



**HAL**  
open science

## Analyse spectrale de modèles neutroniques

Mohammed Sbihi

► **To cite this version:**

Mohammed Sbihi. Analyse spectrale de modèles neutroniques. Mathématiques [math]. Université de Franche-Comté, 2005. Français. NNT: . tel-00011072

**HAL Id: tel-00011072**

**<https://theses.hal.science/tel-00011072>**

Submitted on 21 Nov 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'U.F.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ  
DE FRANCHE-COMTÉ**  
Spécialité : Mathématiques et Applications

## **ANALYSE SPECTRALE DE MODÈLES NEUTRONIQUES**

par

**Mohammed SBIHI**

Soutenu le 30 septembre 2005 devant la commission d'Examen :

Président du Jury	C. BARDOS	Professeur Émérite, Université Paris 7
Directeur de Thèse	M. MOKHTAR-KHARROUBI	Professeur, Université de Franche-Comté
Rapporteurs	J. BANASIAK	Professeur, University of Natal (Afrique du Sud)
	F. GOLSE	Professeur, Université Paris 7
	K. LATRACH	Professeur, Université Clermont-Ferrand 2
Examineur	C. VILLANI	Professeur, École Normale Supérieure de Lyon
Invitée	M. HARAGUS	Professeur, Université de Franche-Comté



*A mes parents*



## *Merci !*

Toute ma gratitude va à Monsieur Mustapha MOKHTAR-KHARROUBI pour la confiance qu'il m'a faite en acceptant de diriger mes recherches et pour le sujet qu'il m'a proposé. Ses judicieux conseils, tant sur le plan de la rigueur mathématique que de la rédaction, ses critiques, ses encouragements et sa chaleur humaine m'ont été d'une aide extrêmement précieuse tout au long de ces trois années. Je le remercie très chaleureusement.

Je suis très honoré que Messieurs Jacek BANASIAK, François GOLSE et Khalid LATRACH aient accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les prie de trouver ici l'expression de ma plus grande reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour leur disponibilité. Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur Claude BARDOS en acceptant de présider ce Jury, et lui en suis profondément reconnaissant. Je suis très heureux que Monsieur Cédric VILLANI ait accepté de faire partie du Jury, je vaudrais l'assurer de ma plus profonde considération. Je suis également très reconnaissant envers Madame Mariana HARAGUS d'avoir spontanément accepté de se joindre au Jury et je la remercie de l'intérêt qu'elle a porté à mon travail.

Au cours de ces trois années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire de Mathématiques de Besançon pour mener ce projet à bien. Un grand merci à tous les membres du Labo avec une mention spéciale à Mesdames Nelly GIRE, Odile HENRY, Catherine PAGANI, Catherine VUILLEMENOT, et à Messieurs Julien CHARPIN, Philippe PARIS, Jacques VERNEREY pour avoir toujours su répondre aux questions les plus diverses.

Je remercie Bertrand LODS, avec qui j'ai effectué une collaboration parallèlement à cette thèse, pour ses encouragements, ses conseils et l'intérêt qu'il a toujours manifesté à mes travaux. J'adresse également mes remerciements à Monsieur Farid AMMAR KHODJA pour ses encouragements et son soutien tout au long de ces trois années.

Bien sûr, en remontant le temps, je veux dire aussi ma reconnaissance envers tous mes enseignants, en particulier Messieurs Mohamed MORSLI et Mohamed BOUKRA dont j'ai beaucoup admiré les enseignements.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier mes amis et mes proches qui n'ont jamais cessé de m'encourager. Mes proches, à qui je ne trouverai pas les mots pour leur dire exactement tout ce que je leur dois. A chaque pas et à chaque détour du chemin ils sont là, avec sollicitude et affection, avec la confiance en moi qui en manque parfois... Merci à mes parents Ali et Djouher de m'avoir amené si loin, à mes soeurs Souhila, Djamilia et Samia et mes frères Youcef et Hmidouche d'être là et merci à toute ma famille et ma belle famille du fond du coeur. Enfin, merci à toi, Karima, pour ton soutien et ton amour. Dans les moments noirs, où je me sais être invivable, tu m'as réconforté. Dans mes colères, mes coups durs, tu m'as soutenu. Dans mes joies, mes bonheurs, tu m'as accompagné. Merci pour tout et simplement, merci d'être là.

Mohand



## Notes au lecteur

- Les sections et les équations sont numérotées par deux chiffres, le premier indique le chapitre et le deuxième indique la position dans le chapitre en question. Exemple : Section **4.2** désigne la **deuxième** section du Chapitre **4**.

- Les définitions, les théorèmes, les sous-sections, les propositions, les corollaires, les lemmes, les remarques, les exemples, les questions sont numérotés séparément en utilisant 3 chiffres, le premier chiffre indique le chapitre, le deuxième indique la section quant au troisième il désigne la position dans la section en question.

Exemple : Théorème **4.2.1** indique le **premier** théorème dans la **deuxième** section du Chapitre **4**.

- On trouvera à la dernière page de cette thèse un Index pouvant en faciliter la lecture.





---

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Résultats préliminaires</b>	<b>17</b>
1.1 Introduction . . . . .	17
1.2 Théorie spectrale des opérateurs . . . . .	17
1.3 Théorie spectrale des semigroupes . . . . .	21
1.3.1 Spectre critique . . . . .	25
1.3.2 Type essentiel et comportement asymptotique . . . . .	27
1.4 Perturbations spectrales . . . . .	28
1.4.1 Compacité et continuité en norme des restes de la série de Dyson-Phillips . . . . .	32
1.5 Spectre du semigroupe d'absorption et de son générateur . . . . .	35
<b>I. THÉORÈMES D'APPLICATIONS SPECTRALES DANS DES DOMAINES NON BORNÉS</b>	<b>43</b>
<b>2 Théorèmes d'applications spectrales dans <math>L^p</math>, <math>1 &lt; p &lt; \infty</math></b>	<b>45</b>
2.1 Introduction . . . . .	45
2.2 Opérateurs de collision réguliers . . . . .	46
2.3 Théorèmes d'applications spectrales partielles . . . . .	49
2.4 Théorèmes d'applications spectrales . . . . .	62
2.5 Remarques et problèmes ouverts . . . . .	70
<b>3 Théorèmes d'applications spectrales dans <math>L^1</math></b>	<b>73</b>
3.1 Introduction . . . . .	73
3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier . . . . .	76
3.2.1 Dimension quelconque . . . . .	76
3.2.2 Cas unidimensionnel . . . . .	94
3.3 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans un domaine quel- conque . . . . .	98
3.4 Théorèmes d'applications spectrales . . . . .	102

II. APPROCHE RÉSOVANTE POUR LES SPECTRES ESSENTIEL ET CRITIQUE		111
<b>4</b>	<b>Approche résolvente pour les spectres essentiel et critique</b>	<b>111</b>
4.1	Introduction . . . . .	111
4.2	Résultats abstraits dans un espace de Hilbert . . . . .	114
4.2.1	Continuité en norme de $0 \leq t \mapsto U_1(t)$ . . . . .	114
4.3	Application au transport neutronique . . . . .	119
4.3.1	Stabilité du spectre essentiel . . . . .	123
4.3.2	Stabilité du spectre critique . . . . .	124
4.3.3	Quelques Extensions . . . . .	129
III. MODÈLES CINÉTIQUES PARTIELLEMENT ÉLASTIQUES.		131
<b>5</b>	<b>Propriétés spectrales liées à la compacité</b>	<b>137</b>
5.1	Introduction . . . . .	137
5.2	Analyse spectrale dans $L^p$ , $1 < p < \infty$ . . . . .	138
5.2.1	Étude du problème stationnaire . . . . .	140
5.2.2	Étude du problème d'évolution . . . . .	141
5.3	Analyse spectrale dans $L^1$ . . . . .	144
5.3.1	Étude du problème stationnaire . . . . .	145
5.3.2	Étude du problème d'évolution . . . . .	147
5.4	Quelques remarques . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Propriétés spectrales liées à la positivité</b>	<b>155</b>
6.1	Introduction . . . . .	155
6.2	Spectre de $T + K_0$ . . . . .	156
6.2.1	Spectre de l'opérateur monocinétique . . . . .	157
6.2.2	Spectre essentiel de $T + K_0$ . . . . .	165
6.3	Quelques propriétés spectrales liées à la positivité . . . . .	165
6.3.1	Spectre périphérique de $T + K_0$ . . . . .	166
6.3.2	Irréductibilité de $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ . . . . .	169
6.3.3	Sur la valeur propre principale . . . . .	172
6.3.4	Croissance stricte de la valeur propre principale . . . . .	173
6.3.5	Croissance de $s(T + K_0)$ par rapport à $K_0$ . . . . .	176
6.4	Théorème d'application spectrale . . . . .	181
6.5	Appendix . . . . .	190
	<b>Bibliographie</b>	<b>193</b>
	<b>Index</b>	<b>200</b>

# Introduction Générale

La thèse présentée ici a pour thème central la théorie spectrale de divers modèles neutroniques. Elle se compose de trois parties complémentaires. La première partie concerne la théorie spectrale des modèles neutroniques classiques en domaines **non bornés**. La deuxième partie concerne une nouvelle approche (dite **résolvante**) de la stabilité du spectre essentiel ou critique de semigroupes perturbés dans les espaces de Hilbert, puis son application aux équations cinétiques. Enfin, la troisième partie concerne l'analyse spectrale d'un modèle neutronique introduit en 1974 par E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49] mettant en jeu des opérateurs de collision plus complexes notamment **partiellement élastiques**.

Les équations de la neutronique décrivent l'évolution temporelle des distributions des neutrons dans un milieu fissile ou pas. Elles sont naturellement linéaires. En effet, la proportion des neutrons est infinitésimale par rapport aux atomes du milieu dans lequel ils se propagent (de l'ordre de  $10^{-11}$  [48]) de sorte que les interactions neutron-neutron sont négligeables par rapport aux interactions des neutrons avec le milieu ambiant dont les propriétés sont supposées indépendantes de la population neutronique. Ces équations s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, v, t) + v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v, t) + \sigma(x, v)\varphi(x, v, t) = K\varphi(x, v, t) \quad (0.1)$$

avec généralement un flux rentrant nul

$$\varphi|_{\Gamma_-} = 0 \quad (0.2)$$

et une distribution initiale

$$\varphi(x, v, 0) = \varphi_0(x, v), \quad (0.3)$$

où  $(x, v) \in \Omega \times V$ ,  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^N$ ,  $V \subset \mathbb{R}^N$  est l'ensemble des vitesses admissibles et

$$\Gamma_- = \{(x, v) \in \Omega \times V : v \text{ est rentrant en } x \in \partial\Omega\}.$$

La condition aux limites (0.2) signifie physiquement que tout neutron arrivant en un point de  $\partial\Omega$  et venant de l'intérieur de  $\Omega$  disparaît et qu'aucun neutron

n'arrive de l'extérieur : ce sont les conditions aux limites dites absorbantes. La fonction  $\sigma(\cdot, \cdot)$  représente la **fréquence de collision** (appelée aussi section efficace d'absorption). L'opérateur  $K$  est un opérateur linéaire dit **opérateur de collision**. Il rend compte aussi bien de la réflexion (= scattering) des neutrons que de leur production (en présence de matériaux fissiles) par fission. Classiquement cet opérateur est donné par

$$K\varphi(x, v) = \int_V k(x, v, v')\varphi(x, v')d\mu(v'), \quad (0.4)$$

où  $k(\cdot, \cdot, \cdot)$  est appelé **noyau de collision** et  $V$  est le support d'une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^N$  non nécessairement finie notée  $\mu$ . Dans le modèle continu,  $V$  représente une couronne fermée  $\{v \in \mathbb{R}^N : a \leq |v| \leq b\}$  ( $0 \leq a < b \leq \infty$ ) munie de la mesure de Lebesgue volumique et dans le modèle multigroupe,  $V$  est une réunion finie de sphères centrées en zéro, muni d'une mesure  $\mu$  combinaison de mesures de Lebesgue surfaciques correspondant à ces sphères (on notera que le recours au modèle multigroupe est dicté notamment par des considérations numériques).

Pour les détails sur les considérations physiques de ces équations on pourra consulter par exemple les ouvrages [14, 28, 109][25, Chapitre XXI, § 1].

Il est traditionnel de mettre le problème d'évolution (0.1)-(0.3) sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait dans  $L^p(\Omega \times V)$  ( $1 \leq p < \infty$ )

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}(t) = (T + K)\varphi(t) & (t > 0) \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \quad (0.5)$$

où  $T$  désigne l'**opérateur d'absorption** :

$$T\varphi = -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x, v)\varphi(x, v)$$

de domaine  $D(T) = \{\varphi \in L^p(\Omega \times V) : v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V), \varphi|_{\Gamma_-} = 0\}$  (pour le sens précis de la définition de  $D(T)$  et la théorie des traces voir [11, 13, 22, 23, 102]) et  $K$  est l'opérateur de collision. L'opérateur  $T$  engendre un  $C_0$ -semigroupe explicite dit **semigroupe d'absorption**

$$U(t) : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto e^{-\int_0^t \sigma(x - sv, v) ds} \varphi(x - tv, v) \chi_{\{t < \tau(x, v)\}} \in L^p(\Omega \times V)^1,$$

où  $\tau(x, v) = \inf \{s > 0 : (x - sv) \notin \Omega\}$ . Physiquement,  $\tau(x, v)$  est le temps mis par un neutron, initialement en  $x \in \Omega$  animé de la vitesse  $-v$ , pour atteindre

<sup>1</sup>Ici et dans toute la suite on fait la convention que toutes les fonctions sont prolongées, par zéro, en dehors de leurs domaines.

(pour la première fois) le bord  $\partial\Omega$ . Comme dans la plupart des modèles physiques l'opérateur de collision  $K$  est borné [18, 76], l'**opérateur de transport**  $T + K$  engendre un  $C_0$ -semigroupe  $(V(t))_{t \geq 0}$ , dit **semigroupe de transport**, qui résout le problème d'évolution (0.1)-(0.3). Ce semigroupe est donné par une série dite de Dyson-Phillips

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \quad (0.6)$$

où

$$U_0(t) = U(t) \text{ et } U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(t-s)KU_j(s)ds, \quad j \geq 0, t \geq 0.$$

Le but de ce travail est de contribuer à la compréhension spectrale du semigroupe  $(V(t))_{t \geq 0}$  et de son générateur  $T + K$  aussi bien pour le modèle collisionnel classique (0.4) que pour le modèle plus complexe introduit par E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49]. Ces propriétés sont importantes notamment pour comprendre le comportement asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) des solutions du problème d'évolution précédent.

✓ Dans la première partie de cette thèse on fera le lien spectral entre  $V(t)$  et  $T + K$  lorsque le domaine  $\Omega$  est *non borné*. En d'autres termes, il s'agira d'établir des théorèmes d'applications spectrales. Ces problèmes sont complètement nouveaux et, contrairement à ce qui se faisait jusqu'ici, ne sont plus liés à des questions de compacité.

✓ Dans la deuxième partie, nous apportons une nouvelle approche (dite résolvente, i.e. fournissant des critères en termes des résolvantes) de l'étude de la stabilité des spectres essentiel et critique des  $C_0$ -semigroupes perturbés dans les espaces de Hilbert. Ensuite, nous montrons comment ces résultats d'analyse fonctionnelle se traduisent dans le cadre de la neutronique aussi bien dans les domaines bornés que dans les domaines non bornés.

✓ Dans la troisième partie nous considérons le modèle neutronique de E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49]. L'opérateur de collision comporte, en plus de l'opérateur classique (0.4), un opérateur élastique, préservant l'énergie cinétique lors de collisions et un opérateur inélastique faisant diminuer l'énergie d'une quantité fixée. Contrairement au modèle classique (0.4), l'opérateur élastique n'induit pas de compacité en vitesses et rend l'étude spectrale plus délicate.

Depuis le papier pionnier de J. LEHNER ET G.M. WING [55] dans les années cinquante, une abondante littérature a été consacrée à l'analyse spectrale de l'opérateur de transport et du semigroupe associé. Celle-ci fût entreprise sous divers angles, portant, entre autres, sur la nature des conditions aux limites, la

nature du domaine des positions ou des vitesses et la nature de l'opérateur de collision. Citons, sans prétendre à une quelconque exhaustivité, les contributions de S. ALBERTONI ET B. MONTAGNINI [1], A. BELLENI-MORANTE [15], N. ANGELESCU *et al* [5], C. BARDOS ET M. CESSENAT [12], M. BORYSIEWICZ ET J. MIKA [18], G. GREINER [38], K. JÖRGENS [44], E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49], K. LATRACH [50, 51, 52, 53], B. LODS [59], M. MOKHTAR-KHARROUBI [67, 68, 70, 71], B. MONTAGNINI [75], V. PROTOPODESCU ET A. CORCIOVEI [81], A. SUHADOLC [92], P. TAKAC [93], S. UKAI [95], R. VAN-NORTON [96], I. VIDAV [97, 98], J. VOIGT [103, 104] et L. WEIS [107].

Initialement, le comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy (0.5) fut analysé suivant le schéma standard suivant [56, 64] :

1) Analyse du spectre de  $T + K$ . Typiquement, dans les domaines *bornés*  $\Omega$  et pour des opérateurs de collision (0.4), une puissance  $[(\lambda - T)^{-1}K]^m$  est *compacte* et  $\sigma(T + K)$  se compose du demi-plan (le spectre de  $T$ )

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda^*\}$$

( $-\lambda^*$  est l'abscisse spectrale de  $T$ ) et, au plus, de valeurs propres isolées  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ , ( $\operatorname{Re}\lambda_i > -\lambda^*$ ), de multiplicité algébrique finie, où  $\{\lambda_i : \operatorname{Re}\lambda_i \geq \alpha\}$  est au plus *fini* pour tout  $\alpha > -\lambda^*$ . [On notera qu'en neutronique,  $m = 1$  dans les espaces  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) [18, 65, 99]. Ce résultat de compacité s'obtient aussi par les lemmes de moyenne [36, 35] [68, Chapter 4]. Par contre, dans  $L^1$  il est nécessaire de recourir à des *itérées*].

2) Déformer le contour d'intégration dans la formule de Dunford (cf. [79, Corollary 7.5, p. 29])

$$V(t)\varphi_0 = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{\nu-i\gamma}^{\nu+i\gamma} e^{\lambda t} (\lambda - T - K)^{-1} \varphi_0 d\lambda \quad (t > 0)$$

(où  $\nu$  est assez grand), récupérer les résidus correspondant aux pôles (i.e. les valeurs propres de  $T + K$ ) et obtenir une décomposition spectrale de  $V(t)\varphi_0$  accompagnée d'une estimation explicite du terme transitoire lorsque la donnée initiale  $\varphi_0 \in D((T+K)^2)$  obtenant ainsi le comportement asymptotique (cf. [67]). L'inconvénient de cette approche est qu'elle impose la contrainte non naturelle  $\varphi_0 \in D((T+K)^2)$  (voir [54, 91] et les références citées dans ces papiers pour les récents développements dans cette direction).

C'est I. VIDAV [98] qui, le premier, a mentionné que même si l'ensemble

$$\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}$$

est réduit à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie,

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\}$$

peut contenir du spectre continu en raison de *l'absence*<sup>2</sup>, en général, de théorème d'application spectrale pour l'application

$$\lambda \mapsto e^{t\lambda}.$$

Il a montré également que le comportement asymptotique de  $(V(t))_{t \geq 0}$  est lié à l'analyse du spectre de celui-ci et que la *compacité* d'un *certain reste* de la série de Dyson-Phillips (0.6)

$$R_n(t) = \sum_{j=n}^{\infty} U_j(t) \quad (0.7)$$

constitue l'outil adéquat pour exclure la présence éventuelle du spectre continu et pour rétablir le théorème d'*application spectrale partielle*

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \lambda > -\lambda^*\}. \quad (0.8)$$

Ce dernier implique un comportement asymptotique exponentiel du semigroupe en *norme d'opérateur*. Les travaux de I. VIDAV ont par la suite été poursuivis et affinés par plusieurs auteurs F. ANDREU *et al* [4], G. GREINER [39], M. MOKHTAR-KHARROUBI [68, CHAPTERS 2–4][66, 67, 69] G. SCHLÜCHTERMANN [89], P. TAKAC [93], J. VOIGT [101, 104, 106] et L. WEIS [107] (plus de précisions seront données dans la Section 1.4). Récemment, M. MOKHTAR-KHARROUBI [70, 71] a réalisé une étude plus fine de ces questions de compacité et a, en particulier, mis en évidence une classe optimale d'opérateurs de collision  $K$  et de mesures  $\mu$  assurant la compacité de  $R_1(t) = V(t) - U(t)$  pour tout  $t \geq 0$  dans  $L^p(\Omega \times V)$ ,  $1 < p < \infty$ . Ce résultat simplifie considérablement l'analyse précédente. En effet, il entraîne, par simple usage de l'argument standard de stabilité du spectre essentiel par perturbation compacte, que les deux semigroupes  $(U(t))_{t \geq 0}$  et  $(V(t))_{t \geq 0}$  ont le même spectre essentiel, et en particulier le théorème d'application spectrale (0.8).

Les propriétés spectrales et l'analyse asymptotique des équations (0.1)-(0.3) pour les opérateurs de collision *classiques* (0.4) et dans des domaines *bornés* sont donc à présent bien comprises. On renvoie le lecteur à l'ouvrage [68] et aux références citées pour une discussion détaillée de ces questions (cf. aussi [70, 71] pour les récents développements).

Lorsque  $\Omega$  est un domaine *non borné*, la compacité de (0.7) n'est vraie que sous des conditions très restrictives, par exemple sous la condition (cf. [104, 107]) :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{v' \in V} \int_V k(x, v, v') d\mu(v) = 0, \quad (0.9)$$

et la question de savoir si le théorème d'application spectrale (0.8) persiste ou pas lorsque (0.9) tombe à défaut ou plus généralement lorsque la compacité de

<sup>2</sup>Voir la Section 1.3 pour plus de détails sur le sujet.



(0.7) n'est plus vraie est *ouverte*.

Dans [68, Chapter 2], M. MOKHTAR-KHARROUBI a conjecturé qu'un théorème d'application spectrale (partielle) du type (0.8) a lieu pour un problème de Cauchy perturbé abstrait du type (0.5) dans un espace de Banach quelconque pourvu que l'application

$$0 \leq t \mapsto R_n(t)$$

soit continue en norme (d'opérateurs). Cette conjecture a été démontrée par S. BRENDLE, R. NAGEL ET J. POLAND [20]. Dans leur preuve un rôle crucial est joué par le **spectre critique**, introduit récemment par R. NAGEL ET J. POLAND [78], que nous n'évoquons que sommairement dans cette introduction pour présenter nos résultats; sa définition précise sera donnée dans la Section 1.3. Le spectre critique  $\sigma_{crit}(U(t))$  (où  $(U(t))_{t \geq 0}$  est un  $C_0$ -semigroupe abstrait de générateur  $T$ ) est un fermé du spectre  $\sigma(U(t))$  qui *contient*  $\sigma(U(t)) \setminus e^{t\sigma(T)}$ . Il renseigne donc sur la partie du spectre du semigroupe qui ne pourrait pas éventuellement être récupérée à partir du spectre de générateur. Ils montrent qu'il existe  $\omega_{crit}(T)$ , dit type critique de  $(U(t))_{t \geq 0}$ , tel que le spectre critique  $\sigma_{crit}(U(t))$  est *confiné* dans le disque  $\{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| \leq e^{t\omega_{crit}(T)}\}$ . Par conséquent, en dehors de ce disque on a

$$\sigma(U(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega_{crit}(T)}\} = e^{t\sigma(T)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > \omega_{crit}(T)\}. \quad (0.10)$$

Pour identifier le type critique d'un  $C_0$ -semigroupe perturbé  $(V(t))_{t \geq 0}$  (obtenu en perturbant  $T$  par un opérateur borné  $K$ ) nous disposons du résultat suivant [20] :

Si l'application

$$0 \leq t \mapsto R_n(t) \quad (0.11)$$

est *continue en norme* alors

$$\omega_{crit}(T) = \omega_{crit}(T + K).$$

En revanche, lorsque  $n = 1$ , i.e. si l'application

$$0 \leq t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t) \quad (0.12)$$

est continue en norme, alors on a un résultat plus fort puisque  $V(t)$  *hérite totalement* le spectre critique de  $U(t)$

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t)) \quad t \geq 0.$$

Un des objectifs de la première partie de cette thèse est de voir comment ces idées abstraites se traduisent et s'appliquent aux équations cinétiques dans les domaines non bornés. Naturellement, l'enjeu principal sera d'étudier la continuité en norme d'opérateurs de (0.11). C'est cette continuité qui motive la deuxième

partie de cette thèse, où nous nous plaçons dans un cadre abstrait (hilbertien) et nous donnons des conditions, en termes de  $K$  et de la résolvante de  $T$ , assurant la continuité en norme de (0.12). Nous montrons ensuite comment ces idées s'appliquent aux équations de transport.

En 1974, E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49] ont introduit un modèle de collision, plus général que (0.4),

$$K = K_c + K_d + K_0 \quad (0.13)$$

composé de l'opérateur de collision **classique**

$$K_c \varphi(x, v) = \int_V k_c(x, v, v') \varphi(x, v') dv',$$

de l'opérateur **inélastique**  $K_d$  donné par

$$K_d \varphi(x, v) = \sum_{m=1}^l K_d^{(m)} \varphi(x, v) = \sum_{m=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^{(m)}(x, e_m(\rho), \omega, \omega') \varphi(x, e_m(\rho)\omega') d\omega',$$

où  $v = \rho\omega$  avec  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ . Chaque opérateur  $K_d^{(m)}$  décrit un événement (une collision) où une énergie  $E_m$  est perdue par un neutron se trouvant à la position  $x$  avec une vitesse initiale  $e_m(\rho)$  et une vitesse finale  $\rho$ . La vitesse initiale,  $e_m(\rho)$ , est déterminée par

$$E_m = \frac{1}{2}M(e_m(\rho))^2 - \frac{1}{2}M\rho^2,$$

où  $M$  représente la masse d'un neutron. Enfin,  $K_0$  est l'opérateur de collision **élastique**

$$K_0 \varphi(x, v) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(x, \rho\omega') d\omega'$$

qui décrit les collisions ne faisant pas varier l'énergie cinétique des neutrons qui subissent seulement une déviation angulaire. Notons que des opérateurs de collision du type  $K_0$  et  $K_d$  (comportant une masse de Dirac en énergies) apparaissent dans de nombreux modèles dans la littérature, notamment dans la littérature des semi-conducteurs [8, 9, 61] (cf. aussi [10] et les références qui s'y trouvent), mais ces travaux ne concernent pas l'analyse spectrale.

L'opérateur de collision élastique "n'intègre qu'en angles" et n'induit donc pas de compacité en vitesses (contrairement à  $K_c$ ) et aucune puissance de  $K(\lambda - T)^{-1}$  n'est compacte (a fortiori aucun reste de la série de Dyson-Phillips ne l'est non plus). Il convient alors de dégager "*de la compacité*" afin de décrire convenablement le spectre discret de  $T + K$  et d'*estimer* le type essentiel du semigroupe associé. Sous certaines conditions de continuité par morceaux sur les noyaux de

collision et la fréquence de collision et en se plaçant dans  $L^1(\Omega \times V)$ , E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49] montrent qu'une puissance de  $(K_d + K_0)R(\lambda, T + K_0)$  est compacte et décrivent le spectre de  $T + K$ . Cependant, à notre connaissance, il n'existe aucun résultat spectral concernant le semigroupe  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ . L'objet de la troisième partie de cette thèse, composée des Chapitres 5 et 6, est de présenter une théorie spectrale générale pour ce modèle neutronique.

Après ce tour d'horizon, venons-en à la description détaillée des différents chapitres.

Le CHAPITRE 1 est essentiellement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite de ce travail. Ces rappels sont en grande partie basés sur les deux ouvrages [32, 68] et les papiers [78, 20]. Nous rappelons tout d'abord quelques résultats de base de théorie spectrale, en insistant particulièrement sur les liens possibles entre le spectre d'un  $C_0$ -semigroupe et celui de son générateur, et en donnant un exemple où le théorème d'application spectrale n'a pas lieu. Nous introduisons le *spectre critique* et nous indiquons comment ce dernier permet d'envisager le rétablissement (partiel) du théorème d'application spectrale. Nous présentons aussi quelques résultats de perturbation spectrale qui nous seront utiles par la suite. Naturellement la mise en œuvre de tels résultats suppose les propriétés spectrales du problème *non perturbé* connues. Ainsi, dans le cadre des équations de transport, nous rappelons et complétons certains résultats contenus dans [72] sur le spectre des opérateurs *sans collision*. Nous déterminons en particulier les spectres essentiel et critique. Ainsi, nous identifions par exemple le type critique :

$$\omega_{crit}(T) = -\lambda^* = - \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{(x,v): t < \tau(x,v)\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds.$$

## PARTIE I

Le CHAPITRE 2 est consacré aux théorèmes d'applications spectrales dans des domaines convexes *quelconques* et dans le cadre  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ). Nous commençons par mettre en évidence une classe optimale de mesures  $\mu$  :

$$\text{les mesures } \mu \text{ ne chargeant pas les hyperplans affines}^3 \quad (0.14)$$

et une classe d'opérateurs de collision  $K$  pour lesquelles l'application (0.12) est *continue en norme*. Cela nous permet d'affirmer, d'une part que le semigroupe de transport hérite totalement du spectre critique du semigroupe d'absorption et

---

<sup>3</sup>Notons que ces mesures interviennent aussi dans les questions liées à la compacité (voir [34] et les références qui s'y trouvent pour un cadre très général et [68, Chapter 4] pour la neutronique).

d'autre part d'obtenir le théorème d'application spectrale partielle (0.8). L'optimalité de la mesure se paie au prix d'une dépendance régulière de l'opérateur de collision  $K$  en la variable  $x$  (en effet,  $K$  étant local en position, on peut l'interpréter comme une application  $x \mapsto K(x) \in \mathcal{L}(L^p(V))$ ). Dans la seconde partie du chapitre nous introduisons une hypothèse plus forte sur la mesure  $\mu$  :

$$\int_D e^{iz \cdot v} d\mu(v) \rightarrow 0 \text{ quand } |z| \rightarrow \infty \quad (0.15)$$

pour tout borélien  $D \subset \mathbb{R}^N$  de mesure finie  $\mu(D) < \infty$ , qui demeure toujours générale et couvre, en particulier, le modèle continu et le modèle multigroupe. Cette hypothèse assure la continuité en norme de  $0 \leq t \mapsto R_2(t)$  tout en s'affranchissant de la dépendance restrictive de  $K$  en  $x$ . Comme conséquence, nous obtenons le théorème d'application spectrale (0.8). D'autre part, sous les conditions ci-dessus, on ne connaît pas, a priori, le lien spectral entre  $\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\}$  et  $\sigma(T+K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda^*\}$ . En fait, moyennant les connaissances que l'on possède sur les spectres du semigroupe sans collision et de son générateur (Chapitre 1), nous montrons que (0.15) garantit un théorème d'application spectrale :

$$\sigma(V(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(T+K)}.$$

Pour prouver la continuité du reste d'ordre un ou deux, *capitale* dans notre démarche, le procédé employé peut se schématiser comme suit :

1. Par densité et interpolation on se ramène au cadre hilbertien  $p = 2$ .
2. Grâce à la convexité de  $\Omega$ , on peut prolonger les opérateurs à l'espace entier.
3. On utilise la transformation de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$ .

Ce procédé exclut naturellement le cas  $p = 1$ .

Le CHAPITRE 3 poursuit l'analyse spectrale précédente au cas  $p = 1$  suivant une démarche et des outils différents. Nous examinons dans un premier temps le problème dans l'espace tout entier. Nous partons de l'hypothèse générale suivante<sup>4</sup> : Il existe  $\alpha > 0$  tel que à tout  $c > 0$  on peut associer  $c' > 0$  de sorte que

$$\sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \mu \otimes \mu \{(v, v') : |v| \leq c, |v'| \leq c, |(v - v') \cdot e| \leq \varepsilon\} \leq c' \varepsilon^\alpha$$

et nous montrons, en plusieurs étapes, que lorsque l'opérateur collision (0.4) ne dépend pas de  $x$  et est compact "en vitesses" (dans  $L^1(V)$ ),

$$0 \leq t \mapsto R_j(t) \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times V)) \quad (0.16)$$

est continue en norme, où l'entier  $j$  dépend de  $\alpha$  et  $N$ . Pour ce faire, nous approchons l'opérateur de collision par des opérateurs de collision de rangs finis en

<sup>4</sup>Des hypothèses de ce type apparaissent dans la régularité de Sobolev des lemmes de moyennes [35].

vitesses. Auquel cas, les termes de la série de Dyson-Phillips (0.6) sont essentiellement des *convolutions* avec des mesures de Radon dépendant de  $t$ . Puis en se servant de leur transformées de Fourier, nous montrons que pour  $j$  assez grand ces mesures possèdent *une densité* dépendant continûment de  $t$ . On montre que pour  $N \geq 2$ , et indépendamment du choix de la mesure  $\mu$ ,

$$0 \leq t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t)$$

n'est *jamais* continue en norme. A l'opposé, pour  $N = 1$ , on établit que

$$0 \leq t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t)$$

est continue en norme *si et seulement si*  $\mu$  satisfait

$$\sup_{v' \in \mathbb{R}} \mu \{[v' - \varepsilon, v' + \varepsilon]\} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nous abordons ensuite des domaines quelconques et des noyaux pas nécessairement homogènes en espace sous l'hypothèse que la mesure  $\mu$  est "absolument continue en module  $|v|$  mais arbitraire en direction  $\frac{v}{|v|}$ ", englobant le modèle continu mais excluant le modèle multigroupe, et on montre que

$$0 \leq t \mapsto R_2(t)$$

est continue en norme. En exploitant les résultats de continuité précédents, nous donnons, à l'instar du chapitre précédent, des théorèmes d'applications spectrales. Ainsi, nous donnons dans le cas de l'espace entier un théorème d'application spectrale pour une classe générale de mesures et pour des noyaux homogènes. D'une manière analogue nous donnons des théorèmes d'applications spectrales pour une classe particulière de mesures mais pour des domaines quelconques et des noyaux de collision non nécessairement homogènes.

## PARTIE II

Dans [19], S. BRENDLE montre le résultat suivant : Soient  $(U(t))_{t \geq 0}$  et  $(V(t))_{t \geq 0}$  deux  $C_0$ -semigroupes, dans un espace de Hilbert  $H$ , de générateurs respectifs  $T$  et  $T + K$  ( $K$  borné), si pour un certain  $\nu > \omega_0(T)$  (= le type de  $(U(t))_{t \geq 0}$ ) et un certain entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|R(\nu + i\gamma, T)(KR(\nu + i\gamma, T))^n\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty, \quad (0.17)$$

alors  $0 < t \mapsto U_{n+2}(t)$  est continue en norme (notons que la continuité en norme de  $0 \leq t \mapsto R_j(t)$  est équivalente à celle de  $0 \leq t \mapsto U_j(t)$ ). Ce résultat offre un critère, en termes de  $K$  et de la résolvante de  $T$ , pour vérifier la stabilité du type critique. En revanche, ne permettant d'envisager la continuité de  $0 \leq t \mapsto R_1(t)$ , ce résultat ne répond pas à la stabilité du spectre critique. Dans la première partie

du CHAPITRE 4, on donne des conditions suffisantes entraînant la continuité en norme de  $0 < t \mapsto U_1(t)$ . Plus précisément, on montre que si pour un certain  $m \in \mathbb{N}^*$  et un certain  $\nu > \omega_0(T)$

$$(\mathbf{H}_m) \quad \sum_{i=0}^m \|R(\nu + i\gamma, T)^i K R(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty,$$

alors  $0 \leq t \mapsto U_1(t)$  est continue en norme. Pour prouver ce résultat, nous adaptons certaines techniques de S. BRENDLE [19] basées sur la représentation intégrale de  $U_1(t)$  et l'utilisation du théorème de Plancherel. Lorsque  $T$  est dissipatif, on montre que la condition  $(\mathbf{H}_1)$  est équivalente à

$$(\mathbf{H}'_1) \quad \|K^* R(\nu + i\gamma, T) K\| + \|K R(\nu + i\gamma, T) K^*\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty.$$

Cette dernière reformulation de  $(\mathbf{H}_1)$  est motivée, entre autre, par les équations cinétiques faisant intervenir des opérateurs frontière et dont le semigroupe non perturbé *n'est plus explicite* (voir [60]). Les résultats précédents nous fournissent des critères, en termes de  $K$  et la résolvante de  $T$ , de stabilité du spectre critique de  $(U(t))_{t \geq 0}$ . D'autre part, moyennant le résultat de S. BRENDLE [19] affirmant que  $U_1(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$  si et seulement si  $R(\nu + i\gamma, T) K R(\nu + i\gamma, T)$  est compact pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq t \mapsto U_1(t)$  est continue en norme, et sachant que la compacité de  $U_1(t)$  pour tout  $t \geq 0$  est équivalente à la compacité de  $R_1(t) = V(t) - U(t)$  pour tout  $t \geq 0$  nous obtenons aussi des critères de stabilité du spectre essentiel.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous montrons comment les résultats d'analyse fonctionnelle précédents permettent d'étudier la stabilité des spectres essentiel et critique de semigroupe d'absorption lorsqu'on le perturbe par l'opérateur de collision (0.4) dans l'espace  $L^2(\Omega \times V)$ . Dans un premier temps, on se place dans un domaine  $\Omega$  convexe et on montre que la condition  $(\mathbf{H}_1)$  a lieu pour des mesures vérifiant (0.14) et pour des opérateurs de collision  $K$  ne dépendant pas nécessairement d'une manière régulière en  $x$ . Puis nous montrons ensuite en utilisant, entre autres des arguments de domination [27], que pour des domaines bornés quelconques  $V(t) - U(t)$  est compact et donc  $V(t)$  et  $U(t)$  ont le même spectre essentiel :

$$\sigma_{ess}(V(t)) = \sigma_{ess}(U(t)) \quad (\forall t \geq 0).$$

On retrouve ainsi un résultat démontré récemment par M. MOKHTAR-KHARROUBI [70] en examinant la compacité de  $V(t) - U(t)$  *directement*. D'autre part, lorsque  $\Omega$  est un domaine convexe quelconque nous montrons :

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t)) \quad (\forall t \geq 0) \quad (0.18)$$

d'une manière plus simple que celle du Chapitre 2 et sous des conditions plus générales.

Dans un second temps, on renonce à la convexité de  $\Omega$  mais on se restreint à la mesure de Lebesgue et on montre la validité de  $(\mathbf{H}'_1)$  et par suite aussi celle de (0.18).

Enfin, nos résultats (concernant le transport) s'étendent, par interpolation, à tous les espaces  $L^p(\Omega \times V)$  ( $1 < p < \infty$ ).

### PARTIE III

Dans le CHAPITRE 5, nous analysons les propriétés de compacité des équations (0.1)-(0.3) dans  $L^p(\Omega \times V)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , pour le modèle collisionnel de E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49]

$$K = K_c + K_d + K_0 \quad (\text{cf. (0.13)}).$$

Nous montrons la compacité de  $K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d)$  ou d'une de ses puissances, ce qui nous permet d'analyser la région spectrale

$$\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + K_0)\}.$$

Au préalable, on montre que la *nilpotence* de l'opérateur  $K_d$  réduit sa contribution spectrale et entraîne, en particulier,  $\sigma(T + K_0) \subset \sigma(T + K_0 + K_d)$ . Dans  $L^1(\Omega \times V)$  notre résultat généralise celui de [49] à des sections efficaces plus générales.

D'autre part, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, le spectre de générateur ne nous renseigne que partiellement sur le comportement asymptotique du problème d'évolution. Pour cela, nous montrons, via les propriétés de compacité des restes des séries de Dyson-Phillips, que les trois semigroupes  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$ ,  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  et  $(e^{t(T+K_0+K_d+K_c)})_{t \geq 0}$  ont le même type essentiel :

$$\omega_{ess}(T + K_0) = \omega_{ess}(T + K_0 + K_d) = \omega_{ess}(T + K_0 + K_d + K_c). \quad (0.19)$$

Les techniques de preuves diffèrent selon que l'on aborde le problème dans  $L^1$  ou dans  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ . En effet, dans  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$  on s'appuie principalement sur les résultats du Chapitre 4, alors que dans  $L^1$  l'analyse est plus subtile et repose notamment sur la *propriété de compacité des intégrales fortes d'opérateurs* [107, 88, 105] (cf. Théorème 1.4.7). En particulier, le semigroupe  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  est vu comme une perturbation de  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$ , et une des difficultés essentielles pour établir la compacité est liée au fait que ce dernier n'est pas explicite.

Le CHAPITRE 6 a pour but d'affiner l'image spectrale de  $T + K$  décrite dans [49] et de donner celle du semigroupe associé. Sous des hypothèses de continuité par morceaux adéquates des sections efficaces, E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL montrent que typiquement le spectre  $T + K_0$  est constitué d'un demi-plan (le spectre de  $T$ ) et de courbes. Ils montrent aussi, à l'aide de l'alternative de Gohberg-Shmulyan (voir Théorème 1.4.1), que lorsque l'on perturbe  $T + K_0$  par

$K_d + K_c$ , une composante connexe de  $\sigma(T + K_0)$ , soit se transforme complètement en du spectre ponctuel soit elle contient au plus des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Quant à nous, on montre que tous les points du  $\sigma(T + K_0)$  sont éléments du spectre essentiel de  $T + K_0$ . Sous des hypothèses de positivité naturelles, on montre que le spectre périphérique de  $T + K_0$ , i.e.  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = s(T + K_0)\}$ , est réduit à  $s(T + K_0)$ . Si le noyau de  $K_0$  est strictement positif presque partout, alors on peut trouver un réel  $\delta > 0$  tel que :

$$\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geq s(T + K_0) - \delta\} \subset \mathbb{R}.$$

Les propriétés d'irréductibilité du semigroupe  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  sont également étudiées. L'intérêt de celle-ci réside dans le fait qu'elle entraîne que la valeur propre principale de  $T + K$  (i.e. une valeur propre  $\lambda_0$  réelle isolée de multiplicité algébrique finie telle que  $\operatorname{Re}\lambda \leq \lambda_0$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T + K)$ ) lorsqu'elle existe est algébriquement simple et le projecteur spectral associé est strictement positif. Dans le cadre classique ( $K = K_c$ ), des conditions suffisantes d'irréductibilité du semigroupe de transport ont été données par plusieurs auteurs (voir par exemple [38, 103][68, Chapter 5]). Dans ce chapitre, nous proposons des conditions suffisantes, en termes de  $K_c$ ,  $K_0$  et  $K_d$ , pour l'irréductibilité de semigroupe  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ . Sous ces conditions nous étudions les propriétés de monotonie stricte de la valeur propre principale par rapport aux paramètres  $K_c$  et  $K_d$ . Nous n'avons pas pu établir la monotonie (même au sens large) de la valeur propre principale par rapport au paramètre  $K_0$ . Cependant, nous avons montré un résultat affirmant la croissance stricte de  $s(T + K_0)$  (qui représente le *type essentiel* de  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$  et, donc aussi, de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  voir (0.19)) par rapport à  $K_0$ . Lorsque  $K = K_c$  nous retrouvons des résultats classiques.

Enfin, nous transférons l'image spectrale de  $T + K$  vers le semigroupe correspondant en montrant un théorème d'application spectrale.





# Chapitre 1

## Résultats préliminaires

### 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Pour faciliter l'approche et la lecture de ce chapitre nous avons omis, volontiers, certains détails et présenté des versions particulières de certains résultats. Pour les lecteurs désireux de plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données. Le chapitre est organisé comme suit : En premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la théorie spectrale des opérateurs. La Section 1.3 a pour objet d'examiner et de présenter la théorie spectrale des semigroupes et d'explorer les liens spectraux entre un  $C_0$ -semigroupe et son générateur. Nous discuterons les théorèmes d'applications spectrales et nous introduirons la notion de spectre critique qui jouera un rôle essentiel dans cette thèse. Nous rappelons aussi l'importance du type essentiel dans la détermination du comportement asymptotique d'un semigroupe. Dans la Section 1.4, nous survolerons les techniques de perturbations spectrales. Enfin, dans la dernière section, nous analyserons, en détail, le spectre du semigroupe d'absorption et celui de son générateur en complétant essentiellement des résultats de [72].

### 1.2 Théorie spectrale des opérateurs

Soit  $X$  un espace de Banach complexe et

$$T : D(T) \subset X \rightarrow X$$

un opérateur non borné que l'on suppose *fermé et à domaine dense*<sup>1</sup>. On appelle *ensemble résolvant de  $T$* , l'ensemble

$$\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T : D(T) \rightarrow X \text{ est bijectif} \}.$$

Son *complémentaire* dans le plan complexe s'appelle le **spectre** de  $T$  et sera noté  $\sigma(T)$ . On notera que si  $\lambda \in \rho(T)$ , l'inverse

$$R(\lambda, T) := (\lambda - T)^{-1}$$

est défini sur *tout* l'espace et est *fermé*. Par le théorème du graphe fermé, il est *borné*, i.e.

$$R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(X),$$

où  $\mathcal{L}(X)$  désigne l'ensemble des opérateurs bornés de  $X$ . Cet opérateur est appelé la *résolvante de  $T$*  (au point  $\lambda$ ). L'ensemble résolvant  $\rho(T)$  est un ouvert du plan complexe et l'application

$$\rho(T) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, T)$$

est analytique sur chaque composante connexe de  $\rho(T)$ . La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante*

$$R(\lambda, T) - R(\eta, T) = (\eta - \lambda)R(\lambda, T)R(\eta, T) \quad \lambda, \eta \in \rho(T).$$

Le spectre de  $T$  est donc un fermé de  $\mathbb{C}$ , et si de plus l'opérateur  $T$  est borné, alors  $\sigma(T)$  est un compact non vide. On appelle alors *rayon spectral* de  $T$ , le nombre que l'on note

$$r_\sigma(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Lorsque  $T$  n'est pas borné, un paramètre utile pour localiser son spectre est donné par *l'abscisse spectrale*

$$s(T) := \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(T)\},$$

qui permet de définir le spectre *périphérique* par

$$\sigma_+(T) := \{ \lambda \in \sigma(T) : Re\lambda = s(T) \}.$$

Examinons à présent de plus près la structure du spectre. Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel*,

$$\sigma_p(T) := \{ \lambda; \lambda - T : D(T) \rightarrow X \text{ n'est pas injectif} \}.$$

---

<sup>1</sup>On se place sous cette hypothèse, nécessaire pour la génération d'un  $C_0$ -semigroupe. On pourrait, bien entendu, pour faire une théorie spectrale raisonnable, se contenter de l'hypothèse de fermeture.

Un élément de  $\sigma_p(T)$  est dit *valeur propre* de  $T$ , il lui correspond un  $0 \neq x \in D(T)$  tel que  $(\lambda - T)x = 0$  que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand  $X$  est un espace de fonctions) correspondant à  $\lambda$ .

On définit le *spectre approché* de  $T$  par

$$\sigma_{ap}(T) := \{ \lambda; \lambda - T : D(T) \rightarrow X \text{ n'est pas injectif ou à image non fermée} \},$$

(l'image d'un opérateur non borné  $A$  est définie par  $\{Ax : x \in D(A)\}$ ). Le *spectre résiduel*<sup>2</sup> est

$$\sigma_R(T) := \{ \lambda; \lambda - T : D(T) \rightarrow X \text{ à image non dense} \}.$$

On a toujours

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_R(T) \quad \text{et} \quad \sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T),$$

mais les deux ensembles  $\sigma_R(T)$  et  $\sigma_{ap}(T)$  ne sont pas nécessairement disjoints.

La proposition suivante donne une autre caractérisation du spectre approché et explique la raison de l'appellation spectre approché.

**Proposition 1.2.1.** *Soit  $\lambda \in \sigma(T)$ . Alors  $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$  si et seulement si il existe une suite  $(x_n)_n \subset D(T)$ , dite suite approximante, telle que*

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \|(\lambda - T)x_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty.$$

Un intérêt particulier mérite d'être accordé aux valeurs propres isolées.

### Valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie

Soit  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  un point isolé de  $\sigma(T)$ . La fonction  $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$  est alors définie dans un voisinage de ce point (mais privée de  $\lambda_0$ ) et on peut donc la développer en série de Laurent autour de ce point :

$$R(\lambda, T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\lambda - \lambda_0)^k T_k$$

pour tout  $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$  ( $\delta$  petit de sorte que  $\sigma(T) \cap D(\lambda_0, \delta) = \{\lambda_0\}$ )<sup>3</sup>. Le coefficient  $T_k \in \mathcal{L}(X)$  est donné par le calcul de Dunford

$$T_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{R(\lambda, T)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z},$$

<sup>2</sup>Cette appellation peut, dans la littérature, désigner une classe différente du spectre!

<sup>3</sup>La notation  $D(\lambda, r)$  désigne le disque, dans le plan complexe, de centre  $\lambda$  et de rayon  $r$ .

où  $\gamma$  est le cercle de centre  $\lambda_0$  et de rayon  $\delta/2$  parcouru une fois dans le sens direct. Le résidu  $T_{-1} \in \mathcal{L}(X)$  est une projection, notée  $P_{\lambda_0}$  et appelée *projection spectrale* associée à  $\lambda_0$ . S'il existe  $n > 0$  tel que  $T_{-n} \neq 0$  et  $T_{-k} = 0$  pour tout  $k > n$ , alors on dira que  $\lambda_0$  est un *pôle (d'ordre  $n$ ) de la résolvante*  $R(\cdot, T)$ . On montre alors que  $\lambda_0$  est une valeur propre, la dimension (finie) de l'image de  $P_{\lambda_0}$  est appelée la *multiplicité algébrique* de  $\lambda_0$ . Lorsque cette dernière vaut  $un$ , la valeur propre  $\lambda_0$  est dite *algébriquement simple*. Pour plus de détails on pourra, par exemple, voir [32, p. 230] ou [46, p. 180].

### Spectre essentiel

Le spectre essentiel joue un rôle important en théorie spectrale mais, malheureusement, il n'existe pas de définition unanimement acceptée de cette notion. De nombreuses définitions, *non équivalentes*, existent dans la littérature. On se bornera à la plus classique, que l'on peut consulter, par exemple, dans l'ouvrage de M. SCHECHTER [87, p. 14].

**Définition 1.2.1.** *On appellera spectre essentiel de  $T$  l'ensemble*

$$\sigma_{ess}(T) := \bigcap_{K \in \mathcal{K}(X)} \sigma(T + K),$$

où  $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$  désigne l'espace des opérateurs compacts de  $X$  dans  $X$ .

On constate que  $\sigma_{ess}(T)$  est un sous-ensemble *fermé* de  $\sigma(T)$ . Il représente la partie de  $\sigma(T)$  *invariante* par perturbation de  $T$  par *tout* opérateur *compact*. On a donc

$$\sigma_{ess}(T + K) = \sigma_{ess}(T), \quad \forall K \in \mathcal{K}(X).$$

**Remarque 1.2.1.** *Une valeur propre  $\lambda$  isolée de multiplicité algébrique finie de  $T$  n'appartient pas au spectre essentiel de  $T$ . Notons qu'en général  $\sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T) \subset \sigma_p(T)$  mais ne se réduit pas à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

**Remarque 1.2.2.** *Le complémentaire de  $\sigma_{ess}(T)$  se caractérise en terme d'indice de Fredholm. En effet,  $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$  si et seulement si  $\lambda - T$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro [87, Theorem 4.5, p. 15].*

Lorsque  $X$  est de dimension infinie et  $T$  est un opérateur *borné*,  $\sigma_{ess}(T)$  est un compact non vide, son *rayon spectral essentiel* est défini alors par

$$r_{ess}(T) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{ess}(T)\}.$$

Il peut aussi être caractérisé par

$$r_{ess}(T) = \inf \left\{ r > 0 : \begin{array}{l} \lambda \in \sigma(T), \quad |\lambda| > r \text{ est un pôle de} \\ \text{multiplicité algébrique finie.} \end{array} \right\}. \quad (1.1)$$

On notera que le rayon spectral essentiel est le même quel que soit le concept du spectre essentiel utilisé [30, Corollary 4.11, p. 44].

La Proposition 1.2.2, ci-dessous, peut se révéler forte utile dans la détermination du spectre essentiel.

**Proposition 1.2.2.** *Soit*

$$T : D(T) \subset X \rightarrow X$$

*un opérateur fermé et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On suppose qu'il existe une suite  $(x_n)_n \subset D(T)$  telle que*

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0, \quad \|x_n\| = 1$$

*et telle que  $(x_n)_n$  n'admet aucune sous-suite convergente en norme. Alors  $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ .*

La suite  $(x_n)_n$  de la proposition précédente s'appelle **une suite singulière** associée à la valeur spectrale  $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ .

**Remarque 1.2.3.** *Nous illustrerons l'utilisation de la proposition précédente par la détermination de spectre essentiel du semigroupe d'absorption (cf. Théorème 1.5.5).*

Enfin, on signale le résultat de stabilité du spectre essentiel dû à M. SCHECHTER [87, Theorem 4.7, p. 17].

**Proposition 1.2.3.** *Soient  $T$  et  $S$  deux opérateurs fermés à domaine dense dans  $X$ . S'il existe  $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$  tel que  $R(\lambda, T) - R(\lambda, S)$  soit compact, alors*

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(S).$$

## 1.3 Théorie spectrale des semigroupes

On commence par rappeler la définition d'un  $C_0$ -semigroupe (ou un semigroupe fortement continu). Pour un exposé de base sur la théorie des  $C_0$ -semigroupes, le lecteur peut consulter les livres de E. HILLE ET R.S. PHILLIPS [43], E.J. ENGEL ET R. NAGEL [32], E.B. DAVIES [26] et A. PAZY [79].

**Définition 1.3.1.** *Soit  $(U(t))_{t \geq 0}$  une famille d'opérateurs linéaires bornés de  $X$ . On dit que  $(U(t))_{t \geq 0}$  est un  $C_0$ -semigroupe si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $U(0) = I_X$  (l'opérateur identité).
- $U(t + s) = U(t)U(s)$  pour  $t, s \geq 0$  (propriété de semigroupe).
- $0 \leq t \mapsto U(t)x$  est continue pour tout  $x \in X$  (continuité forte).

A ce  $C_0$ -semigroupe on peut associer un *générateur*  $T$  défini par

$$Tx = \lim_{t \downarrow 0} \frac{U(t)x - x}{t}$$

de domaine

$$D(T) := \{x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{U(t)x - x}{t} \text{ existe}\}.$$

On vérifie alors que  $T$ , ainsi défini, est un opérateur fermé à domaine dense. Le célèbre théorème de Hille-Yosida établit une correspondance biunivoque entre les  $C_0$ -semigroupes et les générateurs [43, 79, 32].

**Théorème 1.3.1.** *Soit  $T$  un opérateur fermé à domaine dense de  $X$ . Alors  $T$  est générateur d'un  $C_0$ -semigroupe de  $X$  si et seulement s'il existe deux réels  $M \geq 0$  et  $\omega$  tels que  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(T)$  et*

$$\|R(\lambda, T)^n\| \leq M/(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega, \quad n \geq 0.$$

La résolvante  $R(\lambda, T)$  peut s'écrire comme transformée de Laplace de semigroupe :

$$R(\lambda, T) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U(t) ds$$

pour tout  $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0(T)$ , où

$$\omega_0(U(\cdot)) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \text{il existe } M_\omega \geq 1 \text{ tel que } \|U(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0\}$$

est le *type* de  $(U(t))_{t \geq 0}$  (par la suite on utilisera plutôt la notation  $\omega_0(T)$  qui n'engendre pas de confusion puisqu'il y a correspondance biunivoque entre les semigroupes et les générateurs).

Dans toute la suite on considérera  $T$  générateur d'un  $C_0$ -semigroupe de  $X$  noté  $(U(t))_{t \geq 0}$  (parfois on utilisera la notation  $(e^{tT})_{t \geq 0}$  pour le semigroupe). Dans ce cas, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Tu(t) & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (1.2)$$

admet une solution unique donnée par

$$u(t) = U(t)u_0 \quad t \geq 0.$$

La détermination du spectre de semigroupe constitue une importante tâche en vue d'accéder au comportement asymptotique (quand  $t \rightarrow \infty$ ) de la solution  $u(\cdot)$ .

Pour commencer, on note que le type  $\omega_0(T)$  est relié au spectre de  $(U(t))_{t \geq 0}$  par l'identité

$$r_\sigma(U(t)) = e^{t\omega_0(T)} \quad (t \geq 0).$$

L'interprétation "intuitive" d'un semigroupe comme une exponentielle et la connaissance a priori en situation où  $T$  est borné laisse espérer

$$">\sigma(e^{tT}) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(T)} := \{e^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}."$$
 (1.3)

Malheureusement, en toute **généralité on n'a qu'une inclusion**

$$e^{t\sigma(T)} \subset \sigma(U(t)) \quad (t \geq 0). \quad (1.4)$$

Si dans certaines situations [32, p. 253], l'absence de (1.3) s'explique, en partie, par la nature topologique de l'application  $\lambda \mapsto e^{t\lambda}$  (elle n'est pas fermée), de nombreux exemples montrent que (1.3) peut défaillir d'une manière drastique et même dans des espaces très "sympathiques". Ainsi, on trouve des contre-exemples dans des espaces réflexifs [41], dans des espaces de Hilbert [43, Section 23.16 ], [112, 42] et pour des semigroupes positifs [94, 41]. Pour ne pas laisser le lecteur sur sa faim présentons un contre-exemple [41, Example 4.2].

**Exemple 1.3.1.** Soit  $1 \leq p < q < \infty$ . Définissons les deux espaces suivants

$$E_1 := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ mesurable et } \| \|f\| \|_p := \left( \int_0^\infty e^{px^2} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty\}$$

et

$$E_2 := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ mesurable et } \|f\|_q := \left( \int_0^\infty |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < \infty\}.$$

Munissons l'intersection  $E := E_1 \cap E_2$  de la norme  $\| \cdot \| = \| \| \cdot \| \|_p + \| \cdot \|_q$ . Cet espace est réflexif (pour  $p > 1$ ). La famille  $(U(t))_{t \geq 0}$  définie par

$$U(t) : f \mapsto f(x+t)$$

forme un  $C_0$ -semigroupe de  $E$ . Son générateur est  $Tf = f'$  (dérivée au sens des distributions). La particularité de cet exemple réside dans :

$$\sigma(T) = \emptyset$$

et

$$\sigma(U(t)) = \{\eta : |\eta| \leq 1\} \quad (t > 0).$$

□



Chercher des conditions pour restorer l'égalité (1.3) partiellement ou totalement, a constitué et constitue un intense champ de recherche. Plusieurs travaux lui ont été dédiés et diverses classes de semigroupes ont été définies [4, 6, 63, 40, 90, 108, 20]. Lorsque l'égalité (1.3) a lieu, on dira que l'on a un **théorème d'application spectrale**. Si on peut trouver  $\nu \leq s(T)$  tel que

$$\sigma(U(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\nu}\} = e^{t\sigma(T)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > \nu\},$$

on dira que l'on a un **théorème d'application spectrale partielle**. Lorsque le théorème d'application spectrale (partielle) a lieu, le type du semigroupe coïncide avec l'abscisse spectrale de son générateur, i.e.  $\omega_0(U(\cdot)) = s(T)$  et la condition  $s(T) < 0$  généralise la condition de M.A. Liapunov à propos de la stabilité des systèmes différentiels.

Par exemple la classe des semigroupes  $(U(t))_{t \geq 0}$  tels que

$$0 \leq t \mapsto U(t)$$

est continue en norme à partir d'un certain temps  $t_0 \geq 0$  satisfait (1.3). Cette classe englobe, en particulier, les semigroupes compacts ou analytiques (cf. [32, Chapter II, Section 4]).

Voyons le détail de l'inclusion (1.4). On a toujours

$$\sigma_p(U(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_p(T)} \quad (t \geq 0) \quad (1.5)$$

et

$$\sigma_R(U(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma_R(T)} \quad (t \geq 0). \quad (1.6)$$

Ainsi, si l'on tient compte de l'égalité  $\sigma(U(t)) = \sigma_{ap}(U(t)) \cup \sigma_R(U(t))$ , de (1.5) et de (1.6) on en déduit que *le spectre approché est le responsable* d'une éventuelle absence du théorème d'application spectrale. On a seulement

$$e^{t\sigma_{ap}(T)} \subset \sigma_{ap}(U(t)).$$

A vrai dire, une partie du spectre approché peut être recouverte par  $e^{t\sigma_{ap}(T)}$  comme l'indique la proposition suivante [32, Lemma 3.9, p. 262].

**Proposition 1.3.1.** *Soit  $0 \neq \eta \in \sigma_{ap}(U(t_0))$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *Il existe une suite  $(x_n)_n \subset X$  telle que  $\|x_n\| = 1$ ,  $\|(\eta - U(t_0))x_n\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $\lim_{t \downarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U(t)x_n - x_n\| = 0$ .*
- (b) *Il existe  $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$  telle que  $\eta = e^{t_0\lambda}$ .*

Cette proposition permet de localiser ce qui manque à l'application spectrale, i.e.  $\sigma(U(t)) \setminus e^{t\sigma(T)}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \sigma(U(t)) \setminus (e^{t\sigma(T)} \cup \{0\}) \\ & \subset \left\{ \eta \in \sigma_{ap}(U(t)) : \begin{array}{l} \forall (x_n)_n \text{ suite approximante associée} \\ \text{à } \eta \text{ on a } \overline{\lim}_{s \downarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U(s)x_n - x_n\| > 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.3.1 Spectre critique

On présente maintenant le spectre critique récemment introduit par R. NAGEL ET J. POLAND [78]. Considérons  $\tilde{X} := \ell^\infty(X)$  l'ensemble des suites bornées sur  $X$  muni de la norme

$$\|\tilde{x}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|,$$

où  $\tilde{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On définit à partir de  $(U(t))_{t \geq 0}$  un semigroupe  $\tilde{\tau} = (\tilde{U}(t))_{t \geq 0}$  sur  $\tilde{X}$  de la manière suivante :

$$\tilde{U}(t)\tilde{x} := (U(t)x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ pour } \tilde{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Soit  $\tilde{X}_\tau$  le sous-espace de la *continuité forte* de  $\tilde{\tau}$ , i.e.

$$\tilde{X}_\tau := \left\{ \tilde{x} \in \tilde{X} : \lim_{h \downarrow 0} \|\tilde{U}(h)\tilde{x} - \tilde{x}\| = 0 \right\}.$$

Ce sous-espace est fermé et  $\tilde{U}(t)$ -invariant pour tout  $t \geq 0$ . Le semigroupe  $(\tilde{U}(t))_{t \geq 0}$  induit alors sur l'espace quotient  $\hat{X} := \tilde{X}/\tilde{X}_\tau$ , le semigroupe suivant  $\hat{\tau} = (\hat{U}(t))_{t \geq 0}$  donné par

$$\hat{U}(t)\hat{x} = \tilde{U}(t)\tilde{x} + \tilde{X}_\tau \text{ pour } \hat{x} = \tilde{x} + \tilde{X}_\tau.$$

Bien que le semigroupe  $(\hat{U}(t))_{t \geq 0}$  ne soit pas fortement continu (la seule orbite continue est  $\{\hat{U}(t)0 : t \geq 0\}$ ), son spectre va jouer un rôle primordial.

