



HAL
open science

Asymptotique des propriétés locales pour le modèle d'Ising et applications

David Coupier

► **To cite this version:**

David Coupier. Asymptotique des propriétés locales pour le modèle d'Ising et applications. Mathématiques [math]. Université René Descartes - Paris V, 2005. Français. NNT: . tel-00011136

HAL Id: tel-00011136

<https://theses.hal.science/tel-00011136v1>

Submitted on 30 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ RENÉ DESCARTES - PARIS 5
Centre Universitaire des Saints-Pères
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Thèse

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de L'Université René Descartes - Paris 5

Discipline : Mathématiques
Spécialité : Probabilités

présentée par

David COUPIER

**Asymptotique des propriétés locales pour le modèle d'Ising
et applications**

Soutenue publiquement le 10 Novembre 2005, devant le jury composé de :

Agnès Desolneux	Examinatrice
Roberto Fernández	Rapporteur
Christine Graffigne	Présidente
Jean Maccario	Examineur
Jean-Michel Morel	Examineur
Alain Trouvé	Rapporteur
Bernard Ycart	Directeur de thèse

Remerciements

Cette page est dédiée à tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu pendant ces trois dernières années et qui ont donc contribué plus ou moins directement à l'élaboration de cette thèse.

Mes premières pensées s'adressent naturellement à Bernard Ycart. Son expérience mathématique, son recul, ses idées m'ont toujours permis d'avancer. Je salue ses qualités d'enseignant : sa rigueur dans la rédaction, son souci de clarté et son bon sens. Bref, à son contact, j'ai appris à chercher, rédiger, exposer et enseigner.

J'insiste également et surtout sur le fait qu'il est à l'origine du financement de ma thèse. Sans sa détermination, les pages qui suivent n'existeraient pas.

La contribution d'Agnès Desolneux à cette thèse est plus qu'importante. Elle a continuellement apporté un regard différent et pertinent sur mes travaux et m'a permis de découvrir une discipline qui m'était parfaitement inconnue ; l'analyse d'images. J'ajouterai que les réunions de travail du Jeudi matin avec Agnès et Bernard ont été systématiquement un moment agréable et sympathique.

Roberto Fernández et Alain Trouvé ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ; je les en remercie chaleureusement. Leurs conseils et leurs remarques judicieuses sont autant de pistes de recherches à explorer.

Je tiens à remercier tout spécialement Christine Graffigne pour avoir accepté de présider ce jury mais aussi pour sa gentillesse et sa disponibilité tout au long de ces trois années.

Je remercie également Jean-Michel Morel et Jean Maccario pour leur participation.

Il est aussi nécessaire de remercier Mireille Bousquet-Mélou de nous avoir orienter vers Tony Guttmann et ce dernier de nous avoir divulguer quelques précieuses données.

Les conditions de travail à l'université Paris 5 furent excellentes. Je salue l'esprit convivial de chaque membre de l'UFR Math-Info et en particulier des thésards : Béatrice, Christian, Javiera, Olivier, Raphaël et les autres... Ma conscience ne me pardonnerait jamais de ne pas souligner ici l'infinie patience dont Béatrice et Olivier ont fait preuve en m'expliquant (souvent à plusieurs reprises) de nombreux détails sordides d'ordre informatique ou administratif.

J'en profite pour saluer le s.d.f. du kiosque à journaux au carrefour de la rue des Saints-Pères et du boulevard Saint-Germain que je croisais le Jeudi matin. Je ne le verrai plus.

Un grand merci à tous mes amis -Pierre, Chaumos, Alan, Tom, Cyril...- pour ces discussions du bout de la nuit, ces longues heures à refaire le monde, toujours en commençant par le Football.

Je suis évidemment infiniment reconnaissant pour le soutien que mes parents m'ont toujours apporté. La route depuis Fontenay-Aux-Roses jusqu'à ce 10 Novembre 2005 a parfois été difficile.

Je dédie enfin cette thèse aux deux femmes qui partagent désormais ma vie, Emma et Marie.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Motivations	7
1.2	Présentation des résultats	10
1.3	Plan de la thèse	12
2	Le modèle d'Ising	15
2.1	Description du modèle	15
2.2	Deux propriétés du modèle	19
2.2.1	La propriété de Markov	19
2.2.2	Le cas ferromagnétique	23
2.3	Les simulations	25
2.3.1	La dynamique de Glauber	25
2.3.2	L'algorithme de Propp et Wilson	26
2.4	Premières définitions	28
2.4.1	Distance et boules	28
2.4.2	Configuration locale	30
3	Fonctions seuils et lois du 0-1	35
3.1	Logique du premier ordre	35
3.1.1	Généralités	35
3.1.2	Descriptions complètes et assertions	38
3.1.3	Le Théorème de Gaifman	41
3.2	Fonction seuil d'une description locale	46
3.2.1	Probabilité asymptotique de l'événement $X_n(\eta) > 0$	47
3.2.2	Commentaires et simulations	53
3.2.3	Tentative d'extension à plusieurs couleurs	58
3.3	Loi du 0-1 à potentiels variables	62
3.3.1	Comportement asymptotique de $X_n(\eta)$	62
3.3.2	Fonction seuil d'une formule locale basique	65
4	Approximations poissonniennes	69
4.1	Contrôle de la probabilité conditionnelle	69
4.2	Approximation poissonnienne pour $X_n(\eta)$	75

4.2.1	Théorème et commentaires	75
4.2.2	Démonstration	78
4.2.3	Généralisation à une famille de configurations locales incompatibles . . .	83
4.3	Etude de la vitesse de convergence	88
4.3.1	Théorème et commentaires	88
4.3.2	Démonstration	89
4.4	Distance entre configurations locales	96
4.4.1	Théorème et commentaires	96
4.4.2	Démonstration	98
4.5	Autres approximations poissonniennes	103
4.5.1	Probabilité asymptotique d'une assertion locale	103
4.5.2	Probabilité asymptotique d'une formule locale basique incompatible . . .	106
5	Applications	113
5.1	Approximations poissonniennes pour des animaux	113
5.2	Estimation des potentiels a et b	118
5.3	Restauration d'images bruitées	122
5.3.1	Images binaires	122
5.3.2	Images en niveaux de gris	127
A	La distance en variation totale	133
B	La méthode de Chen-Stein	137
C	Nombres d'animaux	141
	Bibliographie	148

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivations

Un principe de base de la théorie de la Gestalt (théorie de la Vision ; voir par exemple [45] et [79]) stipule que la vision humaine est sensible aux groupements d'objets ayant une caractéristique commune. Par exemple, un ensemble de points ayant la même couleur ou la même orientation formera un ensemble cohérent plus grand (une "Gestalt") et donc plus attractif visuellement. Dans une image binaire, l'œil humain voit prioritairement ce qui est inhabituel, exceptionnel, i.e. des ensembles de pixels ou formes contrastant avec le reste de l'image. En langage probabiliste, ce constat se traduit simplement comme suit : dans une image binaire aléatoire, l'œil humain se focalise sur les objets ayant une faible probabilité d'apparition. Illustrons cette remarque par deux exemples relatifs à un modèle d'image aléatoire simple : chacun des $n \times n$ pixels de notre image sera noir avec probabilité p ou blanc avec probabilité $1 - p$, et ce indépendamment les uns des autres. La loi d'une telle image est simplement le produit de n^2 lois de Bernoulli de paramètre p . Le premier exemple est plutôt visuel. Nous ajoutons à notre image aléatoire une caractéristique déterministe. Plus précisément, nous lui imposons de contenir en son centre une croix formée de pixels noirs. Entre la première et la troisième image (voir la Figure 1.1), le nombre total de pixels noirs augmente en moyenne et la croix noire est de moins en moins visible. Dans la première image, très peu de pixels sont noirs ($p = 0.01$). La croix noire n'a donc que très peu de chances d'être produite par le hasard : elle est exceptionnelle et notre regard se pose immédiatement sur elle. Par contre, dans la troisième image où en moyenne 1 pixel sur 5 est noir ($p = 0.2$), la croix noire est beaucoup moins improbable. Elle n'est plus exceptionnelle et se confond avec le reste de l'image.

Le deuxième exemple est mathématiquement plus précis. Considérons une image aléatoire de taille 100×100 dans laquelle chaque pixel est noir ou blanc avec probabilité $p = 0.5$. Divisons l'image aléatoire en 100 sous-images de taille 10×10 , notées I_1, \dots, I_{100} . Le nombre total de pixels noirs dans chacune de ces sous-images est concentré autour de 50. Le fait que l'une d'entre elles ait une densité de pixels noirs nettement éloignée de $p = 0.5$ est visuellement très remarquable. Cet événement à caractère déviant est de probabilité faible. En utilisant l'inégalité de Hoeffding (voir [64] p. 58), on peut montrer que la probabilité pour qu'au moins l'une des sous-images I_i contienne moins de 30 pixels noirs ou plus de 70 est inférieure à 0.07.

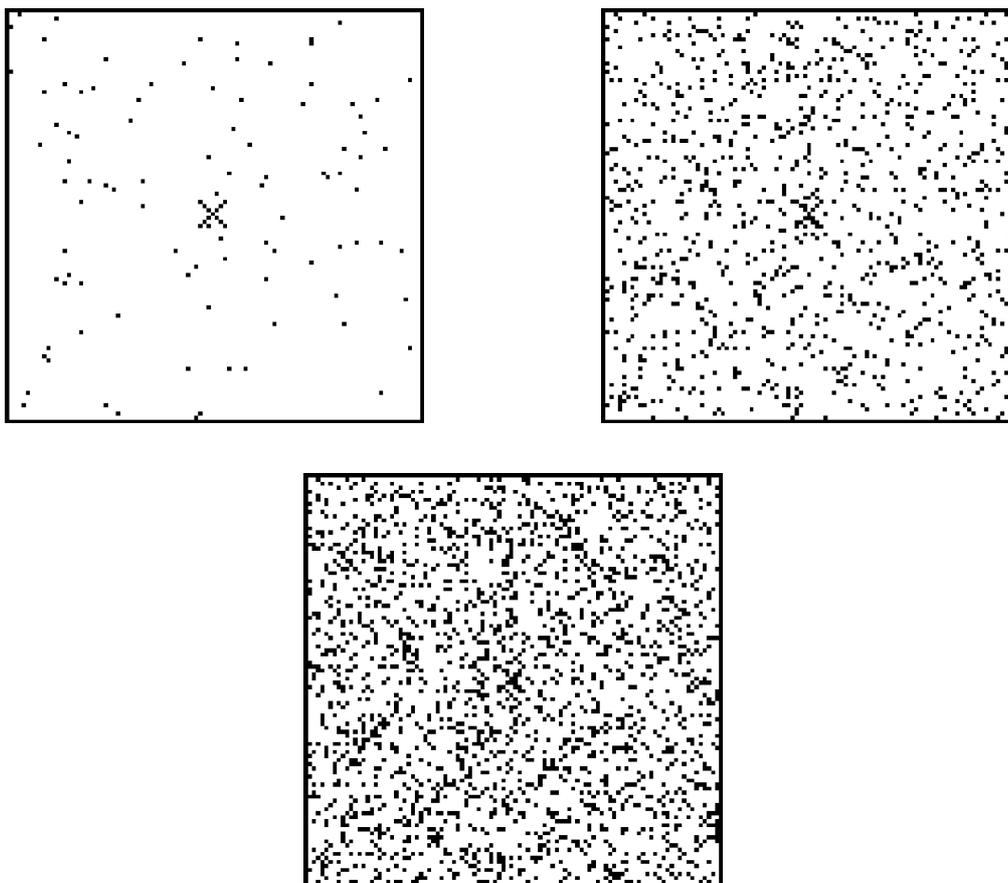


FIG. 1.1 – De gauche à droite et de haut en bas, sont représentées trois images aléatoires de taille $n = 100$, dont la probabilité pour un pixel quelconque d’être noir vaut respectivement $p = 0.01$, $p = 0.1$ et $p = 0.2$. De plus, elles contiennent chacune en leur centre une croix formée de pixels noirs.

Le recours aux images aléatoires a pour objectif de fournir une base quantitative caractérisant l’“exceptionnalité” d’une forme quelconque donnée. Les articles [17] et [18] constituent le point de départ de notre étude. Desolneux et al. s’appuient sur le “principe de Helmholtz” pour repérer les objets exceptionnels. Ils qualifient un tel objet de ε -*significatif* si l’espérance de son nombre d’occurrences dans toute l’image (i.e. son nombre de fausses alarmes) est inférieure à ε . Dès lors, l’objectif de notre travail consiste à préciser le caractère exceptionnel d’un objet en estimant directement sa probabilité d’apparition dans l’image plutôt que l’espérance de son nombre d’occurrences. Plus généralement, nous désirons être capable de répondre à la question élémentaire suivante : quelles propriétés d’une image aléatoire ont une faible ou une grande probabilité ?

La théorie des graphes aléatoires, introduite par Erdős et Rényi [26] (voir également [4] et [75]), fournira des outils mathématiques permettant de répondre à cette question. En effet, la recherche d’un sous-graphe peut naturellement s’apparenter à celle d’une sous-image : examinons pour cela un exemple entièrement traité dans [74]. Considérons le graphe aléatoire $G(n, p)$

à n sommets et dans lequel chaque arête existe indépendamment avec probabilité p . Notons que ce modèle est différent de celui initialement proposé par Erdős et Rényi [26], qui considéraient l'équiprobabilité sur l'ensemble des graphes ayant un nombre fixe d'arêtes. Soit X_T le nombre de triangles du graphe $G(n, p)$. Par indépendance, son espérance se calcule facilement : $\mathbb{E}_p[X_T] = \binom{n}{3} p^3$. Cette écriture suggère la paramétrisation $p = p(n) = c/n$. Pour cette valeur, l'espérance $\mathbb{E}_{p(n)}[X_T]$ tend vers $c^3/6$ lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, si le paramètre $p(n)$ est négligeable devant c/n alors l'espérance $\mathbb{E}_{p(n)}[X_T]$ tend vers 0 : il n'y aura pas ou peu de triangles dans le graphe. Si, au contraire, c/n est négligeable devant la paramètre $p(n)$, alors cette fois l'espérance $\mathbb{E}_{p(n)}[X_T]$ tend vers $+\infty$: il y en aura probablement beaucoup. Dans [74], il est montré que $1/n$ est le "moment d'apparition" du premier triangle dans le graphe $G(n, p)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{1/n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{p(n)}(X_T > 0) = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(n)}{1/n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{p(n)}(X_T > 0) = 1.$$

On dit alors que $1/n$ est la *fonction seuil* de la propriété $X_T > 0$ (ou encore " $G(n, p)$ contient un triangle"). De plus, lorsque $p(n) = c/n$, la quantité $\mathbb{P}_{p(n)}(X_T > 0)$ tend vers $1 - e^{-c^3/6}$. Cette dernière limite est appelée une *approximation poissonnienne* car la probabilité de $X_T = 0$ est asymptotiquement égale à celle pour une loi de Poisson de paramètre $c^3/6$ d'être nulle.

Afin d'estimer la probabilité de propriétés d'images, nous nous inspirerons fortement des techniques émanant de l'exemple précédent ; fonctions seuils et approximations poissonniennes constitueront les deux principaux outils mathématiques sur lesquels reposeront nos résultats.

Il nous faut désormais fixer un modèle probabiliste recouvrant le cas des images et suffisamment proche de celui du graphe aléatoire $G(n, p)$ pour s'en inspirer. Nous passerons du cas bidimensionnel des images à celui de la dimension quelconque $d \geq 1$. A la différence du modèle de graphe aléatoire $G(n, p)$ dans lequel deux sommets quelconques peuvent être voisins, les images ont une structure prédéfinie. Ainsi, nous considérerons un graphe (déterministe) torique d -dimensionnel, noté G_n , dont l'ensemble des sommets est un hypercube de \mathbb{N}^d de côté n . Sa structure de graphe sera invariante par translation et "locale" ; chaque sommet aura le même voisinage, ensemble de sommets dont le cardinal est indépendant de n . A la notion bidimensionnelle d'image se substituera celle de *configuration*. Une configuration du graphe G_n est une fonction attribuant à chaque sommet du graphe la valeur $+1$ (pixel noir) ou -1 (pixel blanc). Comme dans le cas des graphes aléatoires, la taille n du graphe est destinée à tendre vers l'infini et ce sont les propriétés asymptotiques de graphe G_n que nous étudierons.

A la différence du modèle $G(n, p)$ dans lequel les arêtes existaient de manière indépendante, nous désirons introduire une interaction entre les couleurs (-1 ou $+1$) de deux sommets voisins. Ainsi, nous considérons sur le graphe G_n un modèle probabiliste paramétrique issu de la mécanique statistique : le modèle d'Ising (voir [35] ou [59] pour des références générales). En d'autres termes, nous munissons l'ensemble des configurations de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ (voir la Définition 2.1.1). Le potentiel $a \in \mathbb{R}$ contrôle la proportion des sommets positifs dans le graphe ; s'il est très négatif, très peu de sommets seront positifs. En fait, le potentiel a jouera le rôle du paramètre p dans le modèle $G(n, p)$. Par analogie, nous le ferons dépendre de la taille n du graphe et nous

intéresserons au cas où $a = a(n) \rightarrow -\infty$. Le potentiel $b \in \mathbb{R}$ contrôle le degré de dépendance locale entre les sommets. Lorsque $b = 0$, ils redeviennent mutuellement indépendants. Si de plus $d = 2$, nous retrouvons alors le modèle basique d'images aléatoires identifiable à un produit de lois de Bernoulli.

Dans le contexte du modèle d'Ising, nous ne parlerons plus de sous-images ni de sous-graphes mais de *configurations locales*. En jouant sur les deux potentiels a et b du modèle, nous obtenons des fonctions seuils et des approximations poissonniennes pour l'apparition de configurations locales dans le graphe G_n .

1.2 Présentation des résultats

La notion de configuration locale concentrera toute notre attention. Un tel objet est qualifié de "local" car l'ensemble des sommets sur lequel il est défini est fixé et ne dépend pas de la taille n du graphe. Une configuration locale η est entièrement déterminée par l'ensemble des sommets positifs la décrivant. Aussi, deux caractéristiques de cet ensemble de sommets joueront un rôle prépondérant : son cardinal $k(\eta)$ et son périmètre $\gamma(\eta)$. Le nombre d'occurrences dans le graphe G_n de la configuration locale η sera noté $X_n(\eta)$.

Notre premier résultat (Théorème 3.2.1) concerne la probabilité d'apparition de η dans le graphe, i.e. la quantité $\mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0)$. A condition que $b(n)$ soit borné, un seuil portant sur le potentiel $a(n)$ est exhibé : si le rapport $e^{2a(n)}/n^{-d/k(\eta)} \rightarrow 0$ alors, avec une probabilité qui tend vers 1, la configuration locale η sera absente du graphe. Au contraire, si $e^{2a(n)}/n^{-d/k(\eta)} \rightarrow +\infty$ alors, avec une probabilité qui tend vers 1, au moins une copie de η sera présente quelque part dans le graphe. Il y en aura en fait une infinité (Proposition 3.3.1).

La *logique du premier ordre* relative à notre modèle d'Ising est un langage, une famille de propriétés locales à laquelle $X_n(\eta) > 0$ appartient. Ainsi, le Théorème 3.2.1 est un premier pas vers un résultat plus global, concernant toutes les propriétés du premier ordre. Un tel résultat est appelé *une loi du 0-1*. Pour un logicien, une loi du 0-1 n'est pas nécessairement une bonne nouvelle : si dans un langage donné, les probabilités sont proches de 0 ou 1, cela signifie que toute propriété ou sa négation est presque une tautologie, et donc que le langage considéré n'a qu'un faible pouvoir d'expression. Néanmoins, les lois du 0-1 en logique ont quelque chose de fascinant, par la généralité et la simplicité de leur énoncé. Une très vaste littérature leur est consacrée : voir [8], [81] ou encore le chapitre 3 de [23]. La première loi du 0-1, démontrée indépendamment par Glebskii et al. [37] en 1969 et Fagin [28] en 1976, concernait le cas de l'équiprobabilité sur l'ensemble de toutes les *structures* avant d'être étendue au cas du graphe aléatoire $G(n, p)$ (voir [23] p. 74 et [74] p. 318). Cette dernière version affirme qu'à p fixé, toutes les réalisations de $G(n, p)$ satisfont les mêmes propriétés du premier ordre. Des résultats de logique dus à Gaifman (voir [32], [33] ou le Théorème 3.1.8) réduisent l'étude de toutes les propriétés du premier ordre à des ensembles restreints de propriétés comme l'apparition de sous-graphes ou de configurations locales respectivement dans le cas du graphe aléatoire $G(n, p)$ ou du modèle d'Ising. Ainsi, à p fixé, une loi du 0-1 comme celle de Glebskii et al.-Fagin est essentiellement combinatoire. Si l'on autorise le paramètre $p = p(n)$ à dépendre de la taille n du graphe, une étude approfondie des fonctions seuils gouvernant l'apparition des sous-graphes est nécessaire (voir [74]). Shelah

et Spencer [71] menèrent cette étude pour les graphes aléatoires. Ils prouvèrent que la loi du 0-1 est encore valide pour toute valeur de $p(n) = n^{-\alpha}$, où α est un irrationnel. En ce qui concerne la logique du premier ordre relative à notre modèle d'Ising, le Théorème 3.2.1 produit les fonctions seuils pour l'apparition des configurations locales dans le graphe G_n . Nous en déduisons un résultat analogue à celui de Shelah-Spencer : une loi du 0-1 à potentiels variables $a = a(n)$ et $b = b(n)$ (Théorème 3.3.4).

Afin d'obtenir une limite non triviale pour la probabilité d'apparition de la configuration locale η , le Théorème 3.2.1 souligne la nécessité de se placer à la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$. Nous supposons désormais que le potentiel $b \in \mathbb{R}$ est fixé et que le potentiel $a(n)$ satisfait :

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\eta)}, \quad (1.2.1)$$

où c est une constante strictement positive fixée. La variable $X_n(\eta)$ est définie comme une somme de n^d fonctions indicatrices identiquement distribuées. Sous l'hypothèse (1.2.1), leur probabilité d'être non nulle est faible. C'est pourquoi, bien que dépendantes, il est raisonnable d'imaginer le comportement de leur somme (i.e. de $X_n(\eta)$) poissonnien. Une telle situation, parfois appelée *loi des événements rares*, est très classique en théorie des Probabilités et en particulier en théorie des graphes aléatoires (consulter à cet effet [4] ou [75]). Les indicatrices peuvent par exemple représenter l'apparition d'un sous-graphe donné. Les inégalités de Janson (voir [5] ou [43]) permettent alors d'obtenir une limite pour la probabilité d'apparition. Dans le cas du triangle introduit dans la section précédente, si $p(n) = c/n$, la probabilité pour le graphe aléatoire de satisfaire $X_T > 0$ tend vers $1 - e^{-c^3/6}$ (voir [74]). Il est d'ailleurs possible de généraliser cette approximation à la loi complète de la variable X_T . La méthode des moments (voir le Chapitre 1 de [4] ou le Lemme 4.2.2) produit la convergence en loi de X_T vers la loi de Poisson de paramètre $c^3/6$. Ainsi, en s'appuyant sur cette méthode, nous obtiendrons une approximation poissonnienne (Théorème 4.2.1) pour le nombre d'occurrences de la configuration locale η dans le graphe ; $X_n(\eta)$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre $c^{k(\eta)}e^{-2b\gamma(\eta)}$.

Plusieurs types d'approximations poissonniennes concernant le modèle d'Ising ont déjà été prouvés. Les résultats de Fernández et al. [29] concernent le cas $a = 0$ et b suffisamment grand. Ceux de Barbour et Greenwood [1] et Ganesh et al. [34] reposent sur la méthode de Chen-Stein. Lorsque le potentiel b est positif, le modèle d'Ising est qualifié de *ferromagnétique* (voir la Section 2.2.2). La méthode de Chen-Stein (voir [2] pour une référence très complète) s'applique alors. Elle réduit l'approximation poissonnienne de $X_n(\eta)$ à l'étude de son espérance et de sa variance (i.e. ses deux premiers moments) et produit le Théorème 4.3.1 : sous l'hypothèse (1.2.1), la distance en variation totale entre la loi de $X_n(\eta)$ et la loi de Poisson de paramètre $c^{k(\eta)}e^{-2b\gamma(\eta)}$ est de l'ordre de $n^{-d/k(\eta)}$.

Il sera utile d'adopter un point de vue dynamique en interprétant la fonction seuil de la configuration locale η comme son moment d'apparition dans le graphe G_n . Lorsque le potentiel $a(n)$ satisfait (1.2.1), aucune configuration locale avec strictement plus de $k(\eta)$ sommets positifs n'est encore présente dans le graphe. Ainsi, les sommets situés à distance fixée d'une occurrence de η seront tous négatifs. Le Théorème 4.4.1 affirme que les sommets positifs les plus proches sont à distance de l'ordre de $n^{1/k(\eta)}$.

Dans l'obtention de lois du 0-1, le Théorème de Gaifman (Théorème 3.1.8) insistait sur le rôle central d'une famille particulière de propriétés du premier ordre ; les *formules locales basiques*.

Après avoir déterminé leur fonction seuil (Proposition 3.3.3), nous fournirons une approximation poissonnienne pour certaines d'entre elles (Théorème 4.5.5).

Dans le cas des images, i.e. celui de la dimension $d = 2$, nous portons un intérêt tout particulier aux configurations locales dont l'ensemble des sommets positifs forme une composante 4-connexe. De tels objets sont connus en *combinatoire* sous les noms d'*animaux* ou *polyominos* (voir [46]). Les résultats de convergence obtenus précédemment fournissent alors des estimations de l'espérance et de la probabilité pour un animal donné d'apparaître dans une grande image (Proposition 5.1.2). Ces quantités dépendent directement des valeurs des potentiels a et b . Ainsi, en recensant les animaux présents dans l'image et en étudiant leur répartition selon leurs tailles et leurs périmètres, nous obtiendrons une estimation des potentiels a et b . Bien sûr, de nombreuses techniques permettant d'estimer les potentiels du modèle d'Ising existent déjà (voir par exemple [83]), la plus connue et la plus performante d'entre elles étant certainement la méthode du *maximum de pseudovraisemblance* (voir [38]). Néanmoins l'algorithme que nous proposerons dans la Section 5.2 est très facile à implémenter et produit des résultats convenables.

Un problème général de restauration d'images consiste à différencier ce qui provient de l'image originale et doit être gardé de ce qui provient du bruit et doit être supprimé. Donoho et Johnstone [21] fonde leur choix sur les coefficients d'ondelettes. Après s'être fixé une valeur seuil, ils considèrent comme issu du bruit les coefficients plus petits que cette valeur. Ces coefficients sont alors supprimés en leur attribuant la valeur 0. Tous les autres coefficients sont considérés comme provenant de l'image originale et sont conservés.

La morphologie mathématique [68] propose des solutions pour supprimer le bruit impulsif (bruit correspondant à notre modèle d'image aléatoire à potentiel $b = 0$). En particulier, le "filtre de grain" de Vincent [78], généralisé par la suite par Masnou et Morel [60] et par Monasse et Guichard [62], a pour effet de supprimer les petites composantes 4-connexes de l'image. Néanmoins, le problème du choix de la taille en dessous de laquelle les composantes 4-connexes sont supprimées reste entier. Grâce aux approximations poissonniennes pour les animaux (Proposition 5.1.2), nous associerons à chaque taille k de composante 4-connexe une probabilité d'apparition. Puis, en fixant un risque ε (typiquement $\varepsilon = 10^{-3}$), une taille seuil $t(\varepsilon)$ sera proposée de telle sorte que les composantes 4-connexes de taille supérieure à $t(\varepsilon)$ seront de probabilité plus petite que ε . Elles seront considérées comme provenant de l'image originale et seront gardées. Toutes les autres seront supprimées. Dans la Section 5.3.2, cet algorithme de débruitage sera étendu à des images en niveaux de gris puis expérimenté.

1.3 Plan de la thèse

Le plan de cette thèse suivra l'ordre naturel des résultats présentés dans la section précédente. Le Chapitre 2 est une mise en scène de tous objets intervenant dans notre étude. Le graphe d -dimensionnel G_n et le modèle d'Ising seront décrits dans la Section 2.1. Deux aspects essentiels de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$, son caractère markovien et ferromagnétique, seront présentés dans la Section 2.2. Après avoir introduit la *distance de graphe* $dist$ en Section 2.4.1, nous pourrons définir en Section 2.4.2 l'objet central de notre étude, la configuration locale. Nous décrirons sa présence dans le graphe à l'aide de probabilités conditionnelles. Son *énergie locale* jouera un rôle

de première importance. Il sera judicieux d'écrire cette quantité en fonction des entiers $k(\eta)$ et $\gamma(\eta)$.

Le Chapitre 3 étudie les propriétés locales du modèle, celles appartenant à la logique du premier ordre (voir la Section 3.1). Nous porterons une attention particulière aux *descriptions complètes* (Section 3.1.2), équivalents logiques des configurations locales. Puis, dans la Section 3.1.3, nous énoncerons le résultat de Gaifman faisant ainsi intervenir les formules locales basiques. La Section 3.2 sera consacrée au Théorème 3.2.1 donnant la fonction seuil pour l'apparition de la configuration locale η dans le graphe. Nous en déduirons enfin dans la Section 3.3 une loi du 0-1 à potentiels variables $a(n)$ et $b(n)$ (Théorème 3.3.4).

Le Chapitre 4 sera entièrement dédié aux approximations poissonniennes. La Section 4.1 sera l'occasion de donner quelques résultats préliminaires et techniques ; le Lemme 4.1.2 réduit les approximations poissonniennes à l'étude des configurations locales *propres* et la Proposition 4.1.3 fournit un contrôle de l'espérance du nombre de copies $X_n(\eta)$ dans le graphe d'une telle configuration locale. Puis, le Théorème 4.2.1 concernant le caractère asymptotique poissonnien de la variable $X_n(\eta)$ sera exposé, démontré et commenté en Section 4.2. Il sera étendu à certaines familles de configurations locales (Théorème 4.2.7). Dans la Section 4.3, le Théorème 4.3.1, basé sur la méthode de Chen-Stein, précise la vitesse de convergence en distance en variation totale de la loi de $X_n(\eta)$ vers sa limite. A la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$, il y a dans le graphe un nombre fini de copies de la configuration locale η . La Section 4.4 propose d'étudier la distance entre deux telles copies. Le Théorème 4.4.1 apportera un élément de réponse : il renseigne sur la distance typique à laquelle se trouvent les plus proches sommets positifs d'une occurrence donnée de η . Nous terminerons ce chapitre par un résultat d'approximations poissonniennes pour les formules locales basiques *incompatibles* (Théorème 4.5.5).

Deux applications seront exposées dans le Chapitre 5 : une estimation des potentiels de surface a et de paire b du modèle d'Ising (Section 5.2) et un algorithme de débruitage d'images en niveaux de gris (Section 5.3). Dans les deux cas, l'idée est d'appliquer les résultats d'approximations poissonniennes à des configurations locales particulières dont les ensembles de sommets positifs peuvent être assimilés à des *animaux* : voir la Proposition 5.1.2 de la Section 5.1.

La thèse se termine par trois annexes. L'Annexe A rappelle quelques caractérisations de la distance en variation totale. L'Annexe B présente succinctement la méthode de Chen-Stein et l'applique à notre contexte. Enfin, l'Annexe C fournit la liste des premières valeurs de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ où a_k désigne le nombre d'animaux de taille k .

Chapitre 2

Le modèle d'Ising

Cette section a pour objectif de décrire notre modèle probabiliste et d'orienter notre étude. Le modèle d'Ising et le graphe d -dimensionnel G_n sur lequel il est défini seront présentés dans la Section 2.1. Nous exprimerons dans la Section 2.2 le caractère markovien et même ferromagnétique lorsque b est positif du modèle. Nous essaierons au maximum d'illustrer nos résultats et nos expériences par des simulations du modèle d'Ising. La Section 2.3 propose deux algorithmes de simulations dont l'un (celui de Propp et Wilson [65]), uniquement réalisable dans le cas ferromagnétique, produit une simulation exacte.

2.1 Description du modèle

Cette section est une présentation générale du modèle d'Ising introduit par la Définition 2.1.1. La mesure de probabilité $\mu_{a,b}$ correspondante (2.1.2) est décrite à travers les rôles des potentiels a et b .

Il s'agit en premier lieu de définir une structure de graphe. Soit V_n l'hypercube de \mathbb{N}^d , $d \geq 1$, défini par :

$$V_n = \{0, \dots, n-1\}^d .$$

Ses éléments sont appelés les *sommets*, ils sont au nombre de n^d et seront représentés par les lettres x, y ou z . Le graphe d -dimensionnel $G_n = (V_n, E_n)$ est défini par la donnée de l'ensemble des sommets V_n et d'un ensemble de paires de sommets non ordonnés (les arêtes), noté E_n . Le graphe G_n est donc non orienté. L'entier n est appelé la *taille* du graphe G_n . L'ensemble des arêtes E_n est défini à travers la notion de *voisinage*. Le voisinage d'un sommet quelconque x , noté $\mathcal{V}(x)$, est le sous-ensemble de V_n défini par :

$$\mathcal{V}(x) = \{y \in V_n, 0 < \|y - x\|_q \leq \rho\} , \tag{2.1.1}$$

où $\|\cdot\|_q$ représente la norme L_q sur \mathbb{R}^d ($1 \leq q \leq +\infty$) et ρ est un réel positif fixé. La Figure 2.1 représente trois exemples de tels voisinages. Précisons que la soustraction dans (2.1.1) se fait composante par composante ; si $x = (x_i)_{i=1,\dots,d}$ et $y = (y_i)_{i=1,\dots,d}$ alors $x - y$ représente l'élément $(x_i - y_i)_{i=1,\dots,d}$. On appellera *voisin* du sommet x tout élément de l'ensemble $\mathcal{V}(x)$. Remarquons d'une part que le graphe G_n est sans boucle sur les sommets ; tout sommet x est

exclu de son voisinage $\mathcal{V}(x)$. D'autre part, le graphe étant non orienté, les faits $y \in \mathcal{V}(x)$ et $x \in \mathcal{V}(y)$ sont équivalents. On dira simplement dans ce cas que les sommets x et y sont *voisins*. Ainsi, l'ensemble des arêtes E_n est formé des paires $\{x, y\}$ de sommets voisins.

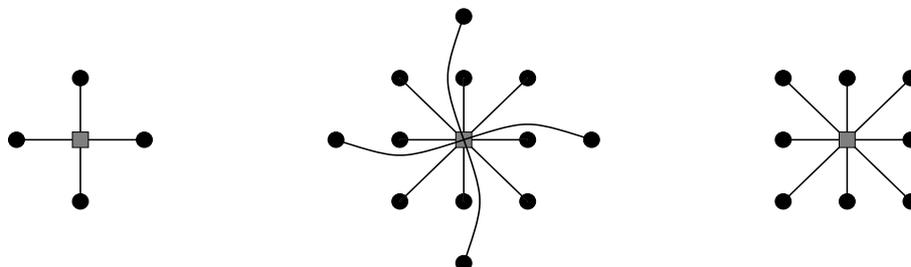


FIG. 2.1 – Trois voisinages $\mathcal{V}(x)$ représentés en dimension $d = 2$ et obtenus de gauche à droite par les valeurs des paramètres ; (i) $\rho = 1$ et $q = 1$, (ii) $\rho = 2$ et $q = 1$, (iii) $\rho = 1$ et $q = +\infty$. Les exemples (i) et (iii) correspondent respectivement aux cas de la 4 et de la 8-connexité. Le sommet x étant exclu de son voisinage, il est représenté dans les trois cas par un carré gris.

Enfin, le graphe G_n sera supposé à bords périodiques. Cela se traduit en pratique en effectuant toutes les opérations sur les sommets modulo n . La définition de voisinage $\mathcal{V}(x)$ (2.1.1) sera alors valide pour tout sommet x , nous permettant ainsi d'éviter tout problème de "bords". La structure de graphe ainsi définie sera donc invariante par translation et le graphe G_n , interprété comme un tore d -dimensionnel.

Tout sommet admet par conséquent la même structure de voisinage et donc le même nombre de voisins. Nous noterons \mathcal{V} ce nombre. Il est essentiel de remarquer que \mathcal{V} est indépendant de la taille n du graphe ; il ne dépend en effet que des constantes d , q et ρ . Ceci confère un caractère local au graphe G_n .

Une *configuration* est une application de l'ensemble des sommets V_n dans l'espace d'états $W = \{-1, +1\}$. Leur ensemble, noté \mathcal{X}_n , sera appelé l'*ensemble des configurations*. Il contient 2^{n^d} éléments et sera identifié au produit W^{V_n} . Une configuration $\sigma \in \mathcal{X}_n$ peut être vue comme un coloriage binaire du graphe G_n . La correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(x) = +1 &\iff \text{le sommet } x \text{ est noir} \\ \sigma(x) = -1 &\iff \text{le sommet } x \text{ est blanc} \end{aligned}$$

permet de représenter par une image binaire toute réalisation bidimensionnelle du modèle d'Ising. Autrement dit, un sommet positif (resp. négatif), pour la configuration σ , sera représenté par un pixel noir (resp. blanc).

L'ensemble des configurations \mathcal{X}_n est muni du modèle d'Ising défini ci-dessous, dont [35] et [59] constituent de très complètes références.

Definition 2.1.1 Soient a et b deux réels. Le modèle d'Ising de paramètres a et b est la mesure de

probabilité $\mu_{a,b}$ sur l'ensemble des configurations $\mathcal{X}_n = \{-1, +1\}^{V_n}$ définie par :

$$\forall \sigma \in \mathcal{X}_n, \quad \mu_{a,b}(\sigma) = \frac{1}{Z_{a,b}} \exp \left(a \sum_{x \in V_n} \sigma(x) + b \sum_{\{x,y\} \in E_n} \sigma(x)\sigma(y) \right), \quad (2.1.2)$$

où la constante $Z_{a,b}$ satisfait la relation $\sum_{\sigma \in \mathcal{X}_n} \mu_{a,b}(\sigma) = 1$.

Dans la littérature, la mesure de probabilité $\mu_{a,b}$ définie en (2.1.2) est généralement appelée *mesure de Gibbs associée aux potentiels a et b* . C'est en particulier le cas dans [59], p. 2. Les propriétés les plus classiques (et les plus utiles) de la mesure $\mu_{a,b}$ seront rappelées dans la prochaine section. Son espérance sera notée $\mathbf{E}_{a,b}$.

La constante $Z_{a,b}$, appelée *fonction de partition* (cf. [59] p. 2 ou [42] p. 41), est une constante de normalisation. Elle n'est pas calculable dans le cas général, ce qui ne nous empêchera pas de simuler algorithmiquement, même de manière exacte, notre modèle probabiliste (voir la Section 2.3 pour de plus amples détails). Des résultats concernant la fonction de partition $Z_{a,b}$ ont été obtenus lorsque l'un des deux paramètres s'annule. Le cas $b = 0$ est évident ; il est traité ci-dessous. Lorsque $a = 0$, l'utilisation de matrices dites de *transfert* permet de l'écrire comme la trace d'une matrice particulière et d'obtenir ainsi son comportement asymptotique. Le livre de Baxter [3] recense les modèles où la constante de normalisation est calculable ainsi que les moyens d'y parvenir. L'impossibilité de calculer $Z_{a,b}$ constitue une première entrave à l'idée (naïve) de mener des calculs à terme. La solution la plus naturelle préconise l'emploi de probabilités conditionnelles : c'est aussi ce que nous ferons.

En mécanique statistique, les éléments de \mathcal{X}_n sont vus comme des configurations de spins ; chaque sommet de V_n est un site occupé par un atome dont le spin est soit positif soit négatif. Dans ce qui suit, nous parlerons parfois abusivement de sommet positif ou négatif plutôt que de sommet dont le spin est positif ou négatif. La quantité, notée $H_{a,b}(\sigma)$ ou plus simplement $H(\sigma)$,

$$H_{a,b}(\sigma) = a \sum_{x \in V_n} \sigma(x) + b \sum_{\{x,y\} \in E_n} \sigma(x)\sigma(y) \quad (2.1.3)$$

est appelée *énergie* de la configuration σ (cf. [59] p. 1). Elle est originalement précédée d'un facteur $-(\kappa T)^{-1}$ dans l'exponentielle de la définition (2.1.2), où κ représente la constante de Boltzmann. Le signe moins a un sens physique. Les configurations de plus basses énergies sont considérées par les physiciens comme étant les plus stables : elles doivent donc être les plus probables. La constante $1/T$, parfois noté β , symbolise l'inverse de la température. En l'absence de champ externe, i.e. lorsque le potentiel a est nul, celle-ci joue un rôle fondamental dans la recherche de transition de phase. N'étant pas l'objet de notre étude, le facteur $-(\kappa T)^{-1}$ est omis de la définition (2.1.2) et tacitement incorporé aux potentiels a et b .

Les paramètres a et b sont respectivement appelés *potentiel de surface* et *potentiel de paire*. Leurs signes influencent très significativement le comportement de notre modèle. Le potentiel de surface a agit de manière globale : il régit l'ensemble des spins des sommets. Lorsque a est positif, la mesure $\mu_{a,b}$ favorise davantage les configurations ayant un grand nombre de sommets positifs, et c'est exactement la situation opposée lorsque a est négatif. Ces deux cas sont d'ailleurs

parfaitement symétriques. L'application qui à $\sigma \in \mathcal{X}_n$ associe la configuration $-\sigma$, définie par $(-\sigma)(x) = -\sigma(x)$, permet de passer du cas $a > 0$ au cas $a < 0$. En effet, cette bijection de l'ensemble des configurations \mathcal{X}_n implique l'égalité $Z_{-a,b} = Z_{a,b}$ et donc également :

$$\mu_{-a,b}(\sigma) = \mu_{a,b}(-\sigma) .$$

Ainsi, quitte à changer σ en $-\sigma$, nous choisissons de réduire l'étude à des valeurs négatives du potentiel de surface a .

Le potentiel de paire b a quant à lui un caractère local : il représente l'interaction entre les spins des sommets (voir la Figure 2.2). Pour $b > 0$, la mesure $\mu_{a,b}$ aura tendance à favoriser les groupes de sommets voisins ayant le même spin (on parle alors de "clusters"), tandis que pour $b < 0$, un sommet positif préférera des voisins dont le spin est négatif.



FIG. 2.2 – De gauche à droite ; $(a, b) = (0, 0.2)$ et $(a, b) = (0, -0.2)$. Ces deux simulations de notre modèle d'Ising mettent en relief l'interaction locale entre les spins de sommets voisins, caractère contrôlé par le signe du potentiel de paire b .

Lorsque le potentiel de paire b est nul, l'interaction entre les spins disparaît et les sommets deviennent mutuellement indépendants. La fonction de partition $Z_{a,0}$ est alors calculable. Notons que $\binom{n^d}{k}$ éléments de \mathcal{X}_n ont exactement k sommets positifs et $n^d - k$ sommets négatifs. La constante $Z_{a,0}$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Z_{a,0} &= \sum_{k=0}^{n^d} \binom{n^d}{k} (e^a)^k (e^{-a})^{n^d-k} \\ &= (e^a + e^{-a})^{n^d} . \end{aligned}$$

En posant $p = e^{2a}/(1 + e^{2a})$, il vient :

$$\begin{aligned} \mu_{a,0}(\sigma) &= \left(\frac{e^{2a}}{1 + e^{2a}}\right)^k \left(\frac{1}{1 + e^{2a}}\right)^{n^d-k} \\ &= p^k (1 - p)^{n^d-k} . \end{aligned}$$

Autrement dit, chaque sommet du graphe est positif avec probabilité $p = e^{2a}/(1 + e^{2a})$ et négatif avec probabilité $1 - p$, et ce indépendamment les uns des autres. La mesure de Gibbs $\mu_{a,0}$ sera alors simplement notée μ_p . Certains de nos résultats, dont les applications du Chapitre 5, concerneront exclusivement ce cas particulier.

L'asymptotique dans ce modèle sera celle utilisée dans la théorie des graphes aléatoires : en faisant tendre la taille n du graphe vers l'infini, l'ensemble des sommets V_n croît vers \mathbb{N}^d tout entier. Parallèlement, les potentiels pourront dépendre de n et nous nous intéresserons en particulier au cas où le potentiel de surface $a = a(n)$ tend vers $-\infty$. Sous cette hypothèse, les sommets seront en très grande majorité négatifs et nous focaliserons notre attention sur les rares sommets positifs. Notons néanmoins que la dépendance en n du potentiel de paire sera dans notre étude pour le moins réduite : $b(n)$ sera supposé borné dans le Chapitre 3 et fixé pour les Chapitres 4 et 5.

Enfin, la compacité pour la topologie produit de l'ensemble $W^{\mathbb{N}^d}$ implique la tension de la suite de lois de probabilités $\{\mu_{a(n),b(n)}\}_{n \geq 1}$ définies par la relation (2.1.2). Cette suite est donc relativement compacte (par le théorème de Prohorov, voir [27] p. 104) : on peut en extraire (au moins) une sous-suite convergente. Nos résultats étant asymptotiques, ils concerneront donc toutes les valeurs d'adhérence de la suite $\{\mu_{a(n),b(n)}\}_{n \geq 1}$.

2.2 Deux propriétés du modèle

Deux aspects classiques de notre modèle sont présentés dans cette section : son caractère markovien d'une part et ferromagnétique d'autre part. Ces deux propriétés techniques nous seront très utiles par la suite.

2.2.1 La propriété de Markov

Du fait de sa forme exponentielle, la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ introduite en (2.1.2) produit un champ de Markov sur l'ensemble des sommets V_n relativement à la structure de graphe définie par le système de voisinages $\{\mathcal{V}(x), x \in V_n\}$ (2.1.1). Ce résultat très classique (cf. par exemple [59] ou [6]) fait l'objet de la première partie de la Propriété 2.2.3. Mentionnons qu'il admet une réciproque partielle portant le nom de théorème de Hammersley-Clifford (voir par exemple [42]). Débutons par quelques notations tout à fait générales. Soit $V \subset V_n$ un ensemble de sommets. Nous noterons $W^V = \{-1, +1\}^V$ l'ensemble des configurations définies sur V et $\mathcal{F}(V)$ la tribu engendrée par ces éléments. L'ensemble V étant fini, $\mathcal{F}(V)$ n'est autre que l'ensemble des parties de W^V . Le cardinal de V sera noté $|V|$ et son complémentaire (dans V_n) V^c . La restriction d'une configuration σ à l'ensemble V sera notée σ_V . Enfin, si U et V sont deux ensembles de sommets disjoints et σ, σ' deux configurations, $\sigma_U \sigma'_V$ représente la configuration de $U \cup V$ dont les restrictions aux ensembles U et V correspondent respectivement à σ et σ' .

Relativement à la notion de voisinage définie en (2.1.1), introduisons le *voisinage* d'un ensemble quelconque de sommets.

Definition 2.2.1 Soit $V \subset V_n$. On appelle voisinage de V et on note δV l'ensemble défini par :

$$\delta V = \{y \in V_n \setminus V, \exists x \in V, \{x, y\} \in E_n\}.$$

Nous noterons également \bar{V} la réunion des deux ensembles disjoints V et δV .

Cette notion de voisinage d'un ensemble de sommets généralise celle introduite en (2.1.1) puisque $\delta\{x\} = \mathcal{V}(x)$.

Pour tout ensemble de sommets $V \subset V_n$ et pour toute configuration $\sigma \in W^{\bar{V}}$, définissons l'énergie de σ sur l'ensemble V :

Definition 2.2.2 Soient $V \subset V_n$ et $\sigma \in W^{\bar{V}}$. On appelle énergie de la configuration $\sigma \in W^{\bar{V}}$ sur l'ensemble V et on note $H^V(\sigma)$ la quantité définie par :

$$H^V(\sigma) = a \sum_{x \in V} \sigma(x) + b \sum_{\substack{\{x,y\} \in E_n \\ (x \in V) \vee (y \in V)}} \sigma(x)\sigma(y). \quad (2.2.4)$$

La notation $(x \in V) \vee (y \in V)$ signifie qu'au moins l'un des deux sommets voisins x, y appartient à l'ensemble V , l'autre pouvant éventuellement appartenir à son voisinage δV . Lorsque $V = V_n$, on a $V = \bar{V}$ et l'énergie $H^V(\cdot)$ sur V n'est autre que l'énergie $H(\cdot)$ introduite en (2.1.3). La notation $H^V(\cdot)$ nous permet d'obtenir une version simplifiée agréable de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\zeta|\sigma)$, où $\zeta \in W^V$ et $\sigma \in W^{\delta V}$. Une première simplification produit l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(\zeta|\sigma) &= \frac{\mu_{a,b}(\zeta\sigma)}{\sum_{\zeta' \in W^V} \mu_{a,b}(\zeta'\sigma)} \\ &= \frac{\exp \left\{ a \sum_{x \in \bar{V}} (\zeta\sigma)(x) + b \sum_{\substack{\{x,y\} \in E_n \\ x,y \in \bar{V}}} (\zeta\sigma)(x)(\zeta\sigma)(y) \right\}}{\sum_{\zeta' \in W^V} \exp \left\{ a \sum_{x \in \bar{V}} (\zeta'\sigma)(x) + b \sum_{\substack{\{x,y\} \in E_n \\ x,y \in \bar{V}}} (\zeta'\sigma)(x)(\zeta'\sigma)(y) \right\}}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Cette dernière fraction peut encore être réduite. En effet, dans la somme du dénominateur, un certain nombre de facteurs sont communs et se simplifient avec les facteurs correspondants du numérateur. Ce sont :

- $\exp\{a(\zeta\sigma)(x)\}, x \in \delta V$;
- $\exp\{b(\zeta\sigma)(x)(\zeta\sigma)(y)\}, x, y$ étant deux sommets voisins appartenant tout deux à δV .

On obtient alors une expression "alégée" de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\zeta|\sigma)$ faisant intervenir les énergies $H^V(\zeta'\sigma), \zeta' \in W^V$:

$$\mu_{a,b}(\zeta|\sigma) = \frac{\exp\{H^V(\zeta\sigma)\}}{\sum_{\zeta' \in W^V} \exp\{H^V(\zeta'\sigma)\}}. \quad (2.2.6)$$

Ces simplifications reposent essentiellement sur la forme exponentielle de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$. La fraction (2.2.6) sera appelée la *forme réduite* de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\zeta|\sigma)$.

Deux ensembles de sommets U et V seront dits \mathcal{V} -disjoints si $U \cap \bar{V} = \emptyset$, ou de manière équivalente si $\bar{U} \cap V = \emptyset$. Autrement dit, aucun sommet de U ne peut être voisin d'un sommet de V . Evidemment, deux ensembles \mathcal{V} -disjoints sont également disjoints. La première partie de la Propriété 2.2.3 concerne le caractère markovien de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$. La deuxième partie affirme que deux événements relatifs à deux ensembles \mathcal{V} -disjoints U et V sont indépendants conditionnellement à $\delta U \cup \delta V$.

Propriété 2.2.3 1. Soient V, V' deux ensembles de sommets tels que $\delta V \subset V' \subset V^c$. On a, pour tout $A \in \mathcal{F}(V)$:

$$\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(V')) = \mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(\delta V)) . \quad (2.2.7)$$

2. Soient U, V, V' des ensembles de sommets tels que U et V sont \mathcal{V} -disjoints et $\delta U \cup \delta V \subset V' \subset (U \cup V)^c$. On a, pour tout $A \in \mathcal{F}(U)$, $B \in \mathcal{F}(V)$:

$$\mu_{a,b}(A \cap B|\mathcal{F}(V')) = \mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(V')) \times \mu_{a,b}(B|\mathcal{F}(V')) . \quad (2.2.8)$$

Si U, U' et U'' sont trois sous-ensembles de sommets 2 à 2 \mathcal{V} -disjoints, alors $U \cup U'$ et U'' le sont aussi. En suivant cette remarque évidente, nous étendons la relation d'indépendance conditionnelle (2.2.8) à toute famille finie d'ensembles de sommets deux à deux \mathcal{V} -disjoints.

