2$, l'espace Top_d muni de la distance de la convergence uniforme n'est pas séparable.

Notons que T. Bousch et J. Mairesse ont introduit dans [BM03] l'espace des fonctions uniformément topicales, qui est un espace polonais pour la convergence uniforme contenant strictement les applications $(\max, +)$. Dans cet espace, on pourrait retrouver un analogue du théorème 3.3.2.

Démonstration.

- i) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $K_N := \{f \in Top_d \mid \|f(0)\|_\infty \leq N\}$. Comme les fonctions topicales sont 1-lipschitziennes, les fonctions de K_N sont uniformément bornées sur toute boule $B(0, M)$ de $\mathbb{R}^d$:

$$\forall f \in K_N, \|f|_{B(0, M)}\|_\infty \leq M + N.$$

Par le théorème d'Ascoli, et une extraction diagonale, on en déduit que K_N est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

- ii) Pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$, définissons la fonction f_λ par :

$$(f_\lambda(x_1, \dots, x_d))_i = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2.$$

Une telle fonction est bien croissante et additivement homogène et elle vérifie $(f_\lambda(x, 0, \dots, 0))_i = \lambda x$. Par conséquent, $\{f_\lambda\}_{\lambda \in [0, 1]}$ est une famille non-dénombrable de Top_d , tels que si $\lambda \neq \mu$, on ait

$$\|f_\lambda - f_\mu\|_\infty = +\infty.$$

Ceci contredit l'éventuelle séparabilité de $(Top_d, \|\cdot\|_\infty)$.

□

3.4 Matrices réductibles

3.4.1 Résultats

Théorème 3.4.1. *Soit $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ un s.d.m. ergodique inversible, et $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice aléatoire vérifiant la condition T telle que $(\max_{i,j} A_{ij})^+$ soit intégrable. Soit E l'union de toutes les composantes terminales de $\mathcal{G}(A)$, $\tilde{A} = (A_{ij})_{i,j \in E}$ et $(\tilde{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente stochastique associée à $\tilde{A}$. On fait les trois hypothèses suivantes.*

1. *Les $A(n)$ sont i.i.d., ou A a la propriété de structure fixe.*
2. *Les composantes dominantes de $\mathcal{G}(A)$ sont exactement ses composantes terminales.*
3. *La suite $(\tilde{x}(n, X_0^E))_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec une suite stationnaire ne dépendant pas de X_0 .*

Alors $(\bar{x}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec une suite stationnaire ne dépendant pas de X_0 .

Remarques 3.4.1.

1. L'hypothèse 3 est évidemment nécessaire. Elle implique que pour toutes les composantes terminales c_k , $\gamma^{(k)} = \gamma(A)$. La suite déterministe où pour tout n et tout ω ,

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 2 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie les hypothèses 1 (dans ses deux versions) et 2, mais pas la 3.

2. L'hypothèse 2 est presque nécessaire. En effet, elle s'exprime par l'équation suivante :

$$\forall j, l \in I_K, (j \rightarrow l, \gamma^{(j)} \geq \gamma^{(l)}) \Rightarrow j = l.$$

Or, s'il existe $j \rightarrow l$ tel que $\gamma^{(j)} > \gamma^{(l)}$, alors d'après le corollaire 2.4.5,

$$\left(\max_{i \in F_j} x_i(n, \vec{0}) - \max_{i \in F_l} x_i(n, \vec{0}) \right) \rightarrow +\infty \text{ p.s. },$$

ce qui interdit le couplage de $(\bar{x}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi l'exemple 3 infra montre que les hypothèses 2 et 3 ne suffisent pas.

3. La suite déterministe où pour tout n et tout ω ,

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 2 & 0 \\ -\infty & -\infty & \infty & 1 \end{pmatrix}$$

montre que les hypothèses 1 et 3 ne suffisent pas.

La preuve se ramène à une récurrence dont le coeur est le théorème suivant :

Théorème 3.4.2. *Soit (I, J) une partition de I_d , telle que la matrice aléatoire A , qui vérifie la condition T , se décompose en blocs suivant I et J de la manière suivante :*

$$A = : \begin{pmatrix} B & D \\ -\infty & C \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

avec D non identiquement égal à $(-\infty)^{I \times J}$.

On fait les trois hypothèses suivantes :

1. $\forall i \in I, \mathbb{P} \left(\forall n \in \mathbb{N} \left(B(-1) \cdots B(-n) D(-n-1) \vec{0} \right)_i = -\infty \right) = 0$.
2. $\gamma(B, \theta) < \gamma(C, \theta)$.
3. $\left(\overline{x^J}(n, X_0) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec une suite θ -stationnaire ne dépendant pas de X_0 .

Alors la suite $(\overline{x}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple aussi en temps fini avec une suite θ -stationnaire ne dépendant pas de X_0 .

Remarque 3.4.2. D'après la remarque 2.3.1, le théorème 2.3.1 est un cas particulier du théorème 3.4.2, correspondant au cas où $C = 0$. On utilise ce cas particulier pour démontrer le théorème général.

Grâce à cette méthode, rendue possible grâce à l'introduction d'applications topicales étendues dans le théorème 2.3.1, on obtient les théorèmes 3.4.2 et 3.4.1 sans les hypothèses de précédence et de positivité de [Bac92].

Pour conclure l'exposé des résultats, donnons un exemple où le couplage n'a pas lieu alors que deux des trois hypothèses du théorème 3.4.1 sont vérifiées.

Exemple 3 (Hypothèses 2 et 3). Soient $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, θ l'application qui échange ω_0 et ω_1 et $\mathbb{P} = \frac{1}{2}(\delta_{\omega_0} + \delta_{\omega_1})$. Soit A , de Ω dans $\mathbb{R}_{\max}^{3 \times 3}$ définie par :

$$A(\omega_0) = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A(\omega_1) = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $(\Omega, \theta, \mathbb{P})$ est un système dynamique. La suite est une chaîne de Markov dégénérée : $A \circ \theta^n = A(\omega_0) \iff A \circ \theta^{n+1} = A(\omega_1)$.

Or l'action de $A(\omega_0)$ et $A(\omega_1)$ sur un triplet ${}^t(x, y, z)$ tel que $z \geq \max(x, y)$ est donnée par les équations suivantes :

$$A(\omega_0) {}^t(x, y, z) = {}^t(z, x, z+1) \text{ et } A(\omega_1) {}^t(x, y, z) = {}^t(y, x, z+1).$$

Donc la suite est entièrement déterminée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x(2n, \vec{0})(\omega_0) &= {}^t(0, 2n-2, 2n) \text{ et } x(2n+1, \vec{0})(\omega_0) = {}^t(2n, 0, 2n+1) \\ x(2n, \vec{0})(\omega_1) &= {}^t(2n-1, 0, 2n) \text{ et } x(2n+1, \vec{0})(\omega_0) = {}^t(0, 2n-1, 2n+1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donc la suite $\left(\frac{1}{n}x(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge presque sûrement pas. En particulier, $\left(\vec{x}(n, \vec{0})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne couple pas avec une suite stationnaire finie.

Le graphe de A a deux composantes $c_1 = \{1, 2\}$ et $c_2 = \{3\}$ telles que $1 \rightarrow 2$, $\gamma^{(1)} = 0$ et $\gamma^{(2)} = 1$. Donc c_2 est l'unique composante dominante, et elle est terminale. Avec les notations du théorème 3.4.1, $E = \{3\}$, donc la suite $\left(\tilde{x}(n, X_0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans le singleton $\mathbb{P}\mathbb{R}_{\max}^1$, en particulier elle couple en temps fini avec une unique suite stationnaire.

3.4.2 Démonstrations

On commence par un lemme qui servira dans la démonstration du théorème 3.4.2. Ensuite, on démontre ce théorème, et enfin le théorème 3.4.1.

Lemme 3.4.3.

1. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}$, vérifiant les conditions suivantes :

- i) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire,
- ii) $\mathbb{P}(d_n \in \mathbb{R}) = 1$,
- iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$,

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a_n \geq d_n) = 0. \quad (3.7)$$

2. Si les conditions suivantes sont aussi satisfaites,

- iv) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$,
- v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a_n \oplus b_n \neq d_n) = 0$,

alors on a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(c_n \oplus b_n \neq d_n) = 0. \quad (3.8)$$

Démonstration.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(a_n \geq d_n) \leq \mathbb{P}(a_n \geq t) + \mathbb{P}(t \geq d_n).$$

Or d'après iii), $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a_n \geq t) = 0$, et d'après i), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(t \geq d_n) = \mathbb{P}(t \geq d_1)$, on a donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a_n \geq d_n) \leq \mathbb{P}(t \geq d_1).$$

Or le ii) assure que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(t \geq d_1) = 0$, donc (3.7) est démontré.

2. En réappliquant le 1. avec $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au lieu de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(c_n \geq d_n) = 0. \quad (3.9)$$

Or $\mathbb{P}(b_n \neq d_n) \leq \mathbb{P}(a_n = d_n) + \mathbb{P}(a_n \oplus b_n \neq d_n)$, donc d'après (3.7) et ii), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(b_n \neq d_n) = 0. \quad (3.10)$$

En combinant (3.9) , (3.10) et l'inégalité

$$\mathbb{P}(c_n \oplus b_n \neq d_n) \leq \mathbb{P}(b_n \neq d_n) + \mathbb{P}(c_n > d_n),$$

on achève la preuve du lemme. □

Démonstration du théorème 3.4.2.

Réurrence affine :

On définit la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{I \times J}$ par

$$(Z_n)_{ij} := x_i(n, X_0) - x_j(n, X_0). \quad (3.11)$$

On repart de l'expression (2.22), et on calcule que Z_n vérifie la relation

$$Z_{n+1} = F(n)Z_n \oplus G(n), \quad (3.12)$$

où $F(n)$ et $G(n)$ sont l'application topicale étendue aléatoire de $\mathbb{R}_{\max}^{I \times J}$ dans lui même et le vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{I \times J}$ définis par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{I \times J}, (F(n)x)_{ij} &= \max_{k \in I} \min_{l \in J} (B(n)_{ik} - C(n)_{jl} + x_{kl}) \\ (G(n))_{ij} &= \max_{k \in J} \min_{l \in J} (D(n)_{ik} - C(n)_{jl} + x_k(n, X_0) - x_l(n, X_0)) . \end{aligned}$$

L'application $F(n)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_{\max}^{I \times J}$ car C vérifie la condition T. Elle est clairement dans $\text{Tope}_{\#I \#J}$.

Avant toute chose, calculons $(F(n) \cdots F(1)x)_{ij}$, quand il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^d$, tel que $\forall (i, j) \in I \times J, x_{ij} = y_i - y_j$. Comme $F(n)$ ne dépend que de $B(n)$ et $C(n)$, on peut supposer que $D = (-\infty)^{I \times J}$ p.s. et $X_0 = y$ p.s. Dans ce cas $G(n) = (-\infty)^{I \times J}$ p.s., donc $Z_n = F(n-1) \cdots F(1)Z_0$. En outre $Z_0 = x$ et $(Z_n)_{ij} = x_i(n, y) - x_j(n, y) = (B(n-1) \cdots B(0)y)_i - (C(n-1) \cdots C(0)y)_j$. On a donc montré que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, x défini par $\forall (i, j) \in I \times J, x_{ij} = y_i - y_j$, satisfait :

$$(F(n) \cdots F(1)x)_{ij} = (B(n-1) \cdots B(0)y)_i - (C(n-1) \cdots C(0)y)_j \text{ p.s.} \quad (3.13)$$

Cas $\left(\overline{x^J}(n, X_0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ stationnaire :

Supposons maintenant que X_0 est choisi de telle manière que la suite $\left(\overline{x^J}(n, X_0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit θ -stationnaire. C'est possible d'après l'hypothèse 3.. Alors la suite $\left((F(n), G(n))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi θ -stationnaire, car $G(n)$ est une fonction de $A(n)$ et $\overline{x^J}(n, X_0)$.

On peut donc appliquer le théorème 2.3.1, à condition de prouver que $\gamma((F(n)))_{n \in \mathbb{N}} < 0$.

Mais d'après la relation 3.13,

$$\left(F(n) \cdots F(1) \overrightarrow{0}\right)_{ij} = \left(B(n) \cdots B(1) \overrightarrow{0}\right)_i - \left(C(n) \cdots C(1) \overrightarrow{0}\right)_j,$$

donc $\gamma((F(n)))_{n \in \mathbb{N}} \leq \gamma(B, \theta) - \gamma_b(C, \theta)$. D'après l'hypothèse 3, $\gamma_b(C, \theta) = \gamma(C, \theta)$, et d'après l'hypothèse 2 $\gamma(C, \theta) < \gamma(B, \theta)$, donc $\gamma((F(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien strictement négatif.

Dire que $(M_\infty)_{ij} = -\infty$, c'est dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(F(-1) \cdots F(-n)G(-n-1))_{ij} = -\infty.$$

On pose $y^I = D(-n-1)X_0^J \circ \theta^{-n-1}$ et $y^J = C(-n-1)X_0^J \circ \theta^{-n-1}$. D'après l'équation 3.13 composée par θ^{-n-1} , on a :

$$\begin{aligned} & (F(-1) \cdots F(-n)G(-n-1))_{ij} \\ &= (B(-1) \cdots B(-n)D(-n-1)X_0^J \circ \theta^{-n-1})_i - (C(-1) \cdots C(-n)C(-n-1)X_0^J \circ \theta^{-n-1})_j. \end{aligned}$$

Or, comme C satisfait la condition T, $C(-1) \cdots C(-n)C(-n-1)X_0^J \circ \theta^{-n-1} \in \mathbb{R}^J$, donc $(M_\infty)_{ij} = -\infty$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(B(-1) \cdots B(-n)D(-n-1)X_0^J \circ \theta^{-n-1})_i = -\infty.$$

Comme cette dernière condition ne dépend que de la place des $-\infty$ dans les différents termes, l'hypothèse 3 assure que M_∞ est fini presque sûrement. Alors le théorème 2.3.1 prouve que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec un régime stationnaire, noté $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Cas général : Si $\left(\overline{x^J}(n, X_0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas θ -stationnaire, on note N le temps d'arrêt à partir duquel $\overline{x^J}(n, X_0)$ coïncide avec la suite stationnaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned} a_n &= F(n-1) \cdots F(1)G(0) \oplus \cdots \oplus F(n-1) \cdots F(N)G(N-1) \\ &\quad \oplus F(n-1) \cdots F(0)Z(0) \\ b_n &= F(n-1) \cdots F(N+1)G(N) \oplus \cdots \oplus F(n-1)G(n-2) \oplus G(n-1) \end{aligned}$$

et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite obtenue comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quand la condition initiale est telle que $\left(\overline{x^J}(n, X_0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est θ -stationnaire.

Comme $\gamma((F(n))_{n \in \mathbb{N}}) < 0$, $\lim_n a_n = \lim_n c_n = -\infty$ et d'après l'équation (2.12), $Z_n = a_n \oplus b_n$ donc d'après le lemme 3.4.3, le couplage avec $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a lieu pour toute condition initiale.

Or dire que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\overline{x^J}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couplent en temps fini simultanément avec un régime stationnaire, c'est dire que $(\overline{x}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec un régime stationnaire. $\square$

Démonstration du théorème 3.4.1. On fait une récurrence sur le nombre K de composantes de $\mathcal{G}(A)$.

Si $K = 1$, il n'y a rien à montrer.

Supposons donc que le résultat est démontré pour $K - 1$ composantes, et que $\mathcal{G}(A)$ a K composantes. Quitte à permuter l'ordre des coordonnées, on peut supposer que les premières coordonnées correspondent à une composante initiale de $\mathcal{G}(A)$, éventuellement triviale, notée I . Soit $J = I_d \setminus I$. Alors A se décompose selon l'équation (2.22), avec $\mathcal{G}(B)$ fortement connexe et $\mathcal{G}(C)$ qui a $K - 1$ composantes fortement connexes.

Comme on n'a enlevé qu'une composante initiale, les composantes terminales de $\mathcal{G}(C)$ sont celles de $\mathcal{G}(A)$ et elles sont encore dominantes en tant que composantes de $\mathcal{G}(C)$. Comme C vérifie aussi T et i) et comme $\mathcal{G}(C)$ a $K - 1$ composantes fortement connexes, l'hypothèse de récurrence appliquée à la matrice aléatoire C assure le couplage en temps fini de $(\overline{x^J}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme J contient une composante terminale, $J \cap E \neq \emptyset$, $(\overline{x^J}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\overline{x^E}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couplent en temps fini avec une suite stationnaire ne dépendant pas de X_0 , ce qui implique que $(\overline{x^{E \cup J}}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple en temps fini avec une suite stationnaire ne dépendant pas de X_0 .

Si D est presque sûrement $(-\infty)^{I \times J}$, alors I est terminale, donc $E \cup J = I_d$, ce qui conclut la preuve de l'hérédité dans ce cas.

Si $B = -\infty$, alors D a la propriété T et $x(n + 1, X_0)$ est l'image de $x^J(n, X_0)$ par une application topicale qui ne dépend que de $A(n)$, ce qui conclut aussi la preuve de l'hérédité dans ce cas.

On suppose donc désormais que $\mathcal{G}(B)$ est fortement connexe et que $\mathbb{P}(D \neq (-\infty)^{I \times J}) > 0$. Montrons qu'alors les hypothèses du théorème 3.4.2 sont vérifiées :

1. La condition 1. résulte du lemme 2.4.13 dans le cas i.i.d. et de l'irréductibilité de $\mathcal{G}(B)$ dans le cas SF.
2. Comme D n'est pas presque sûrement $(-\infty)^{I \times J}$, I n'est pas terminale et il existe une composante terminale $c_l \subset J$ accessible depuis I . Par l'hypothèse 2, $\gamma(B, \theta) < \gamma^{(l)}$, et d'après le théorème 2.4.4, $\gamma(C, \theta) \geq \gamma^{(l)}$. Donc $\gamma(B, \theta) < \gamma(C, \theta)$.
3. La condition 3. a déjà été vérifiée.

Le théorème 3.4.2 permet donc de conclure la démonstration de l'hérédité de la propriété, et avec elle la démonstration du théorème. $\square$

Chapitre 4

Généricité de la propriété de perte de mémoire

4.1 Présentation et résumé

4.1.1 Résultats

Rappelons le résultat de J. Mairesse (théorème 3.2) : si la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de perte de mémoire (MLP), alors il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{PR}_{\max}^d$ telle que $(\bar{x}(n, x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ couple avec $(Y \circ \theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par analogie avec le cas des produits usuels de matrices, on peut se poser les questions suivantes : Quelle est la loi de Y ? Peut-on prouver un TCL ? La condition de perte de mémoire est-elle générique ?

La première question n'est pas traitée dans ce travail, la deuxième fait l'objet de la partie 5, enfin la troisième est le sujet de ce chapitre. Son intérêt est accru par le fait qu'on montre au chapitre 5 que si $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la MLP et satisfait des conditions d'intégrabilité suffisantes, alors $(x(n, X^0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie des théorèmes limites. En outre S. Gaubert et D. Hong ont montré le résultat suivant :

Théorème 4.1.1 ([GH00]). *Soit $(A_1, \dots, A_t)$ un t -uplet d'applications topicales. Pour tout vecteur de probabilité $p \in \mathbb{R}^t$, on appelle $(A_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite i.i.d. d'applications aléatoires telle que*

$$\forall i \in I_t, \mathbb{P}(A_p(1) = A_i) = p_i$$

et $L(p)$ l'exposant de Lyapunov associé à la suite $(A_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des p tels que $\forall i \in I_t, p_i > 0$. S'il existe un $p \in \mathcal{D}$ tel que la suite $(A_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ait la MLP, alors pour tout $p \in \mathcal{D}$ la suite $(A_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la MLP.

Dans ce cas, L est une fonction analytique de p sur $\mathcal{D}$.

Comme on s'intéresse à des matrices aléatoires avec la condition T, on regarde les matrices sans lignes de $-\infty$. On note $\mathcal{M}_d$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$

sans ligne de $-\infty$ et $\mathcal{P}_d$ l'ensemble des matrices A dites primitives, c'est-à-dire telles qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que les coefficients de $A^{\otimes n}$ soient tous finis.

Nous définissons des notions de formes linéaires et d'hyperplans sur ces espaces qui étendent celles sur $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Définition 4.1.2 (Hyperplans). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. À tout vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^k$, on associe l'application f_α de $\mathbb{R}_{\max}^k$ dans $\mathbb{R}_{\max}$ définie par

$$\begin{cases} f_\alpha(V) = \sum_{\alpha_i \neq 0} \alpha_i V_i & \text{si pour tout } i \in I_k, \alpha_i \neq 0 \Rightarrow V_i \in \mathbb{R}, \\ f_\alpha(A) = -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1)$$

On appelle forme linéaire sur $\mathbb{R}_{\max}^k$ une telle fonction. On appelle hyperplan (resp. hyperplan affine) de $\mathbb{R}_{\max}^k$ l'ensemble des zéros (resp. une ligne de niveau de niveau fini) d'une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_{\max}^k$.

On appelle hyperplan de $\mathcal{M}_d$ (resp. $\mathcal{P}_d$) l'intersection de $\mathcal{M}_d$ (resp. $\mathcal{P}_d$) et d'un hyperplan de $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$.

On appelle hyperplan de $\mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ l'intersection de $\mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ d'un hyperplan de $(\mathbb{R}_{\max}^{d \times d})^2$.

Pour tout $i, j \in I_d$, on note A_{ij}° l'application qui à A associe A_{ij} . Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_d$ se décomposent de manière unique en une combinaison linéaire finie de A_{ij}° .