**Définition 1.3.2.** *On appelle spectre critique de  $U(t)$*

$$\sigma_{crit}(U(t)) := \sigma(\hat{U}(t)).$$

Le spectre critique est une partie *fermée* de  $\sigma(U(t))$  et **contient la partie qui manque au théorème d'application spectrale** :  $\sigma(U(t)) \setminus (e^{t\sigma(T)} \cup \{0\})$ . En effet, soit  $\eta \in \sigma(U(t)) \setminus (e^{t\sigma(T)} \cup \{0\})$ . D'après (1.7),  $\eta$  admet une suite approximante  $(x_n)_n$  telle que

$$\overline{\lim}_{s \downarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U(s)x_n - x_n\| > 0.$$

Cette suite  $(x_n)_n \notin \tilde{X}_\tau$  et donc  $\widehat{(x_n)_n} \neq 0$ . D'autre part, le fait que

$$\|(\eta - U(t))x_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

entraîne que  $((\eta - \widehat{U}(t))x_n)_n = 0$ , c'est à dire

$$\widehat{U}(t)\widehat{(x_n)_n} = \eta\widehat{(x_n)_n}.$$

Ainsi  $\eta$  est une valeur propre de  $\widehat{U}(t)$ , et par conséquent  $\eta \in \sigma(\widehat{U}(t)) = \sigma_{crit}(U(t))$ .

On peut définir le *rayon spectral critique* de  $U(t)$  par

$$r_{crit}(U(t)) := r_\sigma(\widehat{U}(t)).$$

Quant au *type critique* de  $(U(t))_{t \geq 0}$ , il est défini par

$$\omega_{crit}(T) := \omega_0(\widehat{U}(\cdot)),$$

où  $\omega_0(\widehat{U}(\cdot))$  est le type<sup>4</sup> de  $(\widehat{U}(t))_{t \geq 0}$ .

**Exemple 1.3.2.** Dans l'Exemple 1.3.1 on a

$$\sigma_{crit}(U(t)) = \{\eta : |\eta| \leq 1\} \quad (t > 0)$$

$\omega_{crit}(T) = 0$  et  $r_{crit}(U(t)) = 1$ .

Le théorème [78] suivant résume les propriétés importantes du spectre critique et met en exergue son intérêt.

**Théorème 1.3.2.** *Soit  $(U(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigroupe dans l'espace de Banach  $X$  de générateur  $T$ . Alors*

- (a)  $\sigma_{crit}(U(t)) \subset \sigma(U(t))$ ,
- (b)  $r_{crit}(U(t)) = e^{\omega_{crit}(T)t}$ ,
- (c)  $\sigma(U(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(T)} \cup \sigma_{crit}(U(t)) \setminus \{0\}$ ,
- (d)  $\omega_0(T) = \max \{s(T), \omega_{crit}(T)\}$ .

**Remarque 1.3.1.** *Le rayon spectral critique délimite la partie qui pourrait empêcher le théorème d'application spectrale. On a donc le théorème d'application spectrale partielle suivant :*

$$\sigma(U(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{\omega_{crit}(T)t}\} = e^{t\sigma(T)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re} \lambda > \omega_{crit}(T)\}. \quad (1.8)$$

**Exemple 1.3.3.** Si  $t \mapsto U(t)$  est continue en norme sur  $[t_0, \infty[$  ( $t_0 > 0$ ), alors  $(\widehat{U}(t))_{t \geq 0}$  est nilpotent, i.e.  $\widehat{U}(t) = 0$  pour  $t \geq t_0$ . Par conséquent,  $\omega_{crit}(T) = -\infty$  et d'après (1.8) on a

$$\sigma(U(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(T)}. \quad (1.9)$$

On retrouve ainsi ce qui a été déjà annoncé précédemment.

---

<sup>4</sup>Le semigroupe  $(\widehat{U}(t))_{t \geq 0}$  n'est pas fortement continu, mais, en fait, la définition du type ne nécessite pas que le semigroupe soit continu.

**Remarque 1.3.2.** *Contrairement à ce que pourrait le laisser croire l'Exemple 1.3.2, le spectre critique n'est pas réduit exclusivement à  $\sigma(U(t)) \setminus e^{t\sigma(T)}$  : il peut contenir des valeurs spectrales appartenant à  $e^{t\sigma(T)}$ , voir par exemple le Théorème 1.5.2.*

**Remarque 1.3.3.** *Une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie  $\lambda$  de  $T$  n'appartient pas au spectre critique de  $T$ . Il s'ensuit de (1.1) que  $r_{crit}(U(t)) \leq r_{ess}(U(t))$  (ou  $\omega_{crit}(T) \leq \omega_{ess}(T)$ ). Cette inégalité peut être stricte comme nous aurons l'occasion de le voir à plusieurs reprises dans cette thèse.*

On énonce maintenant un outil qui peut contribuer à la reconnaissance du spectre critique [17].

**Proposition 1.3.2.** *On suppose qu'il existe une suite  $(\lambda_n)_n \subset \sigma_{ap}(T)$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |Im \lambda_n| = \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{t\lambda_n} = \eta$ . Alors  $\eta \in \sigma_{crit}(U(t))$ .*

**Remarque 1.3.4.** *Pour finir cette sous-section, signalons qu'il existe des liens forts entre la notion du type critique et la classe de semigroupes "Norm continuous at infinity" définie dans [63] ou encore avec les résultats de [16].*

### 1.3.2 Type essentiel et comportement asymptotique

D'après [101] il existe  $-\infty \leq \omega_{ess} \leq \omega_0(T)$  tel que

$$r_{ess}(U(t)) = e^{t\omega_{ess}} \quad \forall t \geq 0, \quad (1.10)$$

qu'on appellera *type essentiel*<sup>5</sup> de  $(U(t))_{t \geq 0}$  et qu'on notera  $\omega_{ess}(T)$ . Il vérifie

$$\omega_0(T) = \max\{s(T), \omega_{ess}(T)\}.$$

Pour tout  $\omega_{ess}(T) < \omega < \omega_0(T)$ , l'ensemble  $\{\eta \in \sigma(U(t)) : |\eta| \geq e^{\omega t}\}$  est un ensemble *non vide* formé d'un nombre *fini* de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Par l'application spectrale pour le spectre ponctuel (1.5) on a

$$\sigma(U(t)) \cap \{\eta : |\eta| \geq e^{\omega t}\} = e^{t\sigma(T)} \cap \{e^{t\lambda} : Re \lambda \geq \omega\},$$

et l'ensemble

$$\{\lambda \in \sigma(T) : Re \lambda > \omega\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (n \geq 1),$$

---

<sup>5</sup>Notons que le type essentiel a aussi été introduit par L. WEIS [107] à l'aide de la mesure de non compacité.

est fini et chacune des  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $T$  de multiplicité algébrique finie. On montre alors que

$$U(t) = U(t)(I - P_\omega) + \sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i} e^{tD_i} P_{\lambda_i}, \quad (1.11)$$

où  $P_{\lambda_i}$  est la projection spectrale associée à  $\lambda_i$  et  $D_i = (T - \lambda_i)P_{\lambda_i}$  ( $D_i^{m_i} = 0$ , où  $m_i$  est la multiplicité algébrique de  $\lambda_i$ ).  $P_\omega = \sum_{i=1}^n P_{\lambda_i}$  est une projection qui commute avec  $U(t)$ , et il existe une constante  $C_\omega \geq 0$ , telle que

$$\|U(t)(I - P_\omega)\| \leq C_\omega e^{t\omega} \quad (t \geq 0). \quad (1.12)$$

On voit donc que (1.11) et (1.12) fournissent une bonne description asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) du semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  en norme d'opérateurs. On renvoie à [103] pour plus de détails. Si, de plus,  $X = L^p(\Lambda)$  (où  $(\Lambda, \nu)$  est un espace mesuré  $\sigma$ -fini) et si le semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  est positif, alors

$$\{\lambda \in \sigma(T) : \operatorname{Re} \lambda \geq \omega_0(T) - \varepsilon\} = \{\omega_0(T)\} =: \{\lambda_1\},$$

pour  $\varepsilon$  assez petit, et (1.11) devient

$$U(t) = U(t)(I - P_\omega) + e^{t\lambda_1} e^{tD_1} P_{\lambda_1}, \quad (1.13)$$

pour tout  $\omega_0(T) - \varepsilon < \omega < \omega_0(T)$ . Enfin si, de plus,  $(U(t))_{t \geq 0}$  est irréductible (voir Définition 6.3.1), alors (1.13) se simplifie encore davantage et elle devient

$$U(t) = U(t)(I - P_\omega) + e^{t\lambda_1} P_{\lambda_1},$$

avec  $\dim P_{\lambda_1} = 1$ . En fait, on peut montrer [24, p. 224 et Theorem 8.17] qu'il existe deux fonctions *strictement positives* presque partout  $\varphi_1 \in L^p(\Lambda)$  et  $\psi_1 \in L^{p'}(\Lambda)$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ) vérifiant  $\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle = 1$  de sorte que

$$P_{\lambda_1} \varphi = \langle \varphi, \psi_1 \rangle \varphi_1.$$

La fonction  $\varphi_1$  (resp.  $\psi_1$ ) est une fonction propre de  $T$  (resp. de  $T^*$ , l'adjoint de  $T$ ) associé à  $\lambda_1$ .

## 1.4 Perturbations spectrales

Souvent les opérateurs que l'on rencontre en pratique n'ont pas une structure classique (ils ne sont ni auto-adjoint, ni à résolvante compacte etc...). Cependant, ils peuvent se présenter comme perturbation d'autres problèmes dont l'étude spectrale est plus au moins facile à mener<sup>6</sup>. Ainsi le recours à des techniques

<sup>6</sup>Dans le cadre de cette thèse, la théorie spectrale de  $(e^{tT})_{t \geq 0}$ , qui représente le semigroupe d'absorption, est bien connue (cf. Section 1.5) et on veut analyser ce qui se passe lorsque l'on perturbe  $T$  par l'opérateur de collision  $K$ .

de perturbation permet de dégager des informations spectrales très importantes aussi bien pour le générateur que pour le semigroupe. Dans cette section nous nous proposons de faire un bref survol de ces techniques. Pour commencer, considérons une perturbation bornée  $K \in \mathcal{L}(X)$  de  $T$ . Par la théorie classique des semigroupes, il est connu que  $T + K$ , de domaine  $D(T + K) := D(T)$ , est générateur d'un  $C_0$ -semigroupe  $(V(t))_{t \geq 0}$ . Ce semigroupe est donné par la série, dite *série de Dyson-Phillips*,

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t) \quad (t \geq 0), \quad (1.14)$$

qui converge dans  $\mathcal{L}(X)$  *uniformément* sur tout compact de  $[0, +\infty[$ , où la suite  $(U_j(t))_j$  est définie par récurrence

$$U_0(t) = U(t), \quad U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(t-s)KU_j(s)ds \quad (j \geq 0),$$

la dernière intégrale étant définie au sens fort. On note, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$R_k(t) := \sum_{j=k}^{\infty} U_j(t).$$

On s'intéressera, en particulier, à :

$$\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \omega_0(T)\} \quad (1.15)$$

et

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega_0(T)}\}. \quad (1.16)$$

C'est I. VIDAV qui le premier, introduisait en neutronique l'outil ad hoc d'analyse fonctionnelle : Il s'agit de l'alternative de Gohberg-Shmulyan que l'on peut, par exemple, trouver dans [97, 82].

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $X$  un espace de Banach complexe et  $\lambda \mapsto N(\lambda)$  une famille holomorphe, d'opérateurs linéaires compacts dans  $X$ , définie sur une partie connexe du plan complexe. On a alors l'alternative suivante :*

- (a) *Soit 1 est une valeur propre de  $N(\lambda)$  pour tout  $\lambda$ .*
- (b) *Soit  $R(1, N(\lambda))$  existe sauf sur un ensemble discret de  $\lambda$ , qui sont des pôles de  $N(\cdot)$  de parties principales dégénérées (i.e. les coefficients associés sont de rangs finis).*

**Remarque 1.4.1.** *En pratique on montre que l'on a (b) après avoir vérifié que (a) n'est pas possible.*

Le théorème précédent admet le corollaire fondamental suivant :

**Corollaire 1.4.1.** *Si la famille  $\lambda \mapsto N(\lambda)$  admet (seulement) une puissance d'ordre  $m$  ( $m$  fixé) compacte, alors l'alternative reste vraie.*

**Remarque 1.4.2.** *Soit  $C$  un ouvert connexe de  $\rho(T)$ . Si une puissance de  $KR(\lambda, T)$  est compacte pour tout  $\lambda \in \rho(T)$ , alors grâce au corollaire précédent on peut montrer que soit  $C \cap \sigma(T + K) \subset \sigma_p(T + K)$ , soit  $C \cap \sigma(T + K)$  est réduit, au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Il suffit d'appliquer le corollaire à  $N(\lambda) = KR(\lambda, T)$  et de remarquer que 1 est une valeur propre de  $KR(\lambda, T)$  si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T + K$  (cf. [101, Theorem 1] pour plus de précisions sur l'assertion concernant la multiplicité algébrique de ces valeurs propres). Pour l'ensemble (1.15), on montre que c'est la deuxième situation qui se produit, c'est à dire, il est formé, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie [97]. Cela permet, en se servant de la formule de Dunford et moyennant quelques hypothèses supplémentaires, de donner une description asymptotique de  $V(t)\varphi_0$  (analogue à (1.11) – (1.12)) lorsque  $\varphi_0 \in D((T + K)^2)$  (cf. [67]). C'est une des raisons de l'étude de la compacité des puissances de  $KR(\lambda, T)$ .*

Même si l'ensemble (1.15) est formé de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie on ne peut pas exclure, a priori, la présence du spectre approché de  $V(t)$  dans la région (1.16) en raison de l'absence du théorème d'application spectrale en général (cf. Section 1.3), c'est pourquoi s'est imposée l'idée d'une étude *directe* de (1.16). Ce travail a été entrepris, encore une fois, par I. VIDAV [98] dans l'intention de donner des conditions suffisantes pour que  $\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\eta}\}$  soit réduit, au plus, à des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. I. VIDAV [98] a établi

**Théorème 1.4.2.** *S'il existe un entier  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que :*

- $U(t_1)K \cdots U(t_m)K$  est compact pour tout  $m$ -uplet positif  $(t_1, \dots, t_m)$ , ( $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ),
  - $U(t_1)K \cdots U(t_m)K$  dépend continûment, pour la topologie uniforme, de  $(t_1, \dots, t_m)$  ( $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ),
- alors  $\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega_0(T)}\}$  est constitué, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

Le travail de I. VIDAV a été quelque peu simplifié et raffiné plus tard par J. VOIGT [101], L. WEIS [107] et M. MOKHTAR-KHARROUBI [68, Chapter 2] :

**Théorème 1.4.3.** *Supposons qu'il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $R_k(t)$  soit compact (resp. faiblement compact si  $X = L^1(\Lambda)$ ) pour tout  $t \geq 0$ . Alors,*

$$\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T).$$

**Remarque 1.4.3.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a  $r_{ess}(U(t)) = r_{ess}(V(t))$ , et donc en particulier (1.16) est formé de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

Dans le cadre de transport, et dans les domaines *bornés*, la compacité (ou la faible compacité) de  $R_2(t)$  a été vérifiée par exemple dans [104, 107, 93, 39, 67, 68, 71], ou même dans des domaines non bornés mais sous l'hypothèse *restrictive* (0.9). Lorsque cette dernière tombe à défaut, le théorème précédent ne permet pas de conclure.

Le résultat suivant dû à F. ANDREU *et al* [4] s'affranchit de la compacité.

**Théorème 1.4.4.** *Supposons qu'il existe un entier  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que*

$$KU(t_1)K \cdots U(t_m)K$$

*dépend continûment, pour la topologie uniforme, de  $(t_1, \dots, t_m)$ , ( $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ). Alors*

$$\sigma(V(t)) \subset e^{t\sigma(T+K)} \cup \{\eta : |\eta| \leq r_{ess}(U(t))\}, \quad \forall t > 0.$$

S. BRENDLE *et al* [20] précisent d'avantage les choses.

**Théorème 1.4.5.** *Si pour un certain  $k \in \mathbb{N}$*

$$0 < t \mapsto R_k(t)$$

*est continue (à droite) en norme, alors*

$$\omega_{crit}(T + K) = \omega_{crit}(T).$$

Si c'est la différence des deux semigroupes qui est continue alors le résultat est encore plus précis :

**Théorème 1.4.6.** *Si pour un certain  $t_0 \geq 0$*

$$t_0 < t \mapsto R_1(t) := V(t) - U(t)$$

*est continue (à droite) en norme, alors*

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t)) \quad (t \geq t_0).$$

**Remarque 1.4.4.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.4.5 ou celles du Théorème 1.4.6, le lien entre (1.15) et (1.16) est très clair :*

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\omega_0(T)}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > \omega_0(T)\}.$$

*Ceci répond en particulier à la Conjecture de M. MOKHTAR-KHARROUBI [68, Conjecture 2.1, p. 25].*



### 1.4.1 Compacité et continuité en norme des restes de la série de Dyson-Phillips

Les résultats de la section précédente pointent un problème mathématique intéressant et mettent en évidence un outil particulièrement adapté à l'étude spectrale du semigroupe perturbé, il s'agit de l'étude de la *compacité* et de la *continuité en norme* des restes de la série de Dyson-Phillips. Le but de cette section est d'indiquer quelques outils facilitant cette étude.

Un premier outil puissant pour étudier les propriétés des restes de la série de Dyson-Phillips (1.14) est fourni par le théorème fondamental suivant, qui est dû à L. WEIS [107], G. SCHLÜCHTERMANN [88] et J. VOIGT [105], auquel on réfère dans la littérature par "*strong convex compactness property*" ou encore "*compacité des intégrales fortes*". Une approche directe de ce résultat dans les espaces de Lebesgue est donnée dans [69].

**Théorème 1.4.7.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach. On note  $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$  (resp.  $\mathcal{F}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ ) le sous-espace des opérateurs compacts (resp. faiblement compacts). Soit  $(\Lambda, \nu)$  un espace de mesure finie et*

$G : \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  *une application bornée et fortement mesurable*

*(i.e.  $\omega \mapsto G(\omega)x$  est mesurable pour tout  $x \in X$ ). Si  $G(\omega) \in \mathcal{K}(X, Y)$  (resp.  $G(\omega) \in \mathcal{F}(X, Y)$ ) p.p.  $\omega \in \Lambda$ , alors l'intégrale forte*

$$X \ni x \mapsto \int_{\Lambda} G(\omega)x d\nu(\omega) \in Y$$

*est compacte (resp. faiblement compacte).*

Pour simplifier l'étude des restes de la série de Dyson-Phillips (1.14), il est également commode d'introduire la *convolution* d'opérateurs.

**Définition 1.4.1.** *Soient  $f, g : ]0, \infty[ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  deux applications fortement continues. Leur convolution est donnée par*

$$f * g(t) : X \ni x \mapsto \int_0^t f(t-s)g(s)x ds \in \mathcal{L}(X), \quad t \geq 0.$$

*De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note*

$$[f]^n := f * \cdots * f \quad (n \text{ fois}).$$

L'opération  $*$  est associative. A l'aide de la convolution on peut exprimer par exemple (cf. [68, Lemma 2.1, p.14]) :

**Lemme 1.4.1.** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_m(t) = [UK]^m * U(t)$  et  $R_m(t) = [UK]^m * V(t)$ .*

La proposition suivante, qui s'établit en partie à l'aide du théorème précédent, montre que la compacité et la continuité en norme se conservent par convolution. D'une manière plus précise :

**Proposition 1.4.1.** *Soient  $f, g : ]0, \infty[ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  deux applications fortement continues et soit  $0 < M \leq \infty$ .*

(i) *Si  $f(t)$  ou  $g(t)$  est compacte (resp. faiblement compacte) pour tout  $t \in ]0, M[$ , alors  $f * g(t)$  est compacte (resp. faiblement compact) pour tout  $t \in ]0, M[$ .*

(ii) *Si  $]0, M[ \ni t \mapsto f(t)$  ou  $]0, M[ \ni t \mapsto g(t)$  est continue en norme, alors  $]0, M[ \ni t \mapsto f * g(t)$  l'est aussi.*

Le preuve de (i) se fait en utilisant la *propriété de compacité des intégrales fortes*. Pour la preuve de (ii) voir par exemple [32, Lemma 1.13, p. 153] ou [68, Lemma 2.3, p. 16].

La proposition précédente permet, moyennant le Lemme 1.4.1, d'établir le

**Théorème 1.4.8.** *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors*

(i) *Si  $[UK]^m(t)$  est compact pour tout  $t > 0$ , alors  $U_m(t)$  l'est aussi.*

(ii) *Si  $0 < t \mapsto [UK]^m(t)$  est continue en norme, alors  $0 < t \mapsto U_m(t)$  l'est également.*

Le résultat suivant lie la régularité du reste d'ordre  $m$  à celle du terme d'ordre  $m$  [68, Theorem 2.6, p. 16; Theorem 2.7, p. 18].

**Théorème 1.4.9.** *Soit  $0 < M \leq \infty$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  on a*

(i) *Le reste  $R_m(t)$  est compact (resp. faiblement compact) pour tout  $t \in ]0, M[$  si et seulement si le terme  $U_m(t)$  est compact (resp. faiblement compact) pour tout  $t \in ]0, M[$ .*

(ii) *L'application  $]0, M[ \ni t \mapsto R_m(t) \in \mathcal{L}(X)$  est continue en norme si et seulement si  $]0, M[ \ni t \mapsto U_m(t) \in \mathcal{L}(X)$  l'est aussi.*

Pour finir cette section, présentons deux critères importants pour

- l'étude de la compacité d'un opérateur  $B \in \mathcal{L}(L^p(\Lambda))$  ( $1 \leq p < \infty$ ),
- l'étude de la continuité en norme d'une application fortement continue  $0 \leq t \mapsto f(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Lambda))$  ( $1 \leq p < \infty$ ),

où  $(\Lambda, \nu)$  est un espace mesuré  $\sigma$ -fini. Il s'agit des arguments d'interpolation et de domination qui seront d'une utilisation courante tout au long de ce travail.

### Arguments d'interpolation

Commençons par ([47, Theorem 3.10, p. 57]) :

**Théorème 1.4.10.** *Soit*

$$B \in \bigcap_{q \geq 1} \mathcal{L}(L^q(\Lambda)).$$

*S'il existe  $1 \leq q_0 < \infty$  tel que  $B$  soit compact dans  $L^{q_0}(\Lambda)$ , alors  $B$  est compact dans tout  $L^q(\Lambda)$ ,  $1 < q < \infty$ .*

Grâce à l'inégalité d'interpolation [21, p. 57]

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha} \text{ pour } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

où  $f \in L^q(\Lambda) \cap L^p(\Lambda)$ , on peut établir le

**Théorème 1.4.11.** *Soit*

$$0 \leq t \mapsto f(t) \in \bigcap_{q \geq 1} \mathcal{L}(L^q(\Lambda)) \tag{1.17}$$

*une application fortement continue en tant qu'application à valeur dans  $\mathcal{L}(L^p(\Lambda))$  pour tout  $1 \leq p < \infty$ .*

*S'il existe  $1 \leq q_0 < \infty$  tel que (1.17) soit continue en norme à valeurs dans  $\mathcal{L}(L^{q_0}(\Lambda))$ , alors elle est continue en norme à valeurs dans  $\mathcal{L}(L^q(\Lambda))$  pour tout  $1 < q < \infty$ .*

Par la suite la phrase "**par un argument d'interpolation**" renvoie à l'utilisation de l'un des théorèmes précédents.

**Remarque 1.4.5.** *Retenir que si dans les deux théorèmes précédents  $1 < q_0 < \infty$ , alors on ne peut rien dire sur la cas  $q = 1$ .*

### Arguments de Domination

**Théorème 1.4.12.** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs bornés de  $L^p(\Lambda)$  avec  $1 < p < \infty$ . Si  $B$  est compact et  $0 \leq A \leq B$ , alors  $A$  est également compact.*

Le théorème est une version particulière d'un théorème de D. DOODS ET J. FREMLIN établi dans un cadre plus général que l'on peut trouver dans [27] ou [2, Theorem 16.20, p. 279].

L'analogie du théorème précédent dans  $L^1(\Omega)$  est le suivant :

**Théorème 1.4.13.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs bornés de  $L^1(\Lambda)$ .

(a) Si  $B$  est faiblement compact et si  $|A\varphi| \leq B|\varphi|$  pour tout  $\varphi \in L^1(\Lambda)$ , alors  $A$  est aussi faiblement compact.

(b) Si  $A$  est faiblement compact, alors son carré  $A^2$  est compact.

La propriété (a) découle du théorème de Dunford-Pettis [29, p. 292]. Pour la propriété (b) voir [29, Corollary 13, p. 510].

Par la suite, la phrase "**par un argument de domination**" renvoie à l'usage du Théorème 1.4.12 ou du Théorème 1.4.13 (a).

## 1.5 Spectre du semigroupe d'absorption et de son générateur

Récemment M. MOKHTAR-KHARROUBI [72] a réalisé une étude systématique du spectre de semigroupe d'absorption et de son générateur dans des ouverts quelconques (cette étude complète celle de J. VOIGT [103] et les résultats partiels dans [45, Chapter 12]). Dans cette section, nous rappelons, et complétons certains de ses résultats pour, en particulier, déterminer le spectre critique.

On rappelle que le semigroupe d'absorption  $(U(t))_{t \geq 0}$  est donné explicitement par

$$U(t) : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto e^{-\int_0^t \sigma(x - sv, v) ds} \varphi(x - tv, v) \chi_{\{t < \tau(x, v)\}} \in L^p(\Omega \times V),$$

où  $\Omega \times V$  est muni de la mesure produit  $dx \otimes d\mu$ ,  $1 \leq p < \infty$  et

$$\tau(x, v) = \inf \{s > 0 : (x - sv) \notin \Omega\}.$$

Son générateur est

$$T : D(T) \ni \varphi \mapsto -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v) - \sigma(x, v)\varphi(x, v)$$

avec

$$D(T) = \{\varphi \in L^p(\Omega \times V) : v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V), \varphi|_{\Gamma_-} = 0\},$$

où  $\Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V : v \cdot \eta(x) < 0\}$  avec  $\eta(x)$  est la normale extérieure en  $x \in \partial\Omega$ .

D'après [72] le semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  se décompose en trois semigroupes de dynamique *indépendante*. Pour rappeler cette décomposition notons

$$\Xi_1 := \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^N : \tau(x, -v) < \infty\},$$

$$\Xi_2 := \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^N : \tau(x, -v) = \infty, \tau(x, v) < \infty\}$$

et

$$\Xi_3 := \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^N : \tau(x, -v) = \infty, \tau(x, v) = \infty\}.$$

Identifions  $L^p(\Xi_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) au sous-espace fermé  $L^p(\Omega \times \mathbb{R}^N)$  :

$$\{\varphi \in L^p(\Omega \times \mathbb{R}^N) : \varphi(x, v) = 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \mathbb{R}^N - \Xi_i\}.$$

Le sous-espace  $L^p(\Xi_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) est invariant par l'action du semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  et on a

$$L^p(\Omega \times \mathbb{R}^N) = L^p(\Xi_1) \oplus L^p(\Xi_2) \oplus L^p(\Xi_3).$$

La restriction de  $(U(t))_{t \geq 0}$  à  $L^p(\Xi_i)$ ,  $U_i(t) = U(t)|_{L^p(\Xi_i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), définit un  $C_0$ -semigroupe  $(U_i(t))_{t \geq 0}$  de générateur  $T_i$ . De plus on a

$$\sigma(U(t)) = \sigma(U_1(t)) \cup \sigma(U_2(t)) \cup \sigma(U_3(t)) \quad (t \geq 0)$$

et

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) \cup \sigma(T_3).$$

Si  $dx \otimes d\mu(\Xi_1) > 0$ , les spectres de  $U_1(t)$  et de  $T_1$  sont décrits par

$$\sigma(U_1(t)) = \sigma_{ap}(U_1(t)) = \{\eta : |\eta| \leq e^{-\lambda_1^* t}\}$$

et

$$\sigma(T_1) = \sigma_{ap}(T_1) = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda_1^*\},$$

où

$$\lambda_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{\tau(x, -v) < \infty, t < \tau(x, v)\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds.$$

Si  $dx \otimes d\mu(\Xi_2) > 0$ , on a

$$\sigma(U_2(t)) = \{\eta : |\eta| \leq e^{-\lambda_2^* t}\}$$

et

$$\sigma(T_2) = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda_2^*\},$$

où

$$\lambda_2^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{\tau(x, -v) = \infty, t < \tau(x, v) < \infty\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds.$$

Enfin, si  $dx \otimes d\mu(\Xi_3) > 0$ , les spectres de  $U_3(t)$  et  $T_3$  vérifient :

$$\sigma(U_3(t)) \subset \{\eta : e^{-\lambda_3^{**} t} \leq |\eta| \leq e^{-\lambda_3^* t}\}$$

et

$$\sigma(T_3) \subset \{\lambda : -\lambda_3^{**} \leq \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda_3^*\},$$

où

$$\lambda_3^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{\tau(x,-v)=\infty, \tau(x,v)=\infty\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds$$

et

$$\lambda_3^{**} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\{\tau(x,-v)=\infty, \tau(x,v)=\infty\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds.$$

De plus,

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = -\lambda_3^{**} \text{ ou } \operatorname{Re}\lambda = -\lambda_3^*\} \subset \sigma(T).$$

Ceci nous permet d'établir le

**Théorème 1.5.1.** *On a toujours*

$$s(T) = \omega_0(T) = \omega_{crit}(T) = -\lambda^*,$$

$$\text{où } \lambda^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{(x,v): t < \tau(x,v)\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds.$$

**Preuve.** L'égalité

$$\lambda^* = \inf\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*\}$$

et l'introduction de cette section fournissent  $s(T) = \operatorname{typ}(T) = -\lambda^*$ . Pour identifier le type critique, il suffit de remarquer que

$$\sigma_{ap}(T) \supset \partial\sigma(T) \supset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = -\lambda^*\}^7$$

et d'appliquer la Proposition 1.3.2 pour obtenir  $-\lambda^* \leq \omega_{crit}(T) (\leq \omega_0(T))$ . ■

**Exemples de  $\lambda^*$ .** (a) Soit  $\Omega$  borné.

1. Si  $0 \notin \overline{V}$ , alors  $\lambda^* = \infty$ .

2. Si  $0 \in V$  et si  $\sigma$  homogène, i.e.  $\sigma(x, v) = \sigma(v)$ , alors  $\lambda^* = \lim_{|v| \rightarrow 0} \inf \sigma(v)$ .

<sup>7</sup>Ici,  $\partial\sigma(T)$  désigne la frontière topologique de  $\sigma(T)$  qui est toujours une partie du spectre approché [32, Proposition 1.10, p. 227].

3. On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$ , une boule fermée  $B_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leq \delta\}$  contenue entièrement dans  $\Omega$  et un  $\eta > 0$ , tels que

$$\sigma(x, v) < \varepsilon + \inf_{|v| \rightarrow 0} \{\lim_{|v| \rightarrow 0} \sigma(x, v) : x \in \Omega\} \text{ pour tout } x \in B_0 \text{ et } v \in V \text{ avec } |v| < \eta.$$

Alors  $\lambda^* = \inf_{|v| \rightarrow 0} \{\lim_{|v| \rightarrow 0} \sigma(x, v) : x \in \Omega\}$  (cf. [45, Assumption (B), p. 296]).

(b) Pour  $\Omega = \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{(x,v) \in \Omega \times V} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds$ . En particulier, si la fréquence de collision est homogène, alors  $\lambda^* = \inf \sigma(v)$ .

Nous décrivons à présent les spectres de  $(U(t))_{t \geq 0}$  et de  $T$  pour quelques classes de domaines  $\Omega$ .

### Le domaine $\Omega$ est contenu dans un demi-espace

**Théorème 1.5.2.** *Supposons que  $\Omega$  soit contenu dans un demi-espace et que les hyperplans soient de  $\mu$ -mesure nulle. Alors*

$$\sigma(T) = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\}$$

et

$$\sigma(U(t)) = \{\eta : |\eta| \leq e^{-\lambda^* t}\},$$

où  $\lambda^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{t < \tau(x,v)\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds$ .

Si de plus, la fréquence de collision est paire, i.e.  $\sigma(x, v) = \sigma(x, -v)$ , alors

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \text{ et } \sigma_{crit}(U(t)) = \sigma(U(t)).$$

**Preuve.** Sous les hypothèses du théorème on a  $dx \otimes d\mu(\Xi_3) = 0$ , et donc le troisième semigroupe disparaît de la décomposition précédente. Ainsi

$$\sigma(U(t)) = \sigma(U_1(t)) \cup \sigma(U_2(t))$$

et

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2),$$

et la preuve de la première partie du théorème découle de la description faite au début de la section en remarquant que  $\lambda^* = \inf\{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}$ . On va montrer maintenant que  $\lambda_1^* \leq \lambda_2^*$ , ce qui démontrera

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Pour cela introduisons les deux ensembles suivants :

$$C_1(t) := \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^N : \tau(x, -v) < \infty, t < \tau(x, v)\}$$

et

$$C_2(t) := \{(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}^N : \tau(x, -v) = \infty, t < \tau(x, v) < \infty\}.$$

Soit  $(x, v) \in C_2(t)$ . Comme  $\tau(x, -v) = \infty$  et  $\Omega$  est contenu dans un demi-espace, on a nécessairement  $\tau(x, -(-v)) < \infty$  et par suite aussi  $\tau(x - tv, -(-v)) < \infty$ , ce qui, combiné avec le fait trivial  $t < \tau(x - tv, -v) = \infty$  permet d'associer à tout  $(x, v) \in C_2(t)$ , l'élément  $(x - tv, -v) \in C_1(t)$ . Maintenant, il est facile de voir que l'égalité

$$\int_0^t \sigma(x - tv + sv, -v) ds = \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds$$

et les expressions

$$\lambda_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{(x, v) \in C_1(t)\}} t^{-1} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds$$

$$\lambda_2^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{(x, v) \in C_2(t)\}} t^{-1} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds$$

entraînent

$$\lambda_1^* \leq \lambda_2^*.$$

Enfin, pour déterminer le spectre critique de  $U(t)$  il suffit d'appliquer la Proposition 1.3.2 et la première partie du théorème. En effet, soit  $\eta$  tel que  $|\eta| \leq e^{-t\lambda^*}$ . Alors  $\eta$  s'écrit bien comme  $\eta = e^{t(\lambda + i\frac{2n\pi}{t})}$  et la suite  $(\lambda + i\frac{2n\pi}{t})_n$  vérifie les conditions de la Proposition 1.3.2 (i.e.  $\lambda + i\frac{2n\pi}{t} \in \sigma_{ap}(T)$  et  $Im(\lambda + i\frac{2n\pi}{t}) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ ) ce qui montre que  $\eta \in \sigma_{crit}(U(t))$ . ■

**Remarque 1.5.1.** Lorsque  $\Omega$  est borné et la mesure  $\mu$  vérifie  $\mu\{0\} = 0$ , le semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  se réduit à  $(U_1(t))_{t \geq 0}$ , et dans ce cas, il est facile de voir que le théorème précédent reste vrai pour tout  $\sigma(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega \times V)$ .

### Domaines extérieurs

Une autre classe de domaines importants en pratique est les domaines extérieurs :  $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus D$  avec  $D = \overline{O}$  et  $O$  un ouvert borné.

On a le résultat suivant :



**Théorème 1.5.3.** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus D$  avec  $D = \overline{O}$  et  $O$  un ouvert borné. Supposons que la fréquence de collision soit homogène en espace (i.e.  $\sigma(x, v) = \sigma(v)$ ). Alors*

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\}$$

et

$$\sigma(U(t)) = \sigma_{crit}(U(t)) = \{\eta : |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\},$$

où  $\lambda^* = \operatorname{ess\,inf} \sigma(v)$ .

**Preuve.** D'après le Théorème 1.5.1 on a

$$\sigma(T) \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\} \quad (1.18)$$

et

$$\sigma(U(t)) \subset \{\eta : |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\}, \quad (1.19)$$

où  $\lambda^* = \operatorname{ess\,inf} \sigma(v)$ . Montrons que  $\lambda^* = \lambda_1^*$ . Il est facile de voir que pour tout  $v \in V$ , il existe un cône  $C_v$  d'axe  $v$  et une boule  $B(x_v, \varepsilon_v) \subset \Omega$  tels que

$$\begin{aligned} B(x_v, \varepsilon_v) \times C_v &\subset \{(x, v) : \tau(x, -v) < \infty, \tau(x, v) = \infty\} \\ &\subset \{(x, v) : \tau(x, -v) < \infty, t < \tau(x, v)\}. \end{aligned}$$

D'où (en utilisant la définition de  $\lambda_1^*$ ) on obtient

$$\lambda_1^* \leq \inf_{\cup_{v \in V} B(x_v, \varepsilon_v) \times C_v} \sigma(v) = \operatorname{ess\,inf} \sigma(v).$$

Ceci, combiné avec l'inégalité triviale  $\operatorname{ess\,inf} \sigma(v) \leq \lambda_1^*$ , fournit l'égalité recherchée. Ce qui montre que les deux inclusions (1.18) et (1.19) sont des égalités et que le spectre de  $T$  est du spectre approché. La partie concernant le spectre critique découle alors de la Proposition 1.3.2. ■

## L'espace entier

Lorsque  $\Omega$  est l'espace tout entier, l'image spectrale change radicalement.

**Théorème 1.5.4.** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Alors*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda : -\lambda^{**} \leq \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\}$$

et

$$\sigma(U(t)) \subset \{\eta : e^{-t\lambda^{**}} \leq |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\},$$

où

$$\lambda^{**} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\{(x,v)\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds$$

et

$$\lambda^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\{(x,v)\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(x - sv, v) ds.$$

Si de plus la fréquence de collision est homogène, alors le spectre réel de  $T$ , i.e.  $\sigma(T) \cap \mathbb{R}$  est égal à l'image essentielle de  $-\sigma(\cdot)$  et

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) = (\sigma(T) \cap \mathbb{R}) + i\mathbb{R}.$$

Quant à

$$\sigma(U(t)) = \sigma_{crit}(U(t)) = e^{t\sigma(T)}.$$

**Preuve.** Comme  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , le semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  se réduit à  $(U_3(t))_{t \geq 0}$  et la première partie du théorème n'est autre que ce qui a été dit au début de cette section. Il a été également montré dans [72, Theorem 10] que lorsque la fréquence de collision ne dépend pas de  $x$ , le spectre réel de  $T$  est égal à l'image essentielle de  $-\sigma(\cdot)$  et

$$\sigma(T) = (\sigma(T) \cap \mathbb{R}) + i\mathbb{R}.$$

Un examen minutieux de la preuve en question montre en effet que ce spectre est du spectre approché. Enfin pour déterminer le spectre critique on fait usage, encore une fois, de la Proposition 1.3.2. ■

### Spectre essentiel dans les domaines bornés

Le théorème qui va suivre peut être vu comme une conséquence du théorème [72, Theorem 11]<sup>8</sup>. La preuve que nous présentons ici est différente et exploite la bornitude de  $\Omega$ . On extrait, en particulier, une information *cruciale à propos des supports* des suites singulières que l'on utilisera plus tard au Chapitre 6.

**Théorème 1.5.5.** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ . Alors*

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\} \text{ et } \sigma_{ess}(U(t)) = \{\eta : |\eta| < e^{-t\lambda^*}\}.$$

**Preuve.** Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  on définit

$$V_n^1 := \{v \in V : |v| \leq 1/n\} \text{ et } V_n^2 := \{v \in V : |v| > 1/n\}.$$

On identifie  $L^p(\Omega \times V_n^i)$  avec le sous-espace fermé de  $L^p(\Omega \times V)$  des fonctions nulles sur  $\Omega \times (V \setminus V_n^i)$ . On vérifie que

$$U(t)(L^p(\Omega \times V_n^i)) \subset L^p(\Omega \times V_n^i) \quad (i = 1, 2)$$

<sup>8</sup>Ce théorème établit que sous les hypothèses du Théorème 1.5.5  $\sigma(U(t)) \cap \sigma_p(U(t)) = \{0\}$  et donc le Théorème 1.5.2, la Remarque 1.2.1 et la fermeture du spectre essentiel fournissent  $\sigma(U(t)) = \sigma_{ess}(U(t))$ . La même chose pour le générateur.

et on pose

$$U_n^i(t) := U(t)|_{L^p(\Omega \times V_n^i)} \quad (i = 1, 2).$$

On note le générateur de  $(U_n^i(t))_{t \geq 0}$  par  $T_n^i$  (on peut voir, en fait, que le semigroupe  $(U_n^i(t))_{t \geq 0}$  n'est rien d'autre que le semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  quand on remplace  $V$  par  $V_n^i$ ). D'après ce qui précède

$$\sigma(T_n^2) = \emptyset \text{ et } \sigma(U_n^2(t)) = \{0\} \quad (\forall t \geq 0),$$

$$\sigma(T_n^1) = \sigma_{ap}(T_n^1) = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\}$$

et

$$\sigma(U_n^1(t)) = \sigma_{ap}(U_n^1(t)) = \{\eta : |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\} \quad (\forall t \geq 0).$$

Soit  $\lambda$  telle que  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*$ . Comme  $\lambda \in \sigma_{ap}(T_n^1)$ , il existe une fonction  $\varphi_n \in D(T_n^1)$  telle que

$$\|\varphi_n\|_{L^p(\Omega \times V_n^1)} = 1 \text{ et } \|(\lambda - T_n^1)\varphi_n\|_{L^p(\Omega \times V_n^1)} \leq \frac{1}{n},$$

et donc

$$\|\varphi_n\|_{L^p(\Omega \times V)} = 1 \text{ et } \|(\lambda - T)\varphi_n\|_{L^p(\Omega \times V)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Comme

$$\operatorname{Supp} \varphi_n \subset V_n^1 \subset \{v : |v| \leq \frac{1}{n}\},$$

la suite  $(\varphi_n)_n$  converge presque partout vers zéro et ne peut, de ce fait, avoir une sous-suite convergente en norme. Elle est donc *singulière* et  $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ . Enfin, grâce à la relation

$$e^{\lambda t} \varphi - U(t)\varphi = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} U(s)(\lambda - T)\varphi ds \text{ pour } \varphi \in D(T)$$

on conclut que  $(\varphi_n)_n$  est, aussi, une suite singulière pour  $U(t)$  correspondant à  $e^{\lambda t}$ . ■

**Remarque 1.5.2.** *Les résultats de cette section montrent qu'on dispose d'une connaissance spectrale complète du semigroupe d'absorption et de son générateur. Nous exploiterons, via les techniques de perturbation présentées en Section 1.4, cette connaissance pour l'étude spectrale du semigroupe de transport et de son générateur.*

---

*Première partie*

**Théorèmes d'applications spectrales  
dans des domaines non bornés**



# Chapitre 2

## Théorèmes d'applications spectrales dans $L^p$ , $1 < p < \infty$

### 2.1 Introduction

Le principal souci de ce chapitre est d'étudier les théorèmes d'applications spectrales pour le semigroupe de transport dans des domaines *convexes et non bornés*, et dans le cadre  $L^p$  avec  $1 < p < \infty$ . Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^N$  et  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^N$  de support  $V$ . Le semigroupe d'absorption est donné explicitement par

$$U(t) : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto e^{-\int_0^t \sigma(x - sv, v) ds} \varphi(x - tv, v) \chi_{\{t < \tau(x, v)\}} \in L^p(\Omega \times V),$$

où

$$L^p(\Omega \times V) = L^p(\Omega \times V; dx \otimes d\mu(v)) \quad (1 < p < \infty),$$
$$\tau(x, v) = \inf \{s > 0 : (x - sv) \notin \Omega\}$$

et

$$\sigma \in L^\infty(\Omega \times V; dx \otimes d\mu(v)).$$

Le semigroupe de transport  $(V(t))_{t \geq 0}$  s'obtient en perturbant le générateur  $T$  de  $(U(t))_{t \geq 0}$  par l'opérateur de collision borné

$$K : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V k(x, v, v') \varphi(x, v') d\mu(v').$$

Ce semigroupe est donné par la série de Dyson-Phillips

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \tag{2.1}$$

où

$$U_0(t) = U(t) \text{ et } U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(t-s)KU_j(s)ds \quad (j \geq 0).$$

Le présent chapitre est structuré de la manière suivante : La Section 2.2 est consacrée à la présentation de la classe d'opérateurs de collision que l'on utilisera tout au long de ce chapitre et quelques propriétés la concernant. Dans la section 2.3 nous montrons que

$$0 \leq t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t)$$

est continue en norme sous une hypothèse *optimale* sur la mesure  $\mu$  mais lorsque l'opérateur de collision dépend d'une manière *régulière* de la variable de position  $x$ . Cela nous permettra d'affirmer que  $V(t)$  hérite totalement de spectre critique de  $U(t)$  et d'établir le théorème d'application spectrale *partielle* :

$$\sigma(U(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}$$

Pour s'affranchir de la dépendance "régulière" (et restrictive) de  $K$  en  $x$  imposée dans la section précédente, nous introduirons dans la Section 2.4 une hypothèse *plus forte* sur la mesure  $\mu$  et obtiendrons un théorème d'application spectrale :

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)} \cup \{0\}.$$

Notre hypothèse sur  $\mu$  reste tout de même très générale et recouvre en particulier le modèle continu et le modèle multigroupe. Nous clôturons le chapitre par quelques remarques et problèmes ouverts. Dans tout ce chapitre on suppose que la fréquence de collision est homogène, i.e.

$$\sigma(x, v) = \sigma(v).$$

## 2.2 Opérateurs de collision réguliers

Rappelons que l'opérateur de collision est de la forme :

$$L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto K\varphi = \int_V k(x, v, v')\varphi(x, v')d\mu(v'),$$

c'est donc un opérateur *local* en position. Cette observation nous incite à considérer  $K$  comme une application à valeurs dans  $\mathcal{L}(L^p(V))$  :

$$\Omega \ni x \mapsto K(x) \in \mathcal{L}(L^p(V)),$$

où

$$K(x) : L^p(V) \ni \varphi \mapsto \int_V k(x, v, v')\varphi(v')d\mu(v') \in L^p(V).$$

On suppose que

$$\Omega \ni x \mapsto K(x)\psi \in L^p(V)$$

est mesurable pour tout  $\psi \in L^p(V)$  et

$$\Omega \ni x \mapsto \|K(x)\|_{\mathcal{L}(L^p(V))}$$

est essentiellement borné. On *définit* l'opérateur de collision par

$$K : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto K(x)\varphi(x),$$

où on fait l'identification suivante :

$$L^p(\Omega \times V) := L^p(\Omega; L^p(V)).$$

Il s'ensuit [70] que  $K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$  et

$$\|K\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \|K(x)\|_{\mathcal{L}(L^p(V))}. \quad (2.2)$$

On a alors la définition suivante

**Définition 2.2.1.** [70] *Un opérateur de collision  $K$  est dit régulier si*

- (i)  $\{K(x) : x \in \Omega\}$  est un ensemble collectivement compact d'opérateurs de  $L^p(V)$ , i.e.

$$\{K(x)\psi : x \in \Omega, \|\psi\|_{L^p(V)} \leq 1\}$$

est relativement compact dans  $L^p(V)$ .

- (ii) Pour tout  $\psi' \in L^{p'}(V)$ ,  $\{K'(x)\psi' : x \in \Omega\}$  est relativement compact dans  $L^{p'}(V)$ , où  $K'(x)$  désigne le dual de  $K(x)$ .

Le lemme suivant met en évidence l'intérêt de la classe d'opérateurs de collision réguliers.

**Lemme 2.2.1.** *Tout opérateur de collision régulier  $K$  peut être approché par des opérateurs de collision de noyau séparable :*

$$k(x, v, v') = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v'), \quad (2.3)$$

où  $f_i \in L^p(V)$ ,  $g_i \in L^{p'}(V)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ) et  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$  ( $I \subset \mathbb{N}$  fini). Si, de plus,

$$\Omega \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle \text{ est uniformément continue} \quad (2.4)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^p(V) \times L^{p'}(V)$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $L^p(V)$  et  $L^{p'}(V)$ , alors  $\alpha_i$  peut être choisie uniformément continue.



**Preuve.** La première partie du lemme a été déjà montrée dans [70, Proposition 1], cependant pour prouver la propriété supplémentaire nous reprendrons toute la preuve. Soit  $(P_n)_n \subset \mathcal{L}(L^p(V))$  une suite<sup>1</sup>, constituée d'opérateurs de rangs finis, convergeant fortement vers l'identité. En notant que  $P_n\psi \rightarrow \psi$  uniformément sur les ensembles compacts de  $L^p(V)$ , et compte tenu de la propriété (i) de la Définition 2.2.1 on en déduit  $P_nK(x)\psi \rightarrow K(x)\psi$  dans  $L^p(V)$  uniformément en  $\psi \in B$  et  $x \in \Omega$ , où  $B$  est la boule unité de  $L^p(V)$ , i.e.

$$\sup_{x \in \Omega} \|K(x) - P_nK(x)\|_{\mathcal{L}(L^p(V))} \rightarrow 0.$$

En vertu de (2.2), l'opérateur  $K$  peut être donc approché dans  $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$  par des opérateurs de la forme (de rangs finis en vitesse)

$$L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \sum_{i \in I} \langle K(x)\varphi(x), e'_i \rangle e_i, \quad (2.5)$$

où  $\{e_i : i \in I\}$  est une base de l'image de  $P_n$  et  $\{e'_i : i \in I\} \subset L^{p'}(V)$  est sa base duale, i.e.

$$\langle e'_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que l'opérateur (2.5) est de la forme

$$L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \sum_{i \in I} \int_V e_i(v) e_i(x, v') \varphi(x, v') d\mu(v'), \quad (2.6)$$

où  $e_i(x, v') = K'(x)e'_i$ . Ainsi, pour établir le lemme, il suffit d'approximer (2.6) par des opérateurs à noyaux séparables. Soit  $(P'_n)_n \subset \mathcal{L}(L^{p'}(V))$  une suite d'opérateurs de rangs finis, convergeant fortement vers l'identité. En notant que  $P'_n\psi' \rightarrow \psi'$  uniformément sur les compacts de  $L^{p'}(V)$  et que  $\{K'(x)e'_i : x \in \Omega\}$  est relativement compact dans  $L^{p'}(V)$ , on obtient

$$\sup_{x \in \Omega} \|K'(x)e'_i - P'_nK'(x)e'_i\|_{L^{p'}(V)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Or

$$P'_nK'(x)e'_i = \sum_{j \in J} \langle K'(x)e'_i, f''_j \rangle f'_j = \sum_{j \in J} \langle e'_i, K(x)f''_j \rangle f'_j,$$

où  $\{f'_j : j \in J\}$  est une base de l'image de  $P'_n$  et  $\{f''_j : j \in J\} \subset L^p(V)$  est sa base duale, i.e.

$$\langle f'_i, f''_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

<sup>1</sup>On peut, par exemple, construire une telle suite à partir d'une base de Schauder.

et donc l'opérateur (2.6) est approchable par les opérateurs

$$L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_V \alpha_{i,j}(x) e_i(v) f'_j(v') d\mu(v'),$$

où

$$\alpha_{i,j}(x) = \langle e'_i, K(x) f''_j \rangle.$$

Comme  $\{K(x) f''_j : x \in \Omega\}$  est relativement compact dans  $L^p(V)$ , on a

$$\sup_{x \in \Omega} |\langle e'_i, K(x) f''_j \rangle| < \infty$$

et donc  $\alpha_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ . Enfin, si de plus (2.4) est vérifiée, alors  $\alpha_{i,j}$  est uniformément continue, ce qui finit la preuve. ■

**Remarque 2.2.1.** *Il est montré dans [70] que la classe des opérateurs de collision réguliers est exactement la fermeture, dans  $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$ , des opérateurs possédant un noyau de la forme (2.3). Cela montre, en particulier, que si  $K$  est régulier, alors son dual  $K'$  l'est aussi.*

**Remarque 2.2.2.** *Il convient aussi de signaler que par un argument de densité on peut supposer dans le lemme précédent, les fonctions  $f_i$  et  $g_i$  ( $i \in I$ ) continues à support compact.*

## 2.3 Théorèmes d'applications spectrales partielles

Le résultat principal de cette section est

**Théorème 2.3.1.** *On suppose que la mesure  $\mu$  ne charge pas les hyperplans affines et que l'opérateur de collision est régulier.*

(a) Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et si

$$\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle$$

est uniformément continue pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^p(V) \times L^p(V)$ , alors

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t))$$

et

$$\begin{aligned} & \sigma(V(t)) \cap \{\mu : |\mu| < e^{-t\lambda^{**}} \text{ ou } |\mu| > e^{-t\lambda^*}\} \\ = & e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : Re\lambda < -\lambda^{**} \text{ ou } Re\lambda > -\lambda^*\}. \end{aligned}$$

(b) Si  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$  est convexe et si

$$\Omega \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle$$

est uniformément continue pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^p(V) \times L^{p'}(V)$  et son prolongement (par continuité) à  $\bar{\Omega}$  s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ , alors

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t))$$

et

$$\sigma(V(t)) \cap \{\mu : |\mu| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}.$$

La preuve est essentiellement contenue dans le théorème suivant :

**Théorème 2.3.2.** *On suppose que la mesure  $\mu$  ne charge pas les hyperplans affines et que l'opérateur de collision est régulier.*

(a) Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et si

$$\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle$$

est uniformément continue pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^p(V) \times L^{p'}(V)$ , alors

$$0 < t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t) \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^N \times V))$$

est continue en norme.

(b) Si  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$  et si

$$\Omega \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle$$

est uniformément continue pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^p(V) \times L^{p'}(V)$  et son prolongement (par continuité) à  $\bar{\Omega}$  s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ , alors

$$0 < t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$$

est continue en norme.

**Preuve du Théorème 2.3.1.** On sait, d'après le Théorème 1.4.6, que deux semigroupes dont la différence est continue en norme ont le même spectre critique. On rappelle que

$$\sigma_{crit}(U(t)) = \{\eta : e^{-t\lambda^{**}} \leq |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\}$$

si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et

$$\sigma_{crit}(U(t)) \subset \{\eta : |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\}$$

si  $\Omega$  est un convexe différent de  $\mathbb{R}^N$ . Ainsi, l'égalité (Théorème 1.3.2)

$$\sigma(U(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(T)} \cup \sigma_{crit}(U(t)) \setminus \{0\}$$

finit la preuve. ■

Le reste de cette section est consacrée à la preuve du Théorème 2.3.2 et à montrer l'*optimalité* de l'hypothèse faite sur la mesure  $\mu$ .

**Preuve du Théorème 2.3.2**

On montre d'abord **(a)**. Dans une étape préliminaire, on montrera, que grâce à l'approximation et l'interpolation, il est suffisant de se restreindre au cas  $p = 2$ . Ceci permettra d'utiliser la transformation de Fourier. Enfin, on verra comment déduire le point **(b)** à partir de **(a)**.

**Preuve du Théorème 2.3.2 (a) :** On rappelle que  $0 < t \mapsto R_1(t)$  est continue si et seulement si

$$0 < t \mapsto U_1(t) = \int_0^t U(t-s)KU(s)ds$$

l'est aussi (cf. Théorème 1.4.9). L'opérateur  $U_1(t)$  dépend linéairement et continûment, dans  $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^N \times V))$ , de l'opérateur de collision  $K$ , alors grâce au Lemme 2.2.1, il existe une suite d'opérateurs de collision  $(K_n)_n$  à noyau séparable telle que

$$\int_0^t U(t-s)K_nU(s)ds \rightarrow U_1(t) \quad (n \rightarrow \infty)$$

*uniformément* en  $t \in [0, T]$  pour tout  $T > 0$ . On peut alors, sans perte de généralité, supposer  $K$  de la forme

$$K : L^p(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \alpha(x) \int_V f(v)g(v')\varphi(x, v')d\mu(v'),$$

où  $f \in L^p(V)$ ,  $g \in L^{p'}(V)$  et  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  est uniformément continue. Par densité encore (Remarque 2.2.2), on peut même supposer  $f$  et  $g$  continues à support compact. Dans ce cas,

$$U_1(t) \in \bigcap_{q \geq 1} \mathcal{L}(L^q(\mathbb{R}^N \times V))$$

et par conséquent, par un argument d'interpolation, on peut se restreindre au cas  $p = 2$ . On rappelle que

$$U_\infty(t) : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi \mapsto e^{-t\sigma(v)}\varphi(x - tv) \in L^2(\mathbb{R}^N \times V).$$

De simples calculs donnent

$$\begin{aligned}
& U_1(t)\varphi \\
&= \int_0^t U_\infty(t-s)KU_\infty(s)\varphi ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \alpha(x - (t-s)v) \varphi(x - (t-s)v - sv', v') e^{-s\sigma(v')} g(v') d\mu(v') ds \\
&= \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \psi_s(x - (t-s)v - sv', v') e^{-s\sigma(v')} g(v') d\mu(v') ds, \tag{2.7}
\end{aligned}$$

où la fonction  $\psi_s$  est reliée à  $\varphi$  par la relation

$$\psi_s(x, v) = \alpha(x + sv) \chi_W(v) \varphi(x, v),$$

avec  $s \in [0, T]$  ( $T$  fixé) et  $\chi_W$  est la fonction indicatrice de

$$W := \text{Supp } f \cup \text{Supp } g.$$

On verra plus tard (dans la preuve du Lemme 2.3.1) que

$$s \mapsto \alpha_s \chi_W \in L^\infty(\Omega \times V) \text{ est continue,}$$

où

$$\alpha_s \chi_W : (x, v) \mapsto \alpha(x + sv) \chi_W(v)$$

de sorte que

$$\psi : s \mapsto \psi_s \text{ appartient à } \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^N \times V)).$$

Écrivons

$$\psi_s(x, v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}_s(\xi, v) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \tag{2.8}$$

où  $\widehat{\psi}_s(\cdot, \cdot)$  est la transformée de Fourier, dans  $L^2$ , de  $\psi_s$  par rapport à la variable d'espace  $x$ , et où *le sens* de (2.8) est

$$\psi_s(\cdot, \cdot) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| \leq M} \widehat{\psi}_s(\xi, v) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^N \times V))$  (muni de sa norme naturelle) et

$$\|\psi_s(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}^2 = \int_V \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\psi}_s(\xi, v')|^2 d\xi d\mu(v')$$

pour tout  $s \in [0, T]$ . Ainsi, on peut écrire (2.7) comme limite ( $M \rightarrow \infty$ ) dans  $L^2$  de

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \int_{|\xi| \leq M} g(v') e^{-s\sigma(v')} \widehat{\psi}_s(\xi, v') e^{ix \cdot \xi} e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\xi d\mu(v') ds,$$

qui, grâce au théorème de Fubini, est égale à

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| \leq M} e^{ix \cdot \xi} \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \widehat{\psi}_s(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds d\xi.$$

Soit  $O_M(t)$  l'opérateur suivant défini sur  $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$  :

$$\varphi \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| \leq M} e^{ix \cdot \xi} \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \widehat{\psi}_s(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds d\xi.$$

Comme nous l'avons signalé, l'opérateur  $O_M(t)$  converge fortement vers  $U_1(t)$  quand  $M \rightarrow \infty$ . Nous allons montrer que lorsque (2.4) est satisfaite, cette convergence a lieu en *norme*. Plus précisément on a :

**Lemme 2.3.1.**  *$O_M(t)$  converge, en norme d'opérateur, vers  $U_1(t)$ , quand  $M$  tend vers l'infini, et ce uniformément en  $t \in [0, T]$ .*

Un fois ce lemme démontré, la preuve du point **(a)** se déduira du

**Lemme 2.3.2.** *l'application  $0 < t \mapsto O_M(t) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N \times V))$  est continue en norme.*

Au cours de la preuve du Lemme 2.3.1 nous aurons besoin du

**Lemme 2.3.3.** **[70]** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$  finie et ne chargeant pas les hyperplans affines. Alors*

$$\sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \mu \otimes \mu \{ (v, v') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : |(v - v') \cdot e| < \varepsilon \} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Preuve du Lemme 2.3.1.** Montrer le lemme revient à montrer que

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| > M} e^{ix \cdot \xi} \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \widehat{\psi}_s(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds d\xi \rightarrow 0$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$  quand  $M \rightarrow \infty$  uniformément en  $\varphi$  bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$  et en  $t \in [0, T]$ . Soit

$$G : [0, T] \ni s \mapsto G(s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times V),$$

où

$$G(s) : \mathbb{R}^N \times V \ni (x, v) \mapsto \alpha(x + sv)\chi_W(v) \in \mathbb{R}.$$

Notons que  $G \in \mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^N \times V))$  car

$$\|G(s) - G(\bar{s})\|_\infty = \text{ess sup } \chi_W(v) |\alpha(x + sv) - \alpha(x + \bar{s}v)|,$$

$\alpha$  est uniformément continue et  $W$  est borné. Notons également que

$$\psi_s = G(s)\varphi \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^N \times V)).$$

Comme  $G \in \mathcal{C}([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^N \times V))$ , elle peut être approchée uniformément par des *fonctions en escaliers* : Il existe  $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$  tel que à tout  $i \in \{1, \dots, k_n\}$  on peut associer un intervalle  $I_i^n \subset [0, T]$  et une fonction  $\psi_i^n \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times V)$  vérifiant

$$\sup_{s \in [0, T]} \left\| G(s) - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \psi_i^n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times V)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, T]} \left\| \psi_s - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \psi_i^n \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} &= \sup_{s \in [0, T]} \left\| G(s)\varphi - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \psi_i^n \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

uniformément en  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} \leq 1$ . L'identité de Parseval nous assure alors

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, T]} \left\| \widehat{\psi_s} - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi_i^n} \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} &= \sup_{s \in [0, T]} \left\| \psi_s - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \psi_i^n \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec une convergence uniforme en  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} \leq 1$ . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| > M} d\xi e^{ix \cdot \xi} f(v) \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} \int_V \widehat{\psi_s}(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} \\ &\quad \times e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| > M} d\xi e^{ix \cdot \xi} f(v) \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} \int_V (\widehat{\psi_s}(\xi, v') - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi_i^n} \varphi(\xi, v')) g(v') \\ &\quad \times e^{-s\sigma(v')} e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sum_{i=1}^{k_n} \int_{|\xi| > M} d\xi e^{ix \cdot \xi} f(v) \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} \int_V \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi_i^n} \varphi(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} \\ &\quad \times e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds \\ &=: O_M^{0,n}(t)\varphi + \sum_{i=1}^{k_n} O_M^{i,n}(t)\varphi. \end{aligned}$$

Pour finir la preuve, nous allons montrer tout d'abord que  $\|O_M^{0,n}(t)\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  uniformément en  $t \in [0, T]$  et uniformément en  $M$ , et puis montrer que pour tout  $n$  fixé,  $\|\sum_{i=1}^{k_n} O_M^{i,n}(t)\| \rightarrow 0$  quand  $M \rightarrow \infty$  uniformément en  $t \in [0, T]$ . En utilisant l'identité de Parseval puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient

$$\begin{aligned}
& \|O_M^{0,n}(t)\varphi\|^2 \\
&= \int_V d\mu(v) \int_{\mathbb{R}^N} dx \left| \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi|>M} d\xi e^{ix \cdot \xi} \int_0^t \int_V e^{-(t-s)\sigma(v)} \right. \\
&\quad \left. \times (\widehat{\psi}_s(\xi, v') - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi}_i^n \varphi(\xi, v')) g(v') e^{-s\sigma(v')} e^{-i((t-s)v+sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds \right|^2 \\
&= \int_V d\mu(v) \int_{|\xi|>M} d\xi \left| f(v) \int_0^t \int_V e^{-(t-s)\sigma(v)} (\widehat{\psi}_s(\xi, v') - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi}_i^n \varphi(\xi, v')) g(v') \right. \\
&\quad \left. \times e^{-s\sigma(v')} e^{-i((t-s)v+sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds \right|^2 \\
&\leq \int_V d\mu(v) \int_{|\xi|>M} d\xi \left[ \int_0^t \int_V \left| e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-s\sigma(v')} g(v') f(v) \right|^2 d\mu(v') ds \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^t \int_V \left| \widehat{\psi}_s(\xi, v') - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi}_i^n \varphi(\xi, v') \right|^2 d\mu(v') ds \right] \\
&\leq \int_V d\mu(v) \int_0^t \int_V \left| e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-s\sigma(v')} g(v') f(v) \right|^2 d\mu(v') ds \\
&\quad \times \int_{|\xi|>M} \int_0^t \int_V \left| \widehat{\psi}_s(\xi, v') - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi}_i^n \varphi(\xi, v') \right|^2 d\mu(v') ds d\xi \\
&\leq T \int_V d\mu(v) \int_0^t \int_V \left| e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-s\sigma(v')} g(v') f(v) \right|^2 d\mu(v') ds \sup_{s \in [0, T]} \left\| \widehat{\psi}_s - \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{I_i^n} \widehat{\psi}_i^n \varphi \right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Grâce à (2.9), ce dernier terme tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, uniformément en  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} \leq 1$ , uniformément en  $t \in [0, T]$  et aussi uniformément par rapport à  $M$ .

