



**HAL**  
open science

# Analyse mathématique et numérique de quelques modèles hydrodynamiques et cinétiques de la physique des plasmas

Christophe Buet

► **To cite this version:**

Christophe Buet. Analyse mathématique et numérique de quelques modèles hydrodynamiques et cinétiques de la physique des plasmas. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. tel-00011120

**HAL Id: tel-00011120**

**<https://theses.hal.science/tel-00011120>**

Submitted on 26 Nov 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**  
**en Mathématiques Appliquées**

présentée à

**L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

par

**Christophe Buet**

**Sujet :**

**Analyse mathématique et numérique de  
quelques modèles hydrodynamiques et cinétiques  
de la physique des plasmas**

**Rapporteurs :**

Laurent Desvillettes  
Giovanni Russo  
Shi Jin

**Soutenue le 23 novembre 2005 devant le jury composé de :**

François Bouchut  
Laurent Desvillettes  
Pierre Degond  
Thierry Goudon  
Benoît Perthame  
Laure Saint-Raymond  
Rémi Sentis



*À Christine Pétry.*

*À mes enfants, Simon et Valentin.*



# Remerciements

Je remercie tout d'abord Stéphane Cordier et Pierre Degond avec qui j'ai eu très plaisir à travailler, qui m'ont beaucoup apporté par leur compétence, leur dynamisme et leur intuition, et aussi pour leur patience et leur disponibilité. Pierre Degond m'a permis de découvrir les équations cinétiques et les problèmes liés à leur approximation numérique. C'est avec Stéphane Cordier que j'ai travaillé pendant de nombreuses années sur ce problème. Je leur exprime encore une fois toute ma gratitude.

Je remercie vivement

- Benoît Perthame pour avoir accepté de parrainer mon dossier et d'avoir accepté d'être membre du jury.
- Laurent Desvillettes, Shi Jin et Giovanni Russo qui ont accepté de rapporter sur ce travail et ce, en dépit de leur lourdes charges. Laurent Desvillettes qui a aussi accepté de faire partie du jury.
- François Bouchut, Thierry Goudon, Laure Saint-Raymond et Rémi Sentis d'avoir accepté de faire partie du jury.

Merci aussi à

- Stéphane Dellacherie, Bruno Despres, Brigitte Lucquin, Simona Mancini, et Pierre-Arnaud Raviart avec qui j'ai eu l'occasion de travailler.
- Hervé Jourdain et Bruno Scheurer pour leurs nombreux encouragements, d'abord pour m'inciter à écrire ce mémoire, puis pendant sa rédaction.

Mes derniers remerciements, et non les moindres, vont à Christine, pour m'avoir accompagné dans la région parisienne pour la fin de mes études il y a près de vingt ans, d'avoir accepté d'y rester par la suite et pour m'avoir supporté pendant toutes ces années.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Méthodes numériques déterministes conservatives et entropiques pour les opérateurs de collisions.</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction.	5
1.2 Une méthode entropique et conservative pour l'équation de Boltzmann dans le cas d'un gaz monoatomique [a1, c1]	9
1.3 Opérateur de Boltzmann discret pour un modèle de gaz polyatomique [a2]	11
1.4 Régularisation de l'équation de Boltzmann [a4]	12
1.5 Équation de Fokker-Planck-Landau.	14
1.5.1 Algorithmes rapides [a3]	15
1.5.2 Existence de solutions et propriétés des schémas [a6]	17
1.6 Équation de Fokker-Planck-Landau isotrope.	18
1.6.1 Existence de solutions pour FPL log [a5]	19
1.6.2 Forme sans log et schémas en temps [a9]	20
1.7 Résolution numérique d'une équation de Fokker-Planck ionique avec température électronique [a7, cr1]	21
1.8 Méthode numérique pour l'opérateur de scattering de Compton [a12]	22
1.9 Analyse spectrale de l'opérateur de Lorentz [a8]	23
1.10 Méthode numérique pour une équation de type Fokker-Planck modélisant les milieux granulaires [a14]	24
1.11 Conclusions	27
<b>2 Méthodes de moments et régimes diffusifs pour le transfert radiatif: modélisation et aspects numériques</b>	<b>29</b>
2.1 Introduction	29
2.2 Limite de diffusion du modèle de Lorentz: schémas préservant l'asymptotique [a11]	32
2.3 Analyse asymptotique pour l'hydrodynamique radiative [a13]	33
2.4 Analyse asymptotique et méthodes numériques pour les méthodes de moments en hydrodynamique radiative [cr2, s1]	35
2.5 Un modèle à flux limité pour l'hydrodynamique radiative et un schéma de splitting associé préservant l'asymptotique de diffusion [s2]	37
2.6 Conclusions	39
<b>3 Autres travaux</b>	<b>41</b>
3.1 Ionisation multi-espèces [a10]	41
3.2 Schémas monotones et équations parabolique linéaires [cr3]	42
<b>Listes des Travaux Présentés</b>	<b>45</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>





# Introduction

Mes recherches au Commissariat à l'Énergie Atomique concernent principalement la modélisation mathématique et la simulation numérique pour la physique des plasmas. Ce mémoire présente mes contributions dans ce domaine.

Dans un premier temps j'ai étudié la discrétisation d'opérateurs de collisions en théorie cinétique.

J'ai commencé à travailler avec Pierre Degond sur la résolution numérique déterministe de l'équation de Boltzmann, pour laquelle j'ai développé une méthode conservative, entropique et à coûts réduits pour le cas mono-atomique [a1]. J'ai ensuite étendu l'opérateur de collision discret au cas d'un modèle simple de gaz polyatomique [a2]. Et avec S. Cordier et P. Degond, j'ai travaillé sur une régularisation de l'opérateur de Boltzmann, [a4], pour pouvoir soit définir une méthode particulière déterministe, soit pour traiter des sections efficaces non isotropes ou des collisions entre espèces de masse différentes dans une méthode à répartition discrète de vitesse.

Par la suite je me suis intéressé aux équations de type Fokker-Planck. J'ai travaillé sur l'équation de Fokker-Planck-Landau (homogène) pour laquelle une discrétisation entropique venait d'être proposée par B. Lucquin et P. Degond [92, 57]. Nous avons d'abord réduit le coût quadratique de l'évaluation de cet opérateur par des méthodes de type sous-réseaux et multigrille qui ont fait l'objet d'une publication dans JCP en collaboration avec S.Cordier, P. Degond et M. Lemou [a3]. Puis, avec S. Cordier nous avons justifié l'existence de solutions pour les problèmes semi-discrétisés (i.e. uniquement dans l'espace des vitesses) et discrets (i.e. en temps et en espace) [a6]. Toujours avec S. Cordier, nous avons analysé en détail le cas des fonctions isotropes [a5, a9] pour lequel les résultats et les méthodes numériques peuvent être améliorés.

J'ai travaillé aussi avec S.Cordier, R.Sentis et S. Dellacherie sur diverses équations de type Fokker-Planck modélisant les collisions ions-électrons [a7] ou un modèle simplifié de milieu granulaire [a14], ou encore le scattering de type Compton des photons (équation de Kompaneets) [a12], équations pour lesquelles nous avons obtenus des schémas numériques entropiques et conservatifs.

Avec S. Cordier et B. Lucquin-Desreux, nous avons considéré le modèle de Lorentz [a8] et notamment la limite "collisions rasantes". Par une analyse spectrale des opérateurs nous avons montré que la convergence des solutions dans cette asymptotique est uniforme en temps et que l'on contrôle les vitesses de retour vers l'équilibre.

Depuis quelques temps mes recherches concernent la discrétisation de modèles simplifiés hyperboliques en transfert radiatif et notamment la capture correcte du régime de diffusion pour éviter les couplages hyperbolique-parabolique.

Avec B. Despres, je travaille sur l'hydrodynamique radiative. Nous avons obtenus un modèle simplifié de moments dans le cadre relativitiste [a13]. Nous travaillons maintenant sur les aspects numériques de ce modèle : couplage avec l'hydrodynamique [s2] et extension multi-dimensionnelle.

Et avec S. Cordier, je travaille sur des schémas numériques préservant l'asymptotique de diffusion pour des équations de transport ou pour de modèles aux moments issus du cinétique (transfert radiatif, plasmas d'électrons). Nous avons ainsi obtenu, en dimension 1 d'espace, des schémas simples mais non monotones dans le cadre du modèle de Lorentz pour les électrons [a11], et un

schéma préservant la limitation de flux pour un modèle de moments en transfert radiatif, [cr2, s1], basé sur un schéma de relaxation et sur un schéma “well-balanced”. Nous travaillons maintenant sur l’extension au cas multidimensionnel de ces schémas.

## Plan de ce mémoire.

Il est organisé en trois parties.

Dans la première partie, je résume les travaux effectués pour la résolution numérique des opérateurs de collisions. Le fil conducteur de cette partie est la dérivation de schémas numériques préservant les propriétés des opérateurs à savoir conservation des invariants physiques (masse, impulsion, énergie), des états d’équilibre et décroissance de l’entropie. Ces propriétés, si elles sont facilement vérifiées formellement pour les opérateurs continus, posent parfois des difficultés au niveau discret. De plus, ces propriétés sont nécessaires pour assurer le retour des solutions approchées vers l’état d’équilibre thermodynamique local (ETL) et donc d’avoir, en temps grand, le comportement hydrodynamique souhaité.

Dans la seconde partie je résume les travaux concernant les méthodes de moments pour le transfert radiatif et les problèmes numériques liés à leur discrétisation. Le fil conducteur de cette partie est essentiellement la dérivation de schémas numériques préservant l’asymptotique de diffusion et les domaines invariants pour des modèles de lorentz ou pour des équations du type télégraphe non linéaires (transfert radiatif, plasma électronique).

Dans une plus courte troisième partie je présente deux travaux n’entrant pas directement dans mes thématiques principales de recherche mais qui sont quand même en connexion avec elles.

Je présente enfin ma liste de publications et la bibliographie.

*Convention de notations : Mes publications sont repérées par des lettres. [a1-a14] les articles parus ou acceptés, [cr1-cr3], les notes au comptes rendus, [s1,s2] les articles soumis, les actes de congrès [c1] et les travaux non publiés [np1].*

# Chapitre 1

## Méthodes numériques déterministes conservatives et entropiques pour les opérateurs de collisions.

### 1.1 Introduction.

Cette partie décrit mes travaux sur les équations cinétiques et plus particulièrement pour la résolution numérique des opérateurs de collisions de type Boltzmann ou Fokker-Planck.

#### Quelques généralités sur la théorie cinétique et sur les méthodes numériques dans ce domaine.

Dans la théorie cinétique, chaque espèce est caractérisée par sa fonction de distribution  $f$  qui est une fonction positive des variables d'espace  $x$ , de vitesse  $v$  et du temps  $t$ . La mesure  $fdxdv$  représente la probabilité de présence d'une particule au point  $x$  avec une vitesse  $v$  à l'instant  $t$ . La fonction de distribution  $f$  est solution d'une équation de transport dans l'espace des phases  $(x,v)$ , appelée équation de Vlasov, dans laquelle apparaît un terme de force qui est un champ "moyen" ne prenant en compte que les interactions collectives à longue portée. Pour des particules chargées par exemple, il s'agit de la force due aux champs électromagnétiques appliqués (par exemple, un champ électrique ou magnétique extérieur...) ou auto-consistants (i.e. générés par les particules elles-mêmes). Cette équation peut éventuellement comprendre des termes sources afin de modéliser les collisions entre particules ou la création de nouvelles particules par ionisation (voir section 3.1, partie III). Pour une seule espèce de particules de masse  $m$  sous l'action d'un champ de force  $F = F(t,x,v)$ , l'équation de Vlasov s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \frac{F}{m} \cdot \nabla_v f = Q(f,f), \quad (x,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, t > 0. \quad (1.1)$$

Dans le cas de la force électromagnétique ( $F = q(E + v \wedge B)$ ,  $q$  désignant la charge de la particule,  $E = E(t,x)$  le champ électrique et  $B = B(t,x)$  le champ magnétique), cette équation est fortement non linéaire. En effet, la partie auto-consistante du champ de force est reliée aux grandeurs macroscopiques associées à  $f$  par l'intermédiaire des équations de Maxwell. Dans le cas électrostatique ( $B = 0$ ), il faut coupler l'équation de Vlasov avec celle de Poisson.

Dans l'équation cinétique ci-dessus, le membre de droite  $Q(f,f)$  désigne le terme de collision (quadratique relativement à  $f$ , dans le cas de Boltzmann ou Landau). Il est donné par un modèle lié à la physique du problème. Ainsi pour les gaz raréfiés, il s'agit de l'opérateur de Boltzmann décrivant des collisions binaires entre particules non nécessairement chargées. Pour les plasmas, l'opérateur couramment utilisé est l'opérateur de Fokker-Planck-Landau (FPL). Il existe autant

d'équations de Boltzmann ou de FPL que de potentiels d'interaction entre les particules. Nous renvoyons à [41] pour une taxonomie des opérateurs de collisions. Le cas le plus intéressant physiquement est le cas Coulombien qui correspond à des potentiels dits mous qui décroissent en  $1/r^2$ . On parle alors d'équations de Vlasov-Boltzmann ou de Vlasov-FPL, selon les cas. Il existe bien entendu d'autres modèles d'opérateurs de collision, comme le modèle B.G.K., le modèle de Lorentz, etc.

La théorie mathématique pour cette équation, dans le cas Boltzmann, est par exemple due à L. Arkeryd [1, 2], R.E. Caflish [11], L. Desvillettes [67], T. Elmroth [18], T. Gustaffson [24] et B. Wennberg [42]. Dans [44], A.A. Arseniev et N.V. Peskov montrent l'existence, pour des intervalles de temps courts, de solutions faibles à l'équation de Fokker-Planck homogène dans le cas Coulombien. En dehors de ce cas, A.A. Arseniev et O.E. Buryak montrent dans [43] l'existence globale en temps de solutions, mais sous des hypothèses fortes sur le noyau et sur la donnée initiale. Signalons aussi des travaux très récents d'existence de solutions classiques, dans le cas de potentiels durs, établis par L. Desvillettes et C. Villani [70, 71] pour une classe assez large de données initiales. Pour le cas non homogène, des théorèmes d'existence globale ne nécessitant pas d'hypothèses fortes sur les données initiales ont pu être obtenus, grâce à la notion de solution renormalisée introduite par R.Di Perna et P.L. Lions [15] dans le cas Boltzmann. L'extension au cas Fokker-Planck résulte des travaux de P.L. Lions [89] et, plus récemment, de C. Villani [105]. Nous renvoyons à [41] pour une présentation de résultats récents.

La résolution numérique de ce système d'équations repose sur un algorithme de décomposition ou "splitting" : on résout pendant un pas de temps la partie transport i.e. le membre de gauche de (1.1) puis on calcule pendant un pas de temps l'effet des collisions ; si nécessaire, on résout les équations électromagnétiques (Maxwell, Poisson...) et on itère le procédé. L'évaluation numérique des opérateurs de collisions est généralement plus coûteuse que la phase de transport en raison du caractère quadratique de l'opérateur. Les travaux présentés dans cette partie sont consacrés à la résolution de la phase collision ou de façon équivalente du cas homogène (lorsque que  $f$  est indépendante de  $x$  et que  $F = 0$ ). La convergence d'un tel algorithme a d'ailleurs été obtenue par L. Desvillettes [66] pour l'opérateur de transfert radiatif, et par L. Desvillettes et S. Mischler pour le cas Boltzmann [69].

Les deux façons les plus utilisées (par les physiciens par exemple) pour représenter les fonctions de distribution sont les méthodes dites particulières et les méthodes à répartition uniforme des vitesses.

Dans le premier cas, la fonction de distribution est approchée par une somme de masses de Dirac de poids  $f_i(t)$  et situées dans l'espace des phases en  $(X_i(t), V_i(t))$ .

$$f(x, v, t) \approx \sum_i f_i(t) \delta(x - X_i(t)) \delta(v - V_i(t)). \quad (1.2)$$

où  $\delta$  désigne la masse de Dirac. Dans cette approche, la phase transport est très simple à résoudre car il suffit d'intégrer l'équation des trajectoires des particules sachant la position, la vitesse et la force qui s'applique sur la particule  $i$ . Le calcul de la force  $F_i$  nécessite de connaître les grandeurs macroscopiques et donc d'intégrer dans l'espace des vitesses pour les particules situées dans la même cellule d'un maillage en espace (méthodes PIC).

Le traitement de la phase de collision se fait généralement par une méthode de Monte-Carlo donc probabiliste. À la fin de la phase de collisions les particules auront changés de position  $V_i(t)$  dans l'espace des phases, les poids  $f_i(t)$  n'évoluant généralement pas. On donc une représentation dynamique de l'espace des vitesses. C'est ce qui fait la force de ce type de méthodes pour assurer par exemple la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie pour l'opérateur de Boltzmann pour des collisions binaires : le processus de collisions imite ce qui se passe pour des vraies particules. L'inconvénient majeur d'une méthode Monte Carlo est le bruit numérique. Pour réduire ce bruit, les deux méthodes utilisés sont soit de prendre un grand nombre de particules par maille d'espace (par exemple calcul de solutions instationnaires), soit de moyenner des résultats indépendants (calculs de solutions stationnaires). Typiquement en gaz raréfiés pour calculer l'écoulement stationnaire autour d'un objet rentrant dans l'atmosphère, on prend de l'ordre de

10 à 20 particules par maille et dès que l'on estime que la solution calculée est stationnaire, on moyenne des instantanés de la solution pris à intervalles réguliers, les intervalles de temps étant pris suffisamment grands pour supposer ces instantanés indépendants. Avec une moyenne de 20 particules par mailles le nombre d'instantanés est généralement de l'ordre de plusieurs centaines. Le grand avantage de ces méthodes est bien entendu le faible coût en temps CPU et mémoire. Au regard du développement des ordinateurs on peut estimer que dans le domaine des gaz raréfiés c'était la seule méthode praticable jusqu'au début des années 1990.

Les méthodes particulières déterministes, voir par exemple [206] pour le principe général, où l'on fait évoluer les poids  $f_i$  et non les vitesses  $V_i$  pendant la phase de collision ne sont guère utilisées car elles ne permettent pas d'assurer la conservation de la quantité de mouvement ou de l'énergie dans le cas de Boltzmann ou Landau par exemple.

Au début des années 1990 les ordinateurs étant alors de plus en plus performants il paraissait concevable pour l'opérateur de Boltzmann en gaz raréfiés de développer des méthodes dites déterministes. Le choix fait par tous ceux ayant travaillé sur le sujet a été celui de méthodes avec répartition uniforme et discrète des vitesses [39, 40, 37, a1, 28].

Pour ces méthodes, la fonction de distribution est connue par sa valeur aux points d'un maillage uniforme et indépendant du temps de l'espace des phases. On peut toujours écrire (1.2), mais cette fois ce sont les poids  $f_i(t)$  qui vont évoluer et non les positions  $X_i$  ou les vitesses  $V_i$ , et l'évolution sera de nature déterministe. On a donc une représentation statique de l'espace des vitesses. Une méthode de type différences finies ou volumes finis rentre dans ce cadre là.

Mais être déterministe ne suffit pas si l'on veut minimiser la taille du maillage dans l'espace des vitesses et donc le coût mémoire et CPU de l'algorithme.

Par exemple les équations de Boltzmann homogène ou de Fokker-Planck-Landau homogène possèdent des propriétés physiques et mathématiques communes, comme celle de conservation (de la masse, de l'impulsion et de l'énergie) et de (dé)croissance de l'entropie (mathématique). Ces propriétés sont souvent plus faciles à énoncer sur la formulation faible de l'opérateur de collisions : soit  $\psi$  une fonction test, on montre que les seuls invariants de collisions

$$\int Q(f,f)(v)\psi(v)dv = 0 \Leftrightarrow \exists a,b,c \psi(v) = a + bv + cv^2,$$

qui correspondent respectivement à la masse, l'impulsion et l'énergie. Le théorème H s'obtient en choisissant  $\psi = \log(f)$  dans la formulation faible (de Boltzmann ou de FPL) et on obtient

$$\int Q(f,f)(v) \log(f(v)) dv \leq 0.$$

La fonctionnelle d'entropie  $H = \int f \log(f)$  décroît et son minimum correspond aux états d'ETL ou Maxwellienne locale

$$f(t,x,v) = n(t,x) \frac{e^{-|v-u(t,x)|^2/2T(t,x)}}{(2\pi T(t,x))^{3/2}}.$$

Lorsqu'on suppose que le milieu est à l'ETL, on obtient en prenant les 5 premiers moments de l'équation de Vlasov (1.1) et compte tenu des invariants de collision, les équations de l'hydrodynamique. Il s'agit donc d'une fermeture du système d'équations de moments basée sur l'hypothèse que la fonction de distribution est une Maxwellienne. Pour d'autres échelles de temps, on obtient des modèles de diffusion. La justification de ces passages à la limite a fait l'objet de très nombreuses études [3, 4, 14].

Une discrétisation déterministe mais non conservative de ces opérateurs de collision engendrera de grandes erreurs de calculs à moins de prendre un maillage suffisamment fin de l'espace des vitesses, ce qui peut conduire à des coûts prohibitifs. C'est par exemple le cas des méthodes pour l'opérateur de Landau basées sur la forme convection diffusion avec potentiels de Rosenbluth, [79].

Vu aussi sous l'angle du couplage entre une équation cinétique et sa limite hydrodynamique, il sera toujours plus facile de coupler une méthode conservative et entropique avec un schéma pour le modèle fluide qu'avec une méthode bruitée ou non conservative et entropique.

C'est pourquoi nous nous sommes donc attachés à construire des solutions approchées de ces équations préservant ces propriétés de conservation et qui assurent le retour vers l'ETL, des solutions. C'est ce type de méthodes que l'on appellera dans ce qui suit DVM pour "Discrete Velocity Models". La totalité de mes travaux pour le traitement numérique des termes de collision ont été faits dans le cadre des DVM.

**Remarque 1** *Les méthodes spectrales, voir les travaux de Pareschi et Russo dans ce domaine [97, 35, 36, 95, 98, 34], ne sont guère utilisées pour le traitement des termes de collisions, car non conservatives, peu pratiques pour représenter des fonctions de distribution piqués.*

## Principe et mise en oeuvre des DVM dans le cas homogène en espace.

Le premier objectif est de construire une version discrète de l'opérateur considéré ayant les propriétés de conservation, retour à l'équilibre et solutions positives du modèle continu.

Les DVM que je présente sont en fait toutes construites sur le même principe. L'espace des vitesses est donc discretisé de façon uniforme, presque toujours représenté par un maillage carré :  $v_i = i\Delta v$ ,  $\Delta v$  étant le pas de maillage, et  $i$  dans  $\mathbb{Z}^3$ .

Pour obtenir un modèle de collision discret préservant les invariants de collision et assurant la décroissance de l'entropie c'est la formulation faible symétrisée et "entropique" de l'opérateur qui doit, de préférence, être discrétisée. Comme en numérique il n'y a généralement pas équivalence entre les discrétisations des différentes formes d'une même expression, le moyen le plus simple d'avoir les propriétés souhaitées de conservation et de décroissance de l'entropie, c'est donc de discrétiser la forme de l'opérateur la plus "adéquate". On peut illustrer cela sur l'équation de Landau isotrope pour des potentiels Maxwelliens. L'équation en variable d'énergie  $\varepsilon$  s'écrit

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{\varepsilon_0} \left( f(\varepsilon') \frac{d}{d\varepsilon} f(\varepsilon) - f(\varepsilon) \frac{d}{d\varepsilon'} f(\varepsilon') \right) \varepsilon^{3/2} \varepsilon'^{3/2} d\varepsilon'. \quad (1.3)$$

Soit  $\rho = \int_{\varepsilon} f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$  le nombre de particules et  $\rho E = \int_{\varepsilon} f(\varepsilon) \varepsilon \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$  l'énergie totale alors (1.3) s'écrit aussi tout simplement

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial t} = \rho \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d}{d\varepsilon} \varepsilon^{3/2} \left( \frac{d}{d\varepsilon} f(\varepsilon) + E f(\varepsilon') \right) \quad (1.4)$$

ou alors sous la formulation faible symétrisée et "entropique" suivante,

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{\partial f}{\partial t} \phi \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) f(\varepsilon') \left( \frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \phi(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \right) \left( \frac{\partial \ln f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \ln f(\varepsilon')}{\partial \varepsilon'} \right) \varepsilon^{3/2} \varepsilon'^{3/2} d\varepsilon' d\varepsilon, \quad (1.5)$$

pour toute fonction test  $\phi$ . Des trois formes de cette équation de Landau, c'est sur la dernière, (1.5), qu'on lit aisément la conservation du nombre de particules, de l'énergie et de la décroissance de l'entropie  $\rho = \int_{\varepsilon} \log(f(\varepsilon)) f(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$ . C'est donc cette forme que l'on discrétisera de préférence à la forme (1.4) bien plus simple. Sur cet exemple on peut penser que l'on augmente le coût de l'évaluation de l'opérateur, mais en fait il n'en est rien comme on le verra par la suite, paragraphe (1.6) pour l'équation de Landau isotrope pour des potentiels Coulombiens ou (1.10) pour une équation de Fokker-Planck pour les milieux granulaires..