Nous obtenons les résultats suivants :

Théorème 4.1.3. *Pour tout entier $d \geq 1$, l'ensemble des couples de matrices $(A, B) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ tels qu'une suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices aléatoires i.i.d. prenant les valeurs A et B avec probabilité strictement positive n'ait pas la propriété de perte de mémoire est inclus dans une union finie d'hyperplans de $\mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$.*

Pour définir le support d'une mesure, il faut munir $\mathcal{M}_d$ d'une topologie σ -compacte. On prend celle donnée par la distance

$$d(A, B) = \max\{|\arctan(A_{ij}) - \arctan(B_{ij})| \mid i, j \in I_d\}.$$

Théorème 4.1.4. *Soit μ une probabilité sur $\mathcal{M}_d$ de support S_μ . Si $\mathcal{P}_d \cap S_\mu$ n'est inclus dans aucune union finie d'hyperplans affines, alors une suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices aléatoires i.i.d. de loi μ a la propriété de perte de mémoire.*

En fait, on construit des matrices de rang 1 d'une manière explicite. Les hyperplans qui ne doivent pas contenir les matrices A et B ou le support de μ seront donnés par les lemmes 4.3.7 et 4.3.10.

On peut généraliser ces théorèmes en affaiblissant l'hypothèse d'indépendance. On obtient les théorèmes suivants :

Théorème 4.1.5. *Pour tout entier $d \geq 1$, il existe un ensemble $E \subset \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$, inclus dans une union finie d'hyperplans de $\mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$, tel que tout couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d \setminus E$ ait la propriété suivante : toute suite stationnaire $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{A, B\}$ vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (A_1, \dots, A_n) \in \{A, B\}^n, \mathbb{P}[\forall i \in I_n, A(i) = A_i] > 0$$

a la propriété de perte de mémoire.

Théorème 4.1.6. *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite stationnaire de matrices aléatoires à valeurs dans $\mathcal{P}_d$, telle que pour tous les boréliens $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{R}^{d \times d}$, on ait :*

$$(\forall i \in I_n, \mathbb{P}[A(i) \in \mathcal{B}_i] > 0) \Rightarrow \mathbb{P}[\forall i \in I_n, A(i) \in \mathcal{B}_i] > 0.$$

Si le support de la loi de $A(1)$ n'est inclus dans aucune union finie d'hyperplans affines, alors la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de perte de mémoire.

Le théorème 4.1.5 découle facilement du théorème 4.1.3. Par contre, il faut examiner la preuve du théorème 4.1.4 pour voir qu'elle donne aussi le théorème 4.1.6.

Avant de présenter la preuve de ces résultats, signalons que le chapitre 7- non-publié- de la thèse [Mai95] de J. Mairesse donne des exemples de systèmes avec et sans la MLP. Citons en particulier les deux théorèmes suivant, qui prouvent que certains systèmes ont la MLP. Les notions de circuit critique et de vecteur propre $(\max, +)$, seront définies dans la partie 4.2.

Théorème 4.1.7 ([Mai95]). *Supposons que d est premier et soient A et B deux matrices de $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$, ayant chacune un unique circuit critique de longueur d . Alors il existe un produit fini de A et B de rang 1 ssi A et B n'ont pas les mêmes vecteurs propres au sens $(\max, +)$.*

Théorème 4.1.8 ([Mai95]). *Soient $(a_{ij})_{i,j \in I_d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et $(b_{ij})_{i,j \in I_d} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ des réels tels que $a_{ij} < b_{ij}$ pour tous $i, j \in I_d$. Notons $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices i.i.d. telle que les coordonnées $A_{ij}(0)$ soient indépendantes de loi donnée par*

$$\mathbb{P}(A_{ij}(0) = a_{ij}) = p_{ij} > 0 \text{ et } \mathbb{P}(A_{ij}(0) = b_{ij}) = (1 - p_{ij}) > 0$$

La suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la MLP.

4.1.2 Principe de la preuve

Notation On notera $(A)_{i \in I_n}$ un n -uplet de matrices plutôt que $(A_i)_{i \in I_n}$ afin de réserver les indices pour noter les coefficients des matrices.

Le théorème 4.1.3, se ramène à un problème déterministe : à quelles conditions sur $(A, B) \in (\mathcal{M}_d)^2$, le semi-groupe engendré par A et B dans $\mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ contient-il une matrice de rang 1 ?

La théorie asymptotique des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ montre que certaines matrices, dites de type **scs1-cyc1**, ont des puissances de rang 1. (cf lemme 4.3.1) Les éléments nécessaires de cette théorie sont rappelés dans la partie 4.2.

On est donc ramené au lemme suivant dont la preuve est repoussée à la partie 4.3.3. La notion de graphe critique est définie infra (définition 4.2.1).

Lemme 4.1.9. *Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ pris en dehors d'un certain ensemble fini d'hyperplans, il existe deux entiers $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que la matrice $A^{\otimes m} B A^{\otimes n}$ ait tous ses coefficients finis et que son graphe critique soit réduit à une boucle. En particulier cette matrice est de type **scs1-cyc1**.*

A priori, le théorème 4.1.4 ne répond pas à une question déterministe, car la propriété MLP dépend de la loi μ et non de son seul support (cf. remarque 3.2.2). En fait, il découle aussi du lemme 4.1.9, compte tenu du lemme suivant :

Lemme 4.1.10. *Soit $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice à coefficients finis dont le graphe critique est réduit à une boucle. Alors il existe un voisinage V de A et un entier n tel que :*

$$\forall (A)_{i \in I_n} \in V^n, rg(A \cdots A) = 1.$$

Dans la partie 4.2, on rappelle donc la théorie spectrale et asymptotique des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$. Puis, dans la partie 4.3, on prouve les théorèmes 4.1.3 et 4.1.4. Cette preuve est décomposée en trois sous-parties. La première montre que le lemme 4.1.9 entraîne bien les théorèmes. On y trouve la démonstration du lemme 4.1.10. La deuxième introduit la notion de matrices réduites, qui sert à conclure la démonstration du lemme 4.1.9 dans la dernière sous-partie.

4.2 Puissances des matrices dans $(\mathbb{R}, \max, +)$

Nous résumons ici la théorie spectrale et asymptotique des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$. Les éléments de théorie des graphes nécessaires ont été rappelés dans la définition 2.4.1.

Définition 4.2.1 (Graphe associé à une matrice). Pour une matrice carrée A de taille d à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$, on donne les définitions suivantes.

- i) Le graphe d'incidences de A est le graphe orienté pondéré dont les noeuds sont les éléments de I_d et les arcs les (i, j) tels que $A_{ij} > -\infty$ avec le poids A_{ij} . Il est noté $\mathcal{G}(A)$, l'ensemble de ses chemins élémentaires $\mathcal{E}(A)$ et l'ensemble de ses circuits élémentaires $\mathcal{C}(A)$.
- ii) Le poids d'un chemin ch sur $\mathcal{G}(A)$ est noté $w(A, ch)$. Il vaut :

$$w(A, ch) = \sum_{j=1}^{|ch|} A_{i_j i_{j+1}}.$$

Le poids moyen d'un circuit sur $\mathcal{G}(A)$ est noté $mw(A, c)$ et vaut $\frac{w(A, c)}{|c|}$.

- iii) Le rayon spectral de A est $\rho_{\max}(A) := \max_{c \in \mathcal{C}} mw(A, c)$.
- iv) Le graphe critique de A est la restriction de $\mathcal{G}(A)$ aux noeuds et aux arcs appartenant aux circuits de poids moyen $\rho_{\max}(A)$. Il est noté $\mathcal{G}^c(A)$.
- v) La cyclicité de A est celle de $\mathcal{G}^c(A)$, et on la note $c(A)$.
- vi) Le type d'une matrice est **scsN-cycC**, où **N** est le nombre de composantes fortement connexes de $\mathcal{G}^c(A)$ et **C** la cyclicité de A .

La remarque suivante est à la base de toutes les démonstrations à venir.

Remarque 4.2.1 (Interprétation des puissances en termes de graphe). Si $(i_1, i_2 \dots, i_{n+1})$ est un chemin sur le graphe $\mathcal{G}(A)$, son poids est $\sum_{j=1}^n A_{i_j i_{j+1}}$, donc $A_{ij}^{\otimes n}$ est le poids du chemin de longueur n de i vers j le plus lourd.

Pour énoncer les théorèmes spectraux, on a aussi besoin de :

Théorème-Définition 4.2.2 (Étoile de Kleene). *Pour tout $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ vérifiant $\rho_{\max}(A) \leq 0$, on pose :*

$$\begin{aligned} A^+ &:= \bigoplus_{n \geq 1} A^{\otimes n} = \bigoplus_{1 \leq n \leq d} A^{\otimes n}. \\ A^* &:= \bigoplus_{n \geq 0} A^{\otimes n} = \bigoplus_{0 \leq n \leq d-1} A^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Les égalités à prouver découlent des remarques suivantes, qui font suite à la remarque 4.2.1.

Remarques 4.2.2.

1. La condition $\rho_{\max}(A) \leq 0$ signifie que tous les circuits sur $\mathcal{G}^c(A)$ sont de poids négatif.
2. Pour tout $(i, j) \in I_d^2$, A_{ij}^+ est le poids du chemin le plus lourd de i vers j .
3. Ce poids est atteint par un chemin de longueur au plus d , car tout chemin plus long contient un circuit de poids négatif.
4. Si $i \neq j$, $A_{ij}^* = A_{ij}^+$ et pour tout $j \in I_d$, $A_{jj}^* = \max(A_{jj}^+, 0)$.

Définition 4.2.3 (Vecteurs propres). Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$, on dit que $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ est valeur propre de A , s'il existe un vecteur $V \in \mathbb{R}_{\max}^d \setminus \{(-\infty)^d\}$ tel que :

$$AV = \lambda \otimes V.$$

Un tel V est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Quand $\rho_{\max}(A) \neq 0$, on s'y ramène en utilisant que

$$\rho_{\max}((A_{ij} - \rho_{\max}(A))_{i,j \in I_d}) = 0.$$

Il suffit donc de connaître la théorie spectrale des matrices à rayon spectral nul. C'est ce que donne la proposition suivante.

Proposition 4.2.4 (Vecteurs propres).

1. Si c est un circuit de $\mathcal{G}^c(A)$, alors son poids moyen est $\rho_{\max}(A)$.
2. Si $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, alors $\rho_{\max}(A)$ est la seule valeur propre de la matrice A .
3. Si $\rho_{\max}(A) = 0$, alors le vecteur colonne $A_{.i}^+$ est vecteur propre de A associé à 0 ssi $i \in \mathcal{G}^c(A)$.
4. Si $\rho_{\max}(A) = 0$, alors tout vecteur $y \in \mathbb{R}_{\max}^d$ est vecteur propre de A associé à 0 si et seulement s'il vérifie

$$y = \bigoplus_{i \in \mathcal{G}^c(A)} y_i \otimes A_{.i}^+. \quad (4.2)$$

5. Si $\rho_{\max}(A) = 0$, et si i et j sont dans la même composante fortement connexe de $\mathcal{G}^c(A)$, alors les vecteurs colonnes $A_{.i}^+$ et $A_{.j}^+$ sont proportionnels au sens $(\max, +)$.
6. Si $\rho_{\max}(A) = 0$, alors aucun vecteur colonne $A_{.i}^+$ avec $i \in \mathcal{G}^c(A)$ ne peut s'écrire comme combinaison $(\max, +)$ -linéaire des $A_{.j}^+$ avec j dans des composantes fortement connexes de $\mathcal{G}^c(A)$ différentes de celle de i .

Démonstration.

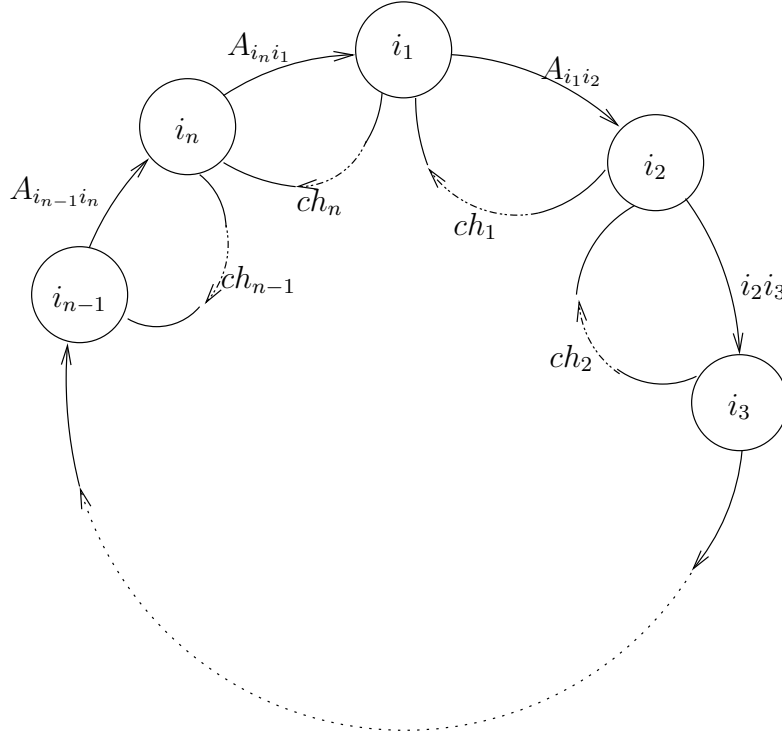
1. Soit $c = (i_1, \dots, i_{n+1})$ un circuit de $\mathcal{G}^c(A)$ (donc $i_{n+1} = i_1$). Par définition de $\mathcal{G}^c(A)$, tout arc (i_j, i_{j+1}) se complète par un chemin ch_j de longueur $|ch_j|$ pour donner un circuit (i_j, ch_j) de poids moyen $\rho_{\max}(A)$ et de longueur $|ch_j| + 1$ (cf. dessin 4.1). On a donc l'équation :

$$A_{i_j i_{j+1}} + w(ch_j) = \rho_{\max}(A)(|ch_j| + 1) \quad (4.3)$$

Appelons c' le chemin obtenu en concaténant $ch_n, ch_{n-1}, \dots, ch_1$. En sommant l'équation (4.3) sur j , on obtient :

$$w(c) + w(c') = \rho_{\max}(A)(|c| + |c'|). \quad (4.4)$$

Mais c et c' sont des circuits de $\mathcal{G}(A)$ donc $w(c) \leq \rho_{\max}(A)|c|$ et $w(c') \leq \rho_{\max}(A)|c'|$, donc l'équation (4.4) implique que $w(c) = \rho_{\max}(A)|c|$.

FIG. 4.1 – circuits de $\mathcal{G}^c(A)$

2. Soit V un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Montrons que $\lambda = \rho_{\max}(A)$. La réciproque découle du point *iii*) appliqué à la matrice de rayon spectral nul $(A_{ij} - \rho_{\max}(A))_{i,j \in I_d}$.

Excluons d'abord le cas $\lambda = -\infty$. Dans ce cas, $AV = -\infty \vec{1}$, c'est-à-dire que pour tout $i, j \in I_d$, $A_{ij} + V_j = -\infty$. Or, par définition de V , il existe un j_0 tel que $V_{j_0} > -\infty$. Pour ce j_0 , on a $A_{ij_0} = -\infty$ pour tout i , ce qui contredit la forte connexité de $\mathcal{G}^c(A)$.

Remarquons que, d'après la remarque 4.2.1, $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe ssi pour tout $i, j \in I_d$, il existe n tel que $A_{ij}^{\otimes n} > -\infty$. Alors pour tout i , $V_i = (A^{\otimes n} V)_i - n\lambda \geq A_{ij_0}^{\otimes n} + V_{j_0} - n\lambda$, donc toutes les coordonnées de V sont finies.

Comme $A_{ii}^{\otimes n} + V_i \leq V_i + n\lambda$ et comme V est fini, $A_{ii}^{\otimes n} \leq n\lambda$. Comme $\rho_{\max}(A) = \bigoplus_{n,i} \frac{1}{n} A_{ii}^{\otimes n}$, on en déduit $\rho_{\max}(A) \leq \lambda$.

Par ailleurs, on définit par récurrence la suite des i_j tels que

$$\lambda + V_{i_j} = A_{i_j i_{j+1}} + V_{i_{j+1}}. \quad (4.5)$$

Comme elle prend ses valeurs dans un ensemble fini, elle prend deux fois la même valeur, disons en j_1 et j_2 . Appelons c le chemin obtenu en suivant la suite $(i_j)_j$ entre les indices j_1 et j_2 . En sommant sur j l'équation (4.5), on voit que $|c|\lambda = w(c)$, donc $\lambda \leq mw(c) \leq \rho_{\max}(A)$.

3. Comme $A^+ = AA^*$ et comme les matrices A^+ et A^* coïncident en dehors de la diagonale, il suffit de remarquer que $j \in \mathcal{G}^c(A)$ ssi $A_{jj}^* = A_{jj}^+ = 0$. Cela découle des interprétations en terme de chemins.
4. Si V est un vecteur propre de A , $A^+V = \bigoplus_{n \geq 1} A^{\otimes n}V = V$, donc V s'écrit comme combinaison des vecteurs colonnes de A^+ :

$$V = \bigoplus_{j \in I_d} V_j \otimes A_{.j}^+ \geq \bigoplus_{j \in \mathcal{G}^c(A)} V_j \otimes A_{.j}^+.$$

Dans l'autre sens, pour tout i , on définit par récurrence la suite i_j telle que $i_1 = i$ et

$$V_{i_j} = A_{i_j i_{j+1}} + V_{i_{j+1}}. \quad (4.6)$$

La suite prend deux fois une même valeur $i_{j_1} = i_{j_2}$. Cette valeur est nécessairement dans $\mathcal{G}^c(A)$ car en sommant l'équation (4.6) sur j entre j_1 et $j_2 - 1$, on voit que le chemin $(i_j)_{j_1 \leq j \leq j_2}$ est un chemin critique. On a donc :

$$V_i = \sum_{j \in I_{j_1-1}} A_{i_j i_{j+1}} + V_{j_1} \leq V_{j_1} \otimes A_{i_{j_1}}^+ \leq \bigoplus_{j \in \mathcal{G}^c(A)} V_j \otimes A_{.j}^+.$$

Donc tout vecteur propre de A vérifie l'équation 4.2. La réciproque découle du point 3.

5. Dire que i et j sont dans la même composante fortement connexe, c'est dire qu'il existe un circuit de poids maximal passant par i et j , donc un n et un m tels que $A_{ij}^{\otimes n} + A_{ji}^{\otimes m} = \rho_{\max}(A) = 0$. D'après le *iii*), on a, pour tout $k \in I_d$:

$$\begin{aligned} A_{kj}^+ &= (A_{.j}^+)_k \\ &= (A^{\otimes n} A_{.j}^+)_k \\ &= (A^{\otimes n} A^+)_kj \\ &= (A^+ A^{\otimes n})_{kj} \\ &\geq A_{ki}^+ + A_{ij}^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Par symétrie, $A_{ki}^+ \geq A_{kj}^+ + A_{ji}^{\otimes m}$. Mais par définition de m et n , $A_{ij}^{\otimes n} = -A_{ji}^{\otimes m}$, donc cette dernière équation devient $A_{kj}^+ \leq A_{ki}^+ + A_{ij}^{\otimes n}$. D'où $A_{kj}^+ = A_{ij}^{\otimes n} \otimes A_{.i}^+$.

6. Soit i un noeud de $\mathcal{G}^c(A)$ et J un ensemble de noeuds de $\mathcal{G}^c(A)$ n'intersectant pas la composante fortement connexe de i tels que

$$A_{.i}^+ = \bigoplus_{j \in J} a_j \otimes A_{.j}^+.$$

Pour tout $j \in \mathcal{G}^c(A)$, $A_{jj}^+ = 0$, donc il existe un $k \in J$ tel que $0 = A_{ii}^+ = a_k + A_{ik}^+$ et $A_{ki}^+ \geq a_k + A_{kk}^+ = a_k$. En sommant les deux dernières inégalités, on a $A_{ik}^+ + A_{ki}^+ \geq 0$. Mais d'après la remarque 4.2.2, cela signifie qu'il existe un chemin critique passant par i et k , donc que i et k sont dans la même composante fortement connexe de $\mathcal{G}^c(A)$.

□

Proposition 4.2.5 (Puissances [CDQV83], [CDQV85]). *Si $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, si $\rho_{\max}(A) = 0$ et si $c(A) = 1$, alors il existe un rang à partir duquel $A^{\otimes n}$ est égale à la matrice Q définie par*

$$\forall (i, j) \in I_d^2, Q_{ij} := \bigoplus_{l \in \mathcal{G}^c(A)} A_{il}^+ \otimes A_{lj}^+.$$

Remarques 4.2.3.

1. Pour tout $(i, j) \in I_d^2$, Q_{ij} est le poids du plus lourd chemin de $\mathcal{G}(A)$ allant de i à j en passant par un noeud de $\mathcal{G}^c(A)$.
2. Si $c(A) \neq 1$, on pourra appliquer la proposition à $A^{\otimes c(A)}$. Si $G(A^{\otimes c(A)})$ n'est pas fortement connexe, il se décompose en composantes fortement connexes non reliées par des chemins. Cela signifie que, quitte à renuméroter les indices, $A^{\otimes c(A)}$ est diagonale par blocs. On applique alors la proposition à chaque bloc.

Démonstration. Toute composante fortement connexe C de $\mathcal{G}^c(A)$ est l'union finie (non disjointe) de ses circuits élémentaires $c_1, \dots, c_m$. Comme tout circuit sur cette composante fortement connexe se décompose en circuits élémentaires, l'ensemble des longueurs de ces circuits a le même pgcd que l'ensemble des longueurs de tous les circuits, c'est-à-dire $c(A)$, qui vaut 1.

La forte connexité assure qu'il existe un chemin c_0 passant par tous les points, donc en particulier par tous les circuits. Or il existe un m tel que pour tout $n \geq m$, il existe $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ tels que $n = \sum_{i=1}^p k_i |c_i|$. Donc en ajoutant à c_0 k_i fois le circuit c_i , on obtient un circuit de C de longueur n , pour tout $n \geq m + |c_0|$.