Maintenant, il nous reste à établir que pour  $n$  fixé,  $\|\sum_{i=1}^{k_n} O_M^{i,n}(t)\| \rightarrow 0$  quand  $M \rightarrow \infty$  uniformément en  $t \in [0, T]$ . Fixons  $i \in \{1, \dots, k_n\}$ . Par l'identité de



Parseval puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$\begin{aligned}
& \|O_M^{i,n}(t)\varphi\|^2 \\
&= \int_V d\mu(v) \int_{|\xi|>M} d\xi \left| \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \chi_{I_i^n}(s) \widehat{\psi_i^n \varphi}(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} \right. \\
&\quad \left. \times e^{-i((t-s)v+sv')\cdot\xi} d\mu(v') ds \right|^2 \\
&= \int_V d\mu(v) \int_{|\xi|>M} d\xi \left| \int_{[0,t] \cap I_i^n} e^{-(t-s)\sigma(v)} f(v) \int_V \widehat{\psi_i^n \varphi}(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} \right. \\
&\quad \left. \times e^{-i((t-s)v+sv')\cdot\xi} d\mu(v') ds \right|^2 \\
&\leq \int_V d\mu(v) \int_{|\xi|>M} d\xi \int_V \left| e^{-t\sigma(v)} \int_{[0,t] \cap I_i^n} e^{-s(\sigma(v')-\sigma(v))} f(v) g(v') e^{-is(v'-v)\cdot\xi} ds \right|^2 d\mu(v') \\
&\quad \times \int_V \left| \widehat{\psi_i^n \varphi}(\xi, v') \right|^2 d\mu(v') \\
&\leq \sup_{|\xi|>M} \int_V d\mu(v) \int_V \left| e^{-t\sigma(v)} \int_{[0,t] \cap I_i^n} e^{-s(\sigma(v')-\sigma(v))} f(v) g(v') e^{-is(v'-v)\cdot\xi} ds \right|^2 d\mu(v') \\
&\quad \times \|\widehat{\psi_i^n \varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}^2 \\
&\leq \sup_{|\xi|>M} \int_V d\mu(v) \int_V \left| e^{-t\sigma(v)} \int_{[0,t] \cap I_i^n} e^{-s(\sigma(v')-\sigma(v))} f(v) g(v') e^{-is(v'-v)\cdot\xi} ds \right|^2 d\mu(v') \\
&\quad \times \|\psi_i^n\|_\infty^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}^2.
\end{aligned}$$

Nous avons donc à montrer que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_V \int_V d\mu(v) d\mu(v') \left| e^{-t\sigma(v)} f(v) g(v') \int_{[0,t] \cap I_i^n} e^{-s(\sigma(v')-\sigma(v))} e^{-is(v'-v)\cdot\xi} ds \right|^2 = 0,$$

uniformément en  $t \in [0, T]$  ou, puisque  $f$  et  $g$  sont continues et à support compact, à montrer que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_W \int_W d\mu(v) d\mu(v') \left| \int_{[0,t] \cap I_i^n} e^{-s(\sigma(v')-\sigma(v))} e^{-is(v'-v)\cdot\xi} ds \right|^2 = 0$$

uniformément en  $t \in [0, T]$ , où  $W = \text{Supp } f \cup \text{Supp } g$ . Pour cela, introduisons les coordonnées polaires  $\xi = |\xi| e$  avec  $e \in \mathbb{S}^{N-1}$ . Ayant en esprit que  $(v, v') \in W \times W$ ,

on note que pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_W \int_W d\mu(v) d\mu(v') \int_{I_i^n \cap [0, t]} e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is(v' - v) \cdot \xi} ds \right|^2 \\
 = & \iint_{|e \cdot (v' - v)| \leq \varepsilon} \left| \int_{I_i^n \cap [0, t]} e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is\xi |e \cdot (v' - v)|} ds \right|^2 d\mu(v) d\mu(v') \\
 & + \iint_{|e \cdot (v' - v)| > \varepsilon} \left| \int_{I_i^n \cap [0, t]} e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is\xi |e \cdot (v' - v)|} ds \right|^2 d\mu(v) d\mu(v') \\
 \leq & T \operatorname{ess\,sup}_{s \in [0, T]: v, v' \in W} e^{-2s(\sigma(v) - \sigma(v'))} \sup_{e \in \mathbb{S}^{n-1}} \iint_{|e \cdot (v' - v)| \leq \varepsilon} d\mu(v) d\mu(v') \\
 & + \iint_{|e \cdot (v' - v)| > \varepsilon} \left| \int_{I_i^n \cap [0, t]} e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is\xi |e \cdot (v' - v)|} ds \right|^2 d\mu(v) d\mu(v').
 \end{aligned}$$

Maintenant, grâce au Lemme 2.3.3, on peut rendre

$$\sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \iint_{|e \cdot (v' - v)| \leq \varepsilon} d\mu(v) d\mu(v')$$

aussi petit que l'on veut. Fixons  $\varepsilon$  suffisamment petit et considérons le deuxième terme. Pour le traiter on utilisera le théorème de Lebesgue-Riemann. Soit l'ensemble

$$S := \{S_{t, v, v'} \in L^1(\mathbb{R}) : (t, v, v') \in [0, T] \times W \times W\},$$

où

$$S_{t, v, v'} : \mathbb{R} \ni s \mapsto \chi_{I_i^n \cap [0, t]}(s) e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble  $S$  est relativement compact dans  $L^1(\mathbb{R})$ . En effet, soit  $(t_p, v_p, v'_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de  $[0, T] \times W \times W$ . On peut en extraire une sous-suite  $(t_{p_k}, v_{p_k}, v'_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $(t^*, a, b)$ . Par le théorème de convergence dominée on a alors la suite de fonctions  $(S_{t_{p_k}, v_{p_k}, v'_{p_k}})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge, dans  $L^1(\mathbb{R})$ , vers

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto \chi_{I_i^n \cap [0, t^*]}(s) e^{-s(b-a)}.$$

Grâce au théorème de Lebesgue-Riemann et la (relative) compacité de  $S$  on a

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} S_{t, v, v'}(s) e^{-is\tau} ds = 0$$

uniformément en  $(t, v, v') \in [0, T] \times W \times W$ . En particulier, comme  $|e \cdot (v' - v)| > \varepsilon$ ,

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \left| \int_{I_i^n \cap [0, t]} e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is\xi |e \cdot (v' - v)|} ds \right| = 0$$

uniformément en  $(t, v, v') \in [0, T] \times W \times W$  et par conséquent

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \iint_{|e \cdot (v' - v)| > \varepsilon} \left| \int_{I_i^n \cap [0, t]} e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is|\xi|e \cdot (v' - v)} ds \right|^2 d\mu(v) d\mu(v') = 0$$

uniformément en  $t \in [0, T]$ . ■

Montrons à présent le Lemme 2.3.2, c'est à dire la continuité (à  $M$  fixé) de l'application

$$0 < t \mapsto O_M(t) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N \times V)).$$

**Preuve du Lemme 2.3.2.** Soit  $\bar{t} > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} & O_M(t)\varphi - O_M(\bar{t})\varphi \\ = & \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| \leq M} d\xi e^{ix \cdot \xi} f(v) \int_0^t e^{-(t-s)\sigma(v)} \int_V \widehat{\psi}_s(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} \\ & \quad \times e^{-i((t-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds \\ & - \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| \leq M} d\xi e^{ix \cdot \xi} f(v) \int_0^{\bar{t}} e^{-(\bar{t}-s)\sigma(v)} \int_V \widehat{\psi}_s(\xi, v') g(v') e^{-s\sigma(v')} \\ & \quad \times e^{-i((\bar{t}-s)v + sv') \cdot \xi} d\mu(v') ds \\ = & \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| \leq M} d\xi e^{ix \cdot \xi} \int_V f(v) g(v') e^{-\bar{t}\sigma(v) - i\bar{t}v \cdot \xi} \int_{\bar{t}}^t \widehat{\psi}_s(\xi, v') e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} \\ & \quad \times e^{-is(v' - v) \cdot \xi} ds d\mu(v') \\ & + \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \left[ \int_{|\xi| \leq M} d\xi e^{ix \cdot \xi} \int_V f(v) g(v') (e^{-t\sigma(v) - itv \cdot \xi} - e^{-\bar{t}\sigma(v) - i\bar{t}v \cdot \xi}) \right. \\ & \quad \left. \times \int_0^t e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is(v' - v) \cdot \xi} \widehat{\psi}_s(\xi, v') ds d\mu(v') \right] \\ =: & O_M^1(t, \bar{t})\varphi + O_M^2(t, \bar{t})\varphi. \end{aligned}$$

Montrons que

$$\|O_M^1(t, \bar{t})\| \rightarrow 0 \text{ et } \|O_M^2(t, \bar{t})\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \bar{t}.$$

En utilisant l'identité de Parseval et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$\begin{aligned}
& \|O_M^1(t, \bar{t})\varphi\|^2 \\
&= \int_V d\mu(v) \int_{|\xi| \leq M} d\xi \left| \int_V f(v)g(v') e^{-\bar{t}\sigma(v) - i\bar{t}v \cdot \xi} \int_{\bar{t}}^t e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} e^{-is(v' - v) \cdot \xi} \right. \\
&\quad \left. \times \widehat{\psi}_s(\xi, v') ds d\mu(v') \right|^2 \\
&\leq \int_V d\mu(v) \int_{|\xi| \leq M} d\xi \int_V \int_{\bar{t}}^t \left| f(v)g(v') e^{-\bar{t}\sigma(v)} e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} \right|^2 ds d\mu(v') \\
&\quad \times \int_V \int_{\bar{t}}^t \left| \widehat{\psi}_s(\xi, v') \right|^2 ds d\mu(v') \\
&\leq (t - \bar{t})^2 \iint_{W \times W} e^{6T\|\sigma\|_\infty} \|f\|_\infty^2 \|g\|_\infty^2 d\mu(v) d\mu(v') \|\alpha\|_\infty^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}^2 \\
&\rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \bar{t}
\end{aligned}$$

uniformément en  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)} \leq 1$ . A nouveau, l'identité de Parseval et l'inégalité de Cauchy-Schwartz fournissent

$$\begin{aligned}
& \|O_M^2(t, \bar{t})\varphi\|^2 \\
&= \int_V d\mu(v) \int_{|\xi| \leq M} d\xi \left| \int_V f(v)g(v') (e^{-t\sigma(v) - itv \cdot \xi} - e^{-\bar{t}\sigma(v) - i\bar{t}v \cdot \xi}) \int_0^t e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} \right. \\
&\quad \left. \times e^{-is(v' - v) \cdot \xi} \widehat{\psi}_s(\xi, v') ds d\mu(v') \right|^2 \\
&\leq \int_V d\mu(v) \int_{|\xi| \leq M} d\xi \int_V \int_0^t \left| f(v)g(v') (e^{-t\sigma(v) - itv \cdot \xi} - e^{-\bar{t}\sigma(v) - i\bar{t}v \cdot \xi}) \right. \\
&\quad \left. \times e^{-s(\sigma(v') - \sigma(v))} \right|^2 ds d\mu(v') \int_V \int_0^t \left| \widehat{\psi}_s(\xi, v') \right|^2 ds d\mu(v') \\
&\leq \sup_{\xi \leq M} \iint_{W \times W} \left| e^{-t\sigma(v) - itv \cdot \xi} - e^{-\bar{t}\sigma(v) - i\bar{t}v \cdot \xi} \right|^2 d\mu(v) d\mu(v') \int_0^T e^{-2s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \\
&\quad \times T \|fg\|_\infty^2 \|\alpha\|_\infty^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}^2.
\end{aligned}$$

Enfin, on peut facilement voir que

$$\iint_{W \times W} \left| e^{-t\sigma(v) - itv \cdot \xi} - e^{-\bar{t}\sigma(v) - i\bar{t}v \cdot \xi} \right|^2 d\mu(v) d\mu(v') \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \bar{t}$$

uniformément en  $|\xi| \leq M$  et par conséquent  $\|O_M^2(t, \bar{t})\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \bar{t}$ . Ce qui achève simultanément la preuve du Lemme 2.3.2 et du point (a). ■

Il nous reste la

**Preuve du Théorème 2.3.1 (b).** Nous allons en fait la déduire à partir de la preuve du point (a). Comme dans cette dernière, il suffit de montrer la continuité en norme de

$$0 < t \mapsto U_1(t).$$

Par la *convexité* de  $\Omega$  on peut écrire

$$U(t)\varphi = RU_\infty(s)E\varphi,$$

où  $E$  est l'opérateur d'extension triviale de  $L^p(\Omega \times V)$  à  $L^p(\mathbb{R}^N \times V)$  et  $R$  est l'opérateur de restriction de  $L^p(\mathbb{R}^N \times V)$  sur  $L^p(\Omega \times V)$ . Il est clair que

$$U_1(t)\varphi = \int_0^t RU_\infty(t-s)EKRU_\infty(s)E\varphi ds$$

et il suffit donc de montrer la continuité de

$$0 \leq t \mapsto \int_0^t U_\infty(t-s)EKRU_\infty(s)ds.$$

On pose  $K_\infty := EKR$ . On remarque alors que pour tout  $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^N \times V)$

$$K_\infty(x)\varphi(x) = \begin{cases} K(x)\varphi(x) & \text{sur } \Omega, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Il s'ensuit que pour tout  $\varphi \in L^p(V)$  et  $\psi \in L^2(V)$

$$\langle K_\infty(x)\varphi, \psi \rangle = \begin{cases} \langle K(x)\varphi, \psi \rangle & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

est uniformément continue en  $x \in \mathbb{R}^N$  car  $\langle K(x)\varphi, \psi \rangle$  s'annule au bord  $\partial\Omega$ . Maintenant, en raisonnant sur  $K_\infty$  au lieu de  $K$ , la norme continuité

$$0 \leq t \mapsto U_1(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$$

découle de (a). ■

**Optimalité de l'hypothèse sur la mesure  $\mu$ .**

Dans le Théorème 2.3.2, l'hypothèse sur la mesure  $\mu$  est *optimale*. En effet on a le résultat suivant :

**Théorème 2.3.3.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon à support compact  $V$  et soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . On suppose que  $\sigma = 0$  et*

$$K : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V \varphi(x, v') d\mu(v').$$

*S'il existe un hyperplan  $H = \{v \in \mathbb{R}^N : v \cdot \omega = c\}$  de  $\mu$ -mesure strictement positive, où  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$  et  $c \in \mathbb{R}^*$ , alors il existe une suite  $(t_n)_n$  convergeant vers zéro et telle que  $t \mapsto R_1(t)$  ne soit continue (en norme) en aucun  $t_n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).*

**Preuve du Théorème 2.3.3.** Si (pour un certain  $T > 0$ )  $]0, T] \ni t \mapsto R_1(t)$  est continue en norme, alors  $]0, T] \ni t \mapsto U_1(t)$  l'est aussi (cf. Théorème 1.4.9). Ainsi, il est suffisant de montrer que  $t \mapsto U_1(t)$  n'est pas continue en norme pour tout  $t > 0$ . Soit  $\bar{t} > 0$ , posons  $\delta = \sup_{v \in V} |v|$  et  $r = \delta(\bar{t} + 1)$ . Désignons par  $B(0, r)$  (resp.  $B(0, 3r)$ ) la boule centrée en 0 et de rayon  $r$  (resp.  $3r$ ). On a

$$x - (t - s)v - sv' \in B(0, 3r) \quad \text{pour } x \in B(0, r), \quad 0 \leq s \leq t \quad \text{et} \quad t \leq \bar{t} + 1.$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , choisissons  $\varphi_m \in L^2(\mathbb{R}^N \times V)$  de la forme  $\varphi_m = f_m(x)h(v)$  avec

$$f_m(x) = \begin{cases} e^{imx \cdot \omega} & \text{si } x \in B(0, 3r) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $h \in L^2(H)$  telle que  $\int_H h(v') d\mu(v') > 0$ .

Comme la fréquence de collision est nulle,

$$U_1(t)\varphi_m = \int_0^t \int_V f_m(x - (t - s)v - sv') h(v') d\mu(v') ds,$$

alors on a pour tout  $t \leq \bar{t} + 1$

$$\begin{aligned} & \|U_1(t)\varphi_m - U_1(\bar{t})\varphi_m\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}^2 \\ &= \int_V d\mu(v) \int_{\mathbb{R}^N} dx \left| \int_0^t \int_V f_m(x - (t - s)v - sv') h(v') d\mu(v') ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{\bar{t}} \int_V f_m(x - (\bar{t} - s)v - sv') h(v') d\mu(v') ds \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2} \int_H d\mu(v) \int_{B(0,r)} dx \left| e^{-imtv \cdot \omega} - e^{-im\bar{t}v \cdot \omega} \right|^2 \left| \int_H \int_0^t e^{-ims(v-v') \cdot \omega} h(v') ds d\mu(v') \right|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} |B(0,r)| \int_H d\mu(v) \left| e^{-imtc} - e^{-im\bar{t}c} \right|^2 \left| \int_H \int_0^t h(v') ds d\mu(v') \right|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} |B(0,r)| t^2 \int_H d\mu(v) \left| \int_H h(v') d\mu(v') \right|^2 \left| e^{-imtc} - e^{-im\bar{t}c} \right|^2.
\end{aligned}$$

En définissant une suite  $(t_m)_m$  par  $t_m = \bar{t} + \frac{\pi}{mc}$ , on aura

$$\begin{aligned}
&\|U_1(t_m)\varphi_m - U_1(\bar{t})\varphi_m\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}^2 \\
&\geq 2|B(0,r)| \min\{\bar{t}^2, (\bar{t} + \frac{\pi}{c})^2\} \int_H d\mu(v) \left| \int_H h(v') d\mu(v') \right|^2,
\end{aligned}$$

et par conséquent il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|U_1(t_m) - U_1(\bar{t})\| \geq C$$

pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ . ■

## 2.4 Théorèmes d'applications spectrales

Dans le Théorème 2.3.2, l'hypothèse sur la mesure  $\mu$  est *optimale*. D'autre part, la dépendance de l'opérateur de collision de la variable d'espace est restrictive. En effet, notre hypothèse sur  $K$  requiert que

$$\Omega \ni x \mapsto K(x) \in \mathcal{L}(L^p(V))$$

soit "régulière" et s'annule sur le bord  $\partial\Omega$  si  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ . Cette hypothèse exclut par exemple les noyaux continus par morceaux (par rapport à  $x \in \Omega$ ) utilisés dans la physique des réacteurs ou même des noyaux homogènes en espace lorsque  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$ . Dans cette section, on introduit une hypothèse *plus forte* sur la mesure  $\mu$  :

$$\int_D e^{iz \cdot v} d\mu(v) \rightarrow 0 \text{ quand } |z| \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

pour tout borélien  $D \subset \mathbb{R}^N$  de mesure finie  $\mu(D) < \infty$ . Cette hypothèse permet d'une part de se débarrasser des hypothèses restrictives du Théorème 2.3.2 portant sur la dépendance de l'opérateur de collision en  $x$  et d'autre part d'obtenir un théorème d'application spectrale (globale). Notons que l'hypothèse (2.10)

reste générale et couvre en particulier le modèle continu et le modèle multigroupe.

On commence par ce lemme qui clarifie le lien entre la classe des mesures vérifiant (2.10) et celles ne chargeant pas les hyperplans affines.

**Lemme 2.4.1.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive vérifiant (2.10). Alors les hyperplans affines sont de  $\mu$ -mesure nulle.*

**Preuve.** Supposons qu'il existe un hyperplan affine  $H$  tel que  $\mu(H) > 0$ . Soit  $\bar{v} \in H$ . Alors il existe  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$  tel que

$$H = \{v \in \mathbb{R}^N : (v - \bar{v}) \cdot \omega = 0\}.$$

Soit  $D \subset H$  tel que  $0 < \mu(D) < \infty$ . Alors pour tout  $z = t\omega$  ( $t \in \mathbb{R}$ ),

$$\begin{aligned} \int_D e^{iz \cdot v} d\mu(v) &= \int_D e^{it\omega \cdot v} d\mu(v) \\ &= \int_D e^{it\omega \cdot (v - \bar{v})} e^{it\omega \cdot \bar{v}} d\mu(v) \\ &= e^{it\omega \cdot \bar{v}} \mu(D), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left| \int_D e^{iz \cdot v} d\mu(v) \right| = \mu(D) > 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}\omega.$$

■

Cette hypothèse est *plus forte* certes, mais en contrepartie elle garantit un théorème d'application spectrale (globale) :

**Théorème 2.4.1.** *Soit  $1 < p < +\infty$  et soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un convexe. On suppose l'opérateur de collision régulier et (2.10) vérifiée.*

(a) *Si  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$ , alors*

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)} \cup \{0\}.$$

(b) *Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , alors*

$$\begin{aligned} &\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| < e^{-t\lambda^{**}} \text{ ou } |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} \\ &= e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda < -\lambda^{**} \text{ ou } \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}. \end{aligned}$$

(c) *Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et si l'image essentielle de  $\sigma$  est connexe, alors*

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)}.$$



La preuve de ce théorème nécessite deux lemmes. Le premier établit la continuité du reste d'ordre 2 de la série de Dyson-Phillips, le second montre la stabilité du spectre approché de  $T$  lorsqu'on perturbe ce dernier par un opérateur de collision régulier.

**Lemme 2.4.2.** *Soit  $\Omega$  un convexe de  $\mathbb{R}^N$ . On suppose l'opérateur de collision  $K$  régulier et (2.10) satisfaite. Alors*

$$0 < t \mapsto R_2(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$$

*est continue en norme.*

**Preuve.** On traite d'abord le cas  $p = 2$ . D'après le Théorème 1.4.8 il suffit de montrer la continuité de  $0 < t \mapsto [UK]^2(t)$ . D'une autre part,

$$[UK]^2 = (UK) * (UK) = U * (KUK),$$

et d'après la Proposition 1.4.1 on est conduit à montrer la continuité en norme de  $0 < t \mapsto KU(t)K$ . Enfin, d'après le Lemme 2.2.1, par densité et linéarité, il suffit de montrer que  $0 < t \mapsto K_1U(t)K_2$  est continue, où  $K_i$  ( $i = 1, 2$ ) possède un noyau séparé

$$k_i(x, v, v') = \alpha_i(x)f_i(v)g_i(v')$$

avec  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$  et  $f_i, g_i$  sont continues à support compact dans  $V$ . L'opérateur  $K_1U(t)K_2$  se décompose alors comme suit

$$K_1U(t)K_2 = O_1\tilde{S}(t)O_2,$$

où

$$O_2 : L^2(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \alpha_2(x) \int_V \varphi(x, v')g_2(v')d\mu(v') \in L^2(\Omega),$$

$$\tilde{S}(t) : L^2(\Omega) \ni \psi \mapsto \int_V h(v)e^{-t\sigma(v)}\psi(x - tv)\chi_{\{t < \tau(x, v)\}}d\mu(v) \in L^2(\Omega)$$

(où  $h(v) = g_1(v)f_2(v)$ ) et

$$O_1 : L^2(\Omega) \ni \psi \mapsto \alpha_1(x)f_1(v)\psi(x) \in L^2(\Omega \times V).$$

Il est suffisant donc de montrer que  $\tilde{S}(t)$  ( $t > 0$ ) dépend continûment, pour la topologie de la norme, de  $t > 0$ . Comme  $\Omega$  est *convexe*,

$$\tilde{S}(t) = R\tilde{S}_\infty(t)E,$$

où  $E$  est l'opérateur d'extension triviale de  $L^2(\Omega)$  à  $L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $R$  est l'opérateur de restriction de  $L^2(\mathbb{R}^N)$  sur  $L^2(\Omega)$  et

$$\tilde{S}_\infty(t) : L^2(\mathbb{R}^N) \ni \psi \mapsto \int_V h(v)e^{-t\sigma(v)}\psi(x - tv)d\mu(v) \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Montrons que  $0 < t \mapsto \tilde{S}_\infty(t)$  est continue en norme. L'opérateur  $\tilde{S}_\infty(t)$  est un opérateur de convolution. En effet, pour tout  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_\infty(t)\psi &= \int h(v)e^{-t\sigma(v)}\psi(x-tv)d\mu(v) \\ &= \int \psi(x-z)d\nu_t(z) = \psi * \nu_t,\end{aligned}$$

où  $\nu_t$  est la mesure image de la mesure de Radon  $h(v)e^{-t\sigma(v)}d\mu$  par l'homothétie

$$v \mapsto tv.$$

Fixons  $\bar{t} > 0$ . Alors

$$\begin{aligned}\|\tilde{S}_\infty(t)\psi - \tilde{S}_\infty(\bar{t})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \|\psi * (\nu_t - \nu_{\bar{t}})\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq (2\pi)^{N/2} \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^N} |\hat{\nu}_t(\zeta) - \hat{\nu}_{\bar{t}}(\zeta)| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

d'où

$$\|\tilde{S}_\infty(t) - \tilde{S}_\infty(\bar{t})\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))} \leq (2\pi)^{N/2} \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^N} |\hat{\nu}_t(\zeta) - \hat{\nu}_{\bar{t}}(\zeta)|.$$

D'autre part

$$(2\pi)^{N/2}(\hat{\nu}_t(\zeta) - \hat{\nu}_{\bar{t}}(\zeta)) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-itv \cdot \zeta} h(v) e^{-t\sigma(v)} d\mu(v) - \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\bar{t}v \cdot \zeta} h(v) e^{-\bar{t}\sigma(v)} d\mu(v)$$

se décompose comme

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} e^{-itv \cdot \zeta} h(v) e^{-\bar{t}\sigma(v)} d\mu(v) + \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\bar{t}v \cdot \zeta} h(v) (e^{-t\sigma(v)} - e^{-\bar{t}\sigma(v)}) d\mu(v) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\bar{t}v \cdot \zeta} h(v) e^{-\bar{t}\sigma(v)} d\mu(v) \\ &=: I_1(\zeta) + I_2(\zeta) - I_3(\zeta).\end{aligned}$$

Observons que  $I_2(\zeta) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \bar{t}$  uniformément en  $\zeta \in \mathbb{R}^N$ . De plus,  $I_1(\zeta)$  et  $I_3(\zeta)$  sont arbitrairement petits pour  $|\zeta|$  assez grand, uniformément en  $t$  appartenant à un (petit) voisinage de  $\bar{t}$ , car la transformée de Fourier de  $h(v)e^{-\bar{t}\sigma(v)}d\mu(v)$  tend vers zéro à l'infini. Enfin, il est clair que pour tout  $A > 0$  fixé,  $I_1(\zeta) - I_3(\zeta) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \bar{t}$  uniformément en  $|\zeta| \leq A$ . Par conséquent

$$\|\tilde{S}_\infty(t) - \tilde{S}_\infty(\bar{t})\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N))} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \bar{t},$$

ce qui finit la preuve dans le cas  $p = 2$ .

Regardons maintenant la cas où  $1 < p < \infty$ . Premièrement, on observe que  $R_2(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$  dépend continûment de  $K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$  (uniformément en  $t \in [0, T]$  pour tout  $T > 0$ ). Il suffit alors de se restreindre à des opérateurs de collision à noyaux séparables,

$$k(x, v, v') = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v')$$

avec  $I \subset \mathbb{N}$  est fini,  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$  et  $f_i, g_i$  sont continues à support compact auquel cas  $R_2(t) \in \mathcal{L}(L^r(\Omega \times V))$  pour tout  $1 \leq r \leq \infty$  et le résultat, établi précédemment dans  $L^2(\Omega \times V)$ , s'étend à  $L^p(\Omega \times V)$  ( $1 < p < \infty$ ) par interpolation. ■

**Lemme 2.4.3.** *On suppose l'hypothèse (2.10) satisfaite et l'opérateur de collision régulier. Alors*

$$\sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(T + K)$$

et

$$\sigma_{ap}(T') \subset \sigma_{ap}(T' + K').$$

**Preuve.** Soit  $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ . Par définition, il existe une suite  $(\varphi_n)_n \subset D(T)$  telle que

$$\|\varphi_n\| = 1 \text{ et } \|\lambda\varphi_n - T\varphi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Posons  $\psi_{n,m}(x, v) = \varphi_n(x, v)e^{im \cdot v}$ , où  $m \in \mathbb{Z}^N$ . L'égalité

$$\|\lambda\psi_{n,m} - T\psi_{n,m}\| = \|\lambda\varphi_n - T\varphi_n\|$$

montre que

$$\|\lambda\psi_{n,m} - T\psi_{n,m}\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

uniformément en  $m \in \mathbb{Z}^N$ . Montrons que pour chaque  $n$

$$\|K\psi_{n,m}\| \rightarrow 0 \text{ quand } |m| \rightarrow \infty.$$

Comme  $K$  est régulier, il existe une suite  $(K_l)_{l \in \mathbb{N}}$  d'opérateurs de collision à noyaux

$$k(x, v, v') = \sum_{i \in I^l} \alpha_i^l(x) f_i^l(v) g_i^l(v'),$$

avec  $f_i^l \in L^p(V)$ ,  $g_i^l \in L^{p'}(V)$  et  $\alpha_i^l \in L^\infty(\Omega)$  ( $I^l$  fini) telle que  $\|K - K_l\| \rightarrow 0$  quand  $l \rightarrow \infty$ . En notant que

$$\begin{aligned} \|K\psi_{n,m}\| &\leq \|K\psi_{n,m} - K_l\psi_{n,m}\| + \|K_l\psi_{n,m}\| \\ &\leq \|K - K_l\| + \|K_l\psi_{n,m}\|, \end{aligned}$$

il suffit de choisir  $l$  assez grand et de montrer que, pour un tel  $l$  fixé, on a  $\|K_l \psi_{n,m}\| \rightarrow 0$  quand  $|m| \rightarrow \infty$ . L'opérateur  $K_l$ , étant une somme finie, d'opérateurs de collision de noyau de la forme  $\alpha(x)f(v)g(v')$  il suffit de montrer que

$$\int_{\Omega} \int_V \left| \int_V \alpha(x)f(v)g(v')\psi_{n,m}(x,v')d\mu(v') \right|^p d\mu(v)dx \rightarrow 0 \text{ quand } |m| \rightarrow \infty,$$

où  $f \in L^p(V)$ ,  $g \in L^{p'}(V)$  et  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ .

L'hypothèse (2.10) entraîne la propriété de Riemann-Lebesgue :

$$\int \varphi(v')e^{iz \cdot v'} d\mu(v') \rightarrow 0 \text{ quand } |z| \rightarrow \infty \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}^N, d\mu).$$

En effet, cette propriété triviale pour des fonctions étagées, reste vraie pour  $\varphi \in L^1$  par des arguments de densité. D'autre part, pour tout  $(x, v) \in \Omega \times V$

$$\int_V |\alpha(x)f(v)g(v')\varphi_n(x, v')|d\mu(v') < +\infty.$$

D'où, pour tout  $(x, v) \in \Omega \times V$  et tout  $n$ ,

$$\int_V \alpha(x)f(v)g(v')\varphi_n(x, v')e^{im \cdot v'} d\mu(v') \rightarrow 0 \text{ quand } |m| \rightarrow +\infty.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \left| \int_V \alpha(x)f(v)g(v')\varphi_n(x, v')e^{im \cdot v'} d\mu(v') \right|^p \\ & \leq |\alpha(x)f(v)|^p \left( \int_V |g(v')|^{p'} d\mu(v') \right)^{p/p'} \int_V |\varphi_n(x, v')|^p d\mu(v') \in L^1(\Omega \times V) \end{aligned}$$

de sorte que le théorème de convergence dominée implique

$$\int_{\Omega} \int_V \left| \int_V \alpha(x)f(v)g(v')\varphi_n(x, v')e^{im \cdot v'} d\mu(v') \right|^p d\mu(v)dx \rightarrow 0 \text{ quand } |m| \rightarrow +\infty.$$

En particulier, pour tout  $n$  il existe  $m_n \in \mathbb{Z}^N$  tel que

$$\int_{\Omega} \int_V \left| \int_V \alpha(x)f(v)g(v')\varphi_n(x, v')e^{im_n \cdot v'} d\mu(v') \right|^p d\mu(v)dx \leq \frac{1}{n^p},$$

i.e.  $\|K\psi_{n,m_n}\| \leq \frac{1}{n}$  et par conséquent

$$\begin{aligned} \|\lambda\psi_{n,m_n} - (T + K)\psi_{n,m_n}\| & \leq \|\lambda\psi_{n,m_n} - T\psi_{n,m_n}\| + \|K\psi_{n,m_n}\| \\ & \leq \|\lambda\psi_{n,m_n} - T\psi_{n,m_n}\| + \frac{1}{n} \\ & \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

et  $\lambda \in \sigma_{ap}(T + K)$ . La preuve de la deuxième partie du lemme se fait de la même manière en notant que le dual d'un opérateur de collision régulier est encore régulier.  $\blacksquare$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat principal de cette section, i.e. donner la

**Preuve du Théorème 2.4.1.** Par le Lemme 2.4.2 et le Théorème 1.4.5 on a  $\omega_{crit}(T + K) = \omega_{crit}(T)$  qui, d'après le Théorème 1.5.1, est égal à  $-\lambda^*$ , c'est à dire que le spectre critique de  $(V(t))_{t \geq 0}$  est confiné dans le disque de centre 0 et de rayon  $e^{-t\lambda^*}$ , ce qui nous permet de récupérer

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}. \quad (2.11)$$

Rappelons aussi que, d'après le Théorème 1.5.2 on a

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda^*\} = \sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{ap}(T')^2$$

ce qui entraîne, en vertu de la stabilité du spectre approché par perturbation par  $K$  régulier (Lemme 2.4.3),

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda^*\} \subset \sigma_{ap}(T + K) \cup \sigma_{ap}(T' + K') = \sigma(T + K).$$

Enfin, par l'inclusion  $e^{t\sigma(T+K)} \subset \sigma(V(t))$  on obtient

$$\{\eta : |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\} \subset e^{t\sigma(T+K)} \subset \sigma(V(t))$$

ce qui finit la preuve de (a). Comme précédemment, grâce au Lemme 2.4.2, l'égalité (2.11) est vraie lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . On sait aussi que lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$  le semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  se prolonge en un  $C_0$ -groupe avec

$$U(-t) : \varphi \mapsto e^{t\sigma(v)}\varphi(x + tv) \quad (t \geq 0).$$

Le semigroupe  $(U(-t))_{t \geq 0}$  est engendré par  $-T$  et son type est égal à  $\lambda^{**} = \operatorname{ess\,sup} \sigma$ . De la même façon, le semigroupe  $(V(t))_{t \geq 0}$  se prolonge en un groupe. Le semigroupe  $(V(-t))_{t \geq 0}$  est engendré par  $-T - K$  et peut être obtenu à l'aide de la série de Dyson-Phillips. On peut montrer, comme dans le Lemme 2.4.2, que le reste d'ordre deux de cette série dépend continûment (en norme) de  $t$ . Ainsi,

$$\omega_{crit}(-T - K) = \omega_{crit}(-T) = \lambda^{**}$$

et

$$\sigma(V(-t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\lambda^{**}}\} = e^{t\sigma(-T-K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > \lambda^{**}\}.$$

<sup>2</sup>L'égalité  $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{ap}(T')$  découle de  $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_R(T)$ ,  $\sigma_R(T) = \sigma_p(T') \subset \sigma_{ap}(T')$  [32, Proposition 1.12, p. 227] et  $\sigma(T) = \sigma(T')$  [32, Proposition 2.18, p. 245].

D'autre part,  $\eta \in \sigma(V(-t))$  si et seulement si  $\eta^{-1} \in \sigma(V(t))$ , d'où

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| < e^{-t\lambda^{**}}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda < -\lambda^{**}\}$$

et ceci complète (2.11) et établit (b). Pour montrer (c), il suffit de noter que

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : e^{-t\lambda^{**}} \leq |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : -\lambda^{**} \leq \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda^*\}$$

résulte du Théorème 1.5.4, du Lemme 2.4.3 et de l'inclusion  $e^{t\sigma(T+K)} \subset \sigma(V(t))$ . ■

**Remarque 2.4.1.** Lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et  $\sigma(T)$  n'est pas connexe, on ne peut pas affirmer, a priori, que  $\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)}$ . En effet, dans ce cas

$$\{\lambda : -\lambda^{**} \leq \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda^*\} \cap \rho(T) \neq \emptyset,$$

la continuité en norme de  $0 < t \mapsto R_2(t)$  (Lemme 2.4.2) ne fournit pas d'informations à propos du lien spectral entre

$$\sigma(T+K) \cap \{\lambda : -\lambda^{**} \leq \operatorname{Re}\lambda \leq -\lambda^*\} \cap \rho(T)$$

et

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : e^{-t\lambda^{**}} \leq |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\} \cap \rho(U(t)).$$

Cependant, lorsque  $0 \leq t \mapsto R_1(t)$  est continue en norme, alors la stabilité du spectre critique fournit une information précise indépendamment de la connexité de l'image essentielle de  $\sigma(\cdot)$ .

**Théorème 2.4.2.** Soient  $1 < p < \infty$  et  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . On suppose que la mesure  $\mu$  vérifie (2.10). On suppose aussi que l'opérateur de collision  $K$  est régulier et

$$\Omega \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle \text{ est uniformément continue}$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^p(V) \times L^{p'}(V)$ . Alors

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)}.$$

**Preuve.** Il suffit de montrer que

$$\sigma_{crit}(V(t)) \subset e^{t\sigma(T+K)}.$$

Comme  $0 \leq t \mapsto R_1(t)$  est continue en norme (Théorème 2.3.2), les deux semi-groupes ont le même spectre critique.

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t)).$$

D'autre part, le Théorème 1.5.4 affirme

$$\sigma_{crit}(U(t)) = \sigma(U(t)) = e^{t\sigma(T)}.$$

Enfin le Lemme 2.4.3 permet

$$e^{t\sigma(T)} = e^{t(\sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{ap}(T'))} \subset e^{t\sigma(T+K)}.$$

■

## 2.5 Remarques et problèmes ouverts

Dans la Remarque 1.3.3 nous avons mentionné que l'inégalité  $r_{ess}(U(t)) \leq r_{crit}(V(t))$  peut être stricte, illustrons ce fait par un exemple en neutronique. Soit l'opérateur de transport suivant

$$(T + K)\varphi(x, v) = -v \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, v) - \varphi(x, v) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, v') dv'$$

de domaine

$$D(T + K) = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1]) : -v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1]) \right\}.$$

D'après [12] on a

$$\sigma(T + K) = \{ \lambda : \operatorname{Re} \lambda = -1 \} \cup \{ \lambda \in \mathbb{R} : -1 \leq \lambda \leq 0 \}$$

et par le théorème d'application spectrale (Théorème 2.4.1)

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)}.$$

En utilisant la caractérisation (1.1) du rayon spectral essentiel on voit bien, que  $r_{ess}(V(t)) = 1$ . Quant au rayon spectral critique, il vaut d'après le Théorème 2.4.1,  $r_{crit}(V(t)) = e^{-t}$ . Ainsi

$$r_{crit}(V(t)) < r_{ess}(V(t)) \quad \text{pour } t > 0.$$

En fait dans ce cas particulier,

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \{ \eta : |\eta| = e^{-t} \}$$

et

$$\sigma_{ess}(V(t)) = \sigma(V(t)).$$

Nous avons établi la continuité de  $0 \leq t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t)$  sous l'hypothèse technique (2.4). Ceci mène naturellement à la

**Question 2.5.1.** *Le résultat persiste-t-il en l'absence de (2.4) ?*

La *convexité* du domaine est cruciale dans ce travail.

**Question 2.5.2.** *Que deviennent nos résultats lorsque le domaine n'est pas convexe ?*

L'hypothèse d'*homogénéité* sur la fréquence de collision nous semble aussi artificielle.

**Question 2.5.3.** *L'homogénéité de  $\sigma(\cdot, \cdot)$  est-elle indispensable ?*

Nous apporterons quelques éléments de réponse à ces questions aux Chapitres 3 et 4.

Notons que dans des domaines bornés, où les théorèmes d'application spectrales se déduisent de la *compacité* des termes de la série de Dyson-Phillips, ces problèmes de convexité et d'homogénéité ne se posent pas. En utilisant l'approximation et la domination on peut réduire le problème à une situation idéale où  $\Omega$  est convexe, la fréquence de collision est constante et le noyau  $k(\cdot, \cdot, \cdot)$  ne dépend pas de  $x$  (cf. Section 4.3.1). Ces arguments, il est clair, n'opèrent plus lorsque l'on aborde la continuité en norme, d'où la difficulté!

Il en ressort des Théorèmes 2.3.2 et 2.3.3 que  $0 \leq t \mapsto R_1(t)$  est continue *si et seulement si* la mesure  $\mu$  ne charge pas les hyperplans affines. Ceci nous amène à poser la

**Conjecture 2.5.1.** *Le théorème d'application spectrale partielle (Théorème 2.3.1) n'est pas vrai lorsqu'il existe un hyperplan affine de  $\mu$ -mesure strictement positive.*





# Chapitre 3

## Théorèmes d'applications spectrales dans $L^1$

### 3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de poursuivre l'investigation des théorèmes d'applications spectrales pour le semigroupe du transport dans des domaines *non bornés* au cas  $p = 1$ . En effet, dans le chapitre précédent outre les résultats d'analyse fonctionnelle sur le spectre critique, notre démarche s'appuyait sur l'analyse intégrale de Fourier pour  $p = 2$  et l'interpolation pour  $1 < p < \infty$ , ce qui écarte naturellement le cas  $p = 1$ . Ce dernier est, en effet, plus délicat et nécessite une approche différente techniquement de la précédente mais conduit à des résultats toujours précis. Cette différence (de démarche) nous incite, en particulier, à présenter le chapitre suivant un schéma différent mais avant, fixons le cadre de notre étude.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert régulier et soit  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^N$  de support  $V$ . On désigne par  $(U(t))_{t \geq 0}$  le semigroupe d'absorption :

$$U(t) : L^1(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto e^{-\int_0^t \sigma(x - sv, v) ds} \varphi(x - tv, v) \chi_{\{t < \tau(x, v)\}} \in L^1(\Omega \times V),$$

où  $\tau(x, v) = \inf \{s > 0 : (x - sv) \notin \Omega\}$  et  $\sigma(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega \times V)$ . Le produit  $\Omega \times V$  étant toujours muni de la mesure produit  $dx \otimes d\mu(v)$ . On désigne par  $T$  le générateur de  $(U(t))_{t \geq 0}$  et on note par  $K$  l'opérateur de collision

$$K : L^1(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V k(x, v, v') \varphi(x, v') d\mu(v'),$$

où le noyau  $k(\cdot, \cdot, \cdot)$  vérifie l'estimation

$$\int_V |k(\cdot, v, \cdot)| d\mu(v) \in L^\infty(\Omega \times V)$$

assurant la bornitude de  $K$  dans  $L^1(\Omega \times V)$ . Le semigroupe de transport est le  $C_0$ -semigroupe engendré par  $T + K$  et donné par la série de Dyson-Philips

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \quad (3.1)$$

où

$$U_0(t) = U(t) \text{ et } U_{j+1}(t) = \int_0^t U_0(t-s)KU_j(s)ds \quad (j \geq 0).$$

Dans toute la suite, l'opérateur de collision est supposé compact "*par rapport aux vitesses*" avec une compacité "*collective*" par rapport à la variable d'espace  $x$ . D'une manière plus précise :

**(H1)** La famille

$$\left\{ \int_V k(x, v, v')\varphi(v')d\mu(v') : x \in \Omega, \varphi \in L^1(V), \|\varphi\|_{L^1(V)} \leq 1 \right\}$$

est relativement compacte dans  $L^1(V)$ .

**(H2)** Pour tout  $\psi \in L^\infty(V)$ , la famille

$$\left\{ \int_V k(x, v', v)\psi(v')d\mu(v') : x \in \Omega \right\}$$

est relativement compacte dans  $L^\infty(V)$ .

Lorsque le noyau de collision est homogène, ces deux hypothèses se réduisent tout simplement à la compacité de l'opérateur intégral

$$L^1(V) \ni \varphi \mapsto \int_V k(v, v')\varphi(v')d\mu(v') \in L^1(V).$$

Comme dans le Lemme 2.2.1, on peut établir que sous les hypothèses **(H1)**-**(H2)**, l'opérateur de collision  $K$  peut être approché dans  $\mathcal{L}(L^1(\Omega \times V))$  par des opérateurs de collision possédant un noyau séparé :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v'), \quad (3.2)$$

où  $\alpha_i(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f_i(\cdot) \in L^1(V)$ ,  $g_i(\cdot) \in L^\infty(V)$  et  $I \subset \mathbb{N}$  est fini.

Sauf mention explicite du contraire, la fréquence de collision est supposée homogène, i.e.

$$\sigma(x, v) = \sigma(v).$$

L'organisation de ce chapitre est la suivante : Dans la Section 3.2 nous examinons les propriétés de continuité en norme des restes de la série de Dyson-Phillips (3.1) dans l'espace entier ( $\Omega = \mathbb{R}^N$ ) pour des noyaux de collision homogènes, i.e.  $k(x, v, v') = k(v, v')$ . On montre que s'il existe  $\alpha > 0$  tel que à tout  $c > 0$  on peut associer  $c' > 0$  de sorte que

$$\sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \mu \otimes \mu \{ (v, v') : |v| \leq c, |v'| \leq c, |(v - v') \cdot e| \leq \varepsilon \} \leq c' \varepsilon^\alpha,$$

alors

$$0 \leq t \mapsto R_j(t) \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times V)) \quad (3.3)$$

est continue en norme, où l'entier  $j$  dépend de  $\alpha$  et  $N$ . La preuve de ce résultat est assez technique et est donnée en plusieurs étapes : Par des arguments de densité on se restreint à des noyaux du type (3.2). Auquel cas, les termes de la série de Dyson-Phillips (3.1) sont essentiellement des *convolutions* avec des mesures de Radon dépendant de  $t$ . Ce qui conduit en particulier à montrer que ces mesure dépendent continûment de  $t$  par rapport à la *norme de variation totale*. On montre que pour  $N \geq 2$  et indépendamment du choix de la mesure

$$0 \leq t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t)$$

n'est jamais continue en norme. A l'opposé, pour  $N = 1$  on établit que

$$0 \leq t \mapsto R_1(t) = V(t) - U(t)$$

est continue en norme si et seulement si  $\mu$  satisfait

$$\sup_{v' \in \mathbb{R}} \mu \{ [v' - \varepsilon, v' + \varepsilon] \} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dans la section 3.3, nous abordons des domaines quelconques et des noyaux (pas nécessairement homogènes) sous l'hypothèse que la mesure  $\mu$  soit "absolument continue en module  $|v|$  mais arbitraire en direction  $\frac{v}{|v|}$ " et on montre que

$$0 \leq t \mapsto R_2(t)$$

est continue en norme. On note cependant qu'une telle hypothèse sur  $\mu$  couvre le modèle continu mais pas le modèle multigroupe. La Section 3.4 est dédiée aux théorèmes d'applications spectrales. On dérive à partir des résultats de la section 3.2, des applications spectrales dans l'espace entier pour une classe générale de mesures et de noyaux homogènes en espace. D'une manière analogue, on dérive à partir des résultats de la Section 3.3 des théorèmes d'applications spectrales pour une classe particulière de mesures mais pour des domaines quelconques et des noyaux de collision pas nécessairement homogènes.

## 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier

Dans cette section, dédiée à l'espace entier ( $\Omega = \mathbb{R}^N$ ), on suppose le noyau de collision homogène et

(H3)  $L^1(V) \ni \varphi \mapsto \int_V k(v, v') \varphi(v') d\mu(v') \in L^1(V)$  est compact.

### 3.2.1 Dimension quelconque

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et soit  $\mu$  une mesure de Radon positive (pas nécessairement finie) sur  $\mathbb{R}^N$ . On suppose que (H3) est satisfaite et qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $c' > 0$ , il existe  $c > 0$  tel que*

$$\sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \mu \otimes \mu \{(v, v') : |v| \leq c, |v'| \leq c, |(v - v') \cdot e| \leq \varepsilon\} \leq c' \varepsilon^\alpha. \quad (3.4)$$

Soit  $q_1$  le plus petit entier vérifiant  $q_1 > \frac{(\alpha+1)}{\alpha} \left(\frac{N}{2} + 1\right)$ . Alors

$$0 < t \mapsto R_j(t) \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^N \times V))$$

est continue pour tout  $j \geq 2q_1$ .

**Remarque 3.2.1.** *La condition (3.4) est satisfaite par la mesure de Lebesgue volumique et la mesure de Lebesgue sur les sphères. Le Théorème 3.2.1 couvre ainsi le modèle continu et le modèle multigroupe.*

La preuve du Théorème 3.2.1 est assez technique et est donnée en plusieurs étapes. Observons tout d'abord que grâce au Théorème 1.4.9,  $0 < t \mapsto R_j(t)$  est continue pour tout  $j \geq 2q_1$  si et seulement si  $0 < t \mapsto U_j(t)$  l'est aussi. Par ailleurs, en raison de l'égalité

$$U_{m+1}(t) = U_m * KU(t),$$

la Proposition 1.4.1 nous permet de se contenter de montrer la continuité de  $0 < t \mapsto U_m(t)$  pour  $m = 2q_1$ . Or,

$$U_m(t) = [UK]^m * U = U * K[UK]^{m-1} * U(t) \quad (m \geq 1)$$

(on rappelle que  $*$  désigne la convolution d'opérateurs, voir Section 1.4.1) et à nouveau, la Proposition 1.4.1 nous amène à montrer la continuité en norme de  $0 \leq t \mapsto K[UK]^{m-1}(t)$ . Par densité et linéarité, on peut se contenter d'établir la continuité en norme de

$$0 < t \mapsto K_1 U * K_2 U * \cdots * K_{m-1} U K_m,$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 77

où  $K_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) est de la forme

$$L^1(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V f_i(v)g_i(v')\varphi(x, v')d\mu(v') \in L^1(\mathbb{R}^N \times V)$$

avec  $f_i(\cdot) \in L^1(V)$  et  $g_i(\cdot) \in L^\infty(V)$ . Quitte à les décomposer en parties positives et négatives, par linéarité, on peut supposer les fonctions  $f_i, g_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) positives. Enfin, par densité encore, on peut se restreindre au cas où les fonctions  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sont continues et à support compact, ce qui permet de supposer la mesure  $\mu$  à *support compact*. Introduisons les opérateurs suivants

$$M_i : L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, v')g_i(v')d\mu(v') = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x, v')d\mu_i(v') \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

où  $\mu_i = g_i\mu$ . On a alors

$$K_i M_i = \|\mu_i\| K_i$$

et

$$K_1 U * K_2 U * \dots * K_{m-1} U K_m = \prod_{i=1}^{m-1} \|\mu_i\|^{-1} K_1 (M_1 U K_2 * M_2 U K_3 * \dots * M_{m-1} U K_m).$$

Pour faciliter le compréhension de la suite de la preuve, nous estimons qu'il est préférable d'énoncer tous les lemmes la composant, puis montrer comment ces lemmes permettent de conclure la preuve, et en dernière étape démontrer chacun de ces lemmes.

On commence par décrire l'opérateur  $M_1 U K_2 * M_2 U K_3 * \dots * M_{m-1} U K_m$  :

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $m \geq 2$ . Alors il existe une mesure de Radon  $\beta^m(t)$  finie sur  $\mathbb{R}^N$  telle que*

$$M_1 U K_2 * \dots * M_m U K_{m+1} \varphi = \beta^m(t) * M_{m+1} \varphi.$$

Ainsi, pour montrer le Théorème 3.2.1, il suffit de montrer

**Lemme 3.2.2.**<sup>1</sup> *Soit  $q_1$  le plus petit entier vérifiant  $q_1 > \frac{\alpha+1}{\alpha}(\frac{N}{2} + 1)$ . Alors pour  $q \geq q_1$*

$$0 \leq t \mapsto \beta^{2q}(t) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

*est continue, où  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  est l'espace des mesures de Radon finies sur  $\mathbb{R}^N$  muni de la norme de variation totale.*

Or on montre que pour  $q$  assez grand,  $\beta^{2q}(t)$  est une *fonction*, i.e.  $\beta^{2q}(t)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

<sup>1</sup>Le choix de  $m = 2q$  est dicté par des raisons techniques.

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $q_0$  le plus petit entier satisfaisant  $q_0 > \frac{N(\alpha+1)}{2\alpha}$ . Alors pour tout  $q \geq q_0$  on a  $\beta^{2q}(t) \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .*

Ainsi, la preuve du Lemme 3.2.2 se réduit, alors, à montrer

$$0 \leq t \mapsto \beta^{2q}(t) \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ est continue.} \quad (3.5)$$

Mais avant, on établit sa continuité en tant qu'application à valeurs dans  $L^2$ .

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $q_1$  le plus petit entier vérifiant  $q_1 > \frac{\alpha+1}{\alpha}(\frac{N}{2} + 1)$ . Alors pour tout  $q \geq q_1$ ,  $]0, T[ \ni t \mapsto \beta^{2q}(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$  est continue.*

Ensuite, on montre que l'on contrôle la masse de la mesure à l'infini, plus précisément

**Lemme 3.2.5.** *Pour tout  $m \geq 2$  on a*

$$\beta^m(t)\{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

*uniformément en  $t \in [0, T]$  pour tout  $T > 0$ .*

Enfin, on compile le tout comme suit :

**Fin de la preuve du Théorème 3.2.1.** Il suffit de montrer (3.5). Pour ce faire, soient  $\bar{t} > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Grâce au Lemme 3.2.5, il existe un entier  $n_0$  tel que

$$\beta^{2q_1}(t)\{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n_0)\} \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ uniformément en } t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta]$$

(pour un choix convenable de  $\delta$ ). Alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |\beta^{2q_1}(t)(x) - \beta^{2q_1}(\bar{t})(x)| dx \\ & \leq \int_{B(0, n_0)} |\beta^{2q_1}(t)(x) - \beta^{2q_1}(\bar{t})(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n_0)} |\beta^{2q_1}(t)(x) - \beta^{2q_1}(\bar{t})(x)| dx \\ & \leq [|B(0, n_0)|]^{1/2} \left[ \int_{B(0, n_0)} |\beta^{2q_1}(t)(x) - \beta^{2q_1}(\bar{t})(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n_0)} \beta^{2q_1}(t)(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n_0)} \beta^{2q_1}(\bar{t})(x) dx \\ & \leq [|B(0, n_0)|]^{1/2} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |\beta^{2q_1}(t)(x) - \beta^{2q_1}(\bar{t})(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 79

pour  $t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta]$ . D'autre part, le Lemme 3.2.4 nous assure l'existence d'un réel  $\delta_1 > 0$  tel que

$$\left[ \int_{\mathbb{R}^N} |\beta^{2q_1}(t)(x) - \beta^{2q_1}(\bar{t})(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{3|B(0, n_0)|^{1/2}}$$

pour  $t \in [\bar{t} - \delta_1, \bar{t} + \delta_1]$ . Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\beta^{2q_1}(t)(x) - \beta^{2q_1}(\bar{t})(x)| dx \leq \varepsilon$$

pour  $t \in [\bar{t} - \delta_1, \bar{t} + \delta_1]$ , ce qui achève la preuve. ■

Prouvons maintenant les différents lemmes énoncés ci-dessus.