Démonstration Soient $V, V' \subset V_n$ tels que $\delta V \subset V' \subset V^c$ et A un événement de $\mathcal{F}(V)$. Il s'agit de montrer que la variable $\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(V'))$ est une version de l'espérance conditionnelle $\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(\delta V))$. Remarquons que l'ensemble formé de tous les éléments de $W^{\delta V}$ et de $W^{\delta V}$ lui-même est un π -système générateur de la tribu $\mathcal{F}(\delta V)$ (voir par exemple le très classique [80] p. 84). Les variables aléatoires $\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(V'))$ et $\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(\delta V))$ ayant la même espérance (égale à $\mu_{a,b}(A)$), il suffit donc de vérifier que pour tout $\sigma \in W^{\delta V}$,

$$\mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(V')) \mathbf{1}_\sigma \right] = \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(\delta V)) \mathbf{1}_\sigma \right] .$$

Cette identité est une conséquence du fait suivant :

$$\forall \sigma \in W^{\delta V}, \forall \sigma' \in W^{V' \setminus \delta V}, \mu_{a,b}(A|\sigma\sigma') = \mu_{a,b}(A|\sigma) . \quad (2.2.9)$$

En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(V')) \mathbf{1}_\sigma \right] &= \sum_{\sigma' \in W^{V' \setminus \delta V}} \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(V')) \mathbf{1}_{\sigma\sigma'} \right] \\ &= \sum_{\sigma' \in W^{V' \setminus \delta V}} \mu_{a,b}(A|\sigma\sigma') \mu_{a,b}(\sigma\sigma') \\ &= \mu_{a,b}(A|\sigma) \sum_{\sigma' \in W^{V' \setminus \delta V}} \mu_{a,b}(\sigma\sigma') \\ &= \mu_{a,b}(A|\sigma) \mu_{a,b}(\sigma) \\ &= \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b}(A|\mathcal{F}(\delta V)) \mathbf{1}_\sigma \right] . \end{aligned}$$

L'indicatrice de l'événement A s'écrit comme une somme finie d'indicatrices $\mathbb{1}_\zeta$ où $\zeta \in W^V$. Ainsi, (2.2.9) est équivalente à :

$$\forall \zeta \in W^V, \forall \sigma \in W^{\delta V}, \forall \sigma' \in W^{V' \setminus \delta V}, \mu_{a,b}(\zeta | \sigma \sigma') = \mu_{a,b}(\zeta | \sigma).$$

Fixons de telles configurations ζ, σ et σ' et exprimons la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\zeta | \sigma \sigma')$ en s'inspirant de la relation (2.2.5) :

$$\frac{\exp \left\{ a \sum_{x \in V \cup V'} (\zeta \sigma \sigma')(x) + b \sum_{\substack{\{x,y\} \in E_n \\ x,y \in V \cup V'}} (\zeta \sigma \sigma')(x) (\zeta \sigma \sigma')(y) \right\}}{\sum_{\zeta' \in W^V} \exp \left\{ a \sum_{x \in V \cup V'} (\zeta' \sigma \sigma')(x) + b \sum_{\substack{\{x,y\} \in E_n \\ x,y \in V \cup V'}} (\zeta' \sigma \sigma')(x) (\zeta' \sigma \sigma')(y) \right\}}.$$

La fraction ci-dessus peut encore être simplifiée. En effet, les facteurs suivants s'éliminent :

- $\exp\{a(\zeta \sigma \sigma')(x)\}, x \in V'$;
- $\exp\{b(\zeta \sigma \sigma')(x)(\zeta \sigma \sigma')(y)\}, x, y$ étant deux sommets voisins de V' .

Il reste donc :

- $\exp\{a(\zeta \sigma \sigma')(x)\}, x \in V$;
- $\exp\{b(\zeta \sigma \sigma')(x)(\zeta \sigma \sigma')(y)\}, x, y$ étant des sommets voisins, l'un des deux au moins appartenant à V .

Finalement, la dépendance en σ' a totalement disparu. La fraction simplifiée n'est autre que la forme réduite de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\zeta | \sigma)$; (2.2.9) est démontrée.

Passons à la deuxième partie de la Propriété 2.2.3. Soient donc trois ensembles U, V, V' tels que U et V sont \mathcal{V} -disjoints et $\delta U \cup \delta V \subset V' \subset (U \cup V)^c$. Le résultat précédent réduit la démonstration de (2.2.8) à

$$\mu_{a,b}(A \cap B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V)) = \mu_{a,b}(A | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V)) \times \mu_{a,b}(B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V)), \quad (2.2.10)$$

où les événements A et B appartiennent respectivement aux tribus $\mathcal{F}(U)$ et $\mathcal{F}(V)$. Nous procédons comme précédemment. L'ensemble formé de tous les éléments de $W^{\delta U \cup \delta V}$ et de $W^{\delta U \cup \delta V}$ lui-même est un π -système générateur de la tribu $\mathcal{F}(\delta U \cup \delta V)$. Par conséquent, l'identité (2.2.10) est équivalente à (2.2.11) et (2.2.12) :

$$\mathbf{E}_{a,b} [\mu_{a,b}(A \cap B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V))] = \mathbf{E}_{a,b} [\mu_{a,b}(A | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V)) \times \mu_{a,b}(B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V))] \quad (2.2.11)$$

et, pour toute configuration $\sigma \in W^{\delta U \cup \delta V}$,

$$\mu_{a,b}(A \cap B | \sigma) = \mu_{a,b}(A | \sigma) \times \mu_{a,b}(B | \sigma). \quad (2.2.12)$$

La relation (2.2.11) s'obtient grâce au caractère markovien de la mesure $\mu_{a,b}$ et à des considérations de mesurabilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{a,b} [\mu_{a,b}(A \cap B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V))] &= \mu_{a,b}(A \cap B) \\
&= \mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V) \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbf{1}_B \mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}(\delta U) \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbf{1}_B \mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}(\delta U) \right] | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V) \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}(\delta U) \right] \times \mathbb{E}_{a,b} \left[\mathbf{1}_B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V) \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{a,b} [\mu_{a,b}(A | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V)) \times \mu_{a,b}(B | \mathcal{F}(\delta U \cup \delta V))] .
\end{aligned}$$

Puis, en écrivant respectivement les indicatrices des événements A et B comme des sommes finies d'indicatrices de configurations des ensembles U et V , la relation (2.2.12) est équivalente à :

$$\forall \eta \in W^U, \forall \zeta \in W^V, \forall \sigma \in W^{\delta U \cup \delta V}, \mu_{a,b}(\eta \zeta | \sigma) = \mu_{a,b}(\eta | \sigma) \mu_{a,b}(\zeta | \sigma) .$$

Les ensembles U et V étant \mathcal{V} -disjoints, aucune arête $\{x, y\}$ n'intervient à la fois dans la forme réduite de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\eta | \sigma)$ et dans celle de $\mu_{a,b}(\zeta | \sigma)$. Ainsi, le produit de ces deux quantités donne directement le résultat escompté. ■

2.2.2 Le cas ferromagnétique

Le modèle d'Ising introduit par la Définition 2.1.1 est qualifié de *ferromagnétique* lorsque le potentiel de paire b est positif (cf. [59] p. 2). Rappelons que dans ce cas deux sommets voisins auront tendance à accorder leurs spins. Cette attractivité se traduit mathématiquement par l'inégalité FKG (2.2.14) : c'est exactement le contenu de la Propriété 2.2.4. D'autres modèles satisfaisant cette inégalité sont recensés dans [31].

Munissons tout d'abord l'ensemble des configurations $\mathcal{X}_n = \{-1, +1\}^{V_n}$ d'un ordre partiel, défini de la manière suivante :

$$\sigma \leq \sigma' \iff \forall x \in V_n, \sigma(x) \leq \sigma'(x) . \quad (2.2.13)$$

Une fonction réelle f définie sur \mathcal{X}_n est dite *croissante* si $f(\sigma) \leq f(\sigma')$ est vérifiée dès que $\sigma \leq \sigma'$. On dit de la mesure de probabilité $\mu_{a,b}$ qu'elle satisfait l'inégalité Fortuin-Kasteleyn-Ginibre (FKG) si, pour toutes fonctions croissantes f et g de \mathcal{X}_n :

$$\mathbb{E}_{a,b}[fg] \geq \mathbb{E}_{a,b}[f] \mathbb{E}_{a,b}[g] . \quad (2.2.14)$$

On dit alors parfois que la mesure $\mu_{a,b}$ est à *corrélations positives* (cf. [57] p. 77).

Propriété 2.2.4 *La mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ définie par (2.1.2) satisfait l'inégalité FKG dès que le potentiel de paire b est positif.*

Le cas ferromagnétique constitue une situation de choix en mécanique statistique car de précieux outils sont alors disponibles. Des inégalités dites ferromagnétiques du type FKG existent ; les inégalités Griffiths-Kelly-Sherman (cf. [59] p. 4 ou [39]) et Griffiths-Hurst-Sherman (cf. [40] et [56]) permettent d'obtenir l'existence mais aussi la croissance ou la concavité de certaines limites thermodynamiques. De même, la méthode de Stein-Chen [2] s'applique aisément à certaines sommes de variables aléatoires indicatrices dépendantes dont le caractère poissonnien doit être souligné. Cette direction sera explorée dans la Section 4.3.

Le résultat suivant ne sera pas démontré car intégralement issu de [57] p. 78. Il repose sur un théorème plus général dû à Holley (voir [57], p. 75).

Proposition 2.2.5 *Considérons la mesure de probabilité $\mu_{a,b}$ introduite en (2.1.2). Pour $\sigma, \zeta \in \mathcal{X}_n$, notons respectivement $\sigma \vee \zeta$ et $\sigma \wedge \zeta$ les configurations définies par :*

$$(\sigma \vee \zeta)(x) = \max\{\sigma(x), \zeta(x)\} \text{ et } (\sigma \wedge \zeta)(x) = \min\{\sigma(x), \zeta(x)\} .$$

Supposons que pour toutes configurations $\sigma, \zeta \in \mathcal{X}_n$ on ait :

$$\mu_{a,b}(\sigma \vee \zeta) \mu_{a,b}(\sigma \wedge \zeta) \geq \mu_{a,b}(\sigma) \mu_{a,b}(\zeta) . \quad (2.2.15)$$

Alors la mesure de probabilité $\mu_{a,b}$ satisfait l'inégalité FKG (2.2.14).

La Propriété 2.2.4 est une conséquence directe du résultat précédent.

Démonstration (de la Propriété 2.2.4) Soient $\sigma, \zeta \in \mathcal{X}_n$. La Proposition 2.2.5 affirme qu'il est suffisant de prouver l'inégalité (2.2.15). Par définition de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$, elle est équivalente à :

$$H_{a,b}(\sigma \vee \zeta) + H_{a,b}(\sigma \wedge \zeta) \geq H_{a,b}(\sigma) + H_{a,b}(\zeta) .$$

Remarquons tout d'abord que le potentiel de surface a ne joue aucun rôle quant à l'obtention de l'inégalité ci-dessus. En effet, l'identité

$$(\sigma \vee \zeta)(x) + (\sigma \wedge \zeta)(x) = \sigma(x) + \zeta(x)$$

est satisfaite pour tout sommet x . D'après l'hypothèse de positivité du potentiel de paire b , il suffit donc de prouver que :

$$\sum_{\{x,y\} \in E_n} (\sigma \vee \zeta)(x)(\sigma \vee \zeta)(y) + \sum_{\{x,y\} \in E_n} (\sigma \wedge \zeta)(x)(\sigma \wedge \zeta)(y) \geq \sum_{\{x,y\} \in E_n} \sigma(x)\sigma(y) + \sum_{\{x,y\} \in E_n} \zeta(x)\zeta(y) .$$

Fixons une arête du graphe, disons $\{x, y\}$. Quelles que soient les valeurs prises par les configurations σ et ζ en les sommets x et y , l'inégalité suivante est satisfaite :

$$(\sigma \vee \zeta)(x)(\sigma \vee \zeta)(y) + (\sigma \wedge \zeta)(x)(\sigma \wedge \zeta)(y) \geq \sigma(x)\sigma(y) + \zeta(x)\zeta(y) .$$

Pour des raisons évidentes de symétrie, très peu de cas sont à vérifier. On conclut aisément. ■

Terminons cette section par une dernière utilisation du théorème de Holley, mettant en valeur le caractère intuitif du cas ferromagnétique par rapport au cas général. Fixons $b \geq 0$ et $a' \geq a$. On peut montrer, en s'inspirant de la démonstration précédente, que la mesure $\mu_{a,b}$ est *dominée stochastiquement* par $\mu_{a',b}$ (se référer à [57] p. 71 pour une définition précise). Il en découle en particulier que le nombre de sommets de V_n ayant un spin positif croît en moyenne avec le potentiel de surface a . Là encore, la positivité du potentiel de paire b est cruciale.

2.3 Les simulations

Les résultats de cette étude seront le plus souvent possible illustrés par des réalisations de notre modèle d'Ising. Celles-ci seront en dimension $d = 2$, utiliseront la 4-connexité et respecteront la convention de la Section 2.1 à savoir un sommet dont le spin est positif (resp. négatif) sera représenté par un pixel noir (resp. blanc). Lorsque le potentiel de paire b sera positif, l'algorithme de Propp et Wilson "*Coupling From The Past*" [65] produira une réalisation exacte de la mesure $\mu_{a,b}$. Dans le cas b négatif, nous nous contenterons d'une approximation en utilisant la *dynamique de Glauber* (voir par exemple [82]).

Notons cependant qu'à condition que le potentiel de surface a soit nul, il est possible d'obtenir par l'algorithme de Propp et Wilson une réalisation exacte de $\mu_{0,b}$, avec $b < 0$. L'idée est la suivante : changer 1 spin sur 2 revient à changer b en $-b$. Considérons le sous-ensemble de V_n , noté $1/2 \cdot V_n$ et défini par :

$$1/2 \cdot V_n = \{x = (i, j) \in V_n, i + j \text{ est impair}\}.$$

En 4-connexité et lorsque n est paire, chaque arête $\{x, y\}$ du graphe G_n a un et un seul de ses deux sommets dans $1/2 \cdot V_n$. Notons $\bar{\sigma}$ la configuration de \mathcal{X}_n valant σ sur le complémentaire (dans V_n) de $1/2 \cdot V_n$ et $-\sigma$ sur $1/2 \cdot V_n$. Alors, pour toute arête $\{x, y\} \in E_n$, il vient $\bar{\sigma}(x)\bar{\sigma}(y) = -\sigma(x)\sigma(y)$ et plus généralement l'égalité

$$\mu_{0,b}(\sigma) = \mu_{0,-b}(\bar{\sigma}).$$

Autrement dit, si σ est une réalisation exacte de $\mu_{0,b}$ avec $b > 0$ alors $\bar{\sigma}$ en est une de $\mu_{0,-b}$.

Notons par ailleurs que les résultats obtenus par Fernández et al. [29] reposent sur la construction élaborée d'un processus de Markov du type *loss network*. Leur approche débouche sur une méthode de simulation exacte pouvant constituer une alternative efficace à l'algorithme de Propp et Wilson ; pour plus de détails, consulter [30].

2.3.1 La dynamique de Glauber

Le principe de simulation est le suivant. Une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble des configurations \mathcal{X}_n , irréductible et apériodique, et dont la mesure stationnaire est la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ est simulée. Après un nombre d'étapes suffisamment grand, la distribution gouvernant l'état de la chaîne approche la mesure limite recherchée.

Il s'agit par conséquent de simuler un système de spins à valeurs dans l'ensemble des configurations \mathcal{X}_n dont la mesure stationnaire est la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$: Liggett [57] et Durrett [22] sont deux références très générales sur les systèmes de particules interactives. L'hypothèse essentielle est que le taux de transition d'une configuration σ à une configuration ζ qui diffère de σ en plus d'un sommet est nul. Autrement dit, une configuration donnée ne peut changer qu'en un sommet à la fois. Nous noterons σ^x la configuration changée en x : $\sigma^x(y) = \sigma(y)$ pour $y \neq x$ et $\sigma^x(x) = -\sigma(x)$. Le taux de transition de σ^x à σ sera noté $c(x, \sigma)$. La condition portant sur les taux de transitions est qu'ils satisfassent l'équation de réversibilité suivante :

$$c(x, \sigma)\mu_{a,b}(\sigma) = c(x, \sigma^x)\mu_{a,b}(\sigma^x), \quad (2.3.16)$$

assurant ainsi la convergence de la chaîne de Markov correspondante vers la mesure $\mu_{a,b}$ et ce, quelle que soit la configuration initiale. Dans [82], différents types de taux satisfaisant (2.3.16)

sont présentés. Notre choix se porte vers la dynamique de Glauber, i.e. vers un taux de transition $c(x, \sigma)$ de la forme :

$$\begin{aligned} c(x, \sigma) &= \frac{\mu_{a,b}(\sigma^x)}{\mu_{a,b}(\sigma^x) + \mu_{a,b}(\sigma)} \\ &= \left(1 + \exp \left\{ 2\sigma(x) \left(a + b \sum_{y, \{x,y\} \in E_n} \sigma(y) \right) \right\} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Le taux $c(x, \sigma)$ ne dépend donc que des valeurs prises par σ en x et en ses voisins ; il ne prend en particulier qu'un nombre fini de valeurs. Notons ν sa valeur maximale. Voici pour finir un schéma de l'algorithme :

```

t ← 0
Initialiser σ
Répéter
  choisir x ∈ V_n avec probabilité 1/n^2
  u_t ← Random
  Si (u_t < c(x, σ)/ν) alors σ(x) ← -σ(x)
  finSi
  t ← t + 1
Jusqu'à (arrêt de la simulation)
Renvoyer σ

```

2.3.2 L'algorithme de Propp et Wilson

L'inconvénient majeur de la méthode précédente réside dans la difficulté à choisir un nombre d'étapes suffisamment grand pour assurer une bonne approximation. Une idée très astucieuse, due à Propp et Wilson, permet d'éviter cette difficulté en obtenant une réalisation exacte de la mesure $\mu_{a,b}$.

Leur idée est de simuler une chaîne de Markov depuis le passé vers le présent. Ils montrent que presque sûrement il existe un temps $t = -T$ suffisamment loin dans le passé tel que toutes les trajectoires, chacune issue d'une configuration $\sigma \in \mathcal{X}_n$, évoluant depuis ce temps $t = -T$ convergent à $t = 0$. Les auteurs qualifient ce phénomène de *coalescence*. De plus, miraculeusement, cette image commune est distribuée selon la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$. L'autre avantage de cette méthode est que le temps T nécessaire à la coalescence des trajectoires est déterminé par l'algorithme lui-même.

Cependant, suivre la trajectoire de chacune des 2^{n^2} configurations n'est pas numériquement raisonnable. La solution réside dans la grande latitude dont on dispose concernant le choix du protocole gouvernant les trajectoires des configurations. Il est en effet possible de coupler notre chaîne de Markov avec elle-même de telle sorte que l'ordre partiel entre les configurations introduit en (2.2.13) soit préservé durant leurs évolutions, depuis $t = -T$ jusqu'à $t = 0$. Notons alors par $\widehat{-1}$ et $\widehat{+1}$ les configurations dont les spins sont respectivement tous négatifs et tous positifs. Ainsi,

tout élément de \mathcal{X}_n étant encadré par ces deux configurations extrémales, la coalescence de toutes les trajectoires serait assurée par celle des trajectoires de $\widehat{-1}$ et de $\widehat{+1}$.

Détaillons ce couplage. Fixons un sommet x . Pour tout élément $\sigma \in \mathcal{X}_n$, notons σ_+ (resp. σ_-) la configuration valant $+1$ (resp. -1) en x et σ partout ailleurs. L'évolution de σ au sommet x et au temps t est régi par la règle suivante :

$$f_{x,t}(\sigma, u_t) = \begin{cases} \sigma_- & \text{si } u_t < \frac{\mu_{a,b}(\sigma_-)}{\mu_{a,b}(\sigma_-) + \mu_{a,b}(\sigma_+)} , \\ \sigma_+ & \text{si } u_t \geq \frac{\mu_{a,b}(\sigma_-)}{\mu_{a,b}(\sigma_-) + \mu_{a,b}(\sigma_+)} , \end{cases} \quad (2.3.17)$$

où u_t désigne un réel distribué uniformément sur $[0, 1]$. Dans le cas ferromagnétique, i.e. lorsque $b > 0$ d'après la Propriété 2.2.4, la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(\sigma(x) = +1 | \sigma(y), y \neq x) &= \frac{\mu_{a,b}(\sigma_+)}{\mu_{a,b}(\sigma_-) + \mu_{a,b}(\sigma_+)} \\ &= \left(1 + \exp \left\{ -2 \left(a + b \sum_{y, \{x,y\} \in E_n} \sigma(y) \right) \right\} \right)^{-1} \end{aligned}$$

est une application croissante de $\{\sigma(y), y \neq x\}$. Par conséquent, le couplage défini par (2.3.17) préserve l'ordre partiel entre les configurations le long de leur trajectoire. En effet, si $\sigma \leq \zeta$ alors la conjonction des événements $f_{x,t}(\sigma, u_t)(x) = +1$ et $f_{x,t}(\zeta, u_t)(x) = -1$ est impossible.

La coalescence des configurations extrémales $\widehat{-1}$ et de $\widehat{+1}$ se fait d'autant plus rapidement que le système de particules est (nettement) supérieur à la température critique : i.e. pour $b < b_c = \log(1 + \sqrt{2})/2 \simeq 0.441$ (voir [63]). En pratique, toutes les simulations de cette thèse réalisées suivant l'algorithme de Propp et Wilson le seront pour une valeur du potentiel de paire satisfaisant $0 \leq b \leq 0.3$.

Voici enfin le schéma de l'algorithme de Propp et Wilson :

```

T ← 1
Répéter
  upper ←  $\widehat{+1}$ 
  lower ←  $\widehat{-1}$ 
  Pour t = -T jusqu'à t = -1
    choisir x ∈ Vn avec probabilité 1/n2
    ut ← Random
    upper ← fx,t(upper, ut)
    lower ← fx,t(lower, ut)
  finPour
  T ← 2T
Jusqu'à (upper = lower)
Renvoyer upper

```

Le fait de remplacer T par $2T$ plutôt que par $T + 1$ permet d'accéder plus rapidement à un temps T permettant la coalescence.

2.4 Premières définitions

L'objectif de cette section est de présenter les principaux objets mathématiques de notre étude. Dans la Section 2.4.1, la *distance de graphe* $dist$ permet d'introduire un caractère local dans le graphe G_n à travers la notion de boule de rayon indépendant de n . Sur une telle boule seront définies dans la Section 2.4.2 les *configurations locales*. Quantifier la probabilité d'apparition dans le graphe d'une configuration locale passe par l'étude de son *énergie locale*.

2.4.1 Distance et boules

Une distance sur l'ensemble des sommets V_n est présentée dans la Propriété 2.4.2. Elle repose essentiellement sur la structure de graphe définie par les voisinages $\mathcal{V}(x), x \in V_n$ (2.1.1). Elle nous permet surtout, via la notion de boule $B(x, r)$, de souligner le caractère local du graphe G_n . Introduisons dans un premier temps la notion de *chemin* entre deux sommets.

Definition 2.4.1 Soient m un entier strictement positif et x_1, \dots, x_m des sommets tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}, \{x_i, x_{i+1}\} \in E_n.$$

On dira alors du m -uplet (x_1, \dots, x_m) qu'il forme un chemin allant de x_1 à x_m que l'on notera $x_1 \dots x_m$.

Le graphe G_n étant sans boucle sur les sommets (i.e $x \notin \mathcal{V}(x)$), deux sommets consécutifs x_i et x_{i+1} appartenant au chemin $x_1 \dots x_m$ sont nécessairement distincts. Par exemple, xx n'est pas un chemin. On peut par conséquent définir simplement la *longueur* d'un chemin comme étant égale au nombre de sommets le composant moins 1. On note :

$$long(x_1 \dots x_m) = m - 1.$$

Ainsi, les chemins de longueur nulle sont les chemins x , formés du seul sommet x . Ils seront qualifiés d'*élémentaires*. Notons néanmoins qu'un chemin n'est pas nécessairement injectif, il n'est pas interdit à un chemin de passer plusieurs fois par le même sommet.

Il existe évidemment plusieurs chemins, de différentes longueurs, joignant deux sommets quelconques du graphe. A cet effet, nous définissons la distance séparant deux sommets comme étant la longueur du plus court chemin allant du premier au second.

Propriété 2.4.2 L'application $dist : V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall x, y \in V_n, dist(x, y) = \min\{long(c), c \text{ chemin allant de } x \text{ à } y\}$$

est une distance sur l'ensemble des sommets V_n , appelée distance du graphe G_n .

Démonstration Le graphe G_n étant non orienté, un chemin de x à y peut être vu comme un chemin de y à x de même longueur. L'application $dist$ est donc symétrique : $dist(x, y) = dist(y, x)$. Par définition de la longueur d'un chemin, $dist(x, y)$ est nulle si et seulement il existe un chemin

élémentaire joignant ces deux sommets, ce qui se traduit par $x = y$. L'inégalité triangulaire se démontre tout aussi facilement. Soient x, y, z trois sommets de V_n . Soit c un chemin allant de x à y passant par z . Découpons naturellement ce chemin en deux chemins c' et c'' allant respectivement de x à z et de z à y , produisant ainsi l'égalité :

$$\text{long}(c) = \text{long}(c') + \text{long}(c'').$$

Il s'ensuit l'inégalité

$$\text{dist}(x, y) \leq \text{long}(c') + \text{long}(c'').$$

Puis, en passant au minimum sur l'ensemble des chemins de x à z et de z à y , on obtient l'inégalité recherchée :

$$\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, z) + \text{dist}(z, y).$$

■

On peut désormais définir la boule de centre x et de rayon r , notée $B(x, r)$, par :

$$B(x, r) = \{y \in V_n; \text{dist}(x, y) \leq r\}.$$

Le rayon r est un entier fixé indépendant de la taille n du graphe. Dans le but d'éviter la déplaisante situation d'une boule se chevauchant elle-même, nous supposons dorénavant que $n > 2\rho r$. Deux propriétés des boules $B(x, r)$ seront cruciales dans ce qui suit. Tout d'abord, la structure du graphe G_n étant invariante par translation, deux boules ayant le même rayon sont translatées l'une de l'autre :

$$B(x + y, r) = y + B(x, r)$$

(rappelons que les opérations sur les sommets se font modulo n). Ensuite, pour $n > 2\rho r$, le cardinal d'une boule $B(x, r)$ ne dépend que de son rayon r (et des constantes d, q et ρ) mais pas du centre x ni de n ; il sera noté $\beta(r)$. Notons par ailleurs que quels que soient les choix des constantes q et ρ , la boule $B(x, r)$ est incluse dans le sous-ensemble $[x - \rho r, x + \rho r]^d$ de V_n , et par conséquent son cardinal satisfait $\beta(r) \leq (2\rho r + 1)^d$. Plus généralement, il existe deux constantes strictement positives β_1 et β_2 dépendant uniquement des paramètres d, q et ρ telles que, pour tout rayon r :

$$\beta_1 r^d \leq \beta(r) \leq \beta_2 r^d. \quad (2.4.18)$$

Parallèlement, le nombre d'arêtes $\{y, z\} \in E_n$ dont les sommets appartiennent tout deux à la boule $B(x, r)$ sera noté $\alpha(r)$; lui non plus ne dépend ni de x , ni de n . Le voisinage $\delta B(x, r)$ de la boule $B(x, r)$ est une couronne formée des sommets distants de $r + 1$ du centre x . Son cardinal ne dépend que du rayon r . Autrement dit,

$$\overline{B(x, r)} = B(x, r + 1).$$

Les événements relatifs aux sommets de la boule $B(x, r)$ seront qualifiés de locaux, par opposition à des ensembles de sommets dont le cardinal dépend de la taille n du graphe. La section suivante fournit des exemples de tels événements qui seront au cœur de notre étude.

2.4.2 Configuration locale

Disposant de la notion de boule, il est temps de présenter la propriété locale la plus élémentaire sur laquelle se focalisera notre attention : une *configuration locale* est simplement une configuration d'une boule fixée.

Definition 2.4.3 Soit r un entier positif. Considérons la boule $B(0, r)$ de centre 0 et de rayon r . L'ensemble des configurations de cette boule sera noté $\mathcal{C}_r = W^{B(0, r)}$. Ses éléments seront appelés les configurations locales de la boule $B(0, r)$.

Il n'existe bien sûr qu'un nombre fini de configurations locales de la boule $B(0, r)$, précisément $2^{\beta(r)}$. Elles seront représentées par les lettres grecques η et η' . Une configuration locale est déterminée par la donnée d'un ensemble $V_+(\eta) \subset B(0, r)$, formé de ses sommets positifs :

$$V_+(\eta) = \{x \in B(0, r), \eta(x) = +1\}.$$

Son cardinal sera noté $k(\eta)$. Cet entier représente naturellement le nombre de sommets positifs formant la configuration locale η . L'ensemble complémentaire de $V_+(\eta)$ dans la boule $B(0, r)$ sera noté $V_-(\eta)$: il se compose des sommets négatifs de η . Lorsque les sommets à distance r du centre 0 ont tous des spins négatifs (comme dans la Figure 2.3), la configuration locale η est dite *propre*.

Definition 2.4.4 Une configuration locale $\eta \in \mathcal{C}_r$ est dite propre si son ensemble de sommets positifs $V_+(\eta)$ vérifie :

$$V_+(\eta) \subset B(0, r - 1).$$

L'ensemble des configurations locales propres de la boule $B(0, r)$ est naturellement en bijection avec l'ensemble des configurations locales de la boule $B(0, r - 1)$. Il y en a donc $2^{\beta(r-1)}$.

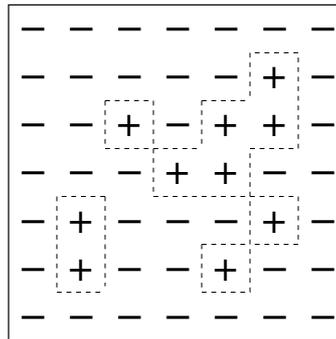


FIG. 2.3 – Une configuration locale propre η de la boule $B(0, 3)$ (avec $\rho = 1$ et $q = \infty$), représentée en dimension $d = 2$. Elle est formée de $k(\eta) = |V_+(\eta)| = 10$ sommets positifs et son périmètre $\gamma(\eta)$ est égal à 58.

L'entier $k(\eta)$ ne précise que très vaguement la configuration locale η . En effet, $\binom{\beta(r)}{k(\eta)}$ éléments de \mathcal{C}_r ont le même nombre $k(\eta)$ de sommets positifs. Plus que son cardinal, il nous sera utile par

la suite de pouvoir décrire la géométrie de l'ensemble $V_+(\eta)$. La notion suivante répondra à nos besoins. Le *périmètre* de la configuration locale η , noté $\gamma(\eta)$, est défini par la formule :

$$\gamma(\eta) = \mathcal{V} |V_+(\eta)| - 2 |\{\{x, y\} \in E_n, x, y \in V_+(\eta)\}|,$$

où \mathcal{V} est le nombre de sommets voisins d'un sommet quelconque donné. Rappelons que tous les sommets de V_n ont le même nombre de voisins. Le périmètre d'une configuration locale dépend donc de la dimension d mais aussi des paramètres ρ et q définissant le voisinage de tout sommet (voir (2.1.1)). En effet, prenons l'exemple d'une configuration locale en dimension $d = 2$ représentant un unique sommet positif. Son périmètre est égal à $\mathcal{V} = 4$ dans le cas de la 4-connexité ($\rho = q = 1$) et à $\mathcal{V} = 8$ dans le cas de la 8-connexité ($\rho = 1$ et $q = +\infty$).

Perceptuellement, le périmètre d'une configuration locale η représente la "longueur" du contour de son ensemble de sommets positifs $V_+(\eta)$. Par exemple, le contour de l'ensemble des sommets positifs de la configuration locale représentée par la Figure 2.3 est en pointillé.

Cette nouvelle notion prend tout son sens dans le cas d'une configuration locale propre η . Le périmètre $\gamma(\eta)$ s'écrit alors simplement

$$\gamma(\eta) = |\{(x, y) \in V_+(\eta) \times V_-(\eta), \{x, y\} \in E_n\}|,$$

et s'interprète alors comme le nombre de paires de sommets voisins x et y appartenant à la boule $B(0, r)$ et ayant des spins opposés.

Notons enfin que la donnée des entiers $k(\eta)$ et $\gamma(\eta)$ ne suffit pas à déterminer de manière unique la configuration locale η .

Il nous faut désormais être capable de repérer une configuration locale donnée et de compter son nombre d'occurrences, i.e. le nombre de fois qu'elle apparaît dans le graphe G_n . Ceci motive les notations suivantes.

Soit $\eta \in \mathcal{C}_r$. Pour tout sommet $x \in V_n$, notons η_x le translaté de η sur la boule $B(x, r)$ (les opérations sur les sommets se font modulo n) :

$$\forall y \in V_n, \text{dist}(0, y) \leq r \implies \eta_x(x + y) = \eta(y).$$

De plus, nous notons I_x^η la fonction indicatrice définie sur l'ensemble des configurations \mathcal{X}_n par :

$$\forall \sigma \in \mathcal{X}_n, I_x^\eta(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{B(x, r)} = \eta_x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Terminons par le nombre d'occurrences dans le graphe G_n de la configuration locale η , noté $X_n(\eta)$ et défini par :

$$X_n(\eta) = \sum_{x \in V_n} I_x^\eta.$$

Du fait des conditions de bords périodiques, la somme ci-dessus porte sur n^d fonctions indicatrices I_x^η , toutes de même loi de probabilité. C'est donc en étudiant le comportement local de la variable $X_n(\eta)$, i.e. celui d'une variable I_x^η donnée, que nous appréhenderons son comportement

global. Il s'agira également d'apprécier et de contourner la difficulté introduite par la dépendance entre les variables indicatrices I_x^η , $x \in V_n$. L'identité

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] &= \mathbf{E}_{a,b}[n^d I_x^\eta] \\ &= \mathbf{E}_{a,b}[n^d \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x, r)))] , \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

valable pour tout sommet x fixé, montre la marche à suivre. Le caractère local de la boule $B(x, r)$ (et de son voisinage $\delta B(x, r)$) va intervenir. En effet, l'ensemble des configurations $W^{\delta B(x, r)}$ étant de cardinal fini (indépendant de n), un résultat de convergence portant sur la variable aléatoire $\mathcal{F}(\delta B(x, r))$ -mesurable $n^d \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x, r)))$ produira un résultat de convergence portant sur son espérance, i.e sur $\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]$ par (2.4.19).

Notons enfin que l'étude de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma)$, $\sigma \in W^{\delta B(x, r)}$ se fera à travers celle de l'énergie de la configuration locale η sur la boule $B(x, r)$. Plus précisément, fixons un sommet x et désignons simplement par B la boule $B(x, r)$. La probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma)$, $\sigma \in W^{\delta B}$ se met sous la forme :

$$\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma) = \frac{e^{H^B(\eta_x \sigma)}}{\sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r} e^{H^B(\eta'_x \sigma)}} . \quad (2.4.20)$$

L'énergie $H^B(\eta_x \sigma)$ de la configuration locale η (ou de son translaté η_x) sera qualifiée de *locale*. La relation (2.4.20) est fondamentale. Elle fait le lien entre l'énergie d'une configuration locale η et la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma)$. Tous nos résultats reposent sur le contrôle de cette dernière quantité. Or, d'après (2.4.20), un tel contrôle nécessite une étude approfondie de l'énergie de la configuration locale η . Ainsi, nous terminons cette section en remarquant que les caractéristiques $k(\eta)$ et $\gamma(\eta)$ apparaissent naturellement dans l'expression de l'énergie locale $H^B(\eta_x \sigma)$. Si $k(\eta)$ sommets de la boule $B = B(x, r)$ ont un spin positif, les $\beta(r) - k(\eta)$ sommets restant sont négatifs :

$$H^B(\eta_x \sigma) = a(2k(\eta) - \beta(r)) + b \left(\sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y,z \in B}} \eta_x(y) \eta_x(z) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B, z \in \delta B}} \eta_x(y) \sigma(z) \right) . \quad (2.4.21)$$

Supposons de plus que la configuration locale η soit propre. Dès lors, parmi les $\alpha(r)$ arêtes $\{y, z\}$ de la boule B , il y en a exactement $\gamma(\eta)$ dont les sommets y, z ont le même spin, i.e $\eta_x(y) \eta_x(z) = 1$, et donc $\alpha(r) - \gamma(\eta)$ dont les sommets y, z ont des spins opposés, i.e $\eta_x(y) \eta_x(z) = -1$. Il vient par conséquent :

$$H^B(\eta_x \sigma) = a(2k(\eta) - \beta(r)) + b \left(\alpha(r) - 2\gamma(\eta) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B, z \in \delta B}} (-1) \sigma(z) \right) . \quad (2.4.22)$$

Nous venons en particulier d'utiliser la relation :

$$2\gamma(\eta) = \alpha(r) - \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y,z \in B}} \eta_x(y) \eta_x(z) , \quad (2.4.23)$$

valable pour toute configuration locale propre η et pour tout sommet x . Cette écriture du périmètre $\gamma(\eta)$ sera généralisée dans la Section 4.4 à tous les éléments de \mathcal{C}_r (propre ou non).

Chapitre 3

Fonctions seuils et lois du 0-1

Dans ce chapitre, nous élargirons notre champ d'étude à toute une famille de propriétés locales, appelée la *logique du premier ordre* et décrite en Section 3.1. L'objectif est de donner une loi du 0-1 valable pour toutes les propriétés de cette famille et à potentiels $a(n)$ et $b(n)$ variables (voir la Section 3.3). Ce résultat (Théorème 3.3.4) s'appuiera de manière fondamentale sur la notion de *fonction seuil* introduite dans la Section 3.2 et issue de la théorie des graphes aléatoires. Les paramètres du modèle sont invités à dépendre de la taille n du graphe. Cependant, pour alléger les notations, nous noterons respectivement $\mu_{a,b}$ et μ_p au lieu de $\mu_{a(n),b(n)}$ et $\mu_{p(n)}$. Il en sera de même pour leur espérance. Le Théorème 3.3.4 a fait l'objet de deux articles : sa version générale [15] et une version "indépendante" à potentiel de paire nul [13].

3.1 Logique du premier ordre

N'étant pas en mesure de développer un cours de logique mathématique (voir par exemple [10, 24, 50, 51]), nous nous contenterons, au cours de la Section 3.1.1, d'en reprendre quelques notions élémentaires que nous appliquerons au modèle d'Ising. La Section 3.1.2 est consacrée aux *descriptions complètes*, formules élémentaires jouant le rôle dans le cadre de la logique du premier ordre des configurations locales. Nous présenterons dans la Section 3.1.3 un résultat dû à Gaifman (Théorème 3.1.8 ou [33]) permettant de réduire la loi du 0-1 à l'étude de familles de propriétés particulières, les *descriptions locales basiques* ou les *formules locales basiques*.

3.1.1 Généralités

Le *vocabulaire* est un ensemble fini \mathcal{R} de *relations* (ou *prédicats*). Chacune d'entre elles concerne un nombre fixé de *variables*. Ce nombre est l'*arité* de la relation. L'ensemble V des variables auxquelles s'appliquent les relations est fini : c'est l'*univers* (ou *domaine*). Le couple (\mathcal{R}, V) constitue alors un *modèle*. Le Chapitre 1 de [23] liste quelques modèles souvent utilisés dont celui des *graphes*. Il est obtenu à l'aide de la relation binaire de voisinage, l'univers représentant alors l'ensemble des sommets. Ce modèle fut étudié par Shelah et Spencer [71].

Désirant étudier la logique du premier ordre pour le modèle d'Ising introduit au chapitre

précédent, nous choisirons naturellement comme univers l'ensemble des sommets $V_n = \{0, \dots, n-1\}^d$. Le vocabulaire \mathcal{R} sera composé d'une relation unaire C et de relations binaires. La relation unaire C représente la positivité des spins : Cx signifie que le sommet x a un spin positif et $\neg Cx$ que son spin est négatif. Les relations binaires (exceptée l'égalité) doivent nous permettre de décrire la structure du graphe $G_n = (V_n, E_n)$ et en particulier les relations de voisinage entre les sommets. Différentes relations binaires, avec un pouvoir d'expression plus ou moins prononcé, seront proposées à la fin de cette section. Néanmoins, il ne sera pas nécessaire de décrire précisément ces relations binaires : nous nous assurerons uniquement du fait qu'elles décrivent le graphe G_n .

La logique du premier ordre est une formalisation construite à partir des symboles logiques \forall (le quantificateur universel), \exists (le quantificateur existentiel), \neg (la négation), $=$ (l'égalité qui est une relation binaire), \vee (la disjonction) et \wedge (la conjonction), de relations d'arité finie et de variables. Si $R \in \mathcal{R}$ est une relation k -aire et (x_1, \dots, x_k) un k -uplet de variables, la formule élémentaire $Rx_1 \dots x_k$ est appelée un *atome*. Nous utiliserons l'abréviation classique \mathbf{x} pour le k -uplet (x_1, \dots, x_k) et $R\mathbf{x}$ pour l'atome $Rx_1 \dots x_k$. Par définition, la logique du premier ordre est constituée de l'ensemble des formules que l'on peut construire de manière récursive à partir des atomes, en utilisant les connecteurs logiques précédemment cités.

Definition 3.1.1 La logique du premier ordre relative à l'ensemble de relations \mathcal{R} est l'ensemble de formules $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ défini de la façon suivante :

1. Pour tout k , toute relation k -aire $R \in \mathcal{R}$ et pour tout k -uplet \mathbf{x} , $R\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{R})$.
2. Si A et B sont des formules de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$, alors $(\neg A)$, $(\forall \mathbf{x} A\mathbf{x})$ et $(A \wedge B)$ appartiennent aussi à $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$.

Comme conséquence immédiate, si A et B sont deux formules de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$, $(\exists \mathbf{x} A\mathbf{x})$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont aussi dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$: les logiciens notent $A \rightarrow B$ l'implication $(\neg A \vee B)$ et $A \leftrightarrow B$ l'équivalence $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Les formules de la logique du premier ordre ont un caractère local qui sera mis en valeur par le Théorème 3.1.8. C'est en mettant en défaut cet aspect local que sont obtenues des formules non-axiomatisable pour la logique du premier ordre :

- “L'ensemble des sommets positifs est connexe”,
- “le nombre sommets positifs est pair”.

La dernière formule est un exemple classique de propositions du *second ordre* n'appartenant pas à la logique du premier ordre (voir [23] exemple 1.3.4 p. 21 et p. 37). Elle constitue d'ailleurs un contre-exemple aux lois du 0-1 (Proposition 3.1.10 et Théorème 3.3.4) et sera détaillée à la fin de la Section 3.1.3.

Le modèle (\mathcal{R}, V_n) étant fixé, il s'agit désormais d'attribuer une probabilité, via la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$, aux formules de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$. Un moyen d'y parvenir est l'utilisation de *structures* relatives au modèle (\mathcal{R}, V_n) . Précisément, une *structure* est définie par une liste de faits relatifs aux relations de \mathcal{R} appliquées aux éléments de V_n . Chaque atome $Rx_1 \dots x_k$ doit apparaître dans la liste, soit affirmé, soit nié (mais pas les deux).

Parmi toutes les formules de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$, seules nous intéressent celles dont on peut décider si elles

sont vraies ou fausses pour une structure donnée. Nous conviendrons donc d'appeler *proposition* une formule de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ dont toutes les variables sont quantifiées (ou *liées*, par opposition à des variables *libres*) : on parle de *formule close* en logique. Soient S une structure et A une proposition de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$. Comme A est construite à partir des relations du vocabulaire \mathcal{R} , elle est ou non compatible avec S . Si elle l'est, on dit que S *satisfait* A et on note $S \models A$.

Remarquons qu'à chaque structure S un graphe peut naturellement être associé en reliant les paires de variables $\{x, y\}$ dont les faits Rxy ou Ryx décrivent S , et ce pour toute relation binaire R de notre vocabulaire (voir [23] p. 26 pour plus de détails). Les structures qui nous intéressent sont celles pour lesquelles le graphe décrit est exactement le tore d -dimensionnel G_n . Nous noterons alors \mathcal{S}_n leur ensemble. Deux structures quelconques de \mathcal{S}_n ne diffèrent que dans les faits concernant la relation unaire C , i.e. les spins des sommets. Ainsi, il existe une bijection naturelle ϕ entre \mathcal{S}_n et l'ensemble des configurations \mathcal{X}_n . A une structure S correspond une configuration $\sigma = \phi(S)$ définie par :

$$\begin{aligned} (S \models Cx) &\iff (\sigma(x) = +1) \\ (S \models \neg Cx) &\iff (\sigma(x) = -1) . \end{aligned}$$

La stratégie consiste à attribuer, à chaque structure S de \mathcal{S}_n , le poids pour le modèle d'Ising de son image par l'application ϕ , i.e. $\mu_{a,b}(\phi(S))$, et un poids nul aux autres. Par conséquent, la donnée d'une proposition A partitionne \mathcal{S}_n en deux sous-ensembles : l'ensemble des structures qui satisfont A , que nous noterons A_n , et son complémentaire. Nous dirons aussi que A_n est l'ensemble des structures pour lesquelles A est *vraie*. Ainsi, on définit la probabilité de la proposition A , notée $\mu_{a,b}(A)$, comme étant la probabilité de l'image par la bijection ϕ de l'ensemble des structures satisfaisant A :

$$\mu_{a,b}(A) = \sum_{\sigma \in \phi(A_n)} \mu_{a,b}(\sigma) .$$

Une proposition qu'aucune des structures de \mathcal{S}_n ne satisfait sera qualifiée d'*insatisfiable* ; elle sera de probabilité nulle. On parlera de proposition *satisfiable* dans le cas contraire.

En résumé, par l'intermédiaire de l'ensemble de structures \mathcal{S}_n , nous avons contraint les relations binaires de notre vocabulaire de manière à décrire le graphe torique d -dimensionnel G_n . Signalons que différents types de contraintes pour des ensembles de relations unaires et binaires dans le cadre des logiques de description sont proposés dans [67].

Notons enfin que le cas particulier du potentiel de paire nul fut traité dans [13], en munissant l'ensemble $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ de la mesure de probabilité μ_p . Plus généralement, différents cadres probabilistes peuvent être appliqués à l'ensemble des formules de la logique du premier ordre relative à un vocabulaire donné. Les logiciens utilisent l'équiprobabilité (voir par exemple [28]), auquel cas la probabilité que A soit vraie est le rapport du cardinal de A_n à celui de \mathcal{S}_n .

Jusqu'à présent, nous n'avons pas précisé les relations binaires (exceptée l'égalité) composant notre vocabulaire. Nous nous sommes uniquement assurés du fait qu'elles décrivaient la structure du graphe G_n . Cette section se termine par deux exemples de tels vocabulaires \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 dont les relations binaires sont plus ou moins expressives. Nous verrons néanmoins que cette différence d'expression n'influence pas la loi du 0-1. Le Théorème de Gaifman (voir la Section 3.1.3) stipule en effet que celle-ci dépend uniquement de la structure de graphe et non du vocabulaire. Considérons tout d'abord le vocabulaire $\mathcal{R}_1 = \{C, =, N\}$ où N est la relation de voisinage

définie par :

$$Nxy \iff \{x, y\} \in E_n .$$

Le graphe G_n étant non-orienté et sans boucle sur les sommets, la relation binaire N est par conséquent réflexive ($Nxy \iff Nyx$) et antisymétrique ($\forall x, \neg Nxx$). Voici alors deux exemples de propositions appartenant à $\mathcal{L}_1(\mathcal{R}_1)$:

- $\exists x, y, (Nxy) \wedge (Cx) \wedge (Cy)$;
- $\forall x, ((Cx) \rightarrow (\forall y, (Nxy \rightarrow \neg Cy)))$;

pouvant être interprétés respectivement par “il existe deux sommets voisins dont les spins sont positifs” et “tous les sommets positifs sont isolés”.

Dans le cas particulier de la dimension $d = 2$ et de la 4-connexité, i.e. dans le contexte des images, la relation unaire C symbolise la couleur : Cx signifie que le pixel x est noir. Chaque pixel $x = (i, j)$ admet 4 voisins $(i \pm 1, j)$ et $(i, j \pm 1)$ (rappelons que les opérations sont effectuées modulo n). En vue de distinguer l’horizontale de la verticale, la relation N sera remplacée par deux relations binaires HOR et VER :

$$HORxy \iff y = x \pm (1, 0) \text{ et } VERxy \iff y = x \pm (0, 1) ,$$

formant ainsi le vocabulaire $\mathcal{R}_2 = \{C, =, HOR, VER\}$. Le remplacement de la relation N par HOR et VER ne modifie pas la structure de graphe sous-jacente mais rend le langage plus expressif. La proposition (interprétée) “il existe 3 pixels voisins et noirs” appartient aux deux logiques du premier ordre $\mathcal{L}_1(\mathcal{R}_1)$ et $\mathcal{L}_1(\mathcal{R}_2)$ alors que “il existe 3 pixels voisins horizontalement et noirs” appartient seulement à la seconde.

3.1.2 Descriptions complètes et assertions

Cette section est destinée à présenter plusieurs formules élémentaires de la logique du premier ordre, notamment les *descriptions complètes*. Elles seront définies comme des structures de modèles particuliers. Les descriptions complètes seront les formules de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ correspondant aux configurations locales. Il est donc essentiel de disposer d’un dictionnaire précis permettant de passer des unes aux autres.

C’est dans cet objectif que sont introduites les notations suivantes. Pour tout sous-ensemble de sommets $V \subset V_n$, notons $\mathcal{S}_n(V)$ l’ensemble des structures relatives au modèle (\mathcal{R}, V) dont le graphe sous-jacent est exactement la restriction de G_n à l’ensemble V . Ainsi, deux structures quelconques de $\mathcal{S}_n(V)$ ne diffèrent que dans les faits relatifs à la relation unaire C . On définit alors une bijection naturelle ϕ_V de $\mathcal{S}_n(V)$ dans l’ensemble des configurations $W^V = \{-1, +1\}^V$: pour toute structure $S \in \mathcal{S}_n(V)$ et pour tout sommet $x \in V$, $\phi_V(S)(x) = +1$ si et seulement si $S \models Cx$. On a en particulier $\mathcal{S}_n(V_n) = \mathcal{S}_n$ et $\phi_{V_n} = \phi$.

Definition 3.1.2 Soit r un entier strictement positif. Notons \mathcal{D}_r l’ensemble $\mathcal{S}_n(B(0, r))$. Les éléments de \mathcal{D}_r sont appelés les descriptions complètes de la boule $B(0, r)$.

L’application $\phi_{B(0, r)}$ met en bijection l’ensemble \mathcal{D}_r des descriptions complètes de la boule $B(0, r)$ et l’ensemble \mathcal{C}_r des configurations locales de la boule $B(0, r)$. C’est en ce sens que

nous qualifierons la description complète D et son image la configuration locale $\phi_{B(0,r)}(D)$ d'associées. Il y a en particulier $2^{\beta(r)}$ descriptions complètes distinctes de la boule $B(0, r)$. Comme pour les configurations locales, nous définissons l'ensemble des sommets positifs de la description complète $D \in \mathcal{D}_r$ par :

$$V_C(D) = \{x \in B(0, r), D \models Cx\} .$$

Son *indice*, noté $k(D)$, est le cardinal de cet ensemble : $k(D) = |V_C(D)|$. Une description complète $D \in \mathcal{D}_r$ et une configuration locale $\eta \in \mathcal{C}_r$ sont associées si et seulement si leur ensemble de sommets positifs sont identiques, i.e. $V_C(D) = V_+(\eta)$. En particulier, si $D \in \mathcal{D}_r$ et $\eta \in \mathcal{C}_r$ sont associées alors $k(D) = k(\eta)$.

Soient $x \in V_n$, $D \in \mathcal{D}_r$ et η sa configuration locale associée. Telle η_x pour η , nous désirons définir le translaté de la description complète D à la boule $B(x, r)$. Un candidat se distingue naturellement ; la structure de $\mathcal{S}_n(B(x, r))$ dont l'image par $\phi_{B(x,r)}$ est la configuration η_x . Ainsi, la structure de $\mathcal{S}_n(B(x, r))$, notée $D(x)$ et définie par :

$$D(x) = \phi_{B(x,r)}^{-1}(\eta_x) ,$$

sera appelée une *description complète de la boule* $B(x, r)$. Les lettres D et $D(0)$ désignent alors sans ambiguïté le même objet.