Pour les opérateurs de Boltzmann ou Landau, on peut dire aussi que c'est grâce à un maillage uniforme que l'on arrive à construire de tels opérateurs discrets.

Cette façon d'obtenir le schéma est donc aux antipodes des schémas construits par les physiciens, par exemple pour les équations de type Fokker-Planck. Pour l'équation de Landau, les physiciens préféreront discrétiser la formulation avec potentiels de Rosenbluth, voir par exemple [79], c'est à dire la forme convection diffusion, les deux potentiels de Rosenbluth seront calculés par les méthodes standards de calculs des potentiels ou par résolution d'équations de Poisson, les

opérateurs d'ordre 1 et 2 seront discrétisés par les formules de différences finies classiques. Sur l'exemple ci dessus les physiciens utiliseront la forme (1.4). Qu'en est-il alors des propriétés de conservation et de retour à l'équilibre. Dans le cas d'une équation plus simple de type Fokker-Planck linéaire c'est aussi la méthodologie retenue, même si dans ce cas on peut facilement forcer la méthode à préserver les états d'équilibre, voir Chang et Cooper [49].

Comme on cherche à calculer une approximation d'une fonction de distribution, donc une fonction positive, il faut aussi s'assurer de la positivité des solutions du problème homogène discret associé. Si pour des opérateurs de type Boltzmann ou pour de opérateurs de type Fokker-Planck linéaire cela ne pose pas de problèmes, en revanche pour l'équation de Landau ce n'est pas le cas, comme on le verra, pour l'opérateur discret originel [57]. Le problème de la positivité des solutions est évidemment relié à l'existence d'un pas de temps minimal garantissant la positivité pour une discrétisation temporelle explicite. Dans le cas du schéma proposé pour l'équation de Landau, voir [57], cela se traduit donc par la difficulté de choisir un pas de temps assurant la positivité dans un code de calcul.

Ayant obtenu notre opérateur de collisions discret, il reste donc à le mettre en oeuvre. Et ce n'est pas aussi simple que ça.

Par exemple pour l'opérateur de Boltzmann ou Landau, ces opérateurs étant quadratiques le coût de leur évaluation en chaque point du maillage est prohibitif. De part la nature parabolique des équations de type Fokker-Planck, pour assurer la positivité de la solution discrète c'est la restriction sur le pas de temps qui devient rédhibitoire pour un schéma explicite. Il convient donc de trouver aussi des solutions soit pour évaluer à moindre coût ces opérateurs soit pour impliciter le schéma en temps. Notons que c'est pour l'équation de Landau que le problème représente le plus de difficultés, car l'opérateur est quadratique et le problème de nature parabolique.

C'est cette méthodologie que j'ai essayé d'appliquer à quelques types d'opérateurs de collisions.

## 1.2 Une méthode entropique et conservative pour l'équation de Boltzmann dans le cas d'un gaz monoatomique [a1, c1]

Dans cet article j'ai étudié une méthode conservative et entropique pour l'équation de Boltzmann pour un gaz monoatomique. L'opérateur de boltzmann peut s'écrire sous la forme faible et symétrisée, [13]

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)\psi dv = \\ & = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left( \int_{S^2} q(v-v_*,\omega)(f'f'_* - ff_*)(\psi' + \psi'_* - \psi - \psi_*)d\omega \right) dv dv_* \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$f = f(x,v,t), f_* = f(x,v_*,t), f' = f(x,v',t), f'_* = f(x,v'_*,t)$$

et

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + R_\omega\left(\frac{v-v_*}{2}\right), \quad v'_* = \frac{v+v_*}{2} - R_\omega\left(\frac{v-v_*}{2}\right),$$

C'est sur cette forme de l'opérateur que l'on montre facilement la conservation en temps, du nombre de particules  $\int_v f dv$ , de la quantité de mouvement  $\int_v v f dv$ , de l'énergie  $\int_v \|v\|^2 f dv$  et la décroissance de l'entropie  $\int_v f \log(f) dv$ . C'est donc cette forme de l'opérateur que l'on discrétise.

Les difficultés que l'on rencontre pour définir un opérateur discret proviennent de l'intégrale sur la sphère unité.

Étant donné un maillage uniforme  $v_i = i\Delta v$ ,  $i = (i^1, i^2, i^3) \in \mathbb{Z}^3$ , on définit une approximation de  $f$  en résolvant le système



pour tout  $i \in \mathbb{Z}^3$ ,  $\frac{df_i}{dt} = B_i$ ,  $f_i(0) = f_0(v_i)$ ,

$$\begin{aligned} Q(f,f)(v_i) &\simeq \frac{1}{(\Delta v)^3} \bar{Q}(\bar{f}, \bar{f})_i \\ &= \frac{1}{(\Delta v)^3} \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \sum_{(k,l) \in S_{ij}} \frac{4\pi}{\text{Card}(S_{ij})} q(v_i - v_j, \omega_{ij}^{kl})(f_k f_l - f_i f_j) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$S_{ij} = \{(k,l) \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3, \quad k+l = i+j, \quad |k|^2 + |l|^2 = |i|^2 + |j|^2\}.$$

ce qui correspond à l'approximation suivante de la formulation faible de l'opérateur

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f) \psi dv &\simeq \frac{1}{4(\Delta v)^3} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^3} \sum_{(k,l) \in S_{ij}} \frac{4\pi}{\text{Card}(S_{ij})} (\psi_k + \psi_l \\ &\quad - \psi_i - \psi_j) q(v_i - v_j, \omega_{ij}^{kl})(f_k f_l - f_i f_j) \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement sur (1.7) que la méthode développée est bien conservative et entropique.

L'intégrale sur la sphère unité dans (1.6) a donc été discrétisée de la façon la plus simple qui soit. Cela revient effectivement à considerer un gaz à répartition discrète des vitesses, voir [20] : quand deux particules de vitesses  $i$  et  $j$  collisionnent, leur vitesses après collision sont les points d'intersection du maillage et de la sphère de collision et les probabilités de transition sont toutes égales. Cela fournit une méthode bien plus simple et au moins aussi efficace que celle proposée par Rogier et Schneider [37, 39].

Bobylev et Schneider ont montré [6] que (1.7) est une approximation consistante de l'opérateur (1.6). On peut remarquer aussi que l'opérateur discret est une somme d'opérateurs de Broadwell à quatre vitesses.

La seconde difficulté que l'on rencontre dans la discrétisation de l'équation de Boltzmann est le coût exorbitant de l'évaluation du terme de collision. Pour réduire ce coût CPU, j'ai mis en oeuvre deux techniques. Elles constituent l'apport essentiel de ce travail. C'est ce qui a permis de faire des calculs en dimension 2 d'espace à un coût inférieur à celui d'une simulation Monte-Carlo, et ce pour de meilleurs résultats.

La première est une technique de sous-réseaux, qui sera d'ailleurs réutilisée dans la cas de l'opérateur de Landau. À chaque pas de temps on évalue en tout point le terme de collisions avec un sous-reseau du réseau initial, le choix du sous-réseau se faisant de façon aléatoire ou cyclique, je renvoie le lecteur au paragraphe (1.5.1) pour une explication plus détaillée.

La seconde est basée sur une formule de quadrature de type Monte Carlo pour l'opérateur de collision.

Dans tous le cas on garde une approximation conservative et entropique du terme de collision. L'opérateur reste toujours une somme de modèle de Boadwell à quatre vitesses.

La discrétisation en temps est faite soit par un schéma explicite soit par splitting et résolution exacte de modèle de Broadwell. Ce second choix permet d'avoir un schéma positif, implicite et entropique. le pas de temps est de l'ordre de quelques temps de vol libre moyen.

Pour des calculs non homogène en espace, j'ai utilisé un schéma de type volume fini classique pour la partie transport.

Les résultats numériques ont été obtenus en dimension un ou deux d'espace sur des cas réalistes modélisant des écoulements hypersoniques de gaz raréfiés. Ces résultats ont été comparés avec ceux obtenus par un code Monte-Carlo. On montre ainsi qu'avec la méthode à répartition discrète de vitesses on obtient des résultats en adéquation avec ceux d'un code de calcul Monte Carlo, et ce pour un coût CPU moindre et sans bruit aléatoire.

### 1.3 Opérateur de Boltzmann discret pour un modèle de gaz polyatomique [a2]

Cet article constitue la suite logique de l'article précédent sur la discrétisation de l'équation de Boltzmann. Dans le travail précédent on considérait un gaz monoatomique, il était donc naturel d'étendre la méthode numérique à une équation de Boltzmann modélisant un gaz polyatomique. Le choix s'est porté sur le modèle le plus simple qui soit, ne nécessitant que l'introduction d'une variable supplémentaire pour modéliser tous les phénomènes de vibration rotation, le modèle de Larsen-Borgnakke [17, 8, 7].

Soit  $\delta$  le nombre de degrés internes de liberté,  $f(x, v, I, t)$  la fonction de distribution. La densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale sont définies respectivement par

$$\begin{pmatrix} n(x, t) \\ n(x, t)U(x, t) \\ n(x, t)E(x, t) \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{|v|^2}{2} + I^2 \end{pmatrix} f(x, v, I, t) dv I^{\delta-1} dI.$$

L'opérateur de Larsen-Borgnakke-Boltzmann est défini par, voir [8]:

$$Q_\delta(f, f) = \int_{\Delta} B(f' f'_* - f f_*) dv_* I_*^{\delta-1} dI_* d\eta (r(1-r))^{\frac{\delta}{2}-1} dr R^2 (1-R^2)^{\delta-1} dR$$

avec

$$g = \frac{v - v_*}{2} = \text{vitesse relative},$$

$$E^2 = |g|^2 + I^2 + I_*^2 = \text{énergie totale},$$

$$(v_*, I_*, \eta, r, R) \in \Delta = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \times S^{2,+} \times [0, 1]^2,$$

$$B = B(E, |Rg|, |Rg \cdot \eta|, I^2 r(1-R^2), I_*^2 (1-r)(1-R^2)) > 0,$$

$$f = f(x, v, I, t), f_* = f(x, v_*, I_*, t), f' = f(x, v', I', t), f'_* = f(x, v'_*, I'_*, t),$$

et le processus de collision est défini de la façon suivante

$$\begin{cases} v + v_* = v' + v'_* \\ g' = \frac{RE}{|g|} \{g - 2(g \cdot \eta)\eta\} \\ I' = \sqrt{r(1-R^2)}E \\ I'_* = \sqrt{(1-r)(1-R^2)}E \end{cases}$$

$S^2$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .

L'équation de Boltzmann s'écrit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q_\delta(f, f)$$

Les états d'équilibre sont de la forme

$$f(v) = C_\delta \frac{\rho}{(RT)^{(3+\delta)/2}} \exp\left(-\frac{|v - u|^2 + 2I^2}{2RT}\right),$$

Par exemple pour le modèle "variable hard sphere" (VHS)  $B$  est donné par :

$$B = CR^{1-2\alpha} |g|^{-2\alpha} |g \cdot \eta|$$

avec  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ .

Dans cet article j'ai proposé deux approximations discrètes de cette équation vérifiant les propriétés de conservation et de décroissance de l'entropie. Le principe de construction bien que

plus compliqué à mettre en oeuvre est celui employé pour le cas monoatomique. Dans le cas où le nombre de degrés internes de liberté est nul on retrouve bien dans les deux cas l'opérateur de Boltzmann discret pour un gaz mono-atomique décrit dans le paragraphe précédent (voir [a1]).

Les techniques de réduction de coût pour l'évaluation du terme de collision et de discrétisation en temps utilisées pour le cas mono-atomique peuvent s'appliquer sans problèmes dans le cas polyatomique. Les modèles de Broadwell sous jacents peuvent encore se résoudre exactement.

Par suite d'une ré-orientation des objectifs de recherche du CEA il n'a pas été possible de tester cette méthode. Mes travaux se sont trouvés recentrés sur la physique des plasmas et plus particulièrement sur la discrétisation de l'équation de Fokker-Planck-Landau.

## 1.4 Régularisation de l'équation de Boltzmann [a4]

*En coll. avec S. Cordier et P. Degond.*

Dans les méthodes à répartition discrète de vitesse (DVM)(voir [21, a1, 37]), les vitesses sont sur un maillage fixe de  $\mathbb{R}^3$ . La consistance de ces méthodes est liée à la répartition des solutions entières de l'équation  $a^2 + b^2 + c^2 = n$ , qui vient de la conservation de l'énergie pour un quadruplet de vitesses sur la grille uniforme. Des résultats partiels ont été obtenus en utilisant des techniques issues de la théorie des nombres (par exemple [6]).

Du point de vue numérique et pratique, la principale difficulté avec les méthodes DVM est liée au petit nombre de paires de vitesses post-collisionnelles pour un couple de vitesses donné. En effet, le nombre de points d'intersection entre la sphère de collision et le maillage peut être très petit [22]. Dans de telles circonstances, la grille doit être raffinée et le coût devient exorbitant. Pour pallier cette difficulté, nous avons étudié une régularisation de la sphère de collision.

La seconde motivation de ce travail était liée à l'approximation de l'opérateur de Boltzmann par des méthodes particulières [16, 30, 33]. Les méthodes de type Monte Carlo permettent de traiter les phases de transport et de collision de façon naturelle et relativement facile à mettre en oeuvre [5, 31, 32]. Cependant, le calcul par une méthode Monte Carlo des intégrales de collisions génère un fort bruit numérique. Il serait donc intéressant de trouver une résolution déterministe des intégrales de collisions. Cet objectif a été atteint pour la théorie du transport linéaire [16, 30, 33] mais cela nécessite de trouver une régularisation du processus de collision microscopique afin que l'opérateur soit globalement conservatif.

Dans cet article nous avons étudié deux stratégies possibles. La première consiste à "épaissir" la sphère de collisions et à autoriser les vitesses post-collisionnelles à être situées sur une coquille sphérique. L'opérateur de Boltzmann peut s'écrire sous la forme :

$$Q[f](v) = \int_{(\mathbb{R}^3)^3} c(v, v_1, v', v'_1) (f' f'_1 - f f_1) dv' dv'_1 dv_1,$$

où l'intégration est prise sur l'ensemble des triplets de vitesses et  $c$  est défini par

$$c(v, v_1, v', v'_1) = \delta_0(v + v_1 - v' - v'_1) \delta_0(|v - v_1|^2 - |v' - v'_1|^2) C \left( |v - v_1|, \frac{(v - v_1, \Omega)}{|v - v_1|} \right),$$

où  $\Omega = \frac{(v' - v'_1) - (v - v_1)}{|(v' - v'_1) - (v - v_1)|}$  et  $\delta_0$  représente la mesure de Dirac en  $x = 0$ . Notons que les fonctions  $c$  et  $C$  ne sont définies que pour les vitesses  $v, v_1, v'$  et  $v'_1$  satisfaisant les propriétés de conservation de l'impulsion et de l'énergie

$$v + v_1 = v' + v'_1, \quad |v|^2 + |v_1|^2 = |v'|^2 + |v'_1|^2. \quad (1.8)$$

Dans cette formulation, que l'on trouve par exemple dans [13], les conservations (1.8) sont assurées par les mesures de Dirac et nous avons cherché à régulariser ces mesures de façon à augmenter le nombre de vitesses post-collisionnelles admissibles. L'opérateur régularisé  $\tilde{Q}$  est écrit sous forme

faible symétrisée pour une fonction test  $\Psi$

$$\begin{aligned} (\tilde{Q}[f], \Psi) &= \frac{-1}{4} \int_{(\mathbb{R}^3)^4} \tilde{C} \left( \frac{v-v_1}{2}, \frac{v'-v'_1}{2} \right) (\Psi' + \Psi'_1 - \Psi - \Psi_1) \\ &\quad \left( f' f'_1 \delta \left( \frac{v+v_1}{2}, \frac{v-v_1}{2}, \frac{v'+v'_1}{2}, \frac{v'-v'_1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - f f_1 \delta \left( \frac{v'+v'_1}{2}, \frac{v'-v'_1}{2}, \frac{v+v_1}{2}, \frac{v-v_1}{2} \right) \right) dv dv' dv'_1 dv_1, \end{aligned}$$

avec  $\tilde{C}(z, z')$  défini par  $C(\frac{|z|}{2}, \frac{|z-z'|}{2|z|})$ , où  $\frac{|z|}{2}$  est une valeur moyenne de  $|z|$  et  $|z'|$ . On obtient d'abord des conditions nécessaires sur la fonction  $\delta$  pour que les propriétés (conservations, décroissance de l'entropie et états d'équilibre) soient satisfaites. Lorsque seule la condition sur l'énergie est régularisée, on construit un tel opérateur mais lorsque les deux contraintes (impulsion et énergie) sont relaxées, la construction nécessite des conditions sur la fonction de distribution elle-même afin d'assurer que lorsque le paramètre de régularisation tend vers 0, on retrouve l'opérateur de Boltzmann usuel. De plus, la section efficace régularisée dépend de la fonction de distribution ce qui complique la structure de l'opérateur et son implémentation. Rappelons que les propriétés requises sont indispensables pour garantir le retour vers la Maxwellienne d'équilibre en temps grand.

La seconde approche consiste à "modifier les masses" lors du processus de collisions tout en préservant les propriétés macroscopiques. Précisons la démarche. Pour un couple  $v, v_1$  de vitesses, on définit un centre de masse approché par

$$V(x) = xv + (1-x)v_1,$$

et les vitesses post-collisionnelles

$$v' = V(x) + (1-y)r\omega, \quad v'_1 = V(x) - yr\omega, \quad (1.9)$$

où  $x$  et  $y$  sont deux réels proches de  $1/2$ . La conservation de l'énergie permet de déterminer  $r$  en fonction de  $x, y, v$  et  $v_1$ . On définit une suite régularisante  $h_\varepsilon(x-1/2) = \xi((x-1/2)/\varepsilon)/\varepsilon$ , avec  $\xi$  une fonction paire, positive, régulière telle que  $\int_{z \in \mathcal{I}} \xi(z-1/2) dz = 1$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute fonction  $f$ , on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varepsilon(f, f) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \int_{(x,y) \in \mathcal{I}^2} q \left( \frac{|v-v_1| + |v'-v'_1|}{2}, \omega \right) \chi \left( \frac{f}{M}, \frac{f_1}{M_1}, \frac{f'}{M'}, \frac{f'_1}{M'_1}, x, y \right) \\ &\quad \left( \frac{M_1 M f' f'_1 - M'_1 M' f f_1}{\sqrt{M_1 M M'_1 M'}} \right) h_\varepsilon \left( x - \frac{1}{2} \right) h_\varepsilon \left( y - \frac{1}{2} \right) dv_1 d\omega p(x) dx dy, \end{aligned}$$

où  $(v', v'_1)$  est calculé à partir de  $(v, v_1, \omega, x, y)$  à partir des relations (1.9) et  $q(u, \omega) = u\sigma(u, \omega)$  et  $\sigma$  est la section efficace différentielle de collision,  $M = M^f$  est la Maxwellienne d'équilibre associée à  $f$ ,  $\chi$  est une fonction permettant d'assurer la décroissance de l'entropie et  $p(x) = 64x(x-x^2)^{3/2}$  la microréversibilité de l'opérateur. On montre formellement la convergence de cet opérateur régularisé vers l'opérateur de Boltzmann

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_\varepsilon(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} (f' f'_1 - f f_1) q(|v-v_1|, \omega) dv_1 d\omega.$$

Nous vérifions qu'il satisfait les lois de conservations et la décroissance de l'entropie. Il est immédiat d'après la définition de  $\mathcal{C}_\varepsilon$  que les Maxwelliennes sont des états d'équilibres. L'implication inverse n'est pas claire mais nous montrons comment modifier cet opérateur pour éliminer les éventuels invariants non physiques. L'intérêt de cette méthode par rapport à la précédente est que la modification de la section efficace de collision ne dépend que de la Maxwellienne d'équilibre et non de la fonction de distribution.

## 1.5 Équation de Fokker-Planck-Landau.

Avant de présenter mes travaux sur l'analyse numérique de l'opérateur de Fokker-Planck-Landau, nous allons d'abord en rappeler quelques propriétés.

La dérivation statistique de l'**opérateur de Fokker-Planck** que l'on trouve par exemple dans le chapitre 6 de [113], repose sur le fait que les grandes déviations subies par une particule résultent essentiellement d'une succession de "collisions rasantes" i.e. de faibles déviations (voir section (1.9) pour la justification de cette limite pour un opérateur simplifié).

Citons les travaux de Lucquin, Degond et Desvillettes sur la justification de cette limite [65, 56]. Dans [56], on montre que, moyennant une adimensionnalisation convenable de l'opérateur de Boltzmann (dans le cas d'une loi d'attraction Coulombienne), il est possible de mettre en évidence un petit paramètre physique, appelé **paramètre plasma**. Nous constatons ensuite que le premier terme du développement asymptotique de cet opérateur de collision en fonction du petit paramètre est précisément l'opérateur de Fokker-Planck (voir la section (1.9) pour une étude similaire dans le cas de l'opérateur de Lorentz).

L'opérateur de Fokker-Planck, que nous noterons de manière spécifique  $Q^{FP}(f, f)$ , s'écrit dans le cas général

$$Q^{FP}(f, f)(v) = \nabla_v \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(v - v_1) (\nabla_v f f_1 - \nabla_{v_1} f_1 f) dv_1 \right),$$

où, pour simplifier les notations, la variable  $t$  est omise, et :  $f = f(v)$ ,  $f_1 = f(v_1)$ ,  $\nabla_v f = (\nabla f)(v)$ ,  $\nabla_{v_1} f = (\nabla f)(v_1)$ . Pour tout  $w \in \mathbb{R}^3$ , le potentiel  $\Phi(w) = \Phi(-w)$  est une matrice carrée d'ordre trois symétrique et semi-définie positive qui s'écrit

$$\Phi(w) = (\mathcal{B}S)(w), \quad S(w) = Id - \frac{w \otimes w}{|w|^2},$$

$Id$  désignant la matrice identité dans  $\mathbb{R}^3$ . Le noyau  $\mathcal{B}$  qui apparaît dans cet opérateur est le produit de  $|v|^3$  par la section efficace différentielle de collision, quantité statistique qui est elle-même étroitement liée au potentiel d'interaction entre les particules. Plus précisément, si la force d'interaction est de la forme  $r^{-s}$ , avec  $s \geq 2$  ( $r$  désigne la distance entre deux particules), le noyau s'écrit  $\mathcal{B}(v) = C|v|^{\gamma+2}$ , où  $\gamma = \frac{s-5}{s-1}$ , et  $C$  est une constante positive. On appelle potentiels durs les potentiels pour lesquels  $\gamma > 0$ , et potentiels mous ceux pour lesquels  $\gamma < 0$ . Enfin le cas particulier  $\gamma = 0$  correspond aux molécules Maxwelliennes. De cette distinction résultent des propriétés mathématiques, qui sont en général beaucoup plus difficiles à obtenir dans le cas de potentiels mous. Le cas Coulombien correspond à  $s = 2$ , soit  $\gamma = -3$ .