**Preuve du Lemme 3.2.1.** Elle consiste à montrer l'existence d'une mesure de Radon  $\beta^m(t)$  telle que

$$M_1UK_2 * \cdots * M_mUK_{m+1}\varphi = \beta^m(t) * M_{m+1}\varphi.$$

On montre d'abord que

$$M_iUK_{i+1}\varphi = \eta_t^i * M_{i+1}\varphi,$$

où  $\eta_t^i$  est une mesure de Radon finie sur  $\mathbb{R}^N$ . En effet,

$$\begin{aligned} M_iUK_{i+1}\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} f_{i+1}(v)g_i(v)e^{-t\sigma(v)}M_{i+1}\varphi(x-tv)d\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h_i(v)e^{-t\sigma(v)}M_{i+1}\varphi(x-tv)d\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} M_{i+1}\varphi(x-y)d\eta_t^i(y) = \eta_t^i * M_{i+1}\varphi, \end{aligned}$$

où  $\eta_t^i$  est l'image de la mesure  $e^{-t\sigma(v)}h_i(v)d\mu$  par l'homothétie  $v \mapsto tv$  et  $h_i(v) = f_{i+1}(v)g_i(v)$ . Notons que l'application  $0 < t \mapsto \eta_t^i \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  est continue pour la topologie faible \*, i.e.

$$0 < t \mapsto \langle \eta_t^i, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-tv)e^{-t\sigma(v)}h_i(v)d\mu$$

est continue. On a

$$M_1UK_2 * M_2UK_3\varphi = \int_0^t M_1U(t-s)K_2M_2U(s)K_3\varphi ds$$



$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \eta_{t-s}^1 * M_2(M_2U(s)K_3\varphi)ds \\
&= \int_0^t \eta_{t-s}^1 * M_2(\eta_s^2 * M_3\varphi)ds \\
&= \|\mu_2\| \int_0^t \eta_{t-s}^1 * (\eta_s^2 * M_3\varphi)ds \\
&= \|\mu_2\| \int_0^t (\eta_{t-s}^1 * \eta_s^2) * M_3\varphi ds \\
&= \|\mu_2\| \left[ \int_0^t (\eta_{t-s}^1 * \eta_s^2) ds \right] * M_3\varphi \\
&=: \beta^2(t) * M_3\varphi,
\end{aligned}$$

où l'intégrale

$$\beta^2(t) = \|\mu_2\| \int_0^t (\eta_{t-s}^1 * \eta_s^2) ds \quad (3.6)$$

est prise au sens faible  $*$ , i.e.

$$\langle \beta^2(t), \varphi \rangle := \|\mu_2\| \int_0^t \langle \eta_{t-s}^1 * \eta_s^2, \varphi \rangle ds.$$

Supposons que

$$M_1UK_2 * \cdots * M_{m-1}UK_m\varphi = \beta^{m-1}(t) * M_m\varphi.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&[M_1UK_2 * \cdots * M_mUK_{m+1}](t)\varphi \\
&= \int_0^t [M_1UK_2 * \cdots * M_{m-1}UK_m](t-s)(M_mU(s)K_{m+1}\varphi)ds \\
&= \int_0^t \beta^{m-1}(t-s) * M_m(M_mU(s)K_{m+1}\varphi)ds \\
&= \int_0^t \beta^{m-1}(t-s) * M_m(\eta_s^m * M_{m+1}\varphi)ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|\mu_m\| \int_0^t \beta^{m-1}(t-s) * (\eta_s^m * M_{m+1}\varphi) ds \\
 &= \|\mu_m\| \left[ \int_0^t \beta^{m-1}(t-s) * \eta_s^m ds \right] * M_{m+1}\varphi \\
 &=: \beta^m(t) * M_{m+1}\varphi,
 \end{aligned}$$

où l'intégrale

$$\beta^m(t) = \|\mu_m\| \int_0^t \beta^{m-1}(t-s) * \eta_s^m ds \quad (3.7)$$

est prise au sens faible  $*$ , i.e.

$$\langle \beta^m(t), \varphi \rangle = \|\mu_m\| \int_0^t \langle \beta^{m-1}(t-s) * \eta_s^m, \varphi \rangle ds.$$

Ainsi,  $\beta^m(t)$  est définie, d'une manière récurrente, par (3.7), ce qui finit la preuve. ■

Avant de prouver le Lemme 3.2.3 qui affirme que pour  $q$  assez grand, la mesure  $\beta^{2q}(t)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, notons que l'on peut établir, comme précédemment, l'expression suivante

$$\beta^{2q}(t) = \|\mu_{2q-1}\| \int_0^t \beta^{2(q-1)}(t-s) * \beta^{2q-1,2q}(s) ds \quad (3.8)$$

pour tout  $q > 1$ , où

$$\beta^{i,i+1}(t) = \|\mu_{i+1}\| \int_0^t \eta_{t-s}^i * \eta_s^{i+1} ds.$$

**Preuve du Lemme 3.2.3.** Calculons la transformée de Fourier de la mesure (finie)  $\beta^2(t)$  (voir (3.6)). On a

$$\begin{aligned}
 &\|\mu_2\|^{-1} \widehat{\beta^2(t)}(\xi) \\
 &= (2\pi)^{N/2} \int_0^t \widehat{\eta_{t-s}^1}(\xi) \widehat{\eta_s^2}(\xi) ds \\
 &= (2\pi)^{-N/2} \int_0^t \left[ \int_{\mathbb{R}^N} e^{-iv \cdot \xi} d\eta_{t-s}^1(v) \right] \left[ \int_{\mathbb{R}^N} e^{-iv' \cdot \xi} d\eta_s^2(v') \right] ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-N/2} \int_0^t \left[ \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(t-s)v \cdot \xi} e^{-(t-s)\sigma(v)} h_1(v) d\mu(v) \right] \left[ \int_{\mathbb{R}^N} e^{-isv' \cdot \xi} e^{-s\sigma(v')} h_2(v') d\mu(v') \right] ds \\
&= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ \int_0^t e^{-i(t-s)v \cdot \xi} e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-isv' \cdot \xi} e^{-s\sigma(v')} ds \right] h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v').
\end{aligned}$$

Introduisons les coordonnées polaires  $\xi = |\xi| e$ , où  $e \in \mathbb{S}^{N-1}$ , on décompose la dernière intégrale ainsi

$$\begin{aligned}
&\iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq \varepsilon} \left[ \int_0^t e^{-i(t-s)v \cdot \xi} e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-isv' \cdot \xi} e^{-s\sigma(v')} ds \right] h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') \\
&+ \iint_{|(v'-v) \cdot e| > \varepsilon} \left[ \int_0^t e^{-i(t-s)v \cdot \xi} e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-isv' \cdot \xi} e^{-s\sigma(v')} ds \right] h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v'),
\end{aligned}$$

où  $\varepsilon > 0$  est arbitraire. On a alors

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq \varepsilon} \left[ \int_0^t e^{-i(t-s)v \cdot \xi} e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-isv' \cdot \xi} e^{-s\sigma(v')} ds \right] h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') \right| \\
&\leq t e^{2t\|\sigma\|_\infty} \|h_1 h_2\|_\infty \iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq \varepsilon} d\mu(v) d\mu(v').
\end{aligned}$$

Estimons le deuxième terme

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{|(v'-v) \cdot e| > \varepsilon} \left[ \int_0^t e^{-i(t-s)v \cdot \xi} e^{-(t-s)\sigma(v)} e^{-isv' \cdot \xi} e^{-s\sigma(v')} ds \right] h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') \right| \\
&\leq \iint_{|(v'-v) \cdot e| > \varepsilon} \frac{|e^{-itv' \cdot \xi} e^{-t\sigma(v')} - e^{-itv \cdot \xi} e^{-t\sigma(v)}|}{|i(v-v') \cdot \xi + \sigma(v) - \sigma(v')|} |h_1(v) h_2(v')| d\mu(v) d\mu(v') \\
&\leq \iint_{|(v'-v) \cdot e| > \varepsilon} \frac{2|h_1(v) h_2(v')|}{|(v-v') \cdot e| |\xi|} d\mu(v) d\mu(v') \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon |\xi|} \iint_{|(v'-v) \cdot e| > \varepsilon} |h_1(v) h_2(v')| d\mu(v) d\mu(v') \\
&\leq \frac{2\|h_1\|_1 \|h_2\|_1}{\varepsilon |\xi|}.
\end{aligned}$$

D'où

$$|\widehat{\beta^2}(t)(\xi)| \leq (2\pi)^{-N/2} \|\mu_2\| \left( T e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1 h_2\|_\infty \iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq \varepsilon} d\mu(v) d\mu(v') + \frac{2\|h_1\|_1 \|h_2\|_1}{\varepsilon |\xi|} \right).$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 83

Soient  $0 < \tau < 1$  et  $\varepsilon = |\xi|^{-\tau}$ , alors

$$\begin{aligned} |\widehat{\beta^2(t)}(\xi)| &\leq (2\pi)^{-N/2} \|\mu_2\| (Te^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1 h_2\|_\infty + 2 \|h_1\|_1 \|h_2\|_1) (a(\xi) + b(\xi)) \\ &=: C_1(a(\xi) + b(\xi)), \end{aligned}$$

où

$$a(\xi) := \sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \mu \otimes \mu \{ (v, v') : |(v' - v) \cdot e| \leq |\xi|^{-\tau} \} \text{ et } b(\xi) := \frac{1}{|\xi|^{1-\tau}}.$$

Considérons

$$\beta^{2q-1, 2q}(t) = \|\mu_{2q}\| \int_0^t \eta_{t-s}^{2q-1} * \eta_s^{2q} ds;$$

comme précédemment on peut établir que

$$\begin{aligned} &|\widehat{\beta^{2q-1, 2q}(t)}(\xi)| \\ &\leq (2\pi)^{-N/2} \|\mu_{2q}\| (Te^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_{2q-1} h_{2q}\|_\infty + 2 \|h_{2q-1}\|_1 \|h_{2q}\|_1) (a(\xi) + b(\xi)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Montrons maintenant par récurrence qu'il existe  $C_q > 0$  (dépendant seulement de  $q$ ) tel que

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi)| \leq C_q (a(\xi) + b(\xi))^q \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Admettons l'existence de  $C_{q-1} > 0$  tel que

$$|\widehat{\beta^{2(q-1)}(t)}(\xi)| \leq C_{q-1} (a(\xi) + b(\xi))^{q-1} \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Par (3.8) et (3.9) il s'ensuit

$$\begin{aligned} &\|\mu_{2q-1}\|^{-1} |\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi)| \\ &\leq (2\pi)^{N/2} \int_0^t |\widehat{\beta^{2(q-1)}(t-s)}(\xi) \widehat{\beta^{2q-1, 2q}(s)}(\xi)| ds \\ &\leq t C_{q-1} (a(\xi) + b(\xi))^{q-1} \|\mu_{2q}\| (Te^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_{2q-1} h_{2q}\|_\infty + 2 \|h_{2q-1}\|_1 \|h_{2q}\|_1) (a(\xi) + b(\xi)). \end{aligned}$$

D'où

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi)| \leq C_q (a(\xi) + b(\xi))^q \text{ pour tout } t \in [0, T], \quad (3.10)$$

où  $C_q := \|\mu_{2q-1}\| \|\mu_{2q}\| T C_{q-1} \left( Te^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_{2q-1} h_{2q}\|_\infty + 2 \|h_{2q-1}\|_1 \|h_{2q}\|_1 \right)$ . Posons  $\tau = \frac{1}{1+\alpha}$  (clairement  $0 < \tau < 1$ ) en utilisant (3.4) on obtient

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi)| \leq C_q \left[ \frac{c'}{|\xi|^{\alpha\tau}} + \frac{1}{|\xi|^{1-\tau}} \right]^q \leq \frac{2^q C_q (\max\{c', 1\})^q}{|\xi|^{\frac{q\alpha}{1+\alpha}}}.$$

Par conséquent  $\widehat{\beta^{2q}(t)} \in L^2(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $q \geq q_0 > \frac{N(1+\alpha)}{2\alpha}$  et tout  $t \in [0, T]$ . L'identité de Parseval fournit  $\beta^{2q}(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $q \geq q_0 > \frac{N(1+\alpha)}{2\alpha}$  et tout  $t \in [0, T]$ . Comme  $\beta^{2q}(t)$  est aussi une mesure de Radon *bornée* sur  $\mathbb{R}^N$  on conclut que  $\beta^{2q}(t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . ■

Notre prochaine étape consiste à établir la continuité de (3.5) en tant qu'application à valeurs dans  $L^2$ .

**Preuve du Lemme 3.2.4.** Avant d'entamer la preuve, il est utile de noter l'estimation (élémentaire) suivante que l'on invoquera à plusieurs reprises. Rappelons à l'occasion que le support de la mesure,  $V$ , est compact. Il existe  $C > 1$  tel que

$$|e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} - e^{-i\bar{t}v \cdot \xi - \bar{t}\sigma(v)}| \leq C \max\{1, |\xi|\} |t - \bar{t}| \quad (3.11)$$

et

$$|e^{-it(v-v') \cdot \xi - t(\sigma(v) - \sigma(v'))} - e^{-i\bar{t}(v-v') \cdot \xi - \bar{t}(\sigma(v) - \sigma(v'))}| \leq C \max\{1, |\xi|\} |t - \bar{t}| \quad (3.12)$$

pour tout  $t, \bar{t} \in [0, T]$ , pour presque tout  $v, v' \in V$  et pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ .

Dans un premier tour on établit (par récurrence) que

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)| \leq C_q^* |t - \bar{t}| |\xi| (a(\xi) + b(\xi))^q$$

pour tout  $\xi$  tel que  $|\xi| \geq 1$ , où  $C_q^*$  est une constante qui dépend seulement de  $q$ . On rappelle aussi que

$$a(\xi) := \sup_{e \in \mathbb{S}^{N-1}} \mu \otimes \mu \{(v, v') : |(v' - v) \cdot e| \leq |\xi|^{-\tau}\} \quad \text{et} \quad b(\xi) := \frac{1}{|\xi|^{1-\tau}}.$$

En utilisant l'expression de  $\widehat{\beta^2(t)}(\xi)$  explicitée dans le Lemme 3.2.3 on aura

$$\begin{aligned} & \|\mu_2\|^{-1} \left( \widehat{\beta^2(t)}(\xi) - \widehat{\beta^2(\bar{t})}(\xi) \right) \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') \\ & \quad \times \left[ \int_0^t e^{-i(t-s)v \cdot \xi - (t-s)\sigma(v)} e^{-isv' \cdot \xi - s\sigma(v')} ds - \int_0^{\bar{t}} e^{-i(\bar{t}-s)v \cdot \xi - (\bar{t}-s)\sigma(v)} e^{-isv' \cdot \xi - s\sigma(v')} ds \right] \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') \\ & \quad \times \left[ e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} \int_{\bar{t}}^t e^{-is(v'-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right. \end{aligned}$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 85

$$+(e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} - e^{-i\bar{t}v \cdot \xi - \bar{t}\sigma(v)}) \int_0^{\bar{t}} e^{-is(v'-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds]. \quad (3.13)$$

Introduisons les coordonnées polaires  $\xi = |\xi| e$ ,  $e \in \mathbb{S}^{N-1}$ , on décompose la dernière intégrale de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq |\xi|^{-\tau}} h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') \\ & \quad \times \left[ e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} \int_{\bar{t}}^t e^{-is(v-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right. \\ & \quad \left. + (e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} - e^{-i\bar{t}v \cdot \xi - \bar{t}\sigma(v)}) \int_0^{\bar{t}} e^{-is(v'-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right] \\ + & \iint_{|(v'-v) \cdot e| > |\xi|^{-\tau}} h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') \\ & \quad \times \left[ e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} \int_{\bar{t}}^t e^{-is(v-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right. \\ & \quad \left. + (e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} - e^{-i\bar{t}v \cdot \xi - \bar{t}\sigma(v)}) \int_0^{\bar{t}} e^{-is(v'-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right] \\ =: & I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On a clairement

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq |\xi|^{-\tau}} h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} \int_{\bar{t}}^t e^{-is(v'-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right| \\ & \leq e^{2T\|\sigma\|_\infty} |t - \bar{t}| \iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq |\xi|^{-\tau}} |h_1(v) h_2(v')| d\mu(v) d\mu(v') \\ & \leq e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1 h_2\|_\infty |t - \bar{t}| a(\xi). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Grâce à (3.11)

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{|(v'-v) \cdot e| \leq |\xi|^{-\tau}} h_1(v) h_2(v') d\mu(v) d\mu(v') (e^{-itv \cdot \xi - t\sigma(v)} - e^{-i\bar{t}v \cdot \xi - \bar{t}\sigma(v)}) \right. \\ & \quad \left. \times \int_0^{\bar{t}} e^{-is(v'-v) \cdot \xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C |\xi| |t - \bar{t}| T e^{2T\|\sigma\|_\infty} \iint_{|(v'-v)\cdot e| \leq |\xi|^{-\tau}} |h_1(v)h_2(v')| d\mu(v)d\mu(v') \\
&\leq CT e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1 h_2\|_\infty a(\xi) |\xi| |t - \bar{t}|.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

En additionnant (3.14) et (3.15) on obtient

$$|I_1| \leq (1 + CT) e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1 h_2\|_\infty a(\xi) |\xi| |t - \bar{t}| \quad \forall |\xi| \geq 1. \tag{3.16}$$

Considérons  $I_2$ . Premièrement par (3.12)

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{|(v'-v)\cdot e| > |\xi|^{-\tau}} h_1(v)h_2(v') d\mu(v)d\mu(v') e^{-itv\cdot\xi - t\sigma(v)} \int_{\bar{t}}^t e^{-is(v'-v)\cdot\xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right| \\
&\leq \iint_{|(v'-v)\cdot e| > |\xi|^{-\tau}} |h_1(v)h_2(v')| \left| \frac{e^{-it(v'-v)\cdot\xi - t(\sigma(v') - \sigma(v))} - e^{-i\bar{t}(v'-v)\cdot\xi - \bar{t}(\sigma(v') - \sigma(v))}}{i(v-v')\cdot\xi + \sigma(v) - \sigma(v')} \right| d\mu(v)d\mu(v') \\
&\leq \iint_{|(v'-v)\cdot e| > |\xi|^{-\tau}} |h_1(v)h_2(v')| \frac{C |\xi| |t - \bar{t}|}{|(v-v')\cdot e| |\xi|} d\mu(v)d\mu(v') \\
&\leq \iint_{|(v'-v)\cdot e| > |\xi|^{-\tau}} |h_1(v)h_2(v')| \frac{C |\xi| |t - \bar{t}|}{|\xi|^{-\tau} |\xi|} d\mu(v)d\mu(v') \\
&\leq C \|h_1\|_1 \|h_2\|_1 b(\xi) |\xi| |t - \bar{t}|.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De la même manière, en appliquant (3.11) on aura

$$\begin{aligned}
&\left| \iint_{|(v'-v)\cdot e| > |\xi|^{-\tau}} h_1(v)h_2(v') d\mu(v)d\mu(v') (e^{-itv\cdot\xi - t\sigma(v)} - e^{-i\bar{t}v\cdot\xi - \bar{t}\sigma(v)}) \right. \\
&\quad \left. \times \int_0^{\bar{t}} e^{-is(v'-v)\cdot\xi - s(\sigma(v') - \sigma(v))} ds \right| \\
&\leq \iint_{|(v'-v)\cdot e| > |\xi|^{-\tau}} |h_1(v)h_2(v')| \left| e^{-itv\cdot\xi - t\sigma(v)} - e^{-i\bar{t}v\cdot\xi - \bar{t}\sigma(v)} \right| \\
&\quad \times \left| \frac{e^{-i\bar{t}(v'-v)\cdot\xi - \bar{t}(\sigma(v') - \sigma(v))} - 1}{i(v-v')\cdot\xi + \sigma(v) - \sigma(v')} \right| d\mu(v)d\mu(v') \\
&\leq (e^{2T\|\sigma\|_\infty} + 1) C \|h_1\|_1 \|h_2\|_1 b(\xi) |\xi| |t - \bar{t}|.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

L'addition de (3.17) et (3.18) fournit

$$|I_2| \leq (e^{2T\|\sigma\|_\infty} + 2) C \|h_1\|_1 \|h_2\|_1 b(\xi) |\xi| |t - \bar{t}| \quad \forall |\xi| \geq 1. \tag{3.19}$$

Par (3.16) et (3.19) on a

$$\left| \widehat{\beta^2(t)}(\xi) - \widehat{\beta^2(\bar{t})}(\xi) \right| \leq C_1^* (a(\xi) + b(\xi)) |\xi| |t - \bar{t}| \quad \forall |\xi| \geq 1,$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 87

où  $C_1^* := (2\pi)^{-N/2} \|\mu_2\| \left[ (1 + CT)e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1 h_2\|_\infty + (e^{2T\|\sigma\|_\infty} + 2)C \|h_1\|_1 \|h_2\|_1 \right]$ .  
 Montrons maintenant qu'il existe  $C_q^* > 0$  (dépendant seulement de  $q$ ) tel que

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)| \leq C_q^* |\xi| |t - \bar{t}| (a(\xi) + b(\xi))^q \text{ pour } |\xi| \geq 1 \text{ et } t, \bar{t} \in [0, T].$$

Supposons

$$|\widehat{\beta^{2(q-1)}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2(q-1)}(\bar{t})}(\xi)| \leq C_{q-1}^* |\xi| |t - \bar{t}| (a(\xi) + b(\xi))^{q-1}$$

pour  $|\xi| \geq 1$  et  $t, \bar{t} \in [0, T]$ . Grâce à (3.8), (3.9) et (3.10) on a

$$\begin{aligned} & \|\mu_{2q-1}\|^{-1} |\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)| \\ & \leq (2\pi)^{N/2} \int_0^{\bar{t}} |\widehat{\beta^{2(q-1)}(t-s)}(\xi) - \widehat{\beta^{2(q-1)}(\bar{t}-s)}(\xi)| |\widehat{\beta^{2q-1,2q}(s)}(\xi)| ds \\ & \quad + (2\pi)^{N/2} \int_{\bar{t}}^t |\widehat{\beta^{2(q-1)}(t-s)}(\xi)| |\widehat{\beta^{2q-1,2q}(s)}(\xi)| ds \\ & \leq \bar{t} C_{q-1}^* \|\mu_{2q}\| (T e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_{2q-1} h_{2q}\|_\infty + 2 \|h_{2q-1}\|_1 \|h_{2q}\|_1) |\xi| |t - \bar{t}| (a(\xi) + b(\xi))^q \\ & \quad + C_{q-1} \|\mu_{2q}\| (T e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_{2q-1} h_{2q}\|_\infty + 2 \|h_{2q-1}\|_1 \|h_{2q}\|_1) |t - \bar{t}| (a(\xi) + b(\xi))^q. \end{aligned}$$

D'où

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)| \leq C_q^* |\xi| |t - \bar{t}| (a(\xi) + b(\xi))^q \quad (3.20)$$

pour  $|\xi| \geq 1$  et  $t, \bar{t} \in [0, T]$ , où

$$C_q^* := \|\mu_{2q-1}\| \|\mu_{2q}\| (T e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_{2q-1} h_{2q}\|_\infty + 2 \|h_{2q-1}\|_1 \|h_{2q}\|_1) (T C_{q-1}^* + C_{q-1}).$$

Dans un second tour on va estimer

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)| \text{ pour } |\xi| < 1.$$

En utilisant à nouveau (3.11) et la décomposition (3.13) on obtient

$$\begin{aligned} & |\widehat{\beta^2(t)}(\xi) - \widehat{\beta^2(\bar{t})}(\xi)| \\ & \leq (2\pi)^{-N/2} \|\mu_2\| (e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1\|_1 \|h_2\|_1 + TC e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|h_1\|_1 \|h_2\|_1) |t - \bar{t}| \\ & =: C_{*1} |t - \bar{t}| \text{ pour } |\xi| < 1. \end{aligned}$$

Par récurrence, on peut obtenir

$$|\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)| \leq C_{*q} |t - \bar{t}| \text{ pour } |\xi| < 1, \quad (3.21)$$



où  $C_{*q} > 0$  dépend seulement de  $q$ . Considérons (3.20), choisissons  $\tau = \frac{1}{1+\alpha}$  et utilisons (3.4) et (3.21) il s'ensuit

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)|^2 d\xi \\
& \leq \int_{|\xi| < 1} |\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq 1} |\widehat{\beta^{2q}(t)}(\xi) - \widehat{\beta^{2q}(\bar{t})}(\xi)|^2 d\xi \\
& \leq C_{*q}^2 |t - \bar{t}|^2 |B(0, 1)| + (2^q C_q^* (\max\{c', 1\})^q)^2 |t - \bar{t}|^2 \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2(1-q\frac{\alpha}{1+\alpha})} d\xi \\
& \leq |t - \bar{t}|^2 \left[ C_{*q}^2 |B(0, 1)| + (2^q C_q^* (\max\{c', 1\})^q)^2 \int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{2(1-q\frac{\alpha}{1+\alpha})} d\xi \right]
\end{aligned}$$

pour  $q \geq q_1 > \frac{1+\alpha}{\alpha}(\frac{N}{2} + 1)$ , où  $|B(0, 1)|$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^N$ . ■

La preuve du Lemme 3.2.5 nécessite un autre lemme que voici :

**Lemme 3.2.6.** *Soit  $\nu$  une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^N$  à support compact. Soit aussi  $(\beta(t))_{t \geq 0}$  une famille de mesures de Radon positives uniformément bornée en  $t \in [0, T]$  (pour tout  $T > 0$ ) et telle que*

$$\beta(t)\{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

uniformément en  $t \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$  pour tout  $\delta > 0$ . Alors

$$\int_0^t \beta(t-s) * \nu_s ds \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

uniformément en  $t \in [0, T]$  pour tout  $T > 0$ , où  $\nu_s$  est la mesure image de  $\nu$  par l'homothétie  $v \mapsto sv$ .

**Preuve.** Soient  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $t \in [0, T]$ . Posons  $M = \sup_{t \in [0, T]} \|\beta(t)\|$ . Par définition on a

$$\begin{aligned}
\beta(t-s) * \nu_s \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} &= \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)}(x+y) d\nu_s(x) d\beta(t-s)(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \beta(t-s)\{-x + \mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} d\nu_s(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \beta(t-s)\{-sx + \mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} d\nu(x). \quad (3.23)
\end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \beta(t-s) * \nu_s ds \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \\
 = & \int_0^\varepsilon \beta(t-s) * \nu_s ds \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} + \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \beta(t-s) * \nu_s ds \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \\
 & + \int_{t-\varepsilon}^t \beta(t-s) * \nu_s ds \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \\
 =: & J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned}$$

Par (3.23)

$$J_1 \leq \varepsilon M \|\nu\| \quad \text{et} \quad J_3 \leq \varepsilon M \|\nu\|. \quad (3.24)$$

D'autre part, il existe un ensemble compact  $C_\varepsilon$  tel que

$$\text{Supp } \nu_s \subset C_\varepsilon \quad \text{pour tout } s \in [\varepsilon, T],$$

où  $\text{Supp } \nu$  désigne le support de  $\nu$ . Il existe alors un entier  $n_0$  tel que

$$-x + \mathbb{R}^N \setminus B(0, n) \subset \mathbb{R}^N \setminus B(0, \frac{n}{2})$$

pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $x \in C_\varepsilon$ , et donc

$$\begin{aligned}
 J_2 & \leq \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \beta(t-s) \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \frac{n}{2})\} d\nu_s(x) ds \\
 & \leq \sup_{r \in [\varepsilon, T]} \beta(r) \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \frac{n}{2})\} \int_\varepsilon^{t-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} d\nu_s(x) ds \\
 & \leq T \|\nu\| \sup_{r \in [\varepsilon, T]} \beta(r) \{\mathbb{R}^N \setminus B(0, \frac{n}{2})\}.
 \end{aligned}$$

Grâce à (3.22) il existe un entier  $n_1 \geq n_0$  tel que

$$J_2 \leq T \|\nu\| \varepsilon \quad (3.25)$$

pour tout  $n \geq n_1$  et tout  $t \in [\varepsilon, T]$ . Enfin, en sommant (3.24) et (3.25) on obtient

$$J_1 + J_2 + J_3 \leq \varepsilon \|\nu\| (2M + T)$$

pour tout  $n \geq n_1$  et  $t \in [0, T]$ . ■

**Preuve du Lemme 3.2.5.** Nous allons utiliser l'expression (3.7), i.e.

$$\beta^m(t) = \|\mu_m\| \int_0^t \beta^{m-1}(t-s) * \eta_s^m ds,$$

et appliquer inductivement le Lemme 3.2.6 pour montrer que

$$\beta^m(t)\{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

c'est-à-dire l'énoncé du Lemme 3.2.5. En effet, on remarque d'abord que pour tout  $T > 0$  et  $m \geq 2$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\beta^m(t)\| < \infty. \quad (3.27)$$

Cette dernière, triviale pour  $m = 2$  car (3.6) montre

$$\|\beta^2(t)\| \leq T \|\mu_2\| \|h_1\|_1 \|h_2\|_1,$$

reste vraie par induction pour tout  $m \geq 2$ . Montrons que  $\eta_s^1$  satisfait (3.26). Comme  $\eta^1$  a un support compact, il existe un ensemble compact  $C_\delta$ , qui dépend seulement de  $\delta > 0$ , tel que  $\text{Supp } \eta_s^1 \subset C_\delta$  pour tout  $s \in [\delta, \frac{1}{\delta}]$ . D'où  $\text{Supp } \eta_s^1 \subset C_\delta \subset B(0, n)$  pour  $n$  suffisamment grand et donc

$$\eta_s^1\{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} = 0 \text{ pour tout } s \in [\delta, \frac{1}{\delta}].$$

Ceci, combinée avec la bornitude uniforme de  $(\eta_s^1)_{s \geq 0}$ , permet d'appliquer le Lemme 3.2.6 et d'obtenir

$$\beta^2(t)\{\mathbb{R}^N \setminus B(0, n)\} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (3.28)$$

uniformément sur tout intervalle compact de  $[0, +\infty[$ . Enfin, en utilisant (3.7), (3.27) et (3.28), il est facile de finir la preuve par induction. ■

**Remarque 3.2.2.** *C'est un problème ouvert de montrer le Théorème 3.2.1 lorsque  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$  ou lorsque le noyau de collision dépend de  $x$ .*

### Un résultat réciproque

Dans les espaces  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , l'application  $0 \leq t \mapsto V(t) - U(t)$  est continue en norme. A l'inverse, dans  $L^1$  et pour  $N \geq 2$  l'application n'est jamais continue. En effet :

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 91

**Théorème 3.2.2.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive à support compact  $V \neq \{0\}$  et soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$  avec  $N \geq 2$ . Soient  $\sigma = 0$  et

$$K : L^1(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V \varphi(x, v') d\mu(v').$$

Alors il existe une suite  $t_n \rightarrow 0$  telle que  $t \mapsto R_1(t)$  n'est pas continue en norme en  $t_n$  pour tout  $n$ .

**Preuve.** Si (pour un certain  $T > 0$ )  $]0, T[ \ni t \mapsto R_1(t)$  est continue en norme,  $]0, T[ \ni t \mapsto U_1(t)$  le serait aussi (Théorème 1.4.9) et il suffit donc de démontrer que  $t \mapsto U_1(t)$  n'est pas continue pour tout  $t > 0$ . Soit  $\bar{t} > 0$ . On rappelle que

$$U_1(t) = \int_0^t U(t-s)KU(s)ds.$$

Ainsi, afin de montrer que  $0 < t \mapsto U_1(t)$  n'est pas continue en norme en  $\bar{t}$ , il suffit de montrer que

$$0 < t \mapsto \widetilde{U}_1(t) := \int_0^{\bar{t}} U(t-s)KU(s)ds$$

n'est pas continue en norme en  $\bar{t}$ . Soit

$$L_{\bar{v}} := \{\alpha \bar{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

la droite de direction  $\bar{v} \in \mathbb{S}^{N-1}$ . Sans perte de généralité, on peut supposer

$$\mu\{L_{\bar{v}}\} < \|\mu\|. \quad (3.29)$$

En effet, si pour un certain  $\bar{v} \in \mathbb{S}^{N-1}$ ,  $\mu\{L_{\bar{v}}\} = \|\mu\|$ , alors pour tout  $\bar{\bar{v}} \in \mathbb{S}^{N-1}$  avec  $\bar{\bar{v}} \neq \bar{v}$  on a  $L_{\bar{v}} \cap L_{\bar{\bar{v}}} = \{0\}$  et

$$\begin{aligned} \|\mu\| &\geq \mu\{L_{\bar{v}} \cup L_{\bar{\bar{v}}}\} \\ &= \mu\{L_{\bar{v}}\} + \mu\{L_{\bar{\bar{v}}}\} - \mu\{0\} \\ &= \|\mu\| + \mu\{L_{\bar{\bar{v}}}\} - \mu\{0\}, \end{aligned}$$

si bien que

$$\mu\{L_{\bar{\bar{v}}}\} \leq \mu\{0\} < \|\mu\|$$

car le support de  $\mu$  est différent de  $\{0\}$ . Soit  $(f_j)_j \subset L^1(\mathbb{R} \times V)$  une suite normalisée (i.e. de norme 1) qui converge pour la topologie faible  $*$  de  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  vers la masse de Dirac  $\delta_{(0, \bar{v})} = \delta_{x=0} \otimes \delta_{v=\bar{v}}$ . Il est clair alors que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{U}_1(t) - \widetilde{U}_1(\bar{t})\| &\geq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\widetilde{U}_1(t)f_j - \widetilde{U}_1(\bar{t})f_j\| \\ &= \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{\{\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N \times V) : \|\varphi\|_\infty = 1\}} \langle \widetilde{U}_1(t)f_j - \widetilde{U}_1(\bar{t})f_j, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\geq \sup_{\{\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N \times V) : \|\varphi\|_\infty = 1\}} \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \langle \widetilde{U}_1(t)f_j - \widetilde{U}_1(\bar{t})f_j, \varphi \rangle,$$

où  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N \times V)$  désigne l'espace des fonctions continues à support compact. D'autre part,

$$\begin{aligned} & \langle \widetilde{U}_1(t)f_j, \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \times V} dx d\mu(v) \varphi(x, v) \int_0^{\bar{t}} ds \int_V f_j(x - (t-s)v - sv', v') d\mu(v') \\ &= \int_V d\mu(v) \int_V d\mu(v') \int_0^{\bar{t}} ds \int_{\mathbb{R}^N} f_j(y, v') \varphi(y + (t-s)v + sv', v) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \times V} dy d\mu(v') f_j(y, v') \int_V d\mu(v) \int_0^{\bar{t}} \varphi(y + (t-s)v + sv', v) ds \\ &\rightarrow \int_V d\mu(v) \int_0^{\bar{t}} \varphi((t-s)v + s\bar{v}, v) ds \end{aligned}$$

quand  $j \rightarrow \infty$  de sorte que

$$\begin{aligned} & \|\widetilde{U}_1(t) - \widetilde{U}_1(\bar{t})\| \\ &\geq \sup_{\{\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N \times V) : \|\varphi\|_\infty = 1\}} \int_V d\mu(v) \int_0^{\bar{t}} \varphi((t-s)v + s\bar{v}, v) - \varphi((\bar{t}-s)v + s\bar{v}, v) ds. \end{aligned}$$

Notre but, alors, est de montrer que pour tout  $t \neq \bar{t}$  ( $t$  appartenant à un intervalle centré en  $\bar{t}$ ) cette dernière quantité est minorée par une constante positive *indépendante* de  $t$ . Pour cela, nous allons construire une fonction  $\phi^t \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times V)$  positive et de norme un et vérifiant

$$\int_V \int_0^{\bar{t}} \phi^t((t-s)v + s\bar{v}, v) - \phi^t((\bar{t}-s)v + s\bar{v}, v) ds d\mu(v) \geq \bar{t} \mu\{V \setminus L_{\bar{v}}\}$$

pour  $t$  assez proche de  $\bar{t}$ . Soit le segment

$$\Gamma_{t,v} := \{tv + s(\bar{v} - v) : s \in [0, \bar{t}]\}$$

de direction  $\bar{v} - v$ . Pour  $t \neq \bar{t}$  et  $v \notin L_{\bar{v}}$  les deux segments  $\Gamma_{t,v}$  et  $\Gamma_{\bar{t},v}$  sont *disjoints*. Soit

$$L_{t,v} := \{tv + s(\bar{v} - v) : s \in \mathbb{R}\}$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 93

la droite passant par  $tv$  et de direction  $\bar{v} - v$  (cette droite contient le segment  $\Gamma_{t,v}$ ). Observons aussi que  $L_{t,v}$  et  $L_{\bar{t},v}$  sont *disjointes* si  $v \notin L_{\bar{v}}$  et coïncident sinon. Définissons la fonction  $\varphi^t$  sur  $\mathbb{R}^N \times (V \setminus L_{\bar{v}})$  par :

$$\varphi^t(x, v) = \frac{d(x, L_{\bar{t},v})}{d(x, L_{t,v}) + d(x, L_{\bar{t},v})},$$

où  $d(x, L_{t,v}) = \inf_{y \in L_{t,v}} |x - y| = \inf_{s \in \mathbb{R}} |x - tv - s(\bar{v} - v)|$  est donnée par

$$d(x, L_{t,v}) = |x - tv - \langle x - tv, \bar{v} - v \rangle |\bar{v} - v|^{-2} (\bar{v} - v)|,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^N$ . Alors  $\varphi^t$  est continue sur  $\mathbb{R}^N \times (V \setminus L_{\bar{v}})$  et

$$\varphi^t(x, v) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \Gamma_{t,v} \\ 0 & \text{pour } x \in \Gamma_{\bar{t},v}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Soit  $\theta_\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant  $0 \leq \theta_\varepsilon(v) \leq 1$ ,  $\theta_\varepsilon(v) = 0$  pour  $v \in C_\varepsilon^1$  et  $\theta_\varepsilon(v) = 1$  pour  $v \notin C_\varepsilon^2$ , où

$$C_\varepsilon^1 := V \cap \{v \in \mathbb{R}^N : d(v, L_{\bar{v}}) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

et

$$C_\varepsilon^2 := V \cap \{v \in \mathbb{R}^N : d(v, L_{\bar{v}}) \leq \varepsilon\}.$$

La fonction  $\theta_\varepsilon \varphi^t : \mathbb{R}^N \times V \ni (x, v) \mapsto \varphi^t(x, v) \theta_\varepsilon(v)$  est continue sur  $\mathbb{R}^N \times V$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$  une fonction vérifiant  $0 \leq \psi \leq 1$  et  $\psi = 1$  sur le compact  $\overline{\bigcup_{(t,v) \in \Xi} \Gamma_{t,v}}$ , où  $\Xi := [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times V$  (pour un certain  $\delta > 0$ ). En utilisant (3.30), on voit que la fonction

$$\phi_\varepsilon^t : \mathbb{R}^N \times V \ni (x, v) \mapsto \varphi^t(x, v) \theta_\varepsilon(v) \psi(x),$$

qui appartient  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N \times V)$ , vérifie

$$\begin{aligned} & \int_V \int_0^{\bar{t}} \phi_\varepsilon^t((t-s)v + s\bar{v}, v) - \phi_\varepsilon^t((\bar{t}-s)v + s\bar{v}, v) ds d\mu(v) \\ &= \int_V \int_0^{\bar{t}} \phi_\varepsilon^t((t-s)v + s\bar{v}, v) ds d\mu(v) \\ &= \int_{V \setminus C_\varepsilon^2} \int_0^{\bar{t}} \phi_\varepsilon^t((t-s)v + s\bar{v}, v) ds d\mu(v) + \int_{C_\varepsilon^2 \setminus C_\varepsilon^1} \int_0^{\bar{t}} \phi_\varepsilon^t((t-s)v + s\bar{v}, v) ds d\mu(v) \\ &\geq \bar{t} \mu\{V \setminus C_\varepsilon^2\} - \bar{t} \mu\{C_\varepsilon^2 \setminus C_\varepsilon^1\}. \end{aligned}$$

pour tout  $[\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \setminus \{\bar{t}\}$ . Enfin, comme  $\mu\{V \setminus C_\varepsilon^2\} \rightarrow \mu\{V \setminus L_{\bar{v}}\}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a par (3.29)

$$\|\widetilde{U}_1(t) - \widetilde{U}_1(\bar{t})\| \geq \bar{t} \mu\{V \setminus L_{\bar{v}}\} > 0$$

pour tout  $[\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \setminus \{\bar{t}\}$ . ■

**Remarque 3.2.3.** *On voit aisément que la construction faite dans la preuve précédente ne s'applique pas en dimension un ( $N = 1$ ). Ceci conduit naturellement à se demander si le résultat persiste quand  $N = 1$ . La réponse à cette interrogation est fournie par la section qui suit.*

### 3.2.2 Cas unidimensionnel

Le cas  $N = 1$  est totalement différent de  $N > 2$ . En effet :

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}$  vérifiant*

$$\sup_{v' \in \mathbb{R}} \mu \{[v' - \varepsilon, v' + \varepsilon]\} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.31)$$

*On suppose aussi que l'hypothèse (H3) est vraie. Alors*

$$0 < t \mapsto R_1(t) \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}))$$

*est continue en norme.*

**Preuve.** On rappelle que  $0 < t \mapsto R_1(t)$  est continue si et seulement si

$$0 < t \mapsto U_1(t) = \int_0^t U(t-s)KU(s)ds$$

l'est aussi (cf. Théorème 1.4.9). Par un argument de densité on peut supposer que  $K$  est de la forme

$$K : L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, v')f(v)g(v')d\mu(v') \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

où  $g(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $f(\cdot)$  est continue à support compact. On a

$$\begin{aligned} U_1(t)\varphi &= \int_0^t U(t-s)KU(s)\varphi ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-(t-s)\sigma(v)-s\sigma(v')}\varphi(x-(t-s)v-sv', v')g(v')dsd\mu(v') \\ &= \int_{-\infty}^v \int_{x-tv}^{x-tv'} \varphi(y, v')\Theta(t, v, v', x, y)(v-v')^{-1}dyd\mu(v') \\ &\quad + \int_v^{+\infty} \int_{x-tv}^{x-tv'} \varphi(y, v')\Theta(t, v, v', x, y)(v-v')^{-1}dyd\mu(v') \\ &=: O_1(t)\varphi + O_2(t)\varphi, \end{aligned}$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 95

où

$$\Theta(t, v, v', x, y) := f(v)g(v')e^{-(x-y-tv')(v-v')^{-1}\sigma(v)}e^{-(y-x+tv)(v-v')^{-1}\sigma(v')}.$$

Montrons que  $0 < t \mapsto O_1(t)$  et  $0 < t \mapsto O_2(t)$  sont continues en norme. On se limitera, par exemple, à montrer la continuité en norme de  $0 < t \mapsto O_1(t)$ , la continuité de la deuxième application s'établit de la même manière. Notons que

$$O_1(t)\varphi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, v')\Theta(t, v, v', x, y)E(t, v, v', x, y)dyd\mu(v'),$$

où

$$E(t, v, v', x, y) := \chi_{\{v' < v\}}\chi_{\{y+tv' \leq x \leq y+tv\}}|v - v'|^{-1}.$$

Soit

$$O_1^\varepsilon(t) : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, v')\Theta(t, v, v', x, y)E_\varepsilon(t, v, v', x, y)dyd\mu(v'),$$

où  $E_\varepsilon(t, v, v', x, y) := E(t, v, v', x, y)\chi_{\{\varepsilon \leq |v-v'|\}}$ . On va démontrer que

$$\|O_1(t) - O_1^\varepsilon(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

*uniformément* en  $t \in [0, T]$ . Comme

$$|\Theta(t, v, v', x, y)| \leq e^{2T\|\sigma\|_\infty}\|f\|_\infty\|g\|_\infty =: C$$

lorsque  $t \in [0, T]$  et  $(t, v, v', x, y) \in \text{Supp } E$ , on a

$$\begin{aligned} & \|O_1(t)\varphi - O_1^\varepsilon(t)\varphi\| \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\mu(v) \int_{\mathbb{R}} dx \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, v')\Theta(t, v, v', x, y) \right. \\ & \quad \left. [E(t, v, v', x, y) - E_\varepsilon(t, v, v', x, y)]dyd\mu(v') \right| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} d\mu(v) \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y, v')|E(t, v, v', x, y)\chi_{\{|v-v'| < \varepsilon\}}dyd\mu(v') \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} d\mu(v') \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y, v')|dy \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{|v-v'| < \varepsilon\}}d\mu(v) \int_{\mathbb{R}} E(t, v, v', x, y)dx. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} E(t, v, v', x, y)dx = |v - v'|^{-1} \int_{y+tv'}^{y+tv} dx = t$$



entraîne

$$\begin{aligned} \|O_1(t)\varphi - O_1^\varepsilon(t)\varphi\| &\leq Ct \int_{\mathbb{R}} d\mu(v') \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y, v')| dy \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{|v-v'|<\varepsilon\}} d\mu(v) \\ &\leq CT \sup_{v' \in \mathbb{R}} \mu\{[v' - \varepsilon, v' + \varepsilon]\} \|\varphi\|, \end{aligned}$$

ce qui montre, en utilisant l'hypothèse (3.31), que  $\|O_1(t) - O_1^\varepsilon(t)\| \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  uniformément en  $t \in [0, T]$ . Montrons à présent la continuité de  $0 < t \mapsto O_1^\varepsilon(t)$ , ce qui finira la preuve. Soit  $\bar{t} > 0$ , on a

$$\begin{aligned} &\|O_1^\varepsilon(t)\varphi - O_1^\varepsilon(\bar{t})\varphi\| \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\mu(v) \int_{\mathbb{R}} dx \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, v') [\Theta(t, v, v', x, y) E_\varepsilon(t, v, v', x, y) \right. \\ &\quad \left. - \Theta(\bar{t}, v, v', x, y) E_\varepsilon(\bar{t}, v, v', x, y)] dy d\mu(v') \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} d\mu(v) \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y, v')| |\Theta(t, v, v', x, y) - \Theta(\bar{t}, v, v', x, y)| \\ &\quad \times |E_\varepsilon(t, v, v', x, y)| dy d\mu(v') \\ &\quad + \int_V d\mu(v) \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y, v')| |\Theta(\bar{t}, v, v', x, y)| \\ &\quad \times |E_\varepsilon(t, v, v', x, y) - E_\varepsilon(\bar{t}, v, v', x, y)| dy d\mu(v') \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Comme  $\int_{\mathbb{R}} E_\varepsilon(t, v, v', x, y) dx \leq t$  et

$$\begin{aligned} &|\Theta(t, v, v', x, y) - \Theta(\bar{t}, v, v', x, y)| \\ &\leq \frac{C_1}{|v - v'|} (|v'| \sigma(v) + |v| \sigma(v')) |f(v)| |t - \bar{t}| \leq \left[1 + \frac{2d}{\varepsilon}\right] C_1 \|\sigma\|_\infty |f(v)| |t - \bar{t}| \end{aligned}$$

pour  $t \in [0, T]$  et  $(t, v, v', x, y) \in \text{Supp } E_\varepsilon$ ,

$$I_1 \leq T \left[1 + \frac{2d}{\varepsilon}\right] C_1 \|\sigma\|_\infty \|f\|_1 |t - \bar{t}| \|\varphi\|, \quad (3.32)$$

où  $d := \max\{|v| : v \in \text{Supp } f\}$  et  $C_1 := \|g\|_\infty$ .

D'autre part, pour  $t$  assez proche de  $\bar{t}$  ( $t \in [\bar{t} - \varepsilon\bar{t}/d, \bar{t} + \varepsilon\bar{t}/d]$ ) et  $v \in \text{Supp } f$ , on aura

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |E_\varepsilon(t, v, v', x, y) - E_\varepsilon(\bar{t}, v, v', x, y)| dx \\ &= \chi_{\{v'+\varepsilon \leq v\}} (v - v')^{-1} \int_{\mathbb{R}} |\chi_{\{y+tv' \leq x \leq y+tv\}} - \chi_{\{y+\bar{t}v' \leq x \leq y+\bar{t}v\}}| dx \end{aligned}$$

### 3.2 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans l'espace entier 97

$$\begin{aligned}
&= \chi_{\{v'+\varepsilon \leq v\}}(v-v')^{-1} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y+tv' \leq x \leq y+tv\}} + \chi_{\{y+\bar{t}v' \leq x \leq y+\bar{t}v\}} dx \\
&\leq \frac{|t-\bar{t}|(|v|+|v'|)}{|v-v'|} \leq \left[1 + \frac{2d}{\varepsilon}\right] |t-\bar{t}|.
\end{aligned}$$

Ainsi,  $I_2$  est majoré par

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}} d\mu(v') \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y, v')| dy \int_{\mathbb{R}} |f(v)| d\mu(v) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} |E_\varepsilon(t, v, v', x, y) - E_\varepsilon(\bar{t}, v, v', x, y)| dx \\
&\leq C_2 \left[1 + \frac{2d}{\varepsilon}\right] \|f\|_1 |t-\bar{t}| \|\varphi\|, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

où  $C_2 := e^{2T\|\sigma\|_\infty} \|g\|_\infty$ . En combinant (3.32) et (3.33)

$$\|O_1^\varepsilon(t)\varphi - O_1^\varepsilon(\bar{t})\| \leq [TC_1\|\sigma\|_\infty + C_2] \left[1 + \frac{2d}{\varepsilon}\right] \|f\|_1 |t-\bar{t}| \rightarrow 0$$

quand  $t \rightarrow \bar{t}$ , ce qui achève la preuve. ■

**Remarque 3.2.4.** *L'hypothèse (3.31) est vérifiée notamment par la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . Lorsque  $\mu$  est bornée, (3.31) est équivalente à  $\mu$  diffuse, i.e.  $\mu\{v\} = 0$  pour tout  $v \in \mathbb{R}$ .*

L'hypothèse (3.31) est *optimale* comme semble l'indiquer le théorème suivant :

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive et à support compact  $V$ . On suppose que  $\mu$  n'est pas diffuse i.e.  $\mu\{\bar{v}\} \neq 0$  pour un certain  $\bar{v} \in V$ , que  $\sigma = 0$  et que*

$$K : L^1(\mathbb{R} \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V \varphi(x, v) d\mu(v).$$

*Alors il existe une suite  $t_n \rightarrow 0$  telle que  $t \mapsto R_1(t)$  n'est pas continue en norme en aucun point  $t_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).*

**Preuve.** En reprenant les notations de la preuve du Théorèmes 3.2.2, on est amené à montrer

$$\sup_{\{\varphi \in C_c(\mathbb{R} \times V) : \|\varphi\|_\infty = 1\}} \int_V \int_0^{\bar{t}} \varphi((t-s)v + s\bar{v}, v) - \varphi((\bar{t}-s)v + s\bar{v}, v) ds d\mu(v) \not\rightarrow 0$$

quand  $t \rightarrow \bar{t}$ , où  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R} \times V)$  est l'espace des fonctions continues à support compact. Pour ce faire, soit  $(\psi_n)_n \subset \mathcal{C}(V)$  (avec  $\|\psi_n\|_\infty = 1$ ) une suite convergeant ponctuellement vers  $\chi_{\{\bar{v}\}}$ . Par le théorème de convergence dominée, il s'ensuit que pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  on a

$$\int_V \int_0^{\bar{t}} \phi((t-s)v + s\bar{v})\psi_n(v) - \phi((\bar{t}-s)v + s\bar{v})\psi_n(v) ds d\mu(v) \rightarrow \bar{t}\mu\{\bar{v}\}[\phi(t\bar{v}) - \phi(\bar{t}\bar{v})]$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . D'où

$$\begin{aligned} & \sup_{\{\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R} \times V) : \|\varphi\|_\infty = 1\}} \int_V \int_0^{\bar{t}} \varphi((t-s)v + s\bar{v}, v) - \varphi((\bar{t}-s)v + s\bar{v}, v) ds d\mu(v) \\ & \geq \bar{t}\mu\{\bar{v}\} \sup_{\{\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) : \|\phi\|_\infty = 1\}} [\phi(t\bar{v}) - \phi(\bar{t}\bar{v})]. \end{aligned}$$

En choisissant une fonction  $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  telle que  $0 \leq \phi(x) \leq 1$ ,  $\phi(t\bar{v}) = 1$  et  $\phi(\bar{t}\bar{v}) = 0$ , on aura

$$\sup_{\{\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) : \|\phi\|_\infty = 1\}} \bar{t}\mu\{\bar{v}\}[\phi(t\bar{v}) - \phi(\bar{t}\bar{v})] \geq \bar{t}\mu\{\bar{v}\}$$

pour  $t \neq \bar{t}$ . ■

### 3.3 Sur les termes de la série de Dyson-Phillips dans un domaine quelconque

Dans cette section, on rappelle d'abord un résultat de continuité vrai dans des domaines  $\Omega$  *pas nécessairement convexes* et pour des noyaux *pas nécessairement homogènes* [68, Proposition 4.2, p.77]<sup>2</sup>. Ce théorème couvre le modèle continu mais ne couvre *pas* le modèle multigroupe. Pour la commodité du lecteur nous rappelons sa preuve.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^N$ . On suppose vérifiées les hypothèses (H1)-(H2). Soit  $d\mu(v) = d\gamma(\rho) \otimes d\beta(\omega)$ , où  $v = \rho\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ ,  $\beta$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{S}^{N-1}$  et  $d\gamma(\rho) = h(\rho)d\rho$  ( $h \in L^1_{loc}(0, \infty)$ ). Si*

$$t \mapsto \sigma(tv) \text{ est continue pour } v \in V, \quad (3.34)$$

*alors  $0 < t \mapsto R_2(t)$  est continue en norme.*

<sup>2</sup>Notez que la version énoncée ici diffère légèrement de l'originale : elle regroupe [68, Proposition 4.2, p. 77] et [68, Proposition 4.3, p. 77].

**Preuve.** On sait que  $R_2(t) = U * KUK * V(t)$  et par la Proposition 1.4.1 il suffit donc d'établir la continuité de  $0 \leq t \mapsto KU(t)K$ . En approchant  $K$  par des opérateurs de collision à noyaux séparables, on est amené à étudier  $K_1U(t)K_2$ , où

$$K_i\varphi(x, v) = \alpha_i(x)f_i(v) \int_V g_i(v')\varphi(x, v')d\mu(v')$$

( $i = 1, 2$ ),  $\alpha_i(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f_i(\cdot) \in L^1(V)$  et  $g_i(\cdot) \in L^\infty(V)$ . On décompose  $K_1U(t)K_2$  en  $O_1S(t)O_2$ , où

$$O_2 : L^1(\Omega \times V) \ni \psi \mapsto \alpha_2(x) \int_V \psi(x, v')g_2(v')d\mu(v') \in L^1(\Omega),$$

$$S(t) : L^1(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_V e^{-t\sigma(v)}\wp(v)\varphi(x - tv)\chi_{\{t < \tau(x, v)\}}d\mu(v) \in L^1(\Omega)$$

( $\wp = g_1f_2$ ) et

$$O_1 : L^1(\Omega) \ni \psi \mapsto f_1(v)\alpha_1(x)\psi(x) \in L^1(\Omega \times V).$$

Notre objectif maintenant est de montrer la continuité de  $0 \leq t \mapsto S(t)$ . Quitte à l'approcher par des fonctions continues à support compact, on peut supposer  $\wp$  continue à support compact inclus dans  $\{v : |v| \leq c\}$  pour un certain  $c > 0$ . Soit  $\bar{t} > 0$  fixé. On observe que l'opérateur  $S(t)$  s'exprime comme

$$\begin{aligned} S(t)\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t\sigma(v)}\varphi(x - tv)\wp(v)\chi_{\{t < \tau(x, v)\}}d\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t\sigma(v)}\varphi(x - tv)\wp(v)\chi_{\{1 < \tau(x, tv)\}}d\mu(v) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S(t)\varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x - z)\chi_{\{1 < \tau(x, z)\}}\wp\left(\frac{z}{t}\right)e^{-t\sigma\left(\frac{z}{t}\right)}d\mu_t(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x - z)\chi_{\{1 < \tau(x, z)\}}q(t, z)d\mu_t(z), \end{aligned}$$

où  $\mu_t$  est la mesure image de  $\chi_{\{v: |v| \leq c\}}\mu$  par  $z \mapsto tz$  et  $q(t, z) = e^{-t\sigma\left(\frac{z}{t}\right)}\wp\left(\frac{z}{t}\right)$ . D'où

$$\begin{aligned} \|S(t) - S(\bar{t})\| &\leq \|q(t, \cdot)\mu_t - q(\bar{t}, \cdot)\mu_{\bar{t}}\| \\ &\leq \|q\|_\infty \|\mu_t - \mu_{\bar{t}}\| + \int |q(t, z) - q(\bar{t}, z)|d\mu_{\bar{t}}(z). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Par le théorème de convergence dominée, le deuxième terme de (3.35) tend vers zéro, quand  $t \rightarrow \bar{t}$ . Regardons l'autre terme de (3.35). Pour cela, notons d'abord que  $\|\mu_t\| \leq \|\mu\| \leq \|h\|_{L^1([0,c])} \|\beta\|$  et donc  $\mu_t$  dépend linéairement et continûment de  $h \in L^1([0,c])$ , uniformément en  $t > 0$ . Ce n'est donc pas restrictif de supposer  $h$  continue à support compact. Choisissons des fonctions test  $\varphi$  à support compact, alors

$$\langle \mu_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(v) d\mu_t(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(tv) d\mu(v) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(t\rho\omega) h(\rho) d\rho d\beta(\omega).$$

D'où

$$\langle \mu_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\beta(\omega) \int_0^\infty \varphi(\tau\omega) h\left(\frac{\tau}{t}\right) \frac{d\tau}{t}$$

et

$$\langle \mu_t - \mu_{\bar{t}}, \varphi \rangle = \int \int \varphi(\tau\omega) \left[ t^{-1} h\left(\frac{\tau}{t}\right) - \bar{t}^{-1} h\left(\frac{\tau}{\bar{t}}\right) \right] d\tau d\beta(\omega).$$

Enfin, en vertu de la continuité de  $h$  on a

$$\|\mu_t - \mu_{\bar{t}}\| \leq \int_0^\infty \left| t^{-1} h\left(\frac{\tau}{t}\right) - \bar{t}^{-1} h\left(\frac{\tau}{\bar{t}}\right) \right| d\gamma \int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\beta(\omega) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \bar{t},$$

ce qui finit la preuve. ■

Dans le cas où  $d\beta = d\omega$  est la mesure de Lebesgue sur la sphère  $\mathbb{S}^{N-1}$ , on peut améliorer le théorème précédent. En effet on a

**Théorème 3.3.2.** *Supposons l'opérateur de collision régulier. Si pour tout  $v \in V$  la fonction*

$$0 < t \mapsto \sigma(x, tv) \tag{3.36}$$

*est uniformément continue en  $x \in \mathbb{R}^N$  et si  $d\mu(v) = dv$  est la mesure de Lebesgue, alors  $0 < t \mapsto R_2(t)$  est continue en norme.*

**Preuve.** En gardant les notations de la preuve du Théorème 3.3.1 et en tenant compte du fait que la fréquence de collision  $\sigma(\cdot, \cdot)$  ne soit pas homogène, on est conduit à établir la continuité de

$$S(t) : L^1(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\int_0^t \sigma(x-sv, v) ds} \varphi(x-tv) \varphi(v) \chi_{\{1 < \tau(x, tv)\}} dv \in L^1(\Omega).$$

En effectuant le changement de variables  $y = x - tv$  on peut écrire

$$t^{N-1} S(t) \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-t \int_0^1 \sigma(x-s(x-y), \frac{x-y}{t}) ds} \varphi(y) \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \chi_{\{1 < \tau(x, x-y)\}} dy.$$

Posons

$$m(t, x, z) = e^{-t \int_0^1 \sigma(x+z-sx, \frac{x}{t}) ds},$$

alors

$$t^{N-1} S(t) \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} m(t, x-y, y) \varphi(y) \wp\left(\frac{x-y}{t}\right) \chi_{\{1 < \tau(x, x-y)\}} dy.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & t^{N-1} S(t) \varphi(x) - \bar{t}^{N-1} S(\bar{t}) \varphi(x) \\ = & \int_{\mathbb{R}^N} m(t, x-y, y) \chi_{\{1 < \tau(x, x-y)\}} \left( \wp\left(\frac{x-y}{t}\right) - \wp\left(\frac{x-y}{\bar{t}}\right) \right) \varphi(y) dy \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} (m(t, x-y, y) - m(\bar{t}, x-y, y)) \chi_{\{1 < \tau(x, x-y)\}} \wp\left(\frac{x-y}{\bar{t}}\right) \varphi(y) dy \\ =: & S_1(t, \bar{t}) \varphi(x) + S_2(t, \bar{t}) \varphi(x). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} |S_1(t, \bar{t}) \varphi(x)| & \leq e^{T \|\sigma\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \wp\left(\frac{x-y}{t}\right) - \wp\left(\frac{x-y}{\bar{t}}\right) \right| |\varphi(y)| dy \\ & = e^{T \|\sigma\|_\infty} \left( |\wp\left(\frac{\cdot}{t}\right) - \wp\left(\frac{\cdot}{\bar{t}}\right)| * |\varphi(\cdot)| \right)(x). \end{aligned}$$

Quant à  $S_2(t, \bar{t}) \varphi(x)$

$$\begin{aligned} |S_2(t, \bar{t}) \varphi(x)| & \leq \int_{\mathbb{R}^N} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |m(t, x-y, z) - m(\bar{t}, x-y, z)| \wp\left(\frac{x-y}{\bar{t}}\right) |\varphi(y)| dy \\ & \leq \left( \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |m(t, \cdot, z) - m(\bar{t}, \cdot, z)| \wp\left(\frac{\cdot}{\bar{t}}\right) * |\varphi(\cdot)| \right)(x), \end{aligned}$$

soit au final

$$\|t^{N-1} S(t) - \bar{t}^{N-1} S(\bar{t})\| \leq e^{T \|\sigma\|_\infty} \left\| \wp\left(\frac{\cdot}{t}\right) - \wp\left(\frac{\cdot}{\bar{t}}\right) \right\|_1 + \left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |m(t, \cdot, z) - m(\bar{t}, \cdot, z)| \wp\left(\frac{\cdot}{\bar{t}}\right) \right\|_1.$$

En ayant à l'esprit que  $\wp(\cdot)$  est continue et à support compact, par le théorème de la convergence dominée il s'ensuit

$$\left\| \wp\left(\frac{\cdot}{t}\right) - \wp\left(\frac{\cdot}{\bar{t}}\right) \right\|_1 \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \bar{t}.$$

D'autre part, pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $\sup_{z \in \mathbb{R}^N} |m(t, x, z) - m(\bar{t}, x, z)| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \bar{t}$ , et à l'aide du théorème de la convergence dominée à nouveau on conclut que

$$\left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |m(t, \cdot, z) - m(\bar{t}, \cdot, z)| \wp\left(\frac{\cdot}{\bar{t}}\right) \right\|_1 \text{ quand } t \rightarrow \bar{t},$$

ce qui achève la preuve. ■

**Remarque 3.3.1.** *Le théorème précédent couvre, en particulier, les fréquences de collision de la forme  $\sum_{i \in I} \sigma_1^i(x) \sigma_2^i(v)$ , avec  $I \subset \mathbb{N}$  fini et  $0 < t \mapsto \sigma_1^i(tv)$  continue pour presque tout  $v \in V$ .*

**Remarque 3.3.2. (Chapitre 2 revisité)** *Soient  $1 < p < \infty$  et  $K$  un opérateur de collision régulier dans  $L^p$  (cf. Définition 2.2.1). On peut approcher  $K$  par des opérateurs possédant un noyau de la forme :*

$$k(x, v, v') = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v'),$$

où  $f_i \in L^\infty(V)$ ,  $g_i \in L^\infty(V)$  et  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$  ( $I \subset \mathbb{N}$  fini). Pour des tels opérateurs, les Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 sont vrais, et par interpolation ils sont aussi vrai dans  $L^p$ . Comme  $R_2(t)$  dépend continûment de  $K$ , on déduit que

$$0 < t \mapsto R_2(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V)) \quad (1 < p < \infty)$$

est aussi continue pour  $K$ . Ceci répond aux Questions 2.5.2 et 2.5.3 à propos de la pertinence des hypothèses de convexité de  $\Omega$  et de l'hypothèse d'homogénéité de la fréquence de collision au moins dans le cas de la mesure de Lebesgue.

### 3.4 Théorèmes d'applications spectrales

Dans cette section nous utiliserons les résultats précédents pour énoncer des théorèmes d'applications spectrales. Afin de réaliser cette tâche, nous aurons besoin d'un lemme qui montre la stabilité du spectre approché de  $T$  lorsque on perturbe celui-ci par un opérateur de collision vérifiant **(H1)**-**(H2)**.

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $p = 1$ . On suppose que la mesure  $\mu$  vérifie*

$$\int_D e^{iz \cdot v} d\mu(v) \rightarrow 0 \text{ quand } |z| \rightarrow \infty \quad (3.37)$$

pour tout borélien  $D \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\mu(D) < \infty$  et que les hypothèses **(H1)**-**(H2)** sont satisfaites. Alors

$$\sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(T + K).$$

**Preuve.** La preuve est identique à celle du Lemme 2.4.3. ■

On est en mesure de donner le résultat principal dans l'espace entier.

