HAL
open science

Formes quasi-modulaires sur des groupes modulairesco-compacts et restrictions des formes modulaires de Hilbert aux courbes modulaires.

Najib Ouled Azaiez

To cite this version:

Najib Ouled Azaiez. Formes quasi-modulaires sur des groupes modulairesco-compacts et restrictions des formes modulaires de Hilbert aux courbes modulaires.. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT : . tel-00011122

HAL Id: tel-00011122

https://theses.hal.science/tel-00011122

Submitted on 27 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité : Mathématiques
Option : Formes modulaires

présentée par

Ouled Azaiez Najib

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

Formes quasi-modulaires sur des groupes modulaires co-compacts et restrictions des formes modulaires de Hilbert aux courbes modulaires.

Soutenance prévue le 25 Novembre 2005 devant le jury composé de :

Directeur de thèse	M. Don Zagier
Rapporteurs	M. Gritsenko Valery
	M. Niles-Peter Skoruppa
Examinateurs	M. Daniel Bertrand
	M. Henri Cohen
	M. Loic Merel

Table des matières

1 Formes modulaires et quasi-modulaires : généralités **5**
1.1 Domaines fondamentaux 5
1.2 Formes modulaires et quasi-modulaires 7
1.3 Equations différentielles 14
1.4 Développement en série de Taylor 16

2 Courbes modulaires compactes **19**
2.1 Algèbres de quaternions 19
2.2 Exemples d'algèbres 24
2.3 Groupes modulaires co-compacts 25
2.4 Exemples de groupes 26
2.5 Exemples de domaines fondamentaux compacts 29
2.6 Exemples de formes modulaires sur des groupes co-compacts . 35

3 Formes modulaires de Hilbert **40**
3.1 Groupes et formes modulaires de Hilbert 40
3.2 Séries d'Eisenstein 43
3.2.1 Exemple : corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 45
3.2.2 Exemple : corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 47
3.3 Crochets de Rankin-Cohen 47
3.3.1 Exemple : crochets de Rankin-Cohen sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 49
3.4 Restrictions aux cycles de Hirzebruch-Zagier 50
3.5 Restrictions généralisées 53
3.5.1 Exemple de restrictions de formes modulaires 60

4 Structure des anneaux de formes quasi-modulaires **64**
4.1 Introduction 64
4.2 Propriétés générales 65

4.3 Structures des anneaux des formes quasi-modulaires 72
4.3.1 Exemples 77
4.4 Anneaux finiment engendrés contenant les formes quasi-modulaires 77
4.4.1 Exemples 86
4.5 Caractérisation algèbrique des groupes modulaires co-compacts 87

Introduction

Kaneko et Zagier ont introduit la notion de formes quasi-modulaires dans [9], par exemple l'anneau de telles formes pour $\Gamma_1 = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ était l'anneau engendré par les séries d'Eisenstein E_2, E_4 et E_6. Rappelons que Γ_1 est un groupe non co-compact, ainsi que les groupes de congruence qui sont commensurables à Γ_1 ; tous ces groupes sont de covolume fini mais définissent des quotients du demi-plan supérieur avec des pointes, qui sont en bijection avec l'ensemble $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})/\Gamma$. Pour un groupe co-compact Γ, le quotient $\mathcal{H}/\Gamma$ est sans pointes. Les groupes co-compacts définissent des courbes modulaires. Shimura a développé la théorie arithmétique de ces courbes, d'où la terminologie : courbes de Shimura. Ces courbes se plongent aussi dans des surfaces modulaires de Hilbert. Hirzebruch et Zagier ont etudié leurs images du point de vue de la géométrie algébrique de la surface modulaire ; elles sont alors connues sous le nom : cycles de Hirzebruch-Zagier. L'avantage d'etudier la géométrie algébrique (et plus particulièrement l'anneau des formes modulaires) d'une courbe modulaire compacte en la plongeant dans une surface modulaire, c'est que sur la courbe il n'y a pas de q-développement (parce qu'il n'y a pas de pointes), mais sur la surface si. Villegas et Zagier ont montré dans le cas non co-compact voir [15] qu'après un changement de variable et une rénormalisation par des périodes "le développement en Taylor des formes modulaires au points à multiplication complexe est à coefficients algébriques". Ce principe qui marche tout aussi bien dans le cas co-compact donne une manière de représenter les formes modulaires sur tous les groupes. En particulier, on démontre l'existence d'équations différentielles satisfaites par les formes modulaires, ce qui donne des algorithmes pour calculer les coefficients de Taylor au points CM (points à multiplication complexe), à la différence des coefficients d'un q-développement, où aucun algorithme général n'est connu.

L'objectif dans cette thèse est essentiellement l'étude de structure des

anneaux de formes quasi-modulaires sur des groupes modulaires co-compacts.

Dans le chapitre I, on rappelle les définitions et propriétés générales des formes modulaires et quasi-modulaires. Ainsi que les invariants des courbes modulaires. On explique les développements en Taylor des formes modulaires autour des points à multiplication complexe. On finit, le premier chapitre par donner une nouvelle démonstration de l'existence d'équations différentielles linéaires satisfaites par les formes modulaires.

Dans le chapitre II, on commence par rappeller les définitions des algèbres de quaternions, on construit les groupes modulaires co-compacts comme unités de norme 1 d'un ordre provenant d'une algèbre de quaternions. On donne la méthode de construction des domaines fondamentaux associés à ces groupes, la détermination des points elliptiques et la dimension des espaces de formes modulaires.

Dans le chapitre III, on rappelle les définitions des groupes et formes modulaires de Hilbert et on explique le développement en Fourier des formes modulaires de Hilbert, en particulier l'exemple des séries d'Eisenstein. On définit les crochets de Rankin-Cohen sur les espaces de formes modulaires de Hilbert qui généralisent les crochets définis dans le chapitre I. On rappelle la notion de cycles de Hirzebruch-Zagier, on étudie des différentes restrictions des formes modulaires de Hilbert aux cycles de Hirzebruch-Zagier et on montre que l'algèbre engendrée par les différentes restrictions (qu'on va définir) des formes modulaires de Hilbert est fermeé par crochets de Rankin-Cohen. On donne des exemples et des applications : les équations différentielles satisfaites par des formes modulaires sur une courbe modulaire compacte plongée dans une surface modulaire de Hilbert, s'obtiennent comme restrictions généralisées d'équations différentielles satisfaites par des formes modulaires de Hilbert sur la surface en question.

Dans le chapitre IV, on montre que *l'anneau des formes quasi-modulaires sur un groupe modulaire co-compact n'est pas de type fini*, on sait calculer combien de nouveaux générateurs on doit rajouter en chaque poids. On montre aussi que *les anneaux de formes quasi-modulaires sur un groupe modulaire co-compact est contenu dans un anneau de type fini*. On illustre nos théorèmes de structure sur un exemple. On finit le chapitre IV par en déduire une caractérisation algébrique des groupes modulaires co-compacts en termes de leurs anneaux de formes modulaires.

Chapitre 1

Formes modulaires et quasi-modulaires : généralités

1.1 Domaines fondamentaux

Dans toute la thèse, Γ sera un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ de covolume fini. Les exemples les plus classiques sont $\Gamma = \Gamma_1 = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et ses groupes de congruence $\Gamma_0(N), N \in \mathbb{N}$. Mais, il existe aussi des groupes modulaires co-compacts, notamment ceux provenant des algèbres de quaternions qu'on va étudier dans le chapitre II.

Pour comprendre la géométrie de la courbe modulaire $\mathcal{H}/\Gamma$, on veut calculer certains invariants : le volume, le nombre de pointes, le nombre de points elliptiques, et le genre. Ces invariants se calculent à partir d'un domaine fondamental pour l'opération de Γ sur $\mathcal{H}$.

Dans cette section, on décrit une méthode générale pour construire un domaine fondamental. Puis, on explique comment déterminer les points elliptiques d'un tel domaine. On peut alors déterminer les dimensions des espaces $M_k(\Gamma)$ de formes modulaires de poids k. La connaissance de la série de Hilbert-Poincaré permet dans certains cas (comme on va le voir dans l'etude de nos exemples) de déterminer la structure de l'anneau des formes modulaires $M_* = \bigoplus_k M_k(\Gamma)$, cette somme directe est indexée par l'ensemble des entiers pairs.

Nous allons souvent identifier le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ avec le disque unité $\mathcal{D}$, par $z \longrightarrow w = \frac{z-i}{z+i}$. Le groupe d'isométries, $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ s'identifie

alors avec le groupe d'isométries du disque :

$$\mathrm{PSU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{cc} A = \frac{(a+d)+i(b-c)}{2}, & B = \frac{(a-d)-i(b+c)}{2} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \end{array} \right\}.$$

Par abus de notation, on note aussi par Γ son image dans le groupe isomorphe $\mathrm{PSU}(1,1)$. On appellera dans la suite ρ_1 le plongement dans $\mathrm{PSU}(1,1)$, en particulier, on identifie Γ avec $\rho_1(\Gamma)$.

On peut alors représenter le quotient par un domaine fondamental dans le disque de Poincaré. La distance hyperbolique entre deux points u et v du disque sera noteé $\mathrm{d_h(u,v)}$. La métrique hyperbolique est définie sur le disque de Poincaré par $\mathrm{ds}^2 = \frac{\mathrm{dx}^2+\mathrm{dy}^2}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2}}$, où $x+iy \in \mathcal{D}$. Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on définit :

$$\mathcal{D}_\gamma = \{w \in \mathcal{D} \mid \mathrm{d_h(w,0)} \leq \mathrm{d_h(w,\gamma.0)}\},$$

$$F_\gamma = \partial\mathcal{D}_\gamma = \{w \in \mathcal{D} \mid \mathrm{d_h(w,0)} = \mathrm{d_h(w,\gamma.0)}\}$$

Si on suppose que $\gamma.0 = u+iv$, les points d'affixes $x+iy$ appartenant à la frontière F_γ satisfont à :

$$(x - \frac{u}{u^2+v^2})^2 + (y - \frac{v}{u^2+v^2})^2 = \frac{1}{u^2+v^2} - 1 \qquad .$$

Un domaine fondamental de Dirichlet pour l'action de Γ sur $\mathcal{D}$ est $\mathcal{F} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{D}_\gamma$. Pour construire ce domaine, on commence par tracer les frontières F_{γ_i} pour une liste $\{\gamma_i \mid i \in I\}$ arbitraire d'éléments de Γ, par exemple tous les éléments de norme $\leq N$. Les F_{γ_i} correspondent à des géodésiques hyperboliques, quitte à prendre N plus grand, on peut supposer que les géodésiques correspondantes aux éléments de cette liste délimitent un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ de volume fini, qui sera compact dans le cas où $\mathcal{H}/\Gamma$ l'est et qui aura un nombre fini de sommets sur $\partial\mathcal{D}$ si non. L'ensemble des géodésiques ayant une partie plus proche du centre du disque que les frontières du sous-ensemble obtenu est un ensemble fini (facile à voir en utilisant les équations des frontières). Donc en complétant la liste I par au plus un nombre fini d'élements, on obtient un sous-ensemble de volume inférieur ou égal au volume du sous-ensemble déjà construit. Ce dernier est un domaine fondamental qui représente le quotient X dans le disque. La méthode est algorithmique et sera explicitée pour plusieurs exemples dans le chapitre II.

Définition 1. *Un point elliptique $w \in \mathcal{D}$ d'ordre n est un point fixe d'un élément de Γ d'ordre n.*

Un élément de Γ d'ordre n, sera représenté par un $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (en fait $\mathrm{SU}(1,1)$ ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) d'ordre $2n$ avec $\gamma^n = -Id$, donc est conjugué dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ à une matrice $\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}$, avec ξ une racine primitive $2n$-i ème de l'unité. Si on note γ par γ_n (abus de notation), la trace de γ_n sera $0, 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$, si $n = 2, 3, 4$ ou 6 respectivement. Ces conditions sur la trace permettent en général de déterminer l'ensemble des points elliptiques dans un domaine fondamental construit. Ces points elliptiques sont situés sur la frontière du domaine fondamental. Le nombre e_j de points elliptiques non équivalents d'ordre j, le genre g de $\mathcal{D}/\Gamma$, le nombre de pointes m et son volume hyperbolique sont liés par la formule de Gauss-Bonnet :

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{D}/\Gamma)}{2\pi} = 2g - 2 + \sum_{i\geq 2} e_i(1 - \frac{1}{i}) + m \qquad . \qquad (G)$$

Pour calculer le volume du quotient $\mathcal{D}/\Gamma$, on peut utiliser un domaine fondamental, c'est un polygône $\mathcal{F}$ de n-sommets inclus dans le disque $\mathcal{D}$. Si on note par $\theta_1, \cdots, \theta_n$ les angles au sommets de $\mathcal{F}$, on a alors :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{D}/\Gamma) = \mathrm{Vol}(\mathcal{F}) = (n-2)\pi - (\theta_1 + \cdots + \theta_n) \qquad . \qquad (V)$$

1.2 Formes modulaires et quasi-modulaires

Formes modulaires. On rappelle ici, la définition d'une forme modulaire et les conséquences immédiates de cette définition. Dans la suite, les poids des formes modulaires sont des entiers pairs.

Définition 2. Une *forme modulaire* de poids k sur Γ, est une fonction holomorphe f sur $\mathcal{H}$ à croissance tempérée [1], telle que :

$$(c\,z + d)^{-k}\, f(\frac{a\,z + b}{c\,z + d}) = f(z), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ et } z \in \mathcal{H}. \qquad (1)$$

[1] C'est-à-dire $|f(z)|$ est borné par une puissance de $\frac{|z|^2+1}{y}$.

Une forme modulaire sur un groupe modulaire Γ non co-compact possède un ou plusieurs q-développements, c'est-à-dire des développements en Fourier. En effet, si $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ (ce qu'on peut toujours supposer aprés conjugaison) alors $f(z+1) = f(z)$ (en appliquant (1) avec la matrice T). Ceci implique $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$, avec $q = \exp(2i\pi z)$. Le développement en Fourier est un outil fondamental pour étudier les formes modulaires sur des groupes modulaires non co-compacts. Par exemple, on sait que $M_*(\Gamma)$ est souvent engendré comme anneau par des formes ayant un développement dans $\mathbb{Q}[[q]]$ ou même $\mathbb{Z}[[q]]$. Dans le cas co-compact, on identifie souvent le demi-plan supérieur avec le disque unité, en envoyant τ vers 0. On identifie alors f avec une forme définie sur le disque unité, modulaire sur un sous-groupe modulaire de $\mathrm{PSU}(1,1)$. Par abus de notation, on désigne aussi par f la forme définie sur le disque. Le développement en Taylor autour de zéro de f s'écrit $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Villegas et Zagier ont montré qu'après normalisation par des périodes, le développement en Taylor autour des points CM est algébrique, c'est-à-dire $c_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout n.

Zéros des formes modulaires. Pour étudier les zéros des formes modulaires holomorphes, on utilise la formule des zéros dont une démonstration se trouve par exemple dans [Serre]. Soit $p \in X = (\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))/\Gamma$, on définit l'ordre du point p par $\mathrm{ord}_\Gamma(p) = n$, si p est un point elliptique d'ordre n ; si non $\mathrm{ord}_\Gamma(p) = 1$. Pour une forme modulaire f, on définit $v_p(f) = \frac{\mathrm{ord_p(f)}}{\mathrm{ord_\Gamma(p)}}$ où $\mathrm{ord_p(f)}$ est l'ordre d'annulation de f en p.

Théorème 1. *Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret de covolume fini. Soit f une forme modulaire sur Γ de poids k. On a alors :*

$$k\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}/\Gamma)}{4\pi} = \sum_{p \in X} v_p(f). \qquad (Z)$$

Exemple. Le volume hyperbolique de $\mathcal{H}/\Gamma_1$ est $\frac{\pi}{3}$. Aprés un choix d'un domaine fondamental $\mathcal{F}$, on sait que le point i est elliptique d'ordre 2, le point $\rho = \exp(i\pi/3)$ est elliptique d'ordre 3 et il n'y a pas d'autres points elliptiques. L'application de la formule de zéros (Z) à la série d'Eisenstein E_6, montre que E_6 s'annule uniquement dans l'orbite de i. Et l'application de la formule des zéros à E_4, montre qu'elle s'annule uniquement dans l'orbite de ρ.

Structure des anneaux de formes modulaires. Pour étudier la structure des anneaux de formes modulaires, on commence par calculer la série de Hilbert-Poincaré associée à la suite des dimensions des espaces de formes modulaires. Rappelons maintenant la formule des dimensions. Sa démonstration se trouve par exemple dans [17].

THÉORÈME 2. *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret de covolume fini. Soit* $M_k(\Gamma)$, *le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel des formes modulaires de poids* k *sur* Γ. *Soient* g, *le genre de* $\mathcal{H}/\Gamma$, *et* e_i *le nombre de points elliptiques non équivalents par* Γ *d'ordre* i, *et* m *le cardinal du quotient* $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})/\Gamma$. *On a alors :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dim M_0(\Gamma) & = & 1 & \\ \dim M_2(\Gamma) & = & m+g-1 & si\ m>0 \\ \dim M_2(\Gamma) & = & g & si\ m=0 \\ \dim(M_k(\Gamma)) & = & (k-1)(g-1)+m\frac{k}{2}+\sum_i e_i[\frac{k(i-1)}{2i}] & \\ & = & (k-1)\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{H}/\Gamma)}{4\pi}+\frac{m}{2}-\sum_i e_i\{\frac{k(i-1)}{2i}\}. & \end{array}\right. \qquad (D).$$

Exemple. Soit $\Gamma_1 = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, le groupe modulaire classique. Le genre de la surface de Riemann $\mathcal{H}/\Gamma_1$, est égal à 0. Le nombre de points elliptiques d'ordre 2, dans un domaine fondamental est égal à $e_2 = 1$. Le nombre de points elliptiques d'ordre 3, est égal à $e_3 = 1$. Le nombre de pointes est égal à $m = 1$. On a donc $\dim M_2 = 0$ et $\dim M_4 = -3+2+[\frac{2(2-1)}{2}]+[\frac{2(3-1)}{3}] = -3+2+2 = 1$.

Le théorème suivant est connu. On en donne l'idée de la démonstration.

THÉORÈME 3. *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, *un sous-groupe discret de covolume fini. Soit* $M_* = \bigoplus_{k\geq 0} M_k$, *l'anneau gradué des formes modulaires sur* Γ. *Alors* M_* *est un anneau de type fini.*

Idée. Pour simplifier, on suppose Γ agit librement sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire sans points elliptiques, on suppose aussi k pair. On définit le quotient $\mathcal{E}_k = (\mathcal{H}\times\mathbb{C})/\Gamma$, où on identifie (τ,α) avec $(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},(c\tau+d)^{-k}\alpha)$, pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. L'hypothèse sur Γ, implique que $\mathcal{E}_k \longrightarrow \mathcal{H}/\Gamma$ est un fibré en droites au dessus de $\mathcal{H}/\Gamma$. Il existe une extension de ce fibré à $X = (\mathcal{H}\cup\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))/\Gamma$. Par abus de notation, $\mathcal{E}_k$ désigne le fibré en droites au dessus de X (aprés extension). Les formes modulaires de poids k sur Γ, sont les sections globales de ce fibré. Soit $M_k(\Gamma) = H^0(X,\mathcal{E}_k)$. D'autre part $\mathcal{E}_k \simeq \mathcal{E}_2^{\otimes\frac{k}{2}}$. Les formes modulaires de poids k sont alors sections globales de puissance tensorielle d'un

fibré ample au dessus de X. De plus X est projective lisse, par conséquence de la géométrie algébrique des courbes, $M_*(\Gamma) = \bigoplus_k H^0(X, \mathcal{E}_2^{\otimes \frac{k}{2}})$, est un anneau de type fini.

Crochets de Rankin-Cohen. Certaines combinaisons de dérivées de formes modulaires sont modulaires. On définit une suite d'opérateurs sur le produit tensoriel d'espaces M_k et M_l, de formes modulaires de poids respectifs k et l. Ces opérateurs sont appelés crochets de Rankin-Cohen. On note par $f^{(j)}$ la dérivée j-ième par rapport à z d'une fonction dérivable sur $\mathcal{H}$.

Définition 3. *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$). Soient k, l et n des entiers, on définit :*

$$[f,g]_n^{k,l} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{k+n-1}{j} \binom{l+n-1}{j} f^{(n-j)} g^{(j)} \quad .$$

Notation. Si f et g sont respectivement des formes modulaires de poids respectifs k et l. On note par $[f,g]_n$ le crochet $[f,g]_n^{k,l}$, c'est-à-dire on ommet k et l de la notation.

Proposition 1. *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. On a alors :*

$$[f\mid_k \gamma, g\mid_l \gamma]_n^{k,l} = [f,g]_n^{k,l} \mid_{k+l+2n} \gamma \qquad .$$

Corollaire. *Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret de covolume fini. Les crochets de Rankin-Cohen définissent une suite d'opérateurs :*

$$\begin{array}{ccc} M_k(\Gamma) \otimes M_l(\Gamma) & \longrightarrow & M_{k+l+2n}(\Gamma) \\ f \otimes g & \mapsto & [f,g]_n. \end{array}$$

Démonstration. On suppose dans la proposition que f et g sont des formes modulaires de poids respectifs k et l sur Γ. On a alors les équations fonctionelles $f|_k\gamma = f$ et $g|_l\gamma = g$. La proposition implique $[f,g]_n = [f,g]_n|_{k+l+2n}\gamma$, c'est-à-dire $[f,g]_n$ est modulaire de poids $k+l+2n$. □

Pour démontrer la proposition, on définit une suite de polynômes dans $\mathbb{C}[x,y]$ par :

$$R_n^{k,l}(x,y) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{k+n-1}{j} \binom{l+n-1}{n-j} y^j x^{n-j} \quad . \tag{1.1}$$

On a alors :

$$[f,g]_n = R_n^{(k,l)}(\partial_1,\partial_2)(f(z_1)g(z_2))\mid_{z_1=z_2=z},$$

où ∂_1 et ∂_2 les opérateurs de dérivation par rapport aux variables z_1 et z_2, définies sur l'espace de fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, qu'on note $\mathcal{C}(\mathcal{H}^2)$.

Nous allons maintenant donner une caratérisation de la suite de polynômes $R_n^{k,l}(x,y)$ (cette caractérisation implique la proposition). Pour cela, on définit un opérateur (comme le laplacien) sur l'espace des polynômes en deux variables.

Définition 4. *Soient $k,l\in\mathbb{N}$, on définit l'opérateur :*

$$\begin{array}{rcl}\Delta_{k,l}:\mathbb{C}[x,y] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x,y]\\ P & \mapsto & (x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+l\frac{\partial}{\partial y})(P).\end{array}$$

Proposition 2. *Pour tout $n\in\mathbb{N},(k,l)\in\mathbb{Z}^2$, on a :*

$$\ker(\Delta_{k,l})\cap\mathbb{C}[x,y]_n=\mathbb{C}\,.R_n^{k,l}(x,y).$$

Démonstration. On a :

$$\dim(\ker(\Delta_{k,l})\cap\mathbb{C}[x,y]_n)=\dim\mathbb{C}[x,y]_n-\dim\mathbb{C}[x,y]_{n-1}=1.$$

Soit $P(x,y)=\sum\limits_{r+s=n}c_{r,s}x^ry^s\in\mathrm{Ker}(\Delta_{k,l})$, on a alors :

$$\sum_{r+s+1=n}((r+1)(k+r)c_{r+1,s}+(s+1)(s+l)c_{r,s+1})x^ry^s=0.$$

Ceci implique $(r+1)(k+r)c_{r+1,s}+(s+1)(s+l)c_{r,s+1}=0$. Si on impose $c_{0,n}=\binom{-k}{n}$, on obtient $c_{r,s}=(-1)^r\binom{n+k-1}{s}\binom{n+l-1}{r}$. On retrouve donc la définition 1.1 des polynômes $R_n^{k,l}(x,y)$. □

Remarque. Soit $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$. On définit, la restriction diagonale :

$$\begin{array}{rccc}\rho: & \mathcal{C}(\mathcal{H})^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathcal{H})\\ & F(z_1,z_2) & \mapsto & F(z,z)\end{array}$$

La preuve de la proposition implique que, si $F\in\mathcal{C}(\mathcal{H}^2)$ pas nécessairement dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{C}(\mathcal{H})$, satisfaisant à :

$$F(\gamma.z_1,\gamma.z_2)=(cz_1+d)^k(cz_2+d)^lF(z_1,z_2),$$

pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $(z_1, z_2) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$; alors $\rho\circ RC_n^{k,l}(\partial_1, \partial_2)(F(z_1, z_2))$ se transforme comme une forme modulaire de poids $k+l+2n$. Cette remarque va jouer un rôle essentiel dans le chapitre (III).

Exemple. Le crochet entre deux formes modulaires f et g d'ordre 0 est simplement le produit : $[f, g]_0 = fg$. Le crochet d'ordre 1, est $[f, g]_1 = kfg' - lgf'$.

Ces crochets ont été découvert par Cohen, voir ([3]). Depuis, ils ont plusieurs applications dans la théorie des formes modulaires.

Deuxième preuve de modularité des crochets. Pour démontrer la modualrité des crochets de Rankin-Cohen entre formes modulaires, on peut suivre [24]. Soient f et g deux formes modulaires de poids respectives k et l sur Γ. On associe à f et g leurs séries de Kuznetsov-Cohen, définies par $\widetilde{f}(\tau, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tau)X^n}{n!(n+k-1)!}$ et $\widetilde{g}(\tau, X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\tau)X^n}{n!(n+l-1)!}$ (où $\tau \in \mathcal{H}$ et X une variable), on a alors :

$$\widetilde{f}(\tau, X)\widetilde{g}(\tau, -X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[f, g]_n(\tau)X^n}{(n+k-1)!(n+l-1)!} \quad .$$

D'autre part $\widetilde{g}$ vérifie la même loi de transformation que $\widetilde{f}$ (en remplaçant $\widetilde{f}$ par $\widetilde{g}$ et k par l) à savoir :

$$\widetilde{f}(\gamma\tau, \frac{X}{(c\tau+d)^2}) = (c\tau+d)^k e^{cX/c\tau+d}\widetilde{f}(\tau, X), \tag{1.2}$$

pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Pour montrer cette loi de transformation, on vérifie facilement que l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial\tau} - k\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ annulle les deux membres de (1.2). D'autre part, la valeur en $(\tau, 0)$ des deux membres de (1.2) est $\frac{\widetilde{f}(\tau)}{(k-1)!}$, et donc les deux membres de (1.2) coincident.

Finalement en utilisant les lois de transformations de $\widetilde{f}(\tau, X)$ et $\widetilde{g}(\tau, -X)$, on obtient :

$$\widetilde{f}(\gamma\tau, \frac{X}{(c\tau+d)^2})\,\widetilde{g}(\gamma\tau, \frac{-X}{(c\tau+d)^2}) = (c\tau+d)^{k+l}\widetilde{f}(\tau, X)\widetilde{g}(\tau, -X),$$

(les facteurs exponentielles se simplifient). Il suit que :

$$[f, g]_n(\gamma\tau) = (c\tau+d)^{k+l+2n}[f, g]_n(\tau),$$

pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Remarque. Pour démontrer la modularité des crochets de Rankin-Cohen entre formes modulaires de Hilbert (voir chapitre III) en deux variables τ_1 et τ_2, on pourra utiliser la même démonstration, en associant aux formes modulaires de Hilbert des séries de Kuznetsov-Cohen en deux variables. Soient ∂_1 et ∂_2 les dérivations respectives par rapport à τ_1 et τ_2, on associe à une forme modulaire de Hilbert $F(\tau_1, \tau_2)$ de poids (k_1, k_2), la série $\widetilde{F}(\tau_1, \tau_2, X, Y) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{\partial_1^n F \partial_2^n F(\tau_1, \tau_2) X^n Y^m}{n!\, m!(n+k_1-1)!(m+k_2-1)!}$.

Formes quasi-modulaires. La dérivée d'une forme modulaire de poids k n'est pas modulaire. C'est une forme quasi-modulaire de poids $k+2$ et profondeur ≤ 1. Kaneko et Zagier on introduit dans ([9]), la notion des formes quasi-modulaires. Voici une définition simple suggérée par Werner Nahm.

Définition 5. *Une forme quasi-modulaire de poids k et profondeur $\leq p$ sur Γ, est une fonction holomorphe f sur $\mathcal{H}$ à croissance tempérée, telle que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c\,z+d)^{-k}\, f(\frac{a\,z+b}{c\,z+d}), \end{array}$$

est un polynôme en $\frac{c}{c\,z+d}$, de degré $\leq p$. Autrement dit on a :

$$(cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d}) = \sum_{j=0}^{p} f_j(z)(\frac{c}{cz+d})^j, \quad \forall z \in \mathcal{H}, \tag{2}$$

avec des fonctions $f_j : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ pour $(j = 0, \cdots, p)$.

Remarque. Les fonctions f_j sont automatiquement holomorphes, avec $f_0 = f$. Chaque f_j, sera elle aussi quasi-modulaire de poids $k-2j$ et de profondeur $\leq p-j$.

Exemple. Une forme modulaire de poids k est une forme quasi-modulaire du même poids et de profondeur nulle. Si g est une forme modulaire de poids k alors g' sera quasi-modulaire de poids $k+2$ et profondeur ≤ 1, avec $f_0(z) = g'(z)$ et $f_1(z) = kg(z)$. Sur le groupe modulaire $\Gamma_1 = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, la série d'Eisenstein E_2 de poids 2 est une forme quasi-modulaire holomorphe

de poids 2 et profondeur ≤ 1, (avec $f_0(z) = E_2(z)$ et $f_1(z) = \frac{6}{\pi i}$). Cette forme quasi-modulaire n'est pas la dérivée d'une forme modulaire. En effet, $M_0 = \mathbb{C}$, donc la dérivée d'une forme en poids 0 est nulle.

Définition 6. Une *forme modulaire presque-holomorphe* F de poids k et profondeur $\leq p$ sur Γ est un polynôme en $\frac{1}{y}$ de degré $\leq p$, à coefficients des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$, à croissance tempérée, telle qu'on a (1) pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et $z \in \mathcal{H}$.

Remarque. Nous allons étudier dans le chapitre IV, en détail le lien entre les espaces de formes quasi-modulaires holomorphes et les espaces de formes modulaires presque-homorphes. Nous allons démontrer que ces espaces sont isomorphes, l'isomorphisme envoie f vers $F = \sum_{j=0}^{p} f_j(z)(2iy)^{-j}$.