Soit maintenant $n \geq m + |c_0| + 2d$ et $i, j \in I_d$. Par définition de Q , il existe un noeud k de $\mathcal{G}^c(A)$, un chemin ch_1 de i vers k et un chemin ch_2 de k vers j , de longueurs $|ch_1|$ et $|ch_2|$ inférieures à d , tels que $Q_{ij} = w(ch_1) + w(ch_2)$. Mais on trouve un circuit de $\mathcal{G}^c(A)$ de longueur $n - l_1 - l_2$ passant par k , donc (ch_1, c, ch_2) est un chemin de longueur n de i vers j passant par $\mathcal{G}^c(A)$. Comme d'après la proposition 4.2.4 i), $w(c) = \rho_{\max}(A) = 0$, on a $w(ch_1, c, ch_2) = w(ch_1, ch_2) = Q_{ij}$ et donc $A_{ij}^{\otimes n} \geq Q_{ij}$.

En particulier, on a montré que $A \in \mathcal{P}_d$. Pour montrer l'inégalité inverse, il suffit de montrer que pour n assez grand tout chemin de i vers j , de longueur n et de poids $A_{ij}^{\otimes n}$ passe par $\mathcal{G}^c(A)$. Mais ceci découle du lemme ci-dessous. □

Lemme 4.2.6. *Si $A \in \mathcal{P}_d$ est une matrice primitive, alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que tout chemin $ch = (i_1, \dots, i_{n+1})$ sur $\mathcal{G}(A)$ de longueur $n \geq N$ et de poids $w(ch, A) = (A^{\otimes n})_{i_1 i_{n+1}}$ passe par $\mathcal{G}^c(A)$.*

Démonstration du lemme 4.2.6. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\rho(A) = 0$. Par définition de $\mathcal{P}_d$, il existe un rang N_1 tel que les coefficients de $A^{\otimes N_1}$ soient tous finis. Notons M_1 le minimum des coefficients de $A^{\otimes N_1}$.

Soit c un circuit critique de $\mathcal{G}^c(A)$, de longueur $|c|$. Par définition de $\mathcal{G}^c(A)$, il existe un indice $k \in I_d$ tel que $A_{kk}^{\otimes |c|} = |c|\rho_{\max}(A) = 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $i, j \in I_d$, on a :

$$A_{i,j}^{\otimes (2N_1+n|c|)} \geq A_{ik}^{\otimes N_1} + nA_{kk}^{\otimes |c|} + A_{kj}^{\otimes N_1} \geq 2M_1.$$

Notons $-\epsilon$ le poids moyen du plus lourd circuit de $\mathcal{G}(A)$ ne passant pas par $\mathcal{G}^c(A)$. Soit $ch = (i_1, \dots, i_n)$ un chemin sur $\mathcal{G}(A)$ ne passant pas par $\mathcal{G}^c(A)$. Il se décompose en un chemin de longueur au plus d et des circuits élémentaires, de poids moyen au plus $-\epsilon$. En notant M_2 le plus grand coefficient de A , on a :

$$w(ch, A) \leq d|M_2| - \epsilon(n - d).$$

il suffit donc de prendre N suffisamment grand pour que $d(|M_2| + \epsilon) - N\epsilon$ soit strictement inférieure à $2M_1$. $\square$

Remarque 4.2.4. Si on refait le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 4.2.5, mais avec des chemins de $\mathcal{G}(A)$ au lieu de chemins sur une composante fortement connexe de $\mathcal{G}^c(A)$, on voit que $A \in \mathcal{P}_d$ ssi $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe et de cyclicité 1.

4.3 Démonstrations

4.3.1 Démonstration des théorèmes 4.1.3 et 4.1.4

Pour démontrer le théorème 4.1.3, on combine le lemme 4.1.9 avec le lemme suivant :

Lemme 4.3.1. *Si $A \in \mathcal{M}_d$ est une matrice à coefficients finis de type **scs1-cyc1**, alors A admet une puissance de rang 1.*

Démonstration. D'après la proposition 4.2.5, pour n grand, les vecteurs colonnes de $(A_{ij}^{\otimes n} - n\rho_{\max}(A))_{i,j \in I_d} = \left((A_{ij} - \rho_{\max}(A))_{i,j \in I_d}\right)^{\otimes n}$ sont tous des vecteurs propres de la matrice $(A_{ij} - \rho_{\max}(A))_{i,j \in I_d}$. De plus cette matrice est **scs1-cyc1** et de rayon spectral nul, donc, d'après la proposition 4.2.4, tous ses vecteurs propres sont proportionnels au sens $(\max, +)$. Tous les vecteurs colonnes de $A^{\otimes n}$ sont proportionnels au sens $(\max, +)$, donc la matrice est de rang 1 et tous ses coefficients sont finis. $\square$

Montrons maintenant que le théorème 4.1.4 découle des lemmes 4.1.9 et 4.1.10. Ensuite nous démontrerons le lemme 4.1.10.

Démonstration du théorème 4.1.4.

Chaque hyperplan α donné par le lemme 4.1.9 est le noyau d'une forme linéaire f^α sur $\mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$. Cette forme linéaire se décompose en $f^\alpha = f_1^\alpha + f_2^\alpha$ où f_1^α ne dépend que de la première matrice et f_2^α de la seconde. Le support de μ n'est pas inclus dans l'union des $\ker f_1^\alpha$ donc il existe une matrice A dans le support de μ telle que $\forall \alpha, f_1^\alpha(A) \neq 0$. Pour tout α , l'ensemble $\{B \in \mathcal{M}_d | f_2^\alpha(B) + f_1^\alpha(A) = 0\}$ est soit l'ensemble vide, soit un hyperplan affine de $\mathcal{M}_d$. Il existe donc une matrice B dans le support de μ tel que B ne soit pas dans $\cup_\alpha \{B \in \mathbb{R}^{d \times d} | f_2^\alpha(B) + f_1^\alpha(A) = 0\}$. Finalement $(A, B) \notin \bigcup_\alpha \ker f^\alpha$.

Le lemme 4.1.9 assure donc l'existence de deux matrices A et B dans le support de μ et de deux entiers m et n tels que le graphe critique de $A^{\otimes m} B A^{\otimes n}$ soit réduit à une boucle. Le lemme 4.1.10 donne un voisinage V de $A^{\otimes m} B A^{\otimes n}$ et un entier N tel que toute matrice de $V^{\otimes N}$ soit de rang 1. Prenons $V_1 \times V_2$ un voisinage de (A, B) tel que $V_1^{\otimes m} V_2 V_1^{\otimes n} \subset V$. Alors les éléments de $(V_1^{\otimes m} V_2 V_1^{\otimes n})^{\otimes N}$ sont de rang 1. Comme A et B sont dans le support de μ , $\mu(V_1) > 0$ et $\mu(V_2) > 0$, donc

$$\mu^{\otimes (n+m+1)N} \left(\left\{ (A_i)_{i \in I_{(n+m+1)N}} \mid \text{rg}(A_1 \cdots A_{(n+m+1)N}) = 1 \right\} \right) \geq \mu(V_1)^{(n+m)N} \mu(V_2)^N > 0.$$

□

La fin de cette partie est consacrée à la démonstration du lemme 4.1.10. Le principe de la démonstration est de reprendre simultanément les éléments des preuves des résultats utilisés pour prouver le lemme 4.3.1.

Pour comprendre les itérés de A , on interprétait ses coefficients comme le poids des chemins sur $\mathcal{G}(A)$, comme expliqué à la remarque 4.2.1. On veut faire la même chose pour des produits de plusieurs matrices. On va donc autoriser le poids des arcs (c'est-à-dire les matrices) à varier.

Dorénavant, $\mathcal{G}$ désignera le graphe orienté non pondéré associé à $\mathcal{G}(A)$. Pour toute suite finie de matrices $(^i A)_{i \in I_n}$ on définit les notations suivantes :

Définition 4.3.2.

- Le poids d'un chemin $ch = (i_j)_{j \in I_{n+1}}$ sur $\mathcal{G}$ (relativement à $(^i A)_{i \in I_n}$) est

$$w(ch) := \sum_{j \in I_n} {}^j A_{i_j i_{j+1}}.$$

- Un chemin est dit maximisant si son poids est maximum parmi ceux des chemins de même longueur, même début et même fin.

Ces définitions sont telles que $(i_j)_{j \in I_{n+1}}$ est maximisant si et seulement s'il est de poids $(^1 A \cdots {}^n A)_{i_1 i_{n+1}}$.

Démonstration du lemme 4.1.10. Le graphe critique de A est réduit à une boucle. Cela signifie qu'il existe un $l \in I_d$ tel que : $\forall c \in \mathcal{C}(A) \setminus \{(l, l)\}, A_{ll} > mw(A, c)$. Donc il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall c \in \mathcal{C}(A) \setminus \{(l, l)\}, A_{ll} - mw(A, c) > 3\epsilon. \quad (4.7)$$

On définit V comme la boule ouverte de centre A et de rayon ϵ pour la norme uniforme et on note M le maximum de la norme infinie sur V .

Remarquons que toute matrice $B \in V$ a le même graphe critique que A , à savoir une boucle sur l . Soit $\tilde{B}$ la matrice de rayon spectral nul définie par $\tilde{B}_{ij} = B_{ij} - B_{ll}$. Alors $\|\tilde{B} - \tilde{A}\|_\infty < 2\epsilon$ et la relation 4.7 dit que pour tout $c \in \mathcal{C}(A) \setminus \{(l, l)\}, mw(\tilde{A}, c) < -3\epsilon$.

Dorénavant, $(\tilde{A})_{i \in I_n}$ sera dans V^n et le poids des chemins sera considéré relativement à $(\tilde{A})_{i \in I_n}$.

Soit c un circuit élémentaire différent de (l, l) et de longueur $|c|$. Son poids vérifie :

$$w(c) \leq w(\tilde{A}, c) + 2|c|\epsilon \leq |c|(mw(\tilde{A}, c) + 2\epsilon) < -|c|\epsilon.$$

Soit $ch = (i_j)_{j \in I_{n+1}}$ un chemin de longueur n ne passant pas par l . Quitte à permuter les $\tilde{A}$, il se décompose en un chemin de longueur au plus d et des circuits élémentaires, donc on a :

$$w(ch) < -(n - d)\epsilon + dM.$$

Or pour tout $i, j \in I_d$,

$$\left(\tilde{A} \cdots \tilde{A} \right)_{ij} \geq w((i, l, \dots, l, j)) \geq -2M,$$

donc il existe un N tel que tous les chemins maximisants de longueur $n \geq N$ passent par l .

Soit $ch = (i_j)_{j \in I_{n+1}}$ un chemin maximisant de longueur $n \geq 2N + 1$. Comme $(i_j)_{j \in I_{N+1}}$ est encore maximisant, il existe un $j_0 \leq N$ tel que $i_{j_0} = l$. Comme $(i_j)_{n-N \leq j \leq n+1}$ est maximisant relativement à la suite de matrices $(\tilde{A})_{n-N \leq j \leq n+1}$, il existe $n - N \leq j_1 \leq n + 1$ tel que $i_{j_1} = l$. Le chemin $(i_j)_{j_0 \leq j \leq j_1}$ est un circuit, donc il se décompose en circuits élémentaires. Comme les circuits élémentaires sont de poids strictement négatif, sauf (l, l) , la maximalité du chemin assure que pour tout j entre j_0 et j_1 , $i_j = l$. En particulier c'est vrai pour $N + 1 \leq j \leq n - N$, d'où

$$w(ch) = w((i_j)_{j \in I_{N+1}}) + w((i_j)_{n-N \leq j \leq n+1}).$$

Cela signifie que :

$$\forall n \geq 2N + 1, \forall i, j \in I_d, \left(\tilde{A} \cdots \tilde{A} \right)_{i,j} = \left(\tilde{A} \cdots \tilde{A} \right)_{il} + \left({}^{n-N} \tilde{A} \cdots \tilde{A} \right)_{lj},$$

d'où $rg \left(\tilde{A} \cdots \tilde{A} \right) = 1$ donc aussi $rg({}^1 \tilde{A} \cdots {}^n \tilde{A}) = 1$.

□

4.3.2 Matrices réduites

Pour prouver le lemme 4.1.9, on introduit les notions suivantes de matrices réduites :

Définition 4.3.3. Une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ est dite réduite si elle vérifie :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I_d^2, A_{ij} \leq 0 \\ \forall i \in I_d, \exists j \in I_d, A_{ij} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Elle est dite strictement réduite si elle vérifie :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I_d^2, A_{ij} \leq 0 \\ \forall i \in I_d, \exists ! j \in I_d, A_{ij} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Lemme 4.3.4.

- i) Les matrices réduites forment un semi-groupe. Les matrices strictement réduites aussi.
- ii) Toute matrice réduite A est de rayon spectral nul et $\mathcal{G}^c(A)$ est constitué des composantes fortement connexes du sous-graphe de $\mathcal{G}(A)$ obtenu en ne gardant que les arcs de poids 0.

Démonstration. La preuve du i) est immédiate. Si A est réduite, ses coefficients sont négatifs, donc son rayon spectral aussi. Mais par définition des matrices réduites, on peut construire par récurrence une suite $(i_j)_{j \in \mathbb{N}} \in I_d^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A_{i_j i_{j+1}} = 0$. Cette suite prend nécessairement deux fois la même valeur, mettons en j_1 et j_2 . Donc $c = (i_j)_{j_1 \leq j \leq j_2}$ est un circuit de $\mathcal{G}(A)$ dont tous les arcs sont de poids 0. En particulier, $w(A, c) = 0$ donc $\rho_{\max}(A)$ est plus grand que 0.

On a donc montré que $\rho_{\max}(A) = 0$, mais comme les coefficients de A sont négatifs, la dernière affirmation est évidente. $\square$

Définition 4.3.5. À toute matrice $A \in \mathcal{M}_d$ telle que $\mathcal{G}(A)$ soit connexe on associe les éléments suivants :

1. Une matrice $\tilde{A}$ définie par $\forall i, j \in I_d, \tilde{A}_{ij} = A_{ij} - \rho_{\max}(A)$.
2. Un circuit c_A sur $\mathcal{G}(A)$ défini comme le plus petit circuit élémentaire de $\mathcal{G}^c(A)$ pour l'ordre lexicographique.
3. Un entier $k(A) \in I_d$ défini comme le plus petit indice dans c_A
4. Une matrice $\bar{A}$ définie par :

$$\forall i, j \in I_d, \bar{A}_{ij} = \tilde{A}_{ij} - \tilde{A}_{ik(A)}^+ + \tilde{A}_{jk(A)}^+. \quad (4.10)$$

On définit les ensembles de formes linéaires à ne pas annuler :

Définition 4.3.6. On appelle $\mathcal{G}$ le graphe orienté complet dont les noeuds sont les éléments de I_d

1. On appelle $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des formes linéaires $mw(., c_1) - mw(., c_2)$, où c_1 et c_2 sont deux circuits élémentaires de $\mathcal{G}$ distincts en tant que graphes orientés.
2. On appelle $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des formes linéaires

$$w(., ch_1) - |ch_1|mw(., c) - w(., ch_2) + |ch_2|mw(., c),$$

où ch_1 et ch_2 sont deux chemins élémentaires de $\mathcal{G}$ allant tous deux du même noeud i vers le même noeud $k \neq i$ et où c est un circuit élémentaire de $\mathcal{G}$ passant par k .

Lemme 4.3.7.

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d$ telle que $\mathcal{G}(A)$ soit fortement connexe, $\bar{A}$ est réduite. En particulier, tous les coefficients de $\mathcal{G}^c(\bar{A})$ sont nuls.
2. Si de plus, A n'annule aucune des formes linéaires de $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, alors $\bar{A}$ est strictement réduite.
3. Ni $\mathcal{E}_1$ ni $\mathcal{E}_2$ ne contient la forme linéaire nulle.

Démonstration du lemme 4.3.7.

1. Comme $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, $\mathcal{G}(\tilde{A})$ l'est aussi. De plus $\mathcal{G}^c(\tilde{A})$ et $\mathcal{G}^c(A)$ coïncident en tant que graphes non pondérés, donc $k(A) \in \mathcal{G}^c(\tilde{A})$. Enfin $\rho_{\max}(\tilde{A}) = 0$. D'après la proposition 4.2.4, le vecteur $\tilde{A}_{.,k(A)}^+$ est donc vecteur propre de $\tilde{A}$ associé à la valeur propre 0, ce qui se traduit sur les coefficients par les systèmes équivalents suivants :

$$\begin{aligned} \forall i \in I_d, \quad \tilde{A}_{ik(A)} &= \max_j (\tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{jk(A)}^+), \\ \forall i \in I_d, \left\{ \begin{array}{ll} \forall j \in I_d, & \tilde{A}_{ik(A)} \geq \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{jk(A)}^+ \\ \exists j \in I_d, & \tilde{A}_{ik(A)} = \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{jk(A)}^+ \end{array} \right. \\ \forall i \in I_d, \left\{ \begin{array}{ll} \forall j \in I_d, & \bar{A}_{ij} \geq 0 \\ \exists j \in I_d, & \bar{A}_{ij} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

c' est-à-dire que $\bar{A}$ est réduite.

2. Supposons que A n'annule aucune des formes de $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.

Soit $i \in I_d$. Appelons $ch_1 = (i_1, \dots, i_{|ch_1|+1})$ un chemin de i vers $k(A)$ sur $\mathcal{G}(\tilde{A})$ de poids $\tilde{A}_{ik(A)}^+$ et de longueur minimale pour cette propriété.

On va montrer que $j = i_2$ est la seule solution possible de l'équation $\bar{A}_{ij} = 0$, qui se réécrit :

$$\tilde{A}_{ik(A)}^+ = \tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{jk(A)}^+. \quad (4.11)$$

Soit $j \in I_d$ une solution de cette équation. On appelle $ch = (j_1, \dots, j_{|ch|+1})$ un chemin de j vers $k(A)$ sur $\mathcal{G}(\tilde{A})$ de poids $\tilde{A}_{ik(A)}^+$ et de longueur minimale pour cette propriété.

Comme $\rho_{\max}(\tilde{A}) = 0$, les circuits sont de poids négatif, donc la minimalité de la longueur implique que ch_1 et ch sont élémentaires.

Si $i = k(A)$, alors $w(\tilde{A}, (i, ch)) = \tilde{A}_{k(A)k(A)}^+ = 0$, donc (i, ch) est un circuit de $\mathcal{G}^c(\tilde{A})$, donc aussi de $\mathcal{G}^c(A)$. Il se décompose donc en circuits élémentaires de $\mathcal{G}^c(A)$. Soit ch_2 le premier. Alors $mw(A, ch_2) = mw(A, ch_1) = \rho_{\max}(A)$ et comme A n'annule pas les formes de $\mathcal{E}_1$, $ch_1 = ch_2$, donc $i_2 = j$.

Si $i \neq k(A)$, alors $w(\tilde{A}, (i, ch)) = \tilde{A}_{ik(A)}^+$.

Supposons que (i, ch) n'est pas élémentaire. Il existe $l \in I_{|ch|+1}$ tel que $j_l = i$. Mais alors, on a :

$$\begin{aligned} w(\tilde{A}, (i, j_1, \dots, j_l)) &= w(\tilde{A}, (i, ch)) - w(\tilde{A}, (j_l, \dots, j_{|ch|+1})) \\ &= \tilde{A}_{ik(A)}^+ - w(\tilde{A}, (i, j_{l+1}, \dots, j_{|ch|}, j_{k(A)})) \geq 0, \end{aligned}$$

donc $mw(\tilde{A}, (i, j_1, \dots, j_l)) = \rho_{\max}(\tilde{A}) = 0$. Donc $(i, j_1, \dots, j_l)$ se décompose en circuits élémentaires de $\mathcal{G}^c(A)$. Soit c_1 l'un de ces circuits. Comme $mw(A, c_1) = \rho_{\max}(A) = mw(A, c_A)$, $c_1 = c_A$. En particulier, $k(A) \in \{j_1, \dots, j_l\}$. Comme $j_l = i \neq k(A)$, $k(A) \in \{j_1, \dots, j_{l-1}\}$, ce qui contredit l'élémentarité de ch .

Donc (i, ch) est élémentaire. On le note ch_2 et on a $w(\tilde{A}, ch_1) = w(\tilde{A}, ch_2)$, soit

$$w(A, ch_1) - |ch_1|\rho_{\max}(A) = w(A, ch_2) - |ch_2|\rho_{\max}(A),$$

ou encore

$$w(A, ch_1) - |ch_1|mw(c_A) = w(A, ch_2) - |ch_2|mw(c_A).$$

Comme A n'annule pas les formes de $\mathcal{E}_2$, $ch_1 = ch_2$, donc $i_2 = j$.

3. Il est clair que les formes linéaires de $\mathcal{E}_1$ ne sont pas nulles.

Soient donc $ch_1 = (i_1, \dots, i_{|ch_1|+1})$, $ch_2 = (j_1, \dots, j_{|ch_2|+1})$ et $c = (l_1, \dots, l_{|c|}, l_1)$ des chemins élémentaires tels que $i_1 = j_1 = i$, $i_{|ch_1|+1} = j_{|ch_2|+1} = l_1$ et $i_1 \neq l_1$.

Supposons que $f = w(., ch_1) - |ch_1|mw(., c) - w(., ch_2) + |ch_2|mw(., c) = 0$ et montrons que $ch_1 = ch_2$.

Comme les chemins ch_1 et ch_2 sont élémentaires et non cycliques, ils ne contiennent qu'une fois l'indice l_1 : en dernière position. Donc il n'y a d'arc partant de l_1 ni sur ch_1 ni sur ch_2 et la composante en A_{l_1, l_2}^0 de $w(., ch_1)$ et

$w(., ch_2)$ est nulle. Celle de f est donc $\frac{(|ch_2| - |ch_1|)}{|c|} A_{l_1 l_2}^\circ$. Or celle-ci est nulle, donc $|ch_2| = |ch_1|$ et $f = w(., ch_1) - w(., ch_2)$.

Par l'irréductibilité de ch_1 , (i_1, i_2) est le seul arc de ch_1 partant de i . Donc la composante de $w(., ch_1)$ en $A_{ii_2}^\circ$ est $A_{ii_2}^\circ$ et pour tout $j \neq i_2$, la composante de $w(., ch_1)$ en A_{ij}° est nulle.

