



HAL
open science

Processus d'exclusion asymétrique: Effet du désordre, Grandes déviations et fluctuations

Camille Enaud

► **To cite this version:**

Camille Enaud. Processus d'exclusion asymétrique: Effet du désordre, Grandes déviations et fluctuations. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT: . tel-00010955

HAL Id: tel-00010955

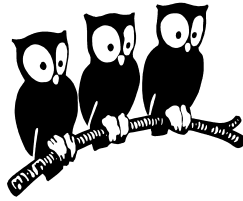
<https://theses.hal.science/tel-00010955>

Submitted on 10 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
Département de Physique
Laboratoire de Physique Statistique



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

présentée par

Camille ENAUD

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique théorique

**Processus d'exclusion asymétrique :
Effet du désordre,
Grandes déviations et fluctuations**

Soutenance prévue le 7 novembre 2005 devant le jury composé de :

Bernard DERRIDA	Directeur
Jean FARAGO	Rapporteur
Frédéric VAN WIJLAND	Rapporteur
Henk HILHORST	Examineur
Jorge KURCHAN	Examineur
Stefano OLLA	Examineur

TABLE DES MATIÈRES

1. <i>Introduction</i>	1
<i>partie I Résultats généraux</i>	7
2. <i>Introduction aux gaz sur réseau</i>	11
2.1 Description markovienne	11
2.1.1 L'équation maîtresse	11
2.1.2 États stationnaires	11
2.1.3 Dynamique adjointe	12
2.1.4 Bilan détaillé	13
2.2 Gaz sur réseau	14
3. <i>Comportement macroscopique et grandes déviations</i>	21
3.1 Profil macroscopique	22
3.2 Échelle de temps macroscopique et équilibre local	23
3.3 Équations hydrodynamiques	25
3.4 Grandes déviations	28
3.4.1 La fonction de grandes déviations de courant	29
3.4.2 La fonctionnelle de grandes déviations dynamiques	30
3.4.3 La fonctionnelle de grandes déviations statiques de la densité dans l'état stationnaire	33
4. <i>Processus d'exclusion</i>	37
4.1 Définitions et propriétés	37
4.2 le processus d'exclusion symétrique (SSEP)	40
4.2.1 équation hydrodynamique	40
4.2.2 état stationnaire	41

4.3	Le processus d'exclusion asymétrique (ASEP)	41
4.3.1	Équation hydrodynamique	41
4.3.2	Diagramme de phase de l'ASEP dans l'état stationnaire	43
4.4	Le processus d'exclusion faiblement asymétrique (WASEP)	47
4.4.1	équation hydrodynamique	47
4.4.2	état stationnaire du WASEP	49
4.5	La méthode matricielle	51
4.6	Cas particuliers	53
4.6.1	profil constant	53
4.6.2	le bilan détaillé	53
 <i>partie II Le processus d'exclusion avec désordre gelé</i>		57
5.	<i>Introduction</i>	61
5.1	Effet du désordre sur une transition de phase	61
5.2	TASEP avec désordre gelé lié aux particules	61
5.3	TASEP avec désordre gelé lié aux sites	64
6.	<i>Transition de phase dépendante de l'échantillon</i>	67
7.	<i>Approche en champ moyen</i>	75
 <i>partie III Grandes déviations et fluctuations pour le processus d'exclusion faiblement et totalement asymétrique</i>		83
8.	<i>Probabilité d'un état comme somme sur des chemins</i>	87
8.1	Choix d'une représentation pour D et E	90
8.2	Somme sur les chemins, version discrète	91
8.3	Prolongement du domaine de validité de la somme sur les chemins	93
8.4	Somme sur les chemins, version continue : le cas du WASEP	94
8.5	Somme sur les chemins, version continue : le cas du TASEP	98

9. Fonction de grandes déviations du WASEP	99
9.1 Résultats précédents	100
9.1.1 Le cas symétrique	100
9.1.2 Le cas asymétrique	100
9.2 La fonctionnelle de grandes déviations pour le WASEP	101
9.2.1 Résumé de nos résultats	101
9.2.2 La fonctionnelle de grandes déviations donnée par un chemin optimal	103
9.2.3 Obtention de l'équation différentielle (9.17) pour la fonctionnelle de grandes déviations	104
9.2.4 Le profil le plus probable et la détermination de la constante K_{WASEP}	108
9.3 De SSEP à ASEP	109
9.3.1 La limite SSEP	109
9.3.2 La limite fortement asymétrique (pour $\rho_a > \rho_b$)	110
9.4 Lien avec l'approche macroscopique	112
10. Fluctuations dans le processus d'exclusion asymétrique	115
10.1 Résumé des principaux résultats	116
10.1.1 Distribution du processus Y pour le WASEP	117
10.1.2 Distribution du processus Y pour le TASEP	118
10.2 Démonstration	118
10.2.1 Fluctuation pour le WASEP	118
10.2.2 Distribution du processus Y dans le cas faiblement asy- métrique	122
10.2.3 Calcul de la covariance $\langle \xi^{st}(x_1) \xi^{st}(x_2) \rangle$	123
10.2.4 Distribution du processus Y dans le cas totalement asy- métrique	124
10.3 Réduction des fluctuations dans le TASEP	127
10.4 particules de taille finie	128
11. À propos de la fonction auxiliaire F	133
11.1 F et les fonctions de corrélation	134
11.2 Équation d'évolution pour F	138

11.3 Une dynamique microscopique pour F et les marches	140
12. Conclusion et perspectives	153

1. INTRODUCTION

Cette thèse est consacrée à l'étude de certains aspects du comportement macroscopique d'un modèle simple de la physique statistique hors d'équilibre, le processus d'exclusion à une dimension. La physique statistique décrit des systèmes composés d'un grand nombre d'objets microscopiques en interaction (comme par exemple les molécules d'un gaz), tels qu'il existe une séparation nette entre l'échelle d'observation, macroscopique, et l'échelle microscopique des interactions entre ces objets. Alors que la physique statistique d'équilibre décrit les systèmes macroscopiquement au repos, comme une barre de fer, une bonbonne de gaz, ou l'eau d'un lac, la physique statistique hors équilibre s'intéresse à des phénomènes présentant des courants macroscopiques de particules, d'énergies, etc.

Il peut sembler surprenant de voir que la physique statistique est toujours une branche active de la science. Sa naissance, chaotique comme il se doit, découle de la volonté d'expliquer la nature des gaz et de la chaleur, et d'en décrire le comportement. Par de nombreux détours et tourbillons, il s'imposa peu à peu au cours des XVII^e, XVIII^e et XIX^e siècles l'idée que les gaz sont constitués d'«atomes», dont l'agitation correspond à la température. À cette théorie cinétique des gaz sont associés de grands noms comme Bernoulli [4], Herapath [45] et Joule [50], mais ce n'est qu'avec les travaux de Clausius [16], Maxwell [65], Boltzmann [12] et Gibbs [38] entre 1850 et 1900 qu'apparaît la physique statistique telle que nous la connaissons, avec notamment l'idée qu'une description probabiliste est mieux adaptée, et l'introduction des notions d'entropie et d'irréversibilité. Il ne s'agissait là que d'une porte ouverte sur de nouveaux territoires qu'un siècle entier n'a pas suffi à explorer entièrement : la relation avec la mécanique quantique, les transitions de phases et points critiques, l'effet du désordre, etc. Pour illustrer l'étendue du travail restant à accomplir, on peut noter que même la loi de Fourier [36], qui décrit

la conduction de chaleur dans un corps, et qui a été introduite en 1807, n'a pas encore de dérivation rigoureuse pour les systèmes dont la dynamique microscopique est déterministe. Même pour des systèmes dont la dynamique est aléatoire, la description des états hors d'équilibre reste encore fragmentaire.

De fait, l'univers de la physique statistique hors d'équilibre est extrêmement riche et varié. Des phénomènes d'aspect aussi différent que la croissance d'un cristal, les avalanches de grains de sable, la formation de motifs sur certains coquillages, le mouvement de l'eau qui bout peuvent être étudiés par des modèles de physique hors d'équilibre. Les sciences de la vie elles-mêmes pourraient être considérées dans un certain sens comme une branche de la physique hors d'équilibre. En regard de la variété et de la complexité de ces exemples, la simplicité du modèle qui est à l'étude dans cette thèse peut sembler bien dérisoire. Le processus d'exclusion à une dimension peut être sommairement décrit comme un ensemble de particules se déplaçant sur une succession de cases ne pouvant en accueillir chacune qu'une seule. Certes, sa simplicité permet l'obtention de résultats analytiques exacts, mais ce n'est pas là la seule raison de l'intérêt que la communauté scientifique porte à ce modèle. En effet, le processus d'exclusion présente des propriétés que l'on retrouve dans beaucoup de phénomènes hors équilibre plus complexes, comme la présence de transitions de phase, d'ondes de choc ou de corrélations à longue distance. La conjonction de la simplicité du modèle et de l'intérêt des phénomènes observés font que le processus d'exclusion a atteint le statut de modèle de référence en physique hors équilibre, proche de celui du modèle d'Ising pour les systèmes à l'équilibre.

À l'échelle macroscopique, le comportement d'un système stochastique est généralement très différent de son comportement à l'échelle microscopique. La trajectoire individuelle de chaque particule est perdue au profit d'un mouvement d'ensemble du fluide régi par des lois macroscopiques, les équations hydrodynamiques. Même si les trajectoires de ces particules microscopiques sont aléatoires, ce qui est le cas dans les modèles stochastiques que nous étudions, l'évolution macroscopique du système est généralement presque déterministe ; un phénomène que l'on peut rapprocher de la loi des grands nombres. La probabilité d'observer une déviation notable par rapport aux équations hydrodynamiques décroît exponentiellement avec la taille du

système ; il est ainsi heureusement improbable que l'ensemble des molécules de gaz se concentrent subitement dans un coin de la pièce. La fonctionnelle qui donne la décroissance de la probabilité d'une fluctuation macroscopique est appelée «fonctionnelle de grandes déviations». Un des principaux résultats présentés dans cette thèse est l'obtention de cette fonctionnelle pour la densité de l'état stationnaire du processus d'exclusion en présence d'un champ extérieur faible.

Si observer une déviation macroscopique est fortement improbable dans un système comportant un grand nombre de particules, des petites fluctuations sont toujours présentes. Ces petites fluctuations se manifestent par exemple dans le mouvement aléatoire d'un grain de pollen dans de l'eau (mouvement Brownien), et sont essentielles pour comprendre les phénomènes de diffusion. La taille des fluctuations typiques observées à l'échelle macroscopique dans un système stochastique sont inversement proportionnelles à la racine carrée de la taille du système. Dans ce mémoire, nous obtenons la distribution de probabilité de telles fluctuations pour le processus d'exclusion dans l'état stationnaire, à la fois en présence d'un champ faible et en présence d'un champ fort. Ces deux résultats (fonctionnelle de grandes déviations et petites fluctuations) découlent d'une formulation nouvelle de la probabilité d'un état microscopique comme une somme sur des marches abstraites.

Nous présenterons également l'effet d'un désordre gelé sur une transition de phase du processus d'exclusion. Ajouter du désordre à un modèle statistique est une manière de prendre en compte le fait que les vrais systèmes sont rarement tout à fait purs, mais présentent généralement des défauts répartis aléatoirement. La présence de tels défauts peut avoir des conséquences importantes sur le comportement macroscopique du système, comme l'a montré l'étude des systèmes désordonnés à l'équilibre. Ici, dans le cadre du processus d'exclusion unidimensionnel, nous mettons en évidence une conséquence inhabituelle du désordre : la transition de phase devient dépendante de l'échantillon considéré.

Voici maintenant le plan de ce mémoire.

La première partie se veut comme une longue introduction ; Nous y définissons les systèmes de gaz sur réseau, et plus particulièrement le processus

d'exclusion simple, le modèle sur lequel porte l'essentiel de cette thèse. Dans ce cadre, la notion de grandes déviations est abordée par une approche macroscopique. Il ne s'agit pas dans cette partie de résultats originaux, mais de ma compréhension, qui doit beaucoup aux nombreuses explications de mon directeur de thèse, de la littérature sur le sujet et notamment de l'approche de Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim [7–9],

La seconde partie est assez indépendante ; elle concerne le processus d'exclusion avec désordre gelé. Par des simulations numériques nous montrons que lorsque l'on ajoute du désordre lié aux sites dans un processus d'exclusion ouvert, la position de la transition de phase est modifiée et devient dépendante de l'échantillon considéré. Ces résultats sont comparés aux prédictions d'une approximation de champ moyen.

La troisième partie constitue le corps principal de cette thèse. Nous montrons que l'on peut exprimer la probabilité d'un état du processus d'exclusion comme une somme sur des marches abstraites. La limite continue de cette formulation nous permet d'évaluer la fonctionnelle de grandes déviations de densité pour l'état stationnaire du processus d'exclusion faiblement asymétrique. Celle-ci peut se mettre sous plusieurs formes, l'une d'entre elles notamment exprime la fonctionnelle de grandes déviations comme le maximum d'une quantité dépendant d'une fonction auxiliaire $\{F\}$, et qui fait le lien entre deux résultats déjà connus, la fonctionnelle de grandes déviations du processus d'exclusion symétrique et celle du processus d'exclusion totalement asymétrique. L'expression de la fonctionnelle de grandes déviations du processus faiblement asymétrique est cohérente avec l'approche macroscopique des grandes déviations de Bertini *et al.* présentée en première partie.

La somme sur les marches nous permet également de calculer la distribution des petites fluctuations de densité dans l'état stationnaire des processus d'exclusion faiblement et totalement asymétrique. Celles-ci peuvent s'écrire comme la somme de deux processus indépendants, dont l'un est un bruit blanc, tandis que le second prend différentes formes selon la force de l'asymétrie. Notamment, dans la phase de courant maximum du processus totalement asymétrique, il prend la forme de la dérivée d'une excursion brownienne, qui est un processus non-gaussien. L'expression de ces petites fluctuations permet en outre de calculer les fonctions de corrélation.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous étudions plus en détail les marches et la fonction auxiliaire $\{F\}$ qui intervient dans le calcul de la fonctionnelle de grandes déviations. Nous montrons que la fonction $\{F\}$ est liée aux fonctions de corrélation, et que, comme cela avait déjà été indiqué [5, 8], la trajectoire qu'elle suit lors de la formation d'une fluctuation de densité est la trajectoire hydrodynamique inversée dans le temps. Nous nous aiderons de cette constatation pour construire une dynamique microscopique sur les marches qui, lorsqu'elle est projetée sur les états du processus d'exclusion, en redonne correctement la dynamique.

Première partie

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

RÉSUMÉ

Cette partie sert à introduire les notions et outils que nous utiliserons dans cette thèse. Le chapitre 2 est une courte introduction aux gaz sur réseau. Dans le chapitre 3, nous présentons les propriétés macroscopiques de tels systèmes, notamment les fonctionnelles de grandes déviations de courant, dynamique, et de densité. Le chapitre 4 présente plus précisément les processus d'exclusion.

2. INTRODUCTION AUX GAZ SUR RÉSEAU

2.1 Description markovienne

Soit un système stochastique dont les configurations sont notées par \mathcal{C} . Au cours du temps, le système va parcourir une trajectoire $\mathcal{C}(t)$, déterminée par la dynamique du système. La dynamique est dite markovienne si la probabilité d'aller de la configuration $\mathcal{C}(t)$ à une configuration \mathcal{C}' entre t et $t + dt$ ne dépend que de la configuration de départ $\mathcal{C}(t)$, de la configuration d'arrivée (et éventuellement du temps), mais pas de la trajectoire $\{\mathcal{C}(s)\}_{s < t}$ qui a mené à la configuration $\mathcal{C}(t)$. Autrement dit, un système markovien est un système sans mémoire.

2.1.1 L'équation maîtresse

Nous supposons qu'à chaque instant, le système passe de la configuration \mathcal{C} à la configuration \mathcal{C}' avec le taux de transition $M(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')$, i.e. durant un intervalle de temps dt , le système initialement en \mathcal{C} passe à une configuration \mathcal{C}' avec la probabilité $dtM(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')$. Dans ce cas, l'évolution de la probabilité $P_t(\mathcal{C})$ que le système soit à l'instant t dans la configuration \mathcal{C} est donnée par l'équation maîtresse

$$\partial_t P_t(\mathcal{C}) = \sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} (P_t(\mathcal{C}')M(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) - P_t(\mathcal{C})M(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')) \quad . \quad (2.1)$$

2.1.2 États stationnaires

La dynamique du système est dite irréductible s'il existe toujours une trajectoire de probabilité non nulle reliant deux configurations \mathcal{C} et \mathcal{C}' données. En terme de taux de transition, cela signifie que quelques soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' , il existe toujours une suite d'un certain nombre k de configurations

$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k = \mathcal{C}'$ telle que

$$\prod_{i=1}^{k-1} M(\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_{i+1}) \neq 0 . \quad (2.2)$$

Si un système irréductible comporte un nombre fini de configurations \mathcal{C} possibles, on peut montrer (via le théorème de Perron Frobenius) que sa distribution de probabilité va tendre, au bout d'un temps infini, vers une unique distribution stationnaire (i.e. indépendante du temps) P_{st} . D'après l'équation maîtresse (2.1) cette distribution stationnaire $P_{st}(\mathcal{C})$ vérifie, pour toute configuration \mathcal{C}

$$\sum_{\mathcal{C}' \neq \mathcal{C}} (P_{st}(\mathcal{C}')M(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) - P_{st}(\mathcal{C})M(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')) = 0 . \quad (2.3)$$

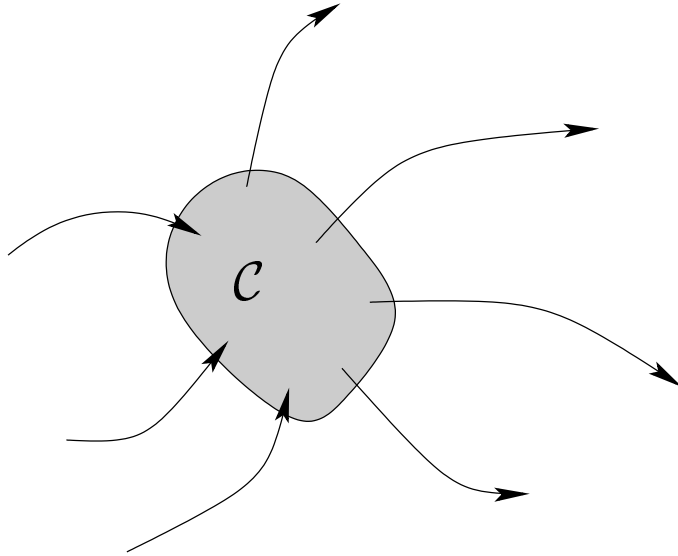


Fig. 2.1: Dans l'état stationnaire, la probabilité totale d'atteindre une configuration \mathcal{C} est égale à la probabilité de la quitter.

2.1.3 Dynamique adjointe

La dynamique adjointe est la dynamique obtenue en inversant la direction du temps pour un système dans l'état stationnaire. Cette dynamique possède naturellement le même état stationnaire que la dynamique directe,

mais une distribution de probabilité différente sur les trajectoires, et des taux de transition différents. Nous noterons $M^*(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')$ le taux de transition de \mathcal{C} vers \mathcal{C}' dans la dynamique adjointe. La probabilité d'observer un saut de \mathcal{C} vers \mathcal{C}' dans la dynamique directe est égale à la probabilité d'observer le saut inverse, de \mathcal{C}' vers \mathcal{C} , dans la dynamique adjointe. Les taux de transition de la dynamique directe et ceux de la dynamique adjointe sont donc reliés par

$$P_{st}(\mathcal{C})M(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}') = P_{st}(\mathcal{C}')M^*(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) . \quad (2.4)$$

2.1.4 Bilan détaillé

Nous différencierons deux types d'états stationnaires : les états d'équilibre, et les états stationnaires hors d'équilibre. Les états d'équilibre sont les états stationnaires pour lesquels la probabilité d'observer une trajectoire $\mathcal{C}(t)$ est égale à la probabilité d'observer cette trajectoire renversée dans le temps, i.e. $\mathcal{C}(-t)$. Pour un état d'équilibre, la dynamique adjointe est donc égale à la dynamique directe. Les taux de transitions doivent pour cela vérifier l'équation du «bilan détaillé»

$$P_{eq}(\mathcal{C}')M(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) = P_{eq}(\mathcal{C})M(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}') . \quad (2.5)$$

Dans un état d'équilibre, le courant moyen en tout point est nul, puisqu'il y a la même probabilité d'observer une transition dans un sens ou dans l'autre.

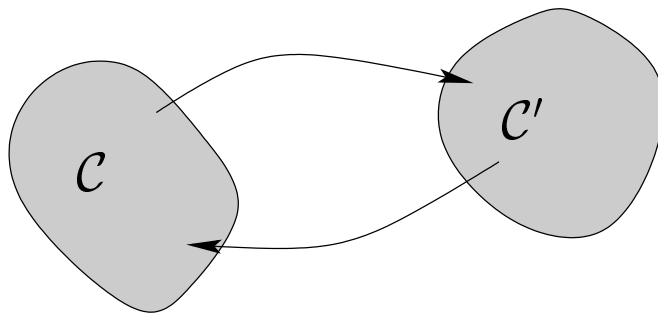


Fig. 2.2: Bilan détaillé : la probabilité d'aller d'une configuration \mathcal{C} à une configuration \mathcal{C}' est égale à la probabilité d'aller de \mathcal{C}' à \mathcal{C} .

2.2 Gaz sur réseau

Dans la suite, nous étudierons seulement les systèmes stochastiques de type gaz sur réseau avec interactions de cœur dur, et plus particulièrement le processus d'exclusion simple. Un gaz sur réseau est un système constitué d'un ensemble de particules évoluant aléatoirement sur un réseau discret. Nous considérerons uniquement des particules «à cœur dur», c'est à dire que les particules interagissent entre elles de sorte que deux particules ne peuvent pas se trouver au même moment sur le même site du réseau ; c'est la règle d'exclusion. De plus, nous nous limiterons à des systèmes unidimensionnels. Le réseau sur lequel les particules évoluent est constitué de L sites indicés

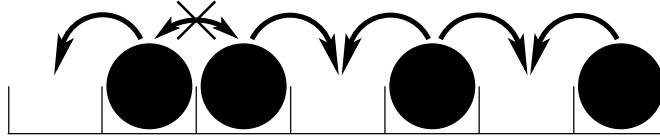


Fig. 2.3: Gaz sur réseau unidimensionnel de $L = 7$ sites. La configuration de nombres d'occupation $\eta = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ est représentée

de 1 à L ; L est la taille du système. Une configuration \mathcal{C} du système est entièrement définie par la donnée, pour chaque site i du réseau, du «nombre d'occupation» η_i , c'est à dire du nombre de particules présentes en i ; de par la règle d'exclusion, ce nombre est soit 0 (aucune particule au site i), soit 1 (le site i est occupé par une particule). La dynamique du système se décompose en une suite de sauts élémentaires : si le site i est occupé par une particule, et le site j vide, la particule présente en i peut sauter sur le site j . La nouvelle configuration du système est alors $\eta^{i,j}$, définie à partir de la configuration η avant le saut en inversant les nombres d'occupation i et j ,

$$\eta_i^{i,j} = \eta_j \quad (2.6)$$

$$\eta_j^{i,j} = \eta_i \quad (2.7)$$

$$\eta_k^{i,j} = \eta_k \quad \text{si } k \neq i, j \quad (2.8)$$

Un saut de i à j se produit avec un taux de probabilité $c(i, j, \eta)$, c'est à dire que durant un intervalle de temps infinitésimal dt , une particule en i a une probabilité $c(i, j, \eta)dt$ de sauter au site j . Les taux de saut $c(i, j, \eta)$

peuvent dépendre du site source i , de la destination j , mais également de l'état du système η , de manière à pouvoir modéliser des interactions entre particules. Par construction, durant un saut, le nombre total de particules dans le système est conservé.

Pour simplifier, nous supposons par la suite que les particules ne peuvent sauter que sur leurs plus proches voisins, c'est à dire $c(i, j, \eta) = 0$ si $|j - i| > 1$. Nous imposerons également sur les taux de saut une condition de portée finie des interactions : quelque soit i et j , $c(i, j, \eta)$ ne dépend pas de l'occupation η_k des sites k situés à une distance des sites source i et destination j plus grande qu'une certaine portée limite R , avec $R \ll L$. De plus, pour éviter les blocages, nous imposerons que $c(i, i + 1, \eta) > 0$ quand le saut est permis par la règle d'exclusion, i.e. quand $\eta_i = 1$ et $\eta_{i+1} = 0$.

Sans autres interactions, la dynamique ainsi décrite conserve le nombre de particules. Il y a donc dans ce cas un état stationnaire différent pour chaque nombre de particules. Nous voulons pouvoir décrire un gaz qui, lorsqu'il est isolé, atteint un état d'équilibre uniforme. Pour cela, nous imposons que les taux de saut soient tels que pour chaque nombre N de particules il existe un état d'équilibre $P_{\text{eq},N}$ avec une densité moyenne uniforme N/L . Pour cela, les taux de saut doivent entre autre vérifier le bilan détaillé :

$$c(i, j, \eta)P_{\text{eq},N}(\eta) = c(j, i, \eta^{i,j})P_{\text{eq},N}(\eta^{i,j}) \quad . \quad (2.9)$$

En plus de la dynamique interne, le système est en interaction avec deux réservoirs de particules, Ra et Rb, en contact avec respectivement le bord gauche et le bord droit du réseau. Ces réservoirs peuvent échanger un nombre infini de particules avec les sites à leur contact. Pour simplifier les expressions, nous assimilerons le réservoir Ra au site 0, et le réservoir Rb au site $L + 1$. La dynamique du réservoir Ra est définie par le taux de saut $c(0, 1, \eta)$ du réservoir Ra (site 0) en direction du site $i = 1$ (ce qui correspond à la création d'une particule en 1) et par les taux de saut $c(1, 0, \eta)$ du premier site vers le réservoir Ra (ce qui correspond à la destruction d'une particule en $i = 1$); de même l'action de Rb est définie par $c(L, L + 1, \eta)$ et $c(L + 1, L, \eta)$. Pour respecter la localité des interactions, ces taux de création et de destruction

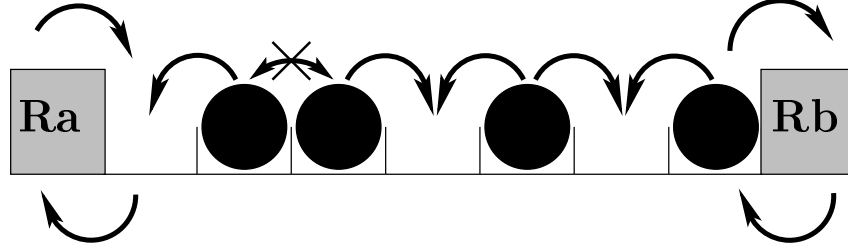


Fig. 2.4: Gaz sur réseau unidimensionnel en contact avec deux réservoirs Ra et Rb.

ne doivent pas dépendre de l'occupation $\eta(r)$ des sites r situés à une distance plus grande que R des réservoirs. Naturellement, le nombre total de particules dans le système n'est alors plus conservé ; cependant on peut choisir ces taux de saut de telle sorte que la relation de bilan détaillé soit vérifiée : pour $0 \leq i \leq L$,

$$c(i, i+1, \eta) P_{\text{eq}}(\eta) = c(i+1, i, \eta^{i, i+1}) P_{\text{eq}}(\eta^{i, i+1}) \quad (2.10)$$

avec, pour $i \neq 0, L+1$, $\eta^{i, i+1}$ défini par (2.6) et $\eta^{0,1}, \eta^{L, L+1}$ défini par

$$\eta_1^{0,1} = 1 - \eta_1 \quad (2.11)$$

$$\eta_k^{0,1} = \eta_k \quad \text{pour } k \neq 1 \quad (2.12)$$

et

$$\eta_L^{L, L+1} = 1 - \eta_L \quad (2.13)$$

$$\eta_k^{L, L+1} = \eta_k \quad \text{pour } k \neq L \quad (2.14)$$

Un ensemble continu de valeurs pour les taux de saut entre les réservoirs et le système respecte l'équation du bilan détaillé (2.10), menant chacune à un état d'équilibre différent. En comparant (2.10) avec (2.9), on voit que la distribution de probabilité peut se mettre sous la forme $P_{\text{eq}}(\eta) = P(N) P_{\text{eq}, N}(\eta)$ où $P(N)$ est la probabilité d'avoir N particules dans le système avec N le nombre de particules dans la configuration η et $P_{\text{eq}, N}$ la distribution de probabilité pour le système fermé avec N particules. Comme nous avons supposé que la densité était constante dans le système fermé quelque soit le nombre de particules, il en est de même pour le système en contact avec les réservoirs. Cette densité uniforme ρ peut s'interpréter comme étant celle imposée par les

réservoirs. Par la suite, nous appellerons ces réservoirs Ra et Rb définis par les taux de saut correspondants «réservoirs de densité ρ ». En général, donner la densité d'un réservoir n'est pas suffisant pour le caractériser entièrement (par exemple, il y a aussi l'intensité du couplage entre les réservoirs et le système), cependant dans la limite L grand, c'est le paramètre important.

Pour créer un état stationnaire hors d'équilibre, il faut modifier la dynamique pour permettre l'établissement d'un courant moyen non nul. On peut par exemple imposer une différence de densité entre les deux réservoirs. Si le réservoir Ra est à la densité ρ_a , et le réservoir Rb à la densité $\rho_b \neq \rho_a$, on s'attend à ce que dans l'état stationnaire, un courant s'établisse du réservoir de haute densité vers le réservoir de basse densité. Pour des différences de densité faibles, il est raisonnable de linéariser la relation entre courant microscopique moyen de particules \bar{J}_L^{micro} et le gradient de densité $\frac{\rho_a - \rho_b}{L}$; cela mène à la loi de Fick

$$\bar{J}_L^{\text{micro}} = \frac{D(\rho)}{L}(\rho_a - \rho_b) \quad (2.15)$$

pour $\rho_a \simeq \rho_b \simeq \rho$, avec ρ la densité moyenne de particules dans le système. $D(\rho)$ est la constante de diffusion. La dépendance en $\frac{1}{L}$ traduit le fait que la résistance du système à l'établissement d'un courant est proportionnelle à la taille L du système.

Une autre manière de forcer un courant à travers le système est d'imposer un potentiel extérieur V_i qui va favoriser les particules se déplaçant dans une certaine direction. A chaque saut $i \rightarrow i + 1$, nous allons associer un champ $E_i = V_i - V_{i+1}$. Les taux de saut $c(i, i + 1, \eta)$ sont modifiés en $c_E(i, i + 1, \eta)$ qui vérifient l'équation de bilan détaillé modifié suivante :

$$c_E(i, i + 1, \eta)P_{\text{eq}}(\eta) = c_E(i + 1, i, \eta^{i, i+1})P_{\text{eq}}(\eta^{i, i+1}) \exp(E_i) \quad . \quad (2.16)$$

Une possibilité est de définir

$$c_E(i, i + 1, \eta) = c(i, i + 1, \eta) \exp\left(\frac{E_i}{2}\right) \quad (2.17)$$

$$c_E(i + 1, i, \eta) = c(i + 1, i, \eta) \exp\left(-\frac{E_i}{2}\right) \quad . \quad (2.18)$$

Pour voir que ces définitions sont cohérentes, supposons que le nouveau système est à l'équilibre. Ce nouvel état d'équilibre est solution du bilan détaillé

$$c_E(i, i+1, \eta) P_{\text{eq}}^E(\eta) = c_E(i+1, i, \eta^{i, i+1}) P_{\text{eq}}^E(\eta^{i, i+1}) \quad (2.19)$$

En comparant avec le bilan détaillé modifié (2.16) et (2.20), on voit que si on définit le hamiltonien $H(\eta)$ par

$$P_{\text{eq}}(\eta) = \frac{1}{Z} \exp(-H(\eta)) \quad (2.20)$$

(avec Z une constante de normalisation), P_{eq}^E donnée par

$$P_{\text{eq}}^E(\eta) = \frac{1}{Z_E} \exp \left[- \left(H(\eta) + \sum_i \eta(i) V_i \right) \right] \quad (2.21)$$

(où V_i est le potentiel au point i , et Z_E une constante de normalisation) est solution du bilan détaillé (2.19) à condition que $V_{L+1} = V_0 = 0$ (si les deux réservoirs ne sont pas au même potentiel, le système ne peut pas être à l'équilibre). On retrouve bien une mesure de Gibbs (avec la convention $kT = 1$) pour une énergie totale $H_E(\eta) = H(\eta) + \sum_i \eta(i) V_i$ qui diffère de l'énergie de départ H par le terme dû au potentiel extérieur.

Pour des champs E_i faibles, on peut linéariser la relation entre courant et champs en introduisant la conductivité $\sigma(\rho)$, où ρ est la densité moyenne du système, approximativement constante. Le courant microscopique moyen dans l'état stationnaire \bar{J}_L^{micro} sera alors approximativement donné par

$$\bar{J}_L^{\text{micro}} \simeq -\sigma(\rho) \frac{V_{L+1} - V_0}{L} \quad (2.22)$$

Introduire une différence de potentiel entre le site 0 (le réservoir de gauche) et le site 1 revient en fait à changer la densité ρ_a du réservoir de gauche, et de même pour le réservoir de droite. Pour retrouver la loi de Fick (2.15) en l'absence de champs dans le coeur du système, il faut que les différences de potentiel aux bords et les variations de densité des réservoirs $\Delta\rho_a$ et $\Delta\rho_b$ soient reliées par

$$\Delta\rho_a = \frac{\sigma(\rho)}{D(\rho)} (V_1 - V_0) \quad \Delta\rho_b = \frac{\sigma(\rho)}{D(\rho)} (V_L - V_{L+1}) . \quad (2.23)$$

Ainsi, en séparant l'effet du champ sur le coeur du système et l'effet de la variation des densités des réservoirs, on peut réécrire (2.22) comme

$$\bar{J}_L^{\text{micro}} \simeq \frac{D(\rho)}{L}(\rho_a - \rho_b) - \sigma(\rho) \frac{V_L - V_1}{L} . \quad (2.24)$$

3. COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE ET GRANDES DÉVIATIONS

La nature montre de nombreux exemples où un phénomène semble avoir un comportement radicalement différent suivant l'échelle à laquelle on le regarde. Lorsque l'on observe un liquide, par exemple une rivière, ou un évier qui se vide, on voit un mouvement d'ensemble, qui peut être modélisé par des équations de type Navier-Stokes. Mais si l'on pouvait changer d'échelle, on verrait que le flux est constitué d'un grand nombre de molécules, principalement H_2O , qui chacune semble bouger au hasard, au grè des chocs et interactions avec ses voisines. Un gaz par exemple peut être caractérisé, à notre échelle, par un faible nombre de paramètres, comme sa température, sa pression, etc ; pourtant il est composé lui aussi d'un nombre gigantesque de particules en interaction, chacune avec sa trajectoire propre. En ce sens, son comportement à l'échelle macroscopique est nettement plus simple que celui à l'échelle microscopique. Ces exemples présentent deux caractéristiques importantes :

- ils comportent un grand nombre de particules microscopiques
- ils comportent deux échelles de longueur nettement distinctes : une échelle microscopique, correspondant à la distance entre les molécules, et une échelle macroscopique, qui est l'échelle d'observation.

Dans le cadre des gaz sur réseau, nous cherchons à comprendre l'apparition de ces comportements à grande échelle à partir de la dynamique microscopique. Dans les systèmes unidimensionnels que nous étudions, l'échelle de longueur microscopique correspond à la distance entre sites du réseau, et l'échelle macroscopique correspond à la taille L du réseau. La première échelle de longueur est associée à l'indice entier i de la position du site considéré, tandis que pour la seconde, on peut associer une position macroscopique x , reliée à

i par

$$i = \lfloor Lx \rfloor \tag{3.1}$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ note la partie entière. Ainsi, un déplacement d'ordre macroscopique correspondra à une variation de la position macroscopique x de l'ordre de 1. Pour que les deux échelles d'espace soient bien séparées, il faut que le paramètre L soit grand. Nous considérerons donc des suites de systèmes de taille L croissante et nous étudierons leur limite hydrodynamique, c'est à dire leur (éventuel) comportement limite à l'échelle macroscopique quand la taille L tend vers l'infini. La manière de définir les systèmes de taille croissante n'est pas anodine, elle peut avoir des conséquences fondamentales sur l'existence et la nature de la limite hydrodynamique. On peut, par exemple, faire dépendre les taux de saut de la taille du système.

Le lecteur intéressé par une présentation plus rigoureuse du comportement macroscopique de particules en interactions pourra se référer à [52, 80].

3.1 Profil macroscopique

La description microscopique de l'état du système est trop précise, et masque le comportement macroscopique ; peu importe de savoir si une particule se trouve précisément sur un certain site i ou plutôt sur son voisin, la différence, rapportée à la taille du système, est minime. On cherche plutôt à connaître la densité moyenne de particules *autour* du site i . C'est ce que décrit le *profil macroscopique de densité* $\{\rho(x)\}_{x \in [0,1]}$ que nous allons introduire maintenant.

Il existe plusieurs manières équivalentes de définir le profil macroscopique, avec plus ou moins de rigueur. La méthode que nous allons introduire n'est pas la plus élégante, mais elle correspond exactement à la démarche que nous utiliserons dans nos dérivations pour définir la distribution de probabilité $P_L[\{\rho\}]$ sur les profils macroscopiques ρ à partir de la distribution de probabilité sur les profils microscopiques η . L'idée est d'associer à un profil macroscopique $\{\rho\}$ un ensemble de profils microscopiques η pour chaque valeur de la taille du système, et d'identifier la probabilité de $\{\rho\}$ à la probabilité de l'ensemble des profils microscopiques correspondants. Pour ce faire,

nous divisons le système en k boîtes délimitées par les sites $\{b_i\}_{i=0,k}$, avec $b_0 = 0$ et $b_k = L$, et de longueurs respectives $L_i = b_i - b_{i-1}$ (cf fig 3.1), avec $1 \ll L_i \ll L$. Appelons $N_{]b_{i-1};b_i]}(\eta) = \sum_{b_{i-1} < j \leq b_i} \eta_j$ le nombre de particules dans la boîte i , c'est à dire situées entre les sites b_{i-1} et b_i , pour une configuration $\eta = \{\eta_j\}_{j=1,L}$ donnée. Pour une taille de système L , on associe au profil $\{\rho\}$ l'ensemble $\mathcal{M}_L[\{\rho\}]$ des configurations microscopiques η ayant dans la boîte i un nombre de particules $N_{]b_{i-1};b_i]}(\eta)$ donné par $\lfloor L_i \rho \left(\frac{b_i}{L}\right) \rfloor$:

$$\mathcal{M}_L[\{\rho\}] = \left\{ \eta \text{ tels que pour tout } i \in [1, k], N_{]b_{i-1};b_i]}(\eta) = \left\lfloor L_i \rho \left(\frac{b_i}{L}\right) \right\rfloor \right\}, \quad (3.2)$$

Ainsi si l'on note par $P_L(\eta)$ la mesure de probabilité sur les états microscopiques η , on peut définir la densité de probabilité $P_L[\{\rho\}]$ pour le profil macroscopique $\{\rho\}$ par

$$P_L[\{\rho\}] = P_L(\mathcal{M}_L[\rho]) \quad (3.3)$$

$$= \sum_{\eta \in \mathcal{M}_L[\{\rho\}]} P_L(\eta). \quad (3.4)$$

Nous nous restreindrons à des profils macroscopiques «physiques», i.e. continus sauf éventuellement en un nombre fini de points. Le choix des limites des $\{b_i\}_{i=0,k}$ est arbitraire, mais généralement, lorsque l'on prend la limite thermodynamique $1 \ll L_i \ll L$, la probabilité $P_L[\{\rho\}]$ ne dépend plus de la taille des boîtes L_i . En toute rigueur, la quantité $P_L[\{\rho\}]$ que nous avons ainsi définie est une *densité* de probabilité sur l'ensemble des profils macroscopiques. La probabilité d'un ensemble de profils macroscopiques s'obtient en intégrant cette densité de probabilité dans une intégrale de chemin.

Dans la valeur de $P_L[\{\rho\}]$ intervient non seulement la probabilité des états microscopiques sous-jacents, mais aussi un terme "entropique" correspondant au nombre d'états microscopiques compatibles avec $\{\rho\}$.

3.2 Échelle de temps macroscopique et équilibre local

De même que nous avons introduit une échelle de longueur microscopique et une échelle de longueur macroscopique, nous allons introduire une échelle de temps microscopique, correspondant au temps caractéristique de la dynamique microscopique, et une échelle de temps macroscopique correspondant

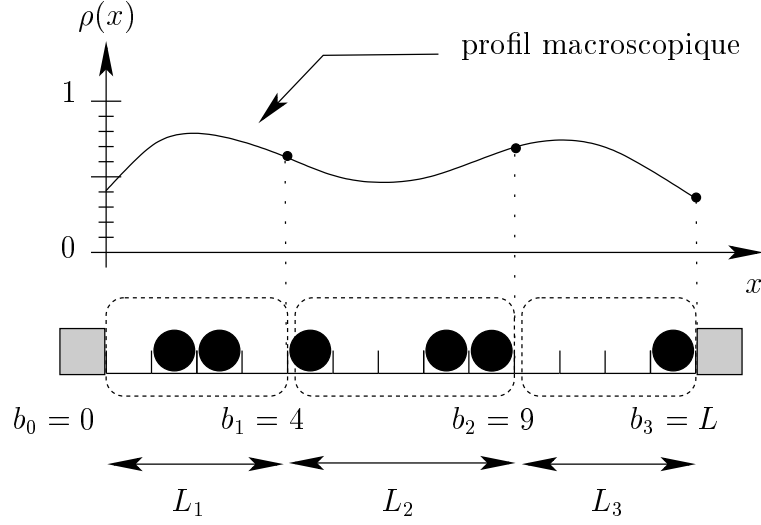


Fig. 3.1: Construction du profil macroscopique. Le système de $L = 13$ sites est divisé en trois boîtes de frontières $b_0 = 0$, $b_1 = 4$, $b_2 = 9$ et $b_3 = 13$. Une configuration compatible avec le profil macroscopique ρ a $N_{]b_0;b_1]} = \left\lfloor L_1 \rho \left(\frac{b_1}{L} \right) \right\rfloor = 2$ particules dans la première boîte, $N_{]b_1;b_2]} = \left\lfloor L_2 \rho \left(\frac{b_2}{L} \right) \right\rfloor = 3$ dans la seconde et $N_{]b_2;b_3]} = \left\lfloor L_3 \rho \left(\frac{b_3}{L} \right) \right\rfloor = 1$ dans la troisième.

au temps caractéristique de l'évolution du profil macroscopique. Pendant une durée t , une particule d'un processus aléatoire va se déplacer sur une distance microscopique typique de $d \propto t^a$, où a dépend du système étudié; par exemple $a = 1$ pour un système balistique, en présence de champs forts, et $a = 0,5$ pour un système diffusif de type mouvement brownien, en présence de champs faibles ou nuls. Pour que ce déplacement d soit mesurable à l'échelle macroscopique L (i.e. $d \sim L$), il faut que t soit d'ordre $L^{1/a}$; cela définit l'échelle de temps macroscopique. On définit donc un temps macroscopique t_{macro} en renormalisant le temps de la dynamique microscopique t_{micro} par

$$t_{\text{macro}} = L^{-\frac{1}{a}} t_{\text{micro}} \quad . \quad (3.5)$$

Dans la suite, nous considérerons des systèmes diffusifs $a = 0,5$.

Cette séparation entre échelle de temps macroscopique et échelle de temps microscopique permet de dissocier la dynamique microscopique locale, et le mouvement macroscopique global. En effet un intervalle de temps macroscopique

pique, même petit, correspond à l'échelle microscopique à une durée tendant vers l'infini dans la limite hydrodynamique. Ainsi à l'échelle microscopique une particule peut interagir un grand nombre de fois avec son entourage proche en une durée qui ne laisse pas le temps au système d'évoluer de manière notable à l'échelle macroscopique. On s'attend donc à ce que localement, le système se mette dans un état proche de l'équilibre, à une certaine densité $\rho(x)$. Par contre, les particules n'ont pas le temps de se mettre à l'équilibre sur l'ensemble du système, et la densité moyenne $\rho(x)$ dépend de la position x . Cet équilibre est donc seulement local, et à l'échelle microscopique. À l'échelle macroscopique, le profil de densité évolue, mais la vitesse d'évolution, ramenée à l'échelle microscopique, est suffisamment lente pour que le nouveau profil de densité corresponde toujours à un équilibre local. On appelle cette propriété «propagation de l'équilibre local» [80].