Nous avons écrit l'opérateur de Fokker-Planck sous une forme conservative, parfois appelée forme de Landau ; c'est une forme très agréable d'un point de vue mathématique. On rencontrera aussi dans la littérature physique une autre écriture de cet opérateur, appelée forme de Rosenbluth : en développant la forme de Landau précédente, l'opérateur de Fokker-Planck apparaît comme une combinaison (non linéaire) entre un opérateur de diffusion et un opérateur de friction ; les coefficients de cette combinaison s'appellent potentiels de Rosenbluth.

Si toutes les formes de l'opérateur sont équivalentes au niveau continu, une fois discrétisé, il n'en est pas de même. Des schémas de différences finies conservatifs ont été décrits antérieurement, soit dans le cas totalement isotrope (la fonction de distribution ne dépend de la vitesse que par l'intermédiaire de son module) dans [47, 48], soit dans le cas d'une géométrie à symétrie azimutale (i.e. en variables sphériques, la fonction de distribution est supposée indépendante de l'angle azimutal) par différents auteurs [99, 100, 106]. La conservation des invariants collisionnels y est en général assurée, la décroissance de l'entropie parfois établie. Mais nulle part n'est vérifié le fait que les seuls invariants collisionnels soient les invariants "physiquement acceptables", à savoir la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Concernant les simulations numériques effectives de l'équation de Fokker-Planck, les premières remontent à 1957 pour le cas isotrope, [102] (voir aussi la section 1.6) et 1987 pour le cas axisymétrique [78]. Plus récemment, O. Larroche implémente dans [79] un schéma volumes finis qui ne préserve que la masse. Ce schéma est ensuite amélioré,

selon une méthode de correction inspirée de [45], de manière à ce qu'il conserve aussi l'impulsion et l'énergie [54]. Toutes les travaux cités ci dessus sont basées sur la forme avec potentiels de Rosenbluth.

Citons pour conclure les travaux de Lucquin, Degond [57, 59], Epperlein [72] (isotrope), Frenod-Lucquin (axisymétrique [76]) et Lemou [84, 85], G. Russo et L. Pareschi (méthodes spectrales [96]) et aussi ceux de Dellacherie [64] pour les plasmas électrons-ions.

Les travaux que je vais présenter maintenant portent sur la formulation "Landau" de l'opérateur : la première section est consacrée aux algorithmes rapides (multigrilles et sous-réseaux), la seconde à l'existence de solutions du problème semi-discret et discret.

### 1.5.1 Algorithmes rapides [a3]

*En coll. avec S. Cordier, M. Lemou et P. Degond.*

Nous avons mis au point des algorithmes rapides (de type multigrille et sous-réseaux) pour résoudre l'équation de Fokker Planck à partir d'une discrétisation de cet opérateur proposée par P. Degond et B. Lucquin [92, 57]. Ceci permet de réduire le coût a priori quadratique de telles simulations numériques à un coût d'ordre  $N \ln(N)$  et donc d'envisager de simuler des phénomènes beaucoup plus complexes.

Plus précisément, nous avons travaillé sur la formulation dite Landau-Log de l'opérateur. Un schéma d'approximation par différences finies de l'équation de Fokker-Planck homogène préservant au niveau discret toutes les propriétés physiques (conservations de la masse, l'impulsion et l'énergie, décroissance de l'entropie et états d'équilibre Maxwelliens et uniquement ceux là!) a été proposé par P. Degond et B. Lucquin dans [92, 57]. Rappelons en la structure. Étant donné un maillage uniforme  $v_i = i\Delta v$ ,  $i = (i^1, i^2, i^3) \in \mathbb{Z}^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , on définit une approximation de  $f$  en résolvant le système

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{Z}^3, \quad \frac{df_i}{dt} = FPL_i, \quad f_i(0) = f_0(v_i), \quad (1.10)$$

où  $FPL_i \simeq Q^{FP}(f, f)(v_i)$  est défini par :

$$FPL_i = -D^* \cdot \left[ \sum_{j \in \mathbb{Z}^3} \phi(v_i - v_j) f_i f_j (D \log f_i - D \log f_j) \Delta v^3 \right].$$

Dans cette expression,  $D$  est un opérateur de différences finies, défini de manière uniforme sur tout le maillage, et approchant l'opérateur gradient au moins à l'ordre 1 et  $D^*$  est l'opérateur discret adjoint. On peut l'écrire sous forme faible :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^3} FPL_i \psi_i = \frac{-\Delta v^3}{2} \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^6} f_i f_j ((D\psi)_i - (D\psi)_j)^T \Phi(v_i - v_j) ((D \ln f)_i - (D \ln f)_j). \quad (1.11)$$

Il est clair sur la formule (1.11) que le coût de cet opérateur sera quadratique. Nous rappelons comment se ramener à un domaine borné de l'espace des vitesses en suivant les idées présentées dans [57]. Puis, nous expliquons comment cette discrétisation peut être étendue de façon immédiate au cas multi-espèces. Rappelons que cette extension, indispensable pour traiter les cas physiquement intéressants est un obstacle majeur lorsqu'on utilise une discrétisation basée sur la formulation de Rosenbluth [79].

#### Choix de l'opérateur de différence finies.

Il a été montré dans [56] que pour l'opérateur obtenu avec le schéma différence fini décentré (avec  $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ )

$$(D_s \psi)_i = \varepsilon_i \frac{\psi_{i+\varepsilon_i e_s} - \psi_i}{\Delta v}, \quad s = 1, 2, 3,$$

les seuls invariants de collisions sont les combinaisons linéaires de  $1$ ,  $v$  et  $v^2$  (correspondant respectivement à la masse, l'impulsion et l'énergie). Avec le schéma centré,

$$(D_c^s \psi)_i = \frac{\psi_{i+e_s} - \psi_{i-e_s}}{2\Delta v}, \quad s = 1, 2, 3, \quad (1.12)$$

l'opérateur possède des invariants supplémentaires associés à des états d'équilibre parasites. En revanche, les schémas décentrés ne sont que d'ordre 1 et ils introduisent une dissymétrie artificielle dans la discrétisation. Nous avons montré qu'il était possible d'éliminer les invariants parasites tout en conservant la symétrie de l'opérateur en prenant la moyenne arithmétique des opérateurs obtenus pour chacun des 8 choix (2 possibilités pour 3 dimensions) possibles de direction pour les opérateurs décentrés. L'opérateur obtenu s'écrit comme celui obtenu avec le schéma centré avec une correction d'ordre 2 qui élimine les invariants parasites du schéma (1.12).

### Réduction du coût calcul : sous-réseaux.

La première méthode que nous avons considérée est inspirée de mes travaux pour l'opérateur de Boltzmann. Cette méthode appelée méthode des sous-réseaux consiste à ne retenir dans la somme double que les indices  $i$  et  $j$  telles que le vecteur  $(i - j)$  soit un multiple de  $a$ . Nous montrons que l'opérateur  $(Q_i[a] + Q_i[b])/2$  avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux possède les mêmes propriétés que  $Q$ , en particulier, les seuls invariants sont les invariants physiques. Le coût de l'évaluation est multiplié par  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ . Par exemple, avec  $a = 7$  et  $b = 8$ , il est divisé par environ 25.

### Méthodes multigrilles.

On découpe le domaine cubique unité de calcul  $C_0 = [0, 1]^3$  (le "père") d'arête 1 en 8 cubes réguliers  $C_1^r$  (les "enfants") d'arête  $1/2$  et de centre

$$O_1^r = \left( \frac{1}{2^2} + \frac{r_1}{2}, \frac{1}{2^2} + \frac{r_2}{2}, \frac{1}{2^2} + \frac{r_3}{2} \right),$$

avec  $r = (r_1, r_2, r_3) \in I_1 \stackrel{def}{=} \{0, 1\}^3$ . On écrit ensuite la somme (ou l'intégrale) double

$$\int_{C_0} Q(f, f)(v) \psi(v) dv = \sum_{(r, r') \in I_1^2} \int_{C_1^r \times C_1^{r'}} H(v, w) dv dw.$$

On itère le procédé en divisant à nouveau chaque sous-cube en 8 cubes d'arêtes de longueur  $1/4$  etc... jusqu'à un niveau  $K$ . On définit ensuite la notion de cubes de niveau  $k \in \{2 \dots K\}$  - i.e. d'arêtes de longueur  $2^{-k}$  bien séparés. On dit que deux cubes de niveau  $k$  sont bien séparés s'ils ne sont pas voisins (pas de faces ou de sommets communs) mais que leurs "parents" le sont. On obtient ainsi une partition de  $C_0 \times C_0$  en prenant la réunion des sous-cubes bien séparés de niveau  $k$  variant de 2 à  $K$  et des sous-cubes voisins au niveau le plus fin  $K$ . On utilise ensuite une méthode aléatoire de type Monte-Carlo d'autant plus précise que le niveau est grand (exacte au niveau  $K$ ) pour évaluer la contribution entre deux sous-cubes. Cette méthode est bien adaptée au cas Coulombien pour lequel la section efficace décroît avec la vitesse relative de sorte que la contribution entre les sous-cubes des premiers niveaux est moins importante que celle des niveaux élevés. Le coût d'un tel algorithme est  $N \ln(N)$  avec  $N = 2^{3K}$  le nombre de points de discrétisation.

Une autre méthode a été étudiée par M. Lemou dans [84] : il s'agit d'une méthode de type multipolaire. On conserve la décomposition en niveaux et la hiérarchie multigrille mais on remplace le calcul Monte-Carlo par un développement multipolaire tronqué. Il s'agit d'une approximation (à cause de la troncature) qui est exacte dans le cas maxwellien. La complexité de l'algorithme est comparable. Ces algorithmes rapides (sous-réseaux, multigrilles et multipolaires) ont été adaptés au cas axisymétrique par M. Lemou [85].

Récemment, un autre type de méthode, dite spectrale, a été proposé par G. Russo et L. Pareschi [96]. Celle-ci est également en  $N \ln N$  grâce à l'utilisation de la transformée de Fourier rapide. De plus, il est possible d'en contrôler la précision. En revanche, le seul invariant est la masse et la fonction de distribution tend vers une valeur constante en temps grand.

## 1.5.2 Existence de solutions et propriétés des schémas [a6]

*En coll. avec S. Cordier.*

Nous avons montré l'existence de solutions pour le système d'équations différentielles non linéaires couplées correspondant à l'opérateur de Fokker-Planck discrétisé dans l'espace des vitesses. Nous montrons également que le problème peut être discrétisé explicitement en temps moyennant une condition sur le pas de temps de type CFL.

Rappelons que les algorithmes basés sur la formulation dite Landau-log de l'opérateur de Fokker-Planck permettent de vérifier les propriétés physiques (conservation, entropie et états d'équilibre). Ces propriétés sont indispensables pour éviter un chauffage ou un refroidissement artificiel de la fonction de distribution, comme cela a été noté pour l'équation de Boltzmann [25]. En d'autres termes, la décroissance de l'entropie est importante pour assurer la thermalisation du plasma et les conservations pour qu'elle se fasse vers l'ETL (équilibre thermodynamique local). De plus, comme nous l'avons montré dans [a3], il est possible de généraliser ces schémas au cas multi-espèces.

Numériquement, nous avons observé dans cet article que la décroissance de l'entropie et la positivité de la fonction de distribution généraient des solutions sans oscillation. Cette propriété de type principe du maximum est démontrée dans le cas de FPL linéaire. Dans le cas isotrope (section suivante et [a5]), nous avons montré sur des exemples numériques l'existence de telles oscillations dans le cas non linéaire.

Comme nous l'avons rappelé, ces propriétés de conservation et d'entropie pour les schémas FPL sont satisfaites en utilisant la formulation dite Landau-log qui a fait l'objet de nombreux travaux [57, 47, 100, 48, 92, 76, 99]. Dans ce papier, nous montrons que le schéma basé sur la formulation "sans"-log est bien conservatif mais qu'il existe des fonctions de distribution initiales positives qui conduisent à une solution négative après un temps arbitrairement petit.

**Remarque 2** *D'ailleurs un résultat récent que j'ai obtenu avec S. Cordier, voir [cr3] ou voir paragraphe (3.2) semble en fait indiquer qu'il n'existerait pas de schémas positifs pour la formulation "sans"-log. Une solution pour avoir la positivité est de prendre un schéma non-linéaire par exemple en partant de la formulation Landau-log.*

Les résultats principaux de ce travail sont l'existence de solutions positives pour le système d'équations différentielles ordinaires correspondant au problème semi-discrétisé (1.11) i.e. uniquement en vitesses et la vérification de la décroissance de l'entropie pour le schéma totalement discrétisé (i.e. en temps et en vitesse, avec un schéma explicite). En effet, les travaux cités précédemment vérifient que l'entropie de la solution du problème semi-discrétisé décroît mais pas celle du problème discrétisé en temps qui est effectivement implémenté dans les codes de calcul. Nous montrons que ces propriétés sont bien vérifiées pour une variante du schéma exposé auparavant.

On considère dans un premier temps l'équation de FPL linéaire (en dimension  $d$ ) qui décrit l'effet sur les électrons des collisions électrons-ions et que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \cdot \left( T f \vec{\nabla}_v \log(f/M_f) \right),$$

On discrétise cette formulation par

$$\frac{df_i}{dt} = FP_i^L = (D^* \cdot p)_i, \quad p_i^s = g_i^s (D^s \log(f/M))_i, \quad (1.13)$$

où  $M$  est la maxwellienne discrète centrée de même masse et température que  $f$  et  $(D, D^*)$  sont des opérateurs de différences finis adjoints. Les coefficients  $g_i^s$  sont des approximations de  $f_i$  définis par

$$g_i^s = \frac{(\#N^s) \prod_{k \in N^s} f_{i+k}}{\sum_{k' \in N^s} \left( \prod_{k \in N^s - \{k'\}} f_{i+k} \right)}, \quad i \in \mathbb{Z}^d, \quad (1.14)$$

où  $N^s$  est l'ensemble des points pris en compte pour calculer l'opérateur de différences finis dans la direction  $s$  et  $(\#N)$  est son cardinal. Le schéma obtenu peut s'interpréter comme un schéma de type



volumes finis : en intégrant sur une maille  $C_i$  cubique centrée en  $v_i$ , avec formule de quadrature au point milieu, on obtient une formulation équivalente à (1.13)

$$\frac{df_i}{dt} = FP_i^L = \frac{1}{\Delta v^2} \sum_{\mu \in \{-1,1\}} \sum_{s=1 \dots d} g_{i,i+\mu e_s} \left( \log \left( \frac{f_{i+\mu e_s}}{M_{i+\mu e_s}} \right) - \log \left( \frac{f_i}{M_i} \right) \right),$$

en utilisant une approximation bien connue dans le cas des équations de diffusion [74] qui consiste à prendre la moyenne harmonique

$$g_{i,i+\mu e_s} = \frac{2f_i f_{i+\mu e_s}}{f_i + f_{i+\mu e_s}} \approx f \left( v = \frac{v_i + v_{i+\mu e_s}}{2} \right),$$

qui garantit la continuité des flux aux interfaces. On montre ensuite comment se ramener à un domaine borné  $I$  dans l'espace des vitesses et également que le problème de Cauchy est bien posé : soit  $(f_i^0) \in \mathbb{R}^{(\#I)}$  avec  $f_i^0 > 0$  pour tout  $i \in I$ ; le système (1.13) avec  $f_i(t=0) = f_i^0$  possède une solution positive, entropique, globale en temps telle que  $\forall i \in I, \lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = M_i$ . On montre qu'il existe une constante  $C > 0$  - dépendant de la donnée initiale - telle que pour des pas de temps de la forme  $C/\Delta v^2$  la solution discrète en temps est positive, entropique et converge vers la Maxwellienne discrète en temps grand.

Dans le cas non linéaire, en utilisant l'approximation des  $f_i$  par les moyennes harmoniques généralisées  $g_i^s$  et en étudiant l'évolution de

$$K \stackrel{def}{=} \sup_{i \in \mathcal{I}, k \in N} \left| \frac{f_i}{f_{i+k}} \right|,$$

on montre qu'il existe une solution entropique et positive pour des temps arbitrairement grands au problème de Cauchy analogue à (1.13) avec  $FPL$  défini cette fois par (1.10) où le produit  $f_i f_j$  est remplacé par  $g_i g_j$  défini par (1.14). Dans le cas linéaire, la fonction  $K$  est bornée ; dans le cas non linéaire, elle est bornée en temps fini. En particulier, la fonction de distribution pourrait s'annuler en quelques points (nécessairement multiples) lorsque  $t \rightarrow \infty$  et le problème de la convergence vers l'ETL pour le problème semi-discret reste ouvert.

De façon analogue, pour le problème discrétisé en temps, on n'a pas une borne supérieure du pas de temps qui assure la décroissance de l'entropie et la positivité mais une suite de pas de temps dont la série diverge. On sait donc qu'il existe une solution pour le problème semi-discret et discrétisé en temps (avec la modification de  $f$  en  $g$ ) qui est positive, entropique et globale en temps mais on ne peut montrer le retour vers l'ETL. En pratique, les pas de temps restent bornés inférieurement et la solution s'approche de la Maxwellienne discrète. Les pas de temps entropiques sont donnés par la condition

$$\Delta t_H \stackrel{def}{=} \frac{-\sum_{i \in I} FP_i \log(f_i)}{\sum_{i \in I} FP_i^2 / f_i}.$$

## 1.6 Équation de Fokker-Planck-Landau isotrope.

Nous avons également travaillé sur un modèle simplifié (symétrie sphérique des fonctions de distribution) pour lequel les résultats du cas tri-dimensionnel peuvent être améliorés [a5].

L'opérateur de Fokker-Planck-Landau peut s'écrire sous une forme simplifiée pour des fonctions de distribution possédant des propriétés de symétrie. En particulier, lorsque la fonction de distribution a un axe de révolution, ce qui est le cas en présence de champ magnétique par exemple; ce cas appelé cas axisymétrique a fait l'objet de travaux récents de Frenod-Lucquin [76] et Lemou [85]. Lorsque la fonction de distribution possède un centre de symétrie, c'est à dire quand la fonction est indépendante de la direction de la vitesse, on obtient le modèle isotrope considéré ici. L'opérateur satisfait alors les mêmes symétries et la solution reste donc symétrique. L'opérateur de FPL dans le cas isotrope est utilisé pour la modélisation des phénomènes de fusion par confinement inertiel (FCI). Plus précisément, il s'agit de décrire précisément le transport d'énergie dans

un plasma produit par un laser. Dans certaines conditions, il est admis que la théorie du transport fluide (dans lequel on ferme les équations hydrodynamiques par une loi pour le flux de chaleur, voir Spitzer-Harm [119]) n'est pas valable. L'opérateur de FPL isotrope peut également être considéré comme le premier terme du développement de FPL en harmonique sphérique (modèles SHE). Nous renvoyons à [72, 73] pour une présentation des modèles physiques et des méthodes numériques pour les résoudre. Outre l'intérêt intrinsèque de l'opérateur isotrope, que l'on rencontre également en astrophysique [50, 51], celui-ci sert à calculer des solutions de références dans le cas Coulombien [101, 102] pour lequel il n'existe pas de solutions exactes contrairement au cas Maxwellien [83].

Au niveau numérique, un schéma conservatif et entropique a été proposé dans le cas isotrope [47]. Les auteurs donnent des conditions sur les pas de temps pour assurer la décroissance de l'entropie sans justifier ces propriétés. Comme on l'a déjà dit, la décroissance de l'entropie est importante pour assurer le retour vers l'équilibre mais aussi pour empêcher la formation d'oscillations parasites. Celles-ci sont particulièrement visibles sur une fonctionnelle appelée information de Fischer. Les solutions discrètes doivent également rester positives et cela n'apparaît pas dans [47]. Rappelons qu'un schéma peut être conservatif et ne pas préserver la positivité, comme on l'a vu avec le schéma sans log dans le cas tridimensionnel. Il est annoncé dans [47] que dans le cas isotrope, les propriétés (conservation, entropie) sont satisfaites sur la forme sans log. Nous en donnons la preuve moyennant une modification utilisant les moyennes entropiques. Ceci nous permet également de montrer que la solution discrète tend en temps grand vers l'ETL.

Les deux sections suivantes décrivent les résultats obtenus : la première est une adaptation et une amélioration des résultats obtenus dans le cas tridimensionnel (section 1.5.2) pour le schéma basé sur la formulation log; la deuxième est basée sur autre formulation, sans log, pour laquelle on vérifie les propriétés de conservation, entropie et états d'équilibre et qui permet de proposer de nouveaux schémas en temps.

### 1.6.1 Existence de solutions pour FPL log [a5]

*En coll. avec S. Cordier.*

Nous nous intéressons à l'opérateur de FPL pour les fonctions de distribution isotropes i.e. qui ne dépendent que de la variable d'énergie  $\varepsilon$  et du temps  $f(\varepsilon, t)$ . On ne note pas la dépendance en temps pour simplifier. Cet opérateur s'écrit (voir [47]) une fois ramené à un domaine borné en énergie et adimensionné, dans le cas Coulombien

$$\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) f(\varepsilon') \left( \frac{d}{d\varepsilon} \ln f(\varepsilon) - \frac{d}{d\varepsilon} \ln f(\varepsilon') \right) k(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon',$$

avec  $k(\varepsilon, \varepsilon') = \inf(\varepsilon^{3/2}, (\varepsilon')^{3/2})$  et  $\varepsilon_0$  assez grand pour que la fonction  $f$  soit bien représentée. On considère une forme faible de cet opérateur

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\partial f}{\partial t} \phi \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon &= -\frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) f(\varepsilon') \left( \frac{\partial \phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \phi(\varepsilon')}{\partial \varepsilon} \right) \\ &\quad \left( \frac{\partial \ln f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \ln f(\varepsilon')}{\partial \varepsilon} \right) k(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon' d\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.15)$$

qui vérifie les conservations de la masse (resp. l'énergie) en prenant  $\phi = 1$  (resp.  $\phi = \varepsilon$ ) dans (1.15). L'entropie définie par

$$H = \int_0^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) \ln(f(\varepsilon)) \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon,$$

décroit en temps (prendre  $\phi = \ln(f)$  dans la formulation faible) et on a le théorème  $H$ . Les états d'équilibre sont de la forme

$$\partial_t H = 0 \Leftrightarrow f(\varepsilon) = \exp(-A\varepsilon + B).$$

Le problème est plus simple que dans le cas tridimensionnel. Nous montrons d'abord l'existence d'une unique solution, globale en temps pour le problème semi-discret qui est décrit dans la section

suiivante. Ce résultat est obtenu en considérant à nouveau une moyenne harmonique comme dans le cas tridimensionnel (1.14). Ensuite, pour le problème discretisé en temps, nous obtenons une borne sur les pas de temps pour assurer la positivité et la décroissance de l'entropie.

En outre, nous montrons que l'évaluation de cet opérateur peut-être réalisée avec un coût proportionnel au nombre de points de maillage malgré le caractère quadratique de l'opérateur. Nous expliquons également qu'il est possible dans ce cas (isotrope) de considérer un maillage arbitraire alors que les travaux précédents dans le cas 3D [a3, a6, 84] nécessitent un maillage uniforme. Ceci permet de raffiner le maillage pour les faibles énergies et donc d'obtenir des solutions très précises. On montre également sur quelques tests numériques que si la condition sur le pas de temps pour rester entropique est relaxée, des oscillations apparaissent sur la fonction. Ces oscillations sont particulièrement visibles sur la fonctionnelle de Linnick ou information de Fischer

$$L(t) = \int_{\varepsilon \geq 0} \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)^2 \frac{\varepsilon^{3/2}}{f} d\varepsilon,$$

dont on ne sait pas montrer si elle est monotone sauf dans le cas linéaire [104]. Quelques questions restent ouvertes comme le comportement en temps grand de la solution à la fois pour le problème semi-discrétisé et discretisé en temps, bien qu'on observe le retour vers l'ETL de la solution.

