



HAL
open science

Espaces twistoriels et structures complexes exotiques

Guillaume Deschamps

► **To cite this version:**

Guillaume Deschamps. Espaces twistoriels et structures complexes exotiques. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT: . tel-00011091

HAL Id: tel-00011091

<https://theses.hal.science/tel-00011091>

Submitted on 22 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : 3209

THÈSE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Guillaume Deschamps

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE

Espaces twistoriels et structures complexes exotiques

Soutenue le 15 novembre 2005 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY

M.	Paul Gauduchon	Rapporteur
M.	Massimiliano Pontecorvo	Rapporteur
M.	Frédéric Campana	Examinateur
M.	Dominique Cerveau	Examinateur
M.	Marcel Nicolau	Examinateur
M.	Laurent Meersseman	Directeur

Remerciements

Il serait totalement impoli de commencer cette thèse sans remercier chaleureusement Laurent Meersseman mon directeur de thèse. Il m'a orienté sur la route passionnante des espaces twistoriels. Sa patience est remarquable et son soutien permanent.

Alberto Verjovsky ! Il est tellement plaisant de parler avec toi. Quelle culture et quel enthousiasme devant tous ces résultats "hypers jolis". Un grand merci pour ton suivi durant ces trois années et j'espère à très bientôt.

Un grand merci aussi à tous les membres du jury pour leurs remarques et tout particulièrement à Massimiliano Pontecorvo et Paul Gauduchon qui ont accepté d'en être les rapporteurs et qui se sont fortement investis dans cette tâche.

Il me faut encore remercier toute l'équipe de géométrie analytique et tout particulièrement Dominique Cerveau pour ses conseils ainsi que Jean-Marie Lion pour sa bonne humeur. En parlant de bonne humeur, merci aux filles du troisième : Karine Falc'hon (bien-sûr), Claude Boschet (lui confiez pas de secrets !) et Danielle Lanneau. Le troisième étage est le passage obligé pour retrouver le sourire ou résoudre un problème administratif.

Si je dois remercier tout ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail, il ne me faut pas oublier le trio des bibliothécaires : merci pour votre accueil et votre efficacité. Il me faut aussi remercier ceux qui travaillent dans l'ombre : toute l'équipe du 218 et surtout D'jamel, Florence, Stef et Baptiste. Ainsi que toute la tribu du 26 pour leurs encouragements et leurs attentions.

Un très grand merci enfin à Gweltaz pour les services rendus ainsi qu'aux autres thésards devenus pour beaucoup de jeunes docteurs.

Bonne lecture, Guillaume.

Table des matières

1	Géométrie différentielle des 4-variétés	1
1.1	Tenseur de courbure	1
1.2	Courbure sectionnelle	4
1.3	Tenseur de Ricci et métrique d'Einstein	5
1.4	Courbure scalaire	6
1.5	Topologie et courbure	7
2	Structure presque complexe et structure kählérienne	13
2.1	Structure presque complexe	13
2.2	Métrique hermitienne et kählérienne	15
2.3	Métrique kählérienne et métrique anti-autoduale	17
3	Espace twistoriel d'une 4-variété	21
3.1	Espace twistoriel d'une 4-variété	21
3.1.1	Définition	21
3.1.2	Structure presque complexe sur l'espace twistoriel	22
3.1.3	Espace twistoriel et structure complexe sur M	25
3.2	Exemples d'espaces twistoriels	29
3.2.1	Espace twistoriel du plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$	30
3.2.2	Espace twistoriel de la sphère S^4	30
3.2.3	Espace twistoriel de \mathbb{R}^4 : première présentation	30
3.2.4	Espace twistoriel de \mathbb{R}^4 : deuxième présentation	31
3.2.5	Espace twistoriel de $S^1 \times S^3$	32
3.3	Propriétés des espaces twistoriels	33
3.3.1	Fibré normal	33
3.3.2	Classes de Chern	34
3.3.3	Dimension de Kodaira	34
3.3.4	Dimension algébrique	35
4	Ensemble des structures presque complexes d'une 4-variété	37
4.1	Solution du problème pour \mathbb{R}^4	37
4.2	Solution du problème pour $S^1 \times S^3$	40
4.3	Variété hypercomplexe	49

4.3.1	Fibré twistoriel topologiquement trivial	50
4.3.2	Variété hypercomplexe et variante	53
4.3.3	Espace twistoriel plat	54
4.4	Solution du problème pour les tores	58
4.5	Solution du problème pour les surfaces $K3$	60
5	3-variété complexe de premier type	61
5.1	Variétés presque quaternioniques	61
5.1.1	Caractérisation en terme de groupe structural	61
5.1.2	Caractérisation topologique	63
5.2	Surfaces compactes complexes à fibré twistoriel topologiquement trivial	65
5.3	Surfaces complexes parallélisables	79
5.4	Variétés de dimension quatre parallélisables sans structure complexe dont l'espace twistoriel est complexe	80
6	3-variété complexe de deuxième type	87
6.1	Structure complexe non standard	88
6.2	Résolution du problème pour les métriques d'Einstein	89
6.3	Résolution du problème pour les métriques hermitiennes	93
6.4	Résolution du problème pour les métriques riemanniennes	94
6.5	Démonstrations	96
6.5.1	Démonstration du théorème 1	96
6.5.2	Démonstration de la remarque	97
6.5.3	Démonstration de la proposition 4	99
6.5.4	Démonstration de la proposition 5	102
6.6	Existence d'une infinité de structures complexes non standards	103
7	Théorème de Kodaira et connexité rationnelle	107
7.1	Les différentes connexités rationnelles	107
7.2	Connexité rationnelle "forte"	108
7.3	Connexité rationnelle par chaînes	108
7.4	Théorème de Kodaira	109
8	Annexe	119
	Bibliographie	138

Introduction

Mes travaux sont à la frontière de la géométrie différentielle et de la géométrie complexe. C'est grâce à la théorie des espaces twistoriels que je peux naviguer entre ces deux grands domaines des mathématiques.

Cette thèse est découpée en sept chapitres et une annexe. Les trois premiers chapitres ne contiennent pas de résultats véritablement nouveaux. On y rappelle les notions qui seront utilisées dans la suite. On y donne également les preuves des faits les moins connus ou les plus utiles pour la suite. Les chapitres qui suivent s'intéressent aux problèmes suivants :

Chapitre 4 Déterminer l'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique d'une 4-variété réelle. Ce chapitre regroupe et précise un certain nombre de résultats déjà contenu dans la littérature.

Chapitre 5 Recherche d'une famille de 4-variétés M sans structure complexe pour lesquelles le produit $M \times \mathbb{S}^2$ est complexe. On parlera de 3-variété complexe de premier type.

Chapitre 6 Recherche de structures complexes non standards sur des produits $M \times \mathbb{S}^2$, où M est une surface complexe. C'est-à-dire des structures complexes qui ne sont pas des déformations de la structure complexe produit. On parlera de 3-variété complexe de deuxième type.

Chapitre 7 On montre que les espaces twistoriels complexes sont tous rationnellement connexe par chaînes. C'est un résultat connu des spécialistes qui n'a semble-t-il, jamais été publié. Pour cela on étudiera en détail le théorème de Kodaira [Kod62].

Ces chapitres contiennent les résultats obtenus au cours de mes trois années de thèse. Le cœur de ce travail est constitué des chapitres 5 et 6.

Enfin, en annexe je donne la démonstration de deux résultats fondamentaux sur les espaces twistoriels. Le premier est le calcul du fibré normal, il est dû aux travaux d'Atiyah, Hitchin et Singer [AHS78]. Le deuxième est le calcul des classes de Chern, il est dû aux travaux d'Hitchin [Hit81].

Dans la suite de cette introduction, nous allons développer un peu plus les différentes questions attachées aux chapitres 5 et 6.

Structure complexe exotique sur des 3-variétés

Les variétés compactes complexes de dimension un sont les surfaces de Riemann. À difféomorphisme près elles sont entièrement déterminées par leur genre topologique. Pour les surfaces compactes complexes on a la classification d'Enriques-Kodaira. À partir de la dimension trois de nouveaux phénomènes apparaissent. Ainsi, une 3-variété kählerienne peut être difféomorphe à une 3-variété non kählerienne. Ces pathologies nous ont motivées à étudier les 3-variétés complexes.

Les 3-variétés les plus simples qu'on puisse construire sont les produits d'une surface complexe M par la droite projective $\mathbb{C}P^1$. La première question que je me suis posé a été la suivante :

Question 1 : Peut-on munir le produit $M \times \mathbb{C}P^1$ d'une structure complexe "différente" de la structure complexe produit ?

La motivation de ce problème vient des travaux de Blanchard. En regardant le quotient du fibré $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ par une action holomorphe de \mathbb{Z}^4 bien choisie, Blanchard [Bla56] a mis une structure complexe non kählerienne sur le produit $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$ d'un tore \mathbb{T}^4 avec la sphère \mathbb{S}^2 . Cette structure complexe n'est pas une déformation de la structure complexe produit, en ce sens on peut parler d'une structure complexe "exotique".

La théorie des espaces twistoriels est l'outil naturel pour construire de nouveaux exemples du type de celui de Blanchard. En effet, soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée. On peut alors lui associer son espace twistoriel $\tau(M, g)$ qui est le fibré des structures presque complexes sur TM compatibles avec l'orientation et la métrique. C'est un fibré lisse localement trivial de fibre la sphère \mathbb{S}^2 et de groupe structural $SO(3)$. L'espace twistoriel $\tau(M, g)$ est muni d'une structure presque complexe canonique qui est intégrable lorsque la courbure de la métrique g est "adéquate" (i.e. g anti-autoduale). Dans ce cas, Hitchin a montré que $\tau(M, g)$ n'est Kähler que si M est la sphère \mathbb{S}^4 ou le plan projectif $\overline{\mathbb{C}P^2}$ munis de leur métrique standard. On munit ici $\overline{\mathbb{C}P^2}$ de l'orientation opposée. D'autre part, si M est une surface complexe, on montrera que la structure complexe sur $\tau(M, g)$ n'est jamais une déformation de la structure complexe produit $M \times \mathbb{C}P^1$. Dans l'exemple de Blanchard, la structure complexe non kählerienne sur $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$ est précisément la structure d'espace twistoriel d'un tore plat : $\tau(\mathbb{T}^4) \simeq \mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$.

Problème 1 : Tout ceci nous motive donc à trouver des exemples de 4-variétés (M, g) tels que :

- (i) M admet une structure complexe

-
- (ii) l'espace twistoriel de (M, g) est difféomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$
 - (iii) la structure presque complexe sur $\tau(M, g)$ est intégrable.

Pour de telles variétés, on aura une structure complexe non standard sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$. On sait déjà qu'une surface K3 munie de sa métrique de Calabi-Yau, ou que la surface $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ munie de sa métrique produit sont des exemples qui, comme les tores plats, vérifient les trois conditions. Mais il faut bien noter qu'ici, la condition (iii) ne demande pas à la métrique d'être hermitienne, contrairement à l'approche de Boyer ou de Pontecorvo par exemple. Cette condition est beaucoup moins restrictive puisqu'alors la métrique n'a plus aucun lien avec la structure complexe. J'insiste sur ce point car les techniques développées ici sont du coup très différentes de celles du cas hermitien. On donnera ainsi des exemples de surfaces de Hopf sans aucune métrique hermitienne anti-autoduale mais munies d'une infinité de métriques riemanniennes anti-autoduales.

Dans le même esprit, on peut chercher des 3-variétés complexes de la forme $M \times \mathbb{C}P^1$, où M est une 4-variété réelle sans structure complexe. Le deuxième problème que nous étudierons est donc le suivant :

Problème 2 : Trouver une famille de 4-variétés réelles M sans structure complexe dont le produit $M \times \mathbb{C}P^1$ admet une structure complexe.

Pour cela nous allons, là encore, utiliser la théorie des espaces twistoriels. L'idée étant ici de trouver des 4-variétés (M, g) pour lesquelles :

- (i) M ne possède pas de structure complexe
- (ii) l'espace twistoriel de (M, g) est difféomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$
- (iii) la structure presque complexe sur $\tau(M, g)$ est intégrable.

Pour de telles variétés on aura une structure complexe sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$ bien que M ne soit pas complexe. Pour résoudre ces deux problèmes, il faut commencer par répondre à la question :

Question 2 : Quand est-ce que le fibré twistoriel d'une 4-variété (M, g) est topologiquement trivial ?

Nous donnerons un critère simple pour savoir si une 4-variété possède ou non cette propriété. C'est une condition qui porte sur l'orientation et sur la topologie de M mais pas sur sa métrique. Nous répondons ainsi à la question la plus naturelle qui soit quand on a un fibré : savoir s'il est ou non trivial. Nous pourrons alors donner la liste de toutes les surfaces complexes dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial.

Théorème : *Les seules surfaces compactes complexes S dont l'espace twistoriel est topologiquement trivial sont :*

$$Kod(S) = -\infty : \begin{cases} \text{Les surfaces réglées de genre un qui sont spin} \\ \text{Les surfaces de Hopf} \\ \text{Les surfaces d'Inoue} \end{cases}$$

$$Kod(S) = 0 : \begin{cases} \text{Les tores} \\ \text{Les surfaces hyperelliptiques} \\ \text{Les surfaces de Kodaira primaires} \\ \text{Les surfaces de Kodaira secondaires qui sont spin} \\ \text{Les surfaces } K3 \end{cases}$$

$$Kod(S) = 1 : \text{Les surfaces minimales qui sont spin}$$

$$Kod(S) = 2 : \text{Aucune surface.}$$

Pour établir ce résultat, il nous faudra étudier en détail la classification d'Enriques-Kodaira des surfaces et en particulier déterminer celles qui ont la particularité d'admettre une structure spin. Ce théorème est le théorème central du chapitre 5, il nous permettra d'énoncer trois nouveaux résultats.

Application 1 : On donnera la liste des surfaces complexes M dont le fibré tangent est topologiquement trivial. C'est-à-dire tel que M soit une 4-variété parallélisable.

Cette classification complète celle de Yau [Yau76] dans la mesure où elle donne non pas la liste des surfaces complexes susceptibles d'être parallélisables, mais bien l'ensemble des surfaces complexes parallélisables.

Application 2 : On donne une famille d'exemples simples de 4-variétés parallélisables sans structure complexe. De tels exemples existaient déjà mais restaient assez isolés ou peu explicites [Yau76], [Bro78].

Application 3 : On construit une famille d'exemples simples de 4-variétés (M, g) qui satisfont les points (i), (ii) et (iii) du problème 2. C'est-à-dire une famille de variétés M sans aucune structure complexe mais tel qu'il existe une structure complexe sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$.

Une des difficultés majeures de ce chapitre a été de trouver cette famille d'exemples.

Dans le chapitre 6 nous donnerons une résolution quasi complète du premier problème.

Théorème : *Soit M une surface compacte complexe dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial. Si la variété M peut être munie d'une métrique riemannienne anti-autoduale alors M est :*

- a) une surface K3*
- b) un tore*
- c) une surface hyperelliptique*
- d) une surface de Hopf*
- e) une surface minimale spin de dimension de Kodaira un.*

Ce théorème peut être vu comme une généralisation au cas riemannien d'un résultat de Boyer et Pontecorvo établi dans le cadre des métriques hermitiennes [Boy86], [Pon92b].

Dans les quatre premiers cas, nous montrerons qu'il existe bien une métrique riemannienne anti-autoduale. Par contre, dans le dernier cas, je ne sais pas s'il existe vraiment une telle métrique. Mais je donnerai des contraintes très précises sur cette métrique si bien qu'on est en droit de penser qu'il n'existe aucune métrique anti-autoduale sur les surfaces spin de dimension de Kodaira un.

Pour certaines surfaces de ce théorème nous donnerons même une infinité de structures complexes qui ne sont pas déformation les unes des autres.

Le théorème 1 du chapitre 4 et une partie des résultats contenus 5 ont fait l'objet d'une publication aux Comptes Rendus Mathématique de l'Académie des Sciences [Des05]. Un article plus général regroupant les résultats des chapitres 5 et 6 est en cours de rédaction.

Chapitre 1

Géométrie différentielle des 4-variétés

Soit M une variété, une métrique riemannienne détermine en chaque point $p \in M$ une structure euclidienne g_p sur l'espace tangent $T_p M$ de M en p . Une variété admet de nombreuses métriques riemanniennes dans la mesure où on peut recoller des métriques locales par partition de l'unité. Une variété riemannienne est une variété munie d'une telle métrique. On peut se demander :

EST-CE QU'IL EXISTE DES MÉTRIQUE PLUS "BELLES" QUE D'AUTRES?

Pour les surfaces, les "meilleures" métriques sont celles à *courbure constante*. En dimension deux il n'y a qu'une seule notion de courbure, c'est la courbure de Gauss. C'est une fonction $K : M \rightarrow \mathbb{R}$. Si M est une sous-variété de \mathbb{R}^3 munie de la métrique induite alors la courbure de Gauss est le produit des courbures principales. Sur toutes surfaces il existe une métrique à courbure constante, qui peut être normalisée à -1, 0 ou 1 [Kul72].

En dimension plus grande que deux, il existe d'autres notions de courbures que nous allons définir ici. On pourra ainsi parler de métriques d'Einstein, plates, anti-autoduales, à courbure sectionnelle constante, à courbure scalaire constante...

Dans ce chapitre on rappelle ces définitions et on donne quelques propriétés qui nous seront utiles pour la suite [Bes87], [Lee97], [dC92].

1.1 Tenseur de courbure

1.1.1 Définition

Soit (M, g) une variété riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita associée. Le tenseur de courbure est le tenseur de type $(3,1)$ défini par :

$$\begin{aligned} R : T^3 M &\longrightarrow TM \\ (X, Y, Z) &\longmapsto R(X, Y)Z \end{aligned}$$

Avec $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$.

En utilisant la métrique g , on peut voir le tenseur R comme de type $(4,0)$:

$$\begin{aligned} R : T^4 M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y, Z, T) &\longmapsto g(R(X, Y)Z, T) \end{aligned}$$

On sera également amené à regarder R comme un $(2,2)$ -tenseur alors noté \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : TM \otimes TM &\longrightarrow TM \otimes TM \\ X \otimes Y &\longmapsto \mathcal{R}(X \otimes Y) \end{aligned}$$

où : $g(\mathcal{R}(X \otimes Y), Z \otimes T)R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$.

Le tenseur de courbure R est le plus important de tout ceux que nous verrons. En effet, toutes les autres notions de courbures qu'on peut définir se déduisent de ce tenseur.

Proposition 1 : *Le tenseur de courbure vérifie les propriétés suivantes :*

- a) *antisymétrie* : $R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$
- b) *symétrie* : $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$
- c) *première identité de Bianchi* :

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

- d) *deuxième identité de Bianchi* :

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, W) = 0.$$

D'après la propriété d'antisymétrie (a), le tenseur \mathcal{R} peut être vu comme une application :

$$\mathcal{R} : \bigwedge^2 TM \longrightarrow \bigwedge^2 TM.$$

La propriété (b) nous dit que cette application est un endomorphisme symétrique :

$$g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge T)g(X \wedge Y, \mathcal{R}(Z \wedge T)).$$

Sa matrice dans une base orthonormée est donc symétrique.

Exemple : *Pour \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n et \mathbb{S}^n munis de leur métrique usuelle, le tenseur \mathcal{R} est respectivement égal à 0, $-Id$ et Id .*

1.1.2 Cas de la dimension quatre

On a vu que l'opérateur de courbure \mathcal{R} était un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2 TM$. Une particularité de la dimension quatre est que l'opérateur de Hodge est une involution de $\Lambda^2 TM$. Ceci à pour conséquence d'entraîner une décomposition de $\Lambda^2 TM$. L'objet de cette section est d'étudier cette décomposition et ces conséquences. Mais avant tout, rappelons ce qu'est l'opérateur de Hodge.

Opérateur de Hodge

Soit (M, g) une variété riemannienne orientée de dimension n . On note $\omega \in \Lambda^n TM$ sa forme volume. Pour tout entier p dans $\{1, \dots, n\}$, on peut étendre la métrique g à $\Lambda^p TM$. En effet soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée directe locale de TM , on prolonge g en imposant à la famille $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$ d'être une base orthonormée de $\Lambda^p TM$. On note encore g cette métrique.

Définition : Pour tout entier $p \in \{0, \dots, n\}$ on définit l'opérateur de Hodge $\star : \Lambda^p TM \longrightarrow \Lambda^{n-p} TM$ comme l'unique application qui vérifie :

$$\alpha \wedge \star(\beta) = g(\alpha, \beta)\omega \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^p TM.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} \star e_1 &= e_2 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_n \\ \star(e_1 \wedge e_2) &= e_3 \wedge e_4 \wedge \dots \wedge e_n \\ \star(e_1 \wedge e_3) &= -e_2 \wedge e_4 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

En dimension quatre, l'opérateur de Hodge est une involution de $\Lambda^2 TM$. On a donc une décomposition en sous-espace propre $\Lambda^+ TM$ et $\Lambda^- TM$ associés respectivement aux valeurs propres 1 et -1 :

$$\Lambda^2 TM = \Lambda^+ TM \oplus \Lambda^- TM.$$

Cette décomposition dépend de l'orientation de M . Si on renverse l'orientation, on change \star en $-\star$ et donc on échange $\Lambda^+ TM$ et $\Lambda^- TM$.

Si (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base orthonormée directe locale de TM alors :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4) \\ X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3) \end{cases} \text{ est une base de } \Lambda^+ TM \text{ et}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \\ Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4) \\ Y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} & (e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) \end{cases} \text{ est une base de } \Lambda^- TM.$$

On peut noter que $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ est une base orthonormée de $\bigwedge^2 TM$. On utilisera systématiquement cette notation pour $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$.

Matrice de courbure et métrique anti-autoduale

Pour une variété riemannienne orientée, on a vu qu'on avait la décomposition : $\bigwedge^2 TM = \bigwedge^+ TM \oplus \bigwedge^- TM$. Cela induit une décomposition par bloc de la matrice de l'opérateur de courbure $\mathcal{R} : \bigwedge^2 TM \longrightarrow \bigwedge^2 TM$. Dans la base (X_1, \dots, Y_3) la matrice de \mathcal{R} est symétrique et s'écrit :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{s}{12}Id & {}^t B \\ B & W^- + \frac{s}{12}Id \end{pmatrix}$$

Renverser l'orientation revient à échanger W^+ et W^- . L'opérateur $W = W^+ + W^-$ est par définition l'opérateur de Weyl, il ne dépend pas de l'orientation. C'est un opérateur à trace nulle, qui est nul si et seulement si la métrique est localement conformément plate [Bes87].

Définition : Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n . La métrique g est localement conformément plate si, pour tout point m de M , il existe un voisinage \mathcal{V}_m de m et une fonction f de classe C^∞ , tels que $(\mathcal{V}_m, e^f g)$ soit isométrique à \mathbb{R}^n muni de la métrique canonique.

En dimension quatre, on peut affiner un peu cette notion.

Définition : Sur une 4-variété riemannienne orientée (M, g) , on dira que la métrique g est anti-autoduale si $W^+ = 0$. Elle est autoduale si $W^- = 0$.

Si on renverse l'orientation, une métrique anti-autoduale devient autoduale et réciproquement. Il n'y a pas d'interprétation géométrique simple de la notion d'autodualité (voir quand même la proposition de la section 2.3 et la proposition 5 de la section 3.1.3). Nous verrons toutefois que c'est une notion centrale de la théorie des espaces twistoriels que nous introduirons plus loin.

1.2 Courbure sectionnelle

Soit σ un 2-plan de $T_m M$, la courbure sectionnelle de σ est définie pour toute base (u_1, u_2) de σ par :

$$K(\sigma) = K(u_1, u_2) = \frac{R(u_1, u_2, u_1, u_2)}{\|u_1\|^2 \|u_2\|^2 - g(u_1, u_2)^2}$$

Ce nombre ne dépend pas de la base choisie. En dimension deux la courbure sectionnelle est égale à la courbure de Gauss.

Exemple : Munis de leur métrique usuelle \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n et \mathbb{H}^n sont à courbure sectionnelle constante égale respectivement à 0, 1 et -1.

Si (M, g) est à courbure sectionnelle constante, quitte à prendre un multiple de la métrique, on peut supposer que la courbure sectionnelle est égale à -1, 0 ou 1. Toute variété ne peut être munie d'une métrique à courbure sectionnelle constante. On a dans ce cas un théorème très fort de classification des variétés qui admettent une telle métrique.

Théorème de classification (par exemple [Lee97]) : Soit M une variété de dimension n compacte connexe à courbure sectionnelle constante égale à -1, 0 ou 1. Alors M est isométrique à \tilde{M}/Γ avec :

- (i) \tilde{M} isométrique à \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n ou \mathbb{H}^n munis de leur métrique usuelle
- (ii) Γ est un sous-groupe discret du groupe des isométries de \tilde{M} , isomorphe au groupe fondamental de M et dont l'action sur \tilde{M} est propre, discontinue et sans point fixe.

1.3 Tenseur de Ricci et métrique d'Einstein

Le tenseur de Ricci est la trace du tenseur R . Cette trace dépend de la métrique g . Ainsi, si (e_1, \dots, e_n) est localement une base orthonormée de champs de vecteurs alors par définition le tenseur de Ricci est l'application :

$$\begin{aligned} r : T^2M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto r(X, Y) \end{aligned}$$

où $r(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(X, e_i)Y, e_i) = \sum_{i=1}^n R(X, e_i, Y, e_i)$.

Remarque : Le tenseur de Ricci est un $(2,0)$ -tenseur symétrique. Parfois, on préfère le voir comme un $(1,1)$ -tenseur alors noté Ric :

$$\begin{aligned} Ric : TM &\longrightarrow TM \\ X &\longmapsto Ric(X) \end{aligned}$$

avec $g(Ric(X), Y) = r(X, Y)$.

Exemple : Munis de leur métrique usuelle les $(1,1)$ -tenseurs de Ricci de \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n et \mathbb{H}^n sont respectivement 0, $(n-1)Id$ et $-(n-1)Id$.

Plus généralement, si (M, g) est une variété à courbure sectionnelle constante égale à K alors son $(1,1)$ -tenseur de Ricci est $(n-1)KId$.

Définition : On dit que la métrique g est d'Einstein lorsqu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$r(X, Y) = \lambda g(X, Y) \quad \forall X, Y \in TM.$$

En d'autres termes, la métrique g est d'Einstein s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Ric = \lambda Id$. Les métriques à courbure sectionnelle constante sont donc des métriques d'Einstein. En dimension deux et trois la réciproque est vraie. En dimension quatre, on a la caractérisation géométrique suivante :

Proposition 2 [ST69] : Pour une 4-variété riemannienne (M, g) , les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) (M, g) est d'Einstein
- (ii) le bloc B de la matrice du tenseur \mathcal{R} est nul
- (iii) pour tout 2-plan $\sigma \subset TM$ la courbure sectionnelle $K(\sigma)$ est égale à la courbure sectionnelle $K(\sigma^\perp)$ sur le 2-plan σ^\perp orthogonal à σ .

La démonstration de cette proposition découle directement des définitions.

1.4 Courbure scalaire

La courbure scalaire est la trace du tenseur de Ricci. Ainsi soit $m \in M$ et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de champs de vecteurs définie au voisinage de m , alors par définition :

$$s(m) = \sum_{i=1}^n r(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n g(Ric(e_i), e_i).$$

La courbure scalaire est donc une fonction $s : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple : Munis de leur métrique usuelle \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n et \mathbb{H}^n sont à courbure scalaire constante égale respectivement à 0, $n(n-1)$ et $-n(n-1)$.

On peut se demander si toute variété admet une métrique à courbure scalaire constante. La courbure scalaire est un invariant plutôt faible si bien que toute variété admet une métrique à courbure scalaire constante négative. En fait on peut montrer que toute fonction réelle définie sur une variété M (de dimension au moins trois) qui est négative quelque part est la courbure scalaire d'une certaine

métrique (pour plus de détails et des références, lire par exemple [Bou81b]). Par contre, il y a des obstructions topologiques à l'existence de métriques à courbure scalaire positive. Avant de donner ces restrictions, on rappelle ce qu'est la signature d'une 4-variété [GS99].

Soit M une 4-variété compacte. On note $H_n(M, \mathbb{Z})$ et $H^n(M, \mathbb{Z})$ les n ième groupes d'homologie et de cohomologie de M à valeurs dans \mathbb{Z} . Si M est orientable (et connexe) alors $H_4(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et une orientation sur M est juste le choix d'un générateur. Dans ce cas, l'application bilinéaire symétrique définie par :

$$Q_M : \begin{array}{ccc} H^2(M, \mathbb{Z}) \times H^2(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a \cup b \end{array}$$

est appelée la forme d'intersection sur M .

Définition : Soit (p, n) la signature de la forme d'intersection Q_M . La différence $\tau = p - n$ est un invariant de M qui ne dépend que de l'orientation choisie. On l'appelle la signature de M .

Renverser l'orientation revient à changer le signe de la signature.

Théorème de Lichnerowicz (Th. 6.71 [Bes87]) : Si une 4-variété compacte connexe est spin et admet une métrique à courbure scalaire strictement positive alors sa signature est nulle.

Ainsi, une surface $K3$ n'admet pas de métrique à courbure scalaire strictement positive puisque qu'elle est spin et de signature égale à -16 [Bes81].

On peut également se demander, si toute variété riemannienne (M, g) admet une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante. C'est ce qu'a conjecturé Yamabe. Dans cette direction on a le résultat suivant.

Théorème de Schoen [Sch84] : Soit M une 4-variété orientée munie d'une métrique anti-autoduale g . Il existe alors une métrique conforme à g dont la courbure scalaire est constante.

1.5 Topologie et courbure

1.5.1 Obstructions topologiques

Il existe une infinité de métriques riemanniennes sur une variété, on peut en effet définir une métrique localement et la recoller par partition de l'unité. On a déjà montré que la topologie de la variété imposait des contraintes sur les courbures de ces métriques. Dans ce sens, on peut énoncer la proposition :

Proposition 3 (Chap.13.B [Bes87]) : *Soit M une 4-variété orientée on note χ sa caractéristique d'Euler et τ sa signature. Quelque soit la métrique g sur M , les blocs de sa matrice de courbure définis au paragraphe 1.1.2 vérifient :*

$$\chi = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 + \|W^-\|^2 + \frac{1}{24}s^2 - 2\|B\|^2 \right) \mu_g$$

$$\tau = \frac{1}{12\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2 \right) \mu_g$$

où μ_g est la forme volume associée à la métrique g .

Nous donnons ici trois corollaires pour se convaincre de l'importance de cette proposition.

Existence de métrique anti-autoduale

Comme première conséquence, on peut remarquer que si une 4-variété admet une métrique anti-autoduale ($W^+ = 0$) alors sa signature doit être négative. Ainsi le plan projectif complexe n'admet aucune métrique anti-autoduale ($\tau = 1$). Notons également que si une 4-variété est à signature nulle alors une métrique anti-autoduale doit être localement conformément plate. Si la variété $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ admettait une telle métrique elle serait donc localement conformément plate. Mais Kuiper [Kui49] a montré que la seule 4-variété compacte simplement connexe localement conformément plate est conforme à la sphère \mathbb{S}^4 . Il n'existe donc pas de métrique anti-autoduale sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Existence de métrique d'Einstein

Comme deuxième conséquence on en déduit que toutes les 4-variétés ne peuvent être munies d'une métrique d'Einstein. En effet, si (M, g) est d'Einstein, alors $B = 0$ et donc la caractéristique d'Euler doit être positive ou nulle. Elle est nulle si et seulement si (M, g) est plat. On en déduit que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ n'admet pas de métrique d'Einstein (les seules variétés munies d'une métrique plate sont revêtues par un tore).

Existence de métrique localement conformément plate

Comme troisième conséquence on a qu'il est nécessaire que la signature d'une 4-variété soit nulle pour qu'elle puisse admettre une métrique localement conformément plate. Ainsi, une surface $K3$ ($\tau = -16$ [Bes81],[Bes87]) n'admet aucune métrique localement conformément plate.

1.5.2 Métrique produit conformément plate

En dimension quatre, on peut énoncer un théorème d'existence de métrique localement conformément plate. Cela nous permettra de donner de nouveaux exemples de variétés ayant cette propriété.

Proposition 4 [Laf82] :

- 1) Si (M, g) est à courbure sectionnelle constante alors (M, g) est localement conformément plate.
- 2) Soit (M, g) une 3-variété à courbure sectionnelle constante. Alors la variété $M \times \mathbb{S}^1$ munie de sa métrique produit est localement conformément plate.
- 3) Soit (M, g) et (N, h) deux surfaces à courbure sectionnelle constante égale à K et $-K$ alors la métrique produit sur $M \times N$ est localement conformément plate.

Pour toute 3-variété hyperbolique H , c'est-à-dire munie d'une métrique à courbure sectionnelle constante égale à -1 , la métrique produit sur $\mathbb{S}^1 \times H$ est donc localement conformément plate. De même, une surface de Riemann Σ_g de genre g plus grand que 2 est une variété hyperbolique, la métrique produit sur $\mathbb{S}^2 \times \Sigma_g$ est donc aussi localement conformément plate.

La démonstration que je donne est élémentaire.

Preuve du point 1. Soit (M, g) une 4-variété riemannienne dont la courbure sectionnelle est constante égale à K . Par définition $\forall X, Y \in TM$ on a :

$$R(X, Y, X, Y) = K \left(g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)g(X, Y) \right)$$

et donc par multilinéarité on a aussi $\forall X, Y, Z, T \in TM$:

$$R(X, Y, Z, T) = K \left(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Z, Y) \right).$$

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée directe locale de TM . Par définition on a :

$$\mathcal{R}(e_1 \wedge e_2) = R(e_1, e_2, e_1, e_2) e_1 \wedge e_2 + \dots + R(e_1, e_2, e_3, e_4) e_3 \wedge e_4.$$

Comme g est à courbure sectionnelle constante on a :

$$\mathcal{R}(e_1 \wedge e_2) = K e_1 \wedge e_2.$$

Plus généralement on montre que $\mathcal{R} = KId$. Le tenseur de Weyl $W = W^+ + W^-$ est donc nul : une métrique à courbure sectionnelle constante est bien localement conformément plate.

Preuve du point 2. On fixe (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée locale de M et e_4 un vecteur normé de \mathbb{S}^1 . La connexion de Levi-Civita de la métrique produit sur $M \times \mathbb{S}^1$ vérifie les relations :

$$\begin{cases} \nabla_{e_4} e_1 = \nabla_{e_4} e_2 = \nabla_{e_4} e_3 = 0 \\ \nabla_{e_1} e_4 = \nabla_{e_2} e_4 = \nabla_{e_3} e_4 = 0. \end{cases}$$

On a donc $\forall X \in T(M \times \mathbb{S}^1) : \mathcal{R}(e_1, e_4)X = 0 \implies \mathcal{R}(e_1, e_4) = 0$. Plus généralement :

$$\mathcal{R}(e_1 \wedge e_4) = \mathcal{R}(e_2 \wedge e_4) = \mathcal{R}(e_3 \wedge e_4) = 0.$$

De plus (M, g) est à courbure sectionnelle constante égale à K , on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(e_1 \wedge e_2) &= K e_1 \wedge e_2 \\ \mathcal{R}(e_1 \wedge e_3) &= K e_1 \wedge e_3 \\ \mathcal{R}(e_2 \wedge e_3) &= K e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

La matrice de \mathcal{R} dans la base (X_1, \dots, Y_3) est donc :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} K & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & -K \\ \hline K & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & -K & 0 & 0 & K \end{array} \right).$$

Le tenseur de Weyl est bien nul, la métrique produit sur $M \times \mathbb{S}^1$ est localement conformément plate.

Preuve du point 3. On fixe deux bases orthonormées locales (e_1, e_2) et (e_3, e_4) respectivement de M et N . Par hypothèse, la courbure sectionnelle de M est K et celle de N est $-K$. On a donc les relations :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(e_1 \wedge e_2) &= K e_1 \wedge e_2 \\ \mathcal{R}(e_1 \wedge e_3) &= 0 \\ \mathcal{R}(e_1 \wedge e_4) &= 0 \\ \mathcal{R}(e_2 \wedge e_3) &= 0 \\ \mathcal{R}(e_2 \wedge e_4) &= 0 \\ \mathcal{R}(e_3 \wedge e_4) &= -K e_3 \wedge e_4. \end{aligned}$$

La matrice de \mathcal{R} dans la base (X_1, \dots, Y_3) est donc :

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Là encore, le tenseur de Weyl est bien nul : la métrique produit sur $M \times N$ est localement conformément plate. \square

De cette démonstration découle les deux petits résultats suivants.

Remarque : *Si (M, g) est une 4-variété à courbure sectionnelle constante égale à K alors la matrice de \mathcal{R} est KId . On retrouve qu'une métrique à courbure sectionnelle constante est d'Einstein. De plus, sa courbure scalaire est constante égale à $12K$.*

Remarque : *Les métriques d'Einstein ne sont pas stables par produit.*

Preuve. Dans le point 2 de la proposition 4, les variétés M et N sont munies de métriques d'Einstein puisque ce sont des 2-variétés à courbure sectionnelle constante. Pourtant si K est non nulle, on a vu au cours de la démonstration que la métrique produit sur $M \times N$ n'est pas d'Einstein puisque le bloc B de la matrice de \mathcal{R} n'est pas nul. \square

Chapitre 2

Structure presque complexe et structure kählerienne

2.1 Structure presque complexe

Une structure presque complexe sur une variété réelle M est la donnée d'un champ d'endomorphismes J sur l'espace tangent de M de classe \mathcal{C}^∞ , tel que :

$$J_m^2 = -Id_{T_m M} \quad \forall m \in M.$$

En d'autres termes, si (M, J) est une variété presque complexe alors l'espace tangent de M en tout point m admet une structure d'espace vectoriel complexe définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times T_m M &\longrightarrow T_m M \\ (a + ib, X) &\longmapsto (a + bJ_m)X \end{aligned}$$

Pour qu'une structure presque complexe existe, il faut au moins que la dimension de M soit paire. Il faut également que la variété soit orientable. En fait, il est facile de vérifier qu'une variété de dimension $2n$ admet une structure presque complexe si et seulement si son groupe structural se réduit à $U(n)$.

Définition : Soit (M, J) une variété presque complexe de dimension (réelle) $2n$. Pour toute \mathbb{C} -base locale (e_1, e_2, \dots, e_n) de TM , la famille $(e_1, Je_1, e_2, Je_2, \dots, Je_n)$ est une \mathbb{R} -base. L'orientation de cette base ne dépend pas de la \mathbb{C} -base choisie. On dira que c'est l'orientation induite par J . Lorsque M est orientée, on dira que J respecte l'orientation de M si les deux orientations coïncident.

Notation : Si J respecte l'orientation, on écrira $J \gg 0$.

Dans le cas de la dimension quatre, soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orientée. On donne

ici un exemple de structure presque complexe qui respecte l'orientation et un qui ne la respecte pas.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Structure presque complexe qui respecte l'orientation

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Structure presque complexe qui ne respecte pas l'orientation

Si M est une variété complexe, en tant que variété réelle, M est naturellement munie d'une structure presque complexe. L'endomorphisme J est alors la multiplication par le complexe i dans TM . En particulier, il est localement constant. On parle de structure presque complexe intégrable.

2.1.1 Théorème de Wu

À la question : *est-ce que toute variété orientable de dimension paire admet une structure presque complexe ?* La réponse est non. Il y a des obstructions topologiques données par le théorème de Wu. Soit M une 4-variété orientée, on note χ sa caractéristique d'Euler et τ sa signature.