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . On suppose l'opérateur de collision  $K$  homogène en espace et l'hypothèse **(H3)** vérifiée.*

**(a)** *Soit  $N \geq 2$ . Si (3.4) est satisfaite, alors*

$$\begin{aligned} & \sigma(V(t)) \cap \{ \eta : |\eta| < e^{t\lambda^{**}} \text{ ou } |\eta| > e^{-t\lambda^*} \} \\ = & e^{t\sigma(T+K)} \cap \{ e^{-t\lambda} : \operatorname{Re} \lambda < -\lambda^{**} \text{ ou } \operatorname{Re} \lambda > -\lambda^* \}, \end{aligned}$$

où  $\lambda^* = \text{ess inf } \sigma(\cdot)$  et  $\lambda^{**} = \text{ess sup } \sigma(\cdot)$ . De plus, si (3.37) est satisfaite et si l'image essentielle de  $\sigma(\cdot)$  est connexe, alors

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)}.$$

(b) Si  $N = 1$  et si  $\mu$  vérifie (3.31), alors

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)}.$$

**Preuve.** Par le Théorème 1.4.6 on a  $\omega_{crit}(T) = \omega_{crit}(T + K)$ , en utilisant le Théorème 1.5.1 on obtient  $\omega_{crit}(T) = -\lambda^*$ . C'est à dire que le spectre critique est contenu dans le disque  $D(0, e^{-\lambda^*t})$  et donc

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \text{Re}\lambda > -\lambda^*\}. \quad (3.38)$$

D'autre part, on sait que lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , le semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  peut être étendu en un  $C_0$ -groupe avec

$$U(-t) : \varphi \mapsto e^{t\sigma(v)}\varphi(x + tv) \quad t \geq 0$$

de générateur  $-T$  et de type  $\lambda^{**}$ . On peut également étendre  $(V(t))_{t \geq 0}$  en un groupe avec  $(V(-t))_{t \geq 0}$  engendré par  $-T - K$  et représentable à l'aide d'une série de Dyson-Phillips relativement à  $(V(-t))_{t \geq 0}$ . On peut montrer, avec une preuve similaire à celle du Théorème 3.2.1 qu'un certain reste de la série en question dépend continûment (en norme) de  $t$  et ainsi récupérer

$$\omega_{crit}(-T - K) = \omega_{crit}(-T) = \lambda^{**}$$

et

$$\sigma(V(-t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{t\lambda^{**}}\} = e^{t\sigma(-T-K)} \cap \{e^{t\lambda} : \text{Re}\lambda > \lambda^{**}\}.$$

D'autre part,  $\eta \in \sigma(V(-t))$  si et seulement si  $\eta^{-1} \in \sigma(V(t))$ , d'où

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| < e^{-t\lambda^{**}}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \text{Re}\lambda < -\lambda^{**}\}$$

qui complète (3.38). Si l'image essentielle de  $\sigma$  est connexe, alors en vertu du Théorème 1.5.4, la bande  $\{\lambda : -\lambda^{**} \leq \text{Re}\lambda \leq -\lambda^*\} \subset \sigma_{ap}(T)$ . Or sous l'hypothèse (3.37) le spectre approché de  $T$  est stable (cf. Lemme 3.4.1). L'inclusion  $e^{t\sigma(T+K)} \subset \sigma(V(t))$  fournit alors

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : e^{-t\lambda^{**}} \leq |\eta| \leq e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{\lambda : -\lambda^{**} \leq \text{Re}\lambda \leq -\lambda^*\}$$

et finit la preuve de (a). Montrons (b). Comme  $0 < t \mapsto R_1(t)$  est continue en norme (Théorème 3.2.3), le Théorème 1.4.6 entraîne que

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t)) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Ceci combiné avec le Théorème 1.5.4 et le Lemme 3.4.1 donne

$$\sigma_{crit}(V(t)) \subset e^{t\sigma(T+K)},$$

ce qui achève la preuve. ■



**Remarque 3.4.1.** On peut montrer en utilisant le Théorème 3.3.1 que dans le cas particulier où la mesure  $d\mu(v) = dv$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^N$ , le point (b) du théorème précédent reste vrai même pour des opérateurs dépendant de  $x$ .

Afin de s'attaquer aux domaines quelconques, on aura besoin du

**Lemme 3.4.2.** Soit  $d\mu(v) = d\gamma(\rho) \otimes d\beta(\omega)$ , où  $v = \rho\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ ,  $\gamma$  est une mesure de Radon sur  $(0, \infty)$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et  $\beta$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{S}^{N-1}$  telle que

$$\beta\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : \omega \cdot \omega_0 = 0\} = 0 \quad \text{pour tout } \omega_0 \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

Alors  $\mu$  vérifie (3.37).

**Preuve.** Admettons, momentanément, que les hypothèses du lemme entraînent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\omega_0 \in \mathbb{S}^{N-1}} \beta\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : |\omega \cdot \omega_0| \leq \varepsilon\} = 0. \quad (3.39)$$

Nous avons à montrer

$$\int_D e^{iz \cdot v} d\mu(v) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |z| \rightarrow \infty$$

pour tout borélien  $D \subset \mathbb{R}^N$  avec  $\mu\{D\} < \infty$ , ou d'une manière équivalente

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(v) e^{iz \cdot v} d\mu(v) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |z| \rightarrow \infty$$

pour tout  $h \in L^1(\mathbb{R}^N; \mu)$ . Comme l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans  $L^1(\mathbb{R}^N, \mu)$  on peut supposer  $h$  continue et a un support, disons, inclus dans la boule de centre 0 et de rayon  $R$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(v) e^{iz \cdot v} d\mu(v) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\beta(\omega) \int_0^R h(\rho, \omega) e^{i\rho z \cdot \omega} d\gamma(\rho) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} d\beta(\omega) \int_0^R h(\rho, \omega) e^{i\rho |z| |\omega' \cdot \omega|} d\gamma(\rho) \\ &= \int_{\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : |\omega' \cdot \omega| \leq \varepsilon\}} d\beta(\omega) \int_0^R h(\rho, \omega) e^{i\rho |z| |\omega' \cdot \omega|} d\gamma(\rho) \\ &\quad + \int_{\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : |\omega' \cdot \omega| > \varepsilon\}} d\beta(\omega) \int_0^R h(\rho, \omega) e^{i\rho |z| |\omega' \cdot \omega|} d\gamma(\rho) \end{aligned}$$

$$=: I_1 + I_2,$$

où  $v = \rho\omega$  et  $z = |z|\omega'$ . Il est facile de voir, à partir de (3.39), que  $I_1$  est arbitrairement petit pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Fixons  $\varepsilon$  assez petit et regardons le second terme. Comme  $h$  est continue et  $\gamma$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$\int_0^R h(\rho, \omega) e^{i\rho|z|\omega' \cdot \omega} d\gamma(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |z| \rightarrow \infty$$

uniformément en  $\omega$  et  $\omega'$  tels que  $|\omega \cdot \omega'| > \varepsilon$  de sorte que  $I_2 \rightarrow 0$  quand  $|z| \rightarrow \infty$ . Il nous reste à établir (3.39). Supposons qu'elle soit fautive, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 \text{ et } \omega_\varepsilon \in \mathbb{S}^{N-1} \text{ tel que } \beta\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : |\omega \cdot \omega_\varepsilon| \leq \varepsilon\} > \eta.$$

Alors il existe  $\omega_0 \in \mathbb{S}^{N-1}$  tel que  $\omega_\varepsilon \rightarrow \omega_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (en sous-suite). Notons aussi

$$|\omega \cdot \omega_\varepsilon| \leq \varepsilon \Rightarrow |\omega \cdot \omega_0| \leq \varepsilon + |\omega_\varepsilon - \omega_0|$$

ce qui implique

$$\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : |\omega \cdot \omega_0| \leq \varepsilon + |\omega_\varepsilon - \omega_0|\} \supset \{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : |\omega \cdot \omega_\varepsilon| \leq \varepsilon\}$$

si bien que

$$\beta\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : |\omega \cdot \omega_0| \leq \varepsilon + |\omega_\varepsilon - \omega_0|\} \geq \eta \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

et enfin

$$\beta\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : \omega \cdot \omega_0 = 0\} \geq \eta$$

ce qui contredit l'hypothèse du lemme. ■

**Remarque 3.4.2.** *Comme sous-produit de la preuve précédente, le Lemme 3.4.2 reste vrai si on suppose que*

$$\int_D e^{iz\rho} d\gamma(\rho) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |z| \rightarrow \infty$$

pour tout borélien  $D \subset \mathbb{R}$  de mesure finie  $\gamma(D) < \infty$ .

Nous pouvons énoncer à présent le théorème d'application spectrale dans des domaines quelconques.

**Théorème 3.4.2.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert régulier. Soit  $d\mu(v) = d\gamma(\rho) \otimes d\beta(\omega)$  avec  $\gamma$  une mesure de Radon sur  $(0, \infty)$  absolument continue relativement à la mesure de Lebesgue et  $\beta$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{S}^{N-1}$ . On suppose que les hypothèses **(H1)**-**(H2)** sont vérifiées et que  $0 < t \mapsto \sigma(tv)$  est continue pour tout  $v$ . Alors*

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}. \quad (3.40)$$

De plus, si  $\beta$  est telle que  $\beta\{\omega \in \mathbb{S}^{N-1} : \omega \cdot \omega_0 = 0\} = 0$  pour tout  $\omega_0 \in \mathbb{S}^{N-1}$  et si  $\Omega$  est un domaine extérieur ou est inclus dans un demi-espace, alors

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)} \cup \{0\}.$$

**Preuve.** Comme dans la preuve du Théorème 3.4.1, l'usage des Théorèmes 1.4.5, 3.3.1 et 1.5.1 fournit (3.40). D'autre part, si  $\Omega$  est inclus dans un demi-espace, par le Théorème 1.5.2 et Lemme 3.4.1, on obtient

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -\lambda^*\} \subset \sigma_{ap}(T + K),$$

ce qui par l'inclusion  $e^{t\sigma_{ap}(T+K)} \subset \sigma_{ap}(V(t))$  fournit

$$\{\mu : |\mu| \leq e^{-t\lambda^*}\} \subset \sigma(V(t))$$

qui complète (3.40). Si  $\Omega$  est un domaine extérieur, on opère de la même manière en utilisant à la place du Théorème 1.5.2, le Théorème 1.5.3. ■

**Remarque 3.4.3.** *Avec les mêmes arguments précédents, on peut montrer que sous les hypothèses du Théorème 3.3.2<sup>3</sup>, le théorème d'application spectrale partielle suivant*

$$\sigma(V(t)) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}$$

a lieu. Si de plus,  $\Omega$  est inclus dans un demi-espace et  $\sigma(x, -v) = \sigma(x, v)$ , alors

$$\sigma(V(t)) = e^{t\sigma(T+K)} \cup \{0\}.$$

**Remarque 3.4.4.** *Dans le cas où  $\Omega$  est un convexe (donc, en particulier, inclus dans un demi-espace), l'hypothèse de parité  $\sigma(v) = \sigma(-v)$  imposée dans le cas  $p = 1$  mais pas pour  $1 < p < \infty$  peut susciter des interrogations. En effet, comme il apparaît dans la preuve, pour établir l'inclusion*

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\} \subset \sigma(T + K)$$

on utilise le fait que  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\}$  soit du spectre approché de  $T$ , ce que l'on sait montrer que sous l'hypothèse de parité  $\sigma(-v) = \sigma(v)$  (Théorème 1.5.2). Pour  $1 < p < \infty$  la parade consistait à passer au dual ce qui n'opère pas pour  $p = 1$ .

<sup>3</sup>Il s'agit du théorème qui traite les fréquences de collision non nécessairement homogènes!

Dans les domaines bornés, les théorèmes d'applications spectrales découlent de la compacité des restes de la série de Dyson-Phillips. Cette compacité s'obtient sous l'hypothèse que l'opérateur de collision est "faiblement compact par rapport aux vitesses", avec une faible compacité "collective" relativement à la variable d'espace [59, 71]. Ceci suggère la

**Question 3.4.1.** *Peut-on remplacer dans (H1)-(H2) la compacité en vitesses de l'opérateur de collision par la compacité faible en vitesses ?*



---

*Deuxième partie*

Approche résolvente pour la  
stabilité des spectres essentiel et  
critique des  $C_0$ -semigroupes  
perturbés dans les espaces de  
Hilbert et applications à la  
neutronique



# Chapitre 4

## Approche résolvente pour les spectres essentiel et critique

### 4.1 Introduction

Soient  $T$  un générateur d'un  $C_0$ -semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  dans un espace de Banach  $X$  et  $K \in \mathcal{L}(X)$ . Soit  $(V(t))_{t \geq 0}$  le  $C_0$ -semigroupe engendré par  $T + K$ . Il est donné par la série de Dyson-Phillips

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t), \quad (4.1)$$

où

$$U_0(t) = U(t) \text{ et } U_{j+1}(t) = \int_0^t U_j(t-s)KU_0(s)ds \quad (j \geq 0).$$

Comme nous l'avons mentionné au Chapitre 1,

$$\text{la compacité de } U_k(t) \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (4.2)$$

entraîne la stabilité du *spectre essentiel*, i.e.  $\sigma_{ess}(V(t)) = \sigma_{ess}(U(t))$ , si  $k = 1$ , et la stabilité du *type essentiel*, i.e.  $\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T)$ , si  $k \geq 1$  (voir Théorème 1.4.3). Parallèlement,

$$\text{la continuité de } 0 < t \mapsto U_k(t) \quad (4.3)$$

assure la stabilité du *spectre critique*, i.e.  $\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t))$ , lorsque  $k = 1$ , et la stabilité du *type critique*,  $\omega_{crit}(T + K) = \omega_{crit}(T)$ , lorsque  $k \geq 1$  (Théorèmes 1.4.5 et 1.4.6). D'autre part, (4.2) et (4.3) sont reliées par le résultat suivant de S. BRENDLE :



**Théorème 4.1.1.** [19, Theorem 3.2] Soient  $\nu > \omega_0(T)$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

- $U_k(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$ .
- $0 < t \mapsto U_k(t)$  est continue en norme, et  $R(\nu + i\gamma, T)(KR(\nu + i\gamma, T))^k$  est compact pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Un problème naturel et intéressant qui se dégage alors, est de trouver des conditions, en termes des *résolvantes des générateurs*, garantissant la continuité en norme de  $0 < t \mapsto U_k(t)$ . Lorsque l'espace ambiant est un espace de Hilbert, des conditions suffisantes ont été données par S. BRENDLE :

**Théorème 4.1.2.** [19, Theorem 3.1] Supposons  $X$  un espace de Hilbert. Soient  $\nu > \omega_0(T)$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Si

$$\|R(\nu + i\gamma, T)(KR(\nu + i\gamma, T))^k\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

alors  $0 \leq t \mapsto U_{k+2}(t)$  est continue en norme.

On signale au passage qu'une hypothèse du type (4.4) combinée avec la compacité d'une certaine puissance de  $R(\lambda, T)K$  a permis à D. SONG [91], par l'intermédiaire des résultats théoriques de L. GEARHART [33], d'estimer le type essentiel de  $(V(t))_{t \geq 0} : \omega_{ess}(T + K) \leq \omega_0(T)$ . Résultat appliqué par K. LATRACH ET B. LODS [54] pour l'étude du semigroupe associé à l'équation de transport monodimensionnelle dans une bande avec conditions aux limites abstraites (opérateurs frontière), où la discussion de la compacité (4.2) est particulièrement difficile en raison du caractère non explicite du semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$ .

Il est clair que le Théorème 4.1.2 ne permet pas d'accéder<sup>1</sup> à la continuité en norme de  $0 < t \mapsto U_1(t)$ . Dans [113], Q.C. ZHANG ET F.L. HUANG caractérisent la continuité en norme de  $0 \leq t \mapsto V(t) - U(t)$  (ce qui est équivalent à la continuité en norme de  $0 \leq t \mapsto U_1(t)$  d'après le Théorème 1.4.9) :

**Théorème 4.1.3.** [113] Soit  $X$  un espace de Hilbert séparable. Soit  $\nu > \omega_0(T)$ . Alors  $0 \leq t \mapsto V(t) - U(t)$  est continue en norme si et seulement si

$$\begin{aligned} & \|R(\nu + i\gamma, T)KR(\nu + i\gamma, T)\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty, \quad (4.5) \\ & \sup_{\|x\| \leq 1} \int_A^\infty \left[ \|R(\nu \pm i\gamma, T)KR(\nu \pm i\gamma, T)x\|^2 \right. \\ & \left. + \|R(\nu \pm i\gamma, T^*)K^*R(\nu \pm i\gamma, T^*)x\|^2 \right] d\gamma \rightarrow 0 \text{ quand } A \rightarrow \infty. \quad (4.6) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Le théorème ne permet pas aussi d'accéder à la continuité de  $0 \leq t \mapsto U_2(t)$  (voir la Remarque 4.2.4).

Pour une généralisation de ce résultat à un cadre non perturbatif, on renvoie le lecteur à [57]. La condition (4.6), sous forme intégrale, n'est pas facile à vérifier en pratique. Toutefois, dans le même papier ([113]) il est mentionné le résultat suivant, dû à J. G. PENG *et al*, qui examine directement la compacité de  $V(t) - U(t)$ .

**Théorème 4.1.4.** [80] *Soit  $X$  un espace de Hilbert séparable. Si*

$$R(\lambda, T)KR(\lambda, T) \text{ est compact pour } \lambda \in \rho(T)$$

*et si*

$$\|R(\nu + i\gamma, T)^2 K\| + \|R(\nu + i\gamma, T)KR(\nu + i\gamma, T)\| + \|KR(\nu + i\gamma, T)^2\| \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

*quand  $|\gamma| \rightarrow +\infty$ , alors  $V(t) - U(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$ .*

On donne, dans la première partie de ce chapitre, des conditions suffisantes entraînant la continuité en norme de  $0 \leq t \mapsto U_1(t)$ . Plus précisément, on montre dans le Lemme 4.2.1 que si pour un certain  $m \in \mathbb{N}^*$  et un certain  $\nu > \omega_0(T)$

$$(\mathbf{H}_m) \quad \sum_{i=0}^m \|R(\nu + i\gamma, T)^i KR(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty,$$

alors  $0 \leq t \mapsto U_1(t)$  est continue en norme. Pour prouver ce résultat nous adaptons les techniques contenues dans le papier de S. BRENDLE [19]. Notons que  $(\mathbf{H}_2)$  ( $m = 2$ ) correspond à (4.7). Motivé par certaines équations cinétiques faisant intervenir des opérateurs frontières [60], nous reformulons dans le Corollaire 4.2.1 la condition  $(\mathbf{H}_1)$  sous une autre forme équivalente lorsque  $T$  est *dissipatif*, plus exactement :

$$\|K^*R(\nu + i\gamma, T)K\| + \|KR(\nu + i\gamma, T)K^*\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty.$$

Nous dérivons à partir des résultats précédents des résultats de stabilité des spectres essentiel et critique de  $(U(t))_{t \geq 0}$ . Dans la deuxième partie du chapitre, nous montrons comment les résultats abstraits obtenus permettent d'étudier la stabilité du spectre essentiel et critique du semigroupe d'absorption (semigroupe de transport sans collision) lorsqu'on le perturbe par l'opérateur de collision

$$K : L^2(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V k(x, v, v') d\mu(v') \in L^2(\Omega \times V).$$

Dans un premier temps, on *isole* une classe générale et *optimale* de mesures  $\mu$  et d'opérateurs de collision  $K$  assurant la condition  $(\mathbf{H}_1)$ . Ensuite, nous montrons que lorsque le domaine  $\Omega$  est borné on a

$$\sigma_{ess}(V(t)) = \sigma_{ess}(U(t)) \quad (\forall t \geq 0).$$

Ce résultat a été auparavant établi par M. MOKHTAR-KHARROUBI [70] en examinant *directement* la compacité de  $e^{t(T+K)} - e^{tT}$ . Nous reprenons des questions laissées en suspens dans le Chapitre 2 et nous montrons

$$\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t)) \quad (\forall t \geq 0) \quad (4.8)$$

d'une manière plus simple (que celle utilisée dans la Section 2.3) et sous des conditions plus générales. Nous finirons cette partie transport par quelques extensions.

## 4.2 Résultats abstraits dans un espace de Hilbert

A partir de maintenant, on se place dans le cas où  $X$  est un espace de Hilbert et on le note à l'occasion par  $H$ .

### 4.2.1 Continuité en norme de $0 \leq t \mapsto U_1(t)$

Le premier résultat de cette section est fourni par le lemme fondamental suivant :

**Lemme 4.2.1.** *Supposons qu'il existe  $\nu > \omega_0(T)$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  tels que*

$$(H_m) \quad \sum_{i=0}^m \|R(\nu + i\gamma, T)^i K R(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty.$$

*Alors  $0 \leq t \mapsto U_1(t)$  est continue en norme.*

Comme première conséquence de ce lemme on a le résultat de *stabilité du spectre critique*.

**Théorème 4.2.1.** *Supposons qu'il existe  $\nu > \omega_0(T)$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  tels que*

$$\|R(\nu + i\gamma, T)^i K R(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty \text{ pour } i = 0, 1, \dots, m.$$

*Alors  $\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t))$  pour  $t \geq 0$ .*

**Preuve.** On sait, d'après le Théorème 1.4.9, que  $0 < t \mapsto V(t) - U(t)$  est continue en norme si et seulement si  $0 < t \mapsto U_1(t)$  l'est aussi, et donc par le Lemme 4.2.1,  $0 < t \mapsto V(t) - U(t)$  est continue. Or deux semigroupes dont la différence est continue en norme ont le même spectre critique (cf. Théorème 1.4.6). ■

Une deuxième conséquence concerne la *stabilité du spectre essentiel*. En effet :

**Théorème 4.2.2.** *Supposons qu'il existe  $\nu > \omega_0(T)$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  tels que*

- $\|R(\nu + i\gamma, T)^i KR(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\| \rightarrow 0$  quand  $|\gamma| \rightarrow \infty$  pour  $i = 0, 1, \dots, m$ .
- $R(\nu + i\gamma, T)KR(\nu + i\gamma, T)$  est compact pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

*Alors  $V(t) - U(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$ . En particulier,  $\sigma_{\text{ess}}(V(t)) = \sigma_{\text{ess}}(U(t))$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Preuve.** D'après le Théorème 1.4.9,  $V(t) - U(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$  si et seulement si  $U_1(t)$  l'est. D'autre part  $U_1(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$  si et seulement si  $R(\nu + i\gamma, T)KR(\nu + i\gamma, T)$  est compact (pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ ) et  $0 < t \mapsto U_1(t)$  est continue en norme. Alors le corollaire est une conséquence immédiate du Lemme 4.2.1 et du fait (bien connu) que deux opérateurs bornés dont la différence est compacte ont le même spectre essentiel. ■

La preuve du Lemme 4.2.1 est une adaptation de [19]. Avant de la faire, donnons quelques ingrédients qui nous seront utiles par la suite. D'abord rappelons le

**Lemme 4.2.2.** [100] *Pour tout  $t, s \geq 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  on a l'identité*

$$U_p(t+s) = \sum_{j=0}^p U_j(t)U_{p-j}(s).$$

A l'aide de ce lemme on peut définir un nouveau  $C_0$ -semigroupe dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} := H \times H$ . Soit

$$\mathcal{U}(t) := \begin{pmatrix} U_0(t) & U_1(t) \\ 0 & U_0(t) \end{pmatrix}$$

pour tout  $t \geq 0$ , alors  $(\mathcal{U}(t))_{t \geq 0}$  est un  $C_0$ -semigroupe de générateur

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T & K \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

et de domaine  $D(\mathcal{T}) = D(T) \times D(T)$ . La résolvante de  $\mathcal{T}$  est donnée par

$$R(\lambda, \mathcal{T}) = \begin{pmatrix} R(\lambda, T) & R(\lambda, T)KR(\lambda, T) \\ 0 & R(\lambda, T) \end{pmatrix}$$

pour  $\text{Re}\lambda > \omega_0(T)$  (cf. [19]).

Le lemme qui suit fournit une représentation de  $U_1(t)$  en terme de la résolvante, il contient la pièce essentielle de la preuve du Lemme 4.2.1.

**Lemme 4.2.3.** *Soit  $\nu > \omega_0(T)$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in H$ ,*

$$U_1(t)x = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{n!}{2t^n \pi} \int_{-A}^A e^{(\nu+i\gamma)t} \sum_{i=0}^n R(\nu + i\gamma, T)^{i+1} KR(\nu + i\gamma, T)^{n-i+1} x d\gamma$$

*uniformément en  $t \in [\delta, +\infty[$  pour tout  $\delta > 0$ .*

**Preuve.** Par le [110, Theorem 1.1], pour tout  $\kappa \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{U}(t)\kappa = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{n!}{2t^n \pi} \int_{-A}^A e^{(\nu+i\gamma)t} R(\nu+i\gamma, T)^{n+1} \kappa d\gamma$$

uniformément en  $t \in [\delta, +\infty[$  pour tout  $\delta > 0$ . Le résultat découle alors par l'analyse des composantes de  $\mathcal{U}(t)\kappa$  et  $R(\nu+i\gamma, T)^{n+1}\kappa$ . ■

Nous avons à présent tous les outils pour montrer le Lemme 4.2.1 :

**Preuve du Lemme 4.2.1.** Soient  $\nu > \omega_0(T)$  et  $U_1^A(t)$  l'opérateur défini par :

$$U_1^A(t)x = \frac{m!}{2t^m \pi} \int_{-A}^A e^{(\nu+i\gamma)t} \sum_{i=0}^m R(\nu+i\gamma, T)^{i+1} K R(\nu+i\gamma, T)^{m-i+1} x d\gamma,$$

pour tout  $x \in H$ . Nous allons prouver que

$$\|U_1(t) - U_1^A(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } A \rightarrow +\infty \quad (4.9)$$

uniformément en  $t \in [\delta, +\infty[$  ( $\delta > 0$ ) et que, pour chaque  $A > 0$ ,

$$0 < t \mapsto U_1^A(t) \in \mathcal{L}(H) \quad (4.10)$$

est continue en norme. Commençons par (4.9). Grâce au Lemme 4.2.3 on a

$$(U_1(t) - U_1^A(t))x = \frac{m!}{2t^m \pi} \int_{|\gamma|>A} e^{(\nu+i\gamma)t} \sum_{i=0}^m R(\nu+i\gamma, T)^{i+1} K R(\nu+i\gamma, T)^{m-i+1} x d\gamma.$$

Soient  $x, x^* \in H$ , en utilisant l'inégalité du Cauchy-Schwartz et le théorème de Plancherel [40, Lemma 2], on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{2t^m \pi}{m!} |\langle (U_1(t) - U_1^A(t))x, x^* \rangle| \\ & \leq \int_{|\gamma|>A} \sum_{i=0}^m |\langle R(\nu+i\gamma, T)^{i+1} K R(\nu+i\gamma, T)^{m-i+1} x, x^* \rangle| d\gamma \\ & \leq \int_{|\gamma|>A} \sum_{i=0}^m |\langle R(\nu+i\gamma, T)^i K R(\nu+i\gamma, T)^{m-i} R(\nu+i\gamma, T)x, R(\nu-i\gamma, T^*)x^* \rangle| d\gamma \\ & \leq \sum_{i=0}^m \sup_{|\gamma|>A} \|R(\nu+i\gamma, T)^i K R(\nu+i\gamma, T)^{m-i}\| \\ & \quad \times \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\nu+i\gamma, T)x\|^2 d\gamma \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\nu-i\gamma, T^*)x^*\|^2 d\gamma \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^m \sup_{|\gamma|>A} \|R(\nu + i\gamma, T)^i K R(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\| \\
&\quad \times \left[ \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2\nu s} \|U(s)x\|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-2\nu s} \|U^*(s)x^*\|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\pi C \sum_{i=0}^m \sup_{|\gamma|>A} \|R(\nu + i\gamma, T)^i K R(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\| \|x\| \|x^*\|,
\end{aligned}$$

où  $C$  est une constante positive. D'où

$$\|U_1(t) - U_1^A(t)\| \leq \frac{Cm!}{t^m} \sum_{i=0}^m \sup_{|\gamma|>A} \|R(\nu + i\gamma, T)^i K R(\nu + i\gamma, T)^{m-i}\|$$

qui, par hypothèses, converge vers zéro quand  $A$  tend vers l'infini uniformément en  $t \in [\delta, +\infty[$ . Il reste à prouver (4.10). Pour cela, fixons un  $t > 0$ . On a

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{2\pi(t+h)^m}{m!} U_1^A(t+h) - \frac{2\pi t^m}{m!} U_1^A(t) \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^m \sup_{|\gamma|\leq A} \|R(\nu + i\gamma, T)^{i+1} K R(\nu + i\gamma, T)^{m-i+1}\| \int_{-A}^A |e^{(\nu+i\gamma)(t+h)} - e^{(\nu+i\gamma)t}| d\gamma.
\end{aligned}$$

Finalement, on voit facilement que le dernier terme tend vers zéro quand  $h$  tend vers zéro, ce qui achève la preuve.  $\blacksquare$

**Remarque 4.2.1.** *La technique que nous avons utilisée dans la preuve du Lemme 4.2.1, et qui est aussi à la base du Théorème 4.1.2 de S. BRENDLE est due à O. EL-MENNAOUI ET K.-J. ENGEL [31] qu'ils l'ont utilisée pour simplifier la preuve du résultat de P.YOU [111], caractérisant la continuité en norme d'un semigroupe en terme de la résolvante de son générateur.*

**Remarque 4.2.2.** *Lorsque  $m = 2$ , le Théorème 4.2.2 coïncide avec le Théorème 4.1.4.*

Lorsque  $T$  est *dissipatif* on peut reformuler ( $\mathbf{H}_1$ ) sous une forme plus maniable dans certains cas (cf. Section 4.3.2 et [60]). Soit  $\nu > 0$ . Le lemme suivant montre que, sous la *dissipativité* de  $T$ , on peut contrôler le comportement asymptotique de  $\|R(\nu + i\gamma, T)K\|$  le long de l'axe  $Re\lambda = \nu$  par celui de  $\|K^*R(\nu + i\gamma, T)K\|$ , et aussi le comportement de  $\|KR(\nu + i\gamma, T)\|$  par celui de  $\|KR(\nu + i\gamma, T)K^*\|$ .

**Lemme 4.2.4.** *On suppose  $T$  dissipatif. Alors pour  $\nu > 0$  on a*

$$\sqrt{\nu} \|R(\nu + i\gamma, T)K\| \leq \sqrt{\|K^*R(\nu + i\gamma, T)K\|} \quad (4.11)$$

et

$$\sqrt{\nu} \|KR(\nu + i\gamma, T)\| \leq \sqrt{\|KR(\nu + i\gamma, T)K^*\|}. \quad (4.12)$$

**Preuve.** Comme  $T$  est dissipatif,

$$\begin{aligned} |\langle (\lambda - T)y, y \rangle| &\geq \operatorname{Re} \langle (\lambda - T)y, y \rangle \\ &\geq \operatorname{Re} \lambda \|y\|^2 \end{aligned}$$

pour tout  $y \in D(T)$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $H$ . En particulier, pour  $y = R(\nu + i\gamma, T)Kx$  avec  $x \in H$

$$\begin{aligned} \nu \|R(\nu + i\gamma, T)Kx\|^2 &\leq |\langle Kx, R(\nu + i\gamma, T)Kx \rangle| \\ &= |\langle x, K^*R(\nu + i\gamma, T)Kx \rangle| \\ &\leq \|K^*R(\nu + i\gamma, T)K\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

ce qui prouve (4.11). L'inégalité (4.12) se montre par dualité. En effet, comme  $T$  est dissipatif,  $T^*$  l'est aussi, et par (4.11) on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu} \|KR(\nu + i\gamma, T)\| &= \sqrt{\nu} \|R(\nu - i\gamma, T^*)K^*\| \\ &\leq \sqrt{\|KR(\nu - i\gamma, T^*)K^*\|} \\ &= \sqrt{\|KR(\nu + i\gamma, T)K^*\|}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■

Compte tenu de (4.11) et (4.12), le Lemme 4.2.1 implique le

**Corollaire 4.2.1.** *On suppose que  $T$  est dissipatif et que pour un certain  $\nu > 0$*

$$\|K^*R(\nu + i\gamma, T)K\| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|KR(\nu + i\gamma, T)K^*\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\gamma| \rightarrow \infty,$$

*alors  $0 < t \mapsto U_1(t)$  est continue en norme.*

**Remarque 4.2.3.** *A dire vrai, le Lemme 4.2.4 reste vrai si on suppose que  $T$  est une somme d'un opérateur dissipatif et d'un opérateur borné  $B$ . Dans ce cas, on montre que pour  $\nu > \|B\|$ ,  $\sqrt{(\nu - \|B\|)} \|R(\nu + i\gamma, T)K\| \leq \|K^*R(\nu + i\gamma, T)K\|$  et  $\sqrt{(\nu - \|B\|)} \|KR(\nu + i\gamma, T)\| \leq \sqrt{\|KR(\nu + i\gamma, T)K^*\|}$ . Bien entendu un corollaire analogue au Corollaire 4.2.1 peut en être dérivé.*

**Remarque 4.2.4.** *Le Théorème 4.1.2 ne permet pas aussi de conclure à la continuité de  $0 \leq t \mapsto U_2(t)$ . Mais en sachant [19, Proposition 2.3]*

$$U_2(t)x = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A R(\nu + i\gamma, T)KR(\nu + i\gamma, T)KR(\nu + i\gamma, T)xd\gamma$$

*pour tout  $x \in D(T)$  et en opérant comme lors de la preuve du Lemme 4.2.1, on peut facilement établir que si pour un certain  $\nu > \omega_0(T)$ ,*

$$\|KR(\nu + i\gamma, T)K\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\gamma| \rightarrow \infty,$$

*alors  $0 \leq t \mapsto U_2(t)$  est continue en norme.*

### 4.3 Application au transport neutronique

Cette section est dédiée à l'application des résultats théoriques obtenus précédemment à l'étude des équations cinétiques. Rappelons brièvement le cadre de notre problème. Considérons l'opérateur du Transport

$$T\varphi + K\varphi = -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x, v)\varphi(x, v) + \int_V k(x, v, v')\varphi(x, v) d\mu(v'), \quad (4.13)$$

où  $T$  est l'opérateur d'absorption de domaine

$$D(T) = \{\varphi \in L^p(\Omega \times V) : v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V), \varphi|_{\Gamma_-} = 0\}$$

avec

$$\Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V : v \text{ entrant en } x \in \partial\Omega\},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  est un ouvert régulier,  $V \subset \mathbb{R}^N$  est le support d'une mesure de Radon positive  $\mu$  et  $K$  (la partie intégrale dans (4.13)) est l'opérateur de collision. Comme dans le Chapitre 2, on suppose  $K$  régulier. Cet opérateur est alors approchable (cf. Lemme 2.2.1) dans  $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$  par des opérateurs de collision possédant un noyau de la forme

$$k(x, v, v') = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v'), \quad (4.14)$$

avec  $f_i \in L^p(V)$ ,  $g_i \in L^{p'}(V)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ) et  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$  ( $I$  fini).

Afin d'appliquer les résultats de la section précédente, on commence par un lemme *fondamental* précisant sous quelles conditions est réalisée l'hypothèse **(H<sub>1</sub>)**.

**Lemme 4.3.1.** *Soient  $p = 2$  et  $\Omega$  convexe. On suppose que l'opérateur de collision est régulier, la mesure  $\mu$  ne charge pas les hyperplans affines et que la fréquence de collision  $\sigma(\cdot, \cdot)$  est homogène (i.e.  $\sigma(x, v) = \sigma(v)$ ). Alors pour tout  $\nu > \omega_0(T)$*

$$\|KR(\nu + i\gamma, T)\| \rightarrow 0 \text{ et } \|R(\nu + i\gamma, T)K\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty.$$

Au cours de la preuve nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.3.2.** **[68, Lemma 3.3, p. 39]** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$  finie et ne chargeant pas les hyperplans affines. Alors*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{(e, e_1) \in \mathbb{S}^N} \mu\{v \in \mathbb{R}^N : |v \cdot e + e_1| \leq \varepsilon\} = 0,$$

où  $e \in \mathbb{R}^N$ ,  $e_1 \in \mathbb{R}$  et  $\mathbb{S}^N$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^{N+1}$ .



**Preuve du Lemme 4.3.1.** Comme les opérateurs  $R(\nu + i\gamma, T)K$  et  $KR(\nu + i\gamma, T)$  dépendent continûment de  $K \in \mathcal{L}(L^2(\Omega \times V))$  et ce *uniformément en*  $\gamma \in \mathbb{R}$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $K$  a un noyau  $k(x, v, v') = \sum_{i \in I} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v')$  avec  $f_i(\cdot)$  et  $g_i(\cdot)$  continues à support compact et  $\alpha_i(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$  ( $I$  fini). On peut aussi (par linéarité) supposer que la dernière somme est réduite à un *seul* terme, disons  $\alpha(x) f(v) g(v')$ . Montrons d'abord

$$\|R(\nu + i\gamma, T)K\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

On rappelle

$$R(\lambda, T)\varphi = \int_0^{\tau(x,v)} e^{-\lambda t - \int_0^t \sigma(x-sv, v) ds} \varphi(x-tv, v) dt; \quad \varphi \in L^2(\Omega \times V),$$

où le temps de séjour  $\tau(x, v)$  est donné par  $\tau(x, v) = \inf\{s > 0 : x - sv \notin \Omega\}$ . La *convexité* de  $\Omega$  permet d'écrire

$$R(\nu + i\gamma, T)K = \mathcal{R}R(\nu + i\gamma, T_\infty)\mathcal{E}K,$$

où  $\mathcal{E} : L^2(\Omega \times V) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N \times V)$  est l'opérateur d'extension triviale à  $\mathbb{R}^N \times V$ ,  $\mathcal{R} : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \rightarrow L^2(\Omega \times V)$  est l'opérateur de restriction et  $T_\infty$  est l'analogue de  $T$  lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . Définissons  $K_\infty$  comme suit :

$$K_\infty : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V \chi_\Omega(x) \alpha(x) f(v) g(v') \varphi(x, v') d\mu(v') \in L^2(\mathbb{R}^N \times V).$$

Alors

$$\mathcal{R}R(\nu + i\gamma, T_\infty)\mathcal{E}K = \mathcal{R}R(\nu + i\gamma, T_\infty)K_\infty\mathcal{E}.$$

L'opérateur  $R(\nu + i\gamma, T_\infty)K_\infty$  se décompose comme

$$R(\nu + i\gamma, T_\infty)K_\infty = M_2 R(\nu + i\gamma, T_\infty)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} M_1,$$

où

$$M_1 : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi(x, v) \mapsto \alpha(x) \chi_\Omega(x) \int_V \varphi(x, v') g(v') d\mu(v') \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

$$M_2 : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi(x, v) \mapsto f(v) \varphi(x, v) \in L^2(\mathbb{R}^N \times V)$$

et

$$R(\nu + i\gamma, T_\infty)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N \times \tilde{V}) \quad (4.16)$$

avec  $\tilde{V}$  désignant le support de  $f(\cdot)$ . Ainsi, il est suffisant de traiter  $R(\nu + i\gamma, T_\infty)|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ . D'autre part l'équation

$$\psi = R(\nu + i\gamma, T_\infty)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \varphi, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^N \times \tilde{V})$$

est équivalente à

$$v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sigma(v)\psi + (\nu + i\gamma)\psi = \varphi$$

ou encore à

$$\widehat{\psi} = \frac{1}{(\sigma(v) + \nu) + i(\xi \cdot v + \gamma)} \widehat{\varphi},$$

où  $\widehat{\varphi}$  (resp.  $\widehat{\psi}$ ) est la transformée de Fourier dans  $L^2$  de  $\varphi$  (resp.  $\psi$ ) par rapport à la variable d'espace. Soit

$$\widehat{R}(\nu + i\gamma) : L^2(\mathbb{R}^N) \ni \phi(\xi) \mapsto \frac{\phi(\xi)}{(\sigma(v) + \nu) + i(\xi \cdot v + \gamma)} \in L^2(\mathbb{R}^N \times \widetilde{V}).$$

Grâce à l'identité de Parseval, il est nécessaire et suffisant de montrer que

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \|\widehat{R}(\nu + i\gamma)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N), L^2(\mathbb{R}^N \times \widetilde{V}))} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \|\widehat{R}(\nu + i\gamma)\phi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\widetilde{V}} \frac{|\phi(\xi)|^2}{(\sigma(v) + \nu)^2 + (\xi \cdot v + \gamma)^2} d\mu(v) d\xi \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \int_{\widetilde{V}} \frac{1}{(\sigma(v) + \nu)^2 + (\xi \cdot v + \gamma)^2} d\mu(v) \|\phi\|^2, \end{aligned}$$

et notre but maintenant est de prouver

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \int_{\widetilde{V}} \frac{1}{(\sigma(v) + \nu)^2 + (\xi \cdot v + \gamma)^2} d\mu(v) = 0$$

uniformément en  $\xi \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. En introduisant les coordonnées polaires dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ ,  $(\xi, \gamma) = |(\xi, \gamma)|(e, e_1)$ ,  $e = \xi/\sqrt{|\xi|^2 + \gamma^2}$  et  $e_1 = \gamma/\sqrt{|\xi|^2 + \gamma^2}$ , on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\widetilde{V}} \frac{1}{(\sigma(v) + \nu)^2 + (\xi \cdot v + \gamma)^2} d\mu(v) \\ &\leq \int_{\widetilde{V} \cap \{|e \cdot v + e_1| \leq \varepsilon\}} \frac{1}{(\sigma(v) + \nu)^2 + (|\xi|^2 + |\gamma|^2)(e \cdot v + e_1)^2} d\mu(v) \\ &\quad + \int_{\widetilde{V} \cap \{|e \cdot v + e_1| > \varepsilon\}} \frac{1}{(\sigma(v) + \nu)^2 + (|\xi|^2 + |\gamma|^2)(e \cdot v + e_1)^2} d\mu(v) \\ &\leq \sup_{(e, e_1) \in \mathbb{S}^N} \int_{\widetilde{V} \cap \{|e \cdot v + e_1| \leq \varepsilon\}} \frac{1}{(\sigma(v) + \nu)^2} d\mu(v) \end{aligned}$$

$$+ \int_{\tilde{V} \cap \{|e \cdot v + e_1| > \varepsilon\}} \frac{1}{(\sigma(v) + \nu)^2 + (|\xi|^2 + |\gamma|^2)\varepsilon^2} d\mu(v)$$

$$=: J_1 + J_2.$$

Grâce au Lemme 4.3.2,  $J_1$  est arbitrairement petit pourvu que  $\varepsilon$  soit petit. On choisit  $\varepsilon$  suffisamment petit, le deuxième terme  $J_2$  est majoré par

$$\frac{\mu\{\tilde{V}\}}{(|\xi|^2 + |\gamma|^2)\varepsilon^2}$$

qui, converge vers zéro quand  $|\gamma| \rightarrow \infty$ , uniformément en  $\xi \in \mathbb{R}^N$ . Ceci finit la preuve de (4.15). Par dualité, on a

$$\|KR(\nu + i\gamma, T)\| = \|R(\nu - i\gamma, T^*)K^*\|, \quad (4.17)$$

où  $T^*$ , l'adjoint de  $T$ , est donné par :

$$\begin{aligned} T^* : D(T^*) &\rightarrow L^2(\Omega \times V) \\ \varphi &\mapsto v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(v)\varphi \end{aligned}$$

avec  $D(T^*) = \{\varphi \in L^2(\Omega \times V) : v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^2(\Omega \times V), \varphi|_{\Gamma_+} = 0\}$  et

$$\Gamma_+ = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V : v \text{ est sortant en } x \in \partial\Omega\}.$$

En procédant de la même manière comme ci-dessus on montre sans peine que  $\|R(\nu - i\gamma, T^*)K^*\| \rightarrow 0$  quand  $|\gamma| \rightarrow \infty$ , ce qui achève la preuve en vertu de (4.17).  $\blacksquare$

On sait (Théorème 2.3.3) que l'hypothèse portant sur la mesure  $\mu$  est nécessaire pour la continuité de  $0 < t \mapsto V(t) - U(t)$ . En conséquence, elle est aussi nécessaire pour que  $(\mathbf{H}_1)$  soit vraie. Nous pouvons donner une preuve directe de ce fait :

**Proposition 4.3.1.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$  à support compact  $V$  et soit  $\Omega = \mathbb{R}^N$ . On prend  $\sigma = 0$  et*

$$K : L^2(\mathbb{R}^N \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V \varphi(x, v') d\mu(v').$$

*S'il existe un hyperplan affine  $H = \{v \in \mathbb{R}^N : v \cdot \tilde{e} = \tilde{a}\}$  de  $\mu$ -mesure (strictement) positive, où  $\tilde{e} \in \mathbb{S}^{N-1}$  et  $\tilde{a} \in \mathbb{R}^*$ , alors*

$$\overline{\lim}_{|\gamma| \rightarrow \infty} \|R(\nu + i\gamma, T)K\| > 0$$

*pour  $\nu > \omega_0(T)$ .*

**Preuve.** L'identité de résolvantes

$$R(\varsigma + i\gamma, T) - R(\nu + i\gamma, T) = (\nu - \varsigma)R(\varsigma + i\gamma, T)R(\nu + i\gamma, T) \quad \text{pour } \varsigma, \nu > \omega_0(T),$$

montre que si  $\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \|R(\nu + i\gamma, T)K\| = 0$  est vraie pour un  $\nu > \omega_0(T)$ , elle reste vraie pour tout  $\varsigma > \omega_0(T)$ . Ainsi, ce n'est pas une restriction de prendre  $\nu = 1$ . En faisant appel à la transformation de Fourier, il suffit de montrer

$$\overline{\lim}_{|\gamma| \rightarrow \infty} \|\widehat{R}(1 + i\gamma)\| > 0$$

(voir la preuve du Lemme 4.3.1 pour les notations). On définit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction normalisée

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{|B(0, 1)|^{\frac{1}{2}}} \chi_{B(n\tilde{e}, 1)}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

où  $|B(0, 1)|$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^N$  et  $B(n\tilde{e}, 1)$  est la boule centrée en  $n\tilde{e}$  et de rayon 1. D'où

$$\begin{aligned} \|\widehat{R}(1 - in\tilde{a})\psi_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_V \frac{|\psi_n(\xi)|^2}{1 + (\xi \cdot v - n\tilde{a})^2} d\xi d\mu(v) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \int_H \frac{|\psi_n(\xi)|^2}{1 + (\xi \cdot v - n\tilde{e} \cdot v)^2} d\xi d\mu(v) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \int_H \frac{|\psi_n(\xi)|^2}{1 + ((\xi - n\tilde{e}) \cdot v)^2} d\xi d\mu(v) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \int_H \frac{|\psi_n(\xi)|^2}{1 + |v|^2} d\xi d\mu(v) \\ &\geq \int_H \frac{1}{1 + |v|^2} d\mu(v). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\widehat{R}(1 - in\tilde{a})\|^2 \geq \int_H \frac{1}{1 + |v|^2} d\mu(v) > 0,$$

ce qui finit la preuve. ■

### 4.3.1 Stabilité du spectre essentiel

Nous *retrouvons* ici un résultat optimal [70, Theorem 1 et Corollary 1] obtenu par une étude directe de la différence  $V(t) - U(t)$ .

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $p = 2$  et soit  $\Omega$  borné (pas nécessairement convexe). On suppose que la mesure  $\mu$  ne charge pas les hyperplans affines et que l'opérateur de collision est régulier. Alors  $V(t) - U(t)$  est compacte pour tout  $t \geq 0$  et par conséquent  $\sigma_{ess}(V(t)) = \sigma_{ess}(U(t))$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Preuve.** Nous avons à montrer que  $V(t) - U(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$  ou d'une manière équivalente, par le Théorème 1.4.9, que  $U_1(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$ . Or  $U_1(t)$  dépend (linéairement et) continûment de l'opérateur de collision  $K$ , donc on peut supposer, sans perte de généralité que  $K$  possède un noyau de la forme (4.14). Par linéarité, on peut aussi supposer que

$$K : L^2(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \alpha(x) \int_V f(v)g(v')\varphi(x, v')d\mu(v'),$$

où  $f(\cdot) \in L^2(V)$ ,  $g(\cdot) \in L^2(V)$  et  $\alpha(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ . En décomposant les fonctions  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  et  $\alpha(\cdot)$  en parties positives et négatives on peut les supposer positives. Soit  $d > 0$  tel que  $\Omega$  soit inclus dans la boule  $B(0, d) := \{x : |x| < d\}$ . Soit  $\widetilde{U}_1(t)$  l'analogue de  $U_1(t)$  lorsque  $\Omega = B(0, d)$ , la fréquence de collision  $\tilde{\sigma}(v) = \inf_{x \in \Omega} \sigma(x, v)$  et le noyau de collision  $k(x, v, v') = \|\alpha\|_\infty f(v)g(v')$ , alors on peut facilement voir que

$$U_1(t) \leq \widetilde{\mathcal{R}}\widetilde{U}_1(t)\widetilde{\mathcal{E}},$$

où  $\widetilde{\mathcal{E}} : L^2(\Omega \times V) \rightarrow L^2(B(0, d) \times V)$  est l'opérateur d'extension triviale à  $L^2(B(0, d) \times V)$  et  $\widetilde{\mathcal{R}} : L^2(B(0, d) \times V) \rightarrow L^2(\Omega \times V)$  est l'opérateur de restriction. Grâce à un argument de domination (Théorème 1.4.12) la compacité de  $\widetilde{U}_1(t)$  pour tout  $t \geq 0$  entraîne celle de  $U_1(t)$ . Il n'est donc pas restreignant de supposer

$$\Omega \text{ borné et convexe, et } \sigma(\cdot, \cdot) \text{ homogène en espace.}$$

Dans ce cas les Lemmes 4.3.1 et 4.2.1 nous garantissent que  $t \rightarrow U_1(t)$  est continue en norme pour  $t \geq 0$ . Par ailleurs, on sait d'après [68, Theorem 4.1, p.57] que  $KR(\nu + i\gamma, T)$  est compact pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ , et le Théorème 4.1.1 montre que  $U_1(t)$  est compact pour tout  $t \geq 0$  et finit la preuve. ■

**Remarque 4.3.1.** *On rappelle que lorsque  $\Omega$  est borné, la description du spectre essentiel de  $U(t)$  est fournie par le Théorème 1.5.5.*

### 4.3.2 Stabilité du spectre critique

Dans ce paragraphe nous abordons l'étude de la stabilité du spectre critique de semigroupe d'absorption. Ce dernier, rappelons le, est décrit dans la Section 1.5.

### Domaines convexes

On commence par étudier la stabilité du spectre critique dans le cas où  $\Omega$  est convexe.

**Théorème 4.3.2.** *Soit  $p = 2$  et soit  $\Omega$  un convexe (pas nécessairement borné). On suppose que  $\mu$  ne charge pas les hyperplans affines, l'opérateur de collision est régulier et que la fréquence de collision  $\sigma$  est homogène. Alors  $0 \leq t \mapsto V(t) - U(t)$  est continue en norme et par conséquent  $\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t))$  pour  $t \geq 0$ .*

**Preuve.** C'est une application directe du Théorème 4.2.1 en utilisant le Lemme 4.3.1. ■

**Remarque 4.3.2.** *Dans le Théorème 2.3.2, nous avons établi la continuité en norme de*

$$0 \leq t \mapsto U_1(t)$$

sous la condition :

$$\mathbb{R}^N \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle$$

est uniformément continue pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^2(V) \times L^2(V)$ , lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^N$  et sous l'hypothèse :

$$\Omega \ni x \mapsto \langle K(x)\varphi, \psi \rangle$$

est uniformément continue pour tout  $(\varphi, \psi) \in L^2(V) \times L^2(V)$  et son prolongement (par continuité) à  $\bar{\Omega}$  s'annule sur le bord  $\partial\Omega$ , lorsque  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$ . Le Théorème 4.3.2 écarte la dépendance "régulière" (ci-dessus) de l'opérateur de collision  $K$  en  $x$  et apporte une réponse à la Question 2.5.1. Notons également, qu'on peut actualiser les théorèmes d'applications spectrales Théorèmes 2.3.1 et 2.4.2 à la lumière de ce nouveau résultat.

### Domaines quelconques

Nous avons utilisé un argument de *domination* pour montrer la compacité de  $V(t) - U(t)$  lorsque  $\Omega$  n'est pas convexe ou lorsque la fréquence de collision  $\sigma$  dépend de  $x$ . Bien évidemment, une telle procédure ne s'applique pas pour montrer la continuité en norme. Dans ce qui suit nous exploitons la *dissipativité* de  $T$  et appliquons le Corollaire 4.2.1 pour avoir le

**Théorème 4.3.3.** *Soit  $p = 2$  et soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert régulier (pas nécessairement convexe ni borné). Soit  $d\mu(v) := dv$  la mesure de Lebesgue. On suppose l'opérateur de collision régulier et la fréquence de collision approchable dans  $L^\infty(\Omega \times V)$  par des fréquences de collision séparées, i.e. de la forme  $\sum_{i \in I} \sigma_1^i(x) \sigma_2^i(v)$  avec  $\sigma_1^i \in L^\infty(\Omega)$  et  $\sigma_2^i \in L^\infty(V)$  ( $I \subset \mathbb{N}$  fini). Alors  $\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(U(t))$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Preuve.** La preuve est une conséquence immédiate du Corollaire 4.2.1 et du Lemme 4.3.3 ci-dessous. ■

**Remarque 4.3.3.** *Le Théorème 4.3.3 répond, au moins dans le cas de la mesure de Lebesgue aux Questions 2.5.2 et 2.5.3 à propos de la pertinence des hypothèses : convexité de  $\Omega$  et homogénéité de la fréquence de collision  $\sigma(\cdot, \cdot)$ .*

**Remarque 4.3.4.** *La condition du théorème précédent est satisfaite, par exemple, si  $\bar{\Omega} \ni x \mapsto \sigma(x, \cdot) \in L^\infty(V)$  est continue par morceaux. On note également qu'on peut montrer que le théorème reste vrai si on suppose  $x \in \Omega \mapsto \sigma(x, v)$  continue pour tout  $v$  fixé.*

**Lemme 4.3.3.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.3.3,*

$$\|K^*R(\nu + i\gamma, T)K\| \rightarrow 0 \text{ et } \|KR(\nu + i\gamma, T)K^*\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty$$

pour tout  $\nu > 0$ .

**Preuve.** Il est commode et facile de remarquer d'abord la dépendance continue de  $R(\nu + i\gamma, T)$  par rapport à la fréquence de collision : Soient  $T$  et  $\tilde{T}$  associés respectivement à  $\sigma(\cdot, \cdot)$  et  $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot) \in L^\infty(\Omega \times V)$ , alors

$$\|R(\nu + i\gamma, T) - R(\nu + i\gamma, \tilde{T})\| \leq C_\nu \|\sigma - \tilde{\sigma}\|_\infty,$$

où  $C_\nu$  est une constante ne dépendant que de  $\nu$ . Ceci nous permet de supposer  $\sigma(\cdot, \cdot)$  de la forme séparée suivante  $\sigma(x, v) = \sum_{i \in I} \sigma_1^i(x) \sigma_2^i(v)$  avec  $I \subset \mathbb{N}$  fini. D'autre part, les opérateurs  $K^*R(\nu + i\gamma, T)K$  et  $KR(\nu + i\gamma, T)K^*$  dépendent linéairement et continûment, dans  $\mathcal{L}(L^2(\Omega \times V))$ , de l'opérateur de collision  $K$ , et ce *uniformément* en  $\gamma \in \mathbb{R}$ , et alors, grâce à (4.14) on peut se contenter de montrer que

$$\|K_1R(\nu + i\gamma, T)K_2\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty,$$

où  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ , est de la forme

$$K_i : L^2(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v') \varphi(x, v') dv' \in L^2(\Omega \times V)$$

avec  $\alpha_i(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$  et  $f_i(\cdot), g_i(\cdot) \in L^2(V)$ . De plus, on peut toujours supposer, par densité, les fonctions  $f_i(\cdot), g_i(\cdot)$  continues à support dans  $V \cap \{v : \delta \leq |v| \leq 1/\delta\}$  pour un certain  $0 < \delta < 1$ . Dans un tel cas, on s'aperçoit sans peine que  $K_1R(\nu + i\gamma, T)K_2$  est factorisable en trois opérateurs bornés dont un seulement dépend de  $\gamma$  :

$$K_1R(\nu + i\gamma, T)K_2 = OQ(\gamma)P$$

avec

$$P : L^2(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \alpha_2(x) \int_V g_2(v) \varphi(x, v) dv \in L^2(\Omega),$$

$$O : L^2(\Omega) \ni \psi \mapsto \alpha_1(x) f_1(v) \psi(x) \in L^2(\Omega \times V)$$

et

$$Q(\gamma) : L^2(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_V \int_0^\infty e^{-t(\nu+i\gamma) - \int_0^t \sigma(x-sv, v) ds} h(v) \chi_{\{t < \tau(x, v)\}}(t) \varphi(x-tv) dt dv \in L^2(\Omega),$$

où  $h(\cdot) = g_1(\cdot) f_2(\cdot)$ . Par le changement de variable  $y = x - tv$  on obtient

$$Q(\gamma)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty e^{-t(\nu+i\gamma) - \int_0^t \sigma(x-s\frac{x-y}{t}, \frac{x-y}{t}) ds} h\left(\frac{x-y}{t}\right) \chi_{\{|x-y| < \tau(x, \frac{x-y}{t})\}} \varphi(y) \frac{dt}{t^{N-1}} dy,$$

où

$$\chi_{\{|x-y| < \tau(x, \frac{x-y}{t})\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-y| < \tau(x, \frac{x-y}{t}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que *toutes* les fonctions sont prolongées par zéro en dehors de leurs domaines. Posons

$$N_\gamma(x, z) = \int_0^\infty e^{-t(\nu+i\gamma) - \int_0^t \sigma(x+z-s\frac{x}{t}, \frac{x}{t}) ds} h\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t^{N-1}},$$

alors

$$\begin{aligned} |Q(\gamma)\varphi(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |N_\gamma(x-y, y)| |\varphi(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |N_\gamma(x-y, z)| |\varphi(y)| dy \\ &\leq \left( \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |N_\gamma(\cdot, z)| \right) * |\varphi(\cdot)|(x), \end{aligned}$$

et par [21, Théorème IV.15]

$$\|Q(\gamma)\| \leq \left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |N_\gamma(\cdot, z)| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Ceci conduit à établir

$$\left\| \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |N_\gamma(\cdot, z)| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty.$$

Pour cela, observons d'abord que

$$N_\gamma(x, z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi_{[0, \infty[}(t)}{t^{N-1}} e^{-i\gamma t} e^{-t\nu - t \left( \sum_{i \in I} \sigma_2^i(\frac{x}{t}) \int_0^1 \sigma_1^i(x+z-sx) ds \right)} h\left(\frac{x}{t}\right) dt$$



et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  l'ensemble

$$\{S_{x,z} \in L^1(\mathbb{R}) : z \in \mathbb{R}^N\}$$

est *relativement compact* dans  $L^1(\mathbb{R})$ , où

$$S_{x,z} : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\chi_{[0,\infty[}(t)}{t^{N-1}} e^{-t\nu - t \sum_{i \in I} \sigma_2^i(\frac{x}{t})} \int_0^1 \sigma_1(x+z-sx) ds h\left(\frac{x}{t}\right).$$

En effet, soit  $(z_n)_n$  une suite dans  $\mathbb{R}^N$ . On peut en extraire une sous-suite  $(z_{n_k})_k$  telle que

$$\int_0^1 \sigma_1^i(x + z_{n_k} - sx) ds \rightarrow c_x^i \text{ quand } k \rightarrow \infty \text{ pour tout } i \in I.$$

Par le théorème de convergence dominée, la suite de fonctions  $(S_{x,z_{n_k}})_k$  converge, dans  $L^1(\mathbb{R})$ , vers la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\chi_{[0,\infty[}(t)}{t^{N-1}} e^{-t\nu - t \sum_{i \in I} \sigma_2^i(\frac{x}{t})} c_x^i h\left(\frac{x}{t}\right).$$

Cette (relative) compacité de  $S$  combinée avec le théorème de Riemann-Lebesgue fournit

$$\int_0^\infty e^{-i\gamma t} e^{-t\nu - t \int_0^1 \sigma(x+z-sx, \frac{x}{t}) ds} h\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t^{N-1}} \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty$$

*uniformément* en  $z \in \mathbb{R}^N$ , i.e.