1.3 Equations différentielles

Le degré de transcendance de l'anneau des formes modulaires sur n'importe quel groupe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, discret et de covolume fini est égal à 2 (car, $\dim(\mathcal{H}/\Gamma) = 1$ et un poids est associé à une forme). L'anneau des formes quasi-modulaires à un degré de transcendance égal à 3 (car, $\dim(\mathcal{H}/\Gamma) = 1$, un poids et un profondeur sont associés à chaque forme). Or, pour toute forme modulaire de poids k, les dérivés f',f'' et f''' sont des formes quasi-modulaires (de poids respectives $k+2$, $k+4$ et $k+6$). Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_4]$ telle que : $P(f, f', f'', f''') = 0$, c'est-à-dire f est solution d'une équation différentielle non linéaire d'ordre au plus égal à 3.

Mais, f satisfait à une équation différentielle beaucoup plus utile à savoir une équation différentielle qui est linéaire par rapport à une coordonnée locale qui est une fonction modulaire. Ce fait qui est classique a joué un rôle dans les premiers articles sur les formes automorphes (Klein, Fricke et Poincaré), a été démontré dans un langage moderne par P. Stiller. Puisqu'il n'est pas trés connu aujourd'hui, on donne la démonstration complète en suivant ([23]). On donne aussi une nouvelle démonstration.

Théorème 4. *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, *un sous-groupe discret de covolume fini. Soit* $t(z)$, *une fonction modulaire sur* Γ. *Soit* $f \in M_k(\Gamma)$, *on écrit localement* $f = \Phi(t)$. *Alors* Φ *est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre au plus* $k+1$ *à coefficients des fonctions algébriques en* t.

Démonstration. On associe à f la fonction vectorielle $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, définie par :

$$F(z) = \begin{pmatrix} f(z)z^k \\ f(z)z^{k-1} \\ \cdots \\ f(z) \end{pmatrix} = f(z) \begin{pmatrix} z^k \\ z^{k-1} \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$F(\gamma z) = \begin{pmatrix} f(z)(az+b)^k \\ f(z)(az+b)^{k-1}(cz+d) \\ \cdots \\ f(z)(cz+d)^k \end{pmatrix} = M(\gamma)F(z)$$

avec,

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b & \cdots & b^k \\ a^{k-1}c & \cdots & \cdots & b^{k-1}d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c^k & kc^{k-1}d & \cdots & d^k \end{pmatrix} = \mathrm{Sym}^k(\gamma).$$

Puisque $M(\gamma)$ ne dépend pas de z, on a $\dfrac{dF(\gamma z)}{dz} = (cz+d)^{-2}F'(\gamma z) = M(\gamma)F'(z)$. Or,

$$\frac{dt(\gamma z)}{dz} = (cz+d)^{-2}t'(\gamma z).$$

Ceci implique : $\dfrac{F'(\gamma z)}{t'(\gamma z)} = M(\gamma)\dfrac{F'(z)}{t'(z)}$. Si on définit, par $D = (\frac{dt}{dz})^{-1}\frac{d}{dz}$ l'opérateur de dérivation par rapport à t, on en déduit $DF(\gamma z)) = M(\gamma)DF(z)$. Par récurence sur i, il suit que $D^i(F)(\gamma z) = M(\gamma)D^i(F)(z)$. On peut alors construire une matrice de taille $(k+1)\times(k+2)$, en prenant les $D^iF(z)(i = 0, 1, \cdots, k+1)$ comme vecteurs colonnes. En rajoutant une ligne à cette matrice, en repétant la dernière ligne, on obtient une matrice carré de déterminant 0, on en déduit une relation de dépendance entre les colonnes :

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_i(z)D^i(F)(z) = 0,$$

avec $a_i(z) = (-1)^i \det A_i(z)$ où : $A_i(z) = (f, Df, \cdots, \hat{D^i f}, \cdots, D^{k+1}f)$. On obtient donc une équation différentielle linéaire satisfaite par F avec un ordre égal à $k+1$. Le fait que $A_i(\gamma z) = M(\gamma)A_i(z)$ et que $\det(M(\gamma)) = 1$ implique

la Γ-invariance des $a_i(z)$, qui sont donc des fonctions modulaires et par conséquence des fonctions algébriques en t. $\square$

Nous donnons maintenant une nouvelle démonstration du théorème que nous avons trouvé suite à l'ètude d'un exemple particulier.

Deuxième démonstration. Nous considérons l'opérateur de différentiation, $D = (\frac{dt}{dz})^{-1}\frac{d}{dz}$, associé à la fonction modulaire t. On choisit une forme quasi-modulaire méromorphe ϕ de poids 2, par exemple ($\phi = \frac{1}{n}\frac{g'}{g}$, pour une forme modulaire méromorphe g quelconque de poids $n \neq 0$) avec $\phi' - \phi^2$ modulaire méromorphe de poids 4. Par récurrence, on montre que $D^j f = k(k-1)\dots(k-j+1)f\phi^j + R$, où R est un polynôme de degré $< j$ en ϕ à coefficients modulaires. On a donc $f, Df, \cdots, D^{k+1}f \in M_*^{\mathrm{mer}}[\phi]$. On considère la matrice A de taille $(k+2)\times(k+2)$, dont le j-ème vecteur colonne($j = 0, \cdots, k+1$) est la suite des coefficients de $f, Df, \cdots, D^{k+1}f$ (vu comme polynômes en ϕ) par rapport à la puissance ϕ^j. La matrice A est triangulaire avec une diagonale égale à $(f, kf, k(k-1)f, \cdots, k!, 0)$, c'est-à-dire seul le dernier terme de la diagonale est nul. Le noyau de A est donc de dimension exactement 1, on obtient une relation $\sum_{j=0}^{k+1} a_j(z)D^j f = 0$ avec les a_j des formes modulaires du même poids ; car les $D^j f$ sont tous des formes quasi-modulaires de même poids k, et avec $a_{k+1} \neq 0$. En divisant avec a_{k+1}, on peut supposer que tous les a_j sont de poids 0. Il suit que les a_j sont des fonctions algébriques de t. Finalement, on peut pas trouver une équation différentielle d'ordre plus petit, car la sous-matrice extraite de A en éliminant la dernière ligne est une natrice triangulaire inversible (donc de noyau nul).

1.4 Développement en série de Taylor

Pour toute forme modulaire elliptique f de poids k sur un groupe modulaire Γ et tout point $z_0 \in \mathcal{H}$, on définit une suite de nombres $(C_n[f; z_0])$ qu'on appellera suite de nombres canoniques associée à f au point z_0. On commence par identifier le demi-plan supérieur avec le disque unité par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ z & \longmapsto & \frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}, \end{array}$$

L'application inverse est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ w & \longmapsto & \frac{z_0-\overline{z}_0 w}{1-w}. \end{array}$$

L'application $w \longrightarrow (1-w)^{-k} f(\frac{z_0 - \overline{z}_0 w}{1-w})$, est analytique sur le disque unité.

Définition 7. *Soit f une forme modulaire de poids k sur un groupe modulaire Γ et $z_0 \in \mathcal{H}$. La suite de Taylor canonique $(C_n[f; z_0])$ associée à f au point z_0 est définie par :*

$$(1-w)^{-k} f(\frac{z_0 - \overline{z}_0 w}{1-w}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n[f; z_o] \frac{w^n}{n!} \quad .$$

Nous donnons ici, un corollaire de la formule des zéros lié au développement en Taylor des formes modulaires autour de zéro, comme expliqué dans la définition précédente.

Lemme. *Soient f et g deux formes modulaires de même poids k sur un même groupe modulaire $\Gamma \subset \mathrm{PSU}(1,1)$. Soient $f(x)$ et $g(x)$ les développements en Taylor autour de 0 des formes f et g. On suppose que $f(x) - g(x) = O(x^l)$, avec $l > \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{D}/\Gamma)}{4\pi}$ alors $f = g$.*

Soit $\widehat{M}_* = \widehat{M}_*(\Gamma)$ l'anneau des formes modulaires presque-holomorphes sur le groupe modulaire Γ (voir chapitre IV). Il existe alors un opérateur de dérivation sur $\widehat{M}_*$ défini par, $\partial = D - \frac{E}{4\pi y}$ où $y = \Im(z)$ et E est l'opérateur donné par multiplication par le poids : $E(f) = kf$, si $f \in \widehat{M}_k$. On écrit $\partial_k = D - \frac{k}{4\pi y}$, pour la restriction de ∂ sur $\widehat{M}_k$ et ∂_k^n pour la composition $\partial_{k+2n-2} \circ \cdots \circ \partial_k$, on a $\partial_k^n : \widehat{M}_k \longrightarrow \widehat{M}_{k+2n}$. Pour calculer la suite de Taylor canonique assoicée à une forme modulaire f au point z_0, on utilise les propositions suivantes, dont on peut trouver des démonstrations dans le cours de Don Zagier au Collège de France.

Proposition 3. *Soit $f \in M_k(\Gamma)$ et $z_0 \in \mathcal{H}$ de partie imaginaire y_0. On a alors $C_n[f; z_0] = (-4\pi y_0)^n (\partial_k^n f)(z_0)$.*

Soit $\phi \in \widetilde{M}_2^{mer}$ (l'espace des formes quasi-modulaires méromorphes de poids 2 sur le groupe modulaire Γ), on définit $\Phi = D\phi - \phi^2$. C'est une forme modulaire méromorphe de poids 4 sur Γ. On définit l'opérateur $\partial_\phi = D - \phi E$.

Proposition 4. *Soit (f_n) la suite de fonctions définis par $f_0 = f \in M_k(\Gamma)$ et $f_{n+1} = \partial_\phi(f_n) - n(n+k-1)\Phi f_{n-1}$, avec $\partial_\phi(f_n) = (D - (k+2n)\phi) f_n$. On a alors $\partial_k^n f(z_0) = f_n(z_0)$.*

On définit une relation d'équivalence sur les suites de nombres complexes par : $(a_n) \sim (b_n)$, s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ tels que $a_n = \alpha\beta^n b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\{C_n\}$ la classe de la suite canonique de Taylor associée à une forme modulaire f au point z_0. Il est facile de voir que la classe de la suite canonique de f dans n'importe quel point $\gamma.z_0$ de l'orbite de z_0 sous l'action de Γ, est indépendant de γ. Une classe d'équivalence est donc un élément de $(\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{C})/(\mathbb{C}^*)^2$. Ainsi toute forme modulaire f sur Γ permet de définir une application :

$$\mathcal{H}/\Gamma \longrightarrow \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}/(\mathbb{C}^*)^2.$$

Si de plus f est algébrique et z_0 est un point CM, alors l'image de cette application sera contenue dans $\prod_{n=0}^{\infty} \overline{\mathbb{Q}}/(\mathbb{Q}^*)^2$.

Chapitre 2

Courbes modulaires compactes

2.1 Algèbres de quaternions

Dans ce paragraphe, nous rappelons les définitions et propriétés générales des algèbres de quaternions. Pour une référence plus complète, on peut voir [21] ou [11].

Dans ce paragraphe, K désigne un corps de caractéristique différente de 2.

Définition 8. *Une algèbre de quaternions B sur K, est définie par la donnée d'un couple (a, b) formé de deux éléments non nuls a et b de K, avec les relations $i^2 = a$, $j^2 = b$ et $ij = -ji$; définissant B comme la K-algèbre sous-jacente à un espace vectoriel de dimension 4, dont $(1, i, j, ij)$ est une base.*

Notation. Un élément q de B, est appelé un *quaternion* et est défini par $q = x+iy+jz+(ij)t$, avec $(x, y, z, t) \in K^4$. Son conjugué est $\overline{q} = x-iy-jz-(ij)t$. On définit la *trace* réduite de q par, $tr(q) = q + \overline{q} = 2x$. *La norme* réduite de q, est définie par :

$$n(q) = q\overline{q} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2.$$

On note par $(\frac{a,b}{K})$, l'algèbre de quaternions définie sur K par la donnée du couple $(a, b) \in K^2$. On utilise parfois la notation (a, b) pour désigner l'algèbre $(\frac{a,b}{K})$, s'il n'y a aucune confusion sur le corps K. On vérifie facilement que $tr(q_1 + q_2) = tr(q_1) + tr(q_2)$ et $n(q_1q_2) = n(q_1)n(q_2)$.

Remarque. La norme n définit sur l'espace vectoriel sous-jacent à B une forme quadratique.

Exemple. L'exemple fondamental d'une algèbre de quaternions sur K, est donné par l'algèbre $M(2,K)$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans K. La trace et la norme dans $M(2,K)$ sont la trace et le déterminant au sens usuel. On identifie K à son image dans $M(2,K)$ par le K-homomorphisme qui envoie l'unité de K sur la matrice identité. De façon explicite : si $q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,K)$, son conjugué est $\overline{q} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on a $tr(q) = a + d$ et $n(q) = ad - bc$. On a aussi $M(2,K) = (\frac{1,1}{k})$ avec :

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5. *Soit B une algèbre de quaternions sur K, et B_0 le sous-espace de B définie par $B_0 = \{q \in B \mid tr(q) = 0\}$. On a alors l'equivalence : $q \in B_0$ si et seulement si : ($q^2 \in K$) et ($q = 0$ ou $q \notin K$).*

Démonstration. Soit $(1, i, j, ij)$ une base de B sur K, avec $i^2 = a \in K^*$ et $j^2 = b \in K^*$. Supposons que $q = x + iy + jz + ijt$ avec $tr(q) = 0$, alors $x = 0$ et $q^2 = ay^2 + bz^2 - abt^2 \in K$, de plus $q = 0$ ou $q \notin K$ car alors, $(y, z, t) \neq (0, 0, 0)$. Réciproquement supposons que $q^2 \in K$ et ($q = 0$ ou $q \notin K$). Comme, $q^2 = (x^2 + ay^2 + bz^2 - abt^2) + 2(xyi + xzj + xt(ij))$. On a alors $xy = xz = xt = 0$ et ($q = 0$ ou $(y, z, t) \neq (0, 0, 0)$, ce qui implique : $x = 0$ ou encore $\mathrm{tr}(q) = 0$. □

Proposition 6. *Soit B une K-algèbre de quaternions et B^* le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de B. On a alors : $q \in B^*$ si et seulement si* $\mathrm{n(q)} \neq 0$.

Démonstration. Soit $q \in B$, on a $n(q) = q\overline{q}$. Si $n(q) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{n(q)}\overline{q}$ est inverse de q. Réciproquemnt, si q est inversible, par multiplicativité de la norme $n(q)n(q^{-1}) = 1$ et donc $n(q) \neq 0$. □

Proposition 7. *Soit B une K-algèbre de quaternions. Les K-automorphismes de B sont de la forme : $q \longrightarrow \sigma^{-1}q\sigma$, avec $\sigma \in B^*$.*

Démonstration. Une K-algèbre de quaternions, est une K-algèbre centrale simple de dimension 4 sur K. La proposition est corollaire du théorème de Skolem-Noether sur les K-automorphismes des K-algèbres centrales simples. □

Remarque. En conséquence de la Proposition (7), caractérisant les K-automorphismes de B, on a $\mathrm{Aut}_K(B) = B^*/K^*$.

Définition 9. *On considère l'équation :* $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0 \quad (1)$, *avec* $a, b \in K$. *On définit le symbole de Hilbert* (a, b) *par :*

$$\begin{cases} (a,b) = 1 & \textit{s'il existe une solution dans } K^3 - \{0\} \textit{ de } (1). \\ (a,b) = -1 & \textit{si non.} \end{cases}$$

Notation. On note par (a, b), le symbole de Hilbert défini sur $\mathbb{Q}^2$; et par $(a, b)_p$, le symbole de Hilbert définie sur $\mathbb{Q}_p^2$.

Exemple.

a,b	symbole de Hilbert (a,b)	Une solution de : $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$.
-1,-1	-1	aucune
1 , -1	1	$(0, 1, 1)$
-2 , 1	1	$(1, 0, 1)$

Pour le calcul des symboles de Hilbert sur $\mathbb{Q}^2$, nous utilisons la proposition suivante, dont une démonstration se trouve par exemple dans [16].

Proposition 8. *Soient* $(a, b) \in \mathbb{Q}_p$. *Ecrivons* $a = p^\alpha u$ *et* $b = p^\beta v$, *avec* u, v *des unités p-adiques. On a alors :* $(a, b)_p = (-1)^{\alpha\beta\,\epsilon(p)} \left(\frac{u}{p}\right)^\beta \left(\frac{v}{p}\right)^\alpha$ *si* $p \neq 2$; *et* $(a, b)_2 = (-1)^{\epsilon(u)\epsilon(v)+\beta\omega(u)+\alpha\omega(v)}$ *si* $p = 2$, *où* $\epsilon(u) \equiv \frac{u-1}{2} \bmod 2$ *et* $\omega(u) \equiv \frac{u^2-1}{8} \bmod 2$. *On a aussi :* $(a, b)_\infty = -1$, *si* $a < 0$ *et* $b < 0$ *; si non* $(a, b)_\infty = 1$.

Proposition 9. *Soit* B *une* K*-algèbre de quaternions ; alors, soit* B *est isomorphe à l'algèbre des matrices* $M(2, K)$, *soit* B *est une* K*-algèbre de division.*

Démonstration. On suppose que B est définie comme dans la définition (8), par la donnée d'un couple (a, b). Par la Proposition (6); B est une algèbre de division, si tout élément non nul de B est de norme non nul. Il reste à montrer que s'il existe un élément non nul de norme nul, alors B est isomorphe à l'algèbre des matrices. Supposons que $n(x_0 + iy_0 + jz_0 + (ij)t_0) = 0$ avec $(x_0, y_0, z_0, t_0) \neq 0$, on va montrer dans la suite (voir Proposition 12) qu'il existe alors une solution non triviale de l'equation $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$. Soit (x_1, y_1, z_1) une telle solution, c'est-à-dire $x_1^2 - ay_1^2 = bz_1^2$. On va supposer pour

l'instant que $z_1 \neq 0$, $x_1 \neq 0$ et $y_1 \neq 0$. On a les isomorphismes canoniques suivants :

$$\begin{aligned}(a,b) \simeq (a, bz_1^2) \simeq (a, x_1^2 - ay_1^2) \simeq (a, 1-au^2), \text{ avec } u = \tfrac{y_1}{x_1}.\\ \simeq (au^2, 1-au^2) \simeq (d, 1-d), \text{ avec } d = au^2.\end{aligned}$$

Il suffit alors de construire un isomorphisme ϕ explicite entre l'algèbre de quaternions $(d, 1-d)$ et $M(2,K)$. Pour çela on prend : $\phi(i) = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\phi(j) = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si $z_1 = 0$ alors $x_1^2 = ay_1^2$, donc $(a,b) \simeq (ay_1^2, b) \simeq (x_1^2, b) \simeq (1,b)$. Or $(1,b) \simeq M(2,K)$, en effet il suffit d'identifier $x+iy+jz+(ij)t$ avec $\begin{pmatrix} x+y & z+t \\ b(z-t) & x-y \end{pmatrix}$. Si $y_1 = 0$ alors $x_1^2 = bz_1^2$, on traite ce cas comme le cas $z_1 = 0$. Il reste le cas $x_1 = 0$, dans ce cas $ay_1^2 = -bz_1^2$ donc $(a,b) \simeq (-bz_1^2, b) \simeq (-b, b)$. Or, $(-b,b) \simeq M(2,K)$ en identifiant i avec $\begin{pmatrix} 1 & 1+b \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et j avec $\begin{pmatrix} -1 & b-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. □

Dans la suite K est un corps de nombres.

Définition 10. *Soit B une algèbre de quaternions sur un corps de nombres K. Pour toute place v de K, on définit $B_v = B \otimes_K K_v$, c'est une algèbre de quaternions sur K_v. Si B_v est une algèbre de division , on dit que B est ramifiée en v ; si B_v est une algèbre de matrices, on dit que B est non ramifiée en v.*

Le théorème suivant n'est pas facile à démontrer. La preuve se trouve bien sûr dans les références que nous avons cité.

Théorème 5. *Soit K un corps de nombres. Une K-algèbre de quaternions B est ramifiée en un nombre pair de places. Deux K-algèbres de quaternions sont isomorphes s'ils sont ramifiées aux mêmes places. Pour tout nombre pair de places de K, il existe une K-algèbre de quaternions B ramifiée exactement en ces places.*

Définition 11. *Soit B une K-algèbre de quaternions. Le discriminant de B est le produit des idéaux premiers correspondants aux places finies ramifiant B.*

Dans la suite, on définit les corps neutralisant une algèbre de quaternions. On donne une caractérisation des corps neutralisants. On rappelle la notion de symbole de Hilbert et on montre comment utiliser le calcul de tels symboles pour déterminer l'ensemble des premiers ramifiant une $\mathbb{Q}$-algèbre de quaternions ou encore son discriminant.

Définition 12. *Soit L une extension de K et B une K-algèbre de quaternions. On dit que L est un corps neutralisant B, si $B \otimes_K L \simeq M(2, L)$.*

Remarque. La clôture algébrique $\overline{K}$ de K est un corps neutralisant toute K-algèbre de quaternions. En particulier, une algèbre de quaternions définie sur un corps algébriquement clos est isomorphe à l'algèbre des matrices.

Proposition 10. *Soit L une extension finie de K et B une K-algèbre de quaternions. Pour que L soit un corps neutralisant B, il faut et il suffit que : pour toute place v de K et pour toute place $w \mid v$ de L, le corps L_w neutralise B_v.*

Proposition 11. *Soit L une extension quadratique de K et B une K algèbre de quaternions. Pour que L soit un corps neutralisant B, il faut et il suffit qu'il existe un K-plongement de L dans B; ou encore toute place v en laquelle B est ramifiée, n'est pas totalement décomposée dans L.*

Nous donnons maintenant un outil important pour étudier les $\mathbb{Q}$-algèbres de quaternions.

Proposition 12. *Soit $B = (a, b)$ une $\mathbb{Q}$-algèbre de quaternions, et p un nombre premier. Alors B est ramifiée en p, si $(a, b)_p = -1$.*

Démonstration. Supposons que $(a, b)_p = 1$. L'équation $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$, possède une solution non triviale (x_0, y_0, z_0), donc $n(x_0 + iy_0 + jz_0 + 0) = 0$. En particulier, $(x_0, y_0, z_0, 0)$ n'est pas inversible et donc $B \otimes \mathbb{Q}_p$ est la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de matrices d'ordre 2. Réciproquement, supposons que $B \otimes \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à l'algèbre de matrices. Alors, il existe un élément $q_0 = x_0 + iy_0 + jz_0 + (ij)t_0$ non nul, de norme nul. Or, la norme est multiplicative donc pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}_p$, on a $n(q_0(1 + \lambda(ij))) = 0$. D'autre part on a : $q_0(1 + \lambda(ij)) = (x_0 - \lambda t_0 ab) + i(y_0 - bz_0) + j(z_0 - ay_0) + ij(t_0 + \lambda)$. Pour $t_0 = -\lambda$, on obtient $n(x_0 + abt_0^2 + i(y_0 - bz_0) + j(z_0 - ay_0)) = 0$. On distingue alors deux cas : si $x_0 \neq 0$ alors l'equation (1) possède une solution non triviale dans $\mathbb{Q}_p^3$. Si non, $x_0 = 0$, on a alors $(y_0, z_0, t_0) \neq 0$; en effectuant le changement de variable $(y_0 = by_1, z_0 = az_1)$, on obtient une solution non triviale de (1) dans $\mathbb{Q}_p^3$ dans les deux cas, $(a, b)_p = 1$. $\square$

2.2 Exemples d'algèbres

Nous étudions ici un exemple d'algèbre de quaternions, qu'on va considérer dans la suite. Soit B_0, l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ définie par la donnée du couple $(-1,3)$. Il existe alors une base $(1,i,j,ij)$ de B_0, avec : $i^2=-1$, $j^2=3$ et $ij+ji=0$. La norme n est définie sur B_0 par :

$$n(x+iy+jz+ijt)=x^2+y^2-3z^2-3t^2.$$

L'équation $n(x+iy+jz+ijt)=0$ ne possède pas de solution non nulle. En effet, si non, il existerait une solution non nulle dans $\mathbb{Q}^4$ de : $x^2+y^2=3(z^2+t^2)$. Or, il est bien connu (Théorème de Gauss) : *un rationnel u est somme de deux carrés s'il n'existe pas de premiers p satsifaisant : $p\equiv 3(mod 4)$ et $v_p(u)$ impair* . Il suit que l'équation $n(q)=0$ ne possède pas de solutions non triviale q, si non, il existerait (x,y,z,t) non nul, telle que :

$$v_3(x^2+y^2)-v_3(z^2+t^2)\equiv 1 \mod (2),$$

ce qui contredit le théorème de Gauss. Donc B_0 est une $\mathbb{Q}$-algèbre de division.

Nous allons maintenant déterminer les premiers ramifiant B_0. Pour çela, nous utilisons la Proposition 8. On va donc calculer le symbole de Hilbert $(-1,3)_p$ pour tout premier p. Pour $p=2$, il est clair que -1 et 3 sont des unités 2-adiques. Donc $(-1,3)_2=(-1)^{\epsilon(-1)\epsilon(3)}$ où $\epsilon(u)\equiv\frac{u-1}{2} \mod 2$. Soit alors $(-1,3)_2=-1$, c'est-à-dire B_0 est ramifié en 2 ou encore : $B_0\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_2$ est une $\mathbb{Q}_2$ algèbre de division. Pour $p=3$, on a -1 unité 3-adique mais pas 3, dans ce cas $(-1,3)_3=(\frac{-1}{3})=-1$, donc B est ramifié en -3. Pour tout premier p différent de 2 et 3 on a $(-1,3)_p=1$. En effet, -1 et 3 sont dans ce cas des unités p-adiques, l'écriture de -1 respectivement 3 sous la forme $p^\alpha u$ respectivement $p^\beta v$, est obtenue en prenant $\alpha=\beta=0$, $u=-1$ et $v=3$, d'où $(-1,3)_p=(-1)^0(\frac{-1}{p})^0(\frac{3}{p})^0=1$. L'algèbre B_0 est alors ramifiée en un nombre pair (égal à deux) de premiers. Le discriminant de B_0 est égal à $6=2\times 3$.

Nous allons maintenant montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ est un corps neutralisant l'algèbre B_0. Nous donnons alors un isomorphisme explicite entre $B_0\otimes\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et $M(2,\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. On utilise le critère de la Proposition 11, on vérifie que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}(\sqrt{3}) & \longrightarrow & M(2,\mathbb{Q}(\sqrt{3})) \\ x+y\sqrt{3} & \longrightarrow & x+yj, \end{array}$$

est un $\mathbb{Q}$-plongement de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ dans B_0. D'ailleurs, on en déduit par la Proposition 11 que les premiers $p=2$ et $p=3$ ne sont pas totalement

décomposés dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. On définit un isomorphisme explicite entre $B_0 \otimes \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ par :

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } j \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2.3 Groupes modulaires co-compacts

A partir de maintenant une algèbre de quaternions est définie sur $\mathbb{Q}$. Nous rappelons la notion d'ordre dans une algèbre de quaternions, la référence complète est [14]. On rappelle aussi la construction de groupes modulaires co-compacts, provenant d'algèbres de quaternions.

Définition 13. *Soit B une algèbre de quaternions sur le corps des rationnels. Un idéal I de B, est un $\mathbb{Z}$-réseau complet de B, c'est-à-dire $I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = B$.*

Définition 14. *Un ordre O de B est un idéal de B, avec une structure d'anneau, contenant* 1.

Proposition 13. *Il existe des ordres dans B. Tout ordre est contenu dans un ordre maximal.*

Exemple. Soit B une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$, muni d'une base $\{1, i, j, ij\}$. Si $i^2 \in \mathbb{Z}$ et $j^2 \in \mathbb{Z}$, alors $O = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}ij$, est un ordre canonique dans B (mais pas toujours maximal).

Définition 15. *Soit B une algèbre de quaternions. Un ordre d'Eichler dans B, est l'intersection de deux ordres maximaux dans B.*

Définition 16. *Soit O un ordre dans une algèbre de quaternions B. On définit l'idéal :*

$$O^* = \{q \in B \mid \mathrm{tr}(qO) \in \mathbb{Z}\}, \text{ le dual de } O \text{ par rapport à la trace.}$$

Définition 17. *Soit O un ordre dans une algèbre de quaternions. On définit le discriminant d de O par $d^2 = [O^* : O]$.*

Proposition 14. *Soit O un ordre dans une algèbre de quaternions. On suppose que : $O = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$. Le discriminant d de O satisfait : $d^2 = \mid \det(\mathrm{tr}(e_i e_j)) \mid$.*

Démonstration. Soit (e_j^*) la base duale par rapport à la trace de la base (e_j). Soit $(a_{i,j})$ la matrice, définie par $e_i = \sum_{i,j} a_{i,j} e_j^*$. On a $d^2(O) = [O^* : O] = det(a_{i,j})$. Or, $a_{i,j} = \mathrm{tr}(\mathrm{e_i e_j})$, d'où la proposition. □

PROPOSITION 15. *Soit O un ordre, de discriminant $d(O)$ dans une algèbre de quaternions B, de discriminant $d(B)$. Pour que O soit maximal, il faut et il suffit que $d(O) = d(B)$.*

Démonstration. Voir [14]. □

PROPOSITION 16. *Soit A un ordre dans une algèbre de quaternions B sur $\mathbb{Q}$. Soit L un corps quadratique d'anneau d'entiers O_L, neutralisant B. Alors, il existe un morphisme d'anneau injectif, $\rho : B \longrightarrow M(2, O_L)$ et il existe un idéal $\mathcal{A} \subset O_L$ telle que $\rho(A) \subset \begin{pmatrix} O_L & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^{-1} & O_L \end{pmatrix}$. L'image de*

$$A^1 = \{q \in A \mid n(q) = 1\},$$

est contenu dans le groupe $\mathrm{SL}(O_L \oplus \mathcal{A})$ (les éléments de norme 1 dans l'ordre $\begin{pmatrix} O_L & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^{-1} & O_L \end{pmatrix}$).

