HAL open science

Etude de la stabilité de systèmes aéroélastiques en présence d'excitations aléatoires multiplicatives

Zentner Irmela

To cite this version:

Zentner Irmela. Etude de la stabilité de systèmes aéroélastiques en présence d'excitations aléatoires multiplicatives. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005. Français. NNT : . tel-00011137

HAL Id: tel-00011137

https://theses.hal.science/tel-00011137v1

Submitted on 12 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Discipline: Structures et Matériaux

présentée et soutenue publiquement
par

Irmela Zentner

le 30 septembre 2005

Titre:

Étude de la stabilité de systèmes aéroélastiques en présence d'excitations aléatoires multiplicatives

Directeur de thèse:
Fabrice Poirion

JURY

M. S.Bellizzi	(Université de Marseille)	Rapporteur
M. P.Destuynder	(CNAM)	Rapporteur
M. D.Duhamel	(ENPC)	Examinateur
M. H.Hönlinger	(DLR, Allemagne)	Examinateur
M. B.Lapeyre	(ENPC)	Président du jury
M. F.Poirion	(ONERA)	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction **1**

1 Étude bibliographique **7**
1.1 État de l'art de l'analyse aéroélastique 7
1.2 Analyse de la stabilité (stochastique) à l'aide de l'exposant de Lyapunov 10

2 Mise en équation du système couplé aéroélastique **13**
2.1 Modélisation de la partie structure 13
2.1.1 Problème aux limites de l'élastodynamique 13
2.1.2 Formulation variationnelle et projection de Ritz-Galerkin . . . 14
2.1.3 Discrétisation par la méthode des éléments finis 16
2.2 Construction d'un modèle réduit du système couplé 16
2.3 Calcul des forces aérodynamiques instationnaires 18
2.3.1 La théorie de Theodorsen/Wagner pour des ailes minces 19
2.3.2 La méthode des doublets 20
2.3.3 Les FAG par les équations d'Euler linéarisées 22
2.3.4 Méthode d'approximation par fractions rationnelles 23
2.4 Calcul des domaines de stabilité du système couplé 25
2.5 Introduction d'un bruit modélisant la turbulence longitudinale 27
2.5.1 Turbulence cylindrique 27
2.5.2 Prise en compte de la variation le long de l'aile 28
2.5.3 Modélisation de l'aérodynamique par tranches 29
2.5.4 Introduction de la turbulence par tranches 31
2.5.5 Modélisation des tranches avec gouverne 33
2.6 Bruit additif introduit par la turbulence verticale 34

3 Modélisation de la turbulence **37**
3.1 Définition du processus stochastique modélisant la turbulence 37
3.2 La méthode de markovianisation 38
3.3 Markovianisation approchée d'un processus physiquement réalisable . 40
3.4 Un algorithme de résolution temporelle 42
3.5 Modèle spectral de la turbulence atmosphérique et markovianisation approchée 43

3.5.1 Construction d'une densité spectrale matricielle 45
3.5.2 Calcul des forces extérieures modélisant la turbulence verticale 46

4 Étude de la stabilité de systèmes dynamiques aléatoires 49
4.1 Définition des types d'équations objet de l'étude 49
4.2 Systèmes dynamiques aléatoires linéaires 51
4.3 Notion de stabilité au sens de Lyapunov 53
4.4 Stabilité stochastique 54
4.5 Théorème ergodique d'Oseledets 55
4.6 Stabilité du système dynamique aléatoire linéaire affine 57
4.7 Exposant de Lyapunov des moments 58
4.8 Stabilité de SDA non linéaires 58
4.8.1 EDA non linéaire avec point fixe $\bar{x} = 0$ 58
4.8.2 Exposant de Lyapunov pour des EDS non linéaires avec bruit additif 60
4.9 Bifurcation stochastique 61
4.9.1 Bifurcation d'un système dynamique déterministe 61
4.9.2 Qu'est-ce qu'une bifurcation stochastique? 62
4.10 Simulation numérique des exposants de Lyapunov 63
4.10.1 Choix du schéma numérique 63
4.10.2 Calcul du plus grand exposant de Lyapunov 65
4.10.3 Calcul de tous les exposants de Lyapunov du spectre 66
4.10.4 Erreur due à la simulation sur un intervalle de temps fini . . . 66

5 Applications 69
5.1 Application au profil bidimensionnel 69
5.1.1 Bifurcation stochastique et réponse non linéaire 74
5.1.2 Conclusions 75
5.2 Application à un modèle d'avion linéaire 81
5.2.1 Commentaires 89

6 Vers une modélisation plus réaliste du jeu 91
6.1 Développement d'un modèle réduit 91
6.2 Formulation de Moreau du problème de contact 93
6.3 Un algorithme de simulation numérique 98
6.3.1 Discrétisation de l'inclusion différentielle 98
6.3.2 Schéma numérique pour le problème de contact 99
6.4 Commentaires 100
6.5 Application à la maquette avec jeu 101
6.5.1 Résultats obtenus 103
6.5.2 Conclusions et remarques 117
6.6 Stabilité d'un point fixe 118
6.6.1 Stabilité locale 118

6.6.2 Remarques sur l'exposant de Lyapunov pour un système dynamique non régulier 118

Conclusion **121**

Annexe: **126**

A Systèmes dynamiques déterministes **127**
A.1 Stabilité de systèmes linéaires 127
A.2 Stabilité de systèmes dynamiques non linéaires 128

B Processus de Wiener **129**

C Calcul de l'exposant de Lyapunov par projection sur l'hypersphère **131**

D Équations différentielles stochastiques **135**
D.1 Définition de l'équation différentielle stochastique d'Itô 136
D.2 Solution stationnaire d'une EDS linéaire autonome 137
D.3 La solution comme processus de Markov 138
D.4 La solution comme processus de diffusion et équation de Fokker-Planck 138
D.5 Relation entre l'EDS d'Itô et l'EDS de Stratonovich 139

E Estimateur de la densité spectrale **141**

Bibliograpie **142**

Notations

- $\mathbb{E}$: opérateur d'espérance mathématique
- X^T : conjugué de X
- $\bar{X}$: transposé de X
- X^* : conjugué transposé de X: $\bar{X}^T$
- V^* : espace dual de V
- log : logarithme naturel
- Tr : la trace d'une matrice
- ∂_t : dérivée partielle temporelle $\frac{\partial}{\partial t}$
- $[D_{ij}]$: matrice D d'élément D_{ij}
- $Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$ espace des matrices réelles de dimension $n \times n$
- $Mat_{\mathbb{C}}(n,n)$ espace des matrices complexes de dimension $n \times n$
- on note le vecteur $(x_1\ x_2)^T$ par $(x_1,\ x_2)$

Abréviations

- v.a.: variable aléatoire
- p.s.: presque sûrement
- i.i.d.: indépendants identiquement distribués
- ssi: si et seulement si
- ddl: degré(s) de liberté
- EDS: équation différentielle stochastique
- EDSI: équations différentielles stochastiques d'Itô
- EDA: équation différentielle aléatoire
- EFP: équation de Fokker-Planck
- SDA: système dynamique aléatoire
- EDO: équation différentielle ordinaire
- FAG: forces aérodynamiques généralisées
- EF: éléments finis
- CFD: *computational fluid dynamics*
- LCO: *limit cycle oscillation(s)* (oscillation(s) de cycle limite)

Introduction

Contexte de la recherche Cette recherche s'inscrit dans le cadre de la prévision des instabilités de flottement des avions. L'analyse aéroélastique, en effet, joue un rôle majeur dans la conception et la certification des avions civils. Le couplage aéroélastique entre la structure et le fluide apparaît car les mouvements de la structure au sein de l'écoulement génèrent des efforts induits. De plus, la turbulence dans la couche limite atmosphérique apporte, quant à elle, une contribution aux forces aérodynamiques. Son effet sur les avions peut aller du simple inconfort pour les passagers jusqu'à la destruction de l'appareil pour les très fortes intensités de turbulence qui sont néanmoins rares. D'où l'importance pour les constructeurs et les services étatiques qui certifient les avions de pouvoir modéliser finement ces phénomènes physiques.

Les instabilités de flottement, on vient de le voir, sont donc des instabilités aéroélastiques d'un système couplé fluide-structure. Les oscillations de la structure sont induites par l'interaction entre l'écoulement et les modes élastiques de la structure. Les deux types de flottement le plus souvent cités dans la littérature (par exemple Fung [43]) sont d'une part le flottement de décrochage (*stall flutter*) qui se produit quand il y a séparation de l'écoulement du profil. Le décollement du flux entraîne alors des réactions aérodynamiques non linéaires par rapport au mouvement de la structure. En ce qui concerne les ailes d'avion, une séparation se produit notamment pour des angles d'incidence importants. Ce type de flottement, qui est dû à des non-linéarités aérodynamiques, ne fait pas l'objet de ce travail. Le deuxième type de flottement est le flottement bimode (*coalescence flutter*) qui est lié à l'existence de deux fréquences propres voisines, en général les modes de flexion et de torsion, qui sont mises en coïncidence pour une certaine gamme de vitesses de l'écoulement. Contrairement au flottement de décrochage, le flottement bimode peut se produire même pour des angles d'incidence faibles.

Le phénomène de flottement et l'influence que peuvent avoir des non-linéarités structurales sur ce dernier ont été mis en évidence par un grand nombre d'auteurs. Ces travaux concernent aussi bien l'aspect théorique que des études expérimentales. Lorsqu'on se place dans un cadre simplifié linéaire, l'analyse du système couplé prédit que, en présence de petites perturbations et pour une certaine valeur critique P_{crit} d'un paramètre caractéristique de l'écoulement, l'amplitude des oscillations croit exponentiellement. Le système subit alors une instabilité appelée flottement conduisant à sa

rupture. Remarquons que le paramètre caractéristique de l'écoulement généralement choisi est la vitesse de l'écoulement en amont ou la pression totale. D'un point de vue mathématique, et toujours en se plaçant dans un cadre linéaire, les mouvements du système couplé sont solution d'un système différentiel linéaire. Dans ce contexte, le flottement apparaît quand la plus grande partie réelle d'une valeur propre de ce système dynamique (auparavant négative) devient positive.

Si l'on prend en compte des non-linéarités d'origine structurale ou aérodynamique, le comportement dynamique du système couplé est plus complexe. Au lieu d'un départ directement en flottement, on peut observer des oscillations périodiques pour une certaine gamme de valeurs du paramètre. Ces oscillations sont appelées les oscillations de cycles limites (LCO comme *Limit Cycle Oscillations*). En outre, la stabilité du système couplé est sensible à un bruit venant perturber l'un de ses paramètres. On parle alors de bruit multiplicatif. La turbulence atmosphérique en est un exemple comme on le verra par la suite. Il existe deux sources de turbulence, d'une part la turbulence induite par le profil lui-même (vortex de sillage, décollement de l'écoulement, couche limite) et d'autre part les fluctuations turbulentes de la vitesse de l'écoulement (la turbulence atmosphérique). On s'intéresse ici au deuxième phénomène, c'est-à-dire à l'influence de fluctuations aléatoires de la vitesse en amont du profil.

Des travaux concernant la stabilité de profils d'avion dans un écoulement avec turbulence atmosphérique ont été entrepris récemment par Poirel et Price [85] [83]. Leurs études concernent la stabilité d'un profil bidimensionnel à deux degrés de liberté (ddl) soumis à la turbulence atmosphérique. Les forces aérodynamiques sont obtenues en introduisant la composante fluctuante dans les expressions établies par Theodorsen et Küssner. Ces équations approchées s'appliquent pour un fluide incompressible dans le domaine subsonique. Cependant, seules des structures bidimensionnelles à peu de degrés de libertés sont traitées. Poirel et Price appliquent des schémas numériques classiques (méthode de Runge-Kutta d'ordre 4) malgré le fait que le processus stochastique modélisant leur bruit est continu mais non-différentiable. C'est pour cette raison qu'un point important de ce travail consiste à étudier plus rigoureusement les systèmes dynamiques engendrés ainsi que les différentes possibilités de simulation temporelle. Par ailleurs, la démarche de Poirel et Price ne peut pas se généraliser à des situations plus complexes et en particulier à des structures d'avions complètes.

Enfin, il nous aparaît important de nous pencher sur la modélisation de la non-linéarité de jeu qui, la plupart du temps, est introduite de manière trop simpliste.

Objectifs de la recherche L'enjeu de cette thèse est d'améliorer et d'affiner les méthodes de calcul de flottement en prenant en compte un bruit aléatoire qui modélise la turbulence atmosphérique. Ainsi, ce travail a pour but de développer des méthodologies permettant d'évaluer et si possible de quantifier l'impact de la turbulence (ou d'autres bruits multiplicatifs tels que les incertitudes aérodynamiques) sur la stabilité d'un avion en présence, ou non, de non-linéarités structurales.

La composante longitudinale de la turbulence, en se rajoutant à l'écoulement moyen, va perturber la vitesse de cet écoulement. Ainsi, agissant sur les paramètres du système, elle va devenir, dans le cas où la turbulence est modélisée par un processus aléatoire, ce qu'on appelle une excitation aléatoire multiplicative. La turbulence verticale, quant à elle, agit comme force extérieure. On parle dans ce cas de bruit additif. On est alors amené à étudier la stabilité de systèmes aéroélastiques en présence de bruits aléatoires multiplicatifs et additifs. Cependant, les méthodes classiques d'analyse de la stabilité ne sont plus applicables puisqu'on travaille avec des matrices aléatoires. L'analyse de la stabilité doit alors être effectuée à l'aide de méthodes adaptées.

La stabilité des systèmes aéroélastiques est également très sensible à la présence de non-linéarités structurales concentrées, tel un jeu dans la liaison aile-gouverne. C'est pour cette raison qu'il est important de les prendre en compte dans la modélisation. Jusqu'à présent, ces non-linéarités ne sont prises en compte que très grossièrement, par exemple en introduisant un ressort non linéaire. Il semble alors important d'affiner les modèles afin de pouvoir étudier plus correctement le comportement vibratoire ainsi que la stabilité. Remarquons également qu'il s'agit, dans le cas du jeu, d'une non-régularité plutôt que d'une non-linéarité, puisque le système couplé peut être considéré comme un système dynamique où certains ddl sont soumis à des contraintes géométriques.

En résumé, les objectifs principaux de cette étude sont les suivants:

1. Mise en équation du système couplé aéroélastique en présence de la turbulence atmosphérique.
2. Modélisation mathématique et physique d'une non-régularité telle que le jeu.
3. Étude de méthodes adaptées à l'analyse de la stabilité de systèmes dynamiques aléatoires.
4. Développement de modèles réduits et de méthodes numériques adaptés aux problèmes complexes et de grande taille apparaissant en aéronautique.
5. Implémentation des méthodologies développées et adaptation à des codes de calcul existants.
6. Étude de l'influence de la turbulence sur la stabilité et le comportement dans le cas non linéaire avec jeu (bifurcations, oscillations de cycles limites, etc.).

Stratégie proposée La taille et la complexité des problèmes traités ici, et plus généralement en aéronautique, exigent de travailler avec des modèles réduits. Par ailleurs, la modélisation des forces aérodynamiques qui s'appliquent à la structure doit permettre l'introduction de la turbulence en tant que processus stochastique.

En pratique, on effectue une réduction de modèle d'une part pour la partie structure et d'autre part pour la partie fluide. Pour la discrétisation de la partie structure, on utilise la méthode des éléments finis. La réduction du modèle est obtenue à l'aide d'une projection sur la base modale tronquée (basses fréquences) de la structure. Les forces aérodynamiques intervenant dans le couplage fluide-structure sont en principe obtenues en résolvant de manière couplée les équations régissant le fluide et les équations

de la structure. Afin de pouvoir effectuer des études paramétriques, il est néanmoins nécessaire de développer des modèles aérodynamiques réduits, ce qui diminue considérablement le coût numérique par rapport à un calcul classique par simulation temporelle. Les forces aérodynamiques généralisées sont ainsi déterminées pour un certain nombre de mouvements harmoniques de la structure qu'on impose. Afin de pouvoir prendre en compte les fluctuations spatiales (le long de l'aile) du champ aléatoire modélisant la turbulence, on sera amené à considérer une formulation par tranches des forces aérodynamiques.

Comme on le verra au chapitre deux, le système couplé réduit peut être modélisé par une équation différentielle aléatoire excitée par un bruit multiplicatif. Cette équation peut être étudiée dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques aléatoires ce qui nous permet d'utiliser ses outils puissants. S'agissant d'une excitation par un bruit réel (dit aussi coloré), on peut considérer l'équation différentielle aléatoire trajectoire par trajectoire comme une équation différentielle ordinaire. La stabilité d'un point d'équilibre peut être analysée à l'aide des exposants de Lyapunov qui donnent les taux d'expansion du système et généralisent ainsi la notion de partie réelle des valeurs propres. Néanmoins, les modèles réduits aéroélastiques sont toujours relativement complexes et de dimension supérieure à trois. Ceci rend difficile, voire impossible, l'obtention d'une expression analytique pour le plus grand exposant de Lyapunov. On opte alors pour un calcul par des méthodes numériques (itératives). On sera amené à construire des trajectoires par simulation en intégrant numériquement le système différentiel décrivant le mouvement de la structure. La convergence et la précision des schémas numériques adaptés à la résolution des équations différentielles aléatoires obtenues seront étudiées.

Dans une deuxième partie de ce travail, on s'intéresse à la modélisation des non-régularités structurales concentrées telles qu'un jeu dans la liaison aile-gouverne. Comme on l'a évoqué, le jeu a une influence majeure sur le comportement vibratoire ainsi que sur la stabilité du système aéroélastique.

On proposera alors une méthode originale qui a recours d'une part à la formulation par équations multivoques du problème et d'autre part une méthode de sous-structuration permettant d'isoler les parties non linéaires (ou plutôt non régulières puisqu'il s'agit d'un jeu). On effectuera une sous-structuration selon la méthode de Craig et Bampton afin de pouvoir considérer séparément les parties structurales comportant les non-régularités et les parties régulières linéaires. Cette formulation nous permettra d'appliquer directement les développements théoriques concernant la dynamique non régulière due aux contacts introduits originellement par Moreau dans les années 80. Plus précisément, la formulation des problèmes de contact développée par Moreau est une formulation générale de la dynamique fondée sur l'analyse convexe. Elle nous permettra d'écrire le système sous forme d'une inclusion différentielle particulière et ainsi d'obtenir les vitesses post-impact par le biais d'une projection.

Organisation de la thèse Ce travail de thèse est constitué de sept chapitres:

Le premier chapitre comporte d'une part une étude bibliographique concernant la modélisation et l'étude des systèmes aéroélastiques. D'autre part, on présente une revue des cas où l'exposant de Lyapunov a été appliqué afin d'étudier la stabilité d'un système mécanique.

La modélisation du système aéroélastique et plus particulièrement des deux parties, fluide et structure, est présentée dans le deuxième chapitre. On montre comment le bruit représentant la turbulence atmosphérique peut y être introduit. Dans le but d'introduire également les fluctuations spatiales le long de l'aile, on développe une formulation par tranches des forces aérodynamiques.

Dans le troisième chapitre, le processus stochastique modélisant la turbulence est caractérisé et décrit mathématiquement. La réalisation différentielle des trajectoires de ce processus par la méthode de markovianisation approchée est expliquée.

Le chapitre quatre est consacré à l'introduction des notions importantes relatives à la théorie des systèmes dynamiques aléatoires. On définit ensuite la stabilité au sens de Lyapunov ainsi que des nombres caractéristiques particuliers, les exposants de Lyapunov, qui permettent d'étudier la stabilité des systèmes aéroélastiques construits auparavant. Le cas des systèmes dynamiques non linéaires est également traité, avec notamment la définition de la bifurcation stochastique. Finalement, on évoque les méthodes possibles de simulation numérique ainsi que l'implémentation de ces méthodologies.

Le chapitre cinq comporte les résultats obtenus pour deux cas de figure: d'abord l'application des méthodes développées à un profil d'aile bidimensionnel avec et sans non-linéarité de jeu puis l'application à un modèle simplifié d'un avion civil gros-porteur.

Une modélisation mathématique ainsi que des méthodes numériques pour des structures comportant une non-régularité telle qu'un jeu dans les liaisons avec les surfaces de contrôle sont présentées dans chapitre six. Les développements faits sont ensuite appliqués à un modèle comportant un jeu dans la liaison aile-gouverne. Le modèle étudié est celui d'une maquette non linéaire qui a fait l'objet de plusieurs campagnes d'essais à l'ONERA.

Le chapitre sept apporte les conclusions ainsi que des perspectives d'ouverture pour de futures recherches.

Pour finir, certaines informations plus théoriques, qui peuvent être utiles à la compréhension générale de ce document, sont regroupées en annexe.

Chapitre 1

Étude bibliographique

1.1 État de l'art de l'analyse aéroélastique

Dans les années 30, les premiers modèles mathématiques destinés aux calculs de réponses aérodynamiques instationnaires ont été introduits par Wagner (1925), Küssner (1929) et Theodorsen (1934). Ils développèrent des méthodes permettant le calcul des forces aérodynamiques pour un profil bidimensionnel dans un écoulement incompressible subsonique. Ces méthodes, qui s'appuient sur l'utilisation de fonctions indicielles, permettent de calculer les forces aérodynamiques dans le domaine fréquentiel d'un profil soumis à une rafale discrète (fonction de Wagner [110]), à un saut unitaire de l'angle d'attaque (fonction de Küssner [63]) ainsi que pour un profil soumis à un mouvement sinusoïdal (fonction de Theodorsen [106]). L'analyse de la stabilité est généralement effectuée dans le domaine fréquentiel. Breitbach [25] a été parmi les premiers dans les années 70 à introduire des non-linéarités structurales dans ces modèles. Les non-linéarités de jeu, qui sont généralement présentes dans les liaisons des surfaces de contrôle, sont alors modélisées par un ressort non linéaire. Pour des oscillations harmoniques, ce ressort non linéaire est remplacé par un ressort équivalent linéaire. On parle aussi de 'fonctions descriptives' car on modélise la non-linéarité par une fonction linéarisée dans le domaine fréquentiel.

Les progrès dans l'informatique ont permis de modéliser des structures plus complexes par la méthode des éléments finis. Cependant, ceci a rendu inapplicable la détermination de solutions analytiques simples comme celles décrites ci-dessus. L'objet de l'étude étant un avion complet et non plus un profil d'aile bidimensionnel, il est nécessaire de développer des méthodes numériques appropriées pour l'aérodynamique. Par ailleurs, pour les calculs de réponse dynamique et de flottement, il est crucial de développer des modèles réduits, surtout si des études paramétriques sont envisagées.

Des méthodes numériques pour le calcul de réponses aérodynamiques instationnaires linéaires, dans le domaine des fréquences, ont alors été développées pour le domaine subsonique. La méthode la plus utilisée aujourd'hui est la méthode dite des doublets

[1], où les surfaces portantes de la structure sont discrétisées par des panneaux rectangulaires. L'analyse dynamique n'est effectuée que pour un certain nombre de modes propres de la structure préalablement choisis. Les forces aérodynamiques généralisées[1] (FAG) sont obtenues sous l'hypothèse que le champ de pression aérodynamique ainsi que la réponse de la structure soient harmoniques de fréquence ω. On peut ainsi déterminer la matrice d'influence aérodynamique généralisée $H(\omega)$ pour un certain nombre de fréquences ω afin de pouvoir écrire les FAG dans le domaine fréquentiel comme

$$\hat{\mathcal{F}}(\omega) = H(\omega)\hat{q},$$

où on a noté $\hat{q}$ la transformée de Laplace du vecteur des coordonnées généralisées de la structure.

Généralement, l'analyse de la stabilité est effectuée directement dans le domaine fréquentiel. Les FAG calculées pour un certain nombre de fréquences peuvent également être lissées par approximation à l'aide de fractions rationnelles [92], [54]. Si l'analyse aéroélastique doit être effectuée dans le domaine temps (par exemple en présence de non-linéarités structurales concentrées), les FAG approchées par fractions rationnelles dans le domaine des fréquences peuvent être transformées en forces temporelles par transformation de Fourier inverse. Notamment, la méthode de Karpel [54] permet la mise sous forme d'état du système couplé aéroélastique en utilisant un nombre réduit de variables supplémentaires (variables d'état).

Le progrès des codes CFD (*Computational Fluid Dynamics*) a permis d'incorporer ces derniers dans l'analyse aéroélastique et on parle alors de *Computational Aeroelasticity* (CA). On couple alors un code de calcul d'éléments finis (EF) pour la partie structure avec des codes CFD pour la résolution dans le domaine fluide. Ces méthodes sont nécessaires si des non-linéarités aérodynamiques en régime transsonique comme les ondes de choc, la couche limite ou encore une séparation de l'écoulement doivent être modélisées. Il est clair que ce genre de non-linéarité aérodynamique ne peut pas être pris en compte par la théorie linéaire mais le coût important des calculs CFD reste un obstacle majeur à leur utilisation industrielle. En effet, l'analyse de la stabilité aéroélastique nécessite une intégration sur de longs intervalles de temps. Des méthodes de réduction de modèle ont alors été développées. Ces méthodes permettent d'obtenir des modèles de taille réduite à partir de calculs CFD tout en gardant l'essentiel de la dynamique du système. Les méthodes de réduction de modèle aérodynamique comprennent notamment la méthode dite POD (*Proper Orthogonal Decomposition*: il s'agit d'une réduction à l'aide d'une base de Karhunen Loève) [68], la méthode de Volterra pour les systèmes non linéaires [100] ou encore des méthodes d'identification, voir par exemple [32]. L'activité de recherche concernant les méthodes de réduction de modèles aérodynamiques est passée en revue dans l'article de Lucia et al. [68].

Parallèlement, la linéarisation de modèles aéroélastiques non linéaires peut être un outil essentiel pour la compréhension de la nature et de la grandeur des phénomènes

1. On désigne par FAG la projection des pressions aérodynamiques sur les modes propres de la structure.

aéroélastiques non linéaires. Une approche possible consiste à considérer une petite perturbation (linéaire) par rapport à un état non linéaire stationnaire. Dans ce genre de modélisation on linéarise par rapport à la variable temp; l'écoulement stationnaire peut cependant contenir des chocs ainsi qu'une séparation de l'écoulement. A l'ONERA, le code REELC est basé sur les équations d'Euler linéarisées [74]. Les FAG sont obtenues en imposant un mouvement harmonique à la structure et en ne gardant que le premier harmonique de chaque réponse (méthode du premier harmonique). En effet, dans le cas où les non-linéarités structurales sont prépondérantes, l'approche linéarisée en temps est suffisante pour l'étude dynamique [39].

Les oscillations de cycle limite Les oscillations de cycle limite (LCO, *Limit Cycle Oscillations*) sont des oscillations harmoniques entretenues, provoquées par des non-linéarités de modèle qui peuvent être d'origines variées. On distingue notamment les non-linéarités de nature aérodynamique et de nature structurale. La non-linéarité structurale la plus étudiée est le jeu, généralement présent dans les liaisons voilure-surfaces de contrôle. Une autre catégorie de non-linéarités structurales provient des non-linéarités géométriques comme, par exemple, le raidissement géométrique des plaques.

Les cas de LCO induites par un jeu sont bien connus expérimentalement et aussi par des études théoriques, mais les cas observés sur des structures en service sont rarement rendus publique par les constructeurs [39]. En fait, ces oscillations entretenues sont généralement de faible amplitude. Néanmoins, elles contribuent à la fatigue des composants de la structure et peuvent ainsi provoquer une ruine à long terme. Ce phénomène d'oscillations de cycle limite a été étudié par un grand nombre d'auteurs. Les études concernent principalement un profil d'aile 2D soumis à une aérodynamique subsonique où la non-linéarité de jeu est modélisée par un ressort non linéaire ou linéaire par morceaux. L'étude de la stabilité d'un profil bidimensionnel peut alors être effectuée par intégration temporelle (différences finies, par exemple Kousen&Bendikson [59]) ou en modélisant la non-linéarité dans le domaine des fréquences par une fonction linéaire selon la méthode des fonctions descriptives (Breitbach [25], Tang& Dowell&Virgin [105] et d'autres). Les deux types de modélisation ont été étudiés et comparés par exemple par Price et al. [91]. Par ailleurs, des méthodes analytiques issues de la théorie de la bifurcation des systèmes dynamiques non linéaires, comme la réduction sur la variété centrale, ont été appliquées au profil bidimensionnel [67] mais ce sont des méthodes numériquement peu efficaces pour des systèmes quelconques et de taille plus importante. Dans les deux références citées ci-dessus, les forces aérodynamiques sont modélisées par les fonctions de Theodorsen et Wagner [43].

Bae, Inman et Lee [13] étudient la stabilité d'une aile avec gouverne dans le cas où la structure est discrétisée par la méthode des éléments finis en combinaison avec une méthode de masse fictive pour la réduction du modèle. Les forces aérodynamiques dans le domaine subsonique sont calculées par une méthode de doublets hybrides, en utilisant l'approximation par fractions rationnelles de Karpel [54], afin d'obtenir un

modèle réduit pour les forces aérodynamiques. Le jeu est pris en compte par une force de rappel non linéaire.

Bauchau, Rodriguez et Bottasso [17] considèrent le modèle d'une aile d'avion avec jeu dans la gouverne, dans le cadre de la dynamique multi-corps, s'appuyant sur une méthode aux éléments finis. Les forces aérodynamiques sont déterminées selon une méthode développée par Peters et al. [81].

Des études plus récentes concernent la prise en compte de non-linéarités structurales et aérodynamiques dans un écoulement transsonique. Dans [59], [37] et plus récemment [40], les calculs sont effectués pour profil 2D en utilisant les équations d'Euler. Dowell et al. [40] utilisent la méthode de POD afin d'obtenir un modèle réduit. Dans ces approches, on néglige la viscosité et par conséquent, les résultats ainsi obtenus ne permettent pas de prendre en compte la couche limite ou encore de décrire le cas où un décollement de l'écoulement a lieu.

1.2 Analyse de la stabilité (stochastique) à l'aide de l'exposant de Lyapunov

Lorsqu'on introduit un bruit aléatoire dans les paramètres d'un système aéroélastique ou d'autres systèmes mécaniques, il est nécessaire de trouver des méthodes appropriées pour l'étude de leur stabilité car les méthodes classiques ne sont pas applicables à ce type d'équations excitées par un bruit aléatoire multiplicatif. Il faut alors se tourner vers des méthodes issues de la théorie des systèmes dynamiques aléatoires. L'outil pratique est le plus grand exposant de Lyapunov (voir chapitre 4) qui prend des valeurs négatives si le système dynamique sous-jacent est stable. Généralement, on parle simplement d'exposant de Lyapunov au lieu d'expliciter qu'il s'agit du plus grand exposant.

Il existe plusieurs publications traitant de la stabilité des ponts souples à grande portée soumis au vent turbulent. La turbulence longitudinale est introduite dans ces modèles en rajoutant une partie fluctuante à la vitesse moyenne de l'écoulement. Dans ces travaux, la stabilité de profils de ponts à deux ou au maximum trois degrés de libertés (donc des modèles de petite taille) est étudiée. L'excitation par la turbulence atmosphérique est prise en compte de manière simplifiée en l'assimilant à un bruit blanc [66], [29]. Ensuite la stabilité de la fonction d'autocorrélation du processus solution est étudiée. Dans ce but, les termes contenant le bruit sont simplifiés de façon à obtenir une équation différentielle stochastique linéaire par rapport à l'excitation stochastique. Dans [28], Bucher et Lin prennent en compte également l'effet de la corrélation de la turbulence le long du pont. Une étude de Li et Lin [65] porte sur une excitation par un processus stochastique stationnaire borné. Les auteurs utilisent une méthode d'approximation utilisant des synthèses temporelles (en anglais, on parle de "*time averaging*") et aboutissent ainsi à une expression analytique du plus grand exposant de Lyapunov en fonction de la bande de fréquence d'excitation (à bande large

ou étroite). Dans tous les travaux cités, la partie fluctuante de la vitesse du vent est introduite dans l'expression des forces aérodynamiques obtenues pour un écoulement à vitesse constante comme introduit par Scanlan [95].

Dans [103], Sri Namachchivaya et Vedula développent des expressions approchantes de l'exposant de Lyapunov ainsi que l'exposant de Lyapunov des moments pour un système à quatre degrés de liberté. Il s'agit de cylindres soumis à un écoulement et au sillage d'autres cylindres alignés. La turbulence du sillage est modélisée par un processus stochastique. Les auteurs concluent que le système étudié peut être stabilisé par la présence d'un bruit aléatoire, ce qui est vérifié par des observations expérimentales.

Most, Bucher et Schorling, [76], étudient la stabilité de structures de génie civil avec imperfections géométriques aléatoires à l'aide d'une simulation numérique de l'exposant de Lyapunov. L'application est faite sur une plaque rectangulaire avec imperfections et soumise à une force extérieure aléatoire (modélisée par un bruit blanc).

Des travaux concernant la stabilité de profils d'avion dans un écoulement avec turbulence atmosphérique ont été entrepris récemment par les chercheurs canadiens Poirel et Price [85] [83]. Leurs études concernent la stabilité d'un profil bidimensionnel à deux degrés de liberté soumis à la turbulence atmosphérique. Les forces aérodynamiques sont obtenues en introduisant la composante fluctuante dans les fonctions indicielles de Theodorsen, Wagner et Küssner. La stabilité du système couplé aléatoire est déterminée par simulation temporelle de l'exposant de Lyapunov.

Poirion [88] étudie la stabilité d'un système aéroservoélastique contrôlé, prenant en compte un retard aléatoire dans le contrôle.

Xie et Ariaratnam [114] ainsi que Castanier et Pierre [30] étudient le phénomène de localisation de modes de vibration, qu'on rencontre dans les structures cycliques en présence d'imperfections géométriques aléatoires. Le facteur de localisation qui caractérise la (dé-)croissance exponentielle des amplitudes de vibration est lié aux exposants de Lyapunov. En effet, le facteur de localisation correspond au plus petit des exposants de Lyapunov positifs du système dynamique discret décrivant le transfert de l'amplitude de vibration entre les composantes de la structure cyclique. C'est le mode de vibration correspondant à cet exposant de Lyapunov qui possède le plus petit taux de croissance car la vibration est localisée dans une sous-structure. Un algorithme de Wolf et al. [112], permettant le calcul de tous les exposants de Lyapunov, est utilisé pour ces études.

Ce passage en revue de la littérature concerne plus particulièrement l'application des exposants de Lyapunov en mécanique mais n'est pas exhaustif. On peut trouver de nombreuses études de cas concernant des oscillateurs simples et notamment l'étude de l'oscillateur non linéaire de Duffing. Plusieurs auteurs développent des expressions approchées de l'exposant de Lyapunov ainsi que l'exposant de Lyapunov des moments pour des systèmes simples à peu de degrés de liberté, comme dans les travaux de Sri Namachchivaya [103], [41], mais aussi de van Roessel et Doyle [41], et plus récemment de Xie [113]. Cependant, peu de travaux concernent des systèmes mécaniques d'une

complexité arbitraire où une approximation analytique du plus grand exposant de Lyapunov n'est plus possible.

Chapitre 2

Mise en équation du système couplé aéroélastique

Le but de ce chapitre est de construire un modèle réduit du problème couplé fluide-structure nous permettant d'effectuer des études paramétriques impliquant un certain nombre de calculs répétés. L'analyse de la stabilité est basée sur le comportement asymptotique des trajectoires, nécessitant une simulation sur de longs intervalles de temps. C'est pourquoi l'utilisation de méthodes d'interaction indirecte s'impose ici afin de réduire le coût numérique. Dans ce cadre, on résout indépendamment les équations des parties fluide et structure. Dans un premier temps, on construit un modèle réduit structural sur lequel des forces, appelées forces aérodynamiques généralisées, vont s'appliquer. L'étape suivante consiste à calculer les forces aérodynamiques. Un modèle d'état de ces forces, faisant appel à un nombre réduit de variables, peut alors être obtenu.

2.1 Modélisation de la partie structure

Le problème aux limites de l'élastodynamique est d'abord introduit. La construction de la forme faible du problème ainsi que la discrétisation par la méthode des éléments finis sont ensuite rappelées. Dans ce qui suit, la notation d'Einstein concernant la sommation sur les indices répétés sera utilisée.

2.1.1 Problème aux limites de l'élastodynamique

Soit Ω_s, un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ occupé par le solide. On note $\partial\Omega_s$ sa frontière dont une partie, qu'on appelle Γ, est fixe. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ le point générique dans un repère cartésien. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ un champ de déplacement vérifiant les équations de l'élastodynamique dans Ω_s dont on note $v_i,\ i = \{1, 2, 3\}$ les composantes. Les forces

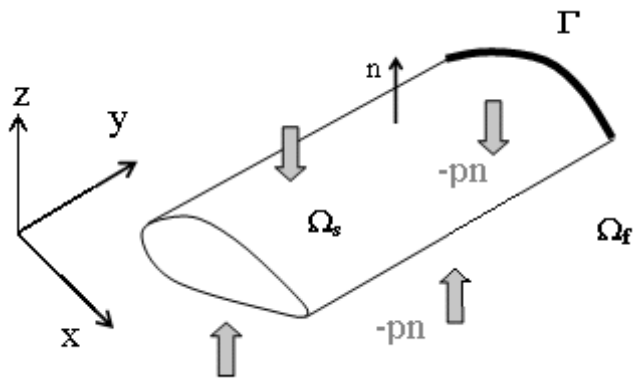

FIG. 2.1 – *configuration: aile encastrée*

surfaciques sur $\partial\Omega_s \backslash \Gamma$ sont dues à l'écoulement du fluide et s'expriment en fonction de la pression exercée par celui-ci sur l'élément de surface: $df = -pndS$. Ici, n est le vecteur unitaire extérieur normal à $\partial\Omega_s$. Le problème aux limites de l'élastodynamique s'écrit pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned} \rho\partial_t^2 v_i - \partial_j \sigma_{ij} &= 0 && \text{dans } \Omega_s, \\ v(x,t) &= 0 && \text{sur } \Gamma, \\ \sigma_{ij}(v) n_j &= -p(v) n_i && \text{sur } \partial\Omega_s \backslash \Gamma. \end{aligned} \tag{2.1}$$

où on a noté ∂_t la dérivée partielle par rapport à t et σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes σ. Ces équations sont complétées par les conditions initiales $v(x,0) = v_0$ et $\partial_t v(x,0) = \dot{v}_0$. Le tenseur des contraintes σ est lié au tenseur linéarisé des déformations $\epsilon_{kh}(v) = \frac{1}{2}(\partial_h v_k + \partial_k v_h)$ par la loi de comportement. Par ailleurs, pour un matériau viscoélastique à mémoire instantanée [46], le tenseur symétrique des contraintes s'écrit

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\epsilon_{kh}(v) + b_{ijkh}\epsilon_{kh}(\dot{v}),$$

où le tenseur des coefficients réels élastiques a_{ijkh} et celui des coefficients réels d'amortissement b_{ijkh} vérifient les propriétés classiques de symétrie et de positivité.

2.1.2 Formulation variationnelle et projection de Ritz-Galerkin

On introduit d'abord l'espace H^1 qui contient l'ensemble des fonctions w définies sur Ω_s à valeurs dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable, ($w \in L^2(\Omega_s)$) et dont les dérivées partielles premières sont de carré intégrable ($\partial w/\partial x_j \in L^2(\Omega_s)$). L'espace vectoriel des fonctions admissibles $\mathcal{V}$ est défini par:

$$\mathcal{V}(\Omega_s) = \{\nu \in \{H^1(\Omega_s)\}^3 |\ \nu = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Le produit scalaire sur $\mathcal{V}(\Omega_s)$ s'écrit $(v,u) = \int_{\Omega_s} v \cdot u \, dx$, où $v \cdot u = \sum_{i=1}^{3} v_i u_i$ et $dx = dx_1 dx_2 dx_3$, la norme associée étant donnée par $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. Soit ν dans l'espace $\mathcal{V}$ des fonctions admissibles, la formulation variationnelle s'écrit

$$\int_{\Omega_s} a_{ijkh}\epsilon_{kh}(v)\epsilon_{ij}(\nu)\, dx \quad + \int_{\Omega_s} b_{ijkh}\epsilon_{kh}(\dot{v})\epsilon_{ij}(\nu)\, dx + \rho \int_{\Omega_s} \partial_t^2 v_i \nu_i \, dx = \int_{\partial\Omega_s \setminus \Gamma} -p(v) n_i \nu_i \, dS, \tag{2.2}$$

ou encore,

$$m(\partial_t^2 v, \nu) + c(\partial_t v, \nu) + k(v,\nu) = f(v,\nu). \tag{2.3}$$

Les formes bilinéaires de masse, d'amortissement et de raideur, données ci-après, sont positives sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} m(v,\nu) &= \rho \int_{\Omega_s} v \; \nu \, dx, \\ c(v,\nu) &= \int_{\Omega_s} b_{ijkh}\epsilon_{kh}(v)\epsilon_{ij}(\nu)\, dx, \\ k(v,\nu) &= \int_{\Omega_s} a_{ijkh}\epsilon_{kh}(v)\epsilon_{ij}(\nu)\, dx. \end{aligned}$$

De plus, la forme linéaire $\nu \to f(v,\nu)$ est donnée par:

$$f(v,\nu) = \int_{\partial\Omega_s} -p(v) n_i \nu_i dS.$$

La formulation variationnelle du problème (2.1) s'énonce alors:

Trouver $\nu \in \mathcal{V}$ telle que l'équation (2.3) *soit vérifiée pour tout $v \in \mathcal{V}$.*

Les formes bilinéaires définissent des opérateurs linéaires auto-adjoints, continus et positifs, tel l'opérateur de masse M:

$$\mathrm{M} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*, \quad < \mathrm{M}v, \nu >= m(v,\nu),$$

où $\mathcal{V}^*$ est l'espace dual de $\mathcal{V}$. De même, on définit les opérateurs d'amortissement C et de raideur K

$$< \mathrm{C}v, \nu >= c(v,\nu), \qquad < \mathrm{K}v, \nu >= k(v,\nu),$$

ainsi que la forme linéaire

$$f(v,\nu) =< \mathrm{f}(v), \nu > .$$

Dans ce cadre, le problème s'écrit

$$\mathrm{M}\partial_t^2 v + \mathrm{C}\partial_t v + \mathrm{K}v = \mathrm{f}(v).$$

Construction d'une solution approchée On peut construire une solution approchée du problème (2.3) dans un sous-espace de dimension finie N noté $\mathcal{V}^N \subset \mathcal{V}$ en utilisant la méthode de projection de Ritz-Galerkin. Dans ce but, on choisit une base $\kappa = \{\kappa_1, \dots, \kappa_N\}$ de $\mathcal{V}^N$ telle que tout élément $v^N \in \mathcal{V}^N$ puisse s'écrire

$$v^N(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha(t)\kappa_\alpha(x).$$

On approche alors la fonction v dans $\mathcal{V}^N$ par la fonction v^N. De même, on utilise l'approximation de ν suivante:

$$\nu \approx \nu^N(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \nu_\alpha \kappa_\alpha(x).$$

En introduisant cette expression ainsi que l'approximation en dimension finie de v dans l'équation (2.2), on obtient la formulation variationnelle restreinte à l'espace $\mathcal{V}^N$.