Théorème [Wu52], [HH58] : *Soit (M, J) une 4-variété presque complexe. On munit M de l'orientation induite par J . Dans ce cas, la première classe de Chern*

(entière) de M notée $c_1(M, J)$ et sa deuxième classe de Stiefel-Whitney w_2 doivent vérifier les relations :

$$\begin{cases} c_1(M, J) \equiv w_2 \pmod{2} \\ c_1^2(M, J) = 3\tau + 2\chi \end{cases}$$

Réciproquement, s'il existe un élément $h \in H^2(M, \mathbb{Z})$ tel que $h \equiv w_2 \pmod{2}$ et $h^2 = 3\tau + 2\chi$ alors M admet une structure presque complexe J telle que $c_1(M, J) = h$.

Grâce à ce théorème, il est facile de voir que la sphère \mathbb{S}^4 n'admet aucune structure presque complexe. Pour une sphère quelconque, on a le théorème suivant :

Théorème de Serre : *Les seules sphères qui admettent une structure presque complexe sont les sphères \mathbb{S}^2 et \mathbb{S}^6 .*

2.1.2 Théorème de Newlander-Nirenberg

Pour savoir si une structure presque complexe est intégrable, il "suffit" de regarder si le tenseur de Nijenhuis est nul.

Théorème [NN57] : *La structure presque complexe J sur une variété M est intégrable si et seulement si :*

$$[JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in T_m M, \quad \forall m \in M.$$

2.2 Métrique hermitienne et kählerienne

2.2.1 Métrique hermitienne

Soit (M, J) une variété munie d'une structure presque complexe. Une métrique hermitienne sur M est une métrique riemannienne g qui vérifie :

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in TM.$$

On dira que (M, J, g) est une variété presque hermitienne. Si on regarde l'espace tangent de M comme étant à fibres complexes on peut définir un produit hermitien h sur chaque fibre de TM en posant :

$$h(X, Y) = g(X, Y) + ig(JX, Y) \quad \forall U, V \in TM.$$

2.2.2 Métrique kählerienne

Soit (M, J, g) une variété presque hermitienne. La forme fondamentale associée est la 2-forme w définie par :

$$\begin{aligned} w : \bigwedge^2 TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto g(JX, Y). \end{aligned}$$

Définition : Soit (M, J, g) une variété presque hermitienne. On note ∇ la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g . On dira que (M, J, g) est une variété kählerienne lorsque l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- (i) $\nabla J = 0$ c'est-à-dire : $\forall X, Y \in TM \quad \nabla_X JY = J\nabla_X Y$
- (ii) la forme fondamentale est fermée et J intégrable.

Pour pouvoir parler de structure kählerienne, il faut une structure presque complexe et une métrique. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur la structure complexe, on parlera de métrique kählerienne. De même si on a fixé une métrique, on parlera de structure presque complexe kählerienne.

Sans chercher à montrer l'équivalence entre les points (i) et (ii), on peut juste voir pourquoi la condition (i) entraîne l'intégrabilité de la structure presque complexe.

Preuve. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de g . Elle est sans torsion :

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad \forall (X, Y) \in TM.$$

Le tenseur de Nijenhuis $N(X, Y)$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= (\nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX) - J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY - \nabla_{JY} X) \\ &\quad - (\nabla_X Y - \nabla_Y X). \end{aligned}$$

Mais comme J est kählerienne : $\nabla J = 0$ et donc :

$$N(X, Y) = 0 \quad \forall (X, Y) \in TM.$$

Du théorème de Newlander-Nirenberg, on en déduit que J est intégrable. \square

On peut montrer que la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^n$ est kählerienne. De plus, si N est une sous-variété complexe d'une variété kählerienne (M, g) alors la restriction de g à N est une métrique kählerienne sur N . On en déduit que toute variété projective admet une métrique kählerienne.

À la question : *est-ce que toute variété munie d'une structure presque complexe*

admet une métrique kählerienne ? La réponse est non. Il existe en effet des restrictions topologiques à l'existence de métriques kähleriennes. En dimension deux, on sait caractériser les variétés complexes qui admettent une métrique kählerienne.

Théorème (par exemple [BHPVdV04]) : *Une surface compacte complexe admet une métrique kählerienne si et seulement si son premier nombre de Betti est pair.*

2.3 Métrique kählerienne et métrique anti-auto-duale

Pour une métrique kählerienne, on a une interprétation simple de la notion de métrique anti-autoduale.

Proposition [Gau81] : *Soit (M, J, g) une variété kählerienne. On munit M de l'orientation induite par J . Dans ce cas, la métrique g est anti-autoduale si et seulement si elle est à courbure scalaire nulle.*

Avant de pouvoir démontrer ce résultat, il nous faut introduire quelques notations.

2.3.1 Complexifié de l'espace tangent

Soit (M, g, J) une 4-variété presque hermitienne. On note $T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C}$ le complexifié de l'espace tangent de M . C'est un fibré vectoriel complexe de dimension 4 sur M . Par définition l'endomorphisme J est de carré $-Id$. Il est donc diagonalisable dans $T_{\mathbb{C}}M$. On note $T^{1,0}M$ et $T^{0,1}M$ les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres i et $-i$:

$$T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M.$$

On note $\bigwedge^{2,0} = T^{1,0}M \wedge T^{1,0}M \subset \bigwedge^2 T_{\mathbb{C}}M$. Avec des notations semblables on peut écrire la décomposition en somme directe :

$$\bigwedge^2 T_{\mathbb{C}}M = \bigwedge^{2,0} \oplus \bigwedge^{1,1} \oplus \bigwedge^{0,2}.$$

2.3.2 Tenseur de courbure

On rappelle que l'opérateur de courbure \mathcal{R} est l'application symétrique définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \bigwedge^2 TM &\longrightarrow \bigwedge^2 TM \\ X \wedge Y &\longmapsto \mathcal{R}(X \wedge Y) \end{aligned}$$

avec $g(\mathcal{R}(X \wedge Y), Z \wedge T) = g(R(X, Y)Z, T)$. On étend \mathcal{R} par linéarité sur $\bigwedge^2 T_{\mathbb{C}}M$.

Lemme : Si (M, J, g) est une 4-variété kählérienne, l'application \mathcal{R} est nulle sur le sous-espace $\bigwedge^{2,0} \oplus \bigwedge^{0,2}$ de $\bigwedge^2 T_{\mathbb{C}}M$.

Preuve. On veut montrer que \mathcal{R} est nul sur $\bigwedge^{2,0}$. Pour cela il suffit de vérifier que quelque soit $u_1 \wedge u_2 \in \bigwedge^{2,0}$ et $X \wedge Y$ dans $\bigwedge^2 TM$ on a $g(\mathcal{R}(u_1 \wedge u_2), X \wedge Y) = 0$. Or par symétrie :

$$\begin{aligned} g(\mathcal{R}(u_1 \wedge u_2), X \wedge Y) &= g(\mathcal{R}(X \wedge Y), u_1 \wedge u_2) \\ &= g(R(X, Y)u_1, u_2). \end{aligned}$$

La structure presque complexe J est kählérienne, donc par définition on a $\nabla_X JY = J\nabla_X Y$. Cela nous donne $R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z$ et comme la variété (M, g, J) est hermitienne $g(R(X, Y)JZ, JT) = g(R(X, Y)Z, T)$:

$$\begin{aligned} g(\mathcal{R}(u_1 \wedge u_2), X \wedge Y) &= g(R(X, Y)u_1, u_2) \\ &= g(R(X, Y)Ju_1, Ju_2) \\ &= g(R(X, Y)iu_1, iu_2) \\ &= -g(R(X, Y)u_1, u_2) \end{aligned}$$

L'élément $u_1 \wedge u_2 \in \bigwedge^{2,0}$ est bien dans le noyau de \mathcal{R} . On montre de même que \mathcal{R} est nul sur $\bigwedge^{0,2}$. \square

2.3.3 Démonstration de la proposition

Comme J respecte l'orientation, par définition il existe une famille (e_1, e_3) telle que (e_1, Je_1, e_3, Je_3) soit une base orthonormée directe locale de TM . On pose $e_2 = Je_1$ et $e_4 = Je_3$. La matrice de J dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est alors :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ la base orthonormée adaptée à la décomposition $\bigwedge^2 TM = \bigwedge^+ TM \oplus \bigwedge^- TM$:

$$\bigwedge^+ TM = \text{Vect} \begin{pmatrix} X_1 = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \\ X_2 = e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4 \\ X_3 = e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 \end{pmatrix}.$$

Avec nos notations on a :

$$\begin{cases} T^{1,0} = \text{Vect}(e_1 - ie_2, e_3 - ie_4) \\ T^{0,1} = \text{Vect}(e_1 + ie_2, e_3 + ie_4) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \Lambda^{2,0} = Vect(X_2 - iX_3) \\ \Lambda^{0,2} = Vect(X_2 + iX_3). \end{cases}$$

On a donc la décomposition en somme directe :

$$\Lambda^+ TM \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}X_1 \oplus \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}.$$

Dans la base (X_1, X_2, X_3) , la matrice de la restriction de \mathcal{R} au sous-espace $\Lambda^+ \otimes \mathbb{C}$ est $W^+ + \frac{s}{12}Id$. Sa trace est donc $\frac{s}{4}$. De plus cet endomorphisme est nul sur $\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ donc sur $Vect(X_2, X_3)$. Par symétrie, on en déduit que la matrice de $W^+ + \frac{s}{12}Id$ dans la base (X_1, X_2, X_3) est :

$$W^+ + \frac{s}{12}Id = \begin{pmatrix} \frac{s}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$W^+ = \begin{pmatrix} \frac{s}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s}{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{s}{12} \end{pmatrix}.$$

Si (M, J, g) est une 4-variété kählerienne on a bien : g anti-autoduale ($W^+ = 0$) si et seulement si la courbure scalaire de la métrique g est nulle. \square

Chapitre 3

Espace twistoriel d'une 4-variété

À partir d'ici, on se limitera au cas de la dimension quatre. On a vu que la sphère \mathbb{S}^4 n'admettait aucune structure presque complexe. À l'inverse, une variété parallélisable comme \mathbb{R}^4 , $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ ou le tore \mathbb{T}^4 admet de nombreuses structures presque complexes. L'espace twistoriel d'une 4-variété riemannienne orientée M est l'outil adéquat pour étudier l'ensemble des structures presque complexes sur M compatibles avec sa métrique. Dans le chapitre 4, nous nous attarderons un peu sur le problème suivant :

Décrire l'ensemble des structures presque complexes d'une 4-variété qui sont à la fois intégrables et compatibles avec une métrique fixée.

Mais avant cela, il nous faut rappeler la définition d'un espace twistoriel et ces principales propriétés utiles pour la suite [AHS78], [Bes87], [DV83], [Sal85], [dBN98].

3.1 Espace twistoriel d'une 4-variété

Pour étudier les structures presque complexes sur une 4-variété quelconque, il faut se donner en tout point $m \in M$ une structure complexe sur l'espace tangent $T_m M$. Pour cela, il est assez naturel d'introduire le fibré twistoriel.

3.1.1 Définition

Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée, on lui associe le fibré twistoriel $\pi : \tau(M, g) \rightarrow M$ de fibre en $m \in M$ l'ensemble des structures complexes sur $T_m M$ qui respectent l'orientation et la métrique :

$$\pi^{-1}(m) = \{J \in SO(T_m M) / J^2 = -Id, J \gg 0\}.$$

On est sûr que cet objet sera utile pour déterminer l'ensemble des structures presque complexes d'une 4-variété dans la mesure où une section globale du fibré

twistoriel est précisément une structure presque complexe sur M qui respecte l'orientation et la métrique de M et réciproquement.

Avant d'aller plus loin on peut déjà donner quelques propriétés simples mais importantes du fibré twistoriel. Ce sont des propriétés bien connues dont la démonstration découle directement de la définition.

Proposition 1 (par exemple [AHS78], [dBN98]) : *Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée et $\tau(M, g)$ son espace twistoriel.*

- 1) *Le fibré $\pi : \tau(M, g) \longrightarrow M$ est un fibré lisse localement trivial en sphères \mathbb{S}^2 .*
- 2) *Le groupe structural du fibré est le groupe $SO(3)$.*
- 3) *Si g et h sont deux métriques sur M alors les fibrés $\tau(M, g) \longrightarrow M$ et $\tau(M, h) \longrightarrow M$ sont isomorphes :*

$$\begin{array}{ccc}
 \tau(M, g) & \xrightarrow[\sim]{\text{difféomorphisme}} & \tau(M, h) \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & M &
 \end{array}$$

Cette dernière propriété est extrêmement importante. Ainsi supposons que M soit parallélisable. On choisit une trivialisatation de son espace tangent $TM \simeq TM \times \mathbb{R}^4$ et on munit \mathbb{R}^4 de la métrique et de l'orientation standard. Le fibré twistoriel de M est alors topologiquement trivial. La troisième propriété nous dit que quelque soit la métrique sur M , aussi compliquée soit elle, le fibré twistoriel associé à cette nouvelle métrique sera encore trivial.

Conclusion : *Soit M est une variété orientée parallélisable et g une métrique riemannienne sur M . Le fibré twistoriel de (M, g) est alors topologiquement trivial.*

Si h est une métrique dans la classe conforme de g , c'est-à-dire s'il existe une fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que $h = e^f g$, alors $\tau(M, g) = \tau(M, h)$. Ici, on a vraiment une égalité entre fibré, pas juste un isomorphisme, puisqu'une structure presque complexe qui respecte la métrique g , respecte aussi la métrique h .

3.1.2 Structure presque complexe sur l'espace twistoriel

Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée, on veut définir une structure presque complexe sur son espace twistoriel $\pi : \tau(M, g) \longrightarrow M$. La connexion de Levi-Civita sur (M, g) induit une connexion sur $\tau(M, g)$. L'espace tangent en tout point $\alpha = (m, J_m)$ de $\tau(M, g)$ admet donc une décomposition en somme directe d'un espace horizontal H_α et d'un espace vertical $V_\alpha : T_\alpha \tau(M) = H_\alpha \oplus V_\alpha$.

L'espace vertical V_α est tangent à la fibre de $\pi : \tau(M, g) \longrightarrow M$ au-dessus du point m . Il s'identifie au noyau de la différentielle $d_\alpha \pi : T_\alpha \tau(M) \longrightarrow T_m M$. L'espace horizontal est isomorphe à $T_m M$.

La structure complexe sur $T_\alpha \tau(M)$ est définie par ses restrictions à H_α et V_α . Sur H_α , on transporte l'endomorphisme J_m de $T_m M$. Le groupe structural de $\tau(M)$ est $SO(3)$, on peut donc munir l'espace vertical V_α de la structure complexe de $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{S}^2$. Pour illustrer cette construction, on peut donner le dessin suivant qui est tiré du livre d'Arthur Besse [Bes87].

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{S}^2 \simeq \pi^{-1}(m) \\
 & & \\
 & & V_\alpha \\
 & & J_{\mathbb{C}P^1} \\
 \tau(M, g) & & \alpha \quad J_m \quad H_\alpha \\
 & & \\
 & \pi & \\
 & & T_m M \\
 & & m \quad J_m \\
 M & &
 \end{array}$$

Proposition 2 [AHS78] : *Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée. Son espace twistoriel $\tau(M, g)$ est muni d'une structure presque complexe canonique qui ne dépend que de la classe conforme de la métrique g .*

On a vu que si g et h étaient deux métriques conformes sur M alors les fibrés twistoriels $\tau(M, g)$ et $\tau(M, h)$ étaient les mêmes. Cette proposition nous dit que les structures presque complexes sur ces deux espaces sont aussi les mêmes. On ne peut donc pas différencier les espaces twistoriels associés à des métriques conformes. Une condition d'intégrabilité de cette structure presque complexe a été donné par Atiyah, Hitchin et Singer.

Théorème [AHS78] : *La structure presque complexe canonique sur $\tau(M, g)$ est intégrable si et seulement si la métrique g est anti-autoduale.*

La réciproque de ce théorème nous sera très utile pour la suite. Elle permet en effet de munir certaines 6-variétés (réelles) d'une structure complexe (cf. chapitre

5 et 6). Avant d'en donner une démonstration, il faut noter que beaucoup de variétés admettent une métrique anti-autoduale :

Théorème [Tau92] : *On note $\overline{\mathbb{C}P^2}$ le plan projectif muni de l'orientation inverse. Alors, pour toute 4-variété M , il existe un entier m_0 tel que la somme connexe $M\#_{m_0}\overline{\mathbb{C}P^2}$ admette une métrique anti-autoduale.*

Preuve du théorème d'intégrabilité. On ne cherche à démontrer que la réciproque du théorème. On note J_{et} la structure presque complexe canonique sur $\tau(M, J)$. Soit $z = (m, J)$ un point de $\tau(M, g)$ et \tilde{X}, \tilde{Y} deux vecteurs tangents en z à $\tau(M, g)$. On note X et Y leur projection sur $T_m M$. Enfin, on note N le tenseur de Nijenhuis de J_{et} :

$$N(\tilde{X}, \tilde{Y}) = [J_{et}\tilde{X}, J_{et}\tilde{Y}] - J_{et}[J_{et}\tilde{X}, \tilde{Y}] - J_{et}[\tilde{X}, J_{et}\tilde{Y}] - [\tilde{X}, \tilde{Y}].$$

Grâce à la métrique g , on identifie $\bigwedge^2 TM$ à l'ensemble des endomorphismes anti-symétriques de TM . Par définition la fibre de $\pi : \tau(M, g) \rightarrow M$ au-dessus de m est :

$$\pi^{-1}(m) = \{J \in SO(T_m M) / J^2 = -Id, J \gg 0\}.$$

Le sous-espace tangent V_z à cette fibre au point z est donc :

$$V_z \simeq \{X \in so(T_m M) / JX + XJ = 0\}.$$

Remarque : *Pour tout endomorphisme $A \in \bigwedge^2 T_x M$:*

$$[A, J] = AJ - JA \in V_z.$$

Avec ces identifications, on peut énoncer le lemme suivant dont on trouvera une démonstration dans [dBN98] (lemme 2.3.15) :

Lemme 1 : *Soit R le tenseur de courbure de g sur M . La composante horizontale du tenseur de Nijenhuis est nulle, sa composante verticale est égale à :*

$$\left[\mathcal{R}(X \wedge Y - JX \wedge JY) + J\mathcal{R}(X \wedge JY + JX \wedge Y), J \right].$$

Comme J préserve l'orientation on a :

$$\begin{cases} X \wedge Y - JX \wedge JY \in \bigwedge^+ T_m M \\ X \wedge JY + JX \wedge Y \in \bigwedge^+ T_m M \end{cases}$$

On rappelle que dans la base (X_1, \dots, Y_3) (cf. notation de la section 1.1.2), la matrice de l'opérateur de courbure \mathcal{R} s'écrit :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{s}{12}Id & {}^t B \\ B & W^- + \frac{s}{12}Id \end{pmatrix}$$

De plus comme J préserve l'orientation, elle commute avec les éléments de $\bigwedge^- T_m M$:

$$[\alpha, J] = 0 \quad \forall \alpha \in \bigwedge^- T_m M.$$

Si bien que seule la composante $W^+ + \frac{s}{12}Id$ dans la matrice de \mathcal{R} joue un rôle dans le calcul de la composante verticale du tenseur de Nijenhuis.

Mais on a aussi l'égalité :

$$(X \wedge Y - JX \wedge JY) + J(X \wedge JY + JX \wedge Y) = 0 \quad \forall X, Y \in T_m M.$$

De sorte que la composante $\frac{s}{12}Id$ ne joue aucune rôle non plus. On vient de montrer que la composante verticale du tenseur de Nijenhuis de J_{et} est en fait :

$$\left[W^+(X \wedge Y - JX \wedge JY) + JW^+(X \wedge JY + JX \wedge Y), J \right].$$

Si la métrique g sur M est anti-autoduale, la structure presque complexe sur $\tau(M, g)$ est bien intégrable. \square

3.1.3 Espace twistoriel et structure complexe sur M

Avant de donner des exemples d'espaces twistoriels, on voudrait énoncer une proposition. L'introduction des espaces twistoriels nous a été motivée par l'étude des structures presque complexes d'une 4-variété M . En effet, une section globale s du fibré twistoriel de M est une structure presque complexe sur M . L'espace twistoriel permet de savoir si cette structure presque complexe est intégrable ou kählerienne. Cela nous confirme l'importance de cet outil.

Proposition 3 (par exemple [dBN98], [Sal85]) : *On note J_{et} la structure presque complexe sur $\tau(M, g)$. Une structure presque complexe J sur M associée à une section $s : M \rightarrow \tau(M, g)$ est intégrable si et seulement si la différentielle ds vérifie :*

$$ds \circ J = J_{et} \circ ds.$$

Lorsque cette égalité est vérifiée, on dira que s est une section holomorphe. Si la structure J_{et} est intégrable, cela revient à dire que $s(M)$ est une sous-variété complexe de $\tau(M, g)$.

Proposition 4 (par exemple [dBN98]) : *Une structure presque complexe associée à une section s est kählerienne si et seulement si s est une section horizontale. C'est-à-dire que l'espace tangent de la variété $s(M)$ est horizontal.*

Ces deux propositions, dont les démonstrations sont données dans le prochain paragraphe, nous confirment que l'espace twistoriel d'une variété (M, g) est un outil très important pour l'étude des structures complexes de M . Nous allons

dans cette thèse, donner quelques applications de la théorie des espaces twistoriels sur l'existence et l'inexistence de structures complexes sur une 4-variété. Nous donnons ici un premier résultat pour le moins surprenant qui donne une caractérisation des métriques anti-autoduales en termes de structures complexes.

Proposition 5 [Sal91] : *Une métrique g sur une 4-variété orientée M est anti-autoduale si et seulement si en tout point p de M il existe localement trois structures presque complexes intégrables J_1 , J_2 et J_3 qui respectent l'orientation et la métrique de M , et qui de plus sont indépendantes c'est-à-dire telles que : $J_i(p) \neq \pm J_j(p)$ lorsque $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.*

Le sens direct est facile. Si la métrique g sur M est anti-autoduale, l'espace twistoriel $\tau(M, g)$ est complexe. Il y a donc localement beaucoup de sections holomorphes. Par la proposition 3, on a donc au moins trois structures presque complexes intégrables et indépendantes au voisinage de tout point. La réciproque a été montrée par Salamon.

3.1.4 Démonstration des propositions 3 et 4

Démonstration de la proposition 3

La démonstration que je donne ici est celle de [dBN98]. Elle repose sur deux lemmes.

Lemme 2 : *Soit ∇ la connexion de Levi-Civita sur M associée à la métrique g . La structure presque complexe J est intégrable si et seulement si :*

$$\nabla_{JX}J = J\nabla_XJ \quad \forall X \in TM.$$

Preuve. Soit X et Y des vecteurs de TM , on note :

$$A(X, Y) = (\nabla_{JX}J)Y - J(\nabla_XJ)Y$$

et N le tenseur de Nijenhuis :

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

Comme la connexion de Levi-Civita est sans torsion, on a :

$$A(X, Y) - A(Y, X) = N(X, Y).$$

Grâce au théorème de Newlander-Nirenberg, on en déduit que si A est nul la structure presque complexe J est bien intégrable.

Réciproquement si J est intégrable, on a d'une part :

$$A(X, Y) = A(Y, X) \quad \forall X, Y \in TM. \quad (1)$$

Et d'autre part, comme g est hermitienne pour la structure presque complexe J :

$$g(A(X, Y), Z) = -g(Y, A(X, Z)) \quad \forall X, Y, Z \in TM. \quad (2)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} g(A(X, X), Z) &= -g(X, A(X, Z)) && \text{(d'après 2)} \\ &= -g(X, A(Z, X)) && \text{(d'après 1)} \\ &= g(A(Z, X), X) && \text{(d'après 2)} \end{aligned}$$

Ces deux dernières égalités montrent que si J est intégrable alors :

$$g(A(X, X), Z) = 0 \quad \forall X, Z \in TM.$$

En particulier :

$$0 = g(A(X + Y, X + Y), Z) = -2g(A(X, Y), Z) \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

Si J est intégrable, on a donc bien $A(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in TM$. Ceci conclut la démonstration du lemme 2. \square

Lemme 3 : *La section s est holomorphe si et seulement si :*

$$A(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in TM.$$

Preuve. Avant de commencer la démonstration de ce lemme, il nous faut introduire un certain nombre de notation. On fixe m un point de M et on note $J = s(m)$. Il existe un voisinage \mathcal{V}_m de m dans M et une base locale (X_1, X_2, X_3, X_4) de TM telle que :

$$(\nabla X_i)_m = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

La matrice de J dans cette base est $J = [J_{ij}]$. De plus la base (X_1, X_2, X_3, X_4) induit une trivialisatation de la fibration twistorielle au-dessus de \mathcal{V}_m :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{V}_m) & \longrightarrow & \mathcal{V}_m \times SO(4) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{V}_m & \end{array}$$

Dans ce système de coordonnées, la section s s'écrit :

$$\begin{aligned} s : \mathcal{V}_m &\longrightarrow \mathcal{V}_m \times SO(4) \\ y &\longmapsto (y, [s_{ij}(y)]) \end{aligned}$$

Rappel : On a une identification :

$$\mathbb{S}^2 \simeq \{J \in SO(4)/J^2 = -Id \text{ et } J \gg 0\}.$$

L'espace tangent $T_J\mathbb{S}^2$ à la sphère \mathbb{S}^2 au point J est donc :

$$T_J\mathbb{S}^2 \simeq \{X \in so(4)/JX + XJ = 0\}.$$

Avec ces identifications la structure complexe de $\mathbb{C}P^1$ sur la sphère est donnée par l'endomorphisme :

$$J_{\mathbb{C}P^1} : \begin{array}{ccc} T_J\mathbb{S}^2 & \longrightarrow & T_J\mathbb{S}^2 \\ X & \longmapsto & JX. \end{array}$$

Un simple calcul suffit alors à démontrer le lemme. Avec nos notations, la différentielle de la section s au point m dans la direction $X \in T_mM$ est :

$$d_ms(X) = \left(X, [d_ms_{ij}(X)] \right).$$

Les égalités qui suivent sont toutes écrites au point m fixé précédemment. Pour alléger l'écriture on ne le précisera plus. Par définition, on a d'une part :

$$\begin{aligned} d_ms(JX_l) &= \left(JX_l, [d_ms_{ij}(JX_l)] \right) \\ &= \left(JX_l, [d_ms_{ij}(\sum_r J_{rl}X_r)] \right) \\ &= \left(JX_l, [\sum_r J_{rl}d_ms_{ij}(X_r)] \right). \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$J_{et}d_ms(X_l) = J_{et} \left(X_l, [d_ms_{ij}(X_l)] \right)$$

Mais la base (X_1, X_2, X_3, X_4) a été choisie pour qu'au point x , la trivialisaton de l'espace twitoriel coïncide avec la décomposition en sous-espaces horizontal et vertical. De sorte que par définition de la structure presque complexe sur $\tau(M, g)$ on a :

$$\begin{aligned} J_{et}d_ms(X_l) &= \left(JX_l, J[d_ms_{ij}(X_l)] \right) \\ &= \left(JX_l, [\sum_r J_{ir}d_ms_{rj}(X_l)] \right). \end{aligned}$$

À l'opposé et en utilisant là encore le fait que $(\nabla X_i)_m = 0$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} (\nabla_{JX_l}J)X_j &= \nabla_{JX_l}JX_j - J\nabla_{JX_l}X_j \\ &= \nabla_{JX_l} \sum_i s_{ij}X_i \\ &= \sum_i d_ms_{ij}(JX_l)X_i + \sum_i s_{ij}\nabla_{JX_l}X_i \\ &= \sum_{ir} d_ms_{ij}(J_{rl}X_r)X_i \\ &= \sum_{ir} J_{rl}d_ms_{ij}(X_r)X_i \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
J(\nabla_{X_l} J)X_j &= J\nabla_{X_l} JX_j + \nabla_{X_l} X_j \\
&= J\nabla_{X_l} \sum_r s_{rj} X_r \\
&= J \sum_r d_m s_{rj}(X_l) X_r + J \sum_r s_{rj} \nabla_{X_l} X_r \\
&= \sum_r d_m s_{rj}(X_l) JX_r \\
&= \sum_{ri} J_{ir} d_m s_{rj}(X_l) X_i
\end{aligned}$$

On a donc $A(X_l, X_j) = 0$ si et seulement si :

$$\sum_r J_{rl} d_m s_{ij}(X_r) = \sum_r J_{ir} d_m s_{rj}(X_l) \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

ce qui est précisément la condition pour que s soit holomorphe. Ceci conclut la démonstration du lemme 3 et donc de la proposition 3. \square

Démonstration de la proposition 4

Maintenant que les notations sont en place, il est assez facile de montrer la proposition 4. Par définition la structure presque complexe J est kählerienne si et seulement si :

$$\nabla_{X_k} JX_j = J\nabla_{X_k} X_j \quad \forall k, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Au point m cela donne :

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_{X_k} JX_j - J\nabla_{X_k} X_j &= \nabla_{X_k} \sum_i s_{ij} X_i \\
&= \sum_i d_m s_{ij}(X_k) X_i + \sum_i s_{ij} \nabla_{X_k} X_i \\
&= \sum_i d_m s_{ij}(X_k) X_i
\end{aligned}$$

En d'autres termes J est une structure kählerienne si et seulement si :

$$d_m s_{ij}(X_k) = 0 \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Mais on rappelle que :

$$d_m s(X) = \left(X, [d_m s_{ij}(X)] \right).$$

De plus par hypothèse sur le choix de la base (X_1, X_2, X_3, X_4) , au point m la trivialisatation de l'espace twistoriel coïncide avec la décomposition en sous-espaces horizontal et vertical. On a donc bien J Kähler si et seulement si l'espace tangent de la variété $s(M)$ est horizontal. \square

3.2 Exemples d'espaces twistoriels

On ne donne ici que 4 exemples d'espaces twistoriels. Nous donnerons d'autres exemples un peu plus loin dans l'exposé. Ces exemples sont donnés sans démonstration.

3.2.1 Espace twistoriel du plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$

On a vu que le plan projectif complexe n'admettait aucune métrique anti-autoduale. Par contre la métrique de Fubini-Study est autoduale. Si on renverse l'orientation de $\mathbb{C}P^2$, on a alors une métrique anti-autoduale. On note $\overline{\mathbb{C}P^2}$ le plan projectif complexe muni de son orientation opposée.

Soit F_3 l'espace de drapeau de dimension trois, c'est-à-dire l'ensemble des couples (m, l) où m est un point de $\mathbb{C}P^2$ et l une droite de $\mathbb{C}P^2$ qui contient le point m . La fibration twistorielle de $\overline{\mathbb{C}P^2}$, muni de la métrique de Fubini-Study est la projection suivante [AHS78] :

$$\begin{aligned} \pi_{\overline{\mathbb{C}P^2}} : F_3 &\longrightarrow \overline{\mathbb{C}P^2} \\ (m, l) &\longmapsto l \cap m^\perp. \end{aligned}$$

On peut remarquer que l'espace twistoriel de $\overline{\mathbb{C}P^2}$ est Kähler.

3.2.2 Espace twistoriel de la sphère \mathbb{S}^4

La sphère \mathbb{S}^4 munie de sa métrique usuelle est localement conformément plate. Son espace twistoriel est donc complexe. Atiyah Hitchin et Singer [AHS78] ont montré que la fibration twistorielle de \mathbb{S}^4 était la fibration de $\mathbb{C}P^3$ sur $\mathbb{H}P^1$ définie comme suit.

On identifie \mathbb{C}^4 avec \mathbb{H}^2 grâce à l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto (z_1 + z_2j, z_3 + z_4j). \end{aligned}$$

La sphère \mathbb{S}^4 s'identifie à la droite projective quaternionique $\mathbb{H}P^1$. Soit $z \in \mathbb{C}^4$, on note $\mathbb{C}z$ la droite complexe engendrée par le vecteur z . De même on note $\mathbb{H}z$ la droite quaternionique engendrée par le vecteur z , c'est-à-dire le 2-plan complexe engendré par z et zj . La fibration twistorielle est alors l'application :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{S}^4} : \mathbb{C}P^3 &\longrightarrow \mathbb{H}P^1 \\ \mathbb{C}z &\longmapsto \mathbb{H}z. \end{aligned}$$

L'espace twistoriel de \mathbb{S}^4 est lui aussi Kähler.

3.2.3 Espace twistoriel de \mathbb{R}^4 : première présentation

On munit \mathbb{R}^4 de son orientation et de sa métrique canonique. La 4-variété \mathbb{R}^4 est alors globalement conforme à $\mathbb{S}^4 - \{\infty\}$. En effet, on identifie \mathbb{R}^4 et \mathbb{H} :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto x_1 + x_2i + (x_3 + x_4i)j. \end{aligned}$$

L'application conforme entre $\mathbb{S}^4 - \{\infty\}$ et \mathbb{R}^4 est alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^4 - \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ \mathbb{H}(q_1, q_2) &\longmapsto q_2^{-1} \cdot q_1 \end{aligned}$$

L'espace twistoriel de \mathbb{R}^4 est donc une restriction de celui de \mathbb{S}^4 . Notons l_∞ la fibre au-dessus du point ∞ de la sphère :

$$l_\infty = \left\{ \mathbb{C}(z_1, z_2, 0, 0) / (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \right\} \simeq \mathbb{C}P^1.$$

La fibration twistorielle de \mathbb{R}^4 , muni de sa métrique et de son orientation canonique est donc l'application :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{R}^4} : \quad \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty\} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto (z_3 + z_4 j)^{-1} \cdot (z_1 + z_2 j). \end{aligned}$$

3.2.4 Espace twistoriel de \mathbb{R}^4 : deuxième présentation

Avant de donner l'espace twistoriel de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$, on voudrait donner une nouvelle présentation de l'espace twistoriel de \mathbb{R}^4 munie de sa métrique usuelle. Il existe une submersion naturelle de $\tau(\mathbb{R}^4)$ sur $\mathbb{C}P^1$:

$$\begin{aligned} p : \quad \tau(\mathbb{R}^4) &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \mathbb{C}(z_3, z_4). \end{aligned}$$

L'espace twistoriel de \mathbb{R}^4 est donc un fibré vectoriel complexe de rang deux au-dessus de $\mathbb{C}P^1$. On note $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ le fibré vectoriel de rang un dont la première classe de Chern vaut 1.

Proposition 5 [AHS78] : *La fibration de $\tau(\mathbb{R}^4)$ sur $\mathbb{C}P^1$ s'identifie à la fibration $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$.*

Preuve. Pour définir un atlas sur $\mathbb{C}P^1$, on prend les ouverts :

$$\begin{cases} \mathcal{U}_3 = \{ [z_3, z_4] \in \mathbb{C}P^1 / z_3 \neq 0 \} \\ \mathcal{U}_4 = \{ [z_3, z_4] \in \mathbb{C}P^1 / z_4 \neq 0 \} \end{cases}$$

et les cartes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_3 : \quad \mathcal{U}_3 \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad [z_3, z_4] \longmapsto \mu = \frac{z_4}{z_3} \\ \\ \phi_4 : \quad \mathcal{U}_4 \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad [z_3, z_4] \longmapsto \eta = \frac{z_3}{z_4} \end{array} \right.$$

Au-dessus de \mathcal{U}_3 , le fibré $p : \tau(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ est trivial :

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(\mathcal{U}_3) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{U}_3 \times \mathbb{C}^2 \\
 \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) & \longmapsto & \left(\frac{z_4}{z_3}, \left(\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} \right) \right) \\
 \downarrow p & & \downarrow p \\
 \mathcal{U}_3 & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{U}_3 \\
 \mathbb{C}(z_3, z_4) & \longmapsto & \mu = \frac{z_4}{z_3}
 \end{array}$$

De même au-dessus de \mathcal{U}_4 :

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(\mathcal{U}_4) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{U}_4 \times \mathbb{C}^2 \\
 \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) & \longmapsto & \left(\frac{z_3}{z_4}, \left(\frac{z_1}{z_4}, \frac{z_2}{z_4} \right) \right) \\
 \downarrow p & & \downarrow p \\
 \mathcal{U}_4 & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{U}_4 \\
 \mathbb{C}(z_3, z_4) & \longmapsto & \eta = \frac{z_3}{z_4}
 \end{array}$$

Le cocycle du fibré $p : \tau(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ est donc :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4) \times \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\text{cocycle}} & (\mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4) \times \mathbb{C}^2 \\
 \left(\eta, (w_1, w_2) \right) & \longmapsto & \left(\frac{1}{\eta}, \left(\frac{w_1}{\eta}, \frac{w_2}{\eta} \right) \right) \\
 \searrow p & & \swarrow p \\
 & \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4 &
 \end{array}$$

C'est précisément le cocycle du fibré $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$. \square

3.2.5 Espace twistoriel de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$

On veut étudier ici la variété $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ munie de son orientation naturelle et de la métrique produit. On peut réaliser $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ comme le quotient de $\mathbb{R}^{4*} = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ par l'action du groupe $\langle eId \rangle$ engendré par l'homothétie de rapport e :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{4*} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \\
 z = e^t \frac{z}{\|z\|} & \longmapsto & \left(t \bmod 1, \frac{z}{\|z\|} \right)
 \end{array}$$

où $\|z\|$ est la norme euclidienne de $z \in \mathbb{R}$. Un petit calcul permet d'établir le lemme suivant.

Lemme 4 : Dans \mathbb{R}^{4*} la métrique produit sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ s'écrit : $\frac{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2}{\|z\|^2}$. C'est ce qu'on appelle la métrique de Vaisman.

La métrique $\frac{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+dx_4^2}{\|z\|^2}$ est conforme à la métrique plate de \mathbb{R}^4 . L'espace twistoriel de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ est donc un quotient de celui de \mathbb{R}^{4*} .

Comme précédemment on note l_0 la fibre au-dessus du point 0 de la sphère \mathbb{S}^4 :

$$l_0 = \{ \mathbb{C}(0, 0, z_3, z_4) / (z_3, z_4) \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \} \simeq \mathbb{C}P^1.$$

L'espace twistoriel de \mathbb{R}^{4*} , muni de sa métrique canonique est donc :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{R}^{4*}} : \quad \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{4*} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto (z_3 + z_4 j)^{-1} \cdot (z_1 + z_2 j) \end{aligned}$$

L'homothétie de rapport e sur \mathbb{R}^{4*} se relève sur $\mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\}$ en l'application :

$$\begin{aligned} \sim : \quad \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} &\longrightarrow \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \mathbb{C}(ez_1, ez_2, z_3, z_4). \end{aligned}$$

La fibration twistorielle de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ est donc la projection :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3} : \quad \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} / \sim &\longrightarrow \mathbb{R}^{4*} / \langle eId \rangle = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) \text{ mod } \sim &\longmapsto (z_3 + z_4 j)^{-1} \cdot (z_1 + z_2 j) \text{ mod } eId. \end{aligned}$$

Il existe d'autres métriques sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$, on verra dans le prochain chapitre ce que devient alors la fibration twistorielle.

3.3 Propriétés des espaces twistoriels

3.3.1 Fibré normal

Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée et $\tau(M, g)$ l'espace twistoriel associé. On fixe un point m de M et dans la fibration $\tau(M, g) \longrightarrow M$, on note $Z_m \simeq \mathbb{C}P^1$ la fibre au-dessus de m . Soit $N \longrightarrow Z_m$ le fibré normal de cette fibre.

$$\begin{array}{ccc} T\tau(M, g) & & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau(M, g) & & Z_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & & m \end{array}$$

Le fibré dual du fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)$ est par définition le fibré $\mathcal{O}(1)$. C'est l'unique fibré en droite au-dessus de $\mathbb{C}P^1$ dont la première classe de Chern est 1.