Supposons que B est non ramifié à la place ∞, c'est-à-dire $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M(2, \mathbb{R})$. Alors, il existe des corps quadratiques réels L neutralisant B. Si nous choisissons l'un des deux plongements de L dans $\mathbb{R}$, on obtient une application :

$$A^1 \xrightarrow{\rho} \mathrm{SL}(O_L \oplus \mathcal{A}) \subset \mathrm{SL}(2, L) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

L'image Γ de A^1 dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est un exemple de *groupe modulaire cocompact.*

2.4 Exemples de groupes

Soit $B_0 = (-1, 3)_{\mathbb{Q}}$, l'algèbre de quaternions de discriminant 6. On rappelle que $B_0 = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i + \mathbb{Q}j + \mathbb{Q}k$ *avec* $i^2 = -1$, $j^2 = 3$, $ij + ji = 0$. La norme n est définie sur B par $n(x + i\ y + j\ z + ij\ t) = x^2 + y^2 - 3\ z^2 - 3\ t^2$. Soit $A_0 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}ij$ et $A_6 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}\frac{1+i+j+ij}{2}$. On peut aussi écrire A_6 comme ensemble de quaternions :

$$A_6 = \left\{ \frac{x + yi + zj + tij}{2} \mid x, y, z, t \in \mathbb{Z},\ x \equiv y \equiv z \equiv t \mod (2) \right\}.$$

On a alors $[A_6 : A_0] = 2$. L'ordre A_6 est maximal dans B, en effet de discriminant 6. On note par A_0^1 respectivement A_6^1 les unités de norme 1 de A_0, respectivement de A_6. On note aussi par A_6^2, A_6^3 les éléments de A_6 de normes respectives 2 et 3, par A_0^2 les éléments de A_0 de norme 2 et par A_0^3 les éléments de A_0 de norme 3. Les unions $A_0^1 \cup \frac{1}{\sqrt{2}}A_0^2$ et $A_0^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}}A_0^3$ sont des groupes, extensions de degré 2 du groupe A_0^1. En effet, la seule chose à vérifier est que le produit d'un élément du sous-ensemble $\frac{1}{\sqrt{3}}A_0^3$ avec un autre du même sous-ensemble est dans la réunion (et mêmse chose pour l'autre extension). Or, ce fait est clair par des conditions de congruence. De mêmes les unions $A_6^1 \cup \frac{1}{\sqrt{2}}A_6^2$ et $A_6^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}}A_6^3$ sont des groupes extensions de degré 2 du groupe A_6^1. On a le diagrame suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\bigcup_{d|6} \frac{1}{\sqrt{d}}A_0^d & \overset{2}{\supset} & A_0^1 \cup \frac{1}{\sqrt{2}}A_0^2 & & \\
2\cup & & 2\cup & & \\
(A_0^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}}A_0^3) & \overset{2}{\supset} & A_0^1 & \subset & A_0 \\
3\cap & & 3\cap & & 2\cap \\
(A_6^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}}A_6^3) & \overset{2}{\supset} & A_6^1 & \subset & A_6 \\
2\cap & & 2\cap & & \\
\bigcup_{d|6} \frac{1}{\sqrt{d}}A_6^d & \overset{2}{\supset} & A_6^1 \cup \frac{1}{\sqrt{2}}A_6^2 & &
\end{array}$$

Soit $\rho_3 : B \longrightarrow M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{3})) \subset M(2, \mathbb{R})$ définie de la manière suivante :

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

et $\rho_2 : B \longrightarrow M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset M(2, \mathbb{R})$ définie par :

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors des représentations des groupes A_0^1 et A_6^1, ainsi que leurs extensions (de degré 2) respectives $(A_0^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}}A_0^3)$ et $(A_6^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}}A_6^3)$ par des matrices à coefficients dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. On note par $\hat{\Gamma}_0$ et $\hat{\Gamma}_6$ les images respectives par ρ_3 des groupes respectives A_0^1 et A_6^1. On a vu aussi dans le pargraphe (1) du chapitre I, comment identifier $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ avec $\mathrm{SU}(1, 1)$. On note par ρ_1 le plongenment de B dans $M(2, \mathbb{Q}(i))$, et on va noter encore

une fois par $\hat{\Gamma}_0$ et $\hat{\Gamma}_6$, les images par ρ_1 des groupes A_0^1 et A_6^1. De même, on note (par abus) $\hat{\Gamma}_0^e, \hat{\Gamma}_6^e, \hat{\Gamma}_0^+, \hat{\Gamma}_6^+, \hat{\Gamma}_0^{+\,e}$ et $\hat{\Gamma}_6^{+\,e}$ les images respectives par ρ_1 des groupes $A_0^1 \cup \frac{1}{\sqrt{2}} A_0^2$, $A_6^1 \cup \frac{1}{\sqrt{2}} A_6^2$, $A_0^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}} A_0^3$, $A_6^1 \cup \frac{1}{\sqrt{3}} A_6^3$, $\bigcup_{d|6} \frac{1}{\sqrt{d}} A_0^d$ et $\bigcup_{d|6} \frac{1}{\sqrt{d}} A_6^d$.

Finalement, on note par $\Gamma_0, \Gamma_6, \Gamma_0^e, \Gamma_6^e, \Gamma_0^+, \Gamma_6^+, \Gamma_0^{+\,e}$ et $\Gamma_6^{+\,e}$ les quotients par $\{\pm \mathrm{Id}\}$ des groupes respectives $\hat{\Gamma}_0, \hat{\Gamma}_6, \hat{\Gamma}_0^e, \hat{\Gamma}_6^e, , \hat{\Gamma}_0^+, \hat{\Gamma}_6^+, \hat{\Gamma}_0^{+\,e}$ et $\hat{\Gamma}_6^{+\,e}$ indépendament du plongement choisi ρ_1, ρ_2 ou ρ_3.

Le groupe A_6^1 est le produit semi-direct du groupe A_0^1 par le groupe cyclique d'ordre 3 (sous-groupe de B_0^* : éléments inversibles de B) engendré par $u = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} i + \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} ij$.

On pose $O = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, l'anneau d'entiers du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, qu'on considère comme un sous-corps de $\mathbb{R}$. On note par m, la norme définie sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et par x' le conjugué par Galois de x dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Les groupes images par ρ_3 de A_0^1 et A_6^1 sont des sous-groupes discrets de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

$$\hat{\Gamma}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{pmatrix} \mid a\ , b \in O,\ m(a) + m(b) = 1 \right\}.$$

$$\hat{\Gamma}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b' & a' \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} a\ , b \in O,\ ou\ a, b \in \frac{1+\sqrt{3}}{2} + O \\ \text{et } m(a) + m(b) = 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Le groupe $\hat{\Gamma}_6$ est le produit semi-direct de $\hat{\Gamma}_0$ par le groupe d'ordre 3 engendré par la matrice ($U = \rho_3(u)$) suivante :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Les groupes $\hat{\Gamma}_0$ respectivement $\hat{\Gamma}_6$ possèdent des extensions $\hat{\Gamma}_0^+$ respectivement $\hat{\Gamma}_6^+$ de degré 2. Soit :

$$\hat{\Gamma}_0^+ = \Gamma_0 \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b' & -a' \end{pmatrix} \mid a\ , b \in O,\ m(a) + m(b) = -1 \right\}.$$

Le groupe $\hat{\Gamma}_6^+$ est définie de la même manière. On a alors :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Gamma}_0^e & \overset{2}{\hookrightarrow} & \hat{\Gamma}_0^{+\,e} \\ 2\uparrow & & 2\uparrow \\ \hat{\Gamma}_0 & \overset{2}{\hookrightarrow} & \hat{\Gamma}_0^+ \\ 3\downharpoonleft & & 3\downharpoonleft \\ \hat{\Gamma}_6 & \overset{2}{\hookrightarrow} & \hat{\Gamma}_6^+ \\ 2\downarrow & & 2\downarrow \\ \hat{\Gamma}_6^e & \overset{2}{\hookrightarrow} & \hat{\Gamma}_6^{+\,e} \end{array} \quad \twoheadrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \Gamma_0^e & \overset{2}{\hookrightarrow} & \Gamma_0^{+\,e} \\ 2\uparrow & & 2\uparrow \\ \Gamma_0 & \overset{2}{\hookrightarrow} & \Gamma_0^+ \\ 3\downharpoonleft & & 3\downharpoonleft \\ \Gamma_6 & \overset{2}{\hookrightarrow} & \Gamma_6^+ \\ 2\downarrow & & 2\downarrow \\ \Gamma_6^e & \overset{2}{\hookrightarrow} & \Gamma_6^{+\,e} \end{array} \quad ,$$

où les groupes à gauche sont dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{SU}(1,1)$) et ceux à droite dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{PSU}(1,1)$).

On va utiliser plus tard le plongement ρ_2 pour construire une forme modulaire de poids 4, sur le groupe Γ_0^+. L'image par ρ_2 du groupe A_0^1 s'écrit :

$$\rho_2(A_0^1) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a-(b-b')/2\sqrt{2} & b+(a-a')/2\sqrt{2} \\ -b'+(a-a')/2\sqrt{2} & a'+(b-b')/2\sqrt{2} \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} a,b\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ \text{et } \det=1 \end{array} \right\}$$

2.5 Exemples de domaines fondamentaux compacts

Dans cette section, on identifie tous les groupes avec leurs images par le plongement ρ_1. On étudie alors des sous-groupes discrets de $\mathrm{PSU}(1,1)$. Pour chacun des groupes définis précédemment on se propose d'étudier l'anneau des formes modulaires correspondant. On commence par déterminer un domaine fondamental, les points elliptiques, le genre et le volume du quotient $\mathcal{D}$ par chacun de ces groupes. On en déduit alors les tables des dimensions des différents espaces M_k de formes modulaires de poids k, sur ces groupes.

Le groupe Γ_6. Cet exemple a était étudié par Kohel et Verril dans [10]. Nous récupérons les données suivantes :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{H}/\Gamma_6)/2\pi = 1/3,\ g(\mathcal{H}/\Gamma_6) = 0.$$

Si on note par e_2, e_3, e_4, e_5 et e_6, le nombre des points dans le quotient $\mathcal{H}/\Gamma_6$, ayant un stablisateur non trivial d'ordre respectivement 4, 6, 8, 10, et 12. Kohel et Verril montrent que $e_2 = e_3 = 2$ et $e_4 = e_5 = e_6 = 0$. Ce groupe,

provenant de l'algèbre $B_0 = (-1, 3)$, de discriminant minimal 6 a été aussi étudié dans [1].

On applique la formule (D) des dimensions au groupe Γ_6, on trouve :

$$\dim(M_k(\Gamma_6)) = 1 - k + 6\,[k/4] \;\text{ si }\; k > 2\ ,\ \dim M_2(\Gamma_6) = 0,\ M_0(\Gamma_6) = \mathbb{C}.$$

Ceci permet d'en déduire la table des dimensions suivante :

k	0	2	4	6	8	10	12	14
$\dim M_k(\Gamma_6)$	1	0	1	1	1	1	3	1

Le groupe Γ_0. Aprés identification de Γ_0 avec son image dans le groupe $\mathrm{PSU}(1,1)$, on montre que :

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & \sqrt{3}\,B \\ \sqrt{3}\,\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \text{ avec } A, B \in \mathbb{Z}[i] \text{ et } |A|^2 - 3|B|^2 = 1 \right\}.$$

En appliquant la méthode générale de construction de domaines fondamentaux (voir section (1) du chapitre I) ; aprés un choix d'une liste d'éléments de Γ_0, on arrive alors à délimiter un compact inclus dans $\mathcal{D}$. On calcule son volume, en utilisant la formule (V) des volumes. Dans notre cas le compact qu'on obtient (région $S \cup G \cup D$ de la figure page 34), est un polygône hyperbolique avec 8 sommets. Les angles aux sommets sont tous droits. D'où :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{D}/\Gamma_0) = (8-2)\pi - 8\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

D'autre part, on sait que le quotient $\mathcal{D}/\Gamma_0$ est un revêtement de degré 3 au dessus de $\mathcal{D}/\Gamma_6$, d'où :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{H}/\Gamma_0) = 3\ \mathrm{Vol}(\mathcal{H}/\Gamma_6) = 2\pi.$$

Ceci montre que le compact obtenu est un domaine fondamental, représentant le quotient $\mathcal{D}/\Gamma_0$. On peut alors déterminer les points elliptiques fixes d'ordre respectivement $2, 3, 4$ et 6. Rappelons qu'un point elliptique d'ordre n, est par définition un point fixe d'un élément γ_n de Γ_0 d'ordre n, de trace $0, 1, \pm\sqrt{2}$ et $\pm\sqrt{3}$, si respectivement $n = 2, 3, 4$ et 6. Or, la trace d'un élément de Γ_0 s'écrit sous la forme $A + \overline{A}$ avec $A \in \mathbb{Z}[i]$. C'est un entier pair, d'où $e_3 = e_4 = e_6 = 0$. Il nous reste la détermination des points elliptiques d'ordre

2. Comme on vient de le voir de tels points sont points fixes de matrices de Γ_0 de trace nulle, donc de la forme :

$$\gamma_{k,B} = \begin{pmatrix} i\ k\ \sqrt{3} & B \\ \overline{B} & -i\ k\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathbb{Z}[i] \text{ et } 3\ k^2 - |B|^2 = 1.$$

Or, les points fixes de cette dernière sont :

$$\omega_{k,1} = i\ (\sqrt{3}\ k - 1)/\overline{B}\ ,\ \omega_{k,2} = i\ (\sqrt{3}\ k + 1)/\overline{B}.$$

de modules respectives :

$$\sqrt{(}(\sqrt{3}\ k - 1)/(\sqrt{3}\ k + 1))\ ,\ \sqrt{(}(\sqrt{3}\ k + 1)/(\sqrt{3}\ k - 1)).$$

Or, un point elliptique est à l'intérieur du disque unité, d'où $\omega_{k,1}$ est le point elliptique correspondant à $\gamma_{k,B}$. D'autre part, il est facile de voir que les points elliptiques sont situés sur les frontières du domaine fondamental. En effet, un point elliptique ω correspondant à γ vérifie $\gamma\ \omega = \omega$, donc $d_h(\omega, 0) = d_h(\gamma\ \omega, 0)$. Or, l'action du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ préserve la métrique hyperbolique donc $d_h(\gamma\ \omega, 0) = d_h(\omega, \gamma^{-1}\ 0)$, ce qui implique que $\omega \in F(\gamma^{-1})$. Un point elliptique d'odre 2, est forcément soit un sommet du domaine fondamental, soit le point au milieu d'une arrête. Aprés avoir examiner ce nombre fini de possibilités. On trouve six points elliptiques d'ordre 2, d'où $e_2 = 6$. On en déduit le genre de $\mathcal{D}/\Gamma_0$ par la formule (G) de Gauss-Bonnet. Soit $1 = 2\ g - 2 + 3$, ou encore $g = 0$. On en déduit la table de dimensions suivante (on utilise la formule des dimensions (D)) :

k	0	2	4	6	8	10	12	14
$\dim M_k$	1	0	3	1	5	3	7	5

Remarque. Le groupe Γ_6, est produit semi-direct du groupe Γ_0 par une matrice d'ordre 3. Ceci explique le fait que le groupe Γ_0 est sans points elliptiques d'ordre 3. Le nombre de points elliptiques d'ordre 2, pour le groupe Γ_0 est égal à 3 fois le nombre de points elliptiques d'odre 2, pour le groupe Γ_6 donc égal à 6.

Considérons $S_{ev}(\Gamma_0) = \sum_{k \geq 0} \dim(M_{2\,k}(\Gamma_0)\ T^{2\,k}$, la série de Poincaré associée à la suite des dimensions des espaces $M_{2\,k}(\Gamma_0)$. Un calcul simple montre que $S_{ev}(\Gamma_0) = (1+T^6)(1+T^4)/(1-T^4)^2$. On en déduit la structure de $M_{ev}(\Gamma_0)$: il existe deux générateurs A et B de poids 4, qui sont algébriquement indépendants, un générateur C de poids 4 lié à A et B par une relation de

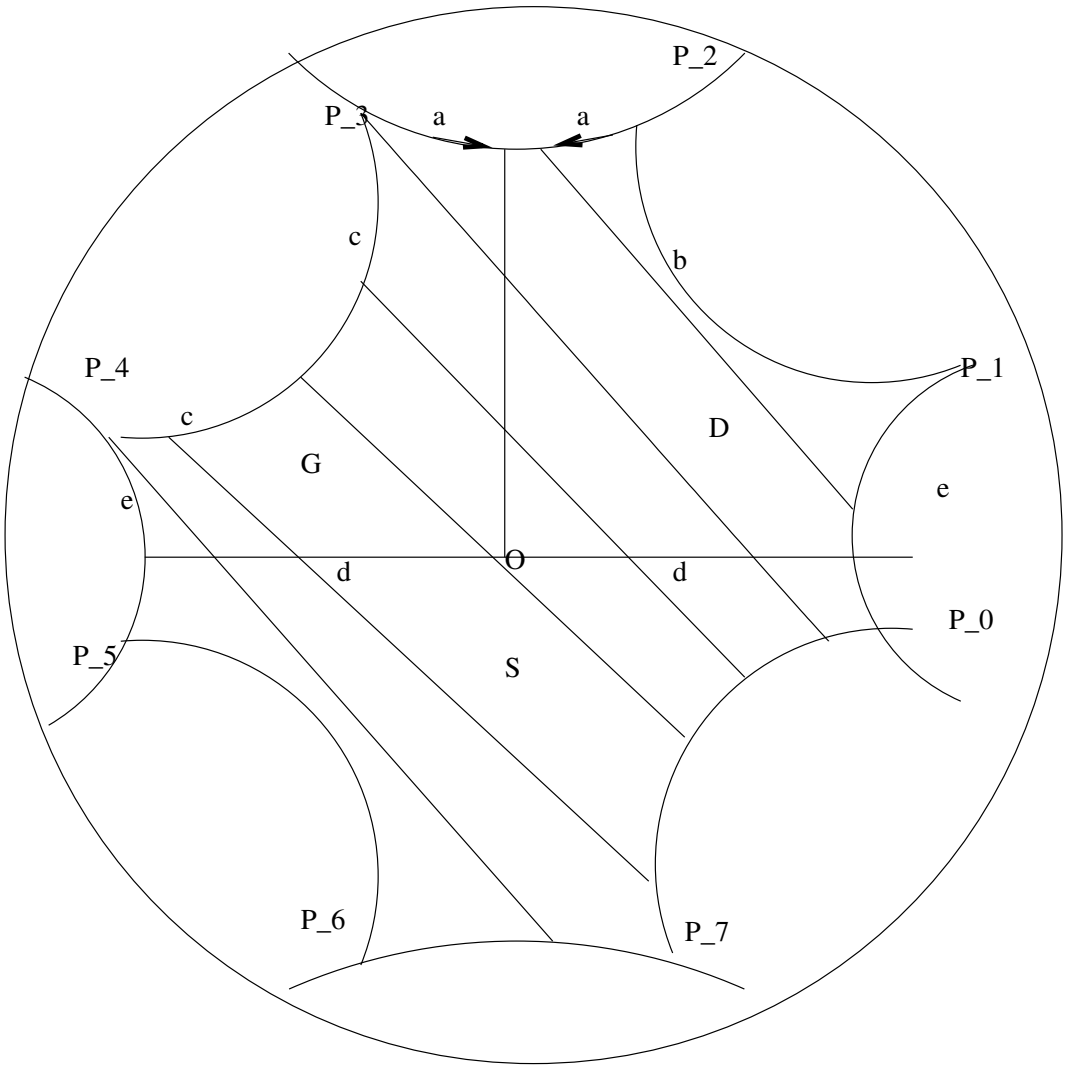
la forme $C^2 = P_2(A,B)$, où P_2 est un polynôme homogène de degré 2, et un générateur D de poids 6 lié aux autres générateurs par une relation de la forme $D^2 = P_3(A,B) + CQ_2(A,B)$, où P_3 et Q_2 sont respectivement des polynômes homogènes de degré 3 et 2. Il n'y a pas d'autres relations, si non le degré de transcendance chute de 2 vers 1, ce qui contredit l'indépendance algébrique de A et B. Finalement on obtient :

$$M_{ev}(\Gamma_0) = \mathbb{C}[A,B,C,D]/(C^2 = P_2(A,B), D^2 = P_3(A,B) + CQ_2(A,B)).$$

Le groupe Γ_0^+. On sait qu'il s'agit d'une extension de degré 2 du groupe Γ_0. Le volume du domaine fondamental (région $G \cup D$, de la figure page 34), est alors la moitié de celui associé à Γ_0 donc $\mathrm{Vol}(\mathcal{D}/{\Gamma_0}^+) = \pi$. On sait que $e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = 0$. En effet les traces des éléments de Γ_0^+ sont des entiers pairs. Aprés avoir délimité le domaine fondamental (voir figure), on sait comment identifier les frontières et il est facile de voir géométriquement et sans aucun calcul que $e_2 = 5$. Dans le tableau suivant, on trouve une liste de quatre points elliptiques p_γ d'ordre 2 dans $\mathcal{D}/{\Gamma_0}^+$ (deuxième ligne) et leurs stabilsateurs respectifs γ (première ligne) :

γ	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2i & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1+i \\ 1-i & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2i & \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i & 2i \end{pmatrix}$
p_γ	0	$\frac{i}{\sqrt{3}}$	$\frac{(\sqrt{3}-1)(i+1)}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Finalement $\frac{(\sqrt{3}-1)(-1+i)}{2}$ est point fixe d'ordre 2 de $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1+i \\ -1-i & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. D'aprés la formule de Gauss-bonnet (G) on en déduit que $g = 0$. Et par la formule des dimensions (D), on obtient $\dim(M_k(\Gamma)) = 5\,[k/4] - k + 1$, si $k > 2$ et est pair.



Les angles aux sommets sont droits, il y a trois domaines fondamentaux .

Le plus grand est union des regions S, G et D. Le deuxieme est

union de G et D du domaine precedent (moitie du haut du domaine precedent).

Le dernier domaine est la region D (moitie a droite de la moitie au dessus).

D'où la table des dimensions :

k	0	2	4	6	8	10	12	14
$\dim M_k$	1	0	2	0	3	1	4	2

Soit $S_{ev}({\Gamma_0}^+) = \sum_{k\geq 0} \dim(M_{2\,k}({\Gamma_0}^+))T^{2\,k}$, la série de Poincaré associée. On a alors :

$$S_{ev}({\Gamma_0}^+) = (1+T^{10})/(1-T^4)^2.$$

On en déduit la structure de $M_{ev}({\Gamma_0}^+)$. Il existe deux générateurs A_4, B_4 de poids 4, algébriquement indépendants et un générateur C_{10} de poids 10, avec une relation quadratique $C_{10}^2 = P_5(A_4, B_4)$, où P_5 est un polynôme homogène de degré 5. D'autre part, P_5 ne possède que des facteurs simples. En effet, supposons que P_5 possède un facteur carré. Quitte à effectuer un changement de base, on peut supposer que A_4^2 est facteur carré de P_5. On en déduirait que la forme $\frac{C_{10}}{A_4}$ de poids 6 a priori méromorphe, est en fait holomorphe (puisque son carré serait polynôme en A_4 et B_4), ce qui contredit $\dim(M_6) = 0$. Finalement, il n'y a pas d'autres relations entre A_4 et B_4 à cause de l'indépendance algébrique entre A_4 et B_4. On a alors :

$$M_{ev}(\Gamma_0^+) = \mathbb{C}[A_4, B_4, C_{10}]/(C_{10}^2 = P_5(A_4, B_4)).$$

[Explication : en écrivant la série de Poincaré sous la forme,

$$\frac{1+T^{10}}{(1-T^4)^2} = \frac{1}{(1-T^4)^2} + \frac{T^{10}}{(1-T^4)^2},$$

on obtient les deux séries de Poincaré correspondant aux sous-anneaux M_{4*} et M_{4*+10} de l'anneau des formes modulaires M_* (avec $*$ un entier pair) sur le groupe Γ_0^+. On a aussi la décomposition $M_* = M_{4*} \oplus C_{10}\, M_{4*}$ avec M_{4*} l'algèbre libre $\mathbb{C}[A_4, B_4]$, en effet A_4, B_4 sont algébriquement indépendantes ; car, s'il existe un polynôme homogène nul en A_4 et B_4, on obtient un polynôme nul en la variable $t = \frac{A_4}{B_4}$, ce polynôme est a coefficents complexes, on voit alors que t prend un nombre fini de valeurs constantes (zéros de polynôme dans $\mathbb{C}$). Ceci implique la dépendance linéaire de A_4 et B_4, ce qui n'est pas possible puisqu'ils forment une base de M_4. (on a aussi $M_{4*+10} = C_{10}\, M_{4*}$). Pour montrer que $M_* = \mathbb{C}[A_4, B_4, C_{10}]/(C_{10}^2 = P_5(A_4, B_4))$, il suffit alors de montrer que $\mathbb{C}[A_4, B_4, C_{10}]/(C_{10}^2 = P_5(A_4, B_4))$ s'injecte dans M_* ; on suppose qu'il existe une autre relation entre A_4, B_4 et C_{10}, en utilisant la relation $C_{10}^2 = P_5(A_4, B_4)$, on réduit toute nouvelle relation a la forme : $C_{10}P(A_4, B_4) + Q(A_4, B_4) = 0$, cette relation n'est pas possible, car en comparant les poids on obtient la condition $4|10$ ce qui est évidement faux.]

La structure est plus simple que pour $M_{ev}(\Gamma_0)$. Comme $\dim M_{10}(\Gamma_0^+) = 1$, on peut choisir $C_{10} = [A_4, B_4]_1$. On va voir dans le chapitre III, comment plonger Γ_0, Γ_0^+ dans deux groupes modulaires de Hilbert différents associés à $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. On peut donc construire A_4 et B_4 comme restriction des séries d'Eisenstein de poids 2, définies sur les groupes modulaires de Hilbert $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}$ et $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$. Dans la section suivante, on donne des représentations expérimentales de A_4 et B_4, comme séries de puissance dans $\mathbb{C}[[x]]$ (aprés changement de variable et normalisation). Ceci nous permettra de représenter C_{10} dans l'anneau $\mathbb{C}[[x]]$, on trouve alors explicitement la relation $C_{10}^2 = P_5(A_4, B_4)$ (c'est-à-dire le ploynôme P_5). Finalement, on a la décomposition $M_{ev}(\Gamma_0) = M_{ev}^+(\Gamma_0) \oplus M_{ev}^-(\Gamma_0)$, avec $M_{ev}^\pm$ désignent les espaces propres pour l'opération de $\Gamma_0^+/\Gamma_0 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a donc $M_{ev}^+(\Gamma_0) = M_{ev}(\Gamma_0^+)$.

Le groupe ${\Gamma_0^+}^e$. Il s'agit d'une extension de degré 2 du groupe Γ_0^+. On peut choisir comme domaine fondamental pour ${\Gamma_0^+}^e$ la moitié de droite D de la région $G \cup D$ (voir figure page 34) du domaine fondamental construit pour Γ_0^+. Le volume hyberbolique de $\mathcal{D}/{\Gamma_0^+}^e$ est égal à $\mathrm{vol}(\mathcal{D}/{\Gamma_0^+}^e) = \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}(\mathcal{D}/\Gamma_0^+) = \frac{\pi}{2}$. Il est facile de voir géométriquement que $e_2 = 3$ et $e_4 = 1$ (deux points elliptiques d'ordre 2 et 1 point elliptique d'ordre 4). L'application de la formule (G) de Gauss-Bonnet donne $g = 0$. Et l'application de la formule (D) des dimensions donne la table suivante :

k	0	2	4	6	8	10	12	14
$\dim M_k$	1	0	1	0	2	0	2	1

2.6 Exemples de formes modulaires sur des groupes co-compacts

Exemples de développement en séries de Taylor.
Revenons à notre exemple, le groupe ${\Gamma_0}^+$. Nous posons :

$$\begin{array}{ccc} M_*({\Gamma_0}^+) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}[[X]] \\ f(w) & \rightarrow & p^{-k(f)}\, f(w/\alpha), \end{array}$$

où p et α sont des constantes numériques obtenues par normalisation : les termes constants de A_4 et B_4 sont égales à $\frac{1}{2}$. En fait on sait que $p = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\,\pi^{3/2}}$, $\alpha = \frac{2\,\pi\,p^2}{\sqrt{3}}$, mais nous ne parlons que des résultats numériques. Pour nos séries

d'Eisenstein restrintes A_4 et B_4, nous trouvons numériquement :

$$\begin{array}{c} A_4(X) = \frac{1}{2} + X^2 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{2}{5}\ X^6 + \cdots \\ B_4(X) = \frac{1}{2} - X^2 - \frac{1}{2}X^4 - \frac{2}{5}\ X^6 + \cdots . \end{array}$$

On conjecture alors que $B_4(X) = A_4(i\ X)$. On vérifie aussi expérimentalement que : $C_{10}^2(X) = [A_4\ B_4\ (A_4 - B_4)\ (A_4^2 - A_4\ B_4 + B_4^2)](X) + O(X^{50})$. D'autre part en utilisant le Lemme (conséquence de la formule des zéros pour les formes modulaires, voir chapitre I) On montre que :

$$C_{10}^2 = A_4\ B_4\ (A_4 - B_4)\ (A_4^2 - A_4\ B_4 + B_4^2).$$

Finalement, on en déduit la structure de $M_*({\Gamma_0}^+)$. Soit :

$$M_*({\Gamma_0}^+) = \mathbb{C}[A_4, B_4, C_{10}]/(C_{10}^2 = A_4\ B_4\ (A_4 - B_4)\ (A_4^2 - A_4\ B_4 + B_4^2)).$$

Une meilleure forme s'obtient en choisissant une base de fonctions propres pour l'involution $\tau : M_*({\Gamma_0}^+) \longrightarrow M_*({\Gamma_0}^+)$ induit par un élément θ (définie par $\Gamma_0^+ = \Gamma_0 \cup \theta\Gamma_0$ et $\theta^2 = -\mathrm{Id}$). Notons par P et M ("plus" et "moins") les éléments de $(\Gamma_0^+)^{\tau=\pm}$ donnés par :

$$\begin{array}{rclcl} P & = & \frac{A_4+B_4}{2} & = & 1 - x^4 + \frac{167}{35}x^8 + \frac{1783}{1925}x^{12} + ... \\ M & = & \frac{A_4-B_4}{2} & = & x^2 + \frac{2}{5}x^6 - \frac{123}{179}x^{10} + \frac{916}{25025}x^{14} + ... \end{array}.$$

Alors, l'élément $C = [M, P]_1 = x + \frac{11}{5}x^5 - \frac{638}{35}x^9 - \frac{9498}{2275}x^{13} + ...$, satisfait à la relation $C^2 = M\ (P^2 - 4\ M^2)(P^2 + 12M^2)$. On a aussi la forme quasi-modulaire méromorphe ϕ de poids 2 donnée par :

$$\phi = \frac{M'}{2\ M} = \frac{1}{x} + \frac{4}{5}x^3 - \frac{548}{175}x^7 + \frac{254564}{125125}x^{11} + ...$$

On sait que la forme modulaire M définie sur le disque de Poincaré, s'annulle en zéro avec multilpicité 2 et nulle part ailleurs. En effet, la formule des zéros (Z) appliquée à M sécrit :

$$1 = \frac{4}{4} = \sum_{P \in \mathcal{D}/{\Gamma_0}^+} v_p(M)$$

et $v_0(M) = 1$.

Exemples d'équations différentielles.