2.1.3 Discrétisation par la méthode des éléments finis

On souhaite maintenant discrétiser le domaine Ω_s par la méthode des élément finis [120], [34]. On construit ainsi une base de $\mathcal{V}^N$ adaptée à la méthode des éléments finis (EF) telle que

$$v^N = \sum_{i=1}^{N} Q_i(t) w_i,$$

où N est le nombre de degrés de libertés (ddl) et w_i sont les fonctions polynomiales d'interpolation des éléments finis qui engendrent $\mathcal{V}^N$ (celles-ci sont choisies de telle manière que $w_i(P_i^j) = 1$ et $w_i(P_j^j) = 0$ où P_i^j désigne le ddl j du nœud i). Pour plus de détail, le lecteur peut consulter les ouvrages de référence, par exemple Zienkiewicz et Taylor [120] ou Bathe et Wilson [16].

2.2 Construction d'un modèle réduit du système couplé

Dans ce qui suit on suppose que la structure est discrétisée par la méthode des éléments finis. On peut écrire l'équation du mouvement de la structure linéaire soumise à des forces extérieures dues à un écoulement fluide comme suit:

$$\mathbb{M}\ddot{Q} + \mathbb{C}\dot{Q} + \mathbb{K}Q + (\mathbb{F} - \mathbb{F}_0) = 0, \tag{2.4}$$

$Q \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur des degrés de liberté, $\mathbb{M}$ la matrice de masse, $\mathbb{C}$ la matrice d'amortissement, $\mathbb{K}$ la matrice de raideur. U est la vitesse moyenne de l'écoulement (vitesse non perturbée à l'infini en amont du profil) et $\mathbb{F} - \mathbb{F}_0$ représente le vecteur des

forces aérodynamiques qu'on calcule en sommant les pressions appliquées sur chaque élément. Le déplacement totale $\tilde{Q}$ se compose d'une partie statique ainsi que de la partie dynamique $\tilde{Q} = Q_0 + Q$. La déformée statique Q_0 est due à la partie stationnaire des forces aérodynamique F_0. Elle est solution de l'équation

$$\mathbb{K}Q_0 + \mathbb{F}_0 = 0.$$

Dans la suite on ne s'intéressera qu'au comportement dynamique basses fréquences du système couplé.

On peut obtenir un modèle réduit en projetant l'équation (2.4) par la méthode de Ritz sur le sous-espace $\mathcal{C}^n$ engendré par $n << N$ vecteurs: ce sont les n premiers modes propres.

Modes propres du modèle EF Le problème spectral conservatif associé à l'équation (2.4) s'écrit

$$(\mathbb{K} - \omega_\alpha^2 \mathbb{M})\phi_\alpha = 0.$$

Puisque les matrices $\mathbb{K}$ et $\mathbb{M}$ sont symétriques positives on sait que le problème spectral admet N valeurs propres

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \ldots \leq \omega_N^2.$$

À chaque solution ω_j^2 correspond un mode propre $(\phi_\alpha)_{\alpha \geq 1}$. La famille $\{\phi_\alpha\}$ forme une base de $\mathbb{R}^N$ telle qu'on puisse écrire:

$$Q = \sum_{\alpha \geq 1} q_\alpha \phi_\alpha,$$

où les nombres réels $(q_\alpha)_{\alpha \geq 1}$ sont appelés les coordonnées généralisées. De plus,

$$< \mathbb{M}\phi_\alpha, \phi_\beta >= [\mathcal{M}]_{\alpha\beta} = \mu_\alpha \delta_{\alpha\beta},$$
$$< \mathbb{K}\phi_\alpha, \phi_\beta >= [\mathcal{K}]_{\alpha\beta} = \mu_\alpha \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta},$$

où $\mu_\alpha \in \mathbb{R}^+$ est la masse généralisée et $\delta_{\alpha\beta}$ désigne le symbole de Kronecker ($\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$ et 0 sinon).

Projection sur la base modale tronquée La solution de l'équation (2.4) est approchée par sa projection sur la base tronquée réduite aux n premiers modes propres $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$

$$Q \approx Q^n = \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha \phi_\alpha = \Phi q,$$

avec $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times n}$ la matrice comportant dans ses colonnes les n vecteurs propres retenus. Le mouvement de la structure s'écrit alors $\tilde{Q}^n = Q_0 + Q^n$. En notant $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des coordonnées généralisées, on obtient

$$\mathcal{M}\ddot{q}(t) + \mathcal{C}\dot{q}(t) + \mathcal{K}q(t) + F = 0 \tag{2.5}$$

où $F = (F_1, \dots, F_n)$ et $F_\alpha =< (\mathbb{F} - \mathbb{F}_0), \phi_\alpha >$. La matrice des masses généralisées $\mathcal{M}$ ainsi que la matrice des raideurs généralisées $\mathcal{K}$ sont des matrices diagonales. La matrice d'amortissement généralisée est donnée par

$$< \mathbb{C}\phi_\alpha, \phi_\beta >= [\mathcal{C}]_{\alpha\beta}.$$

Elle n'est pas diagonale, en général, et de plus on ne sait pas la construire. Aussi, prend-on souvent pour matrice d'amortissement une matrice diagonale dont les composantes représentent l'amortissement modal.

Les forces aérodynamiques généralisées se calculent comme projection des forces de pression sur les modes de la structure. On a

$$F_\alpha = \int_S p\vec{n}\, \phi_\alpha \, ds,$$

où l'intégrale $\int_S$ porte sur la surface du profil. Les forces aérodynamiques dépendent de la vitesse moyenne de l'écoulement U qui est une donnée du problème. En présence de turbulence, elles dépendent également des composantes fluctuantes de l'écoulement.

2.3 Calcul des forces aérodynamiques instationnaires

Les premiers modèles mathématiques destinés aux calculs de réponses aérodynamiques instationnaires étaient fondés sur l'utilisation de fonctions indicielles. Les modèles classiques pour un profil bidimensionnel dans un écoulement incompressible subsonique sont notamment: la fonction de Theodorsen [106] (1935) qui donne la réponse dans le domaine des fréquences d'un profil soumis à un mouvement sinusoïdal, la fonction de Wagner [110](1925), la réponse pour un saut unitaire de l'angle d'attaque ainsi que la fonction de Küssner [63](1929), qui donne la réponse à une rafale discrète. Avec la complexité croissante des structures, on souhaite aujourd'hui modéliser des structures d'ailes tri-dimensionnelles, voire des avions complets et non plus de simples profils bidimensionnels. Il n'est alors plus possible d'obtenir une expression analytique pour ce type de problème. D'un autre côté, l'intégration temporelle directe des équations fluide-structure couplées ne peut pas être envisagée pour des études paramétriques, car numériquement trop coûteuse, et ceci même dans le cas bidimensionnel. Les méthodes de calcul numérique de la réponse aérodynamique instationnaire linéaire dans le domaine des fréquences se sont alors imposées. Différentes méthodes approchées ont été développées à l'ONERA, permettant le calcul des forces aérodynamiques généralisées (FAG) instationnaires pour des structures d'avions complets.

Dans ce travail, les FAG sont calculées soit par la méthode des doublets lorsqu'on se place dans le domaine subsonique, soit en résolvant les équations d'Euler linéarisées pour le domaine subsonique ou transsonique. Dans les deux cas, les FAG sont obtenues en imposant un mouvement harmonique à la structure et en ne gardant que le premier

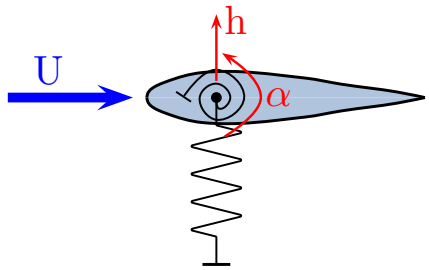

FIG. 2.2 – *configuration du profil 2D soumis à un écoulement*

harmonique de chaque réponse. Ces approximations permettent, en effet, d'exprimer les FAG linéairement dans le domaine fréquentiel. En notant $\hat{F}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt$ la transformée de Laplace des FAG, on obtient une expression de la forme

$$\hat{F}(s) = H(s)\hat{q}(s).$$

Les forces aérodynamiques dépendent de la vitesse de l'écoulement U ainsi que de la densité volumique du fluide ρ. Plus précisément:

$$\hat{F}(s) = \frac{1}{2}\rho U^2 \mathcal{A}(s)\hat{q}(s),$$

où $\mathcal{A}(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ est une fonction à valeurs matricielles définissant la matrice globale des coefficients aérodynamiques et $\hat{q}(s)$ désigne la transformée de Laplace du vecteur des coordonnées généralisées.

Ces deux méthodes sont décrites dans les sections suivantes. Ensuite, on explique comment construire un modèle d'état de ces FAG. Ce modèle d'état nous permet d'introduire une équation différentielle modélisant le mouvement du système couplé avion-aérodynamique.

Remarquons qu'on utilise alors un couplage indirect où on résout d'abord les équations régissant le fluide pour un mouvement de la structure supposé connu. Les forces aérodynamiques ainsi obtenues sont ensuite appliquées à la structure.

2.3.1 La théorie de Theodorsen/Wagner pour des ailes minces

Les détails de cette approche simplifiée, destinée au calcul des forces aérodynamiques induites par un profil en mouvement de tangage et de pompage, sont donnés par exemple dans l'ouvrage de référence [43]. Cette modélisation s'applique dans le cas d'un fluide incompressible dans le domaine subsonique. On considère un profil bidimensionnel à deux ddl, à savoir le mouvement de pompage h et de tangage α. On note

$l = 2b$ la longueur de corde du profil et d_0 désigne la distance entre la demi-corde et le centre élastique. Soient la force aérodynamique de portance L et le moment aérodynamique M. Dans le domaine fréquentiel, pour des mouvements harmoniques, les forces aérodynamiques peuvent être exprimées par une équation de la forme

$$\hat{F}(\omega) = \big(-\hat{L}(\omega)\ \hat{M}(\omega)\big) = \Big[B_1(i\omega) + B_2(i\omega)^2 + C(k)\big(B_3(i\omega) + B_4\big)\Big]\hat{q}(\omega),$$

où $C(k) = G_0(k) + iG_1(k)$ est la fonction de Theodorsen qui dépend de la fréquence réduite $k = \omega b/U$. En utilisant la fonction de Wagner

$$\phi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(k)}{ik}\, e^{ik\tau} dk, \quad \text{avec } \tau = \frac{U\,t}{b}$$

on obtient, dans le domaine temps, grâce au principe de superposition, les expressions suivantes pour des mouvements quelconques [43]:

$$\begin{aligned} -L = {} & \pi\rho b^2\big[\ddot{h} + U\dot{\alpha} - d_0\ddot{\alpha}\big] + \\ & 2\pi\rho bU\Big[w_{3/4}(t)\phi(0) - \int_0^t \frac{d\phi(t-s)}{ds} w_{3/4}(s)\, ds\Big], \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} M = {} & \pi\rho b^2\big[d_0\ddot{h} - (0.5b + d_0)U\dot{\alpha} - (d_0^2 + 1/8b^2)\ddot{\alpha}\big] + \\ & 2\pi\rho(d_0 + 0.5b)U\Big[w_{3/4}(t)\phi(0) - \int_0^t \frac{d\phi(t-s)}{ds} w_{3/4}(s)\, ds\Big], \end{aligned} \tag{2.7}$$

où

$$\phi(t) = 1 - 0.165e^{-0.0455\frac{U}{b}t} - 0.335e^{0.3\frac{U}{b}t}$$

est la fonction de Wagner et

$$w_{3/4}(t) = \dot{h} + U\alpha + (0.5b - d_0)\dot{\alpha}$$

est un terme prenant en compte la vitesse de vent apparente par rapport au profil. On considère la valeur au point situé au 3/4 de la corde. On dispose alors d'un modèle analytique simplifié des forces aérodynamiques, pouvant être utilisé dans les équations du système couplé.

2.3.2 La méthode des doublets

La méthode des doublets, qui a été développée dans les années 60, est couramment utilisée par les industriels pour le calcul des forces aérodynamiques généralisées dans le domaine subsonique. Nous ne rappelons ici que les grandes lignes (voir [1, 93] pour plus de détails).

La théorie linéaire de la surface portante conduit à un problème aux limites linéaire portant sur le potentiel des vitesses. On admet que le fluide est parfait, irrotationnel, que les transformations sont isentropiques et que les perturbations apportées à l'écoulement par la présence de la surface portante sont petites. Dans ces conditions, le potentiel des vitesses vérifie une équation des ondes acoustiques et la pression est liée à la dérivée particulaire du potentiel

$$\Delta\phi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0,$$

a étant la vitesse du son. Par ailleurs, on suppose que les particules de fluide en contact avec la surface portante glissent sur celle-ci.

Quant à la structure, ses mouvements sont supposés harmoniques, de petite amplitude. En utilisant la théorie linéarisée, une expression intégrale reliant la vitesse normale à la surface $w(x,y)\exp(i\omega t)$ à la différence de pression entre les deux côtés de la surface portante $\Delta p\,\exp(i\omega t)$ peut être déduite:

$$\frac{w(x,y)}{U} = \frac{1}{4\pi\rho U^2}\iint K(x-\zeta, y-\delta; k)\Delta p(k;\zeta,\delta)d\zeta d\delta,$$

où x et y sont des coordonnées orthogonales sur la surface S des doublets, K est la fonction noyau et k désigne la fréquence réduite $k = \omega l/U$, l étant une longueur de référence. Par ailleurs, la relation entre l'angle d'attaque de la vitesse $\alpha = w/U$ et la déformée normale à la surface h s'écrit

$$\alpha = \frac{w(x,y)}{U} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - i\frac{k}{l}h(x,y).$$

Les surfaces portantes de la configuration sont approchées par une grille aérodynamique constituée de pavés qui sont arrangés en lignes parallèles à l'écoulement. Le nombre de pavés nécessaires à l'obtention d'une précision suffisante dépend, entre autres, de l'allongement et des fréquences réduites. Les forces sur ces pavés sont supposées agir sur une ligne portante située au quart de la corde de chaque élément. La portance est supposée constante sur chaque ligne de pavé mais varie entre les pavés. Les conditions aux limites sont introduites sous forme d'une vitesse normale imposée sur le point central situé sur la ligne à trois quarts de corde de chaque pavé. Il en résulte l'ensemble d'équations algébriques linéaires suivant:

$$\frac{w(x_i,y_i)}{U} = \bar{w}_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij}\Delta\bar{p}_j,$$

où $\Delta\bar{p}_j = \Delta p_j/(\rho U^2/2)$. Dans cette dernière expression, Δp_j représente la pression sur le pavé j. Elle s'obtient par division de la portance du pavé par sa surface. Sous forme matricielle, on peut écrire $\Delta\bar{p} = \mathcal{D}\,\bar{w}$ avec $\mathcal{D} = [D_{ij}]^{-1}$. Cette expression permet

de déterminer les composantes de la matrice d'influence. La composante pour les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ modes structuraux s'écrit [93]:

$$\mathcal{A}_{ij}(k) \approx \frac{1}{lb^2} \sum_{m=1}^{n} \Delta p_m^j(k) f_m^i \Delta S_m,$$

où ΔS_k est la surface du doublet k, f_k^i est la déformée verticale du pavé k due au mode i et Δp_k^j est la pression due au mode j. Remarquons qu'en général, les modes structuraux sont calculés avec un code aux éléments finis. Avec ces données, il est possible de déterminer la déformation des surfaces portantes, au point de référence, pour chaque mode.

De manière générale, la méthode des doublets est très efficace et robuste mais des non-linéarités, et en particulier les discontinuités dues aux ondes de choc pour un écoulement transsonique, ne peuvent pas être prises en compte. Dans ce travail, le calcul des forces aérodynamiques par la méthode des doublets est effectué avec le code CAPRI développé à l'ONERA.

2.3.3 Les FAG par les équations d'Euler linéarisées

Dans le domaine transsonique, des ondes de choc sont susceptibles d'apparaître et doivent être prises en compte. Les forces aérodynamiques peuvent alors être déterminées par résolution des équations d'Euler linéarisées. Ces équations s'obtiennent en décomposant le champ instationnaire en un champ stationnaire et une perturbation du premier ordre.

Le fluide est alors modélisé par un écoulement parfait (non visqueux) qui est régi par les équations d'Euler. On note Ω_f le domaine occupé par le fluide et $\partial\Omega_f$ sa frontière avec la structure. Les équations d'Euler sous forme conservative s'écrivent

$$\partial_t W(x,t) + \nabla . F(W(x,t)) = 0,$$

avec $W = (\,\rho,\, \rho u_1,\, \rho u_2,\, \rho u_3, E\,)$ où ρ est la densité du fluide, u_i les composantes de la vitesse de l'écoulement telles que $u = (u_1, u_2, u_3)$ et E l'énergie totale. Par ailleurs, $F(W) = \big(F_1(W),\, F_2(W),\, F_3(W)\big)$ est donné par (δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker):

$$F_i(W) = \big(\,\rho u_i\,,\ \rho u_1 u_i + \delta_{1i}\, p\,,\ \rho u_2 u_i + \delta_{2i}\, p\,,\ \rho u_3 u_i + \delta_{3i}\, p\,,\ u_i(E+p)\,\big).$$

La pression p et l'énergie E sont liées par la relation $p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho|u|^2)$, où $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ est le rapport des capacités calorifiques à pression et volume du fluide constants. Les conditions initiales sont données par

$$W(x,0) = W_0(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Les conditions aux limites de ce problème sont classiques:

- Condition pour les parois fixes:
  $u(t).n = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$

- Condition de glissement sur les parois mobiles:
  $u(t).n(t) = u_p(t).n(t)$, $n(t)$ étant la normale et $u_p(t)$ la vitesse instantanée du profil.
- Condition de non-réflexion à l'infini:
  Cette condition consiste à considérer un domaine extérieur pour lequel l'état du fluide est connu. L'application des relations de compatibilité entre le domaine extérieur et le domaine intérieur permet le calcul du champ de frontière.

Le champ instationnaire W est ensuite décomposé en un champ stationnaire W_s et une perturbation du premier ordre $\delta(W)$. En effectuant un développement limité au premier ordre, on obtient l'équation suivante pour le champ $\delta(W)$ [74]:

$$\partial_t \delta(W) + \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(W_s)\delta(W) = 0,$$

$D_i(W_s)$ désignent les matrices jacobiennes des flux F_i calculées pour le champ stationnaire. Les conditions aux limites sont déduites de celles imposées pour les équations d'Euler par linéarisation au premier ordre. Pour la condition de glissement, la normale instationnaire doit être également linéarisée.

On effectue le calcul des forces aérodynamiques en imposant un mouvement harmonique à la structure, de la forme $a \exp[i\omega\, t]$. Ceci est effectué pour tous les modes de la strucure retenus et pour un certain nombre de fréquences ω. On recherche des solution harmoniques de la forme $\mathcal{A}(\omega) \exp[i\omega t]$. Le problème est ainsi linéarisé en ne considérant que le premier harmonique de chaque réponse. Le code REELC développé à l'ONERA permet d'effectuer ces calculs.

Malgré la restriction du mouvement de la structure à de faibles amplitudes, cette formulation permet de prendre en compte des chocs apparaissant dans un régime transsonique [74]. Néanmoins, l'amplitude du mouvement ne doit pas entraîner des déplacements de la zone de choc trop importants car ils ne sont pas pris en compte par la méthode (les chocs sont considérés figés à leurs positions stationnaires).

2.3.4 Méthode d'approximation par fractions rationnelles

Comme on vient de le voir, les forces aérodynamiques instationnaires sont supposées données dans le domaine de Laplace par une fonction linéaire par rapport à $\hat{q}(s)$:

$$\hat{F}(s) = \frac{1}{2}\rho\, U^2 \mathcal{A}(s)\hat{q}(s). \tag{2.8}$$

La matrice $\mathcal{A}(s)$, $s = i\omega + \alpha$ peut être calculée, pour les fréquences réduites $k = \omega\frac{l}{U}$, par la méthode des doublets ou encore par résolution des équations d'Euler linéarisées. La fonction matricielle $s \longmapsto \mathcal{A}(s)$ est ainsi connue pour un certain nombre de valeurs complexes

$$s \in \{\frac{i\omega_1\, l}{V}, \dots, \frac{i\omega_K\, l}{V}\},$$

l étant la longueur de corde du profil. On souhaite étendre cette fonction à un domaine du plan complexe. En utilisant le théorème du prolongement analytique, il est alors possible d'approcher $\mathcal{A}$ par une fonction analytique sur un ouvert du plan complexe contenant l'axe imaginaire. Dans ce but, on introduit la variable complexe normalisée $\tilde{s} = s\,l/U$ et on cherche à approcher $\mathcal{A}(\tilde{s})$ par une fonction rationnelle en $\tilde{s}$ suivant la méthode de Karpel [54]:

$$\mathcal{A}(s) \approx A_0 + A_1 \frac{l}{U} s + A_2 \big(\frac{l}{U}\, s\big)^2 + G[I_{n_p} \frac{l}{U} s - R]^{-1} E \frac{l}{U} s. \tag{2.9}$$

Si n est le nombre de modes propres de la structure retenus, A_0, A_1, A_2 sont des matrices réelles carrées de taille $n \times n$, $G \in Mat_{\mathbb{R}}(n, n_p)$, $E \in Mat_{\mathbb{R}}(n_p, n)$. La matrice R est une matrice réelle diagonale qui contient les n_p pôles,

$$R = \mathrm{diag}(-p_1, \dots, -p_{n_p}),\ p_i > 0,$$

et $I_{n_p} \in Mat_{\mathbb{R}}(n_p, n_p)$ est la matrice identité. D'autre part, on introduit la variable d'état $\hat{X}(s) \in \mathbb{C}^{n_p}$

$$\hat{X}(s) = [I_{n_p} \frac{l}{U} s - R]^{-1} E \frac{l}{U} s\, \hat{q}(s), \tag{2.10}$$

qui, dans le domaine temporel, est solution de l'équation différentielle

$$\dot{X}(t) = \frac{U}{l} R\, X(t) + E\, \dot{q}(t).$$

En regroupant les deux expressions (2.10) et (2.9), on obtient l'expression approchée des forces aérodynamiques dans le domaine temps par transformée de Laplace inverse

$$F(q, \dot{q}, \ddot{q}, X) = \frac{1}{2} \rho\, U^2 \left(A_0\, q(t) + \frac{l}{U} A_1\, \dot{q}(t) + (\frac{l}{U})^2 A_2\, \ddot{q}(t) + G X(t) \right). \tag{2.11}$$

Résolution du problème de minimisation Le problème de minimisation à résoudre pour un nombre de pôles n_p donné est le suivant:

$$\min_{A_0, A_1, A_2, G, R, E} \sum_j \|\mathcal{A}(ik_j) - A_0 - A_1 ik_j - A_2 (ik_j)^2 - G[I_{n_p} ik_j - R]^{-1} E\, ik_j\|^2,$$

les $k_j = \omega_j \frac{l}{U}$ étant les fréquences réduites.

Pratiquement, l'optimisation par moindres carrés est effectuée en écrivant l'équation

$$\mathcal{A}(ik_j) = A_0 + A_1 ik_j + A_2 (ik_j)^2 + G[I_{n_p} ik_j - R]^{-1} E\, ik_j$$

sous forme d'un système linéaire $TX = S$ surdimensionné où X représente les inconnues et où les éléments de la matrice $\mathcal{A}(k_j) - A_0$ sont stockés dans S. Par ailleurs, on pose $A_0 = \mathcal{A}(0)$ car les forces aérodynamiques à fréquence nulle coïncident avec les forces aérodynamiques stationnaires. Une procédure qui permet de coupler ce problème à un tirage aléatoire des pôles a été développée dans [87]:

1. On initialise aléatoirement la matrice R contenant les pôles.

2. On se donne G et on optimise par rapport à A_1, A_2 et E, par la méthode des moindres carrés, en utilisant la matrice R.
3. On reporte la matrice E trouvée à l'étape précédente et on optimise par rapport à A_1, A_2 et G en utilisant la matrice R.
4. On itère sur les étapes 2. et 3. afin de réduire l'erreur.

On revient alors à l'étape 1. et l'on répète la procédure jusqu'à l'obtention d'une approximation suffisante. En pratique, il s'est avéré que $n_p \geq n+1$ est suffisant, et qu'on obtient une très bonne approximation avec 5 sous-itérations et un nombre de tirages de pôles raisonnable (en fonction de la taille du problème). On remarque, que le nombre de pôles introduits est le paramètre principal permettant de réduire l'erreur.

Remarque 1. *La méthode utilisée ici, suggérée par Karpel [54], permet d'introduire un nombre de variables auxiliaires plus faible que dans l'approche conventionnelle par fraction rationnelle [92]. En effet, le nombre de variables auxiliaires correspond au nombre de pôles introduits.*

2.4 Calcul des domaines de stabilité du système couplé

L'analyse de la stabilité du système couplé avion - forces aérodynamiques dans son domaine de vol constitue un objectif essentiel de l'aéroélasticité. Il s'agit de savoir si, suite à l'excitation d'un mode propre de vibration, l'amplitude de la réponse croît ou décroît avec le temps. Pour répondre à cette question, on dispose de l'équation temporelle du système couplé, qu'on obtient en regroupant les relations (2.11) et (2.5). En posant $Y = (q\,,\dot{q}\,,X) \in \mathbb{R}^d$ où $d = (2{\times}n + n_p)$, le système couplé s'écrit sous forme d'une équation différentielle du premier ordre (appelée aussi forme d'état):

$$\dot{Y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{K} & -\tilde{M}^{-1}\tilde{C} & -\tilde{M}^{-1}G\frac{1}{2}\rho U^2 \\ 0 & E & \frac{U}{l}R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \\ X(t) \end{pmatrix} = A(U)Y(t), \qquad (2.12)$$

avec

$$\tilde{M} = \mathcal{M} + \frac{1}{2}\rho l^2 A_2 \qquad \tilde{C} = \mathcal{C} + \frac{1}{2}\rho U\, l A_1 \qquad \tilde{K} = \mathcal{K} + \frac{1}{2}\rho U^2 A_0,$$

et où I_n désigne la matrice identité dans $Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$.

Le problème de stabilité se réduit alors à l'étude de la stabilité d'un système dynamique linéaire. Par conséquent, il suffit d'examiner les valeurs propres de la matrice $A(U)$: si toutes les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives, alors le système couplé est asymptotiquement stable pour la valeur du paramètre U. Sinon, il est instable et on parle de flottement. L'étude de la stabilité doit se faire pour toutes les valeurs du paramètre appartenant au domaine de vol de l'avion. Afin de visualiser globalement les résultats de l'analyse de stabilité, on trace ce que l'on nomme les courbes de flottement. Plus précisément, pour chaque mode du système couplé on trace l'évolution de sa fréquence et de son amortissement (ce qui revient en fait à tracer les

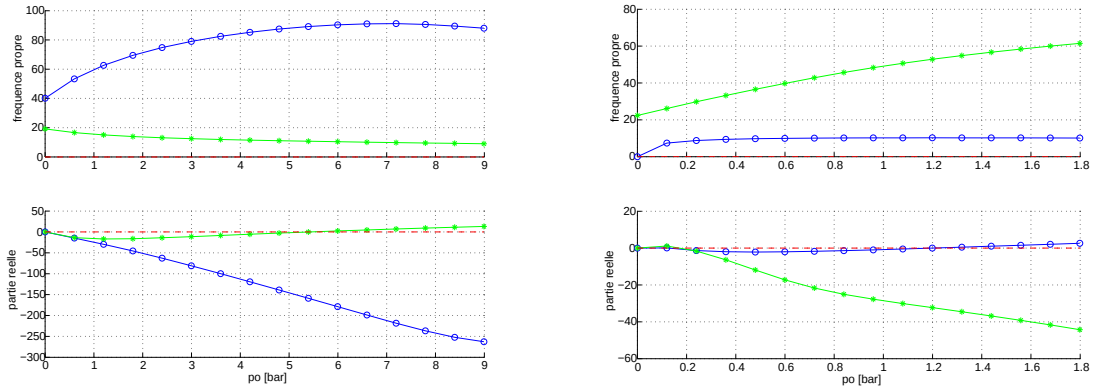

FIG. 2.3 – *diagramme de stabilité pour un profil 2D linéaire (gauche) et avec non-linéarité (à droite)*

parties imaginaires et les parties réelles des valeurs propres) en fonction de la valeur du paramètre. Il y a instabilité si l'une des courbes représentant les parties réelles des valeurs propres traverse l'axe horizontal. Un exemple de diagramme de flottement pour deux modes est donné par la figure 2.3, où la pression totale p_0 a été choisie comme paramètre. Une difficulté dans cette procédure réside dans l'identification des n valeurs propres complexes correspondant aux modes du système couplé parmi les d valeurs propres de la matrice $A(U) \in Mat_{\mathbb{R}}(d,d)$. Ces modes sont connus pour $U = 0$, car si les forces aérodynamiques sont nulles, les modes couplés se réduisent aux simples modes propres structuraux. Il faut alors ensuite procéder à un suivi de ces modes structuraux. Les n_p valeurs propres supplémentaires correspondent aux modes aérodynamiques introduits par la variable d'état X.

Remarque 2. *La méthode classique pour étudier la stabilité du système couplé n'est pas celle décrite ci-dessus. Généralement, on ne travaille pas avec la forme d'état, donnée par l'équation* (2.12)*, mais on effectue l'analyse de la stabilité en résolvant l'équation dans le domaine fréquentiel, obtenue par transformation de Laplace des relations* (2.11) *et* (2.5)*:*

$$[s^2\mathcal{M} + s\,\mathcal{C} + \mathcal{K} + \frac{1}{2}\rho U^2 \mathcal{A}(s)]q = 0.$$

C'est une équation non linéaire en $s \in \mathbb{C}$, qui est résolue par une méthode de point fixe, couplée à un problème aux valeurs propres. Un désavantage de cette méthode réside dans le fait que la convergence de la méthode itérative de point fixe n'est pas démontrée. Par conséquent, cette méthode peut ne pas converger.

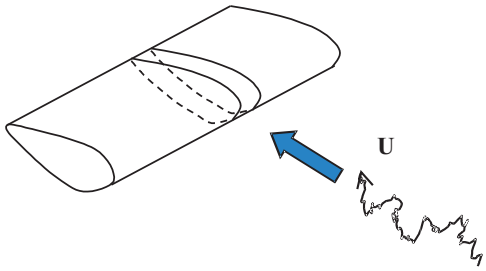

FIG. 2.4 – *vitesse d'écoulement longitudinale*

2.5 Introduction d'un bruit modélisant la turbulence longitudinale

La prise en compte de la turbulence longitudinale introduit un bruit multiplicatif dans l'équation différentielle modélisant le système couplé. On considère d'abord le cas simple d'un profil bidimensionnel (voir figure 2.2) ou alors d'une aile 3D soumise à une turbulence cylindrique. La turbulence dite cylindrique (dite aussi de turbulence à rouleaux) décrit une turbulence constante en envergure qui varie uniquement avec le temps. Par conséquent, elle peut être modélisée à l'aide d'un processus stochastique scalaire indexé par la variable temps. La modélisation du bruit ou processus stochastique qui excite le système sera détaillée dans le chapitre 3, pour l'instant on le note $\eta(t)$. Afin d'obtenir une modélisation plus réaliste, la variation de la turbulence le long de l'envergure de l'aile peut être introduite.

2.5.1 Turbulence cylindrique

On pose $U(t) = \overline{U} + \eta(t)$ où $\overline{U}$ représente la vitesse moyenne de l'écoulement et $\eta(t)$ la partie fluctuante. En remplaçant U par le processus stochastique $U(t)$ dans l'expression des forces aérodynamiques, on obtient:

$$F(q, \dot{q}, \ddot{q}, X, \eta) = \tfrac{1}{2}\rho \Big(\big(\overline{U} + \eta(t)\big)^2 A_0\, q(t) + \big(\overline{U} + \eta(t)\big) A_1\, \dot{q}(t) + A_2\, \ddot{q}(t) + \big(\overline{U} + \eta(t)\big)^2 G X(t) \Big).$$

La matrice A du modèle d'état devient alors une matrice aléatoire. Le mouvement du système couplé est alors décrit par le système différentiel aléatoire suivant:

$$\dot{Y} = A\big(\eta(t)\big) Y, \quad Y(0) = Y_0. \tag{2.13}$$

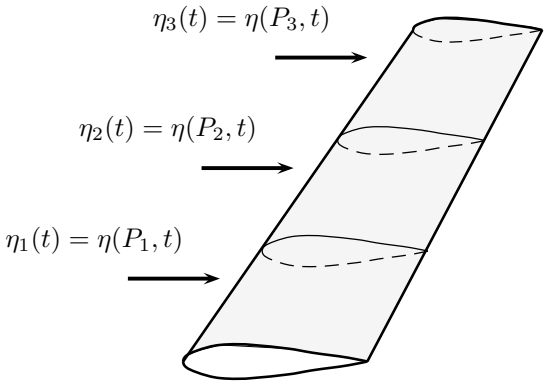

FIG. 2.5 – *modélisation par tranches*

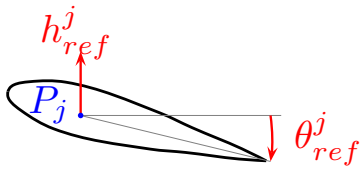

FIG. 2.6 – *2 ddl par tranche*

La matrice $A(\eta)$ s'écrit pour tout $\overline{U} \in \mathbb{R}^+$ fixé:

$$A(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & I_{(nm)} & 0 \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{K}(\eta) & -\tilde{M}^{-1}\tilde{C}(\eta) & -\tilde{M}^{-1}G\frac{1}{2}\rho(\overline{U}+\eta)^2 \\ 0 & E & (\overline{U}+\eta)/l\ R \end{bmatrix},$$

où

$$\tilde{M} = \mathcal{M} + \frac{1}{2}\rho l^2 A_2 \qquad \tilde{C}(\eta) = \mathcal{C} + \frac{1}{2}\rho(\overline{U}+\eta)\, l A_1 \qquad \tilde{K}(\eta) = \mathcal{K} + \frac{1}{2}\rho(\overline{U}+\eta)^2 A_0.$$

Dans une telle modélisation, on fait implicitement l'hypothèse que l'expression des forces aérodynamiques obtenues pour un écoulement stationnaire (vitesse de vent constante) reste valide dans le cas de l'écoulement turbulent. Ceci semble justifié seulement si le temps de corrélation de la turbulence est suffisamment grand (gros tourbillons).

2.5.2 Prise en compte de la variation le long de l'aile

Une variation de la turbulence le long de l'envergure de l'aile peut être introduite par le biais d'une modélisation des forces aérodynamiques par tranches. On considère que la turbulence ne varie pas le long de chaque tranche (figure 2.5). En ce qui concerne l'introduction du bruit aléatoire, cette formulation nous permettra de se ramener au cas d'un profil bidimensionnel car chaque tranche peut être est modélisée par deux (§2.5.3) ou trois (§2.5.5) ddl. Bien évidemment, afin qu'une modélisation de l'aérodynamique par tranches soit valable, il est nécessaire de vérifier que la déformation des tranches reste suffisamment petite. La modélisation des forces aérodynamiques par tranches, avec la méthode des doublets, est décrite dans la section suivante.

2.5.3 Modélisation de l'aérodynamique par tranches

On suppose que les forces aérodynamiques sont calculées avec la méthode des doublets. Dans le domaine des fréquences, les forces sur les pavés de la grille aérodynamique s'écrivent:

$$F_{\text{pavés}} = \bar{p}\,\mathcal{D}(k)\alpha,$$

où α est le vecteur des angles d'incidence des pavés. La composante $\mathcal{D}_{ij}$ de la matrice d'influence $\mathcal{D}$ donne l'effort créé sur le pavé i par la mise en incidence du pavé j. Par ailleurs, on a noté $\bar{p} = \frac{1}{2}\rho U^2$. En pratique, la matrice $\mathcal{D}$ est calculée pour un nombre N_f de fréquences réduites $k = \omega/U$. L'angle d'incidence peut s'exprimer comme somme de l'angle de rotation du pavé θ et de l'angle apparent de l'écoulement telle que[1]

$$\alpha = \theta - \frac{\dot{h}}{U},$$

h étant le vecteur des déplacements verticaux des pavés. Aussi, sous l'hypothèse d'un mouvement harmonique, on peut écrire $\alpha = \theta - i\,k\hat{h}$.
Pour cette étude, on décompose les forces aérodynamiques généralisées (FAG) en une partie venant de la contribution de la voilure et une partie provenant de la contribution des autres parties de l'avion (empennages horizontaux, dérives, moteurs).

$$\hat{F} = \bar{p}\mathcal{A}_{voilure}(s)\hat{q} + \bar{p}\mathcal{A}_{autres}(s)\hat{q}.$$

L'effet de la turbulence longitudinale est introduit dans le terme des forces aérodynamiques concernant la voilure, en passant par un modèle aérodynamique par tranches. Ceci nécessite le calcul de la force ainsi que du moment aérodynamique agissant sur les tranches.

Dans ce but, on divise le maillage aérodynamique de la voilure comportant Np doublets (pavés) en N_t tranches. Les forces s'exerçant sur la tranche l sont appliquées aux points de référence P_l de la tranche l, $l = \{1, \dots, N_t\}$. On note h^l_{ref} et θ^l_{ref} les deux degrés de libertés de chaque tranche. Sous l'hypothèse que la voilure ne subisse pas de déformation le long d'une tranche, on peut exprimer le déplacement vertical h_j ainsi que l'angle de rotation θ_j du pavé j en fonction des deux degrés de libertés de la tranche correspondante (sachant que le pavé j se situe sur la tranche l):

$$\begin{aligned} \theta_j &= \theta^l_{ref}, \\ h_j &= h^l_{ref} + \theta^l_{ref}\Delta^l_j. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Δ^l_j est la distance entre le point de référence P_l et le doublet j. A l'aide de ces observations, on peut définir, pour chaque tranche, une résultante de force $R_l = \sum R_j$ ainsi qu'un moment résultant $M_l = \sum R_j\Delta^l_j$, la somme s'effectuant sur tous les pavés

1. Plus précisément, on a $\alpha = \theta - \arctan\frac{\dot{h}}{U} \simeq \theta - \frac{\dot{h}}{U}$.

situés sur la tranche l. Les vecteurs R et M comportant les résultantes par tranches s'écrivent:

$$\begin{aligned} R(k) &= \bar{p}\, M_{surf} D(k)\alpha, \\ M(k) &= \bar{p}\, M_{surf} \Xi\, D(k)\alpha, \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $D(k) \in \mathbb{R}^{(Np,Np)}$ est la partie de la matrice d'influence correspondant aux ddl de la voilure. La matrice $\Xi \in \mathbb{R}^{(N_p,N_p)}$ est une matrice diagonale comportant les valeurs des bras de levier Δ_j^T. Par ailleurs, on introduit la matrice $M_{surf} \in \mathbb{R}^{(N_t,N_p)}$ dont les éléments sont donnés par $M_{surf}(i,j) = M_{red}(i,j)a(j)$ où $a(j)$ représente la surface du doublet j. La matrice $M_{red} \in \mathbb{R}^{(N_t,N_p)}$ est une matrice booléenne qui permet la réduction du modèle doublets sur le modèle par tranches. Elle ne comporte que des valeurs binaires (0 ou 1), en fonction de l'appartenance ou non d'un pavé à une certaine tranche. Dans ce qui suit, on notera $h_{ref} = (h_{ref}^1, h_{ref}^2, \ldots, h_{ref}^{N_t})$ ainsi que $\theta_{ref} = (\theta_{ref}^1, \theta_{ref}^2, \ldots, \theta_{ref}^{N_t})$ les vecteurs dans $\mathbb{R}^{N_t}$ comportant les degrés de liberté de déplacement vertical et de rotation des tranches. À l'aide des relations (2.14) et en rappelant que $\alpha = \theta - i\,k\hat{h}$, on peut déterminer le vecteur des incidences α en fonction des degrés de libertés des tranches. On obtient l'expression

$$\alpha = M_{red}^T \theta_{ref} - ik(M_{red}^T\, h_{ref} + \Xi\, M_{red}^T \theta_{ref}),$$

qu'on introduit dans (2.15), pour finalement déduire:

$$\begin{pmatrix} R \\ M \end{pmatrix} = \bar{p}\,\mathcal{R}(k) \begin{pmatrix} h_{ref} \\ \theta_{ref} \end{pmatrix} \quad \text{et } \mathcal{R}(k) = \begin{bmatrix} -ik\, R_\alpha & R_\alpha + ik\, R_{\frac{\dot\theta}{U}} \\ -ik\, M_\alpha & M_\alpha + ik\, M_{\frac{\dot\theta}{U}} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} R_\alpha &= M_{surf} D M_{red}^T & M_\alpha &= M_{surf} \Xi\, D\, M_{red}^T \\ R_{\frac{\dot\theta}{U}} &= -M_{surf} D\, \Xi\, M_{red}^T & M_{\frac{\dot\theta}{U}} &= -M_{surf} \Xi\, D\, \Xi\, M_{red}^T. \end{aligned}$$

On observe que l'équation (2.16) peut être écrite sous la forme

$$\begin{pmatrix} R \\ M \end{pmatrix} = \bar{p} \begin{bmatrix} R_\alpha & R_{\frac{\dot\theta}{U}} \\ M_\alpha & M_{\frac{\dot\theta}{U}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{ref} \\ \frac{\dot\theta}{U}_{ref} \end{pmatrix},$$

d'où les notations.