De même, la composante de $w(., ch_2)$ en $A_{ij_2}^\circ$ est $A_{ij_2}^\circ$ et pour tout $j \neq j_2$, la composante de $w(., ch_2)$ en A_{ij}° est nulle.

Comme $w(., ch_2) = w(., ch_1)$, on en déduit que $i_2 = j_2$ et $w(., (i_2, \dots, i_{|ch_1|+1})) = w(., (j_2, \dots, j_{|ch_1|+1}))$

Par récurrence finie sur $|ch_1|$, on conclut que $ch_1 = ch_2$.

□

4.3.3 Démonstration du lemme 4.1.9

Soient $A \in \mathcal{P}_d$ et $B \in \mathcal{M}_d$ deux matrices. D'après le lemme 4.3.7, on associe à A une matrice réduite $\bar{A}$ définie par l'équation 4.10 réduite. On définit $\hat{B}$ par :

$$\hat{B}_{ij} := B_{ij} - \tilde{A}_{ik(A)}^+ + \tilde{A}_{jk(A)}^+. \quad (4.12)$$

Attention, $\hat{B}$ dépend de A .

On va appliquer à $\bar{A}$ et $\hat{B}$ le lemme ci-dessous. Il suffira ensuite de montrer que, si (A, B) n'annule pas certaines formes linéaires, alors $\bar{A}$ et $\hat{B}$ vérifient les hypothèses de ce lemme.

Lemme 4.3.8. Soit $A \in \mathcal{P}_d$ une matrice réduite telle que $\mathcal{G}^c(A)$ soit fortement connexe. Soit N donné par le lemme 4.2.6.

Soit $B \in \mathbb{R}_{\max}^{d \times d}$ une matrice telle que

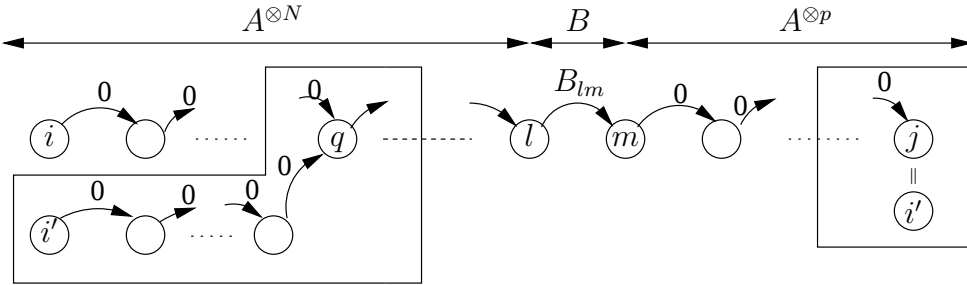
$$\forall l_1, l_2, m_1, m_2 \in I_d, (A^{\otimes N} B)_{l_1 m_1} = (A^{\otimes N} B)_{l_2 m_2} \Rightarrow m_1 = m_2. \quad (4.13)$$

Alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in s + c(A)\mathbb{N}$, $\mathcal{G}^c(A^{\otimes N} B A^{\otimes p})$ soit un graphe orienté complet. En particulier, $A^{\otimes N} B A^{\otimes p}$ est de type **scs1cyc1**.

Si A est strictement réduite, alors $\mathcal{G}^c(A^{\otimes N} B A^{\otimes p})$ ne comporte qu'une boucle.

Démonstration du lemme 4.2.6. Examinons les coefficients maximaux de $A^{\otimes N} B A^{\otimes p}$. Un tel coefficient $(A^{\otimes N} B A^{\otimes p})_{ij}$ est le poids d'un chemin $(i_r)_{r \in I_{N+p+2}}$ de i vers j (figure 4.2). Notons l pour i_{N+1} et m pour i_{N+2} .

Comme A est réduite, on peut construire par récurrence une suite d'indices $\tilde{i}_r$ pour r entre $N+2$ et $N+p+2$ telle que $\tilde{i}_{N+2} = m$ et pour tout r , $A_{\tilde{i}_r \tilde{i}_{r+1}} = 0$. En remplaçant les i_r tels que $r \geq N+3$ par $\tilde{i}_r$, on remplace des arcs de poids négatif par des arcs de poids nul, donc on construit un chemin de poids supérieur à $(A^{\otimes N} B A^{\otimes p})_{ij}$. Comme ce poids ne peut pas être strictement supérieur, et comme A est réduite, on a déjà $A_{i_r i_{r+1}} = 0$. On en déduit que notre coefficient maximum s'écrit $A_{il}^{\otimes N} + B_{lm}$ et que sa valeur ne dépend pas de p .



Les arcs dans les boîtes sont dans $\mathcal{G}^c(A)$.

FIG. 4.2 – Chemins de poids maximaux pour $A^{\otimes N} B A^{\otimes p}$.

Par ailleurs, on a pris N de manière à ce que $(i_r)_{r \in I_{N+1}}$ passe par $\mathcal{G}^c(A)$. Appelons q le premier noeud du chemin à être sur $\mathcal{G}^c(A)$. On peut modifier le chemin afin que les indices précédant q soient tous dans $\mathcal{G}^c(A)$: il suffit de suivre un circuit critique auquel appartient q à contre sens à partir de q . Appelons i' le premier indice de ce nouveau chemin (figure 4.2). Par construction, $i' \in \mathcal{G}^c(A)$ et $(A^{\otimes N} B)_{i'm}$ est plus grand que $(A^{\otimes N} B)_{im}$, donc c'est un coefficient maximal de $A^{\otimes N} B$.

D'après le ii) du lemme 4.3.4 et la forte connexité de $\mathcal{G}^c(A)$, il existe $s_1 \in \mathbb{N}$ tel que $A_{mi'}^{\otimes s_1} = 0$. Or $c(A)$ est la cyclicité de l'unique composante fortement connexe

de $\mathcal{G}^c(A)$, donc il existe un $s_2 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \in s_2 + c(A)\mathbb{N}$, on ait $A_{i'i'}^{\otimes p} = 0$. Donc, en posant $s = s_1 + s_2$, on a $A_{mi'}^{\otimes p} = 0$ pour tout $p \in s + c(A)\mathbb{N}$. On suppose désormais que $p \in s + c(A)\mathbb{N}$.

La matrice $M := A^{\otimes N}BA^{\otimes p}$ a un coefficient maximum sur la diagonale. Ce coefficient $M_{i'i'}$ est donc le rayon spectral et le poids de tout arc de $\mathcal{G}^c(M)$. En outre, $M_{ij} = M_{i'i'}$ si et seulement s'il existe $m \in I_d$, tel que $(A^{\otimes N}B)_{im} = M_{i'i'}$ et $A_{mj}^{\otimes p} = 0$. D'après l'hypothèse sur B , on en déduit que m est nécessairement le même pour tous les i .

Si i et j sont dans $\mathcal{G}^c(M)$, alors il existe un arc de $\mathcal{G}^c(M)$ partant de i et un partant de j , donc $(A^{\otimes N}B)_{im} = (A^{\otimes N}B)_{jm} = M_{i'i'}$. Mais il existe aussi un arc de $\mathcal{G}^c(M)$ finissant en i en un finissant en j , donc $A_{mi}^{\otimes p} = A_{mj}^{\otimes p} = 0$. Donc $M_{ij} = M_{ji} = M_{i'i'}$. Donc (i, j) et (j, i) sont des arcs de $\mathcal{G}^c(M)$. Le graphe $\mathcal{G}^c(M)$ est donc le graphe orienté complet dont les noeuds sont les $i \in I_d$, tels que $(A^{\otimes N}B)_{im} = M_{i'i'}$ et $A_{mi}^{\otimes p} = 0$.

Si A est strictement réduite, alors $A^{\otimes p}$ l'est aussi, donc il existe un unique i tel que $A_{mi}^{\otimes p} = 0$. Donc $\mathcal{G}^c(M)$ ne comprend qu'un noeud, et donc une boucle. $\square$

Pour conclure la démonstration du lemme 4.1.9, il suffit de montrer que pour un couple de matrices (A, B) qui n'annule pas certaines formes linéaires sur $\mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$, les matrices $\bar{A}$ et $\hat{B}$ définies par les équations (4.10) et (4.12) vérifient les hypothèses du lemme 4.3.8. En effet pour tout circuit c , on a

$$mw\left(c, \bar{A}^{\otimes N} \hat{B} \bar{A}^{\otimes p}\right) = mw\left(c, A^{\otimes N} B A^{\otimes p}\right) + (N + p)\rho_{\max}(A),$$

donc $\bar{A}^{\otimes N} \hat{B} \bar{A}^{\otimes p}$ et $A^{\otimes N} B A^{\otimes p}$ ont le même graphe critique, avec des poids différents sur les arcs et, pour p suffisamment grand, $A^{\otimes p} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, donc $A^{\otimes N} B A^{\otimes p} \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

On donne les définitions suivantes :

Définition 4.3.9. On note $\mathcal{G}$ le graphe orienté complet d'ensemble de noeuds I_d et A° (resp. B°) l'application qui, au couple $(A, B) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$, associe A (resp. B).

On appelle $\mathcal{E}_3$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ de la forme

$$\begin{aligned} B_{j_1 m_1}^\circ - B_{j_2 m_2}^\circ + w(A^\circ, ch_{i_1 j_1}) - w(A^\circ, ch_{i_1 k}) + w(A^\circ, ch_{m_1 k}) \\ - w(A^\circ, ch_{i_2 j_2}) + w(A^\circ, ch_{i_2 k}) - w(A^\circ, ch_{m_2 k}) \\ - (|ch_{i_1 j_1}| - |ch_{i_1 k}| + |ch_{m_1 k}| - |ch_{i_2 j_2}| + |ch_{i_2 k}| - |ch_{m_2 k}|)mw(A^\circ, ch_{kk}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

où $i_1, i_2, j_1, j_2, m_1, m_2$ et k sont des noeuds de $\mathcal{G}$ tels que $m_1 \neq m_2$ et pour tout $i \in \{i_1, i_2, m_1, m_2, k\}$, ch_{ik} est un chemin élémentaire sur $\mathcal{G}$ allant de i vers k et pour tout $l \in I_2$, $ch_{i_l j_l}$ est un chemin sur $\mathcal{G}$ allant de i_l vers j_l de longueur au plus $|ch_{kk}|d$.

Le lemme 4.1.9 résulte maintenant du lemme suivant et de la remarque évidente que les formes linéaires de $\mathcal{E}_3$ ne sont pas nulles :

Lemme 4.3.10.

1. Si $A \in \mathcal{P}_d$ n'annule aucune forme linéaire de $\mathcal{E}_1$, alors $\mathcal{G}^c(\bar{A})$ est fortement connexe.
2. Si $(A, B) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ n'annule aucune forme linéaire de $\mathcal{E}_3$, alors le couple de matrice $(\bar{A}, \hat{B})$ satisfait l'équation (4.13).

Démonstration.

1. Comme $\mathcal{G}^c(A)$ et $\mathcal{G}^c(\bar{A})$ sont égaux en tant que graphes non-pondérés, il suffit de montrer que $\mathcal{G}^c(A)$ est fortement connexe. Dire que A n'annule aucune forme linéaire de $\mathcal{E}_1$, c'est dire que tous les circuits élémentaires de $\mathcal{G}(A)$ ont des poids différents. En particulier, le graphe $\mathcal{G}^c(A)$ est constitué d'un unique circuit élémentaire, donc il est fortement connexe.
2. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ telle que $(\bar{A}, \hat{B})$ ne satisfasse pas l'équation (4.13). Alors il existe $i_1, i_2, m_1, m_2 \in I_d$ tels qu'on ait $m_1 \neq m_2$ et :

$$\left(\bar{A}^{\otimes N} \hat{B}\right)_{i_1 m_1} = \left(\bar{A}^{\otimes N} \hat{B}\right)_{i_2 m_2}.$$

Pour $l \in I_2$, on choisit $j_l \in I_d$ tel que $\left(\bar{A}^{\otimes N} \hat{B}\right)_{i_l m_l} = \left(\bar{A}^{\otimes N}\right)_{i_l j_l} + \hat{B}_{j_l m_l}$ et on désigne $k(A)$ par k .

Pour tout $i \in \{i_1, i_2, m_1, m_2, k\}$, on choisit un chemin ch_{ik} sur $\mathcal{G}(A)$ allant de i vers k tel que $w(\bar{A}, ch_{ik}) = \tilde{A}_{ik}^+$ et de longueur minimale pour cette propriété.

Pour $l \in I_2$, on choisit un chemin $ch_{i_l j_l}$ sur $\mathcal{G}(A)$ allant de i_l vers j_l tel que $w(\tilde{A}, ch_{i_l j_l}) = \tilde{A}_{i_l j_l}^{\otimes N}$ et de longueur minimale pour cette propriété.

Comme $\rho_{\max}(\tilde{A}) = 0$ les circuits sont de poids négatif, donc la minimalité de la longueur assure que les chemins ch_{ik} avec $i \in \{i_1, i_2, m_1, m_2, k\}$ sont élémentaires.

La proposition 4.2.5 appliquée à $\tilde{A}^{\otimes c(A)}$ assure que $|ch_{i_l j_l}| \leq 2dc(A)$. Or $c(A)$ divise $|ch_{kk}|$.

Il suffit alors de reprendre les définitions de $\bar{A}$ et $\hat{B}$, pour voir que (A, B) annule la forme linéaire de $\mathcal{E}_3$ donnée par 4.14

□

Remarque 4.3.1. Si on récapitule tous les lemmes, on obtient la formulation plus explicite des théorèmes 4.1.3 et 4.1.4 :

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}_d \times \mathcal{M}_d$ un couple de matrices tel que A n'annule aucune forme linéaire de $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ et (A, B) n'annule aucune forme linéaire de $\mathcal{E}_3$. Alors toute suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices aléatoires i.i.d. prenant les valeurs A et B avec probabilité strictement positive a la propriété de perte de mémoire.

Soit μ une probabilité sur $\mathcal{M}_d$ de support S_μ . S'il existe $A \in \mathcal{P}_d \cap S_\mu$ qui n'annule aucune forme linéaire de $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, et si S_μ n'est pas inclus dans une

union finie d'ensembles de la forme $\{A \in \mathcal{M}_d \mid A_{ij} = A_{kl} + a\}$, avec $i, j, k, l \in I_d$, $(i, j) \neq (k, l)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors une suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices aléatoires i.i.d. de loi μ a la propriété de perte de mémoire.

Chapitre 5

Théorèmes limites pour les applications topicales aléatoires itérées

5.1 Présentation

5.1.1 Contexte

Ce chapitre a pour but de démontrer des théorèmes limites pour les suites récurrentes stochastiques gouvernées par des suites d'applications topicales aléatoires ayant la propriété de perte de mémoire (MLP) définie dans la partie 3.2.

Les fonctions topicales sont définies dans la partie 2.1. On reprend les notations de cette partie : A est une application aléatoire au dessus d'un système dynamique, et $x(n, x_0)$ est définie par l'équation (2.2). On suppose en outre que les $A(n)$ sont i.i.d. et que la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété de perte de mémoire.

D'après le résultat de [BM98] rappelé dans le théorème 2.2.8, la suite $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait une loi forte des grands nombres, pourvu que X_0 et $A(1)\vec{0}$ soient intégrables. Nous allons montrer que, sous des hypothèses d'intégrabilité adéquates, et parfois des conditions techniques supplémentaires, elle satisfait aussi un théorème central limite (théorème 5.2.1), éventuellement avec vitesse (théorème 5.2.1), un théorème local limite (théorème 5.2.4), un théorème de renouvellement (théorème 5.2.6) et un principe des grandes déviations partiel (théorème 5.2.1). De plus, quand les $A(n)$ sont des matrices aléatoires, on donne des conditions algébriques de nullité de la variance dans le TCL (théorème 5.2.9) et de non-arithméticité dans le TLL (théorème 5.2.11), qui sont vérifiées génériquement (corollaires 5.2.12 et 5.2.10).

Dans cette partie, nous présentons le principe de la preuve. Dans la partie 5.2, nous énonçons et commentons les résultats. Dans la partie 5.3, nous rappelons

le formalisme des chaînes de Markov abstraites et les théorèmes limites pour ces chaînes qui seront la clef des démonstrations de la dernière partie.

5.1.2 Principe de la preuve

La première étape de la preuve consiste à décomposer la chaîne de Markov $(x(n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ en une autre chaîne $((A(n), \bar{x}(n, \cdot)))_{n \in \mathbb{N}}$ et une somme de cocycles au dessus de cette chaîne, suivant ainsi la méthode qu'É. Le Page a utilisé pour des produits de matrices au sens usuel ([LP82]). Pour toute fonction topicale ϕ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(\vec{1}) = 1$, la quantité $\phi(Ax) - \phi(x)$ ne dépend que de A et de $\bar{x}$. Donc $\phi(x(n, \cdot)) - \phi(x(n-1, \cdot))$ ne dépend que de $A(n)$ et $\bar{x}(n-1, \cdot)$ et comme $\mathbb{PR}_{\max}^d$ peut être vu comme un hyperplan de $\mathbb{R}^d$, on peut étudier $(\phi(x(n, \cdot)), \bar{x}(n, \cdot))$ au lieu de $x(n, \cdot)$. (cf. lemme 5.4.6)

D'après le théorème 3.2.2, la suite $(\bar{x}(n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi. Par ailleurs, d'après le théorème 2.2.8, $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini (si $\gamma \neq 0$) dans la direction de $\vec{1}$, donc $\phi(x(n, \cdot)) \sim \gamma n$. Nous étudions les oscillations de $\phi(x(n, \cdot)) - \gamma n$. On pensera en particulier aux cas où ϕ est défini par $\phi(x) = x_i$, $\phi(x) = \max_i x_i$, ou $\phi(x) = \min_i x_i$.

La seconde étape de la preuve consiste à montrer que les opérateurs associés à la chaîne de Markov $(A(n), \bar{x}(n-1, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ ont un trou spectral et appliquer les résultats décrits dans la partie 5.3 qui donnent des théorèmes limites pour $(\phi(x(n, \cdot)) - \gamma n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le trou spectral découle de la convergence de $(\bar{x}(n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$, comme chez É. Le Page [LP82].

Nous utilisons deux séries de résultats, qui sont rappelées dans la partie 5.3. La première série est tirée du livre de H. Hennion et L. Hervé [HH01] qui reprend dans un cadre général la théorie classique de la méthode de trou spectral développée depuis Nagaev [Nag57]. Pour pouvoir appliquer ces résultats, nous mettons des conditions d'intégrabilité sur $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$, ce qui permet d'obtenir un opérateur de Doeblin sur l'espace des fonctions bornées.

La seconde série est tirée de l'article [HH04] qui est un raffinement de la méthode dans le cadre plus restreint d'applications lipschitziennes itérées. Pour pouvoir appliquer ces résultats, nous mettons des conditions d'intégrabilité sur $A(1)\vec{0}$, ce qui permet d'obtenir un opérateur de Doeblin-Fortet sur des espaces à poids. Dans la partie 5.2.3, nous comparons les deux séries de résultats.

5.2 Énoncés des théorèmes limites

5.2.1 Cas topical

Nous énonçons maintenant les résultats que nous prouverons dans la partie 5.4.

Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications topicales aléatoires i.i.d. ayant la propriété MLP. La suite $(x(n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par l'équation (2.2) et γ est l'exposant de Lyapunov du théorème-définition 2.2.7.

Le théorème limite local et le théorème de renouvellement nécessitent des conditions de non-arithméticité. Il y a trois types de non-arithméticité, selon que le théorème est démontré en utilisant un théorème de [HH01] ou de [HH04]. Nous les nommerons respectivement (faible) non-arithméticité et non-arithméticité algébrique. Quand $d = 1$ elles se réduisent toutes trois à la condition usuelle de (faible) non-arithméticité pour les sommes de variables réelles i.i.d.. La non-arithméticité algébrique sera définie avant l'énoncé du TLL, mais les autres types de non-arithméticité ne seront définis qu'à la partie 5.3 quand nous aurons introduit les opérateurs associés aux chaînes de Markov. Contrairement à la non-arithméticité algébrique, elles dépendent du couple $((A(n))_{n \in \mathbb{N}}, \phi)$, qui sera appelé "le système".

D'après la proposition 3.3.9, Top_d muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact possède une base dénombrable d'ouverts, donc le support des mesures y est bien défini. On appelle S_A le support de la loi de $A(1)$ et T_A le semi-groupe engendré dans par S_A dans Top_d .

Théorème 5.2.1 (TCL). *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications topicales aléatoires i.i.d. ayant la propriété MLP et soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit ϕ une application topicale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(\vec{1}) = 1$. On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :*

- i) $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$ a un moment d'ordre 2,
- ii) $A(1)\vec{0}$ a un moment d'ordre $4 + \epsilon$.

Alors il existe $\sigma^2 \geq 0$ tel que $\left(\frac{x(n, X_0) - n\gamma \vec{1}}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \vec{1}$.

Dans le premier cas, ou si $A(1)\vec{0}$ a un moment d'ordre $6 + \epsilon$, on a :

- $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int (\phi(x(n, X_0)) - n\gamma)^2 d\mathbb{P}$, pour toute X_0 ayant un moment d'ordre 2.
- $\sigma = 0$ si et seulement si pour tout $M \in T_A$ de rang 1, on a :

$$\forall A \in S_A, \forall M' \in T_A, rg(M' = 1) \Rightarrow MAM' = MM' + \gamma \vec{1}. \quad (5.1)$$

Remarques 5.2.1. 1. On remarque que la variance σ^2 ne dépend pas du choix de ϕ . Cela n'est pas surprenant si l'on remarque que pour deux fonctions topicales ϕ_1 et ϕ_2 , $\phi_1(x(n, X_0)) - \phi_2(x(n, X_0))$ ne dépend que de $\bar{x}(n, X_0)$, qui converge en loi.

- 2. D'après le lemme 5.4.5 à venir, l'équation (5.1) est vérifiée pour tout $M \in T_A$ de rang 1 si et seulement si elle est vérifiée pour un M de rang 1, non nécessairement dans T_A .
- 3. Le cas $\sigma = 0$ semble rare. On montre que, dans le cas d'applications $(\max, +)$, la situation $\sigma > 0$ est générique (cf. corollaire 5.2.10).