Définies comme des structures de modèles à univers restreints, les descriptions complètes sont simplement des conjonctions d'atomes. Plongées dans le modèle (\mathcal{R}, V_n) , leur construction obéit aux deux principes de la Définition 3.1.1 : ce sont des formules de la logique du premier ordre $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$.

Comme pour les configurations locales, nous serons amenés à détecter la présence de la description complète D dans le graphe.

Definition 3.1.3 Une description locale est une formule de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ de la forme :

$$\exists x, D(x) ,$$

où D est une description complète de la boule $B(0, r)$.

A la différence de la formule $D(x)$, la description locale $\exists x, D(x)$ est une proposition : la variable x est dans le champ du quantificateur \exists (elle est liée). La probabilité de cette formule est égale à celle de l'événement $X_n(\eta) > 0$, où η désigne la configuration locale associée à D et $X_n(\eta)$ énumère ses occurrences dans le graphe :

$$\mu_{a,b}(\exists x, D(x)) = \mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0) .$$

Voici deux exemples (interprétés) de descriptions locales :

- “il existe un sommet positif”,
- “il existe une boule de rayon $r = 2$ ayant un seul sommet positif, en son centre”.

Une conjonction de descriptions locales concernant chacune des ensembles de sommets disjoints est une *description locale basique* :

Definition 3.1.4 Une description locale basique est de la forme :

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} D_i(x_i) \right),$$

où :

- m et r sont des entiers strictement positifs fixés,
- pour tout $i = 1, \dots, m$, $D_i(x)$ est une description complète de la boule $B(x, r)$.

Des exemples de descriptions locales basiques (interprétées) sont :

- “il existe $m = 3$ sommets positifs”,
- “il existe $m = 2$ boules de rayon $r = 3$, l’une étant formée uniquement de sommets négatifs et l’autre uniquement de sommets positifs”,
- “il existe $m = 3$ boules de rayon $r = 5$, disjointes et dont seul le centre est un sommet positif”.

La Figure 3.1 propose un autre exemple.

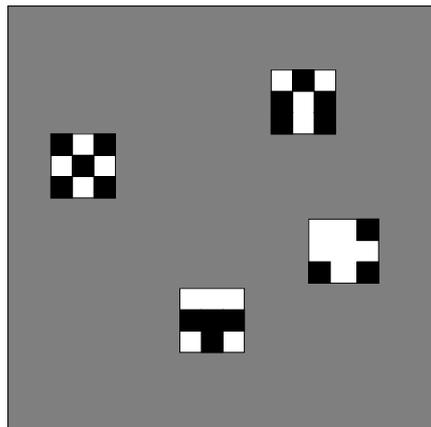


FIG. 3.1 – Illustration d’une description locale basique en dimension $d = 2$, en 8-connextité et pour des entiers $m = 4$ et $r = 1$.

Comme son nom l’indique, une description complète décrit de manière stricte les faits relatifs à une boule. Nous aurons besoin d’une notion plus souple, acceptant différentes situations, i.e. d’une formule de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ satisfiable par davantage de structures. Un tel objet sera appelé une *assertion*. Par analogie avec la notion de description locale, nous définissons également les *assertions locales*.

Definition 3.1.5 Soit r un entier strictement positif fixé et x un sommet. Une assertion de la boule $B(x, r)$ est une formule $\psi(x)$ de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ dont seule la variable x est libre, toutes les autres appartenant à la boule $B(x, r)$. La proposition de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$

$$\exists x, \psi(x)$$

est appelée une assertion locale.

Bien sûr, les descriptions complètes sont des assertions particulières. Plus généralement, une assertion s'obtient comme une disjonction d'un nombre fini de descriptions complètes. Deux cas se présentent. Soit l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ est insatisfiable ; sa probabilité est alors nulle. Soit la formule $\psi(x)$ est impliquée par un nombre fini (au plus $2^{\beta(r)}$) de descriptions complètes $D(x)$. Dans ce cas, l'assertion $\psi(x)$ est logiquement équivalente à la disjonction de ces éléments :

$$\psi(x) \leftrightarrow \bigvee_{D(x) \rightarrow \psi(x)} D(x) . \quad (3.1.1)$$

Les assertions locales sont donc des propriétés de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$, plus riches et donc plus intéressantes que les descriptions complètes locales. Voici deux exemples interprétés :

- “il existe une boule de rayon 3 dont au moins la moitié des sommets ont un spin positif”,
- “il existe une boule de rayon 10 avec au moins 10 sommets voisins et positifs”.

Nous noterons $\mathcal{D}(\psi)$ l'ensemble des descriptions complètes impliquant $\psi(x)$:

$$\mathcal{D}(\psi) = \{D \in \mathcal{D}_r, D(x) \rightarrow \psi(x)\} . \quad (3.1.2)$$

Nous dirons que $\mathcal{D}(\psi)$ est l'ensemble de définition de l'assertion $\psi(x)$. Signalons au passage que cet ensemble ne dépend pas de la variable x apparaissant dans son écriture (3.1.2). L'indice de l'assertion $\psi(x)$, noté $k(\psi)$, est le plus petit indice des descriptions complètes l'impliquant. Autrement dit :

$$k(\psi) = \min\{k(D), D \in \mathcal{D}(\psi)\} . \quad (3.1.3)$$

Lorsque l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ est insatisfiable, son ensemble de définition est vide. Nous écrirons alors par convention $k(\psi) = +\infty$.

3.1.3 Le Théorème de Gaifman

En vue d'établir une loi du 0-1, le théorème de Gaifman (Théorème 3.1.8) réduit l'étude des formules de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ à celle des *formules locales basiques*.

Definition 3.1.6 Une formule locale basique est une proposition de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ de la forme :

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \psi_i(x_i) \right) ,$$

où :

- m et r sont des entiers strictement positifs fixés,
- pour tout $i = 1, \dots, m$, $\psi_i(x)$ est une assertion de la boule $B(x, r)$.

Leur ensemble sera noté \mathcal{L}_{bas} .

Evidemment, les descriptions locales basiques sont des formules locales basiques particulières. Introduisons l'ensemble des *combinaisons booléennes* d'un sous-ensemble donné de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$:

Definition 3.1.7 Soit \mathcal{L} un ensemble de formules de la logique du premier ordre. L'ensemble $BC(\mathcal{L})$ des combinaisons booléennes finies de \mathcal{L} est défini par :

1. $A \in \mathcal{L} \implies A \in BC(\mathcal{L})$.
2. $A \in \mathcal{L} \implies \neg A \in BC(\mathcal{L})$.
3. $A, B \in \mathcal{L} \implies A \wedge B \in BC(\mathcal{L})$.

Les 3 axiomes de la définition ci-dessus étant compatibles avec les règles de construction de la logique du premier ordre, l'ensemble $BC(\mathcal{L})$ des combinaisons booléennes finies de $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ est encore inclus dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$.

Le Théorème de Gaifman (voir [33] ou [23] p. 31 pour une démonstration) affirme que l'ensemble des combinaisons booléennes finies de l'ensemble des formules locales basiques recouvre toute la logique du premier ordre :

Théorème 3.1.8 Toute formule de la logique du premier ordre est logiquement équivalente à une combinaison booléenne finie de formules locales basiques.

En particulier, pour toute formule $A \in \mathcal{L}_1(\mathcal{R})$, il existe $\tau \in BC(\mathcal{L}_{bas})$ satisfaisant :

$$\mu_{a,b}(A) = \mu_{a,b}(\tau) .$$

Ce résultat souligne le caractère local de la logique du premier ordre. En effet, une formule locale basique concerne des variables localisées, appartenant à m boules de rayon r . Ainsi, bien plus que la composition exacte du vocabulaire \mathcal{R} (i.e. son pouvoir d'expression), c'est la structure de graphe sous-jacente qui va intervenir et réellement influencer les lois du 0-1 (Proposition 3.1.10 et surtout Théorème 3.3.4).

Le Théorème 3.1.8 peut être vu comme un résultat de "densité" puisqu'il ramène l'étude des formules de la logique du premier ordre à celle des formules locales basiques ou des descriptions locales basiques.

Proposition 3.1.9 Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) La probabilité de toute description locale basique tend vers 0 ou 1.
- (ii) La probabilité de toute formule locale basique tend vers 0 ou 1.
- (iii) La probabilité de toute formule de la logique du premier ordre tend vers 0 ou 1.

Démonstration Par simple inclusion, les implications (iii) \implies (ii) et (ii) \implies (i) sont immédiates. Supposons (ii). Les relations élémentaires $\mu_{a,b}(A) = 1 - \mu_{a,b}(\neg A)$ et

$$\mu_{a,b}(A) + \mu_{a,b}(B) - 1 \leq \mu_{a,b}(A \wedge B) \leq \min\{\mu_{a,b}(A), \mu_{a,b}(B)\} ,$$

valables pour toutes formules logiques A et B entraînent que la probabilité de toute combinaison booléenne finie de formules locales basiques tend vers 0 ou 1. Par le Théorème de Gaifman, il vient (iii).

Nous allons maintenant montrer que toute formule locale basique est soit insatisfiable, et dans ce cas sa probabilité est nulle, soit s'écrit comme une disjonction finie de descriptions locales

basiques. L'implication (i) \Rightarrow (ii) sera alors démontrée. Considérons la formule locale basique L suivante :

$$L \leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \psi_i(x_i) \right). \quad (3.1.4)$$

Si l'une des assertions $\psi_i(x)$ est insatisfiable, il en va de même pour L . Sinon, décomposons chacune des m assertions $\psi_i(x)$ en une disjonction de descriptions complètes. Pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe un entier d_i (le cardinal de l'ensemble de définition $\mathcal{D}(\psi_i)$) et des descriptions complètes $D_{i,1}, \dots, D_{i,d_i}$ (les éléments de $\mathcal{D}(\psi_i)$) telles que

$$\psi_i(x) \leftrightarrow \bigvee_{1 \leq j \leq d_i} D_{i,j}(x).$$

En remplaçant dans (3.1.4) l'assertion $\psi_i(x_i)$ par la disjonction correspondante et après réarrangement des termes, la formule locale basique L s'écrit alors comme une disjonction finie de descriptions locales basiques :

$$\bigvee_{1 \leq j_1 \leq d_1} \dots \bigvee_{1 \leq j_m \leq d_m} \left(\exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} D_{i,j_i}(x_i) \right) \right).$$

■

La Proposition 3.1.9 nous permet d'obtenir une première loi du 0-1 lorsque les potentiels sont supposés fixés. Nous montrerons que sous cette hypothèse la probabilité de toute description locale basique tend vers 1. L'idée sous-jacente est qu'un événement local, i.e. concernant un nombre fixé de sommets, se produira avec probabilité 1 dans le graphe infini. La Proposition 3.1.10 est volontairement présentée dans le cas indépendant ($b = 0$), i.e celui de la mesure μ_p . En effet, le cas général nécessite des techniques, reposant notamment sur la Propriété 2.2.3, qui seront au cœur du Théorème 3.2.1 et de la Proposition 3.3.3. Nous les dévoilerons donc en temps voulu.

Proposition 3.1.10 *Soit $p \in]0, 1[$ fixé. Soit $A \in \mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ une formule de la logique du premier ordre quelconque. Alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_p(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Démonstration Soit L la description locale basique suivante :

$$L \leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} D_i(x_i) \right), \quad (3.1.5)$$

Par la Proposition 3.1.9, il suffit de montrer que la probabilité de L tend vers 0 ou 1. Pour cela considérons la formule de $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$, notée $Rect(x)$, dont seule la variable x est libre, définie par :

$$Rect(x) \leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq m} D_i(x + ((i-1)\rho(2r+1), 0, \dots, 0)).$$

Appliquée en un sommet x , la propriété $Rect(x)$ représente la réalisation des m descriptions complètes D_1, \dots, D_m en m boules disjointes, consécutives et alignées selon la première coordonnée. La proposition $\exists x, Rect(x)$ implique la description locale basique L . Nous allons donc montrer que sa probabilité tend vers 1. La loi du 0-1 en découlera.

Pour $1 \leq i \leq m$, l'événement $D_i(x)$ nécessite $k(D_i)$ sommets positifs et $\beta(r) - k(D_i)$ négatifs. Par indépendance, sa probabilité vaut :

$$\mu_p(D_i(x)) = p^{k(D_i)}(1-p)^{\beta(r)-k(D_i)},$$

et ce pour tout sommet x . Toujours par indépendance, il vient :

$$\begin{aligned} \mu_p(Rect(x)) &= \prod_{1 \leq i \leq m} \mu_p(D_i(x + ((i-1)\rho(2r+1), 0, \dots, 0))) \\ &= p^{\sum_{1 \leq i \leq m} k(D_i)} (1-p)^{m\beta(r) - \sum_{1 \leq i \leq m} k(D_i)}, \end{aligned}$$

quantité que l'on notera simplement \tilde{p} . Puisque $p \in]0, 1[$, il en va de même pour le réel \tilde{p} . Introduisons maintenant le sous-ensemble de V_n , noté L_n , suivant :

$$L_n = \left\{ (i \times m\rho(2r+1), 0, \dots, 0) \in V_n, i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{m\rho(2r+1)} \right\rfloor - 1 \right\}.$$

Les événements $Rect(x)$ et $Rect(y)$ où x et y sont deux éléments distincts de L_n concernent des ensembles de sommets disjoints. Ils sont donc indépendants, chacun de probabilité \tilde{p} . Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mu_p(\exists x, Rect(x)) &\geq \mu_p \left(\bigvee_{x \in L_n} Rect(x) \right) \\ &\geq 1 - (1 - \tilde{p})^{\lfloor \frac{n}{m\rho(2r+1)} \rfloor}, \end{aligned}$$

qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. ■

La Proposition 3.1.10 repose sur le fait qu'à $p \in [0, 1]$ fixé, toute description complète est satisfaite avec une probabilité qui tend vers 1. Ce résultat est donc la version d -dimensionnelle du paradoxe bien connu du "singé et de la machine à écrire" (voir [80] p. 44).

Les logiciens ont évidemment cherché très tôt à étendre la Proposition 3.1.10 à la logique du second ordre. La loi du 0-1 est vraie pour certains fragments, fautive pour d'autres : voir les articles de synthèse de Kolaitis et Vardi [48, 49] et Le Bars [53]. Ce dernier est l'auteur de plusieurs exemples de propriétés dont la probabilité ne tend ni vers 0 ni vers 1 (voir [52, 54, 55]).

Cette section se termine par deux exemples de formules issues de la logique du second ordre et contredisant la loi du 0-1 ci-dessus. Ils seront traités dans le cas du potentiel de paire nul et en dimension $d = 2$. Nous montrerons que leur probabilité (pour la mesure μ_p) ne tend ni vers 0 ni vers 1.

Exemple 3.1.11 Considérons la propriété \mathcal{A} suivante :

“le nombre de sommets positifs est pair”.

C’est un exemple classique de formule de logique du second ordre non-axiomatisable pour la logique du premier ordre (voir [23] exemple 1.3.4 p. 21 et p. 37). Sa probabilité vaut :

$$\mu_p(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \left(1 + (1 - 2p)^{n^2} \right) .$$

Elle tend donc vers $1/2$ pour toute valeur du paramètre p appartenant à l’intervalle $]0, 1[$. Le fait d’écrire la probabilité $\mu_p(\mathcal{A})$ sous la forme

$$\mu_p(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n^2} \binom{n^2}{k} p^k (1-p)^{n^2-k} (1 + (-1)^k)$$

mène rapidement au résultat. En effet, $\mu_p(\mathcal{A})$ devient :

$$\begin{aligned} \mu_p(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n^2} \binom{n^2}{k} p^k (1-p)^{n^2-k} + (-1)^k \sum_{k=0}^{n^2} \binom{n^2}{k} p^k (1-p)^{n^2-k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=0}^{n^2} \binom{n^2}{k} (-p)^k (1-p)^{n^2-k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + (1 - 2p)^{n^2} \right) . \end{aligned}$$

Exemple 3.1.12 Ce deuxième exemple est plus visuel que le précédent et concerne donc davantage les images. Plaçons nous dans le cas de la 8-connexité ($q = +\infty$ et $\rho = 1$). Définissons un chemin 6-connexe comme un chemin pour lequel les directions $(-1, 1)$ et $(1, -1)$ sont interdites. Plus précisément, un chemin 6-connexe est un m -uplet (x_1, \dots, x_m) de pixels tels que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $x_{i+1} = x_i + \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. De plus, nous imposons à un chemin 6-connexe de ne pas traverser les bords de l’image, i.e. de ne pas emprunter les arêtes servant à assurer la périodicité du graphe (la Figure 3.2 est une illustration). Considérons les deux propriétés :

- (i) *NGD* : “il existe un chemin 6-connexe de pixels noirs allant de gauche à droite”,
- (ii) *BHB* : “il existe un chemin 6-connexe de pixels blancs allant de haut en bas”.

Des considérations d’ordre géométrique montrent qu’une image satisfait la propriété *NGD* si et seulement si elle ne satisfait pas *BHB* :

$$\mu_p(\text{NGD}) = 1 - \mu_p(\text{BHB}) .$$

Cet argument est n’est pas valable pour des chemins utilisant la 4 ou la 8-connexité (voir [68] p. 183). En effet, dans le cas de la 4-connexité, la formule $\neg \text{NGD} \wedge \neg \text{BHB}$ est satisfaite par

certaines images et, dans celui de la 8-connexité, les propriétés *NGD* et *BHB* ne s'excluent pas l'une l'autre. Posons maintenant $p = 1/2$. Par dualité, il vient :

$$\mu_{1/2}(NGD) = \mu_{1/2}(BHB) .$$

Ces deux équations forcent les probabilités (pour $\mu_{1/2}$) des propriétés *NGD* et *BHB* à valoir $1/2$.

Les formules *NGD* et *BHB* sont des exemples classiques de propriétés étudiées en théorie de la *percolation* (voir [41] pour une référence générale).

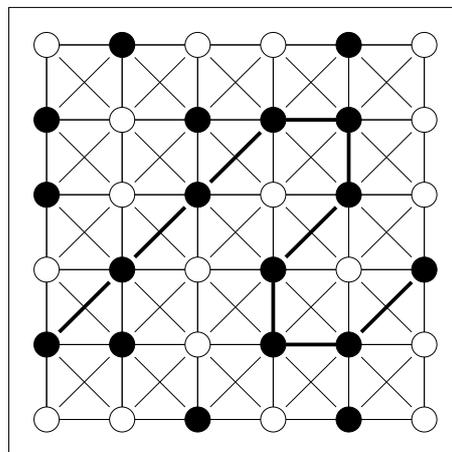


FIG. 3.2 – Un chemin 6-connexe de pixels noirs allant de gauche à droite.

3.2 Fonction seuil d'une description locale

Considérons une description complète D de la boule $B(0, r)$. Comme le suggère la Proposition 3.1.10, à potentiels a et b fixés, la probabilité de la description locale $\exists x, D(x)$ tend vers 1 lorsque la taille n du graphe tend vers l'infini. Ce résultat devient faux lorsque les potentiels sont autorisés à varier avec n . C'est une conséquence immédiate du Théorème 3.2.1 auquel est consacrée la Section 3.2.1. Ce résultat décrit la présence ou plutôt le moment d'apparition d'une configuration locale dans le graphe à travers la notion de *fonction seuil*.

Dans la Section 3.2.2, ce résultat sera commenté et illustré par des simulations : en adoptant un point de vue dynamique, i.e en faisant varier le potentiel de surface $a(n)$ depuis $-\infty$ jusqu'à 0, nous observerons l'évolution des configurations locales présentes dans G_n en fonction de leur nombre de sommets positifs.

3.2.1 Probabilité asymptotique de l'événement $X_n(\eta) > 0$

Le résultat suivant donne un seuil, portant sur le potentiel de surface $a(n)$, pour la probabilité de la présence d'une configuration locale dans le graphe.

Théorème 3.2.1 *Supposons que pour tout n , $a(n) < 0$ et qu'il existe une constante $b_0 > 0$ telle que $|b(n)| < b_0$. Soient r un entier non nul et η une configuration locale de la boule $B(0, r)$.*

(i) *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2a(n)k(\eta)} n^d = 0$ alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0) = 0 .$$

(ii) *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2a(n)k(\eta)} n^d = +\infty$ alors :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0) = 1 .$$

Soit D une description complète de la boule $B(0, r)$ et η sa configuration locale associée. Le Théorème 3.2.1 se traduit immédiatement en termes de description locale puisque la formule $\exists x, D(x)$ et l'événement $X_n(\eta) > 0$ ont la même probabilité.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2a(n)k(D)} n^d = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\exists x, D(x)) = 0 . \quad (3.2.6)$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2a(n)k(D)} n^d = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\exists x, D(x)) = 1 . \quad (3.2.7)$$

La démonstration du Théorème 3.2.1 repose sur l'aspect markovien de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ et sur le caractère local du graphe G_n .

Démonstration Soit η une configuration locale de la boule $B(0, r)$. Rappelons que $k(\eta)$ sommets de cette boule ont des spins positifs pour la configuration locale η et que la variable aléatoire $X_n(\eta)$ compte le nombre de fois qu'elle apparaît dans le graphe :

$$X_n(\eta) = \sum_{x \in V_n} I_x^\eta .$$

Soit $x \in V_n$ un sommet et notons simplement $B = B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r . Fixons également une configuration $\sigma \in W^{\delta B}$ sur le voisinage de la boule B . L'énergie locale de la configuration $\eta_x \sigma \in W^{\overline{B}}$ a été explicitée en (2.4.21) :

$$H^B(\eta_x \sigma) = a(n)(2k(\eta) - \beta(r)) + b(n) \left(\sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y,z \in B}} \eta_x(y)\eta_x(z) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B, z \in \delta B}} \eta_x(y)\sigma(z) \right) .$$

Le caractère local du graphe G_n fait que les sommes apparaissant dans l'expression ci-dessus ne portent que sur un nombre fini de termes ($\alpha(r)$ pour la première et au plus $\alpha(r+1) - \alpha(r)$ pour la deuxième), indépendants de la taille n du graphe. De plus, le potentiel de paire $b(n)$ étant borné par hypothèse, la différence entre les énergies locales $H^B(\eta'_x \sigma)$ et $H^B(\eta_x \sigma)$, pour toute

configuration locale $\eta' \in \mathcal{C}_r$, est contrôlée à l'aide du potentiel de surface $a(n)$ et des seuls entiers $k(\eta)$ et $k(\eta')$. Il existe en effet deux constantes K et K' ne dépendant que de la borne b_0 et du rayon r telle que :

$$2a(n)(k(\eta') - k(\eta)) + K \leq H^B(\eta'_x\sigma) - H^B(\eta_x\sigma) \leq 2a(n)(k(\eta') - k(\eta)) + K'. \quad (3.2.8)$$

Notons que l'encadrement ci-dessus est uniforme en la configuration locale $\eta' \in \mathcal{C}_r$ et en la configuration $\sigma \in W^{\delta B}$. Il ne dépend pas non plus du sommet x .

Nous avons vu dans la Section 2.4.2 que la différence des énergies locales $H^B(\eta'_x\sigma)$ et $H^B(\eta_x\sigma)$ apparaissait dans l'expression de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\sigma)$:

$$\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\sigma) = \left(\sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r} e^{H^B(\eta'_x\sigma) - H^B(\eta_x\sigma)} \right)^{-1}. \quad (3.2.9)$$

Ainsi, l'encadrement (3.2.8) nous permettra de contrôler le comportement de cette probabilité conditionnelle.

Tout d'abord supposons que la quantité $e^{2a(n)k(\eta)}n^d$ tende vers 0, ce qui n'est possible que lorsque $k(\eta)$ est strictement positif. Notons η^0 l'unique élément de \mathcal{C}_r satisfaisant $k(\eta^0) = 0$: η^0 est la configuration locale dont tous les sommets sont négatifs. Les relations (3.2.8) et (3.2.9) impliquent que, pour toute configuration $\sigma \in W^{\delta B}$,

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\sigma) &\leq e^{H^B(\eta_x\sigma) - H^B(\eta_x^0\sigma)} \\ &\leq e^{2a(n)k(\eta) - K}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

L'uniformité en la configuration $\sigma \in W^{\delta B}$ nous permet de passer à l'espérance dans l'inégalité précédente et d'obtenir la limite du nombre moyen d'occurrences de η dans le graphe :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] &= n^d \mathbf{E}_{a,b}[\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\mathcal{F}(\delta B))] \\ &\leq n^d e^{2a(n)k(\eta) - K}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Enfin, en remarquant que, pour une variable aléatoire à valeurs entières et positives, la probabilité d'être strictement positive est inférieure à son espérance, on en déduit que la quantité $\mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0)$ tend elle aussi vers 0 quand n tend vers l'infini. La partie (i) est démontrée.

Supposons donc cette fois que $e^{2a(n)k(\eta)}n^d$ tende vers $+\infty$. Le potentiel de surface $a(n)$ étant supposé négatif, (3.2.8) entraîne que la différence

$$H^B(\eta'_x\sigma) - H^B(\eta_x\sigma) \leq -2a(n)k(\eta) + K',$$

et ce pour toute configuration locale $\eta' \in \mathcal{C}_r$ et pour toute configuration $\sigma \in W^{\delta B}$. Dès lors, l'utilisation de la relation (3.2.9) produit cette fois une minoration de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\sigma)$. En effet, il existe une constante positive $C = 2^{-\beta(r)}e^{-K'}$ telle que :

$$\forall \sigma \in W^{\delta B}, \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\sigma) \geq C e^{2a(n)k(\eta)}. \quad (3.2.12)$$

Comme précédemment, l'uniformité en σ nous permet de conclure quant à l'espérance de $X_n(\eta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] &= n^d \mathbf{E}_{a,b}[\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta B))] \\ &\geq C n^d e^{2a(n)k(\eta)} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

quand n tend vers l'infini, par hypothèse. En déduire que la limite de la probabilité de l'événement $X_n(\eta) > 0$ est nulle est cette fois plus difficile. Il s'agira d'invoquer le caractère markovien de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$.

A cet effet, considérons le sous-ensemble de sommets T_n de V_n défini par :

$$T_n = \left\{ i(\rho(2r+1)+1), i = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{\rho(2r+1)+1} \right\rfloor - 1 \right\}^d.$$

Désignons par τ_n son cardinal et par \mathcal{T}_n la réunion des boules de rayon r dont les centres appartiennent à T_n (voir la Figure 3.3).

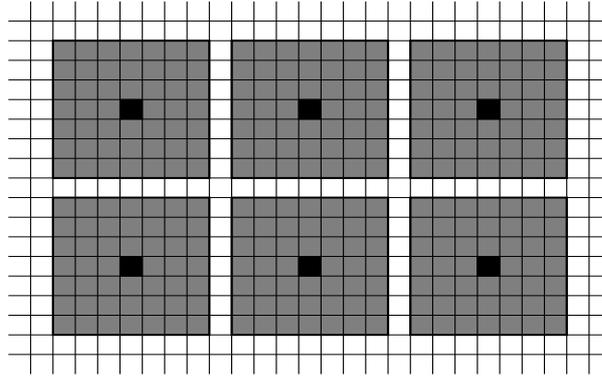


FIG. 3.3 – Les cases coloriées représentent des sommets de l'ensemble \mathcal{T}_n (en dimension $d = 2$, avec $r = 3$, $\rho = 1$ et $p = +\infty$). Les noires sont des éléments de T_n .

Faisons deux remarques concernant l'ensemble T_n . Premièrement, son cardinal croît comme n^d ; il existe une constante positive C' vérifiant $\tau_n \geq C' n^d$. Deuxièmement, si x et x' sont deux éléments distincts appartenant à T_n alors aucun sommet de la boule $B(x, r)$ ne pourra être voisin de l'un de ceux de la boule $B(x', r)$. Autrement dit, les boules $B(x, r)$ et $B(x', r)$ sont \mathcal{V} -disjointes. Introduisons alors la variable aléatoire $\tilde{X}_n(\eta)$ comptant le nombre d'occurrences de la configuration locale η sur l'ensemble \mathcal{T}_n :

$$\tilde{X}_n(\eta) = \sum_{x \in T_n} I_x^\eta.$$

Puisque $\tilde{X}_n(\eta)$ est majorée par $X_n(\eta)$, il suffit de montrer que la limite de la probabilité de l'événement $\tilde{X}_n(\eta) > 0$ tend vers 1 ou encore que celle de $\tilde{X}_n(\eta) = 0$ tend vers 0. C'est cette dernière alternative que nous allons prouver.

Nous allons utiliser par deux fois la Propriété 2.2.3. D'une part, puisque deux boules quelconques de \mathcal{T}_n sont \mathcal{V} -disjointes, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b} \left(\tilde{X}_n(\eta) = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n) \right) &= \mu_{a,b} \left(\bigwedge_{x \in \mathcal{T}_n} I_x^\eta = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n) \right) \\ &= \prod_{x \in \mathcal{T}_n} \mu_{a,b} (I_x^\eta = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n)) . \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

D'autre part, la variable aléatoire $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n))$ est en fait $\mathcal{F}(\delta B(x, r))$ -mesurable :

$$\mu_{a,b} (I_x^\eta = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n)) = \mu_{a,b} (I_x^\eta = 0 | \mathcal{F}(\delta B(x, r))) , \quad (3.2.14)$$

cette égalité étant bien entendu valable pour tout $x \in \mathcal{T}_n$. En combinant (3.2.13) et (3.2.14), il vient :

$$\mu_{a,b} \left(\tilde{X}_n(\eta) = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n) \right) = \prod_{x \in \mathcal{T}_n} \mu_{a,b} (I_x^\eta = 0 | \mathcal{F}(\delta B(x, r))) .$$

Remarquons par ailleurs que les fonctionnelles $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 0 | \mathcal{F}(\delta B(x, r)))$ sont toutes à valeurs dans le même ensemble (de cardinal fini). Par conséquent, fixons un sommet x de \mathcal{T}_n et désignons par σ^{max} une des configurations de $W^{\delta B(x, r)}$ maximisant ces fonctionnelles. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b} \left(\tilde{X}_n(\eta) = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n) \right) &\leq (\mu_{a,b}(I_x^\eta = 0 | \sigma^{max}))^{\tau_n} \\ &\leq \exp(-\tau_n \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma^{max})) , \end{aligned}$$

par l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$, valable pour tout $u > -1$. Enfin, en utilisant la minoration (3.2.12) puis en passant à l'espérance, il vient :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b} \left(\tilde{X}_n(\eta) = 0 \right) &= \mathbb{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b} \left(\tilde{X}_n(\eta) = 0 | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n) \right) \right] \\ &\leq \exp(-\tau_n \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma^{max})) \\ &\leq \exp(-C C' n^d e^{2a(n)k(\eta)}) , \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini par hypothèse. ■

Dans la suite, nous utiliserons régulièrement la notation très pratique suivante : si $f(n)$ et $g(n)$ sont deux fonctions à valeurs positives, la notation $f(n) \ll g(n)$ ou encore $g(n) \gg f(n)$ signifie que le quotient $f(n)/g(n)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Supposons un instant que $k(\eta)$ soit non nul (le cas $k(\eta) = 0$ sera traité ultérieurement). Le Théorème 3.2.1 s'interprète de la manière suivante : à potentiel de paire $b(n)$ borné, la présence dans G_n de la configuration locale η dépend du potentiel de surface $a(n)$. Plus précisément, lorsque $e^{2a(n)} \ll n^{-d/k(\eta)}$, avec une probabilité tendant vers 1, aucune copie de η n'apparaîtra dans le graphe. Au contraire, si $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$, avec une probabilité tendant vers 1, au moins une copie de η sera présente quelque part dans le graphe.

Cette interprétation fait référence à la notion de *fonction seuil*, notion initialement introduite en 1960 par Erdős et Rényi [26] pour les graphes aléatoires (voir également [74]). Nous adopterons une version mieux adaptée au modèle d'Ising et prenant en compte la négativité du potentiel de surface $a(n)$:

Definition 3.2.2 Soit A une propriété du graphe G_n . La quantité $s(n)$ est appelée fonction seuil de la propriété A si :

$$e^{2a(n)} \ll s(n) \text{ implique } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(A) = 0$$

et si :

$$e^{2a(n)} \gg s(n) \text{ implique } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(A) = 1 .$$

Remarquons tout d'abord que la fonction seuil d'une propriété n'est pas unique, c'est seulement un ordre de grandeur. En effet, si $s(n)$ est la fonction seuil de A , il en est de même pour $cs(n)$, où c est une constante strictement positive fixée. Cependant, nous parlerons abusivement de "la" fonction seuil d'une propriété.

Le Théorème 3.2.1 affirme que $n^{-d/k(\eta)}$ est la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$, lorsque $k(\eta)$ est non nul. Le cas particulier de la configuration locale η^0 formée uniquement de sommets négatifs est à part : la propriété $X_n(\eta^0) > 0$ n'admet pas de fonction seuil. En effet, d'après le Théorème 3.2.1, sa probabilité tend toujours vers 1, quel que soit le comportement du potentiel de surface $a(n)$. En d'autres termes, η^0 sera asymptotiquement toujours présente dans le graphe. Ce cas étant réglé, nous focaliserons désormais notre attention sur des configurations locales ayant au moins un sommet dont le spin est positif.

La fonction seuil d'une réunion ou d'une intersection de propriétés dont les fonctions seuils sont du type $n^{-d/k}$ s'obtient très simplement :

Propriété 3.2.3 Soient m un entier strictement positif et A_1, \dots, A_m des propriétés du graphe G_n dont les fonctions seuils respectives $s_1(n), \dots, s_m(n)$ satisfont :

$$\forall i = 1, \dots, m, \exists k_i \in \mathbb{N}^*, \forall n, s_i(n) = n^{-d/k_i} . \quad (3.2.15)$$

Alors, les fonctions seuils, notées respectivement $s(n)$ et $S(n)$, des propriétés réunion $\cup_{i=1}^m A_i$ et intersection $\cap_{i=1}^m A_i$ sont données par les formules

$$s(n) = \min_{1 \leq i \leq m} s_i(n) = n^{-d/\min_{1 \leq i \leq m} k_i}$$

et

$$S(n) = \max_{1 \leq i \leq m} s_i(n) = n^{-d/\max_{1 \leq i \leq m} k_i} .$$

L'hypothèse (3.2.15) portant sur la forme des fonctions seuils est très forte et va grandement faciliter la démonstration de la Propriété 3.2.3. Il est possible de l'affaiblir tout en conservant le fait que les fonctions seuils $s(n)$ et $S(n)$ sont obtenues comme le minimum et le maximum des $s_i(n)$. Néanmoins, toutes les fonctions seuils que nous rencontrerons dans cette étude seront du type $n^{-d/k}$ et la Propriété 3.2.3 sera pleinement satisfaisante.

D'un point de vue dynamique, i.e. en visualisant la fonction seuil d'une propriété comme le moment à partir duquel elle est satisfaite, la Propriété 3.2.3 s'interprète facilement. Une réunion de propriétés est satisfaite dès que l'une d'entre elles est satisfaite alors que pour une intersection, il faut attendre que chacune des propriétés le soit.

Ces expressions des fonctions seuils de réunion et d'intersection de propriétés s'obtiennent naturellement par le jeu d'inégalités élémentaires de probabilités.

Démonstration Commençons par la réunion. Supposons dans un premier temps que $e^{2a(n)} \ll \min_{1 \leq i \leq m} s_i(n)$. Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a $e^{2a(n)} \ll s_i(n)$ et donc la probabilité $\mu_{a,b}(A_i)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, par définition de la fonction seuil. L'inégalité

$$\mu_{a,b}(\cup_{i=1}^m A_i) \leq \sum_{i=1}^m \mu_{a,b}(A_i)$$

nous permet alors d'affirmer qu'il en est de même pour la probabilité de la réunion des propriétés A_i . Inversement, supposons que $e^{2a(n)} \gg \min_{1 \leq i \leq m} s_i(n)$. Le minimum des fonctions seuils $s_i(n)$ sur l'ensemble (fini) $\{1, \dots, m\}$ est atteint en un indice i_0 . Par l'hypothèse (3.2.15), les $s_i(n)$ sont toutes de la forme n^{-d/k_i} . Ainsi, l'indice i_0 est indépendant de n et la fonction $s_{i_0}(n) = n^{-d/k_{i_0}}$ minimise les $s_i(n)$ pour tout n . Par conséquent, $e^{2a(n)} \gg s_{i_0}(n)$ et la probabilité de la propriété A_{i_0} , et donc aussi celle de la réunion $\cup_{i=1}^m A_i$, tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Finalement, d'après la Définition 3.2.2, la quantité

$$\min_{1 \leq i \leq m} s_i(n) = n^{-d/\min_{1 \leq i \leq m} k_i}$$

est la fonction seuil de la propriété $\cup_{i=1}^m A_i$.

Le cas de l'intersection des propriétés relève de techniques similaires. Si $e^{2a(n)} \ll \max_{1 \leq i \leq m} s_i(n)$, il existe un indice i_0 (indépendant de n par l'hypothèse (3.2.15)) tel que $e^{2a(n)} \ll s_{i_0}(n)$. Ceci signifie que la quantité $\mu_{a,b}(A_{i_0})$ tend vers 0. La probabilité de l'intersection $\cap_{i=1}^m A_i$ admet donc la même limite. Supposons maintenant que $e^{2a(n)} \gg \max_{1 \leq i \leq m} s_i(n)$. Alors, les m propriétés A_1, \dots, A_m ont chacune une probabilité qui tend vers 1. L'inégalité

$$1 - \sum_{i=1}^m (1 - \mu_{a,b}(A_i)) \leq \mu_{a,b}(\cap_{i=1}^m A_i)$$

entraîne que c'est aussi le cas pour l'intersection $\cap_{i=1}^m A_i$. D'après la Définition 3.2.2,

$$\max_{1 \leq i \leq m} s_i(n) = n^{-d/\max_{1 \leq i \leq m} k_i}$$

est la fonction seuil de la propriété $\cap_{i=1}^m A_i$. ■

Considérons alors une assertion $\psi(x)$ de la boule $B(x, r)$. Si l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ est insatisfiable alors sa probabilité est nulle. Dans le cas contraire et lorsque l'indice $k(\psi)$ est non nul, cette proposition admet une fonction seuil dont l'expression s'obtient très facilement en utilisant la Propriété 3.2.3 et le Théorème 3.2.1.

Corollaire 3.2.4 Soit $\psi(x)$ une assertion de la boule $B(x, r)$ telle que l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ soit satisfiable. Si l'indice $k(\psi)$ de l'assertion $\psi(x)$ est nul alors la probabilité de $\exists x, \psi(x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Sinon, la propriété $\exists x, \psi(x)$ admet une fonction seuil de la forme $n^{-d/k(\psi)}$.

Démonstration L'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ étant satisfiable, elle est logiquement équivalente à une disjonction finie de descriptions locales (voir la Section 3.1.2 pour plus de détails) :

$$\exists x, \psi(x) \leftrightarrow \bigvee_{D \in \mathcal{D}(\psi)} \exists x, D(x).$$

Si l'indice $k(\psi)$ est nul alors, par définition, il existe une description complète de $\mathcal{D}(\psi)$, disons D^0 , dont l'indice $k(D^0)$ est nul lui aussi. Sa configuration locale associée n'est autre que la configuration locale η^0 formée uniquement de sommets négatifs. Nous avons déjà vu que la probabilité de $X_n(\eta^0) > 0$ tendait vers 1 quand $n \rightarrow +\infty$, quelle que soit la valeur du potentiel de surface $a(n)$. Il en va donc de même pour la probabilité de la description locale $\exists x, D^0(x)$ et pour l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ puisque :

$$\exists x, D^0(x) \rightarrow \exists x, \psi(x).$$

Supposons maintenant que $k(\psi) > 0$. Par définition, les indices des descriptions complètes formant l'ensemble $\mathcal{D}(\psi)$ sont eux aussi non nuls. Les relations (3.2.6) et (3.2.7) affirment alors que la fonction seuil de la formule $\exists x, D(x)$, $D \in \mathcal{D}(\psi)$ est $n^{-d/k(D)}$. La Propriété 3.2.3 donne alors la fonction seuil de l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$:

$$\min_{D \in \mathcal{D}(\psi)} n^{-d/k(D)} = n^{-d/(\min_{D \in \mathcal{D}(\psi)} k(D))} = n^{-d/k(\psi)}.$$

■

3.2.2 Commentaires et simulations

Cette section comporte quelques commentaires concernant l'expression de la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$ donnée par le Théorème 3.2.1 et des simulations illustrant ce résultat. Considérons une configuration locale η de la boule $B(0, r)$ ayant au moins un sommet positif, i.e. telle que $k(\eta) > 0$. En d'autres termes, la propriété $X_n(\eta) > 0$ signifie :

“la configuration locale η apparaît quelque part dans le graphe”.

Sa fonction seuil est $n^{-d/k(\eta)}$. Remarquons tout d'abord qu'elle ne dépend pas du nombre de sommet négatifs formant la configuration locale η . Ceci est dû au fait que le potentiel de surface $a(n)$ est supposé négatif et que l'on s'intéresse au cas où il tend vers $-\infty$. Il faut alors comprendre que les sommets sont en très grande majorité négatifs et ce seront les quelques groupements de sommets positifs qui vont réellement compter. D'ailleurs, le Théorème 3.2.1 s'étend aisément par symétrie à toute valeur réelle du potentiel de surface $a(n)$. En particulier, lorsque $a(n)$ tend vers $+\infty$, c'est du nombre de sommets négatifs de la configuration locale η dont dépendra sa présence dans le graphe. Notons pour cela $h(\eta) = |V_-(\eta)| = \beta(r) - k(\eta)$ ce nombre. Toujours sous l'hypothèse $|b(n)| < b_0$, le Théorème 3.2.1 devient :

(i) Si $e^{2a(n)k(\eta)}n^d \rightarrow 0$ ou si $e^{-2a(n)h(\eta)}n^d \rightarrow 0$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0) = 0 .$$

(ii) Si $e^{2a(n)k(\eta)}n^d \rightarrow +\infty$ et si $e^{-2a(n)h(\eta)}n^d \rightarrow +\infty$ alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0) = 1 .$$

Autrement dit, lorsque le potentiel de surface $a(n)$ tend trop rapidement vers $-\infty$ ou vers $+\infty$ de telle sorte qu'il est difficile pour la mesure $\mu_{a,b}$ de garantir la présence locale de $k(\eta)$ sommets positifs ou de $h(\eta)$ négatifs, la configuration locale η n'apparaîtra pas dans le graphe. En dehors de ces deux cas extrêmes, donc pour la plupart des valeurs de $a(n)$, au moins une occurrence de η sera présente quelque part dans le graphe.

Pour la même raison que précédemment, i.e. $a(n) < 0$, la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$ ne dépend pas non plus du rayon de la boule sur laquelle η est définie. Par exemple, si ζ désigne la configuration locale de la boule $B(0, r+1)$ obtenue à partir de η à laquelle est rajoutée une ceinture de sommets négatifs alors les propriétés $X_n(\zeta) > 0$ et $X_n(\eta) > 0$ ont la même fonction seuil $n^{-d/k(\eta)}$. Nous détaillerons cette remarque à la fin de la Section 3.3.1. Le rayon r est donc un paramètre fantôme : il ne sert qu'à assurer le caractère local de l'objet η .

Finalement, la fonction seuil de $X_n(\eta) > 0$ ne dépend de η qu'à travers son nombre $k(\eta)$ de sommets positifs. Ceci sous-entend que toutes les configurations locales ayant $k(\eta)$ sommets positifs ont la même fonction seuil, indépendamment de la géométrie de son ensemble de sommets positifs $V_+(\eta)$. L'hypothèse portant sur le potentiel de paire $|b(n)| < b_0$ est donc très forte. Elle relativise l'importance des interactions entre les spins des sommets par rapport à l'action du potentiel de surface $a(n)$. Cet effet apparaît clairement dans la démonstration du Théorème 3.2.1, précisément dans l'obtention de (3.2.8).

Remarquons cependant qu'il paraît possible de contrôler la probabilité d'apparition de η dans le graphe sans pour autant imposer au potentiel de paire $b(n)$ d'être borné. Introduisons à cet effet la quantité $Q_{a,b}(\eta)$ définie par :

$$Q_{a,b}(\eta) = \sup_{\sigma \in W^{\delta B(x,r)}} \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma)$$

Dans la démonstration du Théorème 3.2.1, l'indépendance de $Q_{a,b}(\eta)$ en le sommet x a été soulignée. De plus, il a été prouvé que

$$\mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0) \leq n^d Q_{a,b}(\eta)$$

et que

$$\mu_{a,b}(X_n(\eta) = 0) \leq e^{-Cn^d Q_{a,b}(\eta)} .$$

Ainsi, toutes conditions portant sur les potentiels $a(n)$ et $b(n)$ assurant la convergence de la quantité $Q_{a,b}(\eta)$ vers 0 ou $+\infty$ impliquent celle de la probabilité $\mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0)$ respectivement vers 0 et 1. Celles explicitées dans le Théorème 3.2.1 conduisent à un phénomène de seuil.

Il s'agit désormais d'adopter un point de vue dynamique en interprétant les fonctions seuils des propriétés $X_n(\eta) > 0$, $\eta \in \mathcal{C}_r$, comme les moments d'apparition de groupements ou d'amas de $k(\eta)$ sommets positifs. Faisons croître, tel un curseur, le potentiel de surface $a(n)$ depuis $-\infty$ jusqu'à 0. Au fur et à mesure que $a(n)$ croît, $e^{2a(n)}$ traverse les fonctions seuils des propriétés $X_n(\eta) > 0$ et des configurations locales avec de plus en plus de sommets positifs apparaissent. Lorsque $e^{2a(n)} \ll n^{-d}$, le potentiel de surface tend trop rapidement vers $-\infty$ pour autoriser ne serait-ce qu'un sommet à avoir un spin positif : tous les sommets sont négatifs. Lorsque $e^{2a(n)}$ est de l'ordre de $n^{-d/2}$ (voir la Figure 3.4), les configurations locales vérifiant $k(\eta) = 1$, i.e. correspondant aux sommets positifs isolés, sont déjà présentes dans le graphe, et ce depuis n^{-d} . Augmentons encore le curseur $a(n)$ jusqu'à ce que $e^{2a(n)}$ soit de l'ordre de $n^{-d/3}$ (voir la Figure 3.5). C'est le moment d'apparition des configurations locales ayant $k(\eta) = 3$ sommets positifs : elles peuvent ou non être présentes dans le graphe, le Théorème 3.2.1 ne précisant pas la situation dans ce cas précis. Il stipule néanmoins que celles ayant 1 ou 2 sommets positifs sont déjà présentes et que celles en ayant 4 n'arriveront qu'après, précisément lorsque $e^{2a(n)}$ traversera la valeur $n^{-d/4}$ (voir la Figure 3.6).

Dans le but d'évaluer visuellement l'apparition des sommets positifs (ou pixels noirs), les trois simulations suivantes sont de taille raisonnable : $n = 100$. Même si son influence sur le moment d'apparition des configurations locales est asymptotiquement nulle, le potentiel de paire agit de manière significative à taille fixée et en particulier lorsque celle-ci n'est pas très grande (voir la Figure 2.2). C'est la raison pour laquelle, nous l'avons choisi faible : $b = 0.05$.

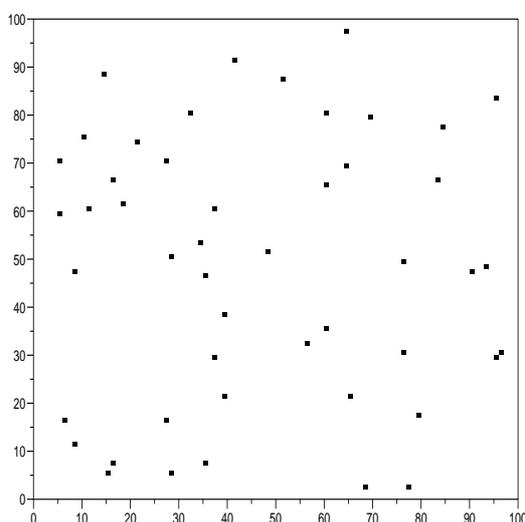


FIG. 3.4 – Apparition des configurations locales ayant $k(\eta) = 2$ pixels noirs : $e^{2a} = n^{-d/2}$ (i.e. $a \simeq -2.3$).

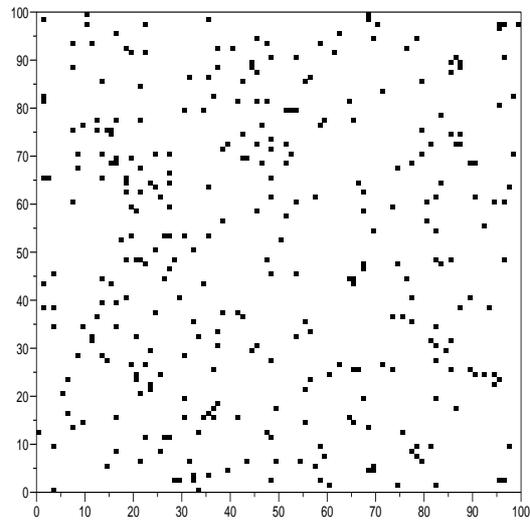


FIG. 3.5 – Apparition des configurations locales ayant $k(\eta) = 3$ pixels noirs : $e^{2a} = n^{-d/3}$ (i.e. $a \simeq -1.535$).

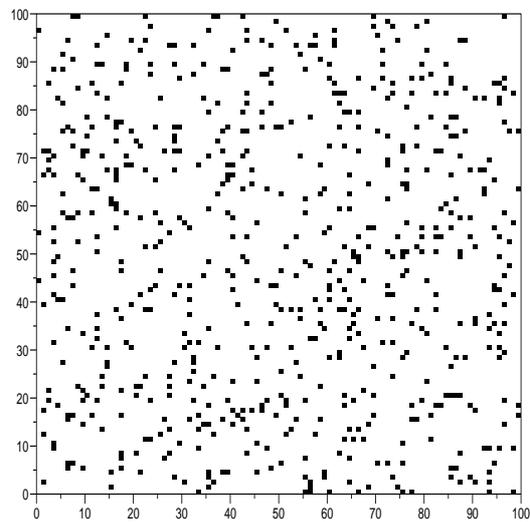


FIG. 3.6 – Apparition des configurations locales ayant $k(\eta) = 4$ pixels noirs : $e^{2a} = n^{-d/4}$ (i.e. $a \simeq -1.15$).

D'après le Théorème 3.2.1, les configurations locales ayant strictement plus de 4 sommets positifs ne devraient pas apparaître dans la Figure 3.6. Ce devrait être le cas de la configuration locale η_c de la Figure 3.7 représentant une croix formée de 5 sommets positifs. On peut en effet le vérifier visuellement.

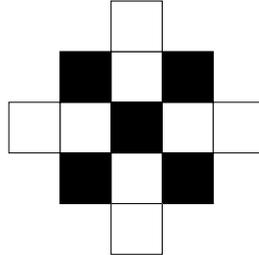


FIG. 3.7 – Une configuration locale de la boule de rayon $r = 2$ (en 4-connexité) ayant 5 pixels noirs ou sommets positifs.