Par ailleurs, on a effectué un lissage des modes de la structure par le moyen de polynômes à $n_{pol} = n_x \times n_y$ degrés de libertés. Ceci nous permet de déterminer les déformées modales du modèle par tranches:

$$\begin{aligned} h_{ref} &= \phi_h \hat{q}, \\ \theta_{ref} &= \phi_\theta \hat{q}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Le travail virtuel des forces aérodynamiques généralisées se calcule comme suivant:

$$dW_{gen} = \bar{p}\, d\hat{q}^T \mathcal{A}_{voilure}\hat{q},$$

alors que la somme des travaux des forces de portance et des moments aérodynamiques sur les tranches est donnée par

$$dW_{tr} = dh_{ref}^T R + d\theta_{ref}^T M = d\hat{q}^T [\phi_h^T \ \phi_\theta^T] \begin{pmatrix} R \\ M \end{pmatrix},$$

$$dW_{tr} = \bar{p}\, d\hat{q}^T [\phi_h^T \ \phi_\theta^T] \mathcal{R} \begin{bmatrix} \phi_h \\ \phi_\theta \end{bmatrix} \hat{q}.$$

Le travaux virtuels du modèle par tranches et du modèle aux éléments finis réduit doivent être egaux ($dW_{tr} = dW_{gen}$), d'où l'expression de la matrice d'influence des forces aérodynamiques généralisées

$$\bar{p}\mathcal{A}_{voilure} = [\phi_h^T \ \phi_\theta^T] \bar{p}\, \mathcal{R} \begin{bmatrix} \phi_h \\ \phi_\theta \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Afin d'obtenir les forces aérodynamiques complètes agissant sur l'avion, il suffit de rajouter le terme correspondant aux autres éléments de l'avion comme l'empennage, les dérives et les nacelles. En pratique, on déterminé les FAG de l'avion complet auxquelles on retranche celles dues à la voilure pour obtenir la partie due aux autres éléments (empennage, dérive, nacelles).

Les FAG pour l'avion complet sont calculées directement, sans passer par les tranches. On a l'expression du travail sur les pavés suivante:

$$dW = d\hat{h}^T\, \bar{p}\mathcal{D}\alpha = d\hat{q}^T\, \Psi_h \bar{p}\mathcal{D}\Psi\, \hat{q},$$

d'où l'expression de la matrice d'influence aérodynamique

$$\mathcal{A} = \Psi_h \mathcal{D}\Psi.$$

Ceci sachant que $\alpha = (\Psi_\theta - ik\, \Psi_h)\hat{q} = \Psi\hat{q}$ avec les notations précédentes. On peut alors calculer la contribution des éléments autres que la voilure:

$$\mathcal{A}_{reste} = \mathcal{A} - \mathcal{A}_{voilure}.$$

2.5.4 Introduction de la turbulence par tranches

Comme on s'intéresse à l'influence de la turbulence sur l'aérodynamique de l'aile, on considère dans ce qui suit uniquement la partie voilure. Le bruit aléatoire doit être introduit au niveau de la formulation par tranches. Soit $t \to \eta(t) \in \mathbb{R}^{N_t}$ le vecteur stochastique obtenu par discrétisation du champ de la composante longitudinale de la

turbulence $\tilde{\eta}(x,t)$ par rapport aux N_t points de référence tel que $\tilde{\eta}(P_j,t) = \eta_j(t)$ et $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_{N_t}(t))$. On pose

$$\overline{p}_j = \overline{p}(\eta_j) = \frac{1}{2}\rho_\infty \big(U + \eta_j(t)\big)^2$$

afin d'obtenir la pression instantanée qui s'applique aux tranches et on introduit cette expression dans (2.18).

La première façon d'introduire la turbulence, consiste à approcher la matrice $\mathcal{MR}(k)$ par fractions rationnelles selon la méthode de Karpel. Ensuite, on peut exprimer la pression dynamique comme fonction de la turbulence agissant sur la tranche et on projete l'expression obtenue sur les modes propres de la structure. Avec $\phi^T = [\phi_h^T \;\; \phi_\theta^T]$, les forces aérodynamiques s'écrivent, dans le domaine temps et en fonction du processus vectoriel $\eta(t) \in \mathbb{R}^{N_t}$, comme

$$F(q,\dot{q},\ddot{q},X) = \phi^T H(\eta(t))\big(A_0\phi\, q(t) + \frac{l}{\overline{U}} A_1\phi\, \dot{q}(t) + (\frac{l}{\overline{U}})^2 A_2\phi\, \ddot{q}(t) + GX(t)\big), \quad (2.19)$$

où

$$H(\eta(t)) = \mathrm{diag}\{\overline{p}(\eta_i(t)\} = \mathrm{diag}\{\frac{1}{2}\rho\,(\overline{U} + \eta_i(t))^2\},$$

et la variable d'état $X(t)$ est solution de l'équation

$$\dot{X}(t) = \frac{\overline{U}}{l} R\, X(t) + E\phi\, \dot{q}(t).$$

Cependant, la méthode d'approximation par fractions rationnelles est coûteuse pour des matrices de taille importante comme c'est le cas ici. Une alternative plus élégante et efficace consiste alors à effectuer une décomposition par rapport à $\overline{p}(\eta_j(t))$. Les matrices projetées sont fonctions des $\overline{p}(\eta_j(t))$, ce qui permet d'extraire les termes qui dépendent des η_i seuls

$$\Upsilon_{kl} = \sum_{m=1}^{N_t} \overline{p}(\eta_m)(a_{kl}^m + a_{kl}^{m+N_t}) = \sum_{j=1}^{2\cdot Nt} \overline{p}(\eta_j) a_{kl}^j = \sum_{j=1}^{2\cdot Nt} \overline{p}(\eta_j)\phi_{jk} \sum_{i=1}^{2\cdot N_t} \mathcal{R}_{ji}\,\phi_{il}.$$

La sommation s'effectue sur les N_t tranches seulement car $\overline{p}(\eta_j) = \overline{p}(\eta_{j+Nt})$, $j = \{1, \dots, 2N_t\}$. Les forces aérodynamiques sont alors données par $F = \Upsilon q$. Les matrices a^j sont approchées par fractions rationnelles telles que

$$a^j = A_0^j + A_1^j \frac{l}{U} s + A_2^j \big(\frac{l}{U} s\big)^2 + G^j [I \frac{l}{U} s - R^j]^{-1} E^j \frac{l}{U} s.$$

On obtient le système sous forme d'état $\dot{Y}_t = A(\eta(t))Y_t$ avec $Y = (q,\, \dot{q},\, X_1, \dots, X_{Nt})$:

$$A(\eta_t) = \begin{bmatrix} 0 & I_{(nm)} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{K}(\eta) & -\tilde{M}^{-1}\tilde{C}(\eta) & -\frac{1}{2}\rho(\overline{U}+\eta_1)^2\tilde{M}^{-1}G^1 & \dots & -\frac{1}{2}\rho(\overline{U}+\eta_{Nt})^2\tilde{M}^{-1}G^{Nt} \\ 0 & E^1 & (\overline{U}+\eta_1)/l\; R^1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & E^{Nt} & 0 & 0 & (\overline{U}+\eta_{Nt})/l\; R^{Nt} \end{bmatrix},$$

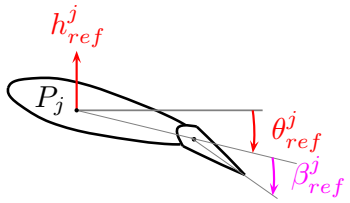

FIG. 2.7 – *3 ddl par tranche avec gouverne*

où

$$\tilde{M} = \mu + \frac{1}{2}\rho l^2 \sum_{i=1}^{Nt} A_2^i \qquad \tilde{C}(\eta) = \beta + \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^{Nt} (\overline{U} + \eta_i)\, l A_1^i \qquad \tilde{K}(\eta) = \gamma + \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^{Nt} (\overline{U} + \eta_i)^2 A_0^i.$$

2.5.5 Modélisation des tranches avec gouverne

Afin d'obtenir des modèles plus réalistes permettant de prendre en compte un jeu dans la liaison aile-gouverne, la présence d'une gouverne doit être modélisée. Il devient alors nécessaire d'introduire un troisième degré de liberté pour chaque tranche: l'angle relatif de rotation de la gouverne β. L'angle total du pavé j est alors donné par $\gamma_j = \theta_j + \beta_j$, où $\beta_j = 0$ si l'on ne se situe pas sur la gouverne. Par conséquent, le déplacement vertical h_j du pavé j s'obtient en sommant le déplacement vertical du point de référence, la contribution de l'angle de rotation global de la tranche ainsi que la contribution de l'angle de rotation de la gouverne s'il s'agit d'un pavé sur la gouverne. Aussi, les ddl d'un pavé s'expriment en fonction des ddl de la tranche l comme:

$$\begin{aligned}
\theta_j &= \theta^l_{ref}, \\
h_j &= h^l_{ref} + \theta^l_{ref}\Delta^l_j + \beta^l_{ref} d^l_j H_l(gouverne), \\
\beta_j &= \beta^l_{ref} H_l,
\end{aligned}$$

H_l étant la fonction indicatrice des pavés situés sur la gouverne. L'angle total pour le pavé j est donné par $\gamma_j = \theta_j + \beta_j$. La force et les moments par tranche s'écrivent

$$\begin{aligned}
R(k) &= \bar{p}\, M_{surf} D(k)\alpha, \\
M_\theta(k) &= \bar{p}\, M^\theta_{surf} \Xi^\theta\, D(k)\alpha, \\
M_\beta(k) &= \bar{p}\, M^\beta_{surf} \Xi^\beta\, D(k)\alpha.
\end{aligned}$$

Avec maintenant $\alpha = \gamma - ik\,h$ on peut écrire

$$\alpha = M^T_{red}\theta_{ref} + M^T_{\beta\,red}\beta_{ref} - ik(M^T_{red}\, h_{ref} + \Xi^\theta\, M^T_{red}\theta_{ref} + \Xi^\beta\, M^T_{\beta\,red}\beta_{ref}).$$

Le lissage des modes donne

$$\begin{aligned} h_{ref} &= \phi_h \hat{q}, \\ \theta_{ref} &= \phi_\theta \hat{q}, \\ \beta_{ref} &= \phi_\beta \hat{q}. \end{aligned}$$

On identifie la matrice d'influence aérodynamique, comme précédemment, par l'expression du travail virtuel des tranches.

$$dW_{tr} = dh_{ref}^T R + d\theta_{ref}^T M_\theta + d\theta_{ref}^T M_\theta = \bar{p}\, d\hat{q}^T [\phi_h^T \ \phi_\theta^T \ \phi_\beta^T]\, \mathcal{R} \begin{bmatrix} \phi_h \\ \phi_\theta \\ \phi_\beta \end{bmatrix} \hat{q},$$

et donc, avec $\phi = (\phi_h,\, \phi_\theta,\, \phi_\beta)$, on obtient l'expression de la matrice d'influence pour le modèle généralisé:

$$\mathcal{A}_{voilure} = \phi^T \mathcal{R}\, \phi.$$

2.6 Bruit additif introduit par la turbulence verticale

La composante verticale de la turbulence introduit un bruit additif dans l'équation (2.12). Soit w_T la partie verticale des fluctuations de la vitesse de l'écoulement. Le champ de pression comprend un champ qui dépend linéairement de $\hat{q}$ ainsi qu'un champ de pression de turbulence tel que les forces aérodynamiques généralisées s'écrivent

$$\hat{F} = \frac{1}{2}\rho U^2 \mathcal{A}\hat{q} + \hat{F}_{w_T},$$

où $\hat{F}_{w_T}$ est la force aérodynamique généralisée due à l'angle d'attaque local induit par la turbulence verticale.

Pour une altitude x_3 donnée, le champ de turbulence verticale w_T dépend des deux coordonnées spatiales du plan horizontal (x_1, x_2) ainsi que du temps. Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse de Taylor en considérant la turbulence verticale comme figée ("frozen turbulence"). C'est-à-dire que l'avion "vole sur un champ de turbulence" qui, lui, ne dépend que des coordonnées spatiales. La turbulence vue à un point x^0 à l'instant t est la même que celle vue à l'instant $t - \frac{x_1 - x_1^0}{\overline{U}}$) au point x, pour une vitesse de l'avion constante $\overline{U}$. Ainsi, on peut écrire

$$w_T(x,t) \equiv w_T(x_2, x_3, t - \frac{x_1 - x_1^0}{\overline{U}})).$$

En notant $\beta(x,t) = w_T(x,t)/\overline{U}$ l'angle d'attaque local (ou angle d'attaque apparent) induit par w_T au point x et à l'instant t, le champ de pression s'exerçant sur l'aile est formellement donné par une expression de la forme [47]:

$$p(x,t) = \int_S \int_0^t g(x, x', t-\tau)\beta(x', \tau)\, dx' d\tau,$$

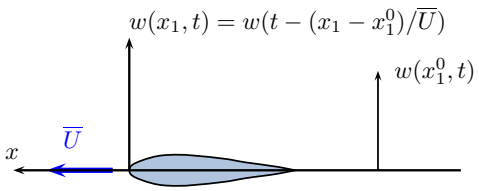

FIG. 2.8 – *turbulence verticale*

où S désigne la surface du profil et $g(x,x',t)$ est la fonction de Green du problème. Les pressions instationnaires sont obtenues en résolvant une équation intégrale par la méthode des doublets.

Si on considère une turbulence dite cylindrique, le champ de turbulence verticale ne dépend que de la coordonnée x_1. Ceci nous permet de décrire la turbulence au point $x = (x_1, x_2, x_3)$ en fonction du temps et de la coordonnée x_1 tel que $w_T(x,t) \equiv w_T(t - \frac{x_1 - x_1^0}{\overline{U}})$ où x^0 est le point de référence dont x_1^0 est l'abscisse. Aussi, le processus décrivant la turbulence verticale à un instant fixé t est entièrement déterminée par sa valeur en un point de référence. En utilisant une discrétisation par la méthode des doublets, la force généralisée pour le mode m s'écrit:

$$\hat{F}^m_{w_T}(\omega) = \sum_i \sum_j \phi_{mi} \hat{G}_{ij}(\omega) \frac{\hat{w}_T(\omega)}{\overline{U}} e^{-i\omega \frac{x_1^j - x_1^0}{\overline{U}}}, \tag{2.20}$$

où $\hat{w}_T(\omega)$ est la transformée de Fourier de $w_T(t)$ au point x_1^0 et $\omega \longmapsto \hat{G}_{ij}(\omega)$ la transformée de Fourier de $G_{ij}(t)$. Cette relation peut s'écrire au moyen d'une fonction de transfert modale $H_m(\omega)$ telle que

$$\hat{F}^m_{w_T}(\omega) = H_m \hat{w}_T(\omega),$$

et où

$$H_m = \frac{1}{\overline{U}} \sum_i \sum_j \phi_{mi} \hat{G}_{ij} e^{-i\omega \frac{x_1^j - x_1^0}{\overline{U}}}.$$

L'équation (2.20) montre, qu'en pratique, la turbulence peut être considérée comme un mode supplémentaire dans le calcul des FAG par la méthode des doublets. Dans ce travail, les valeurs de $H_m(\omega_i)$ sont ainsi calculé, pour le nombre de fréquences ω_i nécessaire, par la méthode des doublets. L'approximation par fractions rationnelles des forces aérodynamiques généralisées dues à la turbulence verticale est décrite au paragraphe 3.5.2 du chapitre suivant.

Chapitre 3

Modélisation de la turbulence

Dans ce chapitre, le processus stochastique modélisant la turbulence atmosphérique est défini. Ce processus est construit à partir d'un certain nombre d'hypothèses mathématiques permettant de travailler avec des processus stochastiques ayant les "bonnes propriétés". Ainsi, il nous sera possible de construire ses trajectoires à partir des seules données de densités spectrales et de fonctions de corrélation spatiale.

3.1 Définition du processus stochastique modélisant la turbulence

Dans ce chapitre, les variables aléatoires et processus stochastiques seront définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Un processus ξ sera noté $\xi(t)$ ou ξ sans référence à l'aléa sous-jacent. On parle aussi de champ si $t \in \mathbb{R}^d$. On considère par la suite des processus centrés, $\mathbb{E}(\xi) = 0$, où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance mathématique, du second ordre,

$$\mathrm{Tr}\big(\mathbb{E}(\xi\, \xi^T)\big) < +\infty, \tag{3.1}$$

et stationnaires en moyenne d'ordre deux:

$$R_\xi(t, t') \doteq \mathbb{E}\big(\, \xi(t)\xi(t')^T \,\big) = R_\xi(t - t') = R_\xi(\tau).$$

On appelle $R_\xi(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de ξ. Un tel processus admet une mesure spectrale $dM_\xi(\omega)$ définie par le théorème de Bochner:

$$R_\xi(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i<\tau,\omega>}\, dM_\xi(\omega).$$

Si la mesure spectrale admet une densité $S_\eta(\omega)d\omega = dM_\xi(\omega)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, alors la fonction d'autocorrélation de ξ peut s'écrire:

$$R_\xi(\tau) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\tau,\omega>} S_\xi(\omega)\, d\omega.$$

Sous ces hypothèses, la fonction $\omega \longmapsto S_\xi(\omega)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout ω fixé, la fonction de densité spectrale est une matrice hermitienne positive:

$$\begin{aligned} S_\xi(\omega) = S_\xi(\omega)^* &\doteq \overline{S_\xi(\omega)}^T, \\ (S_\xi(\omega)z, z) &\geq 0, \qquad\qquad \forall\, z \in \mathbb{C}^d, \\ S_\xi(-\omega) = \overline{S_\xi(\omega)} &= S_\xi(\omega)^T. \end{aligned}$$

On modélise la turbulence atmosphérique par un processus stochastique gaussien vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus. Il est à noter que la classe des processus du second ordre joue un rôle important dans les modélisations de la physique car ceux-ci correspondent à des grandeurs ayant une énergie finie.

La vitesse d'écoulement du fluide s'écrit alors:

$$\tilde{U}(x,t) = U_0 + u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3,\, t \in \mathbb{R}^+,$$

où $U_0 = (\overline{U},\, 0,\, 0)$ est le champ de vitesses moyennes et $u = (\eta, v_T, w_T) \in \mathbb{R}^3$ désigne les parties fluctuantes due à la turbulence. Dans la suite, on va s'intéresser surtout à la composante longitudinale de la turbulence η, car c'est elle qui introduit un bruit multiplicatif dans le système aéroélastique.

L'hypothèse de loi gaussienne permet de caractériser un processus stochastique du second ordre entièrement par la donnée de sa densité spectrale. La construction des trajectoires d'un processus dont la densité spectrale est de forme rationnelle est décrite dans le paragraphe suivant.

3.2 La méthode de markovianisation

Les équations différentielles stochastiques d'Itô (EDSI) jouent un rôle fondamental dans la théorie des processus stochastiques. Leurs solutions sont des processus de diffusion de Markov dont les lois de probabilité de transition sont elles-mêmes solution d'une équation linéaire aux dérivées partielles déterministes: l'équation de Fokker-Planck (EFP). Ici, ce n'est pas cet aspect qui nous intéresse mais plutôt la possibilité de construire aisément des trajectoires de ces processus. Aussi va-t-on chercher à obtenir le processus stochastique modélisant la turbulence à partir d'un processus de diffusion, solution d'une EDSI. La construction la plus simple est de considérer l'image par une application linéaire d'un tel processus, c'est ce qu'on appelle la méthode de markovianisation. La théorie mathématique sous-jacente fait intervenir la notion de filtrage linéaire de processus généralisés. On n'aborde pas ici le détail de cette théorie, nous ne donnons que les aspects pratiques. Le lecteur intéressé peut consulter l'ouvrage de Kree et Soize [60]. La méthode de markovianisation permet de construire des réalisations différentielles du processus η en le modélisant comme observation linéaire d'un processus ξ qui est lui-même solution d'une équation différentielle stochastique

d'Itô. Soit le processus $t \to \eta(t) \in \mathbb{R}^m$ avec $t \in \mathbb{R}$ la variable temps. Soit le processus n-dimensionnel $\xi(t)$, solution stationnaire d'une équation différentielle stochastique d'Itô telle que

$$d\xi(t) = B_0\xi(t)dt + Q_0 dW(t), \tag{3.2}$$

où $W(t)$ est un processus de Wiener (voir l'annexe B pour plus de détail sur les propriétés mathématiques du processus de Wiener). La matrice $B_0 \in Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$ est asymptotiquement stable (i.e. toutes les valeurs propres de B_0 sont à partie réelle strictement négative) et on a $Q_0 \in Mat_{\mathbb{R}}(n,n)$. Le processus $\eta(t)$ est alors défini par

$$\eta(t) = B_1\,\xi(t), \tag{3.3}$$

avec $B_1 \in Mat_{\mathbb{R}}(m,n)$. Bien entendu, tous les processus ne peuvent pas être construits de cette façon. Le théorème suivant indique quelle est la classe de processus concernée:

Théorème 1 (Représentation markovienne de dimension finie). *Le processus η indexé sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ admet une réalisation markovienne de dimension n si et seulement si η admet une densité spectrale de type rationnel sous la forme*

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{R(i\omega)R(i\omega)^*}{|Q(i\omega)|^2}, \tag{3.4}$$

où Q est un polynôme à coefficients réels de degré $q \leq n$ et à racines dans $\{p \in \mathbb{C}/\Re e(p) < 0\}$. Le polynôme R est à coefficients matriciels dans $Mat_{\mathbb{R}}(m,m)$ et de degré r strictement inférieur à celui de Q.

Montrons comment sont construites les équations (3.2) et (3.3) à partir de l'expression (3.4) de la densité spectrale.

Ayant posé

$$\begin{aligned} Q(i\omega) &= \sum_{j=0}^{q}(i\omega)^j q_j, \qquad q_j \in \mathbb{R}, \quad q_q = 1, \\ R(i\omega) &= \sum_{j=0}^{q-1}(i\omega)^j R_j, \qquad R_j \in Mat_{\mathbb{R}}(m,m), \end{aligned}$$

où $R_j = 0$ pour $r+1 \leq j \leq q-1$, on cherche à déterminer les matrices B_0 et Q_0 dans l'expression (3.2). Dans ce but, on introduit le processus m-dimensionnel $\tilde{\xi}$ de densité spectrale

$$S_{\tilde{\xi}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|Q(i\omega)|^2}I_m,$$

où $I_m \in Mat_{\mathbb{R}}(m,m)$ est la matrice identité.

On montre alors que $\xi = (\tilde{\xi}, \frac{d}{dt}\tilde{\xi}, \ldots, (\frac{d}{dt})^{q-1}\tilde{\xi})$ est solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô du premier ordre

$$d\xi(t) = B_0\xi(t) + Q_0 dW(t), \tag{3.5}$$

$$\text{avec } B_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -q_0 I_m & -q_1 I_m & -q_2 I_m & \dots & -q_{q-1} I_m \end{bmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_m \end{bmatrix} \text{ et } W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{W}(t) \end{bmatrix}.$$

On trouve alors

$$\eta(t) = \sum_{j=0}^{q-1} R_j (\frac{d}{dt})^j \tilde{\xi}(t) = B_1 \xi(t) \qquad \text{où } B_1 = [R_0, R_1, \dots, R_{q-1}].$$

On a donc obtenu une réalisation markovienne de $\eta(t)$ de dimension $n = m \times q$. Remarquons, pour conclure ce paragraphe, que l'équation (3.5) peut encore s'écrire:

$$d\xi(t) = B_0 \xi(t) + \sum_{i=1}^{m} Q_i dW_i(t).$$

3.3 Markovianisation approchée d'un processus physiquement réalisable

On a vu que la méthode de markovianisation permet d'exprimer un processus stochastique comme solution d'une équation différentielle stochastique avec seule connaissance de l'expression de sa densité spectrale sous forme d'une fraction rationnelle. Toutefois, les densités spectrales des processus modélisant les phénomènes de la physique comme la turbulence atmosphérique ne sont pas toujours rationnelles. Cependant, si ces processus sont "physiquement réalisables", il est possible d'approcher leurs densités spectrales par des fractions rationnelles afin de construire des réalisations différentielles. Dans un premier temps, on définit ce qu'est un processus "physiquement réalisable".

On introduit la classe de Hardy $H^2(Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$ décrivant l'ensemble des transformées de Laplace des fonctions appartenant à l'espace $L^2(\mathbb{R}^+, Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$ qu'on note aussi $\widehat{L}^2(\mathbb{R}^+, Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$.

Définition (Processus "physiquement réalisable"). *Soit le processus η, indexé sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés énoncées au début de ce chapitre.*

Soit h un filtre causal linéaire. On dit que η est physiquement réalisable s'il existe $\widehat{h} \in \widehat{L}^2(\mathbb{R}^+, Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$ tel que sa densité spectrale s'écrive

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{h}(\omega)\widehat{h}(\omega)^* \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Une fraction rationnelle de $L^2(\mathbb{R}^+, Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$ appartient à l'espace de Hardy si et seulement si ses pôles sont dans le demi-plan $\Re(p) < 0$.

Comme $\widehat{h} \in \widehat{L}^2(\mathbb{R}^+, Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$, on sait que $\widehat{h}(\omega) = H(i\omega)$ est dans la classe de Hardy. On introduit $H(p)$ qui est la transformée de Laplace unilatérale de $h(t)$ ayant ses pôles dans le demi-plan $\Re e(p) < 0$. L'équation (3.6) s'écrit alors:

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}H(i\omega)H(i\omega)^*.$$

Remarque 3. *Si un processus est physiquement réalisable, alors sa densité est donnée par l'expression* (3.6)*. On montre alors que ce processus peut être construit par filtrage linéaire d'un bruit blanc N_∞. Soit Y_∞ le processus résultant du filtrage de N_∞ par h avec $h \in L^2(\mathbb{R}^+, Mat_{\mathbb{R}}(d,d))$. On peut alors écire*

$$Y_\infty(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-t')N_\infty(t')\,dt', \tag{3.7}$$

où Y_∞ est un processus classique du second ordre. La fonction d'autocorrélation de N_∞ est la distribution $R_N = \delta_0 I$ telle que la densité spectrale matricielle $S_{N_\infty}(\omega)$ s'écrive

$$S_{N_\infty}(\omega) = \frac{1}{2\pi}I \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R},$$

d'où l'expression (3.6)*. Ceci montre aussi que le bruit blanc N_∞ n'est pas un processus du second ordre (la définition d'un processus du second ordre est rappelée par l'expression 3.1), c'est ce qu'on appelle un processus généralisé [60]. Par ailleurs, la dérivée (au sens des processus généralisés) du processus de Wiener normalisé est le bruit blanc gaussien normalisé vectoriel tel que $dW = N_\infty$.*

On note également qu'il existe un théorème qui permet de déterminer si le processus Y avec densité spectrale S_Y est physiquement réalisable ou non:

Théorème 2 ([Rozanov] Caractérisation de l'existence). *Le processus Y est physiquement réalisable si sa densité spectrale $S_Y(\omega)$, supposée de rang constant maximal, satisfait la condition:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\big(\det(S_Y(\omega))\big)}{1+\omega^2}\,d\omega \;>\; -\infty.$$

L'ensemble des fonctions rationnelles $\omega \to R(i\omega)/Q(i\omega)$ qui sont dans $H^2(Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$ est dense dans $H^2(Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$. Grâce à ce résultat de densité, il est possible d'approcher $\widehat{h}(\omega)$ par une fraction rationnelle de $H^2(Mat_{\mathbb{C}}(d,d))$. Par conséquent, tout

processus Y physiquement réalisable peut être approché par un processus $\tilde{Y}$ admettant une réalisation markovienne.

On dit que $\tilde{Y}$ approche Y au sens de l'énergie à ε près dès lors que

$$\mathbb{E}(\|Y(t) - \tilde{Y}(t)\|^2) \leq \varepsilon.$$

Pratiquement, on résout le problème de minimisation suivant:

$$\min_{R,Q} \mathrm{Tr} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\widehat{h}(\omega) - \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)}\big)\big(\widehat{h}(\omega) - \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)}\big)^* \, d\omega. \tag{3.8}$$

La minimisation s'effectue sur l'ensemble des coefficients des polynômes Q et R. Toutefois, ce problème de minimisation non linéaire n'est pas un problème bien posé, il n'y a pas de résultats d'existence et d'unicité de la solution.

3.4 Un algorithme de résolution temporelle

Dans ce qui suit, un algorithme simple permettant le calcul des trajectoires et donc des valeurs prises par ξ aux instants t_j, est présenté. On suppose que le pas de temps Δ_t est choisi de sorte que le domaine significatif des fréquences $\Sigma_L = [-\omega_L, \omega_L]$ pour la densité spectrale de ξ soit entièrement couvert [1]. D'abord, observons que la solution $\xi(t)$ de l'EDSI (3.2) est donnée par l'équation

$$\xi(t) = e^{B_0 t}\xi_0 + \int_0^t e^{B_0(t-\tau)} \, Q_0 \, dW(\tau).$$

Ainsi, on peut écrire la solution à l'instant $t + u$ comme:

$$\xi(t+u) = e^{B_0 t} \, \xi(u) + \int_u^{t+u} e^{B_0(t+u-\tau)} \, Q_0 \, dW(\tau).$$

Le processus ξ étant stationnaire, sa matrice de covariance C_ξ est indépendante de la variable temps t:

$$C_\xi(0) = C_\xi = \mathbb{E}\big(\xi \, \xi^T\big).$$

La covariance vérifie l'équation de Riccatti

$$B_0 C_\xi + C_\xi B_0^T = -Q_0 Q_0^T,$$

qui admet une solution unique. La matrice de covariance C_ξ peut donc être obtenue en résolvant cette équation, voir par exemple [20]. Soit l'intervalle de temps $T_L = [0, T]$, divisé en N_T sous-intervalles égaux de longueur Δ_t. Le schéma discret, associé à la

1. Il faut prendre $\omega_L \leq \pi/\Delta_t$ selon le théorème d'échantillonnage de Shannon.

solution exacte de l'équation (3.2) pour les instants $t_j = j\Delta_t$, $j = \{0, \dots, N_T - 1\}$, s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \xi(t_{j+1}) &= E\xi(t_j) + V_j, \\ \xi(t_0) &= \xi_0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

Les valeurs $\eta(t_j)$ prises par le processus modélisant la turbulence sont ensuite obtenues par la relation (3.3):

$$\eta(t_j) = B_1\xi(t_j).$$

Dans l'expression (3.9), la matrice E s'écrit

$$E = e^{B_0\Delta_t}.$$

Par ailleurs, V_j est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, C_j)$ donnée par l'intégrale stochastique

$$V_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{B_0(t_{j+1}-\tau)}\, Q_0\, dW(\tau).$$

Sa covariance C_j est donnée par l'expression [20]:

$$C_j = C_\xi - e^{B_0\Delta_t} C_\xi e^{B_0^T\Delta_t}.$$

3.5 Modèle spectral de la turbulence atmosphérique et markovianisation approchée

Von Karman a établi des modèles décrivant la densité spectrale unidimensionnelle pour la turbulence longitudinale η ainsi que pour les composantes latérale et verticale v_T, w_T. On note ω la fréquence angulaire associée à la coordonnée du temps t. L_x^η est l'échelle de la composante η selon la direction longitudinale, L_x^v est l'échelle de la composante latérale v_T selon la direction longitudinale, et L_x^w désigne l'échelle de la composante verticale w_T. Les densités spectrales de la turbulence longitudinale, de la turbulence latérale et de la turbulence verticale sont données par les expressions

$$S_\eta^{kar}(\omega) = \frac{2\sigma_\eta^2 \frac{L_x^\eta}{\overline{U}}}{[1 + 71(\omega\frac{L_x^\eta}{\overline{U}})^2]^{\frac{5}{6}}}, \tag{3.10}$$

$$S_{v_T}^{kar}(\omega) = \frac{(L_x^v\sigma_v^2)^2}{\overline{U}} \frac{1 + 189(\omega\frac{L_x^v}{\overline{U}})^2}{[1 + 71(\omega\frac{L_x^v}{\overline{U}})^2]^{\frac{11}{6}}} \tag{3.11}$$

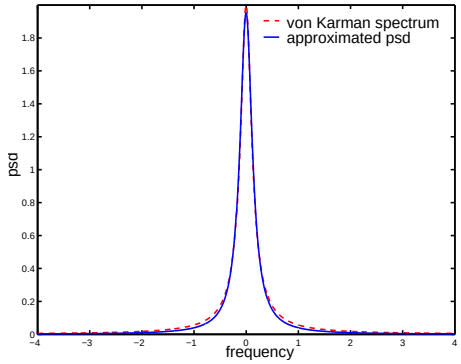

FIG. 3.1 – *spectre de von Karman et approximation sous forme de fraction rationnelle*

$$S_{w_T}^{kar}(\omega) = \frac{(L_x^w \sigma_w^2)}{\overline{U}} \frac{1 + 189(\omega \frac{L_x^w}{\overline{U}})^2}{[1 + 71(\omega \frac{L_x^w}{\overline{U}})^2]^{\frac{11}{6}}}. \tag{3.12}$$

Les grandeurs σ_η^2, $\sigma_{v_T}^2$ et $\sigma_{w_T}^2$ représentent, respectivement, les variances des composantes η, v_T et w_T. Les variances des composantes v_T et w_T sont, en général, beaucoup plus faibles que celle de la composante longitudinale. Les relations suivantes peuvent être utilisées pour la turbulence atmosphérique (source: CSTB):

$$\frac{\sigma_{v_T}}{\sigma_u} = 0.75, \quad \frac{\sigma_{w_T}}{\sigma_u} = 0.5.$$

Selon la méthode de markovianisation approchée décrite précédemment, on approche ces spectres par des fractions rationnelles. Dans ce travail, ceci est effectué à l'aide d'un algorithme de recuit simulé [42]. Le spectre de la turbulence longitudinale est ainsi approché par le spectre rationnel:

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{R_0^2}{|q_0 + i\omega q_1 + (i\omega)^2|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{R_0^2}{(q_0 - \omega^2)^2 + q_1^2 \omega^2}. \tag{3.13}$$

Le processus gaussien η, centré, de densité spectrale (3.13) est alors solution de l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (R_0 \quad 0)\, \xi(t), \\ d\xi(t) &= B_0 \xi(t) dt + (0 \quad 1)^T dW(t), \\ \text{où } B_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_2 = \dot{\xi}_1$ et où le processus $\eta(t)$ est différentiable. En utilisant des approximations d'ordre supérieur, il est possible d'obtenir des bruits encore plus réguliers.

Le spectre de la turbulence verticale a également été approché par un spectre rationnel à l'aide d'un algorithme de recuit simulé. Ce spectre rationnel est de la forme:

$$S_{w_T}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{R_0^2 + \omega^2}{(q_0 - \omega^2)^2 + q_1^2 \omega^2}. \tag{3.14}$$

Remarque 4. *La composante latérale de la turbulence n'influence pas le comportement des structures horizontales comme les ailes d'avion.*

3.5.1 Construction d'une densité spectrale matricielle

Afin d'obtenir une meilleure modélisation, il faut prendre en compte la corrélation spatiale de la turbulence longitudinale le long de l'aile. Ceci implique que le processus stochastique à simuler est un processus à valeurs vectorielles. La dimension de ce vecteur est donnée par le nombre de points de discrétisation latéraux N_t choisis. Ici N_t est le nombre de points de référence sur l'aile et donc le nombre de tranches (voir §2.5.2). On peut construire la densité spectrale matricielle $\mathcal{S}(\omega) \in Mat(N_t, N_t)$ à l'aide des spectres unidimensionnels $S_\eta^{kar}(\omega) \in \mathbb{R}$ en utilisant une fonction de corrélation $\tilde{C}(P_i, P_j, \omega) = C_{ij}(\omega)$, où $P_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ et $P_j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$ sont deux points de référence sur l'aile. Ne disposant pas de données expérimentales pour la fonction de corrélation, on est amené à faire des hypothèses de modélisation. Ainsi, on va travailler avec l'hypothèse classique selon laquelle la fonction de corrélation spatiale est une fonction réelle qui décroît exponentiellement. Par ailleurs, on suppose qu'elle ne dépend pas de la fréquence. Bien évidemment, un modèle plus fidèle peut être substitué dès qu'il est disponible.

La fonction de corrélation spatiale est définie par la relation suivante:

$$C_{ij}(\omega)^2 = \frac{|S_{ij}(\omega)|^2}{S_{ii}(\omega) S_{jj}(\omega)},$$

avec $[S_{ij}] = \mathcal{S}$ et où $S_{ij}(\omega) = S(P_i, P_j, \omega)$. Les spectres S_{ij}, $i \neq j$ sont définis par les relations

$$R_{ij}(\tau) = R_\eta(P_i, P_j, \tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} S_\eta(P_i, P_j, \omega)\, d\omega = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} S_{ij}(\omega)\, d\omega$$

et les spectres unidimensionnels S_{ii} vérifient

$$R_\eta(P_i, P_i, \tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} S_\eta(P_i, P_i, \omega)\, d\omega = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega\tau} S_\eta(\omega)\, d\omega.$$

Par ailleurs, on a $S_{ii} = S_{jj} = S_\eta^{kar}$. Le spectre de von Karman S_η^{kar} est physiquement réalisable, on peut l'écrire sous la forme:

$$S_\eta^{kar}(\omega) = h(\omega) h(\omega)^*, \ h(\omega) \in \mathbb{C}.$$

En négligeant la partie imaginaire des spectres croisés et sachant que, dans notre cas, $S_{ii} = S_{jj}$, on peut écrire

$$S_{ij}(\omega) = C_{ij}(\omega)S_{ii}(\omega),$$

où $C_{ii} = 1$. La matrice réelle $\mathcal{C} = [C_{ij}]$ est définie positive et permet ainsi une décomposition de Cholesky telle que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_o\mathcal{C}_o^T \in Mat_{\mathbb{R}}(N_t, N_t)$. La densité spectrale matricielle $\mathcal{S} = [S_{ij}] \in Mat_{\mathbb{R}}(N_t, N_t)$ s'écrit

$$\mathcal{S}(\omega) = \mathcal{C}_0(\omega)h(\omega)h(\omega)^*\mathcal{C}_0(\omega)^T = S_\eta^{kar}(\omega)\mathcal{C}(\omega), \tag{3.15}$$

parce que S_η^{kar} est une fonction scalaire. La densité spectrale matricielle $\mathcal{S}(\omega)$ n'est pas sous forme rationnelle, mais elle admet une réalisation markovienne approchée car elle est physiquement réalisable.

On va alors approcher le spectre de turbulence de von Karman S_η^{kar} par un spectre rationnel S_η comme décrit dans le paragraphe précédent. En utilisant une fonction de corrélation spatiale indépendante de la fréquence, on obtient la densité spectrale matricielle

$$\tilde{\mathcal{S}}(\omega) = S_\eta(\omega)\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi}\frac{R_0^2}{(q_0 - \omega^2)^2 + q_1^2\omega^2}\mathcal{C},$$

avec matrice de corrélation

$$C_{ij} = \exp[-\frac{r_{ij}}{L_0}],$$

où L_0 est la longueur d'échelle caractéristique et r_{ij} est la distance spatiale entre les deux points: $|P_i - P_j|$.