Proposition 6 [AHS78] : *Le fibré normal $N \rightarrow Z_m$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$.*

C'est une propriété extrêmement importante des espaces twistoriels dont la démonstration, un peu technique, est donnée en annexe.

3.3.2 Classes de Chern

Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée. On note $\pi : Z \rightarrow M$ son fibré twistoriel. On a construit une structure presque complexe sur Z , on peut donc calculer ses classes de Chern. On note c_i sa $i^{\text{ième}}$ classe de Chern et c la classe totale. Soit h le générateur du $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^*(M, \mathbb{R})$ l'anneau de cohomologie de M . Par le théorème de Leray-Hirsch [BT82], l'anneau de cohomologie de Z est un $H^*(M, \mathbb{R})$ -module engendré par h . On note χ et τ la caractéristique d'Euler et la signature de M . Ce sont des éléments de $H^4(M, \mathbb{R})$. Par le théorème de Leray-Hirsch, on peut également considérer χ et τ comme des éléments de $H^4(Z, \mathbb{R})$. Dans les deux cas, on utilisera la même notation.

Théorème [Hit81] : *Les classes de Chern du fibré twistoriel de (M, g) sont :*

$$\begin{cases} c_1 &= 4h \\ c_2 &= 3\chi + 3\tau \\ c_3 &= 2h\chi \end{cases}$$

Grâce à ce théorème, dont une preuve est donnée en annexe, on peut calculer la dimension de Kodaira des espaces twistoriels.

3.3.3 Dimension de Kodaira

Définition

Soit V une variété compacte complexe de dimension p . Le fibré canonique K_V est par définition le fibré des p -formes complexes $\bigwedge^p T^*V$. On montre que l'espace des sections holomorphes de la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle $K_V^{\otimes n}$ est de dimension finie $P_n(V)$. Suivant le comportement de la suite $(P_n(V))_{n>0}$, on associe un nombre à la variété V . Ce nombre est la dimension de Kodaira de V notée $Kod(V)$:

$$\begin{aligned} Kod(V) &= -\infty \text{ si la suite } (P_n(V))_{n \geq 1} \text{ est constante égale à zéro,} \\ Kod(V) &= k \in \mathbb{N} \text{ si la suite } \left(\frac{P_n(V)}{n^k}\right)_{n \geq 1} \text{ est bornée mais pas } \left(\frac{P_n(V)}{n^{k-1}}\right)_{n \geq 1}. \end{aligned}$$

On montre que la dimension de Kodaira d'une surface V est au plus égale à sa dimension complexe ici p .

En dimension un les variétés compactes complexes sont les surfaces de Riemann Σ_g . Elles sont classifiées par leur genre g . En utilisant le théorème de Riemann-Roch, on vérifie que :

$$\begin{aligned} \text{Kod}(\Sigma_g) = -\infty &\iff g = 0 \\ \text{Kod}(\Sigma_g) = 0 &\iff g = 1 \\ \text{Kod}(\Sigma_g) = 1 &\iff g \geq 2 \end{aligned}$$

Dimension de Kodaira des espaces twistoriels

Grâce au calcul des classes de Chern de l'espace twistoriel de (M, g) , on peut en déduire la dimension de Kodaira de $\tau(M, g)$.

Théorème [Hit81] : *Pour toute 4-variété riemannienne orientée (M, g) la dimension de Kodaira de son espace twistoriel est $-\infty$.*

Preuve. On note Z l'espace twistoriel de (M, g) et K le fibré canonique de Z . On a $c_1(K) = c_1(\bigwedge^3 T^*Z) = c_1(T^*Z) = -4h$. Pour les puissances tensorielles, on a $c_1(K^{\otimes m}) = -4mh$. On restreint le fibré $K^{\otimes m} \rightarrow Z$ à une fibre $Z_m \simeq \mathbb{C}P^1$. On obtient alors un fibré en droite au-dessus de $\mathbb{C}P^1$ et de degré :

$$\int_{\mathbb{C}P^1} -4mh = -4m < 0.$$

Une section holomorphe globale s du fibré $K^{\otimes m} \rightarrow Z$ doit être nulle sur chaque fibre Z_m et donc partout : $H^0(Z, K^{\otimes m}) = 0$. Quelque soit la variété M , la dimension de Kodaira de son espace twistoriel est bien $-\infty$. \square

3.3.4 Dimension algébrique

Définition

La dimension algébrique $a(V)$ d'une variété complexe V est le degré de transcendance sur \mathbb{C} du corps des fonctions méromorphes sur V . Ainsi, si $a(V) = 0$ alors les seules fonctions méromorphes sur V sont les fonctions constantes. Si V est compacte, on montre que la dimension algébrique de V est un entier inférieur ou égal à la dimension complexe de V . Lorsqu'il y a égalité, on dit que V est Moishezon.

Dimension algébrique des espaces twistoriels

Grâce aux travaux de Gauduchon, Pontecorvo, Poon, Fujiki, Campana... on connaît la dimension algébrique de l'espace twistoriel d'une 4-variété (M, g) où g est une métrique anti-autoduale. Dans le cas générique, la dimension algébrique est nulle. Ce résultat est donné pour information et ne sera pas utile pour la suite [Cam91], [Fuj02], [Gau91], [Poo88], [Pon91a].

Théorème : *Soit (M, g) une 4-variété orientée munie d'une métrique g anti-autoduale. On note Z son espace twistoriel.*

- (i) *Si $a(Z)=3$ alors M est homéomorphe à une somme connexe de $\mathbb{C}P^2$. Dans ce cas, Z est Moishezon.*
- (ii) *Si $a(Z)=2$ alors M est homéomorphe à une somme connexe $m\mathbb{C}P^2$, ou M est homéomorphe à un quotient fini de la variété $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \# m\mathbb{C}P^2$.*
- (iii) *Si $a(Z)=1$ alors M est plat, M est le quotient d'une surface K3, ou la courbure scalaire de M est positive. Dans ce dernier cas, le premier nombre de Betti de M est zéro ou un.*
- (iv) *Sinon $a(Z)=0$.*

Si la métrique g est à courbure scalaire constante négative alors la dimension algébrique de Z est nulle.

Chapitre 4

Ensemble des structures presque complexes d'une 4-variété

Il serait très intéressant de comprendre à quoi ressemble l'ensemble des structures presque complexes intégrables sur \mathbb{R}^4 . Est-ce que cet ensemble a un nombre fini de composantes connexes ? Est-ce un ensemble ouvert ? Un ensemble fermé ? Ce qui est sûr c'est que ce ne peut pas être un ensemble connexe. Il y a au moins deux composantes connexes : les structures presque complexes qui respectent l'orientation et celles qui ne la respectent pas. Mais est-ce que l'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation est connexe ? Ce sont des questions très difficiles. On se restreint ici au problème beaucoup plus restrictif des structures presque complexes qui respectent l'orientation et la métrique. La réponse à ce problème est alors essentiellement déjà contenue dans la littérature. Ce chapitre a pour unique but de regrouper et de préciser ces résultats.

4.1 Solution du problème pour \mathbb{R}^4

On munit \mathbb{R}^4 de son orientation et de sa métrique canonique. La variété \mathbb{R}^4 est parallélisable. Son espace twistoriel est donc topologiquement trivial : $\tau(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{R}^4 \times \mathbb{S}^2$. Une structure presque complexe qui respecte l'orientation et la métrique est donc juste une fonction de classe C^∞ de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{S}^2 . On cherche parmi toutes celles-ci, celles qui sont intégrables. On va montrer qu'une structure presque complexe sur \mathbb{R}^4 associée à une fonction $s : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ est intégrable si et seulement si s est une fonction constante.

Proposition 1 [Woo92] : *L'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique canonique de \mathbb{R}^4 s'identifie à la sphère \mathbb{S}^2 .*

Remarque : *Toutes ces structures complexes sur \mathbb{R}^4 sont biholomorphes (cf. démonstration à la section 4.1.2).*

Corollaire : *L'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique canonique d'un tore plat \mathbb{T}^4 s'identifie à la sphère \mathbb{S}^2*

Preuve. Une structure presque complexe intégrable sur un tore \mathbb{T}^4 , se relève en une structure complexe sur \mathbb{R} . \square

Nous reviendrons sur l'étude du tore à la section 4.4. Nous donnerons une autre preuve de ce corollaire et nous verrons pourquoi ces structures complexes ne sont pas toutes biholomorphes.

Le plan de la démonstration de la proposition 1 est le suivant :

- 1) On construit une submersion holomorphe de $\tau(\mathbb{R}^4)$ sur $\mathbb{C}P^1$.
- 2) Les fibres de cette submersion sont donc des sous-variétés holomorphes de $\tau(\mathbb{R}^4)$. On montre que ce sont des sections du fibré twistoriel $\tau(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{R}^4$. D'après la proposition 3 de la section 3.1.3, elles définissent donc des structures presque complexes intégrables.
- 3) Enfin, on montre que ce sont les seules.

4.1.1 Démonstration du théorème 1

Submersion sur $\mathbb{C}P^1$

On rappelle que $l_\infty = \{ \mathbb{C}(z_1, z_2, 0, 0) / (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \}$ et que l'espace twistoriel de \mathbb{R}^4 est $\mathbb{C}P^3 - \{l_\infty\}$. On a donc une submersion holomorphe de l'espace twistoriel de \mathbb{R}^4 sur $\mathbb{C}P^1$ définie par :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) & \longmapsto & \mathbb{C}(z_3, z_4) \end{array}$$

Section du fibré twistoriel

Soit (a_3, a_4) un point quelconque de \mathbb{C}^{2*} . La fibre de la submersion au-dessus du point $\mathbb{C}(a_3, a_4)$, notée $p^{-1}(a_3, a_4)$, est une sous-variété holomorphe de l'espace twistoriel $\tau(\mathbb{R}^4)$. Cette fibre définit une section holomorphe du fibré twistoriel de \mathbb{R}^4 .

$$\begin{array}{ccc}
& \tau(\mathbb{R}^4) & \\
& & \mathbb{C}P^1 \\
& & \mathbb{C}(a_3, a_4) \\
& p & \\
p^{-1}(a_3, a_4) & & \\
& \pi_{\mathbb{R}^4} & \\
& & \\
\mathbb{R}^4 & q &
\end{array}$$

L'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique canonique de \mathbb{R}^4 contient donc au moins l'ensemble \mathbb{S}^2 . Reste à montrer qu'il n'y a pas d'autres structures presque complexes intégrables que celles-ci.

Pas d'autres sections

Par le théorème de Remmert et Stein [Nar66], si A est une hypersurface analytique de $\mathbb{C}P^3 - \{l_\infty\}$ alors son adhérence \overline{A} est une hypersurface analytique de $\mathbb{C}P^3$. De plus, par le théorème de Chow [Nar66], les sous-variétés analytiques de $\mathbb{C}P^3$ sont algébriques. Si s une section holomorphe du fibré twistoriel $\tau(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{R}^4$, la variété $s(\mathbb{R}^4)$ est donc le lieu des zéros d'un polynôme homogène P . Mais s est aussi une section donc l'intersection de cette surface avec les fibres de $\pi_{\mathbb{R}^4}$ est réduite à un point. Par le théorème de Bezout le polynôme P est de degré un :

$$P(z_1, z_2, z_3, z_4) = az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4.$$

Comme $\overline{s(\mathbb{R}^4)}$ n'est pas difféomorphe à \mathbb{S}^2 :

$$\overline{s(\mathbb{R}^4)} \cap l_\infty = l_\infty.$$

C'est-à-dire $a = b = 0$ et $s(\mathbb{R}^4) = p^{-1}(-d, c)$.

On a montré que la variété $\overline{s(\mathbb{R}^4)}$ appartenait à la famille (paramétrée par $\mathbb{C}P^1$) des plans de $\mathbb{C}P^3$ qui contiennent la droite l_∞ . En d'autres termes, les seules structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique canonique de \mathbb{R}^4 sont les fibres de p . Ceci conclut la démonstration de la proposition 1. \square

4.1.2 Interprétation

On définit sur \mathbb{R}^4 les 3 structures presque complexes constantes :

$$I_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles vérifient les relations $I_0 J_0 = -J_0 I_0 = K_0$, si bien que pour tout point (a, b, c) de la sphère \mathbb{S}^2 , on peut définir la structure presque complexe $J = aI_0 + bJ_0 + cK_0$. La proposition 1 nous dit exactement que ces structures presque complexes sont intégrables et que ce sont les seules qui respectent la métrique et l'orientation canonique de \mathbb{R}^4 . On peut remarquer que toutes ces structures complexes sont biholomorphes. En effet, il existe $P \in GL(\mathbb{R}^4)$ tel que :

$$J = P I_0 P^{-1}$$

et donc l'application

$$\begin{array}{ccc} \phi : (\mathbb{R}^4, I_0) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^4, J) \\ x & \longmapsto & Px \end{array}$$

définit un biholomorphisme.

Corollaire : *La seule structure de variété complexe sur \mathbb{R}^4 qui respecte l'orientation et la métrique canonique est celle de \mathbb{C}^2 .*

4.2 Solution du problème pour $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$

4.2.1 Structures complexes à biholomorphisme près

Il existe beaucoup de structures complexes sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. Dans le cas présent, on connaît l'ensemble des structures complexes à biholomorphisme près.

Théorème [Kod66] : *Pour toute surface complexe S difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$, il existe un entier m et des complexes α, β, t qui vérifient :*

$$0 < |\alpha| \leq |\beta| < 1 \quad \text{et} \quad (\beta^m - \alpha)t = 0$$

tels que la variété S soit biholorphe à la variété $H_{(m, \alpha, \beta, t)}$ quotient de \mathbb{C}^{2*} par le groupe d'automorphismes $\langle \gamma \rangle$ de \mathbb{C}^{2*} engendré par :

$$\begin{array}{ccc} \gamma : \mathbb{C}^{2*} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{2*} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (\alpha z_1 + t z_2^m, \beta z_2). \end{array}$$

Réciproquement, pour tout choix de quadruplet (m, α, β, t) qui vérifient la relation ci-dessus, l'action du groupe $\langle \gamma \rangle$ sur \mathbb{C}^{2*} est propre discontinue sans point fixe et le quotient $H_{(m, \alpha, \beta, t)}$ est une surface complexe difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$.

À toute structure complexe sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ on peut donc attacher (au moins) un quadruplet (m, α, β, t) . Les relations du théorème nous affirment que si l'entier m est nul alors le complexe t est nul aussi. Dans ce cas on écrira $H_{(\alpha, \beta)}$ plutôt que $H_{(0, \alpha, \beta, 0)}$. On sait exactement quand deux structures complexes sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ sont identiques.

Théorème [Dąb82] : Soit $H_{(m, \alpha, \beta, t)}$ et $H_{(\tilde{m}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{t})}$ deux surfaces de Hopf.

- (i) Si $m \neq \tilde{m}$ les surfaces $H_{(m, \alpha, \beta, t)}$ et $H_{(\tilde{m}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{t})}$ ne sont pas biholomorphes.
- (ii) Si $m = \tilde{m} = 0$ alors $H_{(\alpha, \beta)}$ et $H_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}$ sont biholomorphes si et seulement si $\{\alpha, \beta\} = \{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$.
- (iii) Si $m = \tilde{m} \neq 0$ alors $H_{(m, \alpha, \beta, t)}$ et $H_{(\tilde{m}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{t})}$ sont biholomorphes si et seulement si $(\alpha, \beta) = (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

4.2.2 Structures presque complexes intégrables

On a vu que si on changeait la classe conforme de la métrique sur M on ne changeait pas la fibration twistorielle, mais on changeait la structure presque complexe sur $\tau(M)$. Suivant le choix de la métrique sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$, l'ensemble des structures presque complexes intégrables compatibles avec l'orientation et la métrique sera donc différent.

On munit \mathbb{C}^{2*} de la métrique de Vaisman : $\frac{|dz_1|^2 + |dz_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2}$. Lorsque α et β sont deux nombres complexes de même module $|\alpha| = |\beta| \in]0, 1[$, cette métrique passe au quotient sur $H_{(\alpha, \beta)}$. On note $g_{(\alpha, \beta)}$ la métrique induite par la projection :

$$\pi_{(\alpha, \beta)} : \mathbb{C}^{2*} \longrightarrow H_{(\alpha, \beta)}.$$

Pour chaque couple (α, β) on a une nouvelle métrique sur le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. La métrique $g_{(\alpha, \beta)}$ est la métrique produit si et seulement si $\alpha = \beta = e$.

Remarque : On note $\bar{\alpha}$ le conjugué complexe de $\alpha \in \mathbb{C}$. Les variétés $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \beta)})$ et $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})})$ sont isométriques.

Preuve. L'application :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{2*}, V) &\longrightarrow (\mathbb{C}^{2*}, V) \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2) \end{aligned}$$

est une isométrie qui passent au quotient en l'isométrie recherchée :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{2*}, V) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{C}^{2*}, V) \\ \pi_{(\alpha, \beta)} \downarrow & & \downarrow \pi_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \beta)}) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}) \end{array}$$

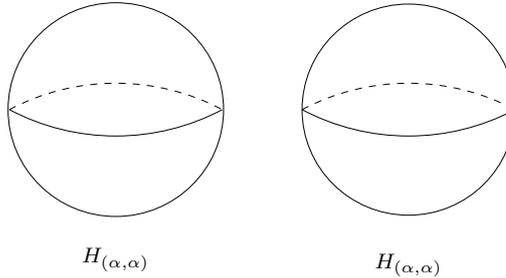
De même on montre que $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \beta)})$ et $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})})$ sont isométriques. \square

Comme $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ est une variété parallélisable, l'ensemble des structures presque complexes sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ qui respectent la métrique $g_{(\alpha, \beta)}$ s'identifie à l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ à valeurs dans \mathbb{S}^2 . La même démonstration que celle de la proposition 1 donne le résultat suivant inspiré de [Pon91b], [Gau95] :

Proposition 2 : *L'ensemble des structures presque complexes intégrables sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \beta)})$ qui respectent son orientation et sa métrique s'identifie à :*

(i) *L'union disjointe de deux sphères si α et β sont égaux et réels.*

Toutes ces structures complexes sont biholomorphes à celle de $H_{(\alpha, \alpha)}$.

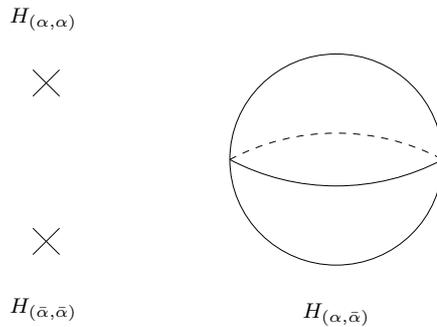


Cas où $\beta = \alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) *L'union d'une sphère et de deux points si α non réel et $\beta = \bar{\alpha}$.*

Les structures complexes de la sphère sont biholomorphes à celle de $H_{(\alpha, \bar{\alpha})}$.

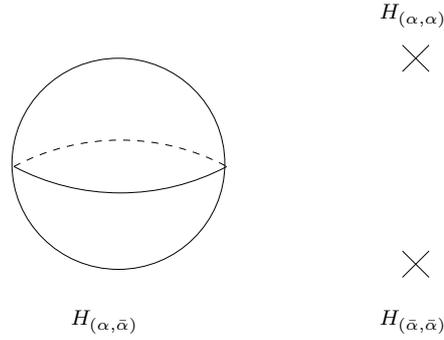
Les structures complexes des deux points isolées sont celles de $H_{(\alpha, \alpha)}$ et de $H_{(\bar{\alpha}, \bar{\alpha})}$.



Cas où $\beta = \bar{\alpha} \notin \mathbb{R}$.

(iii) L'union d'une sphère et de deux points si α non réel et $\beta = \alpha$.

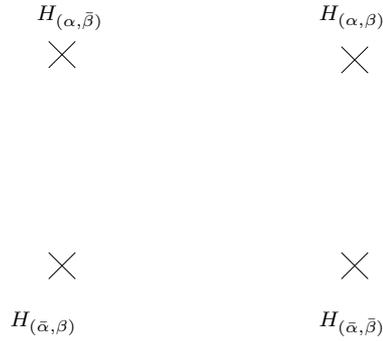
Dans ce cas, les structures complexes de la sphère sont biholomorphes à celle de $H_{(\alpha, \bar{\alpha})}$. Les structures complexes des deux points isolés sont celles de $H_{(\alpha, \alpha)}$ et de $H_{(\bar{\alpha}, \bar{\alpha})}$.



Cas où $\beta = \alpha \notin \mathbb{R}$.

(iv) Quatre points sinon.

Dans ce cas, on retrouve les structures complexes de $H_{(\alpha, \beta)}$, $H_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}$, $H_{(\bar{\alpha}, \beta)}$ et $H_{(\alpha, \bar{\beta})}$.



Cas restants.

Remarque : Si g est une métrique localement conformément plate sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ non conforme à une métrique de la forme $g_{(\alpha, \beta)}$ alors il n'existe pas de structure presque complexe intégrable sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g)$ compatible avec l'orientation et la métrique (cf. démonstration à la section 4.2.4).

Ceci résout donc entièrement l'étude du cas $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ pour les métriques localement conformément plates. On peut voir ici qu'il existe des structures complexes non biholomorphes qui respectent la même métrique. Ce n'est pas le cas pour \mathbb{R}^4 muni de la métrique canonique (cf. section 4.1.2).

On l'a déjà dit, la structure complexe de l'espace twistoriel change si on change de classe conforme de métrique, il n'est donc pas surprenant que suivant cette structure complexe, le nombre de sections holomorphes du fibré twistoriel diffère.

On peut même pour chacune de ces métriques calculer la dimension algébrique de l'espace twistoriel de $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha,\beta)})$.

Théorème [Gau95] : Soit $\alpha = re^{i\theta_1}$ et $\beta = re^{i\theta_2}$ deux nombres complexes de même module $0 < r < 1$ et Z l'espace twistoriel associé à $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha,\beta)})$.

- (i) Si θ_1 et θ_2 sont \mathbb{Z} -indépendants dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la dimension algébrique de Z est zéro.
- (ii) Si θ_1 et θ_2 sont \mathbb{Z} -dépendants mais $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ ne sont pas des racines de l'unité, la dimension algébrique de Z est un.
- (iii) Si $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$ sont des racines de l'unité, la dimension algébrique de Z est deux.

Remarque : Dans le cas où $(\alpha, \beta) = (\frac{i}{2}, \frac{i}{2})$, la dimension algébrique Z est deux, bien que le fibré $Z \rightarrow H_{(\alpha,\beta)}$ ne possède que quatre sections holomorphes.

4.2.3 Démonstration et interprétation de la proposition 2

On rappelle que :

$$\begin{cases} l_\infty = \{ \mathbb{C}(z_1, z_2, 0, 0) / (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \} \\ l_0 = \{ \mathbb{C}(0, 0, z_3, z_4) / (z_3, z_4) \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \} \end{cases}$$

et que l'espace twistoriel de \mathbb{R}^{4*} est $\mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\}$.

Par définition, $H_{(\alpha,\beta)} = \mathbb{R}^{4*} / \langle \gamma \rangle$, avec :

$$\begin{aligned} \gamma : \quad \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (\alpha z_1, \beta z_2). \end{aligned}$$

L'espace twistoriel de $H_{(\alpha,\beta)}$ est donc un quotient de celui de \mathbb{R}^{4*} . On vérifie [Pon97] que l'action de γ sur \mathbb{R}^{4*} se relève sur $\mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\}$ en l'application :

$$\begin{aligned} \sim : \quad \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} &\longrightarrow \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \mathbb{C}(\alpha z_1, \beta z_2, z_3, \frac{\alpha\beta}{|\alpha|^2} z_4). \end{aligned}$$

La fibration twistorielle de $H_{(\alpha,\beta)}$ est donc la projection :

$$\begin{aligned} \pi_{(\alpha,\beta)} : \quad \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} / \sim &\longrightarrow H_{(\alpha,\beta)} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) \text{ mod } \sim &\longmapsto (z_3 + z_4 j)^{-1} \cdot (z_1 + z_2 j). \end{aligned}$$

Cas où $\beta = \alpha \in \mathbb{R}$

Si α et β sont égaux et réels, l'application \sim s'écrit :

$$\begin{aligned} \sim : \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} &\longrightarrow \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \mathbb{C}(\alpha z_1, \alpha z_2, z_3, z_4). \end{aligned}$$

Les deux submersions holomorphes :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} & \\ & \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \mathbb{C}P^1 & & \mathbb{C}P^1 \\ \mathbb{C}(z_1, z_2) & & \mathbb{C}(z_3, z_4) \end{array}$$

passent au quotient par l'action de \sim . Le même plan de démonstration que celui de la proposition 1 permet de montrer que l'ensemble des structures presque complexes intégrables sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \beta)})$ qui respectent l'orientation et la métrique est une union de deux sphères.

Interprétation. On reprend les notations du paragraphe précédent. Sur \mathbb{R}^4 , on a défini trois structures presque complexes I_0 , J_0 et K_0 telles que pour tout point (a, b, c) de \mathbb{S}^2 , la structure presque complexe $J = aI_0 + bJ_0 + cK_0$ est intégrable et respecte la métrique canonique de \mathbb{R}^4 . Ces structures complexes passent au quotient en des structures presque complexes intégrables qui respectent la métrique produit de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ car :

$$\begin{aligned} \gamma I_0 &= I_0 \gamma \\ \gamma J_0 &= J_0 \gamma \\ \gamma K_0 &= K_0 \gamma \end{aligned}$$

Ces structures complexes sont celles induites par la submersion p_2 . Comme dans \mathbb{R}^4 , ces structures complexes sont toutes biholomorphes. En effet le biholomorphisme ϕ (cf. section 4.1.2) passent au quotient en un biholomorphisme sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, I_0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{R}^4, J) \\ x \downarrow & \longmapsto & Px \downarrow \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, I_0) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, J) \\ x \text{ (mod } \gamma) & \longmapsto & Px \text{ (mod } \gamma) \end{array}$$

Ici la proposition 2 nous dit qu'il existe d'autres structures presque complexes intégrables que celles-ci. Nous allons essayer de comprendre d'où elles viennent et nous allons essayer de voir si elles sont biholomorphes aux autres.

On identifie \mathbb{R}^4 au corps des quaternions \mathbb{H} :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{H} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4. \end{aligned}$$

On munit \mathbb{R}^{4*} de la métrique de Vaisman V et on définit l'application

$$\begin{aligned} \Xi : (\mathbb{R}^{4*}, V) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{4*}, V) \\ q &\longmapsto q^{-1} \end{aligned}$$

On définit I_1, J_1 et K_1 les structures presque complexes images par Ξ des trois structures constantes I_0, J_0 et K_0 . Ce sont des structures intégrables sur \mathbb{R}^{4*} qui ne se prolongent pas en zéro mais qui passent au quotient sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. De plus, elles vérifient les relations $I_1 J_1 = -J_1 I_1 = K_1$. Enfin, on vérifie que Ξ est une isométrie de sorte que I_1, J_1 et K_1 sont des structures presque complexes qui respectent la métrique V et donc la métrique $g_{(\alpha, \alpha)}$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$.

On a ainsi toute une sphère de nouvelles structures presque complexes intégrables. Ces structures complexes sont celles induites par la submersion p_1 . Elles sont par construction biholomorphes aux premières construites.

Cas où $\beta = \bar{\alpha} \notin \mathbb{R}$

On suppose ici que α et β ne sont pas réels mais vérifient $\beta = \bar{\alpha}$. Dans ce cas, l'application \sim s'écrit :

$$\begin{aligned} \sim : \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} &\longrightarrow \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \mathbb{C}(\alpha z_1, \bar{\alpha} z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on n'a plus qu'une seule submersion holomorphe sur $\mathbb{C}P^1$ qui passe au quotient : c'est p_2 . Dans ce cas, l'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique $g_{(\alpha, \bar{\alpha})}$ est l'union d'une sphère et de deux points.

Interprétation. On suppose que $\alpha = x + iy$. Dans ce cas, la variété $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})})$ s'obtient comme le quotient de la variété (\mathbb{R}^{4*}, V) par le groupe engendré par l'application γ , dont la matrice dans la base canonique est :

$$\gamma = \begin{pmatrix} x & -y & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & -y & x \end{pmatrix}.$$

Sur \mathbb{R}^4 , on a défini trois structures presque complexes I_0, J_0 et K_0 . Ces dernières passent au quotient en des structures presque complexes intégrables sur

$(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})})$. En effet, on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned}\gamma I_0 &= I_0 \gamma \\ \gamma J_0 &= J_0 \gamma \\ \gamma K_0 &= K_0 \gamma\end{aligned}$$

On note encore I_0 , J_0 et K_0 les structures presque complexes correspondantes sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. Pour tout point (a, b, c) de la sphère \mathbb{S}^2 , on peut définir $J = aI_0 + bJ_0 + cK_0$. C'est une structure presque complexe intégrable qui respecte l'orientation et la métrique de $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})})$. Dans \mathbb{R}^4 , toutes ces structures définissent la même structure complexe. On a en effet le biholomorphisme

$$\begin{aligned}\phi : (\mathbb{R}^4, I_0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^4, J) \\ x &\longmapsto Px\end{aligned}$$

où P est une matrice inversible qui vérifie $PI_0P^{-1} = J$. Par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} b & -c & -a+1 & 0 \\ c & b & 0 & a-1 \\ 0 & -a+1 & c & b \\ -a+1 & 0 & -b & c \end{pmatrix}.$$

Comme $P\gamma = \gamma P$, on en déduit que l'application ϕ passent au quotient sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, V, I_0) & \xrightarrow[\sim]{\phi} & (\mathbb{R}^4, V, J) \\ \pi_{(\alpha, \bar{\alpha})} \downarrow & & \downarrow \pi_{(\alpha, \bar{\alpha})} \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})}, I_0) & \xrightarrow[\sim]{\phi} & (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})}, J) \end{array}$$

Pour tout point (a, b, c) de \mathbb{S}^2 , la structure complexe $J = aI_0 + bJ_0 + cK_0$ définit donc sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ la même structure complexe que celle de $H_{(\alpha, \bar{\alpha})}$.

Dans \mathbb{R}^{4*} , on a construit l'isométrie :

$$\begin{aligned}\Xi : (\mathbb{R}^{4*}, V) &\longrightarrow (\mathbb{R}^{4*}, V) \\ q &\longmapsto q^{-1}\end{aligned}$$

Cette application transforme les trois structures constantes I_0 , J_0 et K_0 de \mathbb{R}^4 en trois structures presque complexes de \mathbb{R}^{4*} notée I_1 , J_1 et K_1 . Elles respectent l'orientation et la métrique de Vaisman. On se demande parmi celles-ci, celles qui passent au quotient sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})})$. Si on identifie \mathbb{R}^4 à \mathbb{C}^2 , l'application Ξ définie précédemment s'écrit :

$$\begin{aligned}\Xi : (\mathbb{C}^{2*}, V) &\longrightarrow (\mathbb{C}^{2*}, V) \\ (z_1, z_2) &\longmapsto \left(\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2 + |z_2|^2}, \frac{-z_2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \right)\end{aligned}$$

Comme Ξ est une involution, la structure presque complexe $J = aI_1 + bJ_1 + cK_1$ commutent avec l'action de γ si et seulement si la structure presque complexe $\tilde{J} = aI_0 + bJ_0 + cK_0$ commutent avec l'action de $\tilde{\gamma}$ définie par :

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} x & -y & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -y \\ 0 & 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

On a en effet alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, V, J) & \xrightarrow{\Xi} & (\mathbb{C}, V, \tilde{J}) \\ \pi_{(\alpha, \bar{\alpha})} \downarrow & & \downarrow \pi_{(\alpha, \alpha)} \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})}, J) & \longrightarrow & (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})}, \tilde{J}) \end{array}$$

Or le commutant de $\tilde{\gamma}$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & -y_1 & x_3 & -y_3 \\ y_1 & x_1 & y_3 & x_3 \\ \hline x_2 & -y_2 & x_4 & -y_4 \\ y_2 & x_2 & y_4 & x_4 \end{array} \right).$$

On en déduit que seul I_0 et $-I_0$ commutent avec l'action de $\tilde{\gamma}$ et donc que seul I_1 et $-I_1$ commutent avec l'action de γ . Ce sont les deux structures presque complexes intégrables (isolées) qui nous manquaient. La première définit sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})})$ la structure complexe de $H_{(\alpha, \alpha)}$. Tandis que la deuxième munit $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha, \bar{\alpha})})$ de la structure complexe de $H_{(\bar{\alpha}, \bar{\alpha})}$.

Cas où $\beta = \alpha$

Dans ce cas, l'application \sim s'écrit :

$$\begin{aligned} \sim : \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} &\longrightarrow \mathbb{C}P^3 - \{l_\infty, l_0\} \\ \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto \mathbb{C}(\alpha z_1, \alpha z_2, z_3, \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2} z_4) \end{aligned}$$

Seule la submersion p_1 passe au quotient et la même démonstration que précédemment donne le "même" résultat.

Cas restants

Dans tous les autres cas, les submersions p_1 et p_2 ne passent plus au quotient. Dans ce cas l'ensemble des structures presque complexes intégrables est réduit à quatre points.

Interprétation. On utilise les notations des paragraphes précédents. Dans ce dernier cas, parmi les structures presque complexes de \mathbb{R}^4 de la forme $aI_0 + bJ_0 + cK_0$, seuls I_0 et $-I_0$ passent au quotient sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha,\beta)})$. On vérifie facilement que la première structure munie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ de la structure complexe de $H_{(\alpha,\beta)}$ et la deuxième de celle de $H_{(\bar{\alpha},\bar{\beta})}$.

De même, parmi les structures presque complexes de \mathbb{R}^{4*} de la forme $aI_1 + bJ_1 + cK_1$, seuls I_1 et $-I_1$ passent au quotient sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g_{(\alpha,\beta)})$. Là encore, on vérifie que la première structure munie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ de la structure complexe de $H_{(\alpha,\bar{\beta})}$ et la deuxième de celle de $H_{(\bar{\alpha},\beta)}$.

Ceci conclut l'étude de ce dernier cas et finit donc la démonstration de la proposition 2. \square

4.2.4 Démonstration de la remarque

Soit g une métrique localement conformément plate sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ non conforme à une métrique de la forme $g_{(\alpha,\beta)}$. On suppose qu'il existe une structure presque complexe intégrable J sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g)$ qui respectent l'orientation et la métrique. Dans ce cas $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g, J)$ est une surface complexe hermitienne localement conformément plate. Mais Boyer [Boy86] a montré que les seules surfaces de Hopf hermitiennes localement conformément plates sont conformes à $(H_{(\alpha,\beta)}, g_{(\alpha,\beta)})$ avec $|\alpha| = |\beta|$ (lire aussi [Pon92b]).

Pour cela, il montre qu'une variété hermitienne localement conformément plate est également localement conformément Kähler. Il conclut alors en utilisant un résultat de Vaisman.

Il n'existe donc pas de structure presque complexe intégrable sur $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3, g)$ qui respectent l'orientation et la métrique. \square

4.3 Variété hypercomplexe

Au vu de ce début de chapitre, on peut remarquer deux points importants pour l'étude des structures presque complexes d'une 4-variété.

- (i) Si le fibré twistorielle de M est topologiquement trivial alors l'ensemble des structures presque complexes sur M qui respectent son orientation et une métrique fixée s'identifie à l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^∞ sur M à valeurs dans la sphère \mathbb{S}^2 .
- (ii) Si l'espace twistorielle de (M, g) est complexe et admet une submersion sur $\mathbb{C}P^1$ "convenable" alors l'ensemble des structures presque complexes intégrables sur (M, g) qui respectent l'orientation et la métrique contient une sphère \mathbb{S}^2 .

Dans ce chapitre on va approfondir un peu ces remarques et caractériser les 4-variétés qui possèdent ces propriétés (cf. th. 1 et th. [Boy88] ci-après). Pour cela, on utilisera les notions de variété presque quaternionique et hypercomplexe.

4.3.1 Fibré twistoriel topologiquement trivial

Variété presque quaternionique

Définition : Une 4-variété orientée M est presque quaternionique s'il existe trois structures presque complexes I , J et K qui respectent l'orientation et telles que $IJ = -JI = K$. Dans ce cas en tout point m , l'espace tangent de M possède une structure d'espace vectoriel quaternionique définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \times T_m M &\longrightarrow T_m M \\ (a + bi + cj + dk, X) &\longmapsto (a + bI + cJ + dK)X \end{aligned}$$

Remarque : Dans la littérature on parle parfois de variété presque hypercomplexe.

On peut être surpris par le fait qu'on demande aux trois structures presque complexes de respecter l'orientation de M . Mais ceci n'est pas une réelle restriction dans la mesure où si M n'est pas orientée mais munie de trois structures presque complexes I , J et K telles que $IJ = -JI = K$ alors I , J et K déterminent la même orientation sur M . On peut donc choisir une orientation telle que M soit presque quaternionique au sens de notre définition.

Preuve. Soit $m \in M$ et $u_1 \in T_m M$ un vecteur non nul quelconque. On va montrer que (u_1, Iu_1, Ju_1, Ku_1) est une base. Soit \tilde{g} une métrique sur $T_m M$ quelconque. On munit alors $T_m M$ de la métrique g définie par :

$$g(X, Y) = \frac{\tilde{g}(X, Y) + \tilde{g}(IX, IY) + \tilde{g}(JX, JY) + \tilde{g}(KX, KY)}{4} \quad \forall X, Y \in T_m M.$$

Les trois endomorphismes I , J et K sont alors des isométries de $T_m M$ et la famille (u_1, Iu_1, Ju_1, Ku_1) est une base orthogonale. Dans cette base les matrices de I , J et K sont :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois structures presque complexes respectent donc l'orientation donnée par la base (u_1, Iu_1, Ju_1, Ku_1) . \square

Il est un petit plus faible d'être une variété presque quaternionique que d'être une variété parallélisable.

Proposition 3 : *Une 4-variété est parallélisable si et seulement si elle est presque quaternionique et de caractéristique d'Euler nulle.*

Preuve. Si X est un champ de vecteurs partout non nul, la famille (X, IX, JX, KX) est une base de champs de vecteurs de M . \square

Caractérisation

On a montré que la fibration twistorielle ne dépendait pas de la métrique sur M (section 3.1.1), de sorte que si une 4-variété orientée admet une métrique g telle que $\tau(M, g)$ est trivial, alors pour toute métrique h sur M le fibré twistoriel associé à (M, h) sera aussi trivial. Pour autant si on change l'orientation de M , on verra que $\tau(M, g)$ peut ne plus être trivial (penser aux surfaces $K3$). On parlera donc de 4-variété à fibré twistoriel trivial sans préciser de métrique sur M .

Théorème 1 : *Le fibré twistoriel d'une 4-variété orientée M est topologiquement trivial si et seulement si M est presque quaternionique.*

Corollaire : *Si M est une 4-variété presque quaternionique et si g est une métrique quelconque sur M alors l'ensemble des structures presque complexes sur (M, g) qui respectent l'orientation et la métrique s'identifie à l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ définies sur M et à valeurs dans \mathbb{S}^2 .*

On précisera ce théorème dans le prochain chapitre en donnant l'ensemble des surfaces complexes à fibré twistoriel trivial.