Méthode 1. Soit D l'opérateur de dérivation par rapport à x. En utilisant le développement en Taylor numérique autour de 0, des formes modulaires M, P et C (voir section précédente), on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} DM = 2\phi M \\ DP = 2\phi P - 2\frac{C}{M} \\ DC = 5\phi C - 4P^3 - 16M^2P \\ D\phi = \frac{1}{2}\phi^2 - 2M - \frac{3}{2}\frac{P^2}{M} \end{cases}$$

En appliquant D on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} D^2M = 5\phi^2M - 4M^2 - 3P^2 \\ D^2P = 5\phi^2P + 28MP + 5\frac{P^3}{M} - 10\phi\frac{C}{M} \\ D^2C = \frac{55}{2}\phi^2C + 22MC + \frac{33}{2}\,\frac{P^2C}{M} - 44\phi P^3 - 176\phi PM^2 \\ D^2\phi = \frac{\phi^3}{2} - 6\phi M - \frac{9}{2}\,\phi\frac{P^2}{M} + 6\,\frac{PC}{M^2} \end{cases}$$

En appliquant de nouveau l'opérateur D, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} D^3M = 15\phi^3M - \phi(36M^2 + 27P^2) + 12\frac{PC}{M} \\ D^3P = 15\phi^3P - 45\frac{\phi^2C}{M} + \phi(252MP + 45\frac{P^3}{M}) - 36C - 15\frac{P^2C}{M^2} \\ D^3C = 165\phi^3C - \phi^2(396P^3 + 1584M^2P) + \phi(396MC + +297\frac{P^2C}{M}) \\ D^3\phi = \frac{3}{4}\phi^4 - \phi^2(18M + \frac{27}{2}\,\frac{P^2}{M}) + 36\phi\frac{PC}{M^2} - 78P^2 + 12M^2 - 12\frac{C^2}{M^3} - \frac{69}{4}\,\frac{P^4}{M^2} \end{cases}$$

Par élimination, M vérifie l'equation différentielle non linéaire suivante :

$$-175(DM)^6 + 524288M^9 - 184320M^6(DM)^2 + 147456M^7D^2M + 4800M^3(DM)^4 - 7680M^4D^2M(DM)^2 + 3072M^5(D^2M)^2 + 420MD^2M(DM)^4 - 12M^2(DM)^2(D^2M)^2 - 360M^2(DM)^3D^3M - 256M^3D^2M + 432M^3DMD^2MD^3M - 48M^4(D^3M)^2 = 0$$

De même P vérifie l'equation différentielle non linéaire suivante :

$$p^{23}q^2 - \frac{4}{5}p^{24}q - 116065/36864\,p^{17}q^6 + 23213/3072\,p^{18}q^4u - 22781/3840\,p^{19}q^2u^2 + 297/2880\,p^{20}u^3 - 1/8\,p^{19}q^3v + 3/20\,p^{20}quv - 1/60\,p^{21}v^2 + 10389375/4194304\,p^{11}q^{10} - 10389375/1048576\,p^{12}q^8u + 8216625/524288\,p^{13}q^6u^2 - 799525/65536\,p^{14}q^4u^3 + 152315/32768\,p^{15}q^2u^4 - 14093/20480\,p^{16}u^5 + 158125/786432\,p^{13}q^7v - 221375/393216\,p^{14}q^5uv + 6325/12288\,p^{15}q^3u^2v - 1265/8192\,p^{16}qu^3v +$$

$$
\begin{aligned}
&+31625/1179648\, p^{15}q^4v^2 - 6325/147456\, p^{16}q^2uv^2 + 1265/73728\, p^{17}u^2v^2+\\
&2109375/4294967296\, p^5q^{14} - 2953125/1073741824\, p^6q^{12}u + 7846875/536870912\, p^7q^{10}u^2-\\
&2885625/67108864\, p^8q^8u^3 + 18511875/268435456p^9q^6u^4 - 4276575/67108864\, p^{10}q^4u^5\\
&+34035/1048576\, p^{11}q^2u^6 - 231/32768\, p^{12}u^7 - 2390625/268435456\, p^7q^{11}v+\\
&5259375/134217728\, p^8q^9uv - 5154375/67108864\, p^9q^7u^2v + 2854375/33554432\, p^{10}q^5u^3v\\
&-432425/8388608\, p^{11}q^3u^4v + 3405/262144p^{12}qu^5v+\\
&1403125/402653184\, p^9q^8v^2 - 280625/25165824\, p^{10}q^6uv^2 + 336125/33554432\, p^{11}q^4u^2v^2-\\
&21575/25165824\, p^{12}q^2u^3v^2 - 1135/786432\, p^{13}u^4v^2 + 188125/150994944\, p^{11}q^5v^3-\\
&188125/75497472\, p^{12}q^3uv^3 + 7525/6291456\, p^{13}qu^2v^3 + 37625/452984832\, p^{13}q^2v^4-\\
&7525/113246208\, p^{14}uv^4-\\
&50625/4294967296\, p^5q^6u^6 + 10125/268435456\, p^6q^4u^7 - 675/16777216\, p^7q^2u^8+\\
&15/1048576\, p^8u^9 + 84375/2147483648p^5q^7u^4v - 140625/1073741824\, p^6q^5u^5v+\\
&+4875/33554432\, p^7q^3u^6v - 225/4194304\, p^8qu^7v - 46875/1073741824\, p^5q^8u^2v^2\\
&+40625/268435456\, p^6q^6u^3v^2 - 181875/1073741824\, p^7q^4u^4v^2 + 1875/33554432\, p^8q^2u^5v^2+\\
&25/4194304\, p^9u^6v^2 + 78125/4831838208\, p^5q^9v^3 - 15625/268435456\, p^6q^7uv^3+\\
&15625/268435456\, p^7q^5u^2v^3 - 625/402653184\, p^8q^3u^3v^3 - 125/8388608\, p^9qu^4v^3\\
&+15625/2415919104p^7q^6v^4 - 3125/201326592\, p^8q^4uv^4 + 6875/805306368\, p^9q^2u^2v^4+\\
&125/150994944\, p^{10}u^3v^4 + 3125/3623878656\, p^9q^3v^5 - 625/603979776\, p^{10}quv^5\\
&+625/16307453952\, p^{11}v^6 = 0
\end{aligned}
$$

Avec les notations : $q = Dp$, $u = D^2p$ et $v = D^3p$. On vérfie aussi (en utilisant le logiciel de calcul formel Macaulay2) que la forme modulaire C satisfait à une équation différentielle non linéaire (nous donnons pas cet exemple, car trop compliqué à comprendre).

Méthode 2. Nous allons maintenant donner une méthode plus efficace pour trouver une équation différentielle non linéaire satisfaite par M. On pose $t = \frac{P}{M}$, c'est une fonction modulaire sur Γ_0^+ avec au plus des pôles dans l'orbite de zéro. Soient $f = \frac{1}{80}[M, M]_2$, et $g = \frac{1}{384}[f, M]_1$, ce sont des formes modulaires sur Γ_0^+, de poids respectifs 12 et 18. Donc $\frac{f}{M^3}$ et $\frac{g^2}{M^9}$ sont fonctions modulaires avec au plus des pôles dans l'orbite de zéro. En particulier ce sont des polynômes en t.

En utilsant le système différentiel (S) (voir Méthode 1), on trouve $f = -\frac{1}{4}M(3P^2+4M^2)$. On trouve aussi, $g = -\frac{3}{8}MPC$. En en déduit (en utilisant

la relation entre M, P et C), le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f/M^3 & = & -\frac{1}{4}(3t^2+4) \\ g^2/M^9 & = & 18\,t^2(t^2-4)(t^2+12) \end{array}\right.$$

On a alors

$$\mathbf{-3g^2 = 128(f+M^3)(f+4M^3)(f-8M^3)}.$$

En remplacant f et g par leurs définitions, on obtient une équation différentielle non linéaire satisfaite par M.

Nous allons maintenant déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 3 satisfaite par $m = \sqrt{M}$. La forme m est modulaire de poids 2 sur un sous-groupe de Γ_0^+, d'indice 2. On considère la fonctiom modulaire $t = \frac{M}{P}$. Soient $\dot{m}, \ddot{m}$ et $\dddot{m}$ les dérivés par rapport à t (images par $(\frac{dt}{dx})^{-1}\frac{d}{dx}$) d'ordres respectives $1, 2$ et 3. Le systéme S implique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} m & = & \sqrt{M} \\ \dot{m} & = & \frac{P^2}{2C}m\phi \\ \ddot{m} & = & \frac{P^4 m}{8C^2}\phi^2 + (-\frac{1}{M} + \frac{P^4}{C^2} + \frac{4P^2M^2}{C^2})\frac{P^3 m}{C}\phi - \frac{P^3}{8c^2}(4PM + \frac{3P^3}{M})m \\ \dddot{m} & = & \frac{3P^5(-C^2+P^4M+4P^2M^3)m}{4MC^4}\phi^2 \\ & & +\frac{3P^4(16P^8M^2 128P^6M^4+256P^4M^6+8C^4-76P^2M^3C^2-25C^2P^4M)m}{8M^4C^5}\phi \\ & & +\frac{3P^4(8C^3PM^2-32P^5M^3C-32P^3M^5C-6P^7MC+8C^3P^3)m}{8M^4C^5}. \end{array}\right.$$

On peut alors écrire le système précédent sous la forme

$$\begin{pmatrix} m \\ \dot{m} \\ \ddot{m} \\ \dddot{m} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 \\ \phi \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{pmatrix},$$

avec B une matrice (4×3). En calculant le noyau de B, on obtient la relation :

$$m + \frac{7P^4M + 52P^2M^3 - 8C^2}{P^5}\dot{m} + 8\frac{M(4P^2M^3 - C^2 + P^4M)}{P^6}\ddot{m} - \frac{4M^2C^2}{3P^7}\dddot{m} = 0$$

En remplcant $\frac{M}{P}$ par t et en utilsant la relation : $\frac{C^2}{P^5} = t(1-4t)(1+12t)$, on obtient l'équation différentielle linéaire (par rapport à t satisfaite par m) soit,

$$\mathbf{m - t(1+12t^2+384t^4)\dot{m} - 32t^4(1-12t^2)\ddot{m} - (\frac{4}{3} - \frac{16t^2}{3} - 64t^4)t^3\dddot{m} = 0}.$$

Chapitre 3

Formes modulaires de Hilbert

3.1 Groupes et formes modulaires de Hilbert

Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n et O_K l'anneau d'entiers associé. Le corps K se plonge dans $\mathbb{R}$ de n-manières différentes :

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \\ \alpha & \longrightarrow & (\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(n)}), \end{array}$$

on convient que $\alpha^{(1)} = \alpha$. Les plongements de K dans $\mathbb{R}$ implique des plongements du *groupe modulaire de Hilbert* $\mathrm{PSL}(2, O_K)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{PSL}(2, O_K) & \longrightarrow & \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \\ \gamma & \longrightarrow & (\gamma_1, \cdots, \gamma_n), \end{array}$$

où γ_j, $(j = 0, 1, \cdots, n)$ est la matrice obtenue à partir de γ en conjugant tous ses coefficients. Le groupe produit $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agit sur $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H}$. Par restriction, on obtient une action de $\Gamma_K = \mathrm{PSL}(2, O_K)$ (le groupe modulaire de Hilbert) sur $\mathcal{H}^n$. L'action de Γ_K est définie par :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_K \times \mathcal{H}^n & \longrightarrow & \mathcal{H}^n \\ (\gamma, (z_1, \cdots, z_n)) & \longrightarrow & (\gamma_1.z_1, \cdots, \gamma_n.z_n), \end{array}$$

avec $\gamma_j.z_j = \frac{a_j z_j + b_j}{c_j z_j + d_j}$ si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a_j, b_j, c_j et d_j $(j = 0, 1, \cdots, n)$ désignent respectivement les conjugués par le groupe de Galois de a, b, c et d.

Définition 18. *Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n et Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Soit $F : \mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, satisfaisant la condition :*

$$F(\gamma^{(1)}.z_1, \cdots, \gamma^{(n)}.z_n) = (c^{(1)}z_1 + d^{(1)})^{k_1} ... (c^{(n)}z_n + d^{(n)})^{k_n} F(z_1, \cdots, z_n),$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_K$ (ou pour tout γ dans un sous-groupe Γ d'indice fini dans Γ_K). On dit que F est une forme modulaire de Hilbert sur Γ_K (ou sur Γ) de multipoids $(k_1, \cdots, k_n)$. (Pour $K = \mathbb{Q}$, il faut rajouter la condition de croissance usuelle ; pour $n \geq 2$ cette condition est automatiquement remplie en conséquence du principe de Koecher.) Dans le cas $k_1 = \cdots = k_n = k \in \mathbb{N}$, on parle d'une forme modulaire de Hilbert de poids k. Si les k_i sont différents, on parle d'une forme modulaire de poids mixte.

Définition 19. *Soit K un corps de nombres de degré n et Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Soit $\Gamma_K^{(j)}$ les différents conjugués de Γ_K par le groupe de Galois de $K/\mathbb{Q}$. Soit $F : \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On dit que F est une forme quasi-modulaire de Hilbert de multipoids $(k_1, \cdots, k_n)$ et multiprofondeur $(p_1, \cdots, p_n)$, si pour tout $(z_1, \cdots, z_n)$ dans $\mathcal{H}^n$ l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_K^{(1)} \times \cdots \times \Gamma_K^{(n)} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) & \longrightarrow & (c_1z_1 + d_1)^{-k_1} \cdots (c_nz_n + d_n)^{-k_n} F(\gamma_1.z_1, \cdots, \gamma_n.z_n), \end{array}$$

est un polynôme en $(\frac{c_1}{c_1z_1+d_1}, \cdots, \frac{c_n}{c_nz_n+d_n})$ de multidegré $(p_1, \cdots, p_n)$ à coefficients des fonctions définies sur $\mathcal{H}^n$. Si $k_1 = \cdots = k_n = k$ (respectivement $p_1 = \cdots = p_n = p$) on parle d'une forme quasi-modulaire de poids parallèles k (respectivement de profondeurs parallèles p). Si $n = 1$, il faut rajouter la condition de croissance modérée ; pour $n \geq 2$ cette condition n'est pas nécessaire en conséquence du principe de Koecher.

Exemple. Soit $\frac{\partial}{\partial z_1}$ la dérivation par rapport à la variable z_1. Soit $F(z_1, \cdots, z_n)$ une forme modulaire de Hilbert de poids mixte $(k_1, \cdots, k_n)$ et de profondeur mixte $(p_1, \cdots, p_n)$ alors $\frac{\partial F}{\partial z_1}$ est une forme quasi-modulaire de poids mixte $(k_1 + 2, \cdots, k_n)$ et de profondeur mixte $(p_1 + 1, \cdots, p_n)$.

Remarque. L'anneau de formes modulaires de Hilbert en poids parallèles sur un groupe modulaire de Hilbert associé à un corps totalement réel de degré n est de degré de transcendance égal à $n + 1$ (car n variables et un poids, on peut trouver une démonstration complète dans [20]). Celui des formes

modulaires en poids mixte est égal à $2n$ (car n variables et le multipoids est déterminé par n entiers). Finalement, le degré de transcendance des anneaux de formes quasi-modulaires de Hilbert est $3n$ (car n variables, un multipoids determiné par n entiers et un multiprofondeur déterminé par n entiers).

Nous expliquons maintenant les développements en séries de Fourier des formes modulaires de Hilbert. Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n. Soit Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Les pointes de Γ_K sont les éléments du quotient $\mathbb{P}_1(K)/\Gamma_K$. Nous représentons la pointe ∞ comme classe du point $(1:0)$, nous déterminons le stabilsateur Γ_∞ de ∞ pour l'action de Γ_K. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$, alors $d \in U_K$ (groupe des unités de K) et $c = 0$. Autrement dit : $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & \beta \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} | \epsilon \in U_K, \beta \in O_K \right\}$, ou encore le groupe de transformations, $(z_1, z_2) \longrightarrow (\epsilon^2 z_1 + \beta, \epsilon^{-2} z_2 + \beta')$ avec $\epsilon \in U_K, \beta \in O_K$, correspond à :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \epsilon^2 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \epsilon \in U_K, \beta \in O_k \right\}.$$

Soit F une forme modulaire de Hilbert sur Γ_K, alors F est invariante par les translations $z \longrightarrow z + \beta$, provenant du groupe de transformations associé à Γ_∞. Donc F possède un développement en Fourier sous la forme :

$$F(z) = \sum_{\nu \in M} a_\nu \ \exp(2\pi i(\nu_{(1)} z_1 + \cdots + \nu_{(n)} z_n)).$$

avec M le $\mathbb{Z}$-module dual de O_K par rapport à la trace, c'est-à-dire l'inverse de la différente de O_K. D'autre part ν est soit nul, soit totalement positif. En effet : supposons $a_\nu \neq 0$ avec $\nu_{(1)} < 0$. On peut construire une unité totalement positif ϵ (on peut toujours prendre des carrés d'unités). En conséquence du théorème des unités de Dirichlet, on peut supposer que $\epsilon_{(1)}$ est le plus grand conjugué. Quitte à prendre des puissances de ϵ, le signe de $\epsilon_{(1)}\nu_{(1)} + \cdots + \epsilon_{(n)}\nu_{(n)}$ est celui de $\epsilon_{(1)}\nu_{(1)}$, autrement dit strictement négatif. En prenant $z = (i, \cdots, i)$, la somme indexé par les $\mu = \nu\epsilon^m$ diverge, car l'exponential tend vers l'infini. Ceci contredit la convergence de la série de Fourier. Soit δ_K l'idéal différente de O_K, alors F s'ecrit sous la forme :

$$F(z) = a_0 + \sum_{\nu \in \delta_K^{-1}, \nu \gg 0} a_\nu \ \exp(2\pi i(\nu_{(1)} z_1 + \cdots + \nu_{(n)} z_n)).$$

Exemple. Soit K un corps de nombres totalement réel de degré m d'anneau d'entiers O_K. On définit $\theta(z) = \sum_{v\in O} \exp(\frac{1}{2}(z_1 v_{(1)}^2 + \cdots + z_m v_{(m)}^2))$ où $(v_{(1)}, \cdots, v_{(m)})$ désignent respectivement les conjugués de $v_{(1)}$ par le groupe de Galois de K sur $\mathbb{Q}$. Il est bien connu que θ^2 est une forme modulaire de poids 1 avec caractère sur un sous-groupe de congruence du groupe modulaire de Hilbert.

3.2 Séries d'Eisenstein

Définition 20. *Soit K un corps de nombres de degré n et $k > 2$ un entier pair. Pour une classe d'idéaux $\mathcal{B}$ on définit la série d'Eisenstein*

$$G_{k,\mathcal{B}}(z_1, \cdots, z_n) = N(b)^k \sum_{(\alpha,\beta)\in(b\times b)} \prod_j (\alpha^{(j)} z_j + \beta^{(j)})^{-k},$$

où la somme porte sur les couples $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ non associés de $b \times b$ et b désigne un idéal dans la classe de $\mathcal{B}$.

Il est facile de vérifier que $G_{k,\mathcal{B}}$ est une forme modulaire sur Γ_K de poids k. La même définition est valable, si k est impair, mais $G_{k,\mathcal{B}}$ change de signe, s'il on remplace b par $(\lambda)\, b \in \mathcal{B}$ avec $N(\lambda) < 0$. S'il existe une unité de norme -1, alors $G_{k,\mathcal{B}} = 0$, pour tout k impair et tout $\mathcal{B}$.

Dans la proposition suivante (bien connue) nous détaillons le calcul des coefficients de Fourier des séries d'Eisenstein (voir [19]). Nous appliquons la formule de Poisson.

Proposition 17. *Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n et Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Soit $\mathcal{B}$ une classe d'idéaux de K. Les séries d'Eisenstein $G_{k,\mathcal{B}}(z_1, \cdots, z_n)$ possèdent le développement en Fourier suivant :*

$$G_{k,\mathcal{B}}(z_1, \cdots, z_n) = \zeta_{\mathcal{B}^{-1}}(k) + \frac{(2i\pi)^{kn}}{((k-1)!)^n} D_K^{\frac{1}{2}-k} \sum_{\mu\in\delta^{-1},\mu\gg 0} \sigma_{k-1,\mathcal{B}}(\delta(\mu))\, e^{2i\pi Tr(\mu.z)}$$

avec D_K le discriminant du corps K et δ la différente de O_K. Le terme constant est $\zeta_{\mathcal{B}^{-1}}(k) = \sum_{C\in\mathcal{B}^{-1}} N(C)^{-k}$ et la fonction "somme des diviseurs" est définie sur l'ensemble des idéaux de O_K par $\sigma_{k,\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = \sum_{C|\mathcal{E}, C\in\mathcal{B}} N(C)^k$.

La démonstartion de cette proposition repose sur la formule de Poisson, dans la forme suivante :

Lemme. *Soit $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, avec $\phi(x) = o(\| x \|)^{-c}$ et $c > n$. Soit L un réseau de $\mathbb{R}^n$ et L^* le réseau dual par rapport à la trace. On suppose que ϕ est L-périodique. On a alors :*

$$\sum_{\underline{m}\in L} \phi(\underline{x}+\underline{m}) = \sum_{\underline{r}\in L^*} \frac{1}{Vol(\mathbb{R}^n/L)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(t) e^{-2i\pi Tr(\underline{r}\,.\,\underline{t})}\, d\underline{t} \right) e^{2i\pi Tr(\underline{r}\,.\,\underline{x})}.$$

Pour la proposition (on suppose k pair), on écrit avec une notation évidente :

$$G_{k,\mathcal{B}}(z_1, \cdots, z_n) = N^k(b) \sum_{(\alpha,\beta)\in(b\times b)/U_K} N(\alpha z+\beta)^{-k},$$

où la somme porte sur les couples $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On peut scinder la somme en deux soit :

$$G_{k,\beta}(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{\beta\in(b-0)/U_K} N(\beta b^{-1})^{-k} + N(b)^k \sum_{\alpha\in(b-0)/U_K} \sum_{\beta\in b} N(\alpha z+\beta)^{-k}.$$

Or,

$$\sum_{\beta\in(b-O)/U_K} N(\beta\mathcal{B}^{-1})^{-k} = \sum_{I\in\mathcal{B}^{-1}} N(I)^{-k} = \zeta_{\mathcal{B}^{-1}}(k).$$

Pour calculer le reste de la somme, on commence par calculer

$$\sum_{\beta} N(\alpha z+\beta)^{-k}.$$

Pour cela on pose $z' = \alpha z$, on va alors calculer $\sum_{\beta\in\mathcal{B}} N(z'+\beta)^{-k}$. On applique la formule de Poisson avec :

$$\phi(x') = N(x' + iy' + \beta)$$

et $L = b$ (en idenifiant un idéal à un réseau, on a :

$$Vol(\mathbb{R}^n/b) = Vol(\mathbb{R}^n/O_K).[O_K : b] = \sqrt{D}_K N(b),$$

avec D_K désigne le discriminant du corps K). On obtient :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\beta\in b} N(x'+iy'+\beta)^{-k} &= \tfrac{1}{\sqrt{D}_K N(b)} \textstyle\sum_{\nu\in b^*} (\int_{\mathbb{R}^n} N(t+iy')^{-k} e^{-2i\pi\nu\,\cdot\,\underline{t}} d\underline{t}) e^{2i\pi\nu.x'} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{D}_K N(b)} \textstyle\sum_{\nu\in b} (\prod_j \int_{\mathbb{R}} (t+iy'_j)^{-k} e^{-2i\pi\nu_j t} dt) e^{2i\pi\nu.x'} \end{aligned}$$

D'autre part $\int_{\mathbb{R}}(t+iy'_j)^{-k}e^{-2\pi i\nu_j t}dt = 0$ si $\nu_j y'_j \leq 0$ et égal à $\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}(\nu_j)^{k-1}e^{-2\pi\nu_j y'_j}$ si $\nu_j y'_j > 0$. Ce qui implique :

$$\sum_{\beta\in b} N(z'+\beta) = \frac{1}{\sqrt{D}_K N(b)} \sum_{\nu\in b^*,\ \nu y'\gg 0} (\frac{(2i\pi)^{kn}}{((k-1)!)^n} N(\nu)^{k-1}) e^{2i\pi\nu.z'}$$

En remplaçant z' par $\alpha.z$, on obtient :

$$\sum_{\beta\in b} N(\alpha.z+\beta)^{-k} = \frac{1}{\sqrt{D}_K N(b)} \frac{(2i\pi)^{kn}}{((k-1)!)^n} \sum_{\nu\in b^*,\ \alpha\nu\gg 0} N(\nu)^{k-1} e^{2i\pi\nu\alpha z},$$

soit,

$$G_{k,\mathcal{B}}(z) - \zeta_{\mathcal{B}^{-1}}(k) = \frac{N(b)^{k-1}}{\sqrt{D}_K} \frac{(2i\pi)^{kn}}{((k-1)!)^n} \sum_{\alpha\in(b-\{0\})/U_K} \sum_{\nu\in b^*,\nu\alpha\gg 0} N(\nu)^{k-1} e^{2i\pi\alpha\nu z}.$$

D'autre part le dual de b par rapport à la trace est égal à $\delta^{-1}b^{-1}$ en utilisant le fait que $N(\delta) = D_K$ on obtient :

$$\begin{aligned} G_{k,\mathcal{B}}(z) - \zeta_{\mathcal{B}^{-1}}(k) &= N(b)^{k-1} D_K^{\frac{1}{2}-k} \tfrac{(2i\pi)^{kn}}{((k-1)!)^n} \\ &\times \sum_{\alpha\in(b-\{0\})/U_K} \sum_{\nu\in\delta^{-1}b^{-1},\alpha\nu\gg 0} N(\nu\delta)^{k-1} e^{2i\pi\nu\alpha z}. \end{aligned}$$

On obtient la proposition (17), en posant $\mu = \nu\alpha$. $\square$

On va s'intereser aux séries d'Eisenstein $G_{k,K}$, dans le cas K corps quadratique réel ($n = 2$). Dans ce cas Zagier a démontré dans [25], que le coefficient $\sigma_{k-1,K}(\mathcal{E})$ pour n'importe quel idéal $\mathcal{E}$, sécrit :

$$\sigma_{l,K}(\mathcal{E}) = \sum_{d|\mathcal{E},d\in\mathbb{N}} (\frac{D}{d})\, d^l\, \sigma_l(\frac{n(\mathcal{E})}{d^2}), \tag{3.1}$$

où σ_l est la fonction "somme des diviseurs" usuelle.

3.2.1 Exemple : corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Nous allons étudier le cas du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. L'anneau d'entiers associé est $O_k = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Le développement en Fourier des séries d'Eisenstein que nous avons étudié dans le paragraphe précédent s'écrit dans le cas k pair :

$$G_k = c_k + \sum_{a>0,|b|<a\sqrt{3}} c_k(a,b)\, \xi^b\, q^a,$$

avec $q = \exp(\pi i(z_1 + z_2))$, $\xi = \exp(\pi i \frac{(z_1 - z_2)}{\sqrt{3}})$. Cette écriture simplifiée des formes modulaires de Hilbert est obtenue en écrivant les éléments de l'inverse de la différente sous la forme $\frac{a}{2} + \frac{b}{2\sqrt{3}}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\exp(2\pi i(\nu_{(1)} z_1 + \nu_{(2)} z_2)) = \exp(\pi i a(z_1 + z_2)) \exp(\pi i b(\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{3}})) = q^a \xi^b.$$

La condition $\nu \gg 0$ se traduit par $|b| < |a|\sqrt{3}$, ce qui justifie l'écriture. Le terme constant est $c_k = \frac{12^{k-1/2}((k-1)!)^2}{(2\pi)^{2k}} \zeta(k) L_{12}(k)$ avec L_D la fonction L associée au caractère de Legendre $(\frac{D}{\cdot})$. L'application de la formule (3.1), donne :

$$c_k(a, b) = \sum_{d|(a,b)} (\frac{12}{d}) d^{k-1} \sigma_{k-1}(\frac{3a^2 - b^2}{d^2}).$$

Dans le cas k impair, le développement en Fourier des séries d'Eisenstein n'est pas le même, en effet :

$$c_k(a, b) = \sum_{d|(a,b)} \epsilon(d) (\frac{12}{d}) d^{k-1} \sigma_{k-1}^{\epsilon}(\frac{3a^2 - b^2}{d^2}),$$

où ϵ est une fonction complètement multiplicative de n définie par $\epsilon(3^\mu\, n) = (-1)^\mu\, (\frac{n}{3})$ si $3 \nmid n$ et $\sigma_\mu^\epsilon(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) d^\mu$. Le terme constant dans le cas k impair est $c_k = \frac{12^{k-1/2}(k-1)!^2 L_{-3}(k) L_{-4}(k)}{(2\pi)^{2k}}$ pour $k > 1$ et $c_1 = 0$. Donnons quelques exemples :

$$\begin{aligned}
E_1 &= 0 \\
E_2 &= \tfrac{1}{24} + [3, 4, 3]q + [4, 15, 12, 28, 12, 15, 4]q^2 + \cdots \\
E_3 &= \tfrac{1}{36} - [3, 8, 3]q - [8, 51, 120, 104, 120, 51, 8]q^2 + \cdots \\
E_4 &= \tfrac{23}{240} + [9, 28, 9]q + [28, 585, 1332, 2044, 1332, 585, 28]q^2 + \cdots \\
E_5 &= \tfrac{5}{12} - [15, 80, 15]q - [80, 3855, 14640, 19280, 14640, 3855, 80]q^2 + \cdots \\
E_6 &= \tfrac{1681}{504} + [33, 244, 33]q + [244, 33825, 161052, 257908, 161052, \ldots]q^2 + \cdots
\end{aligned}$$

où $[a_{-r}, \cdots, a_r]q^a$ est une écriture simplifiée pour $\sum_{-r \le j \le r} a_j \xi^j q^a$ avec $r = [a\sqrt{3}]$ et $a_{-j} = a_j$.

En utilisant un nombre fini de coefficients de Fourier (et les formules connues des dimensions des espaces de formes modulaires de Hilbert de poids donné), on démontre les relations suivantes :

$$E_5 = 360 E_2 E_3 \text{ et } E_7 = \frac{1}{10080} E_3(18E_2^2 + E_4).$$

On va voir plus tard que $E_3|E_k$ pour tout k impair ; la courbe définie par $E_3 = 0$, sera l'une des courbes modulaires compactes étudiées au chapitre II.