Il est alors possible de simuler N_t processus indépendants $\xi_i(t)$ de densité spectrale $S_\eta(\omega) = S_{ii}(\omega)$. Le processus stochastique vectoriel est alors obtenu par multiplication avec la fonction de corrélation matricielle C_o:

$$\eta(t) = \mathcal{C}_o\xi(t) \in \mathbb{R}^{N_t},$$

où on a noté $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{N_t})$.

Chaque composante $\xi_i(t)$ est solution d'une EDSI qui s'écrit

$$\xi_i(t) = Gz_i(t),$$
$$dz_i(t) = Bz_i(t)dt + Q_0dW(t).$$

3.5.2 Calcul des forces extérieures modélisant la turbulence verticale

Classiquement, on approche les forces généralisées extérieures dues à la turbulence verticale w_T, dans le domaine des fréquences, par des fonctions rationnelles de la forme

$$\hat{F}_{w_T}(\omega) = \big[F_0 + \frac{1}{\overline{U}}F_1\omega + \sum_{r=2}^{N_r}\frac{\omega}{\omega + \overline{U}p_r}F_r\big]\hat{w}_T(\omega) \ \in \mathbb{R}^N.$$

Dans cette expression, on a $m = \{1, \dots, N\}$, où N est le nombre de modes de la structure considérés.

Dans le domaine temps, on obtient

$$F_{w_T}(t) = F_0 w_T(t) + \frac{1}{\overline{U}} F_1 \dot{w}_T(t) + \sum_{r=2}^{R} F_r Z_r(t),$$

où les variables Z_r sont solutions de l'équation différentielle

$$\dot{Z}_r = -p_r \overline{U} Z + \dot{w}_T.$$

Cette méthode a le désavantage d'introduire $(N_r - 1)$ inconnues supplémentaires, ce qui augmente encore la taille du système d'état. Par ailleurs, on a besoin de connaître, c'est-à-dire simuler, w_T ainsi que $\dot{w}_T$. Afin d'obtenir $\dot{w}_T$ en même temps que w_T, il faut choisir un polynôme $Q(i\omega)$ de degré plus élevé. En utilisant les notations de §3.2, il faut avoir q supérieur à 2 et un polynôme $R(i\omega)$ tel que $r < q - 1$, r étant le degré de $R(i\omega)$, et ceci en respectant les contraintes de signe sur les pôles.

L'approche que nous avons suivie ici pour simuler, dans le domaine temporel, les FAG dues à la turbulence verticale, consiste à construire une réalisation markovienne de ces forces en approchant leur densité spectrale par un spectre rationnel. Plus précisément, en utilisant les notations du paragraphe 2.6, on approche d'abord les fonctions $H_m(\omega) \in \mathbb{C}$,

$$H_m = \sum_i \sum_j \phi_{mi} h_{ij}(\omega) \frac{1}{U}, \quad m = \{1, \dots, N\},$$

par des fractions rationnelles du type $R(i\omega)/Q(i\omega)$. Puis on approche également la densité spectrale $S_{w_T}^{kar}$ du processus w_T par une fraction rationnelle. La densité spectrale du processus F_{w_T} est une matrice diagonale, ses composantes sont données par la relation

$$S_{F_w}^m(\omega) = |H_m(\omega)|^2 S_{w_T}.$$

Elle est alors de type rationnel. On peut ainsi utiliser les résultats des paragraphes précédents pour construire des trajectoires du processus vectoriel $F_{w_T} = (F_{w_T}^1, \dots, F_{w_T}^m)$. Ici, on a choisi l'approximation

$$H_m(i\omega) = \frac{Q_0 + Q_1 i\omega/\overline{U}}{g_0 + g_1 i\omega/\overline{U} + (i\omega/\overline{U})^2}.$$

Ainsi, en utilisant l'approximation du spectre de la turbulence verticale donnée par l'équation (3.14), l'approximation par fraction rationnelle des densités spectrales $S_{F_w}^m$ des forces généralisées pour le mode m s'écrit formellement:

$$S_{F_w}^m(\omega) = \frac{|a_1 + a_2 i\omega + a_3 (i\omega)^2|^2}{|b_1 + b_2 i\omega + b_3 (i\omega)^2 + b_4 (i\omega)^3 + (i\omega)^4|^2}.$$

Chapitre 4

Étude de la stabilité de systèmes dynamiques aléatoires

Dans ce chapitre, on introduit les outils mathématiques et numériques nécessaires à l'analyse des équations modélisant le comportement du système aéroélastique. La stabilité des systèmes dynamiques engendrés par le problème couplé fluide-structure avec bruit aléatoire multiplicatif sera étudiée en se plaçant dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques aléatoires. La plus grande partie des résultats de ce qui est appelé analyse stochastique a été établi dans les années 20 à 30. Mais c'est seulement plus tard, dans les années 80, qu'il a été possible de lier l'analyse stochastique à la théorie des systèmes dynamiques car on a pu montrer qu'une équation différentielle aléatoire ou stochastique engendre un système dynamique aléatoire (SDA). Le théorème crucial pour l'analyse de la stabilité est le théorème ergodique multiplicatif. Il a été démontré en 1968 par Oseledets [77] et s'applique à la linéarisation de SDA réguliers. Ce théorème nous fournit le pendant aléatoire de certains outils de l'algèbre linéaire. Notamment, il rend possible une étude locale de la stabilité des systèmes dynamiques aléatoires. Dans ce qui suit, on donnera les principaux résultats et notations concernant les SDA afin d'aboutir à la notion d'exposant de Lyapunov, pièce maîtresse de la démarche suivie. On abordera également le problème de la bifurcation stochastique. L'aspect simulation numérique des SDA sera ensuite abordé. Sauf cas très particuliers, l'exposant de Lyapunov ne peut être obtenu que par des méthodes numériques en s'appuyant sur la simulation de trajectoires des SDA.

Dans ce chapitre, ω désigne l'aléa et non la fréquence circulaire. Par ailleurs on note de manière équivalente $x(t)$ et x_t.

4.1 Définition des types d'équations objet de l'étude

Soit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On étudie ici des équations différentielles issues de la modélisation de systèmes dynamiques qui sont excités par des bruits réels. Ces équa-

tions différentielles sont appelées équations différentielles aléatoires (EDA) contrairement aux équations différentielles stochastiques (EDS) excitées par un bruit blanc. En effet, on appelle bruit réel ou encore bruit coloré un processus stochastique issu du filtrage d'un bruit blanc et dont les trajectoires possèdent une certaine régularité que ne possède pas le bruit blanc. La turbulence atmosphérique est modélisée par un tel processus.

Introduisons la forme générale d'une EDA,

$$\dot{x}_t = f(\xi_t(\omega), x_t), \quad x_{t_0} = x_0, \tag{4.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction analytique vérifiant $f(\xi, 0) = 0$ et $\xi_t(\omega)$ est un processus de diffusion, stationnaire, ergodique sur $\mathbb{R}^n$, solution d'une équation différentielle stochastique[1] telle que:

$$d\xi_t(\omega) = B_0(\xi_t(\omega))dt + \sum_{i=0}^{r} Q_i dW_t(\omega), \tag{4.2}$$

où $W_t(\omega) \in \mathbb{R}$ est un processus de Wiener et les champs de vecteurs B_0 et $Q_i \in \mathbb{R}^n$ sont supposés analytiques.

Donnons tout d'abord quelques notions sur l'ergodicité:

Ergodicité Soit $X_t \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$ un processus du second ordre, stationnaire. L'ergodicité d'un processus stationnaire exprime une certaine équivalence entre les moyennes par rapport au paramètre d'indexation t, en occurrence le temps, et les moyennes par rapport à une mesure de probabilité (les moyennes probabilistes).

Définition. *Soit $(t_1, \dots, t_m)$ une partition finie de $\mathbb{R}$ et soit Y_t le processus stationnaire tel que $Y(t) = (X_t, X_{t+t_1}, \dots, X_{t+t_m})$. Généralement, la notion de d'ergodicité est définie comme suit: un processus $X_t \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$ est ergodique si pour tous t et toute fonction g mesurable, le processus $(g(Y_t), t \in \mathbb{R})$ est un processus du second ordre tel que*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left(\left\| \frac{1}{T} \int_0^T g(Y_t)\, dt - \mathbb{E}(g(Y_s)) \right\|^2 \right) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Par exemple, pour $g(Y_t) = X_t$, la relation ci-dessus s'écrit

$$\mathbb{E}(X_s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_t\, dt, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

c'est-à-dire que l'on a équivalence entre la moyenne probabiliste et la moyenne temporelle. Ainsi, un processus stationnaire gaussien est ergodique s'il est ergodique par

1. Nous n'abordons pas ici la différence entre les deux approches classiques concernant les EDS: celle de Stratonovich et celle d'Itô. L'EDS au sens de Stratonovich et au sens d'Itô coïncident ici car les champs de vecteurs Q_i sont constants (voir aussi les annexes D et D.5).

rapport à sa fonction moyenne et sa fonction d'autocorrélation, c'est-à-dire $g(Y_t) = X_t$ et $g(Y_t) = X_{t+u}X_t^T$. En pratique, on peut utiliser le résultat suivant [101]: si X_t est un processus gaussien centré stationnaire dont la fonction d'autocorrélation est intégrable et aussi de carré intégrable

$$R_X \in L^1(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad R_X \in L^2(\mathbb{R}),$$

alors X_t est un processus ergodique.

Dans le cas où le système dynamique est linéaire (et on suppose que c'est le cas pour le système aéroélastique sans jeu), l'équation (4.1) s'écrit

$$\dot{x}_t = A(\xi_t(\omega))\, x_t, \quad x_{t_0} = x_0, \tag{4.3}$$

où maintenant $f(\xi_t(\omega), x) \equiv A(\xi_t(\omega))\, x_t$. Remarquons que l'équation (4.3) est linéaire par rapport à x mais non linéaire par rapport au bruit ξ_t.

Pour le problème aéroélastique qui nous intéresse, le bruit qui vient perturber le système est la composante longitudinale de la turbulence atmosphérique qui, on l'a vu au dernier chapitre, est modélisée par réalisation markovienne d'un processus gaussien stationnaire η:

$$\begin{aligned} \eta_t(\omega) &= B_1\, \xi_t(\omega), \\ d\xi_t(\omega) &= B_0 \xi_t(\omega)\, dt + Q_0 dW_t(\omega), \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $B_1 \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ et $Q_0 \in \mathbb{R}^n$.

Cependant, on écrira encore l'équation sous la forme (4.1) ou respectivement (4.3) en faisant apparaître le processus de diffusion ξ_t à la place de l'observation $\eta_t = B_1\, \xi_t$.

Remarque 5. *On peut écrire l'équation (4.1) avec bruit markovien (4.4) sous forme d'une équation différentielle stochastique non linéaire au sens d'Itô en introduisant la nouvelle inconnue $y = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{d+n}$:*

$$d\, y_t = \begin{pmatrix} f(\xi_t, x_t) \\ B_0 \xi_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} dW_t. \tag{4.5}$$

On note que le bruit est maintenant additif et que l'équation différentielle est non linéaire, même dans le cas d'une EDA linéaire avec $f(\xi_t, x_t) \equiv A(\xi_t)\, x_t$.

4.2 Systèmes dynamiques aléatoires linéaires

On a vu qu'une EDA est une équation différentielle excitée par un bruit réel multiplicatif obtenu par filtrage du bruit blanc. Les équations différentielles avec bruit réel multiplicatif peuvent être traitées commes des équations différentielles ordinaires avec coefficients aléatoires. Ainsi, contrairement au cas d'EDS, on n'a pas besoin de l'outil

du calcul stochastique d'Itô. Par construction, le processus stochastique ξ est gaussien et stationnaire. Soit l'équation différentielle aléatoire

$$\dot{x} = A(\xi_t(\omega))x. \tag{4.6}$$

Si la fonction $A : \Omega \to Mat_{\mathbb{R}}(d,d)$ est mesurable et satisfait $A \in L^1(\Omega)$, alors (4.6) génère un unique système dynamique aléatoire dont le flot ϕ est C^∞ (i.e. infiniment différentiable par rapport à x). La notion de flot dans le cas stochastique est introduite dans le paragraphe suivant, voir aussi l'annexe A pour la définition d'un flot classique déterministe.

Définition du flot stochastique Considérons d'abord le cas de l'équation déterministe

$$\dot{x}_t = Ax_t, \quad x_{t_0} = x_0.$$

On sait alors (voir Annexe A) que les solutions de cette équation définissent un flot de difféomorphismes défini par

$$\phi(t,x) = \Psi(t)x = e^{A(t-t_0)}x,$$

qui vérifie la propriété classique

$$\phi(t+s,x) = \phi(t,\cdot) \circ \phi(s,x), \tag{4.7}$$

où $\circ$ désige la composition de fonctions. De manière générale, si on considère maintenant le cas probabiliste,

$$\dot{x}_t = A(\xi_t)x_t$$

la solution va dépendre de l'aléa. Par conséquent, il est naturel de considérer l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d, \\ (t,\omega,x) &\to \phi(t,\omega,x) = \Psi(t,\omega)x, \end{aligned} \tag{4.8}$$

qui associe à chaque valeur initiale $x \in \mathbb{R}^d$ la valeur atteinte par la solution de l'équation (4.6) à l'instant t sous l'influence de l'aléa $\omega \in \Omega$.

Si on souhaite généraliser la propriété (4.7) au cas stochastique, il est nécessaire de pouvoir évaluer le bruit à l'instant $u = t+s$ à partir de sa connaissance à l'instant s. Plus précisément, ayant construit la solution jusqu'á l'instant s sous l'influence de ω, on veut la prolonger jusqu'à l'instant u. Afin d'évaluer la solution à l'instant $t+s$ avec valeur initiale $\Psi(s,\omega)x$, il faut alors tenir compte de l'évolution du bruit entre les instants s et $t+s$. C'est pourquoi on introduit sur l'espace Ω une famille ν_t de transformations formelles appelées "shift" et qui vérifient la propriété

$$\begin{aligned} \nu_t : \ \Omega &\to \Omega, \\ \nu_{t+s}\omega &= \nu_t \circ \nu_s \omega. \end{aligned}$$

Remarque 6. *On sait que la donnée d'un espace probabilisé est arbitraire et, en pratique, on ne travaille pratiquement jamais sur l'ensemble Ω. Si on choisit de prendre pour Ω l'ensemble de toutes les trajectoires du bruit ξ_t, alors les éléments de Ω sont des fonctions $t \to \omega(t)$ et l'application shift n'est autre que l'opérateur classique de translation $\nu_t\omega(s) = \omega(t+s)$.*

On démontre alors que l'application ϕ de (4.8) définit un système dynamique. Elle forme un cocycle de difféomorphismes par rapport à ν_t, c'est-à-dire que $\phi(t,\omega,\cdot) \doteq \phi(t,\omega)$ est mesurable par rapport à ω, continue en (x,t) et pour presque tout $\omega \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t,\omega)$ vérifie la propriété

$$\begin{aligned} \phi(t+s,\omega) &= \phi(t,\nu_s\omega) \circ \phi(s,\omega) \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d, \\ \phi(0,\omega) &= I_d. \end{aligned}$$

Remarque 7. *En analogie avec la définition déterministe, le flot stochastique Θ_t sur $\Omega \times \mathbb{R}^d$ est défini par*

$$\Theta_t :\ (\omega,x) \to (\nu_t\omega,\ \phi(t,\omega,x)).$$

En fait, on a simultanément deux systèmes dynamiques: celui qui génère le bruit ξ_t et celui qui gouverne le système mécanique.

En particulier, pour ω et t fixés, l'application $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$: $\Psi(t,\omega) \doteq \phi(t,\omega,\cdot)$ associée à l'EDA linéaire (4.6) est un difféomorphisme linéaire. Ce cocycle matriciel est donné par la matrice fondamentale de l'équation différentielle (4.6) vérifiant $\dot{\Psi}(t,\omega) = A(\xi_t)\Psi(t,\omega)$. Par ailleurs, on a $\Psi(t_0,\omega) = I_d$ et Ψ vérifie

$$\Psi(t,\omega) = I + \int_0^t A(\xi_s)\Psi(s,\omega)\,ds.$$

L'étude de la stabilité du SDA (4.6) consiste alors à étudier la stabilité de ce cocycle.

4.3 Notion de stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité d'un système dynamique se traduit par une insensibilité à de petites perturbations: si deux trajectoires d'un système stable sont proches l'une de l'autre à un instant donné, elles le restent aux instants suivants. Les perturbations évoquées ci dessus peuvent être de petits changements dans la condition initiale ou des changements dans les paramètres du système. Soit le système déterministe autonome $\dot{x}_t = f(x_t)$. On peut supposer sans perte de généralité que $f(0) = 0$. Le point $x \equiv 0$ est alors un point d'équilibre ou un point fixe du système. Pour l'équation différentielle déterministe on définit la notion de stabilité comme suit (par exemple [108])

Définition. *Le point d'équilibre $x = 0$ est:*

stable *si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_t(x_0)\| < \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0$$

asymptotiquement stable *s'il est stable et δ peut être choisie telle que*

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x_t(x_0) = 0$$

Dans le cas de systèmes dynamiques classiques linéaires de la forme $\dot{x}_t = Ax_t$, le calcul des valeurs propres de la matrice A permet de conclure sur la stabilité de la solution. Ainsi, le système est stable si toutes les parties réelles des valeurs propres sont négatives. Plus particulièrement, les parties réelles des valeurs propres donnent le taux de (dé-)croissance exponentielle d'une solution dans la direction du sous-espace correspondant. On remarque aussi qu'un système linéaire stable est toujours stable globalement. Cela implique que la stabilité ne dépend pas de la condition initiale et ainsi, quelque soit l'écart à la position d'équilibre, le système revient à l'état correspondant à cette position d'équilibre. Si on considère maintenant le système linéaire non-autonome $\dot{x}_t = A(t)x_t$, l'étude des valeurs propres des matrices $A(t)$ n'est plus suffisante (il n'est pas non plus possible de les calculer pour toutes matrices $A(t)$) car les valeurs propres ne permettent pas d'avoir une information sur le comportement asymptotique de la solution. C'est ainsi que Lyapunov a introduit les exposants caractéristiques qui portent son nom. Les exposants de Lyapunov sont des quantités spectrales décrivant le comportement asymptotique de $A(t)$. Plus concrètement, ils mesurent la divergence ou convergence exponentielle d'orbites voisines dans l'espace des phases. Les exposants de Lyapunov d'un système linéaire, autonome, déterministe correspondent aussi aux parties réelles des valeurs propres de A. Le théorème multiplicatif d'Oseledets montre que ces objets spectraux existent aussi pour la classe particulière des systèmes non autonomes (aléatoires) $\dot{x}_t = A(\xi_t(\omega))x_t$. Par ailleurs, le point fixe d'un tel système dynamique est stable si le plus grand exposant de Lyapunov est négatif.

4.4 Stabilité stochastique

Dans le cas de systèmes avec bruit aléatoire multiplicatif, la matrice A est un processus stochastique à valeurs matricielles. La définition de la stabilité doit alors être adaptée à des grandeurs aléatoires: elle doit être définie en termes de probabilités et d'espérances mathématiques. On distingue la notion de stabilité en probabilité et la notion de stabilité presque sûrement. Elles sont définies comme suit:

Définition. – *On dit que la solution triviale $\phi(t,\, \omega,\, x_0) = 0$ de (4.3) ou (4.5) est stable en probabilité (stabilité stochastique) si*

$$\lim_{x_0\to 0} P(\sup_{0\le t<\infty} \|\phi(t,\omega,x_0)\| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

– *La solution triviale $\phi(t,\, \omega,\, x_0) = 0$ est asymptotiquement stable presque sûrement si on a stabilité stochastique et si, de plus, la condition*

$$\lim_{x_0\to 0} P(\lim_{t\to\infty} \|\phi(t,\omega,x_0)\| = 0) = 1$$

est vérifiée.

On vérifie que ces définitions sont analogues aux définitions déterministes de la notion de stabilité et de stabilité asymptotique, respectivement. Par ailleurs, la solution triviale est globalement stable si

$$P(\lim_{t\to\infty} \|\phi(t,\omega,x_0)\| = 0) = 1, \quad \forall x_0$$

Notons également qu'on parle de stabilité en moyenne d'ordre deux si on a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(\|\phi(t,\omega,x_0)\|^2) = 0$$

La notion de stabilité en moyenne d'ordre deux est la plus forte, elle implique la stabilité en probabilité et la stabilité presque sûrement.

4.5 Théorème ergodique d'Oseledets

Le théorème suivant établi par Oseledets (1968) nous fournit des outils pour les SDA remplaçant certains outils de l'algèbre linéaire du cadre déterministe. Par analogie avec les sous-espaces propres d'une matrice déterministe, on définit les espaces d'Oseledets qui sont des sous-espaces aléatoires. Les exposants de Lyapunov, quant à eux, sont des grandeurs déterministes qui correspondent aux parties réelles des valeurs propres de matrices déterministes. Ils donnent le taux de croissance exponentiel d'une trajectoire dans la direction de chaque sous-espace.

Les mesures invariantes jouent un rôle important dans la théorie des systèmes dynamiques aléatoires. S'il existe une mesure ergodique invariante pour le flot engendré par le système dynamique, le théorème multiplicatif d'Oseledets donne une expression analytique pour les exposants de Lyapunov. Soit l'EDA linéaire $\dot{x}_t = A(\xi_t(\omega))x_t$. Sachant que le point zéro est point fixe, on vérifie que la mesure de Dirac au point zéro $\mu_\omega = \delta_0$ est l'unique mesure invariante, ergodique par rapport au flot, telle que:

$$\delta_0(B) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \in B, \\ 0 & si\ 0 \notin B. \end{cases}$$

Le théorème multiplicatif d'Oseledets s'énonce comme suit:

Théorème 3 (Théorème ergodique multiplicatif d'Oseledets). *Sous l'hypothèse que $\mathbb{E}\|A(\xi_t(\omega))\| < +\infty$, il existe r nombres réels $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r$ de multiplicité d_i, $\sum_{i=1}^r = d_i = d$, tels que pour tout ω appartenant à un ensemble Γ, invariant par rapport à l'application ν_t avec $\Gamma \subset \Omega$, $P(\Gamma) = 1$, on a*

(i) il y a r sous-espaces aléatoires $E_i(\omega) \subset \mathbb{R}^d$ tels que

$$\mathbb{R}^d = E_1(\omega) \oplus \ldots \oplus E_r(\omega), \quad \dim E_i(\omega) = d_i$$

$$\Psi(t,\omega)E_i(\omega) = E_i(\nu_t\omega) \quad \textit{invariance stochastique}$$

(ii) pour tout $x \neq 0$ la limite $\lambda^{\pm}$ suivante existe, elle est donnée par

$$\lambda^{\pm}(x,\omega) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t,\omega)x\| = \lambda_i \quad \textit{ssi } x \in E_i(\omega)$$

Les λ_i sont appelés exposants de Lyapunov et les sous-espaces aléatoires $E_i(\omega)$ sont appelés les espaces d'Oseledets. Comme dans le cas déterministe (voir Annexe A), l'exposant de Lyapunov λ_i donne le taux de croissance d'une solution avec valeur initiale dans l'espace d'Oseledets $E_i(\omega)$. En outre, on a la formule de la trace:

$$\sum_{i=1}^{r} d_i\lambda_i = \mathrm{Tr}\left(\mathbb{E}A\big(\xi_t(\omega)\big)\right).$$

Le système est dit hyperbolique si $\lambda_i \neq 0$. Dans ce cas, les sous-espaces stable E^s et instable E^u sont définis comme suit:

$$E^s(\omega) = \oplus_{\lambda_i<0}E_i(\omega), \quad E^u(\omega) = \oplus_{\lambda_i>0}E_i(\omega).$$

Le point (ii) du théorème 3 montre que les exposants de Lyapunov sont indépendants de l'aléa ω et de la valeur initiale x_0. Bien entendu, le système est stable asymptotiquement si tous les exposants de Lyapunov sont négatifs. On peut également vérifier que, si on annule le bruit, les exposants de Lyapunov coincïdent avec les parties réelles des valeurs propres de la matrice A et que dans ce cas, les espaces d'Oseledets correspondent aux sous-espaces propres généralisés.

On peut montrer que, si la projection de l'équation (4.6) sur la sphère unité vérifie une certaine condition de non-dégénérescence (voir aussi l'annexe C), alors le plus grand exposant de Lyapunov est donné presque sûrement par la formule suivante:

$$\lambda \doteq \lambda_{max} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t,\omega)x_0\|, \quad \text{P-p.s. pour}\, x_0 \neq 0$$

De manière heuristique, on peut dire que la solution est attirée par le sous-espace $E_r(\omega)$ qui correspond au plus grand exposant de Lyapunov $\lambda_{max} \doteq \lambda_r$. Ou, autrement dit, la projection de n'importe quel vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^d$ sur l'espace aléatoire $E_r(\omega)$ ne s'annule pas, presque sûrement.

Le résultat pratique à retenir de ce paragraphe, et qui est utilisé dans la suite, est le suivant:

$$\boxed{\lambda_{max} = \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} \log \|x(t,\omega)\|}$$

Pour l'utiliser, il faut pouvoir construire une trajectoire $t \to x(t,\omega)$ de la solution et calculer la quantité $1/t \log \|x(t,\omega)\|$ pour t suffisamment grand.

On peut maintenant se demander ce qui se passe si le système est dans le même temps excité par des bruits multiplicatif et additif. Cette situation est discutée dans le paragraphe suivant.

4.6 Stabilité du système dynamique aléatoire linéaire affine

Lorsqu'on introduit un bruit additif, on obtient l'équation affine suivante:

$$\dot{x}_t = A(\xi_t(\omega))x_t + b(\xi'_t(\omega))\,, \text{ où } A, b \in L^1(\Omega). \tag{4.9}$$

L'équation (4.9) génère un unique SDA dont le flot est C^∞. La solution est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi(t,\omega)x &= \Psi(t,\omega)\left(x + \textstyle\int_0^t \Psi(u,\omega)^{-1} b(\xi'_u(\omega))du\right)\\ &= \Psi(t,\omega)x + \textstyle\int_0^t \Psi(t-u,\nu_u\omega)b(\xi'_u(\omega))du,\end{aligned}$$

avec $\Psi(t,\omega)^{-1} = \Psi(-t,\nu_t\omega)$ et où $\Psi(t,\omega)$ est le cocycle matriciel généré par l'équation homogène (4.6).

Il existe une unique solution stationnaire qui est à trajectoires continues. Dans le cas stable, c'est-à-dire si $\lambda_{max} < 0$ pour le cocycle $\Psi(t,\omega)$, alors toutes les solutions convergent vers cette solution stationnaire [5]:

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \to \infty$ on a

$$\varphi(t,\omega)x - \zeta(\nu_t\omega) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad P-p.s.,$$

et ceci exponentiellement. En effet, ζ est solution de l'équation intégrale

$$\zeta(\omega) = \int_{-\infty}^0 \Psi(-u,\nu_u\omega)b(\xi'_u(\omega))\,du.$$

Ces résultats montrent qu'une force extérieure aléatoire (ou un bruit additif), correspondant par exemple par la composante verticale de la turbulence atmosphérique, n'influence pas la stabilité d'un système linéaire. Le point fixe de l'équation non-bruitée se transforme en une unique solution stationnaire. Cependant, le système n'est plus stable asymptotiquement.

4.7 Exposant de Lyapunov des moments

On peut également définir les exposants de Lyapunov des moments d'une solution $\Psi(t,\omega)x_0$:

Définition. *L'exposant de Lyapunov du $p^{\text{ième}}$ moment de la solution est défini par*

$$g(p,x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}(\|\Psi(t,\omega)x_0\|^p) \quad p \in \mathbb{R}, \quad x_o \neq 0 \tag{4.10}$$

Sous certaines conditions, l'exposant de Lyapunov du $p^{\text{ième}}$ moment est indépendant de la valeur initiale x_0. Dans ce cas, il existe un lien entre la stabilité presque sûrement des trajectoires et la stabilité des moments (Arnold et al. [3], [10]).

Théorème 4 (Arnold [3]). *Si certaines conditions topologiques sont vérifiées, l'exposant de Lyapunov du $p^{\text{ième}}$ moment $g(p)$ existe et vérifie les propriétés suivantes:*
(i) $g(p)$ est indépendant de x_0 pour $x_0 \neq 0$
(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, analytique et $g(0) = 0$
(iii) $g'(0) = \lambda_{max}$

Arnold [3] définit aussi l'indice de stabilité γ qui correspond à la solution non-nulle de $g(\gamma) = 0,\ p' \neq 0$, si elle existe. L'indice de stabilité indique donc la limite pour la stabilité des moments: le $p^{\text{ième}}$ moment est instable pour $p > \gamma$. Plus généralement, les exposants de Lyapunov des moments ainsi que l'indice de stabilité peuvent donner des renseignements plus fins sur le comportement de la solution. Cependant, on constate que les exposants de Lyapunov des moments sont difficilement calculables par simulation numérique pour des raisons d'instabilité numérique (voir aussi §4.10.2 pour le calcul numérique de l'exposant de Lyapunov). Pour certains cas simples, il est possible de trouver une solution analytique. Certains auteurs ont notamment développé des approximations à l'aide de développements asymptotiques pour des oscillateurs simples et sous des hypothèses plus ou moins restrictives [113], [102]. Néanmoins, toutes ces méthodes ne sont pas applicables à des systèmes quelconques et notamment de plus grande taille. Il semble qu'en pratique, les exposants de Lyapunov des moments ne soient pas utilisables. Pour des problèmes industriels, on ne peut pas espérer obtenir des informations plus détaillées sur le comportement par le moyen des exposants de Lyapunov des moments.

4.8 Stabilité de SDA non linéaires

4.8.1 EDA non linéaire avec point fixe $\bar{x} = 0$

Considérons d'abord le cas déterministe, à savoir un système dynamique engendré par l'équation différentielle non linéaire

$$\dot{x}_t = f(x_t) \in \mathbb{R}^d.$$

On suppose que $\bar{x}$ est un point fixe (tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$) et on cherche à caractériser le comportement des trajectoires dans un voisinage de ce point d'équilibre. On suppose également, sans perte de généralité, que le point fixe est donné par la solution zéro $\bar{x} = 0$ car on peut toujours se ramener à ce cas par changement de variable. Le théorème de Grobman-Hartman dit alors que le comportement asymptotique des solutions (et donc la stabilité) dans un voisinage du point fixe est déterminé par le comportement du système linéarisé

$$\dot{v} = D_x f(\bar{x})v$$

si la matrice jacobienne $D_x f(\bar{x}) = [\frac{\partial f_i}{\partial x_i}|_{\bar{x}}] \in Mat_{\mathbb{R}}(d,d)$ de f est hyperbolique.[2] On rappelle qu'un système dynamique linéaire est dit hyperbolique, s'il ne possède pas de valeur propre à partie réelle égale à zéro.

En conséquence du théorème de Hartman-Grobman, il suffit d'étudier la stabilité du système linéarisé et, plus précisément, les valeurs propres de la matrice jacobienne $D_x f(\bar{x})$ afin de savoir si le point fixe du système non linéaire est stable ou non. Si l'une des valeurs propres est à partie réelle nulle, on ne peut plus étudier la stabilité par linéarisation.

Considérons maintenant l'équation différentielle aléatoire non linéaire dans $\mathbb{R}^d$

$$\dot{x_t} = f(\xi_t(\omega), x_t), \tag{4.11}$$

avec $f(\xi_t(\omega), 0) = 0$ et dont le flot s'écrit

$$\phi(t,\omega,x) = x + \int_0^t f(\xi_s(\omega), \phi(s,\omega,x))\, ds.$$

Par ailleurs, la linéarisation de l'équation (4.11) par rapport à la variable x est donnée par

$$\dot{v_t} = D_x f(\xi_t(\omega), \phi(t,\omega,x))v_t. \tag{4.12}$$

On souhaite étudier la stabilité du point fixe $\bar{x} \equiv 0$ de l'équation 4.11. Son cocycle vérifie $\phi(t,\omega,0) = 0$ et il est évident que la mesure de Dirac δ_0 est une mesure invariante. Considérons la matrice jacobienne au point zéro donnée par $\Psi(t,\omega) = D_x\phi(t,\omega,0)$, solution des équations linéaires

$$\dot{\Psi} = A(\xi_t(\omega))\Psi,$$
$$\Psi(0,\omega) = I_d \qquad \text{et} \qquad A(\xi_t(\omega)) = D_x f(\xi_t(\omega), 0).$$

Il existe une version aléatoire du théorème de Hartman-Grobman [111] [9]. Si certaines conditions concernant le terme non linéaire $\phi - \Psi$ sont satisfaites, il existe un homéomorphisme aléatoire $h(\omega)$ tel que le flot $h(\nu_t\omega)\circ\phi(t,\omega,x)$ prenne les mêmes trajectoires que le flot linéarisé $\Psi(t,\omega)x$. Dans un cadre plus général, un théorème de Grobman-Hartman local s'applique pour tout SDA différentiable avec mesure invariante δ_0 et

2. Le théorème de Hartman-Grobman est rappelé dans l'annexe A.

donc avec point fixe 0. Il existe alors un homéomorphisme aléatoire $h_T(\omega)$ tel que pour tout $T > 0$, il existe un voisinage $U_T(\omega)$ de 0 où $h_T(\nu_t\omega) \circ \phi(t, \omega, x)$ prend les mêmes trajectoires que $\Psi(t, \omega)x$ pour $x \in U_T(\omega)$ et $|t| \leq T$.

Le théorème ergodique d'Oseledets s'applique aux équations linéarisées et, sous condition d'hyperbolicité ($\lambda_i \neq 0$), le signe du plus grand exposant de Lyapunov du système linéarisé, exprimé par

$$\lambda_{max} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Psi(t, \omega)x_0\|, \quad \forall\omega \in \Omega, \quad x_0 \neq 0,$$

est encore un indicateur de la stabilité du point fixe (de la mesure invariante δ_0) de l'équation non linéaire (4.11).

4.8.2 Exposant de Lyapunov pour des EDS non linéaires avec bruit additif

Dans ce paragraphe, on se place dans le cadre d'équations différentielles stochastiques d'Itô. En effet, il est possible de calculer des exposants de Lyapunov pour des EDS ne possédant pas de point fixe du fait de la présence d'un bruit additif comme par exemple l'équation (4.5). Cependant, la résolution du système d'équations qui en découle est beaucoup plus contraignante que celle du système obtenu par linéarisation autour d'un point fixe de l'EDA (4.11).

Soit l'EDS d-dimensionnelle non linéaire

$$dx_t = a(x_t)dt + QdW_t, \; x_0 = x \tag{4.13}$$

(cette équation est à comparer à l'équation (4.5) de l'énoncé). Soit $(\omega, x) \to \phi(t, \omega, x)$ le flot engendré par (4.13). On peut linéariser ϕ au point $x \in \mathbb{R}^d$ et on note $\Psi(t, \omega, x)$ cette partie linéaire du flot. L'application $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, définie par

$$(x, v) \to (\phi(t, \omega, x), \Psi(t, \omega, x)v)$$

, est un cocycle par rapport à ν_t, définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ avec $\Phi(x_0, v_0) = (x, v)$. Le système linéarisé, défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, est alors donné par

$$\begin{aligned} dx_t = &\quad a(x_t)dt + QdW_t, \\ dv_t = &\qquad A(x_t)v_t dt \qquad . \end{aligned}$$

Ici, $A = D_x a$ est la matrice jacobienne de a. On remarque que les deux équations sont couplées dans la mesure où v_t dépend de $x_t = \phi(t, \omega, x)$. Le plus grand exposant de Lyapunov est donné pour tout (x, v) par

$$\lambda_{max} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|v_t(\omega, x_0)\| \quad \forall\omega \in \Omega, \quad x_o \neq 0.$$

Pour plus de détails et une version sur les variétés, le lecteur peut consulter [48] et [4].

4.9 Bifurcation stochastique

La théorie mathématique de la bifurcation stochastique, quant à elle, en est encore à ses débuts [6]. Une fois de plus, on considère, dans un premier temps, le cas déterministe afin de montrer ensuite comment les résultats ont été étendus au cas avec bruit multiplicatif.

4.9.1 Bifurcation d'un système dynamique déterministe

Soit la famille de systèmes dynamiques paramétrés générée par les équations différentielles ordinaires

$$\dot{x}_t = f(x_t, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^d, \ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

On suppose que f dépend régulièrement de α et, comme auparavant, qu'on a un point fixe pour $\bar{x} = 0$. La linéarisation de (4.14) s'écrit $\dot{v}_t = A(\bar{x}, \alpha)v_t$ avec $A(\bar{x}, \alpha) = D_x f(\bar{x}, \alpha)$.

Le terme bifurcation décrit un changement qualitatif dans le plan des phases des solutions (les orbites) de (4.14), et ceci pour une certaine valeur du paramètre α. Une solution d'équilibre auparavant stable (comme ici le point fixe $\bar{x}$) devient instable alors que d'autres solutions (instables ou stables) apparaissent. On parle alors de bifurcation et on désigne par $\bar{\alpha}$ la valeur de ce paramètre pour laquelle le changement est observé. Il est connu qu'une nouvelle solution d'équilibre ne peut bifurquer d'un point fixe que si la partie réelle de l'une des valeurs propres du système linéarisé devient nulle. Si aucune valeur propre de $A(\bar{x}, \bar{\alpha})$ n'est à partie réelle nulle, alors le point fixe $\bar{x}$ est dit hyperbolique pour $\bar{\alpha}$ et le comportement asymptotique de la solution dans un voisinage de $\bar{x}$ est déterminé par la linéarisation (Théorème de Hartman Grobman). Si le système linéarisé possède une valeur propre à partie réelle nulle, des phénomènes plus complexes interviennent et l'étude du système linéarisé n'est plus suffisante.

Bifurcation de Hopf Soit, de nouveau, $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre pour certaines valeurs de paramètre α et $d \geq 2$. Soit $D_x f(\bar{x}, \cdot)$ la matrice jacobienne possédant une paire de valeurs propres complexes conjuguées non nulles. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une courbe régulière d'équilibres $\big(x(\alpha), \alpha\big)$ dans un voisinage de $\bar{\alpha}$, passant par $\bar{x}$ pour $\bar{\alpha}$, et la paire de valeurs propres $\beta(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ de $D_x f(x(\alpha), \alpha)$ varie continûment avec α. Une bifurcation de Hopf se produit au point $\bar{x}$ si une paire de valeurs propres coupe l'axe imaginaire du plan complexe $\mathbb{C}$ pour $\alpha = \bar{\alpha}$ alors qu'aucune autre valeur propre n'est à partie réelle nulle et si

$$\frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=\bar{\alpha}} > 0.$$

Pour de plus amples détails on peut consulter l'ouvrage classique de Guckenheimer et Holmes [49].

Remarque 8. *A titre d'exemple, si on modélise un profil d'aile d'avion bidimensionnel, soumis à un écoulement (subsonique), par deux oscillateurs simples couplés et si un jeu est introduit par un ressort non linéaire, alors on observe une bifurcation de Hopf pour une certaine valeur critique α^{crit} de l'écoulement. La solution zéro devient instable et, pour $\alpha > \alpha^{crit}$, des oscillations harmoniques soutenues, appelés cycles limites, forment le nouvel équilibre.*

4.9.2 Qu'est-ce qu'une bifurcation stochastique?

Soit ϕ_α une famille de systèmes dynamiques aléatoires avec point fixe à l'origine zéro engendrée par le champ de vecteurs

$$\dot{x}_t = f(\xi_t(\omega), x_t, \alpha) \in \mathbb{R}^d. \tag{4.15}$$

Comme dans le cas déterministe, on parle de bifurcation si l'on rencontre des changements qualitatifs dans le plan des phases d'une famille de systèmes dynamiques paramétrés.

Selon Arnold et al. [5] [23], on distingue la bifurcation dynamique **(D-bifurcation)** et la bifurcation phénoménologique **(P-bifurcation)**.

En ce qui concerne la bifurcation dynamique, on parle d'un point de bifurcation si le plus grand exposant de Lyapunov s'annule pour une certaine valeur du paramètre (α_D). En dimension un, on observe la bifurcation d'une nouvelle famille de mesures invariantes à partir de la mesure invariante δ_0.

La bifurcation dite phénoménologique est issue d'un concept plus ancien. Cette approche a, en premier lieu, été introduite par des physiciens qui étudiaient des équations différentielles issues de la physique perturbées par un bruit blanc. Elle repose sur l'observation d'un changement dans l'allure de la densité de probabilité stationnaire p_α, solution de l'équation de Fokker-Planck, $\mathcal{L}^*_\alpha p_\alpha = 0$, associée au processus x solution de l'EDA non linéaire (4.15). Pour plus de détails et quelques exemples, le lecteur peut consulter les publications de Horsthemke et Lefever [50] (qui notamment appellent ces phénomènes "noise-induced transitions") ainsi que celles de Zeeman [115].

Toutefois, le plus grand exposant de Lyapunov ne s'annule pas, en général, au point de bifurcation phénoménologique α_P. Par conséquent, la D-bifurcation n'est pas liée à la stabilité des trajectoires. Aussi, L. Arnold a mis en évidence que, typiquement, il y a beaucoup plus de mesures invariantes que de solutions de l'équation de Fokker-Planck p_α. Par conséquent, on peut passer à côté de certaines branches dans le diagramme de bifurcation si on restreint l'analyse au niveau des lois de probabilité. On note aussi que p_α est liée à l'évolution d'une seule trajectoire alors que la notion de stabilité est liée au comportement de deux trajectoires voisines [5]. Les méthodes de résolution pour les EDO non linéaires, comme la réduction du système à l'aide de la forme normale (i.e.

simplification du système dynamique par plusieurs changements de coordonnées) et l'étude de la variété centrale, ont été généralisées au cas stochastique (voir Boxler [22] pour la méthode de variété centrale et plus généralement [5]). Néanmoins, en pratique, l'efficacité de ces méthodes analytiques semble très limitée.