Preuve du sens direct. Supposons que M soit presque quaternionique. Soit g une métrique riemannienne sur M telle que I, J et K soient des isométries. On veut montrer que $\tau(M, g) \rightarrow M$ est isomorphe au fibré trivial $M \times \mathbb{S}^2 \rightarrow M$.

Pour tout point m de M et pour toute structure complexe \tilde{J}_m sur $T_m M$ qui respecte l'orientation et la métrique g , on va montrer qu'il existe un unique point (α, β, γ) de \mathbb{S}^2 tel que : $\tilde{J}_m = \alpha I + \beta J + \gamma K$. Cela définira alors l'isomorphisme de fibré cherché :

$$\begin{aligned} \tau(M, g) &\longrightarrow M \times \mathbb{S}^2 \\ (m, \tilde{J}_m) &\longmapsto (m, (\alpha, \beta, \gamma)) \end{aligned}$$

Soit u_1 un vecteur unitaire quelconque de $T_m M$, la famille (u_1, Iu_1, Ju_1, Ku_1) est une base orthonormée de $T_m M$. Le vecteur $\tilde{J}_m u_1$ est orthogonal à u_1 et unitaire car \tilde{J}_m est une structure complexe sur $T_m M$ qui respecte la métrique. Il existe

donc un unique point (α, β, γ) de \mathbb{S}^2 tel que dans la base (u_1, Iu_1, Ju_1, Ku_1) on ait :

$$\tilde{J}_m u_1 = \alpha Iu_1 + \beta Ju_1 + \gamma Ku_1.$$

Pour conclure que : $\tilde{J}_m = \alpha I + \beta J + \gamma K$, on utilise le lemme suivant :

Lemme : *Soit J_1 et J_2 deux structures complexes sur $T_m M$ qui respectent l'orientation et la métrique de M . Si les endomorphismes J_1 et J_2 coïncident en un point u_1 de $T_m M$ alors ils sont égaux.*

Preuve du lemme. On complète u_1 en une base (u_1, u_2, u_3, u_4) orthonormée directe de $T_m M$ telle que $u_2 = J_1 u_1 = J_2 u_1$. Alors dans cette base, les matrices de J_1 et

$$J_2 \text{ doivent être égales à la matrice : } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, on sait que $\text{Vect}(u_1, u_2)$ est stable par J_1 donc son orthogonal $\text{Vect}(u_3, u_4)$ aussi. Mais $J_1 u_3$ est orthogonal à u_3 et unitaire c'est donc $\pm u_4$. De plus, J_1 conserve l'orientation on a donc nécessairement $J_1 u_3 = u_4$. Après comme $J_1^2 = -Id$, on a aussi $J_1 u_4 = -u_3$. Ceci conclut la démonstration du lemme. \square

Preuve de la réciproque. Soit $\text{Diff}^+ \mathbb{S}^2$ le groupe des difféomorphismes de la sphère \mathbb{S}^2 qui préserve l'orientation. Ce groupe se retracts fortement sur le groupe $SO(3)$ [Sma59]. C'est-à-dire qu'il existe une homotopie :

$$H : \begin{array}{ccc} \text{Diff}^+ \mathbb{S}^2 \times [0, 1] & \longrightarrow & \text{Diff}^+ \mathbb{S}^2 \\ (t, f) & \longmapsto & H(f, t) \end{array}$$

telle que :

- i) $H(f, 0) = f \quad \forall f \in \text{Diff}^+ \mathbb{S}^2$
- ii) $H(f, 1) \in SO(3) \quad \forall f \in \text{Diff}^+ \mathbb{S}^2$
- iii) $H(f, t) = f$ si $f \in SO(3)$
- iv) $H(f, t)(x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ en $(x, t) \in \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$.

Comme le fibré twistoriel $\tau(M, g)$ est un fibré de groupe structural $SO(3)$ (cf. section 3.1.1) s'il est trivial en tant que $\text{Diff}^+ \mathbb{S}^2$ -fibré, il l'est en tant que $SO(3)$ -fibré. Mais comme $\tau(M, g) \rightarrow M$ peut être réalisé comme le fibré unitaire $\mathbb{S}(\wedge^+ \mathbb{S}^2) \rightarrow M$, si le fibré twistoriel est topologiquement trivial on peut choisir trois structures presque complexes I, J et K telles que $IJ = -JI = K$. La variété M admet donc une structure presque quaternionique. \square

Remarque : *Soient I et J deux structures presque complexes qui respectent l'orientation et la métrique de (M, g) . Si en tout point de M on a $I \neq \pm J$ alors (M, g) est presque quaternionique.*

Preuve. Si le fibré $\Lambda^+ \rightarrow M$ est trivial alors le fibré twistoriel $\tau(M, g)$ aussi. \square

4.3.2 Variété hypercomplexe et variante

On rappelle qu'une structure presque complexe sur une variété M est un endomorphisme I de TM qui vérifie $I^2 = -Id$. Une application ϕ holomorphe entre deux variétés presque complexes (M, I_1) et (N, I_2) est par définition une application de classe C^∞ dont la différentielle $d\phi : TM \rightarrow TN$ commute avec I_1 et $I_2 : d\phi \circ I_1 = I_2 \circ d\phi$. Une structure presque complexe (M, I) est intégrable si et seulement si la variété M admet un atlas holomorphe à valeurs dans \mathbb{R}^4 muni de sa structure complexe standard.

De même, on dit qu'une application ϕ entre deux variétés presque quaternioniques (M, I_1, J_1, K_1) et (N, I_2, J_2, K_2) est quaternionique si et seulement si sa différentielle commute avec les trois structures presque complexes. Une variété (M, I_1, J_1, K_1) sera dite quaternionique lorsque M admet un atlas quaternionique à valeurs dans \mathbb{H} . C'est la définition donnée par Sommese [Som75].

Définition : *Une variété riemannienne orientée (M, g) est hypercomplexe si et seulement s'il existe trois structures presque complexes I, J et K intégrables telles que $IJ = -JI = K$. On demande de plus à ces trois structures de respecter la métrique et l'orientation de M .*

Remarque : *Étant données trois structures presque complexes intégrables I, J et K qui vérifient $IJ = -JI = K$, il existe toujours une orientation et une métrique préservées par I, J et K .*

Attention, une 4-variété peut être hypercomplexe sans être quaternionique. En effet, Sommese [Som75] a montré que les variétés quaternioniques sont affines. Une surface $K3$ est donc hypercomplexe mais pas quaternionique. Nous donnerons plus loin la liste des 4-variétés hypercomplexes et la liste des 4-variétés quaternioniques (cf. section 4.3.3). On rappelle qu'une variété (M, g) est hyperkählerienne si et seulement si elle est hypercomplexe et si de plus les structures complexes I, J et K sont kähleriennes. On peut être quaternionique sans être hyperkähler. C'est le cas par exemple des surfaces de Hopf de la forme $H_{(\alpha, \alpha)}$ (cf. section 4.3.3).

On veut dans cette section rappeler les différences entre ces notions et donner quelques applications aux espaces twistoriels.

Pour motiver l'étude des variétés hypercomplexes, on énonce la proposition suivante dont la vérification est immédiate.

Proposition 4 (par exemple [Sal89]) : *Si I et J sont deux structures presque*

complexes intégrables sur M qui anti-commutent ($IJ = -JI$) alors la structure presque complexe $K = IJ$ est aussi intégrable. Dans ce cas (M, I, J, K) est hypercomplexe et pour tout point (α, β, γ) de \mathbb{S}^2 la structure presque complexe $\alpha I + \beta J + \gamma K$ est aussi intégrable.

De cette proposition, on en déduit que si une 4-variété riemannienne orientée (M, g) admet une structure hypercomplexe alors, l'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique contient une sphère \mathbb{S}^2 . On trouvera une généralisation de la proposition 4 dans [Gau97] et [AMP99]. On a le même genre de résultat dans le cas hyperkähler. Là encore la démonstration ne pose pas de difficultés.

Proposition 5 (par exemple [Sal89]) : *Si I et J sont deux structures complexes kähleriennes sur M qui anti-commutent ($IJ = -JI$) alors (M, I, J, K) est hyperkähler et pour tout point (α, β, γ) de \mathbb{S}^2 la structure complexe $\alpha I + \beta J + \gamma K$ est aussi kählerienne.*

4.3.3 Espace twistoriel plat

Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée.

Définition : *On dit que l'espace twistoriel de (M, g) est plat s'il est complexe, topologiquement trivial et si la projection sur le deuxième facteur :*

$$\begin{array}{ccc} \tau(M, g) \simeq M \times \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (m, J_m) & \longmapsto & J_m \end{array}$$

est une application holomorphe de $\tau(M, g)$ sur $\mathbb{C}P^1$.

En d'autres termes si $\tau(M, g)$ est plat, il existe une submersion sur $\mathbb{C}P^1$ qui est un isomorphisme en restriction aux fibres de $\pi : \tau(M, g) \longrightarrow M$. Le théorème suivant fait le lien entre les espaces twistoriels plats et les 4-variétés hypercomplexes.

Théorème [Boy88] : *La variété (M, g) admet une structure hypercomplexe si et seulement si son espace twistoriel est plat.*

Ce théorème dit en particulier que si (M, g) admet une structure hypercomplexe alors la métrique g est anti-autoduale. Ce résultat a déjà été énoncé à la section 3.1.3 (proposition 5).

Avant d'entamer la démonstration, on peut remarquer qu'on retrouve le fait que si (M, g, I, J, K) est hypercomplexe alors pour tout point (α, β, γ) de \mathbb{S}^2 la structure presque complexe $\alpha I + \beta J + \gamma K$ est aussi intégrable. L'ensemble des structures presque complexes intégrables de (M, g) contient donc une sphère \mathbb{S}^2 .

Preuve du théorème. La démonstration que je donne ici est différente de celle de Boyer.

Pour simplifier les notations, on note Z l'espace twistoriel de (M, g) . On suppose que (M, g) est hypercomplexe, M est en particulier presque quaternionique et la métrique g est anti-autoduale. Il reste à montrer que la submersion :

$$p : \begin{array}{ccc} Z \simeq M \times \mathbb{S}^2 & \longmapsto & \mathbb{C}P^1 \\ (m, J) & \longmapsto & J \end{array}$$

est une submersion holomorphe. Pour cela, on calcule sa différentielle en un point quelconque $z = (m, J)$:

$$d_z p : \begin{array}{ccc} T_z Z \simeq T_m M \oplus T_J \mathbb{S}^2 & \longmapsto & T_J \mathbb{C}P^1 \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{v}. \end{array}$$

On note J_{et} la structure complexe sur l'espace twistoriel de (M, g) et $J_{\mathbb{C}P^1}$ celle sur $\mathbb{C}P^1$. Il faut montrer que $d_z p \circ J_{et} = J_{\mathbb{C}P^1} \circ d_z p$. Pour cela, il suffit de regarder comment a été construite la structure presque complexe sur Z . L'espace tangent de Z , admet deux décompositions a priori distincte (cf. remarque ci-dessous) :

$$\begin{cases} TZ = TM \oplus T\mathbb{S}^2 \\ TZ = H \oplus V. \end{cases}$$

La première ne dépend pas de la métrique, la deuxième est la décomposition en sous-espace horizontal et vertical donnée par la connexion de Levi-Civita sur M .

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in T_m M \oplus T_J \mathbb{S}^2$ un vecteur de $T_z Z$. On cherche à calculer $J_{et}(\vec{u}, \vec{v})$.

La structure presque complexe constante égale à J est intégrable (proposition 3 section 4.3.2). La section :

$$s : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M \times \mathbb{S}^2 \\ m & \longmapsto & (m, J) \end{array}$$

est donc holomorphe (section 3.1.3). Or sa différentielle est l'application :

$$d_m s : \begin{array}{ccc} T_m M & \longrightarrow & T_m M \times T_J \mathbb{S}^2 \\ \vec{u} & \longmapsto & (\vec{u}, \vec{0}). \end{array}$$

Comme s est holomorphe, sa différentielle vérifie :

$$d_m s(J\vec{u}) = J_{et} d_m s(\vec{u}).$$

C'est-à-dire $\forall (\vec{u}, \vec{0}) \in T_z Z$:

$$(J\vec{u}, \vec{0}) = J_{et}(\vec{u}, \vec{0}).$$

D'autre part comme la fibration twistorielle est triviale, pour tout $\vec{v} \in TS^2$, le vecteur $(0, \vec{v})$ est dans le sous-espace vertical de TZ . Par définition de la structure presque complexe de Z on a donc :

$$J_{et}(0, \vec{v}) = (0, J_{\mathbb{C}P^1} \vec{v}).$$

On vient de montrer que :

$$\begin{aligned} J_{et}(\vec{u}, \vec{v}) &= J_{et}(\vec{u}, \vec{0}) + J_{et}(\vec{0}, \vec{v}) \\ &= (J\vec{u}, \vec{0}) + (\vec{0}, J_{\mathbb{C}P^1} \vec{v}) \\ &= (J\vec{u}, J_{\mathbb{C}P^1} \vec{v}). \end{aligned}$$

La submersion p est bien holomorphe puisque d'une part :

$$d_z p(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \quad \text{donc} \quad J_{\mathbb{C}P^1} d_z p(\vec{u}, \vec{v}) = J_{\mathbb{C}P^1} \vec{v}.$$

et d'autre part :

$$d_z p\left(J_{et}(\vec{u}, \vec{v})\right) = d_z p(J\vec{u}, J_{\mathbb{C}P^1} \vec{v}) = J_{\mathbb{C}P^1} \vec{v}.$$

Réciproquement si $\tau(M, g)$ est plat alors on peut choisir dans S^2 trois points I, J et K . Les sections constantes correspondantes sont intégrables : (M, g) est bien hypercomplexe. \square

Remarques sur la distribution horizontale

Je voudrais revenir ici sur les deux décompositions de l'espace tangent de Z , qui existent dès que M est presque quaternionique :

$$\begin{cases} TZ &= TM \oplus TS^2 \\ TZ &= H \oplus TS^2. \end{cases}$$

Remarque : *Le sous-espace horizontal H coïncide avec l'espace TM si et seulement si la variété (M, g) est hyperkählerienne.*

Preuve. Supposons qu'on ait l'égalité $H = TM$. Une section constante du fibré $Z \simeq M \times S^2 \rightarrow M$, est alors horizontale. Elle définit donc une structure complexe kählerienne sur (M, g) (cf. section 3.1.3). Comme on peut construire trois sections horizontales, (M, g) est hyperkählerienne.

Réciproquement si (M, g) est une variété hyperkählerienne, son espace twistoriel est topologiquement trivial $Z \simeq M \times S^2$ et la distribution horizontale coïncide avec la distribution TM . \square

Remarque : *La distribution TM est stable par J_{et} si et seulement si la variété (M, g) est hypercomplexe.*

Preuve. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in T_z Z \simeq T_m M \oplus T_J \mathbb{S}^2$. Au cours de la démonstration du théorème de Boyer, on a montré que la distribution TM était stable par la structure presque complexe canonique J_{et} sur Z :

$$J_{et}(\vec{u}, \vec{v}) = (J\vec{u}, J_{CP^1}\vec{v}) \quad \forall \vec{u} \in TM, \forall \vec{v} \in T\mathbb{S}^2.$$

Pour cela on a utilisé le fait que M était munie d'une structure hypercomplexe. Réciproquement, si TM est stable par J_{et} , la structure presque complexe J_{et} sur Z vérifie l'égalité ci-dessus et donc les sections constantes :

$$\begin{aligned} s : M &\longrightarrow M \times \mathbb{S}^2 \\ m &\longmapsto (m, J_0) \end{aligned}$$

sont holomorphes. En d'autres termes (cf. section 3.1.3), les structures presque complexes constantes sont intégrables. La variété (M, g) est bien hypercomplexe. \square

Classification des variétés hypercomplexes

La notion de structure hypercomplexe est donc très intéressante pour l'étude des espaces twistoriels. Malheureusement il y a très peu de variétés qui admettent une telle structure.

Théorème [Kat80] : *Les seules 4-variétés compactes quaternioniques sont :*

- a) *les tores,*
- b) *certaines surfaces de Hopf bien déterminées.*

Les seules surfaces de Hopf primaires qui sont quaternioniques sont les surfaces $H_{(\alpha, \beta)}$ pour lesquelles $\alpha = \beta$ ou $\alpha = \bar{\beta}$.

Pour les surfaces hypercomplexes, on a le théorème de classification suivant.

Théorème [Boy88] (lire aussi [Pon92a]) : *Si (M, g) une 4-variété compacte hypercomplexe alors elle est conforme à :*

- a) *un tore plat*
- b) *une surface K3 munie de la métrique de Calabi-Yau*
- c) *une surface de Hopf quaternionique munie d'une métrique de la forme $g_{(\alpha, \beta)}$.*

Comme toute variété hyperkählérienne est en particulier hypercomplexe et que les surfaces de Hopf ne sont pas kähleriennes, on a le corollaire :

Corollaire (cf par exemple [Boy88]) : *Les seules 4-variétés (M, g) compactes munies d'une structure hyperkählérienne sont :*

- a) les tores,
- b) les surfaces $K3$.

Preuve. On peut donner une preuve directe de ce corollaire, il suffit de montrer que le fibré canonique d'une 4-variété (M, g, I, J, K) hyperkählérienne, est holomorphiquement trivial et de lire ensuite la classification de Kodaira. Pour cela on étudie la 2-forme :

$$w(X, Y) = g(JX, Y) + ig(KX, Y) \quad \forall (X, Y) \in TM.$$

Elle est I -holomorphe et parallèle ($\nabla w = 0$), c'est donc une 2-forme holomorphe non nulle. Le fibré canonique de (M, I) est bien holomorphiquement trivial. Comme (M, I) est aussi kählerienne, c'est un tore ou une surface $K3$ [BHPVdV04]. \square

4.4 Solution du problème pour les tores

On revient à notre problème de déterminer l'ensemble des structures presque complexes intégrables sur une variété. Nous allons voir pourquoi la structure hyperkählérienne d'un tore plat permet de retrouver le résultat énoncé à la section 4.1.

Proposition 6 : *L'ensemble des structures presque complexes intégrables qui respectent l'orientation et la métrique d'un tore plat \mathbb{T}^4 s'identifie à la sphère \mathbb{S}^2 .*

Remarque : *Toutes ces structures sont kähleriennes, mais contrairement au cas de \mathbb{R}^4 , elles ne sont pas toutes biholomorphes (cf. démonstration à la section 4.4.2).*

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'appliquer une démonstration qu'Hitchin a donné pour les surfaces $K3$ [Hit84]. Les surfaces $K3$, comme les tores plats, sont hyperkähleriennes. Il existe donc une submersion holomorphe $p : \tau(K3) \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Hitchin a montré que les seules hypersurfaces de $\tau(K3)$ sont les fibres de p . Ce sont donc en particulier les seules sections holomorphes du fibré twistoriel. Sa démonstration s'applique au cas des tores plats (cf. preuve ci-dessous).

4.4.1 Démonstration de la proposition 6

Soit S une surface complexe de l'espace twistoriel d'un tore plat $\tau(\mathbb{T}^4)$ qui n'est pas une fibre de la submersion $p : \tau(\mathbb{T}^4) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$. Dans ce cas, il existe un point J_0 de $\mathbb{C}P^1$ tel que $C_0 = S \cap p^{-1}(J_0)$ soit une courbe à la fois de S et de $p^{-1}(J_0) = (\mathbb{T}^4, J_0)$. Comme \mathbb{T}^4 est hyperkähler, la structure complexe constante égale à J_0 sur \mathbb{T}^4 est kählerienne. On note w_0 la forme de Kähler associée. On considère $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4})$ une base orthonormée directe de \mathbb{T}^4 telle que dans cette base la matrice de J_0 soit :

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme de Kähler w_0 s'écrit alors $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. On définit $\theta_0 = (dx_1 + idx_2) \wedge (dx_3 + idx_4)$, c'est une 2-forme holomorphe pour J_0 . On a alors :

$$\begin{cases} \int_{C_0} w_0 = Vol(C_0) > 0 \\ \int_{C_0} \theta_0 = 0 \quad (\theta_0 \text{ est une 2-forme holomorphe et } C_0 \text{ une courbe}). \end{cases}$$

Soit J_1 la structure complexe dont la matrice dans la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4})$ est :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme \mathbb{T}^4 est hyperkähler, J_1 est une structure complexe kählerienne. La forme de Kähler associée est : $w_1 = dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4$. Mais alors $w_1 = \frac{\theta_0 + \overline{\theta_0}}{2}$, donc :

$$\int_{C_0} w_1 = 0.$$

La courbe $C_1 = S \cap p^{-1}(J_1)$ étant homologue à la courbe $C_0 = S \cap p^{-1}(J_0)$, on aboutit à la contradiction : $\int_{C_1} w_1 = 0$. Les seules surfaces complexes de $\tau(\mathbb{T}^4)$ sont les sections de la submersion holomorphe $p : \tau(\mathbb{T}^4) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$. \square

4.4.2 Interprétation

On a muni \mathbb{R}^4 de trois structures presque complexes intégrables I_0, J_0 et K_0 . Le théorème 5 nous assure que les structures presque complexes de la forme $aI_0 + bJ_0 + cK_0$ passent au quotient et que ce sont les seules qui respectent l'orientation et la métrique d'un tore plat. Toutes ces structures complexes sont

donc kähleriennes. On va montrer que toutes ces structures complexes ne sont pas biholomorphes.

En effet si toutes les fibres de la submersion $p : \tau(\mathbb{T}^4) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ étaient biholomorphes, le théorème de Fischer-Grauert [BHPVdV04] nous assure que p serait un fibré localement trivial. Mais alors le théorème de Blanchard ([Bla56] p.192) nous affirme que la variété $\tau(\mathbb{T}^4)$ serait kählerienne. Ce qui contredit le théorème d’Hitchin [Hit81] (cf. section 6.1.1).

À la main, on peut voir que l’isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \phi : (\mathbb{R}^4, I_0) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^4, J) \\ x & \longmapsto & Px \end{array}$$

ne passent pas nécessairement au quotient par le réseau qui définit le tore.

4.5 Solution du problème pour les surfaces $K3$

On considère une surface $K3$ munie de la métrique de Calabi-Yau, noté g . On a alors une surface hyperkählerienne. La même démonstration que pour les tores plats permet de démontrer les résultats suivants.

Proposition 7 : *L’ensemble des structures presque complexes intégrables sur $(K3, g)$ compatibles avec l’orientation et la métrique s’identifie à la sphère \mathbb{S}^2 .*

Remarque : *Toutes ces structures sont kähleriennes, mais comme pour les tores plats, elles ne sont pas toutes biholomorphes.*

Chapitre 5

3-variété complexe de premier type

Dans le chapitre précédent, on a donné un critère pour que le fibré twistoriel d'une 4-variété (M, g) soit topologiquement trivial : $\tau(M, g) \simeq M \times \mathbb{S}^2$. C'est une condition qui ne dépend pas de la métrique g choisie mais qui dépend fortement de la topologie de M et de son orientation.

On sait qu'il existe toujours une structure presque complexe sur l'espace $\tau(M, g)$ et qu'elle est intégrable si et seulement si la métrique g est anti-autoduale. Dans ce chapitre, on cherche des 4-variétés (M, g) telles que :

- (i) M ne possède pas de structure complexe
- (ii) le fibré twistoriel de (M, g) est trivial
- (iii) la métrique g est anti-autoduale.

Pour de telles variétés, on aura une structure complexe sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$ bien que M ne soit pas complexe. On parlera de 3-variétés complexes de premier type. Pour cela, on approfondit un peu l'étude des 4-variétés presque quaternioniques.

5.1 Variétés presque quaternioniques

On rappelle qu'une variété orientée M est presque quaternionique si elle admet trois structures presque complexes I, J et K qui respectent l'orientation et telles que $IJ = -JI = K$. On a montré que le fibré twistoriel de (M, g) est topologiquement trivial si et seulement si M était presque quaternionique (th. 1 section 4.3.1). Dans ce premier paragraphe, on étudie un peu plus précisément cette notion. L'objectif étant de donner dans le paragraphe suivant, la liste des surfaces complexes presque quaternioniques.

5.1.1 Caractérisation en terme de groupe structural

Le groupe structural d'une 4-variété (M, g) riemannienne orientée est $SO(4)$. Si de plus, M admet une structure presque complexe alors son groupe structural

se réduit à $U(2)$.

Proposition 1 : *Une 4-variété orientée M est presque quaternionique si et seulement si son groupe structural se réduit à $SU(2)$.*

Remarque : L'injection de $SU(2)$ dans $SO(4)$ est l'application :

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \longrightarrow & SO(4) \\ \left(\begin{array}{cc} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{array} \right) & \longmapsto & \left(\begin{array}{cc|cc} \operatorname{Re}(a) & -\operatorname{Im}(a) & -\operatorname{Re}(b) & -\operatorname{Im}(b) \\ \operatorname{Im}(a) & \operatorname{Re}(a) & \operatorname{Im}(b) & -\operatorname{Re}(b) \\ \hline \operatorname{Re}(b) & -\operatorname{Im}(b) & \operatorname{Re}(a) & \operatorname{Im}(a) \\ \operatorname{Im}(b) & \operatorname{Re}(b) & -\operatorname{Im}(a) & \operatorname{Re}(a) \end{array} \right). \end{array}$$

Preuve. Il existe une métrique g sur M telle que I, J et K soient des isométries. La variété (M, g) est alors riemannienne et orientée, son groupe structural est $SO(4)$. Comme M est presque quaternionique, son groupe structural est un sous-groupe du commutant de (I, J, K) dans $SO(4)$. Dans une base bien choisie, les matrices des endomorphismes I, J et K sont :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $Com(I), Com(J)$ et $Com(K)$ les commutants de I, J et K dans $SO(4)$. Ils s'identifient tous les trois à un sous-groupe de $SO(4)$ isomorphe à $U(2)$. On retrouve le fait que si M est presque complexe son groupe structural est $U(2)$. On vérifie que $Com(I)$ est l'ensemble des matrices de $SO(4)$ de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & -y_1 & x_3 & -y_3 \\ y_1 & x_1 & y_3 & x_3 \\ \hline x_2 & -y_2 & x_4 & -y_4 \\ y_2 & x_2 & y_4 & x_4 \end{array} \right),$$

$Com(J)$ est l'ensemble des matrices de $SO(4)$ de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & -y_3 & -y_1 & x_3 \\ y_2 & x_4 & x_2 & y_4 \\ \hline y_1 & x_3 & x_1 & y_3 \\ x_2 & -y_4 & -y_2 & x_4 \end{array} \right)$$

et $Com(K)$ est l'ensemble des matrices de $SO(4)$ de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} x_1 & x_3 & -y_3 & -y_1 \\ x_2 & x_4 & -y_4 & -y_2 \\ \hline y_2 & y_4 & x_4 & x_2 \\ y_1 & y_3 & x_3 & x_1 \end{array} \right).$$

Comme $K = IJ$, le commutant de (I, J, K) dans $SO(4)$ est l'intersection des commutants de I et J . C'est donc l'ensemble des matrices de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \beta & \alpha & \delta & -\gamma \\ \hline \gamma & -\delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & -\beta & \alpha \end{array} \right) \quad \text{avec } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Si M est presque quaternionique, son groupe structural se réduit bien à $SU(2)$.

Réciproquement, si le groupe structural de M est dans $SU(2)$, les applications I, J et K définies sur chaque trivialisaton du fibré tangent se recollent bien en des endomorphismes de l'espace tangent tout entier, M est bien presque quaternionique. \square

5.1.2 Caractérisation topologique

Toute variété n'admet pas forcément de structure presque complexe, a fortiori de structure presque quaternionique. Il y a des obstructions topologiques données par le théorème de Wu :

Théorème [Wu52] : *Une 4-variété orientée M est presque quaternionique si et seulement si M est spin et si sa caractéristique d'Euler χ et sa signature τ vérifient la relation : $3\tau + 2\chi = 0$.*

Preuve. Nous allons démontrer ce théorème en n'utilisant que le théorème de Wu de la section 2.1.1. Pour commencer on montre l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) Le groupe structural de M se réduit à $SU(2)$.
- (ii) Il existe une structure presque complexe sur M qui respecte l'orientation et la métrique de M et telle que les cocycles du fibré tangent (complexe) $g_{\alpha\beta}$ vérifient $\det(g_{\alpha\beta}) = 1$.
- (iii) Il existe une structure presque complexe sur M qui respecte l'orientation et la métrique de M et telle que le fibré des 2-formes complexes $\bigwedge^2 T^*M$ est topologiquement trivial.
- (iv) Il existe une structure presque complexe sur M qui respecte l'orientation et la métrique de M dont la première classe de Chern (entière) $c_1(M, I)$ est nulle.

Il est alors assez facile de finir la démonstration du théorème de Wu. Une 4-variété (M, g) est presque quaternionique si et seulement si son groupe structural se réduit à $SU(2)$ donc si et seulement si (M, g) admet une structure presque complexe I telle que $c_1(M, I) = 0$. Par le théorème de Wu de la section 2.1.1, on

voit que c'est équivalent à M spin (i.e. $w_2 = 0$) et $3\tau + 2\chi = 0$.

Reste à montrer l'équivalence entre les propriétés, pour cela on commence par une remarque. Soit I une structure presque complexe sur M . On considère \mathcal{U}_α et \mathcal{U}_β deux ouverts de M au-dessus desquels le fibré tangent est trivial et on note $g_{\alpha\beta}$ le cocycle associé :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathcal{U}_\beta \times \mathbb{C}^2 \\ (x, (e_1, e_2)) & \longmapsto & (x, (g_{\alpha\beta}(x)e_1, g_{\alpha\beta}(x)e_2)) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta & \end{array}$$

Cette trivialisations induit une trivialisations du fibré des 2-formes complexes $\bigwedge^2 T^*M \rightarrow M$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{U}_\beta \times \mathbb{C} \\ (x, e_1 \wedge e_2) & \longmapsto & (x, \det g_{\alpha\beta}(x) \cdot e_1 \wedge e_2) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta & \end{array}$$

En d'autres termes, si $g_{\alpha\beta}$ est un cocycle de $TM \rightarrow M$ alors $\det(g_{\alpha\beta})$ est un cocycle du fibré des 2-formes complexes $\bigwedge^2 T^*M$.

On peut maintenant montrer les équivalences entre les différentes propriétés. Il est clair que le point (i) équivaut au point (ii). Par la remarque ci-dessus, le point (ii) est équivalent au point (iii). Enfin, soit I une structure presque complexe de première classe de Chern $c_1(M, I)$. Comme précédemment, on note $\bigwedge^2 T^*M$ le fibré des 2-formes associé à cette structure presque complexe. On a $c_1(M, I) = c_1(\bigwedge^2 T^*M)$ et donc $c_1(M, I) = 0$ si et seulement si $c_1(\bigwedge^2 T^*M) = 0$ c'est-à-dire si et seulement si le fibré $\bigwedge^2 T^*M$ est topologiquement trivial. Les propositions (iii) et (iv) sont bien équivalentes. Ceci conclut la démonstration du théorème de Wu. \square

Corollaire : Soit (M, g) une 4-variété riemannienne connexe orientable. Le fibré twistoriel associé est topologiquement trivial pour les deux choix d'orientations de M si et seulement si M est parallélisable.

On en déduit que le fibré twistoriel d'une surface $K3$ est trivial tandis que si on change l'orientation de la surface $K3$, son fibré twistoriel n'est plus trivial.

Preuve du corollaire. Si les deux fibrés twistoriels de M sont topologiquement triviaux, M est presque quaternionique pour les deux orientations. Mais si on

renverse l'orientation, la signature de M change de signe. Par le théorème de Wu on doit avoir $-3\tau + 2\chi = 0$ et $3\tau + 2\chi = 0$. La caractéristique d'Euler de M est donc nulle et la proposition 1 de la section 4.4.1 nous assure qu'une 4-variété presque quaternionique dont la caractéristique d'Euler est nulle est parallélisable. Pour la réciproque on applique deux fois le théorème de Wu. \square

5.2 Surfaces compactes complexes à fibré twistoriel topologiquement trivial

Le théorème de Wu et la classification de Kodaira permettent de donner la liste des surfaces compactes complexes dont le fibré twistoriel est trivial. Ce travail est assez facile lorsqu'on a remarqué que les surfaces complexes qui sont spin, sont aussi minimales (proposition 2 ci-après).

Théorème 1 : *Les seules surfaces compactes complexes S dont l'espace twistoriel est topologiquement trivial sont :*

$$Kod(S) = -\infty : \left\{ \begin{array}{l} \text{Les surfaces réglées de genre un qui sont spin} \\ \text{Les surfaces de Hopf} \\ \text{Les surfaces d'Inoue} \end{array} \right.$$

$$Kod(S) = 0 : \left\{ \begin{array}{l} \text{Les tores} \\ \text{Les surfaces hyperelliptiques} \\ \text{Les surfaces de Kodaira primaires} \\ \text{Les surfaces de Kodaira secondaires qui sont spin} \\ \text{Les surfaces } K3 \end{array} \right.$$

$$Kod(S) = 1 : \text{Les surfaces minimales qui sont spin}$$

$$Kod(S) = 2 : \text{Aucune surface.}$$

Avant de démontrer ce théorème nous voudrions rappeler quelques résultats sur la classification des surfaces complexes et en particulier sur les surfaces de la classe VII_0 .

5.2.1 Rappel sur les surfaces minimales

Soit S une surface complexe et p un point de S . On peut définir une nouvelle surface \tilde{S} et une application holomorphe $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow S$ telles que :

- (i) $\tilde{\pi}^{-1}(p) = E$ où E est une courbe isomorphe à $\mathbb{C}P^1$ d'auto-intersection -1 ,
- (ii) $\tilde{\pi}$ est un biholomorphisme de $\tilde{S} - E$ dans $S - \{p\}$.

On dit que \tilde{S} est l'éclaté de S au point p et que E est une courbe exceptionnelle de \tilde{S} . On note $\overline{\mathbb{C}P^2}$ le plan projectif complexe où l'on a renversé l'orientation. À difféomorphisme près, un éclatement revient à faire une somme connexe : $\tilde{S} = S \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$.

Le procédé inverse marche aussi : soit \tilde{S} une surface complexe et E une courbe exceptionnelle de \tilde{S} , c'est-à-dire que E est isomorphe à $\mathbb{C}P^1$ et d'auto-intersection -1 . La surface \tilde{S} est alors l'éclatée d'une certaine surface complexe S .

Définition : Une surface complexe sans courbe exceptionnelle est dite minimale.

Surfaces dans la classe VII_0

On dit qu'une surface complexe S est dans la classe VII_0 si elle est minimale, si sa dimension de Kodaira est $-\infty$ et si son premier nombre de Betti est 1. Bogomolov [Bog82] puis Teleman [Tel94] ont montré que les seules surfaces de la classe VII_0 dont le deuxième nombre de Betti b_2 est nul sont les surfaces de Hopf et les surfaces d'Inoue [Ino74]. On connaît des exemples de surfaces dans la classe VII_0 avec $b_2 > 0$. On parlera de la classe VII_0^+ .

On rappelle ici quelques un des invariants topologiques des surfaces de la classe VII_0^+ [FM94], [BHPVdV04] :

la caractéristique d'Euler $\chi = 2 - 2b_1 + b_2 = b_2 > 0$,

le genre géométrique $p_g = 0$ (la dimension de Kodaira est $-\infty$)

l'irrégularité $q = 1$ (car $b_1 = 1$).

On note c_1 et c_2 les classes de Chern d'une surface de la classe VII_0^+ . La formule de Riemann-Roch [BHPVdV04] donne :

$$\frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) = 1 - q + p_g.$$

Pour les surfaces de la classe VII_0^+ on a donc $c_1^2 = -c_2 < 0$.

Kodaira secondaires

Une surface de Kodaira secondaire est le quotient fini non ramifié d'une surface de Kodaira primaire [FM94], [BHPVdV04]. A priori, on ne peut donc pas savoir si une telle surface est spin ou pas. Cela dépend beaucoup du quotient

choisi. On note K_S le fibré canonique d'une surface S . On sait qu'il existe des surfaces de Kodaira secondaires spin puisque pour certaines d'entre elles $K_S^{\otimes 3}$ est holomorphiquement trivial [BHPVdV04] donc $3c_1 = 0 \implies c_1 \equiv 0 \pmod{2}$. Mais je ne sais pas si toutes les surfaces de Kodaira secondaires sont spin.

Surfaces réglées de genre un

Les surfaces réglées de genre un qui sont spin sont exactement celles dont la forme d'intersection est paire [FM94], [GS99]. Plus précisément, il n'y a que deux classes de déformation des surfaces réglées de genre un : la première contient toutes les spin, la deuxième les non spin. En particulier, toutes surfaces réglées de genre un spin peut se déformer en un produit $C \times \mathbb{C}P^1$ d'une courbe elliptique C par la droite projective complexe.

Surfaces elliptiques de dimension de Kodaira un

Toutes ces surfaces ne sont pas spin. Il existe quelques critères pour déterminer si telle ou telle surface est spin en fonction de la multiplicité de ses fibres multiples (cf. par exemple §2.2.2 [FM94]).

5.2.2 Les surfaces complexes spin sont minimales

On veut montrer la proposition suivante [Hit74b] :

Proposition 2 : *Une surface complexe spin est minimale.*

Pour cela, on utilise une caractérisation des 4-variétés spin.

Caractérisation [LM89] : *Si M est une 4-variété spin alors pour toute surface V plongée dans M , la classe d'Euler du fibré normal de V dans M est paire.*

Preuve de la proposition. Soit \tilde{S} une surface complexe qui n'est pas minimale, à difféomorphisme près c'est donc la somme connexe d'une variété S avec $\overline{\mathbb{C}P^2}$. Mais dans $\mathbb{C}P^2$, on peut plonger une surface V dont le fibré normal a classe d'Euler impaire. Si on recolle S et $\overline{\mathbb{C}P^2}$ en évitant cette surface, la surface V se plonge aussi dans $S \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ et la classe d'Euler de son fibré normal reste impaire. La somme connexe $S \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ n'est jamais spin. Les surfaces spin sont donc minimales. \square

5.2.3 Démonstration du théorème 1

On peut maintenant démontrer le théorème. On cherche les surfaces complexes dont l'espace twistoriel est topologiquement trivial. Par le théorème 1 de la section 4.3.1 et le théorème de Wu, cela revient à trouver les surfaces complexes

spin dont la première classe de Chern c_1 vérifie : $c_1^2 = 3\tau + 2\chi = 0$. On a vu que les surfaces spin sont minimales, il suffit donc de lire la classification de Kodaira des surfaces [BHPVdV04], [FM94].

Surfaces compactes complexes minimales	Kod(S)	c_1^2	χ
Surfaces rationnelles	$-\infty$	8 ou 9	4 ou 3
Classe VII_0 et $b_2 = 0$: Inoue ou Hopf	$-\infty$	0	0
Classe VII_0 et $b_2 > 0$: pas de classification	$-\infty$	< 0	> 0
Surfaces réglées de genre un	$-\infty$	0	0
Surfaces réglées de genre $g > 1$	$-\infty$	$8(1-g)$	$4(1-g)$
Tores	0	0	0
Surfaces hyperelliptiques	0	0	0
Surfaces K3	0	0	24
Surfaces d'Enriques	0	0	12
Surfaces de Kodaira	0	0	0
Proprement elliptiques et b_1 impair	1	0	0
Proprement elliptiques et b_1 pair	1	0	≥ 0
Surfaces de type général	2	> 0	> 0

Pour conclure, il nous reste à montrer d'une part que les surfaces d'Enriques ne sont pas spin, et à l'inverse que les surfaces du théorème 1 le sont. Pour le premier point on utilise le résultat de Rochlin.