3.2.2 Exemple : corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

L'anneau d'entiers associé à $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est égal à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Les développements en séries de Fourier des séries d'Eisenstein en poids pair sont obtenus en remplacant les termes $\sqrt{3}$ et 12 (discriminant du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$) respectivement par $\sqrt{2}$ et 8 (discriminant du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$), dans les formules des développements en Fourier des séries d'Eisenstein en poids pair associés à $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, On obtient alors les développements suivants :

$$\begin{array}{rcl}
E_1 & = & 0 \\
E_2 & = & \frac{1}{12} + [1,3,1]q + [7,8,15,8,7]q^2 + \cdots \\
E_4 & = & \frac{1}{48} + [1,9,1]q + [73,344,585,344,73]q^2 + \cdots \\
E_6 & = & \frac{5}{14} + [1,33,1]q + [1057,16808,33825,16808,1057]q^2 + \cdots \\
E_8 & = & \frac{2461}{96} + [1,129,1]q + [16513,823544,2113665,823544,16513]q^2 + \cdots
\end{array}$$

où, on utilise les mêmes notations que dans (3.2).

3.3 Crochets de Rankin-Cohen

Dans cette section on rappele les combinaisons possibles des dérivées partielles de formes modulaires de Hilbert qui sont modulaires. Il s'agit de généraliser les définitions des crochets de Rankin-Cohen définis sur les espaces des formes modulaires elliptiques.

Définition 21. *Soit K un corps de nombres totalement réel de degré n. Soient F et G deux formes modulaires de Hilbert de poids respectifs $\underline{k} = (k_1, \cdots, k_n), \underline{l} = (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Soit $\underline{p} = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit les corchets :*

$$[F,G]_{\underline{p}} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{j_n=0}^{p_n} (-1)^{|\underline{j}|} \qquad \prod_{i=1}^{n} \binom{k_i+p_i-1}{p_i-j_i}\binom{l_i+p_i-1}{j_i} \times \frac{\partial^{|\underline{j}|}F}{\partial^{j_1}z_1\cdots\partial^{j_n}z_n} \; \frac{\partial^{|\underline{p}-\underline{j}|}G}{\partial^{p_1-j_1}z_1\cdots\partial^{p_n-j_n}z_n}$$

où $\mid \underline{\alpha} \mid = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Proposition 18. *Soit K un corps de nombres de degré n, totalement réel. Soit Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Les crochets $[.,.]_{\underline{p}}$, pour tout $\underline{p} \in \mathbb{N}^n$ définissent des opérateurs :*

$$[.,.]_{\underline{p}} : M_{\underline{k}}(\Gamma_K) \otimes M_{\underline{l}}(\Gamma_K) \longrightarrow M_{\underline{k}+\underline{l}+2\underline{p}}(\Gamma_K),$$

pour tout $\underline{k}, \underline{l} \in \mathbb{N}^n$.

L'idée de la preuve est de généraliser la preuve du cas des formes modulaires elliptiques en tenant compte du séparation des variables dans la définition de ces crochets.

Démonstration. Soient $\mathrm{Hol}(\mathcal{H}^n)$, l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}^n$ et $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Le groupe G^n agit sur $\mathrm{Hol}(\mathcal{H}^n)$, par :

$$(F|_{k_1,\cdots,k_n}(\gamma_1, \cdots, \gamma_n))(\underline{z}) = (c_1 z_1 + d_1)^{-k_1} \cdots (c_n z_n + d_n)^{-k_n} F(\gamma_1.z_1, \cdots, \gamma_n.z_n),$$

pour tout $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \cdots, \gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in G$. Pour tout $\underline{p} \in \mathbb{N}^n$, on a une application :

$$RC_{p_1}^{k_1,l_1} \otimes \cdots \otimes RC_{p_n}^{k_n.l_n} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hol}(\mathcal{H}^n) \otimes \mathrm{Hol}(\mathcal{H}^n) & \longrightarrow & \mathrm{Hol}(\mathcal{H}^n) \\ F \otimes G & \mapsto & [F|_{\underline{k}}, G|_{\underline{l}}]_{\underline{p}} \end{array},$$

avec les notations $F|_{\underline{k}} = F_{k_1,\cdots,k_n}$ et $G|_{\underline{l}} = G|_{l_1,\cdots,l_n}$. Par passage au produit tensoriel des proprietés $RC_{p_j}^{k_j,l_j}(F|_{k_j}\gamma_j, G|_{l_j}\gamma_j) = RC_{p_j}^{k_j,l_j}(F,G)|_{k_j+l_j+2P_j}\gamma_j$, on obtient la proposition. □

Considérons le cas particulier des corps quadratiques réels K et les crochets indexés par $(1,0)$ et $(0,1)$. Pour $F \in M_{\underline{k}}, G \in M_{\underline{l}}$ deux formes modulaires sur Γ_K, on a :

$$[F,G]_{(1,0)} = k_1 F \frac{\partial G}{\partial z_1} - l_1 G \frac{\partial F}{\partial z_1},$$

$$[F,G]_{(0,1)} = k_2 F \frac{\partial G}{\partial z_2} - l_2 G \frac{\partial F}{\partial z_2}.$$

Autrement dit les crochets $[.,.]_{(1,0)}$ et $[.,.]_{(0,1)}$ sont définis comme les crochets de Rankin-Cohen dans le cas des formes elliptiques où on considère F et G comme, uniquement fonctions de la variable z_1, puis uniquement comme fonctions de la variable z_2.

Soit F une fonction holomorphe sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. On associe à F une fonction holomorphe F^τ définie par $F^\tau(z_1, z_2) = F(z_2, z_1)$. Soit M_* un anneau de formes modulaires de Hilbert pour un corps quadratique, on définit le sous-anneau M_*^{sym} de M_* par $M_*^{sym} = \{F \in M_* \mid F^\tau = F\}$.

Remarque. Soit K un corps quadratique réel. Soit M_* l'anneau des formes modulaires de Hilbert sur Γ_K et M_*^{sym} le sous-anneau des formes modulaires symétriques. Alors, M_*^{sym} n'est pas stable par les corchets $[.,.]_{(p_1,p_2)}$, uniquement si $p_1 = p_2$. Les produits $([f,g]_{(p_1,p_2)} \times [f,g]_{(p_2,p_1)})$ de crochets, laissent stables M_*^{sym}.

3.3.1 Exemple : crochets de Rankin-Cohen sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Soit maintenant K le corps quadratique réel $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Soient ∂_1 et ∂_2 les dérivations par rapport à z_1 et z_2. Ces deux dérivations définissent deux opérateurs de degré 2 sur les espaces $\widetilde{M}_{*,*}$ de formes quasi-modulaires de Hilbert en poids mixtes. Soit R le sous-anneau de $\widetilde{M}_{*,*}$ engendré par

$$\{E_2, E_3, E_4, \partial_1 E_2, \partial_1 E_3, \partial_1 E_4, \partial_2 E_2, \partial_2 E_3, \partial_2 E_4\}.$$

Le degré de transcendance de R est égal au degré de transcendance de $\widetilde{M}_{*,*}$, égal à 6 ($= 2 + 2 + 2$, en effet il s'agit de formes en deux variables, avec des poids mixtes, munies de deux opérateurs de dérivation). Il y a donc forcément trois relations algébriques indépendantes entre les 9 formes ci-dessus. En utilsant le développement en Fourier des séries d'Eisenstein et la formule des dimensions des espaces de formes modulaires de Hilbert on trouve les trois relations :

$$12[E_2, E_3]_{(1,0)}\ [E_2, E_3]_{(0,1)} = (32E_2^3 - 3E_3^2)(180E_2^3 + 9E_3^2 - 5E_2E_4) \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} 15[E_2, E_4]_{(1,0)}\ [E_2, E_4]_{(0,1)} = \\ (5E_4 - 276E_2^2)(9072E_2^5 - 432E_2^3E_4 - 540E_2^2E_3^2 + 5E_2E_4^2 + 9E_4E_3^2) \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered} 15[E_3, E_4]_{(1,0)}\ [E_3, E_4]_{(0,1)} = -7511616E_2^5E_3^2 - 28800E_2^4E_4^2 + \\ 334800E_2^3E_3^2E_4 + 447120E_2^2E_3^4 + \\ 800E_2^2E_4^3 - 6480E_2E_4^2E_3^2 - 648E_3^4E_4 \end{gathered} \tag{3.4}$$

On montre aussi la relation,

$$\frac{[E_2, E_4]_{1,0}}{[E_2, E_3]_{1,0}} + \frac{[E_2, E_4]_{(0,1)}}{[E_2, E_3]_{(0,1)}} = \frac{E_3(60E_4 - 3312E_2^2)}{5(180E_2^3 + 9E_2^3 - 5E_2E_4)}. \tag{3.5}$$

Remarque. Les trois membres de gauche des relations ci-dessus sont des produits de crochets qui sont modulaires et symétriques. D'autre part, nous savons que l'anneau des formes modulaires de Hilbert symétriques est de degré de transcendance 3, comme E_2, E_3 et E_4 sont algébriquement indépendants, on en déduit que $M_*^{sym} = \mathbb{C}[E_2, E_3, E_4]$. Par conséquence, les membres de droites des relations indiqués sont des polynômes en E_2, E_3 et E_4.

3.4 Restrictions aux cycles de Hirzebruch-Zagier

Définition 22. *Soit K un corps quadratique réel et $B \in M(2, K)$ de conjugué B'. On dit que B est antihermitienne si ${}^tB' = -B$. Une matrice antihermitienne est intégrale, si elle est de la forme $\begin{pmatrix} a\sqrt{D} & \nu \\ -\nu' & b\sqrt{D} \end{pmatrix}$ avec a, b des entiers et $\nu \in O_K$, si de plus a, b et ν sont premiers entre eux, on dit que B est une matrice antihermitienne intégrale primitive.*

Définition 23. *Soit K un corps quadratique réel et $B \in M(2, K)$ une matrice intégrale antihermitienne. On note par F_B l'image dans $X_{\Gamma_K} = \mathcal{H}^2/\Gamma_K$, de l'ensemble $\left\{ (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2 \cup \mathbb{P}^1(K) \,\middle|\, \begin{pmatrix} z_2 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$.*

Remarque. En utilisant le lemme de Chow, on montre que la courbe F_B est algébrique. Pour un entier $N > 0$ on définit F_N comme réunion des courbes F_B où B parcourt l'ensemble des matrices antihermitiennes intégrales primitives non associées de déterminant N. On définit aussi les courbes T_N comme réunion des courbes F_B où B parcourt l'ensemble des matrices antihermitiennes intégrales, pas nécessairement primitives.

On va maintenant décrire une uniformisation de F_B (un quotient du demi-plan supérieur avec un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ isomorphe à F_B). Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, K)$, on pose $M^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Soient :

$$O_B = \{M \in M(2, O_K) \mid {}^tM'B = BM^*\},$$

c'est-à-dire O_B est un ordre dans l'algèbre de quaternions,

$$\{M \in M(2, K) | \, {}^tM'B = BM^*\}.$$

Soit O_B^*, l'ensemble des éléments inversibles de l'ordre O_B. Soient,

$$\begin{array}{rcl} E_B & = & \{M \in O_B^* \mid \det(M) = 1\} \text{ et} \\ \mathcal{H}_B & = & \left\{(z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2 \middle| \begin{pmatrix} z_2 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\right\}. \end{array}$$

Le stabilisateur de $\mathcal{H}_B$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathrm{O_K})$ est :

$$S_B = \{M \in \mathrm{SL}(2, \mathrm{O_K}) \mid {}^tM' \; B \; M = \pm B\},$$

c'est-à-dire S_B est au plus extension de degré 2 de E_B. On a alors le diagrame commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_B & \longrightarrow & \mathcal{H}^2 \cup \mathbb{P}^1(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_B/S_B & \longrightarrow & X_K \end{array}$$

On en déduit une uniformisation de F_B par $\mathcal{H}_B/S_B$, on peut alors construire des formes modulaires sur S_B en une variable. Pour cela, on a besoin de caractériser $\mathcal{H}_B$.

Lemme. *Soit* $B = \begin{pmatrix} a\sqrt{D} & \nu \\ -\nu' & b\sqrt{D} \end{pmatrix}$ *une matrice antihermitienne intégrale primitive et* $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \nu' & -b\sqrt{D} \\ a\sqrt{D} & \nu \end{pmatrix}$. *On a alors* $\mathcal{H}_B = \{(z, \widetilde{B}.z) \mid z \in \mathcal{H}\}$.

Démonstration. Soit $(z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2$, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} (z_1, z_2) \in \mathcal{H}_B & \Leftrightarrow & (z_2 \; 1) \; B \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow & z_2(a\sqrt{D}z_1 + 1) + (-\nu' z_1 + b\sqrt{D}) = 0 \\ & \Leftrightarrow & z_2 = \frac{\nu' z_1 - b\sqrt{D}}{a\sqrt{D}z_1 + 1} \\ & \Leftrightarrow & z_2 = \widetilde{B}.z_1 \end{array}$$

□

On peut maintenant construire des formes modulaires en une variable sur S_B.

Proposition 19. *Soient* $B = \begin{pmatrix} a\sqrt{D} & \nu \\ -\nu' & b\sqrt{D} \end{pmatrix}$ *une matrice antihermitienne intégrale primitive,* $F : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *une forme modulaire de Hilbert sur* Γ_K *de bipoids* (k_1, k_2) *et soit* $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par* $f(z) = (a\sqrt{D}z+\nu)^{-k_2} F(z, \widetilde{B}.z)$ *avec* $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \nu' & -b\sqrt{D} \\ a\sqrt{D} & \nu \end{pmatrix}$. *Alors* f *est une forme modulaire sur* S_B *de poids* $k_1 + k_2$.

Pour démontrer la proposition, on commence par donner une caractéristaion des éléments du groupe S_B.

Lemme. *Soit* B *une matrice antihermitienne intégrale primitive et* $\widetilde{B}$ *la matrice caractérisant* $\mathcal{H}_B$ *comme ensemble de couples* $(z, \widetilde{B}.z)$. *Soit* $\gamma \in \mathrm{SL}(2, O_K)$ *(*γ' *sera la matrice obtenue à partir de* γ *en conjugant tous ses coefficients). On a alors :*

$$\gamma \in E_B \Leftrightarrow \widetilde{B}\,\gamma = \gamma'\,\widetilde{B}$$

Démonstration. On pose $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a alors $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on définit $\widetilde{B} = JB$ et $\gamma^* = J^t \gamma J^{-1}$. Alors, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \gamma \in E_B \quad &\Leftrightarrow \quad {}^t\gamma' B = B\,\gamma^* \\ &\Leftrightarrow \quad {}^t B' \gamma = J^{-1}\gamma' J^t B' \\ &\Leftrightarrow \quad B\gamma = J^{-1}\gamma' J B \\ &\Leftrightarrow \quad \widetilde{B}\gamma = \gamma' \widetilde{B} \end{aligned}$$

□

Nous retournons maintenant à la démonstration de la proposition.

Démonstration. Pour simplifier les notations, on pose $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$. On veut alors montrer que pour une forme modulaire de Hilbert F de poids (k_1, k_2), la forme $f(z) = (uz + v)^{-k_2} F(z, \widetilde{B}.z)$ est modulaire sur S_B de poids $k_1 + k_2$. Par le lemme précédent on a $F(\gamma.z, \widetilde{B}\gamma.z) = F(\gamma.z, \gamma'\widetilde{B}.z)$. Par modularité de F, on en déduit $F(\gamma.z, \widetilde{B}\gamma z) = (cz+d)^{k_1}(c'\widetilde{B}.z+d')^{k_2} F(z, \widetilde{B}.z)$. Or,

$$c'\widetilde{B}.z + d' = \frac{(c'x + d'u)z + c'y + d'v}{uz + v}.$$

Par les égalités matricielles démontrés dans le lemme précédent, on en déduit :

$$c'\widetilde{B}.z + d' = \frac{(au+cv)z + (bu+dv)}{uz+v}.$$

D'autre part, $u\gamma.z + v = \frac{(au+cv)z+(bu+dv)}{cz+d}$. On en déduit alors que :

$$f(\gamma.z) = (cz+d)^{k_1+k_2} f(z).$$

□

3.5 Restrictions généralisées

Soit B une matrice antihermitienne intégrale primitive à coefficients dans un corps quadratique réel K de discriminant D. Soit $\widetilde{B}$ la matrice associée à B (voir pargraphe précédent) définissant le plongement,

$$\begin{array}{rcl} i_{\widetilde{B}} : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ z & \mapsto & (z, \widetilde{B}z). \end{array}$$

On a alors, $\mathcal{H}_B = i_{\widetilde{B}}(\mathcal{H})$ (voir paragraphe précédent). Il existe deux matrices $A_1, A_2 \in M(2,K)$, conjuguées, telle que $\mathcal{H}_B$ est l'image de $\mathcal{H}$ par le plongement,

$$\begin{array}{rcl} i_{1,2} : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ z & \longrightarrow & (A_1 z, A_2 z). \end{array}$$

Soit Γ le groupe agissant sur $\mathcal{H}$ compatible avec le plongement $i_{1,2}$, c'est-à-dire $A_1\gamma = \gamma A_1$ et $A_2\gamma = \gamma' A_2$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Soit $X = i_{1,2}(\mathcal{H})$, il existe alors un groupe discret $\Gamma_X \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ égal au stabilisateur de X pour l'action du groupe modulaire de Hilbert Γ_K. De plus $\Gamma_X \simeq \Gamma$, soit $\Gamma_X = \{(A_1\gamma A_1^{-1}, A_2\gamma A_2^{-1}) \mid \gamma \in \Gamma\}$. Dans le cas du plongement diagonale, on a $\Gamma = \Gamma_1$.

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Pour tout $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a une action du groupe $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))^2$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ définie par : pour tout $F \in \mathcal{C}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ et $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$,

$$(F \mid_{k,l} (\gamma_1, \gamma_2))(z_1, z_2) = (c_1 z_1 + d_1)^{-k} (c_2 z_2 + d_2)^{-l} F(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}),$$

avec :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$ et $\rho : \mathcal{C}(\mathcal{H}\times\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H})$, définie par $\rho(F)(z) = F(z,z)$, c'est la restriction diagonale. On définit sur $\mathcal{C}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})$ des opérateurs différentieles d'ordre n par,

$$RC_n^{k,l}(F) = \sum_{j=0}^{n} \binom{k+n-1}{n-j}\binom{l+n-1}{j}\partial_1^j\partial_2^{n-j}(F)$$

et on pose $\rho_n^{k,l} = \rho \circ RC_n^{k,l}$.

Nous avons vu dans le chapitre II que, si $F(z_1,z_2) = f(z_1)g(z_2) \in \mathcal{C}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H}))$, alors $\rho_n^{k,l}(F) = [f,g]_n$ est le n-ième crochet de Rankin-Cohen de f et g. Nous avons vu aussi qu'on peut démontrer (voir chapitre I, remarque 1.2) la proposition suivante :

Proposition 20. *Pour tout $F \in \mathcal{C}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})$ et $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ on a :*

$$\rho_n^{k,l}(F\mid_{k,l}(\gamma,\gamma)) = \rho_n^{k,l}(F)\mid_{k+l+2n}\gamma \qquad .$$

Corollaire. *L'opérateur $\rho_n^{k,l}$ induit une application de degré $2n$ sur les espaces $M_{k,l}$ de formes modulaires de Hilbert à valeurs dans les espaces des formes modulaires M_{k+l+2n} sur Γ_1. Soit :*

$$\rho_n^{k,l} : M_{k,l}(\Gamma_K) \longrightarrow M_{k+l+2n}(\Gamma_1) \qquad .$$

Démonstration. Si $F \in M_{k,l}(\Gamma_K)$ alors pour tout $\gamma \in \Gamma_1$ on a $F\mid_{k,l}(\gamma,\gamma) = F$, car $\Gamma_1 \subset \Gamma_K$ et donc $\rho_n^{k,l}(F\mid_{k,l}(\gamma,\gamma)) = \rho_n^{k,l}(F) = \rho_n^{k,l}(F)\mid_{k+l+2n}\gamma$. La dernière égalité est conséquence de la Proposition 20. □

Corollaire. *Soit Γ un groupe associé à un plongement $i_{1,2}$ définie par la donnée de deux matrcices A_1 et A_2 et soit $X = i_{1,2}(\mathcal{H})$. Il existe alors un opérateur,*

$$\rho_{n;X}^{k,l} : M_{k,l}(\Gamma_K) \longrightarrow M_{k+l+2n}(\Gamma)$$

définie par $\rho_{n;X}^{k,l}(F) = \rho_{n;X}^{k,l}(F\mid_{k,l}(A_1,A_2))$.

Démonstration. D'aprés la proposition appliqué à $F\mid_{k,l}(A_1,A_2)$ on a :

$$\rho_n^{k,l}(F\mid_{k,l}(A_1,A_2)(\gamma,\gamma)) = \rho_n^{k,l}(F\mid_{k,l}(A_1,A_2))\mid_{k+l+2n}\gamma,$$

pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Or, $(F\mid_{k,l}(A_1,A_2))(\gamma,\gamma) = F\mid_{k,l}(\gamma_1,\gamma_2)(A_1,A_2)$, avec $\gamma_1 = A_1\gamma A_1^{-1}$, $\gamma_2 = A_2\gamma A_2^{-1}$ et $(\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma_X$. D'autre part $F \in M_{k,l}(\Gamma_K)$ implique $F \in M_{k,l}(\Gamma_X)$ donc $F\mid_{k,l}(\gamma_1,\gamma_2) = F$ d'où :

$$\rho_n^{k,l}(F\mid_{k,l}(A_1,A_2)) = \rho_n^{k,l}(F)\mid_{k+l+2n}\gamma, \quad \forall\gamma \in \Gamma.$$

□

Dans la suite on s'intéresse à l'étude des différentes relations entre crochets de Rankin-Cohen et opérateurs de restriction $\rho_n^{k,l}$.

Plus généralement, soit K un corps de nombres quadratique et réel. Les crochets de Rankin-Cohen définissent une famille d'opérateurs $([.,.]_{(p_1,p_2)})_{p_1,p_2\in\mathbb{N}}$, sur tous les produits tensoriaux de deux espaces de Formes modulaires de Hilbert sur Γ_K. Plus précisement pour tout $(k_1,k_2,l_1,l_2,p_1,p_2)\in\mathbb{N}^6$ on a une application :

$$\begin{aligned} M_{k_1,k_2}\otimes M_{l_1,l_2} &\longrightarrow M_{k_1+l_1+2p_1,k_2+l_2+2p_2} \\ F\otimes G &\longrightarrow [F,G]_{(p_1,p_2)}. \end{aligned}$$

Soit $X=\mathcal{H}/\Gamma$ une courbe modulaire qui se plonge dans une surface modulaire de Hilbert, par un plogement $i_{1,2}$ associé à deux matrices A_1 et A_2. On a défini au dessus une suite de restrictions $(\rho_{n;X}^{k,l})_n$ de formes modulaires de Hilbert sur la courbe X. Plus précisement on a,

$$\rho_{n;X}^{k_1,k_2} : M_{k_1,k_2}(\Gamma_K)\longrightarrow M_{k_1+k_2+2n}(\Gamma)$$

Pour simplifier, on note par ρ_n, la restriction à X des formes modulaires de Hilbert sur Γ_K. On s'interesse, à l'etude de l'algèbre des restrictions à Γ des formes modulaires de Hilbert. On va démontrer le théorème suivant :

Théorème 6. **Soit K un corps de nombres quadratique et réel. Soit Γ_K le groupe modulaire de Hilbert associé. Alors l'algèbre engendrée par les $\rho_n(F),(F\in M_{*,*}(\Gamma_K),n\in\mathbb{N})$, est une sous-algèbre fermée par les crochets de Rankin-Cohen de l'algèbre $M_*(\Gamma)$.**

Pour la démonstration, on va comparer différents espaces vectoriels de dimension finies.

Définition. *Soient k_1,k_2,l_1,l_2 et $p\in\mathbb{N}$. On définit les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels suivants :*

$$W_p^1=\left\langle \begin{array}{c} R_n^{k_1+l_1+2n_1,k_2+l_2+2n_2}(x_1+y_1,x_2+y_2) \\ \times R_{p_1}^{k_1,l_1}(x_1,y_1)R_{p_2}^{k_2,l_2}(x_2,y_2) \end{array} \middle| \begin{array}{c} n\in\mathbb{N} \\ n+p_1+p_2=p \end{array} \right\rangle$$

$$W_p^2=\left\langle \begin{array}{c} R_a^{k_1+k_2+2b,l_1+l_2+2c}(x_1+x_2,y_1+y_2) \\ \times R_b^{k_1,k_2}(x_1,x_2)R_c^{l_1,l_2}(y_1,y_2) \end{array} \middle| \begin{array}{c} a,b,c\in\mathbb{N} \\ a+b+c=p \end{array} \right\rangle.$$

Remarque. Les espaces W_p^1 et W_p^2 sont des sous-espaces de l'espace

$$V_p=\mathbb{Q}[x_1,y_1,x_2,y_2]_p,$$

qui a la dimension $\binom{p+3}{3}$. La dimension de W_p^i $(i=1,2)$ est au plus $\binom{p+2}{2}$.

Proposition 21. *Les sous-espaces W_p^1 et W_p^2 de V_p coincident.*

Corollaire. *Les crochets $[\rho_b(F), \rho_c(G)]_a$ entre restrictions généralisées de formes modulaires de Hilbert F et G de poids respectives (k_1, k_2) et (l_1, l_2) sur une courbe modulaire X, sont des combinaisons linéaires de restrictions généralisées sur X de crochets entre formes modulaires de Hilbert :*

$$[\rho_b(F), \rho_c(G)]_a = \sum_{n+p_1+p_2=a+b+c} (*)\rho_n([F, G]_{(p_1,p_2)}),$$

avec $(*)$ un nombre rationnel qui dépend de $k_1, k_2, l_1, l_2, a, b, c, n, p_1$ et p_2.

On note par $\partial_1, \partial_2, \partial_1'$, *et* ∂_2' les opérateurs de dérivation respectives par rapport aux variables z_1, z_2, z_1' et z_2'.

Démonstration. Le corollaire est immédiat en utilisant que :

$$\begin{aligned}
[\rho_b(F), \rho_c(G)]_a &= R_a^{k_1+k_2+2b, l_1+l_2+2c}(\partial_1 + \partial_1', \partial_2 + \partial_2') \\
&\quad \times R_b^{k_1,k_2}(\partial_1, \partial_1') R_c^{l_1,l_2}(\partial_2, \partial_2') \big|_{z_1=z_2=z_1'=z_2'=z} \\
\rho_n([F, G]_{(p_1,p_2)} &= R_n^{k_1+l_1+2n_1, k_2+l_2+2n_2}(\partial_1 + \partial_2, \partial_1' + \partial_2') \\
&\quad \times R_{p_1}^{k_1,l_1}(\partial_1, \partial_2) R_{p_2}^{k_2,l_2}(\partial_1', \partial_2')) \big|_{z_1=z_2=z_1'=z_2'=z}.
\end{aligned}$$

□

Exemples

1)Exemple trivial : $\rho_0([F, G]_0) = [\rho_0(F), \rho_0(G)]_0$.

2)Exemple un peu moins trivial,

$$\begin{aligned}
\rho_0([F, G]_{(1,0)}) &= \tfrac{l_1}{k_1+k_2}[\rho_1(F), \rho_0(G)]_0 - \tfrac{k_1}{l_1+l_2}[\rho_0(F), \rho_1(G)]_0 \\
&\quad + \tfrac{k_1 l_1}{(k_1+k_2)(l_1+l_2)}[\rho_0(F), \rho_0(G)]_1.
\end{aligned}$$

3)Exemple plus compliqué : soient $F \in M_{k_1,k_2}$ et $G \in M_{l_1,l_2}$ deux formes modulaires de Hilbert sur le même groupe modulaire. On suppose que $l_1 k_2 = l_2 k_1$, on a alors :

$$[\rho_0(F), \rho_0(G)]_1 = (1 + \frac{k_2}{k_1})\rho_0([F, G]_{(1,0)}) + (1 + \frac{k_1}{k_2})\rho_0([F, G]_{(0,1)}). \tag{3.6}$$

En effet, en introduisant les notations $\partial_1(F) = F_1$, $\partial_2(F) = F_2$, $f = \rho_0(F)$ et notations similaires pour G. On alors $f \in M_{k_1+k_2}, g \in M_{l_1+l_2}$ et :

$$\begin{aligned}
[f, g]_1 &= (k_1 + k_2)\rho_0(F)\rho_0(G)' - (l_1 + l_2)\rho_0(G)\rho_0(F)' \\
&= \rho_0((k_1 + k_2)F(G_1 + G_2) - (l_1 + l_2)G(F_1 + F_2)) \\
&= \rho_0([F, G](1, 0) + [F, G]_{(0,1)} + (k_1 F G_2 - l_1 G F_2) + (k_2 F G_1 - l_2 G F_1)))
\end{aligned}$$

L'hypothèse $l_1k_2 = l_2k_1$ implique la relation (3.6).

Démonstration de la proposition. On va définir un troisième espace vectoriel W_p et on va montrer que $W_p^1 = W_p$ et $W_p^2 = W_p$. Pour cela, on doit montrer :

$$\begin{array}{llcl} (i) & W_p^1 & \subset & W_p \\ (ii) & W_p^2 & \subset & W_p \\ (iii) & \dim W_p^1 & = & \binom{p+2}{2} \\ (iv) & \dim W_p^2 & = & \binom{p+2}{2} \\ (v) & \dim W_p & \leq & \binom{p+2}{2} \end{array}$$

On considère l'opérateur différentiel $\Delta_{h,t} = t\frac{\partial^2}{\partial t^2} + h\frac{\partial}{\partial t}$. Nous avons vu dans le Chapitre I que $\ker(\Delta_{k,x} + \Delta_{l,y}) \cap \mathbb{C}[x,y]_n$ est de dimension 1, engendré par $R_n^{k,l}(x,y)$. Plus précisement $R_n^{k,l}(x,y)$ est l'unique générateur de

$$\ker(\Delta_{k,x} + \Delta_{l,y}) \cap \mathbb{C}[x,y]_n,$$

satisfaisant $R_n^{k,l}(0,y) = \binom{-k}{n}$. Il est facile de voir que

$$R_n^{k,l}(x,0) = \binom{l+n-1}{n} x^n, \qquad R_n^{k,l}(0,y) = \binom{k+n-1}{n} y^n.$$

$$\text{et } R_n^{k,l}(t,-t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{k+n-1}{j}\binom{l+n-1}{n-j} t^n = \binom{k+l+2n-2}{n} t^n.$$

On définit l'espace W_p par :

$$W_p = \ker(\Delta_{k_1,x_1} + \Delta_{l_1,y_1} + \Delta_{k_2,x_2} + \Delta_{l_2,y_2} : V_p \longrightarrow V_{p-2}).$$

Commençons par démontrer (v)**.** *On considère l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : W_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}[x_1,y_1,x_2]_p \\ P & \longrightarrow & P(x_1,y_1,x_2,0). \end{array}$$

C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en particulier, $\dim W_p = \binom{p+2}{2}$. En effet, soit $P = \sum_{i=o}^{n} P_i(x_1,y_1,x_2)\, y_2^i \in \mathbb{Q}[x_1,y_1,x_2,y_2]_n$. On a alors :

$$P \in W_p \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (\Delta_{k_1,x_1} + \Delta_{l_1,y_1} + \Delta_{k_2,x_2})(P_i)\; y_2^i + \sum_{i=0}^{n} P_i\; i(i+l_2-1) y_2^{i-1} = 0,$$

ce qui implique $(i+1)(i+l_2)P_{i+1} = -(\Delta_{k_1,x_1}+\Delta_{l_1,y_1}+\Delta_{k_2,x_2})(P_i)$. Autrement dit, P_0 arbitraire détermine tous les autres P_i par une relation de récurrence, ce qui montre l'injectivité et la surjectivité de ϕ.