4.10 Simulation numérique des exposants de Lyapunov

Compte tenu de la grande taille des systèmes traités ici, il est indispensable d'avoir recours à la simulation numérique pour construire un estimateur des exposants de Lyapunov. Soit le processus stochastique x solution de l'équation différentielle (4.1). Dans la suite, on note $X(t_j)$ la valeur au point de discrétisation t_j, avec $j = \{1, 2, \dots, N_T\}$, et X_j la valeur obtenue par approximation numérique. On prend un pas de temps fixe $\Delta_t = T/N_T$ tel que $t_j = j\Delta_t$. Le plus grand exposant de Lyapunov peut être approché par le calcul d'une trajectoire sur un intervalle de temps suffisamment long:

$$\lambda_{max} \approx \lambda_T = \frac{1}{T} \log \|X(T)\|.$$

4.10.1 Choix du schéma numérique

Si le bruit excitant le système est suffisamment régulier, l'équation différentielle aléatoire peut être traitée comme une EDO non-autonome (car ξ dépend du temps). L'équation différentielle peut être résolue trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire pour chaque ω.

Interprétation EDA L'équation différentielle aléatoire (4.1) peut être simulée en utilisant des schémas numériques classiques. On calcule les valeurs prises par le processus ξ_t, solution de l'EDS (3.2), aux points de discrétisation t_j à l'aide de l'algorithme décrit dans §3.4. Sachant que le processus modélisant le bruit est au moins une fois continûment différentiable ce qui entraîne que, par construction, X_t est au moins C^2, il est licite d'utiliser des schémas numériques classiques. Les résultats de convergence classique s'appliquent presque sûrement (avec probabilité $P = 1$). Les schémas explicites d'ordre deux comme le schéma de Heun (schéma de Runge-Kutta d'ordre deux) ne sont pas stables pour l'EDA donnée.

Le schéma implicite de Crank-Nicholson s'énonce comme suit:

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= X_j + \frac{\Delta_t}{2}(\dot{X}_j + \dot{X}_{j+1}), \\ X_{j+1} &= X_j + \Big(A(\xi_{t_{j+1}}, X_{j+1}) + A(\xi_{t_j}, X_j) \Big) \frac{\Delta_t}{2}, \end{aligned}$$

Dans le cas linéaire, $A(\xi_{t_j}, X_j) \equiv A(\xi_{t_j})X_j$,et on peut écrire

$$X_{j+1} = \left[I_d - A(\xi_{t_{j+1}})\frac{\Delta_t}{2}\right]^{-1}\left[I_d + A(\xi_{t_j})\frac{\Delta_t}{2}\right]X_j.$$

Ce schéma est inconditionnellement stable mais il est plutôt coûteux à cause de l'inversion de matrice effectuée à chaque pas de temps. De plus, il devient implicite dans le cas d'une équation différentielle non linéaire.

Pour la méthode de Runge-Kutte d'ordre 4, l'erreur est de l'ordre Δt^5 p.s.. Soit l'EDA telle que sa solution X_t est quatre fois différentiable. L'équation différentielle $\dot{X}_t = f(t, X_t)$ peut être discrétisée comme suit:

$$X_{j+1} = X_j + \frac{1}{6}\Big(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\Big),$$

avec

$$K_1 = f(t_j, X_j)\,\Delta_t, \qquad K_2 = f(t_j + 0.5\Delta_t, X_j + 0.5K_1)\,\Delta_t,$$
$$K_3 = f(t_j + 0.5\Delta_t, X_j + 0.5K_2)\,\Delta_t, \qquad K_4 = f(t_j + \Delta_t, X_j + K_3)\,\Delta_t.$$

Bien évidemment, l'avantage des schémas du type Runge-Kutta réside dans le fait qu'ils soient explicites.

Interprétation EDS L'équation différentielle stochastique équivalente (équation (4.5)) est plus difficile à traiter. Si on écrit le système couplé fluide-structure sous forme d'une EDS au sens d'Itô avec $Z = (x, \xi)$, l'excitation est maintenant un processus de Wiener. Ce bruit est additif mais l'équation devient non linéaire même si on suppose un comportement linéaire du système mécanique. On note que, du fait de l'additivité du bruit, on n'a plus de point fixe (alors que la version non-bruitée de l'EDS (4.5) possède toujours le point fixe zéro). Par conséquent, il n'est pas possible d'étudier la stabilité par linéarisation, mais le flot non linéaire ainsi que sa linéarisation au point x doivent être considérés simultanément, comme décrit dans §4.8.2. Il existe un grand nombre de schémas permettant la simulation d'EDS, le lecteur intéressé peut consulter l'ouvrage de référence de Kloeden et Platen [58]. Les schémas adaptés à l'approximation de mesures invariantes et notamment l'exposant de Lyapunov s'appuient sur le critère de convergence ergodique. Ce critère est en effet une extension du critère de convergence faible, où on estime l'erreur locale à l'instant $t = t_j$ par la formule:

$$\epsilon = |\,(\,\mathbb{E}|X_j| - \mathbb{E}|x(t_j)|\,)\,|.$$

Pour le calcul de l'exposant de Lyapunov, on doit étudier le comportement de fonctionnelles approchantes de la forme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(X_j).$$

On peut alors faire tendre le temps t vers l'infini dans l'expression du critère faible afin d'obtenir le critère de convergence dit ergodique:

$$\epsilon = |F^{\Delta} - F|,$$

où

$$F^{\Delta} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j), \quad F = \int f(x) d\rho(x).$$

Ceci est évident si, par ergodicité, on interprète F^{Δ} comme [58]

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(X_j) = \mathbb{E}(f(X)).$$

S'il existe une mesure de probabilité invariante ρ, on a le même ordre de convergence pour le critère ergodique que pour le critère faible (voir Talay [104] pour plus de détail).

Remarque 9. *Les schémas numériques dits de convergence faible s'appuient sur le critère de convergence faible. Ils sont utilisés notamment pour l'approximation des moments. Le critère de convergence forte pour l'erreur locale est l'espérance mathématique de la différence entre l'approximation X_j et la valeur du processus d'Itô au temps t_j:*

$$\epsilon = \mathbb{E}|X_j - x(t_j)|.$$

Il est utilisé dans les cas où l'on souhaite approcher les trajectoires elle-mêmes.

Ici, l'approximation par schéma numérique stochastique se révèle moins efficace. Dans les cas avec bruit multiplicatif traités ici, l'EDS sous-jacente est non linéaire même si le système structural est linéaire. Quant à l'interprétation EDA, il est possible de linéariser l'équation car on connaît un point fixe[3]. Si, de plus, le bruit est suffisamment régulier, on peut simuler l'EDA par des schémas classiques, ce qui est très avantageux en vue d'une application industrielle. C'est pour ces raisons que le formalisme EDA sera privilégié dans la suite.

4.10.2 Calcul du plus grand exposant de Lyapunov

Vu le comportement exponentiel des trajectoires $x(t)$, on peut s'attendre à des problèmes numériques lors des simulations sur un long intervalle de temps. Dans [80], Talay propose de considérer la projection du résultat de l'étape précédente (t_j), qu'on note $\bar{X}_j$, sur la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ et de prendre cette valeur comme condition initiale pour le pas de temps suivant (t_{j+1}). Ceci permet d'utiliser une formule récursive pour l'estimation du plus grand l'exposant de Lyapunov à chaque pas t_{j+1}.

3. Une linéarisation n'est cependant plus possible en présence de bruit additif.

Le schéma peut être décrit par les trois étapes suivantes:

- calcul de $\tilde{X}_{j+1}$ avec le schéma numérique choisi en utilisant comme condition initiale $\bar{X}_j$
- calcul de la nouvelle estimation de λ_{max} pour le pas de temps t_{j+1} à l'aide de la formule de récurrence suivante

$$\lambda_{j+1}^{\Delta} = \lambda_j \left(1 - \frac{j}{(j+1)}\right) + \frac{\log(\|\tilde{X}_{j+1}\|)}{(j+1)\Delta t},$$

- projection de $\tilde{X}_{j+1}$ sur la sphère unité tel que

$$\bar{X}_{j+1} = \frac{\tilde{X}_{j+1}}{\|\tilde{X}_{j+1}\|}$$

que l'on applique de façon itérative.

Le calcul est effectué jusqu'au temps T assez grand où on a trouvé une approximation de λ_{max} par la valeur simulée qu'on note

$$\lambda_T^{\Delta} = \frac{1}{T} \log \|X(T)\|.$$

Dans la suite on notera simplement λ_T pour λ_T^{Δ}. Cet algorithme n'est pas applicable pour la simulation numérique de l'exposant de Lyapunov des SDA non linéaires avec bruit additif comme décrit dans §4.8.2.

4.10.3 Calcul de tous les exposants de Lyapunov du spectre

Un algorithme de Wolf, Swift et al. [112] permet le calcul du spectre entier. Cet algorithme est basé sur une orthogonalisation de Gram-Schmidt des vecteurs propres à chaque pas de temps lors de la simulation temporelle.

4.10.4 Erreur due à la simulation sur un intervalle de temps fini

En dehors de l'erreur due à la réduction de modèle et celle induite par la discrétisation temporelle du processus stochastique par schéma numérique (voir le paragraphe précédent), il faut également considérer l'erreur due à la troncature de la simulation dans le temps. En effet, on approche la limite $t \to \infty$ par simulation sur un intervalle de temps fini T, autrement dit, on fait une estimation de λ_{max} par λ_T. Cette erreur de troncature peut être définie de la manière suivante:

$$\epsilon_T = \lambda_T - \lambda_{max} = \frac{1}{T} \int_0^T q(\xi_\tau, s_\tau)\, d\tau - \lambda_{max}$$

où la fonction $q(\xi_t, s_t)$ est obtenue par projection du processus x sur la sphère unité (elle est donnée dans l'annexe C). Sous la condition (H1), enoncée dans l'annexe C, on dispose du théorème de limite centrale suivant:

Théorème 5 (Bhattacharya [21]). *Pour $t \to \infty$ on a*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \big(q(\xi_\tau, s_\tau) - \lambda_{max}\big)\, d\tau \;\to\; \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

en distribution et $\sigma^2 = -2 < q - \lambda_{max}, \mathcal{L}^{-1}(q - \lambda_{max}) >$ où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit intérieur dans $L^2(\mathcal{P} \times \mathbb{R}^n, \rho)$ et l'opérateur $\mathcal{L}$ est le générateur du processus (s_t, ξ_t). Dans ces expressions, s_t désigne la projection sur la sphère unité du processus x_t, $\mathcal{P}$ l'espace projectif et ρ est l'unique mesure de probabilité pour le processus (s_t, ξ_t) (voir annexe C).

Si on arrive à estimer σ^2, on peut utiliser les estimations d'erreurs habituelles pour la méthode de Monte Carlo. Ainsi, si on admet une erreur de 5% telle que

$$P(|\epsilon_T| \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{T}}) \approx 0.95,$$

le plus grand exposant de Lyapunov λ_{max} se trouve avec une probabilité de l'ordre de 95% dans "l'intervalle de confiance"

$$[\lambda_T - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{T}}, \lambda_T + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{T}}].$$

Malheureusement, la définition de la variance σ^2 donnée dans le théorème ci-dessus n'est pas constructive. Néanmoins, dans [10], Arnold montre que $g''(0) = \sigma^2$ où $g(p)$ est l'exposant de Lyapunov du $p^{\text{ième}}$ moment. Au vu des propriétés de la fonction $g(p)$ (convexe, analytique, voir théorème 4) on peut imaginer de la développer en série de Taylor autour de $p_0 = 0$, ce qui donne l'expression

$$g(p) = g(0) + g'(0)p + \frac{1}{2} g''(0)p^2 + o(p^2).$$

Ceci permet d'approcher σ^2 par la relation

$$g''(0) = \sigma^2 = \frac{2}{p^2}(g(p) - \lambda_{max}\, p).$$

Il se pose alors le problème de l'estimation de $g(p)$ pour une valeur de p proche de zéro. Une simulation directe de $g(p) = \mathbb{E}\|x\|^p$ par la méthode de Monte Carlo est difficilement réalisable sachant que les trajectoires de X_t croissent ou décroissent exponentiellement selon le signe de l'exposant de Lyapunov.

Néanmoins, on peut montrer que les courbes $\alpha \to \lambda(\alpha)$, α étant le paramètre qui varie (paramètre de flottement ou de bifurcation), sont des courbes régulières. Ainsi, si l'intervalle de temps T choisi est suffisamment grand, l'approximation est suffisamment bonne et les courbes $\alpha \to \lambda_T(\alpha)$ sont relativement lisses. Bien évidemment, ce critère est à caractère subjectif.

Chapitre 5

Applications

5.1 Application au profil bidimensionnel

On considère d'abord un modèle bidimensionnel avec deux degrés de liberté qui sont un mouvement de pompage h et un mouvement de tangage α. En écrivant les équations de Lagrange associées au système, on obtient:

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + m\,d\,\ddot{\alpha} + K_h h &= F_h, \\ J_o\ddot{\alpha} + m\,d\,\ddot{h} + k_\alpha(\alpha) &= M. \end{aligned}$$

Le jeu associé au degré de liberté de tangage est modélisé par une force de rappel $k_\alpha(\alpha)$ qui s'annule si l'angle de rotation est petit, $|\alpha| < \alpha_{fp}$.

$$k_\alpha(\alpha) = \begin{cases} K_\alpha(\alpha - \alpha_{fp}) & \alpha > \alpha_{fp} \\ 0 & -\alpha_{fp} \leq \alpha \leq \alpha_{fp} \\ K_\alpha(\alpha + \alpha_{fp}) & \alpha < \alpha_{fp} \end{cases} .$$

S'il n'y a pas de jeu, le comportement du profil est linéaire. Dans ce cas, la raideur en tangage est constante, de sorte que la force de rappel est donnée par l'expression linéaire $k_\alpha(\alpha) = K_\alpha\alpha$. Ici, J_0 est l'inertie de rotation par rapport à l'axe élastique x_e et m désigne la masse. On observe que le couplage des deux degrés de libertés est dû à la distance d non nulle entre le centre de gravité et l'axe élastique x_e du profil. Les FAG $F = (F_h, M)$ sont calculées, pour un nombre de Mach de 0.796, en utilisant la méthode des équations d'Euler linéarisées. Les résultats des chapitres précédents permettent d'obtenir l'équation différentielle, régissant l'état du système, sous la forme:

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= A\big(\xi(t)\big)Y(t) + g\big(Y(t)\big), \\ d\xi(t) &= B_0\xi(t)dt + (0 \quad 1)^T dW(t), \\ Y_0 &= Y(t_0), \quad \xi_0 = \xi(t_0), \end{aligned} \tag{5.1}$$

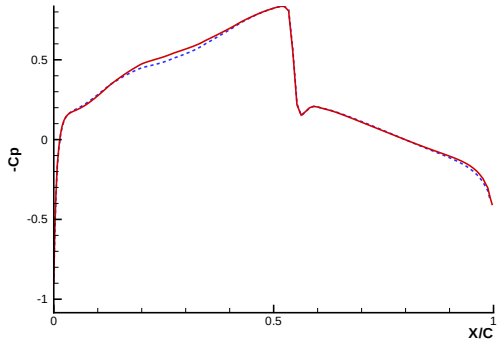

FIG. 5.1 – *coefficients de pression extra- et intrados*

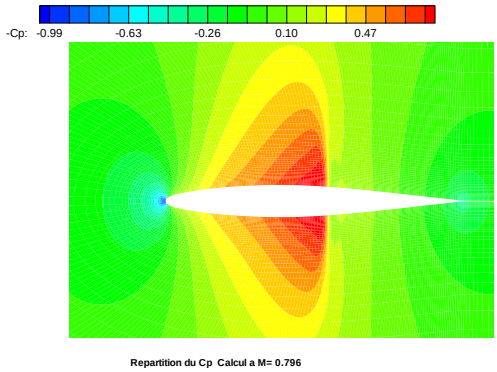

FIG. 5.2 – *champ des pressions*

où $q = (h,\, \alpha)$ et $Y = (q,\, \dot{q},\, X)$. Les forces $g\big(Y(t)\big)$ sont introduites par le ressort non linéaire. Le processus stochastique $\eta = (R_0,\, 0)\,\xi$, comme construit dans le paragraphe 3.5, modélise la composante longitudinale de la turbulence atmosphérique. Clairement, la solution zéro représente un point fixe de l'équation (5.1). On peut ainsi linéariser l'équation (5.1) autour de ce point fixe (la fonction $k_\alpha(\alpha)$ peut, dans ce but, être aprochée par une fonction régulière $\tilde{k}_\alpha$ avec $\tilde{k}_\alpha(0) = 0$). L'équation linéarisée s'écrit

$$\dot{Y}_t = A\big(\xi(t)\big)Y_t, \quad Y_0 = Y(t_0), \tag{5.2}$$

où toujours $d\xi(t) = B_0\xi(t)dt + (0 \quad 1)^T dW(t),\ \xi_0 = \xi(t_0)$.

Les calculs sont effectués pour un profil de type NACA 64A010 de corde $l = 0.5\,\mathrm{m}$ et de masse $m = 10\,\mathrm{kg/m}$. La position du centre de gravité est à 10% de la corde et son axe élastique se trouve à 25% de la corde. Le moment d'inertie par rapport à l'axe élastique est de $0.28125\,\mathrm{kg}m^2$. Les fréquences de pompage et de tangage sont respectivement $f_h = 20\,\mathrm{Hz}$ et $f_\alpha = 34.4\,\mathrm{Hz}$. Ces données permettent de calculer les raideurs des ressorts de pompage $K_h = m(2\pi f_h)^2$ et de tangage $K_\alpha = J_0(2\pi f_\alpha)^2$. Pour le jeu, un angle de $\alpha_{fp} = 0.05$ degrés a été choisi. Les forces aérodynamiques généralisées ont été calculées avec le code REELC développé à l'ONERA. L'intégration numérique a été effectuée avec le schéma de Runge Kutta d'ordre 4. La simulation est effectuée sur un intervalle de temps $T = 13177\,\mathrm{s}$ et avec un pas de temps $\Delta_t = 0.0031\,\mathrm{s}$.

Dans un premier temps, on a tracé l'evolution des parties réelles et des parties imaginaires des valeurs propres du système aéroélastique (sans turbulence) en fonction du paramètre du fluide. Ici, on a choisi comme paramètre la pression totale p_0. Ce diagramme de stabilité est donné par la figures 5.3 pour le cas linéaire (avec force de rappel linéaire $k_\alpha(\alpha) = K_\alpha\alpha$) et par la figure 5.4 pour le cas avec non-linéarité de jeu. Les graphes 5.5 et 5.6 représentent l'évolution du plus grand exposant de Lyapunov simulé (λ_T) en fonction du paramètre p_0. Le graphe de la figure 5.5 donne la valeur de λ_T dans le cas d'un profil linéaire.

Les différentes courbes correspondent à différentes intensités de turbulence I_t. L'intensité de turbulence est prise par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement $\overline{U}$, elle

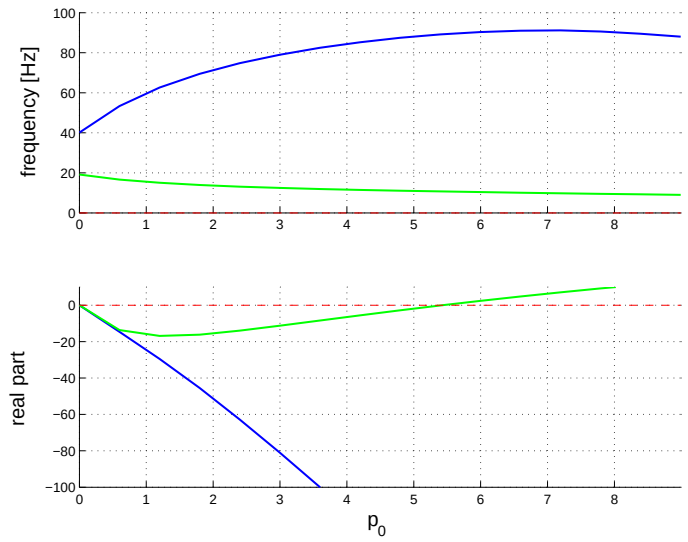

FIG. 5.3 – *diagramme de stabilité pour le cas linéaire*

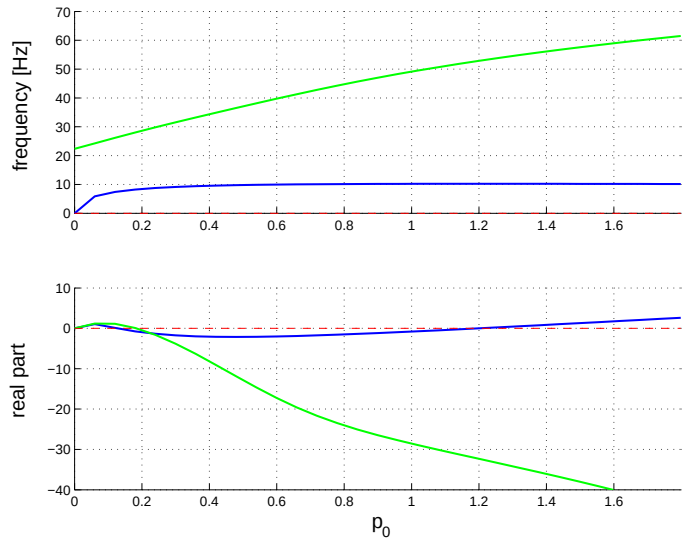

FIG. 5.4 – *diagramme de stabilité avec non-linéarité de jeu*

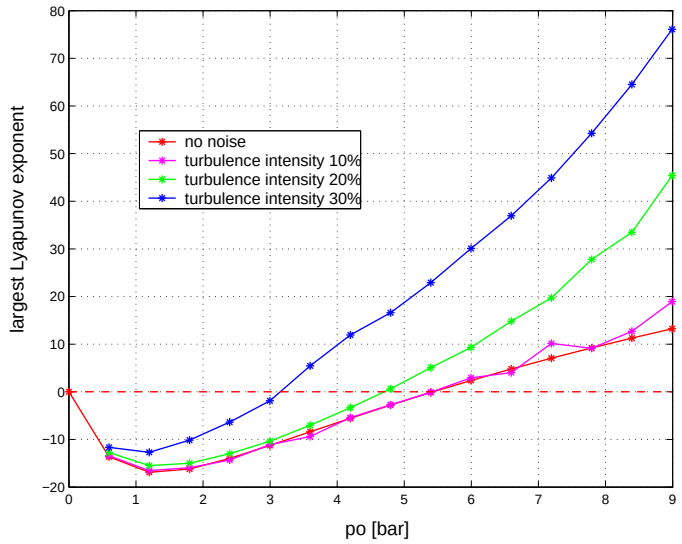

FIG. 5.5 – *exposant de Lyapunov λ_T simulé, cas linéaire*

est définie par la relation $I_t = \sigma_\eta/\bar{U}$, où σ_η est l'écart type du processus stochastique modélisant la turbulence. Sans perturbation aléatoire, le plus grand exposant de Lyapunov du système correspond à la plus grande partie réelle des valeurs propres (courbe verte sur la deuxième figure de 5.5). On observe que le système avec bruit multiplicatif devient instable pour une valeur du paramètre inférieure à celle correspondante au système déterministe respectif. La figure 5.6 donne les résultats équivalents obtenus en introduisant une non-linéarité de jeu. Le diagramme de stabilité est obtenu pour le système linéarisé (5.2). On remarque que le bruit influence moins la valeur critique du paramètre s'il y a une non-linéarité.

Pour ces applications, une échelle de turbulence $L_x^\eta = 150$ a été choisie. En pratique, cet échelle détermine la largeur de bande du spectre de la turbulence. Des simulations avec d'autres échelle de turbulence L_x^η ont montré que celle-ci (et donc la largeur de bande du spectre) n'influence pas significativement la stabilité.

La figure 5.7 montre la convergence de la valeur du plus grand exposant de Lyapunov simulé (on a tracé λ_t pour chaque pas t de la simulation) lors de trois simulations temporelles. On sait que l'ergodicité permet d'estimer le plus grand exposant de Lyapunov à l'aide de simulations d'une seule trajectoire qui doit pourtant être suffisamment longue. Afin de mieux connaître les proprietés des variables aléatoires λ_T, on a, pour une pression totale $p_0 = 4.8\,\text{bar}$ et puis $p_0 = 4.55\,\text{bar}$, effectué un certain nombre de simulation de cette grandeur. Ainsi, l'histogramme des valeurs de λ_T sur la figure 5.8 est obtenu pour cent simulations et pour une intensités de turbulence de 10%. On trouve une moyenne estimée de $\bar{\lambda}_T = -3.0108$ et la variance estimée $Var(\lambda_T) = 0.0046$. Pour une intensité de turbulence de 20% et toujours avec $p_0 = 4.8\,\text{bar}$, on peut es-

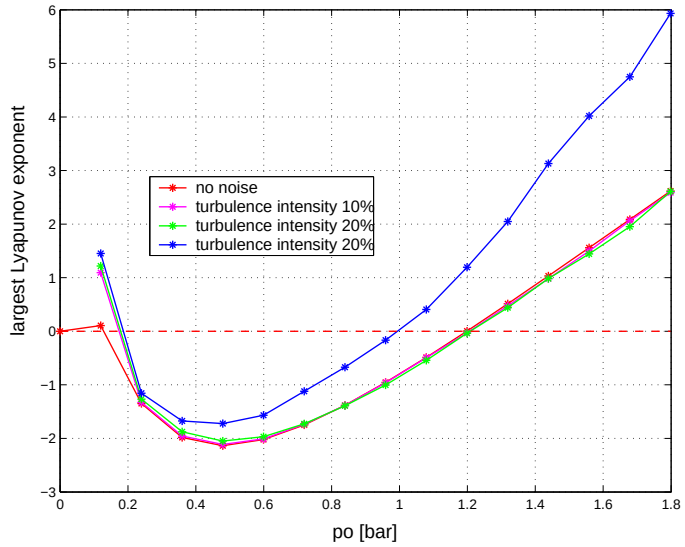

FIG. 5.6 – *exposant de Lyapunov λ_T simulé, cas avec non-linéarité de jeu*

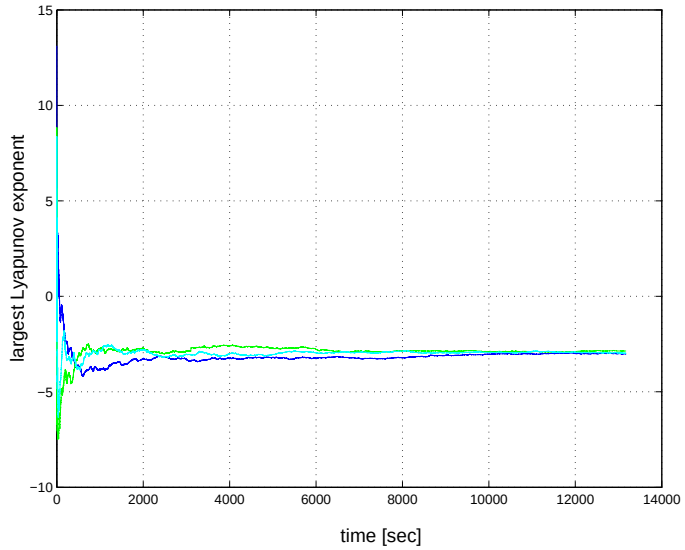

FIG. 5.7 – *convergence de l'exposant de Lyapunov pour* 10% *de turbulence*

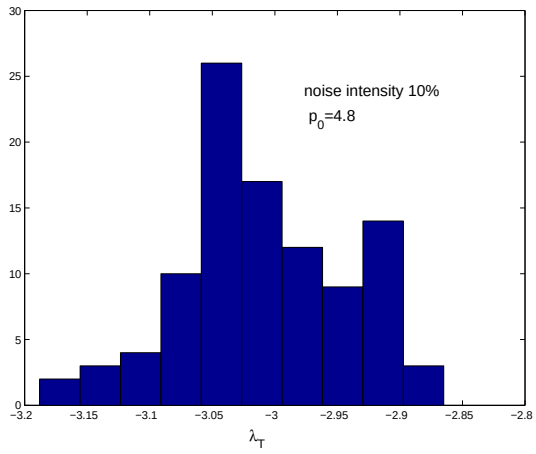

FIG. 5.8 – *histogramme pour λ_T avec 10% de turbulence*

timer avec 100 simulations sur une durée $T = 52707.2\,\mathrm{s}$ une moyenne $\bar{\lambda}_T = 0.7672$ avec une variance $Var(\lambda_T) = 0.1226$. Ce résultat n'étant pas satisfaisant, la durée de la simulation a été portée à $T = 210829\,\mathrm{s}$. Avec 600 simulations, on obtient une variance estimée diminuée à 0.0436 pour $\bar{\lambda}_T = 0.7841$. En choisissant une pression de $p_0 = 4.55\,\mathrm{bar}$, le système est stable p.s. Avec 200 simulations, on obtient une moyenne estimée $\bar{\lambda}_T = -0.845$ et une variance estimée $Var(\lambda_T) = 0.037$.

5.1.1 Bifurcation stochastique et réponse non linéaire

Le système déterministe linéarisé possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées dont la partie réelle s'annule pour la valeur critique $p_0^c = 1.2\,\mathrm{bar}$. pour cette valeur critique, la solution triviale $Y = 0$ devient instable. Le nouvel équilibre qui bifurque de la solution triviale est stable: ce sont les oscillations de cycles limites. Dans le cas avec bruit aléatoire, le plus grand exposant de Lyapunov, qui s'annule pour la valeur p_0^D, présente un ordre de multiplicité de deux. Le spectre de Lyapunov complet a ici été calculé à l'aide de l'algorithme de Wolf, Swift et al. [112]. L'évolution du plus grand exposant de Lyapunov en fonction du paramètre p_0 est donnée par la figure 5.6. Pour une intensité de turbulence I_t comprise entre 0 et 20%, le système devient instable pour $p_0 = 1.2\,\mathrm{bar}$ comme pour le système déterministe. Avec 30% de turbulence, la valeur critique est réduite, le plus grand exposant de Lyapunov s'annule pour $p_0^D = 1.0\,\mathrm{bar}$.

Les solutions stationnaires $h(t,\omega)$ et $\alpha(t,\omega)$ de l'équation (5.1) ont des lois indépendantes du temps. Par ailleurs, dans le cadre d'hypothèses dans lequel on se situe, la réponse est un processus ergodique. On va alors effectuer des estimations à partir des trajectoires, supposant qu'elles sont suffisamment longues pour être représentatives. Nous avons estimé les lois (les densités de probabilités) marginales de h et α pour

différentes valeurs du paramètre p_0. L'évolution est montrée sur les figures 5.9-5.11 et 5.12-5.14. On observe une bifurcation phénoménologique, qui se manifeste par un changement dans l'allure de la densité de probabilité de la solution stationnaire. Pour 5% de bruit (figures 5.9, 5.10 et 5.11) la bifurcation phénoménologique a lieu pour $p_0^P = 1.5\,\text{bar}$. Pour une intensité de bruit plus élevée, la bifurcation phénoménologique se produit plus tard. Ainsi, pour 10% de turbulence, on observe $p_0^P = 2.0\,\text{bar}$ (voir figures 5.12, 5.13 et 5.14). L'analyse temporelle des trajectoires montre que, pour $p_0 > p_0^D$ et $I_t <\sim 25\%$, de nouveaux équilibres, qu'on peut appeler des cycles limites bruités, apparaissent. Pour des intensités de turbulence supérieures à $\sim 25\%$, aucune bifurcation n'a lieu car, au point d'instabilité p_0^D, la solution devient simplement instable sans apparition d'un nouvel équilibre.

En résumé, pour $p_0 > p_0^D$, le plus grand exposant de Lyapunov devient positif et la solution triviale $Y = 0$ devient instable. On a ce qu'on appelle une bifurcation dynamique tant que $I_t < 25\%$. Mais la bifurcation phénoménologique, qui se manifeste par un changement dans l'allure de la densité de probabilité de la solution stationnaire, a lieu seulement après, à une pression p_0^P supérieure à p_0^D. Pour une valeur du paramètre p_0 comprise entre p_0^D et p_0^P, la solution passe encore beaucoup de temps dans un voisinage du point 0. Au-delà de p_0^P, le point zéro devient répulsif.

Le comportement du système après la bifurcation peut être analysé plus en détail dans le domaine fréquentiel à l'aide de la densité spectrale des réponses. Les figures 5.15-5.16 et 5.17-5.18 présentent des estimations de la densité spectrale des réponses stationnaires (l'angle de rotation α et le déplacement h), respectivement pour des intensités de turbulence de 5% et 10%. La courbe rouge indique la fréquence de la réponse déterministe (ce sont des cycles limites). On remarque que la turbulence provoque un décalage des pics fréquentiels des spectres vers de plus hautes fréquences.

5.1.2 Conclusions

La turbulence longitudinale influence les domaines de stabilité de l'avion. Pour des intensités de turbulence importantes, la valeur critique du paramètre de flottement pour le profil bidimensionnel est considérablement abaissée. Ainsi, pour 30% de turbulence, la valeur critique observée est de 3.1 bar au lieu de 5.4 bar pour le cas linéaire et de 1.0 bar au lieu de 1.2 bar si une non-linéarité de jeu est prise en compte. Néanmoins, quand on introduit un ressort non linéaire modélisant le jeu, la valeur critique est réduite d'emblée et l'impact d'un bruit (la turbulence atmosphérique) est moindre. En analogie avec le cas déterministe, des nouveaux équilibres, qu'on peut appeler des cycles limites bruités, apparaissent pour une certaine gamme d'intensités de turbulence. On constate également que la turbulence provoque un décalage des pics fréquentiels des spectres de réponse vers de plus hautes fréquences. Pour des intensités de turbulence trop importantes, le système devient immédiatement instable pour $\lambda > 0$ sans apparition d'un nouvel équilibre. Par ailleurs, le bruit additif empêche la bifurcation de nouveaux équilibres et, par conséquent, l'apparition d'oscillations de cycles limites.

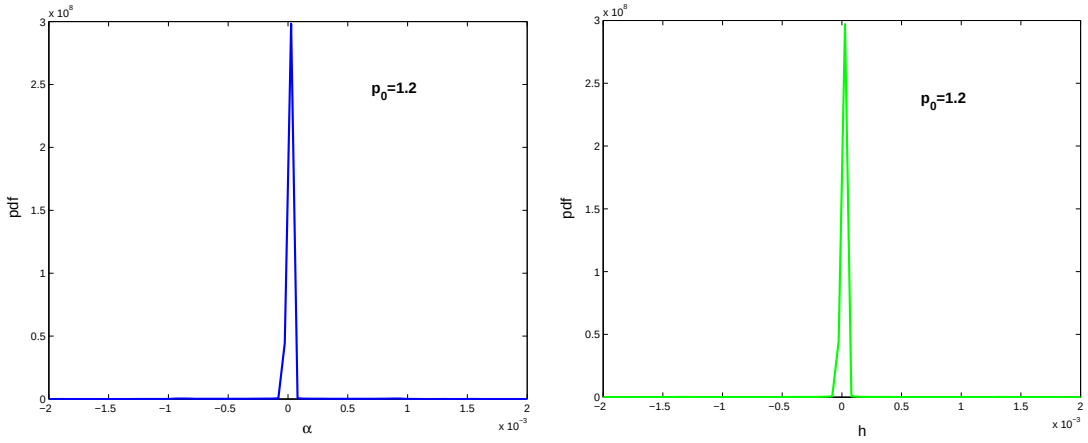

FIG. 5.9 – *densité de probabilité estimée pour* $p_0 = 1.2$ *bar et* 5% *de bruit*

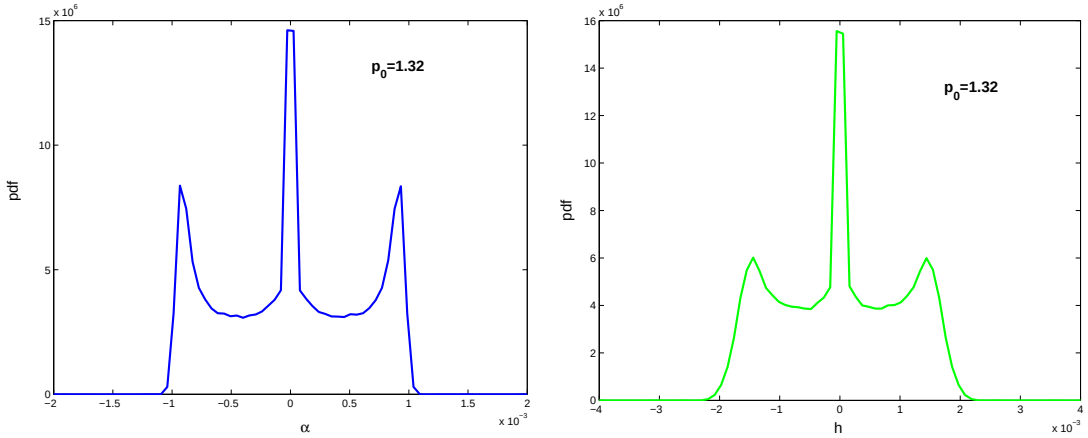

FIG. 5.10 – *densité de probabilité estimée pour* $p_0 = 1.32$ *bar et* 5% *de bruit*

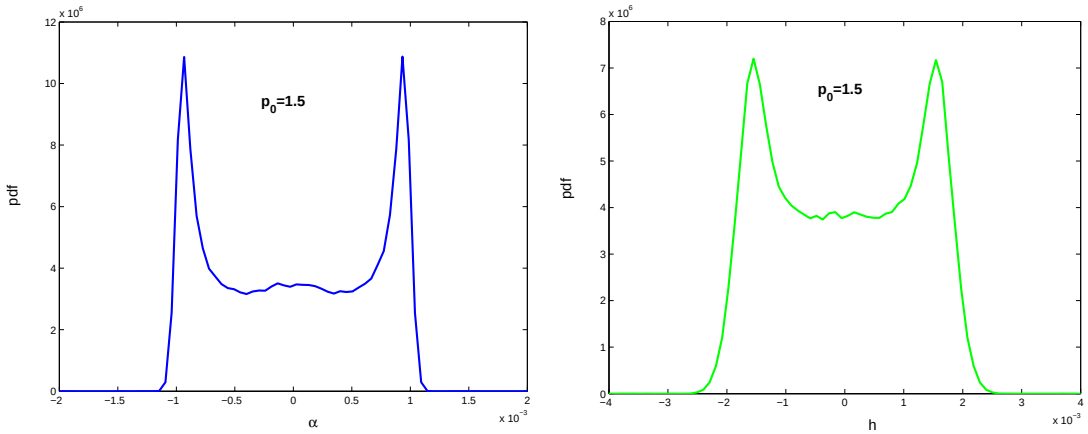

FIG. 5.11 – *densité de probabilité estimée pour* $p_0 = 1.5$ *bar et* 5% *de bruit*

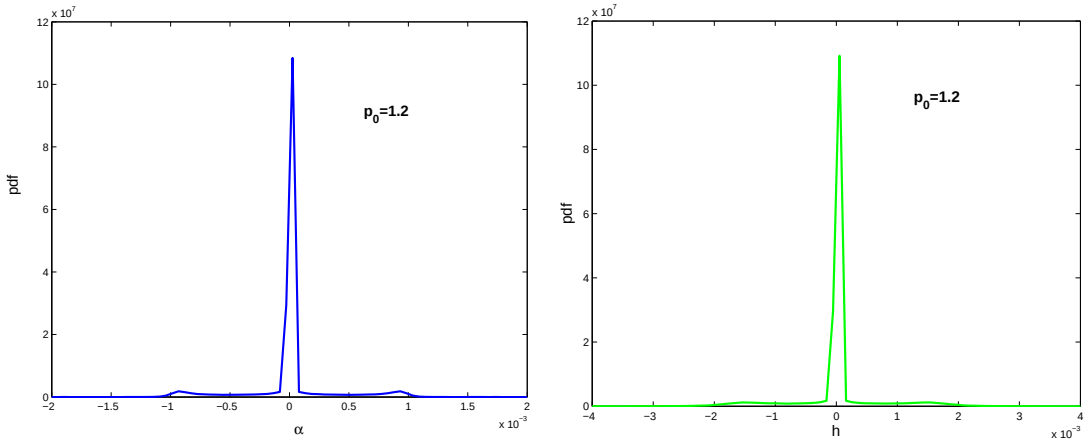

FIG. 5.12 – *densité de probabilité estimée pour* $p_0 = 1.2$ *bar et* 10% *de bruit*