Quand la taille L du système devient grande, il devient improbable d'observer une déviation macroscopique de densité autour du profil de densité de l'équilibre local. C'est une conséquence de la loi des grands nombres, quand le nombre de sites devient grand. Le fait de pouvoir décrire l'état du système à grande échelle à l'aide d'un unique profil de densité plutôt que par une distribution de probabilité justifie l'intérêt de la limite thermodynamique.

3.3 Équations hydrodynamiques

Au cours du temps, la distribution microscopique du système évolue, et donc son état macroscopique, défini par le profil le plus probable, aussi. En dépit de sa dynamique microscopique aléatoire, l'évolution d'un système stochastique de grande taille est en première approximation déterministe. L'un des intérêts principaux de la limite hydrodynamique est l'obtention d'équations d'évolution pour la trajectoire $\hat{\rho}(x, t)$ du profil macroscopique qui soient fermées, c'est à dire qui ne fassent intervenir que des quantités macroscopiques. Ce n'est pas en général un problème trivial. On appelle ces équations les équations hydrodynamiques.

Supposons donc que le système présente initialement à $t = 0$ un profil macroscopique $\hat{\rho}(x, 0) = \rho_0(x)$ à variation spatiale lente et est soumis à un champ faible dérivant d'un potentiel macroscopique $V(x)$. Nous cherchons à

décrire l'évolution de ce profil au cours du temps. Tout d'abord, puisqu'il y a conservation locale du nombre de particules, la trajectoire respectera une équation de continuité

$$\partial_t \hat{\rho}(x, t) = -\partial_x \hat{j}(x, t) \quad (3.6)$$

avec $\hat{j}(x, t)$ le courant de densité de particules au point x à l'instant t . L'hypothèse de l'équilibre local permet de relier $\hat{j}(x, t)$ à la densité au point x . En effet, sous l'hypothèse de l'équilibre local, un sous-ensemble mésoscopique de $l = L\delta x$ sites (avec $1 \ll l \ll L$) autour de la position x se comporte comme un système proche de l'équilibre soumis à une faible différence de potentiel $\delta V = \partial_x V(x)\delta x$ et à une faible différence de densité $\delta\rho = \partial_x \rho(x)\delta x$, à condition que le gradient de densité $\partial_x \rho(x)$ soit borné (cf la figure 3.2). Pour un

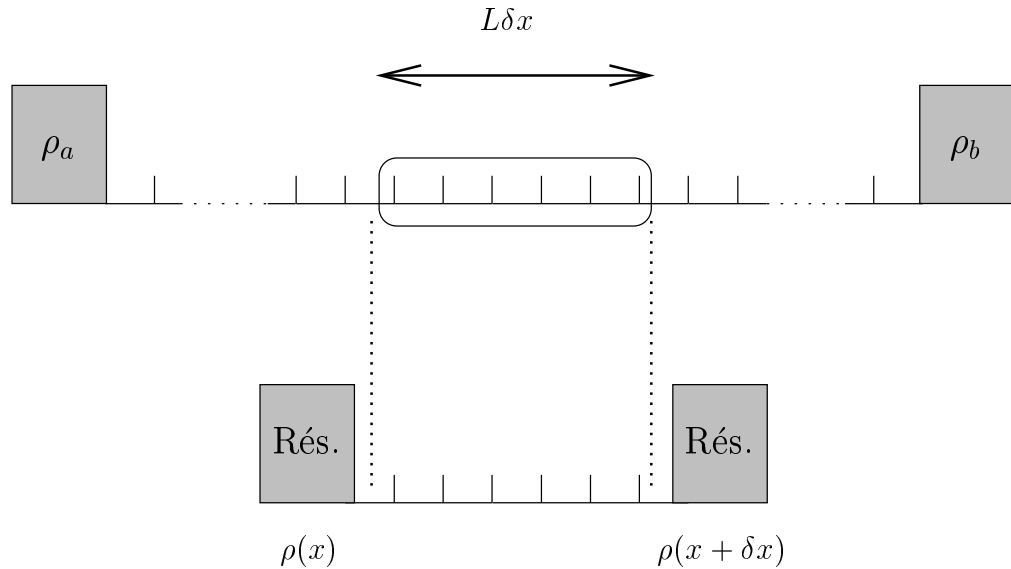


Fig. 3.2: Un sous-ensemble mésoscopique de taille $L\delta x$ d'un système dont le profil macroscopique est donné par $\{\rho\}$ se comporte comme un système proche de l'équilibre en contact avec deux réservoirs de densité $\rho(x)$ et $\rho(x + \delta x)$

tel système à l'équilibre, nous avons vu que le courant microscopique moyen $\bar{J}_{\text{micro}}(Lx)$ de particules traversant ce sous-ensemble est donné par la loi de

Fick (2.24)

$$\bar{J}_{\text{micro}}(Lx) \simeq -\frac{D(\rho(x))}{l}\delta\rho - \sigma(\rho(x))\frac{\delta V}{l} \quad (3.7)$$

$$\simeq -\frac{D(\rho(x))}{L}\partial_x\rho(x) - \sigma(\rho(x))\frac{\partial_x V(x)}{L} \quad (3.8)$$

En tenant compte de la renormalisation due au changement d'échelle micro/macro, le courant macroscopique de densité de particules $j(x)$ au point x est relié au courant microscopique de particules $J_{\text{micro}}(Lx)$ par $j(x) = LJ_{\text{micro}}(Lx)$. On déduit donc de (3.7) l'expression du courant $\hat{j}(x, t)$

$$\hat{j}(x, t) = J^{\text{hydro}}(\hat{\rho}(x, t), \partial_x\hat{\rho}(x, t), \partial_x V(x)) , \quad (3.9)$$

avec $J^{\text{hydro}}(\rho, \delta\rho, \delta V)$ le courant hydrodynamique, créé localement par un gradient de densité $\delta\rho$ et un gradient de potentiel δV dans un zone de densité ρ :

$$J^{\text{hydro}}(\rho, \delta\rho, \delta V) = -D(\rho)\delta\rho - \sigma(\rho)\delta V(x) . \quad (3.10)$$

Les réservoirs de densités respectives ρ_a et ρ_b imposent les conditions aux bords suivantes

$$\hat{\rho}(0, t) = \rho_a \quad (3.11)$$

$$\hat{\rho}(1, t) = \rho_b . \quad (3.12)$$

Si on laisse le système évoluer suffisamment longtemps, il atteint l'état stationnaire dans lequel les propriétés statistiques, notamment le profil macroscopique, sont indépendantes du temps. Nous noterons $\bar{\rho}(x)$ le profil de densité stationnaire. En remplaçant la dérivée temporelle par 0 dans (3.6), on déduit l'équation que doit respecter le profil de densité stationnaire $\bar{\rho}(x)$:

$$\partial_x J^{\text{hydro}}(\bar{\rho}(x), \partial_x\bar{\rho}(x), \partial_x V(x)) = 0 \quad (3.13)$$

avec les conditions aux bords

$$\bar{\rho}(0) = \rho_a \quad (3.14)$$

$$\bar{\rho}(1) = \rho_b . \quad (3.15)$$

3.4 Grandes déviations

Comme nous l'avons indiqué dans la partie précédente, dans la limite thermodynamique le système suit des équations déterministes, et la probabilité d'observer une déviation de l'état le plus probable décroît vers 0 quand la taille du système devient grande. Pour aller plus loin dans la description du système, on s'intéresse à la manière dont la probabilité d'une telle déviation macroscopique décroît avec la taille du système. Sous des hypothèses assez générales, on peut montrer que cette décroissance est exponentielle, dans le sens où, pour une observable A , il existe une fonction \mathcal{F} tel que la probabilité $P_L(\Delta A)$ d'observer une déviation ΔA dans un système de taille L vérifie dans la limite L grand,

$$-\frac{\log(P(\Delta A))}{L} \rightarrow \mathcal{F}(\Delta A) \quad (3.16)$$

On appelle \mathcal{F} la *fonctionnelle de grandes déviations* de A . Puisqu'une probabilité est toujours inférieure à 1, cette fonctionnelle est positive ou nulle. La valeur la plus probable \bar{A} minimise \mathcal{F} , de plus, puisque la valeur la plus probable est observée avec une probabilité 1 dans la limite L grand, elle vérifie $\mathcal{F}(\bar{A}) = 0$.

Dans le cadre des gaz sur réseau, nous allons introduire plusieurs types de fonctionnelles de grandes déviations :

- la fonction de grandes déviations de courant
- la fonctionnelle de grandes déviations dynamiques, relative à la trajectoire suivie par le système au cours du temps
- la fonctionnelle de grandes déviations statiques, relative au profil de densité dans l'état stationnaire.

En partie III, nous allons étudier plus spécifiquement cette dernière dans le cadre du processus d'exclusion simple.

Nous allons employer ici encore une approche pragmatique, sans chercher la rigueur mathématique, et en nous concentrant sur les relations entre ces différentes fonctionnelles. La fonctionnelle de grandes déviations de courant a été étudiée récemment par Bodineau et Derrida [11], ainsi que par Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim [9] en relation avec la fonctionnelle de grandes déviations dynamiques. La fonctionnelle de grandes déviations

dynamiques pour des gaz sur réseau est étudiée de façon rigoureuse chez Kipnis et Landim [52], Spohn [80] avec des méthodes développées initialement par Donsker et Varadhan [28] et Kipnis, Olla et Varadhan [53]. Pour l'étude de la fonctionnelle de grandes déviations statiques, nous suivons de manière libre la méthode de Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim [8]. Il est également possible de l'étudier en utilisant les outils de la théorie des champs [86].

3.4.1 La fonction de grandes déviations de courant

Soit $X_0(t)$ le nombre total de particules échangées entre un des réservoirs et le système entre 0 et t (temps microscopique) et $J = \frac{X_0(t)}{t}$ le courant de particules moyenné sur le temps entre 0 et t . Pour t grand, les fluctuations du courant J peuvent s'exprimer à l'aide d'une fonction de grandes déviations $F_L(J)$ telle que

$$P_{L,t} \left(\frac{X_0(t)}{t} = J \right) \propto \exp\{-tF_L(J)\} . \quad (3.17)$$

Cette fonction $F_L(J)$ dépend implicitement du gradient de potentiel extérieur $V_{L+1} - V_0$ auquel le système est soumis.

La fonction $F_L(J)$ possède une symétrie remarquable, la propriété de Gallavotti-Cohen, reliant la probabilité d'observer le courant J à celle d'observer le courant opposé $-J$:

$$F_L(J) = F_L(-J) + J(V_{L+1} - V_0) . \quad (3.18)$$

Cette propriété se montre aisément à partir de la relation du bilan détaillé modifié (2.16), qui relie le taux de transition $c(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')$ d'une configuration \mathcal{C} à \mathcal{C}' à celui de la transition inverse (de \mathcal{C}' vers \mathcal{C})

$$\frac{c(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')}{c(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C})} = \frac{P_{\text{eq}}(\mathcal{C}')}{P_{\text{eq}}(\mathcal{C})} \exp \left(\sum_{i=0}^L x_i E_i \right) . \quad (3.19)$$

où x_i est le nombre de particules échangées au site i lors de la transition, et E_i le champs externe entre le site i et $i + 1$. En effet, la relation de bilan détaillé modifié permet de relier la probabilité d'observer une trajectoire $\{\mathcal{C}(s)\}_{s \in [0,t]}$

(constituée d'une suite de transitions vérifiant (3.19)) à celle de la trajectoire inversée $\{\theta\mathcal{C}(s) = \mathcal{C}(t-s)\}_{s \in [0,t]}$

$$P(\{\mathcal{C}(s)\}) = P(\{\theta\mathcal{C}(s)\}) \frac{P_{\text{eq}}(\mathcal{C}(t))}{P_{\text{eq}}(\mathcal{C}(0))} \exp\left(\sum_{i=0}^L X_i E_i\right) \quad (3.20)$$

où X_i est le nombre de particules échangées entre les sites i et $i+1$ le long de la trajectoire directe. Aux temps longs, par conservation du nombre de particules, on a $X_i \simeq X_0 = Jt$ et ainsi $\sum_{i=0}^L X_i E_i \simeq Jt \sum_{i=0}^L E_i = Jt(V_0 - V_{L+1})$. En sommant la relation (3.20) sur l'ensemble des trajectoires ayant un courant moyen J , on obtient alors pour t grand la relation de Gallavotti-Cohen (3.18) pour les fonctions de grandes déviations.

Lorsque le gradient de potentiel $V_{L+1} - V_0$ est faible, le système se trouve dans un état proche de l'équilibre à une certaine densité ρ et la moyenne \bar{J} de J s'écrit à l'aide de la conductivité $\sigma(\rho)$, comme dans (2.22)

$$\bar{J} \simeq -\sigma(\rho) \frac{V_{L+1} - V_0}{L} . \quad (3.21)$$

Pour de faibles fluctuations de courant, on peut approcher la distribution du courant J par une gaussienne, centrée autour du courant moyen \bar{J} . La propriété de Gallavotti-Cohen, couplée avec le fait que le courant moyen est donné par (3.21), détermine alors entièrement les paramètres de cette gaussienne. La distribution de probabilité a la forme suivante

$$P_{L,t} \left(\frac{X(t)}{t} = J \right) \propto \exp \left\{ -Lt \frac{(J - \bar{J})^2}{4\sigma(\rho)} \right\} . \quad (3.22)$$

3.4.2 La fonctionnelle de grandes déviations dynamiques

La fonctionnelle de grandes déviations dynamiques donne la probabilité que le système suive entre t_0 et t_1 (temps macroscopiques) une trajectoire qui diffère macroscopiquement de la trajectoire solution des équations hydrodynamiques (3.6), sachant que le système était en t_0 dans un état $\rho_0(x)$ donné. Nous noterons $\{\hat{\rho}(x, t)\}$ et $\{\hat{j}(x, t)\}$ les profils respectivement de densité et de courant observés au cours du temps. Du fait de la conservation locale du nombre de particules, densité et courant sont reliés par l'équation de continuité

$$\partial_t \hat{\rho}(x, t) = -\partial_x \hat{j}(x, t) , \quad (3.23)$$

de sorte que la connaissance du profil de densité initial $\hat{\rho}(x, t_0) = \rho_0(x)$ et de la trajectoire du profil de courant $\hat{j}(x, t)$ entre t_0 et t_1 suffisent à déterminer entièrement la trajectoire du système entre t_0 et t_1 . Les réservoirs de densité ρ_a et ρ_b situés aux extrémités du système imposent

$$\hat{\rho}(0, t) = \rho_a \quad (3.24)$$

$$\hat{\rho}(1, t) = \rho_b. \quad (3.25)$$

Appelons $P_{t_1-t_0;[x_0,x_1]}(\{\hat{j}\}|\{\rho_0\})$ la probabilité d'observer la trajectoire de courant $\{\hat{j}\}$ sur l'intervalle $[x_0, x_1]$ entre les temps t_0 et t_1 connaissant le profil de densité $\rho_0(x)$ en t_0 . Nous ferons l'hypothèse que le système évolue lentement à l'échelle macroscopique de sorte que, à chaque instant, il soit localement à l'équilibre. Ainsi, l'état du système à l'instant t est entièrement déterminé par le profil de densité $\hat{\rho}(\cdot, t)$, indépendamment de la trajectoire qui a mené à ce profil. La probabilité d'observer entre t et $t + \delta t$ un courant moyen $\hat{j}(\cdot, t)$ dépend donc seulement de la densité $\hat{\rho}(\cdot, t)$ à l'instant t , et pas de la trajectoire menant à $\hat{\rho}(\cdot, t)$ effectivement suivie entre t_0 et t . En coupant l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ en k intervalles de taille $\delta t = \frac{t_1-t_0}{k}$ on obtient donc

$$P_{t_1-t_0;[0,1]}(\hat{j}|\{\rho_0\}) = \prod_{i=0}^{k-1} P_{\delta t;[0,1]}(\hat{j}|\{\hat{\rho}(\cdot, t_0 + i\delta t)\}) \quad (3.26)$$

On peut donc se ramener à l'étude de la probabilité $P_{\delta t;[0,1]}(\hat{j}|\{\rho\})$ de suivre la trajectoire \hat{j} sur un intervalle de temps δt petit. Découpons le réseau en boîtes de taille mésoscopique, δx telle que $L^{-1} \ll \delta x \ll 1$, contenant donc $L\delta x \gg 1$ sites. Sur un intervalle de temps court δt , il est raisonnable de supposer que les fluctuations de courant dans chacun de ces sous-systèmes sont indépendantes, car les corrélations n'ont alors pas le temps de se propager entre deux points spatialement séparés par une distance macroscopique. D'autre part, si l'on suppose que le système est localement proche de l'équilibre, la boîte de taille macroscopique δx située à la position x se comporte comme un système de $l = L\delta x$ sites soumis à une différence de densité $\delta\rho = \delta x \partial\rho$, et traversé par un courant microscopique de particules $J = \frac{\hat{j}(t,x)}{L}$ durant un temps microscopique $L^2\delta t$. Nous avons calculé la fonction de grandes déviations de courant autour du courant moyen $\bar{J} = \frac{D(\rho)}{l} \delta\rho - \sigma(\rho) \frac{\partial_x V(x)}{l}$ pour de tels systèmes, elle est

donnée par (3.22). On obtient donc

$$P_{\delta t; [x, x+\delta x]} \left(J = \frac{\hat{j}(t, x)}{L} \mid \{\rho\} \right) \propto \exp \left\{ -L\delta x \delta t \frac{[\hat{j}(t, x) - J^{\text{hydro}}(x, \rho(x), \partial_x \rho(x))]^2}{4\sigma(\rho(x))} \right\}. \quad (3.27)$$

Pour un profil de densité $\{\rho(x)\}$ et de courant $\{j(x)\}$, définissons $\mathcal{L}(\{\rho\}, \{j\})$ par

$$\mathcal{L}(\{\rho\}, \{j\}) = \int_0^1 dx \frac{(j(x) - J^{\text{hydro}}(x, \rho(x), \partial_x \rho))^2}{4\sigma(\rho(x))} \quad (3.28)$$

avec $J^{\text{hydro}}(x, \rho, \delta\rho)$ le courant hydrodynamique donné par (cf (3.10))

$$J^{\text{hydro}}(x, \rho, \delta\rho) = -D(\rho)\delta\rho - \sigma(\rho)\partial_x V(x). \quad (3.29)$$

En utilisant l'indépendance des fluctuations de courant en chaque point, on obtient

$$P_{\delta t; [0,1]}(\hat{j} \mid \{\rho\}) \sim \prod_i P_{\delta t; [x_i, x_i+\delta x]}(J = \frac{\hat{j}(t, x)}{L} \mid \{\rho\}) \quad (3.30)$$

$$\propto \exp\{-\delta t \mathcal{L}(\{\rho\}, \hat{j}(\cdot, t))\} \quad (3.31)$$

D'après (3.26), la probabilité de suivre la trajectoire s'obtient en multipliant la probabilité $P_{[t, t+\delta t]}(\hat{j} \mid \{\rho\})$ obtenue sur chaque intervalle temporel. On a donc

$$P_{[t_0, t_1]}(\hat{j} \mid \{\rho_0\}) \propto \exp(-LK_{[t_0, t_1]}(\{\hat{\rho}\}, \{\hat{j}\})) \quad (3.32)$$

avec $K_{[t_0, t_1]}(\{\hat{\rho}\}, \{\hat{j}\})$ la fonctionnelle de grandes déviations dynamiques définie par

$$K_{[t_0, t_1]}(\{\hat{\rho}\}, \{\hat{j}\}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\hat{\rho}(\cdot, t), \hat{j}(\cdot, t)) \quad (3.33)$$

K est minimum (et vaut 0) le long de la trajectoire la plus probable, c'est à dire le long de la trajectoire solution des équations hydrodynamiques (3.6).

Remarque : lors de la dérivation de la fonctionnelle de grandes déviations dynamiques, nous avons supposé que les fluctuations de courant $\hat{j}(x, t) -$

$J^{\text{hydro}}(\rho(x), \partial_x \rho(x))$ en chaque point du système sont des gaussiennes non-corrélées entre elles, i.e. un bruit blanc de covariance $\delta(x-y)\delta(t-s)\frac{2\sigma(\rho(x))}{L}$. Une autre approche consiste à introduire directement ce courant stochastique dans l'équation hydrodynamique (3.6); cela mène à une méthode appelée «fluctuating hydrodynamics» [52].

3.4.3 La fonctionnelle de grandes déviations statiques de la densité dans l'état stationnaire

La fonctionnelle de grandes déviations dynamiques étudiée dans la partie précédente donne la probabilité d'observer une certaine trajectoire sur un intervalle de temps donné. Dans cette partie, nous nous intéresserons à la fonctionnelle de grandes déviations statiques \mathcal{F} , qui donne la probabilité $P_{\text{st.}}(\{\rho(x)\})$ d'observer à *un instant donné* un certain profil de densité $\rho(x)$ dans l'état stationnaire et dans la limite des grands L

$$P_{\text{st.}}(\{\rho(x)\}) \propto \exp\{-L\mathcal{F}(\{\rho\})\}; \quad (3.34)$$

\mathcal{F} est minimum pour le profil le plus probable $\bar{\rho}$. Dans la suite, nous présentons une approche macroscopique développée par Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim pour l'étude de la fonctionnelle de grandes déviations statiques.

Puisque le système est markovien, il vérifie la propriété suivante entre t_0 et t_1

$$P_{\text{st.}}(\{\rho_1\}) = \sum_{\hat{j}, \rho_0} P_{\text{st.}}(\{\rho_0\}) P_{[t_0, t_1]}(\hat{j} | \rho_0) \quad (3.35)$$

où la somme se fait sur tous les profils initiaux $\{\rho_0\}$ et sur toutes les trajectoires de courant reliant $\{\rho_0\}$ à $\{\rho_1\}$ entre t_0 et t_1 . En prenant la limite L grand, (3.35) entraîne la relation suivante entre grandes déviations statiques \mathcal{F} (3.34) et grandes déviations dynamiques K (3.32,3.33)

$$\mathcal{F}(\rho_1) = \inf \{ \mathcal{F}(\rho_0) + K_{[t_0, t_1]}(\hat{\rho}, \hat{j}) \}, \quad (3.36)$$

où le inf est pris sur l'ensemble des profils initiaux ρ_0 possibles et sur l'ensemble des trajectoires $(\hat{\rho}, \hat{j})$ reliant ρ_0 à ρ_1 entre t_0 et t_1 . Si l'on fait tendre

t_0 vers $-\infty$, la trajectoire $\hat{\rho}$ doit être la plupart du temps proche du profil stationnaire $\bar{\rho}$, sous peine de voir $K_{[t_0, t_1]}(\hat{\rho}, \hat{j})$ diverger, de sorte que le profil initial réalisant le inf est $\rho_0 = \bar{\rho}$. On obtient donc l'expression suivante pour la fonctionnelle de grandes déviations statiques

$$\mathcal{F}(\{\rho\}) = \inf K_{[-\infty, 0]}(\hat{\rho}, \hat{j}) \quad (3.37)$$

où le inf est pris sur l'ensemble des trajectoires vérifiant

$$\hat{\rho}(x, -\infty) = \bar{\rho}(x) \quad (3.38)$$

$$\hat{\rho}(x, 0) = \rho(x) \quad (3.39)$$

ainsi que naturellement les conditions aux bords imposées par les réservoirs

$$\hat{\rho}(0, t) = \rho_a \quad (3.40)$$

$$\hat{\rho}(1, t) = \rho_b . \quad (3.41)$$

L'expression (3.37) signifie que la probabilité d'une fluctuation ρ est le coût minimum qu'il faut payer pour former cette fluctuation à partir du profil le plus probable.

Puisque K s'écrit $K_{[t_0, t_1]}(\{\hat{\rho}\}, \{\hat{j}\}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(\hat{\rho}(\cdot, t), \hat{j}(\cdot, t))$, l'équation (3.37) est similaire au principe de moindre action en mécanique analytique, avec pour lagrangien \mathcal{L} . On peut donc utiliser les résultats et techniques de mécanique analytique pour l'exploiter.

Pour $t_0 = t_1 - dt$, $\hat{\rho}(x, t_0) = \rho(x) + dt \partial_x j(x)$ on obtient à partir de (3.36)

$$\inf_{j(x)} \left(\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} \partial_x j(x) dx + \mathcal{L}(\rho, j) \right) = 0 \quad , \quad (3.42)$$

ce qui entraîne , en utilisant l'expression (3.28) de $\mathcal{L}(\rho, j)$,

$$\int_0^1 dx \left\{ J^{\text{hydro}}(\rho(x), \partial_x \rho(x)) \partial_x \frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} + \frac{\sigma(\rho(x))}{2} \left(\partial_x \frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} \right)^2 \right\} = 0 \quad (3.43)$$

C'est l'équation de Hamilton-Jacobi associée à (3.37) ; elle permet de relier directement \mathcal{F} au lagrangien \mathcal{L} . Cependant, cette équation admet de nombreuses solutions ; dans [8], Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Lan-dim montrent que \mathcal{F} est la borne supérieure de ces solutions $V(\{\rho\})$ vérifiant

$V(\{\bar{\rho}\}) = 0$ (avec $\{\bar{\rho}\}$ le profil le plus probable) et $\frac{\partial V(\{\rho\})}{\partial \rho(x)} = 0$ aux bords $x = 0$ et $x = 1$.

La trajectoire qui réalise le minimum dans (3.37) est la trajectoire la plus probable menant à la formation spontanée du profil $\rho(x)$. Nous la noterons $(\{\hat{\rho}^*\}, \{\hat{j}^*\})$. Dans la limite des grands L , cette trajectoire est observée presque sûrement (c'est à dire avec une probabilité 1) lors de la formation du profil $\rho(x)$. À la manière de la mécanique analytique, définissons $H(x, t)$ comme le moment conjugué à $\partial_t \hat{\rho}$:

$$H(0) = 0 \quad (3.44)$$

$$\partial_x H(x, t) = \left. \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, j)}{\partial j(x)} \right|_{\{\hat{\rho}^*(\cdot, t), \hat{j}^*(\cdot, t)\}} \quad (3.45)$$

$$= \frac{\hat{j}^*(x, t) - J^{\text{hydro}}(\hat{\rho}^*(x, t), \partial_x \hat{\rho}^*(x, t))}{2\sigma(\hat{\rho}^*(x, t))} \quad (3.46)$$

Pour un système de constante de diffusion $D(\rho)$ et de conductivité $\sigma(\rho)$, soumis à potentiel $V(x)$, le courant hydrodynamique $J^{\text{hydro}}(\rho, \nabla \rho)$ est donné par (3.10). La condition que $\hat{\rho}^*$, \hat{j}^* soit un extremum de $K_{[-\infty, 0]}$ mène aux équations suivantes

$$\hat{j}^*(x, t) = J^{\text{hydro}}(\hat{\rho}^*(x, t), \partial_x \hat{\rho}^*(x, t)) + 2\sigma(\hat{\rho}^*(x, t))\partial_x H(x, t) \quad (3.47)$$

$$\partial_t \hat{\rho}^*(x, t) = -\partial_x \hat{j}^*(x, t) \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \partial_t H(x, t) = & -D(\hat{\rho}^*(x, t))\Delta H(x, t) + \partial_x V(x)\sigma'(\hat{\rho}^*(x, t))\partial_x H(x, t) \\ & - \sigma'(\hat{\rho}^*(x, t))(\partial_x H(x, t))^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

avec les conditions aux bords

$$H(0) = H(1) = 0 \quad (3.50)$$

$$\hat{\rho}^*(x, 0) = \rho(x) \quad (3.51)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\rho}^*(x, t) = \bar{\rho}(x) \quad (3.52)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{j}^*(x, t) = J^{\text{hydro}}(\bar{\rho}(x), \partial_x \bar{\rho}(x)) . \quad (3.53)$$

Ces équations sont les équations de Hamilton associées au Lagrangien \mathcal{L} ; elles correspondent à la condition formelle $\left. \frac{\partial K}{\partial \hat{\rho}(x, t)} \right|_{\hat{\rho}^*(x, t)} = 0$. On voit que le H joue dans l'équation du courant \hat{j}^* (3.47) le rôle d'un champ supplémentaire qui fait de $(\{\hat{\rho}^*\}, \{\hat{j}^*\})$ la trajectoire hydrodynamique. De

plus, puisque le profil $\hat{j}^*(., 0)$ réalise le minimum dans (3.42), il vérifie la condition $\frac{\partial \mathcal{L}(\rho, j)}{\partial j(x)} = \partial_x \frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)}$. Comme d'autre part, $\frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} \Big|_{\rho_a} = 0$, en utilisant la définition (3.45) de H on voit que

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} = H(x, 0) \quad (3.54)$$

Si l'on inverse le sens du temps, l'évolution du système est décrite par la dynamique adjointe, en général distincte de la dynamique directe pour des systèmes hors d'équilibre. La trajectoire $(\hat{\rho}^*(., -t), \hat{j}^*(., -t))$ devient alors la trajectoire de relaxation la plus probable à partir de la déviation $\{\rho\}$, et donc $(\hat{\rho}^*(., -t), \hat{j}^*(., -t))$ est solution des équations hydrodynamiques de la dynamique adjointe.

4. PROCESSUS D'EXCLUSION

Ce chapitre introduit plusieurs variantes du processus d'exclusion simple, et résume quelques uns des résultats connus. Les notations et méthodes (notamment l'ansatz matriciel) qui seront nécessaires pour aborder les prochaines parties y sont exposées.

4.1 Définitions et propriétés

Le processus d'exclusion simple [46, 60, 74, 80] est un cas particulier de gaz sur réseau, où les particules font des sauts de pas 1 et n'ont pas d'autres interactions que la règle d'exclusion qui interdit que deux particules se trouvent au même instant sur le même site. Il est devenu un modèle central de la physique statistique hors d'équilibre, car il combine simplicité du modèle permettant l'obtention de résultats exacts, et complexité des propriétés observées : le processus d'exclusion simple présente en effet un comportement macroscopique non trivial que l'on retrouve de manière générique dans les systèmes hors d'équilibre plus réalistes, avec transitions de phase [18, 55, 72], chocs [2, 23], corrélations à longue distance [22, 24, 25, 27, 79], et ce, même en une dimension.

Le processus d'exclusion est réputé avoir été introduit dans l'étude de la cinétique de biopolymérisation [61]. Il a trouvé depuis des applications nombreuses et variées. Sans chercher à être exhaustif, on peut citer la diffusion de particules à travers un milieu poreux ou des canaux microscopiques [83], la dynamique d'un polymère en milieu dense [73] ou l'étude du trafic routier [66, 74]. Dans le domaine de la physique statistique, il est notamment relié aux problèmes de polymères dirigés en milieu aléatoire et de croissance de surfaces [42, 56].

Nous nous restreindrons aux systèmes à une dimension. Le processus d'exclusion simple consiste alors en un ensemble de particules sur un réseau uni-

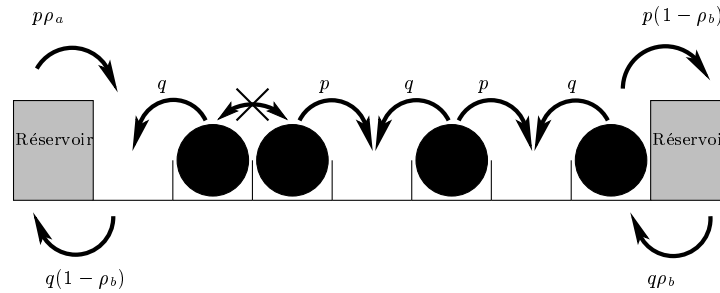


Fig. 4.1: Processus d'exclusion simple en contact avec deux réservoirs de densité ρ_a et ρ_b

dimensionnel, comme sur la figure 4.1. Une particule présente au site i tente de sauter sur le site $i + 1$ avec le taux p , et sur le site $i - 1$ avec le taux q ; le saut ne se réalise que si le site cible est libre, de manière à respecter la règle d'exclusion. Les taux p et q sont indépendants de la configuration du système et du site considéré. Suivant leur valeur, on peut définir plusieurs variantes du processus d'exclusion :

- le processus d'exclusion simple symétrique (SSEP) : les taux de saut sont symétriques $p = q = 1$
- le processus d'exclusion asymétrique (ASEP) : les taux de saut présentent un biais qui favorise les sauts dans une certaine direction, par exemple $p > q$ pour un biais vers la droite. Si les sauts ne sont possibles que dans une seule direction (par exemple $q = 0$), on parle de processus totalement asymétrique (TASEP) ; sinon, on parle de processus partiellement asymétrique (PASEP)
- le processus faiblement asymétrique (WASEP) : il correspond à un processus d'exclusion partiellement asymétrique, mais pour lequel le biais décroît avec la taille L du système. Par exemple $p = 1$, $q = 1 - \frac{\lambda}{L}$ où λ mesure l'intensité du champ faible.

Dans la partie II, nous étudierons également une variante du processus d'exclusion obtenue en ajoutant un désordre gelé sur le processus d'exclusion totalement asymétrique.

Plusieurs géométries de réseaux peuvent être considérées ; les plus étudiées sont les systèmes infinis, pour lesquels le réseau est \mathbb{Z} , parfois \mathbb{Z}^+ (système semi-infini), les systèmes périodiques pour lesquels le réseau est un anneau de

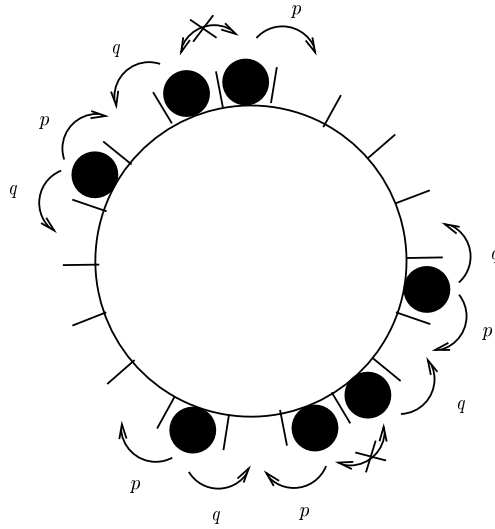


Fig. 4.2: Processus d'exclusion simple sur un anneau

taille L (cf figure 4.2), et les systèmes ouverts en contact avec des réservoirs sur lesquels porte ce travail de thèse. Dans les systèmes ouverts, comme celui présenté sur la figure 4.1, le réseau est de taille L finie et le système peut échanger des particules avec des réservoirs situés à chaque extrémité du système. Nous indiquons les sites du réseau de 1 à L , de sorte que le site numéroté 1 corresponde à l'extrémité gauche, et le site numéroté L à l'extrémité droite. Le réservoir de gauche correspond à un site supplémentaire 0 à gauche du site 1, où la probabilité de trouver une particule est ρ_a à chaque instant, indépendamment de la configuration du reste du système. De même, le réservoir de droite consiste en un site supplémentaire $L + 1$ à droite du site L , où la probabilité de trouver une particule est ρ_b , indépendamment de la configuration du reste du système. Une définition plus classique et plus générale de ces réservoirs consistent à introduire des taux de création et de destruction de particules sur le premier et le dernier site : si le premier site est vide, une particule y est créée avec le taux α ; s'il est occupé, la particule est détruite avec un taux γ ; de même, si le dernier site est occupé, la particule est détruite avec le taux β , tandis que si le dernier site est vide, une particule y est créée avec le taux δ . La première définition correspond alors au cas $\alpha = p\rho_a$, $\beta = p(1 - \rho_b)$, $\gamma = q(1 - \rho_a)$ et $\delta = q\rho_b$.

L'état du système est entièrement défini par la donnée, pour chaque site

i , de son nombre d'occupation η_i , où η_i vaut 1 si le site i est occupé par une particule, 0 s'il est vide.

4.2 le processus d'exclusion symétrique (SSEP)

4.2.1 équation hydrodynamique

Le processus d'exclusion symétrique correspond au cas où le taux de saut vers la droite p est égal au taux de saut vers la gauche q . Nous prendrons dans cette partie la normalisation $p = q = 1$. Si l'on note par $\langle \cdot \rangle_t$ la moyenne au temps t sur l'ensemble des trajectoires possibles, on obtient l'équation suivante pour la variation de la densité moyenne $\langle \eta_i \rangle_t$ au site i , pour un processus d'exclusion homogène en contact avec deux réservoirs de densité ρ_a et ρ_b

$$\frac{d\langle \eta_i \rangle_t}{dt} = J_{i-1,i}(t) - J_{i,i+1}(t) \quad (4.1)$$

avec

$$J_{i,i+1}(t) = \langle \eta_i \rangle_t - \langle \eta_{i+1} \rangle_t \quad (4.2)$$

On voit que le courant ne dépend que des densités locales $\langle \eta_i \rangle_t$.

Supposons que le profil de densité est une fonction à variation spatiale lente

$$\langle \eta_i \rangle_t = \rho_t\left(\frac{i}{L}\right) \quad (4.3)$$

Le courant microscopique moyen $J_{i,i+1}(t)$ entre le site i et $i + 1$, donné par (4.2), s'écrit alors

$$J_{i,i+1} \simeq -\frac{1}{L}\rho'\left(\frac{i}{L}\right) \quad (4.4)$$

Il s'ensuit que dans (4.1), le gradient discret de courant $J_{i-1,i}(t) - J_{i,i+1}(t)$ est d'ordre L^{-2} . Cela suggère de changer d'échelle temporelle en introduisant le temps macroscopique $t_{\text{macro}} = \frac{t}{L^2}$. Ainsi, on obtient à partir de (4.1) l'équation hydrodynamique suivie par le profil de densité $\rho(x, t_{\text{macro}}) \simeq \rho_t(x)$ à l'échelle macroscopique :

$$\partial_t \rho(x, t) = -\partial_x J^{\text{hydro}}(\partial_x \rho(x, t)) \quad (4.5)$$

avec $J^{\text{hydro}}(\partial_x \rho)$ le courant hydrodynamique associé à une densité ρ

$$J^{\text{hydro}}(\partial_x \rho) = -\partial_x \rho \quad (4.6)$$

4.2.2 état stationnaire

Dans l'état stationnaire, la dérivée par rapport au temps dans (4.1) s'annule. Il s'ensuit que le courant microscopique dans l'état stationnaire $J_{i,i+1}$ est indépendant du site i considéré. À partir de l'expression (4.2) du courant, on obtient l'équation suivante pour le profil stationnaire $\langle \eta_i \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne dans l'état stationnaire :

$$\langle \eta_i \rangle - \langle \eta_{i+1} \rangle = J = \text{constante} \quad (4.7)$$

L'action des réservoirs peut être prise en compte en imposant les conditions aux bords $\langle \eta_0 \rangle = \rho_a$ et $\langle \eta_{L+1} \rangle = \rho_b$ à l'équation linéaire (4.7). La solution de celle-ci est alors donnée par

$$J = \frac{\rho_a - \rho_b}{L + 1} \quad (4.8)$$

$$\langle \eta_i \rangle = \rho_a - \frac{i}{L + 1}(\rho_a - \rho_b) \quad (4.9)$$

4.3 Le processus d'exclusion asymétrique (ASEP)

4.3.1 Équation hydrodynamique

Nous considérons maintenant le cas asymétrique, c'est à dire que le taux de saut vers la droite p est différent du taux de saut vers la gauche q . Dans ce cas, en notant encore par $\langle \cdot \rangle_t$ la moyenne au temps t sur l'ensemble des trajectoires possibles, on obtient l'équation suivante pour la variation de la densité moyenne $\langle \eta_i \rangle_t$ au site i

$$\frac{d \langle \eta_i \rangle_t}{dt} = J_{i-1,i}(t) - J_{i,i+1}(t) \quad (4.10)$$

avec $J_{i,i+1}(t)$ le courant moyen entre le site i et $i + 1$, donné par

$$J_{i,i+1}(t) = p \langle \eta_i(1 - \eta_{i+1}) \rangle_t - q \langle \eta_{i+1}(1 - \eta_i) \rangle_t \quad (4.11)$$

Cette équation reste valable aux bords $i = 1$ et $i = L$ avec la convention $\eta_0 = \rho_a$, $\eta_{L+1} = \rho_b$. On voit que l'évolution de la densité $\langle \eta_i \rangle$ dépend des fonctions de corrélation à deux points $\langle \eta_i \eta_{i+1} \rangle$. En procédant de même, on peut obtenir une équation d'évolution pour les fonctions de corrélation à deux points qui dépendent des fonctions de corrélation à trois points, et ainsi de suite. On obtient ainsi une hiérarchie d'équations couplées ; pour avoir la densité au point i , on a besoin de la connaissance des fonctions de corrélation à deux points, pour connaître les fonctions de corrélation à deux points, on a besoin de celles à trois points, et ainsi de suite, rendant la résolution de ces équations impossible.

Nous allons nous contenter dans cette partie d'une approche en champ moyen pour découpler la hiérarchie d'équations. Supposons que le profil de densité soit une fonction à variations spatiales lentes

$$\langle \eta_i \rangle_t = \rho_t\left(\frac{i}{L}\right) \quad (4.12)$$

et faisons l'approximation de champ moyen suivante

$$\langle \eta_i \eta_{i+1} \rangle_t \simeq \langle \eta_i \rangle_t \langle \eta_{i+1} \rangle_t \quad . \quad (4.13)$$

Le courant microscopique moyen $J_{i,i+1}(t)$ entre le site i et $i + 1$, donné par (4.11), s'écrit alors

$$J_{i,i+1} \simeq p \langle \eta_i \rangle_t - q \langle \eta_{i+1} \rangle_t - (p - q) \langle \eta_i \rangle_t \langle \eta_{i+1} \rangle_t \quad (4.14)$$

$$\simeq (p - q) \rho\left(\frac{i}{L}\right) \left(1 - \rho\left(\frac{i}{L}\right)\right) - \frac{1}{L} \rho'\left(\frac{i}{L}\right) \left(q + (p - q) \rho\left(\frac{i}{L}\right)\right) \quad (4.15)$$

Pour un système asymétrique, $p - q$ est d'ordre 1, et donc à l'ordre dominant le courant microscopique $J_{i,i+1}$ est donné par

$$J_{i,i+1} \simeq (p - q) \rho_t\left(\frac{i}{L}\right) \left(1 - \rho_t\left(\frac{i}{L}\right)\right) \quad (4.16)$$

Il s'ensuit que dans (4.10), le gradient discret de courant $J_{i-1,i}(t) - J_{i,i+1}(t)$ est d'ordre L^{-1} . Cela suggère de changer d'échelle temporelle dans (4.10), en introduisant le temps macroscopique $t_{\text{macro}} = \frac{t}{L}$. Ainsi, on obtient de (4.10) l'équation hydrodynamique suivie par le profil de densité $\rho(x, t_{\text{macro}}) \simeq \rho_t(x)$ à l'échelle macroscopique : c'est l'équation de Burgers

$$\partial_t \rho(x, t) = -\partial_x J^{\text{hydro}}(\rho(x, t)) \quad (4.17)$$

avec $J^{\text{hydro}}(\rho)$ le courant hydrodynamique associé à une densité ρ

$$J^{\text{hydro}}(\rho) = (p - q)\rho(1 - \rho) \quad (4.18)$$

4.3.2 Diagramme de phase de l'ASEP dans l'état stationnaire

Dans l'état stationnaire, la densité moyenne $\langle \eta_i \rangle$ est constante dans le temps, et donc, d'après (4.10), le courant $J_{i,i+1}$ est indépendant de i . Si l'on fait l'approximation de champ moyen (4.13), et en notant J la valeur du courant et $\rho_i = \langle \eta_i \rangle$ la densité au site i , on obtient partir de (4.14) la relation de récurrence suivante sur les densités moyennes ρ_i

$$\rho_{i+1} = \frac{p\rho_i - J}{q + (p - q)\rho_i} . \quad (4.19)$$

On peut estimer le comportement de cette récurrence graphiquement. Tout d'abord, les points fixes ρ de cette récurrence sont solutions de

$$J = (p - q)\rho(1 - \rho) . \quad (4.20)$$

Cette équation a, selon les valeurs de J , 0, 1, ou 2 solutions :

- $J > \frac{p-q}{4}$ (cf figure 4.3) la récurrence (4.19) n'a alors aucun point fixe ; quand L est grand, la suite diverge et l'on a soit $\rho_L < 0$, soit $\rho_1 > 1$, ce qui est impossible. Cette valeur du courant n'est donc jamais atteinte.