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^N} |N_\gamma(x, z)| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty$$

pour tout  $x$ . De nouveau, avec l'aide du théorème de convergence dominée on conclut que

$$\| \sup_{z \in \mathbb{R}^N} |N_\gamma(\cdot, z)| \|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty,$$

et on a le résultat désiré. ■

En utilisant des arguments d'approximation et d'interpolation on montre :

**Théorème 4.3.4.** *Les résultats de la Section 3 demeurent vrais dans  $L^p(\Omega \times V)$  pour  $1 < p < \infty$ .*

### 4.3.3 Quelques Extensions

Il peut arriver que l'opérateur de collision  $K$  soit composé de plusieurs opérateurs, décrivant différents types de collision. C'est le cas notamment dans les "solid moderators" où l'opérateur de collision est une somme d'une partie (dite "incoherent part")  $K_i$  et d'une autre partie (dite "coherent part")  $K_c$  où  $K_i$  est compact dans  $L^2(V)$  tandis que  $K_c$  ne l'est pas [18]. Ça sera aussi le cas dans le modèle que nous envisageons dans la troisième partie de cette thèse. D'autre part, si  $K \in \mathcal{L}(L^2(V))$  n'admet pas une puissance compacte, alors les termes de la série de Dyson-Phillips  $U_n(t)$  ne sont jamais compacts (cf. [68, Chapter 4]). On trouve dans ([68, Problem 3, p. 93]) le problème ouvert suivant : Soit  $K = K_1 + K_2$  un opérateur de collision tel que  $K_2$  soit régulier et  $K_1$  soit borné. Trouver (ou estimer) le type essentiel du semigroupe  $(V(t))_{t \geq 0}$  engendré par  $T + K$ . Avant de répondre à ce problème, remarquons que, pour  $\nu$  assez grand,

$$\begin{aligned} & K_2 R(\nu + i\gamma, T + K_1) \\ = & (K_2 R(\nu + i\gamma, T)(\nu + i\gamma - T - K_1) + K_2 R(\nu + i\gamma, T)K_1) R(\nu + i\gamma, T + K_1) \\ = & K_2 R(\nu + i\gamma, T) + K_2 R(\lambda, T)K_1 R(\nu + i\gamma, T + K_1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

De la même façon,

$$R(\nu + i\gamma, T + K_1)K_2 = R(\nu + i\gamma, T)K_2 + R(\nu + i\gamma, T + K_1)K_1 R(\nu + i\gamma, T)K_2. \quad (4.19)$$

Désignons par  $(W(t))_{t \geq 0}$  le  $C_0$ -semigroupe engendré par  $T + K_1$ . On a alors :

**Théorème 4.3.5.** *Soient  $p = 2$  et  $K = K_1 + K_2$  un opérateur de collision tel que  $K_2$  soit régulier et  $K_1$  soit borné.*

(a) *Supposons que  $\mu$  ne charge pas les hyperplans affines.*

- *Si  $\Omega$  est convexe et borné, et si la fréquence de collision est homogène, alors  $\sigma_{ess}(V(t)) = \sigma_{ess}(W(t))$  pour tout  $t \geq 0$ .*
- *Si  $\Omega$  est convexe et si la fréquence de collision est homogène, alors  $\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(W(t))$  pour tout  $t \geq 0$ .*

(b) *Si  $\mu$  est la mesure de Lebesgue et si la fréquence de collision est telle que dans le Théorème 4.3.3, alors  $\sigma_{crit}(V(t)) = \sigma_{crit}(W(t))$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Preuve.** En utilisant le Lemme 4.3.1, (4.18) et (4.19), on obtient

$$\|K_2 R(\nu + i\gamma, T + K_1)\| + \|R(\nu + i\gamma, T + K_1)K_2\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty,$$

ce qui prouve, en faisant appel au Théorème 4.2.1, le deuxième point de (a). Si, de plus,  $\Omega$  est borné, alors par [68, Theorem 4.1, p. 57]  $K_2 R(\nu + i\gamma)$  est compact, et donc par (4.18),  $K_2 R(\nu + i\gamma, T + K_1)$  l'est aussi. Le Théorème 4.3.3 montre alors le premier point du (a). Concernant (b), on opère comme dans le second point de (a) en utilisant le Lemme 4.3.3 à la place du Lemme 4.3.1. ■

**Remarque 4.3.5.** Lorsque  $\Omega$  est convexe et borné, le Théorème 4.3.5 fournit, en particulier, une estimation du type essentiel de  $(V(t))_{t \geq 0} : \omega_{ess}(T+K) = \omega_{ess}(T+K_1)$ . Si  $K_1$  est positif, alors par le résultat de L. WEIS [108] sur l'identité entre le type des semigroupes positifs sur  $L^p$  et l'abscisse spectrale de leurs générateurs, on a  $\omega_{ess}(T+K) \leq s(T+K_1)$ . Par exemple, dans [18] où l'opérateur  $K_1$  est positif et satisfait :

$$\|K_1 R(\lambda, T)\| < 1 \quad \text{pour } \operatorname{Re} \lambda > -\lambda^* = s(T),$$

qui entraîne en particulier que

$$s(T+K_1) \leq -\lambda^*,$$

on obtient  $\omega_{ess}(T+K) \leq -\lambda^*$  (en fait, on peut même montrer que c'est une égalité).

**Remarque 4.3.6.** Notons que le Théorème 4.3.5 a lieu indépendamment de la nature l'opérateur de collision  $K_1$ . Ceci témoigne de la puissance de l'approche résolvente dans la vérification de la stabilité des spectres essentiel et critique, surtout lorsque le semigroupe non perturbé n'est pas explicite. En fait, il n'est pas évident de montrer le Théorème 4.3.5 en étudiant directement la compacité de  $V(t) - W(t)$ .

**Remarque 4.3.7.** Par interpolation, on peut montrer que le Théorème 4.3.5 demeure vrai dans les espaces  $L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) si  $K_1 \in \cap_{q \geq 1} \mathcal{L}(L^q(\Omega \times V))$  ou s'il peut être approché par de tels opérateurs (voir le Théorème 5.2.2 à ce propos).

**Remarque finale** Récemment, dans un travail en collaboration avec B. LODS [60] nous avons appliqué le Corollaire 4.2.1 pour l'étude des trois modèles suivants :

- ✓ L'équation de transport monodimensionnelle avec conditions aux limites abstraites (opérateurs frontière).
- ✓ Le modèle de Rotenberg [83] intervenant en dynamique de population.
- ✓ L'équation de transport dans une boule avec conditions aux limites du type Maxwell.

Dans tous ces modèles l'approche semigroupe (i.e. l'étude directe des restes (4.2)) est difficile (voire inopérante) à cause du caractère non-explicite du semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$ . D'autre part, pour ces modèles vérifier **(H<sub>1</sub>)** directement s'avère difficile, et la dissipativité a été d'un grand apport.

---

*Troisième partie*

**Modèles cinétiques partiellement  
élastiques**



L'objectif de cette partie, composée des Chapitres 5 et 6, est de présenter une théorie spectrale générale pour une classe d'équations cinétiques introduite par E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49] en 1974. Plus précisément, on s'intéressera à l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma(x, v) \varphi(x, v, t) &= \int_V k_c(x, v, v') \varphi(x, v', t) dv' \\ &+ \sum_{m=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^{(m)}(x, e_m(\rho), \omega, \omega') \varphi(x, e_m(\rho) \omega', t) d\omega' \\ &+ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(x, \rho \omega', t) d\omega' \end{aligned}$$

soumise à la condition aux limites

$$\varphi(x, v, t) = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega \text{ et } v \cdot \eta(x) < 0$$

et la condition initiale

$$\varphi(x, v, 0) = \varphi_0(x, v),$$

où  $(x, v, t) \in \Omega \times V \times \mathbb{R}^+$ ,  $\Omega$  désigne un ouvert *borné* régulier de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\partial\Omega$  et  $\eta(x)$  est la normale extérieure en  $x \in \partial\Omega$ . L'espace des vitesses  $V$  est composé de vitesses  $v = \rho\omega$  avec  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$  (la sphère unité de  $\mathbb{R}^N$ ) et

$$\rho \in I := (\rho_{min}, \rho_{max})$$

(un intervalle de  $\mathbb{R}^+$ ), et est muni de la mesure de Lebesgue  $dv = \rho^{N-1} d\rho d\omega$ . On suppose que la fréquence de collision vérifie

$$0 \leq \sigma \in L^\infty(\Omega \times V).$$

L'équation intégro-différentielle précédente peut se mettre sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait dans l'espace de Banach  $L^p(\Omega \times V)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = (T + K)\varphi \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où  $T$  désigne l'opérateur d'absorption

$$T : D(T) \ni \varphi \mapsto -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x, v) \varphi(x, v)$$

avec

$$D(T) = \{ \varphi \in L^p(\Omega \times V) : v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times V), \varphi|_{\Gamma^-} = 0 \}$$

et  $\Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V : v \cdot \eta(x) < 0\}$ .

L'opérateur de collision

$$K = K_c + K_d + K_0$$

est composé de l'opérateur de collision *classique*

$$K_c \varphi(x, v) = \int_V k_c(x, v, v') \varphi(x, v') dv',$$

de l'opérateur *inélastique* (ou "*downshift*")

$$K_d \varphi(x, v) = \sum_{m=1}^l K_d^{(m)} \varphi(x, v) = \sum_{m=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^{(m)}(x, e_m(\rho), \omega, \omega') \varphi(x, e_m(\rho)\omega') d\omega',^2$$

où chaque opérateur  $K_d^{(m)}$ ,  $m = 1, \dots, l$ , décrit les collisions lors desquelles une quantité  $E_m$  d'énergie est perdue par le neutron se trouvant à la position  $x$  avec une vitesse *initiale*  $e_m(\rho)$  et une vitesse *finale*  $\rho$ . La vitesse initiale,  $e_m(\rho)$ , est déterminée par

$$E_m = \frac{1}{2}M(e_m(\rho))^2 - \frac{1}{2}M\rho^2,$$

où  $M$  représente la masse d'un neutron. Au vu de sa définition, il ressort que l'opérateur  $K_d$  est *nilpotent*, i.e.

il existe un entier  $r$  tel que  $K_d^r = 0$ .

Enfin, l'opérateur de collision *élastique* (ou "*Bragg scattering*" suivant la terminologie de [49])

$$K_0 \varphi(x, v) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(x, \rho\omega') d\omega'$$

décrit les collisions ne faisant pas varier l'énergie cinétique des neutrons, il n'agit qu'à travers la partie angulaire  $\omega$  de la variable de vitesse.

Dans le Chapitre 5 nous analysons les problèmes de *compacité* qui sont à la base de la théorie spectrale des équations présentées ci-haut. L'opérateur de collision élastique n'intègre qu'en angles et n'induit pas de compacité en vitesses (contrairement à  $K_c$ ) et aucune puissance de  $K(\lambda - T)^{-1}$  n'est compacte (a fortiori aucun reste de la série de Dyson-Phillips ne l'est non plus). Il convient alors de *dégager* les bons opérateurs compacts qui nous permettent de *décrire* convenablement le spectre de  $T + K$  et d'*estimer* le type essentiel du semigroupe.

Sous certaines conditions de continuité par morceaux sur les noyaux de collision

<sup>2</sup>On rappelle qu'on a convenu de prolonger toutes les fonctions, par zéro, en dehors de leurs domaines de définition.

---

et la fréquence de collision et en se plaçant dans  $L^1(\Omega \times V)$ , E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL montrent qu'une puissance de  $(K_d + K_0)R(\lambda, T + K_0)$  est compacte. D'autre part, contrairement au modèle classique ( $K = K_c$ ) pour lequel on dispose d'une littérature abondante, on ne dispose, à notre connaissance, d'*aucun* résultat spectral concernant le *semigroupe*  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ .

Dans ce chapitre nous généralisons les résultats de [49] en nous plaçant sous des hypothèses plus générales et en envisageant le problème dans tous les  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Nous attaquerons également l'étude du semigroupe.

Toujours dans [49] les auteurs montrent que sous des hypothèses de continuité par morceaux des sections efficaces, typiquement le spectre  $T + K_0$  est constitué d'un demi-plan et de courbes. Ils montrent aussi, à l'aide de l'alternative de Gohberg-Shmulyan (voir Théorème 1.4.1) et du résultat de compacité cité ci-dessus, que lorsque l'on ajoute à  $T + K_0$  l'opérateur  $K_d + K_c$ , une composante connexe de  $\sigma(T + K_0)$  soit se transforme complètement en du spectre ponctuel soit elle contient au plus des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Le Chapitre 6 a pour but d'une part d'affiner cette image spectrale en déterminant la nature du spectre et en examinant les incidences de la positivité sur celui-ci, et d'autre part de donner l'image spectrale du semigroupe.





# Chapitre 5

## Propriétés spectrales liées à la compacité

### 5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'analyser les problèmes de *compacité* qui sont à la base de la théorie spectrale du problème de Cauchy (III.1). Nous montrons, par des arguments de densité et d'interpolation, la compacité de  $KR(\lambda, T + K_0 + K_d)$  ou d'une de ses puissances sous des hypothèses plus générales que celles dans [49] et dans tous les espaces  $L^p(\Omega \times V)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Ceci nous permettra de disposer de renseignements sur le spectre *asymptotique* de  $T + K$ .

D'autre part, contrairement au modèle classique ( $K = K_c$ ) pour lequel on dispose d'une littérature abondante, on ne dispose, à notre connaissance, *d'aucun* résultat spectral concernant le *semigroupe*

$$(e^{t(T+K_0+K_d+K_c)})_{t \geq 0}.$$

Or, comme nous l'avons indiqué à l'introduction générale et au Chapitre 1, la connaissance spectrale du générateur ne nous renseigne que *partiellement* sur le comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy (III.1) et il est important d'analyser le spectre du semigroupe, et d'estimer, notamment, son type essentiel. Dans ce chapitre on *s'attaquera* à l'étude de ce *semigroupe* : on fera une étude *systématique* (comme ça a été le cas pour le semigroupe classique  $(e^{t(T+K_c)})_{t \geq 0}$ ) de la compacité des restes de la série de Dyson-Phillips exprimant  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  relativement à  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$ , ce qui nous permettra d'identifier le type essentiel :

$$\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T + K_0).$$

Même si l'approche générale est identique et repose sur la théorie de perturbation spectrale, les arguments techniques seront *différents* selon que l'on aborde le problème dans l'espace  $L^1(\Omega \times V)$  ou  $L^p(\Omega \times V)$ ,  $1 < p < \infty$ . Pour cela nous

consacrons à chacun des cas une section à part. En effet, notre plan est le suivant : dans la Section 5.2, nous étudions le problème dans l'espace  $L^p(\Omega \times V)$ ,  $1 < p < \infty$ . Nous explicitons, d'abord, les classes d'opérateurs considérés puis nous étudions le problème stationnaire et le problème d'évolution. Dans les deux cas, la *nilpotence* de  $K_d$  simplifiera considérablement notre étude. Pour montrer les résultats de cette section, nous nous baserons essentiellement sur certains résultats du Chapitre 4. La section 5.3 suit le schéma général de la précédente, mais dans l'espace  $L^1$  qui, comme toujours, introduit des difficultés techniques supplémentaires. Nous terminons le chapitre en répondant à quelques questions posées dans [68].

**Notations.** Pour clore cette introduction, adoptons quelques notations et conventions.

Selon le contexte, nous notons une fonction  $\varphi \in L^p(\Omega \times V)$ , soit par  $\varphi(x, v)$  soit par  $\varphi(x, \rho, \omega)$ , où  $v = \rho\omega$  avec  $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ .

Sauf mention explicite du contraire,  $\rho_{max}$  est supposée finie ( $\rho_{max} < \infty$ ).

Pour faire apparaître la parenté entre un semigroupe et son générateur, on privilégie dans ce chapitre la notation  $(e^{tA})_{t \geq 0}$ .

## 5.2 Analyse spectrale dans $L^p$ , $1 < p < \infty$

L'opérateur  $K_c$  décrit les collisions où les neutrons sont réemis, après collision avec le milieu ambiant avec des vitesses *indépendantes* des vitesses incidentes. Ce qui mathématiquement se traduit par la compacité de  $K_c$  dans  $L^p(V)$ . Cette propriété a été à la base de l'introduction de la classe d'opérateurs réguliers [70], et de l'étude spectrale du modèle classique.

Commençons donc par rappeler la définition des opérateurs de collision réguliers. Soit  $K_c(x)$  l'opérateur intégral suivant

$$K_c(x) : L^p(V) \ni \varphi \mapsto \int_V k_c(x, v, v') \varphi(v') d\mu(v').$$

L'opérateur de collision  $K_c$  est dit régulier si

**(H1)**  $\{K_c(x) : x \in \Omega\}$  est un ensemble d'opérateurs collectivement compacts, i.e.

$$\{K_c(x)\psi : x \in \Omega, \|\psi\|_{L^p(V)} \leq 1\}$$

est relativement compact dans  $L^p(V)$ .

**(H2)** Pour tout  $\psi' \in L^{p'}(V)$ ,  $\{K_c(x)\psi' : x \in \Omega\}$  est relativement compact dans  $L^{p'}(V)$ .

On rappelle qu'alors  $K_c$  peut être approché, en norme d'opérateurs, par des opérateurs de collision de noyaux séparables

$$\sum_{i \in J} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v'),$$

où  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$ ,  $f_i \in L^p(V)$  et  $g_i \in L^{p'}(V)$ , ( $i \in J$ ) avec  $J$  fini et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  (cf. Lemme 2.2.1).

D'une manière analogue, on exploite le fait que dans le modèle collisionnel élastique  $K_0$  la *direction* des neutrons après collision avec le milieu ambiant est *indépendante* de la direction incidente pour définir la classe d'opérateurs de collision  $K_0$  que l'on utilisera dans cette section. On suppose que  $K_0$  vérifie

**(H3)** L'ensemble

$$\left\{ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(\omega') d\omega' : (x, \rho) \in \Omega \times I, \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{S}^{N-1})} \leq 1 \right\}$$

est relativement compact dans  $L^p(\mathbb{S}^{N-1})$ .

**(H4)** Pour tout  $\psi' \in L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$ ,

$$\left\{ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \psi'(\omega) d\omega : (x, \rho) \in \Omega \times I \right\}$$

est relativement compact dans  $L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$ .

Sous ces hypothèses,  $K_0$  est borné,

$$\|K_0\| = \operatorname{ess\,sup}_{(x, \rho) \in \Omega \times I} \|K_0(x, \rho)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{S}^{N-1}))}$$

et vérifie la propriété d'approximation suivante :

**Proposition 5.2.1.** *Un opérateur  $K_0$  vérifiant **(H3)**-**(H4)** peut être approché par des opérateurs possédant un noyau de la forme*

$$\sum_{i \in J} \alpha_i(x, \rho) f_i(\omega) g_i(\omega'),$$

où  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega \times I)$ ,  $f_i \in L^p(\mathbb{S}^{N-1})$  et  $g_i \in L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$ , ( $i \in J \subset \mathbb{N}$ ) avec  $J$  fini et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Preuve.** La preuve est identique à celle du Lemme 2.2.1. ■

Enfin, on suppose que

**(H5)** les noyaux des opérateurs  $K_d^{(m)}$  sont *bornés*.

### 5.2.1 Étude du problème stationnaire

On commence cette section par une observation élémentaire qui *simplifiera* l'étude spectrale. Cette observation est liée au fait que  $K_d$  est *nilpotent* (on rappelle qu'il existe  $r$  tel que  $K_d^r = 0$ ). En effet, grâce à cette nilpotence et au fait que l'opérateur  $K_0$  "ne mélange pas" les modules de vitesses on déduit

$$[K_d R(\lambda, T + K_0)]^r = 0. \quad (5.1)$$

Ce qui entraîne que le spectre de  $T + K_0 + K_d$  est une partie du spectre de  $T + K_0$ , i.e.

$$\sigma(T + K_0 + K_d) \subset \sigma(T + K_0). \quad (5.2)$$

En fait, on sait [32, Proposition 4.2, p. 272] que pour  $\lambda \in \rho(T + K_0)$  on a

$$\lambda \in \sigma(T + K_0 + K_d) \text{ si et seulement si } 1 \in \sigma(K_d R(\lambda, T + K_0)).$$

Or, (5.1) entraîne que  $r_\sigma(K_d R(\lambda, T + K_0)) = 0$ , et par suite  $\sigma(K_d R(\lambda, T + K_0)) = \emptyset$ .

On a le résultat suivant :

**Théorème 5.2.1.** *Supposons les hypothèses (H1)–(H5) satisfaites, alors les opérateurs*

$$K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d) \text{ et } R(\lambda, T + K_0 + K_d) K_c$$

*sont compacts pour tout  $\lambda \in \rho(T + K_0 + K_d)$ .*

**Preuve.** Soit  $\lambda \in \rho(T + K_0 + K_d)$ . Alors

$$\begin{aligned} & K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d) \\ &= (K_c R(\lambda, T)(\lambda - T - K_0 - K_d) + K_c R(\lambda, T)(K_0 + K_d)) R(\lambda, T + K_0 + K_d) \\ &= K_c R(\lambda, T) + K_c R(\lambda, T)(K_0 + K_d) R(\lambda, T + K_0 + K_d), \end{aligned} \quad (5.3)$$

(ceci est licite car nous allons montrer dans le Lemme 6.5.1 que  $\sigma(T) \subset \sigma(T + K_0 + K_d)$ ). Par ailleurs, d'après [68, Theorem 4.1, p. 57],  $K_c R(\lambda, T)$  est compact, il est clair alors que  $K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d)$  l'est aussi. D'autre part, nous avons aussi

$$R(\lambda, T + K_0 + K_d) K_c = R(\lambda, T) K_c + R(\lambda, T + K_0 + K_d)(K_0 + K_d) R(\lambda, T) K_c, \quad (5.4)$$

ce qui permet de conclure la compacité de  $R(\lambda, T + K_0 + K_d) K_c$  en tenant compte de la compacité de  $R(\lambda, T) K_c$  montrée également dans [68, Theorem 4.1, p. 57].

■

On peut énoncer le

**Corollaire 5.2.1.** *Sous les hypothèses (H1)–(H5), les opérateurs  $T + K$  et  $T + K_0 + K_d$  ont le même spectre essentiel, i.e.  $\sigma_{ess}(T + K) = \sigma_{ess}(T + K_0 + K_d)$ .*

**Preuve.** Par des manipulations algébriques simples, on a pour tout  $\lambda \in \rho(T + K) \cap \rho(T + K_0 + K_d)$

$$R(\lambda, T + K) - R(\lambda, T + K_d + K_0) = R(\lambda, T + K_0 + K_d)K_c R(\lambda, T + K)$$

et donc  $R(\lambda, T + K) - R(\lambda, T + K_0 + K_d)$  est compact d'après le Théorème 5.2.1, et la Proposition 1.2.3 (résultat de stabilité du spectre essentiel) achève la preuve. ■

En utilisant le Corollaire 5.2.1, on peut affirmer que

$$\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + K_0 + K_d)\}$$

est formé de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Cependant, a priori, le même corollaire ne dit rien de

$$(\rho(T + K_0 + K_d) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq s(T + K_0 + K_d)\}) \cap \sigma(T + K).$$

Néanmoins, grâce à l'alternative de Gohberg-Shmulyan (voir Remarque 1.4.2) on peut affirmer qu'une composante connexe de  $\rho(T + K_0 + K_d)$  soit se transforme totalement en du spectre ponctuel de  $T + K$ , soit il se crée en elle au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

## 5.2.2 Étude du problème d'évolution

Avant d'indiquer les conséquences de la nilpotence de l'opérateur  $K_d$  sur l'étude spectrale du semigroupe  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ . Exprimons le semigroupe  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  par une série de Dyson-Phillips relativement à  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$  :

$$e^{t(T+K_0+K_d)} = \sum_{i=0}^{\infty} V'_i(t),$$

où  $V'_0(t) = e^{t(T+K_0)}$  et  $V'_{i+1}(t) = \int_0^t V'_i(s)K_d V'_0(t-s)ds$ . On pose

$$R'_n(t) = \sum_{i=n}^{\infty} V'_i(t).$$

La nilpotence de  $K_d$  (i.e.  $K_d^r = 0$ ) et le fait que  $e^{t(T+K_0)}$  "ne mélange pas" les modules de vitesses entraînent que

$$[e^{t(T+K_0)}K_d]^r = 0 \text{ pour tout } t \geq 0, \quad (5.5)$$

(on rappelle que la notation  $[F]^n$  désigne la convolution de  $F$   $n$  fois), et donc aussi

$$R'_r(t) = [e^{t(T+K_0)} K_d]^r * e^{t(T+K_0+K_d)} = 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En conséquence,

$$\omega_{ess}(T + K_0 + K_d) = \omega_{ess}(T + K_0). \quad (5.6)$$

En vue d'identifier le type essentiel du  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  on établit le résultat suivant

**Théorème 5.2.2.** *Sous les hypothèses (H1)–(H5), la différence*

$$e^{t(T+K)} - e^{t(T+K_0+K_d)}$$

*est compacte pour tout  $t \geq 0$ .*

**Preuve.** La démarche de la preuve est identique à celle employée dans la preuve du Théorème 4.3.1, on donnera donc que les grandes lignes. D'après le Théorème 1.4.9, il suffit de montrer la compacité de

$$\int_0^t e^{(t-s)(T+K_0+K_d)} K_c e^{s(T+K_0+K_d)} ds$$

pour tout  $t > 0$ . Par des arguments d'approximation, on peut supposer que  $K_c$  possède un noyau de la forme

$$k_c(x, v, v') = \sum_{i \in J} \alpha_i(x) f_i(v) g_i(v'),$$

où pour tout  $i \in J \subset \mathbb{N}$  ( $J$  fini),  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega)$  et  $f_i$  et  $g_i$  sont continues à support compact dans  $V$ . Dans ce cas,

$$\int_0^t e^{(t-s)(T+K_0+K_d)} K_c e^{s(T+K_0+K_d)} ds \in \bigcap_{q \geq 1} \mathcal{L}(L^q(\Omega \times V))$$

et donc par un argument d'interpolation, on peut se contenter de montrer le résultat pour  $p = 2$ . En décomposant les fonctions  $\alpha_i$ ,  $f_i$  et  $g_i$  ( $i \in J$ ) en parties positives et négatives, par linéarité, on peut les supposer positives. Un argument de domination permet alors de prendre la fréquence de collision constante. Dans ces circonstances :  $K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d)$  est compact (Théorème 5.2.1) et

$$\|K_c R(\nu + i\gamma, T + K_0 + K_d)\| \rightarrow 0 \text{ et } \|R(\nu + i\gamma, T + K_0 + K_d) K_c\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty$$

pour  $\nu > s(T + K_0)$  (Lemme 5.2.1 ci-dessous) et il suffit d'appliquer le Théorème 4.2.2 pour finir la preuve. ■

**Lemme 5.2.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 5.2.2, on a*

$\|K_c R(\nu + i\gamma, T + K_0 + K_d)\| \rightarrow 0$  et  $\|R(\nu + i\gamma, T + K_0 + K_d)K_c\| \rightarrow 0$  quand  $|\gamma| \rightarrow \infty$  pour tout  $\nu > s(T + K_0)$ .

**Preuve.** On rappelle (5.3) et (5.4) :

$$\begin{aligned} K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d) &= K_c R(\lambda, T) + K_c R(\lambda, T)(K_0 + K_d)R(\lambda, T + K_0 + K_d). \\ R(\lambda, T + K_0 + K_d)K_c &= R(\lambda, T)K_c + R(\lambda, T + K_0 + K_d)(K_0 + K_d)R(\lambda, T)K_c. \end{aligned}$$

Or, on avait établi dans le Lemme 4.3.1 que pour tout  $\nu > \omega_0(T)$

$$\|K_c R(\nu + i\gamma, T)\| \rightarrow 0 \text{ et } \|R(\nu + i\gamma, T)K_c\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow \infty,$$

ce qui achève facilement la preuve. ■

Le corollaire suivant est une conséquence du Théorème 5.2.2 :

**Corollaire 5.2.2.** *Si les hypothèses (H1)–(H5) sont vérifiées, alors pour tout  $t \geq 0$  on a  $\sigma_{ess}(e^{t(T+K)}) = \sigma_{ess}(e^{t(T+K_0+K_d)})$ . En particulier,  $\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T + K_0)$ .*

**Preuve.** De la compacité de  $e^{t(T+K)} - e^{t(T+K_0+K_d)}$  pour tout  $t \geq 0$  découle

$$\sigma_{ess}(e^{t(T+K)}) = \sigma_{ess}(e^{t(T+K_0+K_d)}) \quad t \geq 0,$$

avec, en particulier,

$$\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T + K_0 + K_d),$$

et d'après (5.6) on a l'égalité désirée. ■

**Remarque 5.2.1.** *Nous verrons dans le chapitre qui suit un exemple où on caractérise totalement le spectre et le spectre essentiel de  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$ , donc en particulier,  $\omega_{ess}(T + K_0)$ . Néanmoins, on peut d'ores et déjà affirmer, moyennant un résultat de L. WEIS [108]<sup>1</sup>, que si les différents noyaux sont positifs (ce qui est la cas en pratique), alors*

$$\omega_{ess}(T + K) \leq s(T + K_0).$$

---

<sup>1</sup>Le résultat qui affirme que dans les espaces  $L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , le type d'un  $C_0$ -semigroupe positif coïncide avec l'abscisse spectrale de son générateur.



### 5.3 Analyse spectrale dans $L^1$

Nous abordons dans cette section les questions de compacité dans l'espace  $L^1(\Omega \times V)$ . Tout d'abord on introduit, en s'inspirant de [58, 59], les différentes classes d'opérateurs de collision que l'on utilisera dans cette section. Commençons par  $K_c$  que nous supposons vérifier

$$(H6) \int_V |k_c(\cdot, v, \cdot)| dv \in L^\infty(\Omega \times V)$$

$$(H7) \{ |k_c(x, \cdot, v')| : (x, v') \in \Omega \times V \} \text{ est faiblement compact dans } L^1(V).$$

On rappelle la propriété suivante :

**Proposition 5.3.1.** [59, Theorem 2.4] *Soit  $K_c$  un opérateur positif vérifiant (H6)-(H7). Alors  $K_c$  peut être approché en norme d'opérateurs par une suite  $(K_m)_m \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times V))$  telle que pour tout  $0 \leq \varphi \in L^1(\Omega \times V)$ ,*

$$K_m \varphi(x, v) \leq f_m(v) \int_V \varphi(x, v) dv', \quad (5.7)$$

où  $f_m \in L^1(V)$  est une fonction positive.

D'une manière similaire on suppose que l'opérateur élastique

$$K_0 : L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(x, \rho, \omega') d\omega'$$

vérifie :

$$(H8) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |k_0(\cdot, \cdot, \omega, \cdot)| d\omega \in L^\infty(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}).$$

$$(H9) \{ |k_0(x, \rho, \cdot, \omega')| : (x, \rho, \omega') \in \Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1} \} \text{ est faiblement compact dans } L^1(\mathbb{S}^{N-1}).$$

On peut établir en calquant la preuve de [59, Theorem 2.4] :

**Proposition 5.3.2.** *Tout opérateur positif  $K_0$  vérifiant (H8)-(H9) peut être approché dans  $\mathcal{L}(L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}))$  par une suite  $(K_m)_m \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}))$  telle que pour tout  $0 \leq \varphi \in L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$*

$$K_m \varphi(x, \rho, \omega) \leq f_m(\omega) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, \rho, \omega') d\omega', \quad (5.8)$$

où  $0 \leq f_m \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$ .

Enfin comme dans [49] on suppose que

(H10) les opérateurs  $K_d^{(m)}$  sont à noyaux bornés.

**Remarque 5.3.1.** *Les opérateurs de collision considérés ici sont plus généraux que ceux utilisés dans [49].*

### 5.3.1 Étude du problème stationnaire

Comme dans la Section 5.2.1, en raison de la nilpotence de  $K_d$ , on a

$$\sigma(T + K_0 + K_d) \subset \sigma(T + K_0). \quad (5.9)$$

**Théorème 5.3.1.** *Supposons les hypothèses (H6)–(H10) satisfaites. Alors l'opérateur*

$$K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d) K_c$$

*est faiblement compact pour tout  $\lambda \in \rho(T + K_0 + K_d)$ .*

**Preuve.** Ce théorème est vrai même dans le cas  $\rho_{max} = \infty$ , on fera donc la preuve dans ce cadre général. Soit  $\lambda \in \rho(T + K_0 + K_d)$ , alors

$$K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d) K_c = K_c R(\lambda, T) K_c + K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d) (K_0 + K_d) R(\lambda, T) K_c.$$

Puisque l'on sait déjà que  $K_c R(\lambda, T) K_c$  est faiblement compact [68, Theorem 4.4, p. 60], il suffit de montrer que les opérateurs  $K_0 R(\lambda, T) K_c$  et  $K_d^{(i)} R(\lambda, T) K_c$  ( $i = 1, \dots, l$ ) sont faiblement compacts. On va se contenter de montrer la faible compacité de l'opérateur  $K_0 R(\lambda, T) K_c$ , celle des autres opérateurs se démontre de la même manière. Notons que

$$|K_0 R(\lambda, T) K_c \varphi| \leq |K_0| R(\lambda, T) |K_c| |\varphi|,$$

où

$$|K_c| : L^1(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V |k_c(x, v, v')| \varphi(x, v') d\mu(v')$$

et

$$|K_0| : L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \int_V |k_c(x, \rho, \omega, \omega')| \varphi(x, \rho, \omega') d\omega'.$$

Par domination, on peut supposer sans perte de généralité que  $K_c$  et  $K_0$  sont positifs. Notons également que  $K_c$  est limite, quand  $i \rightarrow \infty$ , dans  $\mathcal{L}(L^1(\Omega \times V))$ , de

$$K_c^{(i)} : \varphi \mapsto \int_V k_c(x, v, v') \chi_{\{v \in V : |v| \leq i\}} \varphi(x, v') dv'.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|K_c \varphi - K_c^{(i)} \varphi\| &\leq \iint_{\Omega \times \{v \in V : |v| > i\}} \int_V k_c(x, v, v') |\varphi(x, v')| dv' dx dv \\ &\leq \sup_{(x, v') \in \Omega \times V} \int_{\{v \in V : |v| > i\}} k_c(x, v, v') dv \|\varphi\|_{L^1(\Omega \times V)} \end{aligned}$$

et, puisque  $K_c$  vérifie **(H7)**

$$\|K_c - K_c^{(i)}\| \leq \sup_{(x, v') \in \Omega \times V} \int_{\{v \in V : |v| > i\}} k_c(x, v, v') dv \rightarrow 0 \text{ quand } i \rightarrow \infty.$$

On peut alors, quitte à remplacer  $K_c$  par une certaine tronquée  $K_i$ , supposer sans perte de généralité que  $\rho_{max} < \infty$ . D'autre part  $K_c$  peut être approché par une suite d'opérateurs dont chaque terme satisfait la domination (5.7), par approximation puis par domination on peut supposer, sans restreindre la généralité du problème, que  $K_c$  est de la forme

$$K_c : \varphi \mapsto f(v) \int_V \varphi(x, v') d\mu(v'),$$

où  $f \in L^1(V)$ . Par approximation toujours, on peut supposer que  $f \in L^1(V) \cap L^\infty(V)$  et par domination ensuite, on peut supposer  $f$  une constante c'est à dire que  $K_c$  peut être pris comme l'opérateur de moyennisation en vitesse (à une multiplication par une constante près)

$$M_c : \varphi \mapsto \int_V \varphi(x, v') d\mu(v').$$

Tout compte fait, on est amené à montrer la faible compacité de  $K_0 R(\lambda, T) M_c$ . Des arguments analogues nous permettent de supposer  $K_0$  de la forme

$$M_0 : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, \rho, \omega') d\omega'.$$

Montrons donc que  $M_0 R(\lambda, T) M_c$  est faiblement compact. En vertu de la positivité, on peut écrire

$$M_0 R(\lambda, T) M_c \leq R M_0 R(\lambda, T_\infty) M_c E,$$

où  $E$  est l'opérateur d'extension à  $\mathbb{R}^N \times V$ ,  $R$  est l'opérateur de restriction à  $\Omega \times V$  et  $T_\infty$  est l'opérateur d'absorption sur  $\mathbb{R}^N \times V$  (avec  $\sigma = 0$ ). Il suffit de montrer la faible compacité de

$$R M_0 R(\lambda, T_\infty) : L^1(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto R \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\rho |x' - x|^{N-1}} e^{-\frac{\lambda}{\rho} |x' - x|} \varphi(x') dx' \in L^1(\Omega \times I),$$

qui est limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) pour la topologie uniforme de

$$O_\varepsilon : L^1(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto R \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\{\rho \geq \varepsilon\}} \frac{1}{\rho |x' - x|^{N-1}} e^{-\frac{\lambda}{\rho} |x' - x|} \varphi(x') dx' \in L^1(\Omega \times I),$$

qui est à son tour dominé par  $PO'_\varepsilon$ , où  $P : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega \times I)$  et

$$O'_\varepsilon : L^1(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto R \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{\lambda |x - x'|}{\varepsilon}}}{\varepsilon |x' - x|^{N-1}} \varphi(x') dx' \in L^1(\Omega).$$

Ce dernier est, d'après [21, Corollaire IV.27, p. 74], compact car  $\frac{e^{-\frac{\lambda |\cdot|}{\varepsilon}}}{|\cdot|^{N-1}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ , ce qui finit la preuve.  $\blacksquare$

**Remarque 5.3.2.** Dans [49], pour l'analyse spectrale de  $T + K$ , les auteurs montrent la faible compacité de  $[(K_c + K_d)R(\lambda, T + K_0)]^{r+1}$ . Pour cela, ils supposent qu'il existe  $\rho_t \in I$  tel que

$$k_0(x, \rho, \omega, \omega') = 0 \text{ pour } \rho > \rho_t, \text{ et } k_d^{(m)}(x, \rho, \omega, \omega') = 0 \text{ pour } \rho < \rho_t,$$

qui entraîne en particulier

$$K_d R(\lambda, T) K_0 = 0 \text{ pour } \lambda \in \rho(T),$$

et ils montrent ([49, Lemma 4]) que les opérateurs  $K_c R(\lambda, T) K_c$ ,  $K_d R(\lambda, T) K_c$  et  $K_c R(\lambda, T) K_0$  sont faiblement compacts. En revanche nous, nous avons établi la faible compacité de  $K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d) K_c$ , sous des hypothèses plus générales (Remarque 5.3.1) et par une démonstration rendue plus simple grâce aux arguments d'approximation et de domination. Notre démarche est aussi différente de [49] : on perturbe  $T + K_0$  par  $K_d$  puis par  $K_c$  alors que dans [49], ils perturbent  $T + K_0$  directement par  $K_d + K_c$ .

**Remarque 5.3.3.** La même image spectrale que celle décrite dans la fin de la Section 5.2.1 demeure valable ici. En effet, en utilisant le Théorème 5.3.1, l'opérateur  $K_c R(\lambda, T + K_0 + K_d)$  est à puissance quatrième compacte et l'alternative de Gohberg-Shmulyan (cf. Remarque 1.4.2) permet de conclure.

### 5.3.2 Étude du problème d'évolution

Avant d'aborder l'étude du semigroupe  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ , exprimons le à l'aide de la série de Dyson-Phillips relativement à  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$

$$e^{t(T+K)} = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t),$$

où  $V_0(t) = e^{t(T+K_0+K_d)}$  et  $V_{i+1}(t) = \int_0^t V_i(s)K_c V_0(t-s)ds$ . On pose

$$R_n(t) = \sum_{i=n}^{\infty} V_i(t).$$

**Théorème 5.3.2.** *Supposons que les hypothèses (H6)–(H10) soient vraies. Alors le reste d'ordre 2 de la série de Dyson-Phillips de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  relativement à  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  est faiblement compact, i.e.  $R_2(t)$  est faiblement compact.*

**Preuve.** Ici aussi le théorème est vrai aussi dans le cas  $\rho_{max} = \infty$ , on fera donc la preuve dans ce cadre général. D'après le Lemme 1.4.1

$$\begin{aligned} R_2(t) &= [e^{t(T+K_0+K_d)}K_c]^2 * e^{t(T+K)} \\ &= e^{t(T+K_0+K_d)} * K_c e^{t(T+K_0+K_d)} K_c * e^{t(T+K)}, \end{aligned}$$

et donc en vertu de la Proposition 1.4.1 il suffit de montrer la faible compacité de

$$K_c e^{t(T+K_0+K_d)} K_c$$

pour tout  $t > 0$ . Par ailleurs, on peut exprimer  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  à l'aide de la série de Dyson-Phillips relativement à  $(e^{tT})_{t \geq 0}$ , i.e.

$$e^{t(T+K_0+K_d)} = \sum_{i=0}^{\infty} U_i(t),$$

où

$$U_0(t) = e^{tT} \text{ et } U_{i+1}(t) = \int_0^t U_i(s)(K_0 + K_d)U_0(t-s)ds.$$

Nous savons aussi que la suite  $(\sum_{j=0}^n K_c U_j(t) K_c)_n$  converge dans  $\mathcal{L}(L^1(\Omega \times V))$  vers  $K_c e^{t(T+K_0+K_d)} K_c$  uniformément en  $t$  borné. Il suffit donc de montrer que pour tout entier  $n$ , l'opérateur  $\sum_{j=0}^n K_c U_j(t) K_c$  est faiblement compact ou ce qui revient aussi à montrer que  $K_c U_j(t) K_c$  est faiblement compact pour tout entier  $j$ . Fixons alors un  $j \in \mathbb{N}$  et occupons nous de  $K_c U_j(t) K_c$ . L'opérateur  $K_c U_j(t) K_c$  est dominé par  $|K_c U_j^{|K_0|+C_d}(t) K_c|$ , i.e.

$$|K_c U_j^{K_0+K_d}(t) K_c \varphi| \leq |K_c U_j^{|K_0|+C_d}(t) K_c| |\varphi|,$$

où

$$|K_c| : L^1(\Omega \times V) \ni \varphi \mapsto \int_V |k_c(x, v, v')| \varphi(x, v') dv',$$

$$|K_0| : L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |k_0(x, \rho, \omega, \omega')| \varphi(x, \rho, \omega') d\omega' \in L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}),$$

$$C_d : L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \sum_{i=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \|k_d^{(i)}\|_\infty \varphi(x, e_m(\rho), \omega') d\omega' \in L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$$

et  $U_j^{K_0+K_d}(t)$  (resp.  $U_j^{|K_0|+C_d}(t)$ ) est le terme d'ordre  $j$  de la série de Dyson-Phillips donnant  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  (resp.  $(e^{t(T+|K_0|+C_d)})_{t \geq 0}$ ) à partir de  $(e^{tT})_{t \geq 0}$ . Par domination (Théorème 1.4.13) on peut donc supposer, sans perte de généralité,  $K_c$  et  $K_0$  positifs et  $K_d = C_d$ . Par ailleurs, l'opérateur  $K_c$  est approchable en norme par les opérateurs

$$K_c^{(i)} : \varphi \mapsto \int_V k_c(x, v, v') \chi_{\{v \in V : |v| \leq i\}} \varphi(x, v') dv'$$

et quitte à remplacer  $K_c$  par un certain  $K_c^{(i)}$ , on peut supposer  $\rho_{max} < \infty$ . D'autre part, puisque  $K_c U_j^{K_0+K_d}(t) K_c$  dépend continûment, en norme d'opérateur, de  $K_0$  et de  $K_c$ , grâce aux Propositions 5.3.1 et 5.3.2 (approximation et domination) on peut supposer  $K_c$  de la forme

$$\varphi \mapsto f(v) \int_V \varphi(x, v') dv',$$

où  $f(\cdot) \in L^1(V)$  et  $K_0$  de la forme

$$\varphi \mapsto g(\omega) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, \rho, \omega') d\omega'$$

avec  $g(\cdot) \in L^1(\mathbb{S}^{N-1})$ . Par approximation on peut supposer que  $f(\cdot) \in L^\infty(V)$  et  $g(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$  et par domination on peut même les supposer constantes (égales à  $\max\{\|f(\cdot)\|_\infty, \|g(\cdot)\|_\infty\}$ ). Enfin, par linéarité on peut supposer que les opérateurs  $K_c$ ,  $K_0$  et  $K_d$  sont respectivement

$$M_c : \varphi \mapsto \int_V \varphi(x, v') dv', \quad M_0 : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, \rho, \omega') d\omega'$$

et

$$M_d = \sum_{i=1}^l M_i \text{ avec } M_i : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, e_i(\rho), \omega') d\omega'.$$

Procédons selon la valeur de  $j$ .

**Cas  $j = 0$ .** Dans ce cas,  $M_c U_0(t) M_c = M_c e^{tT} M_c$ . Ce dernier a été montré faiblement compact (cf. [68, Theorem 4.11, p. 80]).

**Cas  $j > 1$ .** Dans ce cas, il suffit de montrer que

$$M_c U_j(t) : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$$

est faiblement compact. En notant  $U = e^{tT}$  et en décomposant  $M_c = MM_0$ , où

$$M : \varphi \mapsto \int_I \varphi(x, \rho, \omega) \rho^{N-1} d\rho,$$

on écrit

$$M_c U_j = MM_0 [U(M_0 + M_d)]^j * U.$$

Ainsi, par linéarité, on peut se contenter de montrer que

$$MM_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U \quad (5.10)$$

est faiblement compact pour tout  $j$ -uplet  $(i_1, \dots, i_j) \in \{0, 1, \dots, l\}^j$ . On s'aperçoit que, l'opérateur (5.10) est "une intégrale forte" (modulo l'identification  $L^1(\Omega \times I) \sim L^1(I, L^1(\Omega))$ ). En effet, si pour  $\rho$  fixé, on note par  $M_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U[\rho]$  l'opérateur borné suivant :

$$L^1(\Omega) \ni \varphi \mapsto (M_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U \varphi)(\cdot, \rho) \in L^1(\Omega),$$

alors l'opérateur (5.10) s'obtient en intégrant la famille

$$\{M_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U[\rho] : \rho \in I\},$$

i.e. pour tout  $\varphi \in L^1(\Omega)$ ,

$$MM_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U \varphi = \int_I M_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U[\rho] \varphi \rho^{N-1} d\rho$$

D'autre part, les opérateurs  $M_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U[\rho]$  sont *bornés uniformément* en  $\rho \in I$  dans  $\mathcal{L}(L^1(\Omega))$ , et la *propriété de compacité des intégrales fortes* (Théorème 1.4.7) assure, alors, que l'opérateur (5.10) est faiblement compact pourvu que  $M_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U[\rho]$  soit faiblement compact pour tout  $\rho \in I$ . Ainsi, on est amené à vérifier cette faible compacité. Désignons par  $T_\infty$  l'opérateur d'absorption sur  $\mathbb{R}^N$  (avec  $\sigma = 0$ ) et notons  $U_\infty = e^{tT_\infty}$ . Alors pour tout  $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$M_0 U * M_{i_1} U * \cdots * M_{i_j} U M[\rho] \varphi \leq R M_0 U_\infty * M_{i_1} U_\infty * \cdots * M_{i_j} U_\infty[\rho] E \varphi,$$

où  $E$  et  $R$  désignent respectivement l'opérateur extension à  $\mathbb{R}^N$  (par zéro) et l'opérateur restriction à  $\Omega$ . Par un argument de domination, il suffit de montrer que l'opérateur

$$L^1(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto R M_0 U_\infty * M_{i_1} U_\infty * \cdots * M_{i_j} U_\infty[\rho] \varphi \in L^1(\Omega) \quad (5.11)$$

est faiblement compact. Or, on verra dans le Lemme 5.3.1 (qui suit la preuve) qu'il existe une fonction  $\beta_j(t, \rho) \in L^1(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$M_0 U_\infty * M_{i_1} U_\infty * \cdots * M_{i_j} U_\infty[\rho] \varphi = \beta_j(t, \rho) * \varphi.$$

Par conséquent, d'après [21, Corollaire IV. 27, p.74], l'opérateur (5.11) est faiblement compact, ce qui achève la preuve. ■

**Lemme 5.3.1.** *Pour tout  $j$ -uplet ( $j \geq 2$ )  $(i_1, \dots, i_j) \in \{0, 1, \dots, l\}^j$ , il existe une fonction (intégrable) telle que pour tout  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$*

$$M_{i_1}U_\infty * \dots * M_{i_j}U_\infty[\rho]\varphi = \beta_j(t, \rho) * \varphi.$$

On rappelle que  $M_i : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, e_i(\rho), \omega') d\omega'$  avec la convention  $e_0(\rho) = \rho$ .

**Preuve.** On va montrer le lemme par récurrence sur  $j$ . D'abord, il est clair que pour  $i \in \{0, 1, \dots, l\}$ ,

$$M_i U_\infty(t)[\rho] = d\omega_{te_i(\rho)} * \varphi,$$

où  $d\omega_s$  est la mesure image de la mesure  $d\omega$  par l'homothétie  $v \mapsto sv$ . Soit  $(i_1, i_2) \in \{0, 1, \dots, l\}^2$ . On a

$$\begin{aligned} M_{i_1}U_\infty * M_{i_2}U_\infty[\rho]\varphi &= \int_0^t M_{i_1}U_\infty(s) [d\omega_{(t-s)e_{i_2}(\rho)} * \varphi] ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{N-1}} [d\omega_{(t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))} * \varphi](x - se_{i_1}(\rho)\omega) d\omega ds \\ &= \int_0^t d\omega_{se_{i_1}(\rho)} * [d\omega_{(t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))} * \varphi] ds \\ &= \left[ \int_0^t d\omega_{se_{i_1}(\rho)} * d\omega_{(t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))} ds \right] * \varphi. \end{aligned}$$

Comme la mesure de Radon  $\int_0^t d\omega_{se_{i_1}(\rho)} * d\omega_{(t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))} ds$  est (clairement) bornée, par le théorème de Radon-Nikodym, il suffit de vérifier qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^N$ , i.e.

$$I_A := \int_0^t d\omega_{se_{i_1}(\rho)} * d\omega_{(t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))} ds \{A\} \rightarrow 0 \text{ quand } |A| \rightarrow 0,$$

où  $|A|$  désigne la mesure de  $A$  par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^N$ . Comme

$$\begin{aligned} I_A &= \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \chi_A(v_1 + v_2) d\omega_{se_{i_1}(\rho)}(v_1) \otimes d\omega_{(t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))}(v_2) ds \\ &= \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \chi_A(se_{i_1}(\rho)v_1 + (t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))v_2) d\omega(v_1) d\omega(v_2) ds, \end{aligned}$$



le changement de variable  $v'_1 = e_{i_1}(\rho)v_1$  et  $v'_2 = e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))v_2$  conduit à montrer

$$I'_A := \int_0^t \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \chi_A(sv'_1 + (t-s)v'_2) d\omega^1(v_1) d\omega^2(v'_2) ds \rightarrow 0 \text{ quand } |A| \rightarrow 0,$$

où  $d\omega^1$  (resp.  $d\omega^2$ ) est la mesure de Lebesgue sur la sphère  $\{v \in \mathbb{R}^N : |v| = e_{i_1}(\rho)\}$  (resp.  $\{v \in \mathbb{R}^N : |v| = e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))\}$ ). Ce qu'on peut vérifier en utilisant [68, p. 82]. On peut aussi facilement établir que la désormais fonction

$$\int_0^t d\omega_{se_{i_1}(\rho)} * d\omega_{(t-s)e_{i_2}(e_{i_1}(\rho))} ds$$

est uniformément bornée (en norme  $L^1$ ) en  $(t, \rho) \in [0, T] \times I$  et ce pour tout  $T > 0$ . Supposons maintenant que le lemme soit vrai jusqu'à l'ordre  $j$ . Soit un  $(j+1)$ -uplet  $(i_1, \dots, i_{j+1}) \in \{0, 1, \dots, l\}^{j+1}$ . Par l'hypothèse de récurrence il existe une fonction  $\eta(t, \rho)$  telle que

$$[M_{i_2}U_\infty * \dots * M_{i_{j+1}}U_\infty](t)[\rho]\varphi = \eta(t, \rho) * \varphi.$$

Alors

$$\begin{aligned} & M_{i_1}U_\infty * M_{i_2}U_\infty * \dots * M_{i_{j+1}}U_\infty[\rho]\varphi \\ &= \int_0^t M_{i_1}U_\infty[\eta((t-s), \rho) * \varphi] ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{N-1}} [\eta((t-s), e_{i_1}(\rho)) * \varphi](x - se_{i_1}(\rho)\omega) d\omega ds \\ &= \int_0^t d\omega_{se_{i_1}(\rho)} * [\eta((t-s), e_{i_1}(\rho)) * \varphi] ds \\ &= \left[ \int_0^t d\omega_{se_{i_1}(\rho)} * \eta((t-s), e_{i_1}(\rho)) ds \right] * \varphi \\ &=: \beta(t, \rho) * \varphi. \end{aligned}$$

Comme pour tout  $t$  et  $\rho$ ,  $\eta(t, \rho)$  est une fonction intégrable (en fait uniformément intégrable en  $(t, \rho) \in [0, T] \times I$  pour tout  $T > 0$ ) on déduit que  $\beta(t, \rho)$  est aussi une fonction intégrable. Ceci finit la preuve.  $\blacksquare$

Comme conséquence immédiate du Théorème 5.3.2 on a :

**Corollaire 5.3.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 5.3.2, on a  $\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T + K_0)$ . En particulier,*

$$\sigma(e^{t(T+K)}) \cap \{\mu : |\mu| > e^{t\omega_{ess}(T+K_0)}\}$$

*est formé, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

**Preuve.** Comme  $R_2(t)$  est compact pour tout  $t > 0$ , les semigroupes  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  et  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  ont le même type essentiel. Or, le type essentiel de ce dernier semigroupe est égal à  $\omega_{ess}(T + K_0)$  (cf. (5.6)). ■

## 5.4 Quelques remarques

L'équation de transport dans une bande infinie (mais d'épaisseur finie  $2a$ ) se ramène, grâce à des considérations de symétrie, à une équation monodimensionnelle

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma(x, \rho, \omega) \varphi(x, \rho, \omega, t) \\ = & \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \int_{-1}^1 k_c(x, \rho, \omega, \rho', \omega') \varphi(x, \rho', \omega', t) d\omega' d\rho' \\ & + \sum_{m=1}^l \int_{-1}^1 k_d^{(m)}(x, e_m(\rho), \omega, \omega') \varphi(x, e_m(\rho), \omega', t) d\omega' \\ & + \int_{-1}^1 k_0(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(x, \rho, \omega', t) d\omega', \end{aligned}$$

où  $\rho$  est le module de la vitesse,  $\omega$  est le cosinus de l'angle que fait la vitesse avec un axe de référence perpendiculaire au plan de la bande et varie dans  $] - 1, 1[$ , et  $d\omega$  (resp.  $d\rho$ ) désigne la mesure de Lebesgue sur  $] - 1, 1[$  (resp. sur  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ ). Les résultats de ce chapitre (ainsi que ceux du suivant) demeurent valables pour ces équations.

Dans [68, Chapter 4] on trouve le

**Théorème 5.4.1.** [68, Theorem 4.12, p. 92] *Soient  $1 < p < \infty$  et  $\mu$  une mesure de Radon ne chargeant pas les hyperplans affines. Soit  $K = K_1 + K_2$  avec  $K_1$  borné et  $K_2$  régulier (cf. Définition 2.2.1). On pose*

$$\beta = \inf\{\alpha : \alpha > -\lambda^*, r_\sigma(R(\lambda, T)K_1) < 1 \forall \operatorname{Re}\lambda > \alpha\}.$$

*Alors  $\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \beta\}$  est formé, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.*

suiwi des questions suivantes (cf. [68, Problems 1, 2 & 3, p. 93]) :

**Question 5.4.1.** *Quelle est la structure du spectre de  $T + K$  dans la région  $\{\lambda^* < \lambda < \beta\}$ ?*

**Question 5.4.2.** *Le Théorème 5.4.1 reste-t-il valable dans  $L^1$  ?*

**Question 5.4.3.** *Trouver, sous les hypothèses du Théorème 5.4.1, une estimation sur le type essentiel de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ .*

Essayons de donner quelques éléments de réponse à ces questions à la marge du problème abordé dans ce chapitre. Pour la première question, une réponse est donnée à la page 180 (voir Figure 6.2). Avant d'aborder les deux autres, quelques mots sur le Théorème 5.4.1. En fait, on peut dire que  $s(T + K_1) \leq \beta$ . En effet, soit  $\lambda_1 \in \sigma(T + K_1)$  avec  $Re\lambda_1 = s(T + K_0)$  (si  $K_1$  est un opérateur positif, on peut prendre  $\lambda_1 = s(T + K_1)$ ), alors  $1 \in \sigma(R(\lambda_1, T)K_1)$ , et par conséquent  $r_\sigma(R(\lambda_1, T)K_1) \geq 1$ . Ce qui entraîne  $s(T + K_1) \leq \beta$ . Si l'opérateur  $K_1$  est positif alors on a même égalité entre  $\beta$  et  $s(T + K_1)$ .

Répondons maintenant à la Question 5.4.2. On pose  $K_1 = K_0 + K_d$  et  $K_2 = K_c$ . Grâce à la compacité d'une puissance de  $R(\lambda, T + K_1)K_2$  (cf. Théorème 5.3.1) et l'alternative de Gohberg-Shmulyan on conclut (cf. Remarque 5.3.3) que

$$\sigma(T + K) \cap \{\lambda : Re\lambda > s(T + K_0 + K_d)\}$$

est formé, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie, c'est à dire que le Théorème 5.4.1 reste vrai dans  $L^1$  pour le problème étudié dans ce chapitre.

Pour la Question 5.4.3, nous avons déjà donné une réponse à la Section 4.3.3 dans le cadre  $L^2$  en montrant que

$$\sigma_{ess}(e^{t(T+K)}) = \sigma_{ess}(e^{t(T+K_1)}) \quad (t \geq 0).$$

Si maintenant  $1 \leq p < \infty$  et  $p \neq 2$ , nous avons une réponse dans le cadre du problème traité dans ce chapitre. En effet, si l'on pose  $K_1 = K_0 + K_d$  et  $K_2 = K_c$ , grâce aux Corollaires 5.2.1 et 5.3.1 nous avons :  $\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T + K_1)$ . Si, de plus, les opérateurs  $K_0$  et  $K_d$  sont positifs, alors  $\omega_{ess}(T + K) \leq s(T + K_1)$ . Nous allons voir en fait dans le Corollaire 6.4.1 que cette dernière inégalité peut être une égalité.

# Chapitre 6

## Propriétés spectrales liées à la positivité

### 6.1 Introduction

Le présent chapitre vise à présenter l'image spectrale de  $T + K$  et celle du semigrroupe associé. Les résultats du chapitre précédent nous incitent à examiner en particulier le spectre de  $T + K_0$ . Ce dernier a été déjà décrit dans  $L^1(\Omega \times V)$  sous des hypothèses adéquates de continuité par morceaux sur les noyaux et la fréquence de collision. E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL [49] considèrent  $T + K_0$  comme une famille de problèmes  $(T^\rho + K_0^\rho)_{\rho \in I}$ , où  $T^\rho + K_0^\rho$  est l'opérateur *monocinétique* suivant :

$$\varphi \mapsto -\rho\omega \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sigma(x, \rho\omega)\varphi(x, \omega) + \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega')\varphi(x, \omega')d\omega'.$$

dont le spectre est constitué, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Quand  $\rho$  varie,  $\sigma(T^\rho + K_0^\rho)$  décrit des "courbes". En effet, E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL montrent que dans le cas  $\rho_{min} > 0$  le spectre de  $T + K_0$  est formé de la fermeture de ces courbes. Quand l'espace des vitesses contient zéro, le spectre de  $T + K_0$  est constitué de la fermeture desdites courbes et d'un demi-plan

$$\{\lambda : Re\lambda \leq -\lambda^*\}.$$

Ces courbes peuvent disparaître, notamment si  $\rho K_0$  est borné et si  $\Omega$  est de diamètre assez petit. Toutefois, certains de ces résultats sont établis d'une manière *formelle* ; un des objectifs de ce chapitre est donc de donner une *rigueur* mathématique à ces résultats. Nous montrons, en plus, que tout le spectre de  $T + K$  est réduit à du spectre essentiel. La Section 6.3 est constituée d'une série de résultats spectraux liés à la positivité. Parmi ceux là, la description suivante du spectre périphérique de  $T + K_0$  : Il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : Re\lambda \geq s(T + K_0) - \delta\} \subset \mathbb{R}.$$

On donnera des critères d'irréductibilité du semigroupe  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  et des résultats de monotonie de la valeur propre principale et de l'abscisse spectrale  $s(T + K_0)$ .

Enfin, dans la Section 6.4 on transférera l'image spectrale obtenue sur le générateur au semigroupe associé en établissant

$$\sigma(e^{t(T+K)}) = e^{t\sigma(T+K)} \cup \{0\} \quad t \geq 0, \quad (6.1)$$

et on déterminera, à l'occasion, le type essentiel  $\omega_{ess}(T + K) = s(T + K_0)$ .

### Hypothèses générales

Dans **tous** les énoncés de ce chapitre, nous supposons (en plus des hypothèses propres à chaque énoncé), même si nous ne le précisons pas, que les hypothèses suivantes sont vraies. Le domaine  $\Omega$  est *convexe* et la fréquence de collision est *homogène*, i.e.

$$\sigma(x, v) = \sigma(v).$$

On suppose que l'opérateur de collision élastique  $K_0$  vérifie :

$$\left\{ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \varphi(\omega') d\omega' : x \in \Omega, \rho \in I, \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{S}^{N-1})} \right\}$$

est relativement compact, et pour tout  $\psi' \in L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$  l'ensemble

$$\left\{ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega') \psi'(\omega) d\omega : x \in \Omega, \rho \in I \right\}$$

est relativement compact dans  $L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$ . L'opérateur  $K_0$  est alors borné et peut être approché, dans  $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}))$ , par des opérateurs possédant un noyau de la forme

$$\sum_{i \in J} \alpha_i(x, \rho) f_i(\omega) g_i(\omega'),$$

où  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega \times I)$ ,  $f_i \in L^p(\mathbb{S}^{N-1})$  et  $g_i \in L^{p'}(\mathbb{S}^{N-1})$ , ( $i \in J \subset \mathbb{N}$ ) avec  $J$  fini et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Pour  $1 < p < \infty$  ces deux dernières hypothèses correspondent à **(H3)**-**(H4)**, pour  $p = 1$ , elles sont moins générales que **(H8)**-**(H9)**.

On suppose que les opérateurs de collision inélastiques  $K_d^{(m)}$  sont à noyaux bornés. Enfin, sur l'opérateur de collision classique  $K_c$  on fait les hypothèses **(H1)**-**(H2)** si  $1 < p < \infty$ , et les hypothèses, **(H6)**-**(H7)** si  $p = 1$ .

## 6.2 Spectre de $T + K_0$

Dans cette section, on décrit le spectre de  $T + K_0$  et sa nature sous des hypothèses que l'on précisera par la suite. Notre démarche est analogue à celle de [49] et s'appuie sur l'opérateur monocinétique, obtenu à  $\rho$  fixé.

### 6.2.1 Spectre de l'opérateur monocinétique

Dans ce paragraphe on dresse, en bref, quelques propriétés connues de l'opérateur monocinétique [44, 68] dont on aura besoin pas la suite. Par opérateur monocinétique on désigne l'opérateur non borné

$$T^\rho + K_0^\rho : \varphi \mapsto -\rho\omega \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \sigma(\rho\omega)\varphi + \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \omega')\varphi(x, \omega')d\omega' \in L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

dont le domaine

$$D(T^\rho + K_0^\rho) = \{\varphi \in L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) : \omega \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), \varphi|_{\Gamma_-} = 0\}$$

ne dépend pas de  $\rho$ . L'opérateur  $K_0^\rho R(\lambda, T^\rho)$  est à puissance compacte<sup>1</sup> dans  $L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ . Le type essentiel de  $(e^{t(T^\rho + K_0^\rho)})_{t \geq 0}$  vaut  $-\infty$ , en particulier,  $\sigma(T^\rho + K_0^\rho)$  est formé, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Ces valeurs propres vérifient

$$\lambda \in \sigma_p(T^\rho + K_0^\rho) \text{ si et seulement si } 1 \in \sigma_p(R(\lambda, T^\rho)K_0^\rho). \quad (6.2)$$

Lorsque  $\sigma(T^\rho + K_0^\rho)$  n'est pas vide (et le noyau  $k_0(x, \rho, \omega, \omega') \geq 0$ ),  $T^\rho + K_0^\rho$  admet une valeur propre principale strictement dominante, que l'on notera  $\lambda_\rho$ , et on a de plus la caractérisation suivante :

$$\sigma(T^\rho + K_0^\rho) \neq \emptyset \text{ si et seulement si } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} r_\sigma(R(\lambda, T^\rho)K_0^\rho) > 1$$

et  $\lambda_\rho$  est l'unique solution de l'équation

$$r_\sigma(R(\lambda, T^\rho)K_0^\rho) = 1.$$

Si l'on suppose que pour  $\rho$  fixé

$$k_0(x, \rho, \omega, \omega') > 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1},$$

alors

- $(e^{t(T^\rho + K_0^\rho)})_{t \geq 0}$  est irréductible (cf. [68, Theorem 5.16, p. 111]) (la définition de l'irréductibilité sera donnée ultérieurement, Définition 6.3.1).
- $\sigma(T^\rho + K_0^\rho) \neq \emptyset$  (cf. [68, Theorem 5.17, p. 113]) et la valeur propre principale  $\lambda_\rho$  est algébriquement simple.