Théorème de Rochlin [LM89] : *La signature d'une 4-variété réelle compacte spin est un multiple de 16.*

La caractéristique d'Euler χ d'une surface d'Enriques est égale à 12. De plus, la première classe de Chern d'une telle surface vérifie $c_1^2 = 3\tau + 2\chi = 0$. La signature τ d'une surface d'Enriques est donc -8 . Du théorème de Rochlin, on en déduit qu'aucune surface d'Enriques n'est spin.

Il faut maintenant montrer que les surfaces du théorème 1 sont spin.

Remarque : *Les surfaces de Hopf primaires sont par définition difféomorphes au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. Elles sont donc spin puisque parallélisables.*

Remarque : *Les surfaces K3 et les surfaces de Kodaira primaires sont spin puisque par définition leur fibré canonique est trivial [BHPVdV04].*

Reste à montrer que les surfaces d'Inoue, les surfaces hyperelliptiques et les surfaces de Hopf secondaires sont spin. Pour cela, on va montrer qu'elles sont parallélisables. Ce travail est possible car on a une description explicite de ces surfaces.

Les surfaces d'Inoue de type S_M sont spin

On utilise ici les notations d'Inoue [Ino74].

Soit $M = (m_{ij}) \in SL(3, \mathbb{Z})$ une matrice dont les valeurs propres sont $\alpha, \beta, \bar{\beta}$ avec $\alpha > 1$ et $\beta \neq \bar{\beta}$. Soient (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) les vecteurs propres de M associés respectivement à α et β .

On note G_M le groupe d'automorphismes de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ engendré par :

$$\begin{cases} g_0 : (w, z) \longrightarrow (\alpha w, \beta z) \\ g_i : (w, z) \longrightarrow (w + a_i, z + b_i) \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

On montre que l'action de G_M sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ est propre, discontinue et sans point fixe. Par définition, les surfaces $S_M = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_M$ sont les surfaces d'Inoue de premier type.

Proposition 3 : *Les surfaces d'Inoue de premier type sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

Preuve. Soit (e_1, e_2) la "base" canonique de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}^+$ et (e_3, e_4) celle de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. On considère les quatre champs de vecteurs sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ définis par :

$$\begin{cases} X_1(w, z) = Im w . e_1 \\ X_2(w, z) = Im w . e_2 \\ X_3(w, z) = \beta^{\frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}} . e_3 \\ X_4(w, z) = \beta^{\frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}} . e_4 \end{cases}$$

Ces quatre champs de vecteurs passent au quotient en une base de champs de vecteurs sur $S_M = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_M$ car :

$$\forall (i, j) \quad X_i(g_j(w, z)) = d_{(w, z)}g_j (X_i(w, z)),$$

où $d_{(w, z)}g_j$ est la différentielle de l'application g_j au point (w, z) . Par exemple :

$$\begin{aligned} X_1(g_0(w, z)) &= X_1(\alpha w, \beta z) \\ &= Im \alpha w . e_1 \\ &= \alpha . X_1(w, z) \\ &= d_{(w, z)}g_0 (X_1(w, z)). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} X_3(g_0(w, z)) &= X_3(\alpha w, \beta z) \\ &= \beta^{\frac{\ln(\alpha Im w)}{\ln \alpha}} . e_3 \\ &= \beta^{1 + \frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}} . e_3 \\ &= \beta . \beta^{\frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}} . e_3 \\ &= \beta . X_3(w, z) \\ &= d_{(w, z)}g_0 (X_3(w, z)). \end{aligned}$$

Les surfaces d'Inoue de premier type sont bien parallélisables. \square

Les surfaces d'Inoue de type $S_{N,p,q,r;t}^+$ sont spin

Toujours avec les notations d'Inoue [Ino74], soit $N = (n_{ij}) \in SL(2, \mathbb{Z})$ une matrice ayant des valeurs propres réelles α et $1/\alpha$ avec $\alpha > 1$. Soient (a_1, a_2) et (b_1, b_2) les vecteurs propres de M associés respectivement à α et $1/\alpha$. On fixe des entiers p, q, r où r est non nul et un nombre complexe t . On note (c_1, c_2) la solution de l'équation :

$$(c_1, c_2) = (c_1, c_2) \cdot {}^t N + (e_1, e_2) + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{r} (p, q)$$

où $e_i = \frac{1}{2} n_{i1} (n_{i1} - 1) a_1 b_1 + \frac{1}{2} n_{i2} (n_{i2} - 1) a_2 b_2 + n_{i1} n_{i2} b_1 a_2 \quad i \in \{1, 2\}$.

On note $G_{N,p,q,r;t}^+$ le groupe d'automorphismes de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ engendré par :

$$\begin{cases} g_0 : (w, z) \longrightarrow (\alpha w, z + t) \\ g_i : (w, z) \longrightarrow (w + a_i, z + b_i w + c_i) \quad \forall i \in \{1, 2\} \\ g_3 : (w, z) \longrightarrow (w, z + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{r}). \end{cases}$$

On montre que l'action de $G_{N,p,q,r;t}^+$ sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ est propre, discontinue et sans point fixe. Par définition, les surfaces $S_{N,p,q,r;t}^+ = \mathbb{H} \times \mathbb{C} / G_{N,p,q,r;t}^+$ sont les surfaces d'Inoue de deuxième type.

Proposition 4 : *Les surfaces d'Inoue de deuxième type sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

Preuve. On note encore (e_1, e_2) la "base" canonique de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}^+$, (e_3, e_4) celle de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ et $d_{(w,z)} g_j$ la différentielle de l'application g_j au point (w, z) . Dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) , les matrices de ces différentielles sont :

$$d_{(w,z)} g_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_{(w,z)} g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_{(w,z)} g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_{(w,z)} g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère les deux champs de vecteurs sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ définis par :

$$\begin{cases} X_3(w, z) = e_3 \\ X_4(w, z) = e_4 \end{cases}$$

Ces deux champs passent au quotient sur $S_{N,p,q,r;t}^+ = \mathbb{H} \times \mathbb{C} / G_{N,p,q,r;t}^+$. On définit sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ le champ de 2-plans $Vect(e_1, e_3)$ orientés par la 2-forme $e_1 \wedge e_3$. Comme

$Vect(e_1, e_3)$ est un plan stable pour toutes les différentielles $d_{(w,z)}g_j$, ce champ passe au quotient en un champ de 2-plans sur $S_{N,p,q,r;t}^+$. De plus, l'orientation est conservée car les 2-formes $d_{(w,z)}g_i(e_1) \wedge d_{(w,z)}g_i(e_3)$ sont positivement liées à la 2-forme $e_1 \wedge e_3$. On note P_{13} ce champ de plans sur $S_{N,p,q,r;t}^+$. On munit $S_{N,p,q,r;t}^+$ d'une métrique riemannienne et on note X_1 le champ de vecteurs dans P_{13} unitaire et tel que (X_1, X_3) soit une famille orthogonale directe de P_{13} .

De même, le champ de 2-plans $Vect(e_2, e_4)$ constant sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ et orienté par la 2-forme $e_2 \wedge e_4$, passe au quotient sur $S_{N,p,q,r;t}^+$ en un champ de 2-plans P_{24} orientés. On définit de même le champ de vecteurs X_2 dans P_{24} unitaire et tel que (X_2, X_4) soit une famille orthogonale directe de P_{24} .

On a ainsi défini une base de champs de vecteurs (X_1, X_2, X_3, X_4) sur $S_{N,p,q,r;t}^+$. Les surfaces d'Inoue de deuxième type sont donc bien parallélisables. \square

Les surfaces d'Inoue de type $S_{N,p,q,r}^-$ sont spin

Toujours avec les notations d'Inoue [Ino74], soit $N = (n_{ij}) \in GL(2, \mathbb{Z})$ une matrice de déterminant -1 ayant deux valeurs propres réelles $\alpha, -1/\alpha$ avec $\alpha > 1$. Soient (a_1, a_2) et (b_1, b_2) les vecteurs propres de M associés respectivement à α et $-1/\alpha$. Comme pour les surfaces d'Inoue de deuxième type, on fixe des entiers p, q, r où r est non nul et on note (c_1, c_2) la solution de l'équation :

$$-(c_1, c_2) = (c_1, c_2) \cdot {}^t N + (e_1, e_2) + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{r}(p, q)$$

où $e_i = \frac{1}{2}n_{i1}(n_{i1} - 1)a_1 b_1 + \frac{1}{2}n_{i2}(n_{i2} - 1)a_2 b_2 + n_{i1}n_{i2}b_1 a_2 \quad i \in \{1, 2\}$.

On note $G_{N,p,q,r}^-$ le groupe d'automorphismes de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ engendré par :

$$\begin{cases} g_0 : (w, z) \longrightarrow (\alpha w, -z) \\ g_i : (w, z) \longrightarrow (w + a_i, z + b_i w + c_i) \quad \forall i \in \{1, 2\} \\ g_3 : (w, z) \longrightarrow (w, z + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{r}). \end{cases}$$

On montre que l'action de $G_{N,p,q,r}^-$ sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ est propre, discontinue et sans point fixe. Par définition, les surfaces $S_{N,p,q,r}^- = \mathbb{H} \times \mathbb{C} / G_{N,p,q,r}^-$ sont les surfaces d'Inoue de troisième type.

Proposition 5 : *Les surfaces d'Inoue de troisième type sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

Preuve. On garde les notations précédentes. Ainsi dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) , les

matrices des différentielles $d_{(w,z)}g_j$ sont :

$$d_{(w,z)}g_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad d_{(w,z)}g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d_{(w,z)}g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_{(w,z)}g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ le champ constant de 3-plans $Vect(e_1, e_3, e_4)$ orientés grâce à la 3-forme $e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$. Là encore, ce champ passe au quotient sur $S_{N,p,q,r}^- = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_{N,p,q,r}^-$ en un champ de 3-plans orientés noté P_{134} .

Pour tout vecteur X de $\mathbb{C} \simeq Vect(e_3, e_4)$, on note $R_\theta(X)$ la rotation d'angle θ du vecteur X dans le plan \mathbb{C} . Sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, on considère les deux champs de vecteurs définis par :

$$\begin{cases} X_3(w, z) &= R_{\frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}}(e_3) \\ X_4(w, z) &= R_{\frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}}(e_4) \end{cases}$$

Montrons que X_3 passe au quotient par l'action de g_0 :

$$\begin{aligned} X_3(g_0(w, z)) &= X_3(\alpha w, -z) \\ &= R_{\frac{\ln(Im \alpha w)}{\ln \alpha}}(e_3) \\ &= R_{\frac{\ln(Im w) + \ln \alpha}{\ln \alpha}}(e_3) \\ &= R_{\frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}}(e_3) \\ &= -R_{\frac{\ln(Im w)}{\ln \alpha}}(e_3) \\ &= -X_3(w, z) \\ &= d_{(w,z)}g_0(X_3(w, z)) \end{aligned}$$

On montre ainsi que les vecteurs (X_3, X_4) passent au quotient en deux champs de vecteurs sur $S_{N,p,q,r}^- = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_{N,p,q,r}^-$. On peut alors définir X_1 le champ unitaire de P_{134} tel que X_1 soit orthogonal à $Vect(X_3, X_4)$ et tel que (X_1, X_3, X_4) soit une famille orientée de P_{134} . Enfin, on note X_2 le champ de vecteurs unitaire orthogonal à P_{134} tel que (X_1, X_2, X_3, X_4) soit une famille orientée.

On a ainsi défini une base de champs de vecteurs (X_1, X_2, X_3, X_4) sur $S_{N,p,q,r}^-$. Les surfaces d'Inoue de troisième type sont donc bien parallélisables. \square

Remarque sur la parallélisabilité des surfaces d'Inoue

On sait depuis l'article de Wall [Wal86] (lire aussi [Bel00], [Kli98]) qu'à revêtement fini près les surfaces d'Inoue sont toutes des solvsurfaces affines, c'est-à-dire

des quotients de la forme $\Gamma \backslash G$, où G est un sous-groupe résoluble du groupe affine et Γ un réseau cocompact de G . Comme une base de champs de vecteurs invariants à gauche sur G descend en une base de champs de vecteurs sur $\Gamma \backslash G$, toute solvsurface affine est parallélisable. On obtient ainsi directement la parallélisabilité des surfaces d'Inoue de type $S_{N,p,q,r;t}^+$ pour lesquelles le paramètre t n'est pas réel. Mais ce raisonnement ne marche pas pour les autres surfaces.

Les surfaces hyperelliptiques sont spin

Pour les surfaces hyperelliptiques, on a encore une description explicite ([BHPVdV04], Chap.V.5). Ainsi, soit \mathbb{T}_1 le tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ et \mathbb{T}_2 le tore \mathbb{C}/Γ , où Γ est un réseau de \mathbb{C} . On note z_1 et z_2 les coordonnées complexes sur \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 respectivement. À difféomorphisme près, une surface hyperelliptique est le quotient de $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ par un des groupes d'automorphismes G suivant :

Type	Γ	G	Action de G sur $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$
1	$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{2}, -z_2)$
2	$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{2}, -z_2) \\ g_2(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{i}{2}, z_2 + e_1) \text{ avec } 2e_1 = 0 \end{cases}$
3	$\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{3}, jz_2)$
4	$\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\begin{cases} g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{3}, jz_2) \\ g_2(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{j}{3}, z_2 + e_1) \text{ avec } je_1 = e_1 \end{cases}$
5	$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{4}, iz_2)$
6	$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{4}, iz_2) \\ g_2(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{i}{2}, z_2 + e_1) \text{ avec } ie_1 = e_1 \end{cases}$
7	$\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$g_1(z_1, z_2) = (z_1 - \frac{1}{6}, -jz_2)$

Comme pour les surfaces d'Inoue, on construit explicitement une base de champs de vecteurs. Le premier tore \mathbb{T}_1 est le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Le deuxième tore est le quotient $\mathbb{T}_2 = \mathbb{C}/\Gamma$. On note

ici (e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ et R_θ la rotation d'angle θ dans le plan $\mathbb{C} \simeq Vect(e_3, e_4)$. On définit sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ les quatre champs de vecteurs :

$$\begin{cases} X_1(z_1, z_2) = e_1 \\ X_2(z_1, z_2) = e_2 \\ X_3(z_1, z_2) = R_{2\pi Re z_1}(e_3) \\ X_4(z_1, z_2) = R_{2\pi Re z_1}(e_4) \end{cases}$$

Ces champs passent naturellement au quotient en quatre champs sur $\mathbb{T}_1 \oplus \mathbb{T}_2$, quelque soit le réseau Γ définissant $\mathbb{T}_2 = \mathbb{C}/\Gamma$. De plus, quelque soit le type de la surface hyperelliptique, ces champs passent au quotient sur $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2/G$. Par exemple pour le type 7 :

$$\begin{aligned} X_3(g_1(z_1, z_2)) &= X_3(z_1 - \frac{1}{6}, -jz_2) \\ &= R_{2\pi Re(z_1 - \frac{1}{6})}(e_3) \\ &= R_{-\frac{2\pi}{6} + 2\pi Re z_1}(e_3) \\ &= -j \cdot R_{2\pi Re z_1}(e_3) \\ &= -j \cdot X_3(z_1, z_2) \\ &= d_{(z_1, z_2)} g_1(X_3(z_1, z_2)) \end{aligned}$$

On a ainsi construit une base de champs de vecteurs sur chaque surface hyperelliptique :

Proposition 6 : *Les surfaces hyperelliptiques sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

Les surfaces de Hopf secondaires sont spin

Kato a beaucoup étudié les surfaces de Hopf secondaires [Kat75], [Kat89]. Mais nous préférons ici utiliser les notations de [MN00]. On rappelle ici les principaux résultats de Kato qui nous seront utiles pour la suite.

Une surface de Hopf S est le quotient de $\mathbb{C}^{2*} = \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$ par un groupe d'automorphismes G , dont l'action est propre, discontinue et sans point fixe :

$$S = \mathbb{C}^{2*}/G.$$

On note (z_1, z_2) un système de coordonnées sur \mathbb{C}^2 . À biholomorphisme près, Kato a montré qu'on peut toujours supposer que $G \subset GL(\mathbb{C}^2)$ sauf si G est le groupe engendré par les applications :

$$\begin{cases} g(z_1, z_2) = (\alpha^n z_1 + \lambda z_2^n, \alpha z_2) \\ h(z_1, z_2) = (a^n z_1, z_2) \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} (\alpha, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \\ 0 < |\alpha| < 1 \\ a \text{ est une racine primitive } m^{\text{ième}} \text{ de l'unité} \\ m, n \text{ sont des entiers premiers entre eux et } m, n \geq 2 \end{cases}$$

Mais dans ce cas, Kato a montré qu'on peut déformer ces surfaces et se ramener ainsi à $\lambda = 0$. À difféomorphisme près, il suffit donc d'étudier les surfaces de Hopf secondaires pour lesquelles $G \subset GL(\mathbb{C}^2)$.

On note $H = \{g \in G / |\det(g)| = 1\}$, on a alors la suite exacte :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Définition : On dit que G est décomposable si $G = \mathbb{Z} \times H$. Sinon, on dit que G est indécomposable.

Notation on utilise les notations suivantes pour les sous-groupes de $SU(2)$ d'ordre fini :

$A_n \subset SU(2)$ est le groupe cyclique d'ordre n . Il est engendré par la matrice $\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi}{n}} \end{pmatrix}$.

$B_n \subset SU(2)$ est le groupe diédral d'ordre $4n$. Il est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{n}} \end{pmatrix}$.

$C \subset SU(2)$ est le groupe tétraédral. C'est le groupe d'ordre 24 engendré par les matrices $\begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi^{-2} \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^3 & \xi^3 \\ \xi & -\xi \end{pmatrix}$, avec $\xi = e^{\frac{i\pi}{4}}$.

On note α, β, γ des nombres complexes dont le module appartient à l'intervalle $]0, 1[$, et on note a une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

(1) Si G est décomposable et abélien, le groupe G est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $m \geq 2$ et G est alors engendré par :

(A) $g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \beta z_2)$ et $h(z_1, z_2) = (az_1, a^n z_2)$ où $\text{pgcd}(m, n) = 1$, ou

(B) $g(z_1, z_2) = (\alpha z_1 + z_2, \alpha z_2)$ et $h(z_1, z_2) = (az_1, az_2)$.

(2) Si G est décomposable mais non abélien, le groupe G est isomorphe à $\mathbb{Z} \times H$.

Où H est un sous-groupe d'indice fini de $U(2)$ qui opère librement sur \mathbb{S}^3 .

Le groupe G est alors engendré par :

$$g = \gamma Id \text{ et les éléments de } H.$$

- (3) Si G est indécomposable, alors dans les cas (D1) jusqu'à (D6) (voir ci-dessous), le groupe G est :

$$G = G_0 \cup gG_0, \quad G_0 = \langle \gamma^2 Id \rangle \times H \text{ et } g = \gamma u.$$

Dans le cas (D7), le groupe G est :

$$G = G_0 \cup gG_0 \cup g^2G_0, \quad G_0 = \langle \gamma^3 Id \rangle \times H \text{ et } g = \gamma u.$$

Voici les différents cas qui peuvent arriver.

- (D1) H est le sous-groupe de $U(2)$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ et u est l'endomorphisme $\begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Avec $n \not\equiv n^2 \equiv 1 \pmod{m}$ et $t \in \mathbb{C}^*$. À difféomorphisme près, on peut supposer que $t = 1$ [Kat75].
- (D2) H est le sous-groupe de $U(2)$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ et u est l'endomorphisme $\begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Avec m de la forme $2(2l+1) \geq 6$ et $t \in \mathbb{C}^*$. À difféomorphisme près, on peut supposer que $t = 1$ [Kat75].
- (D3) $H = \langle aId \rangle \times B'_{2^k(2l+1)}$ et u est l'endomorphisme $\begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Avec $\text{pgcd}(2^k(2l+1), m) = 1$, $2l+1 \geq 3$ et $k \geq 3$. On note ici $B'_{2^k(2l+1)} \subset U(2)$ le groupe engendré par les matrices $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix}$, avec s d'ordre $2l+1$ et d d'ordre 2^k . Enfin $t^2 = (-s)^k$ et $t \neq 1$.
- (D4) $H = \langle aId \rangle \times B_n$ et u est l'endomorphisme $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{n}} \end{pmatrix}$. Avec $n \geq 3$ et $\text{pgcd}(m, 4n) = 1$.
- (D5) $H = \langle aId \rangle \times B_2$ et u est l'endomorphisme $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$. Avec $\text{pgcd}(m, 2) = 1$.
- (D6) $H = \langle aId \rangle \times C$ et u est l'endomorphisme $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$.
- (D7) $H = \langle aId \rangle \times B_2$ et u est l'endomorphisme $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{3i\pi}{4}} & e^{\frac{3i\pi}{4}} \\ e^{\frac{i\pi}{4}} & -e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$.

Ceci fini les rappels sur les surfaces de Hopf secondaires. On va maintenant montrer qu'elles sont toutes parallélisables. Dans le cas où G est décomposable, la surface de Hopf associée est diffeomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3/H$ [Kat75]. Toutes ces surfaces sont donc parallélisables. Dans le cas où G est indécomposable, la variété $S = \mathbb{C}^{2*}/G$ est un fibré au-dessus de \mathbb{S}^1 dont la fibre est diffeomorphe à \mathbb{S}^3/H . Dans tous les cas (D1),..., (D7) la variété S s'obtient comme la suspension au-dessus de $[0, 1]$ de l'application $u : \mathbb{S}^3/H \longrightarrow \mathbb{S}^3/H$. C'est ce cas qu'il faut étudier en détail.

Commençons par construire une base de champs de vecteurs sur \mathbb{S}^3/H . Pour cela, on identifie \mathbb{R}^4 au corps des quaternions \mathbb{H} de sorte que la sphère \mathbb{S}^3 s'identifie à l'ensemble des quaternions de norme 1 :

$$\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H} / |q| = 1\}.$$

Pour tout $q \in \mathbb{S}^3$, on a alors :

$$T_q\mathbb{S}^3 = Vect(iq, jq, kq).$$

Soit h un élément du groupe $H \subset U(2)$. On note $d_q h$ la différentielle de l'application $h : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$ au point q :

$$d_q h : T_q\mathbb{S}^3 \longrightarrow T_{h(q)}\mathbb{S}^3.$$

Comme h est \mathbb{C} -linéaire, on a :

$$\begin{cases} d_q h = h \\ d_q h(iU) = id_q h(U), \forall U \in T_q\mathbb{S}^3. \end{cases}$$

On définit sur \mathbb{S}^3 le champ de vecteurs :

$$Y_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & T\mathbb{S}^3 \\ q & \longmapsto & iq \end{array}.$$

Ce champ de vecteurs passent au quotient sur \mathbb{S}^3/H . En effet $\forall h \in H$:

$$Y_1(h(q)) = d_q h(Y_1(q)).$$

De plus, on a la décomposition en somme directe orthogonale :

$$T_q\mathbb{S}^3 = Vect(iq) \oplus^\perp Vect(jq, kq).$$

Comme les éléments de H sont des isométries de \mathbb{R}^4 , on en déduit que le champ de plans :

$$P_{23} : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & T\mathbb{S}^3 \\ q & \longmapsto & Vect(jq, kq). \end{array}$$

passé aussi au quotient en un champ de plans sur \mathbb{S}^3/H . On peut également voir P_{23} comme un champ de \mathbb{C} -droites. Comme \mathbb{S}^3/H est parallélisable, on peut choisir $(Y_2(q), Y_3(q))$ une base orthonormée de champs de vecteurs de P_{23} telle que $Y_3 = iY_2$. On a ainsi construit (Y_1, Y_2, Y_3) une base de champs de vecteurs sur \mathbb{S}^3 qui passent au quotient par l'action du groupe H .

Pour simplifier l'écriture, on utilise la même notation pour un point de \mathbb{S}^3 et son image dans \mathbb{S}^3/H . On considère maintenant la suspension au-dessus de $[0, 1]$ de l'application $u : \mathbb{S}^3/H \rightarrow \mathbb{S}^3/H$. Cette application dépend du groupe H considéré. Mais dans tous les cas, elle est \mathbb{C} -linéaire. Le champ de vecteurs Y_1 est donc invariant par la suspension :

$$Y_1(u(q)) = d_q u(Y_1(q)).$$

De plus dans tous les cas, l'application u est une isométrie de \mathbb{R}^4 . En effet c'est immédiat dans les cas (D3),..., (D7) et dans les deux premiers cas, on peut à difféomorphisme près choisir $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le champ de \mathbb{C} -droites $Vect(Y_2, Y_3)$ est donc lui aussi invariant par u :

$$\begin{array}{ccc} d_q u : & T_q \mathbb{S}^3/H & \longrightarrow & T_{u(q)} \mathbb{S}^3/H \\ & Vect(Y_2(q), Y_3(q)) & \longrightarrow & Vect(Y_2(u(q)), Y_3(u(q))) \end{array}$$

Comme u est une isométrie \mathbb{C} -linéaire et que les bases $(Y_2(q), Y_3(q))$ et $(Y_2(u(q)), Y_3(u(q)))$ sont orthonormées, la matrice de $d_q u$ dans ces bases est la multiplication par un nombre complexe $x(q)$ de module 1 :

$$\begin{array}{ccc} d_q u : & Vect(Y_2(q), Y_3(q)) & \longrightarrow & Vect(Y_2(u(q)), Y_3(u(q))) \\ & Y_2(q) & \longmapsto & x(q)Y_2(u(q)) \\ & Y_3(q) & \longmapsto & x(q)Y_3(u(q)) \end{array}$$

On peut alors considérer les champs de vecteurs sur $[0, 1] \times \mathbb{S}^3/H$ définis par :

$$\begin{cases} X_1(t, q) = Y_1(q) \\ X_2(t, q) = x(u^{-1}(q))^t \cdot Y_2(q) \\ X_3(t, q) = x(u^{-1}(q))^t \cdot Y_3(q) \end{cases}$$

Par définition on a alors :

$$\begin{cases} X_1(0, q) = Y_1(q) \\ X_2(0, q) = Y_2(q) \\ X_3(0, q) = Y_3(q) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} X_1(1, u(q)) = Y_1(u(q)) = d_q u(X_1(0, q)) \\ X_2(1, u(q)) = x(q)Y_2(u(q)) = d_q u(X_2(0, q)) \\ X_3(1, u(q)) = x(q)Y_3(u(q)) = d_q u(X_3(0, q)) \end{cases}$$

On vient de construire trois champs de vecteurs invariants par la suspension. Si on note $X_4(t, q) = \frac{\partial}{\partial t}$, le champ de vecteurs constant tangent à la variable t . On a une base de champs de vecteurs sur toutes surfaces de Hopf secondaires.

Proposition 7 : *Les surfaces de Hopf secondaires sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

5.3 Surfaces complexes parallélisables

Grâce au théorème de la section précédente, il est maintenant facile de donner la liste complète des surfaces complexes parallélisables, c'est-à-dire à fibré tangent topologiquement trivial. Ce résultat est un peu plus précis que celui de Yau [Yau76], dans la mesure où il donne non pas les surfaces complexes susceptibles d'être parallélisables, mais toutes les surfaces parallélisables. Dans ce théorème, on note b_1 le premier nombre de Betti d'une surface et χ sa caractéristique d'Euler.

Théorème 2 : *Les seules surfaces compactes complexes S parallélisables en tant que variétés réelles sont :*

$$Kod(S) = -\infty : \begin{cases} \text{Les surfaces réglées de genre un qui sont spin} \\ \text{Les surfaces de Hopf} \\ \text{Les surfaces d'Inoue} \end{cases}$$

$$Kod(S) = 0 : \begin{cases} \text{Les tores} \\ \text{Les surfaces hyperelliptiques} \\ \text{Les surfaces de Kodaira primaires} \\ \text{Les surfaces de Kodaira secondaires qui sont spin} \end{cases}$$

$$Kod(S) = 1 : \begin{cases} \text{Les surfaces minimales spin avec } b_1 \text{ impair} \\ \text{Les surfaces minimales spin avec } b_1 \text{ pair et } \chi = 0. \end{cases}$$

$$Kod(S) = 2 : \text{Aucune surface.}$$

Preuve. Une variété parallélisable est une variété presque quaternionique dont la caractéristique d'Euler est nulle. Par rapport au théorème précédent, il nous faut donc éliminer les surfaces $K3$ puisque $\chi = 24$ et certaines surfaces de dimension de Kodaira un. \square

5.4 Variétés de dimension quatre parallélisables sans structure complexe dont l'espace twistoriel est complexe

Comme application on peut construire une famille d'exemples simples de variétés parallélisables mais qui ne possèdent pas de structure complexe. De tels exemples existaient déjà mais restaient assez isolés ou peu explicites [Yau76], [Bro78].

Définition : *Une variété H est hyperbolique si elle peut être munie d'une métrique à courbure sectionnelle constante égale à -1 . Si H est de dimension n , son revêtement universel riemannien est donc l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .*

Théorème 3 : *Pour toute 3-variété compacte hyperbolique orientable H , le produit $H \times \mathbb{S}^1$ est une 4-variété parallélisable sans structure complexe.*

L'espace twistoriel de ces variétés munies d'une métrique adéquate forment la classe d'exemples cherchée.

Théorème 4 : *Pour toute 3-variété compacte hyperbolique orientable H , il existe une structure complexe sur le produit $H \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.*

La théorie des espaces twistoriels nous a donc permis comme espéré de mettre une structure complexe sur des produits du type $M \times \mathbb{S}^2$ où M est une variété sans structure complexe.

Remarque : *La dimension de Kodaira de $H \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ est $-\infty$ et sa dimension algébrique est zéro (cf. section 3.3.3 et 3.3.4).*

5.4.1 Démonstration du théorème 3

Si H est une 3-variété hyperbolique orientable compacte, elle est parallélisable donc $H \times \mathbb{S}^1$ aussi. Le point le plus difficile est de montrer que ce produit n'admet aucune structure complexe. Pour cela on utilise le théorème 2 et les propriétés du groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte. Par les théorèmes

de Preissman et de Byers [dC92], on sait que le groupe fondamental de H , noté $\pi_1(H)$, n'est pas abélien et que les seuls sous-groupes résolubles non triviaux de $\pi_1(H)$ sont infinis cycliques. En particulier, il est sans torsion et n'admet pas de sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 .

Voilà en résumé l'idée de la preuve. Si $H \times \mathbb{S}^1$ admet une structure complexe alors c'est une des surfaces du théorème 2. En étudiant les groupes fondamentaux des différentes surfaces complexes on montre que $H \times \mathbb{S}^1$ ne peut être ni une surface de Hopf primaire ($\pi_1 = \mathbb{Z}$), ni une surface de Hopf secondaire (quotient fini d'une Hopf primaire), ni une surface d'Inoue (π_1 résoluble), ni une surface réglée de genre un ($\pi_1 = \mathbb{Z}^2$), ni un tore ($\pi_1 = \mathbb{Z}^4$), ni une des autres surfaces ($\pi_1 \supset \mathbb{Z}^3$) :

Surfaces compactes parallélisables	Kod(S)	a(S)	$\pi_1(S)$
surfaces de Hopf	$-\infty$	0 ou 1	\mathbb{Z} d'indice fini
Inoue	$-\infty$	1	résoluble
Surfaces réglées de genre un spin	$-\infty$	2	\mathbb{Z}^2
Tores	0	0, 1 ou 2	\mathbb{Z}^4
Hyperelliptiques	0	2	contient un \mathbb{Z}^3
Surfaces de Kodaira spin	0	1	contient un \mathbb{Z}^3
Proprement elliptiques spin et $\chi = 0$	1	1 ou 2	contient un \mathbb{Z}^3

Il faut donc étudier un par un les différents groupes fondamentaux des variétés du théorème 2. Avant cela on rappelle rapidement la définition d'un groupe résoluble.

Groupe résoluble

Soit G un groupe, on note $D(G) = [G, G]$ le groupe engendré par les commutants $[g_i, g_j]$ où g_i, g_j sont des éléments de G , c'est le groupe dérivé de G . On dit que le groupe G est résoluble si la suite $D^{i+1}G = [D^iG, D^iG]$ finit par être constante égale au neutre de G . Un groupe abélien est donc en particulier résoluble.

Surfaces de Hopf

Une surface complexe S est dite de Hopf si son revêtement universel est $\mathbb{C}^2 - \{0, 0\}$. On parle de surface de Hopf primaire lorsque S est difféomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. Son groupe fondamental est alors \mathbb{Z} . On montre que toute surface de Hopf admet un revêtement fini non ramifié qui est une Hopf primaire. On parle alors de Hopf secondaire [FM94], [BHPVdV04].

Conclusion : *La surface $\mathbb{S}^1 \times H$ ne peut être une surface de Hopf primaire sinon son groupe fondamental serait abélien. Ce n'est pas non plus une surface de Hopf secondaire sinon son groupe fondamental aurait \mathbb{Z} comme sous-groupe d'indice*

fini tandis que le π_1 de $\mathbb{S}^1 \times H$ contient un \mathbb{Z}^2 .

Surfaces d'Inoue de premier type : S_M

On a une présentation explicite du groupe fondamental des surfaces d'Inoue [Ino74]. Il est alors immédiat de voir que, dans tous les cas, c'est un groupe résoluble. Nous donnons ici une démonstration pour le lecteur intéressé.

Proposition 8 : *Le groupe fondamental de S_M est résoluble.*

Preuve. Comme $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ est simplement connexe, le groupe fondamental de la surface $S_M = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_M$ est le groupe G_M . Or les générateurs g_0, g_1, g_2, g_3 de G_M vérifient les relations [Ino74] :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i g_j = g_j g_i \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \\ g_0 g_i g_0^{-1} = g_1^{m_{i1}} g_2^{m_{i2}} g_3^{m_{i3}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} [g_0, g_1] = g_1^{m_{i1}-1} g_2^{m_{i2}} g_3^{m_{i3}} \\ [g_0, g_2] = g_1^{m_{i1}} g_2^{m_{i2}-1} g_3^{m_{i3}} \\ [g_0, g_3] = g_1^{m_{i1}} g_2^{m_{i2}} g_3^{m_{i3}-1} \end{array} \right.$$

On note $D(G)$ le groupe dérivé de G . Par définition il est engendré par les $[g_i, g_j]$ où i et j varient dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. On a donc :

$$D(G) \subset \langle g_1, g_2, g_3 \rangle,$$

où $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ est le groupe engendré par les éléments g_1, g_2 et g_3 . Le groupe dérivé $D(G)$ est abélien donc $D^2G = \{1\}$.

Le groupe fondamental d'une surface d'Inoue de premier type est bien résoluble. \square

Surfaces d'Inoue de deuxième type : $S_{N,p,q,r;t}^+$

De même, on a la proposition :

Proposition 9 : *Le groupe fondamental de $S_{N,p,q,r;t}^+$ est résoluble.*

Preuve. Le groupe fondamental de la surface $S_{N,p,q,r;t}^+$ est le groupe $G_{N,p,q,r;t}^+$. Or les générateurs g_0, g_1, g_2, g_3 de $G_{N,p,q,r;t}^+$ vérifient les relations [Ino74] :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i g_3 = g_3 g_i \quad \forall i \in \{0, 1, 2\} \\ g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = g_3^r \\ g_0 g_1 g_0^{-1} = g_1^{n_{11}} g_2^{n_{12}} g_3^p \\ g_0 g_2 g_0^{-1} = g_1^{n_{21}} g_2^{n_{22}} g_3^q \end{array} \right.$$

Ces relations nous donnent en particulier que :

$$D(G) \subset \langle g_1, g_2, g_3 \rangle .$$

La deuxième relation peut aussi s'écrire $[g_1, g_2] = g_3^r$ donc :

$$D^2G \subset \langle g_3 \rangle .$$

Comme D^2G est abélien, on a $D^3G = 1$.

Le groupe fondamental d'une surface d'Inoue de deuxième type est bien résoluble.
□

Surfaces d'Inoue de troisième type : $S_{N,p,q,r}^-$

Pour les surfaces d'Inoue de troisième type, on a encore le même résultat.

Proposition 10 : *Le groupe fondamental de $S_{N,p,q,r}^-$ est résoluble.*

Preuve. Le groupe fondamental d'une surface de la surface $S_{N,p,q,r}^-$ est le groupe $G_{N,p,q,r}^-$. Or les générateurs g_0, g_1, g_2, g_3 de $G_{N,p,q,r}^-$ vérifient les relations [Ino74] :

$$\begin{cases} g_i g_3 = g_3 g_i & \forall i \in \{1, 2\} \\ g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 = g_3^r \\ g_0 g_1 g_0^{-1} = g_1^{n_{11}} g_2^{n_{12}} g_3^p \\ g_0 g_2 g_0^{-1} = g_1^{n_{21}} g_2^{n_{22}} g_3^q \\ g_0 g_3 g_0^{-1} = g_3^{-1} \end{cases}$$

Comme précédemment, ces relations nous donnent :

$$D(G) \subset \langle g_1, g_2, g_3 \rangle .$$

Des deux premières relations on en déduit que :

$$D^2G \subset \langle g_3 \rangle .$$

Et enfin, comme D^2G est abélien, on a $D^3G = 1$.

Le groupe fondamental d'une surface d'Inoue de troisième type est bien résoluble.
□

Conclusion : *Quelque soit le type de la surface d'Inoue, son groupe fondamental est résoluble. Si la variété $\mathbb{S}^1 \times H$ est une surface complexe, ce n'est pas une surface d'Inoue car son groupe fondamental n'est pas résoluble.*

Surfaces réglées de genre un

Une surface réglée de genre un est une surface S qui admet une fibration lisse localement triviale de fibre $\mathbb{C}P^1$ au-dessus d'une courbe elliptique [FM94],

[BHPVdV04]. Topologiquement la fibration s'écrit $S \xrightarrow{\mathbb{S}^2} \mathbb{T}^2$. On a donc la suite exacte :

$$0 = \pi_1(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2) \longrightarrow 0.$$

Le groupe fondamental d'une surface réglée de genre un est le groupe \mathbb{Z}^2 .

Conclusion : *Le produit $\mathbb{S}^1 \times H$ ne peut donc pas être une surface réglée de genre un, puisque le groupe fondamental de H n'est pas abélien.*

Tore

Le groupe fondamental d'un tore est \mathbb{Z}^4 .

Conclusion : *Si la variété $\mathbb{S}^1 \times H$ est complexe, ça ne peut pas être un tore puisque le groupe fondamental de H n'est pas abélien.*

Surfaces elliptiques parallélisables

Les autres surfaces du théorème 2 sont toutes des surfaces de dimension algébrique un ou deux [BHPVdV04]. Ce sont donc des surfaces elliptiques. Pour conclure, il ne reste qu'à éliminer cette dernière possibilité. Pour cela, on rappelle quelques propriétés des surfaces elliptiques [FM94], [BHPVdV04].