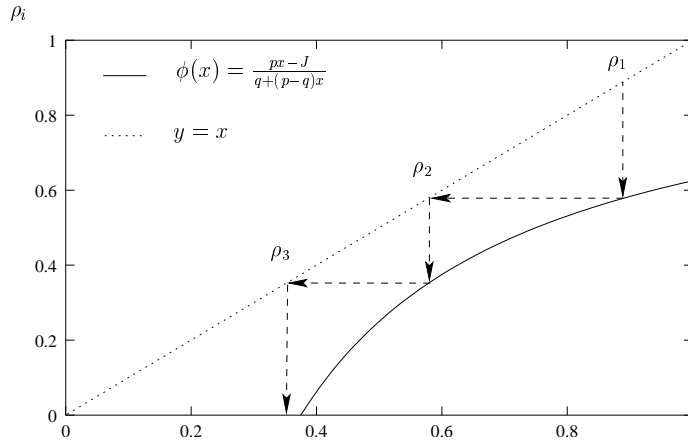


Fig. 4.3: Quand $J > \frac{p-q}{4}$, la récurrence (4.19) entraîne rapidement la densité moyenne ρ_i vers des valeurs non physique. Pour ce graphique, $p = 1$, $q = 0$ et $J = 1,5 \times \frac{p-q}{4}$

- $J = \frac{p-q}{4} + \epsilon$, (cf figure 4.4) avec ϵ petit : la récurrence (4.19) a un unique point fixe $\rho = \frac{1}{2}$ dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. Pour que la suite ρ_i ne s'aventure pas en dehors du domaine physique $0 \leq \rho_i \leq 1$, il faut qu'elle reste principalement autour de ce point fixe, c'est à dire que la densité moyenne soit $\frac{1}{2}$, sauf éventuellement près des bords $i = 1$ et $i = L$. La densité des réservoirs doit alors vérifier $\rho_a = \rho_0 \geq \frac{1}{2}$ et $\rho_b = \rho_{L+1} \leq \frac{1}{2}$. Cette phase est appelée phase de courant maximum.

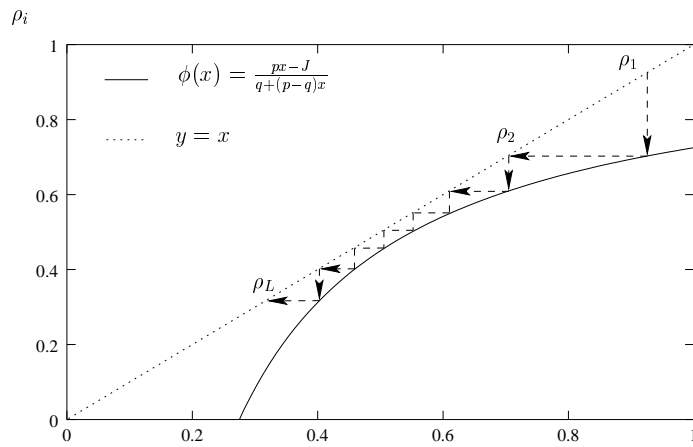


Fig. 4.4: Phase de courant maximum : quand $J \sim \frac{p-q}{4}$, la récurrence (4.19) reste longtemps proche de $\rho_i \sim 0,5$, et l'on a $\rho_1 \geq 0,5$ et $\rho_L \leq 0,5$. Pour ce graphique, $p = 1$, $q = 0$ et $J = 1, 1 \times \frac{p-q}{4}$

- $J < \frac{p-q}{4}$ (cf figures 4.5 et 4.6). La récurrence (4.19) a alors 2 points fixes, $\rho_- < \frac{1}{2} < \rho_+ = 1 - \rho_-$. Le point fixe ρ_- est instable, tandis que ρ_+ est stable. La suite des densités $\{\rho_i\}_{i=1,L}$ a alors deux comportements possibles : soit elle est initialement, et sur la majeure partie de la longueur du système, proche du point fixe instable ρ_- , soit elle converge pour i grand vers le point fixe stable ρ_+ . Dans le premier cas, représenté sur la figure 4.5, $\rho_a = \rho_- < \frac{1}{2}$, $\rho_b < \rho_+ = 1 - \rho_a$ et le profil de densité est $\rho_i = \rho_a$ sauf près du bord droit. C'est la phase de basse densité. Dans le second cas, représenté sur la figure 4.6, $\rho_b = \rho_+ > \frac{1}{2}$, $\rho_a > \rho_- = 1 - \rho_b$, et le profil de densité est $\rho_i = \rho_b$ sauf près du bord gauche. C'est la phase de haute densité.

Le diagramme de phase est résumé dans la figure 4.7. Bien qu'obtenu à l'aide d'une approximation de type champ moyen, ce diagramme de phase est cor-

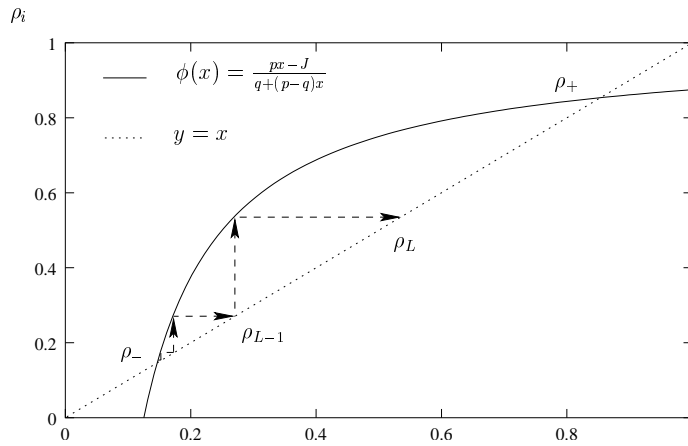


Fig. 4.5: Phase de basse densité : quand $J < \frac{p-q}{4}$, l'une des possibilités est de commencer avec une densité ρ_1 très proche du point fixe instable ρ_- . On a alors $\rho_L \leq \rho_+$. Pour ce graphique, $p = 1$, $q = 0$ et $J = 0,5 \times \frac{p-q}{4}$

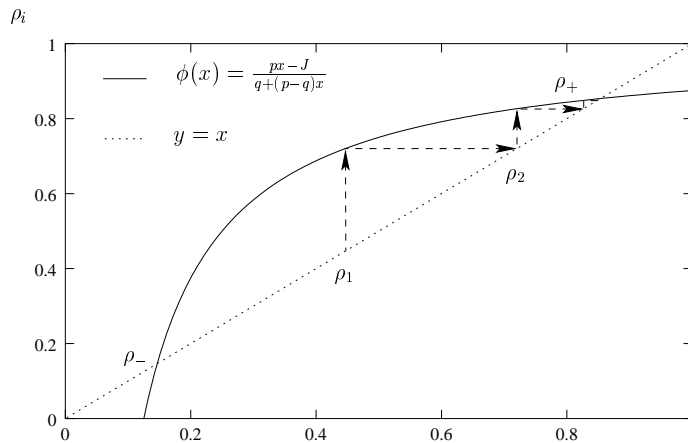


Fig. 4.6: Phase de haute densité : quand $J < \frac{p-q}{4}$, la seconde possibilité est de commencer avec une densité $\rho_1 > \rho_-$. Le profil de densité $\{\rho_i\}$ converge alors rapidement vers le point fixe stable ρ_+ . Pour ce graphique, $p = 1$, $q = 0$ et $J = 0,5 \times \frac{p-q}{4}$

rect, comme cela a été montré [10, 18, 21, 55, 67, 69, 72]. Physiquement, les trois phases peuvent se comprendre de la manière suivante : dans la phase de haute densité, le facteur limitant (et donc celui qui contrôle la densité dans le système) est le taux de sortie vers le réservoir de droite ; les particules s'accumulent au niveau de la sortie et forment un embouteillage qui se propage à l'ensemble du système. De manière similaire, dans la phase de basse densité, le paramètre limitant est le taux d'entrée de particules au niveau du réservoir.

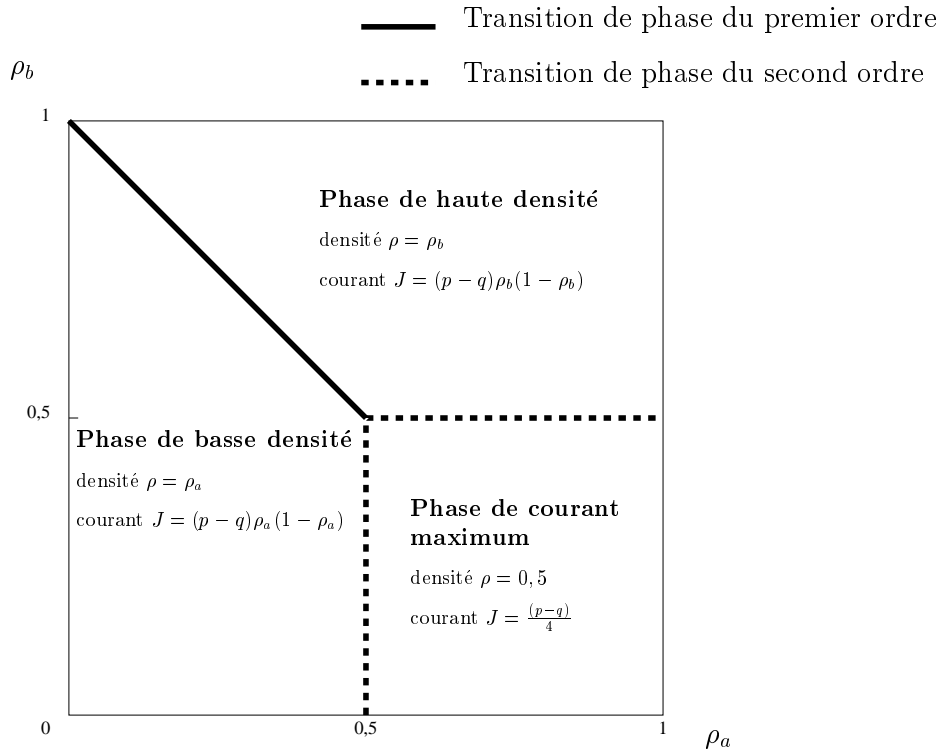


Fig. 4.7: Diagramme de phase pour l'ASEP

voir de gauche, ce qui entraîne un «embouteillage de sites libres» à partir du bord gauche. Dans la phase de courant maximum, le facteur limitant est la conductivité du centre du système ; en effet, le courant maximum que peut transporter le coeur du système est $\frac{p-q}{4}$; le transport de particules dans le centre du système ne peut plus suivre le rythme de créations et destructions de particules aux niveaux de chacun des réservoirs. Il se forme donc un embouteillage de particules à l'entrée du système et un embouteillage de trous à la sortie, tandis que le coeur du système propage les particules le plus vite qu'il peut en adoptant une densité moyenne de $\rho = \frac{1}{2}$.

La sélection de la phase peut être résumée en disant que la densité $\bar{\rho}$ dans le système est telle que le courant $J = (p - q)\bar{\rho}(1 - \bar{\rho})$ soit extremum [40, 67] : si $\rho_a > \rho_b$, la densité moyenne $\bar{\rho}$ du système est comprise entre ρ_a et ρ_b et maximise le courant J , de tel sorte que

$$J = \sup_{\rho_b \leq \rho \leq \rho_a} (p - q)\rho(1 - \rho), \quad (4.21)$$

si $\rho_a < \rho_b$, c'est au contraire la valeur qui minimise le courant qui est sélectionnée et

$$J = \inf_{\rho_a \leq \rho \leq \rho_b} (p - q)\rho(1 - \rho) . \quad (4.22)$$

Ces relations se généralisent pour des courants $J(\rho)$ quelconques [67].

Lorsque l'on fait varier les densités des réservoirs, on peut observer plusieurs types de transition de phase :

- lorsque l'on traverse la ligne

$$\rho_a = \frac{1}{2} < 1 - \rho_b , \quad (4.23)$$

on observe une transition de phase du second ordre entre la phase de basse densité et la phase de courant maximal.

- lorsque l'on traverse la ligne

$$\rho_b = \frac{1}{2} < \rho_a , \quad (4.24)$$

on observe une transition de phase du second ordre entre la phase de haute densité et la phase de courant maximal

- lorsque l'on traverse la ligne

$$\rho_a = 1 - \rho_b < \frac{1}{2} , \quad (4.25)$$

on observe une transition de phase du premier ordre entre la phase de basse densité et la phase de haute densité : la densité moyenne saute brutalement de ρ_a à ρ_b .

4.4 Le processus d'exclusion faiblement asymétrique (WASEP)

4.4.1 équation hydrodynamique

Nous considérons maintenant le processus faiblement asymétrique soumis à un faible champ constant $E = \frac{\lambda}{L}$, de sorte que $q = p \exp\left(-\frac{\lambda}{L}\right) \simeq p\left(1 - \frac{\lambda}{L}\right)$. Dans la suite, nous prendrons la convention $p = 1$ (ce qui correspond simplement à renormaliser le temps). Ainsi

$$q = 1 - \frac{\lambda}{L} \quad (4.26)$$

Comme dans le cas de l'ASEP, les équations d'évolution des fonctions de corrélation sont couplées :

$$\frac{d\langle\eta_i\rangle_t}{dt} = J_{i-1,i}(t) - J_{i,i+1}(t) \quad (4.27)$$

avec $J_{i,i+1}(t)$ le courant moyen entre le site i et $i + 1$, donné par

$$J_{i,i+1}(t) = \langle\eta_i\rangle_t - \left(1 - \frac{\lambda}{L}\right) \langle\eta_{i+1}\rangle_t + \frac{\lambda}{L} \langle\eta_{i+1}\eta_i\rangle_t \quad (4.28)$$

L'approximation de type champ moyen

$$\langle\eta_i\rangle_t = \rho_t\left(\frac{i}{L}\right) \quad (4.29)$$

et

$$\langle\eta_i\eta_{i+1}\rangle_t \simeq \langle\eta_i\rangle_t \langle\eta_{i+1}\rangle_t \quad (4.30)$$

entraîne au premier ordre non nul en L :

$$J_{i,i+1} = -\frac{1}{L}\rho'_t\left(\frac{i}{L}\right) + \frac{\lambda}{L}\rho_t\left(\frac{i}{L}\right)\left(1 - \rho_t\left(\frac{i}{L}\right)\right) \quad (4.31)$$

Comme le courant est en L^{-1} , nous changeons d'échelle temporelle en définissant le temps macroscopique par $t_{\text{macro}} = \frac{t}{L^2}$. On obtient alors de (4.27) l'équation hydrodynamique suivie par le profil de densité $\rho(x, t_{\text{macro}}) \simeq \rho_t(x)$ du WASEP à l'échelle macroscopique :

$$\partial_t \rho(x, t) = -\partial_x J^{\text{hydro}}(\rho(x, t), \partial_x \rho(x, t)) \quad (4.32)$$

avec $J^{\text{hydro}}(\rho, \delta\rho)$ le courant hydrodynamique associé à un gradient de densité $\delta\rho$

$$J^{\text{hydro}}(\rho, \delta\rho) = -\delta\rho + \lambda\rho(1 - \rho) \quad (4.33)$$

Il est de la forme canonique (3.10)

$$J^{\text{hydro}}(\rho, \delta\rho) = -D(\rho)\delta\rho + \lambda\sigma(\rho) \quad (4.34)$$

avec

$$D(\rho) = 1 \quad (4.35)$$

$$\sigma(\rho) = \rho(1 - \rho) \quad (4.36)$$

4.4.2 état stationnaire du WASEP

À l'échelle macroscopique, le profil stationnaire $\bar{\rho}$ du WASEP est solution de $\partial_x J^{\text{hydro}}(\bar{\rho}(x), \bar{\rho}'(x)) = 0$, c'est à dire

$$-\bar{\rho}'(x) + \lambda\bar{\rho}(x)(1 - \bar{\rho}(x)) = J \quad (4.37)$$

avec les conditions aux bords imposées par les réservoirs

$$\bar{\rho}(0) = \rho_a \quad (4.38)$$

$$\bar{\rho}(1) = \rho_b \quad (4.39)$$

J est le courant hydrodynamique, indépendant de la position x , traversant le système. Du fait du changement d'échelle micro/macro, il est relié au courant microscopique de particules j par

$$J = \lim_{L \rightarrow \infty} Lj \quad (4.40)$$

À partir de (4.37), on peut déduire une équation intégrale pour le courant hydrodynamique J

$$\int_{\rho_b}^{\rho_a} \frac{d\rho}{J - \lambda\rho(1 - \rho)} = 1 \quad (4.41)$$

Le profil le plus probable s'écrit de même formellement

$$\int_{\bar{\rho}(x)}^{\rho_a} \frac{d\rho}{J - \lambda\rho(1 - \rho)} = x \quad (4.42)$$

On peut également résoudre directement (4.37) :

– quand $\rho_a - \rho_b > \max(0, \lambda(\rho_a - \frac{1}{2})(\rho_b - \frac{1}{2}))$ on a $J > \frac{\lambda}{4}$ et

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{J - \lambda/4}{\lambda}} \tan \left[\sqrt{\lambda(J - \lambda/4)}(x - x_0) \right] \quad (4.43)$$

– quand $0 < \rho_a - \rho_b < \lambda(\rho_a - \frac{1}{2})(\rho_b - \frac{1}{2})$ on a $J < \frac{\lambda}{4}$ et

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda/4 - J}{\lambda}} \coth \left[\sqrt{\lambda(\lambda/4 - J)}(x - x_0) \right] \quad (4.44)$$

– quand $\rho_a - \rho_b < 0$, on a $J < \frac{\lambda}{4}$ et

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\lambda/4 - J}{\lambda}} \tanh \left[\sqrt{\lambda(\lambda/4 - J)}(x - x_0) \right] \quad (4.45)$$

avec x_0 une constante d'intégration déterminée par les conditions aux bords (4.38) et (4.39).

Dans la limite λ grand, on retrouve les différentes phases du processus d'exclusion totalement asymétrique :

- la condition $\rho_a - \rho_b > \max(0, \lambda(\rho_a - \frac{1}{2})(\rho_b - \frac{1}{2}))$ pour observer le profil (4.43) devient, quand λ tend vers l'infini, $\rho_a \geq \frac{1}{2} \geq \rho_b$, ce qui correspond aux limites de la phase de courant maximal de l'ASEP. En prenant la limite λ infini dans (4.43), on obtient

$$J \simeq \frac{\lambda}{4} + \frac{\pi^2}{\lambda} . \quad (4.46)$$

ainsi que (pour $x \neq 0$ ou 1)

$$\bar{\rho}(x) \simeq \frac{1}{2} + \frac{\pi}{\lambda} \tan\left(\pi\left(\frac{1}{2} - x\right)\right) ; \quad (4.47)$$

le profil de densité tend bien vers $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$, le profil de densité de la phase de courant maximum de l'ASEP.

- les profils de densité (4.44) et (4.45) regroupent, dans la limite λ infini, les phases de haute et basse densité de l'ASEP. En développant (4.44) et (4.45) pour λ grand, on trouve que le profil de densité converge de façon exponentielle vers celui de la phase correspondante de l'ASEP :

- quand $\rho_a \leq \max(1 - \rho_b, 0.5)$, c'est à dire quand on tend vers la phase de basse densité de l'ASEP, on obtient

$$\frac{\log(J - \lambda\rho_a(1 - \rho_a))}{\lambda} \rightarrow -(1 - 2\rho_a) , \quad (4.48)$$

et pour $x \neq 0, 1$

$$\frac{\log(\rho_a - \bar{\rho}(x))}{\lambda} \rightarrow -(1 - x)(1 - 2\rho_a) . \quad (4.49)$$

- quand $\rho_b > \min(1 - \rho_a, 0.5)$, c'est à dire quand on tend vers la phase de haute densité du TASEP, on obtient, de la même façon,

$$\frac{\log(J - \lambda\rho_b(1 - \rho_b))}{\lambda} \rightarrow -(2\rho_b - 1) . \quad (4.50)$$

et pour $x \neq 0, 1$

$$\frac{\log(\bar{\rho}(x) - \rho_b)}{\lambda} \rightarrow -x(2\rho_b - 1) . \quad (4.51)$$

4.5 La méthode matricielle

L'étude de l'état stationnaire exact du processus d'exclusion est grandement simplifiée par l'utilisation de la méthode dite «matricielle». Celle-ci consiste à exprimer la probabilité d'une configuration microscopique comme des produits de matrices agissant sur un espace auxiliaire de dimension éventuellement infinie. Introduite dans le cadre de l'étude de modèles d'animaux dirigés [41], cette méthode a été adaptée aux processus d'exclusion par Derrida, Evans, Hakim and Pasquier [21]. Elle a depuis été généralisée entre autres à des systèmes comportant plusieurs classes de particules [23, 63], à des modèles de réactions-diffusions [47], à l'étude du déplacement d'un défaut [13, 62], ou encore à des systèmes dont le nombre de particules n'est plus conservé [35].

Toutes les propriétés à temps égaux du processus d'exclusion homogène peuvent être calculées à l'aide de la méthode matricielle. Considérons un processus d'exclusion dont le taux de saut vers la droite est normalisé à 1, et le taux de saut vers la gauche est q . Derrida *et al.* [21] ont montré que la probabilité $P^{\text{st}}(\eta)$ d'observer un état microscopique $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$ dans l'état stationnaire de l'ASEP peut s'écrire comme un élément de matrice

$$P^{\text{st}}(\eta) = \frac{\langle W | \prod_{i=1}^L (\eta_i D + (1 - \eta_i) E) | V \rangle}{Z_L} \quad (4.52)$$

avec Z_L une constante de normalisation

$$Z_L = \langle W | (D + E)^L | V \rangle \quad , \quad (4.53)$$

et où D et E sont deux opérateurs respectant l'algèbre suivante :

$$DE - qED = D + E \quad , \quad (4.54a)$$

$$\{(1 - \rho_b)D - q\rho_b E\} | V \rangle = | V \rangle \quad , \quad (4.54b)$$

$$\langle W | \{\rho_a E - q(1 - \rho_a)D\} = \langle W | \quad . \quad (4.54c)$$

Il existe différents choix possibles de matrices D et E respectant les règles (4.54a-4.54c) [10, 21, 32, 68, 69], correspondant à différentes *représentations* de l'algèbre. Ces représentations sont généralement des matrices de dimensions infinies, sauf pour certaines valeurs particulières des densités ρ_a et ρ_b et du

biais q [64]. Naturellement, le résultat obtenu pour la probabilité d'un état microscopique ne dépend pas de la représentation choisie ; d'ailleurs, en utilisant les règles de commutation (4.54a)-(4.54c), il est possible d'obtenir par récurrence toutes les probabilités stationnaires à temps coïncidant sans utiliser une représentation explicite.

Les fonctions de corrélation s'expriment simplement à l'aide de la représentation matricielle. Nous notons par $P^{\text{st}}(\eta)$ la probabilité dans l'état stationnaire de la configuration définie par ses nombres d'occupation $\{\eta_i\}_{i=1,L}$, et par $\langle \cdot \rangle$ la moyenne par rapport à la mesure stationnaire. La densité locale au site i , $\langle \eta_i \rangle$, est donnée par

$$\langle \eta_i \rangle = \sum_{\eta} \eta_i P^{\text{st}}(\eta) \quad (4.55)$$

$$= \frac{\langle W | (D + E)^{i-1} D (D + E)^{L-i} | V \rangle}{Z_L} . \quad (4.56)$$

La fonction de corrélation à deux points $\langle \tau_i \tau_j \rangle$ s'écrit

$$\langle \tau_i \tau_j \rangle = \sum_{\eta} \eta_i \eta_j P^{\text{st}}(\eta) \quad (4.57)$$

$$= \frac{\langle W | (D + E)^{i-1} D (D + E)^{j-i-1} D (D + E)^{L-j} | V \rangle}{Z_L} . \quad (4.58)$$

Le courant microscopique moyen j entre le site i et le site $i + 1$ est donné par

$$j = \langle \tau_i (1 - \tau_{i+1}) \rangle - q \langle (1 - \tau_i) \tau_{i+1} \rangle \quad (4.59)$$

En utilisant (4.57) pour les fonctions de corrélation et les règles de commutation (4.54a), on obtient

$$j = \frac{Z_{L-1}}{Z_L} \quad (4.60)$$

avec Z_L définie par (4.53). Cette expression montre clairement que le courant j ne dépend pas du site i dans l'état stationnaire, comme on peut s'y attendre du fait de la conservation du nombre de particules.

Si l'on divise le système de taille L en k boîtes de tailles respectives L_1, L_2, \dots, L_k , la probabilité $q_{L_1, L_2, \dots, L_k}(N_1, N_2, \dots, N_k)$ de trouver N_1 particules

dans la première boîte, N_2 dans la seconde, ...et N_k dans la dernière est donnée par

$$q_{L_1, L_2, \dots, L_k}(N_1, N_2, \dots, N_k) = \frac{\langle W | X_{L_1}(N_1) X_{L_2}(N_2) \cdots X_{L_k}(N_k) | V \rangle}{Z_L} \quad (4.61)$$

où $X_l(N)$ est la somme sur tous les produits de l matrices contenant exactement N matrices D et $l - N$ matrices E . Cette expression nous sera utile dans le calcul de la fonctionnelle de grandes déviations.

4.6 Cas particuliers

4.6.1 profil constant

Lorsque $\rho_a = \rho_b = \rho$, i.e. les réservoirs aux deux extrémités du système ont même densité ρ , il existe une représentation de dimension 1 de l'algèbre (4.54a -4.54c) :

$$D = \frac{1}{(1-q)(1-\rho)} \quad (4.62)$$

$$E = \frac{1}{(1-q)\rho} \quad (4.63)$$

Dans ce cas, les matrices D et E commutent, et il n'y a donc pas de corrélations entre les différents sites ; la distribution dans l'état stationnaire est donc donnée par une mesure de Bernoulli de densité ρ : la probabilité d'une configuration η dépend seulement du nombre $N(\eta)$ de particules qu'elle contient

$$P^{\text{st}}(\eta) = \rho^{N(\eta)}(1-\rho)^{L-N(\eta)} \quad (4.64)$$

La densité est constante, égale à ρ dans le système. Cependant, excepté pour un système symétrique ($q = 1$), cet état n'est pas un état d'équilibre, car le système est traversé par un courant non nul donné par

$$j = (1-q)\rho(1-\rho) \quad (4.65)$$

4.6.2 le bilan détaillé

Lorsque le système est à l'équilibre, la dynamique est symétrique par rapport au renversement du temps et le courant moyen est nul. Le système

vérifie alors le bilan détaillé : la probabilité d'observer une transition d'une configuration microscopique \mathcal{C} vers une autre \mathcal{C}' est égale à la probabilité d'observer la transition inverse, de \mathcal{C}' vers \mathcal{C} . Dans le cas de l'ASEP avec une taux de saut de 1 vers la droite, q vers la gauche, en contact avec des réservoirs de densités ρ_a et ρ_b , cela se produit si et seulement si q , ρ_a , ρ_b vérifient

$$q^{L+1} \frac{\rho_b(1-\rho_a)}{(1-\rho_b)\rho_a} = 1 \quad . \quad (4.66)$$

En effet, pour une configuration microscopique $\{\eta_i\}_{i=1,L}$ la condition de bilan détaillé correspondant à un saut d'une particule entre le site k et $k+1$ signifie que

$$P^{\text{st}}(\{\eta_1, \dots, \eta_{k-1}, 0, 1, \eta_{k+2}, \dots, \eta_L\}) = q^{-1} P^{\text{st}}(\{\eta_1, \dots, \eta_{k-1}, 1, 0, \eta_{k+2}, \dots, \eta_L\}) \quad (4.67)$$

(avec $P^{\text{st}}(\{\eta_i\})$ la probabilité dans l'état stationnaire de la configuration $\{\eta_i\}$).

le bilan détaillé près du réservoir gauche entraîne

$$P^{\text{st}}(\{1, \eta_2, \dots, \eta_L\}) = \frac{\rho_a}{q(1-\rho_a)} P^{\text{st}}(\{0, \eta_2, \dots, \eta_L\}) \quad (4.68)$$

et près du réservoir droit

$$P^{\text{st}}(\{\eta_1, \dots, \eta_{L-1}, 1\}) = \frac{q\rho_b}{(1-\rho_b)} P^{\text{st}}(\{\eta_1, \dots, \eta_{L-1}, 0\}) \quad . \quad (4.69)$$

À partir d'une configuration $\{\eta_i\}$, on peut toujours utiliser (4.67) pour déplacer une particule vers la gauche, et (4.68) pour l'enlever du système via le réservoir de gauche. Cela permet d'exprimer la probabilité de $\{\eta_i\}$ en fonction de la probabilité de la configuration où tous les sites sont vides :

$$P^{\text{st}}(\{\eta_i\}) = \prod_{i=1}^L \left(\frac{\rho_a}{q^i(1-\rho_a)} \right)^{\eta_i} P^{\text{st}}(\{0, 0, \dots, 0\}) \quad (4.70)$$

Pour des valeurs quelconques de ρ_a , ρ_b et q , ces probabilités ne vérifient pas (4.69) et ne sont donc pas les probabilités de l'état stationnaire. Ce n'est que si les densités aux bord vérifient (4.66) que les poids (4.70) sont solutions de

(4.69). Dans ce cas, la probabilité d'une configuration $\{\eta_i\}_{i=1,L}$ est donnée par

$$P^{\text{st}}(\{\eta_i\}) = \frac{\prod_{i=1}^L \left(\frac{\rho_a}{q^i(1-\rho_a)} \right)^{\eta_i}}{\prod_{i=1}^L \left(1 + \frac{\rho_a}{q^i(1-\rho_a)} \right)} \quad (4.71)$$

La densité moyenne au site i est alors donnée par

$$\langle \eta_i \rangle = \frac{\rho_a}{\rho_a + q^i(1-\rho_a)} . \quad (4.72)$$

Deuxième partie

LE PROCESSUS D'EXCLUSION AVEC DÉSORDRE
GELÉ

RÉSUMÉ

Cette partie présente le résultat de nos travaux concernant l'effet du désordre sur une transition de phase du processus d'exclusion totalement asymétrique. A l'aide de simulations numériques, nous montrons un effet inhabituel du désordre : la transition de phase haute densité/ basse densité devient dépendante de l'échantillon lorsqu'un désordre gelé lié aux sites est ajouté au TASEP. Dans le chapitre 5, nous rappelons rapidement quelques résultats connus sur le processus d'exclusion désordonné. Le résultat de nos simulations numériques est présenté dans le chapitre 6. Enfin, dans le chapitre 7, nos résultats sont comparés à une approche champ moyen. Ces travaux ont donné lieu à la publication d'une lettre [31].

5. INTRODUCTION

5.1 *Effet du désordre sur une transition de phase*

L'effet d'un désordre gelé sur les transitions de phase est l'un des domaines de la théorie des systèmes désordonnés les plus étudiés et les mieux compris [1, 14, 37, 76, 81]. Pour les systèmes à l'équilibre, le critère de Harris [43] permet de déterminer si le comportement critique d'une transition de phase du second ordre est modifié par l'ajout d'un faible désordre. Il est aussi connu [1, 14, 15, 48] que les transitions de phase du premier ordre sont supprimées par un désordre faible lorsque la dimension du système est suffisamment basse.

Les systèmes hors d'équilibre connaissant eux aussi des transitions de phase [34, 55], il est naturel d'étudier l'effet du désordre sur leur diagramme de phase [57, 82]. Dans cette partie, je vais étudier l'effet d'un désordre gelé sur la transition de phase haute densité/ basse densité du processus d'exclusion totalement asymétrique.

5.2 *TASEP avec désordre gelé lié aux particules*

Il existe différentes manières d'introduire un désordre gelé dans l'ASEP. La manière la plus étudiée est d'associer le désordre à chaque particule [17, 44, 51, 57, 58]. La dynamique est alors similaire à celle du TASEP sur un anneau, à part le fait que les taux de saut p_i dépendent désormais de la particule i considérée : à chaque instant, la particule étiquetée i située au site x_i saute sur le site voisin $x_i + 1$ avec un taux p_i qui dépend uniquement du label i de la particule considérée. Comme pour le TASEP, la règle d'exclusion conditionne le succès du saut au fait que le site de destination $j + 1$ soit inoccupé. Les taux de saut p_i associés à chaque particule sont tirés une fois pour toutes avec une certaine distribution de probabilité, et ne change pas au cours du temps : il s'agit d'un désordre gelé. On peut se représenter intuitivement ce

processus comme un modèle de trafic le long d'une route à une voie, dans lequel chaque véhicule à une vitesse moyenne différente, tirée au hasard.

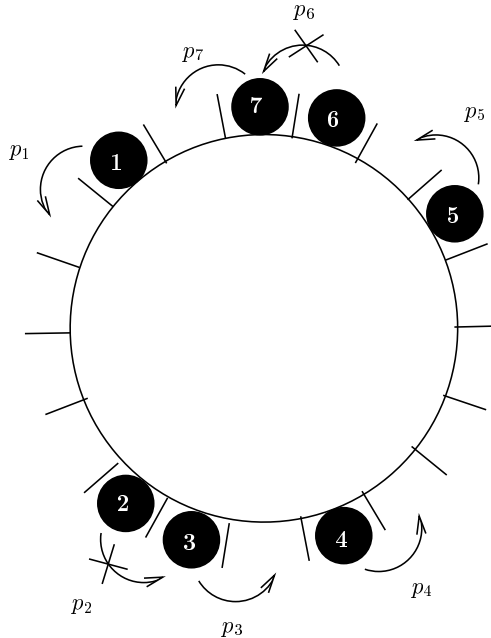


Fig. 5.1: Processus d'exclusion asymétrique sur un anneau avec désordre gelé lié aux particules.

Ce modèle a été résolu exactement à l'aide d'un «mapping» sur le processus «zero-range» [58]. Considérons en effet la distance u_i entre la particule i située à la position x_i et la particule $i + 1$ situé à la position x_{i+1}

$$u_i = x_{i+1} - x_i - 1 \quad . \quad (5.1)$$

Soit N le nombre de particules présentes sur l'anneau et L le nombre de sites de l'anneau. Les distances $\{u_i\}_{i=1,N}$ peuvent être considérées comme des nombres d'occupation sur un réseau auxiliaire de N sites comportant $L - N$ particules, chaque site pouvant accueillir un nombre infini de particules, comme sur la figure 5.2. Lorsque dans le processus d'exclusion, la particule i saute du site x_i au site $x_i + 1$, la distance u_{i-1} entre la particule i et la précédente augmente de 1, et la distance u_i entre la particule i et la suivante diminue de 1. Cela correspond sur le réseau auxiliaire au saut d'une particule du site i au site $i - 1$. Si le site $x_i + 1$ est occupé (de sorte que dans le processus d'exclusion le saut est interdit par la règle d'exclusion) alors $u_i = 0$

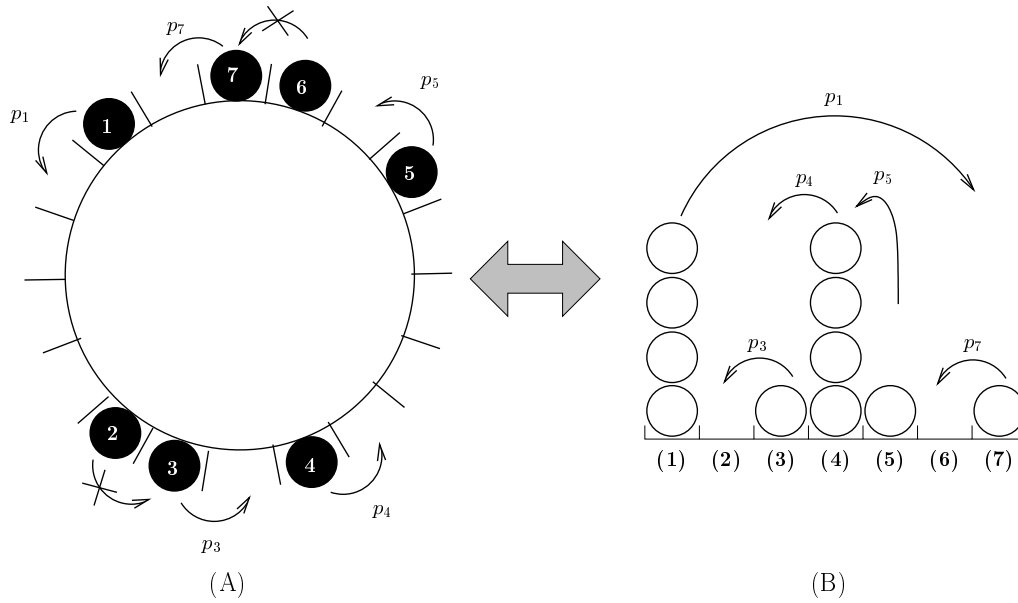


Fig. 5.2: Équivalence entre le processus d'exclusion asymétrique avec désordre sur site (A) et le processus zero-range (B).

et le saut n'est pas possible non plus dans le réseau auxiliaire. Ainsi, dans le réseau auxiliaire, une particule au site i saute sur le site $i - 1$ avec le taux p_i indépendamment de l'occupation du site destination $i - 1$ dans le réseau auxiliaire. Ce processus où il n'y a pas d'interaction à distance est appelé processus «zero-range». L'état stationnaire de ce processus est bien connu [52, 80], et la distribution de probabilité est particulièrement simple. Cette comparaison entre processus d'exclusion désordonné et processus zero-range [57, 58] met en évidence l'existence d'une transition de phase similaire à la condensation de Bose-Einstein [33] lorsque la densité de particules descend en dessous d'une densité critique pour certaines distributions des taux de saut p_i : dans la phase condensée, il existe un écart macroscopique entre la particule la plus lente et la particule qui la précède, ce qui correspond sur le réseau auxiliaire à la condensation d'un nombre macroscopique de particules sur un site. Dans l'analogie avec le trafic routier, cela correspond à avoir la majorité des véhicules coincée derrière un camion lent.

5.3 TASEP avec désordre gelé lié aux sites

Une autre façon d'introduire du désordre dans le processus d'exclusion est de l'associer non pas aux particules, mais aux sites du réseau. Pendant un temps infinitésimal dt , une particule au site i a une probabilité $p_i dt$ de sauter sur le site $i + 1$, où p_i dépend uniquement du site i considéré, et est tiré aléatoirement une fois pour toute. Dans l'analogie avec le trafic routier, cela correspond au cas où tous les véhicules roulent à la même vitesse, mais où des travaux ou des accidents réduisent localement la vitesse des véhicules. Ce type de désordre est moins étudié que le désordre lié aux particules.

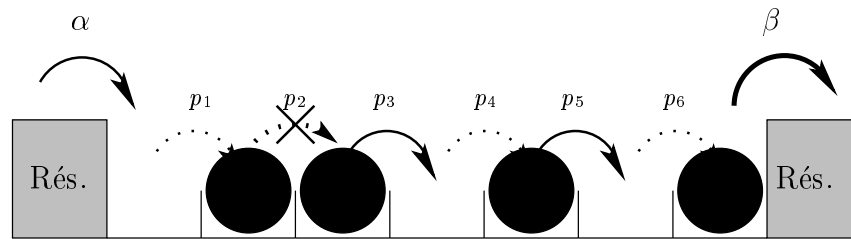


Fig. 5.3: Processus d'exclusion asymétrique sur un anneau avec désordre gelé lié aux particules.

La simple présence d'un seul défaut localisé dans les taux de saut p_i fait de l'ASEP un problème difficile et non encore résolu [49, 54, 71]. Il n'est donc pas surprenant de ne trouver dans la littérature que peu de résultats analytiques pour le processus d'exclusion avec désordre lié au site. Les plus remarquables concernent l'existence d'une limite hydrodynamique pour la densité, la concavité du courant de particules en tant que fonction de la densité de particules [75] et l'invariance par réflexion du courant [39]. Des simulations numériques pour un processus d'exclusion avec des conditions périodiques aux bords [3, 84] ont montré une modification de la fonction donnant le courant en fonction de la densité par rapport à celle du cas pur, avec l'apparition d'un plateau entre deux densités ρ_c et $1 - \rho_c$ où le courant devient indépendant de la densité de particules dans le système. Il a été également montré [84] que ce plateau correspond à un régime où le désordre entraîne une séparation de phase entre une phase de haute densité, et une phase de basse densité. En dehors de ce plateau (i.e. pour des densités $\rho < \rho_c$ ou $\rho > 1 - \rho_c$), l'état stationnaire est uniforme à l'échelle macroscopique (mais

présente des variations importantes à l'échelle microscopique). Dans [57], des limites pour la valeur de ρ_c ont été obtenues.

6. TRANSITION DE PHASE DÉPENDANTE DE L'ÉCHANTILLON

Le but de cette section est d'étudier numériquement l'effet d'un désordre lié au site sur la transition de phase haute densité, basse densité (cf figure 6.1) du système pur quand on considère un système ouvert, en contact avec des réservoirs au niveau du premier et du dernier site.

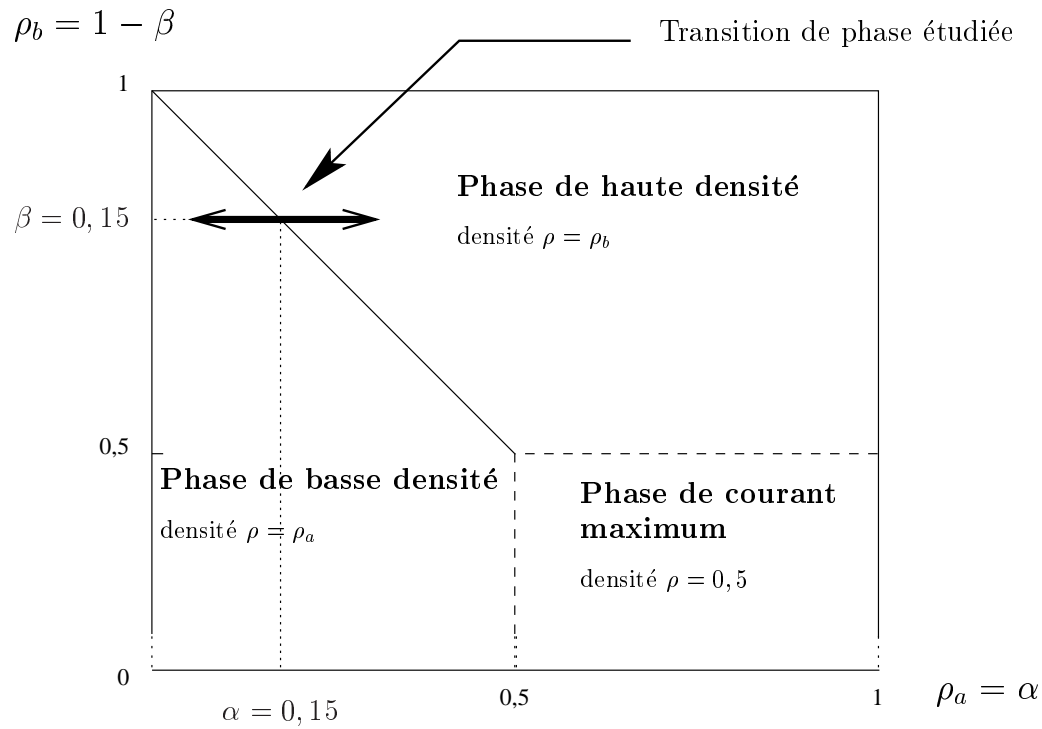


Fig. 6.1: La transition de phase étudiée

Nous considérons donc un système de L sites, dont le taux de saut p_i en chaque site i est tiré selon une distribution binaire

$$p_i = \begin{cases} p_{\min} & \text{avec une probabilité } \frac{1}{2} \\ p_{\max} & \text{avec une probabilité } \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.1)$$

Dans nos simulations, nous avons pris $p_{\min} = 0.8$ et $p_{\max} = 1.2$.

Le système est en contact avec deux réservoirs de particules, qui interagissent avec le système de la façon suivante : quand le premier site est inoccupé, une particule est créée avec le taux α , et quand le site L est occupé, la particule qui l'occupe est détruite avec un taux β .