## 1.6.2 Forme sans log et schémas en temps [a9]

*En coll. avec S. Cordier.*

Dans cette partie, nous nous intéressons à nouveau aux opérateurs de FPL dans le cas isotrope. Nous considérons une autre moyenne que la moyenne harmonique, la moyenne dite "entropique" :

$$g_{i,j} \stackrel{def}{=} \frac{f_i Df_j - f_j Df_i}{D(\ln f)_j - D(\ln f)_i},$$

si  $D(\ln f)_j \neq D(\ln f)_i$  et  $f_i f_j$  sinon (mais les termes correspondants ont une contribution nulle à l'opérateur de collisions). Cette expression est une approximation d'ordre 1 du produit  $f_i f_j$  sauf pour une grille uniforme où elle est d'ordre 2. Cette moyenne a également été utilisée dans [a7]. Pour un tel choix, l'opérateur semi-discrétisé qui s'écrivait :

$$\sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \phi_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} g_{i,j} k_{i,j} \Delta \varepsilon_i \Delta \varepsilon_j (D\phi_i - D\phi_j) (D(\ln f)_i - D(\ln f)_j), \quad (1.16)$$

devient

$$\sum_{i=1}^N c_i \frac{\partial f_i}{\partial t} \phi_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} k_{i,j} \Delta \varepsilon_i \Delta \varepsilon_j (D\phi_i - D\phi_j) (f_j Df_i - f_i Df_j).$$

On a donc dans ce cas une façon de passer de la formulation discrète avec "log" (qui permet de montrer la décroissance de l'entropie) à la formulation sans log qui a une structure quadratique. Ceci n'est valable que pour un maillage uniforme en énergie et n'est pas généralisable facilement au cas tridimensionnel. Nous montrons l'existence d'une solution strictement positive en utilisant la décomposition de l'opérateur en terme de perte et de gain qui est classique pour l'opérateur de Boltzmann. Nous en déduisons une borne inférieure en utilisant l'inégalité de Csizar-Kullback

$$\|f - M\|_{L^1}^2 \leq 2H(f\|M),$$

où  $H(f\|M)$  est l'entropie relative discrète. Ceci nous permet de conclure que  $f(t)$  tend vers l'ETL pour une suite de temps  $t$  tendant vers  $+\infty$ . Il s'agit du premier exemple à notre connaissance de discrétisation de l'opérateur de FPL pour lequel on sache montrer cette propriété.

Nous nous intéressons ensuite à la discrétisation en temps de ces opérateurs. On considère dans un premier temps un schéma explicite basé sur la structure quadratique de l'opérateur. En effet, l'opérateur défini par (1.16) peut s'écrire comme une somme de systèmes à quatre vitesses

généralisés [a1, a2]. Nous obtenons une limitation sur le pas de temps pour que le schéma soit positif et entropique qui dépend de la norme sup de la solution (pour laquelle il n'existe pas d'estimations). Le schéma explicite dont le coût est un  $O(N^3)$  n'est en fait pas plus coûteux que le schéma implicite basé sur une linéarisation de l'opérateur de collision, proposé par Epperlein [73], et qui nécessite l'inversion d'une matrice pleine.

Nous étudions aussi des schémas d'ordre supérieur en temps pour lesquels le schéma explicite fournit une phase de prédiction qui est corrigée. Ces schémas vérifient également la positivité et la décroissance de l'entropie.

Nous présentons quelques résultats numériques en particulier pour une distribution initiale très singulière, de type Dirac en énergie, qu'on ne pouvait traiter avec les schémas précédents basés sur la formulation log.

**Remarque 3** *En fait il est possible de définir un schéma en temps implicite et positif suivant en cela ce que j'ai fait pour l'équation de Fokker-Planck pour les milieux granulaires, paragraphe (1.10) ou [a14]. Les schémas en temps implicite proposés par [73] ou par [86] ne sont pas positifs et pour le cas du schéma proposé dans [73] aussi coûteux que le schéma explicite en temps. Le coût du procédé itératif que nous avons proposé pour l'équation de Fokker-Planck des milieux granulaires est quant à lui linéaire par rapport au nombre de points.*

## 1.7 Résolution numérique d'une équation de Fokker-Planck ionique avec température électronique [a7, cr1]

*En coll. avec S. Dellacherie et R. Sentis.*

Cet article décrit un schéma numérique pour le traitement d'un opérateur de collision ion-électron de type Fokker-Planck; pour cela on introduit la notion de *moyenne entropique* de deux quantités positives. Ce schéma a la propriété d'être entropique au sens du théorème H de Boltzmann sous un critère de type CFL. On montre de plus que la solution converge en temps grand vers un unique état d'équilibre Maxwellien.

L'évolution d'une population  $f = f(t, x, v)$  d'ions (de masse  $m$  et de charge  $Z$ ) et de la température électronique  $T_e = T_e(t, x)$  (où  $x \in \mathbf{R}^3$  et  $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ ) est régie par le système

$$\frac{\partial}{\partial t} f = S(f), \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_e(T_e) = -\frac{m}{2} \langle v^2 S(f) \rangle \quad (1.18)$$

où  $\mathcal{E}_e(T_e) = \frac{3}{2} Z N T_e$ ,  $P_e = Z N T_e$ ,  $N = \langle f \rangle$ ,  $N \vec{U} = \langle f \vec{v} \rangle$ , et

$$S(f)(\vec{v}) = \Omega \nabla_v \cdot \left[ (\vec{v} - \vec{U}) f(v) + \frac{T_e}{m} \nabla_v f \right].$$

En introduisant une température ionique  $T$  définie par  $3NT = m \langle (\vec{v} - \vec{U})^2 f \rangle$ , l'opérateur  $S$  vérifie

$$\langle S(f) \rangle = 0, \quad \langle S(f) \vec{v} \rangle = 0, \quad \frac{m}{2} \langle S(f) v^2 \rangle = 3\Omega N (T_e - T).$$

Définissons la Maxwellienne  $\mathbf{M}_{N, \vec{U}, T}(\vec{v}) = \frac{N}{(2\pi T/m)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m(\vec{v} - \vec{U})^2}{2T} \right]$ .

Le schéma entropique et conservatif pour (1.17-1.18) est construit à partir de la formulation faible logarithmique de l'opérateur de collision  $S$ :

$$S(f) = \Omega \nabla_v \cdot [f \nabla_v \log(f/\mathbf{M})]$$

Pour simplifier la présentation plaçons-nous dans un cadre monodimensionnel en  $\vec{v}$  et  $\mathcal{E}_e(T_e)$  devient alors  $\frac{1}{2} Z N T_e$ . L'extension au 3-D est triviale.

On définit une approximation discrète de  $S$  en tout point d'une grille uniforme  $i\Delta v$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  par :

$$S(f) \frac{m\Delta v^2}{\Omega T_e} = \tilde{f}_{j+1/2} \left( \log\left(\frac{f}{\mathcal{M}_{\tilde{U}, T_e}}\right)_{j+1} - \log\left(\frac{f}{\mathcal{M}_{\tilde{U}, T_e}}\right)_j \right) - \tilde{f}_{j-1/2} \left( \log\left(\frac{f}{\mathcal{M}_{\tilde{U}, T_e}}\right)_j - \log\left(\frac{f}{\mathcal{M}_{\tilde{U}, T_e}}\right)_{j-1} \right) \quad (1.19)$$

Pour éliminer les logarithmes de  $f_{j+1/2}$  qui ne sont pas souhaitables pour traiter des distributions de type masse de Dirac et aussi pour avoir un schéma sous la forme plus standard diffusion + convection, nous avons pour cela introduit la moyenne entropique de deux quantités positives  $x$  et  $y$

$$\tilde{m}_{x,y} = \frac{x-y}{\log x - \log y} \text{ si } x \neq y, \quad \tilde{m}_{x,y} = x \text{ sinon.}$$

On prend donc

$$f_{j+1/2} = m \left( \log\left(\frac{f}{\mathcal{M}_{\tilde{U}, T_e}}\right)_{j+1}, \log\left(\frac{f}{\mathcal{M}_{\tilde{U}, T_e}}\right)_j \right)$$

ce qui fournit donc le schéma entropique et conservatif sans logarithme suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_j = \frac{\Omega}{\Delta v} \left[ (v_{j+1/2} - \tilde{U}) \tilde{f}_{j+1/2} - (v_{j-1/2} - \tilde{U}) \tilde{f}_{j-1/2} \right] + \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} (Af)_i \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_e(T_e) + \frac{m}{2} \langle v_j^2 S(f) \rangle = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

et  $(Af)_i = a_j(f_{j+1} - f_j) - b_j(f_j - f_{j-1})$  avec  $a_j = 1$  (sauf  $a_{j_{\max}} = 0$ ),  $b_j = 1$  (sauf  $b_1 = 0$ ) n'est rien d'autre que le laplacien discret usuel.

Nous avons comparé les résultats obtenus avec le schéma utilisant la moyenne entropique, et la moyenne arithmétique, et aussi avec le schéma de Chang et Cooper [49] sur un maillage fin et sur un maillage grossier. Pour la simulation appliquée à la Fusion par Confinement Inertiel, comme la température est très forte en fin de calcul, il faut avoir un  $\Delta v$  adapté, ce qui conduit à une discrétisation sur quelques mailles seulement de la fonction de répartition initiale  $f^0$  où la température est beaucoup plus faible. Lorsque le maillage est grossier, on constate que la moyenne entropique donne un résultat plus précis que le schéma de Chang et Cooper et que la moyenne arithmétique ne preserve plus la positivité.

Le schéma proposé s'étend en géométrie bidimensionnelle axisymétrique sans difficulté. Par ailleurs, on peut impliciter facilement la partie diffusion dans (1.20) ce qui permet des pas de temps plus grands tout en gardant d'excellents résultats numériques; on montre que l'équilibre thermodynamique  $f^\infty$  est encore solution stationnaire avec ce schéma semi-implicite.

**Remarque 4** Avec *S. Dellacherie* nous avons montré plus tard que le schéma de Chang et Cooper est en fait un schéma entropique de la forme 1.19 (voir [np1]).

## 1.8 Méthode numérique pour l'opérateur de scattering de Compton [a12]

*En coll. avec S. Cordier.*

On s'intéresse à un gaz de photons isotrope et homogène, décrit par la densité  $f = f(t, k) \geq 0$  de photons qui à l'instant  $t \geq 0$  possèdent l'énergie  $k > 0$  qui vérifie l'équation de Boltzmann quantique

$$k^2 \frac{\partial f}{\partial t} = \int_0^\infty (f'(1+f)B(k', k) - f(1+f')B(k, k')) dk', \quad (1.21)$$

où l'on note  $f' = f(t, k')$ . La section efficace  $B(k, k')/k^2$  représente la probabilité de transition par scattering de l'état d'énergie  $k$  à l'état d'énergie  $k'$ . On vérifie alors, au moins formellement, que pour toute solution  $f$  de (1.21), on a conservation de la masse  $N(f)$  et décroissance d'une entropie  $S(f)$  définie dans [127]. Il est alors naturel de penser que les états d'équilibre de (1.21) sont les états qui maximisent l'entropie à masse donnée. Les distributions de Bose-Einstein (cas  $\mu > 0$ ) et de Planck (cas  $\mu = 0$ ) définies par

$$f_\mu(k) = \frac{1}{e^{k+\mu} - 1}.$$

On vérifie aisément que les  $f_\mu$  sont des solutions stationnaires de (1.21) i.e.  $Q(f_\mu, f_\mu) = 0$  et que  $f_\mu$  est solution du problème de maximisation  $S(f_\mu) = \max_{N(f)=N} S(f)$ , avec  $\mu$  défini par  $N_\mu = N(f_\mu) = N$  lorsque  $N \leq N_0$ . De plus, l'état de Planck  $f_0$  est le maximum global de l'entropie, i.e.  $S(f_0) = \max S(f)$  et satisfait  $N(f_0) < \infty$ . On peut alors se demander quelle est la solution du problème de maximisation de l'entropie pour  $N > N_0$ . Caffisch et Levermore montrent dans [123] que les fonctions de masse supérieure à celle de l'état de Planck  $f_0$  qui maximisent l'entropie sont égales à la somme de  $f_0$  et d'une masse de Dirac en 0. Mischler et Escobedo étudient le problème d'évolution et montrent la convergence faible des solutions vers ces états d'équilibre singuliers à l'origine et la convergence forte dans  $L^1([k_0, \infty))$  fort (pour tout  $k_0 > 0$ ) lorsque  $t \rightarrow \infty$  [127]. Soulignons deux conséquences de leur théorème. Si l'on part d'une donnée initiale régulière, la solution reste régulière pour tout temps. De plus, si  $N = N(f(t=0)) > N_0$  alors  $f(t, \cdot) \rightarrow f_0 + \alpha \delta_0$  et  $\alpha = N - N_0 > 0$ , i.e. un état initial régulier de masse supérieure à la masse de l'état de Planck  $N_0$  "condense à l'origine" en temps infini.

Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la discrétisation de la limite collision rasantes de (1.21) qui est l'équation de Kompaneets [128]:

$$\partial_t f(k, t) = k^{-2} \partial_k (k^4 (f + f^2 + \partial_k f)).$$

Cette équation présente un autre comportement singulier par rapport à l'équation de Boltzmann (1.21) comportement mis en évidence dans [126]: pour un certain type de conditions initiales vérifiant quand même  $N < N_0$  on a un phénomène d'explosion en temps fini à l'origine.

La méthode développée est évidemment entropique et conserve l'énergie des photons. La discrétisation en temps est implicite.

Les résultats numériques montrent bien les deux comportements singuliers attendus: lorsque la masse de la condition initiale dépasse celle de l'état de Planck, on voit apparaître une concentration à l'origine en temps grand et pour les conditions initiales permettant une explosion en temps fini on assiste bien à la formation d'une concentration de masse à l'origine en temps fini.

## 1.9 Analyse spectrale de l'opérateur de Lorentz [a8]

*En coll. avec S. Cordier et B. Lucquin.*

Dans ce travail, on s'intéresse à la limite collision rasante d'un opérateur de collision élastique de type Boltzmann:

$$Q^\varepsilon(f) = \int_{S^{d-1}} B^\varepsilon(\omega - \omega') [f(\omega') - f(\omega)] d\omega', \quad (1.22)$$

où  $S^{d-1}$  est la sphère unité  $\mathbb{R}^d$  de dimension  $d = 2, 3$  et  $B^\varepsilon$  est une suite de sections efficaces de collisions qui se "concentrent sur les faibles déviations". Plus précisément,  $B^\varepsilon$  est une fonction positive qui ne dépend que de l'angle de déviation  $\theta$  entre les vitesses  $\omega$  et  $\omega'$  de la forme (voir [65]) (cas 1):

$$B^\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\varepsilon^3} \sigma\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \chi_{[0, \varepsilon\pi]}(\theta),$$

où  $\chi_{[a, b]}$  est la fonction caractéristique de  $[a, b]$  et  $\sigma$  une fonction positive. Ce choix exprime que les collisions se concentrent bien vers les petits angles. Cependant, cela ne permet de traiter le cas

Coulombien qui correspond à des sections efficaces de la forme (cas 2) :

$$B^\varepsilon(\theta) = \sigma(\theta) \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right)} \frac{\sin(\theta)}{[\sin(\frac{\theta}{2})]^4} \chi_{[\varepsilon, \pi]}(\theta).$$

Dans ce cas, le petit paramètre  $\varepsilon$  que les physiciens appellent "paramètre plasma" a une signification physique, liée au nombre de particules dans la sphère de Debye (voir [56]).

Lorsque la fonction  $f$  est suffisamment régulière (au moins  $C^3$ ) et que les sections efficaces possèdent des moments bornés

$$\int_0^\pi \sigma(\theta) \sin(\theta) \theta^2 d\theta < +\infty, \quad \text{cas 1,}$$

on montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Q^\varepsilon(f)(\omega) - C \Delta_\omega f(\omega)),$$

où  $C$  dépend des moments de  $\sigma$  et  $\Delta_\omega$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Ceci permet de montrer que la solution du problème homogène sur  $S^d$  associée à l'opérateur de Boltzmann-Lorentz (1.22) converge vers celle associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami pour tout  $t \in [0, T]$  où  $T$  est un temps arbitraire.

Ces opérateurs peuvent être dérivés à partir des opérateurs de Boltzmann ou Fokker-Planck en considérant des mélanges d'espèces de masses différentes [59, 61, 62]. On rappelle que la limite collisions rasantes de Boltzmann vers Fokker-Planck a été étudiée dans [65, 56]. Dans notre cas, l'opérateur est plus simple mais d'une part, nous pouvons améliorer le résultat en obtenant une convergence de  $f^\varepsilon$  vers  $f$  uniforme en temps et d'autre part, on contrôle la vitesse de retour vers les fonctions d'équilibre : on montre que la vitesse de relaxation des solutions à  $\varepsilon$  donné tend vers celle du système limite. Ce résultat est basé sur une analyse spectrale des opérateurs. Notons que les deux types d'opérateur ont la même base de fonctions propres. En dimension trois, il s'agit des harmoniques sphériques  $Y_{l,m}$  qui forment une base orthonormée de l'espace  $L^2(S^2)$ . Il est bien connu que ce sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami associées à des valeurs propres  $\nu_l = -l(l+1)$ . Elles sont également fonction propres de  $Q^\varepsilon$  (voir [122, 110]) avec des valeurs propres qui ne dépendent que de  $l$  données par

$$\nu_l^\varepsilon = 2\pi \int_0^\pi [1 - P_l(\cos(\theta))] B^\varepsilon(\theta) d\theta.$$

où  $P_l$  sont les polynômes de Legendre. On montre qu'il existe des constantes  $C^\pm$  telles que

$$C^- \nu_l^\varepsilon \leq \nu_l \leq C^+ \nu_l^\varepsilon, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_l^\varepsilon = \nu_l.$$

Ces travaux ont fait l'objet d'applications numériques [52].

## 1.10 Méthode numérique pour une équation de type Fokker-Planck modélisant les milieux granulaires [a14]

*En coll. avec S. Cordier et V. Dos Santos.*

Dans un milieu granulaire, Chaque grain interagit par des collisions quasi instantanées, proche du modèle classique d'un gaz. Comme les grains peuvent être sans cohésion, ils doivent interagir comme des sphères dures, sans forces de grande portée.

La différence importante entre les collisions du granulaire et les particules des gaz parfaits, se trouve dans l'inélasticité des collisions entre les grains. L'énergie perdue lors d'une collision est exprimé par la diminution de la vitesse relative, dans le repère du centre de masse :

$$v' - u' = -h(v - u)$$

où  $v, u$  et  $v', u'$  sont les vitesses des grains, respectivement avant et après collision, et  $0 \leq h \leq 1$  est le coefficient de restitution. Les collisions parfaitement élastiques correspondent à  $h = 1$ , alors que les collisions parfaitement inélastiques sont obtenues pour  $h = 0$ . Dans le premier cas, les particules ont après collisions les mêmes vitesses de centre de masse.

Ce travail porte sur l'étude d'une méthode numérique pour une équation de type Fokker-Planck pour un milieu granulaire monodimensionnel ([134, 130, 131]). Cette équation représente une approximation cinétique d'un système de particules quasi-élastique dans un bain thermique.

Dans cette méthode, on utilise un "splitting" entre l'équation de transport et l'opérateur de collisions. La partie transport peut être traitée en utilisant des schémas "upwind". Par conséquent, nous nous intéressons uniquement à l'équation homogène.

Le modèle considéré, est une équation de type Fokker-Planck, représentant la limite quasi élastique d'un modèle granulaire de type Boltzmann

$$d_t f = \partial_v (\lambda F f + \beta(v - u)f + \sigma \partial_v f),$$

où  $F$  est le terme du granulaire pur, définie ci-dessus comme l'accélération, et  $F$  s'écrit

$$F(v) = \int_{\mathbb{R}} |v - v'| (v - v') f(v') dv'$$

et  $\lambda, \beta, u, \sigma$  sont des constantes arbitraires. D'autre part  $\sigma \partial_v^2 f$  représente le bain thermique, où  $\sigma$  est lié à cette température (apport d'énergie par agitation). Ce terme "remplace" le terme de diffusion  $D$ .  $\beta \partial_v (v - u)f$  est le terme de friction. Définissons  $\rho$  et  $u_f$  comme la masse et la vitesse moyenne respectivement

$$\rho = \int_{\mathbb{R}} f(v') dv', u_f = 1/\rho \int_{\mathbb{R}} f(v') v' dv'$$

Les propriétés de ce modèle sont la conservation de la masse (et du moment quand  $\beta = 0$ ) et la décroissance de l'énergie (pour  $\beta = \sigma = 0$ ) et de l'entropie définie par :

$$H = \int \sigma [v^2 + \ln(f(v))] f(v) dv + \frac{1}{6} \int_v \int_{v'} |v - v'|^3 f(v') f(v) dv' dv$$

Pour ce modèle d'équation de Fokker-Planck, on a bien l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre (cf. [132]) mais on n'a pas d'expression analytique de l'état d'équilibre en fonction des quantités conservées.

Les difficultés liées à la discrétisation de cette équation sont la prise compte de la conservation de la quantité de mouvement et à l'absence d'expression analytique pour l'état d'équilibre. D'autre part il nous paraissait nécessaire d'obtenir une méthode qui pour un maillage fixé nous permettent de traiter des valeurs de la température du bain thermique quelconque, donc éventuellement nulle. Une méthode numérique analogue a celle utilisée pour l'équation de Landau ne permet pas d'une façon générale d'assurer ce second point.

Le schéma proposé est construit par une méthode inspirée de celle de Chang et Cooper, méthode utilisée couramment pour les équations de Fokker-Planck linéaire.

Les atouts bien connus de méthode de Chang et Cooper sont sa simplicité (pas de logarithme), c'est un schéma monotone et qui préserve les états d'équilibre. Mais en fait on peut montrer que ce schéma est entropique, [np1] :

Soit l'équation de type Fokker Planck linéaire (FPL), similaire à celle du granulaire, mais avec  $F = v, \beta = 0$

$$\partial_t f = \partial_v (v f + \sigma \partial_v f), \tag{1.23}$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\partial_t f = \sigma \partial_v (M \partial_v (f/M))$$

où  $M$  est une Maxwellienne, donnée par  $M(v) = \exp(-\|v\|^2/2\sigma)$ .



On recherche alors une discrétisation de la seconde forme (formulation faible) i.e.

$$\partial_t f_i \phi_i = \sigma (D\phi)_{i+1/2} (M_{i+1/2} D(f/M)_{i+1/2})$$

où  $Dg$  représente la différence centrée finie i.e.  $D(g)_{i+1/2} = (g_{i+1} - g_i)/\Delta v$  et les coefficients  $M_{i+1/2}$  constituent une moyenne de la valeur entre  $M_i$  et  $M_{i+1}$  à définir. En prenant

$$M_{i+1/2} = \frac{M_i M_{i+1}}{M_{i+1} - M_i} \log(M_{i+1}/M_i) \quad (1.24)$$

On trouve une discrétisation de (1.23) de la forme

$$\partial_t f_i = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta v}$$

avec  $F_{i+1/2} = \frac{\sigma}{\Delta v} \tilde{M}_{i+1/2} (\frac{f_{i+1}}{M_{i+1}} - \frac{f_i}{M_i})$ . On pose  $\tilde{M}_{i+1/2} = \frac{M_i M_{i+1}}{M_{i+1} - M_i} (\ln M_{i+1} - \ln M_i)$ , d'où

$$F_{i+1/2} = \frac{\sigma}{\Delta v} (f_{i+1} - f_i) + \frac{\sigma}{\Delta v} (-1 + \frac{\tilde{M}_{i+1/2}}{M_{i+1}}) f_{i+1} + \frac{\sigma}{\Delta v} (1 - \frac{\tilde{M}_{i+1/2}}{M_i}) f_i.$$

Analysons chaque terme :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\Delta v} (1 - \frac{\tilde{M}_{i+1/2}}{M_i}) &= \frac{\sigma}{\Delta v} (1 - \frac{M_{i+1}}{M_{i+1} - M_i} (\ln M_{i+1} - \ln M_i)) \\ &= \frac{\sigma}{\Delta v} \ln \frac{M_{i+1}}{M_i} (\frac{1}{\ln M_{i+1} - \ln M_i} - \frac{M_{i+1}}{M_{i+1} - M_i}) \\ &= -\frac{\sigma}{\Delta v} \ln \frac{M_{i+1}}{M_i} (\frac{1}{\ln \frac{M_i}{M_{i+1}}} - \frac{1}{\frac{M_i}{M_{i+1}} - 1}) \end{aligned}$$

Si on pose  $w = \ln(M_i/M_{i+1})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\Delta v} (1 - \frac{\tilde{M}_{i+1/2}}{M_i}) &= \frac{\sigma}{\Delta v} w (\frac{1}{w} - \frac{1}{\exp w - 1}) \\ &= \frac{\sigma}{\Delta v} w h(w) = \frac{\sigma}{\Delta v} w \theta \end{aligned}$$

où  $\theta = h(w)$  et  $h$  est la fonction

$$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}.$$

Or,  $h$  est positive sur  $\mathbb{R}$ , décroissante et comprise entre 0 et 1.