Les affirmations (iii) **et** (iv) **sont équivalentes.** En effet, $W^2_{p;k_1,l_1,k_2,l_2} = \tau(W^1_{p;k_1,k_2,l_2,l_2})$ où $\tau : V_p \longrightarrow V_{p-2}$ est l'application :

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) \longrightarrow f(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

On définit le polynôme :

$$\begin{aligned} f_{k_1,l_1,k_2,l_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) &= R_n^{k_1+l_1+2n_1,k_2+l_2+2n_2}(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &\quad \times R_{p_1}^{k_1,l_1}(x_1, y_1)R_{p_2}^{k_2,l_2}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer (iii). On définit le polynôme,

$$g(x, y, t) = f_{k_1,l_1,k_2,l_2}(x - y, y, t, -t).$$

On a alors $g(x, y, t) = R_n(x, 0)R_{p_1}^{(k_1,l_1)}(x, y)R_{p_2}^{(k_2,l_2)}(t, -t)$. D'aprés les propriétés des polynômes $R_m^{k,l}(x, y)$, il existe une constante λ non nulle telle que :

$$\begin{aligned} g(x, y, t) &= \lambda\, x^n t^{p_2} R_{p_1}^{k_1,l_1}(x, y) \\ &= \lambda\, x^n t^{p_2}(y^{p_1} + O(xy^{p_1-1})) \\ &= \lambda\, x^n y^{p_1} t^{p_2} + H(x, y, t), \end{aligned}$$

avec $\deg_x(H) + \deg_y(H) + \deg_t(H) < p = n + p_1 + p_2$. Autrement dit, il existe une matrice triangulaire T inversible telle que (aprés un choix de bases de $\mathbb{Q}[x, y, t]_p$, ordonnées lexicographiquement), on a $((g(x, y, t)) = T((x^n y^{p_1} t^{p_2}))$. Ceci implque que la suite des polynômes $g(x, y, t)$ forment une base de $\mathbb{Q}[x, y, t]_p$ dont la dimension est $\binom{P+2}{2}$. On a donc $\dim W_p^1 \geq \binom{p+2}{p}$, l'inégalité opposée (dont on n'a pas besoin) est évidente par la définition de W_p^1.

Les affirmations i **et** ii **sont équivalentes.** En effet l'opérateur

$$\Delta_{k_1,x_1} + \Delta_{l_1,y_1} + \Delta_{k_2,x_2} + \Delta_{l_2,y_2},$$

est invariant par l'automorphisme τ qui échange y_1 en x_2 et l_1 en k_2.

Il suffit donc de montrer (i). Pour faire la démonstration, nous utilisons la propriété $\Delta_{h,t}(fg) = g\Delta_{h,t}(f) + 2t\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} + f\Delta_{h,t}(g)$, *pour tout* $f(t, u)$, $g(t, u) \in \mathbb{C}[t, u]$ *et tout entier* h.

Ecrivons le polynôme $f_{k_1,l_1,k_2,l_2}(x_1,y_1,x_2,y_2)$ sous la forme :

$$f_{k_1,l_1,k_2,l_2}(x_1,y_1,x_2,y_2) = A(x_1+y_1,x_2+y_2)B(x_1,y_1)C(x_2,y_2),$$

avec :

$$A(x,y) = R_n^{k_1+l_1+2p_1,k_2+l_2+2p_2}(x,y), \quad B(x,y) = R_{p_1}^{k_1,l_1}(x,y)$$

et $C(x,y) = R_{p_2}^{k_2,l_2}(x,y)$. Notons par $A_1 = \frac{\partial A}{\partial x}$ et $A_2 = \frac{\partial A}{\partial y}$ et notations similaires pour B_1, B_2, C_1 et C_2. On a alors (avec des notations évidentes) :

$$\begin{array}{ll} \Delta_{k_1,x_1}(ABC) & = A\Delta_{k_1,x_1}(B)C + \Delta_{k_1,x_1}(A)BC + 2x_1A_1B_1C \\ \Delta_{k_2,x_2}(ABC) & = AB\Delta_{k_2,x_2}(C) + \Delta_{k_2,x_2}(A)BC + 2x_2A_2BC_1 \\ \Delta_{l_1,y_1}(ABC) & = A\Delta_{l_1,y_1}(B)C + \Delta_{l_1,y_1}(A)BC + 2y_1A_1B_2C \\ \Delta_{l_2,y_2}(ABC) & = AB\Delta_{l_2,y_2}(C) + \Delta_{l_2,y_2}(A)BC + 2y_2A_2BC_2 \end{array} .$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{l} (\Delta_{k_1,x_1} + \Delta_{k_2,x_2} + \Delta_{l_1,y_1} + \Delta_{l_2,y_2})(ABC) = AC(\Delta_1(B)) + AB(\Delta_2(C)) \\ +BC(\Delta_1(A)) + \Delta_2(A)) + 2x_1A_1B_1C + 2x_2A_2BC_1 + 2y_1A_1B_2C + 2y_2A_2BC_2, \end{array}$$

avec : $\Delta_1 = \Delta_{k_1,x_1} + \Delta_{l_1,y_1}$ et $\Delta_2 = \Delta_{k_2,x_2} + \Delta_{l_2,y_2}$. Or, par caractérisation des polynômes $R_n^{k,l}(x,y)$, il suit que $\Delta_1(B) = \Delta_2(C) = 0$. D'autre part,

$$2x_1A_1B_1C + 2y_1A_1B_2C = 2CA_1(x_1B_1 + y_1B_2) = 2p_1CA_1B,$$

car, $x_1B_1 + y_1B_2 = p_1B$ est l'opérateur d'Euler (multiplication par son degré d'un polynôme homogène). De même,

$$2x_2A_2BC_1 + 2y_2A_2BC_2 = 2BA_2(x_2C_1 + y_2C_2) = 2BA_2p_2C \qquad .$$

On a alors :

$$\begin{array}{l} (\Delta_{k_1,x_1} + \Delta_{k_2,x_2} + \Delta_{l_1,y_1} + \Delta_{l_2,y_2})(ABC) = \\ BC(\Delta_1(A)) + \Delta_2(A) + 2p_2A_2 + 2p_1A_1). \end{array} \tag{3.7}$$

Or, A est dans le noyau de l'opérateur :

$$\Delta_{k_1+l_1+2p_1,x} + \Delta_{k_2+l_2+2p_2} = \Delta_1 + \Delta_2 + 2p_1\frac{\partial}{\partial x} + 2p_2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Donc $(\Delta_{k_1,x_1} + \Delta_{k_2,x_2} + \Delta_{l_1,y_1} + \Delta_{l_2,y_2})(ABC) = 0$ (d'aprés 3.7).

3.5.1 Exemple de restrictions de formes modulaires

Nous allons étudier les restrictions des formes modulaires de Hilbert sur le groupe $\Gamma_{\sqrt{3}}$, à la courbe $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$. Soit $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, considérons le plongement :

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ & z & \mapsto & S.z = -\frac{1}{z} \end{array},$$

ce plongement passe au quotients et permet de définir un plongemt de $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$ dans la surface modulaire $X_{\sqrt{3}}$. En effet la seule chose à vérifier rendant le diagrame suivant commutatif, est la relation $S\gamma = \gamma' S$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0^+$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ \gamma\downarrow & & \downarrow (\gamma, \gamma') \\ \mathcal{H} & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \end{array}$$

La restriction à $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$ d'une forme modulaire de Hilbert F de poids (k_1, k_2) (comme nous l'avons vu dans la section 3.4, Proposition 19) s'ecrit $f(z) = z^{-k_2} F(z, -\frac{1}{z})$, c'est une forme modulaire de poids $k_1 + k_2$ sur Γ_0^+. Nous allons maintenant déterminer une équation algébrique de la courbe $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$, vu comme une courbe plongée dans une surface modulaire.

Lemme. *L'équation algébrique de la courbe modulaire $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$, plongée dans la surface modulaire de Hilbert $X_{\sqrt{3}}$ est : $E_3 = 0$, où E_3 est la série d'Eisenstein de poids $(3, 3)$ sur le groupe modulaire de Hilbert $\Gamma_{\sqrt{3}}$.*

Démonstration. Tout d'abord, on va montrer que les restrictions des séries d'Eisenstein de poids impair, à la courbe $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$ sont nulles. On en déduira, en particulier que la restriction de E_3 est nulle. Nous écrivons avec des notations évidentes les séries d'Eisenstein sous la forme :

$$E_k = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz_1 + n)^k (m'z_2 + n')^k},$$

où la somme porte sur les élements non nuls de O_K^2/U_K avec U_K désigne le groupe des unités de K. La restriction e_{2k} de la série d'Eisenstein E_k à la courbe $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$, est donnée par $e_{2k}(z) = \sum_{m,n \in O_K}{}' \frac{1}{(mz+n)^k (n'z - m')^k}$. En remplacant les paramètres de sommation (m, n) par $(-n', m')$, on obtient $e_{2k}(z) = (-1)^k e_{2k}(z)$, donc $e_{2k} = 0$ si k est impair.

Réciproquement, soit F une forme modulaire de Hilbert sur $\Gamma_{\sqrt{3}}$ de restriction (à la courbe $\mathcal{H}/\Gamma_0^+$) nulle. On va montrer que F est divisible par la série d'Eisenstein E_3. Pour cela, nous utilisons la structure de l'anneau des formes modulaires de Hilbert donnée dans [Van der Geer], on a la décomposition $M_*(\Gamma_{\sqrt{3}}) = M_*^{sym} + \Delta M_*^{sym}$ avec Δ une forme modulaire anti-symétrique de carré symétrique. D'autre part $M_*^{sym} = \mathbb{C}[E_2, E_3, E_4]$, est un anneau principal et E_3 est un idéal premier définissant une courbe dans $X_{\sqrt{3}}$, or E_3 s'annulle sur la courbe $X_0^+ = \mathcal{H}/\Gamma_0^+$, donc c'est la courbe d'équation $E_3 = 0$. $\square$

Nous allons maintenant expliquer la construction des formes modulaires A_4, B_4 et C_{10} (générateurs de l'anneau des formes modulaires sur le groupe Γ_0^+), ainsi que la relation entre ces générateurs. La restriction de la série d'Eisenstein E_2 de poids $(2,2)$ sur $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})}$, à la courbe X_0^+, est une forme modulaire e_4 de poids 4, définie par $e_4(z) = z^{-2}E_2(z, -\frac{1}{z})$. Aprés identification du demi-plan supérieur avec le disque unité, on obtient une forme modulaire A_4 de poids 4 (voir la section sur les exemples des formes modualires du chapitre II) sur Γ_0^+ (en fait, par abus de notation sur l'image par ρ_1 du groupe Γ_0^+), définie par : $A_4(w) = (1-w)^{-4}e_4(\frac{i(1+w)}{1-w})$. Nous avons donné dans la fin du chapitre II, le développement en X autour de 0 de la forme modulaire A_4.

Le plonogement ρ_2 permet de définir un plongment de la même courbe X_0^+ dans la surface modulaire de Hilbert $X_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$. La restriction (compatible avec plongement) de la série d'Eisenstein E_2' de poids $(2,2)$ sur le groupe modulaire $\Gamma_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$, à la courbe modulaire X_0^+ est une forme modulaire e_4' de poids 4, définie par $e_4'(z) = (\sqrt{2}z-1)^{-2}E_2'(z, \frac{z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}z-1})$. Aprés identification du demi-plan supérieur avec le disque, on obtient une forme modulaire B_4 (voir la section) de poids 4 sur Γ_0^+ (en fait par abus de notation, sur son image par le plongemnet ρ_1), définie par : $B_4(w) = (1-w)^{-4}e_4'(\frac{i(1+w)}{1-w})$. Nous avons vu dans la fin du chapitre II, le développement en X autour de 0 de B_4.

Nous avons conctruit la forme C_{10} comme crochet de Rankin-Cohen de premier ordre des formes A_4 et B_4, nous avons démontré numériquement (utilisant leurs développements en X autour de zéro) la relation $C_{10}^2 = A_4B_4(A_4 - B_4)(A_4^2 - A_4B_4 + B_4^2)$.

On ne peut comparer les formes A_4 et B_4 qui proviennent de surfaces modulaires différentes. Définissons $g_8 = \frac{40}{3}(e_8 - 36e_4^2)$, c'est le carré d'une forme modulaire : $g_8 = g_4^2$, avec g_4 de poids 4 sur Γ_0^+ (voir la relation (a) qui montre que g_8 est un carré). On a $\frac{1}{4}[e_4, g_4^2]_1 = 2g_4[e_4, g_4]_1$. La forme

$C' = \frac{[e_4, g_4^2]}{8g_4}$ est modulaire de poids 10 sur Γ_0^+, on a aussi $C' \equiv \dfrac{[e_4, e_8]_1}{g_4}$ (où $\equiv$ signifie égalité à une constante non nulle prés).

Notons par e_{kl1} et e_{kl2} les restrictions respectives des crochets $[E_k, E_l]_{(1,0)}$ et $[E_k, E_l]_{(0,1)}$ à la courbe $X_0^+ = \mathcal{H}/\Gamma_0^+$. Nous avons vu dans ce chapitre (expmple de crochet entre restrictions) que $[e_k, e_l]_1 = \lambda(e_{kl1} + e_{kl2})$, (avec $\lambda \in \mathbb{C}$). On sait que $e_3 = 0$ et donc $\frac{de_3}{dz} = 0$, or $\frac{de_3}{dz}$ est la restriction de $\partial_1 E_3 + \partial_2 E_3$. Il suit que $e_{231} = -e_{232}$. La restriction de la relation (3.5) implique que $e_{241} = e_{242}$. Aprés restrictions des relations (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\begin{array}{rcll} e_{231}^2 & = & \frac{40}{3} e_4^4 (e_8 - 36e_4^2) & (a) \\ e_{241}^2 & = & \frac{1}{15}(5e_8 - 276e_4^2)(9072e_4^5 - 432e_4^3 e_8 + 5e_4 e_8^2) & (b) \end{array}$$

On a donc :

$$C'^2 \equiv \frac{[e_4, e_8]_1^2}{g_4^2} \equiv \frac{e_{241}^2}{(e_8 - 36e_4^2)^2},$$

en utilisant (b) on obtient :

$$C'^2 = (252e_4^2 - 5e_8)(276e_4^2 - 5e_8)e_4,$$

ce qui montre que C' est une forme modulaire holomorphe de poids 10 sur le groupe Γ_0^+. On a aussi :

$$C'^2 \equiv e_4(256e_4^2 + g_4^2)(192e_4^2 + g_4^2). \qquad (N)$$

Nous venons donc de montrer l'existence de A_4, g_4, C' et la relation entre ces trois formes modulaires.

En utilisant son développement en Taylor (numérique) autour de 0, on peut exprimer B_4 comme combinaison linéaire : $aA_4 + bg_4$ (car $\dim M_4(\Gamma_0^+) = 2$). En utilsant la relation (N), l'expression de B_4, comme combinaison linéaire de A_4 et g_4 et la définition de C_{10} comme premier crochet de A_4 et B_4 on démontre la relation $C_{10}^2 \equiv A_4 B_4 (A_4 - B_4)(A_4^2 - A_4 B_4 + B_4^2)$, que nous avons déja obtenu numériquement.

Cette relation est une équation différentielle (vu la définition de C) sur la courbe X_0^+, nous venons alors de "remonter" cette équation différentielle sur la surface modulaire, en utilisant le développment en Fourier des formes moduliares de Hilbert, on a pu montrer l'existence d'une équation différentielle sur la surface. Par restriction, nous obtenons une équation différentielle sur X_0^+. En utilisant nos résultats de ce chapirtre sur les relations entre les

crochets entre différents restrictions et les restrictions des différents crochets, et en utilisant cette technique de remonte, on pourra montrer l'existence du système différentiel S que nous avons étudié numériquement.

Chapitre 4

Structure des anneaux de formes quasi-modulaires

Résumé

On démontre un théorème de structure pour l'anneau des formes quasi-modulaires $\widetilde{M}_*(\Gamma)$ gradué par le poids, sur n'importe quel groupe discret et co-compact $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$: cet anneau s'avère être toujours infiniment engendré. On calcule le nombre de générateurs nouveaux en chaque poids . Le nombre en question est fixe et est égal à $\dim_{\mathbb{C}} I/(I \cap \widetilde{I}^2)$ où I et $\widetilde{I}$ désignent respectivement l'idéal des formes modulaires sur Γ (respectivement l'idéal des formes quasi-modulaires sur Γ) en poids positif. En particulier ce nombre ne dépend que du groupe qu'on considère. On construit aussi des anneaux $\widetilde{R}$ finiment engendrés en poids positif et contenant les anneaux de formes quasi-modulaires sur des groupes co-compacts.

4.1 Introduction

La notion des formes quasi-modulaires a été introduite pour la première fois par Kaneko-Zagier dans [9]. Ces objets apparaissent en mathématique et en physique théorique. On cite l'exemple dans [9], provenant de la théorie symétrie miroir en dimension 1.

La structure de $\widetilde{M}_*(\Gamma_1)$ (où Γ_1 désigne le groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$) a été déja donnée dans [9], où on démontre que l'anneau en question est isomorphe à $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$, où E_2, E_4 et E_6 désignent respectivement les séries

d'Eisenstein en poids $2, 4$ et 6.

On s'interesse à l'étude des anneaux de formes quasi-modulaires sur des groupes $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ discrets et co-compacts. Dans le pargraphe 4.2 on rappelle des propriétés générales des formes quasi-modulaires sur des groupes quelconques ; il s'agit essentiellement de rappels de résultats dans [22] et [9].

Dans le paragraphe 4.3 nous donnons une réponse au problème posé par Don Zagier, c'est-à-dire la structure additive et multiplicative des anneaux de formes quasi-modulaires sur des groupes $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ discrets et co-compacts. Nos résultats principaux apparaissent au Théorème (9) et au corollaire du Théorème (9).

4.2 Propriétés générales

On considère un sous-groupe discret Γ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, de covolume fini. On rappelle les définitions de formes modulaires, quasi-modulaires, modulaires presque holomorphes et champs modulaires sur le groupe Γ. La partie imaginaire de $z \in \mathcal{H}$ (le demi-plan de Poincaré) sera notée y. Nous avons déja donné la définition d'une forme modulaire et d'une forme modulaire presque-holomorphe dans le chapitre I, nous rappelons ici ces définitions pour la comodité du lecteur.

Définition 24. Une *forme modulaire* de poids k sur Γ, est une fonction holomorphe f sur $\mathcal{H}$ à croissance tempérée [1], telle que :

$$(c\,z+d)^{-k}\, f(\frac{a\,z+b}{c\,z+d}) = f(z), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ et } z \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

Définition 25. *Une forme quasi-modulaire de poids k et profondeur $\leq p$ sur Γ, est une fonction holomorphe f sur $\mathcal{H}$ à croissance tempérée, telle que, pour tout $z \in \mathcal{H}$, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & (c\,z+d)^{-k}\, f(\frac{a\,z+b}{c\,z+d}) \end{array}$$

est un polynôme en $\frac{c}{c\,z+d}$, de degré $\leq p$. Autrement dit on a :

$$(cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d}) = \sum_{j=0}^{p} f_j(z)(\frac{c}{cz+d})^j, \quad \forall z \in \mathcal{H}, \tag{2}$$

[1] C'est-à-dire $|f(z)|$ est borné par une puissance de $\frac{|z|^2+1}{y}$.

avec des fonctions $f_j : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (j = 0, \cdots, p)$.

Remarque. Cette définition qui n'est pas celle de [9] a été suggérée par Werner Nahm. L'équivalence des deux définitions est une conséquence du Théorème (7).

Définition 26. Une *forme modulaire presque-holomorphe de poids k et profondeur $\leq p$ sur Γ est un polynôme en $\frac{1}{y}$ de degré $\leq p$, à coefficients des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}$, à croissance tempérée telle qu'on a (1) pour tout* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ *et* $z \in \mathcal{H}$.

Puisqu'on a $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, on peut écrire une telle forme comme :

$$F(z) = f_0(z) + \frac{f_1(z)}{z-\overline{z}} + \frac{f_2(z)}{(z-\overline{z})^2} + \cdots + \frac{f_p(z)}{(z-\overline{z})^p} \text{ avec les } f_i \text{ holomorphes.}$$

(Cette écriture sera plus commode que si on avait défini f_j comme le coefficient de y^{-j} dans F.)

Définition 27. Un *champ modulaire* de poids k et profondeur $\leq p$ est une application holomorphe (à croissance tempérée) :

$$\begin{array}{rcl} E : \mathcal{H} & \longrightarrow & \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (f_0(z), f_1(z), \cdots) \end{array}$$

avec $f_l = 0$ pour $l > p$ et où les f_l satisfont à l'équation fonctionelle :

$$(cz+d)^{-k+2l} f_l(\frac{az+b}{cz+d}) = \sum_{j \geq l} \binom{j}{l} f_j(z) (\frac{c}{cz+d})^{j-l}. \tag{4.1}$$

Notation. On note par $M_* = \oplus_{k \geq 0} M_k$ respectivement($\widetilde{M}_* = \oplus_{k \geq 0} \widetilde{M}_k$, $\widehat{M}_* = \oplus_{k \geq 0} \widehat{M}_k$, $\overrightarrow{M}_* = \oplus_{k \geq 0} \overrightarrow{M}_k$) les anneaux gradués de formes modulaires respectivement(formes quasi-modulaires, formes modulaires presque-holomorphes et champs modulaires) et par $\widetilde{M}_*^{(\leq p)}, \widehat{M}_*^{(\leq p)}, \overrightarrow{M}_*^{(\leq p)}$ respectivement les sous-espaces de formes quasi-modulaires, formes presque holomorphes, champs modulaires, de profondeur $\leq p$ sur un groupe Γ donné.

Théorème 7 (Kaneko-Zagier). *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret de covolume fini et* p *un entier positif. On a alors les isomorphismes suivants :*

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{M}_*^{(\leq p)} & \simeq & \overrightarrow{M}_*^{(\leq p)} & \simeq & \widehat{M}_*^{(\leq p)} \\ f & \longrightarrow & (f_0, \cdots, f_p) & \longleftrightarrow & \sum_{j=0}^{p} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j} \end{array}$$

La première application associe à f *la suite des coefficients* f_j *provenant de (2), tandis que son inverse est donné simplement par :* $(f_0, \cdots, f_p) \longrightarrow f_0$.

Démonstration. On commence par démontrer le deuxième isomorphisme. Par définition, $F = \sum_{j=0}^{p} \frac{f_j(z)}{(z-\overline{z})^j}$ satisfait à l'équation fonctionelle (1). En appliquant ceci à l'inverse $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ d'un élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ et en observant que $\frac{dz-b}{-cz+a} - \frac{d\overline{z}-b}{-c\overline{z}+a} = \frac{z-\overline{z}}{|-c\,z+a|^2}$, on a :

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{n=0}^{p} f_n(\frac{dz-b}{-cz+a})\ (c + \frac{-cz+a}{z-\overline{z}})^n\ (-cz+a)^n \\ &= (-cz+a)^k\ \textstyle\sum_{n=0}^{p} f_n(z)\ (z-\overline{z})^{-n} \end{aligned}.$$

En comparant les coefficients de $(z-\overline{z})^{-l}$ on obtient :

$$(-cz+a)^{k-2l} f_l(z) = \sum_{j \geq l} \binom{j}{l} f_j\big(\frac{dz-b}{-cz+a}\big)\big(c(-cz+a)\big)^{j-l}.$$

En remplacant z par $\frac{az+b}{cz+d}$, on obtient les équations fonctionelles (4.1) que doivent satisfaire les f_j dans la définition d'un champ modulaire, et inversement. Pour montrer le premier isomorphisme, rappelons que si $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}$, alors f satisfait à (2) avec des fonctions $f_j : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$. Il est clair que les f_j sont holomorphes et que $f_0 = f$ (en prenant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Id$). D'autre part les f_j satisfont à des équations fonctionnelles. En effet soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ et $\gamma'' = \gamma\gamma' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$, l'équation (2) s'écrit $(f_0 \mid_k \gamma)(z) = \sum_{n=0}^{p} f_n(z)(\frac{c}{cz+d})^n$, en composant par $(\mid_k \gamma')$ on obtient :

$$\begin{aligned} (f_0 \mid_k \gamma\gamma')(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{p} f_n(\gamma'(z))(\frac{c}{c\gamma'(z)+d})^n (c'z+d')^{-k} \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f_n(\gamma'(z))}{(c'z+d')^{k-n}} (\frac{c''(c'z+d')-c'(c''z+d'')}{c''z+d''})^n \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{p} \frac{f_n(\gamma' z)}{(c'z+d')^{k-n}} ((c'z+d')\frac{c''}{c''z+d''} - c')^n \end{aligned}$$

D'autre part : $(f_0 \mid_k \gamma\gamma')(z) = (f_0 \mid_k \gamma'') = \sum_{n=0}^{p} f_n(z)(\frac{c''}{c''z+d''})^n$. En comparant les coefficients de $(\frac{c''}{c''z+d''})^j$ on obtient :

$$f_j(z) = \sum_{n\geq j} \binom{n}{j} \frac{f_n(\gamma'(z))}{(c'z+d')^{k-n}} (cz'+d')^j(-c')^{n-j}$$

ou encore :

$$(c'z+d')^{k-2j} f_j(z) = \sum_{n\geq j} \binom{n}{j} f_n(\gamma'(z))(-c'(c'z+d'))^{n-j}.$$

En remplacant z par $\gamma'^{-1}(z) = \alpha(z)$ (avec $\alpha = \gamma'^{-1}$) on obtient :

$$(f_j \mid_{k-2j} \alpha) = \sum_{n\geq j} \binom{n}{j} f_n(z)(\frac{-c'}{-c'z+a'})^n.$$

Ceci montre que $(f_0, \cdots, f_p)$ est un champ modulaire. Réciproquement si on part d'un champ modulaire, sa première coordonnée vérifie l'équation (2), donc cette coordonnée est une forme quasi-modulaire de poids k et profondeur $\leq p$. D'autre part, si f_0 s'annule sur $\mathcal{H}$ le pôlynôme $\sum_{n=0}^{p} f_n(z)X^n$ s'annulle une infinité de fois, c'est donc le polynôme nul, ce qui implique $f_n = 0$ pour tout n. Ceci montre l'injectivité de $(f_0, \cdots, f_p) \longrightarrow f_0$. L'injectivité de l'application réciproque est évidente. □

Proposition 22. *L'opérateur D de dérivation par rapport à z agit sur les espaces de formes quasi-modulaires en augmentant le poids de 2 et le profondeur de 1. On a pour tout $k \geq 0$ et $p \geq 0$:*

$$D : \widetilde{M}_k^{(\leq p)} \longrightarrow \widetilde{M}_{k+2}^{(\leq p+1)}.$$

Démonstration. Soit $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}$ Par définition même on a :

$$(c\,z+d)^{-k}\, f(\frac{a\,z+b}{c\,z+d}) = \sum_{0\leq j\leq p} f_j(z)\, (\frac{c}{c\,z+d})^j$$

avec des fonctions holomorphes f_j. On a donc :

$$\begin{aligned}
& (c\,z+d)^{-k-2}\, f'(\tfrac{a\,z+b}{c\,z+d}) \\
= \quad & D[(c\,z+d)^{-k}\, f(\tfrac{a\,z+b}{c\,z+d})] + kc\,(c\,z+d)^{-k-1}\, f(\tfrac{a\,z+b}{c\,z+d}) \\
= \quad & D[\textstyle\sum_{0\leq j\leq p} f_j(z)\, (\frac{c}{c\,z+d})^j] + \frac{kc}{c\,z+d} \textstyle\sum_{0\leq j\leq p} f_j(z)\, (\frac{c}{c\,z+d})^j \\
= \quad & \textstyle\sum_{0\leq j\leq p+1} [f_j'(z) + (k-j+1) f_{j-1}(z)]\, (\frac{c}{c\,z+d})^j
\end{aligned}$$

(avec $f_{-1} \equiv f_{p+1} \equiv 0$). Il suit que f' est de poids $k+2$ et de profondeur $\leq (p+1)$. $\square$

Ce calcul montre aussi :

Proposition 23. *L'opérateur D agissant sur les espaces de formes quasi-modualires induit un opérateur D sur les espaces de champs modulaires définie par :*

$$\begin{array}{rcl} D : \overrightarrow{M}_k^{(\leq p)} & \longrightarrow & \overrightarrow{M}_{k+2}^{(\leq p+1)} \\ (f_0, \cdots, f_j, \cdots, f_p) & \longmapsto & (f_0', \cdots, f_j' + (k-j+1)f_{j-1}, \cdots, \cdots), \end{array}$$

pour tout $k \geq 0$ et $p \geq 0$.

Définition 28. On définit un opérateur δ sur les espaces de champs modulaires par :

$$\begin{array}{rcl} \delta : \overrightarrow{M}_k^{(\leq p)} & \longrightarrow & \overrightarrow{M}_{k-2}^{(\leq p-1)} \\ (f_0, \cdots, f_j, \cdots, f_p) & \longmapsto & (f_1, \cdots, (j+1)f_{j+1}, \cdots, pf_p), \end{array}$$

pour tout $k \geq 2$ et $p \geq 1$.

Remarque. Il est facile de vérifier (en utilisant la définition d'un champ modulaire et l'identité $(j+1)\binom{l}{j+1} = l\binom{l-1}{j}$ pour tout $l \geq j+1$) que δ envoit $\overrightarrow{M}_k^{(\leq p)}$ dans $\overrightarrow{M}_{k-2}^{(\leq p-1)}$.

Proposition 24. *Si $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}$ est une forme quasi-modulaire et $F(z) = f_0(z) + \frac{f_1(z)}{z-\overline{z}} + \cdots + \frac{f_p(z)}{(z-\overline{z})^p}$ avec $(f_0 = f)$ la forme modulaire presque-holomorphe correspondante, alors chaque f_l est une forme quasi-modulaire de poids $k-2l$ et de profondeur $\leq p-l$. En particulier, on a une application $\delta : \widetilde{M}_k \longrightarrow \widetilde{M}_{k-2}$ qui envoie $\widetilde{M}_k^{(\leq p)}$ en $\widetilde{M}_{k-2}^{(\leq p-1)}$ pour tout p, donnée par $f = f_0 \longrightarrow f_1$. Elle a les propriétés suivantes :*

(i) Le noyau de l'application $\delta : \widetilde{M}_k \longrightarrow \widetilde{M}_{k-2}$ est l'espace M_k.