Dans un système à l'équilibre, les transitions de phase n'apparaissent en général que lorsque l'on prend la limite thermodynamique, c'est à dire lorsque l'on fait tendre la taille du système vers l'infini. Les propriétés d'un système de taille finie (avec des interactions à courte distance) dépendent en effet continûment des paramètres extérieurs. Il en est de même pour le processus d'exclusion de taille finie, avec ou sans désordre : il s'agit d'un processus de Markov avec un état stationnaire qui dépend continûment des taux d'entrée α et de sortie β ; les transitions de phase n'ont lieu que lorsque l'on fait tendre la taille du système vers l'infini. En présence de désordre, il est nécessaire de préciser comment les nouveaux sites et leur taux de saut p_i sont ajoutés au système lorsque l'on augmente la taille dans la limite thermodynamique. Dans la suite, nous comparons deux procédures :

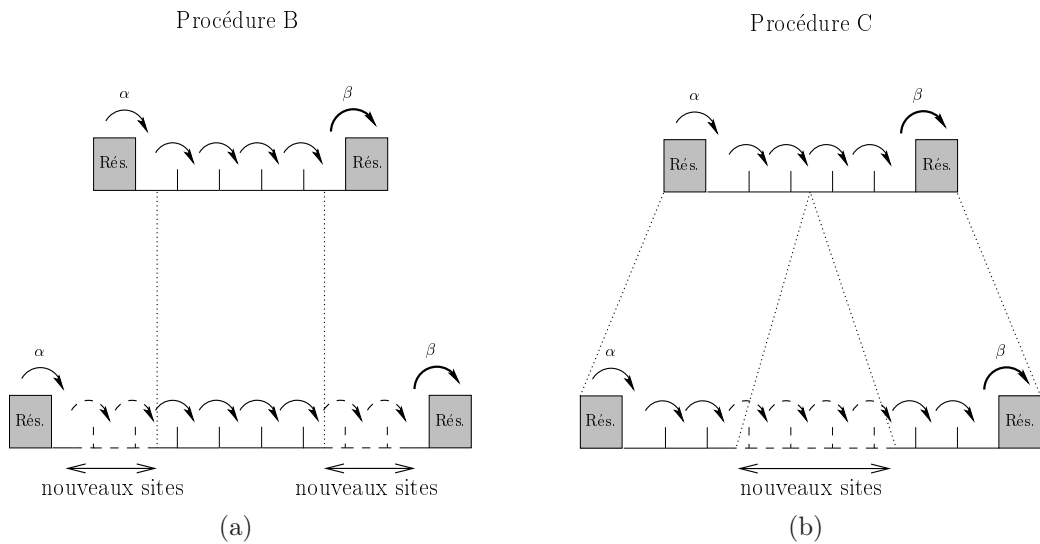


Fig. 6.2: Comparaison des procédures B (figure 6.2(a)) et C (figure 6.2(b)). Dans la procédure B, les nouveaux sites sont ajoutés à chaque bord du système, tandis que dans la procédure C, les nouveaux sites sont ajoutés au centre.

- dans la procédure B (B comme bord), les nouveaux sites sont ajoutés à

chaque bord du système, comme représenté sur la figure 6.2(a). Ainsi, lorsque la taille L augmente, les taux de saut p_i des sites situés au centre ne changent pas.

- dans la procédure C (C comme centre), les nouveaux sites sont ajoutés au centre, comme représenté sur la figure 6.2(b). Il s'ensuit que les taux de saut p_i près des bords restent inchangés lorsque la taille L du système augmente.

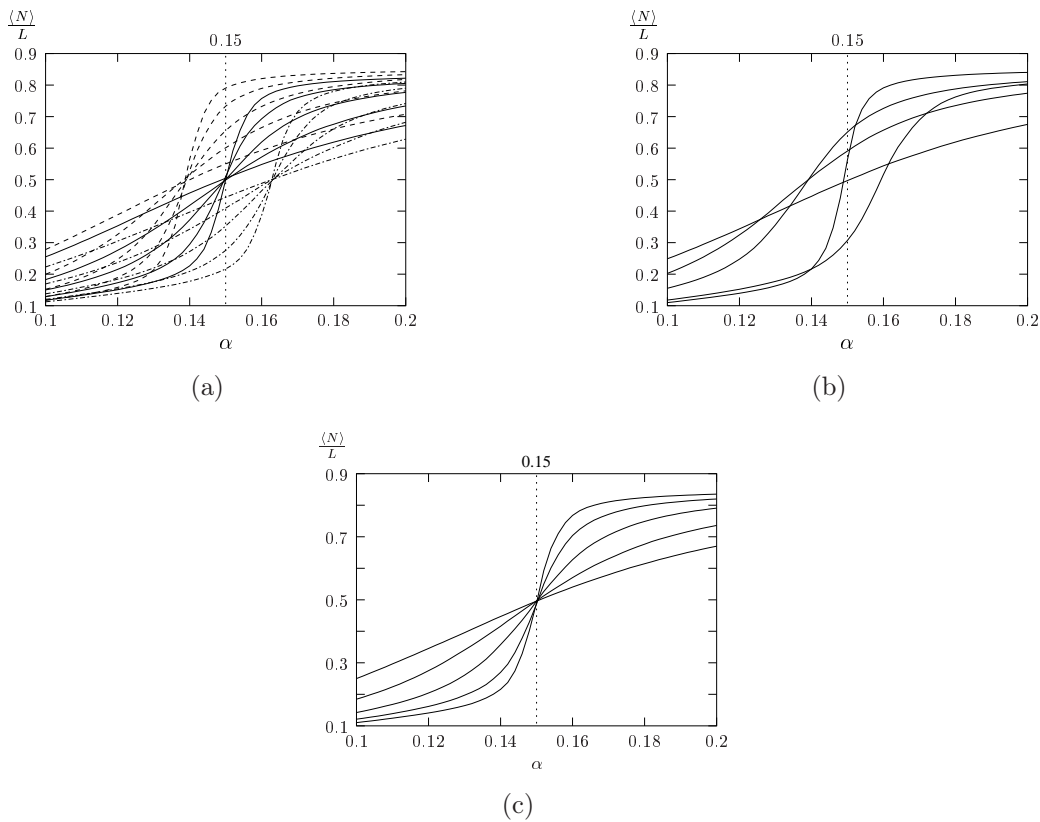


Fig. 6.3: Densité moyenne $\frac{\langle N \rangle}{L}$ en fonction de α pour des échantillons de 11, 21, 41, 81 et 161 sites, avec $\beta = 0.15$. Dans la figure 6.3(a), la taille du système est augmentée en ajoutant de nouveaux sites au centre du système (procédure C), et 3 échantillons de départ différents sont montrés. Dans la figure 6.3(b), la taille du système est augmentée en ajoutant de nouveaux sites aux bords (procédure B), et un unique échantillon de départ est montré. Dans la figure 6.3(c), le cas pur (tous les $p_i = 1$) est indiqué pour comparaison. La ligne pointillée sur les trois figures indique la position du point de transition du TASEP sans désordre.

Pour chaque taille L d'échantillon, nous faisons des simulations de type

Monte-Carlo pour différentes valeurs de α avec $\beta = 0.15$ constant. La figure 6.3 montre la densité moyenne $\langle \frac{N}{L} \rangle$ en fonction de α , où N est le nombre total de particules dans le système. La densité est moyennée sur environ 3×10^5 actualisations par site. La figure 6.3(a) montre trois échantillons différents dont la taille est augmentée selon la procédure C; la figure 6.3(b) correspond à un seul échantillon dont la taille est augmentée selon la procédure B, et la figure 6.3(c) montre le cas pur ($p_i = 1$). Lorsque α augmente, on voit la transition d'une région de basse densité à une région de haute densité. La pente de la courbe de densité entre ces deux régions devient de plus en plus raide à mesure que la taille augmente, mais la position du point où cette pente est maximale se comporte différemment selon la procédure utilisée pour augmenter la taille du système : quand la taille est augmentée par le centre comme sur la figure 6.3(a), la position du point dépend de l'échantillon de départ, mais est indépendante de la taille pour un échantillon de départ donné; quand la taille est augmentée par les bords (figure 6.3(b)), la position du point de pente maximale dépend de la taille.

De la même manière, les figures (6.4) montrent la variance $(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2)/L$ en fonction de α lorsque la taille augmente. Dans le cas pur (figure 6.4(c)), la position du maximum de la courbe converge, lorsque la taille augmente, vers $\alpha_c = \beta = 0.15$, le point de la transition de phase d'un système infini. Lorsque la taille du système désordonné est augmentée par le centre (figure 6.4(a)), la position du maximum de la courbe converge de manière comparable au cas pur, mais vers un point critique pour α qui dépend de l'échantillon de départ. Si la taille est augmentée par les bords (figure 6.4(b)), la position du maximum ne converge pas dans la limite thermodynamique.

Les figures 6.3 et 6.4 suggèrent que le comportement du processus d'exclusion désordonné dépend fortement de la procédure utilisée pour prendre la limite thermodynamique. Dans le cas de la procédure B, quand les nouveaux sites sont ajoutés sur les bords, la limite thermodynamique ne semble pas exister, tandis que si l'on utilise la procédure C en ajoutant des nouveaux sites au centre, la limite thermodynamique ressemble à celle du cas pur, mais avec un effet du désordre inhabituel : la position du point de transition dépend de l'échantillon utilisé au départ de la procédure C. Cela semble indiquer que dans la limite thermodynamique, le système présente une transition

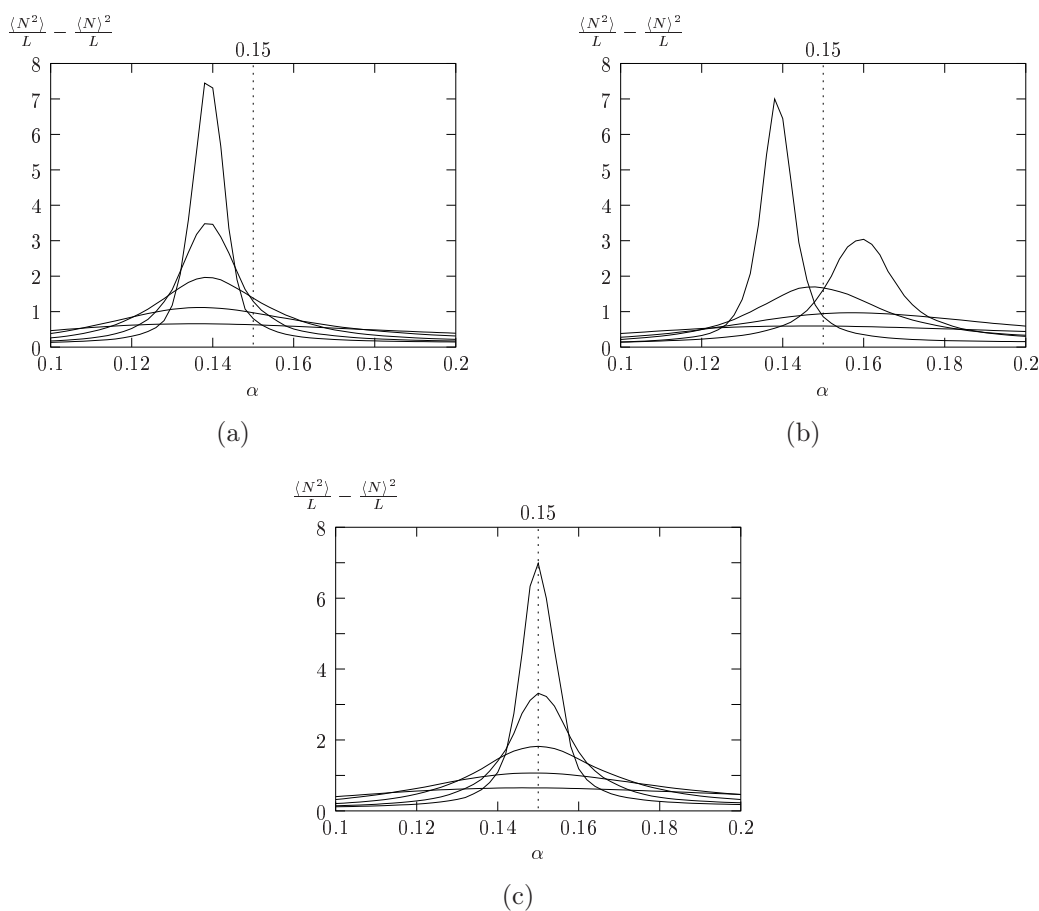


Fig. 6.4: Variance $(\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2)/L$ en fonction de α pour un échantillon de départ unique lorsque la taille du système augmente. Les tailles 11, 21, 41, 81 et 161 sont représentées. Dans la figure 6.4(a), la taille de l'échantillon est augmentée par le centre (procédure C). Dans la figure 6.4(b), la taille est augmentée par les bords (procédure B). Dans la figure 6.4(c), le cas pur (tous les $p_i = 1$) est montré pour comparaison. La ligne pointillée sur les trois figures indique la position du point de transition du TASEP sans désordre.

de phase pour une valeur critique α_c qui dépend de l'échantillon par les taux de saut à proximité des bords.

Nous allons maintenant nous intéresser à la façon dont la position de ce point dépend de l'échantillon. La figure 6.5 montre la distribution du point de pseudo-transition (défini comme la valeur de α pour laquelle la variance de la figure 6.4 est maximale) pour un système désordonné de taille $L = 50$ et $L = 100$. Pour chaque taille, nous avons simulé 40000 échantillons sur 300000

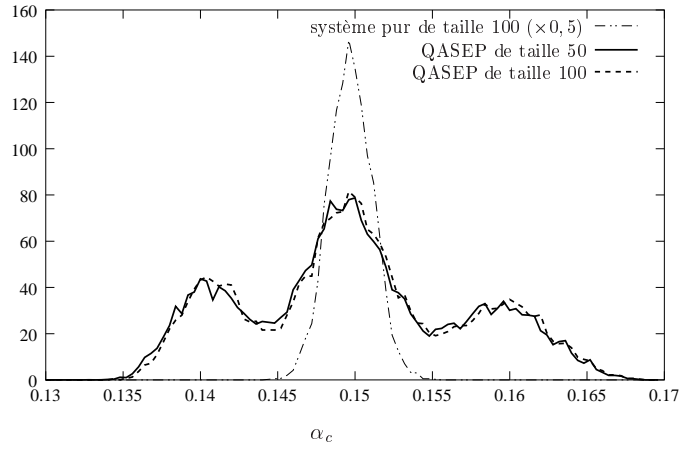


Fig. 6.5: La distribution $P(\alpha_c)$ du point de pseudo-transition α_c pour $\beta = 0.15$ quand les taux de saut p_i sont donnés par (6.1) (ligne continue : taille $L = 50$; ligne pointillée : taille $L = 100$). La distribution du point de pseudo-transition pour le système pur obtenue par la même méthode est donnée en comparaison.

actualisations par site, après avoir attendu un temps suffisamment long pour atteindre l'état stationnaire. L'histogramme est obtenu en discrétisant l'axe des points de pseudo-transition α_c en boîtes de taille 4×10^{-4} . De manière à estimer l'importance du bruit numérique sur la mesure du point critique dû à la durée finie de notre simulation, nous avons inclus la distribution obtenue en simulant 20000 échantillons du système pur (l'échelle de la distribution du cas pur a été divisée par 2 de sorte que le maximum de la distribution reste visible dans la figure 6.5). La distribution en présence de désordre est inchangée lorsque la taille du système est multipliée par un facteur 2, ce qui suggère que la même distribution serait observée dans la limite thermodynamique. La distribution $P(\alpha_c)$ du point de pseudo transition en présence de désordre est beaucoup plus large que celle du cas pur mesuré sur une même échelle de temps, ce qui exclut le bruit numérique comme seule explication de la distribution de α_c dans le cas désordonné. Le bruit numérique masque seulement les détails fins de la distribution $P(\alpha_c)$ du système désordonné lorsque ceux-ci sont plus petits que la largeur de la distribution $P(\alpha_c)$ pour le système pur. Des simulations numériques plus longues devraient révéler la structure de $P(\alpha_c)$ à une échelle plus petite.

La figure 6.6 montre les corrélations entre la valeur de α_c et les taux de

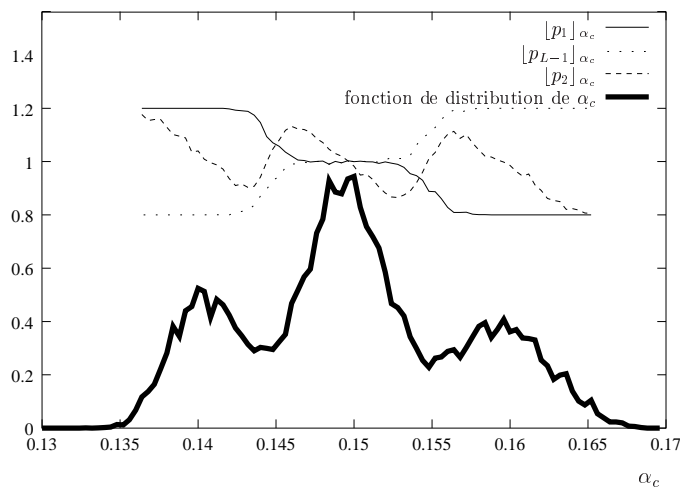


Fig. 6.6: $[p_1]_{\alpha_c}$, $[p_2]_{\alpha_c}$ et $[p_{L-1}]_{\alpha_c}$ en fonction de la position du point de pseudo-transition α_c . La courbe continue est la même distribution $P(\alpha_c)$ du point de pseudo-transition α_c que celle de la figure 6.5. Les figures montrent que tous les échantillons qui ont un point de pseudo-transition α_c dans le pic de gauche ont $p_1 = p_{max}$ et $p_{L-1} = p_{min}$ et que tous les échantillons qui ont un point de pseudo-transition α_c dans le pic de droite vérifient $p_1 = p_{min}$ et $p_{L-1} = p_{max}$.

saut près des bords. La moyenne sur l'ensemble des échantillons qui ont un point critique α_c (à la discrétisation de l'axe des α_c près) est notée par $[\cdot]_{\alpha_c}$. Sur les figures (6.6), les moyennes $[p_i]_{\alpha_c}$ des deux premiers taux de saut p_1 et p_2 , ainsi que celle du dernier p_{L-1} , sont tracées en fonction de la valeur du point de pseudo-transition α_c . On voit que les trois maxima principaux de la distributions du point de pseudo-transition peuvent être caractérisés par la valeur du premier et du dernier taux de saut p_1 et p_{L-1} : le pic de gauche correspond à $p_1 = p_{max}$, $p_{L-1} = p_{min}$, le pic de droite à $p_1 = p_{min}$, $p_{L-1} = p_{max}$. La courbe de la moyenne $[p_2]_{\alpha_c}$ du second taux de saut p_2 semble indiquer que sa valeur a une influence moindre sur α_c que les taux de saut du premier ou du dernier site. Cela suggère l'influence de p_i sur α_c décroît avec la distance de i aux bords, ce qui pourrait mener à une structure fractale pour $P(\alpha_c)$.

7. APPROCHE EN CHAMP MOYEN

Dans ce chapitre, nous étudions analytiquement une approximation simple, de type champ moyen. Nous montrons qu'elle permet de justifier l'existence d'une phase de haute densité et d'une phase de basse densité dans l'ASEP désordonné, ainsi que la dépendance de la position de la transition de phase avec l'échantillon. Cependant les comparaisons avec des simulations numériques montrent que la position de la transition de phase n'est pas prédite de manière exacte. Ces résultats originaux n'ont pas été publiés avec nos résultats concernant les simulations numériques [31]. Harris et Stinchcombe [44] ont par la suite publié une approche en champ moyen pour l'étude de la transition du second ordre vers la phase de courant maximum, utilisant la même approximation mais avec une méthode différente de celle que nous présentons ici.

L'approximation de champ moyen consiste à négliger les corrélations entre sites. Dans le cas pur cette approximation que nous avons présentée dans le chapitre 4.3.2 prédit correctement le diagramme de phase. Pour un système désordonné fermé, il a été montré numériquement [84] que l'approximation de champ moyen redonne non seulement de manière acceptable la relation entre courant et densité, mais également de manière qualitative le profil de densité. Ceci a été confirmé, également de manière numérique, pour un système désordonné ouvert dans lequel les particules ont une taille $d > 1$ [77].

Le courant moyen J au site i est donné par

$$J = p_i \langle \eta_i (1 - \eta_{i+1}) \rangle \quad (7.1)$$

avec η_i le nombre d'occupation du site i , p_i le taux de saut du site i au site $i + 1$ et $\langle . \rangle$ la moyenne par rapport à la mesure stationnaire. Du fait de la conservation du nombre de particules, ce courant est uniforme dans tout le système. Comme dans le cas pur, nous faisons l'approximation de champ

moyen suivante

$$\langle \eta_i \eta_{i+1} \rangle = \rho_i \rho_{i+1} \quad (7.2)$$

avec $\rho_i = \langle \eta_i \rangle$ l'occupation moyenne du site i . L'expression du courant (7.1) devient alors $J = p_i \rho_i (1 - \rho_{i+1})$, ce qui induit une relation de récurrence entre ρ_i et ρ_{i+1} :

$$\rho_{i+1} = \phi_{p_i}(\rho_i) \quad (7.3)$$

avec

$$\phi_p(\rho) = 1 - \frac{J}{p\rho} \quad (7.4)$$

Ainsi, si l'on connaît le courant J et la densité ρ_i à l'un des sites i , on est en mesure de déterminer la densité en n'importe quel point par récurrence.

Dans le cas pur, le courant J maximal pouvant traverser le système est $J_{\max} = p/4$; lorsque le courant J est inférieur à ce maximum, le système se trouve soit dans la phase de haute densité, soit dans la phase de basse densité. Le but étant d'étudier la transition de phase basse/haute densité dans le cas désordonné, nous nous limiterons à des valeurs de courant

$$J < \frac{p_{\min}}{4} \quad (7.5)$$

où p_{\min} est la borne inférieure des taux de sauts dans le cas désordonné

$$p_{\min} = \inf p_i \quad (7.6)$$

Il faut noter cependant qu'un courant plus élevé que $\frac{p_{\min}}{4}$ peut être observé dans le système désordonné, par exemple si la probabilité d'avoir un taux de saut p_i égal au minimum p_{\min} est très faible.

Dans le cas pur, c'est à dire quand les taux de sauts $p_i = p$ sont constants, la relation de récurrence (7.3) admet deux points fixes ρ_- et $\rho_+ = 1 - \rho_-$ (avec $\rho_- < \rho_+$) lorsque $J < \frac{p}{4}$. Dans la phase de haute densité, le profil de densité ρ_i tend quand i devient grand vers le point fixe ρ_+ stable par la relation de récurrence (7.3). Dans la phase de basse densité, le profil de densité ρ_{L-i} tend, quand i devient grand, vers le point fixe ρ_- instable par la relation de récurrence (7.3) (et donc stable par la relation de récurrence

inversée $\rho_i = \phi_{p_i}^{-1}(\rho_{i+1})$). Dans le cas désordonné, comme p_i dépend du site i , la relation de récurrence (7.3) change à chaque itération, et il n'y a plus de points fixes. Cependant, on peut mettre en évidence une propriété similaire : si l'on part d'une densité ρ_1 et que l'on itère la relation (7.3), le profil de densité ρ_i que l'on obtient va en général tendre pour i grand vers un profil ρ_i^+ indépendant de la densité de départ ρ_1 . De même, si l'on part d'une densité ρ_L au site L , et que l'on itère à rebours la relation (7.3), le profil de densité ρ_{L-i} que l'on obtient va tendre en général pour i grand vers un profil ρ_{L-i}^- indépendant de la densité de départ ρ_L . Les profils ρ_i^+ et ρ_i^- jouent le rôle des points fixes ρ_+ et ρ_- du cas pur, la différence étant que ces profils ρ_i^+ et ρ_i^- ne sont pas uniformes.

Pour montrer qu'un ensemble de trajectoires converge vers une trajectoire limite, nous allons en choisir une d'entre elles arbitrairement, et montrer que les autres trajectoires s'en rapprochent à chaque itération de la récurrence (7.3). Définissons donc un «profil de haute densité» ρ_i^+ par $\rho_1^+ = 1/2$ et la relation de récurrence (7.3). On peut montrer que ρ_i^+ va être strictement supérieure à 0.5 pour $i > 1$. En effet, soit $\rho \geq 0.5$, et $p \geq p_{\min}$. En utilisant le fait que $p_{\min} > 4J$ on obtient

$$\phi_p(\rho) = 1 - \frac{J}{p\rho} \quad (7.7)$$

$$\geq \frac{\kappa}{2} . \quad (7.8)$$

avec

$$\kappa = 2 - \frac{4J}{p_{\min}} > 1 \quad (7.9)$$

Puisque $\rho_1^+ = 1/2$, on obtient donc par la récurrence (7.3) que, pour tout $i > 1$,

$$1 \geq \rho_i^+ \geq \frac{\kappa}{2} . \quad (7.10)$$

Considérons maintenant un autre profil $\{\rho_i\}_{i=1,L}$ solution de la récurrence (7.3), et tel qu'il existe un site i_0 où la densité ρ_{i_0} soit plus grande que 0.5. Alors (7.7) entraîne de même que pour tous les sites $i > i_0$ la densité ρ_i est plus grande que 0.5. On peut montrer alors que pour $i > i_0$, la densité ρ_i se

rapproche de ρ_i^+ à chaque itération. En effet, pour $i \geq i_0$

$$|\rho_{i+1} - \rho_{i+1}^+| = |\phi_{p_i}(\rho_i) - \phi_{p_i}(\rho_i^+)| \quad (7.11)$$

$$= \frac{J}{p_i \rho_i \rho_i^+} |\rho_i - \rho_i^+| \quad (7.12)$$

$$< \kappa^{-1} |\rho_i - \rho_i^+| \quad (7.13)$$

car $\rho_i^+ \geq \frac{\kappa}{2}$ et $\frac{J}{p_i} < \frac{1}{4}$. Ainsi, pour $i > i_0$,

$$|\rho_i - \rho_i^+| < \kappa^{-(i-i_0)} |\rho_{i_0} - \rho_{i_0}^+|. \quad (7.14)$$

Comme $\kappa > 1$ cela indique que le profil ρ_i se rapproche géométriquement du profil de haute densité ρ_i^+ .

Par un raisonnement similaire, définissons le profil de basse densité ρ_i^- , solution de la récurrence (7.3) avec la condition finale $\rho_L^- = 0.5$. On peut alors montrer de même que, pour tout $i < L$,

$$0 \leq \rho_i^- \leq 1 - \frac{\kappa}{2} < 0.5 \quad (7.15)$$

avec κ définie par (7.9), et que si un profil ρ_i vérifiant la récurrence (7.3) est tel que il existe i_1 avec $\rho(i_1) \leq 0.5$, alors pour tout $i < i_1$, $\rho_i < 0.5$ et

$$|\rho_i - \rho_i^-| < \kappa^{-(i_1-i)} |\rho_{i_1} - \rho_{i_1}^-| ; \quad (7.16)$$

ainsi, quand i décroît, le profil ρ_i se rapproche géométriquement du profil basse densité ρ_i^- .

On peut maintenant résumer le comportement de la récurrence (7.3) en fonction de la densité initiale ρ_1

- si $\rho_1 < \rho_1^-$, alors le caractère croissant de la fonction ϕ_p intervenant dans relation de récurrence (7.3) entraîne que quelque soit i , $\rho_i < \rho_i^- < 0,5$. l'équation (7.16) entraîne alors $\rho_j < \rho_j^- - \kappa^{j-1} |\rho_1 - \rho_1^-|$, et donc ρ_j devient rapidement négatif; il s'agit d'une solution non-physique.
- si $\rho_1 > \rho_1^-$, on a de même $\rho_i > \rho_i^-$ pour tous i . Dans ce cas, on a rapidement $\rho_i > 0,5$. En effet, si pour un j donné on a $\rho_j < 0,5$, alors la relation (7.16) s'applique (avec $i_1 = j$ et $i = 1$) et l'on a $0,5 > \rho_j > \rho_j^- + \kappa^{j-1} |\rho_1 - \rho_1^-|$, ce qui n'est possible que pour j suffisamment petit. Une fois que ρ_i devient plus grand que $0,5$, on peut appliquer l'inégalité

(7.13) qui entraîne que rapidement $\rho_i \simeq \rho_i^+$ et donc dans la limite L grand $\rho_L = \rho_L^+$. Il s'agit de la phase de haute densité, la densité est proche de ρ_i^+ (et donc supérieure à 0.5) sur la majorité du système.

- par un raisonnement similaire appliqué à l'autre extrémité du système, on déduit que la dernière possibilité est d'avoir $\rho_L < \rho_L^+$ et $\rho_1 \simeq \rho_1^-$, avec $\rho_i \simeq \rho_i^- < 0.5$ sur la majorité du système.

La densité ρ_1^- dépend du courant J qui traverse le système. Dans le modèle, le courant n'est pas fixé directement, mais via le taux de création α sur le premier site, et le taux de destruction β sur le dernier site. La relation entre ces taux et le courant est donnée par

$$J = \alpha(1 - \rho_1) \quad (7.17)$$

$$J = \beta\rho_L \quad (7.18)$$

Suivant la phase, on a soit $\rho_L = \rho_L^+$, soit $\rho_1 = \rho_1^-$. En utilisant (7.3), il est facile de montrer par récurrence que ρ_i^+ est une fonction décroissante de J et ρ_i^- une fonction croissante de J . Il s'en suit que $\frac{J}{1-\rho_1^-(J)}$ et $\frac{J}{\rho_L^+(J)}$ sont deux fonctions croissantes de J , et donc inversibles. Définissons implicitement $J_a(\alpha)$ et $J_b(\beta)$ par

$$\alpha = \frac{J_a(\alpha)}{1 - \rho_1^-(J_a(\alpha))} \quad (7.19)$$

$$\beta = \frac{J_b(\beta)}{\rho_L^+(J_b(\beta))} \quad (7.20)$$

Puisque l'on a soit $\rho_1 = \rho_1^-$, soit $\rho_L = \rho_L^+$, le courant J doit être égal soit à $J_a(\alpha)$, soit à $J_b(\beta)$. En terme des taux de création α et de destruction β , le diagramme de phase (pour $J \leq \frac{v_{\min}}{4}$) s'écrit alors

- si $J_a(\alpha) < J_b(\beta)$, le courant qui traverse le système est $J_a(\alpha)$. Le système est alors dans la phase de basse densité et le profil de densité est presque partout $\rho^-(J_a(\alpha))$. En effet, une valeur plus grande du courant entraînerait une valeur de ρ_1 inférieur à ρ_1^- , ce qui mène, on l'a vu, à une solution non physique pour le profil de densité.
- de même, si $J_a(\alpha) > J_b(\beta)$, le courant qui traverse le système est $J_b(\beta)$. Le système est alors dans la phase de haute densité et le profil de densité est presque partout $\rho^+(J_b(\beta))$.

Le champ moyen prédit donc bien deux phases pour des courants faibles dans le cas désordonné, de manière similaire au cas pur ; on remarque cependant que contrairement au cas pur, le profil de haute densité ou de basse densité prédit par le champ moyen dans la cas désordonné n'est pas constant, mais présente d'importantes variations microscopiques, comme cela a été effectivement observé dans des simulations [84].

La transition de phase se fait sur la courbe $J_a(\alpha) = J_b(\beta)$, qui dépend des taux de sauts p_i . Un changement dans le taux de saut p_{i_0} au site i_0 va provoquer une modification du profil de haute densité ρ^+ et du profil de basse densité ρ^- autour de i_0 , mais du fait des relations (7.13,7.16), ces modifications vont décroître géométriquement avec la distance à i_0 . Ainsi, l'influence d'une modification d'un taux de saut p_{i_0} sur la valeur de ρ_L^+ , et donc sur la courbe $J_b(\beta)$, décroît géométriquement avec la distance $L - i_0$. De même, l'influence de p_{i_0} sur la valeur de ρ_1^- , et donc sur la courbe $J_a(\alpha)$, décroît géométriquement avec la distance i_0 . Seuls donc les taux de saut p_i des sites proches du bord ont une influence notable sur la courbe des points de transition $J_a(\alpha) = J_b(\beta)$, et cette influence décroît avec la distance aux bords.

Sur la figure 7.1, les prédictions du champ moyen pour la position de la transition de phase sont comparées avec le résultat de simulations de type Monte-Carlo pour différents échantillons de taille $L = 1001$, pour une distribution binaire des taux de saut ($p_i = p_{\min} = 0,8$ avec une probabilité $1/2$ et $p_i = p_{\max} = 1,2$ avec une probabilité $1/2$), avec $\beta = 0,15$. Le numéro n de l'échantillon donne la valeur p_i des taux de saut des sites i près des bords : $n = 32r_1 + 16r_{L-2} + 8r_2 + 4r_{L-3} + 2r_3 + r_{L-4}$, avec $r_i = 0$ si $p_i = p_{\min}$ et $r_i = 1$ si $p_i = p_{\max}$. Les taux de saut des autres sites sont choisis aléatoirement. La prédiction du champ moyen est obtenue en calculant numériquement $J_a(\alpha)$ et $J_b(\beta)$ pour chaque échantillon, celle de Monte-Carlo en simulant le système sur $4 \cdot 10^6$ actualisation par site, et en cherchant le maximum de l'écart type du nombre de particules. Les prédictions du champ moyen apparaissent qualitativement correctes, mais elles surestiment la déviation du point de transition due au désordre.

La figure 7.2 compare les prédictions du champ moyen et des simulations numériques pour la densité moyenne de particules dans le système en fonction

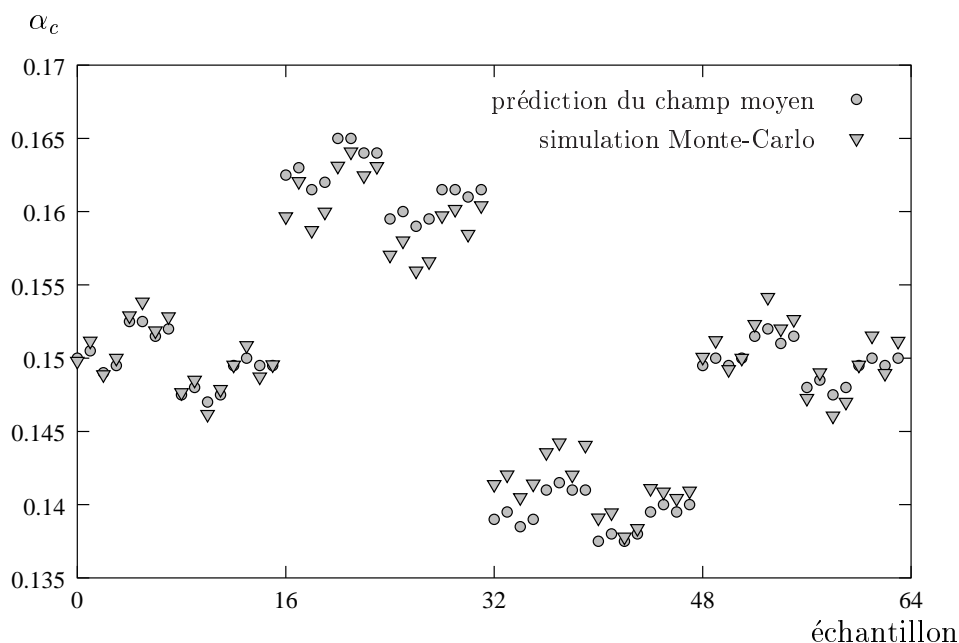


Fig. 7.1: Comparaison des prédictions du champ moyen (cercles) et des simulations numériques (triangles) pour la position du point critique α_c de différents échantillons. Le numéro n de l'échantillon donne la valeur p_i des taux de saut des sites i près des bords : $n = 32r_1 + 16r_{L-2} + 8r_2 + 4r_{L-3} + 2r_3 + r_{L-4}$, avec $r_i = 0$ si $p_i = p_{\min}$ et $r_i = 1$ si $p_i = p_{\max}$. Le champ moyen surestime les déviations du point critique.

du taux d'entrée α , pour un échantillon donné. Pour calculer le profil de densité du champ moyen de manière numérique, nous déterminons d'abord la phase et le courant J en comparons $J_a(\alpha)$ et $J_b(\beta)$. Si le système est en phase de haute densité, nous itérons la récurrence (7.3) à partir de $\rho_1 = 1 - \frac{J}{\alpha}$. Par contre, si le système est en phase de basse densité, nous devons partir de $\rho_L = \frac{J}{\beta}$, et remonter la récurrence (7.3) jusqu'à $\rho_1 \simeq \rho_1^-$. En effet, la trajectoire ρ^- est une trajectoire répulsive pour la récurrence (7.3) : une petite erreur sur ρ_1 quand ρ_1 est proche de ρ_1^- entraîne via la récurrence (7.3) une très grande variation de ρ_L . Pour pouvoir commencer la récurrence à partir de ρ_1 dans la phase de basse densité, il faut une précision sur ρ_1 incompatible avec les limites de l'ordinateur. Ceci explique les difficultés numériques rencontrées dans [77]. Sur la figure 7.2, on voit que le champ moyen surestime la raideur de la courbe de densité au niveau de la transition de phase, en plus de décaler la position de la transition. Cependant, les prédictions pour α petit et α grand

densité moyenne

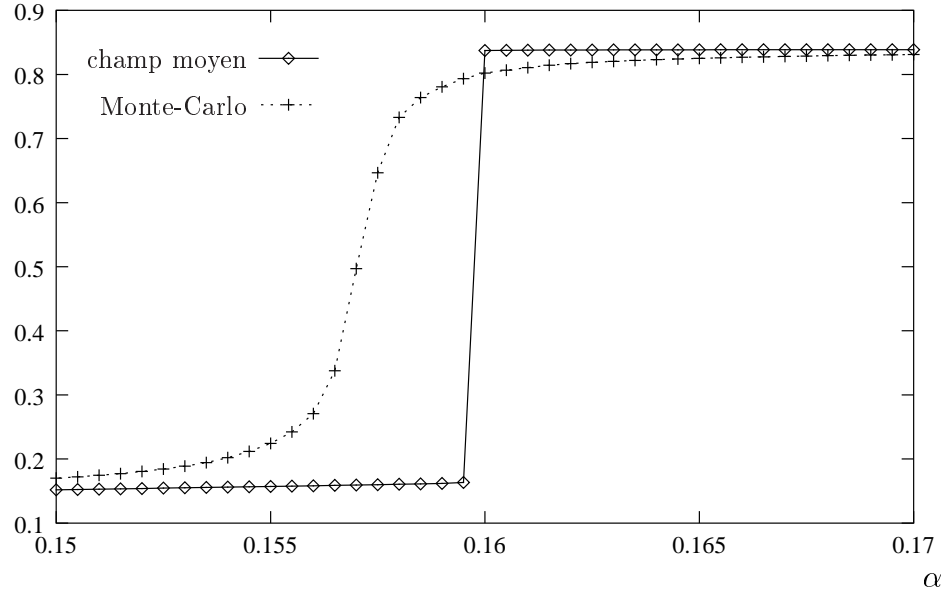


Fig. 7.2: Densité moyenne de particule dans le système en fonction du taux d'entrée α . La ligne continue représente les prédictions du champ moyen, et la ligne pointillée les résultats des simulations numériques. La position de la transition de phase est légèrement décalée. L'échantillon représenté a une taille $L = 1001$, avec $\beta = 0,15$

sont acceptables.

Troisième partie

GRANDES DÉVIATIONS ET FLUCTUATIONS
POUR LE PROCESSUS D'EXCLUSION
FAIBLEMENT ET TOTALEMENT
ASYMÉTRIQUE

RÉSUMÉ

Dans cette partie, nous exposons les principaux résultats obtenus durant cette thèse concernant les fluctuations et la fonctionnelle de grandes déviations pour le processus d'exclusion. Ces résultats découlent d'une nouvelle approche de l'ansatz matriciel qui consiste à écrire le produit de matrices intervenant dans l'ansatz comme une somme sur des chemins (équation (8.1)), de manière similaire à la réécriture en terme d'intégrale de chemin de la mécanique quantique. Ceci nous permet, dans le chapitre 8, de donner une nouvelle expression (éq. (8.9)) de la probabilité $P(\{\rho\})$ d'un profil de densité $\{\rho(x)\}_{x \in [0,1]}$ pour le processus d'exclusion. Cette formulation permet de retrouver de manière beaucoup plus simple des résultats connus, comme la fonctionnelle de grandes déviations du processus d'exclusion symétrique ou celle du processus d'exclusion totalement asymétrique. Nous l'utilisons pour dériver deux séries de résultats nouveaux :

- dans le chapitre 9, nous présentons plusieurs formulations équivalentes de la fonctionnelle de grande déviation dans le cas faiblement asymétrique (équations (9.12), (9.15), (9.19))
- dans le chapitre 10, nous obtenons la distribution statistique dans l'état stationnaire des petites fluctuations de densité (éq. (10.2)) à la fois pour le processus totalement asymétrique et pour le processus faiblement asymétrique. Nous en déduisons une expression (éq. (10.5)) pour les fonctions de corrélation à temps égaux de la densité dans l'état stationnaire, notamment pour la fonction de corrélation à deux points du processus faiblement asymétrique (éq. (10.6)). Des simulations numériques, que nous présentons dans le chapitre 10.4, suggèrent que l'expression obtenue pour les fluctuations du processus d'exclusion simple peut se généraliser à des systèmes plus généraux.

Ces résultats permettent de faire le lien entre deux classes de systèmes aux comportements différents à grande échelle : le processus d'exclusion symétrique et le processus d'exclusion asymétrique.

Le chapitre 11 est une extension concernant les marches discrètes et la fonction auxiliaire F apparaissant dans notre dérivation de la fonctionnelle de grandes déviation. Nous y montrons le lien entre F et les fonctions de corrélations (éq. (11.20)), et nous construisons une dynamique microscopique sur les marches (chapitre 11.3).

Les résultats concernant la fonctionnelle de grandes déviations du WA-SEP ont été publiés dans [30], en collaboration avec B. Derrida. Ceux concernant les petites fluctuations sont présentés dans [20], en collaboration avec B. Derrida et J.L. Lebowitz pour le cas symétrique, et dans [19], en collaboration avec B. Derrida, C. Landim et S. Olla pour le cas faiblement asymétrique.

8. PROBABILITÉ D'UN ÉTAT COMME SOMME SUR DES CHEMINS

Cette partie a pour but de décomposer en une somme sur des marches discrètes $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$ la probabilité $P(\eta)$ d'observer une configuration η dans l'état stationnaire du processus d'exclusion ouvert, lorsque celui-ci est en contact avec deux réservoirs de densité ρ_a et ρ_b , et lorsque le taux de saut vers la droite est 1 et celui vers la gauche, que l'on notera q , prend des valeurs allant de $q = 0$ (ASEP) à $q = 1$ (SSEP) (imposer $q \leq 1$ n'est pas une restriction sur le domaine de validité de la formule, puisque l'on peut toujours multiplier les taux de saut par q^{-1} et effectuer une symétrie gauche-droite pour s'y ramener). L'expression que l'on va dériver est la suivante

$$P(\eta) = \sum_{\omega} P(\eta, \omega) \quad (8.1)$$

où la somme se fait sur les marches positives $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$ de longueur $L + 1$ et de pas 1, i.e les suites d'entiers $\{n_i\}_{i=0,L}$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tous i :

$$n_i \geq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq n_i - n_{i-1} \leq 1 \quad (8.2)$$

et $P(\eta, \omega)$ est la probabilité jointe de $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$ et $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$, définie par

$$P(\eta, \omega) = Q(\omega) \quad \text{si } \forall i, \eta_i - 1 \leq n_i - n_{i-1} \leq \eta_i \quad (8.3)$$

$$= 0 \quad \text{sinon} \quad (8.4)$$

avec $Q(\omega)$ le poids associé à une marche $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$

$$Q(\{n_i\}_{i=0,L}) = \frac{1}{Z} \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^{n_0} \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^{n_L} \prod_{i=0}^L \frac{1 - q^{n_i}}{1 - q} \quad (8.5)$$

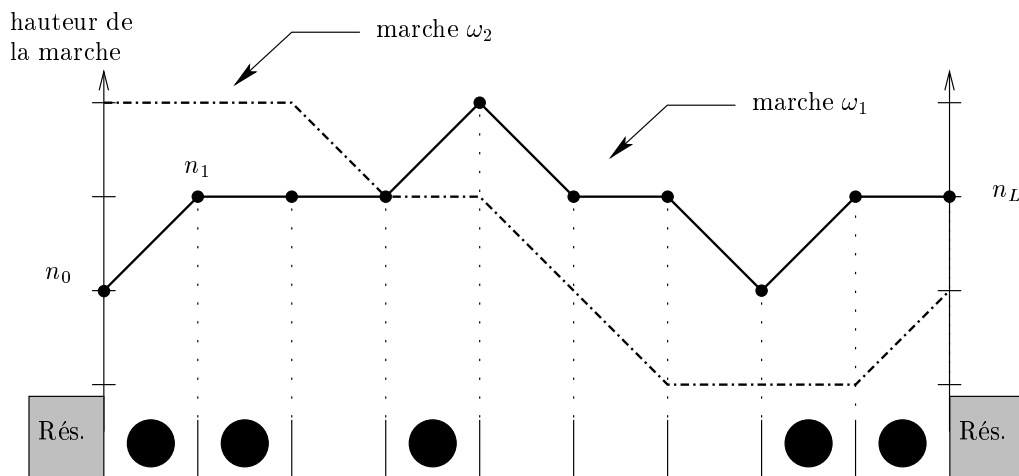


Fig. 8.1: Une configuration η du processus d'exclusion, et deux marches compatibles ω_1 et ω_2

Dans la suite, nous dirons qu'une marche ω est compatible avec une configuration η si $P(\eta, \omega) \neq 0$.