On fait de même pour le second terme :

$$\frac{\sigma}{\Delta v} (-1 + \frac{\tilde{M}_{i+1/2}}{M_{i+1}}) = \frac{\sigma}{\Delta v} w h(-w),$$

et  $h(-w) = -h(w) + 1$ , d'où

$$\frac{\sigma}{\Delta v} (-1 + \frac{\tilde{M}_{i+1/2}}{M_{i+1}}) = -\frac{\sigma}{\Delta v} w (\theta - 1).$$

Alors

$$\begin{aligned} F_{i+1/2} &= \frac{\sigma}{\Delta v} (f_{i+1} - f_i) + \frac{\sigma}{\Delta v} (-w(\theta - 1)) f_{i+1} + \frac{\sigma}{\Delta v} (w\theta) f_i \\ &= \frac{\sigma}{\Delta v} (f_{i+1} - f_i) + \frac{\sigma w}{\Delta v} (\theta f_i + (1 - \theta) f_{i+1}). \end{aligned}$$

C'est la définition du schéma de Chang et Cooper, construit à l'origine pour préserver les états d'équilibre, voir [49]. Cette construction du schéma de Chang et Cooper, que j'ai obtenu avec S. Dellacherie voir [np1], montre en fait que ce schéma est entropique. On vérifie aussi que ce schéma permet de traiter une température de bain quelconque, c'est à dire que dans la limite  $\sigma \rightarrow 0$  on obtient un schéma upwind pour

$$\partial_t f = \partial_v(vf),$$

Ce qui n'est pas le cas pour d'autres choix des poids  $M_{i+1/2}$ .

Dans le cas du granulaire, pour assurer la conservation de mouvement l'opérateur a été symétrisé,

$$\partial_t \int f \phi dv = \frac{-\sigma}{2\rho} \int \int (\partial_v \phi - \partial_{v'} \phi') f f' (\partial_v \log(f/M) - \partial_{v'} \log(f/M)') dv dv'.$$

puis sur cette forme, on définit un schéma de type Chang et Cooper en partant de la formulation faible et en utilisant les moyennes de type (1.24).

L'inconvénient du schéma de Chang et Cooper est qu'il requiert la connaissance explicite de l'état d'équilibre. Dans le cas du granulaire ce n'est en fait pas gênant, car on utilise en réalité un pseudo état d'équilibre.

On a montré que le schéma ainsi construit a toutes les qualités requises, conservatif, entropique et qu'il redonne une discrétisation correcte pour une température de bain nulle.

Comme pour FPL isotrope le coût de l'évaluation de l'opérateur est linéaire bien qu'à priori quadratique(en fait les deux termes de collisions ont la même structure).

Mais plus intéressant, on a utilisé une discrétisation temporelle implicite qui peut aussi être utilisée dans le cas de FPL isotrope. L'implication est basée sur une méthode itérative non conservative en quantité de mouvement où les coefficients de drift et de diffusion sont pris à l'itérée précédente. À chaque itération la solution obtenue est positive. La conservation de la quantité de mouvement est obtenue à la convergence du processus itératif. Numériquement on montre que si l'on accepte une erreur  $\epsilon$  à chaque pas de temps sur la quantité de mouvement alors l'erreur reste en  $O(\epsilon)$  pendant toute la phase transitoire et l'on converge bien vers un état d'équilibre. Ce bon comportement nous a semblé lié à la nature entropique et conservative de l'opérateur discret.

**Remarque 5** *Nous avons testé par la suite cette façon de faire l'implicite sur l'équation de Fokker-Planck-Landau isotrope. Cela marche tout aussi bien que dans le cas du granulaire. Et contrairement aux schémas implicites proposés dans [86, 73], on est assuré de la positivité de la solution. De plus c'est moins coûteux car la matrice à inverser est tridiagonale et non pleine.*

## 1.11 Conclusions

Quelles conclusions tirer aujourd'hui de ces études sur la discrétisation de quelques opérateurs de collision par des méthodes à répartition discrète de vitesses?

Ces schémas constituent bien une alternative sérieuse aux méthodes de Monte-Carlo ou aux schémas de type différence finies classiques, même pour l'équation de Boltzmann, mais il y a une exception : l'opérateur de Landau dans le cas non isotrope.

Pour l'opérateur de Landau 3-d ou 2-d axisymétrique il faudrait revoir la discrétisation de cet opérateur pour pouvoir traiter par exemple des fonctions de distribution très piquées, par exemple des masses de Dirac, ou localement nulles. Donc obtenir un schéma sans logarithmes serait une solution. Mais comme signalé au paragraphe (1.5.2) un résultat, [cr3], concernant les schémas pour l'équation de la chaleur anisotrope avec une direction de diffusion quelconque, semble en fait indiquer qu'il n'y aurait pas de schémas quadratiques positifs sur un maillage uniforme pour l'équation de Landau. Le choix d'un schéma avec logarithmes ne semble pas non plus, garantir la positivité de la solution, voir (1.5.2), et la modification proposée pour garantir la positivité a pour effet néfaste d'empêcher l'évolution d'une fonction de distribution qui serait par exemple la somme de deux masses de Dirac. Il serait aussi souhaitable, toujours dans le cas de l'équation de Landau 3-d ou 2-d axisymétrique, de pouvoir utiliser un schéma implicite en temps. Autrement,

sans ces deux améliorations, ce type de discrétisation de l'opérateur de Landau risque fort de rester un travail académique.

Autre petite difficulté pour l'équation de Landau, le cas isotrope, pour lequel il semble impossible, bien que ce soit un problème 1-D, d'étendre la méthode conservative et entropique sans logarithme au cas d'un maillage non uniforme en énergie (pour la formulation avec "log" c'est trivial). On peut définir une méthode positive, sans logarithme, conservative et préservant les états d'équilibre, mais le théorème H n'est pas vérifié au sens strict. On obtient un résultat plus faible du type

$$\sum_i Q_i(f) \overline{\log}(f_i) \leq 0,$$

où  $\overline{\log}(x)$  est une approximation de la fonction  $\log(x)$ , ce qui est doit être suffisant pour assurer le retour à l'équilibre.

## Chapitre 2

# Méthodes de moments et régimes diffusifs pour le transfert radiatif : modélisation et aspects numériques

Cette partie concerne mon nouvel axe de recherche et mes travaux les plus récents.

### 2.1 Introduction

Le fil conducteur de ce chapitre est la simulation numérique en hydrodynamique radiative en utilisant des modèles aux moments pour la partie radiative, voir par exemple [147]. Pour la simulation d'un système de moments en radiatif, il semble qu'il n'existe pas pour l'instant de codes permettant de traiter de façon satisfaisante, à la fois les zones transparentes et les zones de diffusion, [147, 143, 142], et ce, même en dimension 1 d'espace. On peut déjà dire que soit les schémas utilisés font de façon cachée l'approximation de diffusion, soit la méthode numérique ne permet pas de capturer correctement le régime de diffusion, soit la méthode capture correctement le régime de diffusion mais dans les régimes intermédiaires le schéma n'est pas positif.

Examinons donc un peu plus en détail les problèmes rencontrés et les solutions existantes.

Dans certaines situations physiques, quand les collisions prépondérantes pour les particules légères sont les collisions avec des particules lourdes, par exemple collision electron-ion ou photon-electron, il est possible de modéliser le terme de collision lourd-léger pour les espèces légères par un opérateur d'isotropisation, voire même de modéliser le milieu léger par un système d'équations de moments basées sur une approximation de type quasi-isotrope. Par exemple en transfert radiatif, en 1-d et pour une vitesse matière nulle l'équation de transport pour le transfert radiatif s'écrit, voir par exemple [148, 153, 147] :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I + \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} I = S_t(\nu, \vec{n}), \quad (2.1)$$

$S_t = S_a + S_s$  est la somme de deux contributions. Le premier prend en compte l'émission-absorption de photons par la matière

$$S_a(\nu, \vec{n}) = \sigma_a(\nu) [B(\nu, T) - I].$$

où  $B(\nu, T)$  est la Planckienne

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left( e^{h\nu/kT} - 1 \right)^{-1}$$

et  $\sigma_a(\nu) \geq 0$  est le coefficient d'émission-absorption.

Le second terme prend en compte le scattering des photons par la matière [148]

$$S_s(\nu, \vec{n}) = \sigma_s(\nu) \frac{1}{4\pi} \int I(\nu, \vec{n}) d\vec{n} - I(\nu, \vec{n})$$

Une classe bien connue de modèles approchés pour l'équation du transfert radiatif sont les modèles à deux moments. En prenant les moments de l'équation de transfert radiatif (2.1) contre 1 and  $\vec{n}$  on obtient la forme générale de modèles à deux moments

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{\partial}{\partial x} F_r = \sigma_a (aT^4 - E_r), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F_r + \frac{\partial}{\partial x} P_r = -(\sigma_a + \sigma_s) F_r \quad (2.2)$$

la fermeture pour le terme de pression  $P_r$  étant généralement obtenu soit par minimisation d'entropie soit empiriquement et est de la forme

$$P_r = E_r \chi(|\frac{F_r}{E_r}|)$$

$\chi$  étant le facteur d'Eddington et vérifie  $\chi(0) = \frac{1}{3}$ . En intégrant en fréquence ou non on obtient soit un modèle dit "gris", soit un modèle "multi-groupes". L'avantage de tels modèles étant évidemment le faible coût par rapport à celui de la résolution directe de l'équation du transfert radiatif. Concernant les propriétés de ce type de modèle on peut montrer que si le facteur d'Eddington vérifie  $x^2 < \chi(x) < 1$  alors le système (2.2) est hyperbolique et a pour domaine invariant  $E_r > 0$  et  $|F_r/E_r| \leq 1$ , la deuxième inégalité montrant que le flux d'énergie radiative est limité ce qui est naturellement le cas pour une solution positive de l'équation du transfert radiatif.

On peut aussi obtenir le même type de modèle simplifié pour les electrons en partant de l'équation de Landau et en supposant toujours que la fonction de distribution des electrons est quasi isotrope. Le terme de collision electron-electron se réduit alors à Fokker-Planck-Landau isotrope pour lequel nous avons étudié la discrétisation. Dans la terminologie du transfert radiatif c'est en fait un modèle multigroupe, on a donc un système infini de systèmes hyperbolique  $2 \times 2$  de type équations du télégraphe couplées par FPL isotrope qui assure la thermalisation de la fonction de distribution.

Une simplification supplémentaire peut être obtenue en faisant l'approximation de type diffusion  $\frac{\partial}{\partial t} F_r = 0$ , ce qui permet de remplacer un problème hyperbolique par un problème de nature parabolique(modèle de diffusion hors équilibre) plus facile à traiter au niveau numérique :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_r - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{1}{\sigma_a + \sigma_s} E_r) = \sigma_a (aT^4 - E_r)$$

Dans certains régimes cette approximation de diffusion peut se justifier par une analyse asymptotique. Signalons que par cette approximation une propriété fondamentale de l'équation est perdue c'est à dire que le flux n'est plus limité, propriété qui résulte de la positivité de la solution et du choix des moments. On a aussi propagation à vitesse infinie de l'information. Il existe bien une technique, limitation de flux, pour remédier à ces problèmes. Mais le meilleur moyen de les éviter est de ne pas faire l'approximation de diffusion, Mihalas [148].

Du point de vue numérique les difficultés principales de la discrétisation d'un système de type (2.2) sont dues l'implication d'un schéma pour un système hyperbolique non linéaire et à une diffusion numérique grande devant la diffusion physique du régime asymptotique pour toutes méthodes numériques classiques ce qui ne permet pas de capturer le régime asymptotique de diffusion. Considérons un modèle de transfert radiatif simplifié

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{\partial}{\partial x} F_r = 0, \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} F_r + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} E_r = -\frac{\sigma}{\varepsilon} F_r \quad (2.3)$$

En effet dans les applications physiques intéressantes  $\varepsilon \equiv .001$ . Pour laisser l'hydrodynamique piloter le pas de temps il est nécessaire de traiter la partie radiative en implicite. D'autre part quand  $\varepsilon \equiv .001$  et  $\sigma_s = O(1)$  le modèle dégénère vers le modèle de diffusion

$$\frac{\partial}{\partial t} E_r - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_r = 0. \quad (2.4)$$

Or pour une méthode de Godunov classique pour (2.3), la diffusion numérique est de l'ordre de  $\Delta x/\varepsilon$ ,  $\Delta x$  étant le pas d'espace. Si l'on veut traiter toutes les zones d'espace par la même méthode et ce quelque soit la valeur du paramètre de relaxation  $\varepsilon$  il est impératif que le modèle discret ainsi obtenu ait la même asymptotique que le modèle continu, c'est à dire que le régime limite soit une discrétisation de 2.4.

Cette problématique se retrouve d'ailleurs dans la discrétisation d'équations cinétiques du type modèle de Lorentz :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} f + \omega \cdot \nabla f = Q(f), \quad (2.5)$$

le terme de collision  $Q(f)$  étant un opérateur d'isotropisation sur la sphère, soit Laplace Beltrami,  $\Delta f$  sur la sphère unité, ou de type BGK  $\langle af \rangle - f$  avec  $\langle a \rangle = 1$ . Notons qu'en prenant  $Pr = 1$  dans (2.2) on rentre dans ce cas, c'est en fait l'équation du télégraphe. Pour ce type de modèles la limite de diffusion est bien établie du point de vue mathématique.  $\rho = \langle f \rangle$  vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho - \frac{1}{D} \Delta \rho = 0.$$

$D$  étant la dimension de l'espace physique dans lequel on se place.

L'équation de transfert radiatif (2.1) est évidemment du type (2.5).

Cela a conduit ces dernières années, pour ces problèmes hyperboliques, à la construction de schémas permettant de capturer correctement le régime de diffusion, "asymptotic preserving schemes", [174, 175, 172]. On peut aussi citer les travaux de Bouchut, Perthame et autres [158, 161] sur quelques cas particuliers, équations de Saint-Venant ou Euler isentropique dans lesquels il est proposé un schéma avec décentrement du terme source et permettant aussi de capturer le régime asymptotique de diffusion.

Mais ces méthodes n'apportent pas de réponses satisfaisantes dans le cadre radiatif, le flux n'étant toujours pas limité, ces schémas n'étant pas positifs. On peut illustrer ce problème par l'application de la méthode proposée par Jin, Pareschi et Toscani, [174, 175], pour l'équation du télégraphe

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{\partial}{\partial x} F_r = 0, \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} F_r + \frac{\partial}{\partial x} E_r = -\frac{1}{\varepsilon} F_r \quad (2.6)$$

On notera si les données initiales  $\rho^0, j^0$  sont positives, alors les solutions de (2.6)  $\rho, j$  sont positives, ce qui dans le contexte radiatif correspond à la limitation de flux.

Après rescaling  $\bar{F}_r = \frac{F_r}{\varepsilon}$  le problème s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{\partial}{\partial x} \bar{F}_r = 0, \frac{\partial}{\partial t} \bar{F}_r + \frac{\partial}{\partial x} E_r = -\frac{1}{\varepsilon^2} (F_r - (1 - \varepsilon^2) E_r) \quad (2.7)$$

La dérivée en espace dans le terme source de (2.7) est alors discretisée par une différence centrée. Sans splitting et avec un schéma upwind classique pour le terme de transport de la partie gauche de (2.7), dans les variables d'origine cela revient à prendre tout simplement des flux de la forme  $(1 - \theta) F_c + \theta F_u$ ,  $F_c$  et  $F_u$  sont respectivement les flux centrés et décentrés amont, pour (2.6) et  $\theta = \varepsilon/(\Delta x)$ . Dans les régimes intermédiaires pour  $\varepsilon$  le schéma ne peut donc pas être positif.

Cette conclusion vaut aussi pour l'application de ce schéma au modèle de Lorentz (2.5). Par contre la généralisation au cas de flux non-linéaire ou au cas multidimensionnel est triviale.

Un autre approche plus séduisante car respectant la positivité des solutions, donc limitant le flux, est le schéma de type well-balanced développé par Greenberg et Leroux, [203], et ensuite par Gosse, [164, 166, 167], et basée sur la construction d'un schéma de type Godunov après localisations des termes sources aux interfaces (en 1-d). L'inconvénient est que ce type de schéma ne se généralise pas facilement au cas de fermeture non linéaire et l'extension multi-dimensionnelle n'est pas simple.

Mon travail de recherche actuel est donc axé sur les modèles approchés en hydrodynamique radiative, modèles Euleriens et relativistes, et sur les problèmes numériques liés à leur discrétisation. En particulier je cherche à construire des schémas numériques multidimensionnels préservant l'asymptotique de diffusion et les domaines invariants pour des équations de transport ou, dans le contexte du radiatif, pour les modèles aux moments. Je présente les quelques résultats que nous avons déjà obtenus dans cette direction en collaboration avec S. Cordier ou B. Depres.

## 2.2 Limite de diffusion du modèle de Lorentz : schémas préservant l'asymptotique [a11]

*En coll. avec S. Cordier, B. Lucquin et S. Mancini.*

Dans cet article nous avons étudié des schémas numériques pour le modèle de Lorentz dans les régimes diffusifs

$$\varepsilon \partial_t f + \cos \theta \partial_x f = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}(f). \quad (2.8)$$

Ce problème est mono-dimensionnel en espace et bi-dimensionnel dans la variable vitesse  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

La fonction de distribution  $f = f(x, \theta, t)$  est une de ( $x \in \mathbb{R}$  et de l'angle de la vitesse  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ) et du temps  $t > 0$ .

L'opérateur  $\mathcal{L}(f)$  est un opérateur de collision du type Lorentz. Les opérateurs de Lorentz apparaissent quand par exemple on considère des collisions élastiques entre des particules lourdes et des particules légères : c'est le terme prédominant de collisions inter-espèces pour les particules légères du à l'effet des collisions avec les lourds et que l'on voit apparaître quand on fait un développement asymptotique en termes du rapport de masse (voir [58, 91]). Il est défini dans le cas de Boltzmann par :

$$\mathcal{L}(f)(\theta) = \int_{S^1} K(\theta' - \theta) [f(\theta') - f(\theta)] d\theta' \quad (2.9)$$

et dans le cas de Fokker-Planck par :

$$\mathcal{L}(f)(\theta) = \partial_{\theta\theta}^2 f. \quad (2.10)$$

Il est bien connu dans la littérature, que lorsque  $\varepsilon \ll 1$  les solutions de (2.8) convergent vers la solution d'un problème de diffusion en espace :

$$\partial_t f^0 - \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 f^0 = 0.$$

Notre objectif était d'obtenir un schéma utilisable pour toutes les valeurs de  $\varepsilon$ , donc compatible avec la limite de diffusion ("Asymptotic Preserving Scheme").

Cette étude est faite sur l'opérateur de Fokker-Planck-Lorentz (2.10) mais les résultats s'étendent au cas de l'opérateur de Boltzmann-Lorentz (2.9).

Dans une première partie, suivant en cela les idées de Jin et Levermore pour l'opérateur de Boltzmann-Lorentz isotropique ([170, 171]), nous avons discrétisé en vitesse sur un maillage non uniforme mais symétrique pour avoir exactement le bon coefficient de diffusion avec un faible nombre de points de quadrature. En particulier nous traitons le cas de 4 et 8 points de discrétisation.

Dans une seconde partie nous considérons la discrétisation spatiale, en domaine infini.

L'approche naturelle consiste à utiliser le schéma upwind, mais dans le régime de diffusion le coefficient de diffusion est de l'ordre de  $\Delta x / \varepsilon$ .

A contrario le schéma centré converge vers une discrétisation du laplacien avec le bon coefficient de diffusion mais agit sur un maillage double, ce qui se passe sur les mailles paires étant totalement découplés du maillage formé des mailles impaires ce qui conduit à des modes parasites.

On considère alors un  $\theta$ -schema ( $\varepsilon$  pour les flux upwind et  $(1 - \varepsilon)$  pour les flux centrés) : la première partie recouple tous les points de discrétisation mais introduit une erreur de l'ordre de  $\Delta x$  sur le coefficient de diffusion.

On a proposé aussi un autre schéma basé sur les idées de Jin et Levermore ([177, 172]), c'est à dire on exprime le flux aux interfaces dans une méthode de volume finis en utilisant l'équation stationnaire. Nous avons donné une interprétation de ce schéma comme un schéma d'éléments finis discontinus  $P^1$  sur un maillage de maille  $\Delta x / 2$  (voir [186]).

La discrétisation en temps est totalement implicite et sans splitting entre le transport et la phase de collision. Cela requiert l'inversion d'une très grosse matrice mais cette matrice est creuse. Toutes méthodes capturant le bon régime de diffusion (voir par exemple [198, 173, 174, 172]), requièrent l'inversion d'une matrice de taille  $N_x \times N_\theta$  où  $N_x$  est le nombre de points de discrétisation dans l'espace et  $N_\theta$  est le nombre de points de discrétisation dans l'espace des vitesses, car toutes ces méthodes, voir par exemple ([173, 174, 172]), pour l'opérateur de Lorentz, nécessitent la résolution d'un problème stationnaire du type

$$v \cdot \nabla_x f^0 = L(f)$$

et un tel problème est vraiment multi-dimensionnel, i.e. on ne peut splitter le transport en espace et la phase de collision sinon on n'a pas les bons états d'équilibre.

Signalons aussi que le schéma "well balanced" proposé récemment par Gosse et Toscani [167] pour le transfert radiatif et avec approximation de Rosseland semble impossible à étendre pour un opérateur du type Boltzmann-Lorentz (2.9) avec une section efficace générale et donc en particulier pour l'opérateur (2.10). Donc les schémas présentés dans ce travail gardent tout leur intérêt.

Des résultats numériques ont validé nos deux schémas.

L'intérêt des schémas que nous proposons est que leur extension au cas multidimensionnel en espace est triviale pour un maillage cartésien. Ce qui peut s'avérer un inconvénient c'est que ces schémas ne sont pas positifs. Mais c'est aussi le cas pour le schéma décrit dans [173, 174, 172]). Seule la discrétisation proposée par Gosse et Toscani [198, 167] est positive mais quid de son extension au cas multi-dimensionnel.

## 2.3 Analyse asymptotique pour l'hydrodynamique radiative [a13]

*En coll. avec B. Despres.*

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à certains régimes asymptotiques pour le couplage fluide-radiatif. Puis nous proposons un modèle de moments dans le référentiel eulérien permettant de retrouver dans ces régimes asymptotiques les modèles standards de diffusion à l'équilibre ou hors équilibre. La motivation est le développement de méthodes numériques euleriennes modernes, précises et robustes pour un modèle simplifié de transfert radiatif.

Le système considéré couplant le transfert radiatif et l'hydrodynamique s'écrit, dans le référentiel du laboratoire :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbf{I}) = -\vec{S}_F, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \vec{v} + p \vec{v}) = -S_E, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I(\nu, \vec{n}) + \vec{n} \cdot \nabla I(\nu, \vec{n}) = S_t(\nu, \vec{n}), \quad \forall \nu, \vec{n} \end{cases} \quad (2.11)$$

avec

$$S_E = \int \int S_t d\nu d\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{S}_F = \frac{1}{c} \int \int \vec{n} S_t d\nu d\vec{n}. \quad (2.12)$$

et  $S_t = S_a + S_s$  est la somme de deux contributions.