La probabilité (asymptotique) d'apparition de la configuration locale η_c doit vérifier un phénomène de seuil : elle doit être proche de 0 avant la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta_c) > 0$ et proche de 1 après. Nous désirons mettre en valeur par l'expérience le saut de la quantité $\mu_{a,b}(X_n(\eta_c) > 0)$ de 0 vers 1. Comme précédemment, le potentiel de paire est choisi raisonnable ($b = 0.05$). Le phénomène de seuil étant asymptotique, il est nécessaire de choisir la taille du graphe assez grande ($n = 900$). Dès lors la fonction seuil de $X_n(\eta_c) > 0$ est atteinte pour un potentiel de surface satisfaisant

$$e^{2a(n)} = n^{-d/5},$$

i.e. $a(n) \simeq -1.36$ (avec $d = 2$). Pour chaque valeur du potentiel a parcourant le segment $[-1.6, -0.8]$ avec un pas de $+0.05$ (soit 17 valeurs) 50 réalisations de la mesure $\mu_{a,b}$ sont simulées. Pour chacune d'entre elles, un programme détermine si la configuration locale η_c y est présente ou non. La proportion des 50 simulations contenant η_c est reportée dans la Figure 3.8 : une courbe affine par morceaux est obtenue. Remarquons que jusqu'à $a = -1.45$, aucune des 50 simulations de $\mu_{a,b}$ ne contient η_c et qu'à partir de $a = -0.9$, elles la contiennent toutes. Le phénomène de seuil annoncé par la théorie n'est pas très net : il s'étale en effet de $a = -1.45$ à $a = -0.9$. Ceci s'explique par le fait que les résultats théoriques sont asymptotiques. Les expressions "avant" et "après" le seuil, i.e. $e^{2a(n)} \ll n^{-d/k(\eta_c)}$ et $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta_c)}$, n'ont que peu de sens à n fixé. De plus, le seuil mis en relief par la Figure 3.8 paraît décalé par rapport à la valeur attendue du potentiel de surface $a(n) \simeq -1.36$. En d'autres termes, la configuration locale η_c apparaît plus tard que prévu. Nous sommes face à un problème global de notre étude : les capacités informatiques limitent les simulations du modèle d'Ising à des tailles de l'ordre de $n = 10^3$. Or, pour cette taille, le potentiel de surface $a(n)$ satisfaisant $e^{2a(n)} = n^{-2/5}$, i.e. $a(n) = -\log(n)/5$, reste proche de 0. Cette valeur du potentiel de surface illustre mal le contexte théorique $a(n) \rightarrow -\infty$ pour lequel nos résultats sont valables.

Terminons cette section en remarquant que seul l'ordre de grandeur n^d du cardinal de l'ensemble de sommets V_n compte dans l'obtention de la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$.

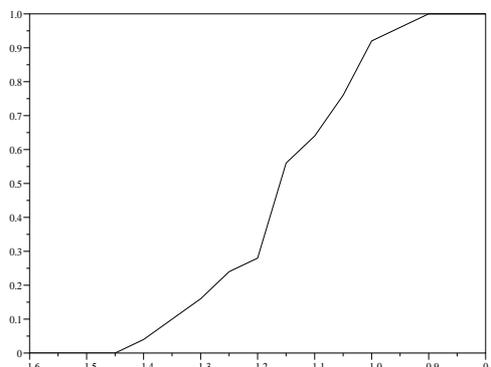


FIG. 3.8 – Un graphique représentant la proportion de simulations de $\mu_{a,b}$ (parmi 50) qui contiennent la configuration locale η_c en fonction du potentiel de surface a (avec $d = 2$, $b = 0.05$ et $n = 900$).

Soit U_n un sous-ensemble de V_n dont le cardinal satisfait

$$\frac{\log |U_n|}{\log n^d} \rightarrow 1 .$$

Alors, la fonction seuil pour la présence de la configuration locale η dans la restriction du graphe G_n à l'ensemble U_n sera la même que dans le graphe G_n tout entier. Cet argument implique une certaine densité des occurrences de la configuration locale η ; il y en a partout dans le graphe. En effet, dès que $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$, tout demi-cône U_n contiendra au moins une copie de η . Une autre conséquence concerne leur nombre $X_n(\eta)$. En choisissant autant de demi-cônes U_n deux à deux disjoints que nécessaire, la variable aléatoire $X_n(\eta)$ dépassera tout entier m fixé avec une probabilité qui tend vers 1. Ce résultat sera démontré dans la prochaine section en s'appuyant davantage sur des inégalités du type (3.2.10) et (3.2.12) que sur des considérations spatiales.

3.2.3 Tentative d'extension à plusieurs couleurs

En termes d'images, le Théorème 3.2.1 certifie la présence ou l'absence d'une sous-image de taille fixée dans une image binaire de taille infinie (tirée selon la mesure $\mu_{a,b}$) en fonction du potentiel de surface $a = a(n)$. Une question naturelle consiste à savoir si ce résultat s'étend au cas d'images à plusieurs couleurs. L'ensemble des images en m couleurs serait alors en bijection avec le nouvel ensemble de configuration $\{0, \dots, m-1\}^{V_n}$: à chaque sommet ou pixel est attribué un entier compris entre 0 et $m-1$, sa couleur. C'est par la négative que cette section prétend répondre à la question précédente. Plus que les techniques probabilistes mises en jeu dans la Section 3.2.1, c'est la notion de seuil qui fera réellement défaut.

Il n'est pas nécessaire d'introduire un modèle de dépendance entre les sommets représentant nos images à m couleurs (tel que la FK-percolation ou le modèle de Potts) puisque des problèmes

interviendront déjà dans le cas indépendant et pour seulement $m = 3$ couleurs. Dans cette section, l'ensemble des images à 3 couleurs $\mathcal{X}_n = \{0, 1, 2\}^{V_n}$ est muni de la mesure de probabilité μ_{p_0, p_1} définie par :

$$\forall \sigma \in \mathcal{X}_n, \mu_{p_0, p_1}(\sigma) = \prod_{i=0,1,2} p_i^{|\{x, \sigma(x)=i\}|}, \quad (3.2.16)$$

où les p_i sont liés par la relation $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. En d'autres termes, à chaque sommet est attribué la valeur 0, 1 ou 2 respectivement avec probabilité p_0, p_1 ou $p_2 = 1 - p_0 - p_1$, et ce de manière indépendante. La relation $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ liant les réels p_0, p_1 et p_2 fait que la mesure définie par (3.2.16) ne dépend réellement que de deux d'entre eux, par exemple p_0 et p_1 . C'est pourquoi le paramètre p_2 est omis de l'écriture μ_{p_0, p_1} , ainsi que de son espérance \mathbf{E}_{p_0, p_1} .

La plupart des notations introduites auparavant sont conservées, notamment la structure de graphe ainsi que la distance *dist*. Soit η une configuration locale de la boule $B(0, r)$. Notons k_0, k_1 et $k_2 = \beta(r) - k_0 - k_1$ respectivement le nombre de sommets de $B(0, r)$ ayant la valeur 0, 1 et 2. Nous les supposons strictement positifs. Notons, par analogie avec les sections antérieures, $X_n(\eta)$ le nombre d'occurrences de η dans le graphe. A la différence du cas général (b non nécessairement nul), son espérance contre la mesure μ_{p_0, p_1} se calcule explicitement :

$$\mathbf{E}_{p_0, p_1}[X_n(\eta)] = n^d p_0^{k_0} p_1^{k_1} p_2^{k_2}.$$

Toutefois, les variables indicatrices I_x^η (de loi de Bernoulli de paramètre $p_0^{k_0} p_1^{k_1} p_2^{k_2}$) ne sont pas indépendantes : penser aux indicatrices I_x^η et I_y^η dont les boules $B(x, r)$ et $B(y, r)$ se chevauchent. Les paramètres p_0, p_1 ou p_2 vont dépendre de la taille n . Dans la Section 3.2.1, le contrôle uniforme en $\sigma_{\delta B(x, r)}$ de la quantité $n^d \mu_{a, b}(I_x^\eta = 1 | \sigma_{\delta B(x, r)})$ nous donnait la limite de la probabilité pour $X_n(\eta)$ d'être positive. C'est encore vrai avec plusieurs couleurs à ceci près que dans le cas indépendant la probabilité conditionnelle précédente n'est autre que l'espérance de $X_n(\eta)$.

Proposition 3.2.5 *Sous les hypothèses précédentes :*

- (i) si $\mathbf{E}_{p_0, p_1}[X_n(\eta)] \rightarrow 0$ alors $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0) \rightarrow 0$;
- (ii) si $\mathbf{E}_{p_0, p_1}[X_n(\eta)] \rightarrow +\infty$ alors $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0) \rightarrow 1$.

Les arguments permettant de démontrer ce résultat ont déjà été présentés et utilisés. La démonstration suivante sera donc très succincte. La comparaison de cette démonstration avec celle du Théorème 3.2.1 souligne la difficulté issue de la dépendance entre les sommets.

Démonstration La partie (i) repose sur le fait que la probabilité $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0)$ est majorée par l'espérance de $X_n(\eta)$.

Passons au (ii). Nous ferons encore une fois appel au sous-ensemble de sommets T_n et à la variable $\tilde{X}_n(\eta)$, tous deux introduits lors de la démonstration du Théorème 3.2.1. Il suffit de montrer que $\mu_{p_0, p_1}(\tilde{X}_n(\eta) = 0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. C'est très simple dans le cas indépendant puisque $\tilde{X}_n(\eta)$ suit la loi binomiale de paramètres τ_n et $p_0(n)^{k_0} p_1(n)^{k_1} p_2(n)^{k_2}$:

$$\begin{aligned} \mu_{p_0, p_1}(\tilde{X}_n(\eta) = 0) &= (1 - p_0(n)^{k_0} p_1(n)^{k_1} p_2(n)^{k_2})^{\tau_n} \\ &\leq \exp \{ -\tau_n p_0(n)^{k_0} p_1(n)^{k_1} p_2(n)^{k_2} \} \\ &\leq \exp \{ -C' \mathbf{E}_{p_0, p_1}[X_n(\eta)] \}, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\tau_n \geq C'n^d$. ■

La symétrie $p < 1/2$ était liée au cas binaire. Avec plusieurs couleurs, il nous faudra étudier la quantité $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0)$ pour toute valeur du triplet $(p_0, p_1, p_2) \in]0, 1[^3$. Dans le cas binaire, lorsque $p(n)$ tendait trop rapidement vers 0 ou vers 1, aucune copie de η n'apparaissait dans le graphe. Ce résultat subsiste dans le cas de plusieurs couleurs.

Proposition 3.2.6 *Supposons qu'il existe un indice $i \in \{0, 1, 2\}$ tel que :*

$$p_i(n) \ll n^{-d/k_i} \quad \text{ou} \quad 1 - p_i(n) \ll n^{-d/(\beta(r)-k_i)} .$$

Alors, la probabilité $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration Dans un premier temps, supposons par exemple que $p_0(n) \ll n^{-d/k_0}$. Alors :

$$\mathbf{E}_{p_0, p_1}[X_n(\eta)] = n^d p_0(n)^{k_0} p_1(n)^{k_1} p_2(n)^{k_2} \leq n^d p_0(n)^{k_0}$$

qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. On conclut par la Proposition 3.2.5.

Passons à la deuxième alternative. Supposons par exemple que $1 - p_2(n) \ll n^{-d/(\beta(r)-k_2)}$. Ceci implique que la quantité

$$n^d \times (p_0(n) + p_1(n))^{k_0+k_1} = n^d \sum_{l=0}^{k_0+k_1} \binom{k_0+k_1}{l} p_0(n)^l p_1(n)^{k_0+k_1-l}$$

tend vers 0. La somme ci-dessus étant finie et à termes positifs, on en déduit que chacun de ses termes tend vers 0. En particulier pour $l = k_0$ il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^d p_0(n)^{k_0} p_1(n)^{k_1} = 0 .$$

Or, cette dernière quantité majore l'espérance de $X_n(\eta)$. On conclut une fois de plus par la Proposition 3.2.5. ■

Les Propositions 3.2.5 et 3.2.6 nous portent à croire que l'extension à 3 couleurs est possible. Nous venons en effet de distinguer une zone de non-apparition de la configuration locale η (voir la Figure 3.9).

Il conviendrait alors de prouver que lorsque

$$\forall i = 0, 1, 2, p_i(n) \gg n^{-d/k_i} \quad \text{et} \quad 1 - p_i(n) \gg n^{-d/(\beta(r)-k_i)} \quad (3.2.17)$$

alors avec une probabilité qui tend vers 1, η est présente dans le graphe. Il est facile de vérifier que c'est vrai lorsqu'un seul des 3 paramètres p_0, p_1 et p_2 tend vers 0. Malheureusement, cela devient faux lorsque deux des p_i tendent simultanément vers 0. Cette éventualité est intrinsèquement liée aux cas des images à (au moins) 3 couleurs pour lesquelles il y a (au moins) 2 paramètres à contrôler. Dès lors, la situation peut-être complexe ; il n'y a plus deux zones distinctes (une

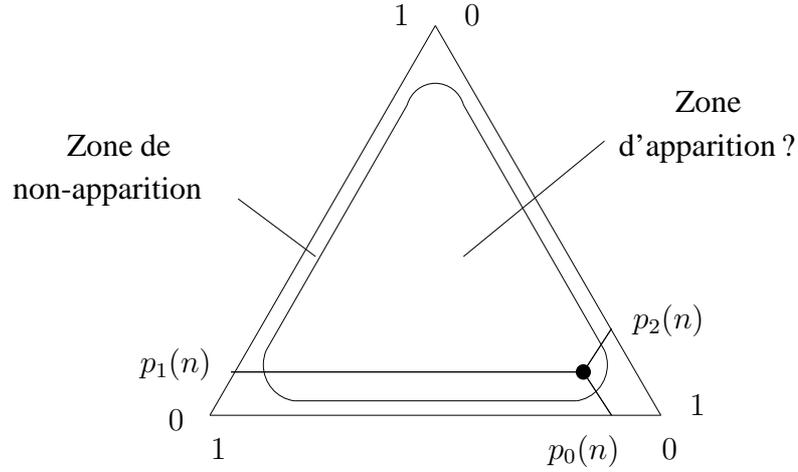


FIG. 3.9 – Le triangle représente l'ensemble des triplets (p_0, p_1, p_2) dont la somme est égale à 1. Une zone de non-apparition de la configuration locale η est délimitée selon les conditions de la Proposition 3.2.6. Le triplet $(p_0(n), p_1(n), p_2(n))$ tel que $p_0(n) = n^{-d\varepsilon/k}$ et $p_1(n) = n^{-d\varepsilon'/k}$ avec $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$, $\varepsilon' < 1/2$ et $k_0 = k_1 = k$ n'appartient pas à cette zone. Ses deux premières coordonnées tendent toute fois vers 0.

zone d'apparition de η et une zone de non-apparition de η séparées par une “courbe seuil”. Nous allons en effet exhiber deux triplets $(p_0(n), p_1(n), p_2(n))$ satisfaisant (3.2.17) tels que la probabilité $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0)$ tende vers 1 pour le premier et vers 0 pour le second.

Posons que $k_0 = k_1 = k > 0$ et $p_0(n) = n^{-d\varepsilon/k}$, $p_1(n) = n^{-d\varepsilon'/k}$ où ε et ε' sont des réels strictement positifs. Les deux paramètres $p_0(n)$ et $p_1(n)$ tendent donc vers 0. On a par conséquent $1 - p_0(n) \gg n^{-d/(\beta(r)-k_0)}$, $1 - p_1(n) \gg n^{-d/(\beta(r)-k_1)}$ et même $p_2(n) \gg n^{-d/k_2}$ puisque, la somme des p_i valant 1, le paramètre $p_2(n)$ tend donc nécessairement vers 1. Les conditions $\varepsilon < 1$ et $\varepsilon' < 1$ impliquent que $p_0(n) \gg n^{-d/k_0}$ et que $p_1(n) \gg n^{-d/k_1}$. Il ne reste plus qu'une seule condition à vérifier :

$$\begin{aligned}
 n^d(1 - p_2(n))^{\beta(r)-k_2} &= n^d(p_0(n) + p_1(n))^{k_0+k_1} \\
 &= n^d \left(n^{-d\varepsilon/k} + n^{-d\varepsilon'/k} \right)^{2k} \\
 &= n^{d(1-2\varepsilon')} \left(n^{\frac{d}{k}(\varepsilon'-\varepsilon)} + 1 \right)^{2k} \\
 &\geq n^{d(1-2\varepsilon')} ,
 \end{aligned}$$

qui tend vers $+\infty$ dès que $\varepsilon' < 1/2$. En résumé, le triplet $(p_0(n), p_1(n), p_2(n))$ pour lequel $p_0(n) = n^{-d\varepsilon/k}$ et $p_1(n) = n^{-d\varepsilon'/k}$ avec $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$ et $\varepsilon' < 1/2$, satisfait les 6 conditions de (3.2.17) (voir la Figure 3.9).

Concentrons-nous alors sur la probabilité d'apparition de la configuration locale η dans le graphe : $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0)$. Nous allons montrer qu'elle tend vers 1 si $\varepsilon + \varepsilon' < 1$ et vers 0 si $\varepsilon + \varepsilon' > 1$.

Puisque $p_2(n)$ tend vers 1, il est supérieur à $1/2$ à partir d'un certain rang. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p_0, p_1}[X_n(\eta)] &\geq n^d 2^{-k_2} p_0(n)^{k_0} p_1(n)^{k_1} \\ &\geq 2^{-k_2} n^{d(1-\varepsilon-\varepsilon')}, \end{aligned}$$

qui tend vers $+\infty$ dès que $\varepsilon + \varepsilon' < 1$. La Proposition 3.2.5 entraîne alors que $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0)$ tend vers 1. Parallèlement, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{p_0, p_1}[X_n(\eta)] &\leq n^d p_0(n)^{k_0} p_1(n)^{k_1} \\ &\leq n^{d(1-\varepsilon-\varepsilon')}, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 dès que $\varepsilon + \varepsilon' > 1$. La Proposition 3.2.5 entraîne alors que $\mu_{p_0, p_1}(X_n(\eta) > 0)$ tend cette fois vers 0.

3.3 Loi du 0-1 à potentiels variables

Dans la Section 3.3.1, le comportement asymptotique du nombre de copies de la configuration locale η sera précisé : la Proposition 3.3.1 stipule que la variable aléatoire $X_n(\eta)$ converge en probabilité vers $+\infty$ lorsque $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$. Ce résultat sera utile dans l'obtention de la fonction seuil des formules locales basiques (voir la Proposition 3.3.3 de la Section 3.3.2). La loi du 0-1 (Théorème 3.3.4) s'en déduira alors aisément.

3.3.1 Comportement asymptotique de $X_n(\eta)$

Soit η une configuration locale de la boule $B(0, r)$ ayant $k(\eta) > 0$ sommets positifs et supposons le potentiel de paire $b(n)$ borné. D'après le Théorème 3.2.1, si $e^{2a(n)} \ll n^{-d/k(\eta)}$ alors la variable $X_n(\eta)$ converge en probabilité vers 0. Au contraire, si $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$ alors au moins une copie de η sera asymptotiquement présente dans le graphe :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a, b}(X_n(\eta) > 0) = 1.$$

La Proposition 3.3.1 va préciser la situation.

Proposition 3.3.1 *Supposons que pour tout n , $a(n) < 0$ et qu'il existe une constante $b_0 > 0$ telle que $|b(n)| < b_0$. Si de plus $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$ alors $X_n(\eta)$ converge en probabilité vers $+\infty$.*

Démonstration Il s'agit de montrer que, pour tout entier m , la probabilité pour que $X_n(\eta)$ dépasse m tend vers 1 quand n tend vers l'infini :

$$\forall m, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a, b}(X_n(\eta) > m) = 1.$$

Pour ce faire, nous réutiliserons quelques objets et notations de la démonstration du Théorème 3.2.1, notamment le sous-ensemble de sommets T_n , de cardinal τ_n , et la variable aléatoire $\tilde{X}_n(\eta)$

comptant le nombre de copies de la configuration locale η apparaissant sur les boules de centre un élément de T_n . Puisque $\tilde{X}_n(\eta) \leq X_n(\eta)$, il suffit de montrer que, pour tout entier m ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) \leq m) = 0. \quad (3.3.18)$$

Au cours de la démonstration du Théorème 3.2.1, nous avons constaté d'une part que les événements $I_x^\eta = 1$ et $I_{x'}^\eta = 1$, $x, x' \in T_n$, étaient indépendants conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}(\delta T_n)$ et d'autre part, que les variables $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta T_n))$ étaient bornées, uniformément en $x \in T_n$. La limite (3.3.18) et donc également la Proposition 3.3.1 reposent sur ces deux remarques. En effet, la distribution de $\tilde{X}_n(\eta)$ conditionnellement à $\mathcal{F}(\delta T_n)$ peut s'interpréter comme la somme de τ_n indicatrices indépendantes, identiquement distribuées et dont la probabilité de valoir 1 vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n \times \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\sigma)) = +\infty,$$

uniformément en la configuration σ sur δT_n .

Plus précisément, il a été démontré qu'il existait des constantes $K \in \mathbb{R}$ et $C > 0$ telles que pour tout sommet x et pour toute configuration $\sigma \in W^{\delta B(x,r)}$, on ait :

$$e^{2a(n)k(\eta)-K} \geq \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma) \geq C e^{2a(n)k(\eta)}. \quad (3.3.19)$$

Soient $0 \leq l \leq m$ et $\sigma \in W^{\delta T_n}$. L'utilisation de (3.2.13) et (3.2.14) permet d'écrire la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) = l | \sigma)$ de la manière suivante :

$$\mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) = l | \sigma) = \sum_{x_1, \dots, x_l \in T_n} \prod_{i=1}^l \mu_{a,b}(I_{x_i}^\eta = 1 | \sigma_{\delta B(x_i, r)}) \prod_{\substack{x \in T_n \\ x \neq x_1, \dots, x_l}} (1 - \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma_{\delta B(x, r)})).$$

Les inégalités (3.3.19) donnent alors :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) = l | \sigma) &\leq \binom{\tau_n}{l} e^{l(2a(n)k(\eta)-K)} (1 - C e^{2a(n)k(\eta)})^{\tau_n - l} \\ &\leq \frac{\tau_n^l}{l!} e^{l(2a(n)k(\eta)-K)} e^{-(\tau_n - l)C e^{2a(n)k(\eta)}}. \end{aligned}$$

Enfin, le cardinal de l'ensemble T_n satisfaisant $C'n^d \leq \tau_n \leq n^d$, C' étant une constante strictement positive, on obtient une nouvelle majoration :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) = l | \sigma) &\leq \frac{e^{-lK}}{l!} (n^d e^{2a(n)k(\eta)})^l e^{-(C'n^d - l)C e^{2a(n)k(\eta)}} \\ &\leq \frac{e^{l(C-K)}}{l!} \theta_n^l e^{-C'\theta_n}, \end{aligned}$$

où θ_n est simplement la quantité $n^d e^{2a(n)k(\eta)}$. Comme par hypothèse θ_n tend vers $+\infty$, la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) = l | \sigma)$ tend vers 0 et il en va de même pour $\mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) \leq m | \sigma)$.

De plus, cette convergence est uniforme en la configuration $\sigma \in W^{\delta\mathcal{T}_n}$. C'est ce point essentiel qui nous permet de passer à l'espérance et d'obtenir la limite désirée (3.3.18) :

$$\mu_{a,b}(\tilde{X}_n(\eta) \leq m) = \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b} \left(\tilde{X}_n(\eta) \leq m | \mathcal{F}(\delta\mathcal{T}_n) \right) \right] \rightarrow 0 .$$

■

Soit $R \geq r$. La couronne $\mathcal{C}(x, r, R)$ est l'ensemble des sommets défini par :

$$\mathcal{C}(x, r, R) = \{y \in V_n, r < \text{dist}(y, x) \leq R\} .$$

Considérons alors la configuration locale notée ζ de la boule $B(0, R)$ obtenue à partir de η à laquelle est rajoutée une couronne de sommets négatifs.

$$\zeta(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in B(0, r) , \\ -1 & \text{si } x \in \mathcal{C}(0, r, R) . \end{cases}$$

Les configurations locales η et ζ ont le même nombre de sommets positifs : $k(\eta) = k(\zeta)$. Les propriétés $X_n(\eta) > 0$ et $X_n(\zeta) > 0$ ont donc la même fonction seuil $n^{-d/k(\eta)}$. Supposons par ailleurs que le potentiel de surface satisfasse $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$. D'après la Proposition 3.3.1, le graphe contient autant de copies de η et de ζ que l'on désire. De plus, la réalisation de ζ en une boule $B(x, R)$ implique celle de η en $B(x, r)$:

$$I_x^\zeta = 1 \Rightarrow I_x^\eta = 1 ,$$

la réciproque étant fautive en général. Par conséquent, parmi toutes les copies de η présentes dans le graphe, il y en a autant que l'on veut qui soient chacune aussi isolées que l'on veut, i.e. cernées par une couronne $\mathcal{C}(x, r, R)$ de sommets négatifs. En particulier, il y en a autant que l'on veut qui soient chacune aussi éloignée que l'on veut de toutes autres copies de η . Cette remarque est fautive pour deux copies quelconques de η . En effet, deux occurrences de la configuration locale η peuvent même se chevaucher, i.e. se réaliser sur des boules non disjointes, si le potentiel de surface $a(n)$ le permet.

En plus de $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$, nous supposons que $a(n)$ n'est pas trop grand, concrètement $e^{2a(n)} \ll n^{-d/(k(\eta)+1)}$. Observons alors que sous ces hypothèses, l'inégalité (toujours vraie) $X_n(\zeta) \leq X_n(\eta)$ devient avec une probabilité qui tend vers 1 une égalité. Notons \mathcal{C}_R^η l'ensemble des configurations locales de la boule $B(0, R)$ dont la restriction à la boule $B(0, r)$ est exactement η . La configuration ζ définie plus haut est le seul élément de \mathcal{C}_R^η ayant $k(\zeta) = k(\eta)$ sommets positifs. L'événement $X_n(\eta) > X_n(\zeta)$ implique la réalisation localisée d'au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs :

$$X_n(\eta) > X_n(\zeta) \Rightarrow \bigcup_{\zeta' \in \mathcal{C}_R^\eta \setminus \{\zeta\}} \{X_n(\zeta') > 0\} .$$

Soit $\zeta' \in \mathcal{C}_R^\eta \setminus \{\zeta\}$. La fonction seuil de la propriété $X_n(\zeta') > 0$ est $n^{-d/k(\zeta')}$ et, par la Propriété 3.2.3, celle de la réunion

$$\bigcup_{\zeta' \in \mathcal{C}_R^\eta \setminus \{\zeta\}} \{X_n(\zeta') > 0\}$$

vaut

$$\min_{\zeta' \in \mathcal{C}_R^n \setminus \{\zeta\}} n^{-d/k(\zeta')} = n^{-d/(k(\zeta)+1)} .$$

Puisque $e^{2a(n)} \ll n^{-d/(k(\eta)+1)}$, la probabilité

$$\mu_{a,b}(X_n(\eta) > X_n(\zeta)) \leq \mu_{a,b} \left(\bigcup_{\zeta' \in \mathcal{C}_R^n \setminus \{\zeta\}} \{X_n(\zeta') > 0\} \right)$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Finalement, sous les hypothèses $n^{-d/k(\eta)} \ll e^{2a(n)} \ll n^{-d/(k(\eta)+1)}$, deux occurrences quelconques de η sont aussi éloignées l'une de l'autre que l'on veut. Dans la Section 4.4, nous étudierons plus en détail cette situation.

Nous venons en particulier de montrer que tout groupement d'au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs est asymptotiquement improbable dès que $e^{2a(n)} \ll n^{-d/(k(\eta)+1)}$. Cet argument fera l'objet du Lemme 4.1.1 et sera à la base de la plupart des résultats du Chapitre 4.

3.3.2 Fonction seuil d'une formule locale basique

Considérons m assertions locales $\exists x, \psi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ de fonctions seuils respectives $n^{-d/k(\psi_i)}$. D'après la Propriété 3.2.3, leur conjonction

$$\Psi \leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_m \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \psi_i(x_i)$$

admet pour fonction seuil la quantité $n^{-d/\max_i k(\psi_i)}$. En imposant aux boules $B(x_i, r)$ d'être deux à deux disjointes, on fait de la proposition Ψ une formule locale basique. La Proposition 3.3.3 affirme que cette opération ne modifie pas sa fonction seuil. C'est dans cette optique qu'est défini l'*indice* d'une formule locale basique.

Definition 3.3.2 Soit L la formule locale basique définie par :

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \psi_i(x_i) \right) . \quad (3.3.20)$$

Si L n'est pas satisfiable, nous poserons $k(L) = +\infty$. Supposons que L est satisfiable. Pour chaque $i = 1, \dots, m$, notons

$$\mathcal{D}(\psi_i) = \{D_{i,1}, \dots, D_{i,d_i}\} \quad (3.3.21)$$

l'ensemble de définition de l'assertion ψ_i . L'indice de la formule locale basique L , noté $k(L)$, est défini par :

$$k(L) = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq d_i} k(D_{i,j}) . \quad (3.3.22)$$

Le cas d'une formule locale basique insatisfiable n'a que peu d'intérêt. Sa probabilité est toujours nulle. Dans le cas contraire, la Proposition 3.3.3 fournit sa fonction seuil :

Proposition 3.3.3 *Supposons que pour tout n , $a(n) < 0$ et qu'il existe une constante $b_0 > 0$ telle que $|b(n)| < b_0$. Soit L une formule locale basique satisfiable. Si son indice $k(L)$ est nul, sa probabilité tend vers 1. Sinon, L admet une fonction seuil de la forme $n^{-d/k(L)}$.*

Démonstration Considérons la formule locale basique définie par (3.3.20). Par définition d'une fonction seuil, il s'agit de prouver que la probabilité de la formule locale basique L tend vers 0 lorsque $e^{2a(n)k(L)}n^d$ tend vers 0 (ce cas sous-entend que son indice $k(L)$ est non nul), et qu'elle tend vers 1 lorsque $e^{2a(n)k(L)}n^d$ tend vers $+\infty$. Commençons par la première alternative. Décomposons la proposition L à l'aide des descriptions complètes $D_{i,j}$ (voir (3.3.21)) :

$$L \leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigvee_{1 \leq j \leq d_i} D_{i,j}(x_i) \right).$$

Il existe un indice $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $k(L) = k(\psi_{i_0}) > 0$. Par le Corollaire 3.2.4, la fonction seuil de $\exists x, \psi_{i_0}(x)$ est $n^{-d/k(\psi_{i_0})}$. Si $e^{2a(n)k(L)}n^d$ tend vers 0, i.e. si $e^{2a(n)} \ll n^{-d/k(\psi_{i_0})}$ alors la probabilité de cette assertion locale tend vers 0. L'implication logique

$$L \rightarrow \exists x, \psi_{i_0}(x)$$

entraîne que $\mu_{a,b}(L)$ tend elle aussi vers 0.

Inversement, pour chaque $1 \leq i \leq m$, choisissons une description complète, disons D_i , appartenant à $\mathcal{D}(\psi_i)$ d'indice minimal, i.e. satisfaisant $k(D_i) = k(\psi_i)$. Par définition, l'indice $k(L)$ de la formule locale basique L est simplement égal au maximum des $k(D_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Une fois de plus, l'ensemble de sommets T_n introduit dans la démonstration du Théorème 3.2.1 (voir la Figure 3.3) sera utilisé. La proposition L' suivante

$$L' \leftrightarrow \exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} x_i \in T_n \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} x_i \neq x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} D_i(x_i) \right)$$

implique la formule locale basique L . Pour $i = 1, \dots, m$, considérons la configuration locale $\eta_i \in \mathcal{C}_r$ de la boule $B(0, r)$ associée à la description complète D_i . Notons $\tilde{X}_n(\eta_i)$ la variable aléatoire comptant les occurrences de η_i apparaissant sur des boules centrées en les sommets de T_n :

$$\tilde{X}_n(\eta_i) = \sum_{x \in T_n} I_x^{\eta_i}.$$

Que les descriptions complètes D_i (ou les configurations locales associées η_i) soient deux à deux différentes ou non (voire même toutes égales), l'événement

$$\bigwedge_{i=1}^m \left\{ \tilde{X}_n^{\eta_i} \geq m \right\}$$

implique la proposition L' et donc également la formule locale basique L . Sous l'hypothèse $e^{2a(n)k(L)}n^d \rightarrow +\infty$, il s'agit donc de montrer que sa probabilité tend vers 1, ou ce qui revient au

même que celle de chaque événement $\tilde{X}_n^{\eta_i} \geq m$ tend vers 1. Fixons donc un tel indice i . Puisque $k(D_i) \leq k(L)$, la quantité $e^{2a(n)k(D_i)}n^d$ tend elle aussi vers $+\infty$ ($a(n)$ est négatif). Les conditions d'application de la Proposition 3.3.1 sont donc réunies. Il a justement été prouvé lors de sa démonstration que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\tilde{X}_n^{\eta_i} \geq m) = 1 .$$

■

La Proposition 3.3.3 affirme qu'à condition que le potentiel de surface $a(n)$ (ou plutôt $e^{2a(n)}$) évite les fonctions du type $n^{-d/k}$, où $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de toute formule locale basique tend vers 0 ou 1. Par la Proposition 3.1.9, i.e. en utilisant le théorème de Gaifman (Théorème 3.1.8), il en va de même pour toute formule de la logique du premier ordre. C'est la loi du 0-1 à potentiels de surface et de paire variables.

Théorème 3.3.4 *Supposons que pour tout n , $a(n) < 0$ et qu'il existe une constante $b_0 > 0$ telle que $|b(n)| < b_0$. Si*

$$\forall k = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2a(n)}n^{\frac{d}{k}} = 0 \text{ ou } +\infty ,$$

alors pour toute formule $A \in \mathcal{L}_1(\mathcal{R})$ de la logique du premier ordre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(A) = 0 \text{ ou } 1 .$$

Ce résultat s'interprète d'un point de vue dynamique comme suit. Lorsqu'on augmente graduellement le potentiel de surface $a(n)$ depuis $-\infty$ jusqu'à 0, on voit apparaître dans le graphe G_n de nouvelles propriétés uniquement lorsque $e^{2a(n)}$ traverse les fonctions seuils $n^{-d/k}$. En dehors de ces fonctions seuils et en ce qui concerne la logique du premier ordre, il ne se passe rien.

Le Théorème 3.3.4 est l'analogie de la loi du 0-1 de Shelah et Spencer [71] pour les graphes aléatoires : si $p(n) = n^{-\alpha}$, où α est irrationnel alors, pour toute formule de la logique du premier ordre \mathcal{A} ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(G(n, p(n)) \text{ vérifie } \mathcal{A}) = 0 \text{ ou } 1 ,$$

la notation usuelle $G(n, p)$ désignant le modèle probabiliste du graphe aléatoire à n sommets et dans lequel chaque arête apparaît avec probabilité p , indépendamment les unes des autres (voir par exemple [74]). Cette loi du 0-1 utilise un résultat de logique antérieur au Théorème 3.1.8 et également dû à Gaifman [32]. Celui-ci fait intervenir une nouvelle catégorie de formules : les *extensions*. Il dit que toute proposition de la logique du premier ordre ou son contraire est impliquée par une conjonction finie d'extensions. Sa démonstration est basée sur le jeu d'Ehrenfeucht [25] (voir [23] p. 44 et [74] p. 318 pour le cas des graphes). Par conséquent, la loi du 0-1 est vraie dès que la probabilité de toute extension tend vers 1. Shelah et Spencer prouvent que cette condition suffisante est satisfaite lorsque $p(n) = n^{-\alpha}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (voir [71] mais aussi [72, 73] et [74] p. 315). Dans notre modèle (cf. Section 3.1.1), cette condition n'est pas satisfaite. En effet, certaines extensions sont insatisfiables et donc de probabilité nulle. Le théorème de Gaifman de 1964 [32] n'est donc plus d'aucune utilité. C'est la raison pour laquelle nous avons eu recours dans notre étude à un second résultat de Gaifman [33], datant de 1982, qui, plus qu'une implication, fournit une équivalence logique pour toute formule de la logique du premier ordre.

Chapitre 4

Approximations poissonniennes

Le chapitre précédent a eu pour objet l'étude de la présence d'une configuration locale η donnée dans le graphe G_n . Un phénomène de seuil pour la propriété $X_n(\eta) > 0$ a été exhibé : lorsque $e^{2a(n)}n^{d/k(\eta)} \rightarrow 0$, sa probabilité tend vers 0 et lorsque $e^{2a(n)}n^{d/k(\eta)} \rightarrow +\infty$, elle tend vers 1. Il a même été démontré que dans ce dernier cas le nombre de copies $X_n(\eta)$ convergeait en probabilité vers $+\infty$. Naturellement, nous aimerions désormais savoir ce qui se passe à la fonction seuil, i.e. lorsque le rapport $e^{2a(n)}n^{d/k(\eta)}$ tend vers une constante $c > 0$. La configuration locale η est-elle présente dans le graphe ? Avec quelle probabilité ? Autrement dit, que peut-on dire de la loi de la variable $X_n(\eta)$?

Dans ce chapitre, nous répondrons précisément à ces questions. Le comportement asymptotique du nombre de copies de la configuration locale η sera étudié dans la Section 4.2 : la variable aléatoire $X_n(\eta)$ converge en loi vers une loi de Poisson (Théorème 4.2.1). La vitesse à laquelle s'effectue cette convergence sera mesurée dans la Section 4.3 en termes de distance en variation totale. Les résultats de ces deux sections ont fait l'objet d'un article soumis [11]. Nous nous sommes intéressé dans la Section 4.4 à savoir à quelle distance d'une occurrence fixée de η se trouvaient les plus proches sommets positifs. Enfin, des résultats supplémentaires concernant le cas indépendant ($b = 0$), notamment une approximation poissonnienne pour les formules locales basiques, sont exposés dans la Section 4.5.

La majorité des démonstrations de ce chapitre repose sur un résultat essentiel (Proposition 4.1.3) auquel la Section 4.1 est consacrée. C'est un contrôle de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x, r)))$ faisant intervenir le périmètre $\gamma(\eta)$ de la configuration locale η à travers le potentiel de paire b . C'est pourquoi ce dernier sera supposé fixé durant tout ce chapitre. Ainsi, seul le potentiel de surface sera autorisé à dépendre de la taille n du graphe. Dans le but d'alléger les écritures, la mesure de Gibbs $\mu_{a(n),b}$ sera notée $\mu_{a,b}$.

4.1 Contrôle de la probabilité conditionnelle

Considérons dorénavant une configuration locale η de la boule $B(0, r)$, $r > 0$ ayant au moins un sommet positif, i.e $k(\eta) > 0$. Le cas particulier (et inintéressant) de la configuration locale η^0 formée uniquement de sommets négatifs a été traité dans la Section 3.2. La propriété $X_n(\eta) > 0$ admet une fonction seuil de la forme $n^{-d/k(\eta)}$ (Théorème 3.2.1). Plaçons-nous à cette fonction

seuil : choisissons le potentiel de surface $a(n)$ de telle sorte qu'il existe une constante c strictement positive telle que, pour tout n , on ait l'égalité

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\eta)}. \quad (4.1.1)$$

Sous cette hypothèse, la quantité $e^{2a(n)}n^{d/k(\eta)}$ admet donc une limite strictement positive quand n tend vers l'infini, la constante c . Autrement dit, par l'intermédiaire de l'hypothèse (4.1.1), nous venons de zoomer sur la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$, ceci dans le but d'étudier en détail le moment d'apparition de la configuration locale η . L'opération inverse (un zoom arrière) consisterait à faire tendre la constante c vers $+\infty$ ou vers 0 et récupérer ainsi les cas déjà étudiés $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$ et $e^{2a(n)} \ll n^{-d/k(\eta)}$.

Une des conséquences du Théorème 3.2.1 qui a été largement commentée durant le Chapitre 3 est la suivante. Lorsque le potentiel de surface $a(n)$ satisfait (4.1.1), aucune configuration locale avec strictement plus de $k(\eta)$ sommets positifs n'est asymptotiquement présente dans le graphe. C'est en ce sens qu'il faut comprendre le prochain résultat.

Lemme 4.1.1 *Soit ζ une configuration locale de $B(0, R)$, avec $R \geq r$. Sous l'hypothèse (4.1.1), il existe une constante $M_1 > 0$ telle que pour tout n , pour tout sommet $x \in V_n$ et pour toute configuration $\sigma \in \mathcal{X}_n$, on ait*

$$n^d \mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \sigma_{\delta B(x,R)}) \leq M_1 e^{2a(n)(k(\zeta)-k(\eta))}, \quad (4.1.2)$$

et

$$\mathbb{E}_{a,b}[X_n(\zeta)] \leq M_1 e^{2a(n)(k(\zeta)-k(\eta))}. \quad (4.1.3)$$

Le Lemme 4.1.1 précise que, sous l'hypothèse (4.1.1), le nombre moyen d'occurrences d'une configuration locale ζ tend d'autant plus vite vers 0 que son nombre de sommets positifs $k(\zeta)$ est supérieur à $k(\eta)$. Sa démonstration provient de l'inégalité (3.2.10) obtenue dans le chapitre précédent, reposant sur l'utilisation de la notion d'énergie locale.

Démonstration Fixons un sommet x et une configuration σ . La relation (3.2.10) affirme qu'il existe une constante K ne dépendant que du potentiel de paire b et du rayon R telle que :

$$\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \sigma_{\delta B(x,R)}) \leq e^{2a(n)k(\zeta)-K}.$$

Par conséquent, l'hypothèse (4.1.1) implique la première inégalité du lemme (relation (4.1.2)) :

$$\begin{aligned} n^d \mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \sigma_{\delta B(x,R)}) &\leq n^d e^{2a(n)k(\eta)-K} e^{2a(n)(k(\zeta)-k(\eta))} \\ &\leq c^{k(\eta)} e^{-K} e^{2a(n)(k(\zeta)-k(\eta))}, \end{aligned}$$

en posant $M_1 = c^{k(\eta)} e^{-K}$. La constante M_1 est positive et ne dépend pas de la taille n du graphe ; elle ne dépend en fait que des paramètres c et b , du rayon R et du nombre $k(\eta)$ de sommets positifs de la configuration locale η .

Enfin, remarquons que l'inégalité (4.1.2) est uniforme en la configuration sur $\delta B(x, R)$. Elle s'applique donc à la variable aléatoire $n^d \mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x, R)))$ et à son espérance

$$\mathbf{E}_{a,b}[n^d \mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x, R)))] = \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\zeta)],$$

d'où (4.1.3). ■

Le Lemme 4.1.1 est fondamental. Il constituera un outil précieux dans toute notre étude : les deux autres résultats de cette section l'utilisent déjà. En effet, il permet de supposer que la configuration locale η est propre (Lemme 4.1.2) et ainsi d'expliciter la limite de $\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]$ (Proposition 4.1.3).

Notons $\mathring{\eta}$ la configuration locale de la boule $B(0, r + 1)$, construite à partir de η de la manière suivante :

$$\mathring{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in B(0, r), \\ -1 & \text{si } \text{dist}(x, 0) = r + 1. \end{cases}$$

La configuration locale $\mathring{\eta}$ est propre (cf. Définition 2.4.4). Elle a de plus le même nombre de sommets positifs que η : $k(\mathring{\eta}) = k(\eta)$. Les propriétés $X_n(\eta) > 0$ et $X_n(\mathring{\eta}) > 0$ ont donc la même fonction seuil $n^{-d/k(\eta)}$. Sous l'hypothèse (4.1.1), le Théorème 3.2.1 affirme que, si une copie de η apparaît sur la boule $B(x, r)$ alors, avec une probabilité qui tend vers 1, tous les sommets à distance $r + 1$ de x auront des spins négatifs. Les variables $X_n(\eta)$ et $X_n(\mathring{\eta})$ seront donc asymptotiquement égales. En d'autres termes, le fait de supposer la configuration locale η propre (en augmentant le rayon r d'une unité) ne change pas le comportement asymptotique de $X_n(\eta)$. C'est le sens du lemme suivant, dans lequel nous noterons par $\mathcal{L}(X)$ la loi de la variable X .

Lemme 4.1.2 *Supposons que le potentiel de surface $a(n)$ satisfasse (4.1.1). Alors,*

$$d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(X_n(\mathring{\eta}))) = \mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)}). \quad (4.1.4)$$

En particulier, si $X_n(\mathring{\eta})$ converge en loi quand n tend vers $+\infty$ vers une variable aléatoire X , il en va de même pour $X_n(\eta)$. De plus, la différence entre les espérances des variables $X_n(\eta)$ et $X_n(\mathring{\eta})$ tend vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\mathring{\eta})] - \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]| = 0. \quad (4.1.5)$$

Rappelons que si $f(n)$ et $g(n)$ sont deux fonctions à valeurs positives, la notation $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout n , $f(n) \leq Cg(n)$.

Démonstration Par construction de la configuration locale $\mathring{\eta}$, l'inégalité $X_n(\mathring{\eta}) \leq X_n(\eta)$ est toujours vraie. Dans ce contexte, la Proposition A.0.4 fournit une caractérisation adéquate de la distance en variation totale :

$$\begin{aligned} d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(X_n(\mathring{\eta}))) &\leq \mu_{a,b}(X_n(\eta) \neq X_n(\mathring{\eta})) \\ &\leq \mu_{a,b}(X_n(\eta) > X_n(\mathring{\eta})). \end{aligned}$$

L'événement $X_n(\eta) > X_n(\overset{\circ}{\eta})$ implique la présence localisée d'au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs. A la fonction seuil $n^{-d/k(\eta)}$, sa probabilité tend vers 0. Cet argument va s'exprimer par le biais du Lemme 4.1.1. Pour ce faire, introduisons l'ensemble \mathcal{C}_{r+1}^η des configurations locales de la boule $B(0, r+1)$ dont la restriction à la boule $B(0, r)$ est exactement η . La configuration locale $\overset{\circ}{\eta}$ définie plus haut est le seul élément de \mathcal{C}_{r+1}^η ayant exactement $k(\eta)$ sommets positifs, tous les autres en ont au moins $k(\eta) + 1$. On peut désormais écrire :

$$X_n(\eta) > X_n(\overset{\circ}{\eta}) \Rightarrow \bigcup_{\zeta \in \mathcal{C}_{r+1}^\eta \setminus \{\overset{\circ}{\eta}\}} \{X_n(\zeta) > 0\}.$$

Nous verrons un peu plus loin que cette implication est en fait une équivalence. Les variables $X_n(\zeta)$ étant à valeurs entières, il vient :

$$\begin{aligned} d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(X_n(\overset{\circ}{\eta}))) &\leq \mu_{a,b}(X_n(\eta) > X_n(\overset{\circ}{\eta})) \\ &\leq \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{r+1}^\eta \setminus \{\overset{\circ}{\eta}\}} \mu_{a,b}(X_n(\zeta) > 0) \\ &\leq \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{r+1}^\eta \setminus \{\overset{\circ}{\eta}\}} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\zeta)]. \end{aligned}$$

Soit $\zeta \in \mathcal{C}_{r+1}^\eta \setminus \{\overset{\circ}{\eta}\}$. Par construction, la configuration locale ζ a donc au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs. D'après le Lemme 4.1.1, son espérance vérifie :

$$\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\zeta)] \leq M_1 e^{2a(n)},$$

i.e. est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$ par l'hypothèse (4.1.1). Puisque le cardinal de l'ensemble \mathcal{C}_{r+1}^η ne dépend pas de n , on en conclut que la distance en variation totale entre les lois de $X_n(\eta)$ et $X_n(\overset{\circ}{\eta})$ est aussi un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$.

Si la distance en variation totale $d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(X_n(\overset{\circ}{\eta})))$ tend vers 0 alors les variables aléatoires $X_n(\eta)$ et $X_n(\overset{\circ}{\eta})$ convergent en loi vers la même limite si celle-ci existe. C'est l'objet de la Propriété A.0.5.

Il ne reste plus qu'à prouver (4.1.5). Considérons la boule $B(x, r+1)$ et supposons que la configuration locale η apparaisse en $B(x, r)$. Alors une et une seule des configurations locales de \mathcal{C}_{r+1}^η se réalise en $B(x, r+1)$. Inversement, si $\zeta \in \mathcal{C}_{r+1}^\eta$ apparaît en $B(x, r+1)$ alors, d'une part, ce n'est évidemment pas le cas pour les autres éléments de cet ensemble et, d'autre part, η est présente en $B(x, r)$. Nous venons de prouver l'égalité :

$$X_n(\eta) = X_n(\overset{\circ}{\eta}) + \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{r+1}^\eta \setminus \{\overset{\circ}{\eta}\}} X_n(\zeta).$$

Par conséquent :

$$|\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\overset{\circ}{\eta})] - \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]| = \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{r+1}^\eta \setminus \{\overset{\circ}{\eta}\}} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\zeta)],$$

qui est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$. La limite (4.1.5) est démontrée. ■

En résumé, dans le but de décrire le comportement asymptotique de $X_n(\eta)$, le Lemme 4.1.2 nous autorise à supposer la configuration locale η propre. L'intérêt réside dans le fait que le périmètre d'une configuration locale propre apparaît très simplement dans l'écriture de son énergie locale (voir 2.4.22), nous permettant ainsi d'encadrer précisément la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x,r)))$. Cette dernière quantité est centrale dans notre étude, la Proposition 4.1.3 en fournit un contrôle fin. Elle sera largement utilisée dans les démonstrations des résultats des Sections 4.2, 4.3 et 4.4.

Proposition 4.1.3 *Supposons la configuration locale η propre. Sous l'hypothèse (4.1.1), il existe une constante $M_2 > 0$ telle que pour tout n , pour tout sommet $x \in V_n$ et pour toute configuration $\sigma \in \mathcal{X}_n$, on ait*

$$c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)} (1 - M_2 e^{2a(n)}) \leq n^d \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma_{\delta B(x,r)}) \leq c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)} \quad (4.1.6)$$

et

$$c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)} (1 - M_2 e^{2a(n)}) \leq \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] \leq c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}. \quad (4.1.7)$$

Puisque la quantité $e^{2a(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, les relations (4.1.6) et (4.1.7) produisent les deux limites ci-dessous, valables pour une configuration locale propre. Pour tout sommet x et pour toute configuration σ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^d \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma_{\delta B(x,r)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}. \quad (4.1.8)$$

Il est important de noter que cette dernière limite (celle de l'espérance) s'étend au cas d'une configuration locale non nécessairement propre en utilisant le Lemme 4.1.2.

Observons un certain phénomène de continuité en la constante c de la limite du nombre moyen de copies de la configuration locale η entre les régimes $e^{2a(n)} \ll n^{-d/k(\eta)}$, $e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\eta)}$ et $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$. En effet, lorsque $c \rightarrow 0$ (resp. $c \rightarrow +\infty$), la limite en n de $\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]$, i.e $c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}$, tend vers 0 (resp. vers $+\infty$) donc coïncide avec la limite en n de $\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]$ lorsque $e^{2a(n)} \ll n^{-d/k(\eta)}$ (resp. $e^{2a(n)} \gg n^{-d/k(\eta)}$) :

$$\lim_{c \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{c \rightarrow 0} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = 0$$

et

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{c \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] = +\infty.$$

Terminons cette section par la démonstration de la Proposition 4.1.3.

Démonstration Fixons un sommet $x \in V_n$ et notons simplement par B la boule $B(x,r)$. L'encadrement (4.1.6) est uniforme en la configuration sur δB , il s'applique donc à la variable aléatoire $n^d \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta B))$ et à son espérance, i.e à $\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]$. L'encadrement (4.1.7) est donc une conséquence immédiate de (4.1.6). Concentrons-nous donc sur cette dernière relation. Elle repose sur l'étude de l'énergie locale $H^B(\eta_x \sigma)$ et sur l'utilisation de la relation fondamentale (2.4.20) reliant cette énergie à la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma_{\delta B(x,r)})$.