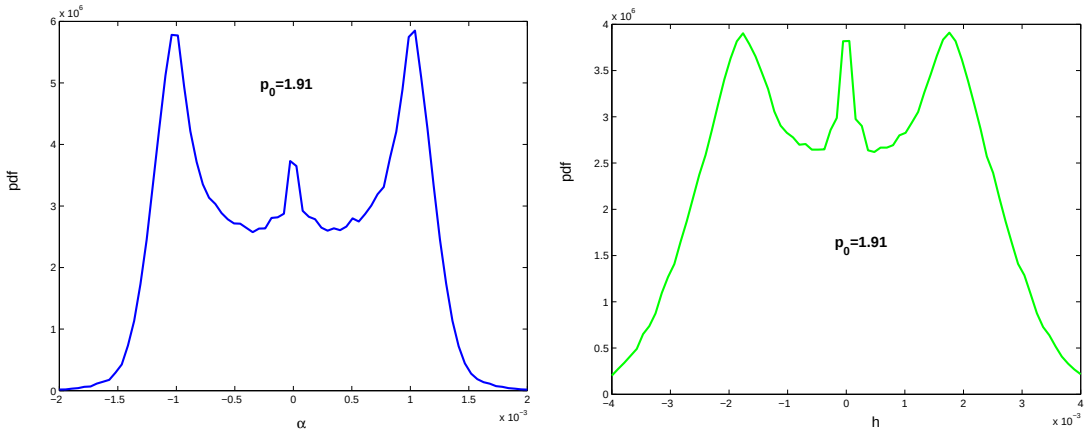

FIG. 5.13 – *densité de probabilité estimée pour* $p_0 = 1.91$ *bar et* 10% *de bruit*

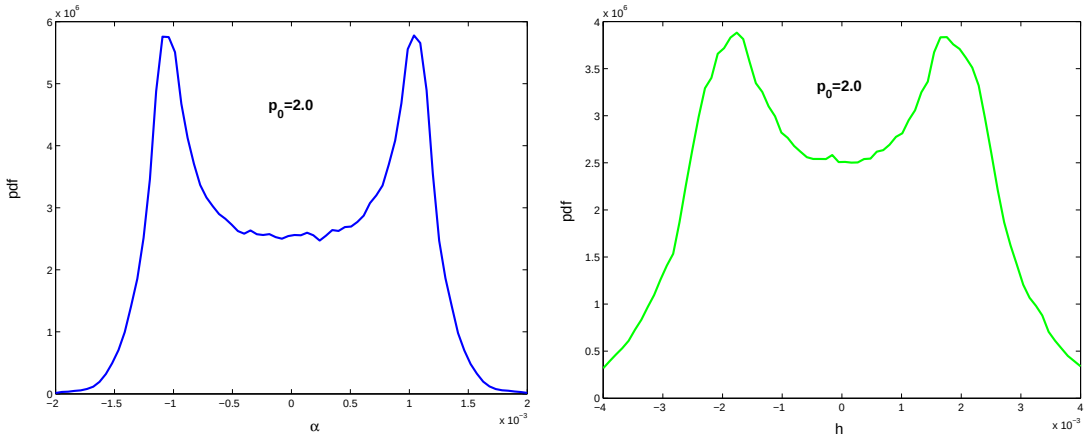

FIG. 5.14 – *densité de probabilité estimée pour* $p_0 = 2.0$ *bar et* 10% *de bruit*

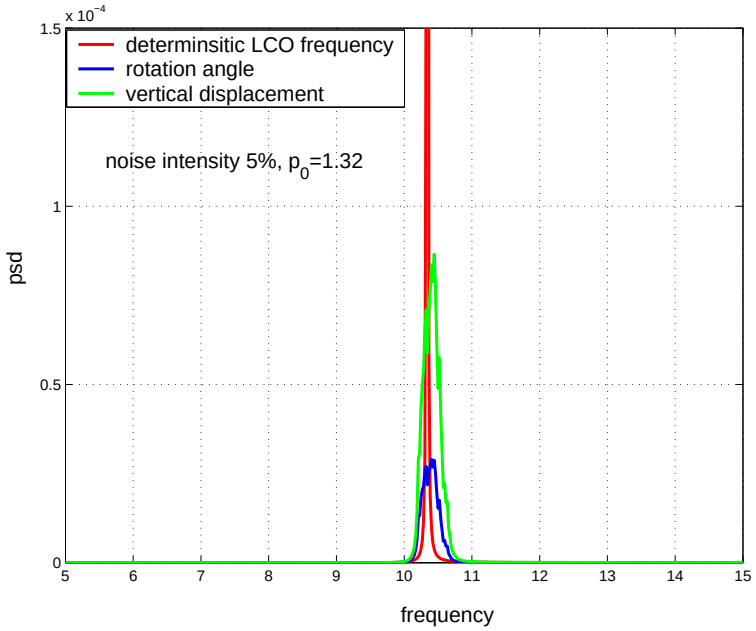

FIG. 5.15 – *densité spectrale pour* 5% *de turbulence*

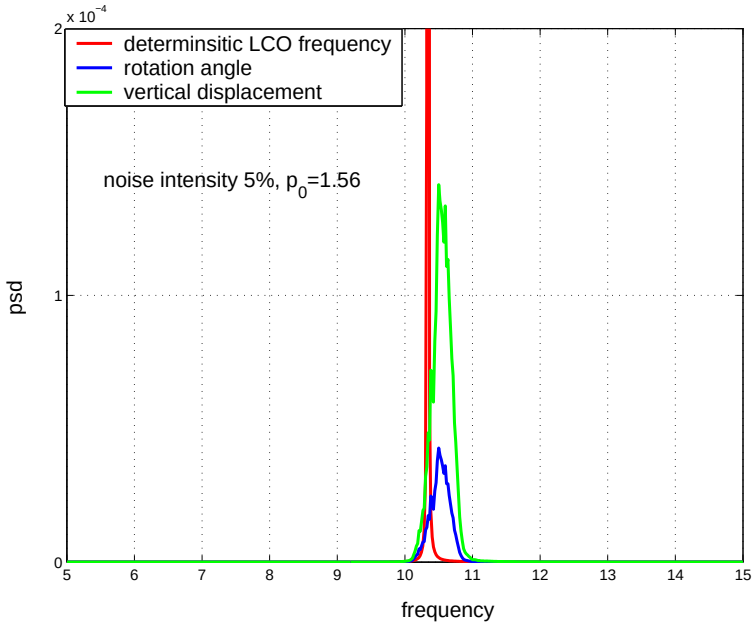

FIG. 5.16 – *densité spectrale pour* 5% *de turbulence*

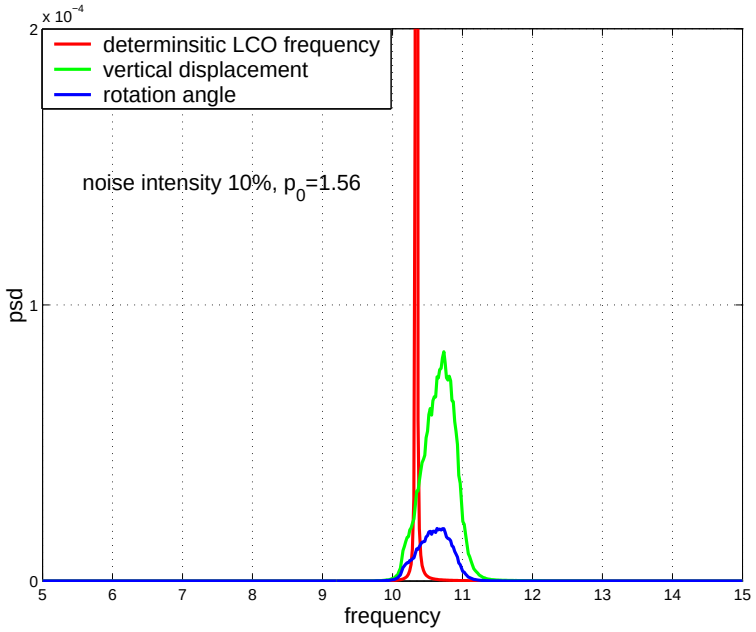

FIG. 5.17 – *densité spectrale pour* 10% *de turbulence*

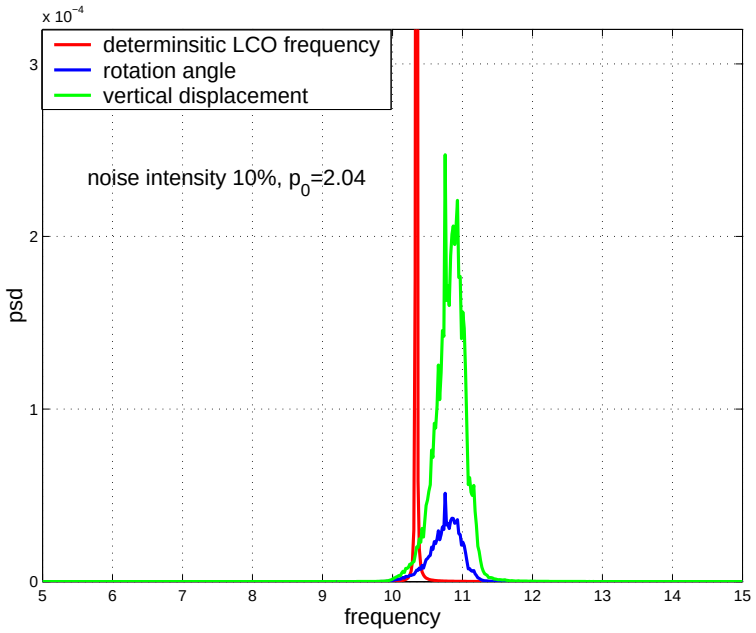

FIG. 5.18 – *densité spectrale pour* 10% *de turbulence*

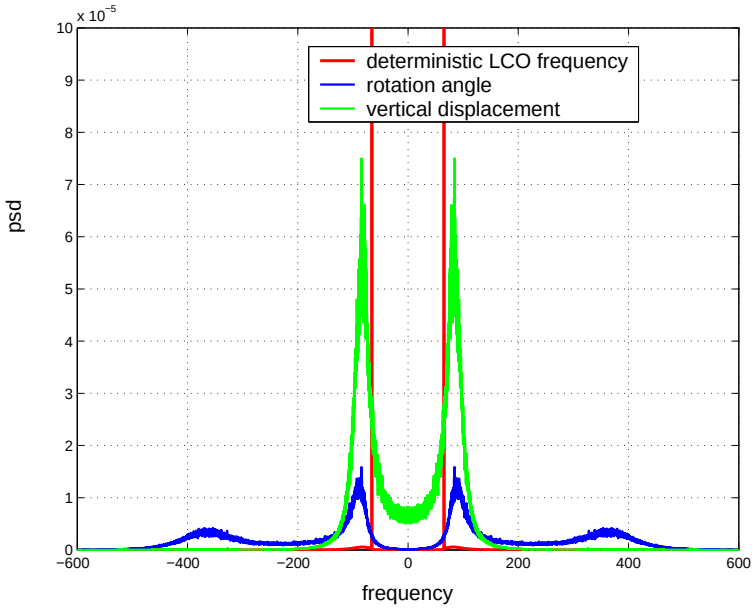

FIG. 5.19 – *densité spectrale avec turbulence verticale,* $p_0 = 1.44\,bar$, $I_t = 10\%$

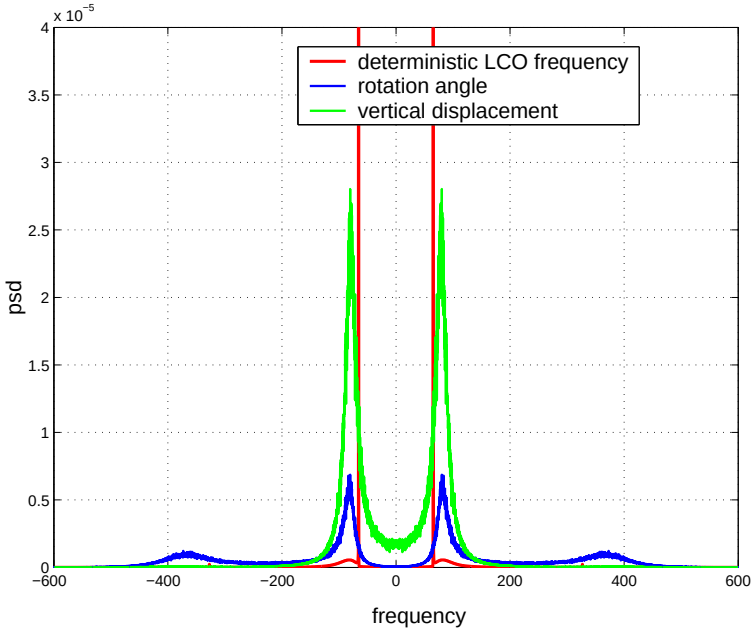

FIG. 5.20 – *densité spectrale avec turbulence verticale,* $p_0 = 1.44\,bar$, $I_t = 5\%$

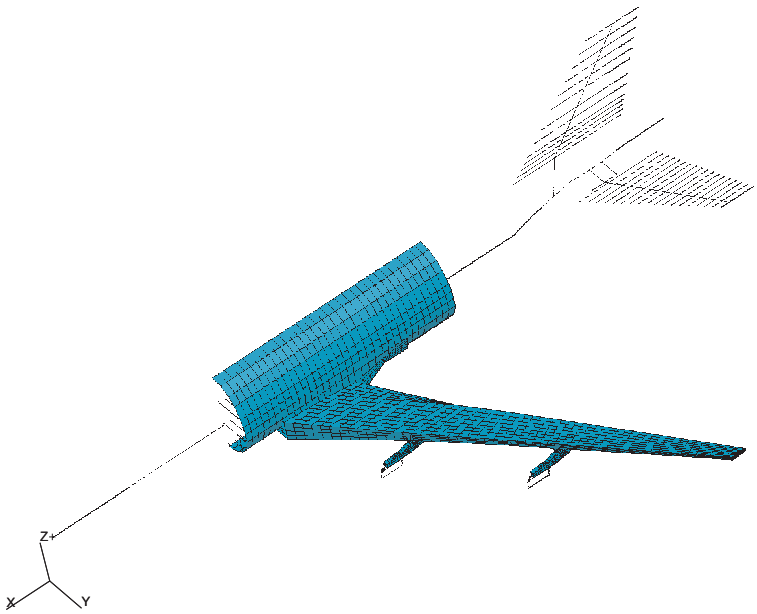

FIG. 5.21 – *modèle aux éléments finis*

5.2 Application à un modèle d'avion linéaire

Dans un deuxième temps, les méthodes développées ont été appliquées à un modèle d'avion civil gros-porteur. Bien que simplifié, le modèle éléments finis (la figure 5.21 montre le demi-avion) comporte plus de vingt milles degrés de libertés dont près des trois quarts proviennent de la représentation de la voilure, le reste étant réparti entre la modélisation du tronçon central du fuselage et celle des mâts moteurs. Les parties avant et arrière du fuselage ainsi que les empennages sont modélisés sous forme de poutres et de poutres en arêtes de poisson. Le calcul des modes et des fréquences propres a été effectué avec le code de calcul NASTRAN. Pour les applications numériques on retient les quatre premiers modes souples de l'avion qui modélisent respectivement la flexion latérale de la partie arrière du fuselage (1.566 Hz), la flexion latérale du moteur externe (1.651 Hz), la flexion verticale de l'aile (1.945 Hz) et la flexion latérale du moteur interne (2.244 Hz). Un calcul prenant en compte les huit premiers modes souples montre que le comportement n'est pas modifié par ces quatre modes supplémentaires. Les forces aérodynamiques généralisées ont été calculées par la méthode des doublets (code CAPRI). Afin de pouvoir introduire la turbulence, l'aile de l'avion a été divisée en 16 tranches.

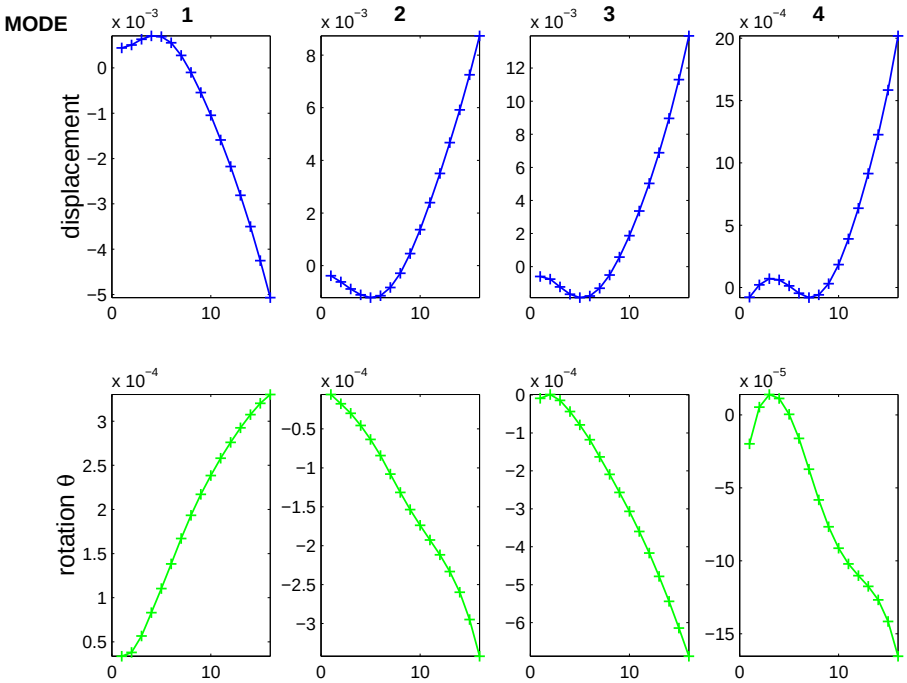

FIG. 5.22 – *déformations des 16 tranches de l'aile*

Les figures 5.24 et 5.25 donnent les diagrammes de stabilité classiques obtenus, pour le cas sans bruit, en prenant en compte seulement les FAG induites par la voilure (figure 5.25) et en prenant en compte les FAG complètes en considérant toutes les composantes de l'avion: fuselage, empennage vertical et horizontal, nacelles (figure 5.24). Pour le premier cas (figure 5.25), la valeur critique de flottement est $\approx 1.8\,\text{bar}$ alors qu'avec les FAG complètes, aucune instabilité n'est observée. On sait que λ_{max} correspond à la plus grande partie réelle des valeurs propres si le bruit est annulé. La figure 5.26 permet de vérifier que la quantité λ_T simulée sur l'intervalle de temps fini T approche bien la plus grande partie réelle des valeurs propres. La qualité de l'approximation par fractions rationnelles des FAG induites par la voilure peut être verifiée à l'aide de la figure 5.23 où sont tracées les valeurs complexes prises par les matrices d'influence aérodynamique (en abscisse la partie réelle et en ordonnée la partie imaginaire) pour les fréquences calculées. Les points calculés sont marqués par les étoiles rouges et la courbe approchante est représentée en bleu.

Pour les calculs des FAG avec bruit, l'aile a été divisée en 16 tranches dont les déformées modales (le déplacement vertical h et l'angle α, respectivement) sont présentées sur la figure 5.22. Par ailleurs, on a vérifié que l'influence de la voilure sur les FAG des autres éléments, et réciproquement, sont négligeables. La modélisation d'une aile tri-dimensionnelle nous permettra de prendre en compte la corrélation spatiale du processus modélisant la turbulence le long de l'aile.

Dans un premier temps, seules les forces aérodynamiques induites par la partie aile ont été prises en compte (figures 5.25, 5.28 et 5.29). Sans turbulence, il y a une instabilité pour $p_0 > 1.8\,\text{bar}$. Quand on prend en compte la turbulence atmosphérique (composante longitudinale), cette valeur critique est réduite. Différentes longueurs de corrélation spatiales L_0 ont été choisies; les résultats sont montrés dans la figure 5.28. Des exemples de trajectoires des processus η_i pour des longueurs de corrélation de $L_0 = 0.5\,\text{m}$ puis $L_0 = 100\,\text{m}$ sont donnés sur la figure 5.27. Pour une longueur de corrélation constante de $L_0 = 100\,\text{m}$, les résultats obtenus pour différentes intensités de turbulence I_t sont donnés dans la figure 5.29.

Dans un deuxième temps, les FAG induites par l'ensemble des surfaces portantes ont été considérées. Le système déterministe (sans turbulence) est alors stable pour toute la gamme des valeurs de p_0 considérée. Pour le cas où la turbulence agit uniquement sur la partie voilure, celle-ci influence peu les courbes de stabilité. Les résultats de ces simulations sont donnés sur la figure 5.30. Le système couplé reste stable pour toute la gamme des valeurs de la pression totale p_0 considérée. Si on considère maintenant les FAG du modèle complet avec une turbulence cylindrique appliquée sur toutes les parties contribuant à l'aérodynamique, on obtient les courbes reproduites sur la figure 5.31. Le système couplé avion-FAG devient instable à partir de $p_0 = 2\,\text{bar}$ pour 5% de turbulence. Pour une intensité de turbulence $I_t = 10\%$, il s'avère instable pour toute la gamme des valeurs du paramètre p_0.

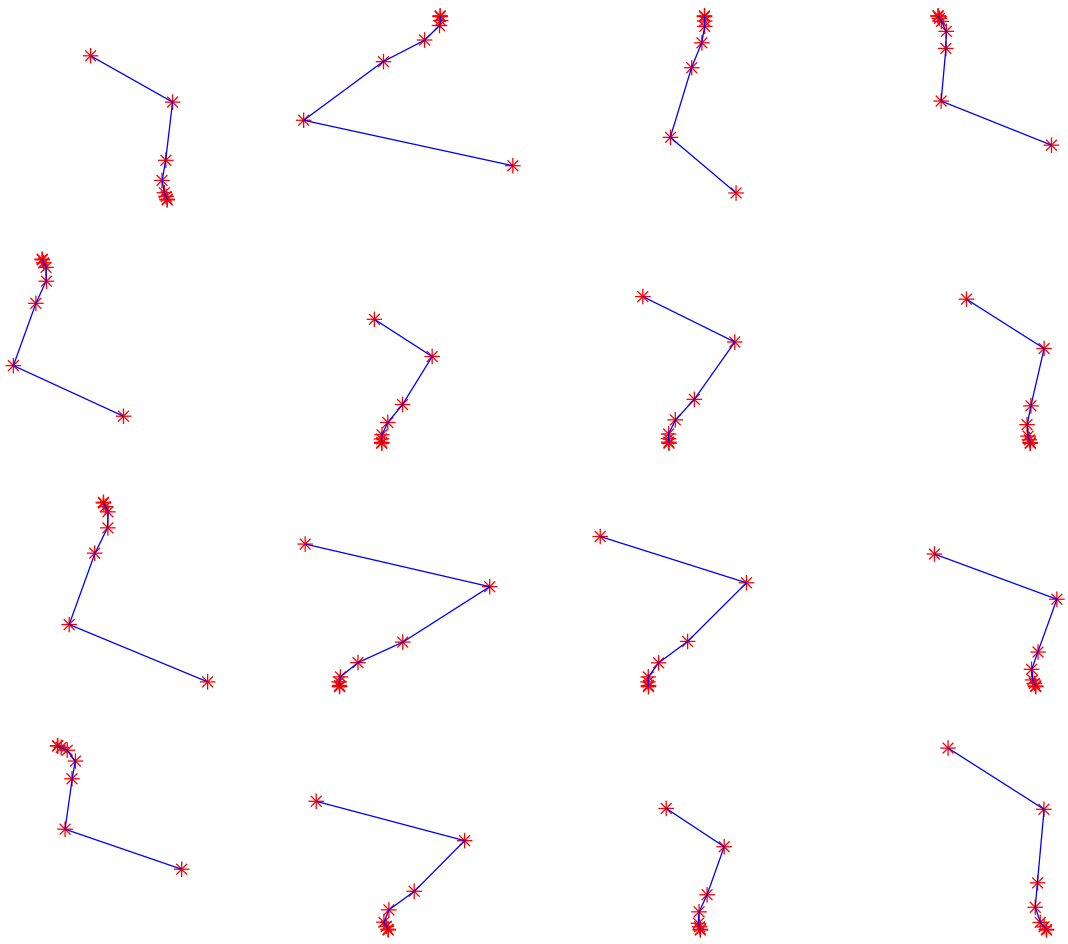

FIG. 5.23 – *approximation des FAG voilure pour 4 modes, somme sur les 16 tranches (les axes des systèmes de coordonnées ne sont pas tracées)*

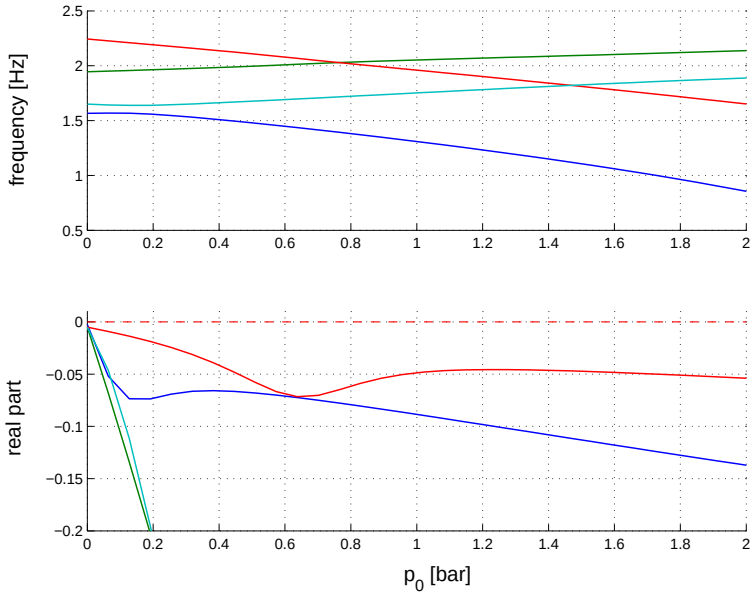

FIG. 5.24 – *diagramme de stabilité (aérodynamique complète)*

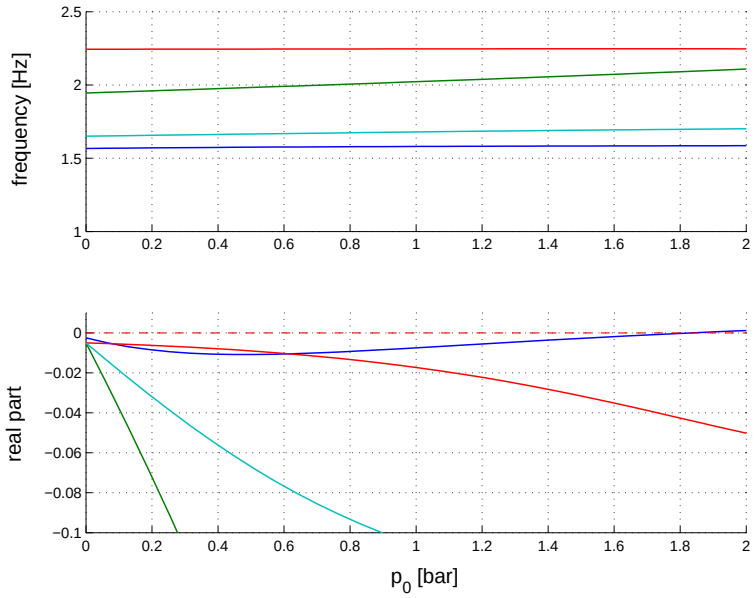

FIG. 5.25 – *diagramme de stabilité (aérodynamique voilure seule)*

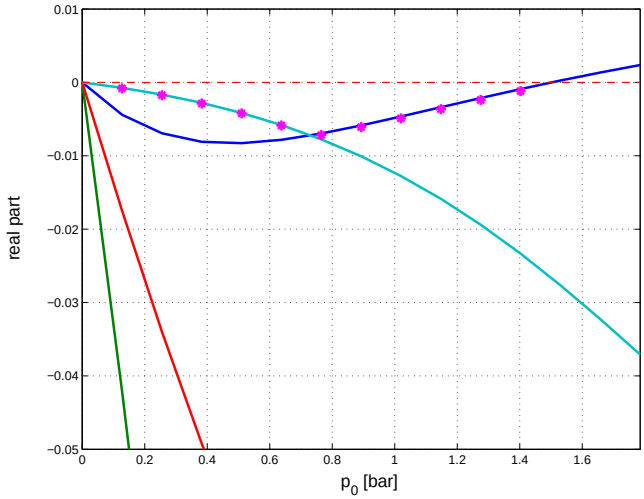

FIG. 5.26 – *parties réelles des valeurs propres et exposant de Lyapunov simulé* λ_T *(marqué par* $*$*)*

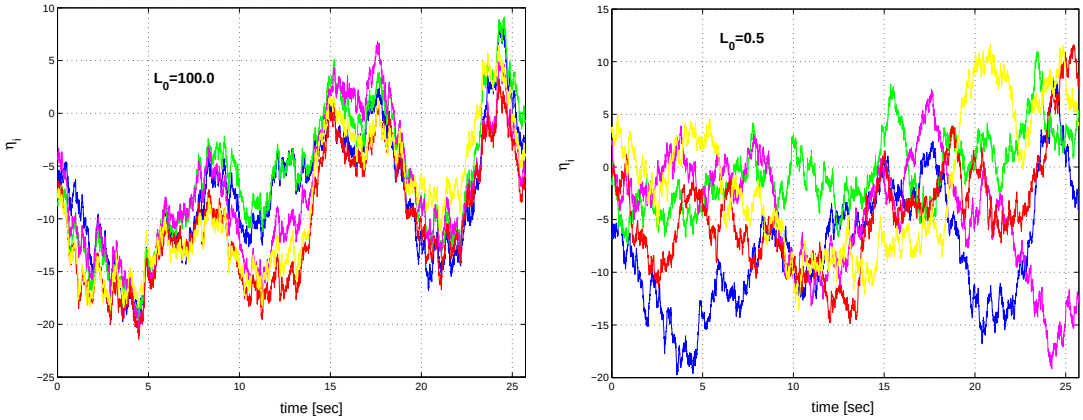

FIG. 5.27 – *valeurs de* η_i *aux sections d'aile i=1,4,8,12,16 pour* $L_0 = 0.5\,m$ *et* $L_0 = 100\,m$

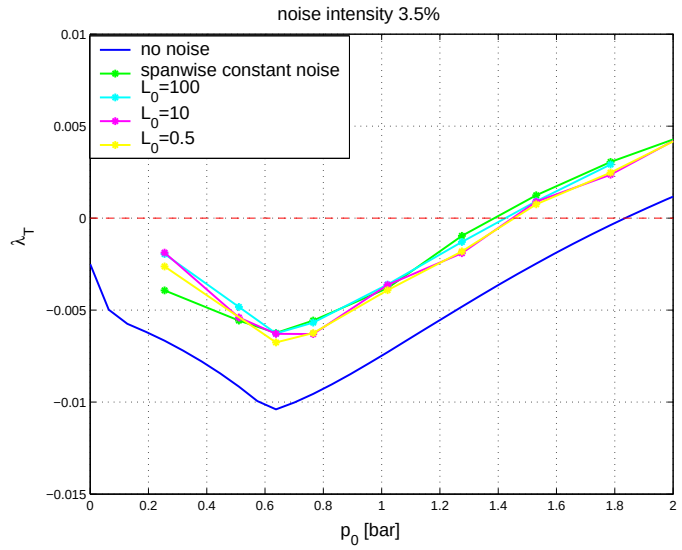

FIG. 5.28 – *influence de la longueur de corrélation*

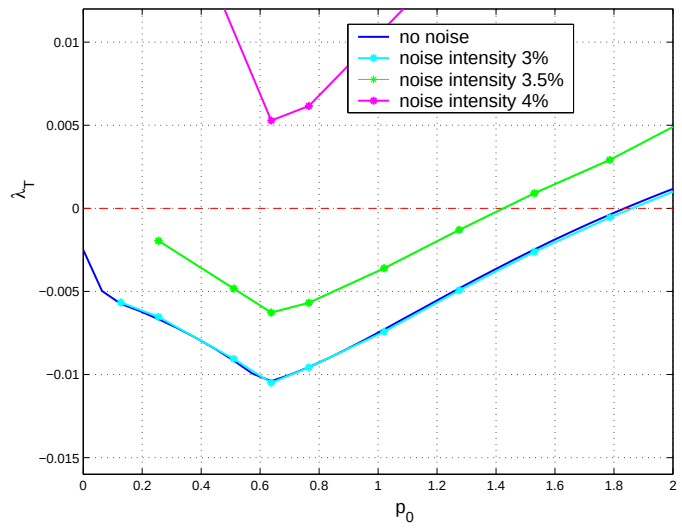

FIG. 5.29 – *aérodynamique aile seule: influence de l'intensité du bruit pour* $L_0 = 100m$

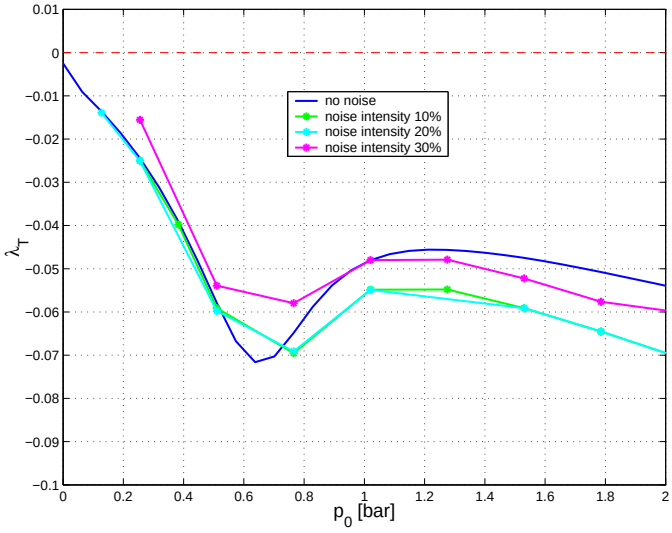

FIG. 5.30 – *modèle complet, turbulence sur aile seule*

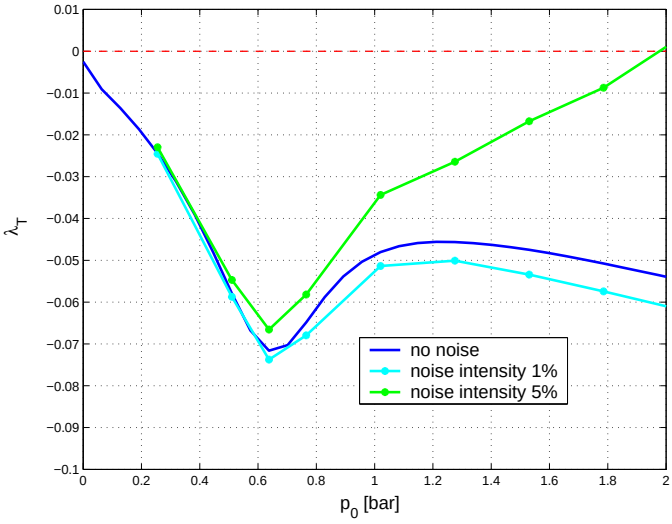

FIG. 5.31 – *modèle complet, turbulence sur structure complète, instable pour* $I_t = 10\%$

5.2.1 Commentaires

Des études ont montré que la corrélation spatiale de la composante verticale de la turbulence avait une influence sur le spectre de réponse [51], et ceci pour des longueurs de corrélation d'un ordre de grandeur de deux fois l'envergure de l'aile. En ce qui concerne la turbulence longitudinale, l'influence de la longueur de corrélation sur la stabilité du système couplé étudié ici reste négligeable. Ceci serait à vérifier sur d'autres configurations.

Il semble que de très petites intensités de turbulence stabilisent le système aéroélastique (figures 5.30 et 5.31).

On observe que l'estimation du plus grand exposant de Lyapunov demande des simulations sur des durées de temps relativement importantes. La durée nécessaire est d'autant plus grande que l'intensité du bruit est importante. Il serait alors important de pouvoir estimer la durée nécessaire afin d'obtenir des approximations λ_T de λ_{max} suffisamment précises. Une estimation par intervalle de confiance est pourtant difficilement possible (voir §4.10.4).

Comme cela a été discuté au §4.10.4, la durée de simulation minimale (pour un bruit faible) peut être obtenue en étudiant l'équation sans bruit. En générale, on a une bonne approximation si la courbe $\lambda_T(p_0)$ est lisse.

Chapitre 6

Vers une modélisation plus réaliste du jeu

Les problèmes de contact jouent un rôle important dans de nombreuses modélisations de la mécanique. En particulier, il existe un grand nombre de systèmes dont certains degrés de liberté subissent des contraintes unilatérales comme c'est le cas pour le jeu. Dans le domaine de l'aéronautique, le problème le plus souvent rencontré est un jeu dans les liaisons avec les surfaces de contrôle. Ces non-régularités structurales doivent être prises en compte dans la modélisation mathématique du système mécanique. Dans la plupart des cas, le jeu est modélisé de manière simplifiée par un ressort non linéaire. Cette approche simple semble adaptée pour un profil bidimensionnel avec les deux ddl de pompage et de tangage. Dans ce cas, le jeu est généralement représenté par une non-linéarité présente dans la force de rappel en tangage. Toutefois, cette approche apparaît insuffisante pour des modélisations plus complexes et notamment tri-dimensionnelles. Les structures aéroélastiques tri-dimensionnelles avec jeu peuvent être représentées par des systèmes dynamiques non réguliers en faisant intervenir les méthodes de la mécanique du contact. Dans ce chapitre, on présente une méthode de sous-structuration permettant la réduction du modèle en présence de degrés de liberté non réguliers. Le problème de contact peut ensuite être formulé selon la théorie introduite par Moreau au début des années 80 et dont la discrétisation nous fournit un algorithme numérique efficace.

6.1 Développement d'un modèle réduit

Dans la modélisation avec jeu, certains nœuds sont susceptibles d'avoir un contact avec une frontière rigide. Les ddl concernés, qu'on appellera ddl non réguliers, sont connus, ce qui facilite la mise en oeuvre d'un algorithme capable de détecter si un contact est réalisé ou non. Par ailleurs, on suppose que le contact est sans frottement. Cette simplification est justifiée pour les problèmes de contact traités ici.

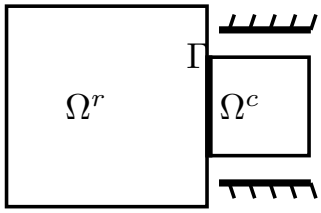

FIG. 6.1 – *sous-structures* Ω^r *et* Ω^c

On divise le système mécanique discrétisé en deux types de sous-systèmes: les parties régulières Ω^r dont les ddl ne subissent aucune contrainte ainsi que les parties non régulières Ω^c dont les ddl peuvent subir un contact tel que $\Omega^s = \Omega^r \bigcup \Omega^c$. Pour des raisons de simplicité, on ne considère ici que le cas d'une seule sous-structure régulière et d'une sous-structure avec contact liées par l'interface Γ, mais le cas de plus de deux sous-structures ne pose aucun problème de généralisation. Étant donné qu'il s'agit de non-linéarités concentrées, on peut supposer, sans perte de généralité, que les forces aérodynamiques ne s'appliquent qu'aux degrés de libertés de la sous-structure régulière. Soit l'équation du mouvement de la structure discrétisée:

$$\mathbb{M}\ddot{Q} + \mathbb{C}\dot{Q} + \mathbb{K}Q + \mathbb{F} = 0, \tag{6.1}$$

où $Q = (Q_r, Q_i, Q_c)$ et où on a noté Q_r les ddl de Ω^r, Q_i les ddl de l'interface Γ et Q_c les ddl non réguliers de Ω^c. La décomposition en blocs des matrices de raideur et de masse selon l'appartenance aux sous-structures respectives s'écrit:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{ri} & 0 \\ K_{ic} & K_{ii} & K_{ic} \\ 0 & K_{ic}^T & K_{cc} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{ri} & 0 \\ M_{ic} & M_{ii} & M_{ic} \\ 0 & M_{ic}^T & M_{cc} \end{bmatrix}.$$

La matrice d'amortissement $\mathbb{C}$ est arrangée de manière équivalente. De même, on a $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_r, 0, 0)$ où $\mathbb{F}_r \in \mathbb{R}^{N_r}$ sont les forces aérodynamiques qui s'appliquent à la sous-structure régulière Ω^r et N_r désigne le nombre de ddl appartenant à Ω^r. Le modèle peut ensuite être réduit par synthèse modale de la sous-structure régulière tout en conservant les ddl de la sous-structure non régulière. Pour ceci, on utilise une méthode de sous-structuration du type Craig et Bampton [33]. La taille du problème peut ainsi être réduite à $M = n_r + n_c + n_i$ où n_r désigne le nombre de modes propres élastiques de la sous-structure régulière avec interface fixe retenus, n_c est le nombre de ddl de Ω^c et n_i le nombre de modes statiques de liaison.

Les déplacements internes de Ω^r peuvent être exprimés comme

$$Q_r = \Psi q_r + \Phi Q_i,$$

où $\Phi = -K_{rr}^{-1}K_{r\,c} \in Mat_{\mathbb{R}}(N_r, n_i)$ est la matrice des modes statiques de liaison (modes générés par déplacement unitaire des ddl de l'interface en gardant les autres fixés). La matrice $\Psi \in Mat_{\mathbb{R}}(N_r, n_r)$ contient les n_r premiers modes de Ω^r avec interface fixe, solutions du problème aux valeurs propres suivant:

$$[K_{rr} - \lambda_m M_{rr}]\Psi_m = 0, \quad m = \{1, \dots, n_r\},$$

et q_r sont les coordonnées généralisées des déplacement dans Ω^r.