Avant de donner l'image spectrale de  $T + K_0$  mentionnons encore quelques faits. En premier, convenons de certaines

<sup>1</sup>Plus précisément, lorsque  $p > 1$  c'est  $R(\lambda, T^\rho)K_0^\rho$  qui est compact et pour  $p = 1$  c'est  $K_0^\rho R(\lambda, T^\rho)K_0^\rho$  qui est compact [68, Chapter 4].

**Notations.** Pour alléger les écritures on utilisera les notations suivantes  $[I]$ ,  $[I[, ]I]$  et  $]I[$  pour désigner respectivement les intervalles suivants  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$ ,  $[\rho_{min}, \rho_{max}[$ ,  $] \rho_{min}, \rho_{max}]$  et  $] \rho_{min}, \rho_{max}[$ . De même on écrira  $\cup_{]I[} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)$  au lieu de  $\cup_{\rho \in ]I[} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)$  etc...

On a besoin de mesurer comment l'opérateur non borné  $T^\rho + K^\rho$  varie avec  $\rho$ , un premier pas vers ce but est le

**Lemme 6.2.1.** *Supposons que  $I \ni \rho \mapsto \sigma(\rho\omega)$  soit continue.*

(1) *Pour tout  $Re\lambda > -\lambda^*$*

$$I \ni \rho \mapsto R(\lambda, T^\rho) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

*est continue.*

(2) *Si  $I \ni \rho \mapsto K_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$  est continue et si  $\lambda \notin \overline{\cup_I \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}$ , alors*

$$I \ni \rho \mapsto R(\lambda, T^\rho + K_0^\rho) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

*est continue.*

**Preuve.** Sachant que

$$R(\lambda, T^\rho)\varphi(x, \omega) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\tau(x, \omega)} \varphi(x - t\omega, \omega) e^{-t \frac{\lambda + \sigma(\rho\omega)}{\rho}} dt,$$

la preuve du premier point est immédiate. Pour le second point, remarquons que si  $\lambda \in \rho(T^\rho + K_0^\rho)$ , alors  $1 \in \rho(K_0^\rho R(\lambda, T^\rho))$  et on a, de plus, l'égalité

$$R(\lambda, T^\rho + K_0^\rho) = R(\lambda, T^\rho)R(1, K_0^\rho R(\lambda, T^\rho)),$$

c'est donc une composition d'applications continues en utilisant le premier point.

■

**Remarque 6.2.1.** *On peut aussi établir que si  $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\cup_I \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}$  et si  $(\rho_n)_n \subset [\rho_{min}, \rho_{max}]$  sont deux suites convergeant respectivement vers  $\widehat{\lambda}$  et  $\widehat{\rho}$ , alors*

$$\|R(\lambda_n, T^{\rho_n}) - R(\widehat{\lambda}, T^{\widehat{\rho}})\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

et

$$\|R(\lambda_n, T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n}) - R(\widehat{\lambda}, T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}})\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

On introduit maintenant la notion de la **convergence généralisée** :

**Définition 6.2.1.** *On dira que la suite  $(T_n)_n$  d'opérateurs fermés non bornés converge au sens généralisé vers l'opérateur non borné et fermé  $T$  s'il existe  $\lambda \in \rho(T)$  tel que  $\lambda \in \rho(T_n)$  pour  $n$  assez grand et  $R(\lambda, T_n)$  converge dans  $\mathcal{L}(X)$  vers  $R(\lambda, T)$ .*

On peut, dans cette définition, remplacer "il existe un  $\lambda \in \rho(T)$ " par "pour tout  $\lambda \in \rho(T)$ ". Pour plus de détails sur cette notion de convergence généralisée, on renvoie le lecteur à [46, p. 206].

Ainsi, la remarque précédente entraîne en particulier que la suite  $(T^{\rho_n})_n$  (resp.  $(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})_n$ ) converge vers  $T^{\hat{\rho}}$  (resp.  $T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}}$ ) au sens généralisé.

Le théorème suivant justifie notre recours à cette notion.

**Théorème 6.2.1.** [46, p. 212] *Soit  $(T_n)_n$  une suite d'opérateurs convergeant au sens généralisé vers  $T$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre isolée de  $T$  de multiplicité algébrique finie  $m$  et  $\varepsilon > 0$ , de sorte que*

$$D(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda\},$$

*alors pour  $n$  suffisamment grand*

$$D(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma(T_n)$$

*est constitué de  $m$  valeurs propres (chaque valeur propre étant comptée autant de fois sa multiplicité algébrique).*

**Remarque 6.2.2.** *Le but de cette remarque est de mettre en évidence une propriété, à laquelle on référera par **propriété de décomposition**, dont jouit le semigroupe  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$ . Cette propriété est liée au fait que l'opérateur  $T + K_0$  "ne mélange pas" les modules de vitesses. Soit  $(I_i)_{i \in J} \subset I$  une partition finie et mesurable de  $I$  i.e.  $\cup_{i \in J} I_i = I$  et  $\cap_{i \in J} I_i = \emptyset$ . Alors*

$$L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \bigoplus_{i \in J} L^p(\Omega \times I_i \times \mathbb{S}^{N-1})$$

*et*

$$e^{t(T+K_0)}(L^p(\Omega \times I_i \times \mathbb{S}^{N-1})) \subset L^p(\Omega \times I_i \times \mathbb{S}^{N-1}),$$

*si bien que*

$$e^{t(T+K_0)} = \bigoplus_{i \in J} e^{t(T^{(i)}+K_0^{(i)})}$$

*et*

$$T + K_0 = \bigoplus_{i \in J} T^{(i)} + K_0^{(i)},$$



où  $(e^{t(T^{(i)}+K_0^{(i)})})_{t \geq 0}$  est la restriction de  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$  à  $L^p(\Omega \times I_i \times \mathbb{S}^{N-1})$  et  $T^{(i)} + K_0^{(i)}$  son générateur (en fait,  $T^{(i)} + K_0^{(i)}$  est l'analogue de  $T + K$  dans  $\Omega \times I_i \times \mathbb{S}^{N-1}$ ). En particulier, on a

$$\sigma(T + K_0) = \bigcup_{i \in J} \sigma(T^{(i)} + K_0^{(i)}).$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'image spectrale de  $T + K_0$ . Lorsque  $\rho_{min} > 0$ , cette image est décrite dans le théorème suivant :

**Théorème 6.2.2.** *Supposons que  $\rho_{min} > 0$  et que*

$$I \ni \rho \mapsto K_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})) \quad (6.3)$$

*soit continue par morceaux. Alors*

$$\sigma(T + K_0) = \sigma_{ap}(T + K_0) = \overline{\cup_I \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}.$$

**Preuve.** Dans un premier temps on suppose l'application (6.3) continue et on montre que

$$\sigma(T + K_0) = \cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho) = \overline{\cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}.$$

On commence par établir

$$\cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho) \subset \sigma(T + K_0).$$

Pour ce faire, soit  $\hat{\lambda} \in \sigma(T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}}) = \sigma_p(T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}})$  pour un certain  $\hat{\rho} \in [I]$  à laquelle on associe une fonction propre  $\phi \in L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$  :

$$\|\phi\| = 1 \text{ et } (\hat{\lambda} - (T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}}))\phi = 0.$$

Supposons d'abord  $\hat{\rho} < \rho_{max}$  et définissons la suite  $(\phi_n)_n$  (pour  $n$  suffisamment grand) par

$$\phi_n(x, \rho, \omega) = \begin{cases} \left(\frac{n}{\rho^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \phi(x, \omega) & \text{si } \hat{\rho} \leq \rho \leq \hat{\rho} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a clairement,  $\|\phi_n\| = 1$ ,

$$\begin{aligned} (\hat{\lambda} - T - K_0)\phi_n(x, \rho, \omega) &= \left(\frac{n}{\rho^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p}} (\sigma(\rho\omega) - \sigma(\hat{\rho}\omega))\phi(x, \omega) \\ &\quad + \left(\frac{n}{\rho^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p}} (\rho - \hat{\rho})\omega \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \omega) \\ &\quad - \left(\frac{n}{\rho^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p}} (K_0^\rho - K_0^{\hat{\rho}})\phi_n(x, \omega), \end{aligned}$$

pour  $\widehat{\rho} \leq \rho \leq \widehat{\rho} + \frac{1}{n}$  et

$$(\widehat{\lambda} - T - K_0)\phi_n(x, \rho, \omega) = 0$$

pour  $\rho < \widehat{\rho}$  ou  $\rho > \widehat{\rho} + \frac{1}{n}$ . D'où

$$\begin{aligned} 2^{-2p} \|(\widehat{\lambda} - T - K_0)\phi_n\|^p &\leq n \int_{\widehat{\rho}}^{\widehat{\rho} + \frac{1}{n}} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\sigma(\rho\omega) - \sigma(\widehat{\rho}\omega)|^p |\phi(x, \omega)|^p d\omega dx d\rho \\ &\quad + \frac{1}{2n} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\omega \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \omega)|^p d\omega dx \\ &\quad + n \int_{\widehat{\rho}}^{\widehat{\rho} + \frac{1}{n}} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |(K_0^\rho - K_0^{\widehat{\rho}})\phi_n(x, \omega)|^p d\omega dx d\rho. \end{aligned}$$

Comme  $\sigma(\cdot)$  est continue en  $\rho$ , on en déduit que

$$\|(\widehat{\lambda} - T - K_0)\phi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

ce qui montre que  $\widehat{\lambda} \in \sigma(T + K_0)$ . Si maintenant  $\rho_0 = \rho_{max}$ , on définit  $(\phi_n)_n$  par

$$\phi_n(x, \rho, \omega) = \begin{cases} \left(\frac{n}{\rho^{N-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \phi(x, \omega) & \text{si } \rho_0 - \frac{1}{n} \leq \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et de la même manière on conclut que  $\widehat{\lambda} \in \sigma(T + K_0)$ .

Montrons à présent que  $\cup_{[l]} \sigma(T^p + K_0^{\rho})$  est fermé.

Soit  $(\lambda_n)_n$ ,  $\lambda_n \in \sigma(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})$ , une suite convergeant vers  $\widehat{\lambda} \in \mathbb{C}$ . La suite  $(\rho_n)_n$  admet une sous suite, notée encore  $(\rho_n)_n$ , qui converge vers  $\widehat{\rho} \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$ , et la suite d'opérateurs compacts  $(K_0^{\rho_n} R(\lambda_n, T^{\rho_n}))_n$  converge, dans  $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$ , vers  $K_0^{\widehat{\rho}} R(\widehat{\lambda}, T^{\widehat{\rho}})$  (cf. Remarque 6.2.1). Puisque  $\lambda_n \in \sigma(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})$ , elle vérifie, d'après (6.2),

$$1 \in \sigma_p(K_0^{\rho_n} R(\lambda_n, T^{\rho_n})).$$

En passant à la limite en  $n$  on obtient  $1 \in \sigma_p(K_0^{\widehat{\rho}} R(\widehat{\lambda}, T^{\widehat{\rho}}))$ . En effet, il existe une suite  $(\varphi_n)_n$  telle que

$$\|\varphi_n\| = 1 \text{ et } K_0^{\rho_n} R(\lambda_n, T^{\rho_n})\varphi_n = \varphi_n.$$

D'où

$$\|K_0^{\widehat{\rho}} R(\widehat{\lambda}, T^{\widehat{\rho}})\varphi_n - \varphi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

et  $1 \in \sigma_{ap}(K_0^\rho R(\widehat{\lambda}, T^\rho))$ . Or, on sait que  $K_0^\rho R(\widehat{\lambda}, T^\rho)$  possède une puissance compacte (voir la Sous-section 6.2.1), et donc forcément 1 en est une valeur propre. Ainsi

$$\lambda \in \sigma(T^\rho + K_0^\rho) \subset \cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho),$$

ce qui établit la fermeture de  $\cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)$ .

En tenant compte de la fermeture du spectre on obtient

$$\sigma(T + K_0) \supset \cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho) \supset \overline{\cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}.$$

Pour prouver que  $\sigma(T + K_0) \subset \cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)$ , il suffit de montrer

$$\mathbb{C} \setminus \cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho) \subset \rho(T + K_0).$$

Pour cela, soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)$  et essayons de résoudre l'équation

$$(\lambda - T - K_0)\varphi = \psi$$

pour  $\psi \in L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$ . Pour tout  $\rho$ , l'équation

$$(\lambda - T - K_0)\varphi(\cdot, \rho, \cdot) = \psi(\cdot, \rho, \cdot)$$

admet une solution de sorte que

$$\|\varphi(\cdot, \rho, \cdot)\|_{L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})} \leq \|R(\lambda, T^\rho + K_0^\rho)\| \|\psi(\cdot, \rho, \cdot)\|_{L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})}.$$

D'autre part, d'après le Lemme 6.2.1, l'application

$$[\rho_{min}, \rho_{max}] \ni \rho \mapsto \|R(\lambda, T^\rho + K_0^\rho)\|$$

est continue, ce qui implique que  $\sup_{\rho \in [I]} \|R(\lambda, T^\rho + K_0^\rho)\| = C < \infty$  et par conséquent

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})} \leq C \|\psi\|_{L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})}.$$

Comme  $\lambda \notin \cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)$  l'égalité  $(\lambda - T - K_0)\varphi = 0$  entraîne que  $\varphi(\cdot, \rho, \cdot) = 0$  pour presque tout  $\rho \in I$ , i.e.  $\varphi = 0$ . Tout compte fait,  $\lambda \in \rho(T + K_0)$ .

Il nous reste à montrer que  $\cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho) \subset \overline{\cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}$  ce qui revient, aussi, à montrer que

$$\sigma(T^{\rho_{min}} + K_0^{\rho_{min}}) \cup \sigma(T^{\rho_{max}} + K_0^{\rho_{max}}) \subset \overline{\cup_{[I]} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}.$$

C'est une conséquence du Théorème 6.2.1. En effet, soit  $(\rho_n)_n \subset ]\rho_{min}, \rho_{max}[$  tendant, par exemple, vers  $\rho_{min}$ , alors d'après le Lemme 6.2.1, la suite  $(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})_n$  converge vers  $T^{\rho_{min}} + K_0^{\rho_{min}}$  au sens généralisé, et les valeurs propres isolées de  $T^{\rho_{min}} + K_0^{\rho_{min}}$  (i.e. tout son spectre) sont, en vertu du Théorème 6.2.1, des limites

de valeurs propres de  $T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n}$ .

On considère maintenant le cas où l'application (6.3) est seulement continue par morceaux. Soient  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  les points de sa discontinuité et définissons  $I_0 = [\rho_{min}, a_1[$ ,  $I_i = [a_i, a_{i+1}[$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  et  $I_n = [a_n, \rho_{max}]$ . Alors d'après la Remarque 6.2.2

$$\sigma(T + K_0) = \bigcup_{i \in J} \sigma(T^{(i)} + K_0^{(i)}),$$

où  $J = \{0, 1, \dots, n\}$ . Or d'après la première partie

$$\sigma(T^{(i)} + K_0^{(i)}) = \overline{\cup_{I_i} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}$$

ce qui finit la preuve. ■

Pour examiner le cas  $\rho_{min} = 0$ , nous ferons l'hypothèse suivante : il existe une constante  $c \geq 0$  telle que

$$\frac{\sigma(\rho\omega) - \lambda^*}{\rho} \geq -c \quad \text{pour } \rho \in I \text{ et } \omega \in \mathbb{S}^{N-1}. \quad (6.4)$$

Cette hypothèse est satisfaite si par exemple  $\text{ess inf } \sigma(v) = \lim_{v \rightarrow 0} \sigma(v)$ . Elle est vérifiée dans de nombreux cas physiques [49, 95]. L'image spectrale devient alors :

**Théorème 6.2.3.** *Supposons que  $\rho_{min} = 0$ , que*

$$I \ni \rho \mapsto K_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

*soit continue par morceaux et que*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|K_0^\rho\| = 0. \quad (6.5)$$

*Alors*

$$\sigma(T + K_0) = \sigma_{ap}(T + K_0) = \sigma(T) \cup \overline{\cup_{I \setminus \{0\}} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}.$$

**Preuve.** Pour tout  $0 < \varepsilon < \rho_{max}$ , définissons  $I_1 = [0, \varepsilon[$  et  $I_2 = [\varepsilon, \rho_{max}]$ . Avec les notations de la Remarque 6.2.2 on a

$$\sigma(T + K_0) = \sigma(T^{(1)} + K_0^{(1)}) \cup \sigma(T^{(2)} + K_0^{(2)}).$$

Le Théorème 6.2.2 nous assure

$$\sigma(T^{(2)} + K_0^{(2)}) = \overline{\cup_{I_2} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)},$$

d'où

$$\overline{\cup_{I_2} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)} \subset \sigma(T + K_0)$$

pour tout  $\varepsilon$  et donc

$$\overline{\cup_{I \cap J} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)} \subset \sigma(T + K_0).$$

D'autre part, d'après le Théorème 1.5.2 et le Lemme 6.5.1

$$\sigma(T^{(1)}) = \sigma_{ap}(T^{(1)}) \subset \sigma_{ap}(T^{(1)} + K_0^{(1)})$$

et d'après toujours le Théorème 1.5.2

$$\sigma(T) = \sigma(T^{(1)}),$$

d'où

$$\sigma(T) \subset \sigma(T + K_0),$$

ce qui prouve l'inclusion " $\supset$ ". Inversement, soit  $\lambda \notin \sigma(T) \cup \overline{\cup_{I \cap J} \sigma(T^\rho + K_0^\rho)}$  (donc  $Re\lambda > -\lambda^*$ ). Nous avons ([49, Proof of Theorem 2])

$$\|R(\lambda, T^{(1)})\| \leq \frac{e^{dc}}{Re\lambda + \lambda^*},$$

où  $d$  est le diamètre de  $\Omega$ . Comme  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \|K_0(\rho)\| = 0$ , on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\|K_0^{(1)}\| = \text{ess sup}_{\rho \in ]0, \varepsilon[} \|K_0^\rho\| < \frac{Re\lambda + \lambda^*}{e^{dc}}$$

de sorte que

$$\|K_0^{(1)} R(\lambda, T^{(1)})\| < 1$$

et donc  $1 \notin \sigma(K_0^{(1)} R(\lambda, T^{(1)}))$ . Or le fait [32, Proposition 4.2, p. 272] que

$$\lambda \in \sigma(T^{(1)} + K_0^{(1)}) \text{ si et seulement si } 1 \notin \sigma(K_0^{(1)} R(\lambda, T^{(1)}))$$

montre que  $\lambda \notin \sigma(T^{(1)} + K_0^{(1)})$ . Pour ce  $\varepsilon$  fixé, il clair que  $\lambda \notin \sigma(T^{(2)} + K_0^{(2)})$ , et donc  $\lambda \notin \sigma(T + K_0)$ . ■

**Remarque 6.2.3.** *Les Théorèmes 6.2.2 et 6.2.3 ont été démontrés dans [49]. Mis à part l'argument de décomposition (Remarque 6.2.2), nos démonstrations reprennent leurs arguments d'une manière plus rigoureuse. E.W. LARSEN P.F. ZWEIFEL ne supposent ni la continuité de  $\rho \mapsto K_0^\rho$  ni (6.5).*

**Remarque 6.2.4.** *Si on suppose qu'au lieu de l'hypothèse (6.5) on ait*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|K_0^\rho\| = a,$$

alors on peut conclure que

$$\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : Re\lambda > ae^{dc} - \lambda^*\} = \overline{\cup_I \sigma(T^\rho + K_0^\rho)} \cap \{\lambda : Re\lambda > ae^{dc} - \lambda^*\}.$$

**Remarque 6.2.5.** *L'application  $I \ni \rho \mapsto R(\lambda, T^\rho + K_0^\rho) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$  est continue au sens généralisé (i.e. la suite  $(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})_n$  converge vers  $T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}}$  pour toute suite  $(\rho_n)_n$  convergeant vers  $\hat{\rho}$ ), en utilisant [46, p. 214 puis Theorem 5.2, p. 109], on peut décrire localement les "courbes" de  $\sigma(T + K_0)$ . En effet, si  $\hat{\lambda} \in \sigma(T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}})$  est une valeur propre isolée de multiplicité algébrique finie  $m$ , alors il existe deux réels  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  et aussi  $m$  applications continues*

$$\lambda_i : ]\hat{\rho} - \delta, \hat{\rho} + \delta[ \rightarrow D(\hat{\lambda}, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$$

tels que

$$\lambda_i(\rho) \in \sigma(T^\rho + K_0^\rho) \text{ pour tout } \rho \in ]\hat{\rho} - \delta, \hat{\rho} + \delta[ \text{ et } \lambda_i(\hat{\rho}) = \hat{\lambda}.$$

### 6.2.2 Spectre essentiel de $T + K_0$

**Théorème 6.2.4.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.2.2 ou du Théorème 6.2.3 on a  $\sigma_{ess}(T + K_0) = \sigma(T + K_0)$ .*

**Preuve.** Pour montrer le théorème nous exhiberons des suites singulières (cf. la Proposition 1.2.2). Commençons par  $\rho_{min} > 0$ . Soit  $\lambda \in \cup_I \sigma(T^\rho + K_0^\rho)$ . La suite approximante correspondante à  $\lambda$  construite dans la preuve du Théorème 6.2.2 est une suite singulière. En effet, comme

$$\text{Supp} \phi_n \subset \Omega \times [\rho_0, \rho_0 + \frac{1}{n}] \times \mathbb{S}^{N-1} \quad (\text{ou } \Omega \times [\rho_{max} - \frac{1}{n}, \rho_{max}] \times \mathbb{S}^{N-1}),$$

la suite  $(\phi_n)_n$  converge presque partout vers 0 et ne peut avoir une sous suite convergente en norme. Le spectre essentiel étant une partie fermée de  $\mathbb{C}$  on termine la preuve en passant à la fermeture. Maintenant, si  $\rho_{min} = 0$ , de la même manière  $\cup_I \sigma(T^\rho + K_0^\rho) \subset \sigma_{ess}(T + K_0)$ . Pour les  $\lambda \in \sigma(T)$ , la suite approximante  $(\psi_{n,m_n})_n$  construite dans la preuve du Lemme 6.5.1 est une suite singulière vu que  $\text{Supp} \psi_{n,m_n} \subset \Omega \times [0, \tau_n] \times \mathbb{S}^{N-1}$ , où  $(\tau_n)_n$  est une suite tendant vers zéro (voir (6.22)). ■

## 6.3 Quelques propriétés spectrales liées à la positivité

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier quelques propriétés spectrales liées à la positivité de l'opérateur  $T + K$ . En plus de la fréquence de collision déjà supposée positive, nous supposerons également tous les noyaux *positifs*.

Avant de continuer nos investigations, il est commode de dresser quelques propriétés dont jouissent les semigroupes positifs. Un opérateur borné  $B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V))$

est dit positif si  $B\varphi \geq 0$  pour tout  $\varphi \geq 0$ , on écrit alors  $B \geq 0$ . Un  $C_0$ -semigroupe  $(U(t))_{t \geq 0}$  de  $L^p(\Omega \times V)$  est dit positif si  $U(t)$  est positif pour tout  $t \geq 0$ . Soit  $(U(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigroupe positif de  $L^p(\Omega \times V)$  de générateur  $A$ . Alors :

- (a)  $s(A) \in \sigma(A)$  pourvu que  $s(A) > -\infty$  (cf. [77, Theorem 1.1, p. 292]).
- (b) Si  $s(A)$  est un pôle de  $R(\lambda, A)$ , alors le spectre périphérique de  $A$  est cyclique, i.e. si  $s(A) + i\zeta \in \sigma(A)$ , alors  $s(A) + ik\zeta \in \sigma(A)$  pour tout entier relatif  $k$  (cf. [77, Corollary 2.12, p. 304]).
- (c)  $R(\lambda, A)$  est positif pour tout  $\lambda > s(A)$  (cf. [24, Corollary 7.5, p. 165]).
- (d) Si  $B$  est un opérateur borné positif, alors pour  $\lambda > s(A)$

$$R(\lambda, A + B) = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n.$$

- (e) Le type de  $(U(t))_{t \geq 0}$  coïncide avec l'abscisse spectrale de  $A$ , i.e.  $\omega_0(A) = s(A)$  (cf. [108]).

Notons que les quatre premières propriétés sont vraies dans des espaces de Banach réticulés plus généraux, la dernière, par contre, est vraie pour les semigroupes positifs dans  $L^p$ .

### 6.3.1 Spectre périphérique de $T + K_0$

Sous les hypothèses de positivité faites au début de cette section on voit, clairement, à travers la série de Dyson-Phillips que le semigroupe  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$  est un semigroupe positif. La propriété (a) (énoncée au début de cette section) montre alors que si  $\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\} \neq \emptyset$ ,  $s(T + K_0) \in \sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = s(T + K_0)\} = \sigma_+(T + K_0)$ . Se pose alors la question de *réalité* de  $\sigma_+(T + K_0)$ . Le théorème suivant apporte, en particulier, une réponse à cette question dans le cas où l'espace des vitesses est borné inférieurement ( $\rho_{\min} > 0$ ).

**Théorème 6.3.1.** *Soit  $\rho_{\min} > 0$ . Supposons l'application*

$$[\rho_{\min}, \rho_{\max}] \ni \rho \mapsto K_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

*continue et  $\sigma(T + K_0) \neq \emptyset$ . Alors,*

$$\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = s(T + K_0)\} = \{s(T + K_0)\}.$$

*Si de plus,  $k_0(\cdot, \rho, \cdot, \cdot) > 0$  p.p. sur  $\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1}$  pour tout  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geq s(T + K_0) - \delta\} \subset \mathbb{R}.$$

**Preuve.** Soit  $\widehat{\lambda} \in \sigma(T + K_0)$  avec  $Re\widehat{\lambda} = s(T + K_0)$ . D'après le Théorème 6.2.2,  $\widehat{\lambda}$  est limite d'une suite  $(\lambda_n)_n$  vérifiant  $\lambda_n \in \sigma(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})$  ou, d'après (6.2), la relation

$$1 \in \sigma_p(R(\lambda_n, T^{\rho_n})K_0^{\rho_n}). \quad (6.6)$$

Soit  $\widehat{\rho}$  un point d'accumulation de la suite  $(\rho_n)_n$  que l'on suppose atteint par une sous-suite notée encore  $(\rho_n)_n$ . Comme lors de la preuve du Théorème 6.2.2 en passant à la limite ( $n \rightarrow \infty$ ) dans (6.6) on obtient

$$1 \in \sigma_p(R(\widehat{\lambda}, T^{\widehat{\rho}})K_0^{\widehat{\rho}}),$$

ce qui est équivalent à  $\widehat{\lambda} \in \sigma(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}})$ . D'autre part, l'inclusion

$$\sigma(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}) \subset \sigma(T + K_0)$$

entraîne

$$s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}) \leq s(T + K_0) = Re\widehat{\lambda},$$

soit au final

$$s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}) = Re\widehat{\lambda}.$$

Là, il faut se souvenir (Section 6.3.1) que

$$\sigma(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}) \cap \{\lambda : Re\lambda = s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}})\} = \{s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}})\},$$

et donc forcément  $Im\widehat{\lambda} = 0$ . Ce qui achève la première partie de la preuve.

Supposons à présent que la deuxième partie du théorème soit fausse. On pourrait alors construire une suite  $(\lambda_n)_n \subset \sigma(T + K_0) = \cup_I \sigma(T^{\rho} + K_0^{\rho})$  de *partie imaginaire strictement positive* et dont la partie réelle convergerait vers  $s(T + K_0)$ . Dans un premier temps, nous allons montrer que la partie imaginaire d'une telle suite convergerait nécessairement vers zéro. Pour ce faire, soit  $(\lambda_{n_k})_k$  une sous-suite de  $(\lambda_n)_n$  de partie imaginaire convergeant vers  $-\infty \leq \varsigma \leq +\infty$ .

On a forcément  $|\varsigma| \neq \infty$ , en fait le contraire serait synonyme, en utilisant la Proposition 1.3.2 et le Théorème 6.2.2, de  $\omega_{crit}(T + K_0) \geq s(T + K_0) > -\lambda^* = \omega_{crit}(T + K_0)$  ce qui est absurde (pour l'égalité  $\omega_{crit}(T + K_0) = -\lambda^*$ , voir le Lemme 6.4.1).

L'alternative  $|\varsigma| > 0$  ne peut être vraie non plus car autrement  $s(T + K_0) + i\varsigma$  appartiendrait au spectre périphérique de  $T + K_0$  qui, on sait d'après le premier point du théorème, est réduit à  $s(T + K_0)$ .

La suite  $(\lambda_n)_n$  converge donc vers  $s(T + K_0)$ .

Soit maintenant  $(\rho_n)_n$  une suite vérifiant  $\lambda_n \in \sigma(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})$  et soit  $\widehat{\rho}$  un point d'accumulation de  $(\rho_n)_n$  que l'on suppose atteint par  $(\rho_n)_n$  (quitte à en prendre



une sous-suite). Les mêmes arguments que précédemment (les arguments sur  $\widehat{\lambda}$ ) montrent alors que

$$s(T + K_0) \in \sigma(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}).$$

D'autre part, l'hypothèse  $k_0(\cdot, \widehat{\rho}, \cdot, \cdot) > 0$  p.p. sur  $\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1}$  entraîne (cf. Sous-section 6.2.1) que  $s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}})$  est une valeur propre *algébriquement simple* de  $T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}$ . Ceci et le fait que la suite  $(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})_n$  converge, au sens généralisé, vers  $T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}$  entraînent, moyennant le Théorème 6.2.1, que

$$\sigma(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n}) \cap D(s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}), \beta)$$

est formé d'une valeur propre simple pour tout  $\beta > 0$  suffisamment petit<sup>2</sup> et pour  $n$  suffisamment grand. Comme

$$|s(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n}) - s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}})| \leq |\lambda_n - s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}})|,$$

nécessairement

$$\sigma(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n}) \cap D(s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}), \beta) = \{s(T^{\rho_n} + K_0^{\rho_n})\}$$

et la suite  $(\lambda_n)_n$  ne pourrait converger vers  $s(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}) = s(T + K_0)$ . Ce qui finit la preuve. ■

**Remarque 6.3.1.** *Un exemple d'opérateur de collision élastique  $K_0$  vérifiant les hypothèses du théorème précédent est l'opérateur dont le noyau est  $\alpha(\rho)h_0(x, \omega, \omega')$  avec  $\alpha : [\rho_{min}, \rho_{max}] \ni \rho \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue. Le théorème reste vrai si on suppose que*

$$[\rho_{min}, \rho_{max}] \ni \rho \mapsto K_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

*est continue par morceaux.*

Lorsque  $\rho_{min} = 0$  on a le théorème suivant :

**Théorème 6.3.2.** *Soit  $\rho_{min} = 0$ . Supposons que*

$$[0, \rho_{max}] \ni \rho \mapsto K_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$$

*soit continue et que*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|K_0^\rho\| = 0.$$

*Si  $\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > -\lambda^*\} \neq \emptyset$ , alors*

$$\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = s(T + K_0)\} = \{s(T + K_0)\}.$$

*Si de plus,  $k_0(\cdot, \rho, \cdot, \cdot) > 0$  p.p. sur  $\Omega \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1}$  pour tout  $\rho \in ]0, \rho_{max}]$ , alors, il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq s(T + K_0) - \delta\} \subset \mathbb{R}.$$

<sup>2</sup>Petit au sens que  $\sigma(T^{\widehat{\rho}} + K_0^{\widehat{\rho}}) \cap D(s(T + K_0), \beta) = \{s(T + K_0)\}$ .

**Preuve.** Notre stratégie consiste à se ramener au Théorème 6.3.1 via la propriété de décomposition décrite dans la Remarque 6.2.2. Choisissons  $\delta_1 = (s(T + K_0) - \lambda^*)/2$ . Pour tout  $0 < \varepsilon < \rho_{max}$  définissons  $I_1 := [0, \varepsilon[$  et  $I_2 := [\varepsilon, \rho_{max}]$ . Alors

$$\sigma(T + K_0) = \sigma(T^{(1)} + K_0^{(1)}) \cup \sigma(T^{(2)} + K_0^{(2)}).$$

Par hypothèse, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\|K_0^{(1)}\| = \operatorname{ess\,sup}_{\rho \in ]0, \varepsilon[} \|K_0^\rho\| < e^{-cd} \delta_1.$$

Ainsi dans le demi-plan  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^* + \delta_1\}$

$$\|R(\lambda, T^{(1)})K_0^{(1)}\| < 1 \text{ (cf. preuve du Théorème 6.2.3).}$$

D'où  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^* + \delta_1\} \subset \rho(T^{(1)} + K_0^{(1)})$ . La preuve se termine alors en appliquant le Théorème 6.3.1 à  $T^{(2)} + K_0^{(2)}$ . ■

### 6.3.2 Irréductibilité de $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$

Dans la littérature il existe plusieurs définitions, équivalentes, de l'irréductibilité d'un opérateur positif ou d'un semigroupe positif dans  $L^p(\Omega \times V)$  (ou plus généralement dans un espace de Banach réticulé quelconque) (voir par exemple [24, 77][68, pp. 101-103]). Pour ce que nous considérons ici, on se contentera de donner la définition suivante.

**Définition 6.3.1.** Soit  $(U(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigroupe positif de  $L^p(\Omega \times V)$  de générateur  $A$ . On dit que  $(U(t))_{t \geq 0}$  est irréductible si pour tout (ou d'une manière équivalente pour un certain)  $\lambda > s(A)$  et tout  $\varphi \in L^p(\Omega \times V)$ ,  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi \neq 0$ , on a :  $R(\lambda, A)\varphi$  est strictement positive presque partout.

L'intérêt de l'irréductibilité se manifeste, entre autre, à travers le

**Théorème 6.3.3.** [77, Proposition 3.5, p. 310] Soit  $(U(t))_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigroupe positif dans  $L^p$  de générateur  $A$ . Si  $(U(t))_{t \geq 0}$  est irréductible et si  $s(A)$  est un pôle, alors ce dernier est une valeur propre de  $A$  algébriquement simple associée à une fonction propre strictement positive.

**Remarque 6.3.2.** Nous rappelons également que nous avons évoqué, dans la Sous-section 1.3.2, les répercussions de l'irréductibilité sur le comportement asymptotique du semigroupe. Notez que dans le cadre de la neutronique que nous considérons ici, si  $\sigma(T + K) \cap \{\operatorname{Re}\lambda > s(T + K_0)\} \neq \emptyset$ , alors  $s(T + K)$  est un pôle.

En vertu des hypothèses de positivité faites dans cette section nous avons, pour  $\lambda > s(T + K)$ ,

$$R(\lambda, T + K) \geq R(\lambda, T + K_c).$$

D'où l'on tire :

**Théorème 6.3.4.** *Si  $(e^{t(T+K_c)})_{t \geq 0}$  est irréductible, alors  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  est irréductible.*

Or pour le semigroupe  $(e^{t(T+K_c)})_{t \geq 0}$ , on dispose de divers critères d'irréductibilité donnés par plusieurs auteurs [38, 103][68, Chapitre 5]. A titre d'exemple on rappelle le critère suivant établi dans [103] en utilisant une caractérisation de l'irréductibilité différente de celle de la Définition 6.3.1. Il a été ensuite retrouvé dans [68, Theorem 5.15, p. 109] en utilisant la Définition 6.3.1.

**Théorème 6.3.5.** *Si  $\Omega$  est convexe et si  $V$  contient une couronne  $V_0 = \{v : 0 \leq c_1 < |v| < c_2 \leq +\infty\}$  avec*

$$k_c(x, v, v') > 0 \quad p.p. \text{ sur } (\Omega \times V_0 \times V) \cup (\Omega \times V \times V_0),$$

*alors  $(e^{t(T+K_c)})_{t \geq 0}$  est irréductible.*

La question maintenant est de savoir quelle influence a l'opérateur de collision élastique  $K_0$  (ou inélastique  $K_d$ ) sur l'irréductibilité de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ . Naturellement, toujours en vertu des hypothèses de positivité, il en découle

$$R(\lambda, T + K) \geq R(\lambda, T + K_0) \text{ pour } \lambda > s(T + K).$$

Mais "ne mélangeant" pas les vitesses,  $R(\lambda, T + K_0)\varphi$  n'est *pas* strictement positif pour tout  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi \neq 0$ . Pour s'en convaincre, prendre par exemple  $\varphi \neq 0$  une fonction *nulle* sur  $\Omega \times [\rho_{min}, \rho_0] \times \mathbb{S}^{N-1}$  avec  $\rho_0 < \rho_{max}$ , alors  $R(\lambda, T + K_0)\varphi = 0$  sur  $\Omega \times [\rho_{min}, \rho_0] \times \mathbb{S}^{N-1}$ . On ne peut pas donc espérer trouver des conditions, ne faisant intervenir que  $K_0$ , impliquant l'irréductibilité de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ . On ne peut pas non plus compter sur  $K_d$  tout seul pour assurer l'irréductibilité.

Dans ce qui suit, nous allons chercher des conditions en termes de  $K_c$ ,  $K_d$  et  $K_0$  garantissant l'irréductibilité de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$ . On suppose que  $l = 1$  (i.e.  $K_d$  est constitué d'un seul opérateur).

**Théorème 6.3.6.** *Supposons qu'il existe  $\rho_0 > e_1(e_1(0))$  tel que*

$$k_0(x, \rho, \omega, \omega') > 0 \quad p.p. \quad \text{sur } \Omega \times [\rho_{min}, \rho_0] \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1},$$

$$k_d(x, \rho', \omega, \omega') > 0 \quad p.p. \quad \text{sur } \Omega \times [\rho_0, \rho_{max}] \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1}.$$

*On suppose aussi qu'il existe  $\omega_0 \in \mathbb{S}^{N-1}$  et  $\delta_0 > 0$  tels que*

$$k_c(x, \rho\omega, \rho'\omega') > 0 \quad p.p. \text{ sur } \Omega \times V \times C_0,$$

*où  $C_0 = \{v' \in V : \omega' \cdot \omega_0 \geq 1 - \delta_0\}$ . Alors  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  est irréductible.*

**Preuve.** D'après la Définition 6.3.1, il faut montrer que pour tout  $\lambda > s(T+K)$  et tout  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi \neq 0$  on a  $R(\lambda, T+K)\varphi$  est strictement positive presque partout. Or, d'après la propriété **(d)**, pour  $\lambda > s(T+K)$  on a

$$\begin{aligned} R(\lambda, T+K) &= R(\lambda, T) \sum_{n=0}^{\infty} [(K_c + K_d + K_0)R(\lambda, T)]^n \\ &\geq R(\lambda, T)K_c R(\lambda, T)K_0 R(\lambda, T)K_0 R(\lambda, T) \\ &\quad + R(\lambda, T)K_c R(\lambda, T)K_d R(\lambda, T)K_d R(\lambda, T). \end{aligned}$$

En outre  $R(\lambda, T)$  transforme une fonction positive non nulle (resp. strictement positive) en une fonction positive non nulle (resp. strictement positive). Il suffit donc de montrer que

$$K_c R(\lambda, T)K_0 R(\lambda, T)K_0 \varphi + K_c R(\lambda, T)K_d R(\lambda, T)K_d \varphi$$

est strictement positive presque partout pour tout  $\varphi \geq 0$  avec  $\varphi \neq 0$ . Soit donc  $\varphi \geq 0$  avec  $\varphi \neq 0$ , alors il existe  $I_0 \subset I$  de mesure positive tel que

$$\varphi(\cdot, \rho, \cdot) \neq 0 \quad \forall \rho \in I_0.$$

On distingue deux cas  $I_0 \subset [\rho_{min}, \rho_0]$  ou  $I_0 \subset [\rho_0, \rho_{max}]$ . Dans le premier cas, observons que

$$\begin{aligned} &K_0 R(\lambda, T)K_0 \varphi(x, v) \\ &\geq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{e^{-\frac{|x-x'|}{\rho}(\lambda + \sigma(\rho \frac{x-x'}{|x-x'|}))}}{\rho |x-x'|^{N-1}} k_0(x, \rho, \omega, \frac{x-x'}{|x-x'|}) \\ &\quad \times k_0(x', \rho, \frac{x-x'}{|x-x'|}, \omega') \varphi(x', \rho, \omega') d\omega' dx' \end{aligned}$$

entraîne

$$K_0 R(\lambda, T)K_0 \varphi(\cdot, \rho, \cdot) > 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \mathbb{S}^{N-1}$$

pour tout  $\rho \in I_0$ , et par suite

$$R(\lambda, T)K_0 R(\lambda, T)K_0 \varphi(\cdot, \rho, \cdot) > 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \mathbb{S}^{N-1}$$

pour tout  $\rho \in I_0$ . Posons  $\psi = R(\lambda, T)K_0 R(\lambda, T)K_0 \varphi$ , alors pour tout  $\rho' \in I_0$

$$\int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_c(x, \rho\omega, \rho'\omega') \psi(x, \rho', \omega') d\omega' > 0 \text{ p.p. sur } (x, \rho, \omega) \in \Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}.$$

Par conséquent

$$K_c \psi(x, \rho, \omega) \geq \int_{I_0} \left[ \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_c(x, \rho\omega, \rho'\omega') \psi(x, \rho', \omega') d\omega' \right] \rho'^{N-1} d\rho' > 0$$

p.p. sur  $(x, \rho, \omega) \in \Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}$ , i.e.

$$K_c R(\lambda, T) K_0 R(\lambda, T) K_0 \varphi > 0.$$

Alternativement, si  $I_0 \subset [\rho_0, \rho_{max}]$  on a

$$\begin{aligned} & K_d R(\lambda, T) K_d \varphi(x, v) \\ \geq & \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \frac{e^{-\frac{|x-x'|}{\rho}(\lambda + \sigma(\rho \frac{x-x'}{|x-x'|}))}}{e_1(\rho) |x-x'|^{N-1}} k_d(x, e_1(\rho), \omega, \frac{x-x'}{|x-x'|}) \\ & \times k_d(x', e_1(e_1(\rho)), \frac{x-x'}{|x-x'|}, \omega') \varphi(x', e_1(e_1(\rho)), \omega') d\omega' dx'. \end{aligned}$$

D'où l'on tire que pour tout  $\rho \in e_1^{-1}(e_1^{-1}(I_0)) := \{\rho : e_1(e_1(\rho)) \in I_0\}$

$$K_d R(\lambda, T) K_d \varphi(\cdot, \rho, \cdot) > 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times \mathbb{S}^{N-1}.$$

En continuant de la même manière que dans le premier cas on arrive à la conclusion

$$K_c R(\lambda, T) K_d R(\lambda, T) K_d \varphi > 0$$

presque partout, ce qui achève la preuve. ■

**Remarque 6.3.3.** *Le théorème précédent reste vrai si l'on suppose seulement que*

$$k_0(x, \rho, \omega, \omega') > 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times [\rho_{min}, \rho_{max}] \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1}$$

et qu'il existe  $\omega_0 \in \mathbb{S}^{N-1}$  et  $\delta_0 > 0$  tels que

$$k_c(x, \rho\omega, \rho'\omega') > 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times V \times C_0,$$

où  $C_0 = \{v' \in V : \omega' \cdot \omega_0 \geq 1 - \delta_0\}$ .

En effet, dans ce cas pour toute  $\varphi \geq 0$  non nulle,  $K_c R(\lambda, T) K_0 R(\lambda, T) K_0 \varphi$  est strictement positive presque partout, et l'irréductibilité de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 1}$  se déduit alors de la même manière que précédemment.

### 6.3.3 Sur la valeur propre principale

Supposons que

$$\sigma(T+K) \cap \{\lambda > s(T+K_0)\} \neq \emptyset.$$

La caractéristique cyclique du spectre périphérique de  $T+K$  (propriété **(b)** énoncée au début de cette section) entraîne que  $\sigma_+(T+K)$  est soit réduit à  $s(T+K)$ , soit non borné. Or comme  $\omega_{ess}(T+K) \leq s(T+K_0)$  (Remarque 5.2.1),  $\sigma(T+K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \eta\}$  est fini pour tout  $\eta > s(T+K_0)$ . Donc, si  $\sigma(T+K) \cap \{\lambda > s(T+K_0)\} \neq \emptyset$ , la plus grande valeur propre réelle  $\lambda_K := s(T+K)$  est non seulement strictement dominante, mais de plus il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\operatorname{Re} \lambda < \lambda_K - \varepsilon$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T+K)$ ,  $\lambda \neq \lambda_K$ . On peut en tirer le

**Corollaire 6.3.1.** *Si  $T + K_c$  possède une valeur propre principale plus grande que  $s(T + K_0)$ , alors  $s(T + K)$  est une valeur propre strictement dominante de  $T + K$ . De plus  $\lambda_{K_c} \leq \lambda_K$ .*

**Preuve.** Comme

$$e^{t(T+K)} \geq e^{t(T+K_c)} \quad (t \geq 0)$$

on a

$$\omega_0(T + K) \geq \omega_0(T + K_c).$$

Le résultat de L. WEIS [108], sur l'égalité entre le type des semigroupes positifs sur  $L^p$  et l'abscisse spectrale de leurs générateurs, entraîne alors

$$s(T + K) \geq s(T + K_c) (= \lambda_{K_c}).$$

Ainsi

$$s(T + K) > s(T + K_0)$$

et donc

$$\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + K_0)\} \neq \emptyset.$$

Le résultat découle alors de ce que l'on avait affirmé au début de cette section. ■

**Remarque 6.3.4.** *Compte tenu de l'estimation [49, Theorem 5] suivante*

$$s(T + K_0) \leq -\operatorname{ess\,inf}_v \sigma(v) + \|K_0\|,$$

*on en déduit du corollaire précédent que si la valeur propre principale de  $T + K_c$  est plus grande que  $-\operatorname{ess\,inf}_v \sigma(v) + \|K_0\|$ , alors  $T + K$  possède une valeur propre principale plus grande que celle de  $T + K_c$ .*

**Remarque 6.3.5.** *Depuis le remarquable papier de J. LEHNER ET G.M. WING [55], plusieurs critères d'existence de la valeur propre principale de  $T + K_c$  ainsi que de sa localisation sont donnés. On cite, par exemple, [1, 15, 95] [68, Chapters 5 and 6] et [50, Chapitre V].*

### 6.3.4 Croissance stricte de la valeur propre principale

L'objet de cette section est d'étudier les propriétés de monotonie stricte de la valeur propre principale, comme cela a été fait dans [68, Chapter 5] dans le cadre du modèle classique ( $K = K_c$ ), par rapport aux paramètres de l'équation. Afin de réaliser cet objectif, nous rappelons d'abord un résultat dû à F. ANDREU ET J. M. MAZON [3].

**Théorème 6.3.7.** [3] Soient  $(U(t))_{t \geq 0}$  et  $(V(t))_{t \geq 0}$  deux  $C_0$ -semigroupes positifs dans  $L^p(\Omega \times V)$  engendrés, respectivement, par  $A$  et  $B$  et tels que

$$0 \leq U(t) \leq V(t) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Supposons que  $(V(t))_{t \geq 0}$  est irréductible et que  $s(B)$  est un pôle de la résolvante  $R(\lambda, B)$ . Si  $s(A) = s(B)$ , alors  $U(t) = V(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

Soit

$$K = K_0 + K_d + K_c \leq \tilde{K}_0 + \tilde{K}_d + \tilde{K}_c = \tilde{K}.$$

**Lemme 6.3.1.** On suppose  $K \neq \tilde{K}$  et  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + \tilde{K}_0)\} \cap \sigma(T + \tilde{K}) \neq \emptyset$ . Si  $(e^{t(T+\tilde{K})})_{t \geq 0}$  est irréductible, alors

$$s(T + K) < s(T + \tilde{K}).$$

**Preuve.** Comme  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + \tilde{K}_0)\} \cap \sigma(T + \tilde{K}) \neq \emptyset$ , d'après ce que l'on a discuté précédemment,  $s(T + \tilde{K})$  est un pôle de  $R(\lambda, T + \tilde{K})$ . D'autre part,

$$R(\lambda, T)KR(\lambda, T) \neq R(\lambda, T)\tilde{K}R(\lambda, T),$$

$$R(\lambda, T+K) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda, T)(KR(\lambda, T))^n \text{ et } R(\lambda, T+\tilde{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda, T)(\tilde{K}R(\lambda, T))^n$$

montrent que

$$R(\lambda, T + K) \neq R(\lambda, T + \tilde{K})$$

et par suite

$$e^{t(T+K)} \neq e^{t(T+\tilde{K})} \text{ au moins pour un } t > 0.$$

Maintenant en utilisant le Théorème 6.3.7 on obtient l'inégalité stricte annoncée. ■

Voyons maintenant comment appliquer le lemme précédent pour déduire la croissance stricte de la valeur propre principale par rapport à l'opérateur de collision  $K_c$ .

**Corollaire 6.3.2.** On suppose que  $K_0 = \tilde{K}_0$ ,  $K_d = \tilde{K}_d$  et  $K_c \neq \tilde{K}_c$ . Si

$$\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + K_0)\} \cap \sigma(T + K) \neq \emptyset$$

et si  $(e^{t(T+\tilde{K})})_{t \geq 0}$  est irréductible, alors  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + K_0)\} \cap \sigma(T + \tilde{K}) \neq \emptyset$  et  $\lambda_K < \lambda_{\tilde{K}}$ .

**Preuve.** En raison de la positivité des opérateurs en présence, on a trivialement

$$s(T + K) \leq s(T + \tilde{K}).$$

Ainsi,  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > s(T + K_0)\} \cap \sigma(T + \tilde{K}) \neq \emptyset$  et  $s(\lambda + \tilde{K})$  est un pôle, on le note comme on l'a convenu  $\lambda_{\tilde{K}}$ . Le Lemme 6.3.1 nous assure alors l'inégalité stricte

$$s(T + K) < s(T + \tilde{K}),$$

ou encore  $\lambda_K < \lambda_{\tilde{K}}$ . ■

On peut, d'une manière analogue, établir un résultat de croissance stricte par rapport à  $K_d$ .

**Corollaire 6.3.3.** *On suppose que  $K_0 = \tilde{K}_0$ ,  $K_d \neq \tilde{K}_d$  et  $K_c = \tilde{K}_c$ . Si*

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > s(T + K_0)\} \cap \sigma(T + K) \neq \emptyset$$

*et si  $(e^{t(T+\tilde{K})})_{t \geq 0}$  est irréductible, alors  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > s(T + K_0)\} \cap \sigma(T + \tilde{K}) \neq \emptyset$  et  $\lambda_K < \lambda_{\tilde{K}}$ .*

**Preuve.** La preuve est identique au Corollaire précédent. ■

La monotonie de la valeur propre principale par rapport à  $K_0$  même au sens *large* n'est pas triviale : en effet, si  $K_0 \neq \tilde{K}_0$ ,  $K_d = \tilde{K}_d$  et  $K_c = \tilde{K}_c$ , l'hypothèse que  $\lambda_K$  existe (donc plus grande que  $s(T + K_0)$ ) n'entraîne pas, *a priori*, que

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > s(T + \tilde{K}_0)\} \cap \sigma(T + K) \neq \emptyset.$$

Toutefois, on peut établir le corollaire suivant dont la preuve est similaire aux deux corollaires précédents :

**Corollaire 6.3.4.** *On suppose que  $K_0 \neq \tilde{K}_0$ ,  $K_d = \tilde{K}_d$  et  $K_c = \tilde{K}_c$ . Si*

$$\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > s(T + \tilde{K}_0)\} \cap \sigma(T + K) \neq \emptyset$$

*et si  $(e^{t(T+\tilde{K})})_{t \geq 0}$  est irréductible, alors  $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > s(T + K_0)\} \cap \sigma(T + \tilde{K}) \neq \emptyset$  et  $\lambda_K < \lambda_{\tilde{K}}$ .*

**Remarque 6.3.6.** *Un cas particulièrement intéressant dans le corollaire précédent est que si l'opérateur  $T + K_c$  (pour lequel, on rappelle, on dispose de beaucoup de résultats spectraux) possède une valeur propre plus grande que  $s(T + K_0)$  et que  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  est irréductible, alors  $T + K$  possède aussi une valeur propre principale (ce que l'on a déjà établi dans le Corollaire 6.3.1) et de plus, cette dernière est strictement plus grande que celle de  $T + K_c$ .*



**Remarque 6.3.7.** *On rappelle que des conditions suffisantes assurant l'irréductibilité de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  ont été données dans les Théorèmes 6.3.5 et 6.3.6 et la Remarque 6.3.3.*

**Remarque 6.3.8.** *Si dans le Corollaire 6.3.2 on prend  $K_0 = K_d = 0$  on retrouve, par un autre moyen, le résultat [68, Theorem 5.24, p. 125] de croissance stricte de la valeur propre principale dans le modèle classique ( $K = K_c$ ) démontré auparavant en utilisant un résultat de I. MAREK [62] sur la comparaison stricte de rayons spectraux d'opérateurs positifs.*

Enfin, on cite le phénomène de disparition du spectre de  $T + K$  à droite de  $-\lambda^*$  quand l'espace des vitesses contient zéro.

**Théorème 6.3.8.** [49, Theorem 9] *Supposons que  $\rho_{min} = 0$  et que  $\rho^{-1}K$  est borné, alors pour tout  $\Omega$  de diamètre inférieur à  $\|\rho^{-1}K\|^{-1}$*

$$\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > -\lambda^*\} = \emptyset.$$

### 6.3.5 Croissance de $s(T + K_0)$ par rapport à $K_0$

L'objectif de cette section est d'étudier la croissance de l'abscisse spectrale  $s(T + K_0)$  par rapport à  $K_0$ . On notera que sous les hypothèses de continuité par morceaux faites dans la Section 6.2,  $s(T + K_0)$  représente le type essentiel de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  (cf. Corollaire 6.4.1). Contrairement aux valeurs propres principales, il n'existe, à notre connaissance, aucun outil d'analyse fonctionnelle permettant d'affirmer la croissance stricte du type essentiel par rapport à un paramètre donné. Dans ce qui suit nous tenterons d'exploiter la *spécificité* de notre problème pour exhiber un tel phénomène.

On part de  $K_0$  et  $\tilde{K}_0$  tels que

$$0 < k_0(x, \rho, \omega, \omega') < \tilde{k}_0(x, \rho, \omega, \omega') \quad (6.7)$$

p.p. sur  $\Omega \times [\rho_{min}, \rho_{max}] \times \mathbb{S}^{N-1} \times \mathbb{S}^{N-1}$ . On suppose que les applications

$$\rho \mapsto K_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})) \text{ et } \rho \mapsto \tilde{K}_0^\rho \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})) \quad (6.8)$$

sont continues et que  $s(T + K_0) > -\lambda^*$  (cette dernière condition est automatiquement satisfaite pour  $\rho_{min} > 0$  sous l'hypothèse (6.7)). Lorsque  $\rho_{min} = 0$  on suppose de plus

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|\tilde{K}_0^\rho\| = 0. \quad (6.9)$$

L'hypothèse (6.7) assure, trivialement,

$$s(T + K_0) \leq s(T + \tilde{K}_0).$$

Question : L'inégalité est-elle *stricte* ? A ce niveau, il est utile de rappeler que

$$s(T + K_0) = \sup_{\rho} s(T^{\rho} + K_0^{\rho}) \text{ et } s(T + \tilde{K}_0) = \sup_{\rho} s(T^{\rho} + \tilde{K}_0^{\rho}).$$

On rappelle également que  $\tilde{\lambda}_{\rho} = s(T^{\rho} + \tilde{K}_0^{\rho}) > -\infty$  est une valeur propre de multiplicité algébrique finie et que l'hypothèse (6.7) entraîne que le semigroupe  $(e^{t(T^{\rho} + \tilde{K}_0^{\rho})})_{t \geq 0}$  est irréductible (cf. Section 6.2.1). L'usage du Théorème 6.3.7 fournit alors

$$\lambda_{\rho} = s(T^{\rho} + K^{\rho}) < s(T^{\rho} + \tilde{K}_0^{\rho}) = \tilde{\lambda}_{\rho}. \quad (6.10)$$

A-t-on pour autant l'inégalité  $s(T + K_0) < s(T + \tilde{K}_0)$  ?

Avant de répondre à cette question nous avons besoin du

**Lemme 6.3.2.** *Si l'hypothèse (6.8) est satisfaite, les applications*

$$\rho \mapsto \lambda_{\rho} \text{ et } \rho \mapsto \tilde{\lambda}_{\rho}$$

*sont continues.*

**Preuve.** Soit  $(\rho_n)_n \subset [\rho_{min}, \rho_{max}]$  une suite convergeant vers  $\hat{\rho}$ . On rappelle que  $\lambda_{\rho_n}$  est déterminée par (l'unique solution de)

$$r_{\sigma}(K^{\rho_n} R(\lambda_{\rho_n}, T^{\rho_n})) = 1. \quad (6.11)$$

Soit  $(\lambda_{\rho_{n_q}})_q$  une sous-suite convergeant vers  $\hat{\lambda} \geq -\infty$ . Comme  $(T^{\rho_{n_q}} + K_0^{\rho_{n_q}})_q$  converge au sens généralisé vers  $T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}}$  on peut affirmer, via le Théorème 6.2.1, l'existence d'un entier  $q_0$  tel que

$$D(\lambda_{\hat{\rho}}, \varepsilon) \cap \sigma(T^{\rho_{n_q}} + K_0^{\rho_{n_q}}) \neq \emptyset \quad \forall q \geq q_0,$$

où  $\varepsilon$  est choisi de sorte que  $\sigma(T^{\hat{\rho}} + K_0^{\hat{\rho}}) \cap D(\lambda_{\hat{\rho}}, \varepsilon) = \{\lambda_{\hat{\rho}}\}$ . D'où  $\lambda_{\rho_{n_q}} \geq \lambda_{\hat{\rho}} - \varepsilon$  pour  $q \geq q_0$  et en particulier,

$$\hat{\lambda} > -\infty.$$

Ainsi, la suite  $(K_0^{\rho_{n_k}} R(\lambda_{\rho_{n_k}}, T^{\rho_{n_k}}))_k$  converge dans  $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$  vers  $K_0^{\hat{\rho}} R(\hat{\lambda}, T^{\hat{\rho}})$ . Comme  $K^{\rho} R(\lambda, T^{\rho})$  est à puissance compacte, en passant à la limite<sup>3</sup> dans (6.11) on en déduit

$$r_{\sigma}(K^{\hat{\rho}} R(\hat{\lambda}, T^{\hat{\rho}})) = 1,$$

i.e.  $\lambda_{\hat{\rho}} = \hat{\lambda}$ . Le même raisonnement s'applique pour montrer la continuité de l'autre application. ■

<sup>3</sup>On sait d'après [68, Chapter 5] que si  $(B_n)_n$  est une suite d'opérateurs bornés à puissance compacte convergeant vers  $B$ , alors  $r_{\sigma}(B_n)$  tend vers  $r_{\sigma}(B)$ .

**Théorème 6.3.9.** *Soit  $\rho_{\min} > 0$ . Si les hypothèses (6.7) et (6.8) sont réalisées, alors*

$$s(T + K_0) < s(T + \tilde{K}_0).$$

**Preuve.** On sait que

$$s(T + \tilde{K}_0) - s(T + K_0) = \sup_{\rho} s(T^{\rho} + \tilde{K}_0^{\rho}) - \sup_{\rho} s(T^{\rho} + K_0^{\rho}).$$

Or pour tout  $\rho$  (cf. (6.10)),

$$s(T^{\rho} + \tilde{K}_0^{\rho}) - s(T^{\rho} + K_0^{\rho}) > 0.$$

Par conséquent, le Lemme 6.3.2 fournit l'inégalité recherchée. ■

Parallèlement, on a

**Théorème 6.3.10.** *Soit  $\rho_{\min} = 0$ . On suppose que les hypothèses (6.4)<sup>4</sup>, (6.7), (6.8) et (6.9) sont vraies. Si  $s(T + K_0) > -\lambda^*$ , alors*

$$s(T + K_0) < s(T + \tilde{K}_0).$$

**Preuve.** Par une démarche et des notations analogues à celles de la preuve du Théorème 6.3.2 on peut se mettre dans la situation suivante :

$$s(T + K_0) = s(T^{(2)} + K_0^{(2)}) \text{ et } s(T + \tilde{K}_0) = s(T^{(2)} + \tilde{K}_0^{(2)}).$$

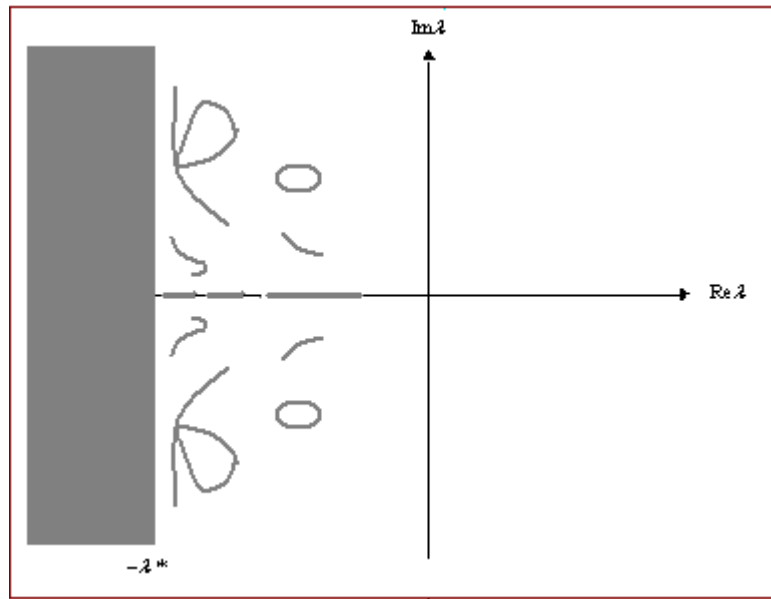
Ensuite on finit la preuve en utilisant le Théorème 6.3.9 sur les opérateurs  $T^{(2)} + K_0^{(2)}$  et  $T^{(2)} + \tilde{K}_0^{(2)}$ . ■

**Remarque 6.3.9.** *Les Théorèmes 6.3.9 et 6.3.10 restent vrais si on suppose que l'application (6.8) est seulement continue par morceaux. Il suffit d'appliquer la propriété de décomposition énoncée dans la Remarque 6.2.2.*

**Remarque 6.3.10.** *Les théorèmes précédents expliquent un peu pourquoi il n'est pas trivial d'établir un résultat de croissance de la valeur propre principale par rapport à  $K_0$ . En effet, la croissance du type s'accompagne de celle du type essentiel.*

---

<sup>4</sup>Rappel : l'hypothèse (6.4) affirme que  $\frac{\sigma(\rho\omega) - \lambda^*}{\rho} \geq -c$  pour une certaine constante positive.