(ii) Si $f(z)$ est une forme quasi-modulaire quelconque, la forme modulaire F presque-holomorphe associée est donnée par $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta^n f)(z)}{n!\ (z-\overline{z})^n}$.

Remarque. La somme en (ii) est bien sûr finie puisqu'on a : $\delta^n(f) = 0$ pour $n > p$ si f est de profondeur $\leq p$. En fait, puisque $\widetilde{M}_k^{(\leq 0)} = M_k$ s'annule pour $k < 0$, on voit que la profondeur d'une forme quasi-modulaire de poids k est

borné à priori par $\frac{k}{2}$. On aurait pu définir δ au niveau des formes modulaires presque-holomorphes par :

$$F = \sum_j \frac{f_j}{(z-\overline{z})^j} \longrightarrow \delta F(z) = \sum_j \frac{(j+1)f_{j+1}}{(z-\overline{z})^j} = (z-\overline{z})^2 \frac{\partial F(z)}{\partial \overline{z}} \qquad (4.2)$$

C'est un exercice de vérifier que le membre de droite de l'équation est modulaire de poids $k-2$, il est évident qu'il définit alors une forme presque-holomorphe de profondeur $\leq p-1$.

Démonstration. L'énoncée (ii) est clair en utilisant la Définition 26 et le Théorème 7. La partie (i) en est une conséquence puisque : $\delta(f) = 0 \Leftrightarrow \delta^n(f) = 0$ $(\forall n \geq 1) \Leftrightarrow f = F \Leftrightarrow F$ est holomorphe. □

Corollaire. *Soit $k \geq 0$, $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}$ et $F = f_0 + \frac{f_1}{z-\overline{z}} + \cdots + \frac{f_p}{(z-\overline{z})^p}$ la forme modulaire presque-holomorphe correspondante. Alors $f_p \in M_{k-2\,p}$ plus généralement : $f_j \in \widetilde{M}_{k-2\,j}^{(\leq p-j)}$.*

Démonstration. Par propriété de δ, il est clair que $f_j \in \widetilde{M}_{k-2\,j}^{(\leq p-j)}$, en particulier $f_p \in \widetilde{M}_{k-2\,p}^{(\leq 0)}$. Or, une forme quasi-modulaire de profondeur 0 est modulaire, d'où $f_p \in M_{k-2\,p}$. □

Définition 29. Soit H l'opérateur $\widetilde{M}_* \longrightarrow \widetilde{M}_*$, qui a toute forme quasi-modulaire f de poids k associe la forme quasi-modulaire $H(f) = k\,f$.

Remarque. L'opérateur H définit précédemment laisse invariant le profondeur ainsi que le poids.

Proposition 25. *Les opérateurs D, δ et H vérifient les relations :*

$$\begin{array}{rl} i) & [H, D] = 2\,D. \\ ii) & [H, \delta] = -2\,\delta. \\ iii) & [\delta, D] = H. \end{array}$$

Autrement dit on a une représentation de l'algèbre de Lie $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *sur les espaces $\widetilde{M}_*$, $\widehat{M}_*$ et $\overrightarrow{M}_*$.*

Démonstration. Les énoncées (i) et (ii) disent simplement que le poids d'une forme quasi-modulaire augmente ou diminue par 2 qu'on applique D ou δ, ce qu'on sait déja.

Pour démontrer (iii) on va calculer le crochet $[\delta, D]$ sur les espaces de champs modulaires. En utilisant le Théorème 7, on obtient alors le résultat correspondant au niveau des espaces de formes quasi-modulaires ou modulaires presque-holomorphes. On sait que pour un champ modulaire de poids k et profondeur $\leq p$, on a $\delta(f_0, \cdots, f_p) = (f_1, 2f_2, \cdots, jf_j, \cdots)$. On en déduit en utilisant la Proposition 23 :

$$\begin{aligned} D\delta(f_0, \cdots, f_j, \cdots, f_p) &= D(f_1, 2f_2, \cdots, pf_p) \\ &= (f_1', \cdots, (j+1)f_{j+1}' + (k-1-j)jf_j, \cdots). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$D(f_0, \cdots, f_j, \cdots, f_p) = (f_0', f_1' + k\ f_0, \cdots, f_j' + (k-j+1)f_{j-1}, \cdots)$$

$$\delta D(f_0, \cdots, f_p) = (f_1' + k\ f_0, \cdots, (j+1)f_{j+1}' + (j+1)(k-j)f_j, \cdots).$$

En soustrayant les deux équations (donnant δD et $D\delta$ d'un champ), on trouve :

$$[\delta, D](f_0, \cdots, f_p) = (k\ f_0, \cdots, kf_j, \cdots) = k(f_0, \cdots, f_j),$$

ce qui implique (par isomorphismes du Théorème 7) la propriété $[\delta, D](f) = H(f)$. □

Dans la suite on va calculer la restriction de l'opérateur $\delta^n D^n$ à l'anneau des formes modulaires. D'après la Proposition 24 cela revient à calculer la restriction : $(\delta^n D^n)_{|\ker\delta}$.

Proposition 26. *La restriction de l'opérateur $\delta^n D^n$ à l'espace des formes modulaires est donnée par :*

$$(\delta^n\ D^n)_{|\ker(\delta)} = n!\ \prod_{j=0}^{n-1}(H+j).$$

Démonstration. Dans la démonstration δD désigne la restriction de l'opérateur δD au noyau : $\ker(\delta)$. D'aprés la Proposition 25, on sait que $\delta D = D\ \delta + H$, ce qui donne aprés restriction $\delta D = H$. Soit $j > 1$, on suppose que : $\delta^{j-1}\ D^{j-1} = P_{j-1}(H)$ avec P_{j-1} polynôme de degré $(j-1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \delta^j D^j &= \delta^{j-1}(\delta D)\ D^{j-1} = \delta^{j-1}(D\delta + H)D^{j-1} \\ &= \delta^{j-2}(\delta D)\delta D^{j-1} + \delta^{j-1}HD^{j-1} \\ &= \delta^{j-2}\ D\delta^2 D^{j-1} + \delta^{j-2}H\delta D^{j-1} + \delta^{j-1}HD^{j-1} \\ &= \cdots \\ &= \delta D\ \delta^{j-1}\ D^{j-1} + \textstyle\sum_{n=1}^{j-1} \delta^n\ H\ \delta^{j-1-n}\ D^{j-1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\delta^n H &= \delta^{n-1} H\delta + 2\delta^n \text{ (par la Proposition 25)}\\ &= \delta^{n-2}\ H\ \delta^2 + 2(2\delta^n) = \cdots = n(2\delta^n) + H\delta^n.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\delta^j\ D^j &= \delta D\ \delta^{j-1}\ D^{j-1} + \textstyle\sum_{n=1}^{j-1}(H+2n)\delta^{j-1}D^{j-1}\\ &= \delta D\ \delta^{j-1}\ D^{j-1} + (j-1)(H+j)\delta^{j-1}D^{j-1},\end{aligned}$$

soit alors :

$$\begin{aligned}P_j(H) &= HP_{j-1}(H) + (j-1)(H+j)P_{j-1}(H)\\ &= j(H+(j-1))\ P_{j-1}(H).\end{aligned}$$

Le résultat volue : $P_n = n!\prod_{j=0}^{n-1}(H+j)$ suit par induction. □

Corollaire. *Soit $f \in M_k$ une forme modulaire de poids k et $n \geq 0$, on a alors :*

$$\delta^n\ D^n(f) = n!^2 \binom{k+n-1}{n} f.$$

Démonstration : D'après (i) de la Proposition 24 , $f \in \ker(\delta)$. Donc par la proposition précédente le résultat est immédiat. □

Proposition 27. *Soit $k \geq 4$ et $p \geq 1$. Si $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}$ alors :*

$$p!^2 \binom{k-p-1}{p} f - D^p(\delta^p(f)) \in \widetilde{M}_k^{(\leq p-1)}.$$

En particulier si $k > 2p$ alors f est la somme de la dérivée $p-$ième d'une forme modulaire et d'une forme quasi-modulaire de profondeur $\leq p-1$.

Démonstration. D'après la Proposition 24 et son corollaire on a, $\delta^p(f) \in M_{k-2p}$. En appliquant le corollaire de la Proposition 26 à $\delta^p(f)$ on obtient la proposition. □

4.3 Structures des anneaux des formes quasi-modulaires

Dans ce paragraphe, on étudie les structures additive et multiplicative des anneaux des formes quasi-modulaires (de poids pair) pour des sous-groupes discrets de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ co-compacts. On commence par démontrer

une proposition importante et spécifique au groupes co-compacts, ensuite on donne deux théorèmes de structure. Pour un groupe Γ discret co-compact on note par I (respectivement $\widetilde{I}$) l'idéal des formes modulaires (respectivement quasi-modulaires) sur Γ en poids strictement positif. Finalement, $\widetilde{I}_k^2 = \sum_{0<j<k} \widetilde{M}_j \widetilde{M}_{k-j}$ désigne le $\mathbb{C}$- espace des formes quasi-modulaires en poids k décompasables.

Proposition 28. **Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret co-compact. On a alors :**

$$\widetilde{M}_2(\Gamma) = M_2(\Gamma) \qquad .$$

Démonstration. Supposons qu'il existe f, une forme quasi-modulaire de poids 2 non modulaire. Soit F la forme modulaire presque-holomorphe associée. On a alors :

$$F(z) = f(z) + \frac{c}{z-\overline{z}} \text{ avec } c \neq 0,$$

en effet, $f_0 = f \in M_2$ donc $f_1 \in M_0 = \mathbb{C}$. Soit $\omega(z) = F(z)\, dz$. La modularité de F entraîne l'invariance par Γ de la forme ω, qui peut donc être considérée comme une 1-forme sur le quotient $X = \mathcal{H}/\Gamma$. Or, on a :

$$d\omega = -\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\, dz \wedge d\overline{z} = -\frac{c}{(z-\overline{z})^2}\, dz \wedge d\overline{z}.$$

C'est-à-dire, $d\omega$ est proportionelle à la forme volume. Donc il existe $\alpha \neq 0$ telle que :

$$0 \neq \alpha\, Vol(X) = \int_X d\omega.$$

D'autre part : $\int_X d\omega = 0$. La dernière égalité est conséquence de la formule de Stokes et du fait que la variété X n'a pas de bord. On obtient alors une contradiction. □

Théorème 8. **Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, un sous-groupe discret co-compact. On a alors pour tout $k > 0$:**

$$\widetilde{M}_k = \bigoplus_{0 \leq i < k/2} D^i M_{k-2i}.$$

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence. D'après la Proposition 24, on a : pour tout $k \geq 2$, si $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}$ alors : $p \leq \frac{k-2}{2}$. En effet :

$$\delta^{(\frac{k-2}{2})}(f) \in \widetilde{M}_2 = M_2 \text{ donc } \delta^{\frac{k}{2}}(f) = 0.$$

En particulier, $p < \frac{k}{2}$ et on peut donc appliquer la Proposition 27, pour écrire $f = g + c_p D^p(f_p)$ avec $f_p \in M_{k-2p}$ et $g \in \widetilde{M}_k^{(<p)}$. Par hypothèse de récurrence, g est combinaison linéaire de derivées de formes modulaires de poids $\leq k$, donc f aussi. $\square$

Remarque. Dans le cas non co-compact les résultats (4.1) et (4.2) sont faux. Par exemple pour $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, on a $\widetilde{M}_2 = M_2 \oplus \mathbb{C}E_2$ et :

$$\widetilde{M}_k = \bigoplus_{i=0}^{k/2} D^i(M_{k-2i}) \oplus \mathbb{C}D^{(\frac{k-2}{2})}(E_2) \quad .$$

Théorème 9. **Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret co-compact. Soit $\epsilon = \dim_{\mathbb{C}} I/(I \cap \widetilde{I}^2)$ et $\{A_1, \cdots, A_\epsilon\}$ des éléments homogènes de I linéairement indépendants modulo $(\widetilde{I})^2$ de poids respectifs $w_1, \cdots, w_\epsilon \in 2\mathbb{Z}$. On a alors pour tout $k \geq 0$,**

$$(\widetilde{I}/\widetilde{I}^2)_k = \bigoplus_{i=1, w_i \leq k}^{\epsilon} \mathbb{C}D^{(\frac{k-w_i}{2})}(A_i) \qquad .$$

Démonstration. On note par P_s, $(s = 2, 4, \cdots)$ l'espace engendré par les A_i avec $w_i = s$ et on pose $\delta_i = \dim P_i$ de façon que $\sum_i \delta_i = \epsilon$. On a :

$$\begin{array}{ccc} P_s & \hookrightarrow & M_s \\ & \searrow & \downarrow \mathrm{D}^n \\ & & \widetilde{M}_{s+2n} \end{array}$$

Les applications du diagramme précédent sont injectives. En effet $P_s \subset M_s$. D'autre part, D^n est une application injective. En effet : $D^n(f) = 0$ implique f polynôme, d'autre part le seul polynôme qui coincide avec une forme modulaire en poids strictement positif est le polynôme nul, donc $f = 0$. On en déduit que :

$$\dim D^n(P_s) = \delta_s \quad .$$

D'autre part : $D^{\frac{k-2}{2}}(P_2) \subset D^{\frac{k-2}{2}}(M_2), \cdots, D^{\frac{k-w_\epsilon}{2}}(P_{w_\epsilon}) \subset D^{\frac{k-w_\epsilon}{2}}(M_{w_\epsilon})$. Or, le Théorème 8 de structure additive implique que les espaces $D^{\frac{k-s}{2}}P_s$, $(s = 2, 4, \cdots, w_\epsilon)$ sont en somme directe. D'autre part pour tout $n \geq 0$ et s : $2 \leq s \leq w_\epsilon$ on a,

$$D^n(P_s) \cap (\widetilde{I})^2 = 0 \qquad .$$

En effet, d'après le corollaire de la Proposition 26,

$$\forall f \in P_s \ , \ \delta^n D^n(f) = c_n \ f \text{ avec } c_n \neq 0 \quad .$$

Or, δ est une dérivation, c'est-à-dire :

$$\forall f, g \in \widetilde{I}, \delta(gh) = \delta(g)h + g\delta(h) \qquad .$$

Ceci implique $\delta(\widetilde{I}^2) \subset \widetilde{I}^2$, en effet $M_0 \cap Im(\delta) = 0$ car $\widetilde{M_2} = M_2$. Il nous reste à montrer que : pour tout $f_2 \in P_2, \cdots, f_{w_\epsilon} \in P_{w_\epsilon}$, si $f_2^{(\frac{k-2}{2})} + \cdots + f_{w_\epsilon}^{(\frac{k-w_\epsilon}{2})} \in \widetilde{I}^2$ alors $f_2 = \cdots = f_{w_\epsilon} = 0$. On pose $\alpha_2 = \frac{k-2}{2}, \cdots, \alpha_{w_\epsilon} = \frac{k-w_\epsilon}{2}$. On suppose alors que :

$$f_2^{(\alpha_2)} + \cdots + f_{w_\epsilon}^{(\alpha_\epsilon)} \in \widetilde{I}^2.$$

On peut supposer que :

$$\alpha_2 \geq \alpha_4 \geq \cdots \geq \alpha_{w_\epsilon}.$$

On applique l'opérateur δ^{α_2}, tous les $f_i^{(\alpha_i)}$ avec $i > 2$ ont pour image 0. On en déduit : $f_2 \in \delta^{(\alpha_2)}(\widetilde{I}^2) \subset \widetilde{I}^2$ donc $f_2 = 0$. On recommonce avec l'opérateur δ^{α_4}, on montre que $f_4 = 0$ puis de proche en proche jusqu'a en déduire $f_{w_\epsilon} = 0$. Ce qui finit la démonstration. □

Corollaire. **Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ un sous-groupe discret co-compact. Soit $\epsilon = \dim_{\mathbb{C}} I/(I \cap \widetilde{I}^2)$ et $\{A_1, \cdots, A_\epsilon\}$ des élements homogènes de I linéairement indépendants modulo $\widetilde{I}^2$ de poids respectifs $w_1, \cdots, w_\epsilon$, on a alors :**

$$\dim_{\mathbb{C}}(\widetilde{I}/\widetilde{I}^2)_k = \epsilon, \ \forall k \geq \max_i\{w_i\}$$

En particulier $\widetilde{M_*}$ n'est pas finiment engendré comme $\mathbb{C}$-algèbre.

Remarque. Ce résultat est faux dans le cas non co-compact. Par exemple pour $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, on a : $\widetilde{M_*} \simeq \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ avec E_2,E_4 et E_6 les séries d'Eisenstein de poids respectifs 2,4 et 6.

Démonstration. Dire que $\widetilde{M_*}$ est finiment engendré est équivalent à dire que $\dim((\widetilde{I}/\widetilde{I}^2)_k) = 0$, pour k assez grand. Le reste du corollaire est conséquence du Théorème (9). □

Remarque. On finit cette section par remarquer que les idées utilisés ici, permettent de démontrer deux théorèmes plus généraux, sur les structures additive et multiplicative de la clôture différentielle $\mathrm{CL}(\mathcal{M})_*$ d'un anneau $\mathcal{M}_*$ différent de $\mathbb{C}$ et engendré par des formes modulaires holomorphes ou des formes modulaires méromorphes en poids strictement positif. On va définir la clôture différentielle, on énonce les théorèmes correspondants. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les démonstrations données dans cette section permettent de démontrer ces derniers enoncés : le point clé pour le dernier résultat est que $\mathrm{CL}(\mathcal{M})_2 = \mathcal{M}_2$.

Définition 30. *Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret de covolume fini. Soit A_* un sous-anneau gradué de l'anneau des formes modulaires méromorphes sur Γ. La clôture différentielle $\mathrm{CL}(A)_*$ de A_* est le plus petit anneau contenant A_* et stable par la dérivation D, avec la graduation $D^j A_k \subset \mathrm{CL(A)_{k+2j}}$.*

Notation. On note par J_A l'idéal des éléments en poids strictment positif de $\mathrm{CL(A)}_*$ et par I_A l'idéal de A_* des élements en poids strictement positif. L'idéal J_A^2 est l'idéal des formes décomposables dans $\mathrm{CL(A)}_*$.

Théorème 10. *Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret de covolume fini. Soit $\mathcal{M}_*$ un anneau de formes modulaires holomorphes ou méromorphes en poids strictement positif sur Γ, et stable par crochets de Rankin-Cohen. On a alors pour tout $k \geq 0$:*

$$\mathrm{CL}(\mathcal{M})_k = \bigoplus_{0 \leq j \leq \frac{k}{2}} D^j \mathcal{M}_{k-2j}.$$

Théorème 11. **Soit $\mathcal{M}_*$ un anneau comme dans le théorème précédent. Soit $\epsilon = \dim_{\mathbb{C}} I_{\mathcal{M}}/(I_{\mathcal{M}} \cap J_{\mathcal{M}}^2)$ et soit $\{f_1, \cdots, f_\epsilon\}$ des éléments homogènes de $I_{\mathcal{M}}$ linéairement indépendantes modulo $J_{\mathcal{M}}^2$ de poids respectives $l_1, \cdots, l_\epsilon$. On a alors pour tout k pair :**

$$(J_{\mathcal{M}}/J_{\mathcal{M}}^2)_k = \bigoplus_{\substack{i=1,\cdots,\epsilon \\ l_i \leq k}} \mathbb{C} D^{(\frac{k-l_i}{2})}(f_i).$$

En particulier,

$$\dim_{\mathbb{C}}(J_{\mathcal{M}}/J_{\mathcal{M}}^2)_k = \epsilon, \qquad \forall k \geq \max\{l_1, \cdots, l_\epsilon\}.$$

L'anneau $\mathrm{CL}(\mathcal{M})_*$ n'est pas finiment engendré comme $\mathbb{C}$-algèbre.

4.3.1 Exemples

Rappelons que l'anneau M_* des formes modulaires sur le groupe Γ_0^+ est engendré par trois formes modulaires A_4, B_4 et C_{10} de poids respectifs $4, 4$ et 10 avec une relation $C_{10}^2 = P_5(A_4, B_4)$ où P_5 est un polynôme homogène de degré 5 en A_4 et B_4. La série de Hilbert-Poincaré associée à la suite des dimensions des espaces vectoriels $M_k, (k \geq 0)$ de formes modulaires en poids k est $S(T) = \dfrac{1+T^{10}}{(1-T^4)^2} = 1 + 2T^4 + 3T^8 + T^{10} + \dots$.

Le théorème (8) de structure additive des anneaux de formes quasi-modulaires sur des groupes modulaires co-compacts, implique que la série de Hilbert-Poincaré associée à la suite des dimensions des espaces vectoriels de formes quasi-modulaires sur Γ_0^+ est donné par :

$$\widetilde{S}(T) = 1 + \frac{S(T)-1}{1-T^2} = \frac{1-T^2+2T^6}{(1-T^2)(1-T^4)^2} = 1 + 2T^4 + 2T^6 + 5T^8 + 6T^{10} + \dots$$

On en déduit le tableau suivant, où $\langle f_1, \cdots, f_r \rangle$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par $f_1, \cdots, f_r$.

k	$\dim M_k$	M_k	$\dim \widetilde{M}_k$	$\widetilde{M}_k$	ϵ_k
0	1	$\mathbb{C}$	1	$\mathbb{C}$	0
2	0	$\{0\}$	0	$\{0\}$	0
4	2	$\langle A, B \rangle$	2	$\langle A, B \rangle$	2
6	0	$\{0\}$	2	$\langle A', B' \rangle$	2
8	3	$\langle A^2, AB, B^2 \rangle$	5	$\langle A^2, AB, B^2, A'', B'' \rangle$	2
10	1	$\langle C \rangle$	6	$\langle C, AB', AA', BB', A''', B''' \rangle$	2

Ici ϵ_k est le nombre de nouveaux générateurs de $\widetilde{M}_k$ définies en poids k.

4.4 Anneaux finiment engendrés contenant les formes quasi-modulaires

THÉORÈME 12. **Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ discret et co-compact. Il existe ϕ une forme quasi-modulaire en poids 2 sur Γ avec $\delta(\phi) = 1$ ayant des pôles simples dans l'orbite de i et aucun autre pôle. Pour n'importe quelle telle forme ϕ on a : $\mathrm{R}es_{z=i}(\phi(z)dz) = \mathcal{K}$ pour tout $\alpha \in \Gamma.i$ avec $\mathcal{K} = \frac{\mathrm{V}ol(\mathcal{H}/\Gamma)}{4\pi}$.**

Remarque. La forme ϕ est unique à l'addition d'une forme modulaire holomorphe en poids 2 près (la dimension de l'espace de telles formes est égale au genre g de la surface de Riemann $\mathcal{H}/\Gamma$).

En conjugant Γ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, on pourrait remplacer $''i''$ dans le théorème par n'importe quel autre point $z_0 \in \mathcal{H}$.

Démonstration. On va commencer par supposer que Γ agit sur $\mathcal{H}$ sans points fixes (c'est-à-dire agit librement sur $\mathcal{H}$). Soit f une forme modulaire non nulle en poids $k > 0$, on sait alors que $\frac{f'}{f}$ est une forme quasi-modulaire en poids 2 méromorphe avec $\delta(\frac{f'}{f}) = k \neq 0$ et d'ailleurs les pôles de $\frac{f'}{f}$ sont simples et l'ensemble est Γ- invariant. Notons par $\{P_1, \cdots, P_n\}$ les pôles de $\frac{f'}{f}$ différentes de i dans $\mathcal{H}/\Gamma$. On cherche une forme modulaire méromorphe h en poids 2 telle que la somme $\frac{f'}{f} + h$ n'a pas de pôles en dehors de l'orbite de i. En particulier, on veut que h annule les parties principalles de $\frac{f'}{f}$ au voisinage des points P_i sauf en i. Soit $X = \mathcal{H}/\Gamma$, la surface de Riemann compacte (de genre g) provenant de Γ. L'hypothèse sur Γ implique que X est lisse et $g > 1$. On note par Ω^1_X le faisceau des 1-formes différentielles holomorphes sur X. Pour tout ensemble de points distincts $\{q_1, \cdots, q_m\} \subset X$ (avec $m \geq 1$), on note par $\Omega^1_X(q_1 + \cdots + q_m)$ le faisceau des 1-formes différentielles sur X avec au plus des pôles simples en $q_1, \cdots, q_m$. On va montrer que :

$$H^0(X, \Omega^1_X(q_1 + \cdots + q_m)) \simeq \mathbb{C}^{g+m-1}.$$

Soit K le diviseur canonique sur X, d'après le théorème de Riemann-Roch on a :

$$l(K + q_1 + \cdots + q_m) = l(-(q_1 + \cdots + q_m)) + deg(K + q_1 + \cdots + q_m) - g + 1.$$

Or, $deg(K) = 2g - 2$ et $l(-(q_1 + \cdots + q_m)) = 0$ on en déduit :

$$l(K + q_1 + \cdots + q_m) = g + m - 1 \quad .$$

Le théorème de Riemann-Roch appliqué au cas $m = 1$ et $m = n+1$, implique donc que dans la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(X, \Omega^1_X(i)) \longrightarrow H^0(X, \Omega^1_X(i + P_1 + \cdots + P_n)) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathbb{C}^n \longrightarrow 0,$$

l'application Res est surjective (où Res envoie une forme différentielle ω sur $(\mathrm{Res}_{P_1}(\omega), \cdots, \mathrm{Res}_{P_n}(\omega))$. On peut donc choisir h de poids 2 telle que $\phi =$

$\frac{1}{k}\frac{f'}{f}+h$ a au plus un pôle simple en i et aucun autre pôle en dehors de l'orbite de i, on a aussi $\delta\phi = 1$.

Pour calculer la constante $\mathcal{K}$ nous appliquons la formule de Stokes avec la 1-forme différentielle méromorphe $\omega(t) = \phi^*(t+i)\ dt$ sur X où $\phi^*(t+i) = \phi(t+i) + \frac{1}{t-\bar{t}}$ est la forme modulaire presque-holomorphe correspondant à ϕ. Soit U_ϵ un disque de centre i de rayon ϵ inclus dans X. On a alors par Stockes :

$$\int_{X-U_\epsilon} d\omega(t) = \int_{\partial(X-U_\epsilon)} \omega(t) \quad .$$

Or, $d\omega(t) = d\phi^*(t) \wedge dt = -\frac{\partial\phi^*(t+i)}{\partial\bar{t}} dt \wedge d\bar{t}$. D'autre part ϕ est holomorphe sur $\mathcal{H}$ donc :

$$-\frac{\partial\phi^*}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial\bar{t}}(\frac{1}{t-\bar{t}})dt \wedge \bar{t}.$$

car ϕ satisfait à $\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\phi = 0$. On obtient $d\omega(t) = \frac{dt\wedge d\bar{t}}{(t-\bar{t})^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2i}$ la forme volume donc $\int_{X-U_\epsilon} d\omega(t) = \frac{1}{2i}Vol(X-U_\epsilon)$. D'autre part $\int_{\partial(X-U_\epsilon)} \omega(t) = -\int_{\partial U_\epsilon} \omega(t)$ car X surface compacte (sans bords). On a donc : $\int_{\partial(X-U_\epsilon)} \omega(t) = -\int_{\partial(U_\epsilon)} \phi(t+i) + O(1)$ car : $\phi^*(t+i) - \phi(t+i)$ est une fonction continue sur ∂U_ϵ. D'autre part $\phi(t+i) \sim \frac{\mathcal{K}}{t}$ donc $-\int_{\partial U_\epsilon} \omega(t) = -(2\pi i)\mathcal{K} + O(1)$ en faisant tendre ϵ vers 0 on obtient $\mathcal{K} = \frac{Vol(X)}{4\pi}$. Ce qui finit la démonstration dans le cas des groupes agissant sur $\mathcal{H}$ sans points fixes.

On suppose maintenant que Γ agit sur $\mathcal{H}$ de manière pas nécessairement libre. D'aprés le Lemme de Selberg, il existe un sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini sans torsion. D'aprés ce qui précède, il existe α une forme quasi-modulaire sur Γ' en poids 2 avec au plus des pôles simples dans l'orbite de i. On pose :

$$\beta(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma'} [(\alpha \mid \gamma)(z) - \frac{c}{cz+d}],$$

avec $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $(\alpha \mid \gamma)(z) = (cz+d)^{-2}\alpha(\frac{az+b}{cz+d})$. On va montrer que β est une forme quasi-modulaire sur Γ en poids 2. Soit α^* la forme presque-holomorphe associée à α, il est facile de vérifier que

$$\beta^*(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma'} (\alpha^* \mid \gamma)(z),$$

est une forme presque-holomorphe sur Γ en poids 2 (car α^* est modulaire donc β^* correspond à la trace de α^* sur le groupe Γ). D'autre part on a :

$(\alpha^* \mid \gamma)(z) = [(\alpha \mid \gamma)(z) - \frac{c}{cz+d}] + \frac{1}{z-\overline{z}}$. Donc :

$$\beta^*(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma'} [(\alpha \mid \gamma)(z) - \frac{c}{cz+d}] + \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma'} \frac{1}{z-\overline{z}},$$

ou encore : $\beta^*(z) = \beta(z) + \frac{[\Gamma:\Gamma']}{z-\overline{z}}$. Ce qui montre que β est quasi-modulaire sur Γ en poids 2 et $\delta(\beta) = [\Gamma : \Gamma']$, il est aussi clair que β a au plus des pôles simples dans l'orbite de i. La forme $\frac{\beta}{[\Gamma:\Gamma']}$ sur Γ convient. □

Notation. On note par $M_*(\Gamma; \{i\})$ l'anneau des formes modulaires avec au plus des pôles dans l'orbite de i et on note par $M_*^{(\geq \alpha)}(\Gamma; i)$ le sous-ensemble des formes modulaires sur Γ avec ordre en i au moins égal à α. Finalement on note par $\widetilde{M}_2(\Gamma; \{i\})$, l'espace des formes quasi-modulaires en poids 2 sur Γ avec au plus des pôles dans l'orbite de i.