Par ailleurs, on pose $q = (q_r,\, q_i,\, q_c)$ tel que

$$(Q_r,\, Q_i,\, Q_c) = P\,q \quad \text{avec } P = \begin{bmatrix} \Psi & \Phi & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

La projection de l'équation (6.1) sur la base réduite P s'écrit

$$\mathcal{M}\ddot{q} + \mathcal{C}\dot{q} + \mathcal{K}q + \mathcal{F} = 0. \tag{6.2}$$

Les matrices réduites $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ et le vecteur $\mathcal{F}$ sont données par les relations

$$\mathcal{M} = P^T\mathbb{M}P, \quad \mathcal{K} = P^T\mathbb{K}P, \quad \mathcal{C} = P^T\mathbb{C}P, \quad \mathcal{F} = P^T\mathbb{F}.$$

Finalement, on peut encore écrire l'équation (6.2) sous la forme différentielle suivante

$$du - p(u, q, t)dt = 0,$$

où on a noté $u = \dot{q}$ et

$$p(u, q, t) = -\mathcal{M}^{-1}(\mathcal{C}\dot{X} + \mathcal{K}X + \mathcal{F}).$$

6.2 Formulation de Moreau du problème de contact

La formulation de problèmes de contact introduite par Moreau [71] est une formulation générale du problème dynamique fondée sur l'analyse convexe. Plus précisément, elle permet d'écrire l'équation de la dynamique sous forme d'une inclusion différentielle particulière et de déterminer les vitesses après l'impact par une procédure de projection. On considère des contraintes idéales, c'est-à-dire sans frottement, et on suppose que le contact ne suscite pas d'effet de cohésion. On considère le mouvement du système dynamique discret décrit par l'évolution temporelle de la coordonnée $t \to q(t)$. Les déplacements de ce système sont soumis à des contraintes qui peuvent être décrites par des relations géométriques: sur un intervalle de temps $\mathbb{I} = [0, T]$, on force $q(t)$ à rester dans l'ensemble

$$L = \{q \in \mathbb{R}^d : h_\alpha(q) \leq 0,\ \alpha = 1, \dots, m\}.$$

Les $h_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières, convexes, vérifiant $\nabla h_\alpha(q) \neq 0$, au moins dans un voisinage de l'hypersurface $h_\alpha(q) = 0$. Un contact avec la frontière $\mathcal{S} = \{q \in \mathbb{R}^d : h_\alpha(q) = 0,\ \alpha = 1, \dots, m\}$ peut induire des discontinuités de la fonction des vitesses $t \to u(t)$. Il est alors naturel de considérer la vitesse comme fonction à variations bornées, avec $u(t) = \dot{q}(t)$ quand q est dérivable. De plus, le déplacement est lié à la fonction de vitesse par la relation

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(s)ds.$$

Considérons l'équation du mouvement donnée par

$$\ddot{q} - p(q, \dot{q}, t) = r, \tag{6.3}$$

où r est la force de réaction de la frontière quand il y a contact. Dans ce contexte, $\ddot{q}$ est la dérivée généralisée d'une fonction à variations bornées et par conséquent, c'est une mesure. La réaction r est également une mesure et l'équation (6.3) peut être écrite comme une relation entre mesures telle que

$$dr = du - p(q, u, t)dt, \tag{6.4}$$

où dt est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{I}$ et du la mesure de Stieltjes de u.

Bien évidemment, la réaction s'annule quand il n'y a pas de contact et on a simplement $du/dt = \ddot{q} = p(q, \dot{q}, t)$ avec $u(t) = u^+(t) = u^-(t)$ car la vitesse est continue. On désigne par $u^+(t)$ et $u^-(t)$ respectivement les limites à droite et à gauche de la fonction de vitesse. D'autre part, s'il y a contact à un instant t_s, la fonction de vitesse est discontinue telle que $u^+(t_s) \neq u^-(t_s)$. Pour les problèmes de jeu traités ici on peut, sans perte de généralité, exclure l'apparition de contacts multiples, et considérer que pour une configuration donnée q, au plus un seul contact est réalisé. Le vecteur intérieur normal à la surface de contact, au point q étant donné par $\nabla h_\alpha(q)$, on peut définir l'ensemble des vitesses admissibles par

$$V(q) = \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^d : w^T \nabla h_\alpha(q) \leq 0\} & : \quad h_\alpha(q) \geq 0 \\ \mathbb{R}^d & : \quad \text{sinon} \end{cases}. \tag{6.5}$$

En effet, les vitesses après impact doivent être orientées vers l'intérieur du domaine L, c'est-à-dire extérieures à la surface de contrainte. Pour l'instant, la direction du vecteur des vitesses après impact n'est pas définie, elle dépendra de la loi de contact qui sera introduite plus tard. On a ainsi le résultat suivant:

Lemme 1 (Moreau[72]). *Si $q(t_0) \in L$ et si $u \in V(q)$ pour tout $t \in \mathbb{I}$, alors, $\forall t \in \mathbb{I}$, $q(t) \in L$.*

Ce lemme dit que, si la vitesse reste dans l'ensemble des vitesses admissible $V(q)$, alors les contraintes par rapport au déplacement sont toujours respectées. Autrement dit, si

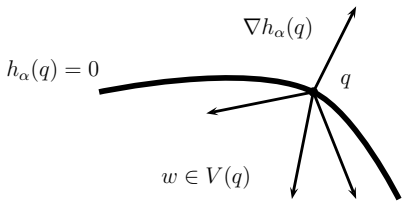

FIG. 6.2 – *ensemble des vitesses admissibles aprés impact*

on contrôle, à tous les instants, les vitesses des points susceptibles d'entrer en contact avec l'obstacle, alors les déplacements obtenus par intégration des champs de vitesses respectent, à tout instant, les contraintes.

$V(q)$ est appelé le cône tangent à l'espace convexe L au point q. En particulier, $u^+ \in V\big(q(t)\big)$, $-u^- \in V\big(q(t)\big)$, et $u \in V(q) \cap -V(q)$. Il convient de définir $V(q)$ pour tout $\mathbb{R}^d$ comme on le fait ici (deuxième relation de (6.5)) car une violation de la loi de contrainte est possible dans les approximations numériques. En conséquence, $V(q)$ sera soit l'espace entier, soit un demi-espace, tel que, pour tout $q \in \mathbb{R}^d$, la condition $\operatorname{int} V(q) \neq \emptyset$ est vérifiée. Pour un contact unilatéral sans frottement, la force de contact exercée par la frontière $\mathcal{S} = \partial L$ est normale à celle-ci et positive vers l'intérieur. Le vecteur $\nabla h_\alpha(q)$ appartenant à cette normale, la force de contact peut être exprimée comme

$$r = \gamma_\alpha \nabla h_\alpha(q), \quad \gamma_\alpha < 0,$$

pour $\alpha = 1, \dots, m$ selon la contrainte active (on rappelle que le cas de contacts multiples simultanés a été exclu). La mesure de Lebesgue de $\{t_s\}$ est zéro et ainsi $\int_{\{t_s\}} p(t,q,u)dt = 0$. Par conséquent, on peut déduire de l'équation (6.4) que

$$dr(\{t_s\}) = \int_{\{t_s\}} dr = \int_{\{t_s\}} du = u^+(t_s) - u^-(t_s) = -\mu_\alpha \nabla h_\alpha(q(t_s)), \tag{6.6}$$

pour $\mu_\alpha > 0$. Cette relation est aussi appelée la percussion de la liaison. Ceci implique également que le problème peut être décrit par l'inclusion différentielle suivante:

$$p(q,u,t)dt - du = -dr \in N_{V(q)}(u), \tag{6.7}$$

où $N_{V(q)}(u)$ est le cône normal extérieur à $V(q)$ au point u. Remarquons que le cône normal extérieur est l'ensemble vide si $V(q) = \mathbb{R}^d$ (voir équation (6.5)) de sorte que la force de réaction s'annule quand il n'y a pas de contact. En effet, la condition $-dr \in N_{V(q)}(u)$ oblige u à rester dans l'ensemble $V(q)$.

Remarque 10. *Le contact peut également être décrit par un système de conditions*

complémentaires, connues sous le nom de conditions de Sigorini:

$$h_\alpha \leq 0 \quad \gamma_\alpha \leq 0, \quad h_\alpha \cdot \gamma_\alpha = 0,$$

pour $\gamma_\alpha, h_\alpha \in \mathbb{R}$. *Si le contact* α *est réalisé, on a* $r = \gamma_\alpha \nabla h_\alpha$.

À ce stade, il est nécessaire d'introduire une loi de contact qui permet de lier les vitesses avant et après un impact.

Un choix classique est $u = u^+$, modélisant un impact dit inélastique parfait:

Impact purement inélastique

La vitesse après impact est tangente à l'obstacle et ainsi normale au vecteur $\nabla h_\alpha(q)$ (voir figure 6.3 à gauche). Le cône normal extérieur à $V(q)$ au point $u = u^+$ étant défini par la relation

$$N_{V(q)}(u) = \{\beta \nabla h_\alpha(q) : \beta \geq 0\} \quad \text{et } N_{V(q)}(u) = \{0\} \text{ si } u \in \text{int} V(q),$$

on a

$$-dr \in N_{V(q)}(u^+).$$

L'impact purement élastique est caractérisé par une conservation de l'énergie cinétique:

Impact parfaitement élastique

Si on a conservation de l'énergie cinématique, alors $|u^+| = |u^-|$ et $u = \frac{u^+ + u^-}{2}$. Le vecteur vitesse est parfaitement réfléchi et, par conséquent, sa composante tangentielle est conservée et la composante normale change de signe (figure 6.3 à droite). On a

$$-dr \in N_{V(q)}(\frac{u^+ + u^-}{2}).$$

Ces deux lois d'impact classiques ont ensuite été généralisées (Moreau [69], Mabrouk [72]) en introduisant un opérateur d'interpolation linéaire, noté ici Av, qui est défini dans ce qui suit. Soit e le coefficient dit de restitution tel que $u(t_s)$ est une combinaison convexe de u^+ et u^-:

$$u = Av(u^+, u^-) = \frac{1}{1+e} u^+ + \frac{e}{1+e} u^- \quad \text{où } e \in [0,1] \tag{6.8}$$

Une fonction à variations bornées $u : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^d$ est appelée e-moyennée si elle vérifie l'equation (6.8). De manière équivalente, on peut travailler avec le coefficient $k = \frac{e}{1+e}$, $0 \leq k \leq 1/2$ tel que $u = (1-k)u^+ + ku^-$, comme proposé dans [62]. En outre, on peut remarquer que, pour $e = 0$, l'espace des fonctions u se réduit à l'espace des

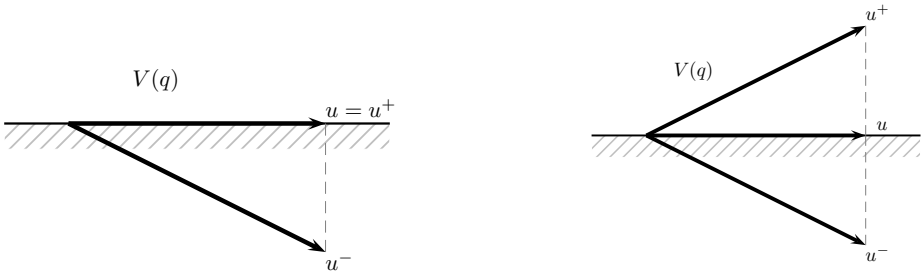

FIG. 6.3 – $k = 0$ *(inélastique, à gauche) et* $k = 1/2$ *(élastique, à droite)*

fonctions continues à droite. Cette formulation implique que la composante tangentielle de u est toujours continue alors que la loi de Newton est appliquée à la composante normale (voir figure 6.3).

En conclusion, le problème généralisé se pose comme suit

$$p(q, \dot{q}, t)dt - d\dot{q} = -dr \in N_{V(q)}(u), \quad u = Av(u^+, u^-) \in V(q).$$

Quand les contraintes ne sont pas activées, on a $V(q) = \mathbb{R}^d$ et ceci implique que le cône normal extérieur correspondant est zéro. Dans ce cas, la force de réaction dr s'annule car $u^+ = u^-$ et on retrouve l'équation usuelle du mouvement $\ddot{q} = p(q, \dot{q}, t)$. Aux instants d'impact, on a, avec (6.6),

$$-du(t_s) \in N_{V(q)}(u(t_s)).$$

La vitesse après l'impact peut être déterminée grâce à une procédure de projection qui utilise le lemme suivant:

Lemme 2 (Moreau). *Soient x et z deux vecteurs dans un espace vectoriel Euclidien E. Soient V un cône convexe fermé de E et N_V le cône normal extérieur à V. Le lemme des deux cônes s'énonce alors:*

$$x - z \in -N_V(x) \iff x = \mathrm{proj}(z, V).$$

Dans ce lemme, $\mathrm{proj}(x, V)$ désigne la projection de x sur V. Ainsi, à l'aide du lemme des deux cônes de Moreau, on peut déterminer la vitesse après l'impact:

$$u^+ = -e\, u^- + (1 + e)\, \mathrm{proj}(u^-, V(q)). \tag{6.9}$$

Il en découle que, quand il y a contact, le vecteur $u(t_s)$ peut être obtenu comme le vecteur le plus proche du vecteur de la vitesse avant impact $u^-(t_s)$ dans $V(q(t_s))$.

On a existence et unicité de solutions locales analytiques tant que $p(u, q, t)$ est analytique. Si, de plus, p croit au plus linéairement $\|p(q, \dot{q}, t)\| \leq l(t)(1 + \|\dot{q}\| + \|q\|)$, alors la solution est globale et la dynamique est déterminée pour tout temps $t \in \mathbb{I}$. Ces résultats sont dus à Ballard [14].

6.3 Un algorithme de simulation numérique

On note q_c les ddl qui peuvent avoir contact avec un obstacle rigide tel que $q = (\tilde{q},\, q^c) \in \mathbb{R}^N$, et respectivement $u = (\tilde{u},\, u^c)$, $p = (\tilde{p},\, p^c)$. Évidemment, les ddl non soumis à des contraintes géométriques doivent vérifier $\tilde{u} = \tilde{u}^- = \tilde{u}^+$ pour tous $t \in \mathbb{I}$. Dans la suite, on va prendre $q^c \in \mathbb{R}$ afin de simplifier les notations. Pour le problème avec jeu, les contraintes géométriques prennent la forme

$$h(q) = |q^c| - \beta \leq 0, \quad \beta > 0. \tag{6.10}$$

On peut écrire l'équation (6.10) à l'aide de deux fonctions régulières $q \to h_\alpha(q)$, $\alpha = 1, 2$, telles que

$$h_1(q) = q^c - \beta, \quad \text{et} \quad h_2(q) = -q^c - \beta, \quad \beta > 0.$$

Un algorithme conceptuellement simple consiste à utiliser le schéma d'intégration numérique standard pour les intervalles de temps réguliers entre impacts et de détecter les instants de contact par un test. Dès que les contraintes sont violées, il faut déterminer l'instant exact du contact, appliquer la loi d'impact et reprendre l'intégration numérique à ce point. L'inconvénient majeur de cette procédure est le temps de calcul. L'intégration temporelle doit être arrêtée à chaque instant où s'établit un contact et de ce fait, le pas de temps n'est pas constant. Remarquons également que l'utilisation de schémas d'ordre élevé n'est pas évident puisqu'on doit s'attendre à des discontinuités des vitesses. Aussi, on propose d'utiliser directement la discrétisation de l'inclusion différentielle (6.7).

6.3.1 Discrétisation de l'inclusion différentielle

L'inclusion différentielle (6.7) peut être discrétisée comme suit [62]:

$$(t_{i+1}^n - t_i^n)\, p(t_{i+1}^n, q_{i+1}^n, u_{i+1}^n) - (u_{i+1}^n - u_i^n) \in N_{V(q_{i+1}^n)}(w_{i+1}^n), \tag{6.11}$$

où l'intervalle de temps a été découpé aux instants t_i^n et les fonctions approchantes q^n et u^n sont définies par les valeurs $q_i^n = q(t_i^n)$ et respectivement

$$u_i^n = u^+(t_i^n) = u^-(t_{i+1}^n).$$

Dans ce qui suit on note de manière abrégée $p_{i+1}^n = p(t_{i+1}^n, q_{i+1}^n, u_{i+1}^n)$ et $\Delta_t^n = t_{i+1}^n - t_i^n$. L'indice n dénote ici la discrétisation de l'intervalle de temps en n sous-intervalles. Cet indice sera omis dans les paragraphes suivants afin d'alléger les notations. Par ailleurs, on introduit la variable w_{i+1}^n qui est telle que

$$w_{i+1}^n = Av(u_i^n, u_{i+1}^n) = ku_i^n + (1-k)u_{i+1}^n.$$

Sachant que le cône N_V est inchangé par multiplication avec une constante, on peut écrire

$$(1-k)\Delta_t\, p_{i+1} - (1-k)(u_{i+1} - u_i) \in N_{V(q_{i+1})}(ku_i + (1-k)u_{i+1}),$$

et, à l'aide du lemme des deux cônes de Moreau, on obtient l'expression suivante caractérisant w_{i+1}^n:

$$w_{i+1} = \mathrm{proj}\big(u_i + (1-k)\Delta_t\, p_{i+1}, V(q_{i+1})\big). \tag{6.12}$$

On en déduit finalement l'expression de la vitesse à droite

$$u_{i+1} = (1-k)^{-1}(w_{i+1} - ku_i).$$

Théorème 6 ([69][14]). *On suppose que la fonction des forces $p(u,q,t)$ donnée est continue, bornée sur $\mathbb{I} \times \mathbb{R}^d$ et que p est Lipschitz continu par rapport à u. Alors la suite (u^n, q^n) possède une sous-suite qui converge point par point et uniformément vers une limite (u,q) où u est à variations bornées avec $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t u(s)ds$ tel que $u = Av(u^+, u^-)$ est solution du problème.*

On remarque que le théorème précédent (théorème 6) reste valable si on admet des impacts multiples mais si ces impacts multiples sont orthogonaux [14]. Dans ce cas, on introduit l'ensemble de contraintes actives pour la configuration q comme

$$J(q) = \{\alpha \in \{1, \dots, m\} : \ h_\alpha(q) = 0\}.$$

Le cône de vitesses à droite admissibles s'écrit alors

$$V(q) = \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^d; \forall \alpha \in J(q) \ : \ w^T \nabla h_\alpha(q) \leq 0\} & \text{si } h_\alpha \geq 0 \\ \mathbb{R}^d & \text{sinon} \end{cases}. \tag{6.13}$$

6.3.2 Schéma numérique pour le problème de contact

En plus de la discrétisation de l'inclusion différentielle, il reste à expliciter la discrétisation de la relation $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t u(s)\, ds$. Dans ce travail, on a choisi le schéma implicite

$$q_{i+1} = q_i + 1/2\Delta_t\, (u_i + u_{i+1}),$$

car il s'est avéré stable pour les équations considérées. D'autres auteurs proposent d'utiliser plutôt le schéma plus simple

$$q_{i+1} = q_i + \Delta_t\, u_i,$$

mais ce schéma explicite n'est stable que dans de rares cas. Une version modifiée est proposée par exemple dans [73], où la force p est évaluée à un instant intermédiaire $t_m = t_i + 1/2\Delta_t$ tel que $p_m = p(t_m, q_m, u_i)$ avec $q_m = q_i + 1/2\Delta_t\, u_i$. On obtient ainsi l'expression

$$q_{i+1} = q_m + 1/2\Delta_t\, u_{i+1},$$

mais ce schéma a été instable pour notre type d'équations (en effet, c'est également un schéma explicite).

En résumé, le schéma suivant, fondé sur une discrétisation de l'inclusion différentielle (équation (6.11)), permet une simulation temporelle de la dynamique avec contacts possibles, ceux-ci étant dus à un jeu:

On constate d'abord que, tant que $h_\alpha(q_{i+1}) < 0$, $\alpha = 1, 2$, le cône est l'espace entier $V(q_{i+1}) = \mathbb{R}^d$ et ainsi $u_{i+1} = u_i + \Delta_t\, p_{i+1}$. Si maintenant $h_\alpha(q_{i+1}) \geq 0$, on a

$$V(q_{i+1}) = \{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^-\}$$

quand le contact $\alpha = 1$ est réalisé. Ensuite, on peut distinguer les deux cas suivants:

i) $u_i^c + (1-k)\Delta_t\, p_{i+1}^c < 0$ **:** la projection sur $V(q_{i+1})$ donne

$$w_{i+1} = u_i + (1-k)\Delta_t\, p_{i+1}$$

tel que

$$u_{i+1} = (1-k)^{-1}(w_{i+1} - ku_i) = u_i + \Delta_t\, p_{i+1}.$$

ii) $u_i^c + (1-k)\Delta_t\, p_{i+1}^c \geq 0$ **:** alors

$$w_{i+1} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_i + (1-k)\Delta_t\, \tilde{p}_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$u_{i+1} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_i + \Delta_t\, \tilde{p}_{i+1} \\ \frac{-k}{1-k} u_i^c \end{pmatrix}$$

Si le contact $\alpha = 2$ est réalisé, on a

$$V(q_{i+1}) = \{\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{R}^d \mid \nu_d \geq 0\},$$

et la projection s'effectue de manière équivalente à la procédure utilisée pour le contact $\alpha = 1$.

6.4 Commentaires

Dans ce travail, la modélisation du problème de contact dans ce travail est fondée sur la loi d'impact de Moreau. En effet, dans les années 80, Moreau [71] a été parmi les premiers à développer des formulations mathématiques permettant de traiter des problèmes mécaniques avec prise en compte de chocs inélastiques. D'autres investigations, concernant tout autant les chocs inélastiques qu'élastiques ont été entreprises depuis par plusieurs auteurs. Un grand nombre de travaux concerne l'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution pour des problèmes issus de la mécanique ([14],[70],[96]). Des

résultats plutôt généraux ont été obtenus récemment par Ballard [14] mais l'unicité des solutions ne semble pas toujours garantie.

Ici, le cas d'une seule contrainte (bilatérale) a été traité. La situation est plus complexe si des contacts multiples sont admis car, dans ce cas, on peut trouver d'autres lois d'impact qui sont consistantes autant d'un point de vue géométrique qu'énergétique [79]. Dans tous les cas, plusieurs modélisations d'un contact sans frottement sont possibles: d'une part, l'impact peut être modélisé comme un choc inélastique de manière à ce que la vitesse d'impact tangentielle soit conservée alors que la composante normale à la paroi n'est pas réfléchie. D'autre part, un choc parfait élastique représente une réflexion complète alors que, dans le cas intermédiaire d'un choc élastique imparfait, on a une réflexion partielle selon la loi de Newton qui dépend d'un coefficient de restitution. C'est le coefficient de restitution qui décrit cette perte d'énergie due aux déformations plastiques et à la transformation d'énergie en ondes. Le coefficient de restitution dépend ainsi de la configuration, de la forme des corps ainsi que de la nature du matériau. Même dans les cas les plus simples, le coefficient de restitution n'est pas connu a priori. Certains auteurs ont tenté de le déduire de données expérimentales pour des cas très précis [78], [52], [99]. Néanmoins, des méthodes générales pour sa détermination ne sont pas disponibles.

6.5 Application à la maquette avec jeu

Dans notre modèle, le jeu est modélisé par une lame qui se déplace entre deux butées rigides (voir figure 6.4 pour le modèle éléments finis et figure 6.5 pour la représentation schématique de la lame). Une maquette correspondant à cette configuration a fait l'objet d'une campagne de mesures à l'ONERA [109]. Cette maquette, inspirée d'un empennage horizontal d'avion de transport civil, était constituée d'une voilure à profil symétrique et d'un demi-fuselage montés à la paroi. L'aile était équipée d'une gouverne de bord de fuite de 30% de profondeur sur toute l'envergure. La maquette a été calculée de manière à ce qu'elle présente une cas de flottement entre le mode de flexion d'ensemble et le mode de rotation de gouverne.

Dans ce qui suit, on appelera modèle nominal la configuration sans butée, autrement dit le modèle où la lame n'est pas limitée dans son déplacement. Soit $q_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ le déplacement vertical de la lame. Si q_c reste inférieur à une valeur q_{max}, alors la rotation de la surface de contrôle ne subit pas de force de rappel. Si les mouvements de la lame deviennent plus importants, tels que $|q_c| > \beta$, celle-ci sera bloquée au niveau de l'une des deux butées de manière à ce que la surface de contrôle subisse une force de rappel dont la raideur est caractérisée par l'épaisseur et la longueur de la lame. On a ici trois ddl non-réguliers, $q_c \in \mathbb{R}^3$, qui correspondent aux déplacements verticaux de trois points distincts contenus dans le plan de la lame. Si ces ddl sont fixés, la libre rotation de la gouverne est empêchée. Les nœuds soumis à cette contrainte géométrique coïncident ici avec les ddl de frontière $q_i = q_c$ du modèle sous-structuré. Ainsi, le

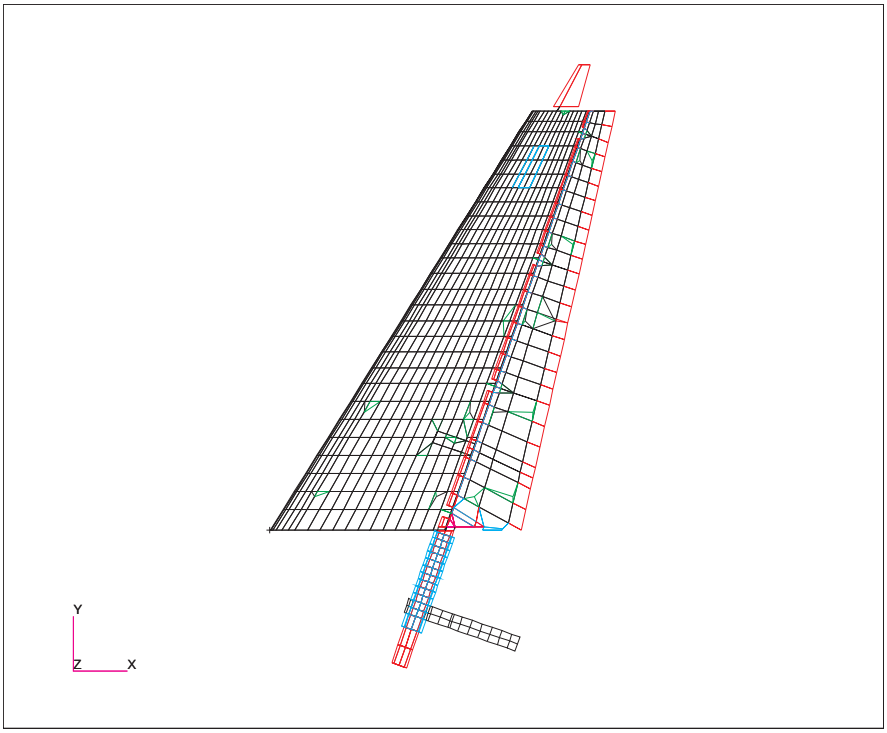

FIG. 6.4 – *modèle éléments finis de la maquette avec jeu*

système se résume à une sous-structure régulière Ω^r et à une interface (ou frontière) Γ contenant les ddl non réguliers.

En utilisant les résultats et les notations du §6.1, les équations de mouvement du modèle réduit s'écrivent:

$$\mathcal{M}\begin{pmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_c \end{pmatrix} + \mathcal{K}\begin{pmatrix} q_r \\ q_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^T\mathbb{F}_r \\ \Phi^T\mathbb{F}_r \end{pmatrix} = \mathcal{F} \tag{6.14}$$

De plus, les ddl non réguliers q_c doivent respecter les contraintes $|q_c| \leq \beta$. Pour les essais, un jeu de 0.5 mm a été choisi, tel que $\beta = 0.0005/2$.

Les matrices réduites $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$ s'écrivent

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mu & S \\ S^T & \tilde{M}_{ii} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{ii} \end{bmatrix},$$

avec

$$S = \Psi^T(M_{ri} + M_{ll}\Phi),$$
$$\tilde{M}_{ii} = \Phi^T M_{rr}\Phi + \Phi^T M_{ri} + M_{ri}^T\Phi + M_{ii},$$

et

$$\tilde{K}_{ii} = K_{ii} + K_{ri}^T\Phi.$$

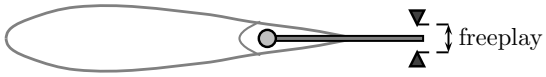

FIG. 6.5 – *coupe transversale schématique de la voilure*

Remarque 11. *Ces matrices peuvent être obtenues, par exemple, à l'aide de programmation de DMAP dans le logiciel NASTRAN. En effet, en notant* $V = (\Phi,\, I_{n_c})$ *et* $W = (\Psi,\, 0_{n_c \times n_r})$*, où* $0_{n_c \times n_r} \in Mat(n_c, n_r)$ *est une matrice nulle, on peut aisément calculer les produits matriciels* $S = W^T \mathbb{M} V$ *et* $\tilde{M}_{ii} = V^T \mathbb{M} V$*.*

Les matrices diagonales,

$$\mu = \Psi^T M_{rr} \Psi \quad \text{et} \quad \gamma = \Psi^T K_{rr} \Psi,$$

sont respectivement la matrice de masse et la matrice de raideur généralisées de la sous-structure avec frontière fixe.

En introduisant l'expression des forces aérodynamiques généralisées sous forme de fraction rationnelle et en notant $Y = (q,\, \dot{q},\, X)$, où maintenant $q = (q_r,\, q_c)$, on obtient l'équation différentielle du premier ordre suivante:

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & I_{nm} & 0 \\ -\tilde{M}^{-1}\tilde{K} & -\tilde{M}^{-1}\tilde{C} & -\tilde{M}^{-1} G \frac{1}{2}\rho U^2 \\ 0 & E & \frac{U}{l} R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ X \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

avec

$$\tilde{M} = \mathcal{M} + \frac{1}{2}\rho l^2 A_2, \qquad \tilde{C} = \mathcal{C} + \frac{1}{2}\rho U\, l A_1, \qquad \tilde{K} = \mathcal{K} + \frac{1}{2}\rho U^2 A_0.$$

Pour le problème de contact, on pose $u = (\dot{q},\, X) = \dot{\mathcal{Q}}$ où $\mathcal{Q} = (q,\, \chi)$ et $\chi(t) = \int_{t_0}^{t} X(t)dt$. Ceci permet d'écrire (6.14) sous la forme recherchée

$$du = Budt + f(q)dt = P(u, \mathcal{Q})dt,$$

où

$$B = \begin{bmatrix} -\tilde{M}^{-1}\tilde{C} & -\tilde{M}^{-1} G \frac{1}{2}\rho U^2 \\ E & U/l\, R \end{bmatrix} \quad \text{et } f(q) = \begin{pmatrix} -\tilde{M}^{-1}\tilde{K} q \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.5.1 Résultats obtenus

Le diagramme de stabilité obtenu pour 5 modes souples et interface libre est donné sur la figure 6.12. Les résultats obtenus avec le modèle sous-structuré par la méthode de

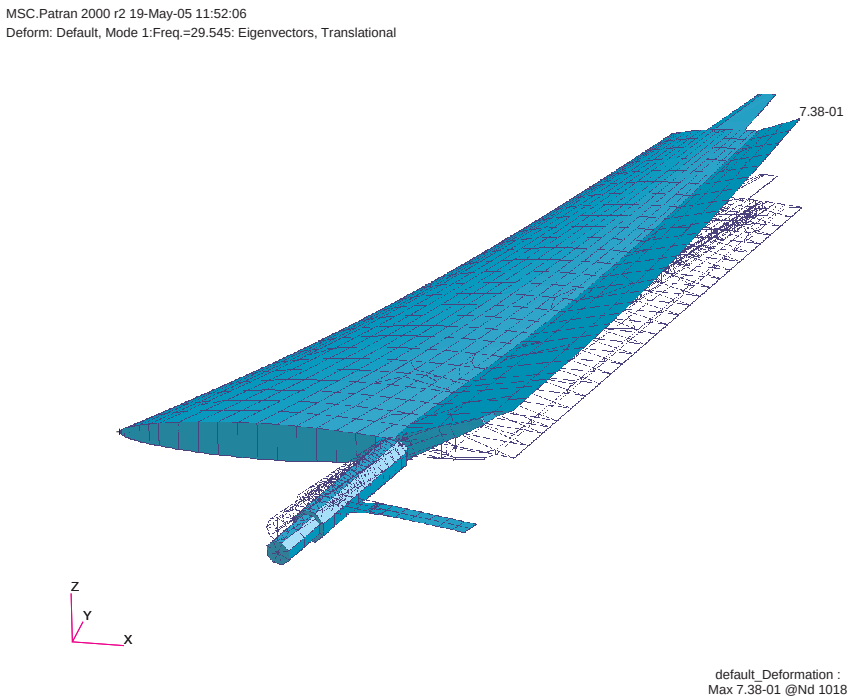

FIG. 6.6 – *premier mode de flexion, interface fixe*

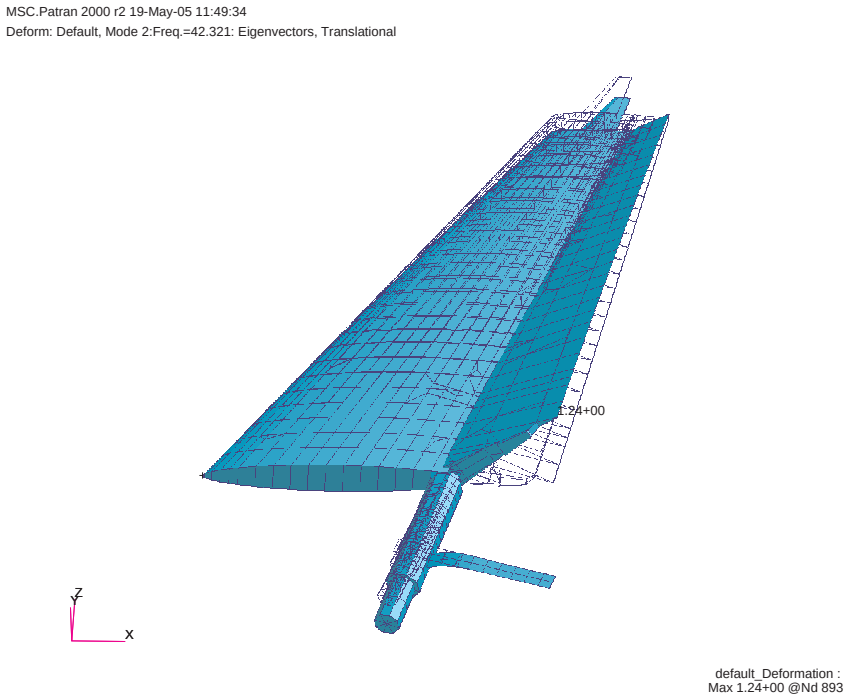

FIG. 6.7 – *premier mode de rotation (gouverne), interface fixe*

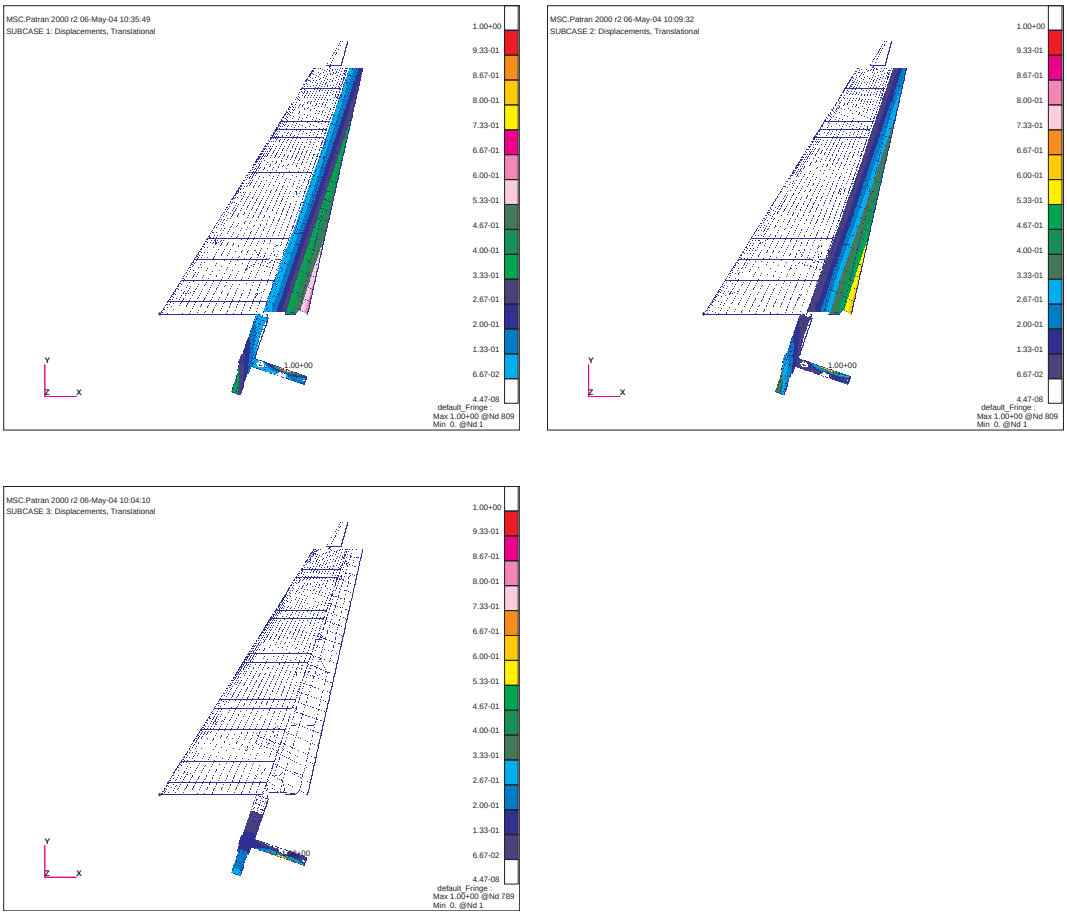

FIG. 6.8 – *les 3 modes statiques de liaison*

Craig et Bampton, en utilisant 5 modes souples et 3 modes d'interface, (figure 6.11) sont en accord avec la figure 6.12. Pour les deux modèles, une instabilité est détectée pour une pression critique $p_0^{crit} = 0.426$ bar, c'est la valeur critique de la configuration nominale. La figure 6.13 donne l'évolution des parties réelles et des parties imaginaires (les fréquences propres) des valeurs propres si l'interface est fixe.

Si on considère maintenant le modèle avec contraintes géométriques pour les ddl q_c, les essais ont révélé l'existence de cycles limites qui ont été mis en évidence par le calcul avec le modèle numérique décrit dans ce paragraphe. La valeur critique p_0^{LCO} correspondant au début des cycles limites est inférieure ou égale à p^{crit}, ceci en fonction des conditions initiales ainsi que du coefficient de restitution k. Ainsi, les cycles limites peuvent se produire pour des valeurs de paramètre inférieures à la valeur critique p^{crit} du système nominal si l'écart initial par rapport à l'équilibre est plus important. On observe sur la figure 6.24 que, pour une valeur p_0 donnée, la fréquence des cycles limites correspond à la fréquence propre du premier mode du modèle avec interface fixe.

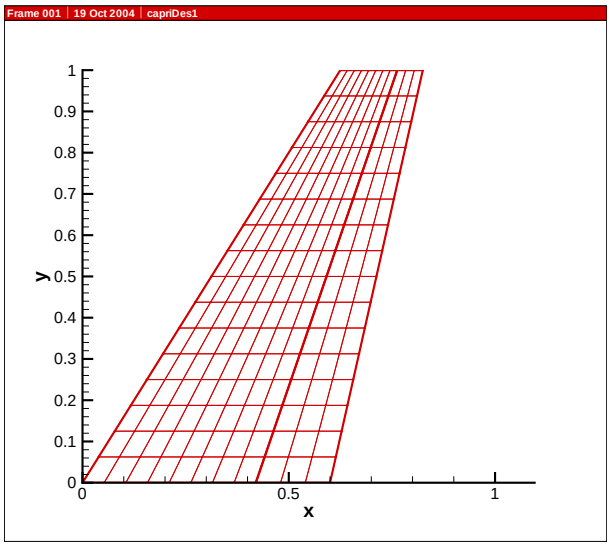

FIG. 6.9 – *maillage aérodynamique du modèle avec surface de contrôle*

Comme cela est généralement observé pour les problèmes avec jeu, le rapport entre l'amplitude et le jeu (β) est constant pour un coefficient k constant. Par ailleurs, on observe deux nouvelles positions d'équilibre: la lame reste sur la butée en position haute (figure 6.22) ou, au contraire, sur celle en position basse (figure 6.23). Le choix de l'une ou de l'autre des positions d'équilibre dépend des conditions initiales. Ceci se produit surtout pour des valeurs de p_0 élevées ($p_0 >> p_0^{crit}$) pour lesquelles les cycles limites ne semblent plus être stables).

L'évolution des trajectoires solutions dépend également de la turbulence longitudinale, lorsqu'elle est introduite dans la modélisation. On a considéré une turbulence constante sur toute l'envergure (celle-ci mesure un mètre seulement). Deux résultats de la simulation temporelle sont donnés sur les figures 6.26 et 6.27.