FIG. 6.1 – En gris, le spectre de  $T + K_0$ 

### Bilan spectral

L'image spectrale qui se dégage de l'étude précédente est la suivante :  
Le spectre de  $T + K_0$  est constitué d'un demi-plan

$$\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\}$$

(avec  $-\lambda^* = -\infty$  si  $\rho_{\min} > 0$ ) et de courbes décrites par le spectre de  $T^\rho + K_0^\rho$  lorsque  $\rho$  varie. Ces courbes peuvent, a priori, créer des boucles, décomposant alors  $\rho(T + K_0)$  en plusieurs composantes connexes. La figure 6.1 illustre ceci, elle tient compte des Théorèmes 6.3.1 et 6.3.2. Notez que la symétrie par rapport à l'axe réel est due à la stabilité du spectre de  $T + K_0$  par conjugaison (i.e. si  $\lambda \in \sigma(T + K_0)$ , alors  $\bar{\lambda} \in \sigma(T + K_0)$ ) car l'opérateur  $T + K_0$  est *réel*. Ces courbes peuvent également disparaître (cf. Théorème 6.3.8).

Lorsque l'on rajoute l'opérateur nilpotent  $K_d$  il n'y pas de spectre supplémentaire qui se crée (voir (5.2)). A priori, une partie du spectre de  $T + K_0$  peut même disparaître, cependant, on peut établir que  $s(T + K_0) \in \sigma(T + K_0 + K_d)$  en utilisant l'argument classique suivant ([45, Section 12.15, p. 277]) : Compte tenu de (5.1), i.e.

$$[K_d R(\lambda, T + K_0)]^r = 0,$$

$R(\lambda, T + K_0)K_d$  admet (a fortiori) une puissance compacte. Or on peut vérifier, alors, que  $R(\lambda, T + K_0 + K_d)K_d$  admettra aussi une puissance compacte. Supposons maintenant que  $s(T + K_0) \notin \sigma(T + K_0 + K_d)$ . Si on regarde  $T + K_0$  comme une perturbation de  $T + K_0 + K_d$  par  $-K_d$ , on voit à l'aide de l'alternative de

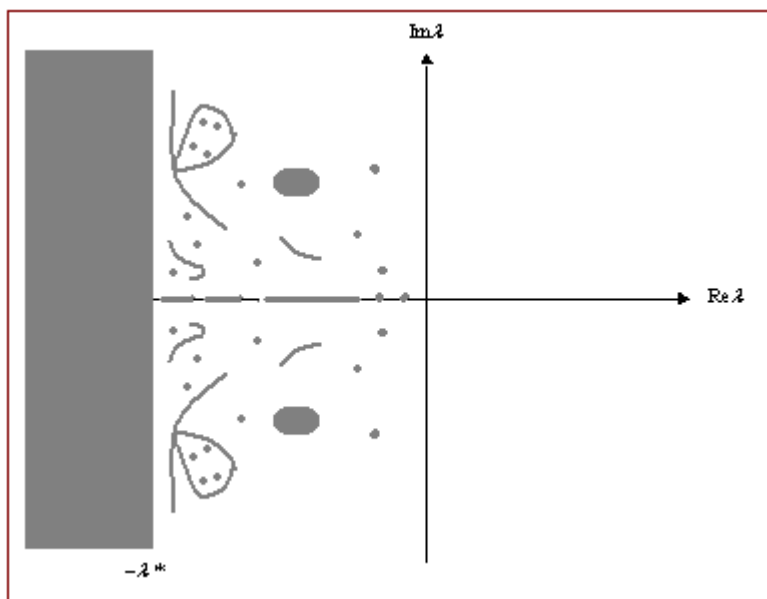


FIG. 6.2 – En gris, le spectre de  $T + K_0 + K_c$

Gohberg-Shmulyan (Théorème 1.4.1), qu'en dehors de  $\sigma(T + K_0 + K_d) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq s(T + K_0)\}$ , le spectre de  $T + K_0$  ne contiendra que des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Ainsi  $s(T + K_0)$  serait une valeur propre de multiplicité algébrique finie, ce qui contredit le Théorème 6.2.4.

Enfin, l'ajout de  $K_c$  se répercute sur une composante connexe de  $\rho(T + K_0 + K_d)$  soit par la création, au plus, de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie, soit par sa transformation totale en spectre ponctuel (voir la Sous-section 5.2.1). Dans la composante contenant  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > s(T + K_0)\}$ , on peut montrer qu'il se crée au plus des valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie. Dans le cas particulier  $K_d = 0$ , le Lemme 6.5.1 (a) ci-dessous indique que  $\sigma(T + K_0)$  est une partie de  $\sigma(T + K)$  et on passe de la figure 6.1 à la figure 6.2.

Indiquons enfin, comme l'a été déjà signalé par E.W. LARSEN ET P.F. ZWEIFEL, que lorsque le noyau  $k_0$  et la fréquence de collision sont isotropes et homogènes, i.e.  $k_0(x, \rho, \omega, \omega) = k_0(\rho)$  et  $\sigma(x, \rho\omega) = \sigma(\rho)$ , les résultats de réalité (par exemple [68, Theorem 6.9, p. 164]) du spectre de  $T^\rho + K_0^\rho$  à droite de  $-\sigma(\rho)$  simplifient considérablement l'image spectrale. Dans un tel cas,  $\sigma(T + K_0) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq -\inf \sigma(\rho)\}$  consiste en des segments réels, quant à  $\sigma(T + K) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq -\inf \sigma(\rho)\}$ , il est constitué de ces mêmes segments et d'au plus de valeurs propres isolées de multiplicité algébrique finie.

**Remarque 6.3.11.** *L'image spectrale décrite précédemment découle des résultats généraux obtenus dans les Chapitres 5 et 6, il serait intéressant de réaliser, sur des modèles simples, une étude fine des courbes (quand apparaissent-elles, quand disparaissent-elles, comment dépendent-elles de  $\rho$  etc...).*

## 6.4 Théorème d'application spectrale

A présent, nous transférons l'ensemble des résultats spectraux précédents sur  $T + K$  à son semigroupe associé au moyen du théorème d'application spectrale suivant :

**Théorème 6.4.1.** *En plus des hypothèses générales faites au début de ce chapitre, nous supposons lorsque  $p = 1$  et  $\rho_{\min} = 0$  que*

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \|K_0^\rho\| = 0. \quad (6.12)$$

Alors on a le théorème d'application spectrale :

$$\sigma(e^{t(T+K)}) = e^{t\sigma(T+K)} \cup \{0\} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Pour montrer le théorème on aura besoin du lemme technique suivant :

**Lemme 6.4.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.4.1 on a*

$$\omega_{\text{crit}}(T + K) = \omega_{\text{crit}}(T + K_0 + K_d) = \omega_{\text{crit}}(T + K_0) = \omega_{\text{crit}}(T) = -\lambda^*.$$

**Preuve du Théorème 6.4.1.** Grâce au Lemme 6.4.1 le type critique de  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  est égal à  $-\lambda^*$ . Ainsi, le spectre critique de  $e^{t(T+K)}$  est confiné dans le disque de rayon  $e^{-t\lambda^*}$ , d'où

$$\sigma(e^{t(T+K)}) \cap \{\eta : |\eta| > e^{-t\lambda^*}\} = e^{t\sigma(T+K)} \cap \{e^{t\lambda} : \lambda > -\lambda^*\}.$$

D'autre part, le Théorème 1.5.2 et le Lemme 6.5.1 nous assurent

$$\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\lambda^*\} = \sigma_{\text{ap}}(T) \subset \sigma_{\text{ap}}(T + K).$$

L'inclusion  $e^{t\sigma(T+K)} \subset \sigma(e^{t(T+K)})$  fournit alors le résultat désiré. ■

Avant de donner la preuve du Lemme 6.4.1 arrêtons nous au

**Corollaire 6.4.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.2.4, on a*

$$\sigma_{\text{ess}}(e^{(T+K_0)}) = \sigma(e^{(T+K_0)}) = e^{t\sigma(T+K_0)} \cup \{0\} \quad t \geq 0.$$

En particulier,  $\omega_{\text{ess}}(T + K) = \omega_{\text{ess}}(T + K_0) = s(T + K_0)$ .

**Preuve.** L'égalité

$$\sigma(e^{t(T+K_0)}) = e^{t\sigma(T+K_0)} \cup \{0\} \quad (6.13)$$

n'est rien d'autre que le théorème d'application spectrale (Théorème 6.4.1) lorsque  $K = K_0$ . D'autre part, la relation

$$e^{\lambda t} \varphi - e^{t(T+K_0)} \varphi = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} e^{t(T+K_0)} (\lambda - T - K_0) \varphi ds \text{ pour } \varphi \in D(T + K_0)$$

montre que les suites singulières de générateur (Théorème 6.2.4) le sont aussi pour le semigroupe, et par conséquent,

$$e^{t\sigma(T+K_0)} \cup \{0\} \subset \sigma_{ess}(e^{(T+K_0)}) \subset \sigma(e^{t(T+K_0)}).$$

Ces inclusions sont, au vue de (6.13), des égalités, ce qui donne en particulier  $\omega_{ess}(T + K_0) = s(T + K_0)$ . Maintenant, la preuve s'achève en invoquant les Corollaires 5.2.2 et 5.3.1 ( $\omega_{ess}(T + K) = \omega_{ess}(T + K_0)$ ). ■

**Remarque 6.4.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.2.3 ou du Théorème 6.2.2 on a :*

$$s(T + K_0) = \max\{-\lambda^*, \sup_{\rho} s(T^{\rho} + K_0^{\rho})\}.$$

**Preuve du Lemme 6.4.1.** La preuve de  $\omega_{crit}(T + K_0) = \omega_{crit}(T) = -\lambda^*$  découle du Théorème 1.5.1 et du lemme suivant que nous admettons momentanément.

**Lemme 6.4.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 6.4.1, on peut trouver un reste de la série de Dyson-Phillips exprimant  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$  relativement à  $(e^{tT})_{t \geq 0}$  qui dépend continûment en norme de  $t > 0$ .*

Comme le reste  $R'_r(t)$  de la série donnant  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  à partir de  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$  est nul (voir (5.5)),  $R'_r(t)$  dépend continûment de  $t \geq 0$  et les deux semigroupes possèdent le même type critique :  $\omega_{crit}(T + K_0 + K_d) = \omega_{crit}(T + K_0)$ . Enfin pour terminer il nous reste à établir  $\omega_{crit}(T + K) = \omega_{crit}(T + K_0 + K_d)$ . On a montré dans le Théorème 5.2.2 que

$$R_1(t) \text{ est compact pour } t \geq 0 \text{ lorsque } 1 < p < \infty,$$

ce qui entraîne, en utilisant le Théorème 4.1.1<sup>5</sup>, que

$$0 \leq t \mapsto R_1(t) \text{ est continue en norme lorsque } 1 < p < \infty.$$

D'autre part, on a montré aussi (cf. Théorème 5.3.2) que

$$R_2(t) \text{ est faiblement compact pour } t \geq 0 \text{ lorsque } p = 1,$$

Mais on sait, d'après [68, Corollary 2.1, p. 16], que si  $R_n(t)$  est faiblement compact alors  $R_{2n+1}(t)$  est compact, donc dans notre cas

$$R_5(t) \text{ est compact pour } t \geq 0 \text{ lorsque } p = 1,$$

et à nouveau le Théorème 4.1.1 fournit

$$0 \leq t \mapsto R_5(t) \text{ est continue en norme lorsque } p = 1.$$

Tout compte fait, il existe toujours un reste de la série de Dyson-Phillips donnant  $(e^{t(T+K)})_{t \geq 0}$  à partir de  $(e^{t(T+K_0+K_d)})_{t \geq 0}$  qui dépend continûment de  $t \geq 0$ . En conséquence,  $\omega_{crit}(T + K) = \omega_{crit}(T + K_0 + K_d)$ . ■

<sup>5</sup>Il s'agit d'un résultat de S. Brendle : la compacité d'un reste de la série de Dyson-Phillips implique sa continuité en norme !

**Preuve du Lemme 6.4.2.**

La fin de cette section est consacrée à la preuve du Lemme 6.4.2 que nous avons admis précédemment. Cette preuve va se dérouler en deux autres lemmes, l'un (Lemme 6.4.3) concerne le cas  $1 < p < \infty$ , l'autre (Lemme 6.4.4) traite le cas  $p = 1$ .

**Lemme 6.4.3.** *Pour  $1 < p < \infty$ , l'application  $0 \leq t \mapsto e^{t(T+K_0)} - e^{tT}$  est continue.*

**Preuve.** Par les arguments classiques (linéarité, densité et interpolation) que l'on a utilisés à maintes reprises, il suffit de montrer le résultat pour  $p = 2$  et  $K_0$  ayant un noyau de la forme

$$K_0 : L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \alpha(x, \rho) f(\omega) g(\omega') \varphi(x, \rho, \omega') d\omega' \in L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$$

avec  $\alpha \in L^\infty(\Omega \times I)$  et  $f, g$  continues sur  $\mathbb{S}^{N-1}$ . Comme  $T$  est dissipatif, il suffit d'après le Corollaire 4.2.1 de montrer

$$\|K_0^* R(\nu + i\gamma, T) K_0\| \rightarrow 0 \text{ et } \|K_0 R(\nu + i\gamma, T) K_0^*\| \rightarrow 0 \text{ quand } |\gamma| \rightarrow 0$$

pour un certain  $\nu > \omega_0(T)$ . On montrera la première assertion, la seconde se montre de la même manière. Définissons les opérateurs suivants

$$P : L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \alpha(x, \rho) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} f(\omega') \varphi(x, \rho, \omega') d\omega' \in L^2(\Omega \times I),$$

$$O : L^2(\Omega \times I) \ni \phi \mapsto \alpha(x, \rho) f(\omega) \phi(x, \rho) \in L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$$

et

$$Q(\gamma) : L^2(\Omega \times I) \ni \varphi \mapsto \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{N-1}} e^{-(\nu+i\gamma+\sigma(\rho\omega))t} h(\omega) \varphi(x - t\rho\omega, \rho) \chi_{\{t < \tau(x, \rho\omega)\}} d\omega dt,$$

où  $h = gf$ . On vérifie, sans peine, que  $P$  et  $Q$  sont bornés et que

$$K_0^* R(\nu + i\gamma, T) K_0 = OQ(\gamma)P.$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \|Q(\gamma)\| = 0.$$

En effectuant le changement de variable  $x' = x - t\omega$  on aura

$$Q(\gamma)\varphi(x, \rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} h\left(\frac{x - x'}{|x - x'|}\right) \varphi(x', \rho) e^{-\left(\frac{\nu+i\gamma+\sigma\left(\rho\frac{x-x'}{|x-x'|}\right)}{\rho}\right)|x-x'|} |x - x'|^{-(N-1)} dx'.$$



Posons

$$N_\gamma(x, \rho) = \frac{1}{\rho|x|^{N-1}} h\left(\frac{x}{|x|}\right) e^{-|x|\left(\frac{\nu+i\gamma+\sigma\left(\frac{\rho|x|}{\rho}\right)}{\rho}\right)}.$$

En prolongeant, par zéro, la fonction  $\varphi$  à  $\mathbb{R}^N \times I$  et la fonction  $h$  à  $\mathbb{R}^N$ , et en passant à la transformée de Fourier par rapport à la variable de position  $x$  on aura

$$Q(\gamma)\varphi(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi) = (2\pi)^{N/2} N_\gamma(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi)\varphi(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi),$$

où

$$\varphi(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\Omega} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x, \xi) dx$$

et

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} N_\gamma(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} N_\gamma(x, \rho) dx.$$

D'où

$$\|Q(\gamma)\| \leq \operatorname{ess\,sup}_{(\xi, \rho) \in \mathbb{R}^N \times I} \left| (2\pi)^{\frac{N}{2}} N_\gamma(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi) \right|. \quad (6.14)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{N}{2}} N_\gamma(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} N_\gamma(x, \rho) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} \frac{1}{\rho|x|^{N-1}} h\left(\frac{x}{|x|}\right) e^{-|x|\left(\frac{\nu+i\gamma+\sigma\left(\frac{\rho|x|}{\rho}\right)}{\rho}\right)} \\ &= \int_0^\infty s^{N-1} ds \int_{\mathbb{S}^{N-1}} dw e^{-isw \cdot \xi} \frac{1}{\rho s^{N-1}} h(w) e^{-s\left(\frac{\nu+i\gamma+\sigma(\rho w)}{\rho}\right)} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} dw \frac{h(w)}{iw \cdot \xi + \nu + i\gamma + \sigma(\rho w)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| (2\pi)^{\frac{N}{2}} N_\gamma(\widehat{\cdot}, \rho)(\xi) \right| \leq \int_{\mathbb{S}^{N-1}} dw \frac{|h(w)|}{[(w \cdot \xi + \gamma)^2 + (\nu + \sigma(\rho w))^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.15)$$

En vertu de (6.14) et (6.15) il suffit de montrer que

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} dw \frac{|h(w)|}{[(w \cdot \xi + \gamma)^2 + (\nu + \sigma(\rho w))^2]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

uniformément en  $(\xi, \rho) \in \mathbb{R}^N \times I$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre réel positif. En introduisant les coordonnées polaires  $(\xi, \gamma) = \sqrt{|\xi|^2 + \gamma^2}(e, e_1)$  avec  $e = \xi/\sqrt{|\xi|^2 + \gamma^2}$  et  $e_1 = \gamma/\sqrt{|\xi|^2 + \gamma^2}$  on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{S}^{N-1}} dw \frac{|h(w)|}{[(w \cdot \xi + \gamma)^2 + (\nu + \sigma(\rho w))^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_{|w \cdot e + e_1| \leq \varepsilon} dw \frac{|h(w)|}{[|(\xi, \gamma)|^2(w \cdot e + e_1)^2 + (\nu + \sigma(\rho w))^2]^{\frac{1}{2}}} \\ & \quad + \int_{|w \cdot e + e_1| > \varepsilon} dw \frac{|h(w)|}{[|(\xi, \gamma)|^2(w \cdot e + e_1)^2 + (\nu + \sigma(\rho w))^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \sup_{(e, e_1) \in \mathbb{S}^N} \int_{|w \cdot e + e_1| \leq \varepsilon} dw \frac{|h(w)|}{\nu + \sigma(\rho w)} + \int_{|w \cdot e + e_1| > \varepsilon} dw \frac{|h(w)|}{[|(\xi, \gamma)|^2 \varepsilon^2 + (\nu + \sigma(\rho w))^2]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Puisque les hyperplans affines sont de mesure nulle par rapport à la mesure de Lebesgue sur la sphère  $\mathbb{S}^{N-1}$  ( $dw$ ), grâce au Lemme 4.3.2 le premier terme de la dernière inégalité est arbitrairement petit (uniformément en  $(\xi, \rho) \in \mathbb{R}^N \times I$ ) pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. On fixe  $\varepsilon$  assez petit et on considère le deuxième terme. Ce dernier terme peut être majoré comme suit

$$\begin{aligned} \int_{|w \cdot e + e_1| > \varepsilon} dw \frac{|h(w)|}{[|(\xi, \gamma)|^2 \varepsilon^2 + (\nu + \sigma(\rho w))^2]^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_{|w \cdot e + e_1| > \varepsilon} dw \frac{|h(w)|}{|(\xi, \gamma)| \varepsilon} \\ &\leq \frac{\|h\|_{L^1(\mathbb{S}^{N-1})}}{\varepsilon \sqrt{|\xi|^2 + \gamma^2}} \end{aligned}$$

qui tend vers zéro uniformément en  $(\xi, \rho) \in \mathbb{R}^N \times I$ . Ceci finit la preuve.  $\blacksquare$

Afin de considérer le cas  $p = 1$  quelques préliminaires s'imposent. Soient les opérateurs suivants :

$$\bar{U}(t) : L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \varphi(x - t\omega, \omega) \chi_{\Omega}(x - t\omega) \in L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$$

et

$$\bar{M}_0 : L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, \omega) d\omega.$$

Alors d'après [71, Theorem 1], pour  $T > 0$  il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$[\bar{M}_0 \bar{U}]^{n-2}(t) \bar{M}_0 \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), L^2(\Omega)). \quad (6.16)$$

De plus, il existe  $C_T$  tel que

$$\|[\bar{M}_0 \bar{U}]^{n-2}(t) \bar{M}_0\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), L^2(\Omega))} \leq C_T \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6.17)$$

**Lemme 6.4.4.** Soit  $n$  l'entier défini par (6.16) et soit  $R_n''(t)$  le reste d'ordre  $n$  de la série de Dyson-Phillips exprimant  $(e^{t(T+K_0)})_{t \geq 0}$  relativement à  $(e^{tT})_{t \geq 0}$ . Alors, sous les hypothèses du Théorème 6.4.1, l'application  $0 < t \mapsto R_n''(t)$  est continue.

**Preuve.** Commençons par quelques notations. Soit  $O \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}))$  local en  $\rho$ , (i.e. n'agissant pas sur la variable  $\rho$ ) de sorte qu'en identifiant  $L^p(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$  à  $L^p(I; L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))$ , on peut le voir comme une application

$$I \ni \rho \mapsto O[\rho] \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})),$$

avec  $O[\rho] : L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \psi \mapsto O\psi \in L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1})$ . On a alors

$$O\varphi = O[\rho]\varphi(\rho).$$

Par exemple, pour l'opérateur  $U(t) = e^{tT}$ ,

$$U(t)[\rho] : L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto e^{t\sigma(\rho\omega)}\varphi(x - t\rho\omega, \omega)\chi_\Omega(x - t\rho\omega) \in L^p(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}).$$

Montrons d'abord le lemme pour  $\rho_{min} > 0$ . Comme

$$R_n''(t) = U * [K_0U]^{n-1}K_0 * e^{t(T+K_0)},$$

d'après la Proposition 1.4.1, il est suffisant de montrer la continuité en norme de  $0 < t \mapsto [K_0U]^{n-1}K_0$ . En utilisant la densité et la linéarité on est conduit à montrer que

$$t \mapsto K_1U * K_2U * \cdots * K_{n-1}UK_n =: Z(t)$$

est continue en norme, où chacun des  $K_i$  possède un noyau  $\alpha_i(x, \rho)f_i(\omega)g_i(\omega')$  avec  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega \times I)$ ,  $f_i \in L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$  et  $g_i \in L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$ . Comme

$$\begin{aligned} & \|Z(t+h) - Z(t)\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}))} \\ & \leq \sup_{\rho \in I} \|Z(t+h)[\rho] - Z(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))}, \end{aligned}$$

nous allons montrer en fait

$$\sup_{\rho \in I} \|Z(t+h)[\rho] - Z(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (6.18)$$

On peut écrire  $Z(t)$  comme

$$Z(t) = \widetilde{K}_1\widetilde{U} * \widetilde{K}_2\widetilde{U} * K_3U * \cdots * UK_n =: Z_2(t) * Z_1(t),$$

où

$$Z_2(t) = \widetilde{K}_1\widetilde{U}, \quad Z_1(t) = \widetilde{K}_2\widetilde{U} * K_3U * \cdots * UK_n,$$

$\widetilde{K}_1$  est l'opérateur de noyau  $\alpha_1(x, \rho)f_1(\omega)f_2(\omega')g_1(\omega')$ ,  $\widetilde{K}_2$  est l'opérateur de noyau  $\alpha_2(x, \rho)g_2(\omega')$  et  $\widetilde{U}(t) = U(t)|_{L^1(\Omega \times I)}$ . Retenons que

$$Z_1(t) \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}), L^1(\Omega \times I))$$

et

$$Z_2(t) \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times I), L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})).$$

On vérifie que

$$Z(t)[\rho] = Z_2(t)[\rho] * Z_1(t)[\rho]. \quad (6.19)$$

On va montrer, en utilisant (6.17), que

$$Z_1(t)[\rho] \in \mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), L^2(\Omega)),$$

et pour tout  $T > 0$  il existe  $C'_T$  telle que

$$\|Z_1(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), L^2(\Omega))} \leq C'_T \quad \forall t \in [0, T], \forall \rho \in I. \quad (6.20)$$

On va aussi montrer que

$$\sup_{\rho \in I, t \in [\delta, 1/\delta]} \|Z_2(t+h)[\rho] - Z_2(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (6.21)$$

Puis en mettant bout à bout (6.19), (6.20) et (6.21) on aura (6.18), c'est à dire ce que l'on cherche. En effet,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t+h} Z_2(t+h-s)[\rho]Z_1(s)[\rho]\varphi ds - \int_0^t Z_2(t-s)[\rho]Z_1(s)[\rho]\varphi ds \\ = & \int_t^{t+h} Z_2(t+h-s)[\rho]Z_1(s)[\rho]\varphi ds + \int_{t-\eta}^t (Z_2(t+h-s)[\rho] - Z_2(t-s)[\rho])Z_1(s)[\rho]\varphi ds \\ & + \int_0^{t-\eta} (Z_2(t+h-s)[\rho] - Z_2(t-s)[\rho])Z_1(s)[\rho]\varphi ds. \end{aligned}$$

On voit facilement que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_t^{t+h} Z_2(t+h-s)[\rho]Z_1(s)[\rho] ds \right\| \leq Ch, \\ & \left\| \int_{t-\eta}^t (Z_2(t+h-s)[\rho] - Z_2(t-s)[\rho])Z_1(s)[\rho]\varphi ds \right\| \leq C\eta \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et  $\rho \in I$ , où  $C$  est une constante bien choisie. Fixons  $\eta > 0$  et  $h > 0$  suffisamment petits et occupons nous du troisième terme. Grâce à (6.20) et (6.21)

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{t-\eta} (Z_2(t+h-s)[\rho] - Z_2(t-s)[\rho]) Z_1(s)[\rho] \varphi ds \right\| \\ & \leq (t-\eta) \sup_{\rho \in I, s \in [0, t-\eta]} \|Z_2(t+h-s)[\rho] - Z_2(t-s)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))} \\ & \quad \times \sup_{\rho \in I, s \in [0, t-\eta]} \|Z_1(s)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), L^2(\Omega))} \|\varphi\| \\ & \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

ce qui montre (6.18).

Prouvons donc (6.20) et (6.21). D'abord il est facile de montrer la domination suivante :

$$[\widetilde{K}_2 U * K_3 U * \cdots * K_{n-1} U K_n][\rho] \leq \prod_{i=2}^n \|\alpha_i\|_\infty \prod_{i=3}^n \|f_i\|_\infty \prod_{i=2}^n \|g_i\|_\infty [M_0 U]^{n-2} M_0[\rho].$$

(rappelons que  $M_0 \varphi(x, \rho, \omega) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \varphi(x, \rho, \omega) d\omega$ ). D'autre part,

$$[M_0 U]^{n-2} M_0[\rho] = \frac{1}{\rho^{n-3}} [\overline{M_0 U}]^{n-2} (t\rho) \overline{M_0}$$

et comme  $\rho_{\min} > 0$  on a d'après (6.17)

$$\|Z_1(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}), L^2(\Omega))} \leq C'_T := C_T / \rho_{\min}^{n-3}$$

pour tout  $t \in [0, T]$  et  $\rho \in I$ .

Pour montrer (6.21), décomposons tout d'abord  $Z_2(t)$  comme suit :

$$Z_2(t) = \widetilde{K}_1 \widetilde{U}(t+h) = OS(t),$$

où

$$O : L^2(\Omega \times I) \ni \psi \mapsto \alpha_1(x, \rho) f_1(\omega) \psi(x, \rho) \in L^2(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$$

et

$$S(t) : L^2(\Omega \times I) \ni \psi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g(\omega) \psi(x - t\rho\omega, \rho) e^{-t\sigma(\rho\omega)} \chi_\Omega(x - t\rho\omega) d\omega \in L^2(\Omega \times I)$$

( $g(\omega) = f_2(\omega)g_1(\omega)$ ). Grâce à la convexité de  $\Omega$ , ce dernier (opérateur) s'écrit

$$S(t) = RS_\infty(t)E,$$

où  $E$  et  $R$  sont respectivement l'opérateur restriction et extension et

$$S_\infty(t) : L^2(\mathbb{R}^N \times I) \ni \psi \mapsto \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g(\omega) \psi(x - t\rho\omega, \rho) e^{-t\sigma(\rho\omega)} d\omega \in L^2(\mathbb{R}^N \times I).$$

On peut vérifier

$$\begin{aligned} & \|Z_2(t+h)[\rho] - Z_2(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^1(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))} \\ & \leq C \|Z_2(t+h)[\rho] - Z_2(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega \times \mathbb{S}^{N-1}))} \\ & \leq C \|f_1\|_\infty \|\alpha_1\|_\infty \|S_\infty(t+h)[\rho] - S_\infty(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N), L^2(\mathbb{R}^N))} \end{aligned}$$

et le problème revient donc à montrer que

$$\sup_{\rho \in I} \|S_\infty(t+h)[\rho] - S_\infty(t)[\rho]\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^N), L^2(\mathbb{R}^N))} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0$$

uniformément en  $t \in [\delta, 1/\delta]$ . Or,

$$\begin{aligned} S_\infty(t)[\rho]\psi(x) &= \int_{\mathbb{S}^{N-1}} e^{-t\sigma(\rho\omega)} g(\omega) \psi(x - t\rho\omega) d\omega \\ &= \nu_{t,\rho} * \psi(x), \end{aligned}$$

où  $\nu_{t,\rho}$  est la mesure image de  $e^{t\sigma(\rho\omega)} g(\omega) d\omega$  par l'homothétie  $\omega \mapsto t\rho\omega$ . En conséquence

$$\|S_\infty(t+h)[\rho]\psi - S_\infty(t)[\rho]\psi\| \leq (2\pi)^{N/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\widehat{\nu}_{t+h,\rho}(\xi) - \widehat{\nu}_{t,\rho}(\xi)| \|\psi\|,$$

où

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{N/2} (\widehat{\nu}_{t+h,\rho}(\xi) - \widehat{\nu}_{t,\rho}(\xi)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(t+h)\rho\omega \cdot \xi} g(\omega) e^{-(t+h)\sigma(\rho\omega)} d\omega + \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(t+h)\rho\omega \cdot \xi} g(\omega) (e^{-(t+h)\sigma(\rho\omega)} - e^{-t\sigma(\rho\omega)}) d\omega \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^N} e^{-it\rho\omega \cdot \xi} g(\omega) e^{-t\sigma(\rho\omega)} d\omega \\ &=: I_1(\xi) + I_2(\xi) - I_3(\xi). \end{aligned}$$

On remarque que pour tout  $t \in [\delta, 1/\delta]$  on a

$$|I_2(\xi)| \leq C_\delta \|\sigma\|_\infty h \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |g(\omega)| d\omega.$$

D'autre part, comme

$$\{\Theta_{\rho,t} : \rho \in I, t \in [\delta, 1/\delta]\}$$

est relativement compact dans  $L^1(\mathbb{S}^{N-1})$ , où  $\Theta_{\rho,t} : \mathbb{S}^{N-1} \ni \omega \mapsto g(\omega)e^{t\sigma(\rho\omega)}$ , par le lemme de Lebesgue-Riemann on peut rendre  $|I_1(\xi)|$  et  $|I_3(\xi)|$  arbitrairement petit, uniformément en  $(\rho, t) \in I \times [\delta, 1/\delta]$ , pour  $|\xi|$  grand. Enfin, on voit bien que la différence  $|I_1(\xi) - I_3(\xi)| \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  uniformément en  $\xi$  borné et en  $(\rho, t) \in I \times [\delta, 1/\delta]$ . Ce qui finit la preuve du cas  $\rho_{min} > 0$ . Regardons à présent le cas  $\rho_{min} = 0$ . Comme précédemment il suffit de montrer que

$$0 < t \mapsto [K_0U]^{n-1}(t)K_0$$

est continue en norme. Définissons les opérateurs suivants :

$$X_{\{\rho \leq \varepsilon\}} : L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \varphi(x, \rho, \omega)\chi_{\{\rho \leq \varepsilon\}}(\rho) \in L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1})$$

et

$$X_{\{\rho > \varepsilon\}} : L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}) \ni \varphi \mapsto \varphi(x, \rho, \omega)X_{\{\rho > \varepsilon\}}(\rho) \in L^1(\Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}).$$

On a

$$\|[K_0U]^{n-1}(t)K_0X_{\{\rho \leq \varepsilon\}}\| \leq \sup_{\rho \leq \varepsilon} \|[K_0U]^{n-1}(t)K_0[\rho]\| \leq c_T \|K_0^\rho\|^n \quad \forall t \in [0, T],$$

pour une constante  $c_T$  bien choisie. Ceci entraîne, en tenant compte de l'hypothèse (6.12), que

$$\|[K_0U]^{n-1}(t)K_0 - [K_0U]^{n-1}(t)K_0X_{\{\rho > \varepsilon\}}\| \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

*uniformément* en  $t \in [0, T]$ . Il suffit donc de montrer la continuité en norme de

$$0 < t \mapsto [K_0U]^{n-1}(t)K_0X_{\{\rho > \varepsilon\}}.$$

Pour cela il suffit d'établir le résultat pour

$$0 < t \mapsto K_1U * K_2U * \cdots * K_{n-1}UK_nX_{\{\rho > \varepsilon\}},$$

où chacun des  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , possède un noyau  $\alpha_i(x, \rho)f_i(\omega)g_i(\omega')$  avec  $\alpha_i \in L^\infty(\Omega \times I)$ ,  $f_i \in L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$  et  $g_i \in L^\infty(\mathbb{S}^{N-1})$ . Or, dans ces conditions la preuve découle de ce que l'on vient de montrer lorsque  $\rho_{min} > 0$ . ■

## 6.5 Appendix

Dans cet Appendix on montre un lemme que l'on a utilisé à plusieurs reprises. La preuve combine des arguments tirés de [49, Lemmas 1 et 2] et [73, Lemma 7].

**Lemme 6.5.1.** Soit  $1 \leq p < \infty$ . On a

- (a)  $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(T + K_0) \subset \sigma_{ap}(T + K_0 + K_c)$ .
- (b)  $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(T + K_0 + K_d)$ .
- (c)  $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(T + K_0 + K_d + K_d)$ .

**Preuve.** Soit  $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite approximante associée :

$$\|\varphi_n\| = 1 \text{ et } \|T\varphi_n - \lambda\varphi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Notons que, d'après le Théorème 1.5.5, cette suite peut être choisie de manière que son support satisfasse

$$\text{Supp } \varphi_n \subset \Omega \times (0, \tau_n) \times \mathbb{S}^{N-1}, \quad (6.22)$$

où  $(\tau_n)_n$  est une suite tendant vers zéro. Posons  $\psi_{n,m} = e^{i\omega \cdot m} \varphi_n$  pour tout  $m \in \mathbb{Z}^N$ . Il est clair alors que

$$\|\psi_{n,m}\| = \|\varphi_n\| = 1 \text{ et } \|(\lambda - T)\psi_{n,m}\| = \|(\lambda - T)\varphi_n\|.$$

De plus en adaptant, *mutatis mutandis*, la preuve du Lemme 2.4.3, on peut montrer qu'il existe une sous-suite  $(m_n)_n$  telle que

$$\|K_0\psi_{n,m_n}\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|(\lambda - T - K_0)\psi_{n,m_n}\| &\leq \|(\lambda - T)\psi_{n,m_n}\| + \|K_0\psi_{n,m_n}\| \\ &\leq \|(\lambda - T)\varphi_n\| + \|K_0\psi_{n,m_n}\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

et donc  $\lambda \in \sigma_{ap}(T + K_0)$ . Montrons l'inclusion  $\sigma_{ap}(T + K_0) \subset \sigma_{ap}(T + K_0 + K_d)$ . Reprenons la suite  $(\psi_{n,m_n})_n$ , son support vérifie aussi

$$\text{Supp } \psi_{n,m_n} = \text{Supp } \varphi_n \subset \Omega \times (0, \tau_n) \times \mathbb{S}^{N-1}.$$

Pour  $n$  suffisamment grand,  $\tau_n < \min\{e_1(\rho), \dots, e_l(\rho)\}$  et par conséquent

$$K_d\psi_{n,m_n}(x, \rho, \omega) = \sum_{i=1}^l \int_{\mathbb{S}^{N-1}} k_d^{(i)}(x, e_i(\rho), \omega, \omega') \varphi(x, e_i(\rho), \omega') = 0, \quad (x, \rho, \omega) \in \Omega \times I \times \mathbb{S}^{N-1}.$$

D'où pour  $n$  suffisamment grand

$$\begin{aligned} \|(\lambda - T - K_0 - K_d)\psi_{n,m_n}\| &= \|(\lambda - T - K_0)\psi_{n,m_n}\| \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\lambda \in \sigma_{ap}(T + K_0)$ . Par la définition du spectre approché, il existe une suite  $(\phi_n)_n$  telle que

$$\|\phi_n\| = 1 \text{ et } \|(\lambda - T - K_0)\phi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (6.23)$$



Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  posons  $\vartheta_{n,k} = e^{ik\rho}\phi_n$ . Du fait que  $T + K_0$  ne mélange pas les modules des vitesses, on a clairement

$$\|\vartheta_{n,k}\| = \|\phi_n\| = 1 \text{ et } \|(\lambda - T - K_0)\vartheta_{n,k}\| = \|(\lambda - T - K_0)\phi_n\|.$$

Par les mêmes techniques de la preuve du Lemme 2.4.3 (essentiellement le théorème de Lebesgue-Riemann) on montre qu'on peut exhiber une sous-suite  $(k_n)_n$  telle que

$$\|K_c\vartheta_{n,k_n}\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Ceci d'une part et (6.23) d'autre part conduisent à

$$\begin{aligned} \|(\lambda - T - K_0 - K_c)\vartheta_{n,k_n}\| &\leq \|(\lambda - T - K_0)\vartheta_{n,k_n}\| + \|K_c\vartheta_{n,k_n}\| \\ &\leq \|(\lambda - T - K_0)\phi_n\| + \|K_c\vartheta_{n,k_n}\| \\ &\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que  $\lambda \in \sigma_{ap}(T + K_0 + K_c)$ . Il reste à montrer que

$$\sigma_{ap}(T) \subset \sigma_{ap}(T + K).$$

Soit  $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$  et  $(\varphi_n)_n$  une suite vérifiant (6.22). En opérant comme précédemment on peut trouver une sous-suite  $(m_n)_n$  telle que

$$\|(\lambda - T - K_0)e^{i\omega \cdot m_n}\varphi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Puis on peut en trouver aussi une sous-suite  $(k_n)_n$  telle que

$$\|(\lambda - T - K_0 - K_c)e^{ik_n\rho}e^{i\omega \cdot m_n}\varphi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'autre part, la suite  $(\Phi_n)_n = (e^{ik_n\rho}e^{i\omega \cdot m_n}\varphi_n)_n$  vérifie en vertu de son support

$$K_d\Phi_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand,}$$

et par conséquent

$$\|(\lambda - T - K_0 - K_c - K_d)\Phi_n\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Ce qui montre que  $\lambda \in \sigma_{ap}(T + K)$ . ■

---

# Bibliographie

- [1] S. ALBERTONI AND B. MONTAGNINI. *On the spectrum of neutron transport equation in finite bodies*. J. Math. Anal. Appl. **13** (1966), 19–48.
- [2] D. ALIPRANTIS AND O. BURKINSHAW. *Positive operators*. Academic Press, 1985.
- [3] F. ANDREU AND J.M. MAZON. *On the boundary spectrum of dominated  $C_0$ -semigroups*. Semigroup Forum **38** (1989), 129–139.
- [4] F. ANDREU, J. MARTINEZ AND J.M. MAZON. *A spectral mapping theorem for the perturbed strongly continuous semigroups*. Math. Ann. **291** (1991), 453–462.
- [5] N. ANGELESCU, N. MARINESCU AND V. PROTOPOPESCU. *On the spectrum of the linear transport operator with generalized boundary conditions*. Letters in Math. Phys. **1** (1976), 141–146.
- [6] W. ARENDT. *Kato's equality and spectral decomposition for positive  $C_0$ -groups*. Manuscripta Math. **40** (1982), 277–298.
- [7] W. ARENDT, C. J. K. BATTY, M. HIEBER AND F. NEUBRANDER. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhauser Verlag, 2001.
- [8] J. BANASIAK. *Mathematical properties of inelastic scattering models in kinetic theory*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci. **10**(2) (2000), 163–186.
- [9] J. BANASIAK. *On well-posedness of a Boltzmann-like semiconductor model*. Math. Mod. Meth. Appl. Sci. **13** (2003), 875–892.
- [10] J. BANASIAK, G. FROSALI AND G. SPIGA. *Interplay of elastic and inelastic scattering operators in extended kinetic models and their hydrodynamic limits-reference manual*. Transport Theory Statist. Phys. **31** (2002), 187–248.
- [11] C. BARDOS. *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels : théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), 185–233.
- [12] C. BARDOS AND M. CESSENAT. *Décomposition de l'opérateur de transport dans une bande*. C. R. Acad. Sci. Paris **289** Série A (1979), 95–98.
- [13] R. BEALS AND V. PROTOPOPESCU. *Abstract time-dependent transport equations*. J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 370–405.

- [14] G.I. BELL AND S. GLASSTONE. *Nuclear reactor theory*, Van Norstrandt, 1970.
- [15] A. BELLENI-MORANTE. *The initial value problem for neutron transport in a slab with perfect reflection boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. **30** (1970), 353–374.
- [16] M.D. BLAKE. *A spectral bound for asymptotically norm-continuous semigroups* J. Operator Theory **45** (2001), 111–130
- [17] M.D. BLAKE, S. BRENDLE AND R. NAGEL. *On the structure of the critical spectrum of strongly continuous semigroup*. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), 55–65, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 215, Dekker, New York, 2001.
- [18] M. BORYSIEWICZ AND J. MIKA. *Time behaviour of thermal neutrons in moderating media*. J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 461–478.
- [19] S. BRENDLE. *On the asymptotic behaviour of perturbed strongly continuous semigroups*. Math. Nachr. **226** (2001), 35–47.
- [20] S. BRENDLE, R. NAGEL AND J. POLAND. *On the spectral mapping theorem for perturbed strongly continuous semigroups*. Arch. Math. **74**(5) (2000), 365–378.
- [21] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et application*. Paris, Masson, 1983.
- [22] M. CESSENAT. *Théorèmes de trace  $L_p$  pour des espaces de fonctions de la neutronique*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299**(16) (1984), 831–834.
- [23] M. CESSENAT. *Théorèmes de trace pour des espaces de fonctions de la neutronique*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300**(3) (1985), 89–92.
- [24] PH. CLÉMENT *et al.* *One parameter semigroups*. North-Holland, 1987.
- [25] R. DAUTRAY AND J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique*, Volume **9**, Masson, 1988.
- [26] E.B. DAVIES. *One-parameter semigroups*. Academic Press, London, 1980.
- [27] D. DOODS AND J. FREMLIN. *Compact operators in Banach lattices*. Israel J. Math. **34** (1979), 287–320.
- [28] J.J. DUDERSTADT AND W.R. MARTIN. *Transport theory*. John Wiley and Sons, Inc. 1979.
- [29] N. DUNFORD AND J.T. SCHWARTZ. *Linear Operators, part I*. Interscience, New-York, 1958.
- [30] D.E. EDMUNDS AND W.D. EVANS. *Spectral Theory and Differential Operations*. Oxford Mathematical Monographs, 1989.
- [31] O. EL-MENNAOUI AND K.-J. ENGEL. *On the characterization of eventually norm continuous semigroups in Hilbert spaces*. Arch. Math. **63** (1994), 437–440.

- [32] K.-J. ENGEL AND R. NAGEL. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer, New York Berlin Heidelberg, 1999.
- [33] L. GEARHART. *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 385–394.
- [34] P. GÉRARD. *Regularization by averaging for solutions of partial differential equations*. Recent developments in hyperbolic equations (Pisa, 1987), 59–66, Pitman Res. Notes Math. Ser., 183, Longman Sci. Tech., Harlow, 1988.
- [35] F. GOLSE, P-L. LIONS, B. PERTHAME AND R. SENTIS. *Regularity of the Moments of the solution of a transport equation*. J. Funct. Anal. **76** (1988), 110–125.
- [36] F. GOLSE, B. PERTHAME AND R. SENTIS. *Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*. C. R. Acad. Sci. Paris **301** (1985), 341–344.
- [37] W. GREENBERG, C. VAN DER MEE AND V. PROPOPESCU. *Boundary value problems in abstract kinetic Theory*. Birkhäuser, Basel, 1987.
- [38] G. GREINER. *Positivity in time dependent linear transport operator theory*. Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen, Sommersemester, 1982.
- [39] G. GREINER. *Spectral properties and asymptotic behavior of the linear transport equations*. Math. Z. **85** (1984), 167–177.
- [40] G. GREINER AND R. NAGEL. *On the stability of strongly continuous semigroups of positive operators on  $L^2(\mu)$* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **X**(2) (1983), 257–262.
- [41] G. GREINER, J. VOIGT AND M. WOLFF. *On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators*. J. Operator Theory. **5** (1981), 245–256.
- [42] J. HEJTMANEK AND H.G. KAPER. *Counterexample to the spectral mapping theorem for the exponential function*. Proc. Amer. Math. Soc. **96**(4) (1986), 563–568.
- [43] E. HILLE AND R.S. PHILLIPS. *Functional analysis and semigroups*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **31**, 1957.
- [44] K. JÖRGENS. *An asymptotic expansion in the theory of neutron transport*. Comm. Pure. Appl. Math. **11** (1958), 219–242.
- [45] H.G. KAPER, C.G. LEKKERKERKER AND J. HEJTMANEK. *Spectral Methods in linear transport theory*. Birkhauser Verlag, 1982.
- [46] T. KATO. *Perturbation Theory for linear operators*. Springer-Verlag, 1966.
- [47] M. KRASNOSELSKII *Integral operators in spaces of summable functions*. Nordhoff International publishing, 1976.

- [48] I. KUŠČER. *A survey of neutron transport theory*. Acta. Physica Austriaca supp. **X** (1973), 491–528.
- [49] E.W. LARSEN AND P.F. ZWEIFEL. *Spectrum of the linear transport operator*. J. Math. Phys. **15**(11) (1974), 1987–1997.
- [50] K. LATRACH. *Théorie spectrale d'équation cinétiques*. Thèse de Doctorat de l'université de Franche-Comté, Besançon, 1992.
- [51] K. LATRACH. *Description of the real point spectrum for a class of neutron transport operators*. Transport Theory Stat. Phys. **22** (1993), 595–629.
- [52] K. LATRACH. *On the spectrum of the transport operator with abstract boundary conditions in slab geometry*. J. Math. Anal. Appl. **252** (2000), 1–17.
- [53] K. LATRACH. *Compactness results for transport equations and applications*. Math. Models Meth. Appl. Sci. **11** (2001), 1181–1202.
- [54] K. LATRACH AND B. LODS. *Regularity and time asymptotic behaviour of solutions to transport equations*. Transp. Theory Stat. Phys. **30**(7) (2001), 617–639.
- [55] J. LEHNER AND G.M. WING. *On the spectrum of unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons*. Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 217–234.
- [56] J. LEHNER AND G.M. WING. *Solution of the linearized Boltzmann transport equation for slab geometry*. Duke Math. J. **23** (1956), 125–142.
- [57] M. LI, X. GU AND F. HUANG. *On unbounded perturbations of semigroups : compactness and norm continuity*. Semigroup Forum **65**(1) (2002), 58–70.
- [58] B. LODS. *Théorie spectrale des équations cinétiques*. Thèse de doctorat de l'université de Franche-Comté, Besançon, 2002.
- [59] B. LODS. *On linear kinetic equations involving unbounded cross-sections*. Math. Methods Appl. Sci. **27**(9) (2004), 1049–1075.
- [60] B. LODS AND M. SBIHI. *Stability of the essential spectrum for 2D-transport models with Maxwell boundary conditions*. Math. Meth. Appl. Sci. A paraître.
- [61] A. MAJORANA AND C. MILAZZO. *Space homogeneous solutions of the linear semiconductor Boltzmann equation*. J. Math. Anal. Appl. **259** (2001), 609–629.
- [62] I. MAREK. *Frobenius theory of positive operators*. SIAM J. Appl. Math. **19**(3) (1970), 607–628.
- [63] J. MARTINEZ AND J.M. MAZON.  *$C_0$ -semigroups norm continuous at infinity*. Semigroup Forum **52** (1996), 213–224.
- [64] J. MIKA, R. STANKIEWICZ AND T. TROMBETTI. *Effective solution to the initial value problem in neutron thermalization theory*. J. Math. Anal. Appl. **25** (1969), 149–161.

- [65] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *La compacité dans la théorie du transport des neutrons*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303**(13) (1986), 617–619.
- [66] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *Compactness properties for positive semigroups on Banach lattices and applications*. Houston J. Math. **17**(1) (1991), 25–38.
- [67] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *Time asymptotic behaviour and compactness in neutron transport theory*. Europ. J. Mech. B Fluid **11** (1992), 39–68.
- [68] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *Mathematical topics in neutron transport theory, new aspects*. World Scientific. Series on advances in Mathematics for applied Sciences Vol. **46** 1997.
- [69] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *On the convex compactness property for the strong operator and related topics*. Math. Meth. Appl. Sci. **27** (2004), 687–701.
- [70] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *Optimal spectral theory of the linear Boltzmann equations*. J. Funct. Anal. **226** (2005), 21–47.
- [71] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *On  $L^1$ -spectral theory of neutron transport*. J. Diff. Int. Eq. A paraître.
- [72] M. MOKHTAR-KHARROUBI. *Spectral properties of a class of positive semigroups on Banach lattices and transport absorption operators*. Positivity. A paraître.
- [73] M. MOKHTAR-KHARROUBI AND M. SBIHI. *Critical spectrum and spectral mapping theorems in transport theory*. Semigroup Forum **70** (2005), 406–435.
- [74] M. MOKHTAR-KHARROUBI AND M. SBIHI. *Spectral mapping theorems for neutron transport,  $L^1$ -theory*. Semigroup Forum. A paraître.
- [75] B. MONTAGNINI. *The eigenvalue spectrum of the linear Boltzmann operator in  $L^1(\mathbb{R}^N)$  and  $L^2(\mathbb{R}^N)$* . Meccanica. **14** (1979), 134–144.
- [76] B. MONTAGNINI AND M.L. DEMURU. *Complete continuity of the free gas scattering operator in neutron thermalization theory*. J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 49–57.
- [77] R. NAGEL (Ed). *One-parameter semigroups of positive operators*. Lect. Notes Math. **1184**, Springer-Verlag, 1986.
- [78] R. NAGEL AND J. POLAND. *The critical spectrum of a strongly continuous semigroup*. Advances in Mathematics. **152** (2000), 120–133.
- [79] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer, New York, 1983.
- [80] J.G. PENG, M.S. WANG AND G.T. ZHU. *The distribution of the spectra of the generators of a class of perturbed semigroups and its application*. (in Chinese) Acta Math. Appl. Sinica **20**(1) (1997), 107–113.
- [81] V. PROTOPODESCU AND A. CORCIOVEI. *A. On the spectrum of the linear transport operator with diffuse reflection*. Rev. Roumaine Phys. **21** (1976), 713–719.

- [82] M. RIBARIC AND I. VIDAV. *Analytic properties of the inverse  $A(z)^{-1}$  of an analytic linear operator valued function  $A(z)$* . Arch. Rational Mech. Anal. **32** (1969), 298–310.
- [83] M. ROTENBERG. *Transport theory for growing cell populations*. J. Theor. Biol. **103** (1983), 181–199.
- [84] M. SBIHI. *A resolvent approach to the stability of essential and critical spectra of perturbed  $C_0$ -semigroups on Hilbert spaces with applications to transport theory*. Prépublications du Laboratoire de Mathématiques de Besançon n° 2005/27.
- [85] M. SBIHI. *Spectral theory of neutron transport semigroups with partly elastic collision operators*. En cours de rédaction.
- [86] H.H. SCHAEFER. *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, 3ème édition, 1971.
- [87] M. SCHECHTER. *Spectra of Partial Differential Operators*. North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [88] G. SCHLÜCHTERMANN. *On weakly-compact operators*. Math. Ann. **292** (1992), 263–266.
- [89] G. SCHLÜCHTERMANN. *Perturbation of linear semigroups*. Recent progress in operator theory (Regensburg 1995), p. 263–277. Oper. Theory Adv. Appl. **103**, Birkhäuser, Basel 1998.
- [90] D.G. SONG. *A note on the growth bound of  $C_0$ -semigroups*. Semigroup Forum **54** (1997), 190–198.
- [91] D.G. SONG. *Some notes on the spectral properties of  $C_0$ -semigroups generated by linear transport operators*. Transp. Theory Stat. Phys. **26** (1997), 233–242.
- [92] A. SUHADOLC. *Linearized Boltzmann equation in  $L^1$  space*. J. Math. Anal. Appl. **35** (1971), 1–13.
- [93] P. TAKAC. *A spectral mapping theorem for the exponential function in linear transport theory*. Transp. Theory Stat. Phys. **14** (1985), 655–667.
- [94] P. TAKAC. *Two counterexamples to the spectral mapping theorem for semigroups of positive operators*. Integral Equations Operator Theory **9**(3) (1986), 460–467.
- [95] S. UKAI. *Eigenvalues of neutron transport operator for a homogeneous moderator*. J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 297–314.
- [96] R. VAN-NORTON. *On the real spectrum of a monoenergetic neutron transport operator*. Comm. Pure and Appl. Math. **15** (1962), 149–158.
- [97] I. VIDAV. *Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunction of the Boltzmann operator*. J. Math. Anal. Appl. **22** (1968), 144–155.

- [98] I. VIDAV. *Spectra of perturbed semigroups with applications to transport theory*. J. Math. Anal. Appl. **30** (1970), 264–279.
- [99] V.S. VLADIMIROV. *Mathematical Problems in the one velocity Theory of Particle Transport*. Atomic Energy of Canada Ltd. Chalk River. Ont Report **AECL-1661** (1963).
- [100] J. VOIGT. *On the perturbation theory for strongly continuous semigroups*. Math. Ann. **229** (1977), 163–171.
- [101] J. VOIGT. *A perturbation theorem for the essential spectral radius of strongly continuous semigroups*. Mh. Math. **90** (1980), 153–161.
- [102] J. VOIGT. *Functional analytic treatment of the initial boundary value problem for collisionless gases*. München, Habilitationsschrift (1981).
- [103] J. VOIGT. *Positivity in time-dependent linear transport theory*. Acta. Appl. Math. **2** (1984), 311–331.
- [104] J. VOIGT. *Spectral properties of the neutron transport equation*. J. Math. Anal. Appl. **106**(1) (1985), 140–153.
- [105] J. VOIGT. *On the convex compactness property for the strong operator topology*. Note. di. Mat. **12** (1992), 259–269.
- [106] J. VOIGT. *Stability of the essential type of strongly continuous semigroups*. Trans. Steklov. Math. Inst. **203** (1994), 469–477.
- [107] L. WEIS. *A generalization of the Vidav-Jörgens perturbation theorem for semigroup and its application to transport theory*. J. Math. Anal. Appl. **129** (1988), 6–23.
- [108] L. WEIS. *The stability of positive semigroups on  $L_p$  spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3089–3094.
- [109] M.M.R. WILLIAMS. *Mathematical methods in particle transport theory*. London Butterworths (1971).
- [110] P.F. YAO. *On the inversion of the Laplace transform of  $C_0$ -semigroups and its applications*. SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 1331–1341.
- [111] P. YOU. *Characteristic conditions for  $C_0$ -semigroup with continuity in the uniform operator topology for  $t > 0$  in Hilbert space*. Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 991–997.
- [112] J. ZABCZYK. *A note on  $C_0$ -semigroups*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **23** (1975), 895–898.
- [113] Q.C. ZHANG AND F.L. HUANG. *Compact perturbation of  $C_0$ -operator semigroups*. (in Chinese) Sichuan Daxue Xuebao **35**(6) (1998), 829–833.



---

# Index

- A**  
abscisse spectrale de  $T : s(T)$ , 18  
alternative de Gohberg-Shmulyan, 29  
argument  
  d'interpolation, 34  
  de domination, 35
- C**  
 $C_0$ -semigroupe, 21  
  de transport, 5  
  irréductible, 169  
  d'absorption, 4  
  positif, 166  
convergence au sens généralisé, 158  
convolution d'opérateurs, 32
- E**  
ensemble résolvant de  $T : \rho(T)$ , 18
- F**  
fréquence de collision, 4
- I**  
identité de la résolvante, 18
- M**  
modèle  
  continu, 4  
  multigroupe, 4
- N**  
noyau de collision, 4
- O**  
opérateur  
  d'absorption, 4  
  de transport, 5  
opérateur de collision  
  élastique, 9  
  régulier, 47  
  classique, 9  
  inélastique, 9
- P**  
pôle de la résolvante, 20  
projection spectrale, 20  
propriété de compacité des intégrales fortes, 32
- R**  
rayon spectral  
  critique de  $e^{tT} : r_{crit}(e^{tT})$ , 26  
  de  $T : r_\sigma(T)$ , 18  
  essentiel de  $T : r_{ess}(T)$ , 20
- S**  
série de Dyson-Phillips, 29  
spectre  
  approché de  $T : \sigma_{ap}(T)$ , 19  
  critique de  $e^{tT} : \sigma_{crit}(e^{tT})$ , 25  
  de  $T : \sigma(T)$ , 18  
  résiduel de  $T : \sigma_R(T)$ , 19  
  essentiel de  $T : \sigma_{ess}(T)$ , 20  
  périphérique de  $T : \sigma_+(T)$ , 18  
  ponctuel de  $T : \sigma_p(T)$ , 18  
suite  
  singulière, 21  
  approximante, 19
- T**  
théorème d'application spectrale, 24  
  partielle, 24  
type  
  critique de  $(e^{tT})_{t \geq 0} : \omega_{crit}(T)$ , 26  
  de  $(e^{tT})_{t \geq 0} : \omega_0(T)$ , 22  
  essentiel de  $(e^{tT})_{t \geq 0} : \omega_{ess}(T)$ , 27
- V**  
valeur propre, 19  
  algébriquement simple, 20  
  de multiplicité algébrique finie, 20  
  principale, 15

**Résumé.** Cette thèse porte principalement sur l'étude spectrale de divers modèles neutroniques. Elle consiste en trois parties complémentaires. La première partie est consacrée aux problèmes d'applications spectrales dans les **domaines non bornés**, où faute de compacité les méthodes usuelles n'opèrent plus. A l'aide d'arguments d'analyse fonctionnelle sur le spectre critique des semigroupes perturbés nous cernons une large classe de paramètres liés à l'équation pour lesquels le théorème d'application spectrale a lieu. Dans la deuxième partie, nous apportons une nouvelle approche, dite **résolvante**, de la stabilité des spectres essentiel et critique des semigroupes perturbés dans les espaces de Hilbert. En neutronique, par le biais de cette approche, nous retrouvons des résultats classiques de stabilité de spectre essentiel dans les domaines bornés et nous améliorons certains résultats de la première partie dans les domaines non bornés. La troisième partie traite d'un **modèle de collision partiellement élastique** introduit par E.W. LARSEN et P.F. ZWEIFEL. Afin de dégager le comportement asymptotique en temps grands du semigroupe gouvernant ce modèle nous ferons sa théorie spectrale. Nous étudions les propriétés de compacité à la base de cette théorie, ce qui nous permettra notamment d'obtenir des résultats de stabilité du type essentiel. Nous examinons ensuite les incidences de la positivité : irréductibilité, propriétés de monotonie stricte de la valeur propre principale, réalité du spectre périphérique.

*Mots clés :* Equation de transport, modèle de collision partiellement élastique, domaines non bornés, théorème d'application spectrale, spectre critique, spectre essentiel, continuité en norme, compacité, approche résolvante, positivité.

**AMS subject classifications :** 82D75, 35F10, 47A10, 35P05, 47D06, 47G20, 47N55, 82C70.

**Abstract.** This dissertation is mainly devoted to spectral analysis of various neutron transport models. It is composed of three complementary parts. Part 1 deals with spectral mapping theorems in **unbounded geometries** where, due to the lack of compactness, the classical arguments do not work. Using some functional analytic results on the critical spectrum of perturbed semigroups, we show under fairly general assumptions that the spectral mapping theorem holds. In Part 2 we provide a new approach, called **resolvent approach**, to study the stability of essential and critical spectra of perturbed  $C_0$ -semigroups on Hilbert spaces. We show how these results apply to neutron transport equations in both bounded or unbounded geometries. The third part deals with a **partly elastic collision model** introduced by E.W. LARSEN and P.F. ZWEIFEL. To display the large time behavior of the semigroup governing this model, we present its spectral theory. We analyze compactness properties related to the model, which enable us, in particular, to derive some stability results on the essential type. Then we examine the incidences of the positivity : irreducibility, strict monotonicity properties of the leading eigenvalue, reality of the peripheral spectrum.

*Keys words :* Transport equation, partly elastic collision model, unbounded domains, spectral mapping theorem, critical spectrum, essential spectrum, norm continuity, compactness, resolvent approach, positivity.