Soit $\sigma \in W^{\delta B}$. A la fin de la Section 2.4.2, nous avons détaillé comment le périmètre $\gamma(\eta)$ de la configuration locale propre η intervenait dans l'expression de l'énergie locale $H^B(\eta_x\sigma)$ (relation (2.4.22)) :

$$H^B(\eta_x\sigma) = a(2k(\eta) - \beta(r)) + b \left(\alpha(r) - 2\gamma(\eta) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B, z \in \delta B}} (-1)\sigma(z) \right).$$

L'expression de l'énergie locale d'une configuration locale $\eta' \in \mathcal{C}_r$ non nécessairement propre est donnée par la formule plus générale suivante :

$$H^B(\eta'_x\sigma) = a(2k(\eta') - \beta(r)) + b \left(\sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y, z \in B}} \eta'_x(y)\eta'_x(z) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B, z \in \delta B}} \eta'_x(y)\sigma(z) \right).$$

Dès lors, la différence $H^B(\eta'_x\sigma) - H^B(\eta_x\sigma)$ entre les énergies locales de η'_x et η_x est égale à :

$$2a(n)(k(\eta') - k(\eta)) + b(2\gamma(\eta) + \mathcal{Q}(\eta'_x)),$$

où

$$\mathcal{Q}(\eta'_x) = \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y, z \in B}} \eta'_x(y)\eta'_x(z) - \alpha(r) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B, z \in \delta B}} (\eta'_x(y) + 1)\sigma(z).$$

Le réel $\mathcal{Q}(\eta'_x)$ est indépendant de la taille n du graphe et peut être borné uniformément en x et en les configurations η'_x et σ :

$$|\mathcal{Q}(\eta'_x)| \leq 2\alpha(r + 1). \quad (4.1.9)$$

Rappelons que la configuration locale η^0 est celle pour laquelle tous les sommets de la boule $B(0, r)$ sont négatifs. Elle joue un rôle particulier dans cette démonstration car elle satisfait $\mathcal{Q}(\eta_x^0) = 0$. Ainsi, la différence $H^B(\eta_x^0\sigma) - H^B(\eta_x\sigma)$ devient, via la relation (4.1.1) :

$$\begin{aligned} H^B(\eta_x^0\sigma) - H^B(\eta_x\sigma) &= -2a(n)k(\eta) + 2b\gamma(\eta) \\ &= \log \frac{n^d}{c^{k(\eta)}} + 2b\gamma(\eta), \end{aligned}$$

et ce quelle que soit la configuration σ sur δB . Enfin, par (2.4.20), une majoration de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\sigma)$ est obtenue :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1|\sigma) &\leq e^{H^B(\eta_x\sigma) - H^B(\eta_x^0\sigma)} \\ &\leq \frac{c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}}{n^d}. \end{aligned}$$

C'est exactement la borne supérieure de (4.1.6). La borne inférieure s'obtient elle aussi en utilisant la relation fondamentale (2.4.20). Le contrôle de la quantité $\mathcal{Q}(\eta'_x)$ (4.1.9) nous permet

décrire pour tout $\sigma \in W^{\delta B}$:

$$\begin{aligned}
n^d \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma) &= \frac{n^d}{\sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r} e^{HB(\eta'_x \sigma) - HB(\eta_x \sigma)}} \\
&= \frac{n^d}{e^{-2a(n)k(\eta) + 2b\gamma(\eta)} \left(1 + \sum_{\eta', k(\eta') > 0} e^{2a(n)k(\eta') + bQ(\eta'_x)} \right)} \\
&\geq \frac{c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}}{1 + e^{2a(n)} \sum_{\eta', k(\eta') > 0} e^{bQ(\eta'_x)}} \\
&\geq \frac{c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}}{1 + e^{2a(n)} |\mathcal{C}_r| e^{2|b|\alpha(r+1)}}. \tag{4.1.10}
\end{aligned}$$

La quantité strictement positive $|\mathcal{C}_r| e^{2|b|\alpha(r+1)}$ ne dépend pas de la taille n du graphe. Notons-la M_2 . On conclut la démonstration en utilisant l'inégalité classique

$$\forall u > -1, \frac{1}{1+u} \geq 1-u.$$

■

Pour être tout à fait complet, notons que la constante M_2 définie ci-dessus ne dépend de la configuration locale η qu'à travers le rayon r de la boule $B(0, r)$ sur laquelle elle est définie.

4.2 Approximation poissonnienne pour $X_n(\eta)$

Le principal résultat de cette section est le Théorème 4.2.1 : la distribution limite du nombre de copies $X_n(\eta)$ dans le graphe G_n de la configuration locale η est une loi de Poisson (Section 4.2.1). Sa démonstration est basée sur la méthode des moments et fait l'objet de la Section 4.2.2. Enfin, dans la Section 4.2.3, le résultat d'approximation poissonnienne est généralisé à toute famille de configurations locales *incompatibles*.

4.2.1 Théorème et commentaires

Soit η une configuration locale de la boule $B(0, r)$ telle que $k(\eta) > 0$. Depuis la fin de la Section 4.1 et notamment depuis la Proposition 4.1.3, quelques renseignements concernant la variable aléatoire $X_n(\eta)$ ont été obtenus. En particulier, à la fonction seuil $n^{-d/k(\eta)}$, son espérance converge quand n tend vers l'infini vers la valeur $c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}$. Le Théorème 4.2.1 dévoile entièrement son comportement asymptotique.

Théorème 4.2.1 *Supposons que le potentiel de surface $a(n)$ satisfasse (4.1.1). Alors, lorsque la taille n du graphe tend vers l'infini, la variable aléatoire $X_n(\eta)$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre $c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}$.*

La démonstration de ce résultat repose sur la méthode des moments (voir [4] ou le Lemme 4.2.2 de la Section 4.2.2).

Le Théorème 4.2.1 affirme que la distribution limite de la variable aléatoire $X_n(\eta)$ dépend de b . En effet, le potentiel de paire ou plutôt son signe influence la probabilité d'apparition dans le graphe de la configuration locale η à travers son périmètre $\gamma(\eta)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta) > 0) = 1 - e^{-c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}}.$$

Lorsque b est positif (resp. négatif), cette limite est une fonction décroissante (resp. croissante) du périmètre $\gamma(\eta)$. En d'autres termes, lorsque b est positif (resp. négatif), parmi les configurations locales ayant le même nombre de sommets positifs, celles ayant la plus grande (resp. la plus petite) probabilité asymptotique d'apparaître dans le graphe sont celles ayant le plus petit (resp. grand) périmètre. Ce résultat est conforme à l'intuition initiale concernant le modèle d'Ising, à savoir que la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ favorisait les sommets voisins de spins identiques lorsque $b > 0$ et de spins différents lorsque $b < 0$ (voir Figure 2.2).

Intéressons nous maintenant à l'exemple des deux configurations locales notées respectivement η_1 et η_2 proposées par la Figure 4.1 et plus particulièrement à leur probabilité d'apparition dans une réalisation du modèle d'Ising de potentiels $a = -0.7$ et $b = 0.3$, de taille $n = 150$ et en dimension $d = 2$. Les configurations locales η_1 et η_2 étant toutes les deux formées de 4 sommets positifs, les propriétés $X_n(\eta_1) > 0$ et $X_n(\eta_2) > 0$ ont donc la même fonction seuil $n^{-d/4}$. Ajustons la constante c pour que l'hypothèse $e^{2a} = cn^{-d/4}$ soit satisfaite. Il vient $c \simeq 3.02$. Le Théorème 4.2.1 nous donne alors les probabilités d'apparition de η_1 et η_2 dans le graphe infini :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta_1) > 0) = 1 - \exp(-c^{k(\eta_1)} \exp(-2 \times b \times 8)) \simeq 0.49$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta_2) > 0) = 1 - \exp(-c^{k(\eta_2)} \exp(-2 \times b \times 10)) \simeq 0.19.$$

La différence entre les deux limites est tout à fait sensible. Elle est due au fait que le potentiel de paire est "très" positif ($b = 0.3$). Pour une telle valeur du potentiel de paire, la différence entre les 2 limites ci-dessus illustre clairement la tendance de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ à minimiser le nombre d'interactions entre sommets de spins différents.

Terminons cette section en testant par un test du chi-deux le caractère poissonnien de la distribution limite de la variable aléatoire $X_n(\eta_1)$; voir [16] pour une référence classique mais aussi l'excellent cours de statistiques disponible sur le site web de l'Université Paris 5¹. La configuration locale η_1 est représentée sur la Figure 4.1. La taille du graphe doit donc être grande : nous choisissons $n = 900$. Pour des valeurs du potentiel de surface $a = -1.41$ et du potentiel de paire $b = 0.1$, $K = 500$ réalisations de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ sont générées. Pour chacune d'entre elles, les occurrences de la configuration locale η_1 sont recensées. Les observations $\{X_i\}_{i=1,\dots,K}$ sont à valeurs dans l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$. Elles sont représentées par un diagramme en bâtons dans la Figure 4.2.

Il faut se placer à la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta_1) > 0$. Soit c la constante vérifiant

¹"Statistique Médicale En Ligne", <http://www.math-info.univ-paris5.fr/smel/>.

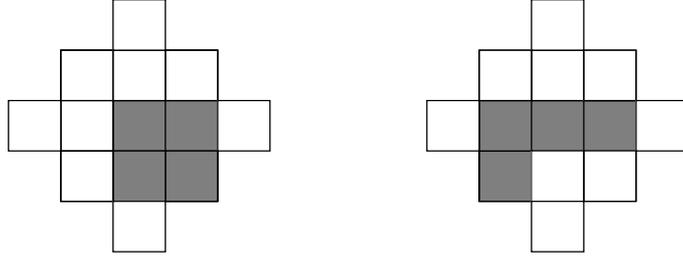


FIG. 4.1 – Deux configurations locales de la boule $B(0, 2)$, notées de gauche à droite η_1 et η_2 , représentées en dimension $d = 2$ et en 4-connexité ($\rho = q = 1$). Elles ont le même nombre de sommets positifs mais pas le même périmètre : $k(\eta_1) = k(\eta_2) = 4$, $\gamma(\eta_1) = 8$ et $\gamma(\eta_2) = 10$.

$e^{2a} = cn^{-d/4}$ avec $a = -1.41$, $n = 900$ et $d = 2$. Notons alors P_0 la loi de Poisson de paramètre $\lambda = c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta_1)} \simeq 2.02$. D'après le Théorème 4.2.1, P_0 est la loi limite de la variable $X_n(\eta_1)$. L'hypothèse à tester, basée sur l'échantillon $\{X_i\}_{i=1, \dots, K}$, est donc :

$$\mathcal{H}_0 : \mu_{a,b}(X_n(\eta_1) = m) = P_0(m), \quad \forall m = 0, \dots, 5.$$

Notons \hat{P} la distribution empirique de l'échantillon $\{X_i\}_{i=1, \dots, K}$ sur l'ensemble $\{0, \dots, 5\}$:

$$\forall m = 0, \dots, 5, \quad \hat{P}(m) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{1}_{X_i=m}.$$

Sous l'hypothèse \mathcal{H}_0 , la distribution empirique \hat{P} doit être proche de la distribution théorique P_0 . L'adéquation de \hat{P} à P_0 est mesurée par la distance du chi-deux :

$$D_{\chi^2}(P_0, \hat{P}) = \sum_{m=0}^5 \frac{(P_0(m) - \hat{P}(m))^2}{P_0(m)}.$$

Le test du chi-deux repose sur le fait que la statistique $KD_{\chi^2}(P_0, \hat{P})$ est approchée par la loi du chi-deux à $6 - 1 = 5$ degrés de liberté. Sur la base de l'échantillon $\{X_i\}_{i=1, \dots, K}$, cette statistique vaut 81.74. La p -valeur du test est donc 3.63×10^{-16} . Par conséquent, l'hypothèse nulle est fortement rejetée.

Le maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}$ de l'échantillon $\{X_i\}_{i=1, \dots, K}$ vaut $\hat{\lambda} = \sum X_i / K \simeq 1.43$. Testons alors l'adéquation de \hat{P} à P_0 , où P_0 désigne cette fois la loi de Poisson de paramètre $\hat{\lambda}$. La statistique $KD_{\chi^2}(P_0, \hat{P})$ vaut 3.82 et doit désormais être comparée à la loi du chi-deux à $6 - 1 - 1 = 4$ degrés de liberté. La p -valeur du test est alors 0.43. Le résultat est donc tout à fait compatible avec l'hypothèse \mathcal{H}_0 .

En conclusion, le caractère poissonnien de la loi limite de la variable aléatoire $X_n(\eta_1)$ est accepté mais la valeur observée de son espérance ($\hat{\lambda} \simeq 1.43$) est biaisée : elle est plus petite que son espérance asymptotique théorique ($\lambda \simeq 2.02$).

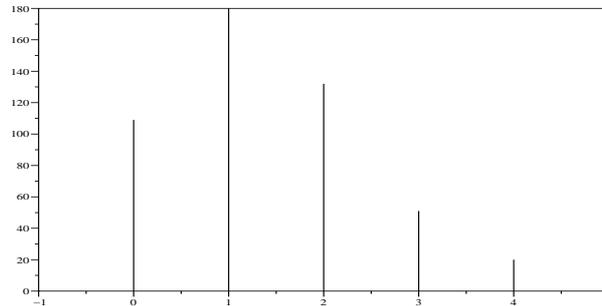


FIG. 4.2 – Un diagramme en bâtons représentant $K = 500$ réalisations indépendantes du nombre d'occurrences de la configuration locale η_1 avec $a = -1.41$, $b = 0.1$, $n = 900$ et $d = 2$.

4.2.2 Démonstration

Cette section est entièrement dédiée à la démonstration du Théorème 4.2.1. Les hypothèses sont les suivantes. Nous disposons d'une configuration locale η de la boule $B(0, r)$ ayant au moins un sommet positif ($k(\eta) > 0$). Le potentiel de paire b est fixé et le potentiel de surface $a(n)$ satisfait la relation (4.1.1) :

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\eta)},$$

où c est une constante strictement positive.

D'après le Lemme 4.1.2, quitte à augmenter le rayon r d'une unité, la configuration locale η sera supposée propre. Nous pourrions donc en particulier lui appliquer la Proposition 4.1.3.

La démonstration du Théorème 4.2.1 repose sur la méthode des moments (voir [4] p. 25) :

Lemme 4.2.2 *Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires positives et à valeurs entières et soit λ un réel strictement positif. Pour tous entiers $n, l \in \mathbb{N}^*$, le moment d'ordre l de la variable Y_n , noté $M_l(Y_n)$, est défini par la formule :*

$$\begin{aligned} M_l(Y_n) &= \mathbf{E}[Y_n(Y_n - 1) \dots (Y_n - l + 1)] \\ &= \sum_{k \geq l} \mathbf{P}(Y_n = k) \frac{k!}{(k - l)!}. \end{aligned}$$

Si, pour tout $l \in \mathbb{N}^$, le moment $M_l(Y_n)$ tend vers λ^l alors la variable aléatoire Y_n converge en loi quand n tend vers l'infini vers la loi de Poisson de paramètre λ .*

Dans le but d'alléger les formules, nous noterons simplement λ la quantité $c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}$. Il s'agit donc de prouver la convergence du moment $M_l(X_n(\eta))$ vers la quantité λ^l et ce pour tout entier l non nul. Notons tout d'abord que le cas $l = 1$ a déjà été traité. En effet, le moment d'ordre 1 d'une variable aléatoire est égal à son espérance et la convergence de $\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)]$ vers λ a été observée dans la Section 4.1.

Nous supposons donc désormais que $l \geq 2$. Introduisons une relation d'équivalence entre boules de rayon r . Considérons un ensemble \mathcal{B} de boules de rayon r dont les centres appartiennent à V_n . Deux éléments $B(y, r)$ et $B(z, r)$ de \mathcal{B} seront dits *connectés* s'il existe un entier m et des boules $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}$ telles que, d'une part, on ait $B_1 = B(y, r)$ et $B_m = B(z, r)$ et, d'autre part, pour tout entier $j = 1, \dots, m-1$, l'intersection $\overline{B_j} \cap B_{j+1}$ soit non vide. Cette dernière condition autorise les boules B_j et B_{j+1} à être disjointes mais leurs centres sont distants d'au plus $2r + 1$ l'un de l'autre. La relation de *connexité* est réflexive, symétrique et transitive : c'est donc bien une relation d'équivalence sur l'ensemble \mathcal{B} .

La relation de connexité est introduite dans cette démonstration pour la raison suivante. Deux boules $B(y, r)$ et $B(z, r)$ non équivalentes pour cette relation sont \mathcal{V} -disjointes. Par la Propriété 2.2.3, deux événements appartenant aux tribus $\mathcal{F}(B(y, r))$ et $\mathcal{F}(B(z, r))$ seront alors indépendants conditionnellement à $\mathcal{F}(\delta B(y, r) \cup \delta B(z, r))$.

Pour $1 \leq s \leq l$, notons $\mathcal{C}_l(s)$ l'ensemble des l -uplets de sommets (x_1, \dots, x_l) dont l'ensemble $\{B(x_1, r), \dots, B(x_l, r)\}$ formé des boules centrées en x_1, \dots, x_l et de rayon r se décompose sous l'action de la relation de connexité en s classes d'équivalence. Rappelons d'ailleurs qu'à la différence d'un ensemble un l -uplet est toujours ordonné.

L'utilisation des ensembles $\mathcal{C}_l(s)$ fournira une nouvelle écriture du moment $M_l(X_n(\eta))$. Par définition, la variable $X_n(\eta)$ compte le nombre de copies de la configuration locale η présentes dans le graphe G_n . De plus, le coefficient $k!/(k-l)!$ apparaissant dans l'écriture du moment $M_l(X_n(\eta))$ est le nombre de l -uplets dans un ensemble à k éléments. Par conséquent, $M_l(X_n(\eta))$ peut s'interpréter comme le nombre moyen de l -uplets de copies de η :

$$M_l(X_n(\eta)) = \sum_{s=1}^l \mathbf{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)} I_{x_1}^\eta \times \dots \times I_{x_l}^\eta \right].$$

Nous noterons $M'_l(X_n(\eta))$ le terme de la somme ci-dessus correspondant à $s = l$ et $M''_l(X_n(\eta))$ le reste de cette somme.

$$M'_l(X_n(\eta)) = \mathbf{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(l)} I_{x_1}^\eta \times \dots \times I_{x_l}^\eta \right] \quad (4.2.11)$$

$$M''_l(X_n(\eta)) = \sum_{s=1}^{l-1} \mathbf{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)} I_{x_1}^\eta \times \dots \times I_{x_l}^\eta \right] \quad (4.2.12)$$

La démonstration du Théorème 4.2.1 s'effectuera en deux étapes :

Lemme 4.2.3 *Sous les hypothèses précédentes, la quantité $M'_l(X_n(\eta))$ tend vers λ^l quand n tend vers l'infini.*

Lemme 4.2.4 *Sous les hypothèses précédentes, la quantité $M''_l(X_n(\eta))$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Le Théorème 4.2.1 découle des deux lemmes ci-dessus. Au préalable, il nous sera nécessaire de contrôler le cardinal des ensembles $\mathcal{C}_l(s)$.

Lemme 4.2.5 *Il existe une constante $C = C(r, l)$ strictement positive telle que*

$$\forall s = 1, \dots, l, |\mathcal{C}_l(s)| \leq Cn^{ds}. \quad (4.2.13)$$

De plus, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{C}_l(l)$ est équivalent à n^{dl} :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\mathcal{C}_l(l)|}{n^{dl}} = 1. \quad (4.2.14)$$

Démonstration Considérons un m -uplet de sommets (x_1, \dots, x_m) , $m \leq l$, tel que l'ensemble des boules $\{B(x_1, r), \dots, B(x_m, r)\}$ de rayons r centrées en ces sommets ne forme qu'une seule classe d'équivalence pour la relation de connexité. Cette condition contraint chacun des x_j , $j = 1, \dots, m$, à appartenir à la boule $B(x_1, R)$ où $R = l(2r + 1)$. Le nombre de tels m -uplets peut donc être (grossièrement) majoré par $\beta(R)^{l-1}n^d$. Appliquons alors ce raisonnement à chacune des s classes d'équivalence de l'ensemble des l boules de rayon r centrées en les sommets du l -uplet $(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)$. Il vient :

$$|\mathcal{C}_l(s)| \leq \beta(R)^{s(l-1)}n^{ds}.$$

Il suffit alors de poser $C = \beta(R)^{l(l-1)}$ et de constater que son expression ne dépend que du rayon r et de l'entier l .

Il s'agit maintenant d'estimer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{C}_l(l)$, i.e. d'estimer le nombre de l -uplets de sommets (x_1, \dots, x_l) dont les boules de rayon r centrées en ces sommets sont deux à deux \mathcal{V} -disjointes. Il y a n^d façons de fixer le premier sommet x_1 . Soit $2 \leq j \leq l$ et supposons que les sommets x_1, \dots, x_{j-1} ont déjà été choisis. Pour le choix du sommet suivant x_j , l'ensemble des sommets x vérifiant $\text{dist}(x, x_k) \leq 2r + 1$ pour $1 \leq k \leq j - 1$ doivent être évités. Le cardinal de cet ensemble est majoré indépendamment de n par $(j - 1)\beta(2r + 1)$, quelque soit le choix des sommets x_1, \dots, x_{j-1} . On peut finalement écrire :

$$\prod_{1 \leq j \leq l} (n^d - (j - 1)\beta(2r + 1)) \leq |\mathcal{C}_l(l)| \leq n^{dl}.$$

On en déduit que n^{dl} est un équivalent pour le cardinal de l'ensemble $\mathcal{C}_l(l)$. ■

Soit $(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(l)$. Les boules centrées en ces sommets sont deux à deux \mathcal{V} -disjointes. Conditionnellement à $\cup_i \delta B(x_i, r)$, les événements relatifs aux boules $B(x_i, r)$ sont donc mutuellement indépendants. Ainsi, $M'_l(X_n(\eta))$ va se comporter comme la puissance l -ième du produit $n^d \mu_{a,b}(I_x^\eta = 1 | \sigma_{\delta B(x,r)})$. Or, cette dernière quantité tend vers λ , d'où le Lemme 4.2.3.

Démonstration (du Lemme 4.2.3) Soit (x_1, \dots, x_l) un l -uplet appartenant à $\mathcal{C}_l(l)$. L'ensemble des boules $\{B(x_1, r), \dots, B(x_l, r)\}$ se décompose en l classes d'équivalence pour la relation de connexité. Elles sont donc deux à deux \mathcal{V} -disjointes. La seconde partie de la Propriété 2.2.3

s'applique et produit :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 \right) &= \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 \mid \mathcal{F}(\cup_{j=1}^l \delta B(x_j, r)) \right) \right] \\ &= \mathbf{E}_{a,b} \left[\prod_{i=1}^l \mu_{a,b} (I_{x_i}^\eta = 1 \mid \mathcal{F}(\cup_{j=1}^l \delta B(x_j, r))) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le caractère markovien de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ (i.e. la première partie de la Propriété 2.2.3), le conditionnement est particularisé à chacune des boules :

$$\mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 \right) = \mathbf{E}_{a,b} \left[\prod_{i=1}^l \mu_{a,b} (I_{x_i}^\eta = 1 \mid \mathcal{F}(\delta B(x_i, r))) \right].$$

La configuration locale η étant propre, la Proposition 4.1.3 fournit un contrôle de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_{x_i}^\eta = 1 \mid \mathcal{F}(\delta B(x_i, r)))$ uniforme en la configuration sur $\delta B(x_i, r)$. Il en découle un encadrement de $\mu_{a,b}(I_{x_1}^\eta \times \dots \times I_{x_l}^\eta = 1)$:

$$\frac{\lambda^l}{n^{dl}} (1 - M_2 e^{2a(n)})^l \leq \mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 \right) \leq \frac{\lambda^l}{n^{dl}}$$

qui est uniforme en le l -uplet $(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(l)$. Par conséquent, il vient :

$$\frac{|\mathcal{C}_l(l)|}{n^{dl}} \lambda^l (1 - M_2 e^{2a(n)})^l \leq M'_l(X_n(\eta)) \leq \frac{|\mathcal{C}_l(l)|}{n^{dl}} \lambda^l.$$

Enfin, puisque le quotient de $|\mathcal{C}_l(l)|$ par n^{dl} tend vers 1 (relation 4.2.14), la quantité $M'_l(X_n(\eta))$ converge lorsque n tend vers l'infini vers λ^l . ■

Deux arguments clés permettent de comprendre la démonstration du Lemme 4.2.4. Premièrement, si $(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)$, $1 \leq s \leq l-1$, l'ensemble formé des l boules $B(x_1, r), \dots, B(x_l, r)$ se décompose en au plus $l-1$ classes d'équivalence. Par conséquent, il existe au moins une de ces classes contenant au moins 2 de ces boules (c'est le principe des tiroirs). Autrement dit, il existe 2 sommets du l -uplet (x_1, \dots, x_l) distants l'un de l'autre d'au plus $2r+1$. Deuxièmement, les occurrences de la configuration locale η sur deux boules $B(x, r)$ et $B(x', r)$ telles que $\text{dist}(x, x') \leq 2r+1$ impliquent la présence locale d'au moins $k(\eta)+1$ sommets positifs. Or, sous l'hypothèse (4.1.1), la probabilité de cet événement tend vers 0 (par le Lemme 4.1.1).

Démonstration (du Lemme 4.2.4) Nous allons montrer que chacun des $l-1$ termes de la somme définissant la quantité $M''_l(X_n(\eta))$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Fixons donc un entier $1 \leq s \leq l-1$ et considérons un l -uplet (x_1, \dots, x_l) appartenant à $\mathcal{C}_l(s)$. Par définition, la famille des boules de rayon r centrées en les sommets x_1, \dots, x_l se décompose en s classes d'équivalence. Notons-les $EC(1), \dots, EC(s)$. Notons également C_j la réunion des boules appartenant à la classe

d'équivalence $EC(j)$. Une fois de plus, la Propriété 2.2.3 intervient de manière essentielle :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 \right) &= \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 | \mathcal{F}(\cup_{j=1}^l \delta C_j) \right) \right] \\ &= \mathbf{E}_{a,b} \left[\prod_{j=1}^s \mu_{a,b} \left(\prod_{i, B(x_i, r) \in EC(j)} I_{x_i}^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta C_j) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Dans la dernière égalité, le conditionnement a été particularisé à chacun des ensembles de sommets C_j .

Puisque l'entier s est inférieur ou égal à $l - 1$, au moins une des s classes d'équivalence, disons $EC(1)$, possède au moins 2 éléments ; soient $x(1)$ et $x'(1)$ deux sommets dont les boules $B(x(1), r)$ et $B(x'(1), r)$ appartiennent à $EC(1)$ et ne sont pas \mathcal{V} -disjointes. De la même manière, pour j allant de 2 à s , nous noterons $x(j)$ un des centres des boules (s'il y en a plusieurs) appartenant à la classe d'équivalence $EC(j)$.

Dans un premier temps, il faut nous assurer que la contribution à (4.2.15) du terme correspondant à la classe $EC(j)$ est raisonnable. En grossissant le conditionnement, la variable aléatoire $\mu_{a,b}(I_{x(j)}^\eta | \mathcal{F}(\delta B(x(j), r)))$ apparaît. La configuration locale η étant propre, la Proposition 4.1.3 en fournit une majoration :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b} \left(\prod_{i, B(x_i, r) \in EC(j)} I_{x_i}^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta C_j) \right) &\leq \mu_{a,b} \left(I_{x(j)}^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta C_j) \right) \\ &\leq \mathbf{E}_{a,b} \left[\mathbf{E}_{a,b} \left[I_{x(j)}^\eta | \mathcal{F}(\delta C_j \cup \delta B(x(j), r)) \right] | \mathcal{F}(\delta C_j) \right] \\ &\leq \mathbf{E}_{a,b} \left[\mathbf{E}_{a,b} \left[I_{x(j)}^\eta | \mathcal{F}(\delta B(x(j), r)) \right] | \mathcal{F}(\delta C_j) \right] \\ &\leq \frac{\lambda}{n^d}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 \right) &\leq \left(\frac{\lambda}{n^d} \right)^{s-1} \mathbf{E}_{a,b} \left[\mu_{a,b} \left(\prod_{\substack{i, B(x_i, r) \\ \in EC(1)}} I_{x_i}^\eta = 1 | \mathcal{F}(\delta C_1) \right) \right] \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{n^d} \right)^{s-1} \mu_{a,b} \left(\prod_{\substack{i, B(x_i, r) \\ \in EC(1)}} I_{x_i}^\eta = 1 \right) \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{n^d} \right)^{s-1} \mu_{a,b}(I_{x(1)}^\eta = I_{x'(1)}^\eta = 1). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Rappelons que les sommets $x(1)$ et $x'(1)$ sont distincts et distants l'un de l'autre d'au plus $2r + 1$. Introduisons à cet effet l'ensemble (fini) $\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}$ des configurations locales de $B(0, 2r + 1)$ ayant

au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs. L'événement $I_{x(1)}^\eta = I_{x'(1)}^\eta = 1$ implique qu'un élément ζ de $\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}$ apparaît sur la boule $B(x(1), 2r + 1)$. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(I_{x(1)}^\eta = I_{x'(1)}^\eta = 1) &\leq \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}} \mathbf{E}_{a,b}[I_{x(1)}^\zeta] \\ &\leq n^{-d} \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\zeta)] \\ &\leq n^{-d} |\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}| M_1 e^{2a(n)}, \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

d'après le Lemme 4.1.1. Des inégalités (4.2.16) et (4.2.17), nous déduisons une majoration indépendante du l -uplet $(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)$:

$$\mu_{a,b} \left(\prod_{i=1}^l I_{x_i}^\eta = 1 \right) \leq \frac{\lambda^{s-1}}{n^{ds}} |\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}| M_1 e^{2a(n)}.$$

Enfin, l'utilisation du Lemme 4.2.5 implique que

$$\mathbf{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)} I_{x_1}^\eta \times \dots \times I_{x_l}^\eta \right] \leq C \lambda^{s-1} |\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}| M_1 e^{2a(n)},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en va de même pour la somme $M_l''(X_n(\eta))$. Le Lemme 4.2.4 est démontré. \blacksquare

4.2.3 Généralisation à une famille de configurations locales incompatibles

Dans cette section, nous considérons m configurations locales η_1, \dots, η_m ayant chacune le même nombre $k > 0$ de sommets positifs. Le cas $m = 1$ faisant l'objet des sections précédentes, nous supposons désormais l'entier m au moins égal à 2. Notons alors X_n le nombre de copies dans le graphe G_n des configurations locales η_1, \dots, η_m :

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{i=1}^m X_n(\eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{x \in V_n} I_x^{\eta_i}. \end{aligned}$$

La fonction seuil de chacune des propriétés $X_n(\eta_i) > 0$ est $n^{-d/k}$. Ainsi, par la Propriété 3.2.3, celle de leur réunion, i.e. celle de la propriété $X_n > 0$ est également de la forme $n^{-d/k}$. L'objectif de cette section est d'obtenir une approximation poissonnienne pour la variable aléatoire X_n .

Pour ce faire, il est nécessaire de se placer à la fonction seuil de $X_n > 0$. Nous supposons donc que le potentiel de surface $a(n)$ satisfait :

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k}, \quad (4.2.18)$$

où c est une constante strictement positive fixée. Afin d'obtenir une convergence en loi pour la variable X_n , l'idée naturelle consiste à s'appuyer, comme pour la démonstration du Théorème 4.2.1, sur la méthode des moments (voir le Lemme 4.2.2). Il s'agit donc de prouver l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout l , le moment d'ordre l de la variable X_n tende vers λ^l . Il suffit d'observer l'espérance de X_n (qui est également son moment d'ordre 1) pour obtenir la valeur de λ . Une conséquence de la Proposition 4.1.3 fournit la limite de l'espérance du nombre de copies d'une configuration locale (non nécessairement propre). En notant simplement γ_i le périmètre de la configuration locale η_i , il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n] &= \sum_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta_i)] \\ &= c^k \sum_{i=1}^m e^{-2b\gamma_i}. \end{aligned}$$

La route conduisant à l'obtention d'une approximation poissonnienne pour X_n paraît toute tracée. Néanmoins un ingrédient essentiel fait encore défaut. Considérons en effet deux sommets distincts y et z , que l'on imagine proches l'un de l'autre, et deux indices $1 \leq i < j \leq m$. Les réalisations des configurations locales η_i et η_j en les boules $B(y, r)$ et $B(z, r)$ n'impliquent pas nécessairement la présence (localisée) d'au moins $k+1$ sommets positifs. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le cas où les ensembles de sommets positifs $V_+(\eta_i)$ et $V_+(\eta_j)$ sont translatés l'un de l'autre, comme c'est le cas dans la Figure 4.3. Or, c'est justement cet argument, couplé à l'hypothèse (4.2.18), qui permet de prouver la convergence vers 0 de la quantité $n^d \mu_{a,b}(I_y^{\eta_i} = I_z^{\eta_j} = 1)$; voir la fin de la démonstration du Lemme 4.2.4. Une hypothèse concernant les configurations locales η_1, \dots, η_m et interdisant le cas pathologique précédent est nécessaire : elles devront être *incompatibles*.

Definition 4.2.6 Soient η_1, \dots, η_m m configurations locales de $B(0, r)$ ayant chacune $k > 0$ sommets positifs. Les configurations locales η_1, \dots, η_m sont dites *incompatibles* si, pour tout $1 \leq i < j \leq m$, les ensembles de sommets positifs $V_+(\eta_i)$ et $V_+(\eta_j)$ ne sont pas translatés l'un de l'autre.

Lorsque c'est le cas, nous emploierons également le terme *incompatible* pour la famille formée des η_1, \dots, η_m . Remarquons qu'une sous-famille d'une famille incompatible de configurations locales est encore incompatible mais que l'opération inverse, i.e. rajouter des configurations locales à une famille, ne préserve pas l'incompatibilité de la famille initiale.

Toutes les précautions ont été prises : le résultat principal de cette section peut être énoncé.

Théorème 4.2.7 Supposons que le potentiel $a(n)$ satisfasse (4.2.18) et considérons m configurations locales incompatibles η_1, \dots, η_m ayant chacune $k > 0$ sommets positifs. Alors la variable aléatoire X_n converge en loi quand n tend vers l'infini vers la loi de Poisson de paramètre $c^k \sum_{i=1}^m e^{-2b\gamma_i}$.

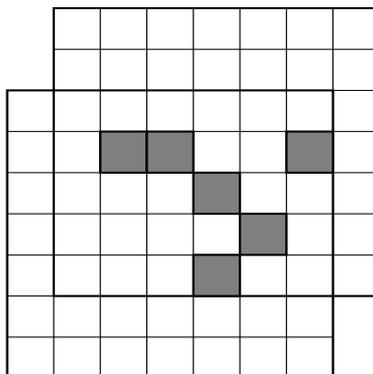


FIG. 4.3 – Représentation de deux configurations locales de la boule $B(0, 3)$ non incompatibles (en dimension $d = 2$ et en 8-connexité) : leurs ensembles de sommets positifs sont tradlatés l'un de l'autre.

Rappelons que la somme de deux lois de Poisson indépendantes de paramètres λ et λ' est encore une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$. Ainsi, à condition que les η_1, \dots, η_m soient incompatibles, le Théorème 4.2.7 illustre une certaine forme d'indépendance asymptotique entre les variables $X_n(\eta_i)$. Ce phénomène peut s'interpréter comme suit. Les occurrences des configurations locales η_i et η_j ne pouvant se chevaucher, elles sont, sous l'hypothèse (4.2.18), très éloignées l'une de l'autre. Le graphe G_n est alors suffisamment vaste pour permettre à chacune des η_i d'apparaître autant de fois que nécessaire (mais en nombre fini) loin des occurrences des autres configurations locales, i.e. indépendamment des η_j .

Nous utiliserons ce résultat dans la Section 4.5.1 dans le but de déterminer une approximation poissonnienne pour les assertions locales. Il sera également appliqué de manière plus concrète dans le Chapitre 5 à des configurations locales particulières : les *animaux*.

La structure de la démonstration du Théorème 4.2.7 est la même que celle du Théorème 4.2.1. Les arguments similaires seront donc traités succinctement.

Démonstration La première étape de la démonstration consiste à se ramener à des configurations locales propres. Ainsi, à chaque configuration locale η_i , nous associons la configuration locale propre $\hat{\eta}_i$ de la boule $B(0, r + 1)$ définie par :

$$\hat{\eta}_i(x) = \begin{cases} \eta_i(x) & \text{si } x \in B(0, r), \\ -1 & \text{si } \text{dist}(x, 0) = r + 1. \end{cases}$$

Les propriétés $X_n(\eta_i) > 0$ et $X_n(\hat{\eta}_i) > 0$ ont la même fonction seuil et satisfont $X_n(\hat{\eta}_i) \leq X_n(\eta_i)$. Nous noterons \hat{X}_n la somme des m variables $X_n(\hat{\eta}_i)$. Dès lors, la Proposition A.0.4 nous

permet de majorer la distance en variation totale entre les distributions de \dot{X}_n et X_n :

$$\begin{aligned} d_{VT} \left(\mathcal{L}(X_n), \mathcal{L}(\dot{X}_n) \right) &\leq \mu_{a,b}(X_n \neq \dot{X}_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \mu_{a,b}(X_n(\eta_i) > X_n(\dot{\eta}_i)) \\ &\leq m M_1 e^{2a(n)}, \end{aligned}$$

d'après les inégalités établies lors de la démonstration du Lemme 4.1.2. Ce même lemme affirme enfin que si la variable \dot{X}_n converge en loi vers une variable X , il en va de même pour X_n . Autrement dit, sans perte de généralité, nous pouvons supposer les configurations locales η_1, \dots, η_m propres.

En utilisant les notations de la démonstration du Théorème 4.2.1, le moment d'ordre l de X_n s'écrit :

$$M_l(X_n) = \sum_{s=1}^l \mathbb{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_l \leq m} I_{x_1}^{\eta_{i_1}} \times \dots \times I_{x_l}^{\eta_{i_l}} \right].$$

Nous noterons également $M'_l(X_n)$ le terme de la somme ci-dessus correspondant à $s = l$ et $M''_l(X_n)$ le reste de cette somme. La deuxième étape consiste à prouver la convergence suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M'_l(X_n) = \left(c^k \sum_{i=1}^m e^{-2b\gamma_i} \right)^l. \quad (4.2.19)$$

Fixons donc un l -uplet $(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(l)$ et l indices i_1, \dots, i_l compris entre 1 et m . Il s'agit donc d'évaluer la probabilité

$$\mu_{a,b} \left(\prod_{j=1}^l I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = 1 \right).$$

Nous commençons par écrire

$$\mu_{a,b} \left(\prod_{j=1}^l I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = 1 \right) = \mathbb{E}_{a,b} \left[\prod_{j=1}^l \mu_{a,b} \left(I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x_j, r)) \right) \right].$$

Pour $j = 1, \dots, l$, la configuration locale η_{i_j} étant propre, la Proposition 4.1.3 produit un encadrement de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x_j, r)))$. Comme cela avait été souligné à la fin de la Section 4.1, la constante M_2 intervenant dans cet encadrement est la même pour chacune des configurations η_{i_j} . Il vient :

$$n^{-dl} (1 - M_2 e^{2a(n)})^l \prod_{j=1}^l c^k e^{-2b\gamma_{i_j}} \leq \mu_{a,b} \left(\prod_{j=1}^l I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = 1 \right) \leq n^{-dl} \prod_{j=1}^l c^k e^{-2b\gamma_{i_j}}.$$

Puis, l'identité

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_l \leq m} \prod_{j=1}^l c^k e^{-2b\gamma_{i_j}} = \left(c^k \sum_{i=1}^m e^{-2b\gamma_i} \right)^l$$

entraîne l'encadrement

$$\frac{|\mathcal{C}_l(l)|}{n^{dl}} (1 - M_2 e^{2a(n)})^l \left(c^k \sum_{i=1}^m e^{-2b\gamma_i} \right)^l \leq M_l'(X_n) \leq \frac{|\mathcal{C}_l(l)|}{n^{dl}} \left(c^k \sum_{i=1}^m e^{-2b\gamma_i} \right)^l$$

dont découle la limite désirée (4.2.19).

Dans la dernière étape de cette démonstration, nous montrerons que la somme $M_l''(X_n)$ tend vers 0 en montrant que c'est le cas des $l - 1$ termes qui la composent. Supposons pour cela $l \geq 2$. Fixons un entier $1 \leq s \leq l - 1$ et considérons un l -uplet (x_1, \dots, x_l) appartenant à $\mathcal{C}_l(l)$ et l indices i_1, \dots, i_l compris entre 1 et m . En s'inspirant de la démonstration du Lemme 4.2.4, nous savons qu'il existe une constante, disons A , dépendant du potentiel de paire b , des paramètres c et k mais aussi des configurations η_{i_j} satisfaisant :

$$\mu_{a,b} \left(\prod_{j=1}^l I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = 1 \right) \leq \frac{A}{n^{d(s-1)}} \mu_{a,b} \left(I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = I_{x_{j'}}^{\eta_{i_{j'}}} = 1 \right),$$

où j et j' sont deux indices tels que les sommets x_j et $x_{j'}$ sont distincts et distants l'un de l'autre d'au plus $2r + 1$. Si $i_j = i_{j'}$, i.e. si les configurations locales η_{i_j} et $\eta_{i_{j'}}$ sont identiques, alors l'événement $I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = I_{x_{j'}}^{\eta_{i_{j'}}} = 1$ implique la présence localisée d'au moins $k + 1$ sommets positifs. En effet, les centres des boules $B(x_j, r)$ et $B(x_{j'}, r)$ sur lesquelles se réalise $\eta_{i_j} = \eta_{i_{j'}}$ sont distincts. C'est dans le cas où les configurations locales η_{i_j} et $\eta_{i_{j'}}$ sont différentes que l'hypothèse d'incompatibilité de la famille $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ va intervenir. Puisque les ensembles de sommets positifs des configurations locales η_{i_j} et $\eta_{i_{j'}}$ ne peuvent se chevaucher, l'événement $I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = I_{x_{j'}}^{\eta_{i_{j'}}} = 1$ implique encore une fois la présence localisée d'au moins $k + 1$ sommets positifs. Dans les deux cas, le Lemme 4.1.1 s'applique et donne :

$$\mu_{a,b} \left(I_{x_j}^{\eta_{i_j}} = I_{x_{j'}}^{\eta_{i_{j'}}} = 1 \right) = \mathcal{O}(n^{-d} e^{2a(n)}).$$

Par conséquent, l'espérance

$$\mathbb{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_l) \in \mathcal{C}_l(s)} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_l \leq m} I_{x_1}^{\eta_{i_1}} \times \dots \times I_{x_l}^{\eta_{i_l}} \right]$$

est un $\mathcal{O}(e^{2a(n)})$, ce qui prouve la convergence de $M_l''(X_n)$ vers 0. ■

Lorsque les configurations locales η_1, \dots, η_m ne sont pas incompatibles, la variable X_n converge encore en loi quand n tend vers l'infini, mais la limite n'est plus une loi de Poisson. En fait, le support de la variable aléatoire X_n n'est asymptotiquement plus égal à \mathbb{N} tout entier : il dépendra des chevauchements entre les ensembles de sommets positifs $V_+(\eta_1), \dots, V_+(\eta_m)$.

Illustrons cette remarque générale par un exemple simple. Soient $\eta_1, \dots, \eta_{\beta(r)}$ les $\beta(r)$ configurations locales de la boule $B(0, r)$ ayant un unique sommet positif. Ces configurations locales

ne sont évidemment pas incompatibles ; à translation près, elles ont toutes la même ensemble de sommets positifs. Notons encore X_n la somme de leurs occurrences dans le graphe :

$$X_n = \sum_{i=1}^{\beta(r)} X_n(\eta_i) .$$

La fonction seuil de la propriété $X_n > 0$, comme celles des $X_n(\eta_i) > 0$, pour $i = 1, \dots, \beta(r)$, vaut n^{-d} . Posons alors $e^{2a(n)} = n^{-d}$ (avec $c = 1$). Pour cette valeur du potentiel de surface, les sommets positifs présents dans le graphe sont asymptotiquement éloignés les uns des autres. Ainsi, chacun d'entre eux contribue à la réalisation d'une occurrence pour chacune des configurations locales $\eta_1, \dots, \eta_{\beta(r)}$. Autrement dit, quand n tend vers l'infini,

$$\mu_{a,b}(X_n = \beta(r) \times X_n(\eta_1)) \rightarrow 1 .$$

Asymptotiquement, la distribution de X_n ne charge que les entiers multiples de $\beta(r)$. De plus, d'après le Théorème 4.2.1, $X_n(\eta_1)$ converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre e^{-8b} . Nous en déduisons la loi limite de la variable X_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n = l) = \begin{cases} e^{-e^{-8b}} \times \frac{(e^{-8b})^m}{m!} & \text{si } \exists m \in \mathbb{N}, l = \beta(r)m , \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Finalement, en s'inspirant de l'exemple précédent et de la démonstration du Théorème 4.2.7, il semble possible de fournir une limite pour la distribution de toute variable aléatoire définie comme la somme de m configurations locales quelconques (ayant chacune k sommets positifs).

4.3 Etude de la vitesse de convergence

Dans la section précédente, il a été prouvé que la variable aléatoire $X_n(\eta)$ convergeait en loi vers une loi de Poisson (Théorème 4.2.1). Cette nouvelle section a pour but de mesurer la vitesse à laquelle s'effectue cette convergence : c'est l'objet du Théorème 4.3.1. Il sera présenté et commenté dans la Section 4.3.1. La Section 4.3.2 est dédiée à sa démonstration. Celle-ci repose sur la méthode de Chen-Stein : voir [2] ou l'Annexe B qui lui est consacrée. Cette méthode s'applique au modèle d'Ising dans le cas ferromagnétique, elle requiert donc la positivité du potentiel de paire b .

4.3.1 Théorème et commentaires

Dans toute cette section, nous considérons une configuration locale η de la boule $B(0, r)$ ayant au moins un sommet positif ($k(\eta) > 0$). Le potentiel de surface $a(n)$ est supposé satisfaire la relation (4.1.1) :

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\eta)} ,$$

où c est une constante strictement positive. Dans ces conditions, le Théorème 4.2.1 affirme que le nombre de copies de la configuration locale η dans le graphe G_n converge en loi vers la loi de

Poisson de paramètre $c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}$. Le Théorème 4.3.1 stipule que la vitesse de cette convergence est au moins en $n^{-d/k(\eta)}$. Nous noterons encore $\mathcal{L}(X)$ la loi d'une variable aléatoire X et $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre λ .

Théorème 4.3.1 *Supposons que le potentiel de surface $a(n)$ satisfasse la relation (4.1.1) et que le potentiel de paire b soit positif. Alors :*

$$d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{P}(c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)})) = \mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)}).$$

Même si le Théorème 4.3.1 ne fournit qu'une borne supérieure, nous pensons que $n^{-d/k(\eta)}$ est le véritable ordre de grandeur de la vitesse à laquelle converge en distance en variation totale la loi de $X_n(\eta)$ vers sa limite $\mathcal{P}(c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)})$:

$$\frac{\log d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{P}(c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}))}{\log n^{-d/k(\eta)}} \rightarrow 1, \quad (4.3.20)$$

quand n tend vers l'infini. Nous ne sommes malheureusement pas en mesure de le montrer mais deux arguments motivent cette conjecture. Premièrement, dans le cas, qui est le nôtre (voir la Section 4.3.2), d'une famille de variables aléatoires indicatrices *positivement reliée* (voir l'Annexe B pour une définition), la majoration fournie par la méthode de Chen-Stein est le bon ordre de grandeur : pour plus de détails, consulter le Chapitre 3 de [2]. Deuxièmement, (4.3.20) a été démontrée par Ganesh et al. [34] dans le cas particulier d'une configuration locale η_+ représentant un simple spin positif ($r = 0, k(\eta_+) = 1$ et $\gamma(\eta_+) = 4$). Leur méthode, appelée *activity expansion*, consiste à écrire la densité ρ de spins positifs comme une série entière en la variable d'"activité" $z = e^{2a}$. D'une part, en utilisant la méthode de Chen-Stein, ils obtiennent un résultat analogue au Théorème 4.3.1 :

$$d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta_+)), \mathcal{P}(ce^{-8b})) = \mathcal{O}(n^{-d}).$$

D'autre part, ils prouvent l'existence d'une constante strictement positive $K = K(c, b)$ telle que :

$$|\mu_{a,b}(X_n(\eta_+) = 0) - e^{-ce^{-8b}}| = Kn^{-d}(1 + \mathcal{O}(n^{-d})).$$

Signalons enfin que dans [29], Fernández et al. considèrent les configurations locales comme des *contours*, i.e. des surfaces $d - 1$ -dimensionnelles connexes et fermées. Lorsque le potentiel de paire b tend vers $+\infty$, ils obtiennent une approximation poissonnienne pour le nombre de copies de tout contour fixé. De plus, cette convergence s'effectue à vitesse exponentielle.

4.3.2 Démonstration

Cette section a pour objectif de démontrer le Théorème 4.3.1. Ainsi, nous supposerons que le potentiel de surface $a(n)$ vérifie la relation (4.1.1)

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\eta)}$$

et que le potentiel de paire b est positif. Cette démonstration repose sur la méthode de Chen-Stein. En vue d'appliquer la Proposition B.0.8 de l'Annexe B, il nous faudra exhiber une famille

positivement reliée de variables aléatoires indicatrices ; ce seront les variables \overline{I}_x^η définies ci-dessous. Durant toute la démonstration, différentes caractérisations de la distance en variation totale, introduites dans l'Annexe A, seront utilisées.

Avant toute chose, grâce au Lemme 4.1.2 et en particulier à la relation (4.1.4), la configuration locale η sera supposée propre. Elle vérifiera donc les inégalités (4.1.6) et (4.1.7) de la Proposition 4.1.3.

Afin d'alléger les notations, nous noterons encore une fois λ la quantité $c^{k(\eta)}e^{-2b\gamma(\eta)}$.

Relativement à la configuration locale η , définissons le sous-ensemble $\mathcal{C}_r(\eta)$ de \mathcal{C}_r par :

$$\mathcal{C}_r(\eta) = \{\eta' \in \mathcal{C}_r, V_+(\eta') \supset V_+(\eta)\} .$$

Tout élément η' de cet ensemble compte parmi ses sommets positifs ceux de la configuration locale η . Il en possède donc au moins $k(\eta)$. Plus précisément, η est le seul élément de $\mathcal{C}_r(\eta)$ ayant exactement $k(\eta)$ sommets positifs, tous les autres en ont au moins $k(\eta) + 1$. A cet effet, nous noterons $\mathcal{C}_r^*(\eta) = \mathcal{C}_r(\eta) \setminus \{\eta\}$. Pour tout sommet $x \in V_n$, la variable aléatoire \overline{I}_x^η est définie par :

$$\overline{I}_x^\eta = \sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r(\eta)} I_x^{\eta'} . \quad (4.3.21)$$

Remarquons que \overline{I}_x^η est une fonction indicatrice : $\overline{I}_x^\eta(\sigma) = 1$ si les sommets positifs nécessaires à l'apparition de η sur la boule $B(x, r)$ sont positifs pour la configuration σ , sans aucune condition sur les spins des autres sommets. Autrement dit, \overline{I}_x^η est une fonction croissante (cf. la Section 2.2.2) :

$$\sigma \leq \sigma' \implies \overline{I}_x^\eta(\sigma) \leq \overline{I}_x^\eta(\sigma') .$$

Ainsi, sous l'hypothèse $b > 0$, la Proposition B.0.9 affirme que la famille formée de ces indicatrices est positivement reliée. Appliquée à cette famille, la méthode de Chen-Stein produira le Lemme 4.3.4.

Par analogie avec (4.3.21), introduisons la variable aléatoire, notée $\overline{X}_n(\eta)$ et définie par :

$$\begin{aligned} \overline{X}_n(\eta) &= \sum_{x \in V_n} \overline{I}_x^\eta \\ &= X_n(\eta) + \sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r^*(\eta)} X_n(\eta') , \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

dont l'espérance $\mathbf{E}_{a,b}[\overline{X}_n(\eta)]$ sera simplement notée λ_n .

L'inégalité triangulaire assure que la distance en variation totale entre les lois $\mathcal{L}(X_n(\eta))$ et $\mathcal{P}(\lambda)$ est majorée par :

$$d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(\overline{X}_n(\eta))) + d_{VT}(\mathcal{L}(\overline{X}_n(\eta)), \mathcal{P}(\lambda_n)) + d_{VT}(\mathcal{P}(\lambda_n), \mathcal{P}(\lambda)) ,$$

fournissant ainsi un plan naturel pour la démonstration du Théorème 4.3.1. Nous allons montrer que chacun des 3 termes composant la somme ci-dessus est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$. Les cas du premier et du dernier termes feront respectivement l'objet des Lemmes 4.3.2 et 4.3.3. La méthode de Chen-Stein, i.e. le Lemme 4.3.4, majore le terme $d_{VT}(\mathcal{L}(\overline{X}_n(\eta)), \mathcal{P}(\lambda_n))$ en fonction des deux

premiers moments de $\overline{X}_n(\eta)$, i.e. son espérance et sa variance. Enfin, le Lemme 4.3.5 assure que cette majoration est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$.