Théorème 5.2.2 (TCL avec vitesse). Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications topicales aléatoires i.i.d. ayant la propriété MLP et soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit ϕ une application topicale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(\vec{1}) = 1$. On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

- i) $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$ a un moment d'ordre $l \geq 3$,
- ii) $A(1)\vec{0}$ a un moment d'ordre $l > 6$.

Si le σ^2 du théorème 5.2.1 est strictement positif, alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour toute condition initiale X_0 ayant un moment d'ordre l , on ait :

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}[\phi(x(n, X_0)) - n\gamma - \phi(X_0^0) \leq \sigma u \sqrt{n}] - \mathcal{N}(0, 1)(\cdot - \infty, u)]| \\ \leq \frac{C \left(1 + \mathbb{E} \left[(1 + \|X_0\|_\infty)^l\right]\right)}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \left| \mathbb{P}[x(n, X_0) - n\gamma \vec{1} \leq \sigma u \sqrt{n}] - \mathcal{N}(0, 1)(\cdot - \infty, \min_i u_i) \right| \\ \leq \frac{C \left(1 + \mathbb{E} \left[(1 + \|X_0\|_\infty)^l\right] + \mathbb{E} \left[\left(1 + \|A(1)\vec{0}\|_\infty\right)^l\right]\right)}{n^{\frac{l}{2(l+1)}}}. \end{aligned}$$

Définition 5.2.3. On dit que la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est algébriquement arithmétique s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $M, M' \in T_A$ de rang 1, et tout $A \in S_A$, on ait :

$$(MAM' - MM')(\mathbb{R}^d) \subset (a + b\mathbb{Z})\vec{1}. \quad (5.3)$$

Sinon la suite est dite algébriquement non-arithmétique.

Remarque 5.2.2. Pour tout $M, M' \in Top_d$ de rang 1 et tout $A \in Top_d$, la fonction $MAM' - MM'$ est constante à valeurs dans $\mathbb{R}\vec{1}$.

Théorème 5.2.4 (TLL). Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications topicales aléatoires i.i.d. ayant la propriété MLP et soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit ϕ une application topicale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(\vec{1}) = 1$. On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

- i) $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$ a un moment d'ordre 2 et le système est non-arithmétique.
- ii) $A(1)\vec{0}$ a un moment d'ordre $4 + \epsilon$, $\sigma > 0$, $X_0 \in \mathbb{L}^\infty$ et la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est algébriquement non-arithmétique.

Alors il existe une mesure σ -finie α sur $\mathbb{R}^d$, telle que, pour toute fonction h continue à support compact, on ait :

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbb{E}_{X_0} \left[h \left(x(n, X_0) - n\gamma \vec{1} - u \vec{1} \right) \right] - \mathbb{E}_{X_0} \left[e^{-\frac{(u + \phi(X_0))^2}{2n\sigma^2}} \right] \alpha(h) \right| = 0.$$

De plus, l'image de α par la fonction $x \mapsto (\bar{x}, \phi(x))$ est le produit de la probabilité invariante sur $\mathbb{P}\mathbb{R}_{\max}^d$ par la mesure de Lebesgue.

Remarque 5.2.3. D'après la seconde partie du théorème 5.2.1, la condition $\sigma > 0$ découle de la non-arithméticité algébrique si $A(1) \vec{0}$ a un moment d'ordre strictement supérieur à 6.

Remarque 5.2.4. Comme le TLL pour les sommes de v.a.r. i.i.d., ce théorème montre que la probabilité que $x(n, X_0)$ tombe dans une boîte décroît comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ multiplié par la longueur de la boîte. Pour remplacer la fonction continue h par la fonction indicatrice d'une boîte, il faudrait en savoir plus sur la probabilité invariante sur $\mathbb{P}\mathbb{R}_{\max}^d$. En particulier, cette probabilité peut charger des hyperplans, donc ces hyperplans ne doivent pas pouvoir intersecter la frontière de la boîte.

La non-arithméticité algébrique est optimale au sens suivant :

Proposition 5.2.5. *Si la conclusion du théorème 5.2.4 est satisfaite, alors la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est algébriquement non-arithmétique.*

Théorème 5.2.6 (Théorème de renouvellement). *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications topicales aléatoires i.i.d. ayant la propriété MLP et soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit ϕ une application topicale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(\vec{1}) = 1$ et que $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$ ait un moment d'ordre 2. On note α la même mesure que dans le théorème 5.2.4. Si $\gamma \neq 0$ et si le système est faiblement non-arithmétique, alors, pour toute fonction h continue à support compact et toute condition initiale X_0 , on a :*

$$\lim_{a \rightarrow -sg(\gamma)\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[h \left(x(n, X_0) - a \vec{1} \right) \right] = 0,$$

$$\lim_{a \rightarrow +sg(\gamma)\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[h \left(x(n, X_0) - a \vec{1} \right) \right] = \frac{\alpha(h)}{\gamma}.$$

Remarque 5.2.5. La suite $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge presque sûrement dans la direction du vecteur $\vec{1}$. Comme le théorème de renouvellement pour les sommes de v.a.r. i.i.d., ce théorème dit que le nombre moyen de $x(n, X_0)$ qui tombent dans une boîte qui part à l'infini dans la direction du vecteur $\vec{1}$ est asymptotiquement proportionnel à la longueur de la boîte. Comme dans le TLL, il faudrait en savoir plus sur la probabilité invariante pour remplacer la fonction h par l'indicatrice d'une boîte.

Théorème 5.2.7 (Grandes déviations). *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications topicales aléatoires i.i.d. ayant la propriété MLP et soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Soit ϕ une application topicale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi(\vec{1}) = 1$ et que $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$ a un moment exponentiel. Si $\sigma^2 > 0$ dans le théorème 5.2.1, alors il existe une fonction c , positive, strictement convexe, définie sur un voisinage de 0 et ne s'annulant qu'en 0, telle que, pour toute condition initiale bornée X_0 et tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on ait :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \mathbb{P} [\phi(x(n, X_0)) - n\gamma > n\epsilon] = -c(\epsilon),$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \mathbb{P} [\phi(x(n, X_0)) - n\gamma < -n\epsilon] = -c(-\epsilon).$$

5.2.2 Cas max-plus

Quand les $A(n)$ sont des matrices aléatoires, il est naturel de prendre $\phi(x) = \max_i x_i$. Dans ce cas, on a l'inégalité $\min_j \max_i A_{ij} \leq \phi(Ax) - \phi(x) \leq \max_{ij} A_{ij}$, donc on peut tester les conditions d'intégrabilité sur les deux quantités ne dépendant que de A . Le théorème 5.2.1 devient alors :

Théorème 5.2.8 (TCL). *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$ i.i.d. ayant les propriétés T et MLP. Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $\max_{ij} A(1)_{ij}$ et $\min_j \max_i A(1)_{ij}$ ont un moment d'ordre 2, alors il existe $\sigma^2 \geq 0$ tel que pour toute condition initiale X_0 ,*

(i) $\frac{x(n, X_0) - n\gamma}{\sqrt{n}} \vec{1}$ converge faiblement vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) \vec{1}$ pour tout X_0 ayant un moment d'ordre 2,

(ii) $\sigma^2 = \lim_n \frac{1}{n} \int \left(\max_{i,j} (A(n) \cdots A(1))_{ij} - n\gamma \right)^2 d\mathbb{P}.$

Les théorèmes 5.2.2 à 5.2.7 peuvent se spécialiser de la même manière. Pour les énoncés suivants, on reprend les notations de la partie 4.2.

Dans le cas $(\max, +)$, on a aussi une condition de non dégénérescence dans le TCL.

Théorème 5.2.9. *Sous les hypothèses du théorème 5.2.8, avec $\gamma = 0$, la variance σ^2 dans ce théorème est 0 si et seulement si $\rho_{\max}(T_A) = \{0\}$.*

Le théorème 4.1.4 donne une condition qui assure la propriété MLP. Cette condition assure aussi l'existence de deux matrices de rayon spectral $(\max, +)$ distincts dans S_A . On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.10. *Supposons que $A(1)$ est une matrice aléatoire satisfaisant la condition T et telle que $A(1)\vec{0}$ admet un moment d'ordre 2. Si $S_A \cap \mathcal{P}_d$ n'est pas inclus dans une union finie d'hyperplans affines de $\mathbb{R}^{d \times d}$, alors $(x(n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conclusions du théorème 5.2.8 avec $\sigma > 0$.*

On donne aussi une condition suffisante de non-arithméticité algébrique :

Théorème 5.2.11. *Soit $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires satisfaisant la condition T . Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 5.2.4 ii), sauf peut être la non-arithméticité algébrique. Si le système est algébriquement arithmétique, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\{\rho_{\max}(A) | A \in S_A, \mathcal{G}(A) \text{ fortement connexe}\} \subset a + b\mathbb{Z}.$$

Compte tenu du corollaire 5.2.10, cela montre que les hypothèses du théorème 5.2.4 sont génériques au sens suivant :

Corollaire 5.2.12. *Supposons que $A(1)$ une matrice aléatoire satisfaisant la condition T et telle que $A(1)\vec{0}$ admet un moment d'ordre $4 + \epsilon$. Si $S_A \cap \mathcal{P}_d$ n'est pas inclus dans une union dénombrable d'hyperplans affines de $\mathbb{R}^{d \times d}$, alors $(x(n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conclusions du théorème 5.2.4.*

5.2.3 Commentaires

Le tableau suivant récapitule les théorèmes limites obtenus. Dans chaque situation on suppose que $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété MLP.

Théorèmes :	$A(1)\vec{0}$	Moments finis de $\max_{ij} A(1)_{ij}$ et $\min_j \max_i A(1)_{ij}$	Conditions supplémentaires
TCL	$4 + \epsilon$	2	
TCL avec vitesse	$6 + \epsilon$	3	
TLL	$4 + \epsilon$	2	NA
Renouvellement	–	2	NA
PGD	–	exp	$X_0 \in L^\infty$

NA= non-arithméticité

TAB. 5.1 – Théorèmes limites

Les résultats de la seconde colonne sont énoncés pour des matrices car la quantité $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$ n'est pas bornée pour toutes les applications topicales. Si $A(1)$ est à valeurs dans une autre sous-classe de Top_d , il faut trouver un ϕ tel que $\sup_x |\phi(A(1)x) - \phi(x)|$ soit intégrable. Par exemple, si $A(1)$ est à valeurs dans l'espace des applications $(\min, +)$, on prendra $\phi(x) = \min_i x_i$.

D'autre part on devrait pouvoir prouver un théorème de renouvellement et un principe de grandes déviations par la méthode de [HH04], d'où on déduirait des théorèmes analogues pour des applications topicales, mais cela n'a pas été vérifié.

Les résultats de la première colonne sont obtenus sous des hypothèses d'intégrabilité plus fortes ; mais ils sont aussi meilleurs pour deux raisons. D'abord, ils sont vrais pour des applications topicales générales et non pour une sous-classe adaptée au choix de ϕ . Ensuite, la non-arithméticité algébrique ne dépend pas de ϕ . Elle est énoncé sans introduire les opérateurs markoviens Q bien que le système soit algébriquement arithmétique si et seulement il existe un $t \neq 0$ tel que Q_t a une valeur propre de module 1. De plus pour les suites de matrices aléatoire, la non-arithméticité algébrique peut être prouvée à l'aide du théorème 5.2.11.

Un cas important des matrices aléatoires est celui où $A_{ij}(n) \in \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\}$ et $A_{ii}(n) \geq 0$ car il modélise des situations où $x_i(n, \cdot)$ est la date du i ème événement de type i et les $A_{ij}(n)$ sont des délais. Dans ce cas, l'intégrabilité de $\max_{ij} A(1)_{ij}$ et $\min_j \max_i A(1)_{ij}$ est équivalente à l'intégrabilité de $A(1) \vec{0}$.

On a mentionné dans l'introduction que J. Resing et al. [RdVH⁺90] ont obtenu un TCL. En un sens, leur résultat est meilleur, puisque la propriété MLP implique que $\bar{x}(n, \cdot)$ est uniformément Φ -récurrente et apériodique. Mais nos conditions d'intégrabilité sont plus faibles, et la propriété MLP est plus facile à tester.

Le PGD de [Too02] ne nécessite qu'une borne uniforme de l'image de projective de $A(1)$, ce que l'on peut voir comme une condition d'intégrabilité très forte. Cela suggère que la propriété MLP n'est pas nécessaire. Mais sa formulation du PGD n'est pas équivalent à la nôtre, et dans le cas $(\max, +)$, il demande la condition de structure fixe.

5.3 Chaînes de Markov et opérateurs quasi-compacts

5.3.1 Trou spectral

On rappelle le formalisme des chaînes de Markov et des opérateurs associés, en suivant la présentation de H. Hennion et L. Hervé [HH01]. Ensuite on énonce les résultats que nous allons appliquer à notre modèle dans la partie 5.4.

Le contexte est donné par :

- un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$,
- une probabilité de transition Q sur $(E, \mathcal{E})$,
- une chaîne de Markov sur $(E, \mathcal{E})$ associée à Q , de terme général X_n ,
- une fonction mesurable réelle ξ sur $(E, \mathcal{E})$.

On étudie la fonction caractéristique ϕ_{S_n} de

$$S_n := \sum_{l=1}^n \xi(X_l)$$

en faisant agir les noyaux de Fourier, notés Q_t ou $Q(t)$, sur un espace de Banach approprié de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{C}$. Ces noyaux sont définis pour tout $t \in \mathbb{C}$ par :

$$Q_t(x, dy) = e^{it\xi(y)} Q(x, dy) \quad (5.4)$$

et ils agissent sur les fonctions selon l'équation :

$$(Q_t f)(x) = \int f(y) e^{it\xi(y)} Q(x, dy).$$

On en déduit immédiatement $\phi_{S_n}(t) = \int_E Q_t^n 1 d\lambda(x)$, où λ est la loi de X_0 .

Comme Q est une probabilité de transition, $Q = Q_0$ admet 1 pour valeur propre. Pour contrôler les perturbations Q_t de Q et en particulier $Q_{t/\sqrt{n}}$, le concept clef est la quasi-compacité. On dit que Q a un trou spectral si elle vérifie la définition suivante :

Définition 5.3.1. Un endomorphisme continu Q sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ est dit **quasi-compact**, s'il existe une décomposition Q -stable $\mathcal{B} = F \oplus H$ telle que :

1. $\dim F < \infty$ et toutes les valeurs propres de $Q|_F$ sont de module $r(Q)$,
2. $r(Q|_H) < r(Q)$.

Dans ce cas, $\dim F$ sera noté $s(Q, \mathcal{B})$.

5.3.2 Premier cadre

Dans cette sous-partie, on énonce les résultats de [HH01], avec quelques hypothèses supplémentaires qui simplifient les énoncés.

Définition 5.3.2. Soit (Q, ξ) comme plus haut, et $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach de fonctions continues de E dans $\mathbb{C}$. On dit que $(Q, \mathcal{B}, \xi)$ vérifie la condition $\mathcal{H}(m)$ si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (H1) (i) $1 \in \mathcal{B}$ et si $f \in \mathcal{B}$, alors $\bar{f} \in \mathcal{B}$ et, si f est à valeurs réelles, $f^+ = \max(f, 0) \in \mathcal{B}$,
(ii) La norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{B}$ est plus grande que la norme infinie,
(iii) Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{B}$, on a aussi $fg \in \mathcal{B}$.

- (H2) (i) Q a une probabilité invariante ν ,
(ii) Q est quasi-compact sur $\mathcal{B}$, et $\sup \|Q^n\| < \infty$,
(iii) L'espace propre de Q associé à la valeur propre 1 est l'ensemble des fonctions constantes sur E .

- (H3) il existe un voisinage I_0 de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $Q(\cdot)$ soit une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ de I_0 dans l'espace $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ des endomorphismes linéaires continus de $\mathcal{B}$ et tel que pour $1 \leq k \leq m$, la dérivée k ième de cette fonction en 0 soit l'action du noyau $(i\xi(y))^k Q(x, dy)$ sur $\mathcal{B}$.

Définition 5.3.3. On dit que le système est non-arithmétique si $Q(\cdot)$ est continu de $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ des opérateurs linéaires continus sur $\mathcal{B}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $r(Q(t)) < 1$.

On dit que le système est faiblement non-arithmétique si $Q(\cdot)$ est continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $1 - Q(t)$ est inversible.

On énonce les théorèmes limites de [HH01] quand $s(Q, \mathcal{B}) = 1$.

Théorème 5.3.4 ([HH01]). *On suppose que $(Q, \mathcal{B}, \xi)$ vérifie la condition $\mathcal{H}(2)$ et que $s(Q, \mathcal{B}) = 1$. Si ξ^2 est ν -intégrable et si $\nu(\xi) = 0$, alors il existe $\sigma^2 \geq 0$ tel que pour toute condition initiale de loi λ , on ait :*

- (i) $\lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\lambda}[S_n^2] = \sigma^2$,
- (ii) si $\sigma^2 = 0$, alors il existe $\xi_1 \in \mathcal{B}$, tel que ξ_1^2 est ν -intégrable et $\xi(X_1) = \xi_1(X_0) - \xi_1(X_1)$ $\mathbb{P}_{\nu}$ - p.s.,
- (iii) pour $f \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$,

$$\lim_n \mathbb{E}_{\lambda} \left[f(X_n) g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \right] = \nu(f) \mathcal{N}(0, \sigma^2)(g),$$

où la convergence est uniforme en la condition initiale.

Si $s(Q, \mathcal{B}) \neq 1$, alors σ est encore définie, mais les convergences n'ont lieu que pour $\lambda = \nu$.

Théorème 5.3.5 ([HH01]). *On suppose que $(Q, \mathcal{B}, \xi)$ vérifie la condition $\mathcal{H}(3)$. Si $\nu(\xi) = 0$ et $\sigma > 0$, alors il existe $C > 0$ tel que pour toute condition initiale λ ,*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}_{\lambda}[S_n \leq u\sigma\sqrt{n}] - \mathcal{N}(0, 1)(-\infty, u)]| \leq \frac{C(\|\lambda\| + 1)}{\sqrt{n}}.$$

Théorème 5.3.6 ([HH01]). *On suppose que $(Q, \mathcal{B}, \xi)$ vérifie la condition $\mathcal{H}(2)$, que $s(Q, \mathcal{B}) = 1$, et que $\nu(\xi) = 0$. Si le système est non-arithmétique et si $\sigma > 0$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a :*

$$\lim_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbb{E}_{\lambda} [f(X_n) g(S_n - u)] - e^{-\frac{u^2}{2n\sigma^2}} \nu(f) \mathcal{L}(g) \right| = 0,$$

où $\mathcal{L}$ est la mesure de Lebesgue. De plus, la convergence est uniforme en la condition initiale λ .

Théorème 5.3.7 ([HH01]). *On suppose que $(Q, \mathcal{B}, \xi)$ vérifie la condition $\mathcal{H}(2)$, et que $\nu(\xi) > 0$. Si le système est faiblement non-arithmétique, alors pour toutes fonctions $f \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{\lambda} [f(X_n) g(S_n - a)] &= 0, \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_{\lambda} [f(X_n) g(S_n - a)] &= \frac{\nu(f)}{\nu(\xi)} \mathcal{L}(g), \end{aligned}$$

où les convergences sont uniformes en la condition initiale λ .

Théorème 5.3.8 ([HH01]). *On suppose que $(Q, \mathcal{B}, \xi)$ vérifie la condition $\mathcal{H}(2)$, que $\nu(\xi) = 0$ et que $\sigma > 0$. S'il existe $M > 0$ tel que $Q(\cdot)$ soit continu de $\{z \in \mathbb{C} : |\Re(z)| < M\}$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| < M\}$, alors il existe une fonction c , positive, strictement convexe, définie sur un voisinage de 0 et ne s'annulant qu'en 0, telle que, pour tout $\lambda \in \mathcal{B}'_p$ et tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on ait :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \mathbb{P}_\lambda[S_n > n\epsilon] = -c(\epsilon).$$

5.3.3 Second cadre

Dans l'article [HH04] H. Hennion et L. Hervé ont obtenu des théorèmes limites pour des suites $\xi(Y_n, Z_{n-1})$, où $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications lipschitziennes i.i.d., et Z_n est défini par $Z_{n+1} = Y_{n+1}Z_n$. Comme indiqué dans la partie 5.1.2, notre modèle rentre dans ce cadre. De plus, les Y_n , qui sont les applications définies par les $A(n)$ sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$, sont 1-lipschitziennes. En reprenant la démonstration de [HH04] avec cette condition supplémentaire, on obtient les théorèmes de cette partie.

Les conditions d'intégrabilité sont plus faibles que dans [HH04], car la constante de Lipschitz est uniformément bornée. La seule modification de la preuve à effectuer porte sur l'inégalité de Hölder dans la 4e partie de la proposition 7.3 de [HH04] : il faut prendre les exposants 1 et ∞ .

Dans toute la suite, $(\mathcal{M}, \delta)$ est un espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes et G est le semi-groupe de ses applications 1-lipschitziennes. On note $\mathcal{S}$ la situation suivante :

- (i) $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans G , i.i.d. et de loi μ . Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}$ indépendante de $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$Z_0 = Z \text{ et } Z_{n+1} = Y_{n+1}Z_n.$$

- (ii) $\xi : G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne en la seconde variable, et S_n est défini par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi(Y_k, Z_{k-1}).$$

- (iii) On choisit $x_0 \in \mathcal{M}$, et pour tout $\eta \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{M}_\eta = \mathbb{E}[\delta^\eta(Y_1 x_0, x_0)]$ et $\mathcal{C}_n = \mathbb{E}[c(Y_n \cdots Y_1)]$, où $c(\cdot)$ est la constante de Lipschitz.