L'expression (8.1) n'est valable que pour des valeurs des densités ρ_a et ρ_b aux bords telles que

$$\rho_a > \rho_b . \quad (8.6)$$

En remplaçant dans (8.1) la somme sur les marches positives par une somme sur les marches négatives, avec les probabilités jointes $P(\eta, \omega)$ toujours données par (8.3), l'expression (8.1) peut cependant être prolongée pour des valeurs de ρ_a , ρ_b et de l'asymétrie q telles que

$$\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \frac{\rho_b}{1 - \rho_b} q^{L+1} \geq 1 \quad (8.7)$$

ce qui correspond aux domaines de valeurs des paramètres ρ_a , ρ_b et q pour lesquels la différence de densité entre les deux réservoirs est suffisamment forte pour forcer le courant de particules à aller dans le sens opposé à l'asymétrie. La réunion des domaines (8.6) et (8.7) correspond exactement au domaine de valeurs des paramètres ρ_a , ρ_b et q telles que le courant de particules j qui traverse le système entraîne un déplacement de particules du réservoir de haute densité vers le réservoir de basse densité, ce que l'on peut résumer par

$$j(\rho_a - \rho_b) > 0 . \quad (8.8)$$

Le comportement dans le domaine restant, qui correspond à des systèmes où le champ extérieur est suffisamment fort pour forcer le courant à remonter le gradient de densité, peut être extrapolé par prolongement analytique. En effet, pour un système de taille L finie, les probabilités $P(\eta)$ des configurations microscopiques η sont solutions de l'équation maîtresse (2.3), qui est linéaire. $P(\eta)$ est donc une fonction rationnelle de ρ_a , ρ_b et q .

Nous ferons les dérivations tous d'abord pour le domaine (8.6) et dans la partie 8.3, nous étendrons ces dérivations au domaine (8.7)

La somme sur les marches microscopiques (8.1) donne la valeur exacte de la probabilité du profil microscopique η . En prenant la limite macroscopique, on peut en écrire une version macroscopique continue, valide quand la taille L du système est grande. La densité de probabilité $P_L(\{\rho\})$ d'observer un profil macroscopique $\rho = \{\rho(x)\}_{0 \leq x \leq 1}$ dans un système de taille L s'écrit comme une intégrale de chemins [70, 85]

$$P_L(\{\rho\}) \sim \int_{\{y\}} P_L(\{\rho\}, \{y\}) \mathcal{D}[\{y\}] \quad (8.9)$$

où la somme se fait sur les chemins $\{y(x)\}_{0 \leq x \leq 1}$. $P_L(\{\rho\}, \{y\})$ est la densité de probabilité jointe du profil ρ et du chemin y , et s'exprime à l'aide d'une fonctionnelle de grande déviation $\mathcal{G}(\{\rho\}; \{y\})$

$$P_L(\{\rho\}, \{y\}) \sim e^{-L\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\})} \quad (8.10)$$

Cette fonctionnelle $\mathcal{G}(\{\rho\}; \{y\})$ n'a pas la même forme suivant que l'on considère un processus d'exclusion totalement asymétrique (TASEP) ou faiblement asymétrique (WASEP). Pour le WASEP, elle a la forme suivante

– si $\forall x, y(x) > 0$ et $\rho(x) - 1 \leq y'(x) \leq \rho(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{WASEP}}(\{\rho\}; \{y\}) = & -K_{\text{WASEP}} + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ & + \int_0^1 dx \left[-\log \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} + \rho \log \rho + (1 - \rho) \log (1 - \rho) \right. \\ & \left. + (1 - \rho + y') \log (1 - \rho + y') + (\rho - y') \log (\rho - y') \right], \quad (8.11) \end{aligned}$$

– sinon,

$$\mathcal{G}_{\text{WASEP}}(\{\rho(x)\}; \{y(x)\}) = \infty \quad (8.12)$$

Pour le TASEP, la fonctionnelle \mathcal{G} est donnée par

– si $\forall x, y(x) > 0$ et $\rho(x) - 1 \leq y'(x) \leq \rho(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{TASEP}}(\{\rho\}; \{y\}) &= -K_{\text{TASEP}} + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ &\quad + \int_0^1 dx [\rho \log \rho + (1 - \rho) \log (1 - \rho) \\ &\quad + (1 - \rho + y') \log (1 - \rho + y') + (\rho - y') \log (\rho - y')], \end{aligned} \quad (8.13)$$

– sinon,

$$\mathcal{G}_{\text{TASEP}}(\{\rho\}; \{y\}) = \infty \quad (8.14)$$

Les constantes K_{TASEP} et K_{WASEP} sont telles que, dans chacun des cas,

$$\inf_{\{\rho\}, \{y\}} \mathcal{G}(\{\rho\}; \{y\}) = 0 \quad . \quad (8.15)$$

Nous verrons en fin de chapitre 10.2.4 que cela implique

$$K_{\text{TASEP}} = \sup_{\rho_b \leq \rho \leq \rho_a} \log[\rho(1 - \rho)]. \quad (8.16)$$

et dans le chapitre 9.2.4

$$K_{\text{WASEP}} = \log(J) - \int_{\rho_b}^{\rho_a} \frac{d\rho}{\lambda\rho(1 - \rho)} \log \left(1 - \frac{\lambda\rho(1 - \rho)}{J} \right) \quad (8.17)$$

avec J le courant hydrodynamique, solution de (cf (4.41))

$$\int_{\rho_b}^{\rho_a} \frac{d\rho}{J - \lambda\rho(1 - \rho)} = 1 \quad . \quad (8.18)$$

8.1 Choix d'une représentation pour D et E

Le point de départ est le choix d'une certaine représentation pour les matrices D et E . Soit $\{|n \rangle\}_{n=1 \dots \infty}$ une base orthonormée. Nous définissons la représentation choisie par l'action des opérateurs D et E sur les vecteurs de la base :

$$D|n \rangle = \frac{1 - q^n}{1 - q} |n \rangle + \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} |n - 1 \rangle \quad (8.19)$$

$$E|n \rangle = \frac{1 - q^n}{1 - q} |n \rangle + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} |n + 1 \rangle \quad (8.20)$$

Il est aisé de vérifier qu'une telle représentation est bien solution de l'algèbre (4.54a). Pour avoir des vecteurs de bord $\langle W|$ et $|V\rangle$ respectant les conditions (4.54b-4.54c), on peut vérifier qu'il suffit de choisir

$$\langle W| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^n \langle n| \quad (8.21)$$

$$|V\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^n \frac{1 - q^n}{1 - q} |n\rangle \quad . \quad (8.22)$$

Cette représentation n'est cependant pas utilisable pour n'importe quel choix de densité ρ_a et ρ_b ; en effet, il faut que pour n'importe quel produit X de matrices D et E le produit scalaire $\langle W|X|V\rangle$ soit fini; quand $q \leq 1$ cette condition impose que $\rho_a > \rho_b$.

8.2 Somme sur les chemins, version discrète

L'étape suivante consiste simplement à développer le produit matriciel apparaissant dans le calcul du poids d'une configuration microscopique, et de l'écrire comme une somme sur des chemins. Pour ce faire, on introduit entre chaque matrice l'opérateur identité $\sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n|$. Ainsi, par exemple, on réécrira l'élément de matrice $\langle m+1|DE|m\rangle$ comme :

$$\langle m|DE|m\rangle = \langle m|D \left(\sum_{n=1}^{\infty} |n\rangle\langle n| \right) E|m\rangle \quad (8.23)$$

$$= \langle m|D|m\rangle\langle m|E|m\rangle + \langle m|D|m+1\rangle\langle m+1|E|m\rangle \quad (8.24)$$

où l'on a utilisé le fait que les seuls éléments matriciels non nuls sont de la forme $\langle n|D|n\rangle$, $\langle n|D|n+1\rangle$, $\langle n|E|n\rangle$ et $\langle n+1|E|n\rangle$ pour $n \geq 1$.

Introduisons donc l'ensemble Ω des marches discrètes positives ω de longueur $L+1$ et de pas 1, i.e. les suites d'entiers $\{n_i\}_{i=0,L}$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tous i :

$$n_i \geq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq n_i - n_{i-1} \leq 1 \quad (8.25)$$

La probabilité d'un état microscopique $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$, défini par ses nombres d'occupation η_i , peut s'exprimer à l'aide de l'ansatz matriciel (cf (4.52)), ce

qui donne

$$P(\{\eta_i\}_{i=1,L}) = \frac{1}{Z} \langle W | \left[\prod_{j=1}^L (\eta_j D + (1 - \eta_j) E) \right] | V \rangle \quad (8.26)$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{\{n_i\}_{i=0,L} \in \Omega} \langle W | n_0 \rangle \left[\prod_{j=1}^L \langle n_{j-1} | (\eta_j D + (1 - \eta_j) E) | n_j \rangle \right] \langle n_L | V \rangle \quad (8.27)$$

(Z est une constante de normalisation telle que la somme des probabilités de toutes les configurations possibles soit 1 ; en terme des matrices D et E , $Z = \langle W | (D + E)^L | V \rangle$ cf (4.53)). Dans la représentation choisie pour D et E , les éléments de matrice de la forme $\langle n | (\eta_j D + (1 - \eta_j) E) | n' \rangle$ sont donnés par

$$\langle n | (\eta_j D + (1 - \eta_j) E) | n' \rangle = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{si } \eta_j - 1 \leq n' - n \leq \eta_j \quad (8.28)$$

$$= 0 \quad \text{sinon .} \quad (8.29)$$

Définissons donc le poids Q d'une marche $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$ par

$$Q(\omega) = \frac{1}{Z} \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^{n_0} \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^{n_L} \prod_{i=0}^L \frac{1 - q^{n_i}}{1 - q} \quad (8.30)$$

et introduisons l'ensemble $\Omega(\eta)$ des marches compatibles avec la configuration $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$, défini comme l'ensemble des marches $\{n_i\}_{i=1,L}$ de Ω satisfaisant, pour $1 \leq i \leq L$,

$$\eta_i(\mathcal{C}) - 1 \leq n_i - n_{i-1} \leq \eta_i(\mathcal{C}) \quad . \quad (8.31)$$

C'est l'ensemble des marches pour lesquelles aucun des éléments de matrices apparaissant dans (8.27) n'est nul. On peut alors réécrire (8.27) comme

$$P(\eta) = \sum_{\omega \in \Omega(\eta)} Q(\omega) \quad . \quad (8.32)$$

En définissant

$$P(\eta, \omega) = Q(\omega) \quad \text{si } \omega \in \Omega(\eta) \quad (8.33)$$

$$= 0 \quad \text{sinon} \quad (8.34)$$

$P(\eta, \omega)$ peut être considérée comme la probabilité jointe de η et ω , ce qui mène à (8.1).

8.3 Prolongement du domaine de validité de la somme sur les chemins

La dérivation de la partie précédente montre que la somme sur les chemins (8.1) est valide lorsque

$$\rho_a > \rho_b \quad (8.35)$$

avec $P(\eta, \omega)$ donnée par (8.3). Pour des valeurs de ρ_a et ρ_b en dehors de (8.35), la somme (8.1) ne converge plus si $P(\eta, \omega)$ est toujours donnée par (8.3). Cependant, la probabilité $P(\eta)$ d'un processus d'exclusion de taille L finie est une fonction rationnelle des densités des réservoirs ρ_a et ρ_b , puisque l'on peut l'obtenir en résolvant l'équation maîtresse qui est linéaire. On peut donc obtenir $P(\eta)$ en effectuant le prolongement analytique de (8.1) sur l'ensemble des valeurs possibles pour ρ_a et ρ_b . Dans le cas où

$$\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \frac{\rho_b}{1 - \rho_b} q^{L+1} \geq 1 \quad (8.36)$$

on peut construire ce prolongement directement comme une somme sur des marches. En effet, on peut prolonger la représentation précédente (8.19-8.22) des matrices D et E . Considérons une base orthonormée $\{|n \rangle\}_{n=-1 \dots -\infty}$, où cette fois l'indice n de chaque vecteur de la base est *néglatif*. On vérifie aisément que l'on obtient bien une représentation de l'algèbre (4.54a) en définissant l'action de D et E sur cette base de manière similaire à (8.19-8.22) :

$$D|n\rangle = \frac{1 - q^n}{1 - q} |n\rangle + \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} |n - 1\rangle \quad (8.37)$$

$$E|n\rangle = \frac{1 - q^n}{1 - q} |n\rangle + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} |n + 1\rangle \quad (8.38)$$

$$\langle W| = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^n \langle n| \quad (8.39)$$

$$|V\rangle = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^n \frac{1 - q^n}{1 - q} |n\rangle \quad (8.40)$$

La seule différence avec la représentation précédente est que l'indice n de la base $|n\rangle$ prend uniquement des valeurs négatives. Ainsi, la dérivation précédente reste valide, en remplaçant les marches positives par des marches négatives. L'expression (8.1) reste donc valable en effectuant la somme sur les marches négatives au lieu des marches positives.

8.4 Somme sur les chemins, version continue : le cas du WASEP

Dans cette partie, nous établissons la version continue (8.9) de la formule (8.1), quand l'asymétrie q est donnée par $q = 1 - \frac{\lambda}{L}$. Il s'agit de déduire, à partir de la probabilité exacte $P(\mathcal{C}, \omega)$ d'un état microscopique \mathcal{C} et d'une marche discrète ω , une densité de probabilité sur les profils de densité $\{\rho(x)\}_{x \in [0,1]}$ et les chemins $\{y(x)\}_{x \in [0,1]}$ qui soit valable dans la limite des grands L , le chemin y étant l'équivalent macroscopique des marches discrètes ω .

Le poids d'une marche discrète $\{n_i\}$ est donné par (8.5)

$$Q(\{n_i\}_{i=0,L}) = \frac{1}{Z} \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^{n_0} \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^{n_L} \prod_{i=0}^L \frac{1 - q^{n_i}}{1 - q}. \quad (8.41)$$

Il peut se décomposer en 3 parties :

- un produit de termes centraux du style $1 - q^{n_i} \sim 1 - \exp(-\lambda \frac{n_i}{L})$ qui rend le poids d'autant plus grand que la hauteur n_i est grande, ils jouent donc le rôle d'un potentiel répulsif, qui favorise les marches s'éloignant de l'axe $n = 0$
- deux termes de bord $\left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^{n_0}$ et $\left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^{n_L}$, dont l'un au moins est maximal en $n = 1$, assurant ainsi la convergence de la somme (8.1).

Les marches qui maximisent le poids (8.41), sont de hauteurs d'ordre L . Pour le passage à la limite thermodynamique, on va donc faire un changement d'échelle d'ordre $\frac{1}{L}$ pour définir les chemins continus y à partir des marches discrètes. Choisissons donc une fonction $\{y(x)\}_{x \in [0,1]}$ et un profil de densité $\{\rho(x)\}_{x \in [0,1]}$. Pour définir la densité de probabilité $P(\{\rho\}, \{y\})$ à partir des configurations microscopiques $\{\eta_i\}_{i=1,L}$ et des marches microscopiques $\{n_i\}_{i=0,L}$ nous allons procéder de la même manière que pour la définition de la probabilité d'un profil macroscopique à partir de la probabilité d'un état microscopique pour un gaz sur réseau (cf chapitre 3.1) : pour chaque taille

L , nous définissons l'ensemble des marches discrètes $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$ et des configurations microscopiques $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$ compatibles avec le profil ρ et le chemin macroscopique y . La probabilité $P(\{\rho\}, \{y\})$ sera alors la limite pour L grand de la probabilité des ensembles microscopiques compatibles. Autrement dit,

$$P_L(\{\rho\}, \{y\}) = \sum_{(\eta, \omega) \in M_L(\rho, y)} P(\eta, \omega) \quad (8.42)$$

où $M_L(\rho, y)$ est l'ensemble des profils microscopiques η et des marches discrètes ω correspondant aux profils macroscopiques (ρ, y) à l'échelle L . Pour définir $M_L(\rho, y)$, on divise le système en k boîtes de bornes $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ avec $b_0 = 0$ et $b_L = L$, de tailles respectives $L_i = b_i - b_{i-1}$ telles que $1 \ll L_i \ll L$. Comme dans le chapitre 3.1, $N_{[b_{i-1}, b_i]}$ désigne, pour chaque configuration η , le nombre de particules dans la boîte i de frontières b_{i-1}, b_i , i.e $N_{[b_{i-1}, b_i]} = \sum_{b_{i-1} < j \leq b_i} \eta_j$

$M_L(\rho, y)$ contient les couples $(\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}, \omega = \{n_i\}_{i=0,L})$ vérifiant

- le profil microscopique η est compatible avec le profil macroscopique ρ : quelque soit la boîte mésoscopique i considérée,

$$N_{[b_{i-1}, b_i]} = \left\lfloor L_i \rho \left(\frac{b_{i-1}}{L} \right) \right\rfloor \quad (8.43)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ note la partie entière

- la marche ω est compatible avec le chemin macroscopique y : pour tout $0 \leq i \leq k$, on a

$$n_{b_i}(\omega) = \left\lfloor Ly \left(\frac{b_i}{L} \right) \right\rfloor . \quad (8.44)$$

Dans la limite $1 \ll L_i \ll L$, les poids $Q(\omega)$ des marches ω compatibles avec y sont tous logarithmiquement équivalents. En effet, pour tout j tel que $b_i \leq j \leq b_{i+1}$, on a

$$|n_j(\omega) - n_{b_i}(\omega)| \leq L_{i+1} \quad (8.45)$$

car la marche fait des sauts d'amplitude au maximum 1. Dans la limite $1 \ll L_{i+1} \ll L$ avec $q = 1 - \frac{\lambda}{L}$, on a donc pour tout j tel que $b_i \leq j \leq b_{i+1}$,

$$1 - q^{n_j} \sim 1 - q^{n_{b_i}} \quad (8.46)$$

$$\sim 1 - \exp\left(-\lambda \frac{n_{b_i}}{L}\right) \quad (8.47)$$

$$\sim 1 - \exp\left(-\lambda y\left(\frac{b_i}{L}\right)\right) . \quad (8.48)$$

Ainsi, quelque soit la marche $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$ compatible avec un certain chemin $\{y\}$, on a

$$\frac{\log(\mathcal{Q}(\omega))}{L} \sim K_{\text{WASEP}} + \frac{1}{L} \sum_{j=0}^L \log(1 - q^{n_j}) \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{n_0}{L} \log\left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a}\right) + \frac{n_L}{L} \log\left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b}\right) \\ &\sim K_{\text{WASEP}} + \int_0^1 dx \log\left(1 - \exp(-\lambda y(x))\right) \quad (8.50) \\ &+ y(0) \log\left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a}\right) + y(1) \log\left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b}\right) \end{aligned}$$

où K_{WASEP} est une constante de normalisation indépendante de ω . Le poids d'une marche compatible avec un chemin macroscopique $\{y\}$ ne dépend donc que de $\{y\}$ dans la limite L grand. Dans la somme (8.42), tous les termes non nuls sont donc équivalents; le calcul de la somme est donc ramené au calcul du nombre de termes non nuls. Considérons donc une boîte i , entre les sites b_{i-1} et b_i , et comptons sur cet intervalle le nombre de marches ω allant de $n_{b_{i-1}} = \lfloor Ly(\frac{b_{i-1}}{L}) \rfloor$ à $n_{b_i} = \lfloor Ly(\frac{b_i}{L}) \rfloor$ et compatible avec un profil η contenant $N_i = \lfloor L_i \rho(\frac{b_i}{L}) \rfloor$ particules. Si $y(\frac{b_{i-1}}{L}), y(\frac{b_i}{L}) > 0$, aucune des marches compatibles n'approche la barrière $n_i = 0$ au cours des L_i pas entre b_{i-1} et b_i , car $L_i \ll L$. Le nombre \mathcal{N} de telles marches est alors donné par

$$\mathcal{N} = \sum_{n_+ - n_- = n_{b_i} - n_{b_{i-1}}} \binom{L_i}{N_i} \binom{N_i}{n_+} \binom{L_i - N_i}{n_-} \quad (8.51)$$

où n_+ est le nombre de pas de la marche dirigés vers le haut, n_- le nombre de pas dirigés vers le bas, $\binom{L_i}{N_i}$ le nombre de façons de placer N_i particules parmi les L_i sites, $\binom{N_i}{n_+}$ le nombre de façons de placer les pas vers le haut de la marche parmi les N_i sites occupés par une particule, $\binom{L_i - N_i}{n_-}$ le nombre de façons de

placer les pas vers le bas de la marche parmi les sites vides. Si $n_{b_i} - n_{b_{i-1}} > N_i$ ou si $n_{b_i} - n_{b_{i-1}} < L_i - N_i$, le nombre \mathcal{N} de marches compatibles est 0. De même, si $y(\frac{b_i-1}{L}) < 0$, ou $y(\frac{b_i}{L}) < 0$, il n'y a pas de marches compatibles, car les marches doivent rester positives. Dans la limite L grand, en posant $x_i = \frac{b_i}{L}$, et en utilisant le fait que $\frac{N_i}{L_i} \sim \rho(x_i)$ et $\frac{n_{b_i} - n_{b_{i-1}}}{L_i} \sim y'(x_i)$, on a

– si $\rho(x_i) - 1 \leq y'(x_i) \leq \rho(x_i)$ et $y(x_i) > 0$

$$\begin{aligned} \log \mathcal{N} = L_i & \left[-\rho(x_i) \log \rho(x_i) - (1 - \rho(x_i)) \log (1 - \rho(x_i)) \right. \\ & - (1 - \rho(x_i) + y'(x_i)) \log (1 - \rho(x_i) + y'(x_i)) \\ & \left. - (\rho(x_i) - y'(x_i)) \log (\rho(x_i) - y'(x_i)) + o(1) \right] \quad (8.52) \end{aligned}$$

– sinon $\mathcal{N} = 0$

En répétant ce calcul pour chacune des boîtes, et en insérant ce résultat, ainsi que (8.50) dans la somme (8.42), on obtient :

$$P_L(\{\rho\}, \{y\}) \sim e^{-L\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\})} \quad (8.53)$$

avec la fonctionnelle $\mathcal{G}_{\text{WASEP}}$ donnée par (8.11) :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{WASEP}}(\{\rho\}; \{y\}) = & -K_{\text{WASEP}} + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ & + \int_0^1 dx \left[-\log \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} + \rho \log \rho + (1 - \rho) \log (1 - \rho) \right. \\ & \left. + (1 - \rho + y') \log (1 - \rho + y') + (\rho - y') \log (\rho - y') \right], \quad (8.54) \end{aligned}$$

pour les fonctions y positives telles que quelque soit x , $\rho(x) - 1 \leq y'(x) \leq \rho(x)$, et $\mathcal{G}_{\text{WASEP}}(\{\rho(x)\}; \{y(x)\}) = \infty$ sinon. K_{WASEP} est une constante de normalisation, choisie de telle sorte que la probabilité totale de l'ensemble des couples $(\{\rho\}, \{y\})$ soit 1. Dans la limite des grands L , cela entraîne que $\min \mathcal{G}_{\text{WASEP}}(\{\rho(x)\}; \{y(x)\}) = 0$. La probabilité d'un profil ρ s'écrit alors, avec les notations classiques d'intégrale de chemin

$$P_L(\rho) \sim \mathcal{D}[\{\rho\}] \int_{\{y\}} P_L(\rho, y) \mathcal{D}[\{y\}] \quad (8.55)$$

8.5 Somme sur les chemins, version continue : le cas du TASEP

Le passage à la limite continue pour le TASEP est similaire à celle du WASEP, sauf que le «potentiel» $1 - q^n$ qui favorisait les marches s'éloignant de la barrière $y = 0$ n'est plus présent quand $q = 0$. Ainsi, les effets de la condition $y > 0$ vont se faire sentir de manière beaucoup plus brutale, comme nous le verrons à propos des fluctuations (cf chapitre 10).

Les formules (8.9) et (8.10) restent valables, mais le terme potentiel $\log(1 - \exp(-\lambda y))$ dans $\mathcal{G}_{\text{WASEP}}$ (8.11) disparaît, ce qui donne (8.13).

9. FONCTION DE GRANDES DÉVIATIONS POUR LE PROCESSUS FAIBLEMENT ASYMÉTRIQUE : UN LIEN ENTRE SSEP ET TASEP

Le but de ce chapitre est l'obtention de la fonctionnelle de grandes déviations $\mathcal{F}_{\text{WASEP}}$ dans le cas faiblement asymétrique. La fonctionnelle de grandes déviations \mathcal{F} donne le comportement asymptotique, pour des tailles de système L grandes, de la densité de probabilité $P(\{\rho\})$ d'observer un certain profil macroscopique $\{\rho\}$ dans l'état stationnaire (cf chapitre 3.4.3)

$$P(\{\rho\}) \propto \exp\{-L\mathcal{F}(\{\rho\})\} ; \quad (9.1)$$

La motivation principale pour ce calcul est de faire le lien entre deux résultats précédemment obtenus par Derrida, Lebowitz et Speer [24–27] : la fonctionnelle de grande déviation dans le cas symétrique, qui peut être retrouvée par la méthode de Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim [7, 8] présentée dans le chapitre 3.4.3, et la fonctionnelle de grande déviation dans le cas fortement asymétrique, où cette méthode ne s'applique pas. Nous allons commencer par rappeler les résultats déjà obtenus dans le cas symétrique et asymétrique pour ensuite introduire nos résultats pour le cas faiblement asymétrique. Dans le chapitre 9.4, nous montrerons que ces résultats sont compatibles avec l'approche macroscopique de Bertini *et al.*

9.1 Résultats précédents

9.1.1 Le cas symétrique

Dans le cas symétrique, i.e. pour $q = 1$, il a été montré dans [7, 24] que la fonctionnelle de grande déviation, que l'on notera $\mathcal{F}_{\text{SSEP}}$, s'écrit

$$\mathcal{F}_{\text{SSEP}}(\{\rho\}) = \sup_{F(x)} \int_0^1 dx \left\{ \rho(x) \log \left(\frac{\rho(x)}{F(x)} \right) + (1 - \rho(x)) \log \left(\frac{1 - \rho(x)}{1 - F(x)} \right) + \log \left(\frac{F'(x)}{\rho_b - \rho_a} \right) \right\}. \quad (9.2)$$

où le sup est sur l'ensemble des fonctions monotones $\{F(x)\}_{0 \leq x \leq 1}$ satisfaisant

$$F(0) = \rho_a, \quad F(1) = \rho_b. \quad (9.3)$$

La fonction F qui réalise ce minimum est la solution monotone de l'équation différentielle non linéaire suivante

$$\rho(x) = F(x) + \frac{F(x)(1 - F(x))F''(x)}{F'(x)^2}, \quad (9.4)$$

avec les conditions aux bords (9.3).

La dérivation que nous proposons pour la fonctionnelle de grandes déviations dans le cas faiblement asymétrique (chapitre 9.2) englobe le cas symétrique, comme nous le verrons au chapitre 9.3.

9.1.2 Le cas asymétrique

Dans le cas asymétrique, (i.e. pour $q < 1$ constant), l'expression de la fonctionnelle de grandes déviations $\mathcal{F}_{\text{TASEP}}$ est donnée par [25, 27]

– dans le cas $\rho_a \geq \rho_b$,

$$\mathcal{F}_{\text{TASEP}}(\{\rho\}) = -K_{\text{TASEP}} + \sup_{F(x)} \int_0^1 dx \left\{ \rho(x) \log [\rho(x)(1 - F(x))] + (1 - \rho(x)) \log [(1 - \rho(x))F(x)] \right\}, \quad (9.5)$$

où le sup est sur l'ensemble de toute les fonctions décroissantes $F(x)$ tel que $F(0) = \rho_a$ et $F(1) = \rho_b$ et

$$K_{\text{TASEP}} = \sup_{\rho_b \leq \rho \leq \rho_a} \log[\rho(1 - \rho)], \quad (9.6)$$

Comme expliqué dans [27], la fonction $F(x)$ qui réalise le sup dans (9.5) est la dérivée de l'enveloppe concave de $\int_0^x [1 - \rho(x')] dx'$ lorsque cette dérivée appartient à l'intervalle $]\rho_b, \rho_a[$, et prend la valeur ρ_a ou ρ_b sinon. Il en découle que quand la fonction $F(x)$ diffère de ρ_a ou ρ_b , elle se compose d'une succession de domaines où $F(x) = 1 - \rho(x)$ et de domaines où $F(x)$ est constante (comme $F(x)$ est décroissante, elle ne peut pas toujours coïncider avec $1 - \rho(x)$). Dans les domaines où $F(x)$ est constante (et diffère de ρ_a et ρ_b), elle satisfait à la construction de Maxwell : si $F(x) = C$ pour $0 < t \leq x \leq u < 1$, sa valeur est déterminée par

$$(u - t)C = \int_t^u [1 - \rho(x)] dx \quad (9.7)$$

– quand $\rho_a \leq \rho_b$ la fonctionnelle de grandes déviations est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{TASEP}}(\{\rho\}) = & -K'_{\text{TASEP}} + \quad (9.8) \\ \inf_{0 \leq y \leq 1} & \left\{ \int_a^y dx \rho(x) \log [\rho(x)(1 - \rho_a)] + (1 - \rho(x)) \log [(1 - \rho(x))\rho_a] \right. \\ & \left. + \int_y^b dx \rho(x) \log [\rho(x)(1 - \rho_b)] + (1 - \rho(x)) \log [(1 - \rho(x))\rho_b] \right\}. \end{aligned}$$

avec

$$K'_{\text{TASEP}} = \min [\log \rho_a(1 - \rho_a), \log \rho_b(1 - \rho_b)], \quad (9.9)$$

9.2 La fonctionnelle de grandes déviations pour le WASEP

9.2.1 Résumé de nos résultats

Dans cette section, nous considérons le processus d'exclusion faiblement asymétrique en contact avec deux réservoirs de densités ρ_a et ρ_b , avec un taux de saut des particules vers la droite normalisé à 1 est un taux de saut vers la gauche q qui décroît avec la taille L du système de la manière suivante :

$$q = 1 - \frac{\lambda}{L} \quad (9.10)$$

où λ est un paramètre fixe. Nous allons donner différentes expressions équivalentes de la fonctionnelle de grandes déviations de densité dans l'état sta-

tionnaire, \mathcal{F} , valides dans le domaine de paramètre

$$\begin{aligned} \lambda &> 0 \\ \rho_a &> \rho_b \quad . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Notre premier résultat décrit \mathcal{F} comme un extremum sur un ensemble de chemins y ; il découle directement de (8.9) et (8.10) :

$$\mathcal{F}(\{\rho(x)\}) = \inf_{\{y\}} \mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\}) \tag{9.12}$$

où $\mathcal{G}(\{\rho(x)\}; \{y(x)\})$ est donné par (8.11) pour le domaine de paramètres 9.11 considéré, c'est à dire :

$$- \text{ si } \forall x, y(x) > 0 \text{ et } \rho(x) - 1 \leq y'(x) \leq \rho(x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\{\rho\}; \{y\}) &= -K_{\text{WASEP}} + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ &+ \int_0^1 dx \left[-\log \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} + \rho \log \rho + (1 - \rho) \log (1 - \rho) \right. \\ &\left. + (1 - \rho + y') \log (1 - \rho + y') + (\rho - y') \log (\rho - y') \right], \end{aligned} \tag{9.13}$$

$$- \text{ sinon,}$$

$$\mathcal{G}(\{\rho(x)\}; \{y(x)\}) = \infty \quad . \tag{9.14}$$

Comme par définition \mathcal{G} n'est finie que pour les fonctions positives y tel que

$$\rho(x) - 1 \leq y'(x) \leq \rho(x) \quad ,$$

on peut se contenter de rechercher le inf sur cet ensemble de fonctions.

L'expression (9.12) pour \mathcal{F} peut être également reformulée à l'aide d'une fonction auxiliaire $F = \{F(x)\}_{0 \leq x \leq 1}$ (cf chapitre 9.2.3 pour les détails de la dérivation)

$$\mathcal{F}(\{\rho\}) = \mathcal{H} \left(\{\rho\}, \left\{ \log \frac{F}{1 - F} \right\} \right) \tag{9.15}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\{\rho\}, \{\phi\}) &= -K_{\text{WASEP}} + \int_0^1 \left\{ \rho(x) \log \rho(x) + (1 - \rho(x)) \log (1 - \rho(x)) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \rho(x)) \phi(x) - \log (1 + e^{\phi(x)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi'(x)}{\lambda} \log (-\phi'(x)) + \left(1 - \frac{\phi'(x)}{\lambda} \right) \log (\lambda - \phi'(x)) \right\} \quad , \end{aligned} \tag{9.16}$$

où K_{WASEP} est la constante de normalisation donnée par (8.17) et où la fonction F est solution de l'équation différentielle suivante

$$(F - \rho)F'^2 + F(1 - F)F'' + \lambda F(1 - F)(F - 1 + \rho)F' = 0 \quad (9.17)$$

avec pour conditions aux bords

$$F(0) = \rho_a \quad F(1) = \rho_b \quad (9.18)$$

Nous verrons (chapitre 9.2.3) que dans le domaine de validité (9.11), cette équation différentielle a une solution unique, et cette solution est monotone. En fait, l'équation (9.17) correspond à la condition que F *maximise* la fonctionnelle $\mathcal{H} \left(\{\rho\}, \left\{ \log \frac{F(x)}{1-F(x)} \right\} \right)$ sous la contrainte (9.18), et l'on a donc

$$\mathcal{F}(\{\rho(x)\}) = \sup_F \mathcal{H} \left(\{\rho\}, \left\{ \log \frac{F}{1-F} \right\} \right) \quad (9.19)$$

où le sup est pris sur l'ensemble des fonctions décroissantes vérifiant (9.18). Pour voir que la fonctionnelle de grandes déviations dans le cas faiblement asymétrique interpole entre celle du cas symétrique (9.2) et celle du cas totalement asymétrique (9.5), on peut réécrire $\mathcal{H}(\{\rho\}, \{\log \frac{F}{1-F}\})$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \left(\{\rho(x)\}, \left\{ \log \frac{F}{1-F} \right\} \right) &= -K_{\text{WASEP}} + \int_0^1 dx \left\{ \rho \log \frac{\rho}{F} \right. \\ &\quad + (1 - \rho) \log \frac{1 - \rho}{1 - F} + \log (F(1 - F)\lambda - F') \\ &\quad \left. + \frac{F'}{\lambda F(1 - F)} \log \left(-\frac{F'}{F(1 - F)\lambda - F'} \right) \right\} \quad (9.20) \end{aligned}$$

Une conséquence immédiate de l'expression (9.19) est que, comme la fonctionnelle \mathcal{F} est un sup sur un ensemble de fonctions convexes de ρ , elle est elle-même une fonction convexe de ρ dans le domaine (9.11).

9.2.2 La fonctionnelle de grandes déviations donnée par un chemin optimal

La fonctionnelle de grandes déviations \mathcal{F} est définie comme

$$\mathcal{F}(\rho) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\log P_L(\rho)}{L} \quad (9.21)$$

Dans (8.9), P_L s'écrit comme une somme sur des fonctions exponentiellement décroissantes de L ; cette somme est dominée par le terme maximum. Ainsi

$$P_L(\rho) \sim \int_{\{y\}} P_L(\rho, y) \mathcal{D}[\{y\}] \quad (9.22)$$

$$\sim \sup_y P_L(\rho, y) \quad (9.23)$$

où le sup est pris sur les fonctions y positives pour lesquelles $P_L(\rho, y)$ est défini. Ceci nous donne directement l'expression (9.12) pour la fonctionnelle de grandes déviations pour le processus d'exclusion faiblement asymétrique, en utilisant (8.10) :

$$\mathcal{F} = \inf_{\{y\}} \mathcal{G}(\{\rho\}; \{y\}) \quad (9.24)$$

avec $\{y\}$ une fonction positive, et \mathcal{G} donnée par (9.13).

9.2.3 Obtention de l'équation différentielle (9.17) pour la fonctionnelle de grandes déviations

Dans cette partie, nous allons transformer l'expression (9.12)

$$\mathcal{F} = \inf_{\{y\}} \mathcal{G}(\{\rho\}; \{y\}) \quad (9.25)$$

pour obtenir l'expression (9.15) de la fonctionnelle de grandes déviations

$$\mathcal{F}(\{\rho\}) = \mathcal{H} \left(\{\rho\}, \left\{ \log \frac{F}{1-F} \right\} \right) \quad (9.26)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\{\rho\}, \{\phi\}) = & -K_{\text{WASEP}} + \int_0^1 \left\{ \rho(x) \log \rho(x) + (1 - \rho(x)) \log (1 - \rho(x)) \right. \\ & + (1 - \rho(x)) \phi(x) - \log (1 + e^{\phi(x)}) \\ & \left. + \frac{\phi'(x)}{\lambda} \log (-\phi'(x)) + \left(1 - \frac{\phi'(x)}{\lambda} \right) \log (\lambda - \phi'(x)) \right\} \quad , \quad (9.27) \end{aligned}$$

où la fonction F est solution de

$$(F - \rho)F'^2 + F(1 - F)F'' + \lambda F(1 - F)(F - 1 + \rho)F' = 0 \quad (9.28)$$

avec pour conditions aux bords

$$F(0) = \rho_a \qquad F(1) = \rho_b \qquad (9.29)$$

Tout d'abord, la fonctionnelle \mathcal{G} dans (9.25) est une fonction convexe de y . En effet, elle est donnée par (9.13), i.e., pour les fonctions $\{y\}$ positives telles que $\rho' - 1 \leq y' \leq \rho'$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{WASEP}}(\{\rho\}; \{y\}) = & -K_{\text{WASEP}} + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ & + \int_0^1 dx \left[-\log \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} + \rho \log \rho + (1 - \rho) \log (1 - \rho) \right. \\ & \left. + (1 - \rho + y') \log (1 - \rho + y') + (\rho - y') \log (\rho - y') \right], \end{aligned} \quad (9.30)$$

et infinie ailleurs. Elle est donc la somme de fonctions convexes de $\{y\}$:

- de $y(1) \log(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b}) - y(0) \log(\frac{\rho_a}{1 - \rho_a})$, linéaire (donc convexe) en $\{y\}$
- du «potentiel» $h_p(y) = -\log(1 - e^{-\lambda y})$,
- de fonctions «entropiques» $g(\rho) + g(1 - \rho + y')$, composées de la fonction convexe $g(x) = x \log(x) + (1 - x) \log(1 - x)$, et de la fonction linéaire «dérivée» $y \rightarrow y'(x)$

La convexité de la fonctionnelle $\mathcal{G}(\{y\}, \{\rho\})$ par rapport aux fonctions $\{y\}$ entraîne qu'il existe un unique chemin $\{y_m\}$ qui réalise le minimum dans (9.25), et l'on a donc

$$\mathcal{F}(\{\rho\}) = \mathcal{G}(\{y_m\}, \{\rho\}) \qquad (9.31)$$

D'autre part ce minimum n'est pas atteint aux bords du domaine de définition de (9.30) ; en effet ceux ci sont trop coûteux : la fonction $h_p(y)$ a une pente infinie en $y = 0$, de même que $g(x)$ en $x = 0$ ou $x = 1$. Ce minimum $y_m(x)$ est donc l'unique point stationnaire, unique solution de

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}(\{y\}, \{\rho\})}{\partial y(x)} \right|_{y=y_m} = 0 \quad . \qquad (9.32)$$

Or, après intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}(\{y\}, \{\rho\})}{\partial y(x)} \Big|_{y=y_m} &= -\delta(x) \log \left(\frac{1 - \rho(x) + y'(x)}{\rho(x) - y'(x)} \frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right) \\ &+ \delta(1-x) \log \left(\frac{1 - \rho(x) + y'(x)}{\rho(x) - y'(x)} \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \right) - \frac{\lambda e^{-\lambda y(x)}}{1 - e^{-\lambda y(x)}} \\ &+ \frac{\rho'(x) - y''(x)}{(1 - \rho(x) + y'(x))(\rho(x) - y'(x))} \end{aligned} \quad (9.33)$$

où $\delta(x)$ est la fonction δ de Dirac. y_m satisfait donc

$$\frac{\rho'(x) - y''_m(x)}{(1 - \rho(x) + y'_m(x))(\rho(x) - y'_m(x))} - \lambda \frac{e^{-\lambda y_m(x)}}{1 - e^{-\lambda y_m(x)}} = 0 \quad (9.34)$$

avec comme conditions aux bords

$$1 - \rho(0) + y'_m(0) = \rho_a \quad 1 - \rho(1) + y'_m(1) = \rho_b \quad (9.35)$$

en plus de la condition d'être positive.

Pour obtenir l'équation (9.28), on réécrit (9.34) avec la fonction $F(x)$ définie par

$$F(x) = 1 - \rho(x) + y'_m(x) \quad . \quad (9.36)$$

Cela entraîne

$$\frac{F'(x)}{F(x)(1 - F(x))} = -\lambda \frac{e^{-\lambda y_m(x)}}{1 - e^{-\lambda y_m(x)}} \quad (9.37)$$

avec les conditions aux bords

$$F(0) = \rho_a \quad F(1) = \rho_b \quad (9.38)$$

La fonctionnelle \mathcal{G} (donnée par (9.30)) est finie seulement pour les marches y telles que $\rho - 1 \leq y' \leq \rho$. On a donc, forcément,

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad (9.39)$$

La condition $y_m > 0$ a pour conséquence, en utilisant (9.37),

$$F'(x) < 0 \quad (9.40)$$

En éliminant y_m entre (9.36) et (9.37), on obtient l'équation (9.28).

Pour obtenir (9.26), nous allons montrer que

$$\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y_m\}) = \mathcal{H} \left(\{\rho\}, \left\{ \log \frac{F(x)}{1-F(x)} \right\} \right) \quad (9.41)$$

Définissons

$$\phi(x) = \log \frac{F(x)}{1-F(x)} . \quad (9.42)$$

D'après les conditions aux bords (9.38) pour F , on a $\phi(0) = \log \frac{\rho_a}{1-\rho_a}$ et $\phi(1) = \log \frac{\rho_b}{1-\rho_b}$. Dans $\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y_m\})$, on peut donc écrire les termes de bord comme

$$y(0) \log \frac{\rho_a}{1-\rho_a} - y(1) \log \frac{\rho_b}{1-\rho_b} = - [y(x)\phi(x)]_0^1 \quad (9.43)$$

$$= - \int_0^1 dx [y'(x)\phi(x) + y(x)\phi'(x)] . \quad (9.44)$$

De plus, en utilisant (9.42) et (9.36), on peut exprimer y'_m en terme de ϕ :

$$y'_m(x) = \frac{e^{\phi(x)}}{1-e^{\phi(x)}} + \rho(x) - 1 . \quad (9.45)$$

De même, l'équation différentielle (9.37) peut s'écrire

$$\phi'(x) = -\lambda \frac{e^{-\lambda y_m(x)}}{1-e^{-\lambda y_m(x)}} \quad (9.46)$$

ce qui permet d'exprimer y_m en terme de ϕ

$$y_m(x) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{\lambda - \phi'(x)}{\phi'(x)} \quad (9.47)$$

L'égalité (9.41) s'obtient alors en remplaçant dans $\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y_m\})$ tous les termes y_m par (9.47) et les termes y'_m par (9.45) après avoir fait la substitution (9.44).