Sous l'hypothèse (4.1.1), le Lemme 4.1.1 assure que les configurations locales ayant strictement plus de $k(\eta)$ sommets positifs, en particulier celles de $\mathcal{C}_r^*(\eta)$, ont une probabilité asymptotique nulle d'apparaître dans le graphe. Par conséquent, les variables $\overline{X}_n(\eta)$ et $X_n(\eta)$ auront asymptotiquement le même comportement et l'espérance de la première, i.e. λ_n , sera proche de celle de la seconde, donc également proche de λ .

Lemme 4.3.2 *La distance en variation totale entre la loi de $\overline{X}_n(\eta)$ et celle de $X_n(\eta)$ satisfait :*

$$d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(\overline{X}_n(\eta))) = \mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)}) . \quad (4.3.23)$$

De plus, il existe une constante strictement positive M_3 telle que, pour tout n :

$$\lambda(1 - M_3 e^{2a(n)}) \leq \lambda_n \leq \lambda(1 + M_3 e^{2a(n)}) . \quad (4.3.24)$$

Démonstration Puisque nous disposons d'une égalité reliant les variables $X_n(\eta)$ et $\overline{X}_n(\eta)$ (relation (4.3.22)), la caractérisation de la distance en variation totale proposée par la Proposition A.0.4 est tout à fait adéquate :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \inf\{\mathbf{P}(X \neq Y), \mathcal{L}(X) = \mu \text{ et } \mathcal{L}(Y) = \nu\} .$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(\overline{X}_n(\eta))) &\leq \mu_{a,b}(X_n(\eta) \neq \overline{X}_n(\eta)) \\ &\leq \mu_{a,b}\left(\sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r^*(\eta)} X_n(\eta') > 0\right) \\ &\leq \sum_{\eta' \in \mathcal{C}_r^*(\eta)} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta')] , \end{aligned}$$

car la variable $\sum_{\eta'} X_n(\eta')$ est à valeurs entières. Or d'après le Lemme 4.1.1, l'espérance de $X_n(\eta')$, $\eta' \in \mathcal{C}_r^*(\eta)$, tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta')] &\leq M_1 e^{2a(n)(k(\eta') - k(\eta))} \\ &\leq M_1 e^{2a(n)} . \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{C}_r^*(\eta)$ étant de cardinal fini, la distance en variation totale $d_{VT}(\mathcal{L}(X_n(\eta)), \mathcal{L}(\overline{X}_n(\eta)))$ est un $\mathcal{O}(e^{2a(n)})$, donc un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$ par la relation (4.1.1).

En utilisant les majorations précédentes et en décomposant la variable $\overline{X}_n(\eta)$ comme en (4.3.22), nous obtenons un encadrement de son espérance λ_n :

$$\mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] \leq \lambda_n \leq \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\eta)] + |\mathcal{C}_r^*(\eta)| M_1 e^{2a(n)} .$$

En combinant avec (4.1.7), il vient :

$$\lambda (1 - M_2 e^{2a(n)}) \leq \lambda_n \leq \lambda (1 + |\mathcal{C}_r^*(\eta)| M_1 \lambda^{-1} e^{2a(n)}) .$$

Les constantes M_1 et M_2 sont respectivement issues du Lemme 4.1.1 et de la Proposition 4.1.3. Elles sont indépendantes de la taille n du graphe. L'encadrement final de λ_n est obtenu en posant :

$$M_3 = \max\{M_2, |\mathcal{C}_r^*(\eta)| M_1 \lambda^{-1}\} .$$

■

Le Lemme 4.3.2 affirme en particulier que la différence entre λ_n et λ tend vers 0 comme $e^{2a(n)}$. Par conséquent, les deux lois de Poisson dont λ_n et λ sont les paramètres seront proches l'une de l'autre.

Lemme 4.3.3 *La distance en variation totale entre les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_n)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$ satisfait :*

$$d_{VT}(\mathcal{P}(\lambda_n), \mathcal{P}(\lambda)) = \mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)}) . \quad (4.3.25)$$

Démonstration La caractérisation de la distance en variation totale proposée par la relation (A.0.2) de l'Annexe A est adaptée à la situation :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} |\mu(m) - \nu(m)| .$$

Fixons un entier $m \geq 1$. La relation (4.3.24) fournit un encadrement de la différence $\lambda_n^m e^{-\lambda_n} - \lambda^m e^{-\lambda}$. Par conséquent :

$$\left| e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^m}{m!} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \right| \leq \max\{\alpha_m, \beta_m\}$$

où les réels positifs α_m et β_m sont définis par

$$\alpha_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \left(e^{\lambda M_3 e^{2a(n)}} (1 + M_3 e^{2a(n)})^m - 1 \right)$$

et

$$\beta_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \left(1 - e^{-\lambda M_3 e^{2a(n)}} (1 - M_3 e^{2a(n)})^m \right) .$$

Finalement, la distance en variation totale entre les lois de Poisson de paramètres λ_n et $c^{k(\eta)} e^{-2b\gamma(\eta)}$ est majorée par :

$$d_{VT}(\mathcal{P}(\lambda_n), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \max\{\alpha_m, \beta_m\} .$$

Afin d'obtenir (4.3.25), nous allons d'une part montrer que pour tout m , $\alpha_m \geq \beta_m$ et d'autre part que la série de terme général α_m est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$. Pour cela, considérons la fonction f_m définie par :

$$f_m :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (1+x)^m e^{\lambda x} .$$

Il est facile de vérifier que la fonction f_m est convexe. Ainsi, pour $0 < x < 1$, $f_m(0) - f_m(-x)$ est majoré par $f_m(x) - f_m(0)$. En prenant $x = M_3 e^{2a(n)}$ et en remarquant que $f_m(0) = 1$, l'inégalité désirée $\alpha_m \geq \beta_m$ est obtenue. Pour finir, donnons un équivalent pour $\sum_m \alpha_m$:

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \alpha_m &= e^{\lambda(1-M_3 e^{2a(n)})} \sum_{m \geq 1} \frac{\lambda^m (1 + M_3 e^{2a(n)})^m}{m!} - e^{-\lambda} \sum_{m \geq 1} \frac{\lambda^m}{m!} \\ &= e^{2\lambda M_3 e^{2a(n)}} - e^{\lambda(1-M_3 e^{2a(n)})} - 1 + e^{-\lambda} \end{aligned}$$

qui tend vers $2\lambda M_3 e^{2a(n)}$ quand n tend vers l'infini. C'est donc un $\mathcal{O}(n^{-d/k(n)})$ par la relation (4.1.1). ■

Il ne reste plus qu'à montrer que la distance en variation totale entre la loi de $\bar{X}_n(\eta)$ et la loi de Poisson de paramètre λ_n est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(n)})$. La variable aléatoire $\bar{X}_n(\eta)$ a été introduite dans cette démonstration dans le but de lui appliquer la méthode de Chen-Stein. En effet, elle est égale à une somme de fonctions indicatrices croissantes : les variables \bar{I}_x^η , $x \in V_n$. Or, le potentiel b étant positif, la famille formée de ces variables indicatrices est positivement reliée (cf. la Proposition B.0.9). La Proposition B.0.8 s'applique et produit le Lemme 4.3.4. L'unique étape de la démonstration du Théorème 4.3.1 utilisant la positivité de b réside dans l'utilisation de la Proposition B.0.9.

Soulignons au passage à quel point le fait de supposer le modèle d'Ising ferromagnétique simplifié, d'un point de vue théorique, la situation. En effet, dans le cas général ($b \in \mathbb{R}$), l'étude de tous les moments de la variable $X_n(\eta)$ nous permettait d'obtenir sa distribution asymptotique, alors que dans le cas ferromagnétique ($b \geq 0$), celle de ses deux premiers moment suffit.

Lemme 4.3.4 *La distance en variation totale entre la loi de $\bar{X}_n(\eta)$ et la loi de Poisson de paramètre λ_n satisfait :*

$$d_{VT}(\mathcal{L}(\bar{X}_n(\eta)), \mathcal{P}(\lambda_n)) \leq \frac{1}{\lambda_n} \left(\text{Var}_{a,b}[\bar{X}_n(\eta)] - \lambda_n + 2 \sum_{x \in V_n} \mathbf{E}_{a,b}[\bar{I}_x^\eta]^2 \right). \quad (4.3.26)$$

Une particularité de la loi de Poisson réside dans le fait que sa variance et son espérance sont égales. Bien que ce ne soit pas une caractérisation, l'inégalité (4.3.26) signifie que, puisque $\sum_{x \in V_n} \mathbf{E}_{a,b}[\bar{I}_x^\eta]^2$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, la distance entre $\mathcal{L}(\bar{X}_n(\eta))$ et $\mathcal{P}(\lambda_n)$ est essentiellement contrôlée par la différence entre la variance et l'espérance de $\bar{X}_n(\eta)$. De bonnes estimations des deux premiers moments de la variable aléatoire $\bar{X}_n(\eta)$ montrent que cette différence est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(n)})$. Le cas du moment d'ordre 1 de $\bar{X}_n(\eta)$, i.e. son espérance λ_n , est traité par le Lemme 4.3.2. Le prochain résultat concerne son moment d'ordre 2 :

Lemme 4.3.5 *Le moment d'ordre 2 de la variable $\bar{X}_n(\eta)$, i.e. $M_2(\bar{X}_n(\eta)) = \mathbf{E}_{a,b}[\bar{X}_n(\eta)(\bar{X}_n(\eta) - 1)]$, satisfait :*

$$M_2(\bar{X}_n(\eta)) = \lambda^2 + \mathcal{O}(n^{-d/k(n)}).$$

Nous démontrerons ce résultat à la fin de cette section. Examinons tout d'abord de quelle manière il nous permet de conclure, i.e. de prouver que la distance en variation totale entre la loi de $\overline{X}_n(\eta)$ et $\mathcal{P}(\lambda_n)$ est un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$. Commençons par écrire :

$$\sum_{x \in V_n} \mathbf{E}_{a,b}[\overline{I}_x^\eta]^2 = \frac{\lambda_n^2}{n^d}$$

et

$$\text{Var}_{a,b}[\overline{X}_n(\eta)] = M_2(\overline{X}_n(\eta)) + \lambda_n - \lambda_n^2.$$

L'inégalité (4.3.26) devient

$$d_{VT}(\mathcal{L}(\overline{X}_n(\eta)), \mathcal{P}(\lambda_n)) \leq \frac{1}{\lambda_n} \left(M_2(\overline{X}_n(\eta)) - \lambda_n^2 + \frac{2\lambda_n^2}{n^d} \right).$$

Comme λ_n converge vers $c^{k(\eta)}e^{-2b\gamma(\eta)}$ quand n tend vers l'infini, il suffit de montrer que :

$$M_2(\overline{X}_n(\eta)) - \lambda_n^2 + \frac{2\lambda_n^2}{n^d} = \mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)}).$$

C'est clairement le cas du rapport λ_n^2/n^d puisque par hypothèse l'entier $k(\eta)$ est non nul. C'est tout aussi évident pour le terme $M_2(\overline{X}_n(\eta)) - \lambda_n^2$ grâce au Lemme 4.3.5. En effet, il stipule qu'il existe une constante M_4 telle que pour tout n ,

$$M_2(\overline{X}_n(\eta)) \leq \lambda^2 + M_4 e^{2a(n)}.$$

La minoration de λ_n fournie par (4.3.24) produit alors :

$$M_2(\overline{X}_n(\eta)) - \lambda_n^2 \leq M_4 e^{2a(n)} + \lambda^2 (2M_3 e^{2a(n)} - M_3^2 e^{4a(n)}),$$

qui est bien un $\mathcal{O}(e^{2a(n)})$, i.e. un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$.

Il s'agit pour finir de démontrer le Lemme 4.3.5, i.e. prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout n , la différence $M_2(\overline{X}_n(\eta)) - \lambda^2$ soit majorée par $Cn^{-d/k(\eta)}$. En utilisant la relation d'équivalence de connexité introduite dans la Section 4.2.2, nous écrivons le moment d'ordre 2 de $\overline{X}_n(\eta)$ comme une somme (relation (4.3.27)) dont l'un des termes est la quantité $M_2'(X_n(\eta))$ (cf. relation (4.2.11)). C'est de ce terme que provient la contribution λ^2 , tous les autres tendant vers 0 comme $e^{2a(n)}$.

Démonstration (du Lemme 4.3.5) Quelques notations introduites lors de la démonstration du Théorème 4.2.1 nous seront utiles, notamment la relation d'équivalence dite de connexité entre boules de même rayon. Rappelons ainsi que, pour $s = 1, 2$, $\mathcal{C}_2(s)$ désigne l'ensemble des couples de sommets (x_1, x_2) dont l'ensemble $\{B(x_1, r), B(x_2, r)\}$ formé des boules de centre x_1 et x_2 et de rayon r se décompose sous l'action de la relation de connexité en s classes d'équivalence. Autrement dit, le couple (x_1, x_2) appartient à $\mathcal{C}_2(1)$ si $\text{dist}(x_1, x_2) \leq 2r + 1$ et à $\mathcal{C}_2(2)$ sinon. Le moment d'ordre 2 de $\overline{X}_n(\eta)$ s'écrit donc sous la forme :

$$M_2(\overline{X}_n(\eta)) = \sum_{s=1}^2 \mathbf{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_2(s)} \overline{I}_{x_1}^\eta \times \overline{I}_{x_2}^\eta \right].$$

Pour tout sommet x , chacune des variables indicatrices \bar{I}_x^η se décompose comme la somme des $I_x^{\eta'}$, $\eta' \in \mathcal{C}_r(\eta)$. Nous obtenons ainsi une nouvelle écriture pour $M_2(\bar{X}_n(\eta))$:

$$M_2(\bar{X}_n(\eta)) = \sum_{\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{C}_r(\eta)} (E^1(\eta_1, \eta_2) + E^2(\eta_1, \eta_2)) , \quad (4.3.27)$$

où pour $s = 1, 2$ la quantité $E^s(\eta_1, \eta_2)$ est définie par :

$$E^s(\eta_1, \eta_2) = \mathbf{E}_{a,b} \left[\sum_{(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_2(s)} I_{x_1}^{\eta_1} I_{x_2}^{\eta_2} \right] .$$

Soit (η_1, η_2) un couple d'éléments de $\mathcal{C}_r(\eta)$. Il est essentiel de rappeler qu'un seul élément de cet ensemble admet exactement $k(\eta)$ sommets positifs, c'est justement la configuration locale η , et que tous les autres en admettent strictement plus.

Occupons-nous tout d'abord du cas $s = 1$; considérons un couple de sommets $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_2(1)$. Ces deux sommets sont distants l'un de l'autre d'au plus $2r + 1$. L'événement

$$I_{x_1}^{\eta_1} = I_{x_2}^{\eta_2} = 1$$

implique la présence d'au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs dans la boule de centre x_1 et de rayon $2r + 1$. Dès lors, si $\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}$ désigne l'ensemble des configurations locales de la boule $B(0, 2r + 1)$ ayant au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(I_{x_1}^{\eta_1} = I_{x_2}^{\eta_2} = 1) &\leq \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}} \mathbf{E}_{a,b}[I_{x_1}^\zeta] \\ &\leq n^{-d} \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(\zeta)] \\ &\leq n^{-d} |\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}| M_1 e^{2a(n)} , \end{aligned}$$

par le Lemme 4.1.1. Cette majoration étant valable pour tout couple (x_1, x_2) appartenant à $\mathcal{C}_2(1)$, nous en déduisons :

$$E^1(\eta_1, \eta_2) \leq C |\mathcal{C}_{2r+1}^{>k(\eta)}| M_1 e^{2a(n)} ,$$

où la constante $C > 0$ a été introduite par le Lemme 4.2.5. Autrement dit, $E^1(\eta_1, \eta_2)$ est un $\mathcal{O}(e^{2a(n)})$ et donc également un $\mathcal{O}(n^{-d/k(\eta)})$ par (4.1.1).

Passons désormais au cas $s = 2$ et supposons donné un couple $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_2(2)$. Des techniques déjà utilisées dans la Section 4.2.2 nous permettent d'écrire :

$$\mathbf{E}_{a,b} [I_{x_1}^{\eta_1} I_{x_2}^{\eta_2}] = \mathbf{E}_{a,b} \left[\prod_{i=1}^2 \mu_{a,b} (I_{x_i}^{\eta_i} = 1 | \mathcal{F}(\delta B(x_i, r))) \right] . \quad (4.3.28)$$

A ce moment de la démonstration, deux cas sont à distinguer. Supposons dans un premier temps que η_1 et η_2 soient toutes les deux égales à la configuration locale η . Alors, par la Proposition 4.1.3,

$$\mathbf{E}_{a,b} [I_{x_1}^\eta I_{x_2}^\eta] \leq n^{-2d} \lambda^2$$

et $E^1(\eta, \eta)$ est majoré par λ^2 . Dans le cas contraire, au moins l'une des deux configurations locales $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{C}_r(\eta)$ est différente de η . En particulier, on peut affirmer que l'une des deux admet strictement plus de $k(\eta)$ sommets positifs, l'autre en admettant au moins $k(\eta)$:

$$k(\eta_1) + k(\eta_2) \geq 2k(\eta) + 1 .$$

Ainsi, en combinant le Lemme 4.1.1 et la relation (4.3.28), il vient :

$$\begin{aligned} E^2(\eta_1, \eta_2) &\leq M_1^2 e^{2a(n)(k(\eta_1)+k(\eta_2)-2k(\eta))} \\ &= \mathcal{O}(e^{2a(n)}) . \end{aligned}$$

La relation $e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\eta)}$ permet de conclure. ■

4.4 Distance entre configurations locales

A la fonction seuil de la propriété $X_n(\eta) > 0$, le nombre de copies dans le graphe de la configuration locale η suit une loi de Poisson. Asymptotiquement, il y en aura donc presque sûrement un nombre fini. Une question naturelle consiste à se demander quelle distance sépare deux copies quelconques de η dans le graphe. Nous n'avons malheureusement en notre possession aucune réponse ferme à cette question. Néanmoins le Théorème 4.4.1 montre la voie à suivre. Ce résultat, énoncé et commenté dans la Section 4.4.1, renseigne sur la distance typique à laquelle se trouvent les plus proches sommets positifs d'une occurrence donnée de η . Sa démonstration fait l'objet de la Section 4.4.2.

4.4.1 Théorème et commentaires

Soit η une configuration locale de la boule $B(0, r)$ ayant au moins un sommet positif ($k(\eta) > 0$). Nous nous plaçons une fois de plus à la fonction seuil $n^{-d/k(\eta)}$ de la propriété $X_n(\eta) > 0$. Précisément, le potentiel de surface $a(n)$ sera supposé satisfaire :

$$e^{2a(n)} = n^{-d/k(\eta)} . \tag{4.4.29}$$

N'intervenant pas dans cette nouvelle étude, la constante c apparaissant dans la relation (4.1.1) est fixée à la valeur 1. Sous cette hypothèse, nous savons d'après le Théorème 4.2.1 que le nombre de copies de la configuration locale η dans le graphe G_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre $e^{-2b\gamma(\eta)}$. En particulier, le nombre de copies de η dans le graphe est fini avec une probabilité qui tend vers 1. Fixons alors un sommet x et notons $\mathcal{C}(x, r, R)$ la couronne de centre x et de rayons r et $R(> r)$:

$$\mathcal{C}(x, r, R) = \{y \in V_n, r < \text{dist}(x, y) \leq R\} .$$

Supposons qu'une copie de la configuration locale η apparaisse sur la boule de centre x et de rayon r . Le Lemme 4.1.1 affirme qu'alors tous les sommets de la couronne $\mathcal{C}(x, r, R)$ auront des

spins négatifs. Autrement dit, en notant $\mathcal{I}(+, R)$ l'événement "il existe (au moins) un sommet positif dans la couronne $\mathcal{C}(x, r, R)$ ", il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R) | I_x^\eta = 1) = 0 .$$

Qu'advient-il de cette limite si le rayon R dépend de n et tend vers l'infini ? Le Théorème 4.4.1 répond à cette question.

Théorème 4.4.1 *Sous les hypothèses précédentes, nous avons*

$$R(n) \ll n^{1/k(\eta)} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) | I_x^\eta = 1) = 0$$

et

$$R(n) \gg n^{1/k(\eta)} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) | I_x^\eta = 1) = 1 .$$

Le Théorème 4.4.1 prévoit donc un phénomène de seuil pour la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) | I_x^\eta = 1)$. Il s'interprète comme suit. Si $R(n)n^{-1/k(\eta)}$ tend vers 0 alors, avec une probabilité qui tend vers 1, tous les sommets de la couronne $\mathcal{C}(x, r, R(n))$ seront négatifs. Inversement, si $R(n)n^{-1/k(\eta)}$ tend vers $+\infty$ alors, avec une probabilité qui tend vers 1, la couronne $\mathcal{C}(x, r, R(n))$ contiendra au moins un sommet positif.

Remarquons qu'à la différence de la propriété $X_n(\eta) > 0$, la fonction seuil proposée ci-dessus ne dépend pas de la dimension d : cela s'explique simplement par le fait que cette dernière concerne un rayon et non plus un volume. Elle est également décroissante en l'entier $k(\eta)$. Plus le nombre de sommets positifs formant la configuration locale η est grand, plus la largeur de la couronne de sommets négatifs ceinturant l'une de ses occurrences est étroite. Il faut en effet comprendre que se placer à la fonction seuil d'une configuration locale ayant beaucoup de sommets positifs force le potentiel de surface $a(n)$ à tendre moins vite vers $-\infty$ et donc à tolérer dans tout le graphe un plus grand nombre de sommets positifs.

En se penchant sur le cas de l'indépendance entre les sommets ($b = 0$), un résultat du type du Théorème 4.4.1 était prévisible. En effet, sous l'hypothèse (4.4.29), le nombre moyen de sommets positifs dans la boule $B(0, R(n))$ est logarithmiquement équivalent à :

$$R(n)^d \times e^{2a(n)} = R(n)^d \times n^{\frac{d}{k(\eta)}} .$$

Par conséquent, si $R(n) \ll n^{1/k(\eta)}$ (resp. $R(n) \gg n^{1/k(\eta)}$) le nombre moyen de sommets positifs de $B(0, R(n))$ tend vers 0 (resp. $+\infty$). D'ailleurs, cet argument insiste sur le fait suivant : la fonction seuil (pour le rayon $R(n)$) de la propriété "la boule $B(0, R(n))$ contient (au moins) un sommet positif" devrait encore être $n^{1/k(\eta)}$.

Les sommets positifs les plus proches d'une copie donnée de η sont donc à distance de l'ordre de $n^{1/k(\eta)}$. Mais le Théorème 4.4.1 ne précise ni leur nombre, ni leur position les uns par rapport aux autres : sont-ils groupés ou isolés ? Notre point de vue se porterait vers la deuxième alternative. Nous conjecturons que les sommets positifs apparaissant à distance de l'ordre de $n^{1/k(\eta)}$ de η_x (copie de η sur $B(x, r)$) sont éloignés les uns des autres et que les plus proches groupements formés de 2 sommets positifs apparaissent à distance de l'ordre de $n^{2/k(\eta)}$ (voir la Figure 4.4).

Plus généralement, nous pensons que les configurations locales (de $B(0, r)$) ayant $1 \leq s \leq k(\eta)$ sommets positifs les plus proches de η_x sont à distance de l'ordre de $n^{s/k(\eta)}$. En particulier, les autres occurrences de η les plus proches de celle se réalisant sur la boule $B(x, r)$, i.e. de η_x , seraient à distance de l'ordre de n . L'entier n étant la taille du graphe, deux telles copies sont donc très espacées. Il ne peut donc y en avoir qu'un nombre fini dans le graphe tout entier, ce qui est confirmé par le Théorème 3.2.1. Nous pensons que n est l'ordre de grandeur pour la distance séparant deux copies quelconques de la configuration locale η .

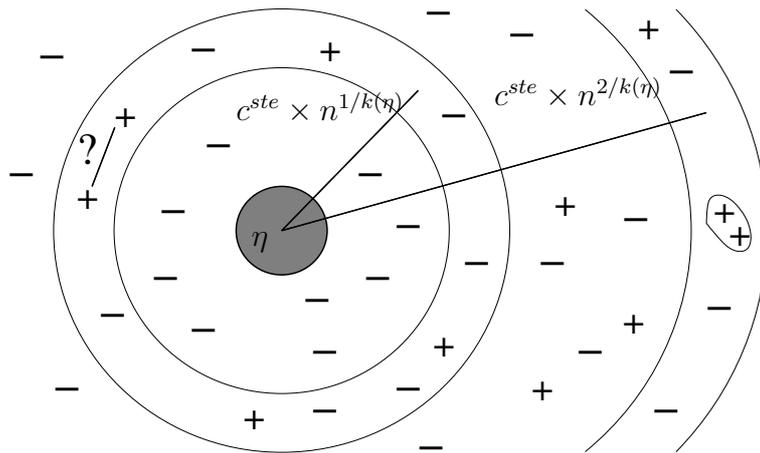


FIG. 4.4 – Représentation géographique et schématique des sommets positifs les plus proches d'une occurrence de la configuration locale η .

4.4.2 Démonstration

Fixons pour toute cette démonstration un sommet x . Celle-ci se décompose en deux étapes naturelles : nous montrerons la convergence de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) | I_x^\eta = 1)$ vers 0 puis vers 1 selon le comportement asymptotique du rayon $R(n)$.

Remarquons que la démonstration de la Proposition 4.1.3 fournit un contrôle du dénominateur. Pour cela, associons à η la configuration locale propre $\hat{\eta}$ de la boule $B(0, r + 1)$ définie par :

$$\hat{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in B(0, r) , \\ -1 & \text{si } \text{dist}(x, 0) = r + 1 . \end{cases}$$

Les configurations η et $\hat{\eta}$ ont le même nombre de sommets positifs et le même périmètre :

$$k(\eta) = k(\hat{\eta}) \quad \text{et} \quad \gamma(\eta) = \gamma(\hat{\eta}) .$$

L'inégalité (4.1.10), appliquée à $\hat{\eta}$, est valable pour toute configuration de $\delta B(x, r + 1)$. Elle s'applique donc à son espérance, i.e. $\mu_{a,b}(I_x^{\hat{\eta}} = 1)$. Il vient :

$$\frac{1}{\mu_{a,b}(I_x^{\hat{\eta}} = 1)} \leq (1 + M_2 e^{2a(n)}) e^{2b\gamma(\eta)} n^d .$$

Enfin, comme la réalisation de $\hat{\eta}$ sur $B(x, r+1)$ entraîne celle de η sur $B(x, r)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1)} &\leq \frac{1}{\mu_{a,b}(I_x^{\hat{\eta}} = 1)} \\ &\leq (1 + M_2 e^{2a(n)}) e^{2b\gamma(\eta)} n^d. \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

L'essentiel du travail consistera donc à bien évaluer la probabilité de l'intersection des événements $\mathcal{I}(+, R(n))$ et $I_x^\eta = 1$.

Supposons donc pour commencer que $R(n) \ll n^{1/k(\eta)}$. Le cardinal de la couronne $\mathcal{C}(x, r, R(n))$, disons β_n , est évidemment majoré par celui de la boule $B(0, R(n))$ et donc par $(2\rho R(n) + 1)^d$. Puisque $R(n)^d n^{-d/k(\eta)}$ tend vers 0, il en va de même pour $\beta_n n^{-d/k(\eta)}$ et donc aussi pour $\beta_n e^{2a(n)}$ par l'hypothèse (4.4.29).

Nous aurons besoin de l'ensemble $\mathcal{C}_{R(n)}(\eta)$ formé des configurations locales de la boule $B(0, R(n))$ ayant pour sommets positifs au moins ceux de η :

$$\mathcal{C}_{R(n)}(\eta) = \{\zeta \in \mathcal{C}_{R(n)}, V_+(\zeta) \supset V_+(\eta)\}.$$

La terminologie utilisée jusqu'à présent sera conservée : même si cela devient impropre voire trompeur, les configurations de cet ensemble seront toujours qualifiées de "locales". Les éléments de $\mathcal{C}_{R(n)}^*(\eta) = \mathcal{C}_{R(n)}(\eta) \setminus \{\eta\}$ possèdent au moins $k(\eta) + 1$ sommets positifs. Ce dernier ensemble est introduit dans le but d'écrire :

$$\mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) \cap I_x^\eta = 1) = \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{R(n)}^*(\eta)} \mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1),$$

où l'événement $I_x^\zeta = 1$ signifie que ζ apparaît en $B(x, R(n))$. La boule $B(x, R(n))$ sera d'ailleurs notée plus brièvement B_n . Fixons $\zeta \in \mathcal{C}_{R(n)}^*(\eta)$. La marche à suivre pour majorer $\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1)$ est toujours la même. Grâce à l'identité

$$\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1) = \mathbb{E}_{a,b} [\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \mathcal{F}(\delta B_n))],$$

il suffit de majorer uniformément en la configuration σ de δB_n la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \sigma)$. Fixons donc $\sigma \in W^{\delta B_n}$. La relation (2.4.20) propose un majorant simple de cette quantité :

$$\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1 | \sigma) \leq e^{H^{B_n}(\zeta_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x^0 \sigma)}, \quad (4.4.31)$$

où ζ^0 désigne l'élément de $\mathcal{C}_{R(n)}(\eta)$ n'ayant que des sommets négatifs. L'essentiel du travail consiste désormais à bien interpréter la différence entre les énergies locales $H^{B_n}(\zeta_x \sigma)$ et $H^{B_n}(\zeta_x^0 \sigma)$. L'expression de $H^{B_n}(\zeta_x \sigma)$ est donnée par la formule (2.4.21) :

$$H^{B_n}(\zeta_x \sigma) = a(2k(\zeta) - \beta(R(n))) + b \left(\sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y,z \in B_n}} \zeta_x(y) \zeta_x(z) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B_n, z \in \delta B_n}} \zeta_x(y) \sigma(z) \right).$$

Le nombre de sommets positifs et le périmètre de la configuration locale ζ^0 sont nuls. Ainsi, la différence $H^{B_n}(\zeta_x\sigma) - H^{B_n}(\zeta_x^0\sigma)$ vaut :

$$2a(n)k(\zeta) + b \left(\sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y,z \in B_n}} \zeta_x(y)\zeta_x(z) - \alpha(R(n)) \right) + b \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B_n, z \in \delta B_n}} (\zeta_x(y) + 1)\sigma(z).$$

Soit $\{y, z\}$ une des $\alpha(R(n))$ arêtes de la boule $B(0, R(n))$. La quantité $1 - \zeta_x(y)\zeta_x(z)$ vaut 0 si les sommets y et z ont le même spin et 2 sinon. Par conséquent,

$$\frac{1}{2} \left(\alpha(R(n)) - \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y,z \in B_n}} \zeta_x(y)\zeta_x(z) \right)$$

énumère le nombre d'arêtes de B_n apportant une contribution de “+1” au périmètre $\gamma(\zeta)$. Afin d'obtenir ce périmètre, il faut également prendre en compte les arêtes $\{y, z\}$ dont l'un des deux sommets appartient à B_n et a un spin positif, et l'autre appartient à δB_n . On obtient finalement la relation :

$$2\gamma(\zeta) = \alpha(R(n)) - \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y,z \in B_n}} \zeta_x(y)\zeta_x(z) + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B_n, z \in \delta B_n}} (1 + \zeta_x(y)). \quad (4.4.32)$$

Dans le cas d'une configuration locale propre, la relation (4.4.32) était déjà connue (voir la relation (2.4.23) à la fin du Chapitre 2). Elle était implicitement utilisée pour donner une expression de l'énergie locale d'une configuration locale propre faisant intervenir son périmètre (cf. (2.4.22)). Cette nouvelle écriture de $\gamma(\zeta)$ nous permet de réécrire la différence $H^{B_n}(\zeta_x\sigma) - H^{B_n}(\zeta_x^0\sigma)$:

$$H^{B_n}(\zeta_x\sigma) - H^{B_n}(\zeta_x^0\sigma) = 2a(n)k(\zeta) - 2b\gamma(\zeta) + b \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B_n, z \in \delta B_n}} (\zeta_x(y) + 1)(1 + \sigma(z)). \quad (4.4.33)$$

Il nous faut désormais encadrer le dernier terme de (4.4.33) uniformément en σ :

$$0 \leq \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B_n, z \in \delta B_n}} (\zeta_x(y) + 1)(1 + \sigma(z)) \leq 4\gamma(\zeta). \quad (4.4.34)$$

La minoration est évidente. Vérifions la majoration. La somme ci-dessus ne concerne que les sommets $y \in B_n$ à distance $R(n)$ de x et ayant un sommet positif. Considérons un tel sommet y et aussi un de ses voisins z appartenant à δB_n . L'arête ainsi formée contribue à ajouter “+4” à $4\gamma(\zeta)$ et au plus “+4” à la somme de (4.4.34) ($1 + \sigma(z)$ peut être nul), d'où le résultat. Notons que cette majoration est grossière car elle néglige totalement la configuration locale ζ (et donc aussi son périmètre) à l'intérieur de la boule.

Les inégalités de (4.4.34) fournissent une majoration de $H^{B_n}(\zeta_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x^0 \sigma)$ uniforme en la configuration σ . Si le potentiel de paire b est positif, (4.4.33) implique :

$$\begin{aligned} H^{B_n}(\zeta_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x^0 \sigma) &\leq 2a(n)k(\zeta) + 2b\gamma(\zeta) \\ &\leq (2a(n) + 2\mathcal{V}b)k(\zeta), \end{aligned}$$

car $\gamma(\zeta) \leq \mathcal{V}k(\zeta)$ est toujours vraie. Rappelons que \mathcal{V} désigne le nombre de voisins de tout sommet du graphe G_n . Et si b est négatif :

$$\begin{aligned} H^{B_n}(\zeta_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x^0 \sigma) &\leq 2a(n)k(\zeta) - 2b\gamma(\zeta) \\ &\leq (2a(n) - 2\mathcal{V}b)k(\zeta). \end{aligned}$$

Par (4.4.31), nous obtenons finalement que, pour toute configuration locale $\zeta \in \mathcal{C}_{R(n)}^*(\eta)$:

$$\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1) \leq e^{(2a(n) + 2\mathcal{V}|b|)k(\zeta)}.$$

En sommant sur l'ensemble $\mathcal{C}_{R(n)}^*(\eta)$, l'inégalité précédente produit un majorant pour la probabilité de l'intersection des événements $\mathcal{I}(+, R(n))$ et $I_x^\eta = 1$:

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) \cap I_x^\eta = 1) &\leq \sum_{\zeta \in \mathcal{C}_{R(n)}^*(\eta)} e^{(2a(n) + 2\mathcal{V}|b|)k(\zeta)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\beta_n} \binom{\beta_n}{k} e^{(2a(n) + 2\mathcal{V}|b|)(k(\eta) + k)} \\ &\leq e^{(2a(n) + 2\mathcal{V}|b|)k(\eta)} \left((1 + e^{2a(n) + 2\mathcal{V}|b|})^{\beta_n} - 1 \right). \end{aligned}$$

Combinée à l'inégalité (4.4.30), il vient :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) | I_x^\eta = 1) &\leq (1 + M_2 e^{2a(n)}) e^{2b\gamma(\eta)} n^d e^{(2a(n) + 2\mathcal{V}|b|)k(\eta)} \left((1 + e^{2a(n) + 2\mathcal{V}|b|})^{\beta_n} - 1 \right) \\ &\leq (1 + M_2 e^{2a(n)}) e^{2b\gamma(\eta) + 2\mathcal{V}|b|k(\eta)} \left(e^{\beta_n e^{2a(n) + 2\mathcal{V}|b|}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

car par hypothèse le produit $n^d e^{2a(n)k(\eta)}$ vaut 1. Ce n'est qu'ici qu'intervient le fait que $R(n) \ll n^{1/k(\eta)}$. Puisque $\beta_n e^{2a(n)}$ tend vers 0, il en va de même pour (4.4.35) et donc pour la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\mathcal{I}(+, R(n)) | I_x^\eta = 1)$.

Nous supposons dorénavant que $R(n) \gg n^{1/k(\eta)}$. Notons $\mathcal{I}(-, R(n))$ l'événement complémentaire de $\mathcal{I}(+, R(n))$, i.e. l'événement "tous les sommets de $\mathcal{C}(x, r, R(n))$ sont négatifs". Il s'agit donc de montrer que la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(\mathcal{I}(-, R(n)) | I_x^\eta = 1)$ tend vers 0 quand n tend l'infini.

Soit ζ la configuration locale de $\mathcal{C}_{R(n)}$ dont la restriction à la boule $B(0, r)$ est exactement η et n'ayant que des sommets négatifs sur la couronne $\mathcal{C}(x, r, R(n))$:

$$\zeta(y) = \begin{cases} \eta(y) & \text{si } y \in B(0, r), \\ -1 & \text{si } y \in \mathcal{C}(0, r, R(n)). \end{cases}$$

Les configurations locales η et ζ ont par construction le même nombre de sommets positifs et le même périmètre ; $k(\zeta) = k(\eta)$ et $\gamma(\zeta) = \gamma(\eta)$. L'élément ζ a été introduit afin d'écrire :

$$\mu_{a,b}(\mathcal{I}(-, R(n)) \cap I_x^\eta = 1) = \mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1) .$$

Soit σ une configuration de δB_n . Comme précédemment, une majoration de la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1|\sigma)$ uniforme en σ produira une majoration de la probabilité $\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1)$. Pour ce faire, introduisons l'ensemble $\mathcal{C}_{R(n)}^p$ des configurations locales propres de la boule $B(0, R(n))$. Par la relation (2.4.20), nous majorons la probabilité conditionnelle $\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1|\sigma)$ par une expression ne concernant que les éléments de $\mathcal{C}_{R(n)}^p$:

$$\mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1|\sigma) \leq \left(\sum_{\zeta' \in \mathcal{C}_{R(n)}^p} e^{H^{B_n}(\zeta'_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x \sigma)} \right)^{-1} . \quad (4.4.36)$$

Tout élément ζ' de $\mathcal{C}_{R(n)}^p$ étant propre, la relation (2.4.22) fournit une écriture simple de son énergie locale $H^{B_n}(\zeta'_x \sigma)$:

$$H^{B_n}(\zeta'_x \sigma) = a(2k(\zeta') - \beta(R(n))) + b \left(\alpha(R(n)) - 2\gamma(\zeta') + \sum_{\substack{\{y,z\} \in E_n \\ y \in B_n, z \in \delta B_n}} (-1)\sigma(z) \right) .$$

Puisque ζ appartient à $\mathcal{C}_{R(n)}^p$, la différence $H^{B_n}(\zeta'_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x \sigma)$ est alors automatiquement indépendante de σ :

$$\begin{aligned} H^{B_n}(\zeta'_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x \sigma) &= 2a(n)(k(\zeta') - k(\zeta)) + 2b(\gamma(\zeta) - \gamma(\zeta')) \\ &= 2a(n)(k(\zeta') - k(\eta)) + 2b(\gamma(\eta) - \gamma(\zeta')) . \end{aligned}$$

Ce phénomène est entièrement dû à l'utilisation de l'ensemble $\mathcal{C}_{R(n)}^p$. Dès lors, si le potentiel de paire b est positif, nous obtenons la minoration suivante :

$$H^{B_n}(\zeta'_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x \sigma) \geq -2a(n)k(\eta) + 2b\gamma(\eta) + (2a(n) - 2\mathcal{V}b)k(\zeta') ,$$

en utilisant $\gamma(\zeta') \leq \mathcal{V}k(\zeta')$. Et si b est négatif :

$$H^{B_n}(\zeta'_x \sigma) - H^{B_n}(\zeta_x \sigma) \geq -2a(n)k(\eta) + 2b\gamma(\eta) + 2a(n)k(\zeta') .$$

Afin de ne traiter qu'une seule alternative, nous utiliserons la notation suivante ; $\varepsilon(b)$ vaut $2\mathcal{V}b$ si $b \geq 0$ et 0 sinon. Via la relation (4.4.36), la probabilité de l'intersection des événements $\mathcal{I}(-, R(n))$ et $I_x^\eta = 1$ est maintenant majorée :

$$\begin{aligned} \mu_{a,b}(\mathcal{I}(-, R(n)) \cap I_x^\eta = 1) &= \mu_{a,b}(I_x^\zeta = 1) \\ &\leq \frac{e^{2a(n)k(\eta) - 2b\gamma(\eta)}}{\sum_{\zeta' \in \mathcal{C}_{R(n)}^p} e^{(2a(n) - \varepsilon(b))k(\zeta')}} . \end{aligned}$$

La somme du dénominateur de cette dernière fraction se calcule explicitement :

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta' \in \mathcal{C}_{R(n)}^p} e^{(2a(n)-\varepsilon(b))k(\zeta')} &= \sum_{k=0}^{\beta(R(n)-1)} \binom{\beta(R(n)-1)}{k} e^{(2a(n)-\varepsilon(b))k} \\ &= (1 + e^{2a(n)-\varepsilon(b)})^{\beta(R(n)-1)}. \end{aligned}$$

En effet, les éléments de $\mathcal{C}_{R(n)}^p$ peuvent avoir jusqu'à $\beta(R(n)-1)$ sommets positifs. Enfin, en utilisant la majoration (4.4.30) de $\mu_{a,b}(I_x^\eta = 1)$ et l'hypothèse $n^d e^{2a(n)k(\eta)} = 1$, il vient :

$$\mu_{a,b}(\mathcal{I}(-, R(n)) | I_x^\eta = 1) \leq \frac{(1 + M_2 e^{2a(n)})}{(1 + e^{2a(n)-\varepsilon(b)})^{\beta(R(n)-1)}}.$$

Il suffit pour conclure de vérifier que le dénominateur tend vers $+\infty$. L'hypothèse $R(n) \gg n^{1/k(n)}$ implique que $R(n)^d n^{-\frac{d}{k(n)}} = R(n)^d e^{2a(n)}$ tend vers $+\infty$. Par (2.4.18), $\beta(R(n)-1) \geq \beta_1 \times (R(n)-1)^d$ donc le produit $\beta(R(n)-1)e^{2a(n)}$ tend aussi vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + e^{2a(n)-\varepsilon(b)})^{\beta(R(n)-1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\beta(R(n)-1)e^{2a(n)}} = +\infty.$$

4.5 Autres approximations poissonniennes

L'objectif de cette section est de fournir une limite pour la probabilité pour le maximum de formules de la logique du premier ordre. Nous nous appuyerons pour cela sur les résultats d'approximations poissonniennes précédemment obtenus. En particulier, le Théorème 4.2.1 fournit la probabilité asymptotique de toute une classe de formules élémentaires de la logique du premier ordre : les descriptions locales $\exists x, D(x)$. Le Théorème de Gaifman (Théorème 3.1.8) nous invite à généraliser nos résultats en s'intéressant aux cas des assertions locales puis des formules locales basiques. Dans la Section 4.5.1, un résultat concernant les assertions locales sera facilement obtenu grâce au Théorème 4.2.7. Les formules locales basiques sont des formules complexes et déterminer une limite pour leur probabilité s'avérera fastidieux (voir Section 4.5.2).

4.5.1 Probabilité asymptotique d'une assertion locale

Dans toute cette section, nous considérerons une assertion locale $\exists x, \psi(x)$ de la logique du premier ordre $\mathcal{L}_1(\mathcal{R})$. Elle sera supposée satisfiable (sinon sa probabilité est nulle). Rappelons que l'ensemble de définition $\mathcal{D}(\psi)$ de l'assertion $\psi(x)$ désigne l'ensemble des descriptions complètes $D \in \mathcal{D}_r$ l'impliquant, i.e. telles que $D(x) \rightarrow \psi(x)$. Ainsi :

$$\exists x, \psi(x) \leftrightarrow \bigvee_{D \in \mathcal{D}(\psi)} \exists x, D(x).$$

L'indice $k(\psi) = \min_{D \in \mathcal{D}(\psi)} k(D)$ de l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ sera supposé strictement positif. Dans le cas où $k(\psi)$ est nul, la probabilité de cette assertion locale tend toujours vers 1. Nous nous

placerons donc à la fonction seuil de la formule $\exists x, \psi(x)$ en imposant au potentiel de surface $a(n)$ de vérifier :

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k(\psi)}, \quad (4.5.37)$$

où c est une constante strictement positive. Afin d'utiliser le Théorème 4.2.7, il nous faudra extraire de l'ensemble de définition $\mathcal{D}(\psi)$ une famille de descriptions complètes décrivant entièrement et sans redondance l'assertion $\psi(x)$.

Definition 4.5.1 Soit $\exists x, \psi(x)$ une assertion locale satisfiable. Un sous-ensemble $\mathcal{D}_0(\psi)$ de $\mathcal{D}(\psi)$ sera dit fidèle à ψ si :

1. $\forall D \in \mathcal{D}_0(\psi), k(D) = k(\psi)$;
2. Si τ est une translation de V_n , alors $D, D' \in \mathcal{D}_0(\psi)$ et $\tau(V_C(D)) = V_C(D')$ implique $D = D'$;
3. $D \in \mathcal{D}(\psi)$ et $k(D) = k(\psi)$ implique qu'il existe une translation τ de V_n et une description complète $D' \in \mathcal{D}_0(\psi)$ telles que $\tau(V_C(D)) = V_C(D')$.

Tous les ensembles fidèles à ψ ont le même cardinal. Il sera appelé indice de fidélité de ψ et sera noté $fid(\psi)$.

Autrement dit, si une description complète $D \in \mathcal{D}(\psi)$ vérifie $k(D) = k(\psi)$ alors son ensemble de sommets positifs $V_C(D)$ est représenté, à translation près, par un et un seul élément de $\mathcal{D}_0(\psi)$. Fixons donc un ensemble $\mathcal{D}_0(\psi) \subset \mathcal{D}(\psi)$ fidèle à ψ et notons-le :

$$\mathcal{D}_0(\psi) = \{D_1, \dots, D_{fid(\psi)}\}.$$

Le résultat suivant affirme que la limite de la probabilité de l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ ne dépend que des descriptions locales appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}_0(\psi)$.

Lemme 4.5.2 Supposons que le potentiel de surface $a(n)$ satisfasse (4.5.37). Notons ψ' l'assertion dont l'ensemble de définition $\mathcal{D}(\psi')$ est égal à l'ensemble $\mathcal{D}_0(\psi)$:

$$\exists x, \psi'(x) \leftrightarrow \bigvee_{D \in \mathcal{D}_0(\psi)} \exists x, D(x).$$

Alors, les probabilités des assertions locales $\exists x, \psi(x)$ et $\exists x, \psi'(x)$ convergent vers la même limite, si celle-ci existe.

Démonstration Notons $\mathcal{D}'(\psi)$ le sous-ensemble de $\mathcal{D}(\psi)$ formé des descriptions complètes d'indice égal à $k(\psi)$ et F la disjonction correspondante :

$$\bigvee_{D \in \mathcal{D}'(\psi)} \exists x, D(x).$$

Les inclusions $\mathcal{D}_0(\psi) \subset \mathcal{D}'(\psi) \subset \mathcal{D}(\psi)$ impliquent alors :

$$\exists x, \psi'(x) \rightarrow F \rightarrow \exists x, \psi(x)$$

et donc également les inégalités :

$$\mu_{a,b}(\exists x, \psi'(x)) \leq \mu_{a,b}(F) \leq \mu_{a,b}(\exists x, \psi(x)) .$$

Il s'agit donc de prouver que les deux quantités extrêmes ont la même limite quand n tend vers l'infini. Remarquons tout d'abord que

$$0 \leq \mu_{a,b}(\exists x, \psi(x)) - \mu_{a,b}(F) = \mu_{a,b} \left(\bigvee_{D \in \mathcal{D}(\psi) \setminus \mathcal{D}'(\psi)} \exists x, D(x) \right)$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En effet, la fonction seuil $s(n)$ de la disjonction ci-dessus satisfait $s(n) \gg n^{-d/k(\psi)}$. Les probabilités des formules F et $\exists x, \psi(x)$ convergent donc vers la même limite si celle-ci existe. La dernière étape de la démonstration consiste à montrer qu'il en est de même pour les probabilités des formules $\exists x, \psi'(x)$ et F . Commençons par écrire :

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu_{a,b}(F) - \mu_{a,b}(\exists x, \psi'(x)) &= \mu_{a,b}(F \wedge \neg(\exists x, \psi'(x))) \\ &\leq \sum_{D \in \mathcal{D}'(\psi) \setminus \mathcal{D}_0(\psi)} \mu_{a,b}(\exists x, D(x) \wedge \neg(\exists x, \psi'(x))) . \end{aligned}$$

Fixons une description complète $D \in \mathcal{D}'(\psi) \setminus \mathcal{D}_0(\psi)$. D'après le point 3. de la Définition 4.5.1, il existe $D_i \in \mathcal{D}_0(\psi)$ ayant, à translation près, le même ensemble de sommets positifs que la description complète D :

$$\mu_{a,b}(\exists x, D(x) \wedge \neg(\exists x, \psi'(x))) \leq \mu_{a,b}(\exists x, D(x) \wedge \neg(\exists x, D_i(x))) .$$

Or l'événement $\exists x, D(x) \wedge \neg(\exists x, D_i(x))$ implique l'existence d'une boule $B(x, r)$ sur laquelle se réalise la description complète D et la présence d'au moins un sommet positif quelque part dans la couronne $\mathcal{C}(x, r, 3r)$ empêchant ainsi la réalisation de D_i . Il implique donc la présence localisée d'au moins $k(\psi) + 1$ sommets positifs (voir la Figure 4.3). Sa probabilité tend donc vers 0 sous l'hypothèse (4.5.37). L'ensemble $\mathcal{D}'(\psi) \setminus \mathcal{D}_0(\psi)$ étant de cardinal fini, on en déduit que $\mu_{a,b}(\exists x, \psi'(x))$ et $\mu_{a,b}(F)$ ont la même limite quand n tend vers l'infini :

$$0 \leq \mu_{a,b}(F) - \mu_{a,b}(\exists x, \psi'(x)) \rightarrow 0 ,$$

si celle-ci existe. ■

Pour tout $1 \leq i \leq fid(\psi)$, notons η_i la configuration locale associée à D_i et γ_i son périmètre. Notons de plus X_n la somme des occurrences dans le graphe des configurations locales $\eta_1, \dots, \eta_{fid(\psi)}$:

$$X_n = \sum_{i=1}^{fid(\psi)} X_n(\eta_i) .$$

Nous avons par construction :

$$\mu_{a,b}(X_n > 0) = \mu_{a,b} \left(\bigvee_{D \in \mathcal{D}_0(\psi)} \exists x, D(x) \right) .$$

Ainsi, d'après le Lemme 4.5.2, les probabilités de l'événement $X_n > 0$ et de l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ convergent vers la même limite, à condition que celle-ci existe. C'est justement dans le but de prouver l'existence d'une telle limite que le sous-ensemble $\mathcal{D}_0(\psi)$ a été extrait de $\mathcal{D}(\psi)$. En effet, les points 1. et 2. de la Définition 4.5.1 obligent la famille formée des configurations locales $\eta_1, \dots, \eta_{fid(\psi)}$ à être incompatible (voir la Définition 4.2.6). Par conséquent, le Théorème 4.2.7 implique que la variable aléatoire X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre :

$$c^{k(\psi)} \sum_{i=1}^{fid(\psi)} e^{-2b\gamma_i} .$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 4.5.3 *Supposons que le potentiel de surface $a(n)$ satisfasse (4.5.37). Avec les notations précédentes, la probabilité de l'assertion locale $\exists x, \psi(x)$ converge quand n tend vers l'infini vers la limite :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\exists x, \psi(x)) = 1 - e^{-c^{k(\psi)} \sum_{i=1}^{fid(\psi)} e^{-2b\gamma_i}} .$$

Notons enfin que la limite proposée ci-dessus ne dépend pas du choix de l'ensemble $\mathcal{D}_0(\psi)$. En effet, elle ne dépend que de l'ensemble des périmètres $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{fid(\psi)}\}$ qui reste invariant quel que soit le choix de l'ensemble $\mathcal{D}_0(\psi)$.