S'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}_N < 1$, alors il existe un $\lambda_0 \in]0, 1[$, tel que $\int_G c(g) (1 + \lambda_0 \delta(g x_0, x_0))^{2\eta} d\mu^{*N}(g) < 1$. On choisit un tel λ_0 et on se donne les notations suivantes :

(i) À toute fonction f de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{C}$, on associe les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} |f|_\eta &= \sup_x \frac{|f(x)|}{(1 + \lambda_0 \delta(x, x_0))^{1+\eta}}, \\ m_\eta(f) &= \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\delta(x, y) (1 + \lambda_0 \delta(x, x_0))^\eta (1 + \lambda_0 \delta(y, x_0))^\eta}. \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_\eta$ est l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $m_\eta(f) < \infty$. Il est muni de la norme $\|\cdot\|_\eta = |\cdot|_\eta + m_\eta(\cdot)$.

- (ii) $\mathcal{B}'_\eta$ est l'ensemble des probabilités sur E qui définissent une forme linéaire continue sur $\mathcal{B}_\eta$ et pour tout $r > 0$, on note $\mathcal{B}'_{\eta,r} = \{\lambda \in \mathcal{B}'_\eta : \|\lambda\| < r\}$, où $\|\lambda\|$ est la norme de la forme linéaire sur $\mathcal{B}_\eta$ définie par λ .
- (iii) On dit que le système est η -arithmétique s'il existe un $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, un $\rho \in \mathbb{C}$ de module 1, et une fonction $w \in \mathcal{B}_\eta$ de module constant non nul sur le support S_{ν_0} de ν_0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$e^{itS_n} w(Z_n) = \rho^n w(Z_0) \mathbb{P}_{\nu_0} - \text{p.s.} \quad (5.5)$$

Sinon, on dit que le système est η -non-arithmétique

Remarque 5.3.1 (non-arithméticité). Dans le premier cadre, la non-arithméticité porte sur le rayon spectral de Q_t . Ici, on travaille avec l'opérateur associé P_t qui agit sur $\mathcal{M}$ au lieu de $(G, \mathcal{M})$ (cf. [HH04]). Si P_t est quasi-compact, alors $r(P_t) = 1$ ssi P_t a une valeur propre ρ de module 1. La proposition 9.1' de [HH04] montre que si $r(P_t) = 1$, alors P_t est quasi-compact en tant qu'opérateur sur $\mathcal{B}_\eta$ et que tout vecteur propre w associé à ρ vérifie l'équation (5.5).

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes limites dus à H. Hennion et L. Hervé.

Théorème 5.3.9 ([HH04]). *Dans la situation $\mathcal{S}$, s'il existe $\eta \geq 0$ tel que $\mathcal{M}_{\eta+1} < \infty$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}_{n_0} < 1$, alors S_n converge en loi vers une distribution invariante ν , telle que $\int_{\mathcal{M}} \delta^{\eta+1}(x, x_0) d\nu(x) < \infty$.*

Théorème 5.3.10 ([HH04]). *Dans la situation $\mathcal{S}$, s'il existe $\eta > 2$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{C}_{n_0} < 1$ et $\mathcal{M}_{2\eta} < \infty$, alors, pour $f \in \cup_{\eta' < \eta-1} \mathcal{B}_{\eta'}$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a :*

- (i) $\lim_n \mathbb{E}_\lambda \left[f(Z_n) g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \right] = \nu(f) \mathcal{N}(0, \sigma^2)(g)$, où la convergence est uniforme en $\lambda \in \mathcal{B}'_{\eta,r}$.
- (ii) Si $\eta > 3$, alors pour $\lambda \in \mathcal{B}'_\eta$, $\lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E}_\lambda[S_n^2] = \sigma^2$.
- (iii) Si $\eta > 3$ et $\sigma^2 = 0$, alors il existe $\xi_1 \in \mathcal{B}_{\eta-1}$, tel que ξ_1^2 soit ν -intégrable et $\xi(X_1) = \xi_1(X_0) - \xi_1(X_1) \mathbb{P}_\nu - \text{p.s.}$

Théorème 5.3.11 ([HH04]). *Dans la situation $\mathcal{S}$, s'il existe $\eta > 3$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{C}_{n_0} < 1$ et $\mathcal{M}_{2\eta} < \infty$, si de plus $\nu(\xi) = 0$ et $\sigma > 0$, alors il existe $C > 0$ tel que pour $\lambda \in \mathcal{B}'_\eta$,*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}_\lambda[S_n \leq u\sigma\sqrt{n}] - \mathcal{N}(0,1)(-\infty, u)]| \leq \frac{C\|\lambda\|_\eta}{\sqrt{n}}.$$

Théorème 5.3.12 ([HH04]). *Dans la situation $\mathcal{S}$, s'il existe $\eta > 2$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{C}_{n_0} < 1$ et $\mathcal{M}_{2\eta} < \infty$, si $\nu(\xi) = 0$ et $\sigma > 0$, et s'il existe $1 < \eta' < \eta - 1$ tel que le système soit η' -non-arithmétique, alors pour $f \in \mathcal{B}_{\eta'}$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, on a :*

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma\sqrt{2\pi n} \mathbb{E}_\lambda[f(Z_n)g(S_n - u)] - e^{-\frac{u^2}{2n\sigma^2}} \nu(f)\mathcal{L}(g) \right| = 0,$$

où $\mathcal{L}$ est la mesure de Lebesgue et la convergence est uniforme en $\lambda \in \mathcal{B}'_{\eta,r}$.

5.4 Démonstration des théorèmes limite

5.4.1 Des applications topicales itérées aux chaînes de Markov

Dans cette partie, on montre que les hypothèses des théorèmes de la partie 5.2 impliquent les hypothèses des théorèmes de la partie 5.3. Pour appliquer les résultats de [HH01],

- l'espace E sera $Top_d \times \mathbb{PR}_{\max}^d$ muni de la tribu de Borel,
- la probabilité de transition Q sera définie par

$$Q((A, \bar{x}), D) = \mathbb{P}((A(1), \overline{Ax}) \in D),$$

- le terme général X_n de la chaîne de Markov sera $(A(n), \bar{x}(n-1, \cdot))$,
- la fonction ξ sera définie par $\xi(A, \bar{x}) = \phi(Ax) - \phi(x)$, où ϕ est une fonction topicale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\phi\left(\vec{1}\right) = 1$.
- $\sigma(A) = \sup_x |\xi(A, x)| = \sup_x |\phi(Ax) - \phi(x)| < \infty$ p.s. .

On définit maintenant l'espace $\mathcal{B}$.

Définition 5.4.1. Soit $\mathcal{L}^\infty$ l'espace fonctions continues bornées de $\mathbb{PR}_{\max}^d$ dans $\mathbb{C}$. On le munit de la norme infinie.

Soit j la fonction de $Top_d \times \mathbb{PR}_{\max}^d$ dans $\mathbb{PR}_{\max}^d$ telle que $j(A, \bar{x}) = \overline{Ax}$ et soit I la fonction de $\mathbb{C}^{\mathbb{PR}_{\max}^d}$ dans $\mathbb{C}^{(Top_d \times \mathbb{PR}_{\max}^d)}$ définie par

$$I(\phi) = \phi \circ j.$$

On appelle $\mathcal{B}^\infty$ l'image de $\mathcal{L}^\infty$ par I .

Comme $(\mathcal{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, et I une isométrie pour la norme infinie, $(\mathcal{B}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est aussi un espace de Banach.

Rappelons que les noyaux de fourrier et en particulier Q agissent sur $\mathcal{B}_\infty$ selon la formule 5.4. De même, la probabilité invariante ν agit sur $\mathcal{B}^\infty$ selon l'équation $\nu(f) = \int f(x)\nu(dx)$.

Pour pouvoir utiliser les résultats de la partie 5.3.2, il reste à prouver la proposition suivante :

Proposition 5.4.2. *Si $\sigma(A(1))$ a un moment d'ordre m et si $A(n)$ a la propriété MLP, alors $(Q, \xi, \mathcal{B}^\infty)$ satisfait la condition $\mathcal{H}(m)$. De plus l'intervalle I_0 de la condition (H3) est $\mathbb{R}$ tout entier et $s(Q, \mathcal{B}^\infty) = 1$.*

Pour montrer (H2), on utilisera le théorème 3.2.2, qui dit que si la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans Top_d a la propriété MLP, alors il existe une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{P}_{\max}^d$ telle que $Y_n := A(n) \cdots A(1)Y$ est stationnaire et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\exists x_0, Y_n \neq \bar{x}(n, x_0)) = 0.$$

Dans la suite, ν_0 désignera la loi de Y .

Démonstration de la proposition 5.4.2. La condition (H1) est triviale, étant donné le choix de $\mathcal{B}^\infty$.

Pour vérifier la condition (H2), on définit la probabilité $\nu := \mu \otimes \nu_0$. Elle est Q -invariant par définition de ν_0 , ce qui prouve (i). Pour prouver (ii) et (iii), on étudie les itérés de Q . Pour tout $\phi \in \mathcal{L}^\infty$, et $x \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\begin{aligned} |Q^n(\phi \circ j)(A, \bar{x}) - \nu(\phi \circ j)| &= |Q^n(\phi)(\overline{Ax}) - \nu_0(\phi)| \\ &= \left| \int \phi(\bar{x}(n, \overline{Ax})) d\mathbb{P} - \int \phi(Y_n) d\mathbb{P} \right| \\ &\leq \|\phi\|_\infty 2\mathbb{P}(\exists x_0, Y_n \neq \bar{x}(n, x_0)), \end{aligned}$$

Si on note N pour $\psi \mapsto \nu(\psi)$, on obtient :

$$\|Q^n - N\| \leq 2\mathbb{P}(\exists x, Y_n \neq \bar{x}(n, x)) \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Cela montre que $r(Q|_{Ker N}) < 1$ et que $\sup_n \|Q^n\| < \infty$, donc (ii) est vérifié et $s(Q, \mathcal{B}^\infty) = 1$. L'équation (5.6) montre aussi que les fonctions propres de Q associées à la valeur propre 1 sont incluses dans $Im N$, ce qui implique (iii).

Pour montrer (H3) on pose $Q_t^{(k)} := e^{it\xi(y)}(i\xi(y))^k Q(x, dy)$ et

$$\Delta_h^{(k)} := Q_{t+h}^{(k)} - Q_t^{(k)} - hQ_t^{(k+1)}. \quad (5.7)$$

Pour montrer la proposition 5.4.2, il reste à majorer $\|\frac{1}{h}\Delta_h^{(k)}\|$ par une quantité qui tend vers zéro avec h .

Pour cela, on introduit la fonction suivante :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{it} - 1 - it. \end{cases}$$

Les calculs s'appuieront sur les estimations suivantes : $|f(t)| \leq 2t$, et $|f(t)| \leq t^2$.

Maintenant tout découle de l'équation suivante :

$$\Delta_h^{(k)}(\phi \circ j)(A, \bar{x}) = \int \phi(\overline{BAx}) e^{it\xi(B, \overline{Ax})} (i\xi(B, \overline{Ax}))^k f(h\xi(B, \overline{Ax})) d\mu(B),$$

dont on déduit :

$$\left\| \Delta_h^{(k)}(\phi \circ j) \right\|_{\infty} \leq \|\phi\|_{\infty} \int \sigma^k(B) \|f(h\xi(B, .))\|_{\infty} d\mu(B). \quad (5.8)$$

De $|f(t)| \leq t^2$, on déduit

$$\frac{1}{|h|} \sigma(B)^k \|f(h\xi(B, .))\|_{\infty} \leq h\sigma^{k+2}(B) \rightarrow 0.$$

De $|f(t)| \leq 2t$, on déduit

$$\frac{1}{|h|} \sigma^k(B) \|f(h\xi(B, .))\|_{\infty} \leq 2\sigma^{k+1}(B).$$

Quand $k < m$, σ^{k+1} est intégrable donc le théorème de convergence dominée et les deux dernières inégalités prouvent que l'on a :

$$\int \sigma(B)^k \|f(h\xi(B, .))\|_{\infty} d\mu(B) = o(h). \quad (5.9)$$

Donc, pour tout $k < m$, d'après l'équation (5.8), $\|\frac{1}{h}\Delta_h^{(k)}\|$ tend vers zéro. Cela signifie que $Q_t^{(k+1)}$ est la dérivée de $Q_t^{(k)}$ en t .

Pour montrer que $Q_t^{(m)}$ est continue, on remarque que

$$\left(Q_{t+h}^{(m)} - Q_t^{(m)} \right) (\phi \circ j)(A, \bar{x}) = \int \phi(\overline{BAx}) e^{it\xi(B, \overline{Ax})} (i\xi(B, \overline{Ax}))^m g(h\xi(B, \overline{Ax})) d\mu(B). \quad (5.10)$$

où $g(t) = e^{it} - 1$. On applique la même méthode que précédemment, en remplaçant les estimées sur $f(h\xi(B, .))$ par $\|g(h\xi(B, .))\|_{\infty} \leq h\sigma(B)$ pour montrer la convergence, et par $\|g(h\xi(B, .))\|_{\infty} \leq 2$ pour montrer la domination.

La propriété (H3) est donc vérifiée avec $I_0 = \mathbb{R}$. $\square$

Pour montrer les théorèmes 5.2.1 et 5.2.4, on veut aussi utiliser les théorèmes de la partie 5.3.3. Pour cela, on pose $\mathcal{M} = \mathbb{PR}_{\max}^d$, $Y_n = A(n)$, $x_0 = \vec{0}$ et à nouveau $\xi(A, \bar{x}) = \phi(Ax) - \phi(x)$. Dans ce cas $Z_n = \bar{x}(n, X_0)$ et $S_n = \phi(x(n, X_0)) - \phi(X_0)$ et on obtient la proposition suivante :

Proposition 5.4.3.

1. Si $A(1)\vec{0}$ a un moment d'ordre $\eta \in \mathbb{R}^+$, alors $\mathcal{M}_\eta < \infty$. Si la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a la propriété MLP, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}_{n_0} < 1$. Si $\bar{X}_0$ a un moment d'ordre $1 + \eta \in [1, +\infty[$, alors la forme linéaire $f \mapsto \mathbb{E}[f(\bar{X}_0)]$ appartient à $\mathcal{B}'_\eta$ et sa norme est majorée par $\mathbb{E}((1 + |X_0|)^{1+\eta})$.
2. Si la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est algébriquement non-arithmétique, alors elle est aussi η -non-arithmétique pour tout $\eta > 0$.

La première partie de la proposition est évidente. La seconde partie repose sur les deux lemmes suivants, qui seront démontrés après la proposition :

Lemme 5.4.4. *Le support de la mesure invariante ν_0 est*

$$S_{\nu_0} := \overline{\left\{ M \vec{1} \mid M \in T_A, M \text{ de rang } 1 \right\}}.$$

Lemme 5.4.5. *Si l'inclusion (5.3) est vérifiée pour une application M de rang 1, tout $A \in S_A$ et tout $M' \in T_A$ de rang 1, alors elle est vérifiée pour tout $M \in T_A$ de rang 1.*

Démonstration de la proposition 5.4.3. Supposons le système η -arithmétique. Il existe $w \in \mathcal{B}_\eta$ et $t, a \in \mathbb{R}$ tels que pour μ -presque tout A et ν_0 -presque tout $\bar{x}$, on ait :

$$e^{it(\phi(Ax) - \phi(x))} w(\overline{Ax}) = e^{ita} w(\bar{x}). \quad (5.11)$$

Comme cette équation ne fait intervenir que des fonctions continues, elle est vérifiée pour tout $\bar{x} \in S_{\nu_0}$ et tout $A \in T_A$. Comme S_{ν_0} est T_A invariant, on itère l'équation (5.11) et on obtient

$$e^{it(\phi(Tx) - \phi(x))} w(\overline{Tx}) = e^{itan_T} w(\bar{x}), \quad (5.12)$$

où $T \in T_A$ et n_T est le nombre d'éléments de S_A qu'il faut composer pour obtenir l'application T . Grâce à la propriété MLP, il existe un $M \in T_A$ de rang 1. On écrit l'équation (5.12) pour $T = MA$ puis pour $T = M$ et on divise la première équation par la seconde. Comme $n_{(MA)} = n_M + 1$ et $\overline{MAx} = \overline{Mx}$, on en déduit :

$$e^{it(\phi(MAx) - \phi(Mx))} = e^{ita}.$$

En posant $b = \frac{2\pi}{t}$, cela signifie que $(\phi(MAx) - \phi(Mx)) \in a + b\mathbb{Z}$. Comme M est de rang 1, $(MAx - Mx) \in \mathbb{R} \vec{1}$, donc comme ϕ est topicale, $(\phi(MAx) - \phi(Mx)) + (MAx - Mx)_1$. Finalement $(MAx - Mx) \in (a + b\mathbb{Z}) \vec{1}$, et l'arithméticité algébrique découle du lemme 5.4.4. $\square$

Démonstration du lemme 5.4.4. D'après le théorème 3.2.2, il existe une variable aléatoire Y de loi ν_0 , indépendante de $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et telle que la suite $(x(n, Y))_{n \in \mathbb{N}}$ soit stationnaire. Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{P}(Y \in K) > 0$.

Pour tout $M \in T_A$ et tout $\epsilon > 0$, l'ensemble V de fonctions topicales A telles que $\delta(\overline{Ax}, \overline{Mx}) \leq \epsilon$ pour tout $\bar{x} \in K$ est un voisinage de M . Donc la probabilité que $A(n_M) \cdots A(1)$ soit dans V est strictement positive et par l'indépendance de Y , on a :

$$\mathbb{P}(Y \in K, A(n_M) \cdots A(1) \in V) > 0.$$

Si M est de rang 1, alors $\overline{M \vec{1}} = MY$, donc cela implique qu'avec probabilité strictement positive, on a :

$$\delta(Y_{n_M}, \overline{M \vec{1}}) = \delta(A(n_M) \cdots A(1)Y, \overline{MY}) \leq \epsilon,$$

donc $\overline{M \vec{1}} \in S_{\nu_0}$.

Cela montre que $\overline{\left\{ \overline{M \vec{1}} \mid M \in T_A, M \text{ de rang 1} \right\}} \subset S_{\nu_0}$.

D'autre part ν_0 est obtenu comme la loi de $Z = \lim_n \overline{A(1) \cdots A(n) \vec{1}}$. En fait, la propriété MLP et l'ergodicité assurent qu'il existe presque sûrement un entier N tel que $A(1) \cdots A(N+1)$ soit de rang 1. Donc $\overline{A(1) \cdots A(n) \vec{1}} = \overline{A(1) \cdots A(N+1) \vec{1}}$ pour tout $n \geq N+1$ et $Z = \overline{A(1) \cdots A(N+1) \vec{1}}$. Mais $A(1) \cdots A(N+1) \in T_A$ presque sûrement, donc $Z \in \overline{\left\{ \overline{M \vec{1}} \mid M \in T_A, M \text{ de rang 1} \right\}}$ presque sûrement et $S_{\nu_0} \subset \overline{\left\{ \overline{M \vec{1}} \mid M \in T_A, M \text{ de rang 1} \right\}}$. $\square$

Démonstration du lemme 5.4.5. On suppose que l'équation (5.3) est vérifiée pour $M = M_1$, tout $A \in S_A$ et tout $M' \in T_A$ de rang 1.

Soient $A_1, \dots, A_n \in S_A$, tels que $M_2 = A_1 \cdots A_n$ soit de rang 1. Pour tout $i \leq n$, $A_i \cdots A_n M'$ est de rang 1, donc $(M_1 A_i \cdots A_n M' - M_1 A_{i+1} \cdots A_n M')(\mathbb{R}^d) \subset (a + b\mathbb{Z}) \vec{1}$.

On combine ces inclusions pour i variant de 1 à n , et on obtient $(M_1 M_2 M' - M_1 M')(\mathbb{R}^d) \subset (na + b\mathbb{Z}) \vec{1}$ donc en remplaçant M' par AM' et retranchant l'équation initiale, on trouve :

$$((M_1 M_2 AM' - M_1 AM') - (M_1 M_2 M' - M_1 M'))(\mathbb{R}^d) \subset b\mathbb{Z} \vec{1}. \quad (5.13)$$

On écrit $M_2 M'$ comme

$$M_2 M' = M_1 M' + (M_1 M_2 M' - M_1 M') - (M_1 M_2 M' - M_2 M').$$

le dernier bloc ne dépend pas de M' , donc en remplaçant M' par AM' et retranchant l'équation initiale, on trouve :

$$M_2 AM' - M_2 M' = M_1 AM' - M_1 M' + ((M_1 M_2 AM' - M_1 AM') - (M_1 M_2 M' - M_1 M')).$$

Compte tenu de l'équation (5.13), cela prouve que l'équation (5.3) est vérifiée pour $M = M_2$. $\square$

5.4.2 Des chaînes de Markov aux applications topicales itérées

Commençons par remarquer que quand $\overline{X_0}$ est de loi ν_0 , la suite $(A(n), \bar{x}(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de loi ν , donc par le théorème de Birkhoff, on a

$$\gamma = \int \xi(A, \bar{x}) d\nu_0(\bar{x}) d\mu(A) = \nu(\xi).$$

Les propositions 5.4.2 et 5.4.3 montrent que sous les hypothèses des théorèmes de la partie 5.2, les hypothèses des théorèmes de la partie 5.3 sont vérifiées. On en déduit donc des résultats sur le comportement de la suite

$$((\phi(x(n, X_0) - \phi(X_0) - n\nu(\xi), \bar{x}(n, X_0)))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Le lemme suivant sera utile pour revenir à la suite $(x(n, X_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 5.4.6. *Si ϕ est une fonction topicale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $\psi : x \mapsto (\phi(x), \bar{x})$ est un homéomorphisme bilipschitzien de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{PR}_{\max}^d$.*

En outre, si $\phi(\vec{1}) = 1$, alors $\phi(\vec{0}) = 0$ et on a :

$$\|x - \phi(x) \vec{1}\|_{\infty} \leq |\bar{x}|_{\mathcal{P}}.$$

Démonstration. Soit $(t, \bar{x})$ un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{PR}_{\max}^d$. Alors $\psi(y) = (t, \bar{x})$ si et seulement s'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $y = x + a \vec{1}$ et $\phi(x) + a = t$. Donc l'équation a exactement une solution $y = x + (t - \phi(x)) \vec{1}$ et ψ est inversible.