Nous allons maintenant justifier le fait que l'égalité (9.26) puisse s'écrire sous la forme (9.19), comme un sup sur les fonctions F . Tout d'abord, l'équation différentielle (9.17) correspond bien à la condition que F soit un extremum de $\mathcal{H} \left(\{\rho\}, \left\{ \log \frac{F(x)}{1-F(x)} \right\} \right)$:

$$\frac{\partial \mathcal{H} \left(\{\rho\}, \left\{ \log \left(\frac{F}{1-F} \right) \right\} \right)}{\partial F} = 0 . \quad (9.48)$$

D'autre part, comme pour tous x , $-\log(1 + e^{\phi(x)})$ et $\frac{\phi'(x)}{\lambda} \log(-\phi'(x)) + \left(1 - \frac{\phi'(x)}{\lambda}\right) \log(\lambda - \phi'(x))$ sont des fonctionnelles concaves de la fonction $\{\phi\}$ sur le domaine $\phi' < 0$ (ce qui est ici toujours le cas car $F' < 0$ dans le domaine (9.11)), $\mathcal{H}(\{\rho\}, \{\phi\})$ est une fonctionnelle concave de la fonction $\{\phi\}$. Donc l'extremum définie par (9.48) est l'unique maximum de $\mathcal{H}\left(\{\rho\}, \left\{\log \frac{F(x)}{1-F(x)}\right\}\right)$, ce qui entraîne (9.19).

9.2.4 Le profil le plus probable et la détermination de la constante

$$K_{\text{WASEP}}$$

Pour déterminer K_{WASEP} , on utilise le fait que le profil le plus probable $\{\bar{\rho}\}$, i.e. celui qui minimise la fonctionnelle de grandes déviations \mathcal{F} , doit vérifier

$$\mathcal{F}(\{\bar{\rho}\}) = 0 \quad . \quad (9.49)$$

Le profil le plus probable est solution de

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}(\{\rho\})}{\partial \rho(x)} \right|_{\bar{\rho}} = 0 \quad . \quad (9.50)$$

A partir de (9.19), on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\{\rho\})}{\partial \rho(x)} = \frac{\partial \mathcal{G}(\{\rho\}; \{y_m\})}{\partial \rho(x)} \quad (9.51)$$

$$= \log \frac{\rho(x)(1-F(x))}{(1-\rho(x))F(x)} \quad (9.52)$$

(où l'on a utilisé le fait que $\{y_m\}$ minimise \mathcal{G} , cf (9.32)). On a donc, pour le profil le plus probable $\bar{\rho}(x)$

$$F(x) = \bar{\rho}(x) \quad . \quad (9.53)$$

L'équation (9.17) devient alors

$$\bar{\rho}'' = \lambda \bar{\rho}'(1 - 2\bar{\rho}) \quad (9.54)$$

avec comme conditions aux bords

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(0) &= \rho_a \\ \bar{\rho}(1) &= \rho_b \quad . \end{aligned} \quad (9.55)$$

En intégrant (9.54) une fois on retrouve bien l'équation du profil moyen (4.37)

$$\bar{\rho}' = \lambda \bar{\rho}(1 - \bar{\rho}) - J \quad (9.56)$$

où J est le courant hydrodynamique moyen dans l'état stationnaire, que l'on peut écrire, en utilisant les conditions aux bords (9.55), sous la forme (8.18). $\mathcal{F}(\{\bar{\rho}\})$ peut alors être évalué à partir de (9.15), en utilisant l'expression (9.20) pour $\mathcal{H}\left(\{\rho\}, \left\{\log \frac{F(x)}{1-F(x)}\right\}\right)$, et les équations (9.53) et (9.56). La condition (9.49) entraîne alors que K_{WASEP} est donnée par l'équation (8.17)

$$K_{\text{WASEP}} = \log(J) - \int_{\rho_b}^{\rho_a} \frac{d\rho}{\lambda \rho(1-\rho)} \log\left(1 - \frac{\lambda \rho(1-\rho)}{J}\right) . \quad (9.57)$$

9.3 De SSEP à ASEP

Dans cette section, je montre comment les expressions de la fonctionnelle de grande déviation dans le cas symétrique (9.2) et totalement asymétrique (9.5) apparaissent comme limites de la fonctionnelle de grande déviation pour le cas faiblement asymétrique (9.12-9.20).

9.3.1 La limite SSEP

La limite symétrique correspond au cas $\lambda \rightarrow 0$. Or cette limite existe pour toutes les expressions que nous avons écrites, en commençant par les représentations de D et E . On peut sans difficulté étendre notre dérivation pour englober le cas symétrique en faisant tendre dans les expressions λ vers 0. On vérifie alors que l'on retrouve bien les résultats connus pour le cas symétrique. Par exemple, pour le courant (8.18), on a au premier ordre en λ

$$j = \frac{\rho_a - \rho_b}{L} + \frac{\lambda}{L} \left(\frac{\rho_a + \rho_b}{2} - \frac{\rho_a^2 + \rho_a \rho_b + \rho_b^2}{3} \right) + O(\lambda^2) . \quad (9.58)$$

Cette expression redonne correctement (quand $\lambda \rightarrow 0$) le résultat du cas symétrique $j = \frac{\rho_a - \rho_b}{L}$ [80].

La constante K_{WASEP} tend vers la limite

$$K_{\text{WASEP}} = \log(\rho_a - \rho_b) + 1 + O(\lambda) , \quad (9.59)$$

et donc la fonction de grande déviation (9.15) vers

$$\mathcal{F} = \int_0^1 dx \left\{ \rho \log \left(\frac{\rho}{F} \right) + (1 - \rho) \log \left(\frac{1 - \rho}{1 - F} \right) + \log(-F') \right\} + \log(\rho_a - \rho_b) + O(\lambda) \quad . \quad (9.60)$$

qui est en accord avec l'expression (9.2) pour le SSEP en notant le fait que l'équation (9.4) pour F est la limite $\lambda \rightarrow 0$ de (9.17).

9.3.2 La limite fortement asymétrique (pour $\rho_a > \rho_b$)

La limite fortement asymétrique est moins évidente que la limite symétrique. Nous allons montrer que prendre la limite $\lambda \rightarrow \infty$ permet de retrouver les résultats de l'ASEP, par exemple (9.5) à partir de (9.15).

Tout d'abord, pour λ fini, le courant J est solution de (8.18)

$$\int_{\rho_b}^{\rho_a} \frac{d\rho}{J - \lambda\rho(1 - \rho)} = 1 \quad . \quad (9.61)$$

Pour λ grand, la solution est donnée par

$$J \simeq \max_{\rho_b \leq \rho \leq \rho_a} \lambda\rho(1 - \rho) \quad . \quad (9.62)$$

Dans le domaine de validité $\rho_a > \rho_b$ de la dérivation, le courant microscopique $j \sim \frac{J}{L}$ est donc donné par

$$j \sim \sup_{\rho_b \leq \rho \leq \rho_a} \frac{\lambda}{L} \rho(1 - \rho) \quad (9.63)$$

ce qui est en accord avec le courant du processus d'exclusion totalement asymétrique $j = \sup_{\rho_b \leq \rho \leq \rho_a} (1 - q)\rho(1 - \rho)$ (cf (4.21)) avec $q = 1 - \frac{\lambda}{L}$. La constante K_{WASEP} est reliée à J par (8.17)

$$K_{\text{WASEP}} = \log(J) - \int_{\rho_b}^{\rho_a} \frac{d\rho}{\lambda\rho(1 - \rho)} \log \left(1 - \frac{\lambda\rho(1 - \rho)}{J} \right) \quad (9.64)$$

Il s'ensuit dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$ que $K_{\text{WASEP}} \simeq \log J$. Il est facile de voir alors que dans la limite des grands λ , l'expression (9.19) de la fonctionnelle de grandes déviations du cas faiblement asymétrique tend vers celle du cas totalement asymétrique (9.5).

Un autre aspect particulièrement intéressant de la limite $\lambda \rightarrow \infty$ est de voir comment la construction de Maxwell (9.7) de la fonction F dans le cas asymétrique découle de l'équation différentielle (9.17) que doit résoudre F dans le cas faiblement asymétrique

$$(F - \rho)F'^2 + F(1 - F)F'' + \lambda F(1 - F)(F - 1 + \rho)F' = 0 \quad . \quad (9.65)$$

Si λ devient infinie, (9.65) entraîne que soit $F \simeq 1 - \rho$, soit $F' \simeq 0$. On s'attend donc à ce que F se compose, dans cette limite, d'une succession de domaines avec $F(x) \simeq 1 - \rho(x)$ et de domaines où $F(x)$ est constant, avec la contrainte supplémentaire que F doit être monotone (puisque c'est le cas pour toutes valeurs de λ finies), et $\rho_b \leq F(x) \leq \rho_a$.

Dans un domaine où $F(x) \simeq 1 - \rho(x)$, on peut obtenir un développement de F en puissances de $\frac{1}{\lambda}$ à partir de (9.65) :

$$F = 1 - \rho + \frac{1}{\lambda} \left[\rho' \frac{1 - 2\rho}{\rho(1 - \rho)} - \frac{\rho''}{\rho'} \right] + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad . \quad (9.66)$$

La condition $F' < 0$ (9.40) implique que dans de tels domaines, $\rho' > 0$

Dans un domaine, délimité par $x = t$ et $x = u$, où $F(x)$ est pratiquement égal à une constant C pour $t < x < u$, on obtient, en négligeant les termes en F'^2 dans (9.65) (car $F'^2 \ll \lambda F'$),

$$F'(x) = B \exp \left[-\lambda \int_t^x (C - 1 + \rho(x')) dx' \right] \quad (9.67)$$

où B est constant sur l'ensemble du domaine $t < x < u$.

Pour passer d'un domaine $F(x)$ constante à un domaine $F(x) \simeq 1 - \rho(x)$, il faut que $F'(x)$ passe d'une valeur proche de 0 à une valeur d'ordre 1. Si l'on considère la formule (9.67), on voit que si $F(x)$ est constant égal à C sur un domaine $t < x < u$ avec $F'(t^-) \sim -\rho'(t)$ et $F'(u^+) \simeq -\rho'(u)$, alors dans la limite λ grand, $\int_t^x (C - 1 + \rho(x')) dx'$ doit être positif sur l'intervalle $t < x < u$, et changer de signe en $x = t$ et $x = u$ ($F'(t^-)$ signifie la limite à gauche en t , et $F'(u^+)$ la limite à droite en u). On a donc

$$\int_t^u (C - 1 + \rho(x')) dx' = 0 \quad (9.68)$$

ce qui correspond à la construction de Maxwell (9.7) pour la fonction F dans le cadre de l'ASEP. Dans notre article [30], nous avons étudié de manière plus précise le comportement de la fonction F à la frontière entre deux domaines.

9.4 Lien avec l'approche macroscopique de Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim

Cette partie a pour but de montrer que la fonctionnelle de grandes déviations du processus d'exclusion faiblement asymétrique que nous avons obtenue à partir de la dynamique microscopique dans la partie 9.2 est en accord avec les prédictions de l'approche macroscopique de Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim, que nous avons présentée dans le chapitre 3.4.3. Il s'agit d'une généralisation au cas faiblement asymétrique du calcul fait par Bertini *et al.* dans le cadre de du processus d'exclusion symétrique [8]. Nous nous contenterons de vérifier sur un point précis la cohérence des deux approches ; Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim devraient présenter bientôt [6] une dérivation plus complète de la fonctionnelle de grandes déviations du WASEP par leur approche macroscopique.

D'après l'approche macroscopique de Bertini *et al.*, la fonctionnelle de grandes déviations \mathcal{F} doit être solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (3.43), qui dans ce cas s'écrit

$$\int_0^1 dx \left\{ \left(-\partial_x \rho(x) + \lambda \rho(x)(1 - \rho(x)) \right) \partial_x \frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} + \rho(x)(1 - \rho(x)) \left(\partial_x \frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} \right)^2 \right\} = 0 . \quad (9.69)$$

où l'on a utilisé l'expression (4.34) du courant hydrodynamique pour le WASEP

$$J^{\text{hydro}}(\rho, \nabla \rho) = -D(\rho) \nabla \rho + \lambda \sigma(\rho) \quad (9.70)$$

avec $D(\rho) = 1$ la constante de diffusion, et $\sigma(\rho) = \rho(1 - \rho)$ la conductivité. Nous nous contenterons de vérifier, en suivant leur démonstration [8] pour le cas symétrique, que l'expression de la fonctionnelle de grandes déviations (9.15-9.17) est bien solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (9.69).

D'après notre dérivation (chapitre 9.2), $\frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)}$ s'écrit (cf (9.52))

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\{\rho(x)\})}{\partial \rho(x)} = \log \frac{\rho(x)}{1 - \rho(x)} - \log \frac{F(x)}{1 - F(x)} \quad (9.71)$$

avec $F(x)$ solution de (9.17)

$$(F - \rho)F'^2 + F(1 - F)F'' + \lambda F(1 - F)(F - 1 + \rho)F' = 0 \quad (9.72)$$

avec les conditions aux bords $F(0) = \rho_a$, $F(1) = \rho_b$ En introduisant (9.71) dans le membre de gauche de l'équation de Hamilton-Jacobi (9.69), on obtient

$$\int_0^1 dx \left(\partial_x \rho(x) - \frac{\rho(x)(1 - \rho(x))\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} \right) \times \left(\frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} - \lambda \right) = 0 \quad (9.73)$$

Ceci peut être réécrit en

$$\int_0^1 dx (\partial_x \rho(x) - \partial_x F(x)) \left(\frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} - \lambda \right) + \int_0^1 dx (\rho(x) - F(x))(\rho(x) + F(x) - 1) \frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} \times \left(\frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} - \lambda \right) = 0 \quad (9.74)$$

Soit après intégration par partie et en utilisant le fait que $\rho(0) = F(0) = \rho_a$ et $\rho(1) = F(1) = \rho_b$:

$$\int_0^1 (\rho(x) - F(x)) \left\{ -\partial_x \frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} + (\rho(x) + F(x) - 1) \times \frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} \left(\frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} - \lambda \right) \right\} = 0 . \quad (9.75)$$

Or l'équation différentielle (9.72) pour F entraîne

$$(\rho(x) + F(x) - 1) \frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} \left(\frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} - \lambda \right) - \partial_x \frac{\partial_x F(x)}{F(x)(1 - F(x))} = 0 . \quad (9.76)$$

Donc, si F est solution de (9.72), elle vérifie aussi (9.75) et donc l'équation de Hamilton-Jacobi (9.69), comme prévu par l'approche macroscopique de Bertini *et al.*.

10. FLUCTUATIONS DANS LE PROCESSUS D'EXCLUSION ASYMÉTRIQUE

Le chapitre précédent concernait la fonctionnelle de grandes déviations, qui donne la probabilité d'observer un certain profil de densité qui diffère macroscopiquement du profil stationnaire. La probabilité d'un tel profil est exponentiellement décroissante avec la taille du système ; pour un système de grande taille, il est hautement improbable d'en observer un. Les fluctuations de densité que l'on peut observer avec une probabilité non négligeable dans un système de grande taille sont des «petites» fluctuations, typiquement de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{L}}$. Dans ce chapitre, nous utiliserons la formulation de la probabilité d'un profil de densité en somme sur des chemins (8.9) pour étudier la distribution de telles fluctuations dans l'état stationnaire des processus d'exclusion faiblement et fortement asymétriques. Nous montrerons que ces fluctuations peuvent s'écrire comme la somme de deux fonctions aléatoires indépendantes, dont l'une est un bruit blanc, et l'autre dépend de la phase considérée. De manière remarquable, cette seconde fonction aléatoire est non gaussienne dans le cas de la phase de courant maximum du processus d'exclusion totalement asymétrique, ce qui implique que la distribution des petites fluctuations de densité elle-même n'est pas gaussienne. Dans les autres cas cette seconde fonction aléatoire, et donc les fluctuations de densité, sont gaussiennes.

Dans le chapitre 10.4, nous présentons le résultat de simulations numériques qui suggèrent qu'une telle décomposition des fluctuations en deux fonctions aléatoires est également valable pour des variations du processus d'exclusion totalement asymétrique, ce qui semblerait indiquer que ces résultats ne sont pas spécifiques aux processus d'exclusion simples.

Les dérivations sont similaires dans le cas faiblement et totalement asymétrique, et nous les avons donc regroupées. L'idée est de considérer les

quantités $P_L(\rho, y)$ apparaissant dans (8.9) comme la densité de probabilité jointe du couple (ρ, y) , et de réécrire alors les fluctuations de ρ comme ayant deux origines : d'une part, les fluctuations de la marche y , et d'autre part, les fluctuations de ρ sachant y .

La connaissance de la distribution des fluctuations permet en outre de calculer les fonctions de corrélations de densité (10.5) ; l'expression (10.6) de la fonction de corrélation à deux points du processus faiblement asymétrique est particulièrement simple. On notera que les fonctions de corrélations sont à longue portée, ce qui est typique des systèmes hors équilibre.

Le calcul des fluctuations de courant pour le processus d'exclusion totalement asymétrique a été réalisé en collaboration avec Derrida et Lebowitz [20], tandis que celui dans le cadre du processus faiblement asymétrique a donné lieu à une publication jointe avec Derrida, Landim et Olla [19].

10.1 Résumé des principaux résultats

Les résultats obtenus concernent les fluctuations $\xi^{st}(x)$ définies par

$$\xi^{st}(x) = \sqrt{L}(\rho(x) - \bar{\rho}(x)) \quad , \quad (10.1)$$

pour le WASEP et le TASEP dans la limite de validité $\rho_a > \rho_b$ de la somme sur les chemins (8.9). Nous allons montrer que le champ de fluctuations $\xi^{st}(x)$ peut s'écrire comme la somme de deux processus indépendants

$$\xi^{st}(x) = \sqrt{\frac{\chi(\bar{\rho}(x))}{2}} B'(x) + \frac{1}{2} Y'(x) \quad , \quad (10.2)$$

où $B(x)$ est un mouvement Brownien standard, de sorte que le processus $B'(x)$ est un bruit blanc δ -corrélé :

$$\langle B'(x) B'(y) \rangle = \delta(x - y) \quad , \quad (10.3)$$

et $Y(x)$ est un processus dont la distribution dépend du cas considéré (WASEP ou TASEP) et, pour le TASEP, de la phase, ce que nous détaillons dans les sous-chapitres suivants.

La connaissance du champ de fluctuation $\xi^{st}(x)$ permet l'obtention des fonctions de corrélation de densité à n points (au premier ordre non nul en

L)

$$\langle (\rho(x_1) - \bar{\rho}(x_1)) \dots (\rho(x_n) - \bar{\rho}(x_n)) \rangle = \frac{1}{L^{\frac{n}{2}}} \langle \xi^{st}(x_1) \dots \xi^{st}(x_n) \rangle \quad . \quad (10.4)$$

En utilisant la formulation (10.2) de $\xi^{st}(x)$, et comme les corrélations (10.3) du bruit blanc B' sont nulles en dehors des points coïncidents, on peut exprimer les fonctions de corrélations directement en fonction du processus Y pour $x_1 < \dots < x_n$

$$\langle (\rho(x_1) - \bar{\rho}(x_1)) \dots (\rho(x_n) - \bar{\rho}(x_n)) \rangle = \frac{1}{2^n L^{\frac{n}{2}}} \langle Y'(x_1) \dots Y'(x_n) \rangle \quad . \quad (10.5)$$

Notamment, dans le cas faiblement asymétrique, on peut avoir une expression explicite pour la fonction de corrélation à 2 points, pour $x_1 < x_2$

$$\langle (\rho(x_1) - \bar{\rho}(x_1)) (\rho(x_2) - \bar{\rho}(x_2)) \rangle = \frac{1}{L} f_2(x_1, x_2) \quad (10.6)$$

avec $f_2(x_1, x_2)$ donnée par

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{J\bar{\rho}'(x_1)\bar{\rho}'(x_2) \int_0^{x_1 \wedge x_2} \frac{du}{\bar{\rho}'(u)} \int_{x_1 \vee x_2}^1 \frac{dv}{\bar{\rho}'(v)}}{\int_0^1 \frac{du}{\bar{\rho}'(u)}} \quad , \quad (10.7)$$

où $x_1 \wedge x_2 = \min\{x_1, x_2\}$ et $x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$. On remarque que cette fonction de corrélation est généralement à longue portée, ce qui est caractéristique des systèmes hors équilibre. La dérivation de ce résultat se trouve dans le chapitre 10.2.3.

10.1.1 Distribution du processus Y pour le WASEP

Dans le cas faiblement asymétrique nous montrerons dans le chapitre 10.2.1 que $Y(x)$ est un processus gaussien centré dont la densité de probabilité par rapport à la mesure de Feynman est formellement donnée par

$$Q(\{Y\}) \propto \exp \left\{ - \int_0^1 dx \left(\frac{-J\bar{\rho}'(x)Y(x)^2}{2\chi(\bar{\rho}(x))^2} + \frac{Y'(x)^2}{4\chi(\bar{\rho}(x))} \right) \right\} \quad . \quad (10.8)$$

Dans ce cas, le champ de fluctuation $\xi^{st}(x)$ est un champ gaussien centré de covariance donnée par

$$\langle \xi^{st}(x_1) \xi^{st}(x_2) \rangle = \chi(\bar{\rho}(x_1)) \delta(x_1 - x_2) + f_2(x_1, x_2) \quad (10.9)$$

où $\chi(\rho) = \rho(1 - \rho)$ est la conductivité et f_2 est donnée par (10.7).

10.1.2 Distribution du processus Y pour le TASEP

Dans le cas totalement asymétrique ($q = 0$), la distribution de Y dépend de la phase considérée : haute densité, basse densité, ou phase de courant maximum.

Phase de courant maximum

Cette phase, qui correspond à $\rho_b < 0.5 < \rho_a$, est la plus intéressante, car les fluctuations y sont non-gaussiennes ; Y n'est plus un processus gaussien, mais une excursion brownienne, c'est à dire un mouvement brownien de variance $2\bar{\rho}(1 - \bar{\rho}) = 1/2$ (car dans cette phase, $\bar{\rho} = 1/2$) conditionné à rester positif, avec comme conditions aux bords $Y(0) = Y(1) = 0$. En particulier, puisque le champ de fluctuations du processus totalement asymétrique est non-gaussien, il ne peut pas être la limite du champ de fluctuations gaussien du processus faiblement asymétrique.

Phase de haute ou basse densité

Dans la phase de haute densité (i.e. quand $0.5 < \rho_b < \rho_a$) et dans la phase de basse densité ($\rho_b < \rho_a < 0.5$), le processus Y est un mouvement brownien de variance $2\bar{\rho}(1 - \bar{\rho})$ (rappelons que dans ces phases, $\bar{\rho}(x)$ est constant, égal à ρ_a (phase de basse densité) où ρ_b (phase de haute densité)). Le champ de fluctuations $\xi^{st}(x)$ est donc la dérivée d'un brownien de variance $\bar{\rho}(1 - \bar{\rho})$, i.e. un bruit blanc normalisé de tel sorte que

$$\langle \xi^{st}(x_1) \xi^{st}(x_2) \rangle = \bar{\rho}(1 - \bar{\rho}) \delta(x_1 - x_2) \quad . \quad (10.10)$$

Il est à noter que ce processus $\xi^{st}(x)$ est la limite, quand λ tend vers l'infini, du processus trouvé dans le cas faiblement asymétrique ; il suffit d'insérer les limites trouvées pour J et $\bar{\rho}(x)$ (4.48–4.51) dans (10.8) ou (10.9).

10.2 Démonstration

10.2.1 Fluctuation pour le WASEP

Les dérivations sont similaires dans le cas du WASEP et du TASEP ; le point de départ est l'expression (8.9) de la densité de probabilité $P_L(\{\rho\})$

d'un profil $\{\rho\}$ pour un système de taille L :

$$P_L(\{\rho\}) \sim \int_{\{y\}} P_L(\{\rho\}, \{y\}) \mathcal{D}[\{y\}] \quad (10.11)$$

où $P_L(\{\rho\}, \{y\})$ est la probabilité jointe de $\{\rho\}$ et $\{y\}$, qui s'exprime à l'aide d'une fonctionnelle de grandes déviations \mathcal{G} (cf (8.10))

$$P_L(\{\rho\}, \{y\}) \sim e^{-L\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\})} . \quad (10.12)$$

La différence entre le cas du processus faiblement asymétrique et celui du processus totalement asymétrique tient dans la forme de la fonctionnelle \mathcal{G} . Dans le cas du WASEP, pour $y > 0$ elle est donnée par,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{WASEP}}(\{\rho\}; \{y\}) = & -K_{\text{WASEP}} + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ & + \int_0^1 dx \left[-\log \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} + \rho \log \rho + (1 - \rho) \log (1 - \rho) \right. \\ & \left. + (1 - \rho + y') \log (1 - \rho + y') + (\rho - y') \log (\rho - y') \right], \quad (10.13) \end{aligned}$$

tandis que pour le TASEP, son expression est, pour $y > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{TASEP}}(\{\rho\}; \{y\}) = & -K_{\text{TASEP}} + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ & + \int_0^1 dx [\rho \log \rho + (1 - \rho) \log (1 - \rho) \\ & + (1 - \rho + y') \log (1 - \rho + y') + (\rho - y') \log (\rho - y')]. \quad (10.14) \end{aligned}$$

Dans les deux cas elle est infinie pour les fonctions non positives.

On procède ensuite en deux étapes : premièrement, calculer la distribution de probabilité des chemins $\{y\}$ et en déduire les fluctuations des chemins (qui correspondent au processus Y dans (10.2)) ; ensuite, pour un chemin $\{y\}$ donné, calculer la distribution de probabilité d'un profil $\{\rho\}$ sachant le chemin $\{y\}$, et en déduire les fluctuations de $\{\rho\}$ sachant $\{y\}$ (qui correspondent au processus B dans (10.2)). La somme des deux contributions donne alors les fluctuations totales. Écrivons donc (10.11) de la manière suivante

$$P_L(\{\rho\}) = \int_{\{y\}} r(\{\rho\}|\{y\}) Q(\{y\}) \mathcal{D}[\{y\}] \quad (10.15)$$

où $Q(\{y\})$ est la densité de probabilité du chemin $\{y\}$, obtenue en sommant la probabilité jointe $P_L(\{\rho\}, \{y\})$ sur l'ensemble des profils $\{\rho\}$

$$Q(\{y\}) = \int_{\{\rho\}} e^{-L\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\})} \mathcal{D}[\{\rho\}] \sim e^{-L\mathcal{Q}(\{y\})} \quad (10.16)$$

avec $\mathcal{Q}(\{y\})$ la fonctionnelle de grandes déviations des chemins $\{y\}$

$$\mathcal{Q}(\{y\}) = \inf_{\{\rho(x)\}} \mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\}) \quad , \quad (10.17)$$

et $r(\{\rho\}|\{y\})$ est la probabilité conditionnelle du profil ρ connaissant le chemin $\{y\}$, obtenue en divisant la probabilité jointe $P_L(\{\rho\}, \{y\})$ de $\{\rho\}$ et $\{y\}$ par la probabilité $Q(\{y\})$ de $\{y\}$:

$$r(\{\rho\}|\{y\}) = \frac{e^{-L\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\})}}{Q(\{y\})} \quad (10.18)$$

Appelons $\rho_{\{y\}}(x)$ le profil de densité le plus probable connaissant le chemin $\{y\}$, c'est à dire le profil qui réalise le minimum dans (10.17) (c'est aussi celui qui maximise $r(\{\rho\}|\{y\})$ pour $\{y\}$ donnée), et $y_{\text{opt}}(x)$ le chemin le plus probable, i.e. celui qui maximise la densité de probabilité $Q(\{y\})$ (10.17). Bien que pour le WASEP et le TASEP, la fonctionnelle $\mathcal{G}(\{\rho\}, \{y\})$ soit donnée par des expressions différentes (respectivement (10.13) et (10.14)), on peut vérifier que $\rho_{\{y\}}(x)$ est toujours donnée par

$$\rho_{\{y\}} = \frac{1 + y'}{2}. \quad (10.19)$$

et y_{opt} est reliée à $\bar{\rho}$ par

$$\bar{\rho} = \frac{1 + y'_{\text{opt}}}{2} \quad . \quad (10.20)$$

En conséquence de (10.19), la fonctionnelle $\mathcal{Q}(\{y\})$ de grandes déviations des chemins $\{y\}$, donnée par (10.17), s'écrit

$$\mathcal{Q}(\{y\}) = \mathcal{G}(\{(1 + y')/2\}, \{y\}) \quad (10.21)$$

et on peut vérifier que la probabilité conditionnelle $r(\{\rho\}|\{y\})$, donnée par (10.18), a la même expression dans le cadre d'un processus faiblement ou

totalelement asymétrique

$$\begin{aligned} \frac{\log(r(\{\rho\}|\{y\}))}{L} &= -\log 4 + \int_0^1 dx \{ -\rho \log \rho - (1-\rho) \log(1-\rho) \\ &\quad + (1+y') \log(1+y') + (1-y') \log(1-y') \\ &\quad - (1-\rho+y') \log(1-\rho+y') - (\rho-y') \log(\rho-y') \} \end{aligned} \quad (10.22)$$

Nous allons décomposer la fluctuation totale de densité $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$ en deux parties, l'une correspondant à la fluctuation $\delta b = \rho - \rho_{\{y\}}$ du profil $\{\rho\}$ autour du profil $\{\rho_{\{y\}}\}$, l'autre à la fluctuation de $\{\rho_{\{y\}}\}$ due à la fluctuation $\delta y = y - y_{\text{opt}}$ des marches $\{y\}$ autour de la marche la plus probable $\{y_{\text{opt}}\}$ ($\{\rho_{\{y\}}\}$ et $\{y\}$ étant reliés par (10.19))

$$\delta\rho(x) = (\rho(x) - \rho_{\{y\}}(x)) + (\rho_{\{y\}}(x) - \bar{\rho}(x)) \quad (10.23)$$

$$= \delta b + \frac{\delta y'}{2} \quad (10.24)$$

La distribution de δb étant donné $\{y\}$, est obtenue en développant $r(\{\rho\}|\{y\})$ au second ordre en δb et δy , ce qui donne en utilisant (10.19) et (10.20) :

$$r(\{\rho\}|\{y\}) \sim \exp\left(-L \int_0^1 dx \frac{(\delta b)^2}{\bar{\rho}(1-\bar{\rho})}\right) . \quad (10.25)$$

Comme $r(\{\rho\}|\{y\})$ ne dépend pas de δy à l'ordre 2, le choix de $\delta b = \rho - \rho_{\{y\}}$ est indépendant du choix de la fluctuation du chemin δy .

Les petites fluctuations δy du chemin s'obtiennent en développant (10.21) au second ordre. Comme la fonctionnelle \mathcal{G} dans (10.21) a une expression différente suivant que l'on considère le processus faiblement asymétrique (8.11) ou totalement asymétrique (8.13), nous étudierons les différents cas séparément. Une fois la distribution de δy obtenue, nous pouvons faire dans (10.24) le changement de variable

$$\delta y(x) = \frac{Y(x)}{\sqrt{L}} \quad (10.26)$$

et

$$\delta b(x) = \dot{B}(x) \frac{\sqrt{\bar{\rho}(x)(1-\bar{\rho}(x))}}{\sqrt{2L}} . \quad (10.27)$$

On obtient alors pour la fluctuation totale de densité $\xi^{st}(x)$ l'expression (10.2), avec la distribution de B obtenue à partir de la distribution (10.25) de δb

$$Q(\{B\}) \propto \exp \left\{ - \int_0^1 dx \frac{B'(x)^2}{2} \right\} , \quad (10.28)$$

ce qui signifie que B est un mouvement brownien standard.

10.2.2 Distribution du processus Y dans le cas faiblement asymétrique

Dans le cas faiblement asymétrique, la fonctionnelle \mathcal{G} dans (10.21) est donnée par (10.13). L'expression (10.21) s'écrit donc

$$\begin{aligned} Q(\{y\}) = & -K_{\text{WASEP}} - \log 4 + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ & + \int_0^1 dx \left[- \log \frac{1 - e^{-\lambda y}}{\lambda} \right. \\ & \left. + (1 + y') \log (1 + y') + (1 - y') \log (1 - y') \right] . \quad (10.29) \end{aligned}$$

Le chemin le plus probable $y_{\text{opt}}(x)$, qui maximise l'expression (10.29) de $Q(\{y\})$, est donc solution de

$$\begin{aligned} y'_{\text{opt}}(0) &= 2\rho_a - 1 \\ y'_{\text{opt}}(1) &= 2\rho_b - 1 \\ \frac{2y''_{\text{opt}}}{1 - y_{\text{opt}}'^2} &= - \frac{\lambda e^{-\lambda y_{\text{opt}}}}{1 - e^{-\lambda y_{\text{opt}}}} . \quad (10.30) \end{aligned}$$

En développant (10.29) au second ordre, on obtient la distribution d'une fluctuation du chemin δy autour de y_{opt} :

$$Q(y_{\text{opt}} + \delta y) \sim \exp \left(-L \int_0^1 dx \left[\frac{\lambda^2}{2} \frac{e^{-\lambda y_{\text{opt}}} (\delta y)^2}{(1 - e^{-\lambda y_{\text{opt}}})^2} + \frac{(\delta y')^2}{1 - y_{\text{opt}}'^2} \right] \right) \quad (10.31)$$

Comme $y_{\text{opt}}(x) > 0$ et $\delta y \sim \frac{1}{\sqrt{L}}$, la condition que

$$y(x) = y_{\text{opt}}(x) + \delta y(x) > 0$$

est automatiquement vérifiée pour L suffisamment grand. En effectuant le changement de variable (10.26) et en utilisant (10.20), la distribution (10.8) pour Y se déduit de (10.31).

10.2.3 Calcul de la covariance $\langle \xi^{st}(x_1)\xi^{st}(x_2) \rangle$

Le but de cette partie est d'obtenir l'expression (10.9) pour la covariance $\langle \xi^{st}(x_1)\xi^{st}(x_2) \rangle$ du champ de fluctuations $\xi^{st}(x)$ pour le WASEP, et d'en déduire, en conséquence, la fonction de corrélation à deux points (10.6).

D'après (10.2), et en utilisant l'indépendance des processus B et Y , on a

$$\langle \xi^{st}(x_1)\xi^{st}(x_2) \rangle = \frac{\chi(\bar{\rho}(x_1))}{2} \langle B'(x_1)B'(x_2) \rangle + \frac{1}{4} \langle Y'(x_1)Y'(x_2) \rangle \quad . \quad (10.32)$$

Le processus B' est un bruit blanc delta-corrélé, on a donc

$$\langle B'(x_1)B'(x_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2) \quad . \quad (10.33)$$

Il nous faut ensuite calculer les corrélations du processus Y' . En écrivant $Y(x) = Y(0) + \int_0^x Y'(s)ds$ et en calculant l'intégrale gaussienne sur $Y(0)$ dans (10.8), on obtient la distribution suivante pour le processus Y' :

$$Q(\{Y'\}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 Y'(u)T(u,v)Y'(v) du dv \right\} \quad , \quad (10.34)$$

avec

$$T(u,v) = \frac{\delta(u-v)}{2\chi(\bar{\rho}(x))} + 2 \frac{\int_{u \vee v}^1 a(z)dz \int_0^{u \wedge v} a(z')dz'}{\int_0^1 a(z)dz} \quad (10.35)$$

où

$$a(x) = \frac{-\bar{\rho}'(x)J}{2\chi(\bar{\rho}(x))^2} \quad . \quad (10.36)$$

La fonction de corrélation à deux points du processus Y' est reliée à l'inverse de l'opérateur $T(u,v)$:

$$\langle Y'(x_1)Y'(x_2) \rangle = T^{-1}(x_1, x_2) \quad . \quad (10.37)$$

Nous allons maintenant montrer que si l'on écrit T^{-1} sous la forme

$$T^{-1}(x_1, x_2) = 2\chi(\bar{\rho}(x_1))\delta(x_1 - x_2) + 4f_2(x_1, x_2) \quad (10.38)$$

alors $f_2(x_1, x_2)$ est donné par (10.7), ce qui, à travers (10.37), entrainera le résultat annoncé (10.9).

Tout d'abord, la symétrie de $T^{-1}(x_1, x_2)$ entraine celle de $f_2(x_1, x_2)$:

$$f_2(x_1, x_2) = f_2(x_2, x_1) \quad .$$

Ensuite, la définition de l'inverse d'un opérateur nous dit que

$$\delta(u - v) = \int_0^1 T(u, t)T^{-1}(t, v)dt \quad . \quad (10.39)$$

Si l'on remplace T par (10.35) et T^{-1} par (10.38) dans (10.39), on obtient l'équation intégrale suivante pour $f_2(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{f_2(x_1, x_2)}{4\chi(\bar{\rho}(x_1))} + \frac{1}{\int_0^1 a(t)dt} & \left[\int_{x_1}^1 dt \int_t^1 a(z)dz \int_0^{x_1} a(z')dz' f_2(t, x_2) \right. \\ & + \int_0^{x_1} dt \int_0^t a(z)dz \int_{x_1}^1 a(z')dz' f_2(t, x_2) \\ & + \frac{\Theta(x_2 - x_1)\chi(\bar{\rho}(x_2))}{2} \int_{x_2}^1 a(z)dz \int_0^{x_1} a(z')dz' \\ & \left. + \frac{\Theta(x_1 - x_2)\chi(\bar{\rho}(x_2))}{2} \int_{x_1}^1 a(z)dz \int_0^{x_2} a(z')dz' \right] = 0 \quad (10.40) \end{aligned}$$

Cette équation entraîne directement que, pour $0 < x_2 < 1$, on a

$$f_2(0, x_2) = f_2(1, x_2) = 0 \quad . \quad (10.41)$$

De plus, si l'on applique l'opérateur $\partial_x \left\{ \frac{\partial_x(\cdot)}{a(x)} \right\}$ à (10.40), on obtient l'équation différentielle suivante pour f :

$$\partial_{x_1} \frac{\partial_{x_1} \left\{ \frac{f_2(x_1, x_2)}{4\chi(\bar{\rho}(x_1))} \right\}}{a(x_1)} - f_2(x_1, x_2) - \delta(x_1 - x_2) \frac{\chi(\bar{\rho}(x_1))}{2} = 0 \quad (10.42)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\partial_{x_1}^2 f_2(x_1, x_2) + \lambda \partial_{x_1} \{ (2\bar{\rho}(x_1) - 1) f_2(x_1, x_2) \} + \delta(x_1 - x_2) J\bar{\rho}'(x_1) = 0 \quad (10.43)$$

En utilisant la symétrie de $f_2(x_1, x_2)$, les conditions aux bords (10.41), ainsi que l'équation (9.56), on obtient que la solution de cette équation est donnée par (10.7).

10.2.4 Distribution du processus Y dans le cas totalement asymétrique

Dans le cas totalement asymétrique, la probabilité jointe du couple (ρ, y) s'écrit cette fois à l'aide de la fonctionnelle $\mathcal{G}_{\text{TASEP}}$ (10.14). L'expression

(10.21) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{TASEP}}(\{y\}) &= -K_{\text{TASEP}} - \log 4 + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ &\quad + \int_0^1 dx [(1 + y') \log(1 + y') + (1 - y') \log(1 - y')] \end{aligned} \quad (10.44)$$

Du fait de l'absence du terme «potentiel» $\log(1 - \exp(-\lambda y))$, la probabilité d'une petite fluctuation δy va cette fois correspondre à une marche brownienne, conditionnée par le fait que la marche doit rester positive. Le chemin y_{opt} le plus probable peut s'obtenir en remarquant que comme la fonction $\phi(u) = (1 + u) \log(1 + u) + (1 - u) \log(1 - u)$ est convexe, on a $\int_0^1 \phi(y'(x)) dx \geq \phi\left(\int_0^1 y'(x) dx\right) = \phi(y(1) - y(0))$ avec égalité si y est une fonction linéaire. L'inégalité suivante est donc vérifiée quelque soit y :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{TASEP}}(\{y\}) &\geq -K_{\text{TASEP}} - \log 4 + y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ &\quad + (1 + y(1) - y(0)) \log(1 + y(1) - y(0)) \\ &\quad + (1 - y(1) + y(0)) \log(1 - y(1) + y(0)). \end{aligned} \quad (10.45)$$

avec égalité si y est une fonction linéaire. Le minimum de $\mathcal{Q}_{\text{TASEP}}$ est donc forcément atteint par une telle fonction linéaire, et pour trouver laquelle, il suffit de minimiser la partie droite de (10.45) sous la condition $y(0) \geq 0$, $y(1) \geq 0$. On obtient 3 cas différents, suivant ρ_a et ρ_b , correspondant aux différentes phases du TASEP.

la phase de basse densité $\rho_b < \rho_a < 0.5$

Dans cette phase, le chemin qui minimise (10.45) est donné par

$$y_{\text{opt}}(x) = (1 - 2\rho_a)(1 - x) \quad (10.46)$$

Comme les chemins $\{y\}$ doivent être positifs, les petites fluctuations $\delta y(x)$ sont contraintes à être positives chaque fois que $y_{\text{opt}}(x) = 0$. Dans le cas de la phase de basse densité, comme $y_{\text{opt}}(1) = 0$, on doit avoir $\delta y(1) \geq 0$. En développant au second ordre $\mathcal{Q}_{\text{TASEP}}$ (tel que donné par (10.44)), on obtient, dans ce cas,

$$\mathcal{Q}_{\text{TASEP}}(y_{\text{opt}} + \delta y) = \delta y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + \int_0^1 dx \frac{(\delta y')^2}{4\rho_a(1 - \rho_a)}. \quad (10.47)$$

Le terme en $\delta y(1)$ indique que les fluctuations typiques de $y(1)$ sont de l'ordre de L^{-1} (sinon, la probabilité de y donnée par (10.16) devient négligeable). À l'échelle $L^{-\frac{1}{2}}$ qui nous intéresse, cela implique que $\delta y(1) \sim 0$. En faisant le changement de variable (10.26) comme pour le WASEP, on obtient que les fluctuations peuvent se mettre sous la forme (10.2) avec la distribution de Y donnée par (dans cette phase, $\bar{\rho}(x) = \rho_a$)

$$Q(\{Y\}) \propto \exp \left\{ - \int_0^1 dx \left(\frac{Y'(x)^2}{4\chi(\bar{\rho})} \right) \right\} \quad (10.48)$$

c'est à dire que Y est un brownien de variance $2\chi(\bar{\rho})$. La condition $\delta y(1) = 0$ entraîne que $Y(1) = 0$, mais cela n'a pas d'influence car dans les fluctuations de densité (10.2) n'intervient que la dérivée de Y , et le processus brownien est invariant par translation.

la phase de haute densité $0.5 < \rho_b < \rho_a$

Cette phase est très similaire à la phase de basse densité. Dans cette phase, $\bar{\rho}(x) = \rho_b$. Le chemin le plus probable y_{opt} est cette fois-ci donné par

$$y_{\text{opt}}(x) = (2\rho_b - 1)x \quad . \quad (10.49)$$

On a alors

$$\mathcal{Q}_{\text{TASEP}}(y_{\text{opt}} + \delta y) = \delta y(0) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + \int_0^1 dx \frac{(\delta y')^2}{4\rho_a(1 - \rho_a)} \quad . \quad (10.50)$$

Cette fois ci, à l'ordre $\frac{1}{\sqrt{L}}$, $\delta y(0) \sim 0$. Le changement de variable (10.26) conduit encore à la distribution (10.48) pour Y , la différence étant que cette fois ci, la condition au bord est $Y(0) = 0$; comme précédemment, cette condition au bord n'a pas d'importance puisque seul Y' intervient dans les fluctuations de densité.

la phase de courant maximum $\rho_b < 0.5 < \rho_a$

Cette fois ci,

$$y_{\text{opt}}(x) = 0 \quad (10.51)$$

pour tout x . On doit donc avoir, quelque soit x , $\delta y(x) > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\text{TASEP}}(y_{\text{opt}} + \delta y) &= \delta y(0) \log \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + \delta y(1) \log \frac{1 - \rho_b}{\rho_b} \\ &+ \int_0^1 dx \frac{(\delta y')^2}{4\rho_a(1 - \rho_a)}. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Les termes en $\delta y(0)$ et $\delta y(1)$ imposent cette fois-ci qu'à l'ordre $L^{-\frac{1}{2}}$, on ait $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$. Le changement de variable (10.26) nous donne alors également

$$Q(\{Y\}) \propto \exp \left\{ - \int_0^1 dx \left(\frac{Y'(x)^2}{4\chi(\bar{\rho})} \right) \right\} \quad (10.53)$$

mais avec cette fois-ci les conditions

$$Y(0) = Y(1) = 0 \quad (10.54)$$

$$Y(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x. \quad (10.55)$$

Il s'agit bien de l'excursion brownienne annoncée.