4.5.2 Probabilité asymptotique d'une formule locale basique incompatible

Après avoir démontré une approximation poissonnienne pour les assertions locales (cf. la section précédente), nous nous proposons désormais d'étudier le cas de formules plus élaborées : les formules locales basiques. Le résultat principal de cette section, le Théorème 4.5.5, ne concerne que certaines d'entre elles, celles satisfaisant une hypothèse d'*incompatibilité*.

Considérons donc une formule locale basique L satisfiable et dont l'indice $k(L)$ est non nul :

$$\exists x_1 \dots \exists x_m \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} dist(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} \psi_i(x_i) \right) .$$

Rappelons que l'indice $k(L)$ de la formule locale basique L est égal au plus grand des indices $k(\psi_i)$, $1 \leq i \leq m$ (cf. Définition 3.3.2). Quitte à échanger les indices, nous pouvons supposer sans perte de généralité que, pour $m' \leq m$,

$$k(\psi_1) = \dots = k(\psi_{m'}) = k(L)$$

et que, au cas où $m' < m$, pour tout indice i satisfaisant $m' + 1 \leq i \leq m$, on ait

$$k(\psi_i) < k(L) .$$

Afin d'obtenir une limite non triviale pour la propriété L , il convient de se placer à sa fonction seuil $n^{-d/k(L)}$ (voir la Proposition 3.3.3) en imposant au potentiel de surface $a(n)$ de satisfaire :

$$e^{2a(n)} = cn^{-d/k(L)}, \quad (4.5.38)$$

où c est une constante strictement positive. Pour tout indice $1 \leq i \leq m'$, choisissons un ensemble de descriptions complètes fidèle à l'assertion ψ_i que nous noterons par

$$\mathcal{D}_0(\psi_i) = \{D_{i,1}, \dots, D_{i, \text{fid}(\psi_i)}\}.$$

Pour tous $1 \leq i \leq m'$ et $1 \leq j \leq \text{fid}(\psi_i)$, la configuration locale associée à la description complète $D_{i,j}$ sera notée $\eta_{i,j}$ et son périmètre $\gamma_{i,j}$. Nous savons que chacune des familles formées des configurations locales $\eta_{i,1}, \dots, \eta_{i, \text{fid}(\psi_i)}$ est incompatible. C'est quasiment la définition de l'ensemble $\mathcal{D}_0(\psi_i)$. Toutefois, ce n'est pas forcément le cas de leur réunion, d'où la définition suivante :

Definition 4.5.4 Avec les notations précédentes, la formule locale basique L sera dite incompatible si

$$\{\eta_{i,j}, 1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq \text{fid}(\psi_i)\}$$

est une famille incompatible de configurations locales.

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 4.5.5 Supposons que le potentiel de surface $a(n)$ satisfasse (4.5.38). Avec les notations précédentes, si la formule locale basique L est incompatible alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(L) = \prod_{i=1}^{m'} \left(1 - e^{-c^{k(L)} \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_i)} e^{-2b\gamma_{i,j}}} \right). \quad (4.5.39)$$

D'après le Théorème 4.5.5, la limite de la probabilité de la formule locale basique L ne dépend pas des assertions ψ_i d'indice $k(\psi_i)$ strictement inférieur à $k(L)$. En effet, sous l'hypothèse (4.5.38), celles-ci sont déjà présentes (en très grand nombre) dans le graphe avec probabilité 1. Seules les assertions d'indice égal à $k(L)$ vont intervenir puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(L) = \prod_{i=1}^{m'} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(\exists x, \psi_i(x)).$$

Cette identité met en relief un phénomène d'indépendance asymptotique : lorsque $n \rightarrow +\infty$, la probabilité de la conjonction est égale au produit des probabilités. Ce phénomène d'indépendance repose totalement sur le caractère incompatible de la famille de configurations locales

$$\{\eta_{i,j}, 1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq \text{fid}(\psi_i)\}$$

décrivant la formule locale basique L .

Démonstration Considérons tout d'abord la formule L' définie par :

$$\exists x_1 \dots \exists x_{m'} \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m'} \text{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m'} \bigvee_{1 \leq j \leq \text{fid}(\psi_i)} D_{i,j}(x_i) \right).$$

Les formules L et L' ont le même indice $k(L) = k(L') > 0$. La démonstration se décompose en deux étapes : premièrement, montrer que la probabilité de la formule L' converge vers la quantité proposée en (4.5.39) et deuxièmement, que les probabilités des formules L et L' tendent vers la même limite.

Remarquons en premier lieu que la formule L' satisfait l'inégalité :

$$\mu_{a,b}(L') \leq \mu_{a,b} \left(\bigcap_{i=1}^{m'} \left\{ \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_i)} X_n(\eta_{i,j}) > 0 \right\} \right). \quad (4.5.40)$$

Nous allons désormais montrer que le majorant ci-dessus converge vers la limite proposée en (4.5.39). Pour cela, utilisons la formule de Poincaré :

$$\begin{aligned} & \mu_{a,b} \left(\bigcap_{i=1}^{m'} \left\{ \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_i)} X_n(\eta_{i,j}) > 0 \right\} \right) = \\ & 1 + \sum_{l=1}^{m'} (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq m'} \mu_{a,b} \left(\bigcap_{s=1}^l \left\{ \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_{i_s})} X_n(\eta_{i_s,j}) = 0 \right\} \right). \end{aligned}$$

Fixons un entier $1 \leq l \leq m'$ ainsi que l indices $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq m'$. La famille formée des configurations locales $\{\eta_{i_s,j}, 1 \leq s \leq l, 1 \leq j \leq \text{fid}(\psi_{i_s})\}$ est incompatible en tant que sous-famille de la famille incompatible $\{\eta_{i,j}, 1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq \text{fid}(\psi_i)\}$. Le Théorème 4.2.7 s'applique alors : la variable aléatoire

$$\sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_{i_s})} X_n(\eta_{i_s,j})$$

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre

$$c^{k(L)} \sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_{i_s})} e^{-2b\gamma_{i_s,j}}.$$

On en déduit la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b} \left(\bigcap_{s=1}^l \left\{ \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_{i_s})} X_n(\eta_{i_s,j}) = 0 \right\} \right) &= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b} \left(\sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_{i_s})} X_n(\eta_{i_s,j}) > 0 \right) \\ &= \prod_{s=1}^l e^{-c^{k(L)} \sum_{j=1}^{\text{fid}(\psi_{i_s})} e^{-2b\gamma_{i_s,j}}}. \end{aligned}$$

Toujours par la formule de Poincaré, nous obtenons une expression factorisée de la limite du majorant de l'inégalité (4.5.40) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b} \left(\bigcap_{i=1}^{m'} \left\{ \sum_{j=1}^{fid(\psi_i)} X_n(\eta_{i,j}) > 0 \right\} \right) &= 1 + \sum_{l=1}^{m'} (-1)^l \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq m'} \prod_{s=1}^l e^{-c^{k(L)} \sum_{j=1}^{fid(\psi_{i_s})} e^{-2b\gamma_{i_s,j}}} \\ &= \prod_{i=1}^{m'} \left(1 - e^{-c^{k(L)} \sum_{j=1}^{fid(\psi_i)} e^{-2b\gamma_{i,j}}} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, la limite supérieure de la formule locale basique L' est majorée :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(L') \leq \prod_{i=1}^{m'} \left(1 - e^{-c^{k(L)} \sum_{j=1}^{fid(\psi_i)} e^{-2b\gamma_{i,j}}} \right).$$

Nous allons maintenant montrer que la quantité ci-dessus est également un minorant pour la limite inférieure de la probabilité de la formule L' , terminant ainsi la première étape de la démonstration. Nous aurons besoin de quelques notations supplémentaires. Pour $1 \leq i \leq m'$ et $1 \leq j \leq fid(\psi_i)$, associons à $\eta_{i,j}$, la configuration locale $\bar{\eta}_{i,j}$ de la boule $B(0, 3r)$ définie par :

$$\bar{\eta}_{i,j}(x) = \begin{cases} \eta_{i,j}(x) & \text{si } x \in B(0, r), \\ -1 & \text{si } x \in \mathcal{C}(0, r, 3r). \end{cases}$$

Les configurations locales $\eta_{i,j}$ et $\bar{\eta}_{i,j}$ ont le même ensemble de sommets positifs : elles ont donc le même nombre de sommets positifs $k(\eta_{i,j})$ et le même périmètre $\gamma_{i,j}$. Plus important, la famille formée des configurations locales $\{\bar{\eta}_{i,j}, 1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq fid(\psi_i)\}$ est elle aussi incompatible. Ceci entraîne l'implication logique suivante :

$$\sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{fid(\psi_{i_s})} X_n(\bar{\eta}_{i_s,j}) > 0 \longrightarrow L'. \quad (4.5.41)$$

En effet, pour tout i, i' , supposons qu'il existe des indices $1 \leq j \leq fid(\psi_i)$ et $1 \leq j' \leq fid(\psi_{i'})$ tels que $X_n(\bar{\eta}_{i,j}) > 0$ et $X_n(\bar{\eta}_{i',j'}) > 0$. Alors, il existe des boules $B(x, 3r)$ et $B(x', 3r)$ sur lesquelles se réalisent les configurations locales $\bar{\eta}_{i,j}$ et $\bar{\eta}_{i',j'}$. Montrons qu'on a alors nécessairement $dist(x, x') > 2r$. L'implication logique (4.5.41) s'en déduira aisément. Supposons en effet par l'absurde que $dist(x, x') \leq 2r$. La boule $B(x', r)$ est donc incluse dans $B(x, 3r)$. Ainsi, cette dernière boule contient les sommets positifs nécessaires aux réalisations des configurations locales $\bar{\eta}_{i,j}$ et $\bar{\eta}_{i',j'}$. Puisqu'elles sont incompatibles et que $k(\eta_{i,j}) = k(\bar{\eta}_{i,j})$, $k(\eta_{i',j'}) + 1$ sommets positifs sont donc présents dans la boule $B(x, 3r)$. Ce qui constitue une contradiction.

Par ailleurs, le raisonnement précédent appliqué à la quantité

$$\mu_{a,b} \left(\bigcap_{i=1}^{m'} \left\{ \sum_{j=1}^{fid(\psi_i)} X_n(\eta_{i,j}) > 0 \right\} \right)$$

dans le but d'obtenir sa limite s'applique pareillement à

$$\mu_{a,b} \left(\bigcap_{i=1}^{m'} \left\{ \sum_{j=1}^{fid(\psi_i)} X_n(\bar{\eta}_{i,j}) > 0 \right\} \right).$$

La famille $\{\bar{\eta}_{i,j}, 1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq fid(\psi_i)\}$ étant incompatible, le Théorème 4.2.7 s'appliquera et produira les mêmes limites. En effet, celles-ci ne dépendent pas du rayon de la boule sur lesquelles les configurations locales sont définies mais seulement des ensembles de sommets positifs $V_+(\bar{\eta}_{i,j})$ qui sont identiques aux $V_+(\eta_{i,j})$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(L') &\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b} \left(\sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^{fid(\psi_{i_s})} X_n(\bar{\eta}_{i_s,j}) > 0 \right) \\ &\geq \prod_{i=1}^{m'} \left(1 - e^{-c^{k(L)} \sum_{j=1}^{fid(\psi_i)} e^{-2b\gamma_{i,j}}} \right). \end{aligned}$$

Il s'agit désormais de montrer que les probabilités des formules L et L' ont la même limite. Commençons par introduire la formule locale basique L'' comme étant la restriction de la formule locale basique L aux assertions $\psi_1, \dots, \psi_{m'}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_{m'} \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m'} dist(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m'} \psi_i(x_i) \right).$$

La formule L'' implique L' donc $\mu_{a,b}(L'') \leq \mu_{a,b}(L')$. Cette inégalité devient une égalité lorsque n tend vers l'infini. C'est une conséquence du Lemme 4.5.2. Il ne reste donc plus qu'à montrer que les probabilités des formules L et L'' convergent vers la même limite, ce qui est loin d'être surprenant. En effet, les assertions $\psi_{m'+1}, \dots, \psi_m$ manquent à L'' pour avoir L . Or leurs indices sont strictement inférieure à $k(L)$. Donc, sous l'hypothèse (4.5.38), les assertions locales $\exists x, \psi_i(x)$ pour $m' + 1 \leq i \leq m$ sont satisfaites et même un grand nombre de fois chacune d'après la Proposition 3.3.1. Les contraintes de distance sur les centres des boules sur lesquelles elles se réalisent ne seront donc pas difficiles à obtenir.

Si $m' = m$, il n'y a rien à faire. Sinon, il suffit de montrer le résultat intermédiaire suivant. Soit m_1 un entier tel que $m' \leq m_1 < m$. Notons L_1 la formule locale basique L restreinte aux assertions $\psi_1, \dots, \psi_{m_1}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_{m_1} \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m_1} dist(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m_1} \psi_i(x_i) \right)$$

et L'_1 la formule locale basique L restreinte aux assertions $\psi_1, \dots, \psi_{m_1+1}$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_{m_1+1} \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m_1+1} dist(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq m_1+1} \psi_i(x_i) \right).$$

On sait que $k(\psi_{m_1+1}) < k(L)$. Montrons que les probabilités des formules L_1 et L'_1 tendent vers la même limite (en supposant que celle-ci existe).

Une des deux inégalités est immédiate. La formule L'_1 implique L_1 et donc $\mu_{a,b}(L'_1) \leq \mu_{a,b}(L_1)$. Il s'agit alors de montrer que la différence

$$\mu_{a,b}(L_1) - \mu_{a,b}(L'_1) = \mu_{a,b}(L_1 \wedge \neg L'_1)$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour la suite de la démonstration, les cas $k(\psi_{m_1+1}) = 0$ et $k(\psi_{m_1+1}) > 0$ sont à distinguer. Supposons pour commencer que $k(\psi_{m_1+1}) = 0$. L'assertion $\psi_{m_1+1}(x)$ est donc impliquée par la description complète formée uniquement de sommets négatifs. Notons ζ^0 la configuration locale de la boule $B(0, (m_1 + 2)r)$ formée uniquement de sommets positifs. Supposons démontrée l'implication logique :

$$X_n(\zeta^0) > 0 \longrightarrow \neg L_1 \vee L'_1. \quad (4.5.42)$$

Puisque $k(\zeta^0)$ est nul, le Théorème 3.2.1 affirme que la probabilité de l'événement $X_n(\zeta^0) > 0$ tend vers 1. En utilisant la contraposée de (4.5.42), nous en déduisons que $\mu_{a,b}(L_1 \wedge \neg L'_1)$ tend vers 0 et d'où le résultat. L'implication (4.5.42) est délicate à prouver. Supposons l'événement $X_n(\zeta^0) > 0$ et la formule L_1 vraie. Montrons que L'_1 l'est aussi. Rappelons que $k(\psi_1) = \dots = k(\psi_{m'}) = k(L) > 0$. Notons s l'indice satisfaisant $m' \leq s \leq m_1$ et $\forall i \leq s, k(\psi_i) > 0$ et $\forall s < i \leq m_1 + 1, k(\psi_i) = 0$. D'une part, l'événement $X_n(\zeta^0) > 0$ implique l'existence d'un sommet x tel que la "grosse" boule $B(x, (m_1 + 2)r)$ ne soit formée que de sommets négatifs. La boule $B(x, m_1 r)$ contient au moins m_1 boules disjointes de rayon r . Choisissons-en $m_1 + 1 - (s + 1) - 1$ ($1 \leq m_1 + 1 - (s + 1) - 1 \leq m_1$) que nous noterons

$$B(x_{s+1}, r), \dots, B(x_{m_1+1}, r).$$

Ces boules étant disjointes, les sommets $x_{s+1}, \dots, x_{m_1+1}$ sont deux à deux à distance strictement supérieure à $2r$ l'un de l'autre. De plus, ils appartiennent à la boule $B(x, (m_1 - 1)r)$. Puisque les assertions $\psi_{s+1}, \dots, \psi_{m_1+1}$ sont d'indices nuls, elles se réalisent sur les boules $B(x_{s+1}, r), \dots, B(x_{m_1+1}, r)$: les faits $\psi_{s+1}(x_{s+1}), \dots, \psi_{m_1+1}(x_{m_1+1})$ sont vrais. D'autre part, d'après la formule L_1 , les assertions ψ_1, \dots, ψ_s se réalisent en des sommets, disons x_1, \dots, x_s , deux à deux à distance strictement supérieure à $2r$ l'un de l'autre. Pour que L'_1 soit vraie, il ne reste plus qu'à vérifier que la distance entre deux sommets quelconques x_i et x_j , $1 \leq i \leq s$ et $s+1 \leq j \leq m_1+1$, soit strictement supérieure à $2r$. Supposons au contraire que $\text{dist}(x_i, x_j) \leq 2r$. Comme x_j appartient à la boule $B(x, (m_1 - 1)r)$, le sommet x_i appartient forcément à $B(x, (m_1 + 1)r)$. Ainsi la boule $B(x_i, r)$ est incluse dans $B(x, (m_1 + 2)r)$. Or $k(\psi_i) > 0$, donc il a au moins un sommet positif dans la boule $B(x_i, r)$ donc aussi dans $B(x, (m_1 + 2)r)$, ce qui est impossible. L'implication (4.5.42) est démontrée.

Supposons maintenant que $k(\psi_{m_1+1}) > 0$. Soit D une description complète de la boule $B(0, r)$ impliquant l'assertion ψ_{m_1+1} et de même indice. Notons η la configuration locale associée et construisons alors la configuration locale $\bar{\eta}$ de la boule $B(0, 3r)$ de la manière suivante :

$$\bar{\eta}(x) = \begin{cases} \eta(x) & \text{si } x \in B(0, r), \\ -1 & \text{si } x \in \mathcal{C}(0, r, 3r). \end{cases}$$

Par hypothèse, son indice vérifie $k(\bar{\eta}) = k(\eta) = k(\psi_{m_1+1}) < k(L)$. Ainsi, sous la condition (4.5.38), la Proposition 3.3.1 implique que la probabilité de l'événement $X_n(\bar{\eta}) > m_1 + 1$ tend vers 1. De plus, des arguments du même type que précédemment nous permettent de montrer l'implication logique :

$$X_n(\bar{\eta}) > m_1 + 1 \longrightarrow \neg L_1 \vee L'_1 .$$

Nous en déduisons alors que les probabilités des formules L_1 et L'_1 tendent vers la même limite.



Chapitre 5

Applications

Ce dernier chapitre propose deux applications des résultats obtenus précédemment : une estimation des potentiels de surface a et de paire b du modèle d'Ising (Section 5.2) et un algorithme de débruitage d'images en niveaux de gris (Section 5.3). Dans les deux cas, l'idée est d'appliquer les résultats d'approximations poissonniennes à des configurations locales particulières dont les ensembles de sommets positifs peuvent être assimilés à des *animaux* : voir la Proposition 5.1.2 de la Section 5.1. Dans cette optique, nous focaliserons notre attention sur le cas bidimensionnel ($d = 2$) et celui de la 4-connexité ($q = \rho = 1$).

Les deux applications exposées en Sections 5.2 et 5.3 font l'objet de deux articles, respectivement [12] et [14].

5.1 Approximations poissonniennes pour des animaux

Cette section est consacrée à la notion d'*animaux*. Dans un premier temps, nous décrirons ces objets élémentaires et les classerons selon leur *taille* et leur *périmètre*. Puis, en associant à chaque animal une configuration locale, nous fournirons une approximation poissonnienne pour le nombre d'animaux de taille k et de périmètre γ apparaissant dans le graphe G_n .

Une *composante 4-connexe* (plane) est un sous-ensemble de sommets du graphe G_n voisins pour la relation de 4-connexité. Ces ensembles particuliers de sommets sont plus connus en combinatoire sous le nom d'*animaux* ou de *polyominos* : voir par exemple [46].

Definition 5.1.1 *Pour tout entier $k \geq 1$, l'ensemble des animaux de taille k , noté \mathcal{A}_k , est l'ensemble des composantes 4-connexes à translation près formées de k sommets. Son cardinal est noté a_k .*

Par exemple, les animaux de taille 4 sont exactement les pièces du célèbre jeu Tetris. La Figure 5.1 propose quelques exemples. L'entier a_k représente ainsi le nombre de composantes 4-connexes à translation près que l'on peut construire à l'aide d'exactly k carrés (de même taille) dans le plan. Il n'y a qu'un seul animal de taille 1, $a_2 = 2$ de taille 2, $a_3 = 6$ de taille 3, $a_4 = 19$ de taille 4... (voir la Figure 5.1). En fait, énumérer les animaux de taille k est un problème

$$\begin{aligned}
 a_5 &= 63 \\
 a_6 &= 216 \\
 a_7 &= 760 \\
 a_8 &= 2725 \\
 a_9 &= 9910 \\
 a_{10} &= 36446
 \end{aligned}$$

TAB. 5.1 – Les nombres d’animaux de taille $k = 5$ à $k = 10$.

combinatoire très difficile si bien qu’il n’existe aujourd’hui aucune formule pour a_k en général. Seules les 47 premières valeurs de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ ont pu être déterminées grâce à des études numériques¹. La Table 5.1 contient quelques valeurs supplémentaires.

La liste des 47 premières valeurs est disponible en Annexe C. La suite $(a_k)_{k \geq 1}$ semble croître très rapidement. En effet, dans [46], Klarner précise son comportement asymptotique. Par un argument de concaténation, il montre que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est sous-multiplicative, i.e. qu’elle satisfait $a_k a_{k'} \leq a_{k+k'}$. Par conséquent, il existe une constante α que Klarner appelle *the growth constant* telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (a_k)^{1/k} = \sup_{k \geq 1} (a_k)^{1/k} = \alpha .$$

La valeur de α est inconnue. Elle est néanmoins bornée, le meilleur encadrement actuellement est $3.9 < \alpha < 4.65$; consulter à cet effet [9], [44] et [47]. Elle est estimée numériquement à $\alpha \simeq 4.06$.

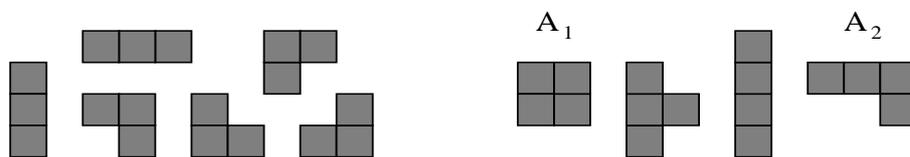


FIG. 5.1 – A gauche sont représentés les $a_3 = 6$ animaux de taille 3. A droite, figurent 4 des 19 animaux de taille 4 : le plus à gauche est noté A_1 et le plus à droite A_2 . Le périmètre de A_1 est égal à 8 alors que celui de A_2 vaut 10.

Il s’agit maintenant d’associer convenablement une configuration locale à chaque animal. Fixons pour cela une taille $k \geq 1$ et un rayon $r \geq k$. Comme auparavant, le rayon r ne joue aucun rôle. Il s’agit uniquement ici de s’assurer qu’il est possible d’inclure tout animal de taille k dans une boule de rayon r .

Soit $A \in \mathcal{A}_k$ un animal de taille k . Notons $\mathcal{C}_r(A)$ l’ensemble des configurations locales de la boule $B(0, r)$ dont l’ensemble de sommets positifs est en bijection, au sens de la structure de graphe, avec la composante 4-connexe représentant l’animal A . A titre d’exemple, si A désigne l’unique animal de taille 1, l’ensemble $\mathcal{C}_r(A)$ est alors formé des $\beta(r)$ configurations locales de

¹les mises à jour sont disponibles sur le site web “On-line Encyclopedia of Integer Sequences” dont l’adresse est <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.

$B(0, r)$ ayant un seul sommet positif. Choisissons un élément de l'ensemble $\mathcal{C}_r(A)$. Il sera noté η_A et appelé la *configuration locale associée* à l'animal A .

Remarquons que toutes les configurations locales de $\mathcal{C}_r(A)$ ont le même périmètre. Nous pouvons par conséquent définir sans ambiguïté le *périmètre* de l'animal A comme étant égal au périmètre de sa configuration locale associée η_A . Par exemple, le périmètre de l'unique animal de taille 1 vaut 4 et celui des 2 animaux de taille 2 vaut 6. De même, tous les animaux de taille 3 ont le même périmètre, égal à 8 (voir la Figure 5.1). Cependant, cela devient faux pour les animaux de taille $k \geq 4$. L'animal A_1 représenté sur la Figure 5.1 est l'unique animal de taille 4 à avoir un périmètre égal à 8. Tous les autres ont leur périmètre égal à 10. Nous noterons ainsi Γ_k l'ensemble des périmètres possibles des animaux de taille k : par exemple, $\Gamma_3 = \{8\}$ et $\Gamma_4 = \{8, 10\}$. De plus, nous noterons par $\mathcal{A}_{k,\gamma}$ l'ensemble des animaux de taille k et de périmètre γ et par $a_{k,\gamma}$ le cardinal de cet ensemble. Bien entendu, les entiers $a_{k,\gamma}, \gamma \in \Gamma_k$ satisfont l'égalité :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_k} a_{k,\gamma} = a_k .$$

Comme dans le cas de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$, seules les premières valeurs de la suite $\{a_{k,\gamma}, \gamma \in \Gamma_k\}_{k \geq 1}$ sont connues. La Table 5.2 en contient quelques unes. Celles-ci nous ont été généreusement fournies par T. Guttmann.

	$\gamma = 10$	$\gamma = 12$	$\gamma = 14$	$\gamma = 16$	$\gamma = 18$	$\gamma = 20$	$\gamma = 22$
$k = 5$	8	55	-	-	-	-	-
$k = 6$	2	40	174	-	-	-	-
$k = 7$	-	22	168	570	-	-	-
$k = 8$	-	6	134	677	1908	-	-
$k = 9$	-	1	72	656	2708	6473	-
$k = 10$	-	-	30	482	3008	10724	22202

TAB. 5.2 – Les nombres d'animaux de taille $k = 5$ à $k = 10$ classés selon leur périmètre.

Pour $k \geq 1$ et $\gamma \in \Gamma_k$, désignons par $X_n(k, \gamma)$ et $X_n(k)$ les variables aléatoires respectivement définies par :

$$X_n(k, \gamma) = \sum_{A \in \mathcal{A}_{k,\gamma}} X_n(\eta_A)$$

et

$$\begin{aligned} X_n(k) &= \sum_{A \in \mathcal{A}_k} X_n(\eta_A) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_k} X_n(k, \gamma) , \end{aligned}$$

où $X_n(\eta_A)$ est le nombre d'occurrences dans le graphe de la configuration locale η_A . Remarquons d'une part que les propriétés $X_n(k, \gamma) > 0$ et $X_n(k) > 0$ ont la même fonction seuil $n^{-2/k}$

(rappelons que $d = 2$). D'autre part, quel que soit le choix de la configuration locale η_A associée à l'animal A , les familles de configurations locales mises en jeu par les variables $X_n(k, \gamma)$ et $X_n(k)$ sont chacune incompatibles (cf. Définition 4.2.6). Le Théorème 4.2.7 s'applique alors et fournit une approximation poissonnienne pour les variables $X_n(k, \gamma)$ et $X_n(k)$:

Proposition 5.1.2 *Soient $k \geq 1$ un entier et $c > 0$ une constante réelle. Supposons que le potentiel de paire $b \in \mathbb{R}$ est fixé et que le potentiel de surface $a(n)$ satisfait :*

$$e^{2a(n)} = cn^{-2/k} . \quad (5.1.1)$$

Soit $\gamma \in \Gamma_k$. Alors, quand n tend vers l'infini, la variable $X_n(k, \gamma)$ (resp. $X_n(k)$) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre :

$$c^k a_{k,\gamma} e^{-2b\gamma} \quad (\text{resp. } c^k \sum_{\gamma \in \Gamma_k} a_{k,\gamma} e^{-2b\gamma}) .$$

Sous l'hypothèse (5.1.1), le Théorème 3.2.1 stipule qu'asymptotiquement aucune configuration locale avec au moins $k + 1$ sommets positifs n'est présente dans le graphe. Ceci a deux conséquences. Premièrement, les convergences en loi des variables $X_n(k, \gamma)$ et $X_n(k)$ proposées par la Proposition 5.1.2 (et donc aussi leur limite) ne dépendent pas du choix des configurations locales associées η_A . Deuxièmement, avec une probabilité qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, la variable $X_n(k, \gamma)$ (resp. $X_n(k)$) est exactement égale au nombre de copies d'animaux de taille k et de périmètre γ (resp. de taille k) apparaissant dans le graphe.

La Figure 5.2 représente une simulation de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ avec des potentiels $a = -0.7$ et $b = 0.3$. Le potentiel de paire b est choisi grand de telle sorte que l'influence du périmètre des animaux sur leur probabilité asymptotique d'apparition soit forte. La taille $n = 150$ est raisonnable permettant ainsi de distinguer visuellement les animaux présents dans la simulation : les animaux les plus grands qu'elle contient sont de taille 4, il y en a deux. Ce sont A_1 et A_2 (voir la Figure 5.1). Rappelons que A_1 est le seul animal de taille 4 ayant un périmètre égal à 8 ($a_{4,8} = 1$) et que A_2 est un des $a_{4,10} = 18$ animaux de taille 4 et de périmètre 10. Plaçons-nous à la fonction seuil pour l'apparition de ces animaux, i.e. ajustons la constante c pour que l'hypothèse $e^{2a} = cn^{-2/4}$ soit satisfaite. Il vient $c \simeq 3.02$. Dans la Section 4.2.1, exactement la même situation était considérée. Le Théorème 4.2.1 donnait alors les limites des probabilités d'apparition des animaux A_1 et A_2 dans le graphe :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta_{A_1}) > 0) = 1 - \exp(-c^4 \exp(-2b \times 8)) \simeq 0.49$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(\eta_{A_2}) > 0) = 1 - \exp(-c^4 \exp(-2b \times 10)) \simeq 0.19 .$$

Ainsi, avec de telles valeurs des potentiels a et b , grosso modo 1 simulation sur 5 contient l'animal A_2 et, plus généralement, un animal donné de taille 4 et de périmètre 10. Cependant, presque toutes contiennent au moins un animal appartenant à $\mathcal{A}_{4,10}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(4, 10) > 0) = 1 - \exp(-c^4 a_{4,10} \exp(-2b \times 10)) \simeq 0.98 ,$$

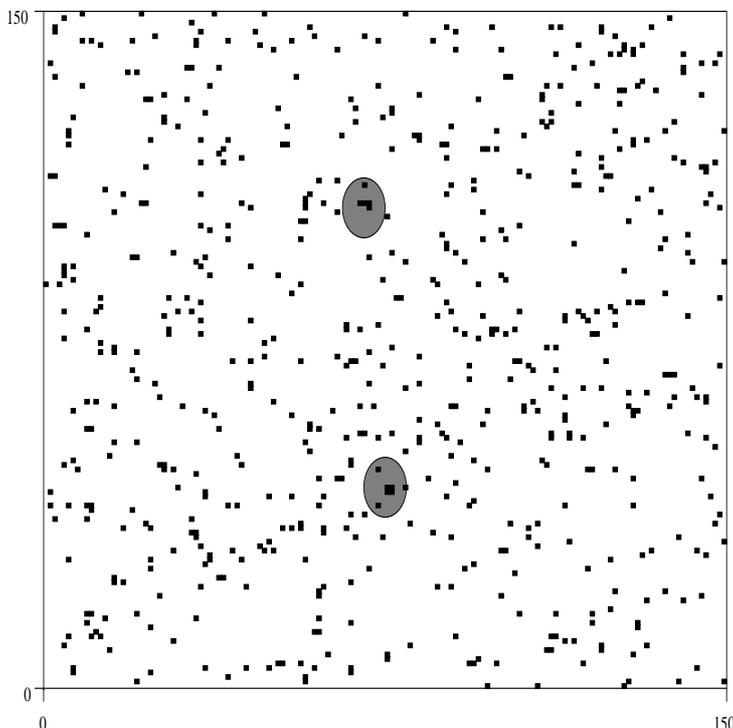


FIG. 5.2 – Une simulation du modèle d’Ising de taille $n = 150$ et de potentiels $a = -0.7$ et $b = 0.3$. Les 2 seuls animaux de taille 4 présents dans cette simulation sont repérés par une auréole.

et au moins un appartenant à \mathcal{A}_4 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{a,b}(X_n(4) > 0) = 1 - \exp(-c^4 (a_{4,8} \exp(-2b \times 8) + a_{4,10} \exp(-2 \times b \times 10))) \simeq 0.99 .$$

Plus que les convergences en loi exposées dans la Proposition 5.1.2, la démonstration du Théorème 4.2.7 assure la convergence de chacun des moments des variables $X_n(k, \gamma)$ et $X_n(k)$ et donc en particulier de leur espérance :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(k, \gamma)] = c^k a_{k,\gamma} e^{-2b\gamma} \quad (5.1.2)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_{a,b}[X_n(k)] = c^k \sum_{\gamma \in \Gamma_k} a_{k,\gamma} e^{-2b\gamma} , \quad (5.1.3)$$

sous l’hypothèse (5.1.1). Nous nous appuyerons sur la limite (5.1.2) pour élaborer dans la prochaine section une estimation des potentiels a et b .

5.2 Estimation des potentiels a et b

De nombreuses techniques permettant d'estimer les potentiels de surface a et de paire b du modèle d'Ising existent déjà : voir par exemple [83]. La plus connue et la plus performante d'entre elles est certainement la méthode du maximum de pseudovraisemblance (voir [38]). Nous proposons dans cette section un nouvel algorithme d'estimation de a et b utilisant les résultats d'approximations poissonniennes appliquées aux animaux (Proposition 5.1.2 ou plus précisément la relation (5.1.2)). Cet algorithme sera testé et ses résultats commentés.

Il sera nécessaire de préciser la taille n du graphe à laquelle la mesure de Gibbs est relative. C'est pourquoi, dans cette section uniquement, nous noterons $\mu_{a,b}^n$ la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}$ définie sur l'ensemble des configurations \mathcal{X}_n . De plus, nos estimations s'appuieront sur des réalisations exactes de $\mu_{a,b}^n$ donc utilisant l'algorithme de Propp et Wilson (cf. la Section 2.3). Ainsi, le potentiel de paire sera choisi de telle sorte que $0 \leq b \leq 0.3$ et le potentiel de surface a sera, comme durant toute cette thèse, supposé négatif.

Considérons donc une réalisation σ de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}^n$. L'objectif est de construire des estimateurs des potentiels a et b à partir de la seule réalisation σ : ils seront respectivement notés $\hat{a}(\sigma)$ et $\hat{b}(\sigma)$.

Soit m un diviseur de n et notons $\kappa = n/m$. Nous allons tout d'abord partitionner l'ensemble des sommets V_n en κ^2 sous-ensembles, chacun formé de $m \times m$ sommets. Notons alors $\sigma_1, \dots, \sigma_{\kappa^2}$ les restrictions de la réalisation σ à ces κ^2 sous-ensembles. La quantité $X_m(k, \gamma)(\sigma_i)$ désigne le nombre d'animaux de taille k et de périmètre γ apparaissant dans la sous-réalisation σ_i . La loi des grands nombres affirme qu'à condition que $\sigma_1, \dots, \sigma_{\kappa^2}$ soient κ^2 réalisations indépendantes de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}^m$, la moyenne empirique

$$\frac{1}{\kappa^2} \sum_{i=1}^{\kappa^2} X_m(k, \gamma)(\sigma_i) \quad (5.2.4)$$

est d'autant plus proche de l'espérance de la variable aléatoire $X_m(k, \gamma)$ que κ^2 est grand. Cette première approximation est basée sur les deux hypothèses suivantes :

1. les sous-réalisations $\sigma_1, \dots, \sigma_{\kappa^2}$ sont indépendantes ;
2. $X_m(k, \gamma)(\sigma_i)$ est tirée selon la loi de $X_m(k, \gamma)$.

Or, ces deux hypothèses ne sont pas valides. D'une part, deux sommets voisins peuvent appartenir à deux sous-réalisations différentes et donc forcément dépendantes. D'autre part, l'absence de bords périodiques pour σ_i implique que la quantité $X_m(k, \gamma)(\sigma_i)$ est définie comme la somme d'un nombre $\beta_{m,r}$ plus faible d'indicatrices que les $a_{k,\gamma} m^2$ définissant la variable aléatoire $X_m(k, \gamma)$: elles ne peuvent donc avoir la même distribution.

Supposons que les entiers m et κ^2 sont assez grands et que le potentiel de surface satisfait $e^{2a} = cn^{-2/k}$. Voici deux arguments justifiant que les deux hypothèses précédentes, même fausses, sont raisonnables et que l'approximation de $\mathbf{E}_{a,b}[X_n(k, \gamma)]$ par (5.2.4) est acceptable. D'une part, dans leur fameux article, Dobrushin et Shlosman [20] prouvèrent, dans diverses situations, la décroissance exponentielle des corrélations ; le degré de dépendance entre les spins de deux

ensembles de sommets U et V décroît à vitesse exponentielle quand la distance entre U et V augmente. Le cas du potentiel de surface $|a|$ suffisamment grand est l'une des situations dans lesquelles cette décroissance des corrélations a lieu. C'est exactement le cas dans notre étude puisque nous supposons $a \rightarrow -\infty$ à travers l'hypothèse $e^{2a} = cn^{-2/k}$. Cet argument nous permet de considérer les sous-réalisations σ_i asymptotiquement indépendantes. Il s'agirait alors d'utiliser une version de la loi des grands nombres valable pour des variables aléatoires faiblement dépendantes. D'autre part, le rapport $\beta_{m,r}/a_{k,\gamma}m^2$ tend vers 1 quand $m \rightarrow +\infty$. Ainsi, sous l'hypothèse $e^{2a} = cn^{-2/k}$, la somme des $\beta_{m,r}$ indicatrices correspondant à la quantité $X_m(k, \gamma)(\sigma_i)$ et la variable aléatoire $X_m(k, \gamma)$ convergent toutes les deux en loi vers la même loi de Poisson. C'est la raison pour laquelle, $X_m(k, \gamma)(\sigma_i)$ peut être vue comme une observation de la loi de $X_m(k, \gamma)$.

	$\gamma = 4$	$\gamma = 6$	$\gamma = 8$	$\gamma = 10$	$\gamma = 12$	$\gamma = 14$	$\gamma = 16$	$\gamma = 18$	$\gamma = 20$
$k = 1$	987.53	-	-	-	-	-	-	-	-
$k = 2$	-	149.59	-	-	-	-	-	-	-
$k = 3$	-	-	34.18	-	-	-	-	-	-
$k = 4$	-	-	0.69	8.3	-	-	-	-	-
$k = 5$	-	-	-	0.51	1.86	-	-	-	-
$k = 6$	-	-	-	0.03	0.13	0.38	-	-	-
$k = 7$	-	-	-	-	0.01	0.06	0.12	-	-
$k = 8$	-	-	-	-	0	0.01	0.01	0	-
$k = 9$	-	-	-	-	0	0	0.01	0.01	0

TAB. 5.3 – Une réalisation σ de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}^n$ est simulée avec des valeurs des potentiels $a = -1$ et $b = 0.1$ et de taille $n = 1500 = 150 \times 10$. Cette table représente la moyenne empirique de tous les animaux apparaissant dans les sous-réalisations $\sigma_1, \dots, \sigma_{100}$ (de taille $m = 150$), comptés selon leur taille et leur périmètre. Le symbole “-” signifie qu’aucun animal ne peut être simultanément de cette taille et de ce périmètre.

Désormais, pour toute taille $k \geq 1$, notons $c(k, m)$ la constante strictement positive satisfaisant l'hypothèse :

$$e^{2a} = c(k, m)m^{-2/k} .$$

Soit $\gamma \in \Gamma_k$. Sous l'hypothèse ci-dessus, la relation (5.1.2) affirme que l'espérance $\mathbf{E}_{a,b}[X_m(k, \gamma)]$ approche la quantité $c^k(k, m)a_{k,\gamma}e^{-2b\gamma}$ pourvu que m soit assez grand. Considérons alors une autre taille $k' \geq k$ et un autre périmètre $\gamma' \in \Gamma_{k'}$. Les égalités

$$\begin{aligned} c^{k'}(k', m) &= m^2 e^{2ak'} \\ &= m^2 e^{2ak+2a(k'-k)} \\ &= c^k(k, m)e^{2a(k'-k)} \end{aligned}$$

permettent de relier entre elles les constantes $c^{k'}(k', m)$ et $c^k(k, m)$. Ainsi, le rapport des espérances

$$\frac{\mathbf{E}_{a,b}[X_m(k', \gamma')]/a_{k',\gamma'}}{\mathbf{E}_{a,b}[X_m(k, \gamma)]/a_{k,\gamma}}$$

approche la quantité

$$\frac{c^{k'}(k', m)e^{-2b\gamma'}}{c^k(k, m)e^{-2b\gamma}} = e^{2a(k'-k)+2b(\gamma-\gamma')}.$$

Dès lors, notons $\theta(k, k'; \gamma, \gamma')$ le réel défini par la formule :

$$\theta(k, k'; \gamma, \gamma') = \frac{1}{2} \log \left(\frac{a_{k,\gamma} \times \sum_{i=1}^{\kappa^2} X_m(k', \gamma')(\sigma_i)}{a_{k',\gamma'} \times \sum_{i=1}^{\kappa^2} X_m(k, \gamma)(\sigma_i)} \right).$$

En résumé, à condition que les entiers m et κ^2 soient assez grands, $\theta(k, k'; \gamma, \gamma')$ approche $a(k' - k) + b(\gamma - \gamma')$:

$$\begin{aligned} \theta(k, k'; \gamma, \gamma') &\approx \frac{1}{2} \log \left(\frac{a_{k,\gamma} \times \mathbf{E}_{a,b}[X_m(k', \gamma')]}{a_{k',\gamma'} \times \mathbf{E}_{a,b}[X_m(k, \gamma)]} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \log \left(e^{2a(k'-k)+2b(\gamma-\gamma')} \right) \\ &\approx a(k' - k) + b(\gamma - \gamma'). \end{aligned}$$

Cette approximation nécessite que les entiers m et κ^2 soient assez grands. En pratique, nous prendrons $n = 1500$ et $m = 150$, impliquant ainsi $\kappa^2 = 100$. A condition que γ et $\gamma + 2$ soient des périmètres possibles pour un animal de taille k , les quantités $\theta(k, k + 1; \gamma, \gamma + 2)$ et $\theta(k, k; \gamma, \gamma + 2)$ approchent respectivement $a - 2b$ et $-2b$. Par exemple, en utilisant les données fournies par la Table 5.3 et les nombres d'animaux présentés par la Table 5.2,

$$\theta(3, 4; 8, 10) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{6 \times 8.3}{18 \times 34.18} \right) \simeq -1.257$$

et

$$\theta(4, 4; 8, 10) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 \times 8.3}{18 \times 0.69} \right) \simeq -0.202$$

sont en effet proches de $a - 2b = -1.2$ et $-2b = -0.2$.

Dans la Section 4.3.1, nous conjecturons que sous l'hypothèse $e^{2a} = c(k, m)m^{-2/k}$, la convergence de la variable aléatoire $X_m(k, \gamma)$ vers la loi de Poisson de paramètre $c^k(k, m)a_{k,\gamma}e^{-2b\gamma}$ était d'autant plus lente que la taille k des animaux concernés était grande. Par conséquent, afin d'optimiser les approximations précédentes, nous focaliserons notre attention sur les animaux de taille $k \leq 6$. Précisément, nous définissons les estimateurs $\widehat{b}(\sigma)$ et $\widehat{a}(\sigma)$ du potentiel de paire b et de surface a par les formules :

$$\widehat{b}(\sigma) = -\frac{1}{2 \times 3} (\theta(4, 4; 8, 10) + \theta(5, 5; 10, 12) + \theta(6, 6; 12, 14))$$

et

$$\widehat{a}(\sigma) = \frac{1}{5} (\theta(1, 2; 4, 6) + \theta(2, 3; 6, 8) + \theta(3, 4; 8, 10) + \theta(4, 5; 10, 12) + \theta(5, 6; 12, 14)) + 2\widehat{b}(\sigma).$$

Afin de tester les estimateurs ci-dessus, nous implémentons un algorithme qui prend en entrée les potentiels a et b , simule une réalisation σ de $\mu_{a,b}^n$ et retourne les estimateurs correspondant $\widehat{a}(\sigma)$ et $\widehat{b}(\sigma)$. Il se décompose naturellement en 3 étapes :

1. Une réalisation exacte σ de la mesure de Gibbs $\mu_{a,b}^n$ est simulée suivant l'algorithme de Propp et Wilson et est divisée en $\kappa^2 = (n/m)^2$ sous-réalisations $\sigma_1, \dots, \sigma_{\kappa^2}$ de taille $m \times m$.
2. Pour $k = 1, \dots, 6$ et $\gamma \in \Gamma_k$, les animaux de taille k et de périmètre γ apparaissant dans les sous-réalisations $\sigma_i, i = 1, \dots, \kappa^2$, sont énumérés et la moyenne empirique correspondante $\kappa^{-2} \sum_{i=1}^{\kappa^2} X_m(k, \gamma)(\sigma_i)$ est calculée.
3. Les estimateurs $\hat{a}(\sigma)$ et $\hat{b}(\sigma)$ sont calculés.

Les données de la Table 5.3 sont relatives à une réalisation σ de la mesure $\mu_{a,b}^n$ avec $a = -1$ et $b = 0.1$. L'algorithme d'estimation produit des résultats très convenables : $\hat{a}(\sigma) = -1.063$ et $\hat{b}(\sigma) = 0.119$. Il sera appliqué à d'autres couples de potentiels (a, b) . Les résultats obtenus sont présentés dans la Table 5.4.

Potentiels		Estimateurs	
$a = -0.8$	$b = 0.05$	$\hat{a}(\sigma) = -0.893$	$\hat{b}(\sigma) = 0.085$
$a = -1$	$b = 0.15$	$\hat{a}(\sigma) = -1.062$	$\hat{b}(\sigma) = 0.157$
$a = -1.2$	$b = 0.18$	$\hat{a}(\sigma) = -1.241$	$\hat{b}(\sigma) = 0.171$
$a = -1.2$	$b = 0.25$	$\hat{a}(\sigma) = -0.678$	$\hat{b}(\sigma) = 0.504$

TAB. 5.4 – Pour chaque couple de potentiels (a, b) , l'algorithme d'estimation simule une réalisation σ de la mesure $\mu_{a,b}^n$ et retourne les estimateurs correspondants $\hat{a}(\sigma)$ et $\hat{b}(\sigma)$.

Quelques commentaires de ces résultats expérimentaux sont nécessaires. Tout d'abord, les approximations poissonniennes sur lesquelles repose notre estimation sont valables pour un potentiel de surface a qui tend vers $-\infty$ ($e^{2a} = cn^{-d/k}$) et un potentiel de paire b fixé. Or, cette différence d'ordre de grandeur entre les potentiels a et b n'est pas très sensible lors des expériences. En effet, le potentiel de surface a converge vers $-\infty$ comme $-\log(n)$: nous sommes donc limités à de faibles valeurs de a . Afin de limiter cet effet, nous avons choisi de tester notre algorithme sur des couples (a, b) tels que le rapport $|a|/b$ reste "grand", autrement dit, de se restreindre à de faibles valeurs du potentiel de paire b . Ainsi, pour de tels couples de potentiels (a, b) , comme par exemple les trois premières lignes de la Table 5.4, l'estimation est plutôt bonne. Par contre, dès que le potentiel b grandit, le rapport $|a|/b$ diminue et l'estimation s'en ressent : c'est le cas du couple $(a, b) = (-1.2, 0.25)$ (voir la dernière ligne de la Table 5.4). Une autre explication de cette mauvaise estimation provient du fait que le potentiel de paire b représente le degré de dépendance locale entre les sommets. Lorsqu'il est nul, les sommets sont indépendants. Inversement, lorsqu'il est grand, l'hypothèse d'indépendance des sous-réalisations σ_i devient particulièrement discutable.

Terminons par une dernière remarque expliquant pourquoi l'efficacité de notre estimation reste limitée. L'approximation de $\mathbb{E}_{a,b}[X_m(k, \gamma)]$ par $c^k(k, m)a_{k,\gamma}e^{-2b\gamma}$ repose sur le fait que e^{2a} tend vers 0 comme $m^{-2/k}$. Or, pour une valeur donnée du potentiel a , la quantité e^{2a} ne peut être de l'ordre de $m^{-2/k}$, k allant de 1 à 6. Notre méthode consiste à forcer l'égalité $e^{2a} = c(k, m)m^{-2/k}$,

pour $k = 1, \dots, 6$, en ajustant la constante $c(k, m)$. Par exemple, lorsque le potentiel de surface et la taille valent $a = -1$ et $m = 150$, nous obtenons $c(1, m) \simeq 3045.04$, $c(2, m) \simeq 20.30$, $c(3, m) \simeq 3.82$, $c(4, m) \simeq 1.66$, $c(5, m) \simeq 1.00$ et $c(6, m) \simeq 0.72$.

5.3 Restauration d'images bruitées

Toutes les images que nous considérerons seront bruitées par un *bruit impulsionnel*. Dans le cas des images binaires (Section 5.3.1), ce type de bruit correspond à notre modèle d'image aléatoire à potentiel de paire nul. Son *intensité* sera supposée connue. Appliquer les résultats d'approximations poissonniennes aux animaux (Proposition 5.1.2 ou en l'occurrence son corollaire, la Proposition 5.3.1) permet d'associer une probabilité d'apparition à chaque composante 4-connexe en fonction de sa taille, i.e. en fonction du nombre de pixels dont elle est formée. Nous construirons un test statistique, un critère simple décidant si une telle composante de l'image provient du bruit ou de l'image originale. Sur le modèle du "filtre de grain" de Vincent [78], nous en déduirons alors un algorithme de restauration d'images. Enfin, dans la Section 5.3.2, cet algorithme sera étendu à des images en niveaux de gris et expérimenté.

5.3.1 Images binaires

Commençons par décrire le type de bruit détériorant nos images. Soit I_0 l'image binaire originale, i.e. non bruitée, formée de $n \times n$ pixels. Dans cette section et la prochaine, nous conviendrons de la correspondance suivante : $I_0(x) = 0$ si le pixel x est noir et 1 s'il est blanc. Le *bruit impulsionnel d'intensité p et q* dégrade l'image I_0 en une autre image binaire, disons I , selon le procédé ci-dessous :

$$\forall x, I(x) = I_0(x)(1 - \zeta_q(x)) + (1 - I_0(x))\zeta_p(x), \quad (5.3.5)$$

où les fonctions $\zeta_p(x)$ (resp. $\zeta_q(x)$), sont des variables aléatoires (à valeurs dans $\{0, 1\}$) indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p (resp. q). En d'autres termes, un pixel noir est changé en un pixel blanc avec probabilité p , et ce indépendamment des autres pixels. A l'inverse, un pixel blanc devient noir avec probabilité q :

$$\mathbb{P}(I(x) = 1 | I_0(x) = 0) = p \text{ et } \mathbb{P}(I(x) = 0 | I_0(x) = 1) = q.$$

L'effet du bruit impulsionnel entre l'image originale I_0 et l'image bruitée I s'apparente à une perte d'une partie des données. Il est essentiel que notre modèle de bruit impulsionnel (5.3.5) autorise un pixel à être bruité avec des probabilités différentes selon sa couleur. Nous verrons pourquoi dans la Section 5.3.2.

Ainsi, le bruit impulsionnel dégrade l'image originale I_0 en produisant de petites composantes formées de pixels blancs ou de pixels noirs. Dans la pratique, par passage au "négatif", supprimer les composantes de pixels blancs ou celles de pixels noirs relève du même procédé. C'est pourquoi nous nous concentrons dans un premier temps sur celles formées de pixels blancs.

Le "filtre de grain" de Vincent [78] a pour effet de supprimer toutes ces petites composantes dont la taille, i.e. leur nombre de pixels, est plus petit qu'une taille t arbitrairement choisie.

Concrètement, c'est par l'expérience que l'utilisateur de ce filtre choisira la taille t produisant (à son goût) le meilleur débruitage. Notre objectif est de combler cette lacune en donnant un sens statistique à la taille seuil t . Pour cela, nous attribuons à chaque composante 4-connexe blanche une probabilité d'apparition dans l'image en utilisant les approximations poissonniennes appliquées aux animaux et au cas du potentiel de paire $b = 0$.