Les fonctions topicales sont lipschitziennes, et la projection est linéaire, donc aussi lipschitzienne. Par conséquent, ψ est lipschitzienne.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $x \leq y + \max_i (x_i - y_i) \vec{1}$, donc $\phi(x) - \phi(y) \leq \max_i (x_i - y_i)$. Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $\phi(x) - \phi(y) - (x_i - y_i) \leq \max_i (x_i - y_i) - \min_i (x_i - y_i) = \delta(\bar{x}, \bar{y})$. En échangeant x et y , on en déduit :

$$|\phi(x) - \phi(y) - (x_i - y_i)| \leq \delta(\bar{x}, \bar{y}). \quad (5.14)$$

Par conséquent $|x_i - y_i| \leq |\phi(x) - \phi(y)| + \delta(\bar{x}, \bar{y})$ et la fonction ψ^{-1} est lipschitzienne.

L'égalité est obtenue en remarquant que

$$\phi(\vec{0}) = \phi(\vec{1} - \vec{1}) = \phi(\vec{1}) - 1 = 0$$

et l'inégalité en prenant $y = \vec{0}$ dans (5.14). □

Démonstration du théorème 5.2.1. Sans perte de généralité, on peut supposer $\gamma = 0$.

Sous l'hypothèse *i*), le théorème 5.3.4 et la proposition 5.4.2 montrent que $\left(\frac{\phi(x(n, \vec{0})) - \phi(\vec{0})}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, c'est-à-dire que $\left(\frac{\phi(x(n, \vec{0}))}{\sqrt{n}} - \vec{1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2) - \vec{1}$. Sous l'hypothèse *ii*), le théorème 5.3.10 et la proposition 5.4.3 montrent la même chose.

On estime donc la différence entre la suite convergente et celle dont on veut montrer qu'elle converge. D'après l'inégalité du lemme 5.4.6, on a :

$$\Delta_n := \left\| \frac{x(n, \vec{0})}{\sqrt{n}} - \frac{\phi(x(n, \vec{0}))}{\sqrt{n}} - \vec{1} \right\|_{\infty} \leq \frac{|\bar{x}(n, \vec{0})|_{\mathcal{P}}}{\sqrt{n}}.$$

Le membre de droite est le terme général d'une suite faiblement convergente divisé par $\sqrt{n}$. Donc $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro en probabilité, ce qui conclut la preuve de la convergence en loi dans le théorème 5.2.1 si $X_0 = \vec{0}$.

Quand $X_0 \neq \vec{0}$, le résultat reste vrai puisque $\|x(n, X_0) - x(n, \vec{0})\|_{\infty} \leq |X_0|$.

Quand $X_0 = \vec{0}$, l'expression de σ^2 comme limite découle directement des théorèmes 5.3.4 et 5.3.10. Montrons que la formule reste vraie pour tout X_0 de carré intégrable. Pour cela, on va majorer la différence entre $\phi^2(x(n, \vec{0}))$ et $\phi^2(x(n, X_0))$:

$$\begin{aligned} |\phi^2(x(n, X_0)) - \phi^2(x(n, \vec{0}))| &\leq \left| \phi(x(n, X_0)) - \phi(x(n, \vec{0})) \right| \left| \phi(x(n, X_0)) + \phi(x(n, \vec{0})) \right| \\ &\leq |X_0| \left(2|\phi(x(n, \vec{0}))| + |X_0| \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{n} \mathbb{E}(\phi^2(x(n, X_0))) - \frac{1}{n} \mathbb{E}(\phi^2(x(n, \vec{0}))) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\mathbb{E}(|X_0|^2) + 2(\mathbb{E}(|X_0|^2))^{1/2} \left(\mathbb{E}(|\phi(x(n, \vec{0}))|^2) \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \mathbb{E}(|X_0|^2) + 2 \frac{1}{\sqrt{n}} (\mathbb{E}(|X_0|^2))^{1/2} \left(\frac{1}{n} \mathbb{E}(\phi^2(x(n, \vec{0}))) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or la suite $\left(\frac{1}{n} \mathbb{E}(\phi^2(x(n, \vec{0})))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc la dernière quantité tend vers 0 et le résultat est démontré.

La fin de la preuve est consacrée à la caractérisation du cas $\sigma = 0$. Si $\sigma = 0$, alors par le théorème 5.3.4 ou par le théorème 5.3.10, il existe une fonction continue f sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$ telle que

$$\phi(Ax) - \phi(x) = f(\bar{x}) - f(\overline{Ax}) \quad (5.15)$$

pour μ -presque tout A et ν_0 -presque tout $\bar{x}$. Comme l'équation (5.15) ne fait intervenir que des fonctions continues, elle est vérifiée par toute matrice $A \in S_A$ et tout élément $\bar{x} \in S_{\nu_0}$. Par une récurrence immédiate, elle est aussi vérifiée par tout $A \in T_A$. Pour tout $M \in T_A$ de rang 1 et tout $\bar{x} \in S_{\nu_0}$, $\overline{MAx} = \overline{Mx}$, donc $\phi(MAx) = \phi(Mx)$.

Comme $MAx - Mx \in \mathbb{R} \vec{1}$, cela signifie que $MAx = Mx$. D'après le lemme 5.4.5 appliqué avec $a = b = 0$, cela signifie que $MAM' = MM'$ pour tous les $M, M' \in T_A$ de rang 1 et tous les $A \in S_A$.

Réciproquement, supposons que pour tout $M, M' \in T_A$ de rang 1 et tout $A \in S_A$, on ait :

$$MAM' = MM'. \quad (5.16)$$

Par une récurrence immédiate, l'équation (5.16) est aussi vérifiée par tout $A \in T_A$.

Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $n \geq m + 1$ et $M' \in T_A$ de rang 1, si $A(n) \cdots A(n - m + 1)$ est de rang 1, alors $x(n, M' \vec{1}) = A(n) \cdots A(n - m + 1) M' \vec{1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left\| x(n, M' \vec{1}) \right\|_{\infty} \leq N \right) \\ \geq \mathbb{P} \left(A(n) \cdots A(n - m + 1) \text{ est de rang 1, } \|A(n) \cdots A(n - m + 1) M' \vec{1}\|_{\infty} \leq N \right) \\ \geq \mathbb{P} \left(A(m) \cdots A(1) \text{ est de rang 1, } \|A(m) \cdots A(1) M' \vec{1}\|_{\infty} \leq N \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

On choisit une application $M' \in T_A$ de rang 1. La propriété MLP dit qu'il existe un entier m tel que $\mathbb{P}(A(m) \cdots A(1) \text{ est de rang 1}) > 0$. Par conséquent, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que le membre de droite de l'inégalité (5.17) soit un nombre strictement positif que nous appelons β .

L'équation (5.17) implique que pour tout $\epsilon > 0$, si $n \geq \max(m, N^2 \epsilon^{-2})$, alors $\mathbb{P}(\|\frac{1}{\sqrt{n}} x(n, M' \vec{1})\|_{\infty} \leq \epsilon) \geq \beta$, donc $\mathcal{N}(0, \sigma^2)[- \epsilon, \epsilon] \geq \beta$. En faisant tendre ϵ vers zéro, on obtient que $\mathcal{N}(0, \sigma^2)(\{0\}) \geq \beta > 0$, ce qui n'est vrai que pour $\sigma = 0$. $\square$

Démonstration du théorème 5.2.2. Sans perte de généralité, on peut supposer $\gamma = 0$. La relation (5.2) découle du théorème 5.3.5 et de la proposition 5.4.2 sous l'hypothèse *i*) et du théorème 5.3.11 et de la proposition 5.4.3 sous l'hypothèse *ii*).

D'après l'inégalité du lemme 5.4.6, $|\phi(x) - \min_i x_i| \leq |\bar{x}|_{\mathcal{P}}$ et on a :

$$\Delta_n := \left\| \frac{x(n, X_0)}{\sqrt{n}} - \frac{\phi(x(n, X_0)) - \phi(X_0)}{\sqrt{n}} \vec{1} \right\|_{\infty} \leq \frac{|\phi(X_0)|}{\sqrt{n}} + \frac{|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}}{\sqrt{n}}. \quad (5.18)$$

On en déduit que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}[x(n, X_0) \leq \sigma u \sqrt{n}]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{P} \left[\min_i x_i(n, X_0) \leq \sigma \min_i u_i \sqrt{n} \right] \\
&\leq \mathbb{P} \left[\phi(x(n, X_0)) - \phi(X_0) \leq (\sigma \min_i u_i + 2\epsilon) \sqrt{n} \right] + \mathbb{P} \left[\frac{|\phi(X_0)|}{\sqrt{n}} \geq \epsilon \right] + \mathbb{P} \left[\frac{|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}}{\sqrt{n}} \geq \epsilon \right] \\
&\leq \mathcal{N}(0, 1)(] - \infty, \min_i u_i + \frac{2\epsilon}{\sigma}]) + \frac{C}{\sqrt{n}} + \frac{\mathbb{E}(|\phi(X_0)|^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l} + \frac{\mathbb{E}(|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l} \\
&\leq \mathcal{N}(0, 1)(] - \infty, \min_i u_i]) + \frac{C}{\sqrt{n}} + \frac{2\epsilon}{\sigma} + \frac{\mathbb{E}(|\phi(X_0)|^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l} + \frac{\mathbb{E}(|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l}. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

De l'autre côté,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[x(n, X_0) \leq \sigma u \sqrt{n}] \\
&\geq \mathbb{P} \left[\phi(x(n, X_0)) - \phi(X_0) \leq \sigma \min_i u_i \sqrt{n} \right] \\
&\geq \mathbb{P} \left[\phi(x(n, X_0)) \leq (\sigma \min_i u_i - 2\epsilon) \sqrt{n} \right] - \mathbb{P} \left[\frac{|\phi(X_0)|}{\sqrt{n}} \geq \epsilon \right] - \mathbb{P} \left[\frac{|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}}{\sqrt{n}} \geq \epsilon \right] \\
&\geq \mathcal{N}(0, 1)(] - \infty, \min_i u_i - \frac{2\epsilon}{\sigma}]) - \frac{C}{\sqrt{n}} - \frac{\mathbb{E}(|\phi(X_0)|^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l} - \frac{\mathbb{E}(|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l} \\
&\geq \mathcal{N}(0, 1)(] - \infty, \min_i u_i]) - \frac{C}{\sqrt{n}} - \frac{2\epsilon}{\sigma} - \frac{\mathbb{E}(|\phi(X_0)|^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l} - \frac{\mathbb{E}(|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}^l)}{(\epsilon \sqrt{n})^l}. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

En prenant $\epsilon = n^{-\frac{l}{2(l+1)}}$ dans les équations (5.19) et (5.20) on conclura la preuve du théorème 5.2.2 si on peut montrer que $\mathbb{E}(|\bar{x}(n, X_0)|_{\mathcal{P}}^l)$ est borné uniformément en n et linéairement en $\mathbb{E}(\|X_0\|_{\infty}^l)$. C'est ce que nous faisons dans la fin de la preuve.

Comme les applications topicales sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$, on peut supposer que $X_0 = \vec{0}$.

Pour $n_0 \in \mathbb{N}$, on prend $a \geq (\mathbb{P}[A(n_0) \cdots A(1) \text{ n'est pas de rang 1}])^{1/n_0}$. Si $n \geq m$ et si $A(n) \cdots A(m)$ n'est pas de rang 1, alors pour tout entier i plus petit que $\frac{n-m}{n_0}$, l'application $A(m-1+in_0) \cdots A((i-1)n_0+m)$ n'est pas non plus de rang 1. De l'indépendance des $A(n)$, on déduit :

$$\mathbb{P}(A(n) \cdots A(m) \text{ n'est pas de rang 1}) \leq a^{n-m-n_0}.$$

On estime la quantité $\delta(A(n) \cdots A(m) \vec{0}, A(n) \cdots A(n_0+1+m) \vec{0})$: elle est nulle quand $A(n) \cdots A(n_0+1+m)$ est de rang 1, et elle est toujours majorée par $\delta(A(n_0+m) \cdots A(m) \vec{0}, \vec{0}) = |A(n_0+m) \cdots A(m) \vec{0}|_{\mathcal{P}}$. Par conséquent, on a pour tout $n \geq m + n_0$

$$\mathbb{E} \left[\delta^l(A(n) \cdots A(m) \vec{0}, A(n) \cdots A(m+n_0) \vec{0}) \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{A(n) \cdots A(n_0+1+m) \text{ n'est pas de rang 1}\}} \left| A(n_0+m) \cdots A(m) \vec{0} \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \\
&= a^{n-m-2n_0} \mathbb{E} \left[\left| A(n_0+1) \cdots A(1) \vec{0} \right|_{\mathcal{P}}^l \right]. \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Soit $n = qn_0 + r$ la division euclidienne de n par n_0 . On a

$$\begin{aligned}
\left| x(n, \vec{0}) \right|_{\mathcal{P}} &= \delta \left(A(n) \cdots A(0) \vec{0}, \vec{0} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^q \delta \left(A(n) \cdots A(in_0) \vec{0}, A(n) \cdots A((i-1)n_0) \vec{0} \right) \\
&\quad + \delta \left(A(n) \cdots A(n-r) \vec{0}, \vec{0} \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E} \left[\left| x(n, \vec{0}) \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \right)^{1/l} &\leq \sum_{i=1}^q \left(a^{n-in_0-n_0} \mathbb{E} \left[\left| A(n_0) \cdots A(1) \vec{0} \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \right)^{1/l} \\
&\quad + \left(\mathbb{E} \left[\left| A(r) \cdots A(1) \vec{0}, \vec{0} \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \right)^{1/l}. \tag{5.22}
\end{aligned}$$

On réutilise cette décomposition (avec $n_0 = 1$ et $a = 1$), pour vérifier que

$$\left(\mathbb{E} \left[\left| A(n) \cdots A(1) \vec{0} \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \right)^{1/l} \leq n \left(\mathbb{E} \left[\left| A(1) \vec{0} \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \right)^{1/l}.$$

D'après la propriété MLP, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a < 1$. En réintroduisant la dernière inégalité dans l'équation (5.22), on obtient :

$$\left(\mathbb{E} \left[\left| x(n, \vec{0}) \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \right)^{1/l} \leq \left(1 + \frac{a^{-\frac{n_0}{l}}}{1 - a^{\frac{n_0}{l}}} \right) n_0 \left(\mathbb{E} \left[\left| A(1) \vec{0} \right|_{\mathcal{P}}^l \right] \right)^{1/l}.$$

□

Pour prouver le TLL et théorème de renouvellement, on aura besoin du lemme d'approximation classique suivant :

Lemme 5.4.7. *Soit h une fonction continue à support compact de $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$ dans $\mathbb{C}$. Il existe deux fonctions continues à supports compacts $f_0 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^a, \mathbb{C})$ et $g_0 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^b, \mathbb{C})$, telles que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini I et pour tout $i \in I$ des fonctions $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^a, \mathbb{C})$ et $g_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^b, \mathbb{C})$ satisfaisant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^a, \forall y \in \mathbb{R}^b, |h(x, y) - \sum_{i \in I} f_i(x) g_i(y)| \leq \epsilon f_0(x) g_0(y).$$

Dans toute la suite, on note $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue.

Démonstration du théorème 5.2.4. Pour montrer que $\sigma > 0$ sous l'hypothèse i), on repart de la caractérisation du cas $\sigma = 0$ dans le théorème 5.3.4 que l'on a appliqué pour démontrer le théorème 5.2.1 : si $\sigma = 0$, il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^\infty$ vérifiant l'équation (5.15) :

$$\phi(Ax) - \phi(x) = f(\bar{x}) - f(\overline{Ax})$$

pour μ -presque tout A et ν_0 -presque tout $\bar{x}$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $g_t := e^{itf} \in \mathcal{B}^\infty$ vérifie :

$$\forall \bar{x} \in S_{\nu_0}, \forall A \in S_A, Q_t(g_t \circ I)(A, \bar{x}) = (g_t \circ I)(A, \bar{x})$$

Comme S_{ν_0} est stable par S_μ , on peut itérer cette équation et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_t^n(g_t \circ I)(A, \bar{x}) = (g_t \circ I)(A, \bar{x})$$

donc $r(Q_t) \geq 1$, ce qui contredit la non-arithméticité du système.

On applique la proposition 5.4.2 et le théorème 5.3.6 ou la proposition 5.4.3 et le théorème 5.3.12. On en déduit que, si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et si f est une fonction lipschitzienne bornée sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbb{E} (f(\bar{x}(n, x_0)) g(\phi(x(n, x_0)) - \phi(x_0) - u)) - e^{-\frac{u^2}{2n\sigma^2}} \nu(f) \mathcal{L}(g) \right| = 0. \quad (5.23)$$

En outre, ces convergences sont uniformes en x_0 , car la forme linéaire $\delta_{\bar{x}_0}$ est borné indépendamment de x_0 comme forme linéaire sur $\mathcal{B}^\infty$ et est un élément $\mathcal{B}'_{\eta, \|X_0\|_\infty}$ si $|x_0|_{\mathcal{P}} \leq \|X_0\|_\infty$. L'uniformité nous permet de prendre toute condition initiale X_0 et d'obtenir

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbb{E} [f(\bar{x}(n, X_0)) g(\phi(x(n, X_0)) - u)] - \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(u + \phi(X_0))^2}{2n\sigma^2}} \right] \nu(f) \mathcal{L}(g) \right| = 0. \quad (5.24)$$

Par la densité des fonctions lipschitziennes bornées dans $(\mathcal{C}_c(\mathbb{PR}_{\max}^d), \|\cdot\|_\infty)$ l'équation (5.24) est vérifiée par toutes les fonctions continues à support compact f et g . Du lemme 5.4.7, on déduit que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{PR}_{\max}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ continue à support compact, on a :

$$\limsup_n \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \sigma \sqrt{2\pi n} \mathbb{E} [h(\bar{x}(n, X_0), \phi(x(n, X_0)) - u)] - \mathbb{E} \left[e^{-\frac{(u + \phi(X_0))^2}{2n\sigma^2}} \right] \nu \otimes \mathcal{L}(h) \right| = 0. \quad (5.25)$$

D'après le lemme 5.4.6 la fonction $\Phi : x \mapsto (\phi, \bar{x})$ est bilipschitzienne, donc h est à support compact ssi $h \circ \Phi$ l'est. Comme $\bar{x} + u \overrightarrow{1} = \bar{x}$, cela achève la démonstration. $\square$

Démonstration de la proposition 5.2.5. Supposons que la suite $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est algébriquement arithmétique et que la conclusion de théorème 5.2.4 est vérifiée.

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et $M \in Top_d$ de rang 1, tels que pour tout $A \in S_A$ et $M' \in T_A$ de rang 1 l'équation (5.3) soit vérifiée. On pose $t = \frac{2\pi}{b}$ si $b \neq 0$ et $t = 1$ sinon et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $w(\bar{x}) = e^{it(\phi(Mx) - \phi(x))}$, où $\phi(x) = \max_i(x_i)$. L'équation (5.3) implique donc que, pour tout $A \in S_A$, $y \in \mathbb{R}^d$, et tout $M' \in T_A$ de rang 1, on ait :

$$e^{it(\phi(AM'y) - \phi(M'y))} w(\overline{AM'y}) = e^{ita} w(\overline{M'y}).$$

On choisit y tel que $\phi(M'y) = 0$. Par récurrence, on obtient,

$$e^{it\phi(x(n, M'y))} w(\bar{x}(n, M'y)) = e^{itna} w(\overline{M'y}). \quad (5.26)$$

Pour toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{PR}_{\max}^d \mapsto \mathbb{R}$ continues à support compact, la conclusion du théorème 5.2.4 pour la fonction h définie par $h(x) = f(\phi(x))(gw)(\bar{x})$ est :

$$\sigma\sqrt{2\pi n} \mathbb{E} [f(\phi(x(n, M'y))) g(\bar{x}(n, M'y)) w(\bar{x}(n, M'y))] \rightarrow \mathcal{L}(f)\nu_0(gw).$$

Compte tenu de l'équation (5.26), on en déduit que :

$$e^{itna} w(\overline{M'y}) \sigma\sqrt{2\pi n} \mathbb{E} [(e^{-it\cdot} f)(\phi(x(n, M'y))) g(\bar{x}(n, M'y))] \rightarrow \mathcal{L}(f)\nu_0(gw). \quad (5.27)$$

Mais la conclusion du théorème 5.2.4 pour la fonction h définie par $h(x) = (fe^{-it\cdot})(\phi(x))g(\bar{x})$ est :

$$\sigma\sqrt{2\pi n} \mathbb{E} [(e^{-it\cdot} f)(\phi(x(n, M'y))) g(\bar{x}(n, M'y))] \rightarrow \mathcal{L}(fe^{it\cdot})\nu_0(g). \quad (5.28)$$

Les équations (5.27) et (5.28) impliquent que $at \in 2\pi\mathbb{Z}$ et

$$w(\overline{M'y}) \mathcal{L}(fe^{it\cdot})\nu_0(g) = \mathcal{L}(f)\nu_0(gw).$$

Le membre de droite de l'équation ne dépend pas de M' donc, d'après le lemme 5.4.4, w est constante sur S_{ν_0} . Cela prouve que $\nu_0(gw) = \nu_0(g)w(\overline{M'y})$, donc $\mathcal{L}(fe^{-it\cdot}) = \mathcal{L}(f)$, c'est-à-dire que $e^{it\cdot} = 1$, ou encore $t = 0$. Cela contredit l'hypothèse de départ, et conclut donc la démonstration. $\square$

Démonstration du théorème 5.2.6. On fait la démonstration dans le cas $\gamma > 0$. On applique à nouveau la proposition 5.4.2 et le théorème 5.3.7. On en déduit que, si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et si f est une fonction lipschitzienne bornée sur $\mathbb{PR}_{\max}^d$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} [f(\phi(x(n, x_0)) - \phi(x_0) - a) g(\bar{x}(n, x_0))] = 0,$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} [f(\phi(x(n, x_0)) - \phi(x_0) - a) g(\bar{x}(n, x_0))] = \frac{\nu(f)\mathcal{L}(g)}{\gamma}.$$

De plus ces convergences sont uniformes en x_0 , car $\delta_{\bar{x}_0}$ est une forme linéaire bornée sur $\mathcal{B}^\infty$. L'uniformité permet de supprimer le terme $\phi(x_0)$ dans les dernières équations et de prendre n'importe quelle condition initiale. Le théorème découle ensuite de la même suite d'approximations successives que dans la démonstration du TLL. $\square$

Démonstration du théorème 5.2.7. Sans perte de généralité, on peut supposer $\gamma = 0$.