En passant, comme on doit avoir $\mathcal{Q}_{\text{TASEP}}(\{y_{\text{opt}}\}) = 0$, les expressions de y_{opt} obtenues dans les différents cas justifient la formule (8.16) pour la constante K_{TASEP}

$$K_{\text{TASEP}} = \sup_{\rho_b \leq \rho \leq \rho_a} \log[\rho(1 - \rho)]. \quad (10.56)$$

10.3 Réduction des fluctuations dans le TASEP

Pour le processus d'exclusion totalement asymétrique, on observe dans la phase de courant maximum que les corrélations à longue distance de la densité réduisent les fluctuations du nombre total de particules dans le système par rapport à celles d'un système sans corrélation. En effet, appelons $N(x_1, x_2)$ le nombre de particules entre la position x_1 et x_2 , donné par

$$N(x_1, x_2) = L \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx. \quad (10.57)$$

La moyenne de $N(x_1, x_2)$ dans l'état stationnaire est donnée par $\bar{N}(x_1, x_2) = L \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}(x) dx$. Si l'on appelle $\Delta(x_1, x_2)$ la fluctuation de $N(x_1, x_2)$ autour du

nombre moyen de particules, définie par

$$\Delta(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{L(x_2 - x_1)}} (N(x_1, x_2) - \bar{N}(x_1, x_2)) \quad (10.58)$$

alors (10.2) entraîne

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_2 - x_1)} \Delta(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} (Y(x_2) - Y(x_1)) \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{\chi(\bar{\rho}(x))}{2}} B'(x) dx . \end{aligned} \quad (10.59)$$

La variance est donnée par

$$(x_2 - x_1) \langle \Delta(x_1, x_2)^2 \rangle = \frac{\langle (Y(x_2) - Y(x_1))^2 \rangle}{2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\chi(\bar{\rho}(x))}{2} dx . \quad (10.60)$$

Or, le processus $Y(x)$ se comporte localement comme un processus brownien de variance $2\bar{\rho}(x)(1 - \bar{\rho}(x))$, i.e. les corrélations $\langle Y'(x_1)Y'(x_2) \rangle$ comporte une partie dominante pour $x_1 = x_2$ en $2\bar{\rho}(x_1)(1 - \bar{\rho}(x_1))\delta(x_1 - x_2)$. On a donc, quand $x_1 \rightarrow x_2$

$$\langle \Delta(x_1, x_2)^2 \rangle \rightarrow \chi(\bar{\rho}(x_1)) \quad \text{pour } x_1 \rightarrow x_2 \quad (10.61)$$

ce qui indique que la mesure est localement une mesure de Bernoulli de densité $\bar{\rho}(x)$. Par contre, si l'on regarde les fluctuations du nombre total de particules, les corrélations à longues distances de Y vont se faire sentir. Dans le cas totalement asymétrique en phase de courant maximum on a $Y(0) = Y(1) = 0$, et donc

$$\langle \Delta(0, 1)^2 \rangle = \int_0^1 \frac{\chi(\bar{\rho}(x))}{2} dx \quad (10.62)$$

$$= \frac{1}{8} \quad (10.63)$$

ce qui est la moitié du résultat que l'on aurait obtenu si la mesure était réellement Bernoulli de densité $1/2$.

10.4 Le processus d'exclusion totalement asymétrique avec des particules de taille finie

Nos résultats montrent que pour le processus d'exclusion totalement asymétrique dans la phase de courant maximum, les fluctuations de densité

peuvent s'écrire comme la somme (10.2) de deux processus, l'un d'entre eux étant un mouvement brownien, l'autre une excursion brownienne. Dans le but de savoir si une telle représentation des fluctuations reste valable sur un ensemble plus vaste de modèles, nous avons considéré une généralisation du TASEP [59, 78] dans laquelle les particules ont une taille finie, d . Cette taille a pour conséquence que chaque particule occupe d sites consécutifs du réseau, tout en respectant la règle d'exclusion : chaque site ne peut être recouvert que par au plus une particule. Dans la suite, par convention, nous dirons qu'une particule se trouve au site i quand elle recouvre les sites $i, i + 1, \dots, i + d - 1$. Pour des raisons de commodité, nous noterons $L + d - 1$ le nombre de sites du réseau, de sorte qu'il y ait L positions différentes possibles pour une particule de taille d sur le réseau. La dynamique est ensuite similaire à celle du TASEP :

- durant chaque intervalle infinitésimal de temps dt , chaque particule tente avec une probabilité dt de sauter d'un site vers la droite, à condition que cela soit permis par la règle d'exclusion
- si les d premiers sites du système sont libres, une particule est créée au site 1 avec une probabilité $\rho_a dt$
- de même, si une particule couvre les d derniers sites du système, elle est détruite avec une probabilité $(1 - \rho_b) dt$.

Si $d = 1$, on retrouve la dynamique du TASEP.

On peut montrer que, pour une taille de particule d donnée, le courant J_d et la densité ρ_d dans la phase de courant maximum sont donnés par [59]

$$J_d = \frac{1}{(\sqrt{d} + 1)^2} \quad (10.64)$$

$$\rho_d = \frac{1}{\sqrt{d}(\sqrt{d} + 1)} \quad (10.65)$$

Pour un système périodique, il est possible de calculer la variance du nombre $N_d(x_1, x_2)$ de particules sur $L(x_2 - x_1)$ sites consécutif dans la limite $1/L \ll x_2 - x_1 \ll 1$

$$\frac{\langle N_d(x_1, x_2)^2 \rangle - \langle N_d(x_1, x_2) \rangle^2}{x_2 - x_1} \simeq \Delta_d^2(\rho) \quad (10.66)$$

avec

$$\Delta_d^2(\rho) = \rho(1 - \rho) - \rho^2(d - 1)(2 - d\rho), \quad (10.67)$$

Une démonstration de ces résultats dans le cas d'un système périodique se trouve en annexe de notre article [20]. Pour retrouver une fluctuation locale du nombre de particules donnée par (10.67), une manière simple de généraliser (10.2) est d'écrire

$$\rho(x) - \rho_d = \frac{\Delta_d(\rho_d)}{\sqrt{L}} \left[\frac{\dot{B}(x)}{\sqrt{2}} + \dot{Y}(x) \right]. \quad (10.68)$$

La fluctuation du nombre de particules est alors donnée par

$$N_d(x_1, x_2) - \langle N_d(x_1, x_2) \rangle = L \int_{x_1}^{x_2} dy (\rho(y) - \rho_d) \quad (10.69)$$

$$= \sqrt{L} \Delta_d(\rho_d) \left[\frac{B(x') - B(x)}{\sqrt{2}} + Y(x') - Y(x) \right] \quad (10.70)$$

Ainsi, si cette conjecture est juste, les fluctuations $s(x)$ du nombre de particules dans une boîte de taille Lx centrée au milieu du système, normalisées de la manière suivante

$$s(x) = \frac{1}{\Delta_d(\rho_d) \sqrt{L}} N \left(\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2} \right), \quad (10.71)$$

devraient être indépendantes de la taille d des particules. En utilisant les propriétés des excursions browniennes et Mathematica, on peut obtenir des formules explicites pour les premiers moments de $s(x)$ à partir de (10.70)

$$\overline{s(x)^2} = \frac{2x - 3x^2}{2} + \frac{3 - 2x + 3x^2}{2\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \frac{3(1-x)\sqrt{x}}{\pi} \quad (10.72)$$

et

$$\begin{aligned} \overline{s(x)^4} &= \frac{3x^2(x-2)(5x-2)}{4} + \frac{15 - 3x^2(x-2)(5x-2)}{4\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \\ &+ \frac{1-x}{2\pi(1+x)} \sqrt{x}(15x^3 - 11x^2 - 25x - 15) \end{aligned} \quad (10.73)$$

Pour vérifier la conjecture (10.68), nous avons simulé ce modèle pour trois tailles de particules, $d = 1, 3$ et 5 pour un système ouvert de $L = 601$ sites quand $\rho_a = 1$ et $\rho_b = 0$. Pour le comptage des particules, nous utilisons la convention que chaque site recouvert par une particule compte pour une fraction $\frac{1}{d}$ de particule, de manière à régler le problème des particules à cheval

sur les frontières de l'intervalle $[\frac{1-x}{2}, \frac{1+x}{2}]$. Nous avons mesuré le second et le quatrième moment de $s(x)$ dans l'état stationnaire, moyenné sur environ 10^8 pas de temps. La figure 10.1 compare les résultats obtenues par nos simulations avec les prédictions théoriques (10.72) et (10.73). Les courbes pour différents choix de d coïncident, ce qui suggère que les fluctuations, une fois correctement renormalisées, sont universelles.

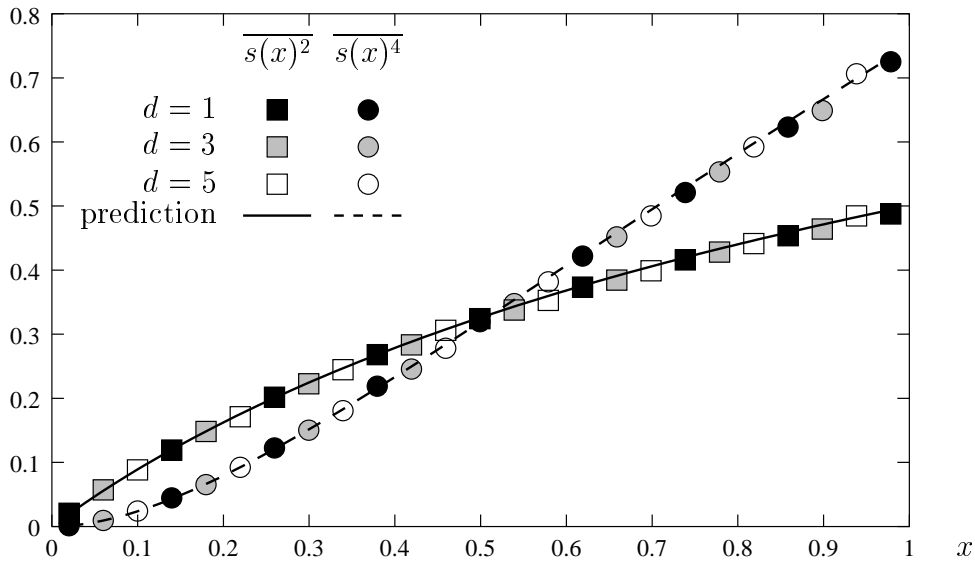


Fig. 10.1: Les moments $\overline{s(x)^2}$ et $\overline{s(x)^4}$ des fluctuations du nombre de particules $s(x)$ (normalisé selon (10.71)) entre les sites $L\frac{1-x}{2}$ et $L\frac{1+x}{2}$ pour un système de $L = 601$ sites et pour 3 tailles d de particules ($d=1, 3, 5$). Les courbes sont les prédictions analytiques (10.72) et (10.73).

11. À PROPOS DE LA FONCTION AUXILIAIRE F

Le point de départ de notre dérivation de la partie III de la fonctionnelle de grandes déviations est l'écriture (8.9) de la densité de probabilité d'un profil $\{\rho\}$ comme une somme sur la probabilité jointe $P_L(\{\rho\}, \{y\})$ du profil ρ et de chemins abstraits $\{y\}$

$$P_L(\{\rho\}) \sim \int_{\{y\}} P_L(\{\rho\}, \{y\}) \mathcal{D}[\{y\}] . \quad (11.1)$$

Ces chemins $\{y\}$ sont des intermédiaires mathématiques utiles, mais n'ont, à notre connaissance, pas d'interprétation physique. Techniquement, ils dérivent des matrices D et E de l'ansatz matriciel (4.54a), qui elles-mêmes sont juste une façon commode de calculer l'état stationnaire, sans signification physique. Lors de la dérivation de la fonctionnelle de grandes déviations, nous avons introduit une autre fonction intermédiaire, que nous avons notée F , et qui est reliée au chemin le plus probable $\{y_m\}$ étant donné le profil $\{\rho\}$ par (cf (9.36))

$$F(x) = 1 - \rho(x) + y'_m(x) . \quad (11.2)$$

Ces fonctions auxiliaires F étaient déjà apparues dans le calcul de la fonctionnelle de grandes déviations du processus d'exclusion symétrique [24] et de celle du processus d'exclusion totalement asymétrique [25], bien que dans ces deux cas, des approches différentes de la somme sur les chemins aient été utilisées. Cette fonction auxiliaire F semble la plus apte à offrir une interprétation physique de la somme sur les chemins, qui pourrait être un prélude à une éventuelle généralisation à d'autres systèmes hors d'équilibre. La fonction F possède en effet des liens clairs avec les fonctions de corrélations de la densité, comme nous le verrons au chapitre 11.1. La raison principale en est que $F(x)$ représente la densité la plus probable au point x étant donné le profil de densité $\{\rho\}$ aux points x' différents de x . De plus, comme l'ont

montré Bertini *et al.* [8] dans le cas du processus symétrique, la dynamique de la fonction F qui découle de la dynamique du profil $\{\rho\}$ a une forme très simple, que l'on peut relier à la dynamique adjointe du processus d'exclusion. Le calcul de Bertini *et al.* pour le cas symétrique se généralise facilement au cas faiblement asymétrique, ce que nous ferons dans le chapitre 11.2. Dans le chapitre 11.3, nous nous aiderons de la simplicité de la dynamique de F pour construire une dynamique ad-hoc sur les chemins $\{y\}$, qui pourra éventuellement servir de point de départ pour généraliser la somme sur les chemins au delà de l'état stationnaire.

11.1 F et les fonctions de corrélation

Dans le chapitre 10, nous avons montré que la connaissance de la distributions des fluctuations de densité permet de calculer la fonction de corrélation à deux points du processus faiblement asymétrique (cf (10.6)). Dans cette partie, nous étudions plus directement la relation entre la fonction intermédiaire $\{F\}$ qui apparaît dans l'expression de la fonctionnelle de grandes déviations 9.15 et les fonctions de corrélation.

La densité de probabilité d'un profil $\{\rho\}$ est donnée par la fonctionnelle de grandes déviations \mathcal{F}

$$P(\{\rho\}) \sim e^{-L\mathcal{F}(\{\rho\})} . \quad (11.3)$$

Pour une fonction $\{H\}$ donnée, définissons la fonctionnelle ϕ par

$$\phi(\{H\}) = \frac{1}{L} \log \langle e^{L \int_0^1 H(x)\rho(x)dx} \rangle \quad (11.4)$$

où $\langle . \rangle$ est la moyenne dans l'état stationnaire. En cherchant le profil de densité qui maximise $\int_0^1 H(x)\rho(x)dx - \mathcal{F}(\{\rho\})$, on obtient

$$\phi(\{H\}) = \int_0^1 H(x)\rho_H(x)dx - \mathcal{F}(\{\rho_H\}) \quad (11.5)$$

avec ρ_H relié à H par

$$H(x) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho(x)}(\{\rho_H\}) . \quad (11.6)$$

ou encore

$$\rho_H = \left. \frac{\partial \phi}{\partial H(x)} \right|_{\{H\}} \quad (11.7)$$

La fonction $\{H\}$ joue le rôle d'un champ extérieur qui force le système à adopter le profil ρ_H .

La fonction $\{F\}$ est reliée à $\{\rho_H\}$ par l'équation différentielle (9.17)

$$(F - \rho_H)F'^2 + F(1 - F)F'' + \lambda F(1 - F)(F - 1 + \rho_H)F' = 0 \quad (11.8)$$

avec pour conditions aux bords

$$F(0) = \rho_a \quad (11.9)$$

$$F(1) = \rho_b \quad (11.10)$$

De plus, d'après (9.52), les fonctions $\{H\}$, $\{\rho_H\}$ et $\{F\}$ sont reliées entre elles par

$$H(x) = \log \frac{\rho_H(x)}{1 - \rho_H(x)} - \log \frac{F(x)}{1 - F(x)} \quad (11.11)$$

En changeant de perspective, on peut définir $\{F\}$ à partir de $\{H\}$ en utilisant (11.11) pour supprimer $\rho_H(x)$ de (11.8). On obtient alors une nouvelle équation différentielle reliant $\{F\}$ à $\{H\}$

$$J'(x) = F'(x)J(x) \frac{e^{H(x)} - 1}{1 + F(x)(e^{H(x)} - 1)} \quad (11.12)$$

avec $J(x)$ définie par

$$J(x) = -F'(x) + \lambda F(x)(1 - F(x)) \quad (11.13)$$

Si le champ $\{H\}$ est modifié sur un intervalle $[x_1, x_2]$, $\{F\}$ est modifiée non seulement sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, mais aussi sur le reste du système, comme le montre l'équation différentielle (11.12). Cependant, une modification ΔH de H sur un intervalle infinitésimal $[x_0, x_0 + dx]$ va entraîner d'après (11.12) une variation $\Delta F''$ de F'' du même ordre de grandeur sur ce même intervalle, et donc seulement une modification infinitésimale (d'ordre $\Delta F'' \frac{(dx)^2}{2}$) de la fonction $\{F\}$. Puisque les fonctions $\{H\}$, $\{\rho_H\}$ et $\{F\}$ sont reliées entre

elles par (11.11), cela entraîne que si l'on modifie le champ $\{H\}$ sur un intervalle infinitésimal $[x_0, x_0 + dx]$, seule la densité $\{\rho_H\}$ sur $[x_0, x_0 + dx]$ va être modifiée de manière notable, tandis que l'effet sur $\{F\}$ ou en dehors de $[x_0, x_0 + dx]$ sera imperceptible. En particulier, si le champ H annulé sur $[x_0, x_0 + dx]$, $\rho_H(x)$ prend la valeur de $F(x)$ sur $[x_0, x_0 + dx]$. Ainsi, puisque $H(x)$ est la dérivée $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho(x)}(\{\rho_H\})$ (cf (11.6)), $F(x_0)$ est la valeur du profil de densité le plus probable (i.e. celui qui minimise la fonctionnelle de grandes déviations \mathcal{F}) dans un intervalle infinitésimal autour de x_0 , étant donné le profil de densité $\{\rho_H\}$ dans le reste du système. Formellement, nous le noterons

$$F(x) = \rho_H(x)|_{H(x)=0} \quad (11.14)$$

(remarquons cependant que cela n'a pas de sens physiquement de changer le profil de densité macroscopique en un point unique, puisque ce profil macroscopique représente une moyenne locale du profil microscopique).

On peut donc décomposer l'influence du champ extérieur $\{H\}$ sur la densité $\rho_H(x)$ au point x en deux parties : d'une part, la densité en x est directement modifiée par la présence du champ $H(x)$ au point x . D'autre part, la densité aux autres points du système est également modifiée par le champ $\{H\}$, ce qui va entraîner une modification de la valeur de la densité en x à cause des corrélations de densité à longue distance. C'est ce second effet que mesure $F(x)$, qui est ainsi naturellement lié aux corrélations de densité entre les différentes parties du système.

Notons par $\langle \rho(x_1) \dots \rho(x_n) \rangle_c$ la fonction de corrélation connexe à n points de la densité. Par définition des fonctions de corrélation connexes, on a

$$\langle \rho(x_1) \dots \rho(x_n) \rangle_c = \frac{1}{L^{n-1}} \frac{\partial^n \phi}{\partial H(x_1) \dots \partial H(x_n)} \Big|_{H=0}, \quad (11.15)$$

ou encore

$$\phi(\{H\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{n-1}}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_n H(x_1) \dots H(x_n) \langle \rho(x_1) \dots \rho(x_n) \rangle_c. \quad (11.16)$$

En particulier, en utilisant (11.7),

$$\rho_H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_2 \dots dx_n H(x_2) \dots H(x_n) \langle \rho(x) \rho(x_2) \dots \rho(x_n) \rangle_c . \quad (11.17)$$

On a vu (éq. (11.14)) que $F(x)$ est la valeur de $\rho_H(x)$ que l'on obtient en annulant le champ $H(x)$ en x . Or, dans l'expression de ρ_H (11.17), mettre $H(x)$ à zéro annule seulement ponctuellement les produits $H(x_2) \dots H(x_n)$ à intégrer, et cela n'a pas d'influence sur la valeur de l'intégrale, sauf si ils sont multipliés par une fonction δ de Dirac (qui aura pour effet de sortir un terme $H(x)$ de l'intégral). Séparons donc les fonctions de corrélations $\langle \rho(x) \rho(x_2), \dots, \rho(x_n) \rangle_c$ en une partie régulière $f_n(x, x_2, \dots, x_n)$ au point x et une partie en $\delta(x - x_i)$, de la manière suivante

$$f_n(x, x_2, \dots, x_n) = L^n \lim_{x_1 \rightarrow x} \langle \rho(x_1) \rho(x_2), \dots, \rho(x_{n+1}) \rangle_c . \quad (11.18)$$

Par exemple pour la fonction de corrélation connexe à deux points,

$$\langle \rho(x_1) \rho(x_2) \rangle_c = \rho(x_1)(1 - \rho(x_1)) \delta(x_2 - x_1) + \frac{1}{L} f_2(x_1, x_2) , \quad (11.19)$$

On a alors

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_2 \dots dx_n H(x_2) \dots H(x_n) f_n(x, x_2, \dots, x_n) , \quad (11.20)$$

soit encore

$$f_n(x_1, x_2 \dots x_n) = \left. \frac{\partial^{n-1} F(x_1)}{\partial H(x_2) \dots \partial H(x_n)} \right|_{H=0} . \quad (11.21)$$

F est donc directement reliée à la partie régulière des fonctions de corrélation connexes.

Dans le chapitre 10, nous avons obtenu l'expression (10.7) de $f_2(x_1, x_2)$ en développant la fonctionnelle de grandes déviations pour des petites fluctuations, ce qui nous avait permis d'obtenir l'équation différentielle que doit résoudre $f_2(x_1, x_2)$

$$\partial_x^2 f_2(x, y) + \lambda \partial_x \{ (2\bar{\rho}(x) - 1) f_2(x, y) \} + \delta(x - y) J \bar{\rho}'(x) = 0 \quad (11.22)$$

Nous allons voir maintenant que (11.21) permet de retrouver directement l'équation différentielle (11.22). D'après (11.21), $f_2(x, y)$ est donné par

$$f_2(x, y) = \left. \frac{\partial F(x)}{\partial H(y)} \right|_{H=0}. \quad (11.23)$$

Il suffit alors d'utiliser l'équation différentielle (11.12) reliant F à H , en notant que quand la fonction $\{H\}$ tend vers la fonction nulle, $F(x)$ tend vers $\bar{\rho}(x)$, le profil le plus probable, et $J(x)$ tend vers J , le courant moyen dans l'état stationnaire. En dérivant (11.12) par rapport à $H(y)$, et en mettant ensuite la fonction $\{H\}$ à 0, on retrouve directement l'équation différentielle (11.22) pour $f_2(x, y)$. D'autre part, d'après les conditions aux bords (11.9), la fonction $\{F\}$ est indépendante de $\{H\}$ aux points $x = 0$ et $x = 1$, ce qui redonne les conditions aux bords (10.41) pour $f_2(0, y)$ et $f_2(y, 1)$

$$f_2(0, y) = \left. \frac{\partial F(0)}{\partial H(y)} \right|_{H=0} \quad (11.24)$$

$$= 0 \quad (11.25)$$

$$f_2(y, 1) = \left. \frac{\partial F(1)}{\partial H(y)} \right|_{H=0} \quad (11.26)$$

$$= 0 \quad (11.27)$$

11.2 Équation d'évolution pour F dans le processus faiblement asymétrique

L'équation différentielle (11.28) permet d'associer à chaque profil $\rho(x)$ une fonction $F(x)$. Ainsi, à toutes trajectoires $\hat{\rho}(x, t)$ du profil de densité, on peut associer une trajectoire $\hat{F}(x, t)$ par

$$\begin{aligned} & (\hat{F}(x, t) - \hat{\rho}(x, t)) \partial_x \hat{F}(x, t)^2 + \hat{F}(x, t) (1 - \hat{F}(x, t)) \partial_{x,x} \hat{F}(x, t) \\ & + \lambda \hat{F}(x, t) (1 - \hat{F}(x, t)) (\hat{F}(x, t) - 1 + \hat{\rho}(x, t)) \partial_x \hat{F}(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (11.28)$$

avec les conditions aux bords $\hat{F}(0, t) = \rho_a$, $\hat{F}(1, t) = \rho_b$.

Comme nous l'avons exposé dans le chapitre 3.4.3, Bertini *et al.* ont montré [8] que la trajectoire la plus probable $\hat{\rho}^*(x, t)$ menant à la formation d'une déviation $\rho(x)$ à $t = 0$ est solution des équations (3.47)-(3.49), qui dans le

cas du WASEP s'écrivent, pour $t < 0$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\rho}^*(x, t) = & \partial_{x,x} \hat{\rho}^*(x, t) - \lambda(1 - 2\hat{\rho}^*(x, t)) \partial_x \hat{\rho}^*(x, t) \\ & - 2\partial_x \{ \hat{\rho}^*(x, t)(1 - \hat{\rho}^*(x, t)) \partial_x H(x, t) \} \end{aligned} \quad (11.29)$$

$$\begin{aligned} \partial_t H(x, t) = & -\partial_{x,x} H(x, t) - \lambda(1 - 2\hat{\rho}^*(x, t)) \partial_x H(x, t) \\ & - (1 - 2\hat{\rho}^*(x, t)) (\partial_x H(x, t))^2 . \end{aligned} \quad (11.30)$$

Comme nous l'avons indiqué en chapitre 3.4.3, la trajectoire $\hat{\rho}^*(x, -t)$ est solution des équations hydrodynamiques adjointes. Il s'avère que la trajectoire $\hat{F}(x, -t)$ correspondant à $\hat{\rho}^*$ suit, dans le cas du WASEP, une équation particulièrement simple : il s'agit de l'équation hydrodynamique directe. La dérivation que nous présentons ici est un prolongement au cas faiblement asymétrique de la preuve faite dans le cas symétrique par Bertini *et al.* [8]. Nous utilisons le fait que d'une part, d'après (3.54),

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}(\rho)}{\partial \rho(x)} \right|_{\rho=\hat{\rho}^*(.,t)} = H(x, t) \quad (11.31)$$

et que d'autre part, d'après (9.52), on a pour le WASEP

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}(\{\rho\})}{\partial \rho(x)} \right|_{\rho=\hat{\rho}^*(.,t)} = \log \frac{\hat{\rho}^*(x, t)}{1 - \hat{\rho}^*(x, t)} - \log \frac{\hat{F}(x, t)}{1 - \hat{F}(x, t)} \quad (11.32)$$

On a donc

$$H(x, t) = \log \frac{\hat{\rho}^*(x, t)}{1 - \hat{\rho}^*(x, t)} - \log \frac{\hat{F}(x, t)}{1 - \hat{F}(x, t)} \quad (11.33)$$

En insérant (11.33) dans (11.29)-(11.30), on obtient l'équation d'évolution suivante pour \hat{F} :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{F}(x, t) = & -\partial_{x,x} \hat{F}(x, t) + \lambda(1 - 2\hat{F}(x, t)) \partial_x \hat{F}(x, t) \\ & + 2 \left\{ \partial_{x,x} \hat{F}(x, t) + \lambda(\hat{F}(x, t) + \hat{\rho}^*(x, t) - 1) \partial_x \hat{F}(x, t) \right. \\ & \left. + \left(\partial_x \hat{F}(x, t) \right)^2 \frac{\hat{F}(x, t) - \hat{\rho}^*(x, t)}{\hat{F}(x, t)(1 - \hat{F}(x, t))} \right\} . \end{aligned} \quad (11.34)$$

Comme $\hat{F}(., t)$ et $\hat{\rho}^*(., t)$ sont reliées par (11.28), la partie entre accolade dans (11.34) est nulle. L'équation d'évolution de $\hat{F}(x, t)$ se simplifie donc en

$$\partial_t \hat{F}(x, t) = \partial_x J^{\text{hydro}}(\hat{F}(x, t), \partial_x \hat{F}(x, t)) \quad (11.35)$$

avec J^{hydro} le courant hydrodynamique du WASEP

$$J^{\text{hydro}}(\rho, \nabla \rho) = -D(\rho)\nabla \rho + \lambda\sigma(\rho) \quad (11.36)$$

$\hat{F}(x, -t)$ suit donc la dynamique directe du WASEP. Il est tentant d'essayer de généraliser ce résultat à d'autre gaz sur réseau que le processus d'exclusion. Dans un article récent [5], Bertini, Gabrielli et Lebowitz ont étendu ce résultat aux systèmes pour lesquels le coefficient de diffusion $D(\rho)$ et la conductivité $\sigma(\rho)$ sont tels que $\frac{\sigma'(\rho)}{D(\rho)}$ soit une constante, ainsi que aux systèmes ayant un coefficient de diffusion D constant et une conductivité $\sigma(\rho)$ quadratique. Je ne connais à ce jour aucune interprétation physique justifiant ce comportement de la fonction F , et ce résultat ne semble malheureusement pas se généraliser à des conductivités et des coefficients de diffusion quelconques, bien que je ne connaisse aucun contre exemple.

11.3 Une dynamique microscopique pour F et les marches

Dans la partie III, nous avons montré que la probabilité d'une configuration microscopique $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$ de l'ASEP dans l'état stationnaire peut s'écrire comme une somme sur des marches positives discrètes $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$ de pas entiers d'amplitude au plus 1 (cf (8.1))

$$P(\eta) = \sum_{\omega} P(\eta, \omega) . \quad (11.37)$$

avec $P(\eta, \omega)$ la probabilité jointe de η et ω . Avec cette formulation, la probabilité d'une configuration η du processus d'exclusion apparaît comme la projection de la probabilité d'un ensemble plus vaste, que nous appellerons «système complet», constitué par η et les marches ω . Ces marches microscopiques permettent de calculer les probabilités en temps coïncidants dans l'état stationnaire, mais elles ne permettent pas d'étudier l'évolution du système, ni, par exemple, les fonctions de corrélation de la densité à des temps différents. Pour généraliser la somme sur les marches à ces cas là, nous allons dans ce chapitre construire une dynamique sur le «système complet» telle que la projection de cette dynamique sur les configurations η redonne celle du processus d'exclusion. La dynamique complète doit être telle que l'état

stationnaire est donné par la probabilité jointe $P(\eta, \omega)$ de $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$ et $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$, qui s'écrit (cf (8.3))

$$P(\eta, \omega) = Q(\omega) \quad \text{si } \forall i, \eta_i - 1 \leq n_i - n_{i-1} \leq \eta_i \quad (11.38)$$

$$= 0 \quad \text{sinon,} \quad (11.39)$$

avec $Q(\omega)$ le poids d'une marche $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$

$$Q(\omega) = \frac{1}{Z} \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^{n_0-1} \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^{n_L-1} \prod_{i=0}^L \frac{1 - q^{n_i}}{1 - q}. \quad (11.40)$$

Dans (11.40), Z est une constante de normalisation. Dans un article récent [29], Duchi et Schaeffer ont construit une telle dynamique pour le processus d'exclusion totalement asymétrique, quand les densités aux bords sont $\rho_a = 1$, $\rho_b = 0$ (dans ce cas, les marches ω de poids $Q(\omega)$ non nulle vérifient $n_0 = n_L = 1$). La dynamique obtenue se prolonge également pour d'autres valeurs de ρ_a et ρ_b , mais dans ce cas l'état stationnaire n'est pas donné par $P(\eta, \omega)$. D'autre part, leur dynamique n'est pas locale : les particules peuvent faire des sauts arbitrairement grands. La dynamique que nous allons construire ressemble à celle de Duchi et Schaeffer ; elle fait intervenir, comme cette dernière, un réseau parallèle sur lequel se déplace des particules auxiliaires. De plus, elle est locale, et possède une symétrie particulière : quand une dynamique adjointe peut être définie sur le système complet, elle s'obtient simplement en inversant les rôles des particules auxiliaires et des particules réelles.

Comme le montre le chapitre 11.2, la dynamique de la fonction $\{F\}$ est particulièrement simple. Nous allons nous appuyer sur elle pour construire une dynamique complète. Il faut tout d'abord trouver un équivalent microscopique de la fonction $\{F\}$. La relation entre $F(x)$ et un chemin continu $y(x)$ est (9.36)

$$F(x) = 1 - \rho(x) + y'(x) \quad (11.41)$$

où $\rho(x)$ est la densité au point x . À l'échelle microscopique, $\rho(x)$ correspond au nombre d'occupation η_i au site i , et $y'(x)$ à la différence $n_i - n_{i-1}$ de la marche $\{n_i\}_{i=0,L}$. Définissons donc F_i par

$$F_i = 1 - \eta_i + n_i - n_{i-1} \quad (11.42)$$

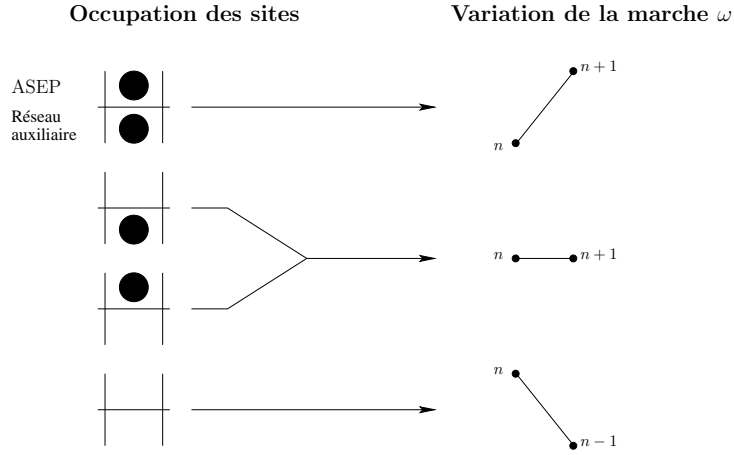


Fig. 11.1: La marche ω correspondante aux nombres d'occupation η et F fait un pas vers le haut entre $i-1$ et i si $\eta_i + F_i = 2$ (i.e. $\eta_i = 1$ et $F_i = 1$), un pas vers le bas si $\eta_i + F_i = 0$ (i.e. $\eta_i = 0$ et $F_i = 0$), et reste à la même hauteur si $\eta_i + F_i = 1$ (i.e. si $\eta_i = 0$ et $F_i = 1$ ou si $\eta_i = 1$ et $F_i = 0$).

Si l'on se restreint aux profils $\eta = \{\eta_i\}_{i=1,L}$ et marches $\omega = \{n_i\}_{i=0,L}$ compatibles, i.e. tels que la probabilité jointe $P(\eta, \omega)$ donnée par (11.38) est non nulle, on a

$$0 \leq F_i = 1 - \eta_i + n_i - n_{i-1} \leq 1 \quad (11.43)$$

de sorte que F_i ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. La suite $F = \{F_i\}_{i=1,L}$ peut donc être interprétée comme les nombres d'occupation d'un réseau auxiliaire. Nous appellerons les particules auxiliaires de ce réseau parallèle «particules F », tandis que les particules du réseau initial du processus d'exclusion seront appelées «particules réelles». La relation entre l'occupation des sites sur chaque réseau et la variation de la marche est résumée sur la figure 11.1. Sur la figure 11.2, nous avons représenté les deux réseaux parallèles et une marche correspondante. L'ajout d'un tel réseau auxiliaire est le point de départ de la dynamique construite par Duchi et Schaeffer [29]. Mais ici, notre système complet est un peu plus complexe que celui de Duchi et Schaeffer. En effet, dans leur construction, la connaissance des taux d'occupation F et η sur les deux réseaux suffit à caractériser un état complet. Dans le cas présent, il faut connaître, en plus de η et F , la hauteur de la marche ω en un point particulier pour caractériser entièrement un état complet du système, que nous avons défini comme le couple η et ω . En effet, la seule donnée de η et

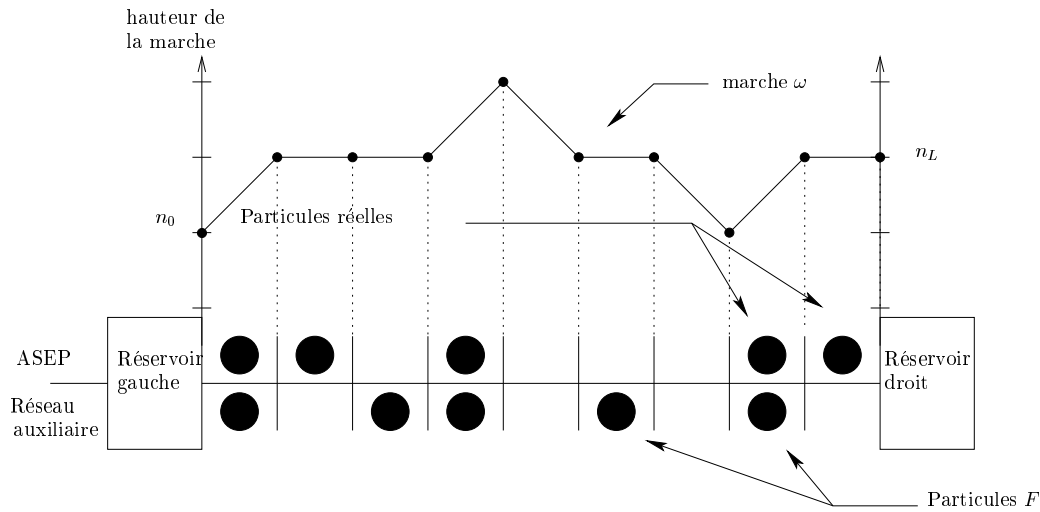


Fig. 11.2: Un exemple d'état complet

F ne permet de remonter à la marche ω qu'à une constante près en utilisant (11.42). Les cas $\rho_a = 1$ ou $\rho_b = 0$ sont des exceptions car alors les marches de poids non nul sont contraintes à avoir $n_0 = 1$ ou $n_L = 1$ (d'après (11.40)), et donc on connaît déjà la hauteur de la marche en 1 point. Dans ces cas, notre système complet est alors le même que celui de Duchi et Schaeffer. On peut remarquer que dans la relation (11.42) entre la marche ω et les nombres d'occupation η et F , le rôle joué par η et F est symétrique; la marche ω ne dépend que de la somme $\eta + F$. Or comme la probabilité $P(\eta, \omega)$ d'un état complet, donnée par (11.38), ne dépend que de la hauteur de la marche ω , il s'en suit que la probabilité d'un état complet défini par la donnée de n_0 , η et F ne dépend que de n_0 et de la somme $\eta + F$.

Il existe différentes dynamiques complètes possibles sur $\mathcal{C} = (n_0, \eta, F)$ pour lesquelles la probabilité jointe $P(\eta, \omega)$ correspond à l'état stationnaire du système complet; pour limiter les possibilités, nous imposerons des conditions supplémentaires. Nous avons vu au chapitre 11.2 que lors de la formation d'une fluctuation de densité, la trajectoire suivie par le profil de densité $\{\rho\}$ est reliée à la dynamique adjointe du processus d'exclusion, tandis que la fonction $\{F\}$ est reliée à la dynamique directe. Comme la dynamique adjointe est la dynamique obtenue en inversant le temps dans les trajectoires microscopiques de la dynamique directe (cf chapitre 2.1.3), cela suggère que

les particules F se comportent comme les symétriques par renversement du temps des particules du processus d'exclusion. Nous chercherons donc une dynamique complète telle que la dynamique adjointe (celle obtenue par renversement du temps) soit la même dynamique que celle obtenue en échangeant les deux types de particules.

Nous imposerons de plus que la dynamique soit locale, et que le nombre de particules, sur chacun des réseaux, soit conservé (notamment, les échanges de particules entre les réseaux sont interdits). Les sauts autorisés sont ceux qui mettent en jeu deux sites voisins ; ils sont indiqués sur la figure 11.3. Les

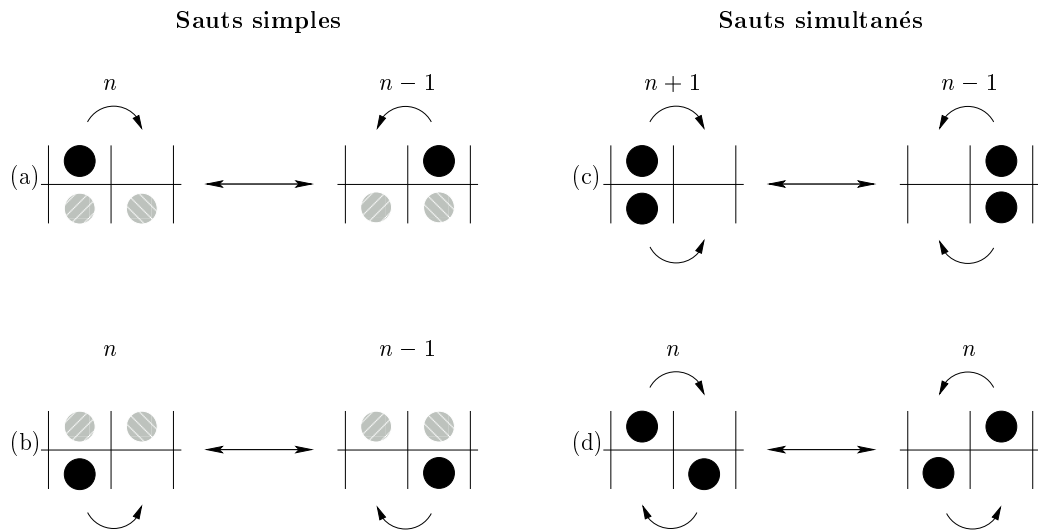


Fig. 11.3: Sauts possibles entre sites voisins. La hauteur de la marche entre les deux sites avant et après le saut est indiquée aux dessus des réseaux. Les sphères grises représentent soit une particule, soit un trou, qui ne bougent pas pendant le saut.

sauts peuvent être simples (une seule particule sur un des réseaux effectue un saut) ou simultanés (une particule saute sur chaque réseau). Les sauts simples sont représentés sur la figure 11.3, cas (a) et (b) : sur chacun des réseaux, une particule au site i peut sauter sur le site suivant $i + 1$, si celui-ci est libre, inversement une particule au site $i + 1$ peut sauter sur le site i si celui-ci est inoccupé. Les sauts simultanés sur chacun des réseaux sont également possibles, à condition que les sites mis en jeu soient les mêmes sur les deux réseaux : les sauts simultanés peuvent être soit dans la même direction (figure 11.3 cas (c)), i.e. le site source et le site destination est le

même sur les deux réseaux, soit en direction opposée (figure 11.3 cas (d)) i.e. les sites sources et destinations sont inversés entre chaque réseau.

De plus, chaque saut de particules entraîne une modification de la hauteur de la marche. Lorsque une ou plusieurs particules sautent entre les sites i et $i+1$, la hauteur de la marche n_i en i décroît du flux total de particules, compté positivement si la particule fait un mouvement vers la droite, et négativement si la particule fait un mouvement vers la gauche. De cette manière, la hauteur de la marche n'est modifiée qu'à la position du saut de particules et vérifie toujours (11.42). La différence de hauteur $n_i(t_2) - n_i(t_1)$ de la marche au site i entre deux instants t_1 et t_2 correspond donc au flux total de particules des deux types durant le laps de temps $t_2 - t_1$.

La détermination de la valeur des taux de saut définit la dynamique complète. Nous imposons que ces taux de sauts ne dépendent que de la hauteur de la marche à la position du saut et des nombres d'occupation sur chacun des réseaux à la position du site source et destination. Cela donne 20 taux de saut à fixer pour chaque hauteur de marche. Nous les noterons sous la forme

$$W^{n_i} \left(\begin{array}{c|c} \eta_i \eta_{i+1} & \rightarrow & \eta'_i \eta'_{i+1} \\ \hline F_i F_{i+1} & & F'_i F'_{i+1} \end{array} \right) \quad (11.44)$$

où n_i est la hauteur de la marche au site i , η et F sont les nombres d'occupation respectivement du réseau réel et du réseau auxiliaire avant transition, et η' et F' ceux après transition.