Si S est une surface elliptique elle admet une surjection holomorphe $\pi : S \longrightarrow C$ dont la fibre générique est une courbe elliptique. Dans notre cas la caractéristique d'Euler est nulle (S est parallélisable), donc la fibration est sans fibre singulière. La base C est une 2-orbifold, c'est-à-dire une 2-variété avec un ensemble de points spéciaux $\{t_1, \dots, t_k\}$ de multiplicité $\{m_1, \dots, m_k\}$. La fibre de $\pi : S \longrightarrow C$ au-dessus d'un point t_i est une fibre multiple de multiplicité m_i . Si S est parallélisable et de dimension de Kodaira 0 ou 1, alors avec la terminologie de [FM94], la base C est une orbifold plate ou hyperbolique, c'est-à-dire un quotient fini d'une surface de Riemann Σ_g de genre g supérieur ou égale à un. Notre variété S admet donc un revêtement fini $\tilde{S} \longrightarrow S$, où \tilde{S} est une surface elliptique au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 1$ sans fibre multiple : $\tilde{S} \longrightarrow \Sigma_g$. On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \pi_1(\tilde{S}) \longrightarrow \pi_1(\Sigma_g) \longrightarrow 0.$$

Le groupe de monodromie de \tilde{S} agit par automorphismes analytiques sur la fibre, qui est une courbe elliptique. À isotopie près, il est donc fini. Quitte à prendre un nouveau revêtement, on peut supposer que notre fibration est à monodromie triviale.

Lemme : *Le groupe fondamental de la fibre (\mathbb{Z}^2) est alors central dans celui de \tilde{S} .*

Preuve. Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Sigma_g$ un lacet de la base. On note ϕ l'automorphisme du groupe de monodromie associé au lacet γ . Si on restreint le fibré $\pi : \tilde{S} \longrightarrow \Sigma_g$ au lacet γ , la fibration obtenue est la suspension de ϕ au-dessus de $[0, 1]$. Comme la monodromie est triviale, ce fibré est topologiquement trivial. Le groupe fondamental de la fibre commute donc avec l'élément γ et cela pour tout lacet de la base. Le groupe fondamental de la fibre est bien central dans celui de \tilde{S} . \square

Si on prend le sous-groupe de $\pi_1(\tilde{S})$ engendré par un élément du π_1 de la base et par le π_1 de la fibre, on obtient un groupe abélien isomorphe à \mathbb{Z}^3 . Le groupe fondamental de \tilde{S} admet bien un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^3 .

Conclusion : *Le produit $\mathbb{S}^1 \times H$ ne peut donc pas être une surface elliptique parallélisable de dimension de Kodaira 0 ou 1, sinon $H \times \mathbb{S}^1$ admettrait \tilde{S} comme revêtement fini. Son groupe fondamental contiendrait un \mathbb{Z}^3 . Ce qui est impossible, puisque le groupe fondamental de H ne contient pas de \mathbb{Z}^2 .*

5.4.2 Démonstration du théorème 4

On peut toujours munir H d'une métrique hyperbolique c'est-à-dire d'une métrique à courbure sectionnelle constante égale à -1 . Dans la section 1.5.2, on a montré que la métrique produit sur $H \times \mathbb{S}^1$ était localement conformément plate. L'espace twistoriel associé à cette variété riemannienne orientée admet donc une structure complexe. De plus, cet espace twistoriel est difféomorphe au produit $H \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ puisque $H \times \mathbb{S}^1$ est parallélisable. \square

Chapitre 6

3-variété complexe de deuxième type

En regardant le quotient du fibré $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ par une action holomorphe de \mathbb{Z}^4 bien choisie, Blanchard [Bla56] a mis une structure complexe non kählerienne sur le produit $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$ d'un tore \mathbb{T}^4 avec la sphère \mathbb{S}^2 . Cette structure complexe n'est pas une déformation de la structure complexe produit, en ce sens on peut parler d'une structure complexe exotique. Cette structure complexe exotique est précisément la structure d'espace twistoriel d'un tore plat : $\tau(\mathbb{T}^4) \simeq \mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$.

Lorsque (M, g) est compacte et que la métrique g est anti-autoduale, la structure presque complexe sur $\tau(M, g)$ est intégrable. Dans ce cas Hitchin a montré que si $\tau(M, g)$ est Kähler alors M est la sphère \mathbb{S}^4 ou le plan projectif $\overline{\mathbb{C}P^2}$ munis de leur métrique standard. D'autre part si M est une surface complexe presque quaternionique, on montrera que la structure complexe sur $\tau(M)$ n'est jamais une déformation de la structure complexe produit $M \times \mathbb{C}P^1$. On a alors une structure non standard sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$. Tout ceci nous motive donc à trouver des exemples de 4-variétés (M, g) tels que :

- (i) M admet une structure complexe
- (ii) le fibré twistoriel de M est topologiquement trivial
- (iii) la métrique g est anti-autoduale.

On sait déjà qu'une surface K3 munie de sa métrique de Calabi-Yau, ou que la surface $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ munie de sa métrique produit sont des exemples qui, comme les tores plats, vérifient les trois conditions. Mais il faut bien noter qu'ici, la condition (iii) ne demande pas à la métrique d'être hermitienne, contrairement à l'approche de Boyer ou de Pontecorvo par exemple. Cette condition est beaucoup moins restrictive puisqu'alors la métrique n'a plus aucun lien avec la structure complexe. J'insiste sur ce point car les techniques développées ici sont du coup très différentes de celles du cas hermitien. Pour donner un exemple, il existe des

surfaces de Hopf sans aucune métrique hermitienne anti-autoduale mais munies d'une infinité de métriques riemanniennes anti-autoduales.

6.1 Structure complexe non standard

6.1.1 Kähler

Hitchin a montré que les espaces twistoriels ne sont presque jamais des variétés kähleriennes. Plus précisément :

Théorème [Hit81] : *Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée. Son espace twistoriel admet une métrique kählerienne si et seulement si M est conformé-ment équivalent à la sphère ronde \mathbb{S}^4 ou au plan projectif complexe $\overline{\mathbb{C}P^2}$ où on a renversé l'orientation et muni de la métrique de Fubini-Study.*

6.1.2 Déformation

Soit (M, g) une surface complexe presque quaternionique. Son espace twistoriel Z est diffeomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$. On peut alors munir Z de la structure complexe produit ou de la structure canonique d'espace twistoriel. Sous ces hypothèses on a le résultat suivant.

Proposition 1 : *La structure presque complexe d'espace twistoriel n'est jamais une déformation de la structure complexe produit.*

Preuve. Comme (M, g) est presque quaternionique, son espace twistoriel Z est diffeomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$. Son deuxième groupe de cohomologie de De Rham est donc :

$$H^2(Z, \mathbb{Z}) = H^2(M, \mathbb{Z}) \oplus H^2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}).$$

On note h le générateur du $H^2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z})$.

L'espace twistoriel de (M, g) est muni d'une structure presque complexe canonique J_{et} dont on a déjà calculé les classes de Chern notée $c_i(J_{et})$ (cf section 3.3.2). En particulier $c_1(J_{et}) = 4h$. Lorsque M est une surface complexe, on peut munir la variété $Z \simeq M \times \mathbb{S}^2$ de la structure complexe produit J_p . On veut comparer les classes de Chern de ces deux structures complexes. Pour cela, on note $c_1(M)$ et $c_2(M)$ les classes de Chern de la surface M et $c_i(J_p)$ les classes de Chern sur $M \times \mathbb{S}^2$ munie de la structure complexe produit J_p :

$$\begin{cases} c_1(J_p) = c_1(M) + 2h \\ c_2(J_p) = c_2(M) + 2hc_1(M) \\ c_3(J_p) = 2hc_2(M) \end{cases}$$

Si on pouvait déformer la structure complexe d'espace twistoriel J_{et} de Z en la structure complexe produit J_p , les classes de Chern seraient les mêmes. Mais $c_1(J_{et})$ est divisible par quatre contrairement à $c_1(J_p)$.

La structure d'espace twistoriel n'est donc jamais une déformation de la structure produit. \square

6.2 Résolution du problème pour les métriques d'Einstein

On rappelle que le but de ce chapitre est de déterminer l'ensemble des 4-variétés riemanniennes orientées (M, g) compactes connexes telles que :

- (i) M admet une structure complexe
- (ii) M est presque quaternionique
- (iii) la métrique g est anti-autoduale.

On ajoute ici une contrainte : on demande à la métrique d'être Einstein. Dans ce cas, le problème a été résolu par Hitchin, ou du moins se déduit directement du théorème 1 dans [Hit74a] :

Théorème [Hit74a] : *Soit (M, g) une 4-variété orientée munie d'une métrique d'Einstein et dont la signature et la caractéristique d'Euler vérifie : $3\tau + 2\chi = 0$, alors :*

- a) *soit M est plat*
- b) *soit le revêtement universel de M est une surface K3.*

Une 4-variété presque quaternionique est une 4-variété spin qui vérifie $3\tau + 2\chi = 0$. Or les seules surfaces complexes munies d'une métrique plate sont les tores et les surfaces hyperelliptiques. Un peu plus faible que le théorème d'Hitchin on a donc :

Proposition 2 : *Les seules surfaces compactes complexes presque quaternioniques munies d'une métrique anti-autoduale et d'Einstein sont :*

- a) *les tores*
- b) *les surfaces hyperelliptiques*
- c) *les surfaces K3.*

Nous donnons ici la démonstration originale du théorème d'Hitchin. C'est une très jolie démonstration qui nécessite quelques rappels de théorie harmonique [Pet98].

6.2.1 Formes harmoniques et parallèles

Soit (M, g) une 4-variété riemannienne compacte et $\Omega^k(M)$ l'ensemble des k -formes sur M . On note $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ l'opérateur de dérivation et $\delta : \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ l'opérateur adjoint de d . Enfin on note $\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ le laplacien sur M .

Définition : Une k -forme est harmonique si et seulement si son laplacien est nul. On note $\mathcal{H}^k(M)$ l'ensemble des k -formes harmoniques.

Une k -forme w est harmonique si et seulement si elle est fermée ($dw = 0$) et cofermée ($\delta w = 0$). En effet pour toute k -forme w on a :

$$\begin{aligned} g(\Delta w, w) &= g(d\delta w, w) + g(\delta dw, w) \\ &= g(\delta w, \delta w) + g(dw, dw). \end{aligned}$$

On a donc $\Delta w = 0 \implies dw = 0$ et $\delta w = 0$. La réciproque est évidente. On a donc une application naturelle entre $\mathcal{H}^k(M)$ et le $k^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de De Rham $H^k(M, \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^k(M) & \longrightarrow & H^k(M, \mathbb{R}) \\ w & \longmapsto & w \end{array}$$

Théorème de Hodge [Pet98] : Cette application est un isomorphisme.

Soit (M, g) une variété riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-Civita. Pour toute 1-forme sur M , il existe un champ de vecteurs dual X tel que $w = g(X, \cdot)$.

Lemme : Une 1-forme est parallèle ($\nabla w = 0$) si et seulement si son champ dual l'est ($\nabla X = 0$).

Preuve. Par définition, une 1-forme w est parallèle si et seulement si pour tous champs de vecteurs Y et Z sur M on a :

$$(\nabla_Y w)(Z) = \nabla_Y(w(Z)) - w(\nabla_Y Z) = 0.$$

Mais si X est le champ dual de w alors :

$$\begin{aligned} \nabla_Y(w(Z)) - w(\nabla_Y Z) &= Y.g(X, Z) - g(X, \nabla_Y Z) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) - g(X, \nabla_Y Z) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) \end{aligned}$$

On a donc bien w parallèle si et seulement si X l'est. \square

Le théorème de Bochner fait le lien entre une 1-forme harmonique et une 1-forme parallèle sous certaines hypothèses sur la métrique.

Théorème de Bochner [Pet98] : Soit (M, g) une variété compacte orientée. On suppose que les valeurs propres du $(1,1)$ -tenseur de Ricci sont toutes positives ou nulles. Dans ce cas les 1-formes harmoniques sont parallèles.

On a maintenant tous les outils nécessaires pour démontrer la proposition 2.

6.2.2 Démonstration de la proposition 2

Soit M une surface complexe et g une métrique riemannienne anti-autoduale, qui est d'Einstein. On rappelle que la matrice de l'opérateur de courbure \mathcal{R} admet une décomposition par bloc (cf. section 1.1.2) :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{s}{12}Id & {}^tB \\ B & W^- + \frac{s}{12} \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations on a (cf. section 1.5.1) :

$$3\tau + 2\chi = \frac{1}{4\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 + \frac{1}{24}s^2 - 2\|B\|^2 \right) \mu_g.$$

Ici (M, g) est presque quaternionique donc $3\tau + 2\chi = 0$. De plus, la métrique est anti-autoduale ($W^+ = 0$) et d'Einstein ($B = 0$), la courbure scalaire de g doit donc être nulle.

Deux cas peuvent se produire. Soit $W^- = 0$ alors (M, g) est plat. Comme M est complexe, M est un tore ou une surface hyperelliptique. Soit $W^- \neq 0$ dans ce cas, la caractéristique d'Euler de M est strictement positive car :

$$\chi = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 + \|W^-\|^2 + \frac{1}{24}s^2 - \|B\|^2 \right) \mu_g = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \|W^-\|^2 \mu_g > 0.$$

On va montrer que le groupe fondamental de M est fini. Avant cela, on montre que son premier nombre de Betti b_1 est nul.

Si $b_1 \neq 0$ il existe une 1-forme fermée non exacte. Par le théorème de Hodge, il existe donc une 1-forme hamonique non nulle sur M . Mais comme la métrique g sur M est d'Einstein et à courbure scalaire nulle, l'opérateur de Ricci est donc nul. Par le théorème de Bochner toute 1-forme harmonique est parallèle. Par dualité, cette 1-forme parallèle peut-être vu comme un champ de vecteurs parallèle. Comme la 1-forme est non nulle, ce champ de vecteurs est non identiquement nul. Mais il est parallèle, sa norme est donc constante : c'est un champ de vecteurs partout non nul. On aboutit à la contradiction $\chi = 0$. On a donc bien $b_1 = 0$.

Soit $\tilde{M} \rightarrow M$ un recouvrement fini de degré k et \tilde{g} la métrique tirée en arrière sur \tilde{M} . On note $\tilde{\chi}$ et $\tilde{\tau}$ la caractéristique d'Euler et la signature de \tilde{M} . Comme $\tilde{M} \rightarrow M$ est un recouvrement de degré k on a $\tilde{\chi} = k\chi$ et $\tilde{\tau} = k\tau$. On a donc encore $3\tilde{\tau} + 2\tilde{\chi} = 0$. De plus, la métrique \tilde{g} est anti-autoduale et

d'Einstein. Le raisonnement précédent donne $b_1(\tilde{M}) = 0$. Pour conclure que le groupe fondamental de M est fini, on utilise le théorème suivant.

Théorème de Cheeger et Gromoll (cf. par exemple [Bes87]) : *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe dont les valeurs propres du $(1,1)$ -tenseur de Ricci sont positives ou nulles. Alors il existe un sous-groupe distingué F du $\pi_1(M)$ tel que $\pi_1(M)/F$ est une extension finie de \mathbb{Z}^q . De plus (M, g) admet un revêtement fini qui est le produit riemannien d'un tore \mathbb{T}^q par une variété.*

Ici la courbure de Ricci de la métrique g est nulle donc par ce théorème, on en déduit que seul deux cas peuvent se produire. Soit $\pi_1(M)$ est fini, avec les notations du théorème cela correspond à $q = 0$. Soit M admet un recouvrement fini par une variété \tilde{M} avec $b_1 \neq 0$. Ce deuxième cas ne peut pas se produire, le groupe fondamental de M est bien fini.

Quitte à prendre un revêtement fini de M , on peut supposer que M est simplement connexe. Or la matrice de l'opérateur de courbure $\mathcal{R} : \bigwedge^2 TM = \bigwedge^+ TM \oplus \bigwedge^- TM$ est de la forme :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W^- \end{pmatrix}.$$

La courbure du fibré $\bigwedge^+ TM \rightarrow M$ est donc nulle, comme M est simplement connexe, le fibré est trivial et on peut donc définir globalement trois sections parallèles de la forme :

$$\begin{cases} X_1 = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \\ X_2 = e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4 \\ X_3 = e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 \end{cases}$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base (locale) de TM . Comme ces trois sections sont parallèles, les structures presque complexes sur M associées sont kähleriennes :

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \implies I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4 \implies J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 \implies K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La variété M est donc hyperkählerienne, c'est une surface $K3$ (section 4.4.3). Ceci conclut la démonstration du théorème d'Hitchin. \square

Remarque : Demander à la métrique d'être Einstein est une contrainte très restrictive. En effet, pour les variétés presque quaternioniques et anti-autoduale c'est équivalent à imposer à la courbure scalaire d'être nulle.

Remarque : Grâce au théorème d'Hitchin, il est facile de voir que les seules 4-variétés kähleriennes, Ricci plates (i.e. Einstein à courbure scalaire nulle) sont les tores, les surfaces $K3$ et leurs quotients. C'est-à-dire les surfaces hyperelliptiques et les surfaces d'Enriques.

6.3 Résolution du problème pour les métriques hermitiennes

Si on ajoute comme contrainte que la métrique sur M doit être hermitienne, le problème se résout directement en utilisant les travaux de Boyer et Pontecorvo.

Théorème [Boy86] (lire aussi [Pon92b]) : Les seules surfaces complexes spin munies d'une métrique hermitienne anti-autoduale sont :

- a) les tores
- b) les surfaces hyperelliptiques
- c) les surfaces $K3$
- d) certaines surfaces de Hopf bien déterminées (voir ci-après)
- e) les surfaces réglées de genre $g \geq 2$ spin.

Remarque : Dans le papier de Boyer, les surfaces hyperelliptiques avaient été oubliées.

Grâce au théorème de classification des surfaces complexes presque quaternioniques (th. 1 section 5.2), on en déduit directement la proposition :

Proposition 3 : Soit S est une surface compacte complexe dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial. La variété S peut être munie d'une métrique hermitienne anti-autoduale si et seulement si S est :

- a) un tore
- b) une surface hyperelliptique
- c) une surface $K3$
- d) une surface de Hopf bien déterminée (voir ci-après).

La condition d'admettre une métrique hermitienne anti-autoduale est très restrictive. La démonstration du théorème de Boyer Pontecorvo repose sur le lemme suivant.

Lemme [Boy86] : Soit S une surface complexe et g une métrique hermitienne anti-autoduale alors :

- (i) Soit b_1 est pair alors la métrique est à courbure scalaire nulle et kählérienne.
- (ii) Soit b_1 est impair et alors la dimension de Kodaira est $-\infty$ et la métrique est localement conformément Kähler.

Surfaces de Hopf hermitiennes

Toute surface de Hopf admet un revêtement en une surface de Hopf primaire. On a vu que ces dernières étaient toutes de la forme $H_{(m,\alpha,\beta,t)}$ (cf. section 4.3.1). On donne ici les surfaces de Hopf primaires qui admettent une métrique hermitienne anti-autoduale.

Proposition [Boy86] : La surface $H_{(m,\alpha,\beta,t)}$ est munie d'une métrique hermitienne anti-autoduale si et seulement si $m = t = 0$ et $|\alpha| = |\beta|$.

Lorsque $|\alpha| = |\beta|$, il est facile de voir les surfaces de la forme $H_{(\alpha,\beta)}$ admettent une métrique hermitienne anti-autoduale. En effet, on prend sur \mathbb{C}^{2*} la métrique :

$$g = \frac{dz_1 \cdot \overline{dz_1} + dz_2 \cdot \overline{dz_2}}{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

C'est une métrique hermitienne localement conformément plate qui passe au quotient en une métrique sur $H_{(\alpha,\beta)}$.

Remarque : Il est très restrictif d'admettre une métrique hermitienne anti-autoduale. Ainsi, très peu de surfaces de Hopf primaires en possèdent bien qu'on puisse toujours munir les surfaces $H_{(m,\alpha,\beta,t)} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ de la métrique produit qui est riemannienne localement conformément plate. Plus généralement, pour tout nombre complexe (α, β) avec $|\alpha| = |\beta|$, la métrique $g_{(\alpha,\beta)}$ est une métrique riemannienne localement conformément plate sur $H_{(m,\alpha,\beta,t)}$.

6.4 Résolution du problème pour les métriques riemanniennes

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant. Il donne toutes les surfaces presque quaternioniques qui peuvent être munies d'une métrique riemannienne

anti-autoduale. Encore une fois, ici la métrique n'est plus liée à la structure complexe. Il était donc légitime d'espérer trouver d'autres exemples que ceux déjà cités.

Théorème 1 : *Soit M une surface compacte complexe dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial. Si la variété M peut être munie d'une métrique riemannienne anti-autoduale alors M est :*

- a) *une surface $K3$*
- b) *un tore*
- c) *une surface hyperelliptique*
- d) *une surface de Hopf*
- e) *une surface minimale spin de dimension de Kodaira un.*

Remarque : *Dans les cas a, b, c et d nous allons montrer qu'il existe toujours une métrique riemannienne anti-autoduale (cf. démonstration à la section 6.5.2).*

Les seules variétés non connues susceptibles d'admettre une métrique anti-autoduale sont les surfaces proprement elliptiques. Ces surfaces se divisent en deux groupes suivant que la caractéristique d'Euler est nulle ou pas. Dans les deux cas, on peut préciser un peu le théorème. Mais avant cela, on rappelle que toute métrique anti-autoduale est conforme à une métrique dont la courbure scalaire est constante (cf. section 1.4). À partir d'ici, on supposera donc toujours que la courbure scalaire d'une métrique anti-autoduale est constante.

Proposition 4 : *Soit M une surface minimale de dimension de Kodaira un spin et de caractéristique d'Euler nulle. La variété M est alors parallélisable et revêtue par un fibré lisse localement trivial $S \rightarrow \Sigma_{g>1}$ en courbes elliptiques et de base une surface de Riemann de genre $g > 1$.*

Si M admet une métrique g anti-autoduale alors la métrique est localement conformément plate (et donc à courbure harmonique), à courbure scalaire négative, non hermitienne, non Einstein et à holonomie sans sous-espace invariant (c'est-à-dire g irréductible). En particulier la métrique n'est pas Ricci parallèle.

Proposition 5 : *Soit M une surface minimale de dimension de Kodaira un spin et de caractéristique d'Euler $\chi > 0$.*

Si M admet une métrique anti-autoduale alors la métrique est à courbure scalaire négative, non Einstein, non localement conformément plate, non hermitienne, et à holonomie sans sous-espace invariant. Là encore la métrique n'est pas Ricci parallèle.

Je ne sais pas si dans ces deux derniers cas une métrique riemannienne anti-

autoduale existe réellement. Bien que les restrictions sur cette métrique soient assez fortes, je ne connais pas d'outils me permettant d'éliminer ces deux familles de candidats. Même dans un cas simple comme celui du produit $\mathbb{T}^2 \times \Sigma_g$ d'un tore de dimension 2 par une surface de Riemann de genre $g > 1$, je ne sais pas s'il existe une métrique riemannienne localement conformément plate.

La prochaine section est consacrée à la démonstration de ces résultats.

6.5 Démonstrations

6.5.1 Démonstration du théorème 1

Pour démontrer le théorème, on étudie au cas par cas les différentes surfaces complexes à fibré twistoriel trivial. On rappelle ici la liste des surfaces compactes presque quaternioniques et leur groupe fondamental.

Surfaces compactes presque quaternioniques	Kod(S)	$\pi_1(S)$
Hopf	$-\infty$	\mathbb{Z} d'indice fini
Inoue	$-\infty$	résoluble
Surfaces réglées de genre un spin	$-\infty$	\mathbb{Z}^2
Tores	0	\mathbb{Z}^4
Surfaces hyperelliptiques	0	\mathbb{Z}^4 d'indice fini
Surfaces de Kodaira spin	0	
Proprement elliptiques spin	1	

Pour démontrer le théorème 1, il faut montrer que les surfaces d'Inoue, les surfaces réglées de genre un et les surfaces de Kodaira n'admettent pas de métrique riemannienne anti-autoduale. Pour cela, on utilise un résultat de Goldman et Kamishima.

Théorème [Gol83], [Kam86] : *Si (M, g) est une 4-variété compacte localement conformément plate à groupe fondamental virtuellement résoluble alors à revêtement fini près M est la sphère \mathbb{S}^4 , un tore (plat) \mathbb{T}^4 ou le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$.*

On rappelle que les seules surfaces complexes munies d'une métrique plates sont les tores et les surfaces hyperelliptiques.

Surfaces d'Inoue

Si une surface d'Inoue possédait une métrique anti-autoduale, elle serait localement conformément plate car sa signature est nulle [Ino74]. De plus, le groupe fondamental d'une surface d'Inoue est résoluble (section 5.4.1) et son revêtement universel est \mathbb{R}^4 . Les surfaces d'Inoue ne sont donc recouvertes ni par \mathbb{S}^4 ni par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. De plus, les surfaces d'Inoue n'admettent pas de métrique plate. Par le

théorème de Goldman et Kamishima, on en déduit qu'elles n'admettent pas de métrique anti-autoduale.

Surfaces réglées de genre un

Soit S une surface réglée de genre un. On rappelle que S admet une fibration lisse localement trivial de fibre $\mathbb{C}P^1$ au-dessus d'une courbe elliptique $S \xrightarrow{\mathbb{S}^2} \mathbb{T}^2$. Son groupe fondamental est \mathbb{Z}^2 et son deuxième groupe d'homologie est non nul.

Une telle surface n'est pas recouvert par une sphère \mathbb{S}^4 , ni par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ sinon son deuxième groupe d'homologie serait nulle. Elle n'est pas non plus recouverte par un tore \mathbb{T}^4 sinon le groupe fondamental de S contiendrait le groupe \mathbb{Z}^4 comme sous-groupe d'indice fini. On en déduit qu'une surface réglée de genre un n'admet aucune métrique localement conformétement plate, ni anti-autoduale ($\tau=0$).

Surfaces de Kodaira

On dira qu'une variété N est une nilvariété si elle est obtenue comme le quotient d'un groupe de Lie nilpotent par un réseau cocompact. Par définition, une surface de Kodaira primaire est une surface complexe S de premier nombre de Betti $b_1 = 3$ et telle que le fibré canonique est holomorphiquement trivial. On montre qu'une surface de Kodaira primaire est difféomorphe à un produit $\mathbb{S}^1 \times N$, où N est une nilvariété de dimension trois [FM94]. Le groupe fondamental d'une surface de Kodaira primaire est donc nilpotent.

Le quotient fini d'une surface de Kodaira primaire est une surface de Kodaira secondaire.

Conclusion : *Le groupe fondamental d'une surface de Kodaira est donc virtuellement nilpotent.*

Si une surface de Kodaira possédait une métrique anti-autoduale, elle serait localement conformétement plate ($\tau = 0$). Comme le groupe fondamental d'une surface de Kodaira est virtuellement nilpotent et que son revêtement universel est \mathbb{R}^4 , le théorème de Goldman et Kamishima nous assure qu'elle n'admet pas de métrique anti-autoduale.

6.5.2 Démonstration de la remarque

Il est clair que les tores et les surfaces de Hopf primaires (i.e. difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$) admettent une métrique riemannienne localement conformétement plates. On peut montrer que la métrique de Calabi-Yau sur une surface K3 est anti-autoduale [Bes87]. Pour les surfaces hyperelliptiques, on a donné une description explicite à difféomorphisme près de ces surfaces et il est facile de voir que la métrique plate sur \mathbb{R}^4 descend en une métrique plate sur ces surfaces. La seule

chose qu'il faut montrer c'est donc que toute surface de Hopf secondaire admet une métrique riemannienne localement conformément plate ($\tau = 0$).

Une surface de Hopf secondaire est le quotient de \mathbb{C}^{2^*} par un groupe G . À difféomorphisme près on peut toujours supposer que G est un sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^2)$ [Kat75]. Nous allons voir qu'on peut toujours se ramener au cas où G est un sous-groupe du groupe des isométriques de \mathbb{R}^{4^*} muni de la métrique :

$$V = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}.$$

Si bien que cette métrique descend en une métrique localement conformément plate sur \mathbb{R}^{4^*}/G . On reprend les notations la section 5.2.3.

(1) Si G est décomposable et abélien alors :

(A) soit G est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \beta z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (az_1, a^n z_2)$$

(B) soit G est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1 + z_2, \alpha z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (az_1, az_2).$$

C'est-à-dire que G n'est pas un sous-groupe d'isométrie. Mais quitte à faire une petite déformation, on peut se ramener à l'un des deux cas suivant :

(A') G est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \beta z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (az_1, a^n z_2) \text{ avec } |\alpha| = |\beta|$$

(B') G est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (az_1, az_2).$$

(2) Si G est décomposable mais non abélien, le groupe G est un groupe d'isométrie de (\mathbb{R}^{4^*}, V) .

(3) Si G est indécomposable, dans les cas (D3),..., (D7) G est un groupe d'isométrie. Et dans les deux premiers cas, à difféomorphisme près, on peut se ramener au cas où :

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et alors la métrique V de \mathbb{R}^{4^*} passe au quotient.

Conclusion : *Toutes les surfaces de Hopf secondaires possèdent une métrique riemannienne localement conformément plate.*

Remarque : *Ce n'est pas le cas pour les métriques hermitiennes.*

6.5.3 Démonstration de la proposition 4

Soit M une surface spin de dimension de Kodaira un dont la caractéristique d'Euler est nulle. C'est une surface parallélisable, qui est revêtue par un fibré lisse localement trivial $S \rightarrow \Sigma_{g>1}$ en courbes elliptiques [FM94]. On suppose que M admet une métrique g anti-autoduale. Quitte à prendre une métrique conforme à g , on suppose de plus que g est à courbure scalaire constante.

Comme M est parallélisable, la métrique g est localement conformément plate et donc à courbure harmonique. Par les théorèmes d'Hitchin et de Boyer g ne peut être ni hermitienne ni d'Einstein.

Lemme 1 : *Si M admet une métrique anti-autoduale alors la métrique est à courbure scalaire négative.*

Preuve. On l'a déjà fait remarquer si la métrique est à courbure scalaire nulle alors elle est d'Einstein :

$$0 = 3\tau + 2\chi = \frac{1}{4\pi^2} \int_M \left(\|W^+\|^2 + \frac{1}{24}s^2 - 2\|B\|^2 \right) \mu_g = \frac{1}{4\pi^2} \int_M -2\|B\|^2 \mu_g.$$

Pour montrer que la métrique n'est pas à courbure scalaire positive, on utilise le résultat suivant.

Théorème [Bou81a] : *Soit (M, g) est une 4-variété orientée munie d'une métrique riemannienne anti-autoduale. Si la courbure scalaire de g est positive, la forme d'intersection de M est définie positive.*

Dans notre cas la signature de M est nulle, pour que la forme d'intersection soit définie positive, il faut qu'elle soit nulle et que $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$. Le deuxième nombre de Betti de M serait nul et comme $\chi = 2 - 2b_1 + b_2 = 0$, on aurait $b_1 = 1$. Mais si M admet une métrique anti-autoduale à courbure scalaire positive, c'est le cas pour tout recouvrement fini de M . Or M est revêtue par un fibré lisse localement trivial $S \rightarrow \Sigma_{g>1}$. Pour une telle surface, on a vu dans la section 5.4.1 que le groupe fondamental de la fibre était central dans celui de S , donc $b_1(S) \geq 2$. La surface S ne peut donc pas posséder de métrique anti-autoduale à courbure scalaire positive.

Ceci conclut la démonstration du lemme : si M admet une métrique anti-autoduale elle doit être à courbure scalaire négative. \square

Lemme 2 : *Si M admet une métrique anti-autoduale alors la métrique est irréductible.*

Preuve. Pour démontrer ce deuxième lemme, on commence par montrer la pro-

position suivante qui a été énoncé par Lafontaine sous une forme légèrement différente.

Proposition [Laf82] : *Soit (M, g) une 4-variété dont la métrique est localement conformément plate. Si la métrique g est réductible alors le revêtement universel riemannien de (M, g) est l'une des variétés :*

$$\mathbb{R}^4, \mathbb{R} \times \mathbb{H}^3, \mathbb{R} \times \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2,$$

munies de leur métrique usuelle.

Cette proposition dit exactement que pour que la métrique d'un produit riemannien soit localement conformément plate, il faut être dans un des cas de la proposition. On donne ici une démonstration différente de celle de Lafontaine. Le but étant de réutiliser cette preuve pour énoncer par la suite une nouvelle proposition.

On admet pour le moment cette proposition. On veut démontrer le lemme 2. Si M admet une métrique anti-autoduale alors elle est à courbure scalaire négative. Or la seule variété de la proposition qui admet une métrique à courbure scalaire négative est $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$. De plus, si M admet une métrique localement conformément plate, c'est également le cas pour tout recouvrement fini. On peut donc supposer qu'il existe un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 central dans le groupe fondamental de M (cf. section 5.4.1). Pour démontrer le lemme, nous allons montrer que ceci n'est pas possible si le revêtement universel riemannien de M est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$.

Si X est une variété riemannienne orientée, on note $Isom(X)$ son groupe d'isométries et $Isom^+(X)$ le sous-groupe des isométries directes. Commençons par montrer l'égalité :

$$Isom(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3) = Isom(\mathbb{R}) \times Isom(\mathbb{H}^3).$$

Pour cela, on considère h une isométrie de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$. On veut montrer que $T\mathbb{R}$ et $T\mathbb{H}^3$ sont des sous-espaces invariants par h . Soit $Vect(e_1, e_2)$ un 2-plan de $T\mathbb{R} \oplus T\mathbb{H}^3$, la courbure sectionnelle $K(e_1, e_2)$ de ce plan est nulle si et seulement si $T\mathbb{R} \subset Vect(e_1, e_2)$. Comme h est une isométrie, elle conserve la courbure sectionnelle et laisse donc invariant le sous-espace $T\mathbb{R}$. Comme $T\mathbb{R}$ est invariant, son orthogonal $T\mathbb{H}^3$ aussi. Une isométrie de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$ est donc le produit d'une isométrie de \mathbb{R} par une isométrie de \mathbb{H}^3 .

Supposons que le revêtement universel riemannien de M soit $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$. On note $\pi_1(M)$ le groupe fondamental de M . On peut le voir comme un sous-groupe de $Isom^+(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3)$, de sorte que :

$$M \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{H}^3 / \pi_1(M).$$

Comme $\pi_1(M)$ agit librement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$, c'est un sous-groupe de $Isom^+(\mathbb{R}) \times Isom^+(\mathbb{H}^3)$. De plus, un élément central dans $\pi_1(M)$ est central

dans son adhérence de Zariski et donc central dans $Isom^+(\mathbb{R}) \times Isom^+(\mathbb{H}^3)$. Le centre de $\pi_1(M)$ ne peut donc pas être \mathbb{Z}^2 . Ceci conclut la démonstration du lemme.

Il ne reste plus qu'à démontrer la proposition.

Preuve de la proposition. Si la métrique g est réductible, par le théorème de De Rham [KN96], le revêtement universel riemannien (\tilde{M}, \tilde{g}) de (M, g) se décompose en un produit $(N \times T, g_N \times g_T)$.

On suppose dans un premier temps que les variétés (N, g_N) et (T, g_T) sont de dimension deux. Dans ce cas, on choisit localement :

$$\begin{cases} (e_1, e_2) \text{ une base orthonormée de } (N, g_N) \\ (e_3, e_4) \text{ une base orthonormée de } (T, g_T) \end{cases}$$

et on note K_N et K_T les courbures sectionnelles des métriques g_N et g_T (non nécessairement constantes). Soit R l'opérateur de courbure sur \tilde{M} . Il vérifie :

$$\begin{aligned} R : \bigwedge^2 T\tilde{M} &\longrightarrow \bigwedge^2 T\tilde{M} \\ e_1 \wedge e_2 &\longmapsto K_N e_1 \wedge e_2 \\ e_3 \wedge e_4 &\longmapsto K_T e_3 \wedge e_4 \\ e_i \wedge e_j &\longmapsto 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Dans la base (X_1, \dots, Y_3) (cf. section 1.1.2) on a donc :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} K_N + K_T & 0 & 0 & K_N - K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline K_N - K_T & 0 & 0 & K_N + K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Donc si la métrique est localement conformément plate alors les courbures sectionnelles de (N, g_N) et (T, g_T) sont constantes et opposées. Le revêtement riemannien de (M, g) est alors $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.

On suppose maintenant que (\tilde{M}, \tilde{g}) est le produit d'une variété de dimension trois (N, g_N) et d'une variété de dimension un (T, g_T) . Dans ce cas, on considère (e_1, e_2, e_3) et e_4 des bases orthonormées locales de (N, g_N) et (T, g_T) . On note encore R l'opérateur de courbure sur (\tilde{M}, \tilde{g}) . Enfin, pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, 3, 4\}$

on note : $K_{ij,kl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$. L'opérateur de courbure R vérifie alors :

$$\begin{aligned}
R : \bigwedge^2 T\tilde{M} &\longrightarrow \bigwedge^2 T\tilde{M} \\
e_1 \wedge e_2 &\longmapsto K_{12,12}e_1 \wedge e_2 + K_{12,13}e_1 \wedge e_3 + K_{12,23}e_2 \wedge e_3 \\
e_1 \wedge e_3 &\longmapsto K_{13,12}e_1 \wedge e_2 + K_{13,13}e_1 \wedge e_3 + K_{13,23}e_2 \wedge e_3 \\
e_2 \wedge e_3 &\longmapsto K_{23,12}e_1 \wedge e_2 + K_{23,13}e_1 \wedge e_3 + K_{23,23}e_2 \wedge e_3 \\
e_1 \wedge e_4 &\longmapsto 0 \\
e_2 \wedge e_4 &\longmapsto 0 \\
e_3 \wedge e_4 &\longmapsto 0
\end{aligned}$$

La matrice de l'opérateur R dans la base (X_1, \dots, Y_3) (cf. section 1.1.2) est donc :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}
K_{12,12} & K_{13,12} & K_{23,12} & K_{12,12} & K_{13,12} & -K_{23,12} \\
K_{12,13} & K_{13,13} & K_{23,13} & K_{12,13} & K_{13,13} & -K_{23,13} \\
K_{12,23} & K_{13,23} & K_{23,23} & K_{12,23} & K_{13,23} & -K_{23,23} \\
\hline
K_{12,12} & K_{13,12} & K_{23,12} & K_{12,12} & K_{13,12} & -K_{23,12} \\
K_{12,13} & K_{13,13} & K_{23,13} & K_{12,13} & K_{13,13} & -K_{23,13} \\
-K_{12,23} & -K_{13,23} & -K_{23,23} & -K_{12,23} & -K_{13,23} & K_{23,23}
\end{array} \right)$$

La métrique est localement conformément plate si et seulement si d'une part $K_{12,12} = K_{13,13} = K_{23,23}$ et d'autre part si les autres courbures $K_{ij,kl}$ sont nulles. Cela entraîne que (N, g_N) est à courbure sectionnelle constante. Comme N est simplement connexe c'est \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 ou \mathbb{R}^3 . Le revêtement riemannien de (M, g) est alors $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$ ou \mathbb{R}^4 . Ceci conclut la démonstration de la proposition. \square

Conclusion : *Si M admet une métrique anti-autoduale alors la métrique est à courbure scalaire négative, irréductible, localement conformément plate, non Einstein, non hermitienne.*

En particulier la métrique g n'est pas Ricci parallèle. En effet l'opérateur de Ricci est symétrique, il est donc diagonalisable. Si la métrique est Ricci parallèle, les sous-espaces propres de l'opérateur de Ricci sont des sous-espaces invariants par le groupe d'holonomie. Comme la métrique est irréductible l'opérateur de Ricci ne peut donc avoir qu'un sous-espace propre, c'est-à-dire qu'il est de la forme λId . Ce qui est impossible car la métrique n'est pas Einstein.

6.5.4 Démonstration de la proposition 5

Soit M une surface spin de dimension de Kodaira un et dont la caractéristique d'Euler est strictement positive. On suppose que M admet une métrique g anti-autoduale (à courbure scalaire constante). Dans ce cas, la métrique n'est pas localement conformément plate car $\tau < 0$. Mais comme précédemment, la métrique n'est ni hermitienne ni d'Einstein.