Dire que $\sigma(A)$ a un moment exponentiel signifie qu'il existe un $C > 0$ tel que $\int e^{C\sigma(A)} d\mu(A) < \infty$. Une majoration facile de $\xi^k(y)Q(., dy)$ inspirée par la preuve de la proposition 5.4.2 montre que la fonction $z \mapsto Q_z$ est analytique sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon C . Pour montrer qu'elle est continue sur le domaine $\{|\mathcal{R}z| < C/2\}$, on applique la même méthode.

Le théorème 5.3.8 prouve que

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[\phi(x(n, X_0)) - \phi(X_0) > n\epsilon] = -c(\epsilon).$$

Soit $0 < \eta < \epsilon$. Pour tout $n \geq \phi(X_0)/\eta$, on a

$$\mathbb{P}[\phi(x(n, X_0)) - \phi(X_0) > n\epsilon] \geq \mathbb{P}[\phi(x(n, X_0)) > n(\epsilon + \eta)],$$

ce qui implique que

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[\phi(x(n, X_0)) - n\gamma > n\epsilon] \geq -c(\epsilon + \eta).$$

Par la même méthode, on obtient que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[\phi(x(n, X_0)) - n\gamma > n\epsilon] \leq -c(\epsilon - \eta).$$

Comme la fonction c est continue, la première convergence est prouvée. La seconde est obtenue en remplaçant ϕ par $-\phi$. $\square$

5.4.3 Le cas Max-plus

Démonstration du théorème 5.2.9. On suppose que $\sigma = 0$. D'après la proposition 5.4.2 on peut appliquer le théorème 5.3.4. Le deuxième point du théorème prouve qu'il existe une fonction lipschitzienne bornée f telle que pour ν -presque tout $(A, \bar{x})$:

$$\max_i (Ax)_i - \max_i x_i = f(\bar{x}) - f(\overline{Ax}). \quad (5.29)$$

Comme toutes les fonctions dans l'équation sont continues, tous les couples $(A, \bar{x}) \in S_A \times \text{Supp}(\nu_0)$ vérifient l'équation (5.29). Si $A \in S_A$ et $\bar{x} \in \text{Supp}(\nu_0)$, alors $\overline{Ax} \in \text{Supp}(\nu_0)$, donc par récurrence, l'équation (5.29) est encore satisfaite si $A \in T_A$.

Comme pour $A \in T_A$, $A^n \in T_A$, on en déduit que la suite $(\max_i (A^n x)_i)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Mais il existe un indice k tel que $c(A)\rho_{\max}(A) = A_{kk}^{c(A)}$, donc $\max_i (A^{nc(A)} x)_i \geq nc(A)\rho_{\max}(A) + x_k$ et $\rho_{\max}(A) \leq 0$.

Comme tout chemin sur $\mathcal{G}^c(A)$ se décompose en un chemin de longueur au plus d et des circuits de poids moyen au plus $\rho_{\max}(A)$, on a :

$$A^n x \leq (n - d)\rho_{\max}(A) + d \max_{A_{ij} > -\infty} |A_{ij}| + \max_i x_i.$$

Par conséquent, on a $\rho_{\max}(A) \geq 0$.

Réciproquement, si, pour toute matrice $A \in T_A$, on a $\rho_{\max}(A) = 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} \phi(x(n, \vec{0})) - \phi(\vec{0}) &= \max_i x_i(n, \vec{0}) \\ &= \max_{ij} (A(n) \cdots A(0))_{ij} \\ &\geq \rho_{\max}(A(n) \cdots A(0)) = 0 \text{ p.s.} \end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{N}(0, \sigma^2)(\mathbb{R}_+) \geq 1$, ce qui n'est possible que si $\sigma = 0$. $\square$

Démonstration du théorème 5.2.11. On suppose que le système est algébriquement arithmétique. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $A \in S_A$ et $M, M' \in T_A$ de rang 1, on ait : $(MAM' - MM')(\mathbb{R}^d) \subset (a + b\mathbb{Z})\vec{1}$. En remplaçant M' par $A^n M'$, on obtient $(MA^{n+1}M' - MA^n M')(\mathbb{R}^d) \subset (a + b\mathbb{Z})\vec{1}$ et par récurrence

$$(MA^{n+k}M' - MA^n M')(\mathbb{R}^d) \subset (ka + b\mathbb{Z})\vec{1}. \quad (5.30)$$

D'après le théorème 4.2.5, si $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, alors pour tout n suffisamment grand, $A^{nc(A)} - nc(A)\rho_{\max}(A)\vec{1} = \left(A - \rho_{\max}(A)\vec{1}\right)^{nc(A)}$ est constant. Par conséquent $A^{(n+1)c(A)} = A^{nc(A)} + c(A)\rho_{\max}(A)\vec{1}$, et $MA^{n+c(A)}M' - MA^n M' = c(A)\rho_{\max}(A)\vec{1}$. En introduisant cette relation dans l'équation (5.30), on conclut la démonstration. $\square$

Bibliographie

- [Bac92] F. Baccelli. Ergodic theory of stochastic petri networks. *Annals of Probability*, 20(1) :375–396, 1992.
- [Bal00] Viviane Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.
- [BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronisation and Linearity*. John Wiley and Sons, 1992.
- [BL92] F. Baccelli and Z. Liu. On a class of stochastic recursive sequences arising in queuing theory. *The Annals of Probability*, 20(1) :350–374, 1992.
- [BM] T. Bousch and J. Mairesse. Communication personnelle.
- [BM98] F. Baccelli and J. Mairesse. Ergodic theorems for stochastic operators and discrete event networks. In *Idempotency (Bristol, 1994)*, volume 11 of *Publ. Newton Inst.*, pages 171–208. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [BM03] T. Bousch and J. Mairesse. Fonctions topicales à portée finie et fonctions uniformément topicales. Technical Report 2003-002, LIAFA (CNRS, UMR 7089 Université Paris 7), 2003. à paraître dans *Dynamical Systems*.
- [Bow75] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.*, volume 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1975.
- [Bré03] J. Brémont. Gibbs measures at temperature zero. *Nonlinearity*, 16(2) :419–426, 2003. Constitue en français le chapitre 10 de sa thèse.
- [Bra93] H. Braker. *Algorithms and Applications in Timed Discrete Event Systems*. PhD thesis, Delft University of Technology, Dec 1993.
- [BS99] A. D. Burbanks and C. T. Sparrow. All monotone homogeneous functions (on the positive cone) admit continuous extension. Technical Report 1999–13, Statistical Laboratory, University of Cambridge, 1999.

- [BV04] C. Bonatti and M. Viana. Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(5) :1295–1330, 2004.
- [CDQV83] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983.
- [CDQV85] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30 :210–220, 1985.
- [CG79] R.A. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 1979.
- [Coh88] J.E. Cohen. Subadditivity, generalised products and operations research. *SIAM Review*, 30(1) :69–86, 1988.
- [CT80] M. G. Crandall and L. Tartar. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 78(3) :385–390, 1980.
- [FK60] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31 :457–469, 1960.
- [Fur63] H. Furstenberg. Noncommuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 :377–428, 1963.
- [GdM87] I. Ya. Gol'dsheĭ d and G. A. Margulis. The condition of simplicity for the spectrum of Lyapunov exponents. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 293(2) :297–301, 1987.
- [GdM89] I. Ya. Gol'dsheĭ d and G. A. Margulis. Lyapunov exponents of a product of random matrices. *Uspekhi Mat. Nauk*, 44(5(269)) :13–60, 1989.
- [GG96] I. Ya. Goldsheid and Y. Guivarc'h. Zariski closure and the dimension of the Gaussian law of the product of random matrices. I. *Probab. Theory Related Fields*, 105(1) :109–142, 1996.
- [GH00] S. Gaubert and D. Hong. Series expansions of lyapunov exponents and forgetful monoids. Technical report, INRIA, 2000.
- [GK95] J. Gunawardena and M. Keane. The existence of cycle times for some nonexpansive maps. Technical Report HPL-BRIMS-95-003, Hewlett-Packard Labs, 1995.
- [GLP04] Y. Guivarc'h and É. Le Page. Simplicité de spectres de Lyapounov et propriété d'isolation spectrale pour une famille d'opérateurs de transfert sur l'espace projectif. In *Random walks and geometry*, pages 181–259. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

- [GR85] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2) :187–242, 1985.
- [GR89] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Propriétés de contraction d'un semi-groupe de matrices inversibles. Coefficients de Liapunoff d'un produit de matrices aléatoires indépendantes. *Israel J. Math.*, 65(2) :165–196, 1989.
- [Gri90] R. B. Griffiths. Frenkel-Kontorova models of commensurate-incommensurate phase transitions. In *Fundamental problems in statistical mechanics VII (Altenberg, 1989)*, pages 69–110. North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [Gui84] Y. Guivarc'h. Exposants caractéristiques des produits de matrices aléatoires en dépendance markovienne. In *Probability measures on groups, VII (Oberwolfach, 1983)*, volume 1064 of *Lecture Notes in Math.*, pages 161–181. Springer, Berlin, 1984.
- [GY94] Paul Glasserman and David D. Yao. *Monotone structure in discrete-event systems*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. A Wiley-Interscience Publication.
- [GY95] P. Glasserman and D. Yao. Stochastic vector difference equations with stationary coefficients. *J. Appl. Probab.*, 32(4) :851–866, 1995.
- [Hen97] H. Hennion. Limit theorems for products of positive random matrices. *Ann. Probab.*, 25(4) :1545–1587, 1997.
- [HH01] H. Hennion and L. Hervé. *Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness*, volume 1766 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [HH04] H. Hennion and L. Hervé. Central limit theorems for iterated random Lipschitz mappings. *Ann. Probab.*, 32(3A) :1934–1984, 2004.
- [Hon01] D. Hong. Lyapunov exponents : When the top joins the bottom. Technical Report RR-4198, INRIA, [http ://www.inria.fr/rrrt/rr-4198.html](http://www.inria.fr/rrrt/rr-4198.html), 2001.
- [JMO96] A. Jean-Marie and G. J. Olsder. Analysis of stochastic min-max-plus systems : results and conjectures. *Math. Comput. Modelling*, 23(11-12) :175–189, 1996. Recent advances in discrete event systems.
- [Kin73] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probability*, 1 :883–909, 1973. With discussion by D. L. Burkholder, Daryl Daley, H. Kesten, P. Ney, Frank Spitzer and J. M. Hammersley, and a reply by the author.

- [LP82] É. Le Page. Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. In *Probability measures on groups (Oberwolfach, 1981)*, volume 928 of *Lecture Notes in Math.*, pages 258–303. Springer, Berlin, 1982.
- [Mai95] J. Mairesse. *Stabilité des systèmes à événements discrets stochastiques. Approche algébrique*. PhD thesis, École polytechnique, 1995.
- [Mai97] J. Mairesse. Products of irreducible random matrices in the $(\max, +)$ algebra. *Adv. in Appl. Probab.*, 29(2) :444–477, 1997.
- [Mer04] G. Merlet. Memory loss property for products of random matrices in the $(\max, +)$ algebra. Technical report, IRMAR, <http://fr.arxiv.org/abs/math.PR/0405452>, May 2004.
- [Mer05] G. Merlet. Limit theorems for iterated random topical operators. Technical report, <http://fr.arxiv.org/abs/math.PR/0405452>, 2005. In preparation.
- [Nag57] S. V. Nagaev. Some limit theorems for stationary Markov chains. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 2 :389–416, 1957.
- [Ose68] V. I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 19 :179–210, 1968.
- [Rag79] M. S. Raghunathan. A proof of Oseledec’s multiplicative ergodic theorem. *Israel J. Math.*, 32(4) :356–362, 1979.
- [RdVH⁺90] J. A. C. Resing, R. E. de Vries, G. Hooghiemstra, M. S. Keane, and G. J. Olsder. Asymptotic behavior of random discrete event systems. *Stochastic Process. Appl.*, 36(2) :195–216, 1990.
- [Ser02] Denis Serre. *Matrices*, volume 216 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. Theory and applications, Translated from the 2001 French original.
- [Too02] F. Toomey. Large deviations of products of random topical operators. *Ann. Appl. Probab.*, 12(1) :317–333, 2002.
- [Vin97] J.-M. Vincent. Some ergodic results on stochastic iterative discrete events systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 7(2) :209–232, 1997.
- [Wag91] E. Wagneur. Moduloids and pseudomodules. 1. dimension theory. *Discrete Math.*, 98 :57–73, 1991.

Index

A , 16, 18
 $A(n)$, 49
 A^* , 95
 A^+ , 95
 A^n , 49
 $A^{(m)}$, 62
 $A^{[m]}$, 62
 $A^{\{l\}}$, 62
 $B(n)$, 57
 $D(A)$, 51
 E_m , 62
 F^+ , 5
 F_m , 62
 G , 18
 G_m , 62
 H_m , 62
 I_η^k , 40
 K , 18
 $L(T)$, 33
 M_∞ , 57, 65
 M_n , 57, 65
 $M_n(Y)$, 57
 N , 18
 P , 34
 Q , 118, 123
 Q_t , 119
 R_s , 36
 S , 16
 S_A , 113
 S_n , 121
 T , 6, 16
 T^d , 79
 T^g , 79
 T_0 , 33
 T_A , 113
 T_s , 17
 Top_d , 48
 $Tope_d$, 50
 Y_n , 121
 $Y_n(Y)$, 57
 Z_n , 121
 $\mathcal{B}'_\eta$, 122
 $\mathcal{C}_n$, 121
 Δ_r , 21
 $\mathcal{G}(A)$, 61, 94
 $\mathcal{G}^c(A)$, 95
 $\mathcal{M}_\eta$, 121
 $\mathcal{M}_d$, 92
 Σ_T , 6, 16
 Σ_T^* , 6, 16
 $\hat{\Sigma}_T$, 34
 $\|\cdot\|_\eta$, 122
 $\bar{A}$, 103
 δ , 51
 $\mathcal{D}_r$, 24
 $\mathcal{D}_\Theta$, 24
 $\gamma(A)$, 53
 $\gamma(A, \theta)$, 53
 $\gamma((A(n))_{n \in \mathbb{N}})$, 53
 $\gamma^{(m)}$, 62
 $\gamma^{[m]}$, 62
 γ_b , 55
 $\gamma_i(M, \theta)$, 16
 $\hat{\mu}$, 35
 $\hat{B}$, 106
 $\hat{T}$, 33
 $\mathcal{E}(A)$, 94
 $\mathcal{E}_1$, 104
 $\mathcal{E}_2$, 104
 $\mathcal{E}_3$, 108

- $\mathcal{P}_d$, 92
- $\mathcal{B}$, 119
- $\mathcal{B}^\infty$, 123
- $\mathcal{B}_\eta$, 122
- $\mathcal{C}(A)$, 94
- $\mathcal{D}$, 40
- $\mathcal{H}(m)$, 119
- $\mathcal{L}^\infty$, 123
- μ , 34
- ν , 124
- ν_0 , 124
- ν_x , 35
- $\oplus$, 48
- $\otimes$, 48
- ∂_Θ , 24
- ϕ_r , 21
- $\mathbb{PR}_{\max}^d$, 51
- P_Θ , 24
- ρ , 34
- $\rightarrow$, 62
- $\rho_{\max}(A)$, 95
- $\mathbb{R}_{\max}$, 48
- $\sigma(A)$, 123
- σ_k , 40
- $\tilde{A}$, 103
- $|ch|$, 61
- $|\cdot|_\eta$, 122
- $\mathcal{A}$, 93
- c_l , 61
- e_{i_r} , 24
- $k(A)$, 103
- $m_\eta(\cdot)$, 122
- $mw(A, c)$, 95
- n_T , 126
- $p(x)$, 16
- $p^+(g)$, 33
- $p^-(g)$, 33
- $p_n(x)$, 34
- $w(ch)$, 101
- $w(A, c)$, 95
- $x(n, x_0)$, 49
- $x^{(m)}(n, x_0)$, 62
- $x^{[l]}(n, x_0)$, 62
- $x^{\{l\}}(n, x_0)$, 62
- $y(n, x_0)$, 49
- élémentaire, 61
- $\mathcal{S}$, 121
- scsN-cycC**, 95
- arithmétique, 117, 120
 - η -arithmétique, 122
 - algébriquement, 114
- boucle, 61
- chaîne de Markov, 118
 - à états finis, 18
- chemin, 61
- circuit, 61
- composante d'un graphe, 62
- condition T, 50
- contraction, 24
- couplage, 4
- cyclicité, 61, 95
- décomposable, 20
- décomposition
 - d'Iwasawa, 19
 - polaire, 19
- drapeaux, 24
- ergodique, 4
- exposants de Lyapunov
 - pour des applications topicales éten-
dues, 53
 - pour des matrices usuelles, 16
- Fourier, noyaux de, 119
- Gibbs, 6, 17
- grandes déviations, 116
- graphe, 61
 - critique, 95
 - d'une matrice, 95
 - d'une matrice aléatoire, 61
- irréductible, 28
- Kingman, 5

- Lyapunov, 16
- maximisant, 101
- mesure de Gibbs, 6, 17
- MLP, 76
- noyau harmonique, 35
- ordre, 8
- Oseledets, 16
- partie positive, 5
- perte de mémoire, 76
- Perte de mémoire asymptotique, 79
- PGD, 116, 121
- PMAD, 79
- PMAG, 79
- poids d'un chemin, 101
- primitive, 92
- principe des grandes déviations
 - de [HH01], 121
- produits extérieurs, 20
- projectif
 - diamètre, 51, 80
 - espace, 51
- quasi-compact, 119
- quasi-projectif, 24
- r-vecteur, 20
- récurrence affine, 57
- rang 1, 76
- rayon spectral, 95
- réduite (matrice), 103
- semi-anneau, 48
- SF, 53
- sous-additif, 5
- SRS, 4
- stationnaire, 4
- structure fixe, 53
- suite récurrente stochastique, 4
- système dynamique, 4
- TCL, 113, 116, 120, 122
- théorème central limite, 113, 116
 - de [HH01], 120
 - de [HH04], 122
- théorème central limite avec vitesse,
 - 114
 - de [HH01], 120
 - de [HH04], 123
- théorème de renouvellement, 115
 - de [HH01], 120
- théorème local limite, 114
 - de [HH01], 120
 - de [HH04], 123
- TLL, 114, 123
- topicale, 48
 - étendu, 50
- type (S), 28
- type d'une matrice, 95
- vecteur propre, 96

Table des matières

Introduction	3
0.1 Suites récurrentes stochastiques	3
0.2 Exposants de Lyapunov	5
0.3 Applications topicales	7
0.3.1 Contexte	7
0.3.2 Résultats pour les matrices aléatoires non irréductibles . .	8
0.3.3 Perte de mémoire	9
0.3.4 Théorèmes limites	10
0.4 Perspectives	10
0.5 Sur le lien entre les deux parties	11
 I Matrices aléatoires inversibles	 13
1 Séparation des exposants de Lyapunov : cas des sous-shifts de type fini	15
1.1 Présentation et résumé	15
1.2 Outils algébriques	18
1.2.1 Décompositions du groupe linéaire	18
1.2.2 Produits extérieurs	19
1.2.3 Comparaison des décompositions	21
1.2.4 Espaces des drapeaux, contractions	24
1.2.5 Notions d'irréductibilité	28
1.3 Étude des noyaux markoviens harmoniques	34
1.4 Propriétés de contraction	37
1.5 Séparation des exposants	40
 II Applications topicales aléatoires	 45
2 Matrices aléatoires dans $(\mathbb{R}, \max, +)$: ordre 1	47
2.1 Présentation et résumé	47
2.2 Cas général	50

2.3	Réurrence affine	57
2.4	Matrices réductibles	60
2.4.1	Résultats	60
2.4.2	Démonstration du résultat sur les exposants de Lyapunov	65
2.4.3	Démonstration du théorème 2.4.11	66
2.4.4	Démonstration des lois des grands nombres	69
2.5	Tableaux de synthèse.	74
3	Matrices aléatoires dans $(\mathbb{R}, \max, +)$: ordre 2	75
3.1	Présentation et résumé	75
3.2	Perte de mémoire	76
3.3	Perte de mémoire à l'infini	79
3.4	Matrices réductibles	84
3.4.1	Résultats	84
3.4.2	Démonstrations	86
4	Généricité de la propriété de perte de mémoire	91
4.1	Présentation et résumé	91
4.1.1	Résultats	91
4.1.2	Principe de la preuve	93
4.2	Puissances des matrices dans $(\mathbb{R}, \max, +)$	94
4.3	Démonstrations	100
4.3.1	Démonstration des théorèmes 4.1.3 et 4.1.4	100
4.3.2	Matrices réduites	103
4.3.3	Démonstration du lemme 4.1.9	106
5	Théorèmes limites pour les applications topicales aléatoires itérées	111
5.1	Présentation	111
5.1.1	Contexte	111
5.1.2	Principe de la preuve	112
5.2	Énoncés des théorèmes limites	112
5.2.1	Cas topical	112
5.2.2	Cas max-plus	116
5.2.3	Commentaires	117
5.3	Chaînes de Markov et opérateurs quasi-compacts	118
5.3.1	Trou spectral	118
5.3.2	Premier cadre	119
5.3.3	Second cadre	121
5.4	Démonstration des théorèmes limite	123
5.4.1	Des applications topicales itérées aux chaînes de Markov	123
5.4.2	Des chaînes de Markov aux applications topicales itérées	128
5.4.3	Le cas Max-plus	135

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	147
Bibliographie	137
Index des notations et des définitions	141
Table des matières	145