Lemme. *Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ un sous-groupe discret, co-compact et ϕ une forme quasi-modulaire sur Γ avec au plus des pôles simples dans l'orbite de i, et $\delta(\phi) = 1$. On a alors : $\mathrm{Res}_i(\phi(z)dz) = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{H})}{4\pi}$ et $\omega = \phi' - \phi^2$ est une forme modulaire en poids 4 avec au plus des pôles doubles dans l'orbite de i.*

Démonstration. On sait que pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ on a :

$$\phi(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^2\phi(z) + c\,(cz+d) \qquad .$$

En dérivant on obtient :

$$\phi'(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^4\phi'(z) + 2c(cz+d)^3\phi(z) + c^2(cz+d)^2.$$

D'autre part :

$$\phi^2(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^4\phi^2(z) + 2c(cz+d)^3\phi(z) + c^2(cz+d)^2,$$

ce qui implique :

$$(\phi' - \phi^2)(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^4(\phi' - \phi^2)(z).$$

Donc ω est une forme modulaire en poids 4. Comme $\phi'(i+x) \sim -\mathcal{K}\ x^{-2}$ et $\phi^2(i+x) \sim \mathcal{K}^2 x^{-2}$ (pour $x \to 0$), on en déduit que :

$$\omega(x+i) \sim -\mathcal{K}(\mathcal{K}+1)x^2.$$

□

Proposition 29. *Soit* $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *un sous-groupe discret et co-compact, soit* ϕ *une forme quasi-modulaire en poids* 2 *sur* Γ *avec* $\delta(\phi) = 1$*, et holomorphe en dehors de l'orbite de* i*. Il existe alors un opérateur*

$$D_\phi : M_k(\Gamma; \{i\}) \longrightarrow M_{k+2}(\Gamma; \{i\}),$$

donné par $D_\phi(f) = f' - k\phi f$*. Si en plus* ϕ *a un pôle simple en* i*, on a :* $\mathrm{ord_i(D_\phi(f))} = \mathrm{ord_i(f)} - 1$*, où* $\mathrm{ord}_i(D_\phi(f)) \geq \mathrm{ord_i(f)} - 1$*, avec inégalité si et seulement si* $\mathrm{ord_i(f)} = \mathrm{k}\mathcal{K}$*, où* k *est le poids de* f*.*

Remarque. Le cas $\mathrm{ord}_i(D_\phi(f)) = \infty$, ne peut se produire que si $\mathrm{ord}_i(f) = k(f)\mathcal{K}$ où $k(f)$ désigne le poids de f.

Démonstration. Soit f une forme modulaire méromorphe sur Γ de poids k, on a alors : pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$. En dérivant on obtient :

$$Df(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^{k+2} Df(z) + kc(cz+d)^{k+1} f(z).$$

D'autre part :

$$(\phi.f)(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^{k+2}(\phi.f)(z) + c(cz+d)^{k+1}\, f(z).$$

Ce qui implique $D_\phi(f)(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^{k+2} D_\phi(f)(z)$. Autrement dit $D_\phi(f)$ est une forme modulaire de poids $k+2$. D'autre part si $f(x) \sim x^\alpha$ (avec $\alpha \neq \mathcal{K}k$) alors $D_\phi(f)(x) \sim (\alpha - k\,\mathcal{K})\, x^{\alpha-1}$. □

On rappelle que I désigne l'idéal des formes modulaires en poids strictement positif sur le groupe Γ.

Théorème 13. **Soit** $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ **un sous-groupe discret co-compact. Soit** $\phi \in \widetilde{M}_2(\Gamma; \{i\})$ **avec** $\delta(\phi) = 1$ **et soit** $\omega = \phi' - \phi^2$**. Soit** $(f_1, \cdots, f_d)$ **une base de** I/I^2**. Il existe alors** $N \in \mathbb{N}^*$ **telle que l'anneau** R **engendré par l'ensemble fini :**

$$\{D_\phi^j(f_i)\ (1 \leq j \leq N, 1 \leq i \leq d)\ ; D_\phi^l(\omega)\ (1 \leq l \leq N)\},$$

est stable par D_ϕ**.**

La démonstration du théorème utilise un lemme sur les semi-groupes finiment engendrés de $\mathbb{R}^2$:

Lemme. *Soit G un sous-semi-groupe de $\mathbb{R}^2$ finiment engendré. On suppose que G engendre un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ de rang 2. Soit S le secteur $< G.\mathbb{R}_+ >$. On suppose que S est convexe d'angle strictement infèrieur à π. Il existe alors $A \in S$ telle que $(A + S) \cap \Lambda \subset G$.*

Démonstration. Soit $\{P_1, \cdots, P_m\}$ un système de générateurs de G. On suppose que les droites (OP_{m-1}) et (OP_m) délimitent le secteur S. On considère un système de coordonnés dans $\mathbb{R}^2$, pour lequel $P_{m-1} = (1, 0)$ et $P_m = (0, 1)$. Alors $\Lambda \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$ et chaque P_i a des coordonnées rationnelles et positives, car P_{m-1} et P_m forment une base de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$. En particulier, pour tout i il existe $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ telle que $a_i P_i \in \mathbb{N}P_{m-1} \oplus \mathbb{N}P_m$.

Soit maintenant $P = (x, y) \in S \cap \Lambda$ un point quelconque, il existe alors $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$ tel que :

$$P = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_m P_m.$$

Pour tout $i = 1, \cdots, m-2$ il existe $\overline{\alpha_i}$, $0 \leq \overline{\alpha_i} < a_i$ telle que : $\alpha_i \equiv \overline{\alpha_i}($ mod $a_i)$. On peut donc écrire P sous la forme : $P = \overline{\alpha_1} P_1 + \cdots + \overline{\alpha_{m_2}} P_{m-2} + \beta P_{m-1} + \gamma P_m$, avec β, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Si l'abscisse de P vérifie en plus :

$$x(P) \geq X_0 := \max_{\{\, 0 \leq \overline{\alpha_1} < a_1, \cdots, 0 \leq \overline{\alpha_{m-2}} < a_{m-2} \}} x(\overline{\alpha}_1 P_1 + \cdots + \overline{\alpha}_{m-2} P_{m-2})$$

alors $\beta \geq 0$ et si l'ordonné de P vérifie :

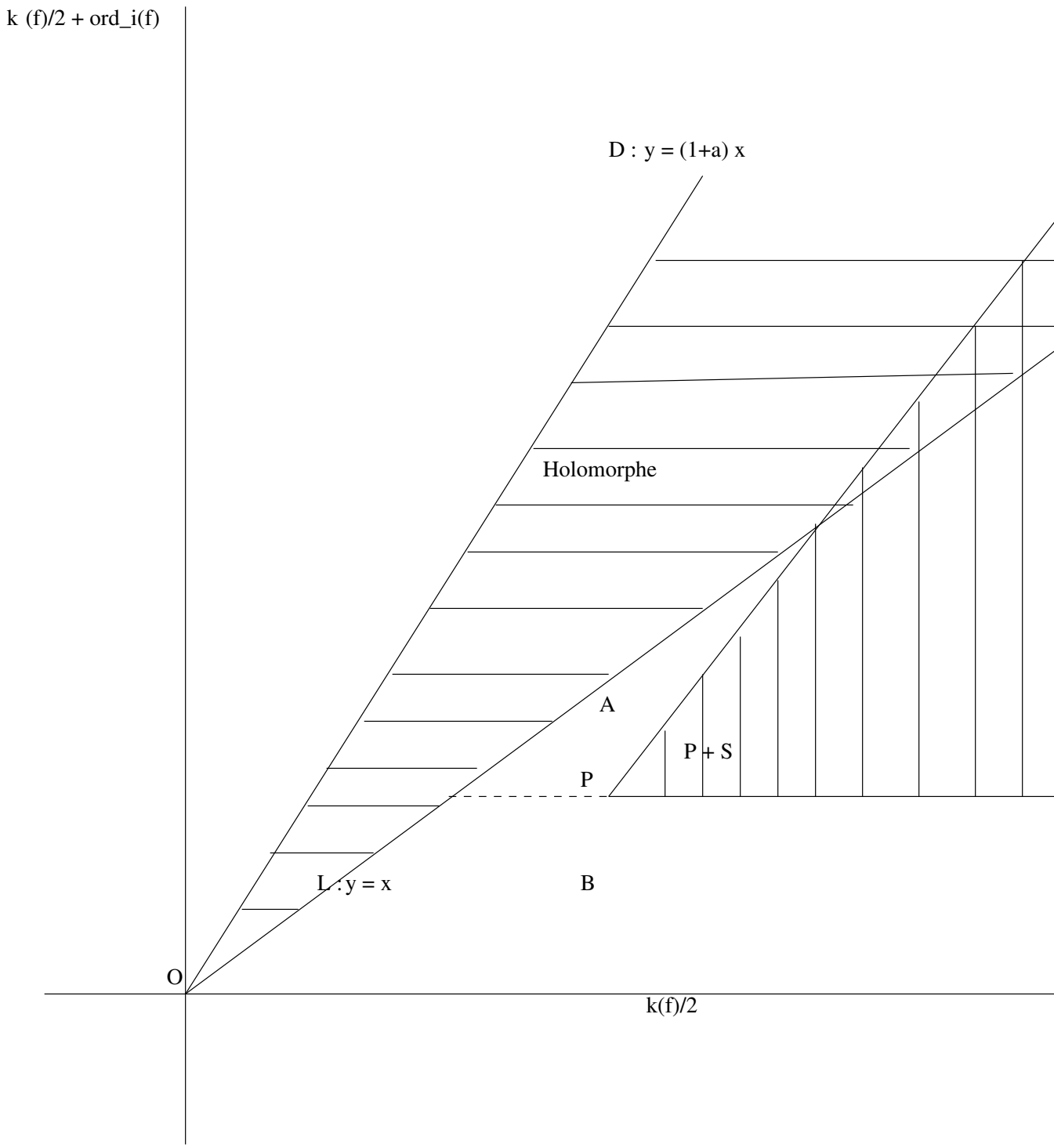
$$y(P) \geq Y_0 := \max_{\{\, 0 \leq \overline{\alpha_1} \leq a_1, \cdots, 0 \leq \overline{\alpha_{m-2}} \leq a_{m-2} \,\}} y(\overline{\alpha}_1 P_1 + \cdots + \overline{\alpha}_{m-2} P_{m-2})$$

alors $\gamma \geq 0$. Il suffit donc de prendre $A = (X_0, Y_0)$. $\square$

Nous revenons maintenant à la démonstration du théorème (13).

Démonstration. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} I : M_*(\Gamma; \{i\}) & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ f & \longrightarrow & (\frac{k(f)}{2}, \mathrm{ord_i(f)} + \frac{\mathrm{k(f)}}{2}), \end{array}$$


k (f)/2 + ord_i(f)
D : y = (1+a) x
Holomorphe
A
P + S
P
L : y = x
B
O
k(f)/2

où $k(f)$ désigne le poids de f et $\mathrm{ord_i(f)}$ désigne l'ordre d'annulation de f en i. On note $I(f)$ par $(I_1(f), I_2(f))$, c'est un invariant qui ne dépend que de f.

D'après la Proposition 29, on a la propriété :

$$I(D_\phi(f)) = I(f) + (1, \beta),$$

avec $\beta \geq 0$, où le cas $\beta > 0$ ne peut se produire que si $I(f)$ est sur la droite $y = (2\mathcal{K} + 1)x$.

Soit J l'idéal des formes modulaires en poids strictement positif sur Γ et $(f_j), (j = 1, \cdots, d)$ une base de J/J^2. Soit $R_0 = \langle f_1, \cdots, f_d, \omega, D_\phi(\omega)\rangle$, l'anneau engendré par $f_1, \cdots, f_d, \omega$ et $D_\phi(\omega)$. On va construire une suite de sous-anneaux de $M_*(\Gamma; \{i\})$:

$$R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_i \subset R_{i-1} \subset \cdots$$

tels que pour tout i, R_i est finiment engendré et on va montrer qu'elle est stationnaire à partir d'un certain rang n_0, avec $D(R_{n_0}) = R_{n_0} = R_{n_0+1}$. On considère le sous-semi-groupe finiment engendré de $\mathbb{N}^2$ définie par : $I(R_0) = \{I(f) | f \in R_0\}$. Pour $f \in M_*(\Gamma)$ on a $\mathrm{ord}_i(f) \leq a\frac{k}{2}$ pour un certain $a > 0$, d'aprés la formule pour le nombre de zéros. Si on choisit a minimal, alors la droite D d'equation $y = (a + 1)x$ contient un élément non nul de $I(R_0)$ et $I(R_0)$ ne dépasse pas D. Le semi-groupe $I(R_0)$ est donc contenu dans le secteur S délimité par les droites (Ox) et D. L'intersection de $I(R_0)$ avec l'axe(Ox) contient $I(\omega) = (2, 0)$ et $I(D_\phi(\omega)) = (3, 0)$, donc tous les points $(a, 0)$ avec $a \geq 3$. La région $I(R_0) \cap \{(x, y) | y \geq x\}$ coincide avec l'ensemble $I(M_*(\Gamma))$ car $\frac{k}{2} + \mathrm{ord}_i(f) \geq \frac{k}{2} \Leftrightarrow \mathrm{ord}_i(f) \geq 0$ et les éléments de $M_*(\Gamma; \{i\})$ n'ont pas d'autres pôles que dans $\Gamma.i$ Il est clair que le groupe $I(R_0)$ coincide avec $\mathbb{Z}^2$.

En appliquant le Lemme(5.5) au semi-groupe $I(R_0)$, on en déduit qu'il existe $P_0 \in I(R_0)$ telle que $(P_0 + S) \cap \mathbb{Z}^2 \subset I(R_0)$. Il est clair que si l'ordonné $I_2(D_\phi(f_j))$ de $I(D_\phi(f_j))$ est supérieur à l'abscisse $I_1(D_\phi(f_j))$ de $I(D_\phi(f_j))$ alors $D_\phi(f_j)$ est holomorphe et donc dans R_0.

On a notamment la propriété essentielle que : si F est un élément de $M_*(\Gamma; \{i\})$ et $I(F) \in (P_0 + S) \cap \mathbb{Z}^2$, alors $F \in R_0$. En effet, il existe $g \in R_0$ tel que $I(F) = I(g)$ et donc une combinaison de F et g donne un point g_1 tel que $I(g_1)$ est situé au dessus de $I(F)$ sur la même ligne verticale. En itérant cette construction, on obtient une suite de points g_i qui pour i grand dépassent la droite $y = x$. Il est donc clair par induction dans le sens inverse que $F \in R_0$. En particulier, si $I(D_\phi(f_j)) \in (P_0 + S) \cap \mathbb{Z}^2$, alors $D_\phi(f_j) \in R_0$.

Il ya deux cas : si $I(f_j)$ se trouve à gauche du secteur $P_0 + S$ (région A dans le diagramme) alors on n'a qu'a rajouter le nombre de dérivations de f_j nécessaire pour se retrouver dans ce secteur. L'autre cas est ou f_j est en dessous du secteur, $I_2(f_j) < I_2(P_0)$ (région B dans le diagramme).

On définit l'ensemble :

$$E(R_0) = \{y \mid \nexists x \in \mathbb{N}, (x, y) \in I(R_0)\}.$$

Autrement dit, $E(R_0)$ est l'ensemble des lignes horizontales non occupées par $I(R_0)$. On a $0 \notin E(R_0)$, car $I(\omega) \in (Ox)$.

Il existe y_0 telle que si $x > y \geq y_0$ alors $(x, y) \in I(R_0)$. Et il existe x_0 telle que si $y < y_0$ et $y \notin E(R_0)$ alors $I(R_0) \subset \{(x, y) \mid x \geq x_0\}$.

On définit une suite d'anneaux par récurrence : $R_{j+1} = \langle R_j, D_\phi(R_j)\rangle$. On définit aussi une suite d'ensembles $E(R_0) \supset E(R_1) \supset \cdots$, par :

$$E(R_j) = \{y \mid \nexists x \in \mathbb{N}, (x, y) \in I(R_j)\}.$$

Il existe y_j telle que si $x > y \geq y_j$ alors $(x, y) \in I(R_j)$. Et il existe x_j telle que si $y < y_j$ et $y \notin E(R_j)$ alors $I(R_j) \subset \{(x, y) \mid x \geq x_j\}$. On a alors :

$$\cdots \subset \cdots \subset E(R_{j+1}) \subset E(R_j) \subset \cdots \subset E(R_0).$$

La suite des ensembles finis $E(R_j)$ est décroissante donc stationnaire. Il existe alors $j_0 \in \mathbb{N}$ telle que $E(R_{j_0}) = E(R_{j_0+1})$. (c'est-à-dire, il n'y aura plus de nouveaux lignes occupées).

Il suit que la suite d'anneaux R_j est stationnaire à partir du rang j_0 avec $D_\phi(R_{j_0}) = R_{j_0} = R_{j_0+1}$. En effet : soit $h_0 \in R_{j_0}$, quitte à appliquer une puissance de l'opérateur D_ϕ, on peut supposer que $I_1(h_0) \geq x_{j_0}$ (il est clair que $I_2(h_0) \notin E(R_{j_0})$). Il existe $h_1 \in R_{j_0}$ tel que $I(h_1) = I(D_\phi(h_0))$, donc en effectuant une combinaison de h_1 et $D_\phi(h_0)$, on obtient un élément $h_2 \in R_{j_0}$ ayant pour image par I un point au dessus de $D_\phi(h_0)$ sur la même ligne verticale. En itérant cette construction, on obtient une suite (h_n) déléments de R_{j_0}. Pour n assez grand, on a $I_2(h_n) \geq y_{j_0}$ donc $h_n \in R_{j_0}$ pour n assez grand. Ceci montre que $D_\phi(R_{j_0}) = R_{j_0}$ et $R_{j_0+1} = R_{j_0}$.

□

Remarque. Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ un sous-groupe discret co-compact. Soit $R \subset M_*^{\mathrm{mer}}(\Gamma)$ stable par D_ϕ et contenant ω. Alors l'anneau $\widetilde{R} = R[\phi]$ est stable par D. En effet $D(f) = D_\phi f + k\phi f$ pour $f \in R$ et $D(\phi) = \omega + \phi^2$.

Corollaire. **Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret co-compact. Alors il existe un anneau finiment engendré et stable par D contenant l'anneau des formes quasi-modualires sur Γ. On peut prendre pour ceci $\widetilde{R} = R[\phi]$ avec ϕ et R comme dans le théorème.**

Démonstration. Il est clair que $\widetilde{R}$ contient l'anneau des formes modulaires $M_*(\Gamma)$. Or, $\widetilde{R}$ est stable par D par la remarque précédente. En utilisant le thèorème 8 de structure additive, on en déduit que $\widetilde{R}$ contient l'anneau $\widetilde{M}_*(\Gamma)$ des formes quasi-modulaires. □

Remarque. L'anneau $\widetilde{R}$ est finiment engendré en poids positif, c'est-à-dire en chaque poids k, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\widetilde{R}_k$ est de dimension finie. En plus on a $\dim \widetilde{R}_k = \mathrm{O}(k^2)$, c'est-à-dire que l'anneau finiment engendré $\widetilde{R}$ a la même croissance que son sous-anneau infiniment engendré $\widetilde{M}_*$.

4.4.1 Exemples

La structure de l'anneau des formes quasi-modulaires sur Γ_0^+ avec au plus un pôle dans l'orbite de 0 est donnée par :

$$\widetilde{M}_*(\Gamma_0^+;\{0\}) = \mathbb{C}[M,P,C,\frac{1}{M},\phi]/(C^2 = M(P^2-4M^2)(P^2+12M^2), M\,\frac{1}{M} = 1).$$

On rappele le système différentiel,

$$(S) : \begin{cases} DM &= 2\phi M \\ DP &= 2\phi P - 2\frac{C}{M} \\ DC &= 5\phi C - 4P^3 - 16M^2P \\ D\phi &= \frac{1}{2}\phi^2 - 2M - \frac{3}{2}\frac{P^2}{M} \end{cases}$$

On va maintenant construire un anneau finiment engendré en poids positif et contenant l'anneau des formes quasi-modulaires sur Γ_0^+. Le système (S) implique le système différentiel suivant :

$$(S') : \begin{cases} DM &= 2\phi M \\ DP &= 2\phi P - 2\frac{C}{M} \\ D\phi &= \frac{\phi^2}{2} - 2M - \frac{3}{2}\frac{P^2}{M} \\ D(\frac{C}{M}) &= 3\phi\frac{C}{M} - 16MP - 4\frac{P^3}{M} \\ D(\frac{P^2}{M}) &= 2\phi\frac{P^2}{M} + \frac{PC}{M^2} \\ D(\frac{PC}{M^2}) &= 3\phi\frac{PC}{M^2} + P^2 + \frac{P^4}{M^2} + \frac{C^2}{M^3}. \end{cases}$$

Les trois premières équations proviennent directement de (S). La deuxième et la troisième impliquent qu'il faut rajouter $\frac{C}{M}$ et $\frac{P^2}{M}$ au systèmes de générateurs et ainsi de suite. On peut s'arrêter à la dernière équation. En effet :

PROPOSITION 30. *L'anneau* $R = \mathbb{C}[\phi, M, P, \frac{C}{M}, \frac{P^2}{M}, \frac{PC}{M^2}]/(M\frac{P^2}{M} = P^2, P\frac{C}{M} = M\frac{PC}{M^2}, (\frac{C}{M})^2 = (M - 4\frac{P^2}{M})(M^2 + 12P^2))$ *est finiment engendré en poids positif et contient l'anneau* $\widetilde{M}_*(\Gamma_0^+)$.

Démonstration. Le système différentiel implique que : $D(M)$, $D(\phi)$, $D(P)$, $D(\frac{C}{M})$ et $D(\frac{P^2}{M})$ sont des éléments de R. Il reste à vérifier que $D(\frac{PC}{M^2}) \in R$. Or, $D(\frac{PC}{M^2})$ est combinaison de $\frac{C^2}{M^3}$ et d'éléments dans R. D'autre part la relation :

$$(\frac{C}{M})^2 = (M - 4\frac{P^2}{M})(M^2 + 12P^2)),$$

implique la relation :

$$\frac{C^2}{M^3} = (M - 4\frac{P^2}{M})(M + 12\frac{P^2}{M}).$$

Ce qui montre que $\frac{C^2}{M^3}$ et par conséquence $D(\frac{PC}{M^2})$ est un élément de R. $\square$

4.5 Caractérisation algèbrique des groupes modulaires co-compacts

On rappelle qu'une algébre de Poisson est une algèbre commutative et associative A munie en plus d'une structure de Lie, c'est-à-dire, d'une opération bilinéaire $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : A \times A \longrightarrow A$ satisfaisant à l'identité de Jacobi, telle que pour tout $x \in A$, l'application $[x, \cdot\,]$ est une dérivation. Si de plus $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ est graduée avec $A_m A_n \subset A_{m+n}$, $[A_m, A_n] \subset A_{m+n+1}$, on appellera A une algèbre de Poisson graduée.

Exemples. 1) Soit A une algèbre graduée (commutative et associative) quelconque et $d : A \longrightarrow A$ une dérivation de degré 1, c'est-à-dire $d(A_n) \subset A_{n+1}$ et $d(xy) = xd(y) + yd(x)$, pour tout $x, y \in A$. Alors le crochet défini par $[x, y] = H(x)d(y) - H(y)d(x)$ (où H est l'opérateur de multiplication par le poids n dans A_n) satisfait à l'identité de Jacobi, comme on le vérifie facilement, et a la propriété que $x \longrightarrow [x, y]$ est une dérivation pour tout $x \in A$

fixé (puisque H et d le sont). On appellera une algèbre de Poisson *trivialisable* si elle peut être obtenue de cette manière.

2) Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret de covolume fini et $A = M_{ev} = \bigoplus_{n\geq o} M_{2n}$ (ou encore $A_n = M_{2n}$) l'algèbre graduée des formes modulaires. Cette algèbre est munie d'une structure de Poisson avec la multiplication usuelle et crochet $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] = [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_1$, le premier crochet de Rankin-Cohen.

Théorème 14. **Soit $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret de covolume fini. Alors l'algèbre de Poisson $(M_{ev}(\Gamma), [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_1)$ est trivialisable si et seulement si Γ n'est pas co-compact.**

On va utiliser les lemmes suivants (dont le deuxième est corollaire du premier)

Lemme. *Soit M_*^{mer} l'anneau des formes modulaires méromorphes sur un groupe discret de covolume fini. Toute dérivation $\partial : M_*^{\mathrm{mer}} \longrightarrow M_{*+2}^{\mathrm{mer}}$ trivialisant le premier crochet de Rankin-Cohen, est de la forme $\partial = D - \phi E$ où E est l'opérateur d'Euler : multiplcation par le poids et $\phi \in \widetilde{M}_2^{\mathrm{mer}}$ avec $\delta\phi = 1$.*

Démonstration. On sait que pour tout groupe Γ discret de covolume fini, il existe une forme quasi-modulaire ψ de poids 2 méromorphe avec $\delta\psi = 1$: il suffit de diviser par son poids la dérivée loglarithmique de n'importe quelle forme modulaire non nulle. On considère alors $\partial_\psi = D - \psi E$; c'est un opérateur trivialisant le premier crochet. Supposons que ∂ trivialise aussi le premier crochet de Rankin-Cohen. On a alors pour tout $f \in M_k^{mer}$, $g \in M_l^{mer}$, la relation :

$$\frac{\partial f - \partial_\psi f}{E(f)} = \frac{\partial g - \partial_\psi g}{E(g)} \qquad .$$

En particulier, il existe α modulaire de poids 2 holomorphe telle que $\partial - \partial_\psi = \alpha.E$, ce qui implique $\partial = D - (\alpha + \psi)E$. Or, $\psi + \alpha$ est une forme quasi-modulaire méromrphe en poids 2 et on a $\delta(\psi + \alpha) = \delta\psi = 1$, car α est modulaire. On prend alors $\phi = \psi + \alpha$. □

Lemme. *Soit M_* l'anneau des formes modulaires sur un groupe discret de covolume fini. Toute dérivation $\partial : M_* \longrightarrow M_{*+2}$ trivialisant le premier crochet de Rankin-Cohen, est de la forme $\partial_\phi = D - \phi E$ avec $\phi \in \widetilde{M}_2$ et $\delta\phi = 1$.*

Démonstration. D'aprés le lemme précedent ∂ a la forme ∂_ϕ avec $\phi \in M_2^{\mathrm{mer}}(\Gamma)$. Le fait que $\partial_\phi(f)$ doit être holomorphe pour tout f modulaire holomorphe, implique que ϕ est holomorphe aussi, puisque les formes modulaires sur Γ non pas de zéros communs. $\square$

La démonstration du théorème est une conséquence du corollaire de la Proposition 24 et du dernier lemme, car il n'existe pas de formes quasi-modulaires holomophes et non modulaires de poids 2 sur un groupe modulaire co-compact, comme nous l'avons vu dans la proposition 28.

Remarque. Ce théorème est faux dans le cas d'un groupe non co-compact. Par exemple pour $\Gamma_1 = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ le groupe modulaire classique ; il existe alors une dérivation $\partial = D - \frac{E_2}{12}E$, où E_2 est la série d'Eisenstein de poids 2, qui trivialise le premier crochet de Rankin-Cohen.

Bibliographie

[1] **M. Alsina ; P. Bayer**, Quaternions order, quadratic forms, and Shimura curves. CRM Monograph Series, 22. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[2] **D. Bertrand ; W. Zudilin**, On the transcendance degree of the differential field generated by Siegel modular forms. J. Reine. Angew. Math. 554 (2003), 47–68.

[3] **H. Cohen**, Sums involving the values at negative integers of $L-$functions of quadratic characters. Math. Ann. 217 (1975), no. 3, 271–285.

[4] **H. Cohen**, A lifting of modular forms in one variable to Hilbert modular forms in two variables. Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf, Univ. Bonn, Bonn, 1976), eds. J.P Serre et D. Zagier, Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 197 pp. 175–196.

[5] **H. Cohen ; J. Oesterlé**, Dimensions des espaces de formes modulaires. Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), pp. 69–78. Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 1977.

[6] **V. Gritsenko** , Arithmetic of quaternions and Eisenstein Series. Translation in J. Soviet Math. 52 (1990), no. 3, 3056-3063.

[7] **T. Ibukiyama**, On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials. CommentarII Mathematici. Universitatis Sancti Pauli. Vol. 48. No 1. 1999.

[8] **F. Pellarin**, Introduction aux formes modulaires de Hilbert et a leurs propriétés différentielles ; Soc. Math. de France. Séminaires et Congrès, vol. 12, 2005, 54 p. "Formes modulaires et transcendance ", eds S. Fischler, E. Gaudron, F. Khemira. pp. 215–269.

[9] **M. Kaneko ; D. Zagier**, A generalized Jacobi theta function and quasi-modular forms. The moduli space of curves (Texel Island, 1994), 165–172, Birkh :auser Boston, MA, 1995 (Reviewer : Bruce Hunt).

[10] **D. Kohel and H. Verrill**, Fundamental domains for Shimura curves. Journal de Théorie des nombres, 15 (2003) ; 205–222.

[11] **T-Y. Lam**, Introduction to quadratic forms over fields. Graduate Studies in Mathematics, 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[12] **S. Lang**, Introduction to modular forms. With appendices by Don Zagier and Walter Feit. Corrected reprint of the 1976 original. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[13] **L. Merel**, Universal Fourier expansions of modular forms. On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations, 59-94, Lecture Notes in Math., 1585. Springer, Berlin, 1994.

[14] **I. Reiner**, Maximal Orders. Corrected reprint of the 1975 original. With a foreword by M.J. Taylor. London Mathematical Society. Monographs, New Series, 28. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[15] **F. Rodriguez Villegas ; D. Zagier**, Square roots of central values of Hecke L-series. Advances in number theory (Kingston, ON, 1991), 81–99. Oxford Univ. Press, New York, 1993.

[16] **J-P. Serre**, Cours d'Arithmétique, Presses universitaires de France, Paris, 1977. 188 pp.

[17] **G. Shimura**, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Reprint of the 1971 original. Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kano Memorial Lectures, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.

[18] **G. Shimura**, On the derivative of theta functions and modular forms. Duke Math.J.44 (1977), no. 2,365–387.

[19] **G. Van der Geer**, Hilbert modular surfaces. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[20] **C.-L. Siegel** , Lectures on advanced analytic number theory. Notes by S. Raghavan. Tata Institute of fundamental research. Lectures on Mathematics, No.23. Tata institute of fundamental resarch, Bombay 1965.

[21] **M-F. Vigneras**, Arithmétique des algèbres de quaternions. Lecture notes in Mathematics, 800. Springer, Berlin, 1980.

[22] **D. Zagier**, Introduction to modular forms. From Number Theory to physics (Les Houches, 1989), 238–291, Springer, Berlin, 1992.

[23] **D. Zagier**, Cours au collège de France (2000–2001).

[24] **D. Zagier**, Modular forms and differential operators. Proc. Indian Acad.Sci. Math.Sci. 104(1994), no. 1, 57–75.

[25] **D. Zagier**, On the values at negatives integers of the Zeta-function of a real quadratic field. Enseignement Math.(2)22 (1976), no. 1-2, 55–95.