Les interactions avec les réservoirs sont similaires, et sont indiquées sur les figures 11.4 et 11.5 : sur chacun des deux réseaux parallèles, une particule peut sauter du système vers le réservoir ou du réservoir vers le système (en respectant la règle d'exclusion), éventuellement simultanément. Lors d'un échange de particules avec le réservoir de gauche, la hauteur n_0 de la marche en 0 diminue du flux total de particules ; de même, lors d'un échange de particules avec le réservoir de droite, la hauteur n_L de la marche en L diminue du flux total de particules. Les taux de saut avec le réservoir de gauche seront notés par

$$W^{n_0} \left(\begin{array}{c|c} F_1 & \rightarrow & F'_1 \\ \hline \eta_1 & & \eta'_1 \end{array} \right) \quad (11.45)$$

tandis que les taux de saut avec le réservoir de droite sont notés

$$W^{n_L} \left(\begin{array}{c} F_L \\ \eta_L \end{array} \middle| \rightarrow \begin{array}{c} F'_L \\ \eta'_L \end{array} \right) \quad (11.46)$$

Cela fait dans chacun des cas 12 taux de saut à fixer pour chaque hauteur de la marche. Un exemple de trajectoire possible est présenté sur la figure 11.6.

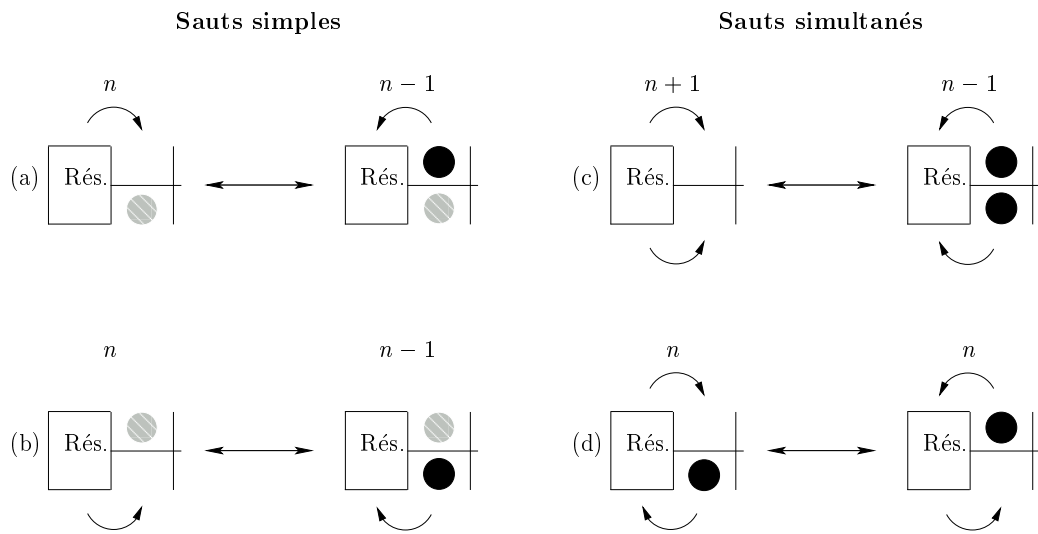


Fig. 11.4: Sauts de particules autorisés entre le réservoir de gauche et le système

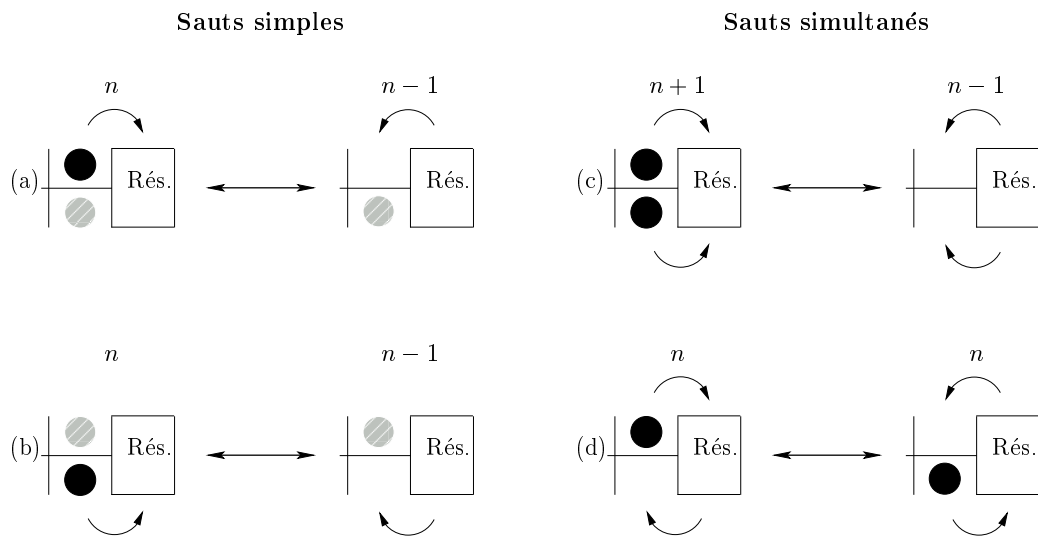


Fig. 11.5: Sauts de particules autorisés entre le réservoir de droite et le système

La dynamique du réseau réel doit être celle du processus d'exclusion, indépendamment des taux d'occupations du réseau auxiliaire, c'est à dire que quels que soit les nombres d'occupations du réseau auxiliaire, la probabilité qu'une particule en i saute en $i+1$ durant l'intervalle dt doit être dt si ce saut est permis par la règle d'exclusion, et la probabilité qu'elle saute en $i-1$ doit être qdt . Cela impose que les taux de sauts doivent respecter les équations suivantes :

$$\begin{aligned} W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 00 & & 00 \end{pmatrix} &= W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 01 & & 01 \end{pmatrix} + W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} \\ &= W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 11 & & 11 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} + W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 10 & & 10 \end{pmatrix} = q \end{aligned} \quad (11.47)$$

et

$$\begin{aligned} W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 00 & & 00 \end{pmatrix} &= W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 10 & & 10 \end{pmatrix} + W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} \\ &= W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 11 & & 11 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} + W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 01 & & 01 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned} \quad (11.48)$$

La dynamique adjointe du processus complet doit être obtenue en inversant les particules η et F , i.e. si on note par \widetilde{W} les taux de saut du processus adjoint

$$\widetilde{W}^{n_i} \begin{pmatrix} \eta_i \eta_{i+1} & \rightarrow & \eta'_i \eta'_{i+1} \\ F_i F_{i+1} & & F'_i F'_{i+1} \end{pmatrix} = W^{n_i} \begin{pmatrix} F_i F_{i+1} & \rightarrow & F'_i F'_{i+1} \\ \eta_i \eta_{i+1} & & \eta'_i \eta'_{i+1} \end{pmatrix} \quad (11.49)$$

Or la relation entre taux de saut du processus adjoint et du processus direct est donnée par (2.4)

$$P(\mathcal{C}) \widetilde{W}_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'} = P(\mathcal{C}') W_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}} \quad (11.50)$$

Le rapport $\frac{P(\mathcal{C}')}{P(\mathcal{C})}$ peut se simplifier : en effet, si \mathcal{C} et \mathcal{C}' ne diffèrent que par un saut d'une ou plusieurs particules entre i et $i+1$, alors les marches $n = n(\mathcal{C})$ associée à \mathcal{C} et $n' = n(\mathcal{C}')$ associée à \mathcal{C}' ne diffèrent que par leur valeur n_i et n'_i au point i , et donc pour $1 \leq i \leq L-1$

$$\frac{P(\mathcal{C}')}{P(\mathcal{C})} = \frac{Q(n')}{Q(n)} = \frac{1 - q^{n'_i}}{1 - q^{n_i}} \quad (11.51)$$

On obtient alors à partir de (11.49) et (11.50)

$$W^{n'_i} \begin{pmatrix} \eta'_i \eta'_{i+1} & \rightarrow & \eta_i \eta_{i+1} \\ F'_i F'_{i+1} & & F_i F_{i+1} \end{pmatrix} = \frac{1 - q^{n_i}}{1 - q^{n'_i}} W^{n_i} \begin{pmatrix} F_i F_{i+1} & \rightarrow & F'_i F'_{i+1} \\ \eta_i \eta_{i+1} & & \eta'_i \eta'_{i+1} \end{pmatrix} \quad (11.52)$$

Au total, avec (11.47), (11.48) et (11.52), on obtient 17 équations indépendantes pour 20 inconnues. Il reste donc 3 degrés de liberté supplémentaires.

Une solution possible est donnée par : pour tout $n \geq 1$

$$W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 10 & & 10 \end{pmatrix} = 0 \quad (11.53)$$

$$W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 01 & & 01 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 01 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 10 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} = 0 \quad (11.54)$$

$$W^{n+1} \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 00 & & 00 \end{pmatrix} = W^{n+1} \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 10 & & 10 \end{pmatrix} = W^{n+1} \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 11 & & 11 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 01 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} = 1 \quad (11.55)$$

$$W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 00 & & 00 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 01 & & 01 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 11 & & 11 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 10 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} = q \quad (11.56)$$

$$W^{n+1} \begin{pmatrix} 00 & \rightarrow & 00 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} = W^{n+1} \begin{pmatrix} 01 & \rightarrow & 01 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} = W^{n+1} \begin{pmatrix} 11 & \rightarrow & 11 \\ 10 & & 01 \end{pmatrix} = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q^{n+1}} \quad (11.57)$$

$$W^n \begin{pmatrix} 00 & \rightarrow & 00 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 10 & \rightarrow & 10 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} = W^n \begin{pmatrix} 11 & \rightarrow & 11 \\ 01 & & 10 \end{pmatrix} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^n} . \quad (11.58)$$

Pour le bord gauche, la condition que la première ligne redonne le processus d'exclusion s'écrit

$$W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) + W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right) + W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = \rho_a \quad (11.59)$$

$$W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) + W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right) = W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) + W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = q(1 - \rho_a) . \quad (11.60)$$

Pour deux états complets \mathcal{C} et \mathcal{C}' qui diffèrent par un saut de particule mettant en jeu le réservoir gauche, on a

$$\frac{P(\mathcal{C})}{P(\mathcal{C}')} = \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^{n_0 - n'_0} \frac{1 - q^{n_0}}{1 - q^{n'_0}} . \quad (11.61)$$

Ainsi, la symétrie entre les particules η et F s'écrit

$$W^{n'_0} \left(\left. \begin{array}{c} \eta'_1 \\ F'_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \eta_1 \\ F_1 \end{array} \right) = \left(\frac{1 - \rho_a}{\rho_a} \right)^{n_0 - n'_0} \frac{1 - q^{n_0}}{1 - q^{n'_0}} W^{n_0} \left(\left. \begin{array}{c} F_1 \\ \eta_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} F'_1 \\ \eta'_1 \end{array} \right) \quad (11.62)$$

Ce qui fait 9 équations indépendantes pour 12 inconnues. Une solution possible est $\forall n \geq 1$

$$W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = 0 \quad (11.63)$$

$$W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) = 0 \quad (11.64)$$

$$W^{n+1} \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) = \rho_a \quad (11.65)$$

$$W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) = q(1 - \rho_a) \quad (11.66)$$

$$W^{n+1} \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = \rho_a \frac{q - q^{n+1}}{1 - q^{n+1}} \quad (11.67)$$

$$W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = (1 - \rho_a) \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^n} \quad (11.68)$$

Pour le bord droit, la condition que la première ligne redonne le processus d'exclusion s'écrit

$$W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) + W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) + W^n \left(\left. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = q\rho_b \quad (11.69)$$

$$W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) + W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) = W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) + W^n \left(\left. \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) = (1 - \rho_b) . \quad (11.70)$$

Pour deux états complets \mathcal{C} et \mathcal{C}' qui diffèrent par un saut de particule mettant en jeu le réservoir droit, on a

$$\frac{P(\mathcal{C})}{P(\mathcal{C}')} = \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^{n_L - n'_L} \frac{1 - q^{n_L}}{1 - q^{n'_L}} . \quad (11.71)$$

Ainsi, la symétrie entre les particules η et F s'écrit

$$W^{n'_L} \left(\left. \begin{array}{c} \eta'_L \\ F'_L \end{array} \right| \begin{array}{c} \eta_L \\ F_L \end{array} \right) = \left(\frac{\rho_b}{1 - \rho_b} \right)^{n_L - n'_L} \frac{1 - q^{n_L}}{1 - q^{n'_L}} W^{n_L} \left(\left. \begin{array}{c} F_L \\ \eta_L \end{array} \right| \begin{array}{c} F'_L \\ \eta'_L \end{array} \right) \quad (11.72)$$

Ce qui fait encore une fois 9 équations indépendantes pour 12 inconnues. Une solution possible est $\forall n \geq 1$

$$W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right) = 0 \quad (11.73)$$

$$W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = 0 \quad (11.74)$$

$$W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = W^n \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = q\rho_b \quad (11.75)$$

$$W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = W^{n+1} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right) = (1 - \rho_b) \quad (11.76)$$

$$W^n \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \rho_b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^n} \quad (11.77)$$

$$W^{n+1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right) = (1 - \rho_b) \frac{q - q^{n+1}}{1 - q^{n+1}} \quad (11.78)$$

Il reste encore à vérifier que la probabilité stationnaire de la dynamique complète est bien $P(\mathcal{C})$ donnée par (11.38). Pour cela, il faut que

$$0 = \sum_{\mathcal{C}'} \left(-P(\mathcal{C})W(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}') + P(\mathcal{C}')W(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) \right) . \quad (11.79)$$

On peut récrire cette équation sous la forme

$$0 = \sum_{i=0}^L J_i(\mathcal{C}) \quad (11.80)$$

avec $J_i(\mathcal{C})$ la probabilité d'arriver à \mathcal{C} via le saut d'une ou plusieurs particules entre i et $i+1$ moins la probabilité de quitter \mathcal{C} via le saut d'une ou plusieurs particules entre i et $i+1$; i.e.

$$J_i(\mathcal{C}) = \sum_{\mathcal{C}' \in \Omega_i(\mathcal{C})} \left(-W(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}') + \frac{P(\mathcal{C}')}{P(\mathcal{C})} W(\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}) \right) \quad (11.81)$$

où la somme se fait sur l'ensemble $\Omega_i(\mathcal{C})$ des configurations complètes \mathcal{C}' qui diffèrent de \mathcal{C} par seulement le saut d'une ou plusieurs particules entre les sites i et $i+1$. En utilisant les équations obtenues pour les taux de saut, on peut mettre $J_i(\mathcal{C})$ sous la forme suivante pour $1 \leq i \leq L-1$

$$J_i(\mathcal{C}) = \frac{1 - q}{1 - q^{n_i}} [(\eta_{i+1} - F_{i+1}) - (\eta_i - F_i)] \quad (11.82)$$

et

$$J_0(\mathcal{C}) = \frac{1-q}{1-q^{n_0}} [\eta_1 - F_1] \quad (11.83)$$

$$J_L(\mathcal{C}) = -\frac{1-q}{1-q^{n_i}} [\eta_L - F_L] \quad . \quad (11.84)$$

Or, par construction, une configuration complète vérifie toujours

$$n_{i-1} = n_i \quad \text{ou} \quad \eta_i - F_i = 0 \quad . \quad (11.85)$$

Donc $\sum_{i=0}^L J_i(\mathcal{C})$ est composée de sommes alternées dont les termes de bord sont nuls. La somme totale est donc nulle, et l'équation maîtresse (11.79) est bien vérifiée.

En dehors du domaine de validité $\rho_a > \rho_b$ de la somme sur les marches (11.37), le processus complet n'admet pas d'état stationnaire, car la hauteur moyenne d'une marche ne cesse d'augmenter, cependant, par construction, la première ligne suit toujours la dynamique du processus d'exclusion.

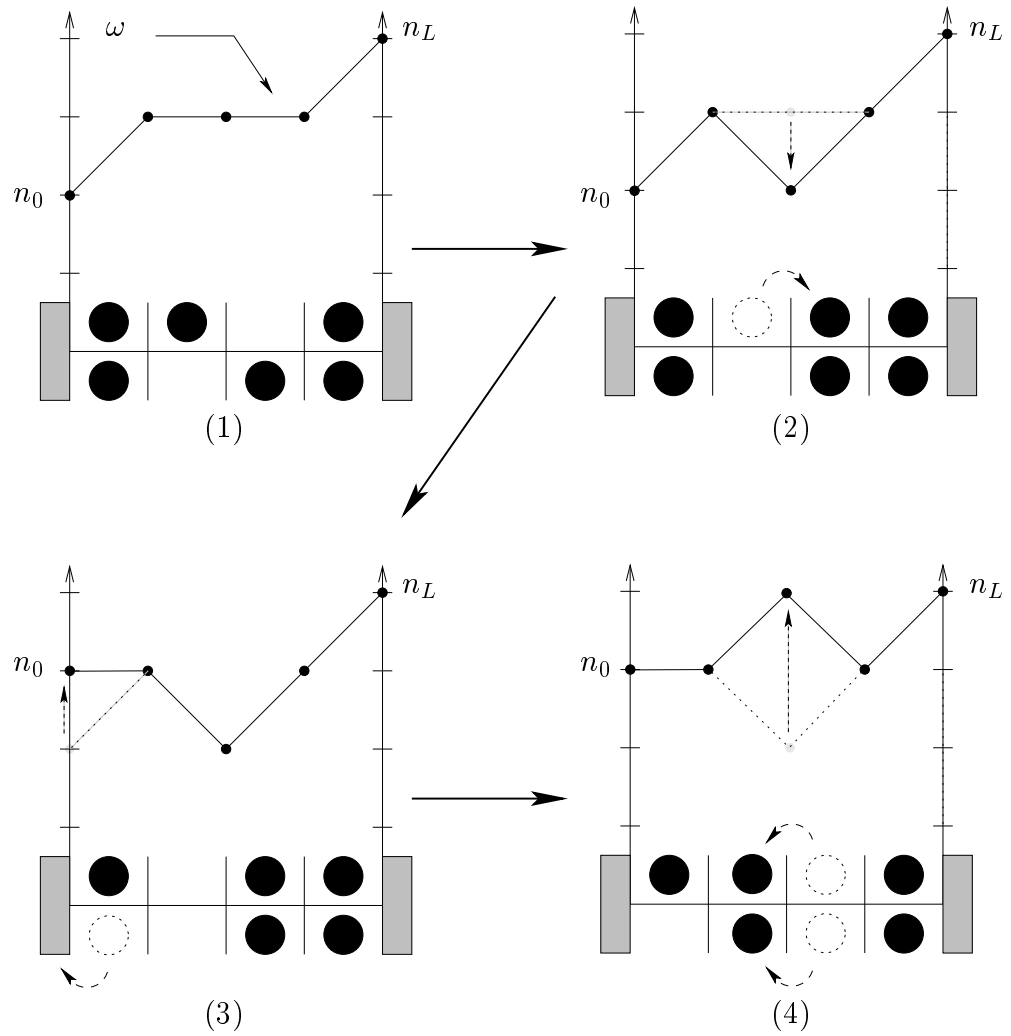


Fig. 11.6: Exemple de mouvement combiné de la marche ω et des particules de chacun des réseaux. Lors d'un saut, la hauteur de la marche décroît du flux total de particules.

12. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette thèse a été consacrée à l'étude de certaines propriétés macroscopiques du processus d'exclusion ouvert en contact avec deux réservoirs. Le processus d'exclusion est un modèle central de la physique statistique hors d'équilibre. Il s'agit d'un système stochastique constitué de particules se déplaçant sur un réseau unidimensionnel, et interagissant via une règle d'exclusion : chaque site du réseau peut accueillir au plus une particule. Lorsque ce système est placé au contact de réservoirs à chacun de ses bords, il est possible de le maintenir dans un état stationnaire hors d'équilibre.

Les résultats présentés proviennent de quatre travaux différents ayant donné lieu à autant de publications : l'étude de l'effet du désordre sur la transition de phase du premier ordre du processus d'exclusion simple [31], le calcul de la fonctionnelle de grandes déviations pour le processus d'exclusion faiblement asymétrique [30], et le calcul de la distribution des fluctuations de densité dans le processus totalement asymétrique [20] et dans le processus faiblement asymétrique [19]. Cette partie résume les résultats obtenus et tente de les remettre en perspective.

Le processus d'exclusion avec désordre gelé est un processus d'exclusion où les taux de saut des particules sont aléatoires. Par des simulations numériques, confirmées par une analyse en champ moyen, nous avons montré (chapitre 6) que, lorsque ce désordre est lié aux sites, la position de la transition de phase du premier ordre (haute densité/basse densité) devient dépendante de l'échantillon considéré. Nous expliquons cette dépendance par le fait que la position de la transition est contrôlée principalement par les taux de sauts aléatoires des sites proches des réservoirs. Cet effet du désordre sur un système hors d'équilibre n'a pas d'équivalent dans les systèmes à l'équilibre classiques.

Les simulations que nous avons présentées ne constituent qu'un rapide coup

d'œil sur un point particulier de l'effet du désordre dans le processus d'exclusion simple, un domaine actif sur lequel beaucoup reste à faire. On notera les travaux récents de Harris et Stinchcombe [44] sur l'effet du désordre sur la transition de phase du second ordre, qu'ils ont étudié à l'aide d'une approximation de type champ moyen. Malheureusement, très peu de résultats analytiques exacts sont disponibles pour l'instant pour des systèmes avec un désordre gelé lié aux sites. Une première étape serait de résoudre enfin le processus d'exclusion avec un unique défaut [49]. Par ailleurs, le processus d'exclusion avec désordre est un cas particulier des systèmes hors d'équilibre désordonnés. Pour un tour d'horizon de ce domaine en évolution, on peut se référer à [82].

Les autres travaux exposés dans cette thèse découlent de la reformulation comme une somme sur des chemins abstraits (8.1) de la probabilité d'un profil de densité dans les processus d'exclusion simples, reformulation que nous avons obtenue à partir de la méthode matricielle. Cette somme sur les chemins est un outil simple et puissant pour étudier les propriétés de la densité dans l'état stationnaire des processus d'exclusion, et constitue un résultat notable en soi. Cependant elle n'est valable que dans un certain domaine des densités aux bords (cf (8.6) et (8.7)). Il serait naturellement souhaitable de lever cette restriction. D'autre part, ces chemins abstraits n'ont pas d'interprétation physique. Une telle interprétation, outre l'éclairage nouveau qu'elle apporterait à l'étude de l'ASEP et à la méthode matricielle, pourrait ouvrir la voie à d'éventuelles généralisations de la somme sur les chemins à d'autres systèmes hors d'équilibre.

Dans le chapitre 9, nous avons utilisé la somme sur les chemins pour étudier la fonctionnelle de grandes déviations de densité dans l'état stationnaire du processus d'exclusion simple faiblement asymétrique (WASEP), quand l'asymétrie décroît comme l'inverse de la taille du système. Cette fonctionnelle donne le taux de la décroissance exponentielle avec la taille du système de la probabilité d'observer un profil de densité différant de manière macroscopique du profil de densité le plus probable. Les diverses expressions que nous avons obtenues (cf chapitre 9.2) pour la fonctionnelle de grandes déviations du WASEP font le lien entre celles, précédemment connues [24, 25], du

processus d'exclusion symétrique (SSEP) et du processus d'exclusion totalement asymétrique (TASEP). Le cas faiblement asymétrique constitue un des rares exemples où l'approche macroscopique de Bertini, De Sole, Gabrielli, Jona-Lasinio et Landim pour la fonctionnelle de grandes déviations [8] (que nous avons présentée au chapitre 3.4.3) peut être confirmée en partant de la dynamique microscopique. Tester et approfondir l'approche de Bertini *et al.* sur d'autres systèmes stochastiques constitue un chemin prometteur dans la compréhension des systèmes hors d'équilibre. Une étape importante serait de généraliser cette méthode pour englober le cas du processus d'exclusion totalement asymétrique. D'autre part, une piste pour approfondir l'approche de Bertini *et al.* serait d'étudier plus en détail les propriétés de la fonction auxiliaire F que nous avons utilisée au cours de notre dérivation de la fonctionnelle de grandes déviations. Cette fonction auxiliaire permet d'exprimer la fonctionnelle de grandes déviations (9.15), et est reliée au profil de densité par une équation différentielle (9.17). Elle était déjà apparue lors de l'étude des fonctionnelles de grandes déviations du SSEP et du TASEP [24,25]. Nous avons montré (chapitre 11.1) le rapport existant entre cette fonction F et les fonctions de corrélation connexes. De plus, sa dynamique est liée de manière particulièrement simple à la dynamique adjointe du processus d'exclusion, comme indiqué au chapitre 11.2. Récemment, il a été montré [5] que cette simplicité de l'évolution de F se retrouve dans toute une classe de gaz sur réseau. Les raisons de ce phénomène sont encore inconnues ; elles pourraient éclairer de manière nouvelle l'approche de Bertini *et al.*. Si cette propriété se généralisait, elle simplifierait grandement l'obtention d'une équation différentielle reliant F au profil de densité, et donc la dérivation de la fonctionnelle de grandes déviations de la densité.

L'expression de la probabilité d'un profil comme somme sur des chemins nous a également permis d'exprimer la distribution des fluctuations typiques de densité dans l'état stationnaire du WASEP et du TASEP. Ces fluctuations décroissent comme l'inverse de la racine carrée de la taille du système. Nous avons montré dans le chapitre 10 qu'elles se mettent sous la forme (10.2) d'une somme de deux processus indépendants dont l'un est un bruit blanc gaussien. De manière remarquable, dans la phase de courant maximum du TASEP, ces

fluctuations ne sont pas gaussiennes. D'après les simulations numériques que nous présentons en chapitre 10.4, cette décomposition des fluctuations en deux tels processus semble se généraliser à d'autres systèmes que l'exclusion simple. Il serait naturellement intéressant de confirmer ces observations par des résultats analytiques. D'autre part, puisque les fluctuations du processus faiblement asymétrique sont toujours gaussiennes, contrairement à celles du processus totalement asymétrique, ces dernières ne peuvent pas correspondre à un cas limite des premières. En ce sens, l'asymétrie du processus d'exclusion que nous avons étudié, qui décroît comme l'inverse de la taille L du système, est trop faible pour permettre d'étudier précisément la limite vers le processus totalement asymétrique. Il serait donc intéressant d'obtenir la distribution des fluctuations pour une asymétrie plus forte, en $1/\sqrt{L}$, ce qui devrait pouvoir se faire en partant une fois encore de l'expression de la probabilité d'un profil comme somme sur des chemins.

La distribution des fluctuations nous a permis d'obtenir des expressions pour les fonctions de corrélations à n points (10.5), et notamment la fonction de corrélation à deux points du processus faiblement asymétrique (cf (10.7)). Ces fonctions de corrélations sont à longue portée, ce qui est caractéristique des systèmes hors d'équilibre.

Les résultats que nous avons présentés sur les fluctuations concernent uniquement les propriétés à temps coïncidant du profil de densité dans l'état stationnaire. Il serait intéressant de pouvoir en donner une version dynamique, et notamment de décrire comment évoluent les deux processus intervenant dans la distribution des fluctuations. Dans ce but, nous avons construit dans le chapitre 11.3 une dynamique microscopique sur les marches, en prenant comme point de départ la dynamique des fonctions auxiliaires F . Ceci permet ainsi d'étendre l'expression en somme sur les marches de la probabilité d'un profil de densité à l'étude de la dynamique de l'ASEP. Cette dynamique «complète» devrait pouvoir servir de point de départ à l'obtention des versions dynamiques des expressions obtenues pour les fluctuations de densité du processus d'exclusion.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Aizenman and J. Wehr, Rounding of First-Order Phase Transitions in Systems with Quenched Disorder, *Phys. Rev. Lett.*, **62** (21), 2503–2506 (1989).
- [2] E. D. Andjel, M. Bramson and T. M. Liggett, Shocks in the asymmetric exclusion process, *Prob. Theory Related Fields*, **78**, 231–244 (1988).
- [3] M. Bengrine, A. Benyoussef, H. Ez-Zahraouy and F. Mhirech, Traffic model with quenched disorder, *Phys. Lett. A*, **253**, 135–138 (1999).
- [4] D. Bernoulli, *Hydrodynamica* (Argentorati, 1738).
- [5] L. Bertini, D. Gabrielli and J.L. Lebowitz, Large Deviations for a Stochastic Model of Heat Flow, *arXiv*, (cond-mat/0501681) (2005).
- [6] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio and C. Landim, En préparation.
- [7] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio and C. Landim, Fluctuations in stationary non equilibrium states of irreversible processes, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 040601 (2001).
- [8] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio and C. Landim, Macroscopic fluctuation theory for stationary non equilibrium states, *J. Stat. Phys.*, **107**, 635–675 (2002).
- [9] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio and C. Landim, Current Fluctuations in Stochastic Lattice Gases, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 030601 (2005).
- [10] R. A. Blythe, M. R. Evans, F. Colaiori and F. H. L. Essler, Exact solution of a partially asymmetric exclusion model using a deformed oscillator algebra, *J. Phys. A*, **33**, 2313–2332 (2000).
- [11] T. Bodineau and B. Derrida, Current fluctuations in non-equilibrium

- diffusive systems : an additivity principle, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 180601 (2004).
- [12] L. Boltzmann, Weitere Studien über Das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen, *Wien. Ber.*, **66**, 275 (1872).
- [13] C. Boutillier, P. Francois, K. Mallick and S. Mallick, A matrix ansatz for the diffusion of an impurity in the asymmetric exclusion process, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **35**, 9703–9730 (2002).
- [14] J. Cardy and J. L. Jacobsen, Critical behavior of random-bond Potts models, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 4063 (1997).
- [15] C. Chatelain and B. Berche, Finite-size scaling study of the surface and bulk critical behavior in the random-bond eight-state Potts model, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (8), 1670–1673 (1998).
- [16] R. Clausius, Ueber Die Mittlere Länge der Wege, Welche Wir Wärme Nennen, *Ann. Phys.*, **100**, 353 (1857).
- [17] Z. Csehók and T. Vicsek, Traffic models with disorder, *J. Phys. A*, **27**, L591–L596 (1994).
- [18] B. Derrida, E. Domany and D. Mukamel, An exact solution of a one-dimensional asymmetric exclusion model with open boundaries, *J. Stat. Phys.*, **69** (3-4), 667–687 (1992).
- [19] B. Derrida, C. Enaud, C. Landim and S. Olla, Fluctuations in the Weakly Asymmetric Exclusion Process with Open Boundary Conditions, *J. Stat. Phys.*, **118**, 795 – 811 (2005).
- [20] B. Derrida, C. Enaud and J. L. Lebowitz, The asymmetric exclusion process and brownian excursions, *J. Stat. Phys.*, **115**, 365–382 (2004).
- [21] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation, *J. Phys. A*, **26**, 1493–1517 (1993).
- [22] B. Derrida and M.R. Evans, Exact correlation functions in an asymmetric exclusion model with open boundaries, *J. Phys. I France*, **3**, 311–322 (1993).

-
- [23] B. Derrida, S. A. Janowsky, J.L. Lebowitz and E.R. Speer, Exact Solution of the Totally Asymmetric Simple Exclusion Process : Shock Profiles, *J. Stat. Phys.*, **73**, 813 (1993).
- [24] B. Derrida, J. L. Lebowitz and E. R. Speer, Free energy functional for nonequilibrium systems : an exactly solvable case, *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 150601 (2001).
- [25] B. Derrida, J. L. Lebowitz and E. R. Speer, Exact free energy functional for a driven diffusive open stationary nonequilibrium system, *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 030601 (2002).
- [26] B. Derrida, J. L. Lebowitz and E. R. Speer, Large deviation of the density profile in the steady state of the open symmetric simple exclusion process, *J. Stat. Phys.*, **107**, 599–634 (2002).
- [27] B. Derrida, J. L. Lebowitz and E. R. Speer, Exact large deviation functional of a stationary open driven diffusive system : the asymmetric exclusion process, *J. Stat. Phys.*, **110**, 775–809 (2003).
- [28] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan, Large deviations from a hydrodynamic scaling limit, *Commun. Pure Appl. Math.*, **42**, 243–270 (1989).
- [29] E. Duchi and G. Schaeffer, A Combinatorial Approach to Jumping Particles, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **110**, 1–29 (2005).
- [30] C. Enaud and B. Derrida, Large deviation functional of the weakly asymmetric Exclusion process, *J. Stat. Phys.*, **114**, 537–562 (2004).
- [31] C. Enaud and B. Derrida, Sample-Dependent Phase Transitions in Disordered Exclusion Models, *Europhys. Lett.*, **66**, 83 (2004).
- [32] F. H. L. Essler and V. Rittenberg, Representations of the quadratic algebra and partially asymmetric diffusion with open boundaries, *J. Phys. A*, **29**, 3375–3407 (1996).
- [33] M. R. Evans, Bose-Einstein condensation in disordered exclusion models and relation to traffic flow, *Europhys. Lett.*, **36** (1), 13–18 (1996).
- [34] M. R. Evans, Phase Transitions in One-Dimensional Nonequilibrium Systems, *Braz. J. Phys.*, **30** (1), 42–57 (2000).
- [35] M. R. Evans, Y. Kafri, L. Levine and D. Mukamel, Phase transition in

- a non-conserving driven diffusive system, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **35**, L433–L438 (2002).
- [36] J. Fourier, Théorie de la Propagation de la Chaleur Dans Les Solides, Manuscrit présenté à l’Institut de France (1807).
- [37] J. Fröhlich, In K. Osterwalder and R. Stora (editors), *Critical phenomena, random systems, gauges theories* (Elsevier Science Publishers B.V., 1986).
- [38] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mecanics* (Yale University Press, New Haven, 1902).
- [39] S. Goldstein and E. R. Speer, Reflection invariance of the current in the totally asymmetric simple exclusion process with disorder, *Phys. Rev. E*, **58** (4), 4226–4228 (1998).
- [40] J.S. Hager, J. Krug, V. Popkov and G.M. Schütz, Minimal current phase and universal boundary layers in driven diffusive systems, *Phys. Rev. E*, **63**, 056110 (2001).
- [41] V. Hakim and J. P. Nadal, Exact results for 2D directed animals on a strip of finite width, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **16**, L213 (1983).
- [42] T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang, Kinetic Roughening, Stochastic Growth, Directed Polymers & all that, *Phys. Rep.*, **254**, 215 (1995).
- [43] AB Harris, Effect of Random Defects on Critical Behavior of Ising Models, *J. Phys. C*, **7** (9), 1671–1692 (1974).
- [44] R. J. Harris and R. B. Stinchcombe, Disordered Asymmetric Simple Exclusion Process : Mean-Field Treatment, *Phys. Rev. E*, **70**, 016108 (2004).
- [45] J. Herapath, A Mathematical Inquiry Into the Causes, Laws and Principal Phenomenae of Heat, Gases, Gravitation, Etc., *Ann. Philos.*, **1**, 273, 340, 401 (1821).
- [46] H. Hinrichsen, Nonequilibrium Critical Phenomena and Phase Transitions into Absorbing States, *Adv. Phys.*, **49**, 815–958 (2000).
- [47] H. Hinrichsen, S. Sandow and I. Peschel, On matrix product ground states for reaction - diffusion models, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **29**, 2643 (1996).

-
- [48] Y. Imry and S.-K. Ma, Random-Field Instability of the Ordered State of Continuous Symmetry, *Phys. Rev. Lett.*, **35** (21), 1399–1401 (1975).
- [49] S.A. Janowsky and J. L. Lebowitz, Exact Results For the Asymmetric Simple Exclusion Process with a Blockage, *J. Stat. Phys.*, **77**, 35–51 (1994).
- [50] J.P. Joule, Some Remarks on Heat, and the Constitution of Elastic Fluids, *Mem. and Proc. Manchester Lit. and Phil. Soc.*, **9**, 107 (1848).
- [51] R. Juhász, L. Santen and F. Iglói, Partially Asymmetric Exclusion Models with Quenched Disorder, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 010601 (2005).
- [52] C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Interacting Particle Systems* (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
- [53] C. Kipnis, S. Olla and S. R. S. Varadhan, Hydrodynamics and large deviations for simple exclusion processes, *Commun. Pure Appl. Math.*, **42**, 115–137 (1989).
- [54] A. B. Kolomeisky, Asymmetric simple exclusion model with local inhomogeneity, *J. Phys. A*, **31**, 1153–1164 (1998).
- [55] J. Krug, Boundary-induced phase transitions in driven diffusive systems, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 1882–1885 (1991).
- [56] J. Krug, Origins of scale invariance in growth processes, *Adv. Phys.*, **46**, 139–282 (1997).
- [57] J. Krug, Phase Separation in Disordered Exclusion Models, *Braz. J. Phys.*, **30** (1), 97–104 (2000).
- [58] J. Krug and Pablo A. Ferrari, Phase transitions in driven diffusive systems with random rates, *J. Phys. A*, **29** (18), L465–L471 (1996).
- [59] G. W. Lakatos and T. Chou, Totally asymmetric exclusion processes with particles of arbitrary size, *J. Phys. A.*, **36**, 2027–2041 (2003).
- [60] T. M. Liggett, *Stochastic interacting systems : contact, voter, and exclusion processes* (Springer-Verlag, New York, 1999).
- [61] C. T. MacDonald, J.H. Gibbs and A. C. Pipkin, Kinetics of Biopolymerization on Nucleic Acid Templates, *Biopolymers*, **6**, 1 (1968).
- [62] K. Mallick, Shocks in the asymmetry exclusion model with an impurity, *J. Phys. A*, **29**, 5375–5386 (1996).

- [63] K. Mallick, S. Mallick and N. Rajewsky, Exact solution of an exclusion process with three classes of particles and vacancies, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **32**, 8399–8410 (1999).
- [64] K. Mallick and S. Sandow, Finite dimensional representations of the quadratic algebra : applications to the exclusion process, *J. Phys. A*, **30**, 4513–4526 (1997).
- [65] J. C. Maxwell, Illustrations of the Dynamical Theory of Gases, *Phil. Mag.*, **19**, 19 (1860).
- [66] K. Nagel, Particle Hopping Models and Traffic Flow Theory, *Phys. Rev. E*, **53**, 4655–4672 (1996).
- [67] V. Popkov and G.M. Schütz, Steady state selection in driven diffusive systems with open boundaries, *Europhys. Lett.*, **48**, 257–263 (1999).
- [68] S. Sandow, Partially asymmetric exclusion process with open boundaries, *Phys. Rev. E*, **50**, 2660–2667 (1994).
- [69] T. Sasamoto, One dimensional partially asymmetric simple exclusion process with open boundaries : Orthogonal polynomials approach, *J. Phys. A*, **32**, 7109–7131 (1999).
- [70] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley-Interscience, 1981).
- [71] G. Schütz, Generalized Bethe ansatz solution of a one-dimensional asymmetric exclusion process on a ring with blockage, *J. Stat. Phys.*, **71**, 471–505 (1993).
- [72] G. Schütz and E. Domany, Phase transitions in an exactly soluble one-dimensional exclusion process, *J. Stat. Phys.*, **72**, 277–296 (1993).
- [73] G. M. Schütz, Non-Equilibrium Relaxation Law for Entangled Polymers, *Europhys. Lett.*, **48**, 623–628 (1999).
- [74] G. M. Schütz, In C. Domb and J. L. Lebowitz (editors), *Phase transition and critical phenomena*, volume 19 (Academic Press, New York, 2000).
- [75] T. Seppäläinen, Existence of Hydrodynamics for the Totally Asymmetric Simple K-Exclusion Process, *Ann. Prob.*, **27** (1), 361–415 (1999).
- [76] B.N. Shalaev, Critical behavior of the two-dimensional Ising model with random bonds, *Phys. Rep.*, **237**, 129 (1994).

-
- [77] L. B. Shaw, J. P. Sethna and K. H. Lee, Mean-Field Approaches to the Totally Asymmetric Exclusion Process with Quenched Disorder and Large Particles, *Phys. Rev. E*, **70**, 021901 (2004).
- [78] L. B. Shaw, R. K. P. Zia and K. H. Lee, Totally asymmetric exclusion process with extended objects : A model for protein synthesis, *Phys. Rev. E*, **68**, 021910 (2003).
- [79] H. Spohn, Long range correlations for stochastic lattice gases in a non-equilibrium steady state, *J. Phys A.*, **16**, 4275–4291 (1983).
- [80] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [81] R. B. Stinchcombe, In C. Domb and J. L. Lebowitz (editors), *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume 7, (151) (Academic Press, New York, 1983).
- [82] R. B. Stinchcombe, Disorder in non-equilibrium models, *J. Phys. : Condens. Matter*, **14**, 1473–1487 (2002).
- [83] T. Chou and D. Lhose, Entropy-Driven Pumping in Zeolites and Biological Channels, *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3552 (1999).
- [84] G. Tripathy and M. Barma, Driven Lattice Gases with Quenched Disorder : Exact Results and Different Macroscopic Regimes, *Phys. Rev. E*, **58** (2), 1911–1926 (1998).
- [85] F. W. Wiegel, *Introduction to Path-Integral Methods in Physics and Polymer Science* (World Scientific Publishing, 1986).
- [86] Frédéric Van Wijland and Zoltán Rácz, Large Deviation in Weakly Interacting Boundary Driven Lattice Gases, *J. Stat. Phys.*, **118**, 27–53 (2005).

RÉSUMÉ :

Cette thèse regroupe une série de travaux concernant le processus d'exclusion asymétrique en contact avec deux réservoirs.

Dans une première partie, nous montrons par des simulations numériques que la position de la transition de phase du premier ordre dans le processus d'exclusion totalement asymétrique devient dépendante de l'échantillon considéré lorsque l'on ajoute un désordre gelé lié aux sites sur les taux de saut des particules. Ces résultats numériques sont comparés aux prédictions du champ moyen.

Dans une seconde partie, nous étudions les propriétés macroscopiques du profil de densité de particules dans l'état stationnaire. Nous dérivons tout d'abord la fonctionnelle de grandes déviations du processus d'exclusion faiblement asymétrique. Notre expression fait le lien entre des résultats précédents concernant le processus d'exclusion totalement asymétrique et le processus d'exclusion symétrique. Nous exprimons également la distribution des fluctuations de densité dans l'état stationnaire des processus faiblement et totalement asymétriques. Ces fluctuations se mettent sous la forme d'une somme de deux fonctions aléatoires indépendantes. Nous montrons que dans la phase de courant maximum du processus totalement asymétrique, ces fluctuations ne sont pas gaussiennes. La connaissance des fluctuations nous permet de calculer les fonctions de corrélation à temps coïncidant dans l'état stationnaire.

Ces deux séries de résultats découlent de l'écriture de la probabilité d'un profil de densité dans l'état stationnaire comme une somme sur des chemins abstraits. Dans le but de généraliser nos résultats, une dynamique microscopique sur ces chemins est construite.

MOT-CLÉS : Processus stochastiques – Systèmes hors d'équilibre – Processus d'exclusion – Grandes déviations – Fluctuations – Systèmes désordonnés

ABSTRACT:

This thesis presents a series of works dealing with the open asymmetric exclusion process.

In a first part, we give numerical evidences showing that the position of the first order phase transition in the totally asymmetric exclusion process become sample-dependent when quenched, sitewise disorder is added to the jump rates. These numerical simulations are compared with analytic prediction based on a mean field approach.

In a second part, we study the macroscopic properties of the density profile in the stationary state of the exclusion process. We firstly derive the large deviation function for the weakly asymmetric exclusion process. Our expression is shown to link those of the large deviation function of the symmetric and the totally asymmetric exclusion process, which have been previously derived. Next, we compute the distribution of the small density fluctuations in the weakly and totally asymmetric process. These fluctuations can be written as the sum of two independent random functions. We show that in the maximal current phase of the totally asymmetric exclusion process, these fluctuations are non-gaussian. From the fluctuation distribution, we derive the density correlation functions in the stationary state.

Our derivations of the density profile properties are based on a rewriting of the probability of a given profile as a sum over abstract paths. In order to generalize such an expression, a microscopic dynamic on those paths is constructed.

KEYWORDS : Stochastic process – Non-equilibrium systems – Exclusion process – Large deviations – Fluctuations – Disordered systems