Lemme 3 : *La métrique sur M serait à courbure scalaire négative.*

Preuve. La courbure scalaire ne peut être nulle sinon la métrique est d'Einstein. La courbure scalaire ne peut pas non plus être positive par le théorème suivant.

Théorème de Lichnerowicz [Bes87] : *Soit M une 4-variété compacte connexe spin. Si M admet une métrique dont la courbure scalaire est positive alors la signature de M est nulle.*

Ceci conclut la démonstration du lemme 3. \square

Lemme 4 : *La métrique sur M serait irréductible.*

Preuve. La démonstration du lemme découle directement de la proposition suivante.

Proposition 6 : *Une métrique anti-autoduale non localement conformément plate sur une 4-variété est irréductible.*

Preuve de la proposition. Soit (M, g) une 4-variété dont la métrique est anti-autoduale mais pas localement conformément plate. On suppose que la métrique g est réductible. Dans ce cas, le revêtement universel riemannien de (M, g) est le produit $(N \times T, g_N \times g_T)$. Si les variétés N et T sont de dimension deux, la démonstration de la précédente proposition montre que la métrique $g_N \times g_T$ est anti-autoduale si et seulement si elle est aussi localement conformément plate. De même si N est de dimension trois et T de dimension un. Si la métrique g n'est pas localement conformément plate, elle doit être irréductible. \square

Conclusion : *Si M admet une métrique anti-autoduale alors elle doit être irréductible, à courbure scalaire négative, non hermitienne, non Einstein. Là encore, la métrique n'est pas Ricci parallèle.*

6.6 Existence d'une infinité de structures complexes non standards

Dans le cadre plus restrictif des variétés hypercomplexes (cf. chapitre 4), on peut généraliser la proposition 1 de la section 6.1.2 :

Proposition 7 : *Soit (M, g) une variété hypercomplexe. Il existe une infinité de structures complexes sur les produits $M \times \mathbb{S}^2$ qui ne sont pas déformation de la structure complexe produit.*

La démonstration de cette proposition s'inspire fortement d'un résultat de Le Brun [LeB99] établi pour les surfaces $K3$.

Preuve. Pour simplifier l'écriture, on notera Z l'espace twistoriel de (M, g) . Si (M, g) est hypercomplexe, son espace twistoriel admet une submersion holomorphe sur $\mathbb{C}P^1$ (cf. section 4.3.3) :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p} & \mathbb{C}P^1 \\ \pi \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Soit m un entier non nul et f_m l'application holomorphe de degré m définie par :

$$\begin{array}{ccc} f_m : \mathbb{C}P^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\ [z_1, z_2] & \longmapsto & [z_1^m, z_2^m]. \end{array}$$

On note $Z_m = f_m^*Z$ le fibré tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccc} Z_m & \longrightarrow & Z \\ p_m = f_m^*p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{f_m} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

Comme le fibré $p : Z \rightarrow \mathbb{C}P^1$ est topologiquement trivial, il en est de même pour $p_m : Z_m \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Si bien qu'on peut identifier la variété Z_m avec la variété $M \times \mathbb{S}^2$ munie d'une structure presque complexe intégrable, que l'on notera J_m . On va montrer que ces différentes structures complexes ne sont pas déformation les unes des autres. Pour cela on va calculer la première classe de Chern associée à ces différentes structures. Notons qu'avec ces notations J_1 est la structure complexe d'espace twistoriel sur $M \times \mathbb{S}^2$.

On note π_m la projection de $Z_m \simeq M \times \mathbb{S}^2$ sur M :

$$\begin{array}{ccc} Z_m & \xrightarrow{p_m} & \mathbb{C}P^1 \\ \pi_m \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Le sous-espace tangent de Z_m admet donc la décomposition :

$$TZ_m = \pi_m^*TM \oplus p_m^*T\mathbb{S}^2$$

Les distributions π_1^*TM et $p_1^*T\mathbb{S}^2$ sont invariantes par J_1 (cf. section 4.3.3), les distributions π_m^*TM et $p_m^*T\mathbb{S}^2$ sont donc invariantes par J_m et peuvent donc être

vu comme des fibrés vectoriels complexes au-dessus de $M \times \mathbb{S}^2$. On note $c_1(\pi_m^* TM)$ et $c_1(p_m^* T\mathbb{S}^2)$ les premières classes de Chern associées.

Soit h le générateur du $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^*(M, \mathbb{R})$ l'anneau de cohomologie de M . L'anneau de cohomologie de $M \times \mathbb{S}^2$ est un $H^*(M, \mathbb{R})$ -module engendré par h . Le sous-espace $p_m^* T\mathbb{S}^2$ est le tiré en arrière par p_m du fibré tangent de $\mathbb{C}P^1$:

$$\begin{array}{ccc} p_m^* T\mathbb{S}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{C}P^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_m & \xrightarrow{p_m} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

De sorte que $c_1(p_m^* T\mathbb{S}^2) = 2h$.

La démonstration du théorème d'Hitchin donnée en annexe montre l'égalité :

$$c_1(\pi_1^* TM) = c_1(p_1^* T\mathbb{S}^2) = 2h.$$

L'application f_m étant de degré m on a donc :

$$c_1(\pi_m^* TM) = mc_1(p_m^* T\mathbb{S}^2) = 2hm$$

Par conséquent on a :

$$c_1(Z_m) = 2(m+1)h.$$

Pour chaque entier m on a donc défini une structure complexe sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$. Aucune de ces structures complexes ne sont déformations les unes des autres. \square

Chapitre 7

Théorème de Kodaira et connexité rationnelle

Soit (M, g) une 4-variété orientée munie d'une métrique anti-autoduale, son espace twistoriel Z est complexe. On a vu qu'en général l'espace Z n'est pas projectif (cf. section 3.3.4). Dans le cas non projectif il existe plusieurs définitions non équivalentes de connexité rationnelle que nous allons détailler ici.

7.1 Les différentes connexités rationnelles

On peut donner plusieurs définitions de connexité rationnelle.

Une variété complexe V est dite rationnellement connexe par chaînes si pour tout couple (v_1, v_2) de V , il existe une chaîne de $\mathbb{C}P^1$ qui relie v_1 et v_2 .

Une variété complexe V est dite "faiblement" rationnellement connexe si pour tout couple de points (v_1, v_2) de V , il existe une courbe rationnelle de V qui contient v_1 et v_2 . C'est la notion naturelle : deux points quelconques de V peuvent être reliés par une courbe rationnelle.

Campana utilise une autre définition de connexité rationnelle [Cam91]. Soit α un point de V et $C(V)$ l'espace des cycles de Barlet [Bar75]. On dira que V est "fortement" rationnellement connexe s'il existe un compact S de $C(Z)$ tel que :

- i) Les éléments de S sont génériquement des courbes rationnelles.
- ii) Les éléments de S contiennent tous le point α .
- iii) Pour tout point v de V , il existe un élément de S qui le contient.

Dans le cadre projectif, la rigidité est telle que ces trois notions sont équivalentes [Deb01]. On rappelle que le fibré normal d'une fibre de la projection $\pi : \tau(M, g) \rightarrow M$ est $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$. Pour les variétés projectives, la présence d'une seule courbe rationnelle ayant cette propriété suffit à établir la connexité rationnelle. On parle de courbe rationnelle très libre [Deb01]. On l'a déjà dit les

espaces twistoriels ne sont généralement pas projectifs, les questions de connexité rationnelle sont donc a priori ouvertes et indépendantes.

7.2 Connexité rationnelle "forte"

Campana à résolu le problème de la connexité rationnelle "forte".

Théorème [Cam91] : *Soit (M, g) une 4-variété compacte connexe orientée munie d'une métrique anti-autoduale et $\tau(M, g)$ son espace twistoriel. Si $\tau(M, g)$ est "fortement" rationnellement connexe alors :*

- a) $\tau(M, g)$ est Moishezon et simplement connexe
- b) M est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 ou à une somme connexe de plans projectifs $\mathbb{C}P^2$.

Il est assez légitime d'espérer que les espaces twistoriels soient tous "faiblement" rationnellement connexe. Mais c'est un résultat que je ne sais pas montrer.

Remarque : *L'espace twistoriel de \mathbb{R}^4 muni de sa métrique et de son orientation canonique est "faiblement" rationnellement connexe. Il en est donc de même pour l'espace twistoriel des tores plats.*

Preuve. En effet, l'espace twistoriel $\tau(\mathbb{R}^4)$ de \mathbb{R}^4 s'identifie à $\mathbb{C}P^3 - \{l_\infty\}$. On peut donc relier deux points de $\tau(\mathbb{R}^4)$ soit par une droite soit par une conique de $\mathbb{C}P^3 - \{l_\infty\}$. Par projection, on a la connexité rationnelle "faible" dans le cas des tores plats. \square

Remarque : *La même démonstration permet de voir que l'espace twistoriel de la surface $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ muni de la métrique produit est aussi "faiblement" rationnellement connexe.*

7.3 Connexité rationnelle par chaînes

La réponse à la question de la connexité rationnelle par chaînes est connue des spécialistes mais n'a semble-t-il jamais été publiée.

Proposition 1 : *Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée connexe non nécessairement compacte. Si la métrique g est anti-autoduale alors l'espace twistoriel associé $\tau(M, g)$ est une 3-variété complexe rationnellement connexe par chaînes.*

Cette proposition découle d'un théorème de Kodaira [Kod62] (cf. remarque qui

suit l'énoncé de la proposition 2). La fin de ce chapitre est précisément consacrée à l'étude de ce théorème.

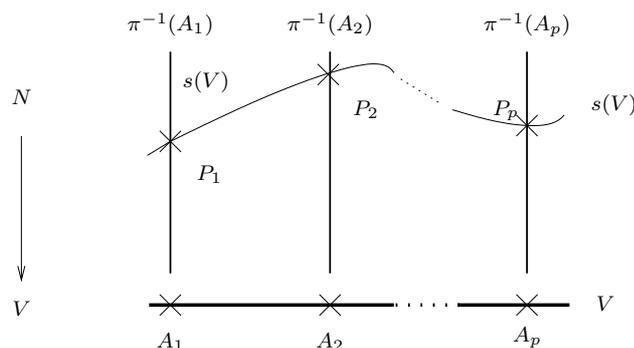
7.4 Théorème de Kodaira

Le but de cette section est de démontrer et de préciser un peu le théorème de Kodaira [Kod62]. Nous en donnons ici une version faible.

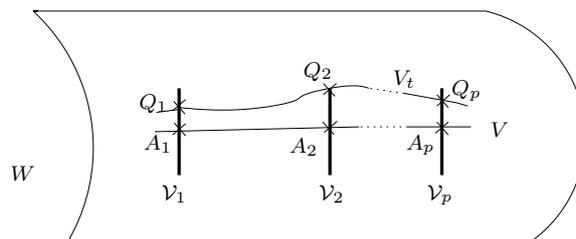
Version faible du théorème de Kodaira [Kod62] : *Soit W une variété complexe et V une sous-variété compacte de fibré normal N . On note ψ le faisceau des germes des sections holomorphes du fibré normal. Si le premier groupe de cohomologie $H^1(V, \psi)$ est nul, alors V appartient à une famille analytique de sous-variétés V_t paramétrées par un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^l , où l est la dimension de $H^0(V, \psi)$.*

On peut affiner un peu ce théorème de la façon suivante.

Proposition 2 : *On conserve les hypothèses du théorème de Kodaira et on considère A_1, A_2, \dots, A_p des points distincts de V . Supposons que pour tout point P_1, P_2, \dots, P_p du fibré normal N respectivement au-dessus de A_1, A_2, \dots, A_p , il existe une section s du fibré normal $\pi : N \rightarrow V$ telle que $s(A_i) = P_i \forall i \in \{1, \dots, p\}$.*



Alors il existe des petits supplémentaires \mathcal{V}_i de V transverses en A_i tels que pour tout point Q_1, \dots, Q_p respectivement dans $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_p$ il existe un élément de la famille de Kodaira V_t qui passent par ces points (cf. illustration ci-après). De plus si la section s est déterminée de manière unique par ses valeurs aux points A_1, \dots, A_p , il en va de même pour la sous-variété V_t de la famille de Kodaira.

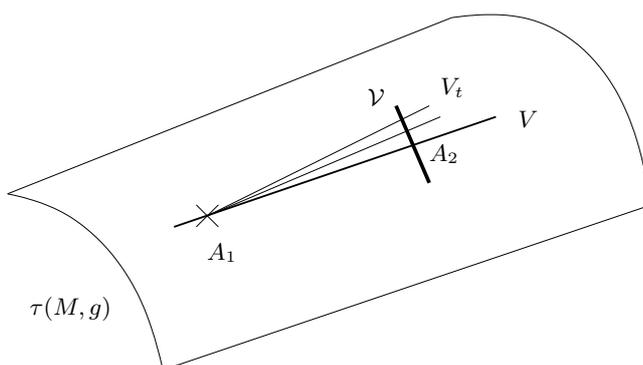


Remarque : La connexité rationnelle par chaînes des espaces twistoriels est alors un corollaire immédiat de cette proposition.

Preuve de la remarque. Soit V une fibre de la fibration twistorielle $\tau(M, g) \rightarrow M$. Par la proposition 6 de la section 3.3.1, on sait que le fibré normal à la fibre V dans $\tau(M, g)$ est :

$$\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{C}P^1.$$

Une section de ce fibré normal est donc uniquement déterminée si on connaît sa valeur au-dessus de deux points distincts A_1 et A_2 de V . Grâce à la proposition, on peut en déduire que la sous famille de Kodaira des courbes qui passent par le point A_1 est une famille à deux paramètres qui recouvre un petit supplémentaire \mathcal{V} de V transverse en A_2 :



En utilisant les fibres de la fibration twistorielle, on peut donc affirmer qu'il existe un voisinage de la fibre V dans lequel deux points quelconques peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles. On conclut par un argument de compacité : soit A et B deux points de $\tau(M, g)$, il existe un chemin compact qui les relie. Comme on peut relier deux points du chemin assez proche, par compacité du chemin, on peut relier A et B par une chaîne de $\mathbb{C}P^1$ plongés. Ce qui conclut la démonstration de la remarque. \square

Démonstration de la proposition 2

Plan de la démonstration

La démonstration de cette proposition se fait dans des cartes. Dans un premier temps, nous introduisons les notations de Kodaira. Nous rappelons alors les grandes lignes de la version faible du théorème de Kodaira. Pour pouvoir suivre cette partie, il est conseillé d'avoir sous les yeux [Kod62]. Enfin, nous modifions légèrement cette preuve afin d'en déduire notre proposition.

On suppose que la sous-variété V est de dimension d et de codimension r dans W . Pour résumer :

$$\begin{cases} V \text{ est de dimension } d \\ W \text{ est de dimension } r+d \\ H^0(V, \psi) \text{ est de dimension } l \end{cases}$$

Notation de Kodaira

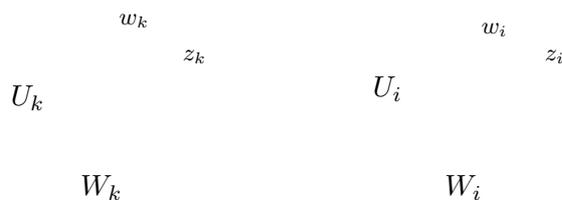
Il nous faut maintenant introduire un certain nombre de notation.

Attention, nous identifierons toujours un ouvert d'une carte à son image dans \mathbb{C}^n par la carte. Ainsi il existe un recouvrement fini de V par des ouverts W_i de W , où i varie dans un ensemble I , et des coordonnées sur W_i tels que :

$$\begin{aligned} W_i &= \left\{ (z_i, w_i) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^r, \quad \|w_i\|_\infty < 1, \|z_i\|_\infty < 1 \right\} \\ U_i &= V \cap W_i = \left\{ (z_i, w_i) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^r, \quad w_i = 0, \|z_i\|_\infty < 1 \right\}. \end{aligned}$$

W

V



Les changements de coordonnées sur l'ouvert $W_i \cap W_k$ sont donnés par :

$$\begin{cases} w_i = f_{ik}(z_k, w_k) \\ z_i = g_{ik}(z_k, w_k) \end{cases}$$

U_k	w_k z_k	$\xrightarrow{f_{ik}}$	U_i	w_i z_i
W_k		$\xrightarrow{g_{ik}}$	W_i	

Soient A_1, A_2, \dots, A_p des points distincts de V . On suppose que A_1, A_2, \dots, A_p sont les points de $W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_p}$ de coordonnées :

$$\begin{cases} A_1 = (0, 0) \in W_{i_1} \\ A_2 = (0, 0) \in W_{i_2} \\ \dots \\ A_p = (0, 0) \in W_{i_p} \end{cases}$$

Au-dessus des ouverts $(U_i)_{i \in I}$ le fibré normal de V est trivial. On notera (F_{ik}) les cocycles de ce fibré associés au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. La restriction d'une section $s \in H^0(V, \psi)$ à un ouvert U_i peut donc être vue comme une application à valeurs dans \mathbb{C}^r :

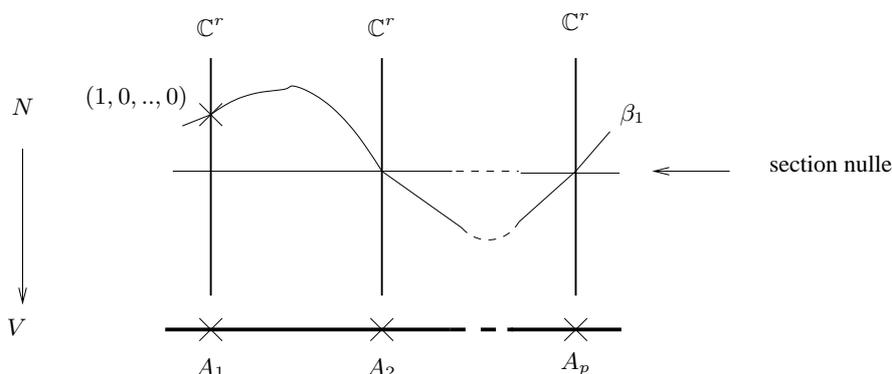
$$\begin{cases} s : V \longrightarrow N \\ s|_{U_i} : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^r \quad \forall i \in I \end{cases}$$

Nous utiliserons systématiquement cette convention.

Par hypothèse il existe une famille $(\beta_1, \dots, \beta_{rp})$ de $H^0(V, \psi)$, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\beta_1|_{U_{i_1}}(0), \dots, \beta_r|_{U_{i_1}}(0) \right) \text{ est la base canonique de } \mathbb{C}^r \\ \beta_1|_{U_{i_\nu}}(0) = \dots = \beta_r|_{U_{i_\nu}}(0) = 0 \quad \forall \nu \in \{2, \dots, p\} \\ \left(\beta_{r+1}|_{U_{i_2}}(0), \dots, \beta_{2r}|_{U_{i_2}}(0) \right) \text{ est la base canonique de } \mathbb{C}^r \\ \beta_{r+1}|_{U_{i_\nu}}(0) = \dots = \beta_{2r}|_{U_{i_\nu}}(0) = 0 \quad \forall \nu \in \{1, 3, \dots, p\} \\ \dots \end{array} \right.$$

C'est-à-dire que les r premières sections $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ s'annulent au-dessus des points A_2, \dots, A_p mais $(\beta_1(A_1), \dots, \beta_r(A_1))$ est la base canonique de la fibre de $N \longrightarrow V$ au-dessus du point A_1 . Et ainsi de suite pour les autres sections. Un peu comme pour les polynômes de Lagrange, ces sections ont été choisies afin de contrôler "ce qui se passe" au-dessus des points A_1, \dots, A_p .



On complète cette famille en une base $(\beta_1, \dots, \beta_l)$ de $H^0(V, \psi)$. Pour alléger l'écriture et pour suivre les notations de Kodaira on pose :

$$\beta_{ij} = \beta_i|_{U_j} \quad \forall i \in \{1, \dots, l\} \text{ et } \forall j \in I.$$

Soit z un paramètre quelconque et $\xi(z, t)$ une fonction holomorphe en $t = (t_1, t_2, \dots, t_l) \in \mathbb{C}^l$ et à valeurs dans \mathbb{C}^r . On note $[\xi(z, t)]_m$ la série tronquée des $m + 1$ premiers polynômes homogènes en t dans la décomposition de $\xi(z, t)$ en série entière par rapport à t . En particulier $[\xi(z, t)]_m$ est un polynôme de degré m en t . Soit :

$$\begin{cases} \xi(z, t) = \sum \xi_{lm\dots n}(z) t_1^l t_2^m \dots t_l^n \\ A(t) = \frac{a}{16b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} b^n (t_1 + t_2 + \dots + t_l)^n = \sum A_{lm\dots n}(z) t_1^l t_2^m \dots t_l^n \end{cases}$$

où a et b sont des réels qui seront fixés dans la démonstration du lemme ci-dessous. On notera $\xi(z, t) \ll A(t)$ si $\|\xi_{lm\dots n}(z)\|_{\infty} \leq A_{lm\dots n}$, pour tout entier l, m, \dots, n .

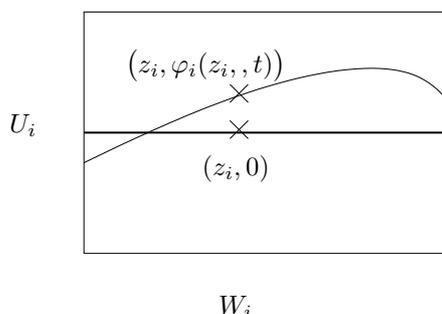
Lemme technique

Maintenant que les notations sont en place, nous pouvons démontrer le lemme ci-dessous. Juste après avoir énoncé ce lemme, nous verrons pourquoi ce dernier suffit à démontrer la proposition.

Lemme : Soit $t = (t_1, t_2, \dots, t_l) \in \mathbb{C}^l$ et $z_i \in \mathbb{C}^d$. Pour tout $i \in I$ il existe $\epsilon > 0$ et des fonctions holomorphes $\varphi_i(z_i, t) \in \mathbb{C}^r$ définies pour $\|t\|_{\infty} < \epsilon$, $\|z_i\|_{\infty} < 1$ et tels que :

- (i) $\|\varphi_i(z_i, t)\|_{\infty} < 1$
- (ii) $[\varphi_i(z_i, t)]_1 = t_1 \beta_{1i}(z_i) + t_2 \beta_{2i}(z_i) + \dots + t_l \beta_{li}(z_i)$
- (iii) $\varphi_i(g_{ik}(z_k, \varphi_k(z_k, t)), t) = f_{ik}(z_k, \varphi_k(z_k, t))$
- (iv) $\varphi_i(z_i, t) \ll A(t)$
- (v) $[\varphi_{i_1}(0, t)]_m = [\varphi_{i_1}(0, t)]_1, \dots, [\varphi_{i_p}(0, t)]_m = [\varphi_{i_p}(0, t)]_1 \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall t.$

Les points (i), (ii), (iii), (iv) permettent de démontrer la version faible du théorème de Kodaira. En effet pour chaque t les $(z_i, \varphi_i(z_i, t))$ définissent le graphe d'une fonction holomorphe définie sur U_i et à valeurs dans W_i .

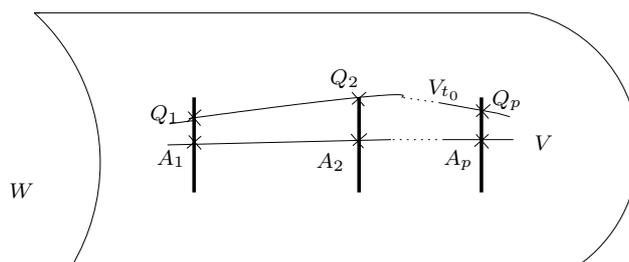


La condition (iii) nous assure que ces graphes se recollent bien. Pour chaque valeur du paramètre t , on a donc bien défini une sous-variété V_t de W . La condition (ii) nous affirme entre autre que $V_0 = V$.

En ajoutant la contrainte (v), on démontre la proposition. En effet quelque soit les points :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = (0, w_{i_1}) \in W_{i_1} \\ Q_2 = (0, w_{i_2}) \in W_{i_2} \\ \dots \\ Q_p = (0, w_{i_p}) \in W_{i_p} \end{array} \right. \text{ vérifiant : } \left\{ \begin{array}{l} \|w_{i_1}\|_\infty < \frac{\epsilon}{p} \\ \|w_{i_2}\|_\infty < \frac{\epsilon}{p} \\ \dots \\ \|w_{i_p}\|_\infty < \frac{\epsilon}{p} \end{array} \right.$$

la courbe correspondant au paramètre $t_0 = (w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_p}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^l$ est une courbe de la famille de Kodaira qui relie les points Q_1, Q_2, \dots, Q_p :



En effet, d'une part la courbe V_{t_0} est bien définie car $\|t_0\|_\infty < \epsilon$. D'autre part, pour voir que la courbe V_{t_0} contient le point Q_1 , il suffit de vérifier que :

$$\varphi_{i_1}(0, t_0) = w_{i_1}.$$

Or les contraintes (ii) et (v) nous disent que :

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1}(0, t_0) &= [\varphi_{i_1}(0, t_0)]_1 \\ &= t_1 \beta_{1i_1}(0) + t_2 \beta_{2i_1}(0) + \dots + t_l \beta_{li_1}(0) \\ &= t_1 \beta_{1i_1}(0) + t_2 \beta_{2i_1}(0) + \dots + t_{rp} \beta_{rp i_1}(0) \quad (t_k = 0 \text{ si } k > rp) \end{aligned}$$

Mais on rappelle que la famille $(\beta_1, \dots, \beta_{rp})$ a été construit de sorte que $(\beta_1(A_1), \dots, \beta_r(A_1))$ est la base canonique de \mathbb{C}^r alors que les autres $\beta_k(A_1)$, $k \in \{r+1, \dots, rp\}$ sont nuls. On a donc bien :

$$\begin{aligned} \varphi_{i_1}(0, t_0) &= t_1\beta_{1i_1}(0) + t_2\beta_{2i_1}(0) + \dots + t_{rp}\beta_{rpi_1}(0) \\ &= t_1\beta_{1i_1}(0) + t_2\beta_{2i_1}(0) + \dots + t_r\beta_{ri_1}(0) \\ &= w_{i_1} \end{aligned}$$

On montre de même que la courbe V_{t_0} contient les points Q_2, \dots, Q_p . Ce lemme implique donc bien la proposition. Pour le démontrer, on construit par récurrence les différents coefficients du développement en série entière par rapport à t de $\varphi_i(z_i, t)$. En d'autres termes, on construit les $[\varphi_i(z_i, t)]_m$ par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, la condition (iii) nous assurera alors la convergence.

Pour conserver les notations de Kodaira, on notera également $\varphi_i^m(z_i, t) = [\varphi_i(z_i, t)]_m$ la série tronquée des $m+1$ premiers polynômes homogènes (en t) dans le développement de $\varphi(z_i, t)$ en série entière par rapport à t . Le polynôme homogène de degré m dans cette décomposition en série entière sera noté $\varphi_{i,m}(z_i, t)$. Par définition on a donc :

$$\varphi_i^m(z_i, t) = [\varphi_i(z_i, t)]_m = \varphi_{i,1}(z_i, t) + \dots + \varphi_{i,m}(z_i, t).$$

Remarque : Avec ces notations, la condition de recollement (iii) s'écrit aussi :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \left[\varphi_i^m \left(g_{ik}(z_k, \varphi_k^m(z_k, t)), t \right) \right]_m = \left[f_{ik}(z_k, \varphi_k^m(z_k, t)) \right]_m.$$

La démonstration de ce lemme se fait en deux parties. Dans un premier temps, on redonne les grandes lignes de la démonstration de Kodaira. C'est-à-dire qu'on démontre le lemme en oubliant la contrainte (v). Dans un deuxième temps, on montre en quoi une petite modification de cette preuve permet de démontrer le lemme dans sa totalité.

Démonstration du lemme (première partie)

Pour initialiser la récurrence, on pose :

$$[\varphi_i(z_i, t)]_1 = t_1\beta_{1i}(z_i) + t_2\beta_{2i}(z_i) + \dots + t_l\beta_{li}(z_i).$$

Si $\rho \in \{1, 2, \dots, l\}$ et $i \in I$, on rappelle que $\beta_{\rho i} = \beta_\rho|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{C}^r$ est la restriction de β_ρ à l'ouvert U_i . Les β_ρ sont uniformément bornés, donc il existe un réel a tel que : $\|\beta_{\rho i}(z)\|_\infty \leq \frac{a}{16}$. On a donc bien $\varphi_{i,1}(z_i, t) \ll \frac{a}{16}(t_1 + t_2 + \dots + t_l) \ll A(t)$.

Supposons qu'on ait construit les premiers polynômes homogènes $\varphi_{i,1}, \dots, \varphi_{i,m}$ et qu'ils vérifient nos différentes contraintes jusqu'à l'ordre m . On pose alors :

$$\psi_{ik}(z_k, t) = \left[\varphi_i^m \left(g_{ik}(z_k, \varphi_k^m(z_k, t)), t \right) - f_{ik}(z_k, \varphi_k^m(z_k, t)) \right]_{m+1}.$$

Par définition les $\psi_{ik}(z_k, t)$ sont des polynômes homogènes de degré $m+1$ en t . De plus d'après [Kod62], p. 152-153, les coefficients de ces polynômes sont des 1-cocycles associés au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de V . C'est-à-dire qu'ils vérifient l'égalité :

$$\psi_{ik}(z_k, t) = \psi_{ij}(z_j, t) + F_{ij}(z_j) \psi_{jk}(z_k, t) \quad \forall z \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Mais par hypothèse $H^1(V, \psi) = 0$, il existe donc des $\tilde{\varphi}_{i,m+1}(z_i, t)$, polynômes homogènes de degré $m+1$ en t à coefficients des 0-cochaînes, tels que :

$$\psi_{ik}(z_k, t) = F_{ik}(z_k) \tilde{\varphi}_{k,m+1}(z_k, t) - \tilde{\varphi}_{i,m+1}(z_i, t), \quad z \in U_i \cap U_k.$$

On pose alors $\tilde{\varphi}_i^{m+1} = \varphi_i^m + \tilde{\varphi}_{i,m+1}$ et on vérifie que la fonction $\tilde{\varphi}_i^{m+1}$ vérifie la condition de recollement à l'ordre $m+1$ ([Kod62], p. 154).

Par hypothèse de récurrence, $\varphi_i^m(z_i, t) \ll A(t)$ alors, d'après [Kod62], p. 155-156, il existe une constante c_3 tel que $\psi_{ik}(z_k, t) \ll c_3 A(t)$. La constante c_3 est de la forme cb^{-1} , où c est une constante et b est la constante qui intervient dans la définition de $A(t)$. On rappelle que :

$$A(t) = \frac{a}{16b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} b^n (t_1 + t_2 + \dots + t_l)^n.$$

En particulier c_3 est indépendante de l'entier m . De plus d'après [KS59], §6 on peut choisir $\tilde{\varphi}_{i,m+1}$ tel que $\tilde{\varphi}_{i,m+1}(z_i, t) \ll c_3 c_4 A(t)$, où c_4 est une constante indépendante de m et de b . On a donc :

$$\|\tilde{\varphi}_{i,m+1}(z_i, t)\|_{\infty} \leq c_3 c_4 \frac{a}{16b} \frac{1}{(m+1)^2} b^{m+1} (t_1 + t_2 + \dots + t_l)^{m+1}.$$

En choisissant b dans c_3 de sorte que $c_3 c_4 = 1$, la condition (iv) est vérifiée. Cette majoration nous assure l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que φ_i soit définie pour tout $\|t\|_{\infty} < \epsilon$ sur U_i et tel que la contrainte (i) soit satisfaite. Ceci finit la démonstration de la version faible du théorème de Kodaira. Mais $\tilde{\varphi}_i^{m+1}$ ne vérifie pas (v).

Démonstration du lemme (deuxième partie)

Nous allons maintenant montrer que l'on peut modifier légèrement $\tilde{\varphi}_i^{m+1}$ de façon à vérifier les propriétés (i) à (v). Le point central est que si l'on ajoute à

$\tilde{\varphi}_{i,m+1}$ un polynôme homogène de degré $m + 1$ à coefficients dans $H^0(V, \psi)$, on obtient une application qui vérifie encore (iii). Posons :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{i_1,m+1}(0, t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)) \in \mathbb{C}^r \\ \dots \\ \tilde{\varphi}_{i_p,m+1}(0, t) = (v_1(t), \dots, v_r(t)) \in \mathbb{C}^r \end{cases}$$

La famille $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{rp})$ a été choisie pour contrôler ce qui se passe au-dessus des points A_1, A_2, \dots, A_p . Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{i_1,m+1}(0, t) = u_1(t)\beta_1(0) + \dots + u_r(t)\beta_r(0) \\ \dots \\ \tilde{\varphi}_{i_p,m+1}(0, t) = v_1(t)\beta_{r(p-1)+1}(0) + \dots + v_r(t)\beta_{rp}(0) \end{cases}$$

On rappelle que $\tilde{\varphi}_{i,m+1}(z_i, t)$ est un polynôme homogène de degré $m + 1$ en t . Il en est donc de même pour les $u_1(t), \dots, v_r(t)$. On définit :

$$\delta(z, t) = u_1(t)\beta_1(z) + u_2(t)\beta_2(z) + \dots + v_r(t)\beta_{rp}(z).$$

C'est un polynôme homogène de degré $m + 1$ en t , à coefficients dans $H^0(V, \psi)$. On pose alors $\varphi_{i,m+1}(z_i, t) = \tilde{\varphi}_{i,m+1}(z_i, t) - \delta(z_i, t)$. Par construction $\varphi_{i,m+1}$ vérifie (v) et comme on a ajouté une section globale, la condition de recollement (iii) à l'ordre $m + 1$ reste vérifiée. Enfin dans la première partie, on a vu que :

$$\begin{cases} \|\beta_{\rho i}\|_{\infty} \leq \frac{a}{16} \quad \forall \rho \in \{1, 2, \dots, l\} \quad \forall i \in I \\ \|\tilde{\varphi}_{i,m+1}\|_{\infty} \leq c_3 c_4 \frac{a}{16b} \frac{1}{(m+1)^2} b^{m+1} (t_1 + t_2 + \dots + t_l)^{m+1} \end{cases}$$

on a donc :

$$\begin{aligned} \|\delta(z_i, t)\|_{\infty} &\leq rp \operatorname{Max} \left\{ \|\beta_{1i}\|_{\infty}, \dots, \|\beta_{rp i}\|_{\infty} \right\} \operatorname{Max} \left\{ \|u_1(t)\|_{\infty}, \dots, \|v_r(t)\|_{\infty} \right\} \\ &\leq rp \frac{a}{16} c_3 c_4 \frac{a}{16b} \frac{1}{(m+1)^2} b^{m+1} (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^{m+1}. \end{aligned}$$

Soit :

$$\varphi_{i,m+1}(z_i, t) \ll \left(1 + \frac{arp}{16}\right) c_3 c_4 A(t).$$

En choisissant b dans c_3 de sorte que $(1 + \frac{arp}{16})c_3 c_4 = 1$, la condition (iv) est vérifiée et on peut donc définir les $\varphi_{i,m}$ par récurrence. La majoration (iv) nous assure l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que φ_i soit définie pour tout $\|t\|_{\infty} < \epsilon$ sur U_i et tel que (i) soit vérifié :

$$\|\varphi_i(z_i, t)\|_{\infty} < 1.$$

Ce qui conclut la démonstration du lemme.

On vient de montrer qu'il existe des petits supplémentaires de V transverses en A_1, A_2, \dots, A_p tels que pour tout point Q_1, \dots, Q_p chacun pris dans un de ces supplémentaires, il existe une sous-variété V_t dans la famille de Kodaira qui les contient. \square

Chapitre 8

Annexe

Dans ce chapitre, on donne une définition des espaces twistoriels en termes de spineurs. L'intérêt de cette définition est de mettre en évidence des propriétés plus fines de la fibration twistorielle. On pourra par exemple déterminer le fibré normal aux fibres et calculer les classes de Chern de l'espace twistoriel. Mais avant tout, il nous faut définir l'algèbre de Clifford d'une 4-variété riemannienne.

8.1 Algèbre de Clifford de \mathbb{R}^4

La présentation et les résultats qui suivent sont inspirés du livre de Lawson et Michelsohn [LM89].

8.1.1 Définition

On munit \mathbb{R}^4 de son produit scalaire canonique g et de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) . L'algèbre de Clifford $cl(\mathbb{R}^4)$ associée à (\mathbb{R}^4, g) est la \mathbb{R} -algèbre engendrée par les e_i et soumise aux relations :

$$v.w + w.v = -2g(v, w) \quad \forall (v, w) \in \mathbb{R}^4.$$

On peut construire un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbre $\rho_{\mathbb{R}} : cl(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{H}[2]$ entre l'algèbre de Clifford $cl(\mathbb{R}^4)$ et l'algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans le corps des quaternions en posant :

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{R}}(e_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \rho_{\mathbb{R}}(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \\ \rho_{\mathbb{R}}(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}; & \rho_{\mathbb{R}}(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous serons également amenés à considérer l'algèbre de Clifford complexe $Cl(\mathbb{R}^4) = cl(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}$. Elle s'identifie à la \mathbb{C} -algèbre des matrices complexes 4×4

grâce à l'isomorphisme $\rho : \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \mathbb{C}[4]$ défini par :

$$\begin{aligned} \rho(e_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \rho(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \rho(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \rho(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.1.2 Spineur

Une représentation de $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$ est la donnée d'un \mathbb{C} -espace vectoriel V et d'un morphisme de \mathbb{C} -algèbre $\rho : \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \text{End}(V)$. On dit que V est un $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$ -module. Il est dit irréductible s'il ne contient pas de sous-module autre que le module trivial (i.e. réduit à zéro). On montre que l'algèbre $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4) \simeq \mathbb{C}[4]$ admet une unique représentation irréductible notée \mathcal{S} , c'est la représentation usuelle de $\mathbb{C}[4]$ dans \mathbb{C}^4 . Il faut bien comprendre qu'ici \mathcal{S} n'est rien d'autre que \mathbb{C}^4 et que $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$ s'identifie à $\mathbb{C}[4]$.

Définition : Les éléments de \mathcal{S} sont appelés les spineurs de (\mathbb{R}^4, g) .