La première prend en compte l'émission-absorption des photons par la matière qui est considérée sous la forme suivante

$$S_a(\nu, \vec{n}) = \frac{\nu_0}{\nu} \sigma_a(\nu_0) \left[ \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^3 B(\nu_0, T) - I \right]. \quad (2.13)$$

$B(\nu_0, T)$  est la Planckienne

$$B(\nu_0, T) = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \left( e^{h\nu_0/kT} - 1 \right)^{-1} \quad (2.14)$$



Les quantités  $q_0$  correspondent aux quantités mesurées dans le référentiel comobile. Les définitions (2.13-2.14), utilisent la fréquence  $\nu_0$  et la direction du photon  $\vec{n}_0$  dans le repère comobile et qui s'expriment par

$$\nu_0 = \gamma\nu\left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right) \text{ et } \vec{n}_0 = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) \left[ \vec{n} - \frac{\gamma}{c} \vec{v} \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\right) \right]. \quad (2.15)$$

Le second terme prend en compte le scattering des photons par la matière, que l'on considère sous la forme simplifiée suivante [148]

$$S_s(\nu, \vec{n}) = \frac{\nu^2}{\nu_0^2} (S_s)_0(\nu_0, \vec{n}_0), \quad (2.16)$$

et le scattering mesuré dans le référentiel comobile est donné par

$$(S_s)_0(\nu_0, \vec{n}_0) = \sigma_s(\nu_0) \left[ \frac{1}{4\pi} \int I(\nu_0, \vec{n}'_0) d\vec{n}'_0 - I_0(\nu_0, \vec{n}_0) \right]. \quad (2.17)$$

Dans une première partie de ce travail nous utilisons une analyse asymptotique rigoureuse et retrouvons le modèle de diffusion à l'équilibre ( $T = T_r$ ) quand l'émission absorption est prédominante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + (p + p_r) \mathbf{I}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E + E_r) + \nabla \cdot ((\rho E + E_r) \vec{v} + (p + p_r) \vec{v}) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{3\sigma_a} \nabla T^4\right), \end{cases}$$

where

$$E_r = T^4, \quad p_r = \frac{1}{3} T^4.$$

et le modèle de diffusion hors équilibre ( $T \neq T_r$ ) pour l'énergie radiative quand le scattering est prédominant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + (p + p_r) \mathbf{I}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E + E_r) + \nabla \cdot ((\rho E + E_r) \vec{v} + (p + p_r) \vec{v}) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{3\sigma_s} \nabla T_r^4\right), \\ \frac{\partial}{\partial t} E_r + \nabla \cdot (\vec{v} E_r) + p_r \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{3\sigma_s} \nabla T_r^4\right) + \sigma_a (T^4 - T_r^4). \end{cases} \quad (2.18)$$

where

$$E_r = T_r^4, \quad p_r = \frac{1}{3} T_r^4.$$

A notre connaissance l'analyse asymptotique que nous proposons en variables d'Euler pour la diffusion hors équilibre est nouvelle.

Dans une deuxième partie nous dérivons un modèle aux moments "gris" relativiste par minimisation d'entropie dans le référentiel eulerien et redonnant la diffusion hors équilibre 2.18 :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v} + \frac{p}{c} \vec{F}_r) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbf{I} + \mathcal{P} \mathbf{P}_r) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E + \mathcal{P} E_r) + \nabla \cdot (\rho E \vec{v} + p \vec{v} + \mathcal{P} \mathcal{C} \vec{F}_r) = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \nabla \cdot \vec{F}_r = S_E, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}_r + \nabla \cdot \mathbf{P}_r = \vec{S}_F, \end{cases} \quad (2.19)$$

avec l'énergie radiative et le flux d'énergie radiative définis par  $E_r = \int \int I \, dv d\vec{n}$ ,  $F_r = \int \int \vec{n} I \, dv d\vec{n}$  et le tenseur de pression donné par

$$\mathbf{P}_r = E_r D_r = E_r \left( \frac{1-\chi}{2} \mathbf{I} + \frac{3\chi-1}{2} \frac{f}{|f|} \otimes \frac{f}{|f|} \right)$$

où  $\vec{f} = \vec{F}_r/E_r$  et  $\chi = \chi(\|f\|)$  est le facteur d'Eddington bien connu, voir [150, 144, 140],

$$\chi(x) = \frac{3 + 4x^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3x^2}}.$$

L'expression des termes sources  $S_E$  et  $\vec{S}_F$  n'est pas donnée dans [a13], mais tous les éléments permettant de les calculer y sont. Je renvoie le lecteur au paragraphe (2.5) pour leur expression en 1-d.

Puis nous étudions la compatibilité des modèles à deux moments avec la diffusion hors équilibre. Le résultat principal est que le modèle à deux moments  $M^1$  (2.19) permet de retrouver les solutions continues de la diffusion hors équilibre mais ne permet pas de retrouver les solutions chocs. En revanche si nous utilisons l'entropie radiative  $S_r = S_r = -\frac{2k}{c^3} \int \int \nu^2 [n \log n - (n+1) \log(n+1)] d\nu d\vec{n}$  à la place de l'énergie radiative  $E_r$ , nous obtenons le modèle

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v} + \frac{\mathcal{P}}{c} \vec{F}_r) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \mathbf{I} + \mathcal{P} \mathbf{P}_r) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E + \mathcal{P} E_r) + \nabla \cdot (\rho E \vec{v} + p \vec{v} + \mathcal{P} \mathcal{C} \vec{F}_r) = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} S_r + \nabla \cdot \vec{Q}_r = \frac{1}{\Theta_r} (S_E + b \cdot \vec{S}_F), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}_r + \nabla \cdot \mathbf{P}_r = \vec{S}_F. \end{cases}$$

Ce modèle présente l'avantage de retrouver les solutions chocs et les solutions continues de la diffusion hors équilibre.

## 2.4 Analyse asymptotique et méthodes numériques pour les méthodes de moments en hydrodynamique radiative [cr2, s1]

*En coll. avec S. Cordier.*

Ce travail présente une discrétisation d'un système hyperboliques de lois de conservation qui soit compatible avec le régime asymptotique de diffusion. On s'intéresse à un système de la forme (2.20)

$$\varepsilon \partial_t U + \partial_x F(U) = \frac{1}{\varepsilon} R(U), \quad (2.20)$$

with  $U = (\rho, j)$ ,  $F(U) = (j, \rho h(j/\rho))$ ,  $R(U) = (0, -\sigma j)$  où  $\rho$  et  $j$  sont les deux premiers moments de la solution d'une équation de transport,  $\sigma(x) > 0$  est la section efficace,  $\varepsilon$  est un petit paramètre et  $h$  est une fonction paire positive et convexe.

Dans les problèmes de transfert radiatif,  $h$  est le facteur d'Eddington  $h$  satisfait de plus les propriétés suivantes

$$h(0) = \frac{1}{3}, \quad u^2 \leq h(u) \leq 1.$$

Sous ces hypothèses on peut montrer que l'on a le domaine invariant suivant

$$\rho \geq 0, \quad \|j\| \leq \rho. \quad (2.21)$$

C'est à dire que le flux d'énergie est limité.

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le système (2.20) se comporte comme une équation de diffusion dont le coefficient de diffusion est  $h(0)\sigma$ ,  $\sigma$  étant la section efficace.

$$\partial_t \rho - h(0) \partial_x \left( \frac{1}{\sigma} \partial_x \rho \right) = 0. \quad (2.22)$$

$$j = -\frac{\varepsilon}{\sigma} \partial_x (h(0)\rho). \quad (2.23)$$

On peut remarquer que pour  $\rho$  solution de (2.22) et  $j$  défini par (2.23) peuvent ne pas satisfaire (2.21), dans le cas de forts gradients de  $\rho$ .

La méthode que nous présentons ici est constituée de deux étapes : la première consiste à transformer le système de deux équations non linéaires en un double système (2.24) de deux équations, linéaires et découplées, connues sous le nom d'équations du télégraphe. Il s'agit d'une application des méthodes de relaxation [177] et cela conduit à doubler le nombre d'inconnues.

Le schéma relaxé (transport-projection) est le suivant :  
on résout la partie transport :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x z = 0 \\ \partial_t z + \frac{a}{\varepsilon} \partial_x \rho + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} z = 0 \\ \partial_t w + \frac{a}{\varepsilon} \partial_x j = 0 \\ \partial_t j + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x w + \frac{\sigma}{\varepsilon^2} j = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

puis on projette

$$z = j, \quad w = \rho h\left(\frac{j}{\rho}\right).$$

On peut remarquer que la phase transport (2.24) consiste à résoudre deux systèmes linéaires indépendants le premier pour ( $\rho$  and  $z$ ), le second pour

Pour chacun des systèmes obtenus, on utilise ensuite le schéma "well-balanced" proposée dans [164, 165, 166, 167] et que l'on généralise pour une section efficace non constante et un maillage non uniforme. On peut rappeler brièvement que ce schéma "well-balanced" est un schéma de Godunov pour un système hyperbolique linéaire avec des termes sources localisés aux interfaces. Dans le cas linéaire la résolution du problème de Riemann est triviale [s1]. Le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} + M_{i-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{a}}{\varepsilon \Delta x_i} (u_i - u_{i-1}) = M_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} \frac{\sigma_{i-\frac{1}{2}}}{2\varepsilon^2} (v_i - u_i) \\ \frac{dv_i}{dt} - M_{i+\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{a}}{\varepsilon \Delta x_i} (v_{i+1} - v_i) = M_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2}}}{2\varepsilon^2} (u_i - v_i) \end{cases} \quad (2.25)$$

et les coefficients  $M_{i+\frac{1}{2}}$  sont définis par

$$M_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{a}\varepsilon}{\sigma_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+\frac{1}{2}} + 2\sqrt{a}\varepsilon},$$

et  $\sigma_{i+\frac{1}{2}}$  est une moyenne de  $\sigma$  aux interfaces.

Dans les variables d'origine ( $\rho, z$ ) et aussi pour ( $w, j$ )

$$\begin{cases} \frac{d\rho_i}{dt} + \frac{1}{\varepsilon \Delta x_i} (M_{i+\frac{1}{2}} z_{i+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2}} z_{i-\frac{1}{2}}) = 0, \\ \frac{dz_i}{dt} + \frac{a}{\varepsilon \Delta x_i} (M_{i+\frac{1}{2}} \rho_{i+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2}} \rho_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{-\lambda_i}{2\varepsilon^2} z_i + \frac{M_{i+\frac{1}{2}} - M_{i-\frac{1}{2}}}{\varepsilon \Delta x_i} (a\rho_i) \end{cases}$$

avec

$$z_{i+\frac{1}{2}} = (z_i + z_{i+1} + \rho_{i+1} - \rho_i)/2, \quad \rho_{i+\frac{1}{2}} = (\rho_i + \rho_{i+1} + z_{i+1} - z_i)/2,$$

et

$$\lambda_i = \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} M_{i+\frac{1}{2}} \sigma_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} M_{i-\frac{1}{2}} \sigma_{i-\frac{1}{2}}.$$

On considère une discrétisation en temps totalement implicite Le schéma ainsi obtenu a toutes les propriétés requises : consistance lorsque  $\Delta x \rightarrow 0$ , comportement asymptotique  $\varepsilon \rightarrow 0$ , préservation du domaine invariant (ce qui revient dans les nouvelles variables à garantir la positivité des solutions).

Le schéma peut paraître bien compliqué, mais c'est le résultat de trois contraintes : on veut un schéma totalement implicite, qui a pour domaine invariant (2.21) et qui a la bonne limite de diffusion. Le schéma "well-balanced" proposé par Gosse et Toscani, [164, 165, 166, 167], est certes monotone et donne la bonne limite de diffusion mais il ne s'applique pas à un système hyperbolique non-linéaire, notamment avec un point résonnant, ce qui est le cas du système que l'on considère.

La phase de relaxation (2.24) rend le système linéaire ce qui permet, d'une part, une implication en temps facile et d'autre part permet l'utilisation de ce schéma "well-balanced".

L'avantage de la méthode présentée ici est qu'elle peut être utilisée avec une section efficace  $\sigma$  variable, ce qui est très important en pratique car de tels problèmes de transfert radiatif sont couplés avec un modèle hydrodynamique qui va déterminer la valeur de  $\sigma$ . Celle-ci sera d'ordre 1 dans les zones denses ou opaques et pourra être très faible dans les zones dites transparentes. Pour pouvoir utiliser un schéma sans restriction sur les valeurs de  $\sigma$  il est donc indispensable que la discrétisation ait un bon comportement y compris dans les zones transparentes.

Nous nous sommes également attachés à présenter une méthode utilisable avec un maillage non uniforme car les codes de calcul utilisent des techniques de raffinement de maillage automatique et il est donc important de pouvoir traiter de tels maillages.

## 2.5 Un modèle à flux limité pour l'hydrodynamique radiative et un schéma de splitting associé préservant l'asymptotique de diffusion [s2]

*En coll. avec B.Despres.*

Dans ce travail nous étudions la discrétisation d'un modèle à deux moments pour l'hydrodynamique radiative par un schéma avec flux limité préservant l'asymptotique de diffusion hors équilibre. Le modèle utilisé est le modèle  $M^1$  (2.19) décrit dans le paragraphe (2.3).

Pour simplifier la présentation écrivons le modèle  $M^1$  en question en dimension 1 d'espace

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v + \frac{\mathcal{P}}{c} F_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p + \mathcal{P} P_r) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E + \mathcal{P} E_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho E v + p v + \mathcal{P} C F_r) = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{\partial}{\partial x} F_r = S_E, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F_r + \frac{\partial}{\partial x} P_r = S_F, \end{cases} \quad (2.26)$$

Le modèle est écrit en variables adimensionnelles.  $\rho \geq 0$  représente la densité du fluide,  $\rho v$  est la quantité de mouvement du fluide,  $\rho E$  est l'énergie du fluide et  $p$  est la pression du fluide.  $E_r$  est la densité d'énergie radiative,  $F_r$  est le flux d'énergie radiative et  $P_r$  est la pression radiative. Ces trois quantités sont les moments de  $I$  qui vérifie l'équation de transfert radiatif (2.11). Les termes sources  $S_E$  et  $S_F$  prennent en compte l'émission-absorption et le scattering, et sont donnés par (2.12-2.17), paragraphe (2.3).

L'application de la méthode des moments proposée par Levermore [145, 146, a13] conduit une intensité de la lumière  $I$  donnée par la Planckienne

$$\frac{4\pi^5}{15} \frac{I}{\nu^3} = \frac{1}{e^{\frac{\nu}{T_r} + \frac{\nu b n}{T_r}} - 1}. \quad (2.27)$$

C'est une fonction de la fréquence  $\nu$  et de la direction  $n$  des photons et dépendant de deux paramètres  $T_r$  et  $b \in ]-1, 1[$ .  $T_r$  représente la "température" du flux radiatif,  $b$  représente l'anisotropie de ce flux radiatif.

En utilisant (2.27) on obtient en 1-D

$$\begin{cases} E_r = \int \int I(\nu, n) d\nu dn = T_r^4 \frac{3+b^2}{3(1-b^2)^3}, \\ F_r = \int \int n I(\nu, n) d\nu dn = -T_r^4 \frac{4b}{3(1-b^2)^3} \end{cases}$$

En 3-D la pression radiative  $P_r = \int \int n \otimes n I(\nu, n) d\nu dn$  est donnée par le tenseur, voir Levermore [144],

$$\mathbf{P}_r = E_r \left( \frac{1-\chi}{2} \mathbf{I} + \frac{3\chi-1}{2} \frac{f}{|f|} \otimes \frac{f}{|f|} \right)$$

avec  $f = \frac{F_r}{E_r}$  et le facteur d'Eddington  $\chi$  est donné par

$$\chi(f) = \frac{3 + 4f^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3f^2}}$$

En dimension 1 cela se réduit à  $\frac{f}{|f|} = \pm 1$  et  $P_r = \chi(f)E_r$ .

En utilisant (2.27) et les expressions (2.12-2.17) pour l'émission-absorption et le scattering, les termes sources sont alors donnés par  $S_E = S_E^a + S_E^s$  et  $S_F = S_F^a + S_F^s$  avec pour l'émission-absorption

$$\begin{cases} S_E^a = \frac{\gamma\sigma_a}{\varepsilon^2}(T^4 - E_r + \varepsilon v F_r), \\ S_F^a = -\frac{\gamma\sigma_a}{\varepsilon^2}(F_r - \varepsilon v(T^4 + P_r)), \end{cases} \quad .$$

et pour le scattering, en 1-D

$$\begin{cases} S_E^s = -\frac{\gamma\sigma_s}{\varepsilon}vF_r^0, \\ S_F^s = -\frac{\gamma\sigma_s}{\varepsilon^2}F_r^0. \end{cases} \quad .$$

avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - |v|^2/\mathcal{C}^2}$ . L'expression du flux d'énergie radiative dans le repère comobile  $F_r^0$  est quant à elle donnée par

$$F_r^0 = \gamma^2((1 + \varepsilon^2 v^2)F_r - \varepsilon v(E_r + P_r)).$$

Deux paramètres sans dimension apparaissent dans le système.  $\mathcal{C} \geq \infty$  est le ratio de la vitesse de la lumière sur la vitesse du son du fluide. La plupart du temps  $\varepsilon = \frac{1}{\mathcal{C}}$  est un petit paramètre. L'autre paramètre  $\mathcal{P}$  est le rapport de la pression radiative sur la pression du fluide. Suivant en cela le travail [147] nous ne nous intéressons qu'au régime  $\mathcal{P} = 1$ .

Nous proposons une approximation en  $O(\varepsilon^2)$  du modèle (2.26) ce qui est satisfaisant pour le domaine d'applications qui nous intéresse où  $\varepsilon$  est toujours un petit paramètre, c'est-à-dire que la vitesse du fluide est toujours petite devant le vitesse de la lumière :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p + \frac{E_r}{3}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E + E_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho E v + p v + \frac{E_r}{3}u + \frac{1}{\varepsilon}F_r) = 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}E_r + \partial_x(vE_r) + \frac{E_r}{3}\partial_x v + \frac{\partial}{\partial x}F_r = \frac{\sigma_a}{\varepsilon^2}(T^4 - E_r), \\ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}F_r + \partial_x(vF_r) + \frac{E_r}{3}\partial_x v + \frac{\partial}{\partial x}P_r = -\frac{\sigma_a + \sigma_s}{\varepsilon^2}F_r, \end{cases} \quad (2.28)$$

Ce modèle n'est pas celui qui est couramment utilisé en transfert radiatif, voir par exemple [148, 137]. Il en est différent par  $\frac{E_r}{3}\partial_x v$  au lieu de  $F_r\partial_x v$  et  $\frac{E_r}{3}\partial_x v$  au lieu de  $P_r\partial_x v$ .

Nous proposons alors le splitting suivant du modèle (2.28) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p + \frac{E_r}{3}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E + E_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho E v + p v + \frac{E_r}{3}v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}S_r + \frac{\partial}{\partial x}(uS_r) = 0, & S_r = E_r^{\frac{3}{4}}, \\ \frac{\partial}{\partial t}Q_r + \frac{\partial}{\partial x}(uQ_r) = 0, & Q_r = -bS_r, \end{cases} \quad (2.29)$$

suivi de

$$\begin{cases} \partial_t E_r + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x F_r = \sigma_a \frac{T^4 - E_r}{\varepsilon^2} \\ \partial_t F_r + \frac{1}{\varepsilon}\partial_x P_r = -\sigma_t \frac{F_r}{\varepsilon^2}, & \sigma_t = \sigma_a + \sigma_s \\ \rho C_v \partial_t T = \sigma_a \frac{E_r - T^4}{\varepsilon^2}, \end{cases} \quad (2.30)$$

voir [a13].

Ce splitting permet de retrouver les "bonnes" relations de saut de Rankine-Hugoniot, voir [a13], et consiste donc à transporter les photons par la matière via l'entropie et le flux d'entropie, système (2.29), et la phase radiative se fait dans le référentiel de la matière, système (2.30), donc c'est le système  $M^1$  à vitesse matière nulle. Il permet aussi un implémentation plus simple que la résolution directe de (2.26).

La phase radiative est résolue avec une amélioration du schéma proposé dans mon travail précédent [cr2, s1]. Rappelons que ce schéma repose sur une méthode de relaxation, [177], et sur le schéma "Well Balanced", [165, 166]. L'amélioration apportée ici concerne la phase de relaxation et permet, contrairement à ce qui a été proposé dans [cr2, s1], une dépendance en espace et en temps du coefficient  $a$  dans (2.24). En effet la phase (2.24) est remplacée par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} a X = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} X + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} a E_r = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} X, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} Y + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} a F_r = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} F_r + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} a Y = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} F_r. \end{cases}$$

avec  $a = \sqrt{\chi}$ . Chacun des deux systèmes est alors résolu par le schéma "Well Balanced" (2.25). La discrétisation en temps pour la partie radiative est totalement implicite en prenant la valeur de  $a$  au début du pas de temps.

Les principales propriétés du schéma que nous montrons dans ce travail sont les suivantes

a) Au niveau discret le flux radiatif reste limité

$$\frac{|F_r|}{E_r} \leq 1$$

b) La limite de diffusion est correcte même sur des maillages grossiers.

c) Le traitement numérique du terme non conservatif  $P_r \partial_x u$  de la diffusion hors-équilibre par le transport de l'entropie ce qui permet d'obtenir les bonnes relations de Rankine-Hugoniot.

Le schéma numérique est donc robuste.

De nombreux résultats numériques illustrent la précision et la robustesse de la méthode numérique.

La suite de ce travail concernera évidemment l'extension multi-dimensionnelle du schéma.

## 2.6 Conclusions

En conclusion de ce chapitre, on peut dire que dans le cadre de la simulation du transfert radiatif via l'utilisation d'un modèle aux moments de type (2.19), l'approche "asymptotic preserving schemes" basée sur le schéma "well-balanced", [165, 166], donne de bons résultats en dimension 1 d'espace. Le prochain challenge sera d'étendre, pour le modèle de type (2.19), cette méthode en dimension 2 ou 3 d'espace, sur un maillage cartésien conforme ou non (méthode de raffinement de maillage adaptatif). La principale difficulté, en dimension 2 ou 3, est d'assurer la limitation de flux par un schéma totalement implicite. Ce sera la majeure partie de mon travail de recherche au CEA dans un futur proche.

Pour les modèles de Lorentz (2.5) en théorie cinétique, si l'on désire un schéma "asymptotic preserving" positif, une voie envisageable semble être le schéma "well balanced" [166, 167] mais au vu des résultats présentés dans [167] il y a encore fort à faire pour, ne serait-ce qu'en dimension 1 d'espace, étendre ce type de schéma à des sections efficaces non isotropes. Quant à l'extension multi dimensionnelle de ce type de schémas, elle ne semble toujours pas être à l'ordre du jour. C'est pourtant une voie à défricher.



# Chapitre 3

## Autres travaux

Dans cette partie je présente deux travaux n'entrant pas dans mes thématiques principales de recherche. Le premier a quand même un rapport, certes lointain avec la théorie cinétique et les termes de collisions. Le second aurait plutôt des conséquences sur la discrétisation de certains opérateurs de collision de type parabolique, voire sur les schémas monotones préservant la limite de diffusion.

### 3.1 Ionisation multi-espèces [a10]

*En coll. avec S. Cordier et P.A. Raviart.*

Ce travail porte sur un modèle fluide multi-espèce d'ionisation qui est détaillé dans [a10]. Ce modèle conduit à un système d'équations différentielles ordinaires, mais singulières à l'origine. L'existence de solutions maximales pour ce système a pu être démontrée et des simulations numériques permettent de calculer les courants émis par chaque espèce d'un faisceau d'ions, ce qui intéresse les physiciens. De nouvelles perspectives sont envisagées pour mieux comprendre les propriétés mathématiquement surprenantes mais physiquement raisonnables de ce type de modèle.