Lorsque le potentiel de paire b est nul, les spins des sommets du modèle d'Ising deviennent indépendants (voir Section 2.1). Chacun d'entre eux est positif avec probabilité

$$p = \frac{e^{2a}}{1 + e^{2a}}$$

et négatif avec probabilité $1 - p$. L'hypothèse $a < 0$ se traduit sur le paramètre p par $p < 1/2$ et lorsque le potentiel de surface $a(n)$ tend vers $-\infty$, $p(n)$ tend vers 0 comme $e^{2a(n)}$. Plus généralement, on peut écrire que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)n^{2/k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2a(n)}n^{2/k},$$

à condition qu'elles existent dans $[0, +\infty]$. En particulier, la probabilité $\mu_p(X_n(k) > 0)$, où $X_n(k)$ désigne asymptotiquement le nombre d'animaux de taille k apparaissant dans l'image, tend vers 0 (resp. 1) dès que la quantité $p(n)n^{2/k}$ tend vers 0 (resp. $+\infty$). Autrement dit, $n^{-2/k}$ est la fonction seuil (pour $p(n)$) de la propriété $X_n(k) > 0$. Puis, nous déduisons de la Proposition 5.1.2 une approximation poissonnienne pour cette propriété ; voir [14] pour une démonstration directe.

Proposition 5.3.1 Soient $k \geq 1$ un entier et $c > 0$ un réel. Supposons que le paramètre $p(n)$ satisfasse :

$$p(n) = cn^{-2/k} \tag{5.3.6}$$

Alors, nous avons la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_p(X_n(k) > 0) = 1 - e^{-c^k a_k}, \tag{5.3.7}$$

où a_k est le nombre d'animaux de taille k .

Jusqu'à présent, toutes nos figures représentaient un sommet positif par un pixel noir. En effet, notre étude consistant à étudier la présence des (rares) sommets positifs, il nous a paru visuellement naturel de les repérer par des pixels noirs, sur un fond blanc constitué des sommets négatifs. Néanmoins, en imagerie, la convention classique consiste à attribuer la valeur 1 aux pixels blancs et 0 aux noirs.

Ainsi, quitte à échanger l'ensemble des configurations $\{-1, +1\}^{V_n}$ sur lequel μ_p est définie en $\{0, 1\}^{V_n}$, voire en $\{noir, blanc\}^{V_n}$, chaque réalisation de la probabilité μ_p correspond exactement à une image de bruit pur I , i.e. obtenue par le procédé (5.3.5) à partir d'une image I_0 entièrement noire. La Proposition 5.3.1 fournit une approximation de la probabilité pour une composante 4-connexe formée de k pixels blancs d'apparaître dans une image $n \times n$ de bruit pur d'intensité $p(n) = cn^{-2/k}$. Nous identifierons dorénavant cette probabilité à sa limite qui, après utilisation de (5.3.6) sera notée $PA(n, p, k)$:

$$PA(n, k, p) = 1 - e^{-n^2 a_k p^k}.$$

Les 47 premières valeurs de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ sont disponibles en Annexe C. Pour $p \leq p_{max} = 0.2$ et $k \in \{1, \dots, 47\}$, l'inégalité $a_{k+1}p \leq a_k$ est numériquement vérifiée. Elle assure la décroissance de l'application

$$k \in \{1, \dots, 47\} \mapsto PA(n, k, p),$$

pour toute taille d'image n et pour tout $p \leq p_{max}$. Autrement dit, la probabilité d'apparition d'une composante 4-connexe décroît avec sa taille.

Fixons maintenant un réel $\varepsilon > 0$ (que l'on imagine petit) et définissons la *taille seuil* $t(n, p, \varepsilon)$ par la formule :

$$t(n, p, \varepsilon) = \inf\{k, PA(n, k, p) = 1 - e^{-n^2 a_k p^k} \leq \varepsilon\}. \quad (5.3.8)$$

Par la décroissance de l'application $k \mapsto PA(n, k, p)$, toutes les composantes de taille $k \geq t(n, p, \varepsilon)$ (resp. $k < t(n, p, \varepsilon)$) ont une probabilité d'apparition $PA(n, k, p)$ inférieure à ε (resp. supérieure à ε). Nous définissons alors un test statistique fondé sur la taille k des composantes 4-connexes de l'image I . Si $k \geq t(n, p, \varepsilon)$, la composante sera considérée comme issue de l'image originale I_0 et sera gardée. En revanche, si $k < t(n, p, \varepsilon)$, elle sera considérée comme issue du bruit et sera supprimée. Notons que, l'intensité p du bruit impulsionnel étant supposée connue, la quantité $PA(n, k, p) = 1 - e^{-n^2 a_k p^k}$ se calcule pour toute taille $1 \leq k \leq 47$. Une fois le seuil ε fixé, la taille seuil $t(n, p, \varepsilon)$ s'obtient tout aussi facilement. Sur la Figure 5.3, est représentée la taille seuil $t(n, p, \varepsilon)$ comme une fonction (en escalier) de l'intensité p , pour une taille d'image $n = 256$ et trois différentes valeurs de ε (10^{-1} , 10^{-2} et 10^{-3}).

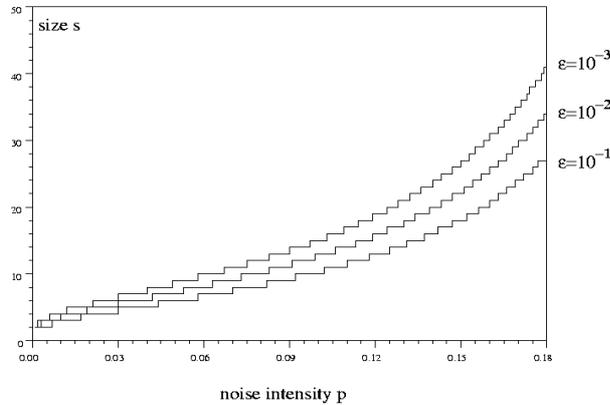


FIG. 5.3 – La taille seuil $t(n, p, \varepsilon)$ représentée comme une fonction de l'intensité $p \in [0, 0.18]$, pour une taille $n = 256$ et des valeurs de $\varepsilon = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-3} .

Finalement, notre algorithme de débruitage de l'image binaire I se résume en quatre étapes :

1. Identifier toutes les composantes 4-connexes blanches de l'image bruitée I .
2. Remplacer celles ayant une taille strictement inférieure à $t(n, p, \varepsilon)$ par des pixels noirs. Nous obtenons une nouvelle image binaire.
3. Identifier toutes les composantes 4-connexes noires de cette nouvelle image.

4. Remplacer celles ayant une taille strictement inférieure à $t(n, q, \varepsilon)$ par des pixels blancs. Nous obtenons l'image débruitée finale notée \tilde{I} .

Notons respectivement T_t^1 et T_t^0 les filtres supprimant les composantes 4-connexes blanches et noires de taille strictement inférieure à t . Ces deux filtres étaient déjà utilisés par Vincent [78] dans l'élaboration de son "filtre de grain". L'image débruitée \tilde{I} est obtenue à partir de I par la relation :

$$\tilde{I} = T_{t(n,q,\varepsilon)}^0 \circ T_{t(n,p,\varepsilon)}^1 I .$$

Notre algorithme est testé sur une image binaire représentant un damier : voir la Figure 5.4.

Avant d'étendre cet algorithme à des images en niveaux de gris, quelques commentaires sont nécessaires.

Supposons que l'image originale I_0 soit entièrement noire : $I_0(x) = 0$, pour tout pixel x . Par le procédé (5.3.5), chaque pixel est coloré en blanc avec probabilité p . L'image I produite est une image de bruit pur. Par définition de la taille seuil $t(n, p, \varepsilon)$, la probabilité pour que I contienne une composante 4-connexe de taille supérieure à $t(n, p, \varepsilon)$ est plus petite que ε . Par conséquent, avec une probabilité plus grande que $1 - \varepsilon$, le bruit pur est totalement supprimé :

$$\mathbb{P}(T_{t(n,p,\varepsilon)}^1 I = I_0) \geq 1 - \varepsilon .$$

Le réel ε n'est autre que le niveau de confiance de notre test statistique : le fait de conserver à tort une composante 4-connexe a lieu avec une probabilité plus petite que ε .

La dépendance de la taille seuil $t(n, p, \varepsilon)$ en ε est très limitée : comparer les trois fonctions en escalier de la Figure 5.3. Elle est logarithmique. En effet, lorsque $n^2 a_k p^k$ est faible, la quantité $PA(n, k, p)$ peut être approchée par $n^2 a_k p^k$, ou même par $n^2 (\alpha p)^k$ en substituant α^k à a_k (voir la Section 5.1). Or, la probabilité d'apparition d'une composante de taille $t(n, p, \varepsilon)$ est proche de ε :

$$PA(n, t(n, p, \varepsilon), p) \approx \varepsilon .$$

Nous en déduisons alors une approximation de la taille seuil $t(n, p, \varepsilon)$ en fonction de ε , ou plutôt de $\log \varepsilon$:

$$t(n, p, \varepsilon) \approx \frac{\log \varepsilon - 2 \log n}{\log \alpha + \log p} .$$

Même si l'approche théorique sur laquelle repose notre algorithme de débruitage (Proposition 5.3.1) s'inscrit dans le contexte où le paramètre $p = p(n)$ tend vers 0, a priori rien ne nous empêche en pratique de l'étendre à toutes valeurs de $p \in [0, 1]$. Nous serons toutefois limités à de petites valeurs de p . En effet, notre méthode requiert que la quantité $PA(n, k, p)$ devienne faible lorsque k grandit, i.e. que le produit $a_k p^k$ devienne faible lorsque k grandit. C'est pourquoi nous nous limiterons en pratique à $p \leq p_{max} = 0.2$.

L'expérience proposée par la Figure 5.4 met en valeur le fait que le bruit apparaissant en bordure d'une grande composante n'est pas supprimé par l'action de notre filtre. En effet, sans information supplémentaire sur l'image originale I_0 (du type bords lisses), notre algorithme considère ces pixels bruités comme appartenant à la grande composante. Ils seront par conséquent conservés. Cette carence de notre algorithme n'est cependant pas rédhibitoire ; le traitement des bords est un problème général de la restauration d'images.

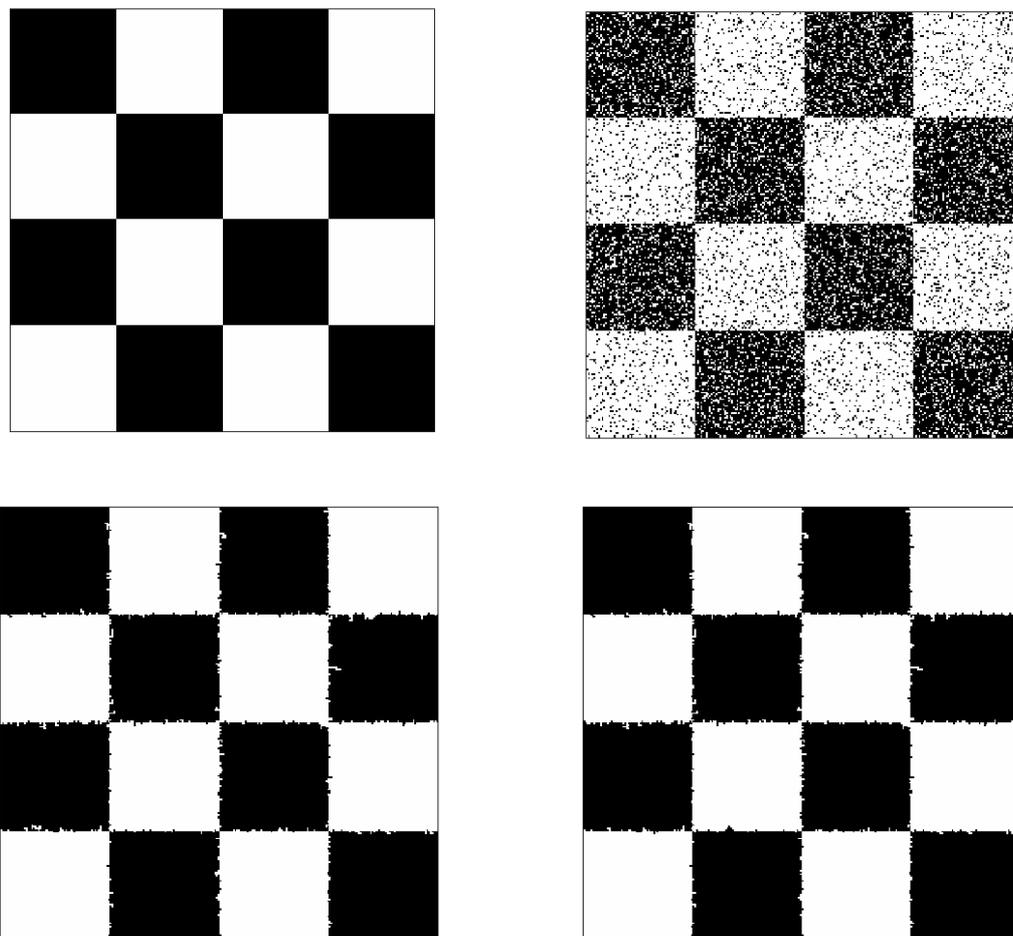


FIG. 5.4 – Sont représentées sur la première ligne : à gauche, l’image binaire originale I_0 de taille 256×256 ; à droite, l’image bruitée I . Un pixel noir devient blanc avec probabilité $p = 0.2$ et l’inverse se produit avec probabilité $q = 0.1$. Sont représentés sur la deuxième ligne : à gauche, le résultat du débruitage en supprimant d’abord les composantes noires puis les blanches (i.e. en appliquant le filtre $T_{t(n,p,\varepsilon)}^1 \circ T_{t(n,q,\varepsilon)}^0$) ; à droite, le résultat du débruitage en supprimant d’abord les composantes blanches puis les noires (i.e. en appliquant le filtre $T_{t(n,q,\varepsilon)}^0 \circ T_{t(n,p,\varepsilon)}^1$). Dans les deux cas, ε est fixé à 10^{-2} . Ces deux résultats diffèrent, illustrant ainsi le fait que les filtres T_t^1 et T_t^0 ne commutent pas. Néanmoins, dans les deux cas, les petites composantes blanches et noires ont été supprimées. Seuls les bords des composantes restantes diffèrent.

Comme le montre la Figure 5.4, les deux filtres T_t^1 et T_t^0 ne commutent pas. Imaginons le cas pathologique d’une petite composante disons blanche ceinturée de petites composantes noires. L’utilisation de T_t^0 va supprimer les petites composantes noires, faisant de la composante blanche une grande composante que T_t^1 va conserver alors que l’utilisation de T_t^1 puis de T_t^0 produira une grande composante noire. Nous choisirons pour la suite, i.e. dans la Section 5.3.2, d’utiliser $T_t^0 \circ T_t^1$. Dans [78], Vincent avait déjà remarqué cet inconvénient. Pour y remédier, il proposait

d'utiliser plusieurs fois et alternativement les deux filtres T_t^1 et $T_{t'}^0$ tout en augmentant les tailles t et t' (voir [69, 70]). Une meilleure solution fut proposée par Masnou et Morel [60] puis formalisée par Monasse [61]. Elle consiste à traiter simultanément les ensembles de niveaux supérieurs et inférieurs d'une image en niveaux de gris en un seul et même arbre et à le délester de ses feuilles de tailles inférieures à t [62]. Ce nouveau "filtre de grain", noté G_t , sera testé (voir la Figure 5.7) et comparé dans la Section 5.3.2 à notre méthode de restauration d'images en niveaux de gris. Enfin, remarquons que notre méthode de débruitage pourrait théoriquement s'étendre aux cas des composantes 8-connexes. Néanmoins, aucune liste énumérant les animaux 8-connexes n'est disponible. C'est pourquoi, nous avons traité le premier et l'arrière plan, i.e. les composantes blanches et noires, en 4-connexité.

5.3.2 Images en niveaux de gris

Dans cette section, nous étendrons le filtre introduit précédemment à des images en 256 niveaux de gris. Puisqu'une telle image est équivalente à la donnée de 256 images binaires (par exemple, ses ensembles de niveaux supérieurs), l'idée (élémentaire) pour débruiter une image en 256 niveaux de gris consiste à débruiter chacune de ces 256 images binaires et de les resommer. En particulier, la méthode proposée dans cette section fonctionne quelle que soit le nombre de niveaux de gris de l'image à restaurer.

Soit u une image en 256 niveaux de gris de taille $n \times n$. La couleur de chacun de ses pixels est un entier compris entre 0 et 255. Lorsque $u(x)$ parcourt dans le sens croissant l'ensemble de ces 256 valeurs, la couleur du pixel x évolue du noir vers le blanc, traversant 256 tons de gris différents. Supposons que l'image u est dégradée par un bruit impulsionnel d'intensité $p \in [0, 1]$ connue. L'image bruitée v s'obtient à partir de u par la relation suivante :

$$\forall x, v(x) = (1 - \zeta_p(x))u(x) + \zeta_p(x)v(x), \quad (5.3.9)$$

où les fonctions $\zeta_p(x)$ et $v(x)$ sont des variables aléatoires indépendantes respectivement de loi de Bernoulli de paramètre p et uniformément distribuées sur $\{0, \dots, 255\}$. En d'autres termes, la couleur d'un pixel est modifiée avec probabilité p en une valeur quelconque de $\{0, \dots, 255\}$.

Pour chaque entier $0 \leq \lambda \leq 255$, nous noterons u_λ (resp. v_λ) l'image u (resp. v) seuillée au niveau inférieur λ :

$$u_\lambda = \mathbb{1}_{u \geq \lambda} \quad (\text{resp. } v_\lambda = \mathbb{1}_{v \geq \lambda}).$$

La Figure 5.5 propose l'exemple d'une image seuillée au niveau inférieur $\lambda = 150$. Signalons d'une part que u_λ est une image binaire et d'autre part que la donnée de ces 256 images binaires $(u_\lambda)_{0 \leq \lambda \leq 255}$ caractérisent l'image u . L'image binaire v_λ est une version dégradée de u_λ . Un pixel noir de u_λ devient blanc avec probabilité $p \times (\lambda/256)$ et l'inverse se produit avec probabilité $p \times (1 - \lambda/256)$:

$$\mathbb{P}(v_\lambda(x) = 1 | u_\lambda(x) = 0) = p \times \left(1 - \frac{\lambda}{256}\right).$$

et

$$\mathbb{P}(v_\lambda(x) = 0 | u_\lambda(x) = 1) = p \times \frac{\lambda}{256}$$

L'image binaire v_λ est une version de u_λ obtenue par l'action d'un bruit impulsif d'intensité $p_\lambda = p \times (1 - \lambda/256)$ et $q_\lambda = p \times (\lambda/256)$ (voir (5.3.5)). Par conséquent, nous pouvons débruiter v_λ par la méthode introduite dans la section précédente :

$$\tilde{v}_\lambda = T_{t(n,q_\lambda,\varepsilon)}^0 \circ T_{t(n,p_\lambda,\varepsilon)}^1(v_\lambda).$$

La somme \tilde{v} des 256 images binaires débruitées \tilde{v}_λ

$$\tilde{v} = Tv = \sum_{\lambda=0}^{255} T_{t(n,q_\lambda,\varepsilon)}^0 \circ T_{t(n,p_\lambda,\varepsilon)}^1(v_\lambda) \quad (5.3.10)$$

est une image en 256 niveaux de gris que l'on espère proche de l'image originale u . Les Figures 5.5 et 5.6 proposent deux résultats de débruitage d'images en 256 niveaux de gris utilisant le filtre T .

Comme c'était le cas pour les filtres binaires T_t^1 et T_t^0 , le filtre T ne supprime pas le bruit apparaissant en bordure de grandes composantes 4-connexes : regarder par exemple l'épaule de Lena (Figure 5.5) ou plus significatif la différence entre l'image originale du caméraman u et l'image débruitée \tilde{v} (Figure 5.6).

Dans l'image seuillée v_λ , les intensités p_λ et q_λ créant les pixels respectivement blancs et noirs sont différentes, d'où l'intérêt d'avoir considéré un modèle de bruit impulsif (5.3.5) autorisant un pixel à être bruité avec des probabilités différentes selon sa couleur. Les intensités p_λ et q_λ dépendent surtout du niveau λ . En particulier, la taille seuil $t(n, p_\lambda, \varepsilon)$ en dessous de laquelle les composantes blanches de l'image binaire v_λ sont supprimées varie avec λ : une composante 4-connexe formée de 10 pixels blancs peut être supprimée dans v_λ et gardée dans $v_{\lambda'}$. Cette remarque a essentiellement deux conséquences.

D'une part, le filtre T défini par (5.3.10) n'est pas un filtre morphologique (voir [68, 70] pour la définition et les propriétés des filtres morphologiques). Il ne préserve pas l'inclusion des ensembles de niveaux à la différence de T_t^1 et T_t^0 . Pour s'en convaincre, examinons la situation suivante. Soient $\lambda \geq \lambda'$. Les images binaires $v_\lambda = \mathbf{1}_{v \geq \lambda}$ et $v_{\lambda'} = \mathbf{1}_{v \geq \lambda'}$ satisfont l'inégalité $v_\lambda \leq v_{\lambda'}$. L'intensité créant les pixels blancs dans v_λ est inférieure à celle créant les pixels blancs dans $v_{\lambda'}$; $p_\lambda \leq p_{\lambda'}$. Supposons alors qu'il existe dans les deux images v_λ et $v_{\lambda'}$ une même petite composante 4-connexe blanche dont la taille k vérifie :

$$t(n, p_\lambda, \varepsilon) \leq k < t(n, p_{\lambda'}, \varepsilon).$$

Cette situation est possible car la taille seuil $t(n, p, \varepsilon)$ est une fonction croissante de p . Dès lors, cette composante sera conservée dans v_λ et supprimée dans $v_{\lambda'}$. Par conséquent les images débruitées correspondantes ne pourront satisfaire $\tilde{v}_\lambda \leq \tilde{v}_{\lambda'}$.

D'autre part, comparons le filtre T avec celui de Monasse [61], noté G_t . La Figure 5.7 montre deux résultats de restauration de l'image bruitée v du caméraman (voir Figure 5.6) par le "filtre de grain" G_t pour deux valeurs différentes de la taille seuil : $t = 10$ et $t = 20$. La valeur $t = 10$ de la taille seuil semble trop faible puisqu'il reste des composantes dues au bruit (par exemple, sur le manteau du caméraman). La valeur $t = 20$ semble à la fois trop grande puisque des objets de l'image originale ont disparu (comme par exemple la parabole blanche au sommet du building)



FIG. 5.5 – Première ligne : à gauche, est représentée l'image dégradée v (de taille 256×256) obtenue à partir de Lena par un bruit impulsionnel d'intensité $p = 0.15$ et à droite, l'image seuillée v_{150} . Tous les pixels dont le niveau de gris (dans v) est supérieur à 150 sont représentés par des pixels blancs dans v_{150} . Deuxième ligne : l'image débruitée \tilde{v} produite par le filtre T avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$.

et encore trop faible puisque du bruit subsiste toujours. Le filtre T défini an (5.3.10) évite ces deux écueils ; une petite composante claire peut être gardée alors que de plus grandes foncées sont supprimées.



FIG. 5.6 – Première ligne : sont représentées, à gauche, l'image originale u du caméraman (de taille 256×256) et à droite, l'image dégradée v par un bruit impulsionnel d'intensité $p = 0.2$. Deuxième ligne : à gauche, l'image débruitée \tilde{v} produite par le filtre T avec un seuil $\varepsilon = 10^{-3}$ et à droite, la différence $u - \tilde{v}$. Nous constatons que la majorité du bruit a été supprimée excepté sur les bords des objets.



FIG. 5.7 – Deux résultats de restauration de l'image bruitée v du caméraman par le filtre G_t pour deux valeurs différentes de la taille seuil : $t = 10$ et $t = 20$.

Annexe A

La distance en variation totale

De nombreuses métriques (distance de Hellinger, distance de Kullback-Leibler...) permettent de quantifier la convergence de mesures de probabilité vers une mesure limite et le choix de la métrique utilisée s'avère parfois essentiel. Gibbs et Su [36] fournissent une liste de plusieurs métriques couramment utilisées par les statisticiens et les divers liens existant entre elles. L'une des plus célèbre est la *distance en variation totale* (voir également [19] et [66]). Dans cette section, nous en rappellerons la définition et quelques unes de ses caractérisations. Nous focaliserons notre attention sur le cas de mesures de probabilité μ et ν définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, \mathcal{B} étant la tribu borélienne de \mathbb{R} .

Definition A.0.2 La distance en variation totale entre μ et ν , notée $d_{VT}(\mu, \nu)$, est définie par la formule suivante :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \sup_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B) - \nu(B)| .$$

Notons tout d'abord que la distance en variation totale d_{VT} est bien une distance sur l'ensemble des mesures de probabilité définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. La démonstration du Théorème 4.3.1 s'appuie sur l'inégalité triangulaire appliquée à la distance d_{VT} . De plus, si $(\mu_n)_{n \geq 0}$ désigne une suite de mesures de probabilité, alors pour toute fonction f continue bornée :

$$\left| \int f(x) d\mu_n(x) - \int f(x) d\mu(x) \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \times d_{VT}(\mu_n, \mu) .$$

En particulier, si $d_{VT}(\mu_n, \mu)$ tend vers 0 alors la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers la mesure μ . La convergence pour la distance en variation totale est donc plus forte que la convergence en loi. Obtenir un majorant de $d_{VT}(\mu_n, \mu)$ permet de quantifier la vitesse de convergence de μ_n vers μ . C'est exactement la différence entre les Théorèmes 4.2.1 et 4.3.1 : le premier fournit une convergence en loi alors que le second précise la vitesse à laquelle s'effectue cette convergence. Soit λ une mesure définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par rapport à laquelle les mesures de probabilité μ et ν sont à densités. Alors, la distance en variation totale entre μ et ν est égale à la moitié de la différence en norme $L^1(\lambda)$ de leurs densités. La relation (A.0.1) est connue sous le nom d'identité de Scheffé (voir [19]).

Proposition A.0.3 Soient respectivement f et g les densités, par rapport à une mesure λ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, de μ et ν . Alors, la distance en variation totale entre μ et ν devient :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \int |f(x) - g(x)| d\lambda(x). \quad (\text{A.0.1})$$

Certains auteurs, comme par exemple Tierney [77], définissent la distance en variation totale comme $\int |f - g| d\lambda$, i.e. comme le double de $d_{VT}(\mu, \nu)$.

Démonstration L'égalité évidente $|\mu(B) - \nu(B)| = |\mu(\mathbb{R} \setminus B) - \nu(\mathbb{R} \setminus B)|$, permet d'écrire que pour tout borélien B :

$$\left| \int_B (f - g) d\lambda \right| = \frac{1}{2} \left(\left| \int_B (f - g) d\lambda \right| + \left| \int_{\mathbb{R} \setminus B} (f - g) d\lambda \right| \right).$$

Les inégalités suivantes sont immédiates :

$$\begin{aligned} \left| \int_B (f - g) d\lambda \right| &\leq \frac{1}{2} \left(\int_B |f - g| d\lambda + \int_{\mathbb{R} \setminus B} |f - g| d\lambda \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \int |f - g| d\lambda. \end{aligned}$$

Le majorant étant indépendant du borélien $B \in \mathcal{B}$, l'inégalité ci-dessus est encore valable pour $d_{VT}(\mu, \nu)$. Par ailleurs, sur le borélien $B = \{f \geq g\}$, le signe de $f - g$ est constant. Ainsi, les inégalités précédentes deviennent des égalités et l'identité (A.0.1) est démontrée. ■

Dans notre étude, les mesures de probabilité ont pour support l'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs ; elles sont dominées par la mesure de comptage sur \mathbb{N} . Dans ce cas précis, la relation (A.0.1) devient :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} |\mu(m) - \nu(m)|. \quad (\text{A.0.2})$$

La distance en variation totale admet également une caractérisation en termes de couplage. Nous renvoyons le lecteur à [58] p. 19 pour davantage de précisions. Nous noterons par $\mathcal{L}(X)$ la loi de la variable aléatoire X .

Proposition A.0.4 La distance en variation totale entre μ et ν est égale à :

$$d_{VT}(\mu, \nu) = \inf \{ \mathbf{P}(X \neq Y), \mathcal{L}(X) = \mu \text{ et } \mathcal{L}(Y) = \nu \}.$$

Terminons cette annexe par la propriété suivante. Ce résultat trivial, combiné au Lemme 4.1.4, nous permet de réduire la recherche d'approximations poissonniennes à des configurations locales propres.

Propriété A.0.5 Soient $(X_n)_{n \geq 0}$, $(Y_n)_{n \geq 0}$ et X des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Si la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers X et si $d_{VT}(X_n, Y_n)$ tend vers 0 avec n alors la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers X .

Démonstration Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire. Pour toute fonction f continue bornée, la différence

$$\left| \int f(x) d\mathcal{L}(Y_n)(x) - \int f(x) d\mathcal{L}(X)(x) \right|$$

est majorée par

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| d_{VT}(Y_n, X_n) + \left| \int f(x) d\mathcal{L}(X_n)(x) - \int f(x) d\mathcal{L}(X)(x) \right|.$$

Les deux termes de la somme ci-dessus tendent vers 0 par hypothèse, d'où le résultat. ■

Annexe B

La méthode de Chen-Stein

Dans cette section, nous rappellerons les principaux arguments autour desquels la méthode de Chen-Stein s'articule. Cette succincte présentation aboutira sur la Proposition B.0.8 qui est une version de la méthode de Chen-Stein directement applicable au modèle d'Ising. Pour davantage de précisions, nous renvoyons évidemment le lecteur au texte original [2].

La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ sera notée $\mathcal{P}(\lambda)$. Le point de départ de la méthode est la remarque essentielle suivante. Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si, pour toute fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée :

$$\mathbf{E}[\lambda g(Z + 1) - Zg(Z)] = 0. \quad (\text{B.0.1})$$

Ainsi, la loi d'une variable aléatoire W , d'espérance λ , sera proche de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si la quantité $\mathbf{E}[\lambda g(W + 1) - Wg(W)]$ est proche de 0, pour toute fonction g . La démonstration du Théorème B.0.7 (voir aussi [2] p. 11) repose entièrement sur cette idée et sur le Lemme B.0.6. Cette approche fut initialement introduite par Stein en 1970 [76] et étendue au cas poissonnien par Chen en 1975 [7].

Le contexte est le suivant. Nous disposons d'une famille de variables aléatoires (dépendantes) indicatrices I_1, \dots, I_n d'espérance respective $\pi_i = \mathbf{E}[I_i]$. L'objectif est de mesurer la distance entre la loi de leur somme $W = \sum_i I_i$ et la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = \sum_i \pi_i$. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Nous noterons par $\mathcal{P}(\lambda)(A)$ la probabilité pour la loi de Poisson de paramètre λ d'appartenir à l'ensemble A . Soit $g = g_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction solution de l'équation :

$$\lambda g_A(j + 1) - jg_A(j) = \mathbf{1}_{j \in A} - \mathcal{P}(\lambda)(A), \quad \forall j \geq 0.$$

Une telle fonction g_A peut être construite récursivement en partant de $g_A(0) = 0$. Ainsi, la fonction g_A satisfait :

$$\mathbf{P}(j \in A) - \mathcal{P}(\lambda)(A) = \mathbf{E}[\lambda g_A(W + 1) - Wg_A(W)], \quad (\text{B.0.2})$$

de telle sorte que la distance en variation totale entre la loi de W et $\mathcal{P}(\lambda)$ est égale à :

$$d_{VT}(\mathcal{L}(W), \mathcal{P}(\lambda)) = \sup_A |\mathbf{E}[\lambda g_A(W + 1) - Wg_A(W)]|.$$

Il s'agit donc d'étudier pour chaque ensemble A le terme $\mathbf{E}[\lambda g_A(W+1) - W g_A(W)]$. Pour tout i , notons $W_i = \sum_{j \neq i} I_j$. En écrivant :

$$\mathbf{E}[I_i g_A(W_i + 1)] = \pi_i \mathbf{E}[g_A(W) | I_i = 1],$$

l'équation (B.0.2) devient :

$$\mathbf{P}(j \in A) - \mathcal{P}(\lambda)(A) = \sum_{i=1}^n \pi_i (\mathbf{E}[g_A(W+1)] - \mathbf{E}[g_A(W) | I_i = 1]). \quad (\text{B.0.3})$$

Dès lors, supposons que, pour tout indice i , des variables aléatoires U_i et V_i sont construites sur un même espace de probabilité de sorte que U_i ait la même distribution que W et $V_i + 1$ celle de W conditionné à $I_i = 1$. L'équation (B.0.3) devient :

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(j \in A) - \mathcal{P}(\lambda)(A)| &= \left| \sum_{i=1}^n \pi_i (\mathbf{E}[g_A(U_i + 1)] - \mathbf{E}[g_A(V_i + 1)]) \right| \\ &\leq \Delta g_A \sum_{i=1}^n \pi_i \mathbf{E}[|U_i - V_i|], \end{aligned}$$

où $\Delta g_A = \sup_j |g_A(j+1) - g_A(j)|$. Le résultat suivant (voir [2] p. 7 pour une démonstration) fournit une majoration de Δg_A indépendante de l'ensemble A .

Lemme B.0.6 *Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{N}$, il vient :*

$$\Delta g_A \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Toutes les briques nécessaires à la construction du Théorème B.0.7 ont été posées.

Théorème B.0.7 *Sous les hypothèses précédentes, la distance en variation totale entre la loi de W et $\mathcal{P}(\lambda)$ satisfait :*

$$d_{VT}(\mathcal{L}(W), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=1}^n \pi_i \mathbf{E}[|U_i - V_i|].$$

Nous allons maintenant particulariser le résultat général ci-dessus en vue de l'appliquer au modèle d'Ising. Supposons que la famille $\{I_i\}_{i=1, \dots, n}$ satisfait l'hypothèse suivante. Pour tout indice i , il existe une famille $\{J_{j,i}\}_{j=1, \dots, n}$ de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité que les indicatrices $\{I_j\}_{j=1, \dots, n}$ telle que d'une part,

$$\mathcal{L}(J_{j,i}, j = 1, \dots, n) = \mathcal{L}(I_j, j = 1, \dots, n | I_i = 1) \quad (\text{B.0.4})$$

et d'autre part,

$$\forall j \neq i, J_{j,i} \geq I_j. \quad (\text{B.0.5})$$

Une telle famille $\{I_i\}_{i=1,\dots,n}$ sera dite *positivement reliée*. Sous cette hypothèse, le couple (U_i, V_i) défini par $U_i = W$ et $V_i = \sum_{j \neq i} I_j$ vérifie les conditions du Théorème B.0.7. La majoration de $d_{VT}(\mathcal{L}(W), \mathcal{P}(\lambda))$ peut être réécrite. Pour tout indice i , (B.0.5) implique que :

$$\begin{aligned} \pi_i \mathbf{E}[|U_i - V_i|] &= \pi_i \mathbf{E}[|I_i + \sum_{j \neq i} (I_j - J_{j,i})|] \\ &= \pi_i^2 + \pi_i \sum_{j \neq i} \mathbf{E}[J_{j,i} - I_j] \\ &= \pi_i^2 + \sum_{j \neq i} (\mathbf{E}[I_i I_j] - \pi_i \pi_j) , \end{aligned}$$

car $\pi_i \mathbf{E}[J_{j,i}] = \pi_i \mathbf{E}[I_j | I_i = 1] = \mathbf{E}[I_i I_j]$, par (B.0.4). Ces considérations mènent au résultat suivant (voir [2] Corollaire 2.C.4 p. 26) :

Proposition B.0.8 *Si la famille de variables indicatrices $\{I_i\}_{i=1,\dots,n}$ est positivement reliée, alors la distance en variation totale entre la loi de W et $\mathcal{P}(\lambda)$ satisfait :*

$$d_{VT}(\mathcal{L}(W), \mathcal{P}(\lambda)) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\text{Var}(W) - \lambda + 2 \sum_{i=1}^n \pi_i^2 \right) .$$

Vérifier qu'une famille de variables aléatoires est positivement reliée peut s'avérer délicat. Le Chapitre 2.2 de [2] se penche sur ce problème. Le Théorème 2.G p. 29 de [2], dont la démonstration s'appuie sur des techniques de couplage (voir [57]), s'applique aisément à notre modèle dans le cas ferromagnétique (voir la Propriété 2.2.4).

Proposition B.0.9 *Supposons que le potentiel de paire b est positif et que pour tout indice i , la variable aléatoire indicatrice I_i est une fonction croissante de l'ensemble des configurations \mathcal{X}_n (au sens de la Section 2.2.2). Alors la famille $\{I_i\}_{i=1,\dots,n}$ est positivement reliée.*

Annexe C

Nombres d'animaux

Rappelons que a_k désigne le nombre d'animaux de taille k . Voici la liste des 47 premières valeurs de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ nécessaires à l'implémentation des filtres de débruitage de la Section 5.3. Cette liste ainsi que ses mises à jour sont disponibles sur le site web "On-line Encyclopedia of Integer Sequences"¹

k	a_k
1	1
2	2
3	6
4	19
5	63
6	216
7	760
8	2725
9	9910
10	36446
11	135268
12	505861
13	1903890
14	7204874
15	27394666
16	104592937
17	400795844
18	1540820542
19	5940738676
20	22964779660
21	88983512783

¹l'adresse de ce site est <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.

22	345532572678
23	1344372335524
24	5239988770268
25	20457802016011
26	79992676367108
27	313224032098244
28	1228088671826973
29	4820975409710116
30	18946775782611174
31	74541651404935148
32	293560133910477776
33	1157186142148293638
34	4565553929115769162
35	18027932215016128134
36	71242712815411950635
37	281746550485032531911
38	1115021869572604692100
39	4415695134978868448596
40	17498111172838312982542
41	69381900728932743048483
42	275265412856343074274146
43	1092687308874612006972082
44	4339784013643393384603906
45	17244800728846724289191074
46	68557762666345165410168738
47	272680844424943840614538634

Bibliographie

- [1] A.D. BARBOUR ET P.E. GREENWOOD. Rates of Poisson approximation to finite range random fields. *Ann. Appl. Probab.*, 3(1):91–102, 1993.
- [2] A.D. BARBOUR, L. HOLST, ET S. JANSON. *Poisson approximation*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1992.
- [3] R.J. BAXTER. *Exactly solved models in Statistical Mechanics*. Academic Press, London, 1982.
- [4] B. BOLLOBÁS. *Random Graphs*. Academic Press, London, 1985.
- [5] R. BOPPONA ET J. SPENCER. A useful elementary correlation inequality. *J. Combin. Theory Ser. A*, 50(2):305–307, 1989.
- [6] P. BRÉMAUD. *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo simulation, and Queues*. Springer, New York, 1999.
- [7] L.H.Y. CHEN. Poisson approximation for dependent trials. *Ann. Probability*, 3(3):534–545, 1975.
- [8] K.J. COMPTON. 0-1 laws in logic and combinatorics. In I. Rival, editor, *Algorithms and order*, pages 353–383. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [9] A.R. CONWAY ET A.J. GUTTMANN. On two-dimensional percolation. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 28:891–904, 1995.
- [10] R. CORI ET D. LASCAR. *Logique Mathématique, Tomes I et II*. Masson, Paris, 1993.
- [11] D. COUPIER. Poisson approximations for the Ising model. *Soumis (prépublication MAP5 n°2005-4)*, 2005.
<http://www.math-info.univ-paris5.fr/map5/publis/titre05.html>.
- [12] D. COUPIER. Potential estimation in the Ising model through Poisson approximations. *Soumis (prépublication MAP5 n°2005-5)*, 2005.
<http://www.math-info.univ-paris5.fr/map5/publis/titre05.html>.
- [13] D. COUPIER, A. DESOLNEUX, ET B. YCART. A zero-one law for first order logic on random images. In M. Drmota et al, editor, *Proc. Colloquium on Mathematics and computer science*, pages 495–505. Birkhäuser, Basel, 2004.
- [14] D. COUPIER, A. DESOLNEUX, ET B. YCART. Image denoising by statistical area thresholding. *J. Math. Imaging Vision*, 22(2-3):183–197, 2005.

- [15] D. COUPIER, P. DOUKHAN, ET B. YCART. Zero-one laws for binary random fields. *Soumis (prépublication MAP5 n°2005-2)*, 2005.
<http://www.math-info.univ-paris5.fr/map5/publis/titre05.html>.
- [16] M. DACUNHA-CASTELLE ET D. DUFLO. *Probabilités et statistiques. Tome 2*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Problèmes à temps mobile.
- [17] A. DESOLNEUX, L. MOISAN, ET J.-M. MOREL. Edge detection by Helmholtz principle. *J. of Math. Imaging Vision*, 14(3):271–284, 2001.
- [18] A. DESOLNEUX, L. MOISAN, ET J.M. MOREL. Meaningful alignments. *Int. J. Computer Vision*, 40(1):7–23, 2000.
- [19] L. DEVROYE ET G. LUGOSI. *Combinatorial methods in density estimation*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [20] R.L. DOBRUSHIN ET S.B. SHLOSMAN. Completely analytical Gibbs fields. In *Statistical physics and dynamical systems (Köszeg, 1984)*, volume 10 of *Progr. Phys.*, pages 371–403. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985.
- [21] D.L. DONOHO ET I.M. JOHNSTONE. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of Amer. Stat. Assoc.*, 90:1200–1224, 1995.
- [22] R.T. DURRETT. Ten lectures on particle systems. In P. Bernard, editor, *Ecole d'été de probabilité de Saint-Flour XXIII*, volume 1608 de *L.N. in Mathematics*, pages 97–201. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [23] H.D. EBBINGHAUS ET J. FLUM. *Finite model theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [24] H.D. EBBINGHAUS, J. FLUM, ET W. THOMAS. *Mathematical logic*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1984.
- [25] A. EHRENFEUCHT. An application of games to the completeness problem for formalized theories. *Fund. Math.*, 49:129–141, 1961.
- [26] P. ERDŐS ET A. RÉNYI. On the evolution of random graphs. *Mat. Kuttató. Int. Közl.*, 5:17–60, 1960.
- [27] S.N. ETHIER ET T.G. KURTZ. *Markov processes*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.
- [28] R. FAGIN. Probabilities on finite models. *J. of Symbolic Logic*, 41:50–58, 1976.
- [29] R. FERNÁNDEZ, P.A. FERRARI, ET N.L. GARCIA. Loss network representation of Peierls contours. *Ann. Probab.*, 29(2):902–937, 2001.
- [30] R. FERNÁNDEZ, P.A. FERRARI, ET N.L. GARCIA. Perfect simulation for interacting point processes, loss networks and Ising models. *Stochastic Process. Appl.*, 102(1):63–88, 2002.
- [31] C.M. FORTUIN, P.W. KASTELEYN, ET J. GINIBRE. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22:89–103, 1971.
- [32] H. GAIFMAN. Concerning measures in first-order calculi. *Israel J. of Mathematics*, 2:1–18, 1964.

- [33] H. GAIFMAN. On local and non local properties. In J. Stern, editor, *Logic Colloquium '81*, pages 105–135. North Holland, Amsterdam, 1982.
- [34] A. GANESH, B.M. HAMBLY, N. O'CONNELL, D. STARK, ET P.J. UPTON. Poissonian behavior of Ising spin systems in an external field. *J. Statist. Phys.*, 99(1-2):613–626, 2000.
- [35] H.O. GEORGII. *Gibbs measures and phase transitions*. de Gruyter, Berlin, 1988.
- [36] A.L. GIBBS ET F.E. SU. On choosing and bounding probability metrics. *Int. Statistical. Rev.*, 70(3):419–435, 2002.
- [37] Y.V. GLEBSKII, D.I. KOGAN, M.I. LIOGONKII, ET V.A. TALANOV. Range and degree of realizability of formulas in the restricted predicate calculus. *Cybernetics*, 5:142–154, 1969.
- [38] C. GRAFFIGNE. *Experiments in texture analysis and segmentation*. thèse, Brown University, 1987.
- [39] R.B. GRIFFITHS. Rigorous results for Ising ferromagnets of arbitrary spin. *J. Mathematical Phys.*, 10:1559–1565, 1969.
- [40] R.B. GRIFFITHS, C.A. HURST, ET S. SHERMAN. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *J. Mathematical Phys.*, 11:790–795, 1970.
- [41] G. GRIMMETT. *Percolation*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [42] X. GUYON. *Champs aléatoires sur un réseau*. Masson, Paris, 1992.
- [43] S. JANSON, T. ŁUCZAK, ET A. RUCIŃSKI. An exponential bound for the probability of nonexistence of a specified subgraph in a random graph. In *Random graphs '87 (Poznań, 1987)*, pages 73–87. Wiley, Chichester, 1990.
- [44] I. JENSEN ET A.J. GUTTMANN. Statistics of lattice animals (polyominoes) and polygons. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33:257–263, 2000.
- [45] G. KANIZSA. *La grammaire du voir*. Editions Diderot, arts et sciences, 1997.
- [46] D.A. KLARNER. Cell growth problems. *Canad. J. Math.*, 19:851–863, 1967.
- [47] D.A. KLARNER ET R.L. RIVEST. A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes. *Canad. J. Math.*, 25:585–602, 1973.
- [48] P.G. KOLAITIS ET M.Y. VARDI. 0-1 laws and decision problems for fragments of second-order logic. *Information and Computation*, 87(1-2):302–338, 1990.
- [49] P.G. KOLAITIS ET M.Y. VARDI. 0-1 laws for fragments of existential second-order logic: a survey. In M. Nielsen and B. Rovan, editors, *Math. Found. of Computer Science*, volume 1893 de *L.N. in Computer Science*, pages 84–98. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [50] M. LASSAIGNE, ET R. DE ROUGEMONT. *Logique et fondements de l'informatique*. Hermès, Paris, 1993.
- [51] M. LASSAIGNE, ET R. DE ROUGEMONT. *Logique et complexité*. Hermès, Paris, 1996.
- [52] J.M. LE BARS. Fragments of existential second-order logic without 0-1 laws. In *Proc. 13th annual IEEE symposium on logic in computer science*, pages 527–537, 1998.
- [53] J.M. LE BARS. Counterexamples of the 0-1 law for fragments of existential second order logic : an overview. *Bull. Symbolic Logic*, 9:67–82, 2000.

- [54] J.M. LE BARS. The 0-1 law fails for the monadic existential second-order logic on undirected graphs. *Information and Processing Letters*, 77:43–48, 2001.
- [55] J.M. LE BARS. A sharp threshold for a non-monotone digraph property. *Math. and Comp. Sci.*, 2:197–211, 2002.
- [56] J.L. LEBOWITZ. GHS and other inequalities. *Comm. Math. Phys.*, 35:87–92, 1974.
- [57] T.M. LIGGETT. *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [58] T. LINDVALL. *Lectures on the coupling method*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. A Wiley-Interscience Publication.
- [59] V.A. MALYSHEV ET R.A. MINLOS. *Gibbs Random Fields, Cluster Expansions*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [60] S. MASNOU ET J.-M. MOREL. Image restoration involving connectedness. In *Proc. DIP'97, Vienna, Austria*, volume 3346. SPIE, 1998.
- [61] P. MONASSE. Contrast invariant representation of digital images and application to registration. thèse, Université Paris 9, 2000.
- [62] P. MONASSE ET F. GUICHARD. Fast computation of a contrast invariant image representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(5):860–872, 2000.
- [63] L. ONSAGER. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev. (2)*, 65:117–149, 1944.
- [64] V.V. PETROV. *Sums of independent Random Variables*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [65] J.G. PROPP ET D.B. WILSON. Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Random Structures and Algorithms (Atlanta, GA, 1995)*, volume 9, pages 223–252, 1996.
- [66] R.-D. REISS. *Approximate distributions of order statistics*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [67] M.C. ROUSSET ET B. YCART. A zero-one law for random sentences in description logics. In D. Gardy and A. Makkadem, editors, *Proc. Colloquium on Mathematics and computer science*, pages 329–340. Birkäuser, Basel, 2000.
- [68] J. SERRA. *Image analysis and mathematical morphology, Part. I*. Academic Press, New York, 1982.
- [69] J. SERRA. *Image analysis and mathematical morphology, Part. II*. Academic Press, London, 1988.
- [70] J. SERRA ET L. VINCENT. An overview of morphological filtering. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 11(1):47–108, 1992.
- [71] S. SHELAH ET J. SPENCER. Zero-one laws for sparse random graphs. *J. Amer. Math. Soc.*, 1:97–115, 1988.
- [72] J. SPENCER. Counting extensions. *J. Combinatorial Theory*, 55:247–255, 1990.

- [73] J. SPENCER. Threshold functions for extension statements. *J. Combinatorial Theory*, 53:286–305, 1990.
- [74] J. SPENCER. Nine lectures on Random Graphs. In P. Bernard, editor, *Ecole d'été de probabilité de Saint-Flour XXI*, volume 1541 de *L.N. in Mathematics*, pages 293–343. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [75] J. SPENCER. *The Strange Logic on Random Graphs*, volume 22 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [76] C. STEIN. A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971)*, Vol. II: *Probability theory*, pages 583–602, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [77] L. TIERNEY. Introduction to general state-space Markov chain theory. In *Markov chain Monte Carlo in practice*, Interdiscip. Statist., pages 59–74.
- [78] L. VINCENT. Morphological area opening and closing for grayscale images. In *Proc. NATO Shape in Picture Workshop, Driebergen, The Netherlands*, pages 197–208. Springer-Verlag, 1992.
- [79] M. WERTHEIMER. Untersuchungen zur lehre der gestalt. *Psychologische Forschung*, 4:301–350, 1923.
- [80] D. WILLIAMS. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.
- [81] P. WINKLER. Random structures and zero-one laws. In Sauer, N.W. et al., editor, *Finite and infinite combinatorics in sets and logic*, pages 399–420. Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [82] B. YCART. *Modèles et algorithmes markoviens*, volume 39 de *Mathématiques et applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [83] L. YOUNES. *Problèmes d'estimation paramétrique pour des Champs de Gibbs Markoviens. Application au Traitement d'Images*. thèse, Université de Paris Sud, 1988.

Asymptotique des propriétés locales pour le modèle d'Ising et applications

Résumé : Cette thèse propose l'étude des propriétés locales satisfaites par le modèle d'Ising défini sur un graphe torique d -dimensionnel. Lorsque la taille n du graphe tend vers l'infini, une limite pour leur probabilité d'apparition est obtenue en fonction des potentiels de surface $a = a(n)$ et de paire $b = b(n)$. En mettant en évidence un phénomène de seuil, nous déterminons le moment d'apparition dans le graphe d'une propriété locale donnée. Puis, en se plaçant à sa fonction seuil, nous démontrons une approximation poissonnienne pour sa probabilité d'apparition. Enfin, deux applications sont proposées : une estimation des potentiels a et b ainsi qu'un algorithme de débruitage d'images en niveaux de gris.

Mots-clefs : Modèle d'Ising, image aléatoire, logique du premier ordre, fonction seuil, loi du zéro-un, approximation poissonnienne, interaction ferromagnétique, méthode de Chen-Stein, animaux (ou polyominos), estimation de potentiels, débruitage d'image.

Classification AMS (2000) : 60F05, 60F20, 82B20, 62H35, 68U10, 68U20.

Asymptotic of local properties for the Ising model and applications

Abstract: This thesis intends to study local properties satisfied by the Ising model defined on a d -dimensional lattice torus. As the size n of the lattice tends to infinity, a limit for their probability of occurring is obtained depending on the surface potential $a = a(n)$ and the pair potential $b = b(n)$. By establishing a threshold phenomenon, we determine the moment from which a given local property occurs in the lattice. Thus, at its threshold function, we prove a poisson approximation for its probability of occurring. Finally, two applications are proposed : an estimate of potentials a and b and a denoising algorithm for grey level images.

Key Words: Ising model, random image, first-order logic, threshold function, zero-one law, poisson approximation, ferromagnetic interaction, Chen-Stein method, lattice animals, potential estimation, image denoising.

AMS Classification (2000): 60F05, 60F20, 82B20, 62H35, 68U10, 68U20.