On appelle élément de volume et on note w l'élément de $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^4)$ défini par $w = -e_1e_2e_3e_4$. Il ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3, e_4) de \mathbb{R}^4 . Dans l'algèbre de Clifford on a $w^2 = 1$, on a donc la décomposition :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-$$

où $\begin{cases} \mathcal{S}^+ = (1+w)\mathcal{S} \\ \mathcal{S}^- = (1-w)\mathcal{S} \end{cases}$ sont les sous-espaces propres de w associés aux valeurs propres 1 et -1 . On parlera de spineurs positifs et négatifs. Si on note $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ la base canonique de \mathbb{C}^4 alors :

$$\begin{cases} \mathcal{S}^+ = \text{Vect}(\sigma_1, \sigma_2) \\ \mathcal{S}^- = \text{Vect}(\sigma_3, \sigma_4) \end{cases}$$

car :

$$\rho(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Grâce à l'isomorphisme ρ , on peut remarquer qu'un élément $v \in \mathbb{R}^4$ permute \mathcal{S}^+ et \mathcal{S}^- :

$$\forall v \in \mathbb{R}^4, \rho(v) : \begin{cases} \mathcal{S}^+ \longrightarrow \mathcal{S}^- \\ \mathcal{S}^- \longrightarrow \mathcal{S}^+. \end{cases}$$

8.1.3 Groupe spin

On note $spin_4$ le groupe multiplicatif de $cl(\mathbb{R}^4)$ engendré par les produits pairs d'éléments de \mathbb{R}^4 de norme un. La représentation ρ se restreint en une représentation du groupe $spin_4$ dans \mathbb{C} . Comme un élément de \mathbb{R}^4 échange \mathbb{C}^+ et \mathbb{C}^- , un élément de $spin_4$ laisse invariant les sous-espaces \mathbb{C}^+ et \mathbb{C}^- . La représentation ρ du groupe $spin_4$ n'est plus irréductible :

$$\rho : spin_4 \longrightarrow End(\mathbb{C}^+) \oplus End(\mathbb{C}^-).$$

Proposition 1 : *La représentation ρ induit un isomorphisme entre le groupe $spin_4$ et le groupe $SU(2) \times SU(2)$.*

Preuve. Pour s'en convaincre, on donne l'image par ρ d'une famille "génératrice" du groupe $spin_4$:

$$\begin{aligned} \rho(e_1e_2) &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}; & \rho(e_1e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \rho(e_1e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}; & \rho(e_2e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}; \\ \rho(e_2e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; & \rho(e_3e_4) &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}; \\ \rho(e_1e_2e_3e_4) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

8.1.4 Revêtement universel de $SO(4)$

Le groupe spécial orthogonal $SO(4)$ n'est pas simplement connexe, son groupe fondamental est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et son revêtement universel est le groupe $spin_4$. On donne ici une réalisation de ce revêtement. Pour cela, on identifie \mathbb{R}^4 et \mathbb{C}^2 au corps des quaternions \mathbb{H} par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ a + jb &\longmapsto (a, b). \end{aligned}$$

On a une identification entre l'ensemble $Sp(1)$ des quaternions de norme un et le groupe spécial unitaire $SU(2)$:

$$\begin{array}{ccc} Sp(1) & \longrightarrow & SU(2) \\ q & \longmapsto & q. : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ & & x \longmapsto qx. \end{array}$$

Matriciellement cet isomorphisme s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} Sp(1) & \longrightarrow & SU(2) \\ a + jb & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Le revêtement universel de $SO(4)$ est donné par l'application :

$$\begin{array}{ccc} Ad : SU(2)_+ \times SU(2)_- & \longrightarrow & SO(4) \\ (q_+, q_-) & \longmapsto & q_+ \cdot q_-^{-1} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ & & x \longmapsto q_+ x q_-^{-1}. \end{array}$$

Si on note $\mathbb{Z}_2 \simeq \{(1, 1), (-1, -1)\}$, on a :

$$SO(4) \simeq SU(2)_+ \times SU(2)_- / \mathbb{Z}_2 \simeq spin_4 / \mathbb{Z}_2.$$

8.2 Structure presque complexe et spineur

Dans ce paragraphe on souhaite faire le lien entre spineur et structure presque complexe. Quand on aura compris ce lien, on pourra donner une nouvelle définition d'espace twistoriel.

8.2.1 Espace isotrope et spineur

On étend par linéarité le produit scalaire de \mathbb{R}^4 à son complexifié \mathbb{C}^4 en conservant la notation g .

Définition : *Un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^4$ est isotrope (pour g) si pour tout couple de vecteur $(v, w) \in V$ on a : $g(v, w) = 0$.*

On définit le produit scalaire hermitien h sur \mathbb{C}^4 en posant $h(v, w) = g(v, \bar{w})$. Le sous-espace V est isotrope si et seulement si pour le produit h , les sous-espaces V et \bar{V} sont orthogonaux.

Notation : *On note \mathfrak{I} l'ensemble des sous-espaces isotropes de \mathbb{C}^4 de dimension 2.*

On regarde \mathbb{C}^4 comme un sous-ensemble de l'algèbre $Cl(\mathbb{R}^4)$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}$ un spineur de \mathbb{R}^4 , on considère la multiplication à droite :

$$\begin{aligned} R_\sigma : \mathbb{C}^4 &\longrightarrow \mathcal{S} \\ v &\longmapsto v \cdot \sigma \end{aligned}$$

Remarque : Pour tout spineur positif non nul σ de \mathbb{R}^4 , le sous-espace $Ker(R_\sigma)$ est isotrope de dimension deux, c'est-à-dire $Ker(R_\sigma) \in \mathcal{I}$.

Preuve. Si on regarde la forme des matrices $\rho(v)$ lorsque v est un élément de \mathbb{C}^4 , on en déduit que pour tout spineur positif non nul $\sigma \in \mathcal{S}^+$, l'image de R_σ est exactement \mathcal{S}^- et donc de dimension deux. De plus son noyau est isotrope : si $v \cdot \sigma = w \cdot \sigma = 0$ alors $(v \cdot w + w \cdot v) \cdot \sigma = -2g(v, w)\sigma = 0$. Comme σ est non nul, on en déduit que pour tout couple (v, w) dans le noyau de R_σ , les vecteurs v et w sont orthogonaux (pour g). \square

Pour tout nombre complexe non nul $\lambda \in \mathbb{C}$ le noyau de R_σ est égale à celui de $R_{\lambda\sigma}$. On note $\mathbb{P}(\mathcal{S}^+)$ l'espace projectif complexe de \mathcal{S}^+ , on a donc une application :

$$\begin{aligned} K : \mathbb{P}(\mathcal{S}^+) &\longrightarrow \mathcal{I} \\ [\sigma] &\longmapsto Ker R_\sigma. \end{aligned}$$

On rappelle que (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de \mathbb{R}^4 et que (σ_3, σ_4) est une base de \mathcal{S}^- . On définit les applications $s_i : \mathcal{S}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^4$ en posant :

$$\begin{cases} s_1(\sigma) = \sum_{i=1}^4 g(e_i \cdot \sigma, \sigma_3) e_i \\ s_2(\sigma) = \sum_{i=1}^4 g(e_i \cdot \sigma, \sigma_4) e_i \end{cases}$$

Proposition 2 : La famille $(s_1(\sigma), s_2(\sigma))$ est une base de $Ker(R_\sigma)$. L'application K est donc définie ainsi :

$$\begin{aligned} K : \mathbb{P}(\mathcal{S}^+) &\longrightarrow \mathcal{I} \\ [\sigma] &\longmapsto Vect(s_1(\sigma), s_2(\sigma)). \end{aligned}$$

Cette proposition nous sera très utile pour déterminer le fibré normal aux fibres de l'espace twistoriel (proposition 7).

Preuve. Soit σ un spineur positif de coordonnées (α, β) dans la base (σ_1, σ_2) de \mathcal{S}^+ . On raisonne en coordonnées, grâce à l'isomorphisme ρ on peut écrire :

$$\begin{aligned} e_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, & e_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i\alpha \\ -i\beta \end{pmatrix}, \\ e_3 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}, & e_4 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i\beta \\ -i\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par définition on a donc :

$$\begin{cases} s_1(\sigma) = s_1(\alpha, \beta) = -\alpha e_1 + i\alpha e_2 - \beta e_3 - i\beta e_4 \\ s_2(\sigma) = s_2(\alpha, \beta) = -\beta e_1 - i\beta e_2 + \alpha e_3 - i\alpha e_4. \end{cases}$$

De cette écriture, on voit bien que $(s_1(\sigma), s_2(\sigma))$ est une famille libre. Pour montrer que $(s_1(\sigma), s_2(\sigma))$ est une base de $\text{Ker}(R_\sigma)$, il faut montrer que $s_i(\sigma) \in \text{Ker}(R_\sigma)$. Pour cela, on calcule $s_i(\sigma) \cdot \sigma$:

$$\begin{cases} s_1(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^2 \\ -\alpha\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta^2 \\ -\alpha\beta \end{pmatrix} = 0 \\ s_2(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ -\beta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha\beta \\ \alpha^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha\beta \\ -\alpha^2 \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

La famille $(s_1(\sigma), s_2(\sigma))$ est bien une base de $\text{Ker}(R_\sigma)$. \square

Proposition 3 : *L'application K est une injection. On notera \mathfrak{J}^+ l'image de $\mathbb{P}(\mathfrak{S}^+)$ par cette application, de sorte que K est une bijection de $\mathbb{P}(\mathfrak{S}^+)$ dans \mathfrak{J}^+ .*

Preuve. Soient $\sigma = (\alpha, \beta)$ et $\tilde{\sigma} = (\gamma, \delta)$ deux spineurs positifs tels qu'on ait l'égalité $\text{Ker}(R_\sigma) = \text{Ker}(R_{\tilde{\sigma}})$. On veut montrer que σ et $\tilde{\sigma}$ sont proportionnels.

On a vu que $s_1(\sigma)$ était un élément du noyau de R_σ . Par hypothèse, c'est donc aussi un élément de $\text{Ker}(R_{\tilde{\sigma}})$, c'est-à-dire $s_1(\sigma) \cdot \tilde{\sigma} = 0$. Mais :

$$\begin{aligned} s_1(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha\gamma \\ \alpha\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta\delta \\ -\beta\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta\delta \\ -\beta\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2(\alpha\delta - \beta\gamma) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $s_1(\sigma) \cdot \tilde{\sigma} = 0$ alors σ et $\tilde{\sigma}$ sont proportionnels. D'où l'injectivité de K . \square

8.2.2 Structure presque complexe et espace isotrope

On note $SEVC = \{J \in SO(4) / J^2 = -Id\}$ l'ensemble des structures d'espace vectoriel complexe sur \mathbb{R}^4 qui respectent la métrique de \mathbb{R}^4 et $SEVC^+$ le sous-ensemble de $SEVC$ des structures complexes qui respectent son orientation. Soit J une structure complexe de $SEVC$, on la prolonge par linéarité sur $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{C}$. On a alors une décomposition de \mathbb{C}^4 en sous-espaces propres :

$$\mathbb{C}^4 = V(J) \oplus \overline{V(J)}, \quad \text{où}$$

$$V(J) = \{v \in \mathbb{C}^4 / Jv = -iv\} = \{v_0 + iJv_0 / v_0 \in \mathbb{R}^4\}.$$

Remarque : Pour tout $J \in SEVC$ le sous-espace $V(J)$ est un espace isotrope de dimension deux, c'est-à-dire $V(J) \in \mathfrak{J}$.

Preuve. Le sous-espace $V(J)$ est de dimension deux. De plus, pour tout couple $(v_0 + iJv_0, w_0 + iJw_0) \in V(J)$ on a :

$$g(v_0 + iJv_0, w_0 + iJw_0) = g(v_0, w_0) - g(Jv_0, Jw_0) + ig(Jv_0, w_0) + ig(v_0, Jw_0) = 0. \quad \square$$

On a donc une application naturelle :

$$\begin{array}{ccc} V : SEVC & \longrightarrow & \mathfrak{J} \\ J & \longmapsto & V(J) \end{array}$$

Proposition 4 : L'application V est une bijection de $SEVC^+$ dans \mathfrak{J}^+ .

Avant de démontrer cette proposition, on peut énoncer un résultat qui se déduit immédiatement des propositions 3 et 4.

Corollaire : L'ensemble $SEVC^+$ des structures complexes qui respectent l'orientation et la métrique de \mathbb{R}^4 est donc en bijection avec l'ensemble de $\mathbb{P}(\$^+)$:

$$\mathbb{P}(\$^+) \xrightarrow[\sim]{K} \mathfrak{J}^+ \xrightarrow[\sim]{V^{-1}} SEVC^+.$$

C'est grâce à cet isomorphisme qu'on va pouvoir donner une nouvelle définition d'espace twistoriel.

Preuve de la proposition 4. Comme une application linéaire est entièrement déterminée par ses sous-espaces propres, l'application $V : SEVC \longrightarrow \mathfrak{J}$ est bien une bijection. Pour conclure, il faut juste vérifier que cette application transforme $SEVC^+$ en \mathfrak{J}^+ . Pour cela on montre que $V^{-1}(\mathfrak{J}^+) = SEVC^+$.

Soit V un élément de \mathfrak{J}^+ , c'est en particulier un sous-espace isotrope de dimension deux. On choisit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + iw_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 + iw_2)\right)$ une base de V orthonormée pour le produit scalaire hermitien h associé à la métrique g . Comme V est isotrope, on vérifie facilement que (v_1, w_1, v_2, w_2) est une base orthonormée de \mathbb{R}^4 pour la métrique g . Grâce à l'isomorphisme K :

$$\begin{array}{ccc} K : \mathbb{P}(\$^+) & \longrightarrow & \mathfrak{J}^+ \\ [\sigma] & \longmapsto & Ker R_\sigma \end{array}$$

on sait qu'il existe un spineur positif σ tel que $V = \text{Ker}(R_\sigma)$:

$$\begin{aligned} (v_1 + iw_1).\sigma = 0 &\implies v_1\sigma = -iw_1\sigma \\ &\implies v_1.v_1\sigma = -iv_1.w_1\sigma \\ &\implies -g(v_1, v_1)\sigma = -iv_1.w_1\sigma \\ &\implies iv_1w_1.\sigma = \sigma. \end{aligned}$$

Et de même $iv_2w_2.\sigma = \sigma$, on a donc :

$$-v_1w_1v_2w_2.\sigma = \sigma.$$

L'élément de volume w , défini à la section 8.1.2, est par définition $\pm v_1w_1v_2w_2$ suivant que la base (v_1, w_1, v_2, w_2) est directe ou indirecte. Mais comme σ est un spineur positif, on a $w.\sigma = \sigma$. On en déduit que la base (v_1, w_1, v_2, w_2) est directe. Soit J l'endomorphisme associé à V par l'isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} SEVC & \longrightarrow & \mathfrak{J} \\ J & \longmapsto & V(J). \end{array}$$

C'est-à-dire l'unique structure complexe qui vérifie $V(J) = V$. Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + iw_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2 + iw_2)\right)$ est une base de $V(J)$, on a $Jv_1 = w_1$ et $Jv_2 = w_2$ donc J respecte l'orientation.

On vient de montrer l'inclusion $V^{-1}(\mathfrak{J}^+) \subset SEVC^+$. Pour conclure, il faut montrer que tout point de $SEVC^+$ est atteint. Dans la base (σ_1, σ_2) de \mathfrak{S}^+ on note $(\alpha, \beta) = (\alpha_1 + i\alpha_2, \beta_1 + i\beta_2)$ les coordonnées d'un spineur positif σ et J_σ la structure complexe associée à σ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathfrak{S}^+) & \xrightarrow{K} & \mathfrak{J} \xrightarrow{V^{-1}} SEVC^+ \\ \sigma & \longmapsto & J_\sigma. \end{array}$$

On rappelle que (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Lemme : Soit $\sigma = (\alpha, \beta)$ un spineur positif non nul et $J_\sigma = J_{(\alpha, \beta)}$ la structure complexe sur \mathbb{R}^4 associée. Avec ces notations, on a :

$$\begin{aligned} J_{(0,1)}e_1 &= e_2 \\ J_{(1,\beta)}e_1 &= \frac{1}{1 + |\beta|^2} \left((|\beta|^2 - 1)e_2 + 2\beta_2e_3 + 2\beta_1e_4 \right) \quad \text{où } \beta = \beta_1 + i\beta_2. \end{aligned}$$

On admet provisoirement ce lemme. Quelque soit $J \in SEVC^+$, il existe un spineur positif σ de coordonnées (α, β) tel que $Je_1 = J_\sigma e_1$ et comme J et J_σ respectent l'orientation, le lemme 2 de la section 3.1.2 nous permet de conclure

que $J = J_\sigma$. On a donc bien $V^{-1}(\mathfrak{J}^+) = SEVC^+$. Ceci conclut la démonstration de la proposition 4.

Reste à prouver le lemme.

Preuve du lemme. On rappelle que $(s_1(\sigma), s_2(\sigma))$ est une base de $V(J_\sigma)$. Or :

$$s_2(0, 1) = -e_1 - ie_2 \in V(J_{(0,1)})$$

donc $J_{(0,1)}e_1 = e_2$. De même,

$$s_1(1, \beta) + \bar{\beta}s_2(1, \beta) \in V(J_{(1,\beta)})$$

donc $J_{(1,\beta)}e_1 = \frac{1}{1+|\beta|^2} \left((|\beta|^2 - 1)e_2 + 2\beta_2e_3 + 2\beta_1e_4 \right)$. \square

8.3 Espace twistoriel d'une 4-variété

8.3.1 Variété spin

Soit (M, g) une 4-variété riemannienne orientée, son fibré tangent $TM \rightarrow M$ est localement trivial. On peut donc toujours définir localement le fibré des algèbres de Clifford de (M, g) et le fibré des spineurs. En étudiant les conditions de recollement, on en déduit que le fibré de Clifford $cl(TM) \rightarrow M$ est bien défini globalement mais que le fibré des spineurs $\mathcal{S} \rightarrow M$ lui n'est généralement pas défini partout.

Définition : Une 4-variété riemannienne orientée est dite *spin* si son groupe structural, initialement dans $SO(4)$, se relève au groupe $spin_4$.

On montre que c'est une contrainte topologique qui correspond à l'annulation de la deuxième classe de Stiefel-Whitney de M . Une surface complexe est donc spin si la réduction modulo deux de sa première classe de Chern (entière) est nulle (car $c_1 \equiv w_2 \pmod{2}$).

Proposition 5 [LM89] : Une variété riemannienne orientée M est spin si et seulement si on peut définir globalement le fibré des spineurs $\mathcal{S} \rightarrow M$ qui est le fibré de fibre en m l'unique $Cl(T_m M)$ -module irréductible.

Petite idée de la preuve. On rappelle qu'on a un isomorphisme entre $SO(4)$ et $SU(2)_+ \times SU(2)_- / \mathbb{Z}_2$. Si la variété M est spin les cocycles de son fibré tangent $g_{\alpha\beta}$ se relève dans $SU(2)_+ \times SU(2)_-$. On note $(g_{\alpha\beta}^+, g_{\alpha\beta}^-)$ les représentants des $g_{\alpha\beta}$ dans $SU(2)_+ \times SU(2)_-$. On construit alors le fibré $\mathcal{S}^+ \rightarrow M$ comme le fibré vectoriel de cocycles les $g_{\alpha\beta}^+$ et de fibre \mathbb{C}^2 . De même on construit $\mathcal{S}^- \rightarrow M$ avec

$g_{\alpha\beta}^-$. Si (M, g) est spin on peut donc définir le fibré $\mathbb{S} = \mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^-$, on montre alors que c'est bien le fibré des spineurs de (M, g) .

Réciproquement, supposons qu'on puisse construire le fibré $\mathbb{S} \rightarrow M$. Comme pour le cas de \mathbb{R}^4 , on peut définir l'élément de volume $w \in \mathcal{C}l(TM)$. Le fibré \mathbb{S} se décompose, là encore, en deux sous-fibrés $\mathbb{S}^+ \oplus \mathbb{S}^-$ qui sont les sous-espaces propres de l'élément de volume. Les cocycles de ces deux fibrés déterminent alors un relèvement du groupe structural de M dans le groupe $spin_4$. \square

Remarque : le groupe structural du fibré $\mathbb{S}^- \rightarrow M$ est donc $SU(2)_-$. De même le groupe structural du fibré $\mathbb{S}^+ \rightarrow M$ est donc $SU(2)_+$. Cette remarque nous sera utile pour calculer les classes de Chern de l'espace twistoriel (section 8.4.2).

8.3.2 Espace twistoriel et spineur

Dans le cas de \mathbb{R}^4 , on a montré que $SEVC^+ \simeq \mathbb{P}(\mathbb{S}^+)$. Plus généralement, l'espace twistoriel de (M, g) s'identifie au fibré projectif $\mathbb{P}(\mathbb{S}^+) \rightarrow M$ [LM89], [AHS78]. Autant le fibré $\mathbb{S}^+ \rightarrow M$ n'existe que si (M, g) est spin, autant le fibré $\mathbb{P}(\mathbb{S}^+) \rightarrow M$ existe toujours. En effet son groupe structural est $SU(2)_+/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$. On retrouve ainsi une partie de la proposition 2 de la section 3.2.1.

Proposition 6 [AHS78] : Pour toute 4-variété riemannienne orientée (M, g) son fibré twistoriel est le fibré $\mathbb{P}(\mathbb{S}^+) \rightarrow M$.

L'avantage de cette définition est qu'elle permet de donner des propriétés plus fines. Ainsi, c'est ce point de vu qu'adopte Atiyah, Hitchin et Singer dans [AHS78] pour démontrer leur théorème d'intégrabilité. Il existe toutefois des démonstrations de leur théorème qui ne font pas appel aux spineurs [dBN98], [DV83] mais ces démonstrations sont souvent plus calculatoires.

8.3.3 Structure presque complexe sur $\mathbb{P}(\mathbb{S}^+)$

Pour ce familiariser avec cette définition, on redonne la construction de la structure presque complexe canonique sur l'espace twistoriel $\mathbb{P}(\mathbb{S}^+)$ de (M, g) .

Grâce à la connexion de Levi-Civita sur M , on a une décomposition du fibré tangent de $\mathbb{P}(\mathbb{S}^+)$ en somme directe d'un sous-espace horizontal et d'un sous-espace vertical. Soit $(m, [\sigma])$ un point de $\mathbb{P}(\mathbb{S}^+)$, la décomposition s'écrit :

$$T_{(m, [\sigma])} \mathbb{P}(\mathbb{S}^+) = H_{(m, [\sigma])} \oplus V_{(m, [\sigma])}.$$

On munit l'espace vertical de la structure complexe donnée par celle de la fibre. L'espace horizontal $H_{(m, [\sigma])}$ est isomorphe à l'espace tangent $T_m M$. On munit cet espace de la structure complexe associée au sous-espace isotrope $\text{Ker} R_\sigma$.

8.4 Fibré normal

Soit H et V le sous-espace horizontal et vertical de $\mathbb{P}(\$^+)$. On fixe un point m de M et dans la fibration $\mathbb{P}(\$^+) \rightarrow M$, on note $\mathbb{P}(\$_m^+) \simeq \mathbb{C}P^1$ la fibre au-dessus de m . Soit $N \rightarrow \mathbb{P}(\$_m^+)$ le fibré normal de cette fibre.

$$\begin{array}{ccc}
 T\mathbb{P}(\$^+) \simeq H \oplus V & & N \simeq H \simeq T_m M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{P}(\$^+) & & \mathbb{P}(\$_m^+) \simeq \mathbb{C}P^1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & & m
 \end{array}$$

Pour tout élément $\phi \in \mathbb{C}^{2*}$, on note $[\phi]$ sa projection dans $\mathbb{C}P^1$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^{2*} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\
 \phi & \longmapsto & [\phi].
 \end{array}$$

Vu dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^{2*}$, le fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)$ au-dessus de $\mathbb{C}P^1$ est le fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(-1) & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\
 ([\phi], \phi) & \longmapsto & [\phi].
 \end{array}$$

On notera $\mathcal{O}(-1)_{[\phi]}$ sa fibre au-dessus d'un point $[\phi] \in \mathbb{C}P^1$. Le fibré dual de $\mathcal{O}(-1)$ est par définition le fibré $\mathcal{O}(1)$. C'est l'unique fibré en droite au-dessus de $\mathbb{C}P^1$ dont la première classe de Chern est 1.

Proposition 7 [AHS78] : *Le fibré normal $N \rightarrow \mathbb{P}(\$_m^+)$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$.*

Preuve. Soit $[\sigma] \in \mathbb{P}(\$_m^+)$ et $\sigma \in \$_m^+$ un de ses représentants. On note $N_{[\sigma]}$ la fibre de $N \rightarrow \mathbb{P}(\$_m^+)$ au-dessus de $[\sigma]$. Cette fibre est canoniquement isomorphe à l'espace tangent $T_m M$ muni de la structure complexe J_σ associée au spineur σ .

Dans le cas de \mathbb{R}^4 , on a montré qu'à tout spineur positif non nul σ , on pouvait associer une structure complexe J_σ . Le sous-espace propre $V(J_\sigma)$ de J_σ associé à la valeur propre $-i$ est engendré par $(s_1(\sigma), s_2(\sigma))$, où s_1 et s_2 sont deux applications linéaires de $\$^+$ dans \mathbb{C}^4 . On rappelle que

$$\begin{aligned}
 V(J_\sigma) &= \{v \in \mathbb{C}^4 / J_\sigma v = -iv\} \\
 &= \{v_0 + iJv_0 / v_0 \in \mathbb{R}^4\}
 \end{aligned}$$

Lemme : *Il existe un \mathbb{C} -isomorphisme entre $V(J_\sigma)$ et le dual $(\mathbb{R}^4, J_\sigma)^*$ de \mathbb{R}^4 muni de la structure complexe J_σ .*

calculer ses classes de Chern. On note c_i sa $i^{\text{ième}}$ classe de Chern et c la classe totale. Soit h le générateur du $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^*(M, \mathbb{R})$ l'anneau de cohomologie de M . Par le théorème de Leray-Hirsch [BT82], l'anneau de cohomologie de Z est un $H^*(M, \mathbb{R})$ -module engendré par h . On note χ et τ la caractéristique d'Euler et la signature de M . Par le théorème de Leray-Hirsch, on peut également considérer χ et τ comme des éléments de $H^4(Z, \mathbb{R})$. Dans les deux cas, on utilisera la même notation.

Dans ce paragraphe, on va démontrer le résultat suivant.

Proposition 8 [Hit81] : *Les classes de Chern de l'espace twistoriel de (M, g) sont :*

$$\begin{cases} c_1 &= 4h \\ c_2 &= 3\chi + 3\tau \\ c_3 &= 2h\chi \end{cases}$$

Preuve. La métrique sur M induit une décomposition du fibré tangent de Z en un sous-espace vertical V et un sous-espace horizontal H :

$$TZ = H \oplus V.$$

Pour tout point m de M , le fibré normal $N_m \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{S}_m^+)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ et plus généralement on peut montrer qu'il s'identifie à $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{S}_m^-$ [AHS78]. Le sous-fibré H est donc isomorphe à $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{S}^-$ et par conséquent :

$$\begin{aligned} c(H) &= c(\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{S}^-) \\ &= c_0(\mathbb{S}^-) \left(1 + c_1(\mathcal{O}(1))\right)^2 + c_1(\mathbb{S}^-) \left(1 + c_1(\mathcal{O}(1))\right) + c_2(\mathbb{S}^-) \\ &= (1 + h)^2 + c_1(\mathbb{S}^-)(1 + h) + c_2(\mathbb{S}^-). \end{aligned}$$

Mais $\mathbb{S}^- \rightarrow M$ est un fibré de groupe structural $SU(2)$ (cf. section 8.3.1), sa première classe de Chern est donc nulle :

$$c(H) = 1 + 2h + h^2 + c_2(\mathbb{S}^-).$$

Le fibré H est topologiquement isomorphe au tiré en arrière π^*TM :

$$\begin{array}{ccc} H \simeq \pi^*TM & \xrightarrow[\sim]{d\pi} & TM \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Par conséquent, si on note τ et χ sont la signature et la caractéristique d'Euler de M , on a :

$$\begin{cases} 4h^2 = c_1(H)^2 = 3\tau + 2\chi \\ h^2 + c_2(\mathbb{S}^-) = c_2(H) = \chi. \end{cases}$$

Le sous-fibré V est le fibré tangent aux fibres de $\pi : Z \rightarrow M$. Ainsi, si m est un point de M alors $V_{(m, \cdot)}$ est l'espace tangent de $\mathbb{P}(\mathcal{S}_m^+) \simeq \mathbb{C}P^1$. Il est classique de voir que $(V \oplus 1)_{(m, \cdot)} \simeq \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{S}_m^+$. En effet, si on regarde $\mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ comme un sous-fibré de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^{2*} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ on a :

$$\begin{aligned} TCP^1 \oplus 1 &= Hom(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)^\perp) \oplus Hom(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)) \\ &= Hom(\mathcal{O}(-1), \mathbb{C}^2) \\ &= \mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

On vient de montrer que $V \oplus 1 \simeq \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{S}^+$, on peut maintenant calculer les classes de Chern du fibré $V \rightarrow M$:

$$\begin{aligned} c(V) &= c(V \oplus 1) \\ &= c(\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{S}^+) \\ &= 1 + 2h. \end{aligned}$$

On peut alors conclure :

$$\begin{aligned} c(Z) &= c(V).c(H) \\ &= (1 + 2h).(1 + 2h + h^2 + c_2(\mathcal{S}^-)) \\ &= (1 + 2h).(1 + 2h + \chi) \\ &= 1 + 4h + (3\chi + 3\tau) + 2h\chi \end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration de la proposition 8. \square

Bibliographie

- [AHS78] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 362(1711) :425–461, 1978.
- [AMP99] D. V. Alekseevsky, S. Marchiafava, and M. Pontecorvo. Compatible complex structures on almost quaternionic manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(3) :997–1014, 1999.
- [Bar75] D. Barlet. Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, II (Sém. François Norguet, 1974–1975)*, pages 1–158. Lecture Notes in Math., Vol. 482. Springer, Berlin, 1975.
- [Bel00] F. A. Belgun. On the metric structure of non-Kähler complex surfaces. *Math. Ann.*, 317(1) :1–40, 2000.
- [Bes81] A. L. Besse. *Géométrie riemannienne en dimension 4*, volume 3 of *Textes Mathématiques [Mathematical Texts]*. CEDIC, Paris, 1981. Papers from the Arthur Besse seminar held at the Université de Paris VII, Paris, 1978/1979.
- [Bes87] A. L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [Bla56] A. Blanchard. Sur les variétés analytiques complexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)*, 73 :157–202, 1956.
- [Bog82] F. A. Bogomolov. Surfaces of class VII_0 and affine geometry. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(4) :710–761, 896, 1982.

- [Bou81a] J.-P. Bourguignon. Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein. *Invent. Math.*, 63(2) :263–286, 1981.
- [Bou81b] J.-P. Bourguignon. Ricci curvature and Einstein metrics. In *Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1979)*, volume 838 of *Lecture Notes in Math.*, pages 42–63. Springer, Berlin, 1981.
- [Boy86] C. P. Boyer. Conformal duality and compact complex surfaces. *Math. Ann.*, 274(3) :517–526, 1986.
- [Boy88] C. P. Boyer. A note on hyper-Hermitian four-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(1) :157–164, 1988.
- [Bro78] N. Brotherton. Some parallelizable four-manifolds not admitting a complex structure. *Bull. London Math. Soc.*, 10(3) :303–304, 1978.
- [BT82] R. Bott and L. W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Cam91] F. Campana. On twistor spaces of the class C . *J. Differential Geom.*, 33(2) :541–549, 1991.
- [Dąb82] K. Dąbrowski. Moduli spaces for Hopf surfaces. *Math. Ann.*, 259(2) :201–225, 1982.
- [dBN98] P. de Bartolomeis and A. Nannicini. Introduction to differential geometry of twistor spaces. In *Geometric theory of singular phenomena in partial differential equations (Cortona, 1995)*, *Sympos. Math.*, XXXVIII, pages 91–160. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [dC92] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [Deb01] O. Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Des05] G. Deschamps. 4-variétés parallélisables sans structure complexe dont l'espace twistoriel est complexe. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341(1) :35–38, 2005.
- [DV83] M. Dubois-Violette. Structures complexes au-dessus des variétés, applications. In *Mathematics and physics (Paris, 1979/1982)*, volume 37 of *Progr. Math.*, pages 1–42. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [FM94] R. Friedman and J. W. Morgan. *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, volume 27 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

-
- [Fuj02] A. Fujiki. Topology of compact self-dual manifolds whose twistor space is of positive algebraic dimension. *J. Math. Soc. Japan*, 54(3) :587–608, 2002.
- [Gau81] P. Gauduchon. Surfaces kähleriennes dont la courbure vérifie certaines conditions de positivité. In *Riemannian geometry in dimension 4 (Paris, 1978/1979)*, volume 3 of *Textes Math.*, pages 220–263. CEDIC, Paris, 1981.
- [Gau91] P. Gauduchon. Structures de Weyl et théorèmes d’annulation sur une variété conforme autoduale. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 18(4) :563–629, 1991.
- [Gau95] P. Gauduchon. Structures de Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et variétés de type $S^1 \times S^3$. *J. Reine Angew. Math.*, 469 :1–50, 1995.
- [Gau97] P. Gauduchon. Canonical connections for almost-hypercomplex structures. *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, 366 :123–136, 1997.
- [Gol83] W. M. Goldman. Conformally flat manifolds with nilpotent holonomy and the uniformization problem for 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278(2) :573–583, 1983.
- [GS99] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz. *4-manifolds and Kirby calculus*, volume 20 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [HH58] F. Hirzebruch and H. Hopf. Felder von Flächenelementen in 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 136 :156–172, 1958.
- [Hit74a] N. Hitchin. Compact four-dimensional Einstein manifolds. *J. Differential Geometry*, 9 :435–441, 1974.
- [Hit74b] N. Hitchin. Harmonic spinors. *Advances in Math.*, 14 :1–55, 1974.
- [Hit81] N. Hitchin. Kählerian twistor spaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 43(1) :133–150, 1981.
- [Hit84] N. Hitchin. Twistor construction of Einstein metrics. In *Global Riemannian geometry (Durham, 1983)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl., pages 115–125. Horwood, Chichester, 1984.
- [Ino74] M. Inoue. On surfaces of Class VII₀. *Invent. Math.*, 24 :269–310, 1974.
- [Kam86] Y. Kamishima. Conformally flat manifolds whose development maps are not surjective. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 294(2) :607–623, 1986.
- [Kat75] M. Kato. Topology of Hopf surfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 27 :222–238, 1975.
- [Kat80] M. Kato. Compact differentiable 4-folds with quaternionic structures. *Math. Ann.*, 248(1) :79–96, 1980.

- [Kat89] M. Kato. Erratum : “Compact differentiable 4-folds with quaternionic structures” [Math. Ann. **248** (1980), no. 1, 79–96 ; MR0569412 (81h :53037)]. *Math. Ann.*, 283(2) :352, 1989.
- [Kli98] B. Klingler. Structures affines et projectives sur les surfaces complexes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(2) :441–477, 1998.
- [KN96] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Kod62] K. Kodaira. A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 75 :146–162, 1962.
- [Kod66] K. Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces. II. *Amer. J. Math.*, 88 :682–721, 1966.
- [KS59] K. Kodaira and D. C. Spencer. A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems. *Amer. J. Math.*, 81 :477–500, 1959.
- [Kui49] N. H. Kuiper. On conformally-flat spaces in the large. *Ann. of Math. (2)*, 50 :916–924, 1949.
- [Kul72] R. S. Kulkarni. Conformally flat manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 69 :2675–2676, 1972.
- [Laf82] J. Lafontaine. Remarques sur les variétés conformément plates. *Math. Ann.*, 259(3) :313–319, 1982.
- [LeB99] C. LeBrun. Topology versus Chern numbers for complex 3-folds. *Pacific J. Math.*, 191(1) :123–131, 1999.
- [Lee97] J. M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.
- [LM89] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [MN00] T. Matumoto and N. Nakagawa. Explicit description of Hopf surfaces and their automorphism groups. *Osaka J. Math.*, 37(2) :417–424, 2000.
- [Nar66] R. Narasimhan. *Introduction to the theory of analytic spaces*. Lecture Notes in Mathematics, No. 25. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [NN57] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 65 :391–404, 1957.
- [Pet98] P. Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.

-
- [Pon91a] M. Pontecorvo. Algebraic dimension of twistor spaces and scalar curvature of anti-self-dual metrics. *Math. Ann.*, 291(1) :113–122, 1991.
- [Pon91b] M. Pontecorvo. Hermitian surfaces and a twistor space of algebraic dimension 2. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 113(1) :177–186, 1991.
- [Pon92a] M. Pontecorvo. On twistor spaces of anti-self-dual Hermitian surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 331(2) :653–661, 1992.
- [Pon92b] M. Pontecorvo. Uniformization of conformally flat Hermitian surfaces. *Differential Geom. Appl.*, 2(3) :295–305, 1992.
- [Pon97] M. Pontecorvo. Complex structures on Riemannian four-manifolds. *Math. Ann.*, 309(1) :159–177, 1997.
- [Poo88] Y. S. Poon. Algebraic dimension of twistor spaces. *Math. Ann.*, 282(4) :621–627, 1988.
- [Sal85] S. Salamon. Harmonic and holomorphic maps. In *Geometry seminar “Luigi Bianchi” II—1984*, volume 1164 of *Lecture Notes in Math.*, pages 161–224. Springer, Berlin, 1985.
- [Sal89] S. Salamon. *Riemannian geometry and holonomy groups*, volume 201 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.
- [Sal91] S. Salamon. Special structures on four-manifolds. *Riv. Mat. Univ. Parma (4)*, 17* :109–123 (1993), 1991. Conference on Differential Geometry and Topology (Italian) (Parma, 1991).
- [Sch84] R. Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2) :479–495, 1984.
- [Sma59] S. Smale. Diffeomorphisms of the 2-sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 :621–626, 1959.
- [Som75] A. J. Sommese. Quaternionic manifolds. *Math. Ann.*, 212 :191–214, 1974/75.
- [ST69] I. M. Singer and J. A. Thorpe. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. pages 355–365, 1969.
- [Tau92] C. H. Taubes. The existence of anti-self-dual conformal structures. *J. Differential Geom.*, 36(1) :163–253, 1992.
- [Tel94] A. D. Teleman. Projectively flat surfaces and Bogomolov’s theorem on class VII₀ surfaces. *Internat. J. Math.*, 5(2) :253–264, 1994.
- [Wal86] C. T. C. Wall. Geometric structures on compact complex analytic surfaces. *Topology*, 25(2) :119–153, 1986.
- [Woo92] J. C. Wood. Harmonic morphisms and Hermitian structures on Einstein 4-manifolds. *Internat. J. Math.*, 3(3) :415–439, 1992.

- [Wu52] W.-T. Wu. *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*. Actualités Sci. Ind., no. 1183. Hermann & Cie, Paris, 1952. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.
- [Yau76] S. T. Yau. Parallelizable manifolds without complex structure. *Topology*, 15(1) :51–53, 1976.

Résumé

Dans cette thèse, nous utilisons la théorie des espaces twistoriels afin de construire des structures complexes non standards (en un sens bien précis) sur des produits de 4-variétés réelles avec la sphère de dimension deux. Pour cela nous explicitons l'ensemble des surfaces complexes dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial. Dans un deuxième temps nous déterminons parmi ces surfaces celles qui peuvent être munies d'une métrique riemannienne anti-auto-duale.

De ces résultats, nous déduisons une famille d'exemples simples de 4-variétés réelles parallélisables sans structure complexe. L'espace twistoriel associé à ces variétés admet une structure complexe. C'est notre première classe de 6-variétés munies d'une structure complexe non standard. Une deuxième classe d'exemple sera construite à partir de ces travaux.

Enfin, et de façon indépendante, nous étudions brièvement les propriétés de connexités rationnelles des espaces twistoriels.

Abstract

In this thesis we use the twistor theory in order to build non standard complex structures (with a meaning which we define) on products of 4-manifolds with the sphere of dimension two. To that end, we enumerate the set of complex surfaces whose twistor space is topologically trivial. Among these surfaces, we determine those which admit an antiselfdual riemannian metric.

From these results, we deduce a simple family of parallelizable 4-manifolds without complex structure. The twistor space associated with those manifolds admits a complex structure. This is our first class of 6-manifolds with a non standard complex structure. A second class is also build in this work.

Finally, and independently, we briefly study the various rational connectedness properties of twistor spaces.