L'étude d'un modèle cinétique d'ionisation montre que les températures ioniques restent faibles dans la zone d'ionisation. Cela conduit à considérer un modèle fluide où les ions sont froids, plus facile à étudier numériquement que le modèle cinétique. On cherche des solutions stationnaires du système Euler-Poisson qui s'écrit cette fois

$$\frac{d}{dx}(n_\alpha u_\alpha) = g_\alpha(n_e), \quad \alpha = 1, \dots, N-1, \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dx}(n_\alpha u_\alpha^2) - n_\alpha \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (3.2)$$

$$\lambda \frac{d^2\phi}{dx^2} = \sum_\alpha n_\alpha - n_e, \quad n_e = \exp(-\phi), \quad (3.3)$$

avec les conditions aux limites et la condition de quasineutralité en  $x = 0$

$$u_\alpha(0) = 0, \quad \phi(0) = \frac{d\phi}{dx}(0) = 0, \quad \sum_\alpha n_\alpha(0) = n_e(0) = 1. \quad (3.4)$$

Nous allons étudier plus particulièrement l'approximation plasma obtenue en supposant la quasineutralité du plasma ( $\lambda = 0$ ). L'équation d'impulsion ionique s'écrit alors

$$\frac{d}{dx}(n_\alpha u_\alpha^2) + \frac{n_\alpha}{n_e} \frac{dn_e}{dx} = 0, \quad (3.5)$$

avec  $n_e = \exp(-\phi) = \sum_\alpha n_\alpha$ . Il s'agit d'abord d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème ainsi que ses propriétés qualitatives. Dans le cas  $N = 2$ , on sait calculer explicitement



la solution maximale (et les courants émis qui sont indépendants du taux d'ionisation). On veut généraliser ce résultat. Posons  $p = N - 1$  le nombre d'espèces d'ions. On appelle solution (physiquement admissible) du système différentiel (3.1-3.5), une fonction  $U = (n_1, \dots, n_p, j_1, \dots, j_p)$ , où  $U : x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow U(x) \in \mathbb{R}^{2p}$  de classe  $C^1$  solution de (3.1-3.5) et vérifiant  $n_\alpha(x) > 0$  pour tout  $\alpha = 1, \dots, p$ .

Pour fixer les idées, on suppose que chaque taux d'ionisation (adimensionné)  $g_\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction de classe  $C^1$  croissante qui vérifie  $g_\alpha(n_e) > 0 \forall n_e > 0$ . En pratique, les taux d'ionisation  $g$  dépendent des processus d'ionisation et sont des polynômes de  $n_e$ .

On montre alors que le modèle fluide dans l'approximation plasma admet une solution (physiquement admissible) unique définie dans un intervalle maximal  $[0, x_0[$  où  $x_0 < +\infty$  est tel que  $U(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} U(x)$  existe et vérifie (en  $x_0$ )

$$\sum_{\alpha} \frac{n_\alpha}{u_\alpha^2} = n_e, \quad \sum_{\alpha} n_\alpha u_\alpha^2 = 1 - n_e;$$

de plus, les dérivées de  $U$  explosent en  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{dn_\alpha}{dx}(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{du_\alpha}{dx}(x) = +\infty;$$

et la fonction  $n_e$  est strictement décroissante dans  $[0, x_0]$  et  $n_e(x_0) \leq 1/2$ .

La première étape de la démonstration consiste à prouver que  $n_e$  est solution de l'équation intégrale non linéaire

$$n_e(x) = 1 - \sum_{\alpha} \sqrt{-2 \int_0^x \left( \frac{j_\alpha^2}{n_e} \frac{dn_e}{dx} \right)(y) dy}, \quad (3.6)$$

où  $j_\alpha$  est donné en fonction de  $n_e$  par

$$j_\alpha(x) = \int_0^x g_\alpha(n_e(y)) dy.$$

Cela va nous servir d'une part à obtenir un résultat d'existence et d'unicité locale de la solution de au voisinage de  $x = 0$  et d'autre part à calculer numériquement la solution.

L'existence d'une solution maximale pour l'équation plasma (3.6) n'est pas immédiate. Celle-ci repose sur la construction de solutions approchées qui permettent de supprimer la singularité du problème à l'origine. Une fois que les solutions ont "décollé", il faut vérifier qu'elles ont le bon comportement et qu'elles convergent vers une solution du problème. Cette technique est également utile du point de vue numérique. Nous montrons que les solutions numériques sont telles que les vitesses des différentes espèces d'ions sont très proches (mais distinctes) et le point  $x_0$  est caractérisé par

$$n_e(x_0) \approx 1/2, \quad u_\alpha(x_0) \approx 1,$$

ce qui correspond au cas mono-espèce et qui est physiquement raisonnable. Nous comparons les résultats de ce modèle avec d'autres (cinétique, mono-cinétique) et nous montrons comment traiter les termes de friction, le système quasi-neutre ( $\lambda \ll 1$ ) et enfin, nous montrons, en reprenant des résultats de [190], que l'hyperbolicité du système d'évolution associé à (3.1-3.5) impose que les vitesses des différentes espèces soient égales.

## 3.2 Schémas monotones et équations parabolique linéaires [\[cr3\]](#)

*En coll. avec S. Cordier.*

Ce travail présente un résultat de non existence de schémas linéaires monotones pour certaines équations paraboliques linéaires avec diffusion anisotrope.

On s'intéresse à l'approximation numérique de l'équation parabolique de la forme (3.7).

$$\partial_t f - \frac{1}{2} \nabla \cdot K \nabla f = 0, \quad (3.7)$$

Dans le cas où  $c = ab$ , cette équation représente l'équation de la chaleur mono dimensionnelle immergée en dimension 2. La diffusion agit donc uniquement dans la direction  $(a,b)$ . Il est bien connu que cette équation vérifie un principe du maximum: soit deux données initiales telles que  $f_0 \geq g_0$  alors  $f \geq g$ .

On considère une grille de calcul cartésienne à mailles carrées de pas d'espace  $h$ .

Nous montrons alors que, pour un stencil fixe de la forme

$$S = \{j \text{ such that } -N \leq j_k \leq N, k = 1, 2\},$$

il existe toujours des directions  $(a,b)$  de diffusion pour lesquelles on ne peut construire de schéma linéaire monotone. La preuve est basée sur l'analyse de l'erreur de consistance.

Ce résultat est encore valide pour une matrice de diffusion dépendant de la variable d'espace. donc en particulier pour l'équation de Fokker-Planck-Lorentz

$$K(x,y) = \Psi\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) (\mathbf{Id} - (x,y)^t \otimes (x,y))$$

issue de la physique des plasmas et représentant un modèle simplifié des collisions avec les ions pour les électrons. Cela montre aussi que pour certains maillages quadrangulaires, en se ramenant à un maillage carré par homéomorphisme, on ne pourra pas toujours avoir de schémas monotones pour (3.7).

Nous montrons de plus que, pour l'équation du télégraphe

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u + a \partial_x u + b \partial_y u &= \frac{1}{\varepsilon} (v - u) \\ \varepsilon \partial_t v - a \partial_x v - b \partial_y v &= \frac{1}{\varepsilon} (u - v) \end{aligned}$$

, il ne peut y avoir de schémas linéaires monotones consistant avec la limite de diffusion (3.7) avec  $c = ab$ , pour une direction arbitraire de propagation.

Nous indiquons enfin comment ce résultat pourrait signifier que pour l'équation de Fokker-Planck-Landau

$$\frac{d}{dt} f = \nabla_v \cdot \int_{v'} \phi(v - v') (f' \nabla_v f - f \nabla_{v'} f') dv',$$

il ne peut y avoir de schémas positifs pour une discrétisation de la forme naturelle c'est à dire de schémas quadratiques positifs, ce qui justifierait l'emploi d'algorithmes vraiment non linéaires par exemple basés sur la forme dite logarithmique

$$\frac{d}{dt} f = \nabla_v \cdot \int_{v'} f f' \phi(v - v') (\nabla_v \log(f) - f \nabla_{v'} \log(f')) dv'$$

voir par exemple [57].

Une solution pour contourner ce problème est soit d'utiliser un schéma non linéaire, soit de faire en sorte que la taille du stencil puisse croître quand le pas de maillage tends vers 0.

**Remarque 6** On peut citer encore deux exemples autour de l'équation de Fokker-Planck-Landau, pour lesquels ce papier montre que l'on ne peut construire de schémas positifs. Le premier concerne les modèles du type "Spherical Harmonic Expansion" pour les électrons, voir [72, 82], pour la partie Vlasov de l'équation et ce à cause du champ électrique.

Le deuxième provient d'une simplification du terme de collision de Landau pour traiter le ralentissement des particules en fusion par confinement inertiel, [80, 81].



# Listes des Travaux Présentés

## ARTICLES POSTÉRIEURS À LA THÈSE

- [a1] C. Buet, "A discrete-velocity scheme for the Boltzmann operator of rarefied gas dynamics", *Transp. Theory Stat. Phys.* 25, No.1, 33-60 (1996).
- [a2] C. Buet, "Conservative and entropy schemes for Boltzmann collision operator of polyatomic gases", *Math. Models Methods Appl. Sci.* 7, No.2, 165-192 (1997).
- [a3] C. Buet, S. Cordier, P. Degond, M. Lemou, "Fast algorithms for numerical, conservative, and entropy approximations of the Fokker-Planck-Landau equation", *J. Comput. Phys.* 133, No.2, 310-322 (1997).
- [a4] C. Buet, S. Cordier, P. Degond, "Regularized Boltzmann operators", *Comput. Math. Appl.* 35, No.1-2, 55-74 (1998).
- [a5] C. Buet, S. Cordier, "Conservative and entropy decaying numerical scheme for the isotropic Fokker-Planck-Landau equation", *J. Comput. Phys.* 145, No.1, 228-245 (1998).
- [a6] C. Buet, S. Cordier, "Numerical analysis of conservative and entropy schemes for the Fokker-Planck-Landau equation", *SIAM J. Numer. Anal.* 36, No.3, 953-973 (1999).
- [a7] C. Buet, S. Dellacherie, R. Sentis, "Numerical solution of an ionic Fokker-Planck equation with electronic temperature", *SIAM J. Numer. Anal.* 39, No.4, 1219-1253 (2001).
- [a8] C. Buet, S. Cordier, B. Lucquin "The grazing collision limit for the Boltzmann-Lorentz model", *Asymptotic Anal.* 25, No.2, 93-107 (2001).
- [a9] C. Buet, S. Cordier, "Numerical analysis of the isotropic Fokker-Planck-Landau equation", *J. Comput. Phys.* 179, No.1, 43-67 (2002).
- [a10] C. Buet, S. Cordier, P.-A. Raviart, "Multifluid ionization models", *Math. Models Methods Appl. Sci.* 12, No.1, 17-48 (2002).
- [a11] C. Buet, S. Cordier, B. Lucquin-Desreux, S. Mancini, "Diffusion limit of the Lorentz model: asymptotic preserving schemes", *M2AN, Math. Model. Numer. Anal.* 36, No.4, 631-655 (2002).
- [a12] C. Buet, S. Cordier, " Numerical Method for the Compton Scattering Operator", *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, Vol. 63, ,World Scientific Publishing Co. (2003).
- [a13] C. Buet, B. Despres, "Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics", *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Volume 85, Issues 3-4,385-418 (2004).
- [a14] C. Buet, S. Cordier, V.Dos Santos, "A Conservative and Entropy Scheme for a Simplified Model of Granular Media" *Transp. Theory Stat. Phys.* 33, No.2, 125-155 (2004).

## NOTES AUX COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

- [cr1] C. Buet, S. Dellacherie, R. Sentis, "Numerical solution of a ionic Fokker-Planck equation with electronic temperature. (Résolution numérique d'une équation de Fokker-Planck ionique avec température électronique)" C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 327, No.1, 93-98 (1998).
- [cr2] C. Buet, S. Cordier, "Asymptotic preserving scheme and numerical methods for radiative hydrodynamic models", Comptes Rendus Mathématique, Volume 338, 951-956 (2004).
- [cr3] C. Buet, S. Cordier, "On the non existence of monotone linear scheme for some linear parabolic equations (Sur la non existence de schémas linéaires monotones pour certaines équations paraboliques linéaires)", Comptes Rendus Mathématique, Volume 340, 399-404 (2005).

CONFÉRENCES AVEC COMITÉ DE LECTURE

- [c1] C. Buet, "A discrete-velocity scheme for the Boltzmann operator of rarefied gas dynamics", Proceedings of the 19th International Symposium of Rarefied Gas Dynamics, Oxford (1994).

ARTICLES SOUMIS.

- [s1] C. Buet, S. Cordier, "An asymptotic preserving scheme for Hydrodynamics Radiative Transfer Models", soumis à Num. Math.
- [s2] C. Buet, B. Despres, "Asymptotic Preserving and Positive Schemes for Radiation Hydrodynamics", soumis au JCP.

NON PUBLIÉ.

- [np1] C. Buet, S. Dellacherie, "About the Chang and Cooper method for linear Fokker-Planck equations".

# Bibliographie

## EQUATION DE BOLTZMANN

- [1] L. ARKERYD, *On the Boltzmann equation, I and II*, Arch. Rat. Mech. Anal., **45**, (1972), pp. 1-34.
- [2] L. ARKERYD, *Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation*, Arch. Rat. Mech. Anal., **77**, (1981), pp. 11-21.
- [3] C. BARDOS, F. GOLSE, and D. LEVERMORE. Fluid dynamical limits of kinetic equations, I: Formal derivation. *J. Stat. Phys.*, **63**: 323–344, 1991.
- [4] C. BARDOS, F. GOLSE and D. LEVERMORE, *Fluid dynamics limits of kinetic equations II; convergence proofs for the Boltzmann equation*, Comm. on Pure and Appl. Math. 46 (1993), pp. 667-753.
- [5] G. A. BIRD, *Molecular Gas Dynamics and the direct simulation of gas flows*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [6] A. BOBYLEV, A. PALCZEWSKI, J. SCHNEIDER, *A consistency result for a discrete-velocity model of the Boltzmann equation*, Institute of Applied Mathematics, Warsaw University, 1995.
- [7] C. BORGNACKE, PS. LARSEN *Statistical model for Monte-Carlo simulation of polyatomic gas mixtures*, J. Comp. Phys., 18 (1975) 405-420.
- [8] J. F. BOURGAT, L.DESVILLETES, P. LE TALLEC, B.PERTHAME, *Microreversible collisions for polyatomic gases and Boltzmann's theorem*, Eur. J. Mech. B fluids, (1994).
- [9] A.V. BOBYLEV, TOSCANI, G., *On the generalization of the Boltzmann H-theorem for a spatially homogeneous Maxwell gas*, Jal of Math Phys, Vol 33, 7, 1992.
- [10] R. E. CAFLISH, *The fluid dynamic limit of the nonlinear Boltzmann equation*, Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980), pp. 651-666.
- [11] R.E. CAFLISH, *The Boltzmann equation with a soft potential, I: Linear, spatially homogeneous*, Comm. Math. Phys., **74**, (1980), pp. 71-96.
- [12] R.E.CAFLISH, L. PARESCI, *An implicit Monte Carlo method for rarefied gas dynamics I: The space homogeneous case*, J. Computational Physics, 154, pp. 90-116, (1999).
- [13] C. CERCIGNANI, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer, New York, (1988).
- [14] C. CERCIGNANI, R. ILLNER, M. PULVIRENTI, *The mathematical theory of dilute gases*, Appl. Math. Sc. 106, Springer (1994).
- [15] R. DI PERNA and P. L. LIONS, *On the Cauchy problem for the Boltzmann equations: global existence and weak stability*, Annals of Math. **130** (1990), pp. 321-366.
- [16] P. DEGOND, S. MAS GALLIC, *The weighted particle method for convection diffusion equations*, Math. Comp, Vol. 53, pp 485-507 (part 1) and pp 509-525 (part 2), (1989).
- [17] L. DESVILLETES, *Sur un modele de type Borgnakke-Larsen conduisant a des lois d'energie non-linéaires en température pour les gaz parfaits polyatomiques*, Actes du workshop du GDR SPARCH, (1995).

- [18] T. ELMROTH, *On the H-function and convergence towards equilibrium for a space homogeneous molecular density*, S.I.A.M. J. of Appl. Math., **44**, (1984), pp. 150-159.
- [19] E.GABETTA, L. PARESCHI, M.RONCONI, Central schemes for hydrodynamical limits of discrete-velocity kinetic equations, *Transp. Theo. Stat. Phys.* (to appear).
- [20] R. GATIGNOL, *Théorie cinétique des gaz à répartitions discrètes de vitesses*, Springer, New York, (1975).
- [21] D. GOLDSTEIN, B. STURTEVANT, J. E. BROADWELL, *Investigations of the Motion of Discrete-Velocity Gases*, in "Rarefied Gas Dynamics: Theoretical and Computational Techniques", E. P. Muntz, D. P. Weaver and D. H. Campbell (eds), Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 118, AIAA, Washington DC, (1989).
- [22] D. B. GOLDSTEIN, *Discrete-Velocity collision dynamics for polyatomic molecules*, *Phys. Fluids A4*, pp 1831-1839, (1992).
- [23] F. GROPENGIESSER, H. NEUNZERT, J. STRUCKMEIER, *Computational methods for the Boltzmann equation*. Venice 1989: The state of Art in Appl. and Industrial math., eds. R. Spigler, Kluwer acad. publ., (1990).
- [24] T. GUSTAFFSON, *Global  $L^p$  properties for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **103**, (1988), pp. 1-37.
- [25] R. ILLNER, S. RJASANOW, Random discrete velocity method: possibles bridges between the Boltzmann equation, discrete velocity models and particle simulation, *Non linear kinetic theories and mathematical aspects of hyperbolic systems*, Proc. Rapallo, April (1992).
- [26] ILLNER, R., WAGNER, W., A random discrete velocity model and approximation of the Boltzmann equation, *Jal of Stat Phys.*, vol 70, No 3/4, 1993.
- [27] ILLNER, R., WAGNER, W., A random discrete velocity model and approximation of the Boltzmann equation: conservation of momentum and energy, to appear in TTSP.
- [28] T. INAMURO, B. STURTEVANT, *Numerical Study of Discrete-Velocity Gases*, *Phys. Fluids*, Vol. A2 pp 2196-2203, (1990).
- [29] S.JIN, L. PARESCHI, G. TOSCANI, Uniformly accurate diffusive relaxation schemes for multiscale transport equations, Preprint CDNSNS98-314, GeorgiaTech, (1998). Submitted to SIAM J. Numerical Analysis.
- [30] S. MAS GALLIC, F. POUPAUD, *A deterministic particle method for the linearized Boltzmann operator*, *Trans. Theory Stat. Phys.* Vol. 17, 311-345., 4 (1987).
- [31] K. NANBU, *Direct simulation schemes derived from the Boltzmann equation*, *J. Phys, Japan* Vol. 49 p. 2042, (1980).
- [32] K. NANBU, *Model kinetic equation for the distribution of discretized internal energy*, *Math Methods and Models in the Applied Sci*, (1992).
- [33] B. NICLOT, P. DEGOND, F. POUPAUD, *Deterministic particles simulations of the Boltzmann transport equation of semiconductors*, *J. Comp. Phys.*, Vol. 78, pp 313-345, (1988).
- [34] L. PARESCHI, G.RUSSO, Asymptotic preserving Monte Carlo methods for the Boltzmann equation, *Transp. Theo. Stat. Phys.* (to appear).
- [35] L. PARESCHI, G.RUSSO, Numerical solution of the Boltzmann equation I: Spectrally accurate approximation of the collision operator, *SIAM J. Numerical Analysis* (to appear).
- [36] L. PARESCHI, G.RUSSO, On the stability of spectral methods for the homogeneous Boltzmann equation, *Transp. Theo. Stat. Phys.* (to appear).
- [37] F. ROGIER, J. SCHNEIDER, *A direct Method for solving the Boltzmann Equation*, *Transp. Theory. Stat. Phys*, Vol. 23, pp 313-338 (1994).
- [38] Y. SHIZUTA: On the classical solutions of the Boltzmann equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 36 (1983), 705 – 754.
- [39] J. SCHNEIDER, *Une méthode déterministe pour la résolution de l'équation de Boltzmann*, Ph. D thesis, University Paris 6, (1993).
- [40] Z. TAN, P. L. VARGHESE, *The  $\Delta - \epsilon$  method for the Boltzmann equation*, *J. Comput. Phys.*, Vol 110, (1994).

- [41] C. VILLANI, Contribution à l'étude mathématique des collisions en théorie cinétique, habilitation à diriger des recherches, 1999.
- [42] B. WENNERBERG *Stability and exponential convergence in  $L^p$  for the spatially homogeneous Boltzmann equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 20 (1993), n° 8, pp. 935-964.

#### EQUATION DE FOKKER-PLANCK

- [43] A.A. ARSENE'V and O.E. BURYAC. On the connection between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Planck equation. Math. USSR Sbornik, Vol 69, No. 2 pp. 465-478, 1991.
- [44] A.A. ARSENE'V and N.V. PESKOV. On the existence of a generalized solution of Landau's equation. USSR Comput. Math. Phys. Vol. 17, pp. 241-246, 1977.
- [45] V. V. ARISTOV, F. G. CHEREMISIN, *On the connection between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Planck equation*, Math. USSR Sbornik, Vol. 69, N° 2, pp. 465-478 (1991).
- [46] R. BALESCU, Phys. Fluids, 3, 52, 1960.
- [47] Yu.A. BEREZIN, V.N. KHUDICK, M.S. PEKKER, Conservative finite difference schemes for the Fokker-Planck equation not violating the law of an increasing entropy, J. of Comp. Phys, Vol 69, pp. 163-174, 1987.
- [48] A.V. BOBILEV. I.F. POTAPENKO and V.A. CHUYANOV, Kinetic Equations of the Landau type as a model of the Boltzmann Equation and Completely Conservative Difference Schemes. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. Vol. 20, Vol 4 pp. 190-201, 1981.
- [49] J. S. Chang et G. Cooper - A practical Difference Scheme for Fokker-Planck Equations - J. Comp. Physics, 6, p.1-16, (1970).
- [50] H. COHN. Numerical integration of the Fokker-Planck equation and the evolution of stars clusters. The Astrophysical Journal, 234, 1036-1053, 1979.
- [51] H. COHN. Late core collapse in star clusters and the gravothermal instability. The Astrophysical Journal, 242, 765-771, 1980.
- [52] S. CORDIER, B. LUCQUIN-DESREUX and A.SABRY, Numerical approximation of the Vlasov-Fokker-Planck-Lorentz model. *ESAIM: Proceed. CEMRACS 1999* (2001).
- [53] J.F., CLOUET, K., DOMELEVO, Solution of a kinetic stochastic equation modelling a spray in a turbulence gas flow, R.I. 330, C.M.A.P., Ecole Polytechnique, 1996.
- [54] D. DECK, G. SAMBA, *Le code Procions*, Note C.E.A. N° 2780, C.E.A./C.E.L.-V, F- 94195 Villeneuve St. Georges, (1994).
- [55] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX, The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case. *Math.Mod.Meth.Appl.Sci.* **2** 2 (1992) 167-182.
- [56] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX. The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case, Math. Models and Methods in Appl.Sci, vol. 2, No 2, p 167-182, 1992.
- [57] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX. An entropy scheme for the Fokker-Planck collision of plasma kinetic theory. Numer. Math. vol. 68, pp 239-262, 1994.
- [58] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX, The asymptotics of collision operators for two species of particles of disparate masses. *Math.Mod.Meth.Appl.Sci.* **6** 3 (1996) 405-436.
- [59] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX *The asymptotics of collision operators for two species of particles of disparate masses*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol.6, n° 3, (1996), pp 405-436.
- [60] P. DEGOND et B. LUCQUIN-DESREUX - Transport coefficients of plasmas and disparate mass binary gases - Transport Theory and Statistical Physics, 25, p.595 (1996).



- [61] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX *Comportement hydrodynamique d'un mélange gazeux formé de deux espèces de particules de masses très différentes*, C. R. Acad. Sc. Paris, t.322, Série I, p 405-410, (1996).
- [62] P. DEGOND and B. LUCQUIN-DESREUX *Transport coefficients of plasmas and disparate mass binary gases*, Transp. Theory in Stat. Phys., Vol 25, n<sup>o</sup> 6, pp. 595-633 (1996).
- [63] P. DEGOND and S. MAS-GALLIC, *The weighted particle method for convection-diffusion equations, part I: the case of an isotropic viscosity, part II: the anisotropic case*, Math. Comput. **53** (1989), 485-526.
- [64] S. DELLACHERIE, Contribution à l'analyse et la simulation numérique des équations cinétiques décrivant les plasmas chauds, these de doctorat université paris VII, Nov. 1998.
- [65] L. DESVILLETES, On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transp. Theor. Stat. Phys.* **21** 3 (1992) 259-276.
- [66] L. DESVILLETES, *On the convergence of the splitting algorithms for some kinetic equations*, Asympt. Anal., **6**, n<sup>o</sup> 4, (1993), pp. 315-333.
- [67] L. DESVILLETES, *Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **123**, n<sup>o</sup> 4, (1993), pp. 387-404.
- [68] L. DESVILLETES, *Convergence to equilibrium in various situations for the solution of the Boltzmann equation*, Nonlinear Kin. Th. and Math. Aspects of Hyp. Syst., Series on Adv. in Math. for Appl. Sci., 9, (1992), 99. 101-114.
- [69] L. DESVILLETES, S. MISCHLER, About the splitting algorithm for Boltzmann and B.G.K. equations. [J] Math. Models Methods Appl. Sci. 6, No.8, 1079-1101 (1996).
- [70] L. DESVILLETES, C. VILLANI, On the spatially homogeneous Landau Equation for Hard potentials. Part I: Existence, Uniqueness and Smoothness, Preprint du DMI, ENS de Paris, 1998.
- [71] L. DESVILLETES, C. VILLANI, On the spatially homogeneous Landau Equation for Hard potentials. Part II: H-Theorem and Applications, Preprint du DMI, ENS de Paris, 1998.
- [72] EPPERLEIN, E.M., Fokker-Planck modelling of electrons transport in laser-produced plasmas, in Laser and particles Beams, Vol 2, No 2, p. 257-272, 1994.
- [73] EPPERLEIN, E.M., Implicit and conservative difference schemes for the Fokker-Planck equation, J. Comp. Phys, Vol. 112, p. 291, 1994.
- [74] R. EYMARD, T. GALLOUET and R. HERBIN. Schémas de type volume finis. Ecole ceedf-inria, problemes non-linéaires appliqués, Paris, Octobre 1992.
- [75] F. FILBET, semi-lagrangian method for the Vlasov equations, 1999.
- [76] E. FRENOD and B. LUCQUIN-DESREUX. On conservative and entropy discrete axisymmetric Fokker-Planck operators. M2AN, Vol 33, p. 307, 1998.
- [77] L. GREENGARD and V. ROKHLIN. A fast algorithm for a particle simulation. J. Comput.Phys Vol. 73, 1987.
- [78] S. JORNA, L. WOOD, *Fokker-Planck calculations on relaxation of anisotropic velocity distributions in plasmas*, Phys. Rev. A, Vol. 36, N<sup>o</sup> 1, (1987).
- [79] O. LARROCHE. Kinetic Simulations of a plasma collision experiment. Phys. Fluids B, Vol. 5, No 8, 1993.
- [80] O. LARROCHE. Kinetic simulations of fuel ion transport in ICF target implosions, Eur. Phys. J. D 27, 131-146, 2003.
- [81] O. LARROCHE. An efficient explicit numerical scheme for hot fusion particle slowing-down in the Fokker-Planck formalism, 34th Anomalous Absorption Conference, 2004.
- [82] V. LATOCHA. Deux problemes en transport des particules chargees intervenant dans la modelisation d'un propulseur ionique. Thèse de doctorat 2001.
- [83] M. LEMOU. Exact solutions of the Fokker-Planck equation. C.R. Acad. Sci. t.319, Serie 1, pp. 579-583, 1994.
- [84] M. LEMOU. Multipole expansions for the Fokker-Planck equation, preprint of MIP, Numer. Math. 78, No.4, 597-618, 1998.

- [85] M. LEMOU. Numerical Algorithms for Axisymmetric Fokker Planck Landau Operators, *Journal of Computational Physics* 157, 762-786, 2000.
- [86] M. LEMOU. L. MIEUSSENS, Fast implicit schemes for the Fokker-Planck-Landau equation, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 338, 2004.
- [87] R. LENARD, *Ann. Phys.*, Vol 3, p. 390, 1960.
- [88] O. LIE-SVENDSEN, M.H., REES, An improved kinetic model for the polar outflow of a minor ion, *Jal. Geophys. Res.*, 1995.
- [89] P.L. LIONS, *On Boltzmann and Landau equations*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, (1994), 346, pp. 191-204.
- [90] S. LIVI, E. MARSCH, Generation of solar wind proton tails and double beams by coulomb collisions, *Jal. Geophys. Res.*, Vol. 92, No A7, pp. 7255-7261, 1987.
- [91] B. LUCQUIN-DESREUX, Diffusion of electrons by multicharged ions. *Math.Mod.Meth.Appl.Sci.* **10** 3 (2000) 409-440.
- [92] B. LUCQUIN-DESREUX. Discrétisation de l'opérateur de Fokker-Planck dans le cas homogène, *C.R. Acad. Sci. Paris, A* 314, série 1, pp. 407-411, 1992.
- [93] B. LUCQUIN-DESREUX and S.MANCINI, A finite element approximation of grazing collisions. (submitted).
- [94] L. MIEUSSENS, Thèse de l'université de Bordeaux, 1999.
- [95] L. PARESCI, G. RUSSO, G.TOSCANI, Methode spectrale rapide pour l'équation de Fokker Planck Landau, *C. R. Acad. Sci. Paris, t.330, Serie I*, pp.517-522, (2000).
- [96] L. PARESCI, G. RUSSO, Fast spectral methods for Boltzmann and Landau integral operators of gas and plasma kinetic theory, con G.Russo. *Proceedings Analisi Numerica metodi e software matematico, Annali Universit  di Ferrara, Sez.VII - Sc. Mat.*, Vol.XLV, (2000), 329-341.
- [97] L. PARESCI, G. RUSSO, G. TOSCANI, Fast spectral methods for the Fokker-Planck-Landau collision operator, *J. Comp. Phys.* 165, pp. 216-236, (2000).
- [98] L.Pareschi, G.Toscani, C.Villani, Spectral methods for the non cut-off Boltzmann equation and numerical grazing collision limit, *Numerische Mathematik*, 93, pp.527-548, (2003).
- [99] M.S. PEKKER and V.N. KHUEDIK. Conservative Difference Schemes for the Fokker-Planck equation, *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.* Vol. 24,3, pp. 206-210, 1984.
- [100] I.F. POTAPENKO and V.A. CHUYANOV. A completely conservative difference scheme for the two-dimensional Landau equation. *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, Vol 20, 2, pp. 249-253, 1980.
- [101] M.N. ROSENBLUTH, W. MACDONALD and D.L. JUDD. Fokker-Planck equation for an Inverse-Square Force. *The Physical Review* Vol 107, 1, pp. 1-6, 1957.
- [102] W. M. MACDONALD, M. N. ROSENBLUTH et W. CHUCK, *Relaxation of a system of particles with Coulomb interactions*, *Phys. Rev.*, Vol. 107,  $N^0$  2, (1957).
- [103] J. SHAEFFER, Convergence of a difference scheme for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in one dimension, *SIAM J of Num. Anal.*, Vol. 35, p. 1149, 1998.
- [104] G. TOSCANI, Entropy production and the rate of convergence to equilibrium for the Fokker-Planck equation, preprint of Univ. Pavia, Dept of Math., 1997.
- [105] C. VILLANI *On the Landau equation: weak stability and global existence*, *Adv. Diff. Eq.*, **1**, (5): pp. 793-816, (1996).
- [106] J.C. WHITNEY. Finite Difference Methods for the Fokker-Planck Equation. *J. Comput. Phys.* Vol 6, pp. 483-509, 1970.

- [107] S. I. BRAGINSKII, *Transport processes in a plasma*, Reviews of Plasma Physics, Vol. 1, M. A. Leontovitch (ed.), (1965).
- [108] CHEN, F.F., *Introduction to plasma physics*, Plenum Press, 1977.
- [109] A. DECOSTER - Fluid Equations and Transport Coefficients of Plasmas - in Modeling of collisions, P.A. Raviart editor, Masson (1998).
- [110] DELCROIX, J.L., BEERS, A., Physique des plasmas, CNRS Editions, 1994.
- [111] ISHIMARU. Principles of Plasma physic
- [112] N.A. KRALL, D. A. TIDMANN, Shock waves in collisionless plasmas, Wiley-Interscience, 1971.
- [113] N. A. KRALL, A. W. TRIEVELPIECE, *Principles of plasma Physics*, Mc Graw- Hill, New-York, 1973.
- [114] L. LANDAU, E. LIFSCHITZ: Mécanique des fluides, *Mir*.
- [115] PALMADESSO, P.J., MITCHELL, H.G., GANGULI, S.B., multimoment fluid simulation of transport processes in the auroral zones, American geophysical union, (1988).
- [116] PANTELLINI, F., Etude de la structure des chocs non collisionnels dans les plasmas spatiaux, *Thèse de l'Université Paris VII*, 1992.
- [117] PARKS, G., *space plasmas an introduction* , Addison wesley, the advanced book program, (1991).
- [118] SCHUNCK, R.W.: Mathematical structure of transport equations for mutispecies flows, *Rev. geophys. space phys.*, 15, 429-445, 1977.
- [119] SPITZER, L, HARM, R, Phys. rev, vol 89, p.977, 1953.
- [120] G.R., WILSON, Semikinetiic modeling of the outflow of ionospheric plasma through the topside collisional to collisionless transition region, *Jal. Geophys. Res.*, Vol. 97, pp. 10551, 1992.
- [121] ZAGDEEV, R., KENNEL, C., Des ondes de chocs sans collisions, *Pour la science*, p88, no 164, Juin 1991.

#### LORENTZ-COMPTON-KOMPANEETS

- [122] M. BAYET, J. L. DELCROIX, J. F. DENISSE *Théorie cinétique des plasmas homogènes faiblement ionisés, II*, *J. Phys. Rad.*, **16**, pp. 274-280, (1955).
- [123] R.E. CAFLISH, C.D. LEVERMORE, *Equilibrium for radiation in a homogeneous plasma*, *Phys. Fluids* **29** (1986) 748-752.
- [124] G. COOPER, *Compton Fokker-Planck equation for hot plasmas*, *Phys. Rev. D* **3** (1974) 2312-2316.
- [125] H. DREICER, *Kinetic Theory of an Electron-Photon Gas*, *Phys. Fluids* **7** (1964) 735-753.
- [126] M. ESCOBEDO, M.A. HERERO, J.J.L. VELASQUEZ, *A nonlinear Fokker-Planck equation modelling the approach to thermal equilibrium in a homogeneous plasma*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998) 3837-3901.
- [127] M. ESCOBEDO, S. MISCHLER, article en préparation et note aux CRAS.
- [128] A.S. KOMPANEETS, *The establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons*, *Soviet Physics JETP* **4** (1957) 730-737.

#### MILIEUX GRANULAIRES

- [129] A. BALDASSARRI, A. PUGLISI, and U. MARCONI, Kinetics models of inelastic gases, *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, 12, p.965-984, 2002.

- [130] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI, The collapse phenomenon in one -dimensional inelastic point particle systems, *Physica D*, Vol. 132, p 457, 1999
- [131] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI, M. PULVIRENTI, A kinetic equation for granular media, *Math. Mod. and Num. Anal, M2AN*, Vol 31, N 5, p 615, 1997.
- [132] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI, J.A. CARILLO, M. Pulvirenti, A non-Maxwellian equilibrium distribution for the one-dimensional granular media, *J. Stat. Phys.*, 91(5/6) p. 979, 1998.
- [133] D. BENEDETTO, E. CAGLIOTI, F. GOLSE, M. PULVIRENTI, A hydrodynamical model arising in the context of granular media, *Computers & Mathematics with Applications*, V. 38, Issues 7-8, p. 121-131, October 1999.
- [134] S. Mac Namara, W.R. Young, Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium, *Phys of Fluids*, A4, Vol 3, p. 496, 1992.
- [135] S. Mac Namara, W.R. Young, Kinetics of a one-dimensional granular medium in the quasi-elastic limit, *Phys of Fluids*, A5, Vol 1, p. 1619, 1993.
- [136] S. Mac Namara, W.R. Young, Inelastic collapse in two dimension, *Phys. Rev. E*, 50, R28, 1994.

MÉTHODES DE MOMENTS POUR LE TRANSFERT RADIATIF, HYDRODYNAMIQUE RADIATIVE

- [137] E. Audit, P. Charrier, J.-P. Chieze and B. Dubroca, A radiation-hydrodynamics scheme valid from the transport to the diffusion limit, JCP. [lanl.arxiv.org/abs/astro-ph/0206281](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0206281), (2002)
- [138] A.M. ANILE, S. PENNISI, M. SAMMARTINO. A thermodynamical approach to Eddington factors, *J. Math Phys.*, 31,(1992).
- [139] J.I. CASTOR, Radiation Hydrodynamics, Cambridge University Press, (2004).
- [140] J.L. FEUGEAS and B. DUBROCA, Entropy moment closure hierarchy for the radiative transfer equation, JCP.
- [141] B. DESPRES, Hyperbolic systems of conservation laws with equality or convex constraints and entropy, Rapport du laboratoire d'analyse numérique, R 00026 (2000).
- [142] N.Y. GNEDIN, T. ABEL, Multi-dimensionnal cosmological radiative transfer with a variable Eddington tensor formalism, *New astronomy*, 6, pp 437-455, 2001.
- [143] J.C. HAYES, M.L. NORMAN, Beyond flux limited diffusion: parallel algorithms for multi-dimensionnal radiation hydrodynamics, *The astrophysical journal*, 147, pp 197-220, 2003.
- [144] C. D. LEVERMORE, Relating Eddington factors to flux limiters, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, Vol 31, No 2, pp. 149-160, 1984.
- [145] C. D. LEVERMORE, Moment closure hierarchies for kinetic theories. *J. Stat. Phys.* 83, No.5-6, 1021-1065 1996
- [146] C. D. LEVERMORE, Entropy-based moment closures for kinetic equations. *Transp. Theory Stat. Phys.* 26, No.4-5, 591-606 (1997)
- [147] R.B. LOWRIE, J.E. MOREL and J.A. HITTINGER, The coupling of radiation ad hydrodynamics, *the astrophysical journal*, 521, 432-450 (1999).
- [148] D. MIHALAS and B.W. MIHALAS, Foundations of radiation hydrodynamics, Oxford press university (1984).
- [149] G. N. MINERBO, Maximum entropy Eddington factors, *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, Vol 20 pp541-545,1978
- [150] I. MÜLLER and T. RUGGERI, Rational extended thermodynamics. 2nd ed. Springer Tracts in Natural Philosophy. 37. New York, NY: Springer.
- [151] A. MUNIER and R. WEAVER, *Computer Physics Reports* 3, 125-164 (1986).
- [152] G. L. OLSON, L. H. AUER and M. L. HALL, Diffusion, P1, and other approximate forms of radiation transport. Los Alamos report LA-UR-99-471

- [153] G. C. POMRANING, The equations of radiation hydrodynamics, Pergamon Press, 1973.
- [154] R. SENTIS, Sur les équations de diffusion multigroupe en transfert radiatif, Note CEA 2603 (1989).
- [155] J.M. SMIT, J. CERNOHORSKY, C.P. DULLEMOND, hyperbolicity and critical points in two-moment approximate radiative transfer, *Astron. Astrophys.*, **325**, 203-211, (1997).
- [156] J. TASSART, Transfert de Rayonnement, in *La Fusion Thermonucléaire inertielle par laser*, R. Dautray and J. P. Watteau editors, Eyrolles, 1993.

LIMITE DE DIFFUSION POUR LES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES: SCHÉMAS PRÉSERVANT L'ASYMPTOTIQUE

- [157] M.L. ADAMS, Subcell balance methods for radiative transfer on arbitrary grids. *Transp.Theor.Stat.Phys.* **27** 4&5 (1997) 385-431.
- [158] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M.-O. BRISTEAU, R. KLEIN, B. PERTHAME. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comp.*, **25**(6):2050–2065, (2004).
- [159] R. BOTCHORISHVILI, B. PERTHAME et A.VASSEUR, Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources. *Inria report RR-3891* (2000).
- [160] F. BOUCHUT. Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources, *Frontiers in Mathematics series*, Birkha"user, (2004).
- [161] F. BOUCHUT, H. OUNAÏSSA, B. PERTHAME. Upwinding of source term at interfaces for Euler equations with high friction. preprint, (2005).
- [162] R.E. CAFLISCH, S. JIN et G. RUSSO, Uniformly accurate schemes for hyperbolic systems with relaxation. *SIAM J.Numer.Anal.* **34** 1 (1997) 246-281.
- [163] F. GOLSE, S. JIN et C.D. LEVERMORE, The convergence of numerical transfer schemes in diffusive regimes I: discrete-ordinate method. *SIAM J.Numer.Anal.* **36** 5 (1999) 1333-1369.
- [164] L. GOSSE, Localization effects and measure source terms in numerical schemes for balance laws *Math. Comput.* **71**, No.238, 553-582 (2002).
- [165] L. GOSSE, G. TOSCANI, An asymptotic preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equation, *CRAS Série I*, **334**, p. 1-6, 2002.
- [166] L. GOSSE, G. TOSCANI, Space localization and well-balanced schemes for discrete kinetic models in diffusive regime. *SIAM J.NUMER Anal.* Vol 41, No 2641-658.
- [167] L. GOSSE, G. TOSCANI, Asymptotic-preserving and well-balanced schemes for radiative transfer and the Rosseland approximation. *Numer. Math.* **98**, No.2, 223-250 (2004)
- [168] S. JIN, Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations. *SIAM J.Sci.Comput.* **21** 2 (1999) 441-454.
- [169] S. JIN, Numerical integrations of systems of conservation laws of mixed type. *SIAM J.Appl.Math.* **55** 6 (1995) 1536-1551.
- [170] S. JIN and C.D. LEVERMORE, The discrete-ordinate method in diffusive regimes. *Transp.Theor.Stat.Phys.* **20** 5&6 (1991) 413-439.
- [171] S. JIN and C.D. LEVERMORE, Fully-discrete numerical transfer in diffusive regimes. *Transp.Theor.Stat.Phys.* **22** 6 (1993) 739-791.
- [172] S. JIN and C.D.LEVERMORE, Numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms. *J.Comput.Phys.* **126** (1996) 449-467.
- [173] S. JIN and L.PARESCHI, Discretization of the multiscale semiconductor Boltzmann equation by diffusive relaxation schemes. *J.Comput.Phys.* **161** (2000) 312-330.
- [174] S. JIN, L. PARESCHI and G. TOSCANI, Diffusive relaxation schemes for multiscale discrete-velocity kinetic equations. *SIAM J.Numer.Anal.* **35** 6 (1998) 2405-2439.

- [175] S. JIN, L. PARESCHI and G.TOSCANI, Uniformly accurate diffusive relaxation schemes for multiscale transport equations. *SIAM J.Numer.Anal.* (2000).
- [176] JIN S., LEVERMORE C.D., Numerical Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws with Stiff Diffusive Relaxation, J.C.P., vol126, 1996.
- [177] S. JIN and Z. XIN, The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm.Pure Appl.Math.* **XLVIII** (1995) 235-276.
- [178] A.KLAR, An asymptotic-induced scheme for non stationary transport equations in the diffusive limit. *SIAM J.Numer.Anal* **35** 3 (1998) 1073-1094.
- [179] E.W. LARSEN, The asymptotic diffusion limit of discretized transport problems. *NSE* **112** (1992) 336-346.
- [180] E.W. LARSEN and J.E. MOREL, Asymptotic solutions of numerical transport problems in optically thick, diffusive regimes. II. *J.Comput.Phys.* **83** 1 (1989) 212-236.
- [181] E.W. LARSEN, J.E. MOREL and W.F.MILLER Jr., Asymptotic solutions of numerical transport problems in optically thick, diffusive regimes. *J.Comput.Phys.* **69** 2 (1987) 283-324.
- [182] W.F. MILLER Jr. and T. NOH, Finite differences versus finite elements in slab geometry, even-parity transport theory. *Transp.Theor.Stat.Phys.* **22** 2 & 3 (1993) 247-270.
- [183] J.E. MOREL, T.A. WAREING and K.SMITH, A linear-discontinuous spatial differencing scheme for  $S_n$  radiative transfer calculations. *J.Comput.Phys.* **128** (1996) 445-462.
- [184] NALDI G., PARESCHI L., Numerical Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws with Stiff Diffusive Relaxation, SIAM Journal on Num. Anal., 37, p. 1246-1270, 2000
- [185] L.PARESCHI, Central differencing based numerical schemes for hyperbolic conservation laws with relaxation terms. Preprint.
- [186] G. SAMBA, Limite asymptotique d'un schéma d'éléments finis linéaires discontinus lumpés en régime diffusion. *Rapport CEA*.

#### SYSTÈMES HYPERBOLIQUES: THÉORIE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

- [187] AUDUSSE,E., BOUCHUT,F., BRISTEAU, M.-O., KLEIN, R., PERTHAME, B. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comp.*, 25(6):2050–2065, 2004.
- [188] F. BOUCHUT, Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources, *Frontiers in Mathematics series*, Birkhäuser, 2004.
- [189] CHEN, C.D. LEVERMORE and LIU, Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm.Pure Appl.* **47** (1994) 187-830.
- [190] S. CORDIER, "Hyperbolicity of the hydrodynamical model of plasmas under the quasineutrality hypothesis", *Mathematical Models in Applied Science (M2AS)*, Vol 18, p. 627-647, 1995.
- [191] DAL MASO, G., LE FLOCH, P., MURAT, F, Definition and weak stability of nonconservative product, Preprint Ecole Polytechnique, *J. Math. Pures Appliquées*, to appear, (1994).
- [192] GODLEWSKI, E., RAVIART, P.-A., *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipse, (1991).
- [193] E. GODLEWSKI and P.A. RAVIART, *Numerical approximations of hyperbolic systems of conservation laws*. Applied Mathematical Sciences 118, Springer-Verlag New York (1996).
- [194] J. GLIMM, G. MARSHALL and B.J. PLOHR, A generalized Riemann problem for quasi one dimensional gas flows. *Adv.Appl.Math.* **5** (1984) 1-30.
- [195] GLIMM, J., Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18: 698-715, 1965.

- [196] L. GOSSE and A.Y. LEROUX, A well-balanced scheme designed for inhomogeneous scalar conservation laws. *C.R.Acad.Sc.Paris* **I 323** (1996) 543-546.
- [197] L. GOSSE, Localization effects and measure source terms in numerical schemes for Balance laws, *Math of Comp*, Vol 71, No 238, pp 553-582.
- [198] L. GOSSE, A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Math.Mod.Meth.Appl.Sci.* **11** (2001) 339-365.
- [199] L. D. LIFSHITZ and E. LANDAU, *Mécanique des fluides*, Éditions MIR, Paris.
- [200] LE FLOCH, P., LIU, T.P., Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *in Forum Mathematicum*, 5, 261-280, 1993.
- [201] R.J. LEVEQUE, Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm. *J.Comput.Phys.* **146** 1 (1998) 346-365.
- [202] J.M. GREENBERG and A.Y. LEROUX, A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J.Num.Anal.* **33** (1996) 1-16.
- [203] GREENBERG J-M., LE ROUX A-Y, A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **33**, No.1, 1-16 (1996).
- [204] P.L. LIONS, B. PERTHAME and P.E. SOUGANIDIS, Existence of entropy solutions for the hyperbolic systems of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. *Comm.Pure Appl.Math.* **49** 6 (1996) 599-638.
- [205] A. MAJDA : Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables, *Appl. Math. Sci.* 53, *Springer* 184.
- [206] P.A. RAVIART, An analysis of particle methods, *Numerical methods in fluid dynamics*, Lect. 3rd 1983 Sess. C.I.M.E., Como/Italy 1983, *Lect. Notes Math.* 1127, 243-324 (1985).
- [207] D. SERRE : Systèmes de lois de conservation II, *Diderot editeur, Arts et Sciences*, 1996.
- [208] E.F.Toro : *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Second Edition, Chapter 10, 1999.
- [209] B. PERTHAME, *An introduction to kinetic schemes for gas dynamics. An introduction to recent developments in theory and numerics for conservation laws*. L.N. in *Computational Sc. and Eng.*, 5, D. Kroner, M. Ohlberger and C. Rohde eds, Springer (1998).
- [210] K.H. PRENDERGAST and K. XU, Numerical hydrodynamics for gas-kinetic theory. *J.Comput.Phys.* **109** (1993) 53-66.
- [211] K.H. PRENDERGAST and K. XU, Numerical Navier-Stokes solutions from gas kinetic theory. *J.Comput.Phys.* **114** (1994) 9-17.
- [212] B. VANLEER, On the relation between the upwind differencing schemes of Engquist-Osher, Godunov and Roe. *SIAM J.Sci.Stat.Comp.* **5** (1984) 1-20.