Concernant la comparaison avec les essais, on ne connaît pas exactement les conditions initiales de l'expérience. La maquette a été mise en vibration par excitation extérieure du premier mode (par le biais d'une palette excitatrice située en bout d'aile). Ceci a été pris en compte par une condition initiale non nulle pour la vitesse de la première coordonnée modale dans le modèle numérique. Lors de la comparaison avec les essais, où $p_0 = 0.45$ bar, on trouve la même fréquence (31.5 Hz, figure 6.28) pour les cycles limites simulés que pour ceux obtenus lors de l'essai. Néanmoins, l'amplitude de la réponse simulée est beaucoup plus faible que celle mesurée.

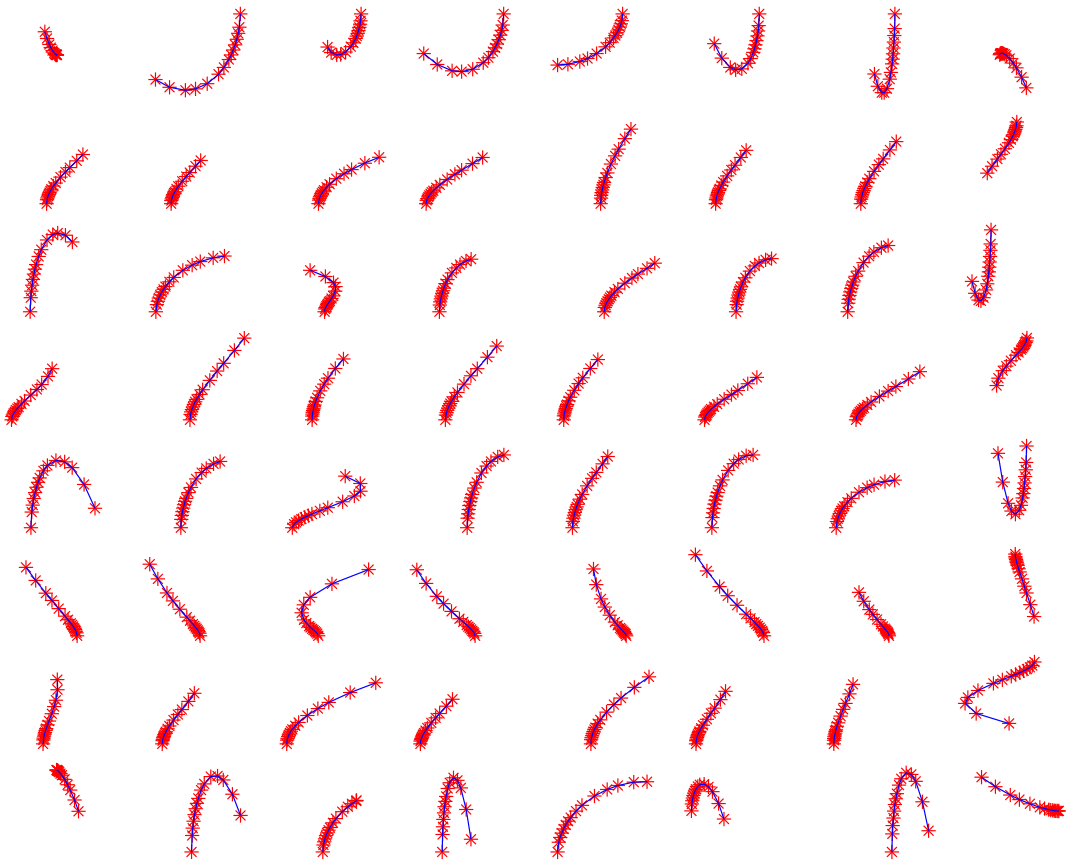

FIG. 6.10 – *lissage des FAG (5 modes souples et 3 modes statiques d'interface)*

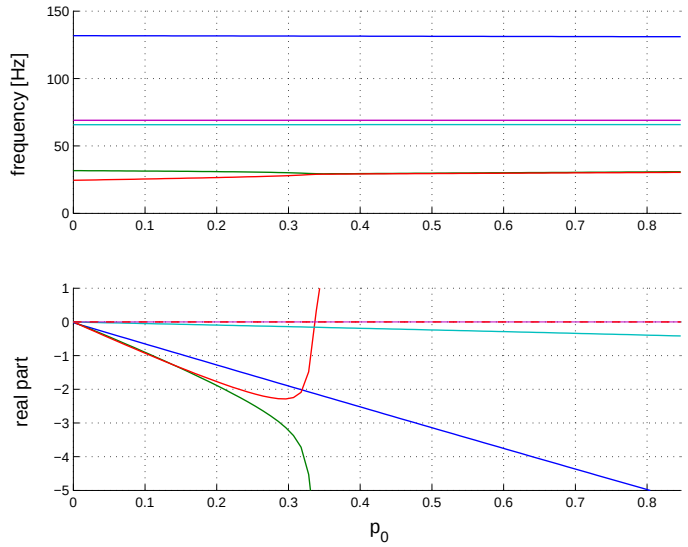

FIG. 6.11 – *diagramme de stabilité, méthode de Craig et Bampton avec 5 modes internes et 3 modes statiques de liaison*

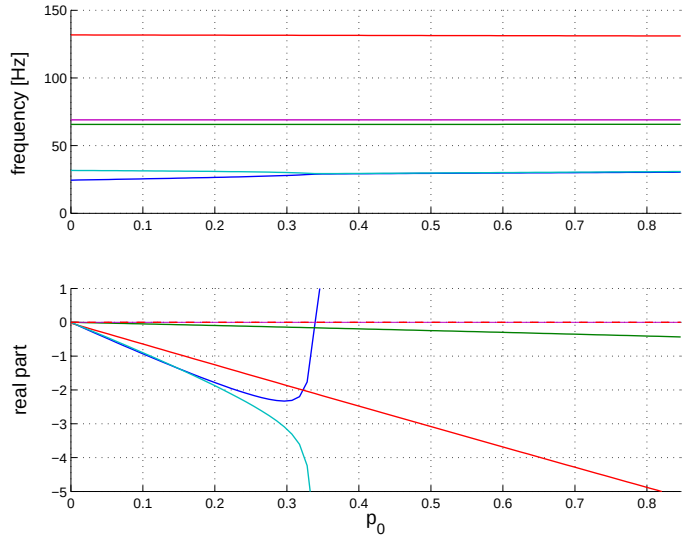

FIG. 6.12 – *diagramme de stabilité avec interface libre, 5 modes*

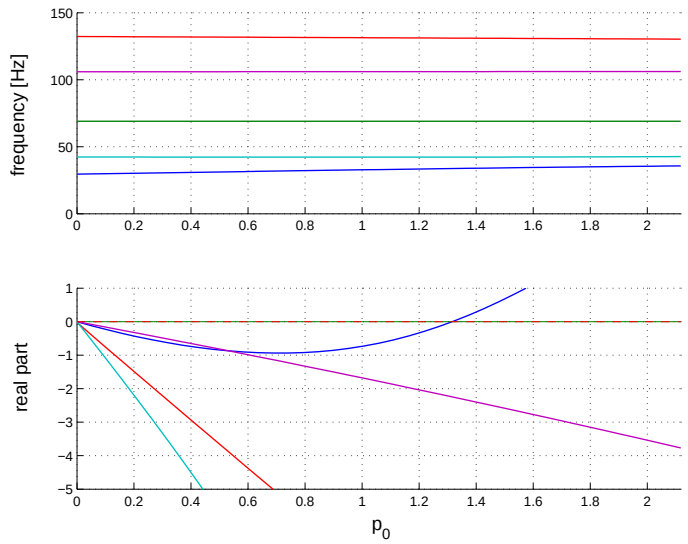

FIG. 6.13 – *diagramme de stabilité avec interface fixe, 5 modes*

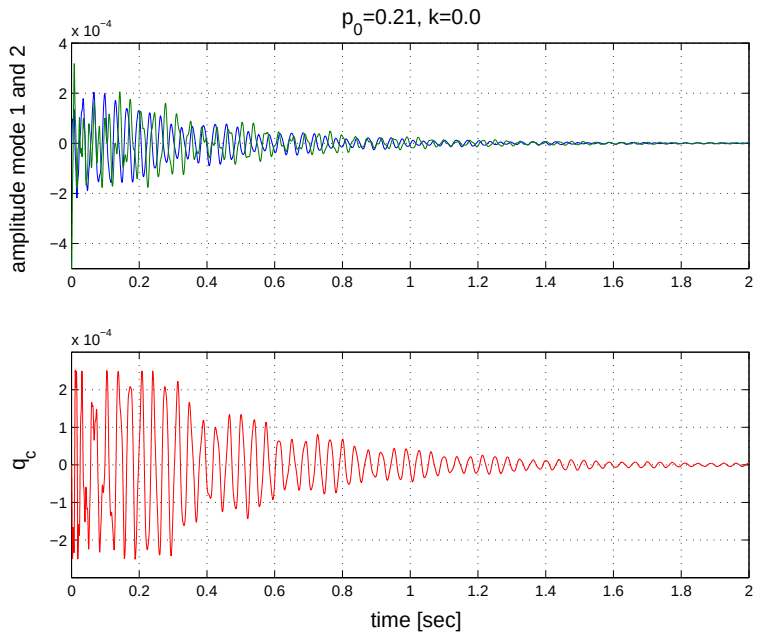

FIG. 6.14 – *réponses modales et trajectoire de q_c pour $p_0 = 0.21$*

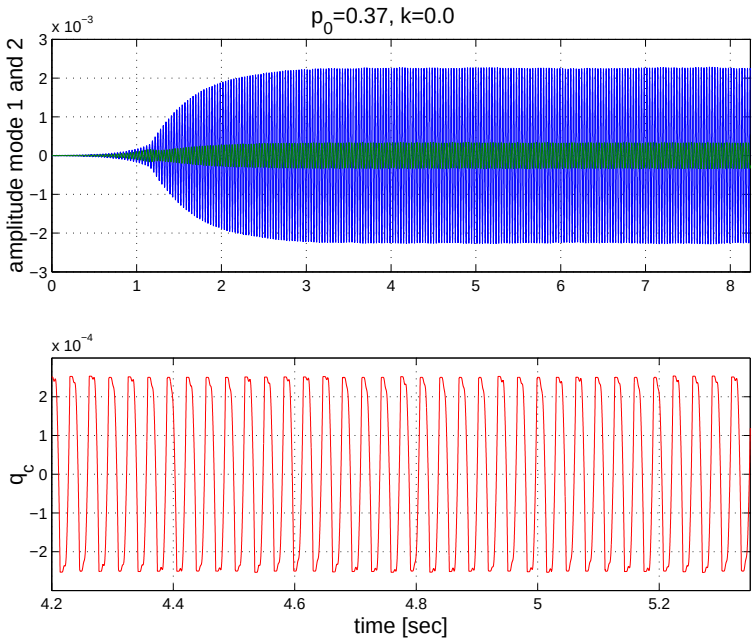

FIG. 6.15 – *réponses modales et trajectoire de q_c pour choc inélastique*

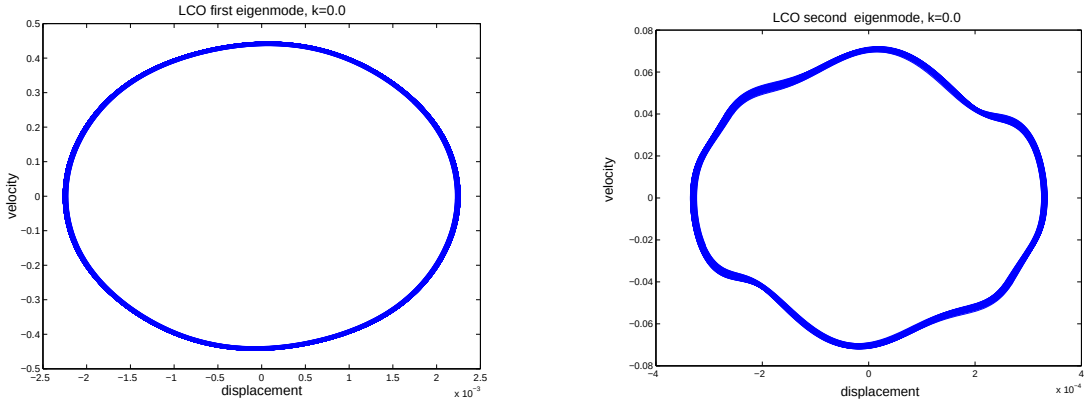

FIG. 6.16 – *plan des phases pour les deux premiers modes*

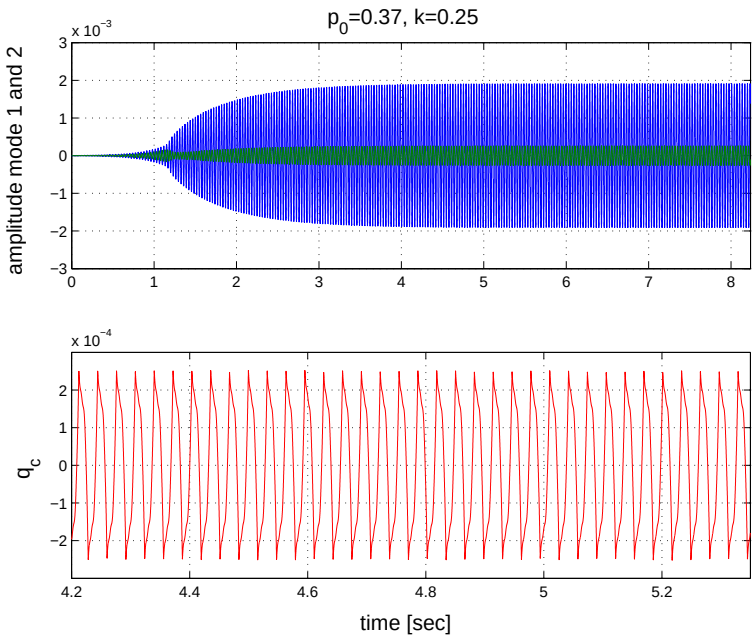

FIG. 6.17 – *réponses modales et trajectoire de* q_c *pour* $k = 0.25$

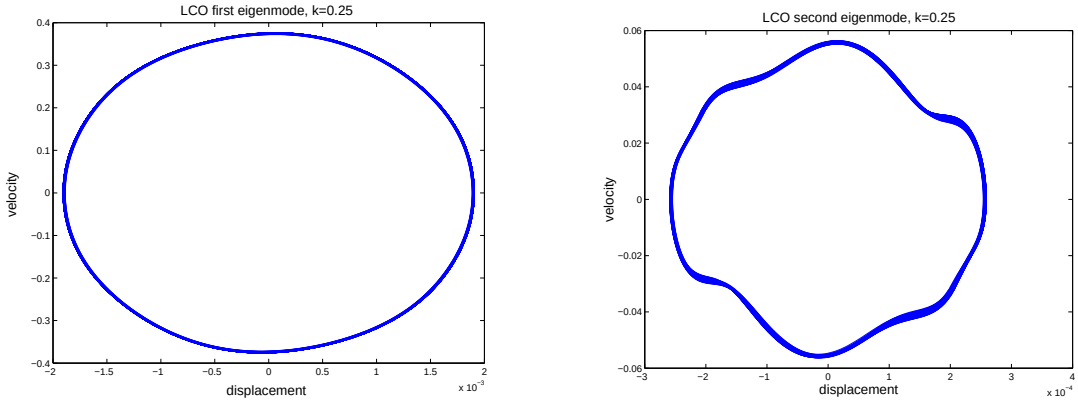

FIG. 6.18 – *plan des phases pour les deux premiers modes*

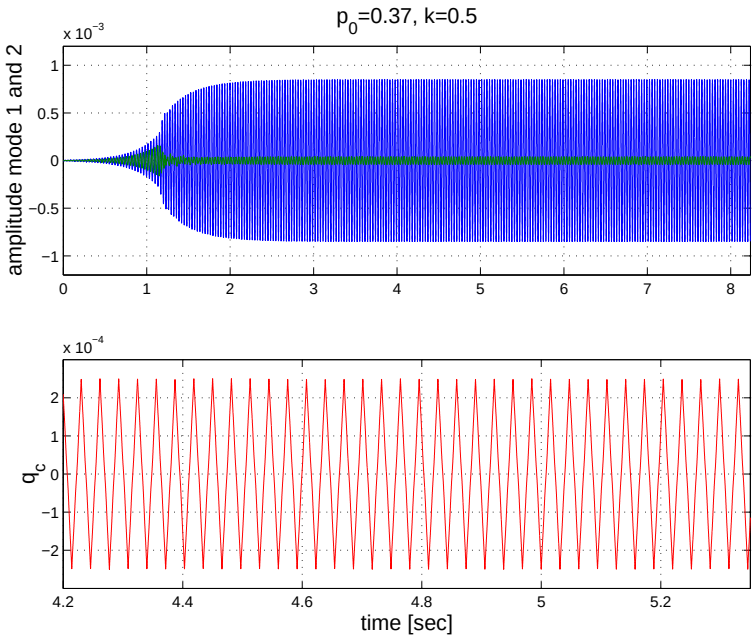

FIG. 6.19 – *réponses modales et trajectoire de q_c pour un choc parfaitement élastique*

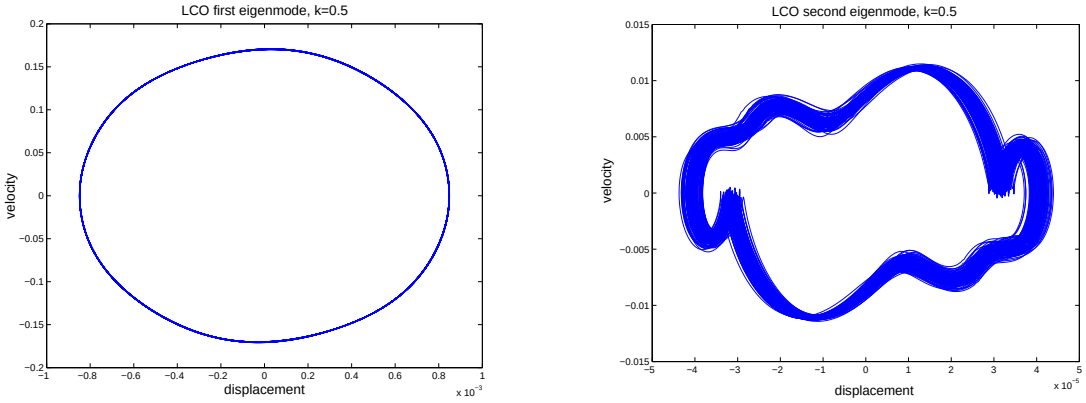

FIG. 6.20 – *plan des phases pour les deux premiers modes*

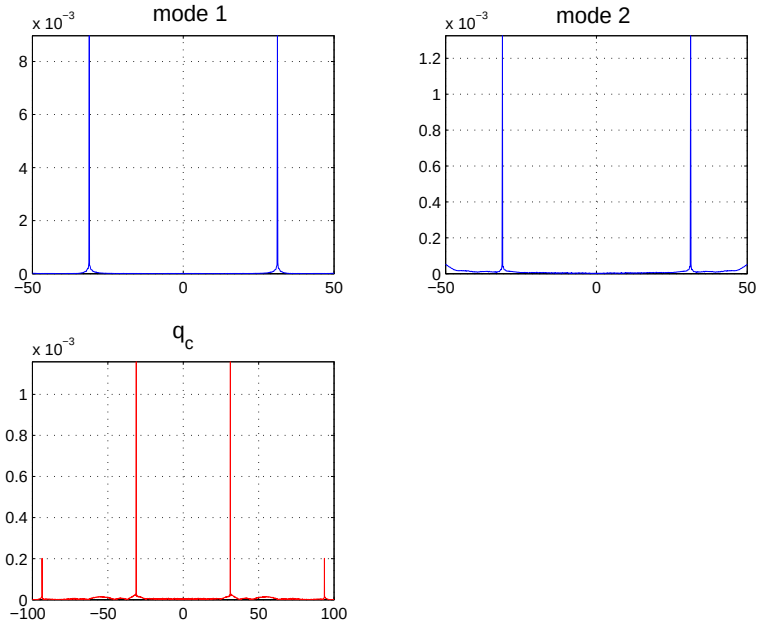

FIG. 6.21 – *transformées de Fourier des réponses modales et de* q_c

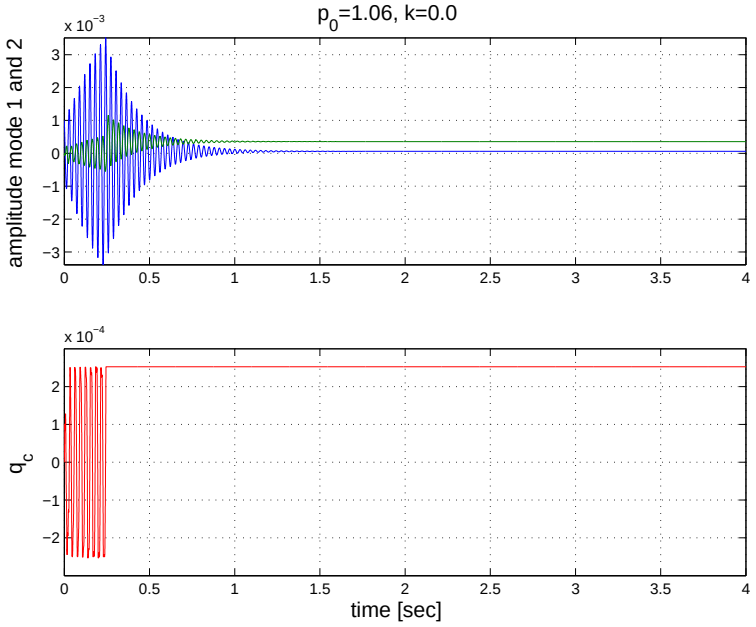

FIG. 6.22 – *position d'équilibre: lame sur la butée haute*

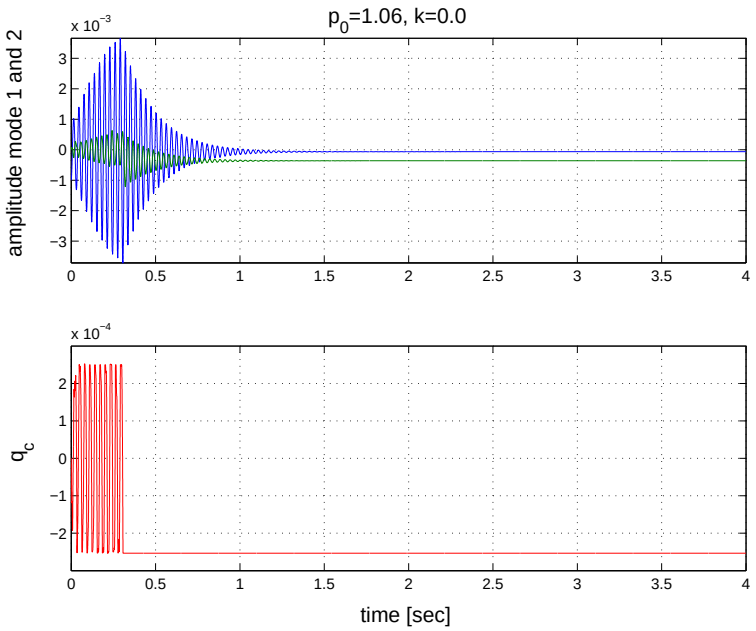

FIG. 6.23 – *position d'équilibre: lame sur la butée basse*

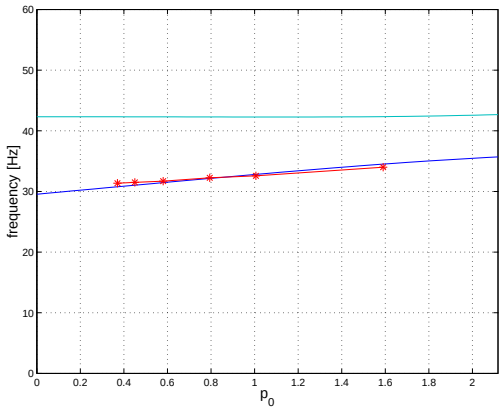

FIG. 6.24 – *fréquence des cycles limites et fréquence propre du modèle à interface fixe*

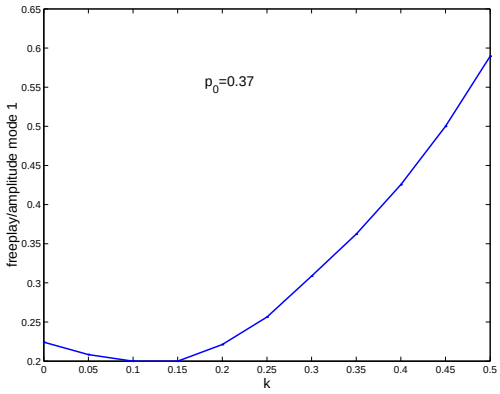

FIG. 6.25 – *rapport jeu/amplitude pour le mode 1 en fonction de k*

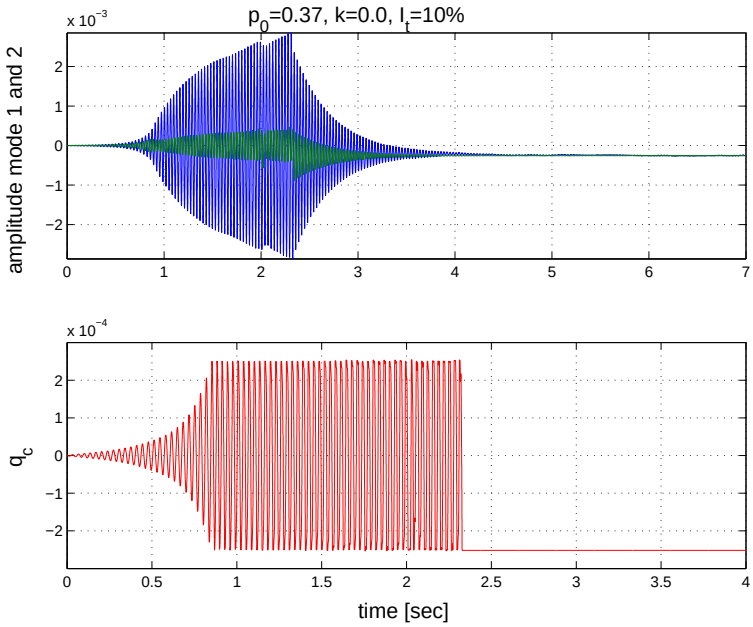

FIG. 6.26 – *réponse avec* 10% *de turbulence*

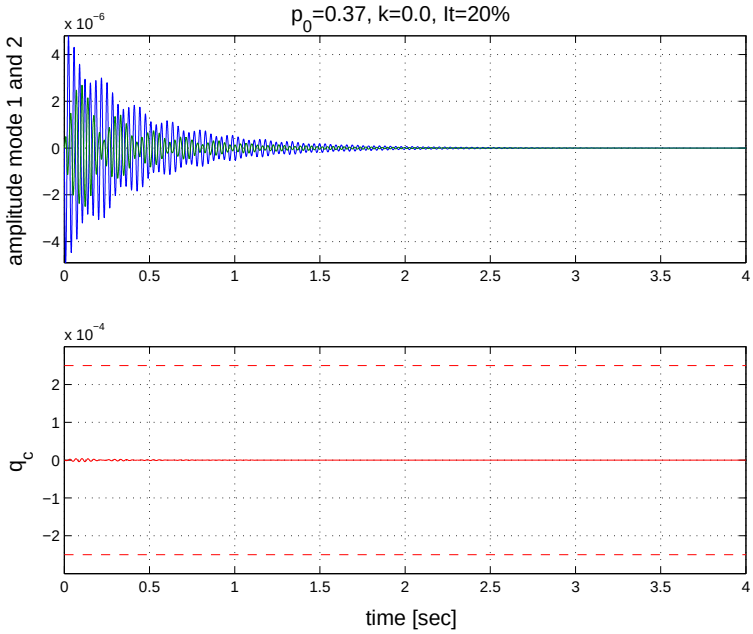

FIG. 6.27 – *réponse avec* 20% *de turbulence*

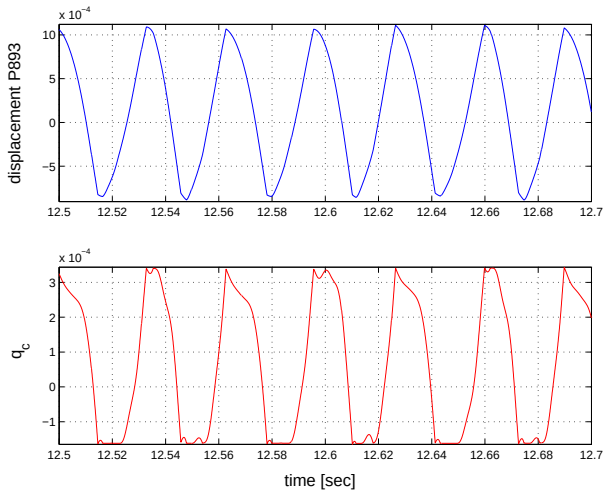

FIG. 6.28 – *déplacement du nœud 893 (emplanture gouverne) et de q_c*

6.5.2 Conclusions et remarques

On observe que le schéma numérique permet de bien respecter les contraintes: la loi de contact est rarement violée, et de peu (par exemple figures 6.17 et 6.15). La précision du schéma d'approximation numérique n'est pas suffisante pour des pas de temps trop élevés. Pour notre problème, les contacts sont très localisés. Par ailleurs, on est amené à des résolutions sur des plages de temps très importantes par rapport à la durée des impacts. Il serait alors utile d'enrichir la résolution en utilisant un schéma en temps d'ordre plus élevé entre les instants d'impacts.

Pour une valeur p_0 donnée, la fréquence des cycles limites correspond à la fréquence propre du premier mode du modèle avec interface fixe (figure 6.24), ce qui correspond aux observations lors des essais. Plus particulièrement, on a trouvé la même fréquence pour les cycles limites simulés que pour les cycles limites observés lors de l'essai. Néanmoins, l'amplitude de la réponse simulée est beaucoup plus faible que celle mesurée sur la maquette. Ceci pourrait être dû à des effets de nature aérodynamique non pris en compte dans la modélisation des forces aérodynamiques.

Il est à noter que la réponse, et notamment le paramètre critique pour l'apparition de cycles limites, dépend des conditions initiales. Par ailleurs, on a observé deux nouvelles positions d'équilibre où la lame reste sur la butée haute ou sur la butée basse. Ces équilibres n'ont pas été observés quand le jeu était modélisé par un ressort non linéaire. L'amplitude des cycles limites, s'ils apparaissent, dépend de la valeur du coefficient de restitution k qui détermine les vitesses après l'impact (figure 6.25), mais elle ne dépend pas de la condition initiale. En présence d'un bruit aléatoire multiplicatif, la solution dépend également de celui-ci.

Remarquons que l'introduction de la turbulence par tranches dans un modèle avec

jeu est possible en considérant trois degrés de liberté par tranche comme cela est représenté sur la figure 2.7. L'envergure de la maquette étudiée ici n'est cependant pas assez importante pour justifier cette méthode.

6.6 Stabilité d'un point fixe

6.6.1 Stabilité locale

Considérons le système dynamique linéaire sans force extérieure, et non soumis à des contraintes géométriques (c'est le système nominal). L'équation du mouvement de ce système peut s'exprimer comme équation différentielle du premier ordre (6.15), qu'on note ici

$$\dot{Y} = A\,Y, \quad Y(0) = Y_0. \tag{6.16}$$

La question de la stabilité locale de (6.16) est triviale. On peut déterminer si le système est stable localement ou non par les outils de l'analyse linéaire classique. Ainsi, le système nominal (sans contraintes) est asymptotiquement stable par rapport au seul point fixe donné par $Y \doteq 0$ si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice A sont négatives (voir la définition de la notion de stabilité au §4.3). Si on considère maintenant le problème avec contraintes, on peut affirmer que le point fixe $Y \doteq 0$ de l'équation avec contraintes est (asymptotiquement) stable si le point fixe du système linéaire (6.16) est (asymptotiquement) stable. Ceci se déduit directement de la définition de stabilité §4.3. Il est important de remarquer que, pour le système avec contraintes, la stabilité n'est pas globale comme elle l'est pour le problème régulier (autonome). En effet, la stabilité du système dépend de la condition initiale et donc de l'écart par rapport à l'équilibre.

6.6.2 Remarques sur l'exposant de Lyapunov pour un système dynamique non régulier

Les méthodes couramment utilisées pour l'étude de la stabilité de systèmes dynamiques sont étroitement liées à une méthode de linéarisation. Or, ceci requiert une certaine régularité. Dans [61], le concept de l'exposant de Lyapunov a été élargi aux systèmes dynamiques (déterministes) non réguliers à la condition qu'il existe un cocycle, c'est-à-dire une application $T : [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \to Mat_{\mathbb{R}}(d \times d)$, telle que, pour $t_0 = 0$:

$$T(t+s, y_0) = T(t, \phi(s, y_0)) \circ T(s, y_0) \quad \text{pour } t, s \in [0, \infty[,\ y_0 \in \mathbb{R}^d,$$

où on a noté $\phi(t, y_0)$ le flot régulier entre les temps d'impact t_c. Dans un contexte où ϕ est un flot linéaire tel que $\phi(t, y_0) \equiv \phi(t) y_0$ on peut alors définir

$$T(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \neq t_s^i, \\ \Lambda_i(\lim_{s \to t_s^i -} T(s)) & t = t_s^i, \end{cases} \tag{6.17}$$

où les t_s^i sont les temps d'impact consécutifs et Λ_i les matrices de transition.

On considère le cas où on a toujours le point fixe $y \equiv 0$. La quantité

$$\lambda(y_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} T(t) y_0, \tag{6.18}$$

qui est toujours appelée exposant de Lyapunov, décrit alors le comportement des trajectoires, et en particulier, l'évolution de petites perturbations par rapport à un point fixe.

Par ailleurs, dans [61] on montre que, s'il existe une mesure ergodique invariante, alors il existe un nombre fini d'exposants de Lyapunov $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et la quantité (6.18) correspond à l'un d'eux.

Dans notre cas, Λ est une matrice diagonale qui ne dépend pas du temps d'impact t_c^i. Si on considère par exemple un impact parfaitement élastique, elle s'écrit $\mathrm{diag}(\Lambda) = (1, \dots, -1, -1, -1, 1, \dots, 1)$. Le flot associé à l'équation (6.16) est linéaire entre les instants d'impact tel que la résolvante s'écrive $\phi(t) = e^{At}$. Ainsi, on peut écrire:

$$T(t) = \begin{cases} e^{At} & t \neq t_s^i, \\ \Lambda\, e^{At_s^{i\,-}} & t = t_s^i. \end{cases}$$

Si on considère le système perturbé par un bruit aléatoire, la matrice A de l'équation (6.16) devient aléatoire telle que $A \equiv A(\xi_t)$. Dans ce cas, le flot linéaire aléatoire entre impacts est donné par l'expression $\phi(t, \omega) = \int_{t_0}^t \exp[A(\xi_s)] ds$.

Conclusions

Dans ce travail de recherche, nous avons développé des méthodes d'analyse permettant d'étudier la stabilité des aéronefs en présence d'un bruit aléatoire de type multiplicatif. Une procédure numérique efficace pour l'étude de la stabilité a été développée. Celle-ci peut être utilisée avec les codes aux éléments finis et les codes standards pour l'aérodynamique. Ainsi, la méthodologie proposée peut facilement être intégrée dans les logiciels industriels.

D'autre part, une modélisation mathématique et numérique pour des structures comportant des non-régularités tel un jeu a été présentée.

En ce qui concerne le système aéroélastique, on a discrétisé la partie structure par la méthode des éléments finis. Un modèle réduit structural a ensuite été construit par synthèse modale. Les forces aérodynamiques généralisées qui s'appliquent à la structure peuvent être déterminées par la méthode des doublets (dans le domaine subsonique) ou par les équations d'Euler linéarisées. Le modèle d'état est construit en utilisant une approximation par un minimum de variables d'état des forces aérodynamiques généralisées.

On a modélisé la turbulence atmosphérique par un processus stochastique gaussien stationnaire centré. Ainsi, la vitesse de l'écoulement est modélisée par un processus aléatoire, somme d'une vitesse moyenne constante et de la composante longitudinale de la turbulence atmosphérique. Dans ce cadre, le système aéroélastique peut être modélisé par une équation différentielle aléatoire, c'est-à-dire une équation différentielle ordinaire excitée par un bruit multiplicatif. La composante verticale de la turbulence agit comme une force extérieure et introduit ainsi un bruit additif. On remarque que la turbulence verticale n'influence pas la stabilité d'un système avion-aérodynamique linéaire. Dans ce cas de figure, le point fixe du système couplé est transformé en une unique solution stationnaire. Néanmoins, en présence de non-linéarités (structurales), un bruit additif peut avoir une influence sur la stabilité.

Afin de prendre en compte la longueur de corrélation de la composante longitudinale de turbulence, on a développé une formulation de l'aérodynamique par tranches de la voilure. Le champ de la turbulence longitudinale peut être discrétisé par rapport aux points de référence sur ces tranches de manière à ce qu'on obtienne un proces-

sus stochastique vectoriel. Les composantes de ce processus vectoriel, qui modélise la turbulence longitudinale, s'appliquent aux tranches de la voilure. Les processus stochastiques utilisés ayant de bonnes propriétés, il nous a été possible de construire leurs trajectoires à partir des seules données des densités spectrales matricielles. Nous avons utilisé la méthode de markovianisation qui repose sur la théorie de filtrage des processus généralisés. Elle permet d'obtenir des réalisations markoviennes des processus à spectre rationnel, c'est-à-dire qu'elle permet d'exprimer un processus comme solution d'une équation différentielle stochastique. Dans ce travail, on a utilisé les spectres de von Karman (qui peuvent être approchés par des spectres rationnels) en combinaison avec une fonction de corrélation spatiale de forme exponentielle afin de construire les matrices de densité spectrale.

Le problème aéroélastique a alors pu être modélisé par une équation différentielle aléatoire. Dans le cadre des systèmes dynamiques aléatoires, le théorème ergodique d'Oseledets nous fournit des outils qui sont similaires à ceux de l'algèbre linéaire pour les systèmes dynamiques classiques. En particulier, on a pu étudier la stabilité de ces systèmes à l'aide du plus grand exposant de Lyapunov qui donne le taux de (dé-)croissance du système dynamique sous-jacent.

La taille et la complexité des modèles considérés (et ceci malgré les réductions de modèle effectuées) ne nous a pas permis d'obtenir des expressions analytiques pour le plus grand exposant de Lyapunov. Néanmoins, il est possible de l'approcher par simulation numérique en construisant des trajectoires du processus solution de l'EDA. Comme les trajectoires du bruit sont suffisamment régulières, des méthodes classiques d'intégration numérique peuvent être utilisées. Dans ce travail, on a utilisé la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 qui est très utilisée en aéroélasticité. Cependant, afin d'éviter des problèmes numériques lors des simulations de trajectoires qui (dé-)croissent exponentiellement, on a du utiliser un schéma récursif proposé par Talay.

Les méthodes développées ont été appliquées à un profil bidimensionnel d'aile d'avion ainsi qu'à un modèle simplifié d'avion civil gros-porteur. Dans la modélisation du profil bidimensionnel, une non-linéarité (représentant un jeu dans la liaison aile-gouverne) a également été prise en compte par le moyen d'un ressort non linéaire. On a pu constater que le bruit aléatoire influence la valeur critique du paramètre qui s'abaisse à mesure que l'intensité du bruit augmente. Pour des intensités de turbulence très importantes (et donc peu réalistes), le système peut même devenir instable pour toute la gamme des valeurs du paramètre. Cependant, la longueur de corrélation de la turbulence longitudinale ne semble pas avoir une influence sur la stabilité. Ceci devra être vérifié pour d'autres configurations. D'autre part, il semble que de très faibles intensités de turbulence peuvent apporter un effet stabilisateur au système aéroélastique. Dans le cas du profil bidimensionnel, on a pu observer que le bruit additif empêche l'occurrence d'une bifurcation et, par conséquent, l'apparition d'oscillations de cycles limites.

Dans une deuxième partie de la thèse, on a cherché à mieux représenter le jeu par une non-régularité, en l'occurrence une contrainte géométrique pour certains ddl. Dans ce cadre, on a modélisé les structures aéroélastiques tri-dimensionnelles avec jeu par des

systèmes dynamiques non réguliers en faisant intervenir les méthodes de la mécanique du contact. On a présenté une méthode de sous-structuration qui permet d'isoler les degrés de liberté non réguliers sujets à des contacts. Le problème de contact a pu ensuite être formulé selon la théorie introduite par Moreau au début des années 80 et dont la discrétisation nous a fourni un algorithme numérique efficace avec un pas de temps constant. Une maquette représentant une non-linéarité de jeu a été testée à l'ONERA. Nous avons appliqué les algorithmes développés ici à un modèle aux éléments finis recalé sur cette maquette.

En ce qui concerne l'algorithme utilisé pour l'intégration temporelle, il faut remarquer que sa précision peut être insuffisante pour un pas de temps trop grossier. Pour y remédier, on pourrait envisager d'utiliser le schéma de Runge Kutta d'ordre 4 pour l'intégration entre les temps d'impact où le système a un comportement régulier. Pour le système avec contraintes, la stabilité n'est pas globale comme elle l'est pour le problème régulier (autonome). Le comportement (asymptotique) du système dépend en effet de la condition initiale, c'est-à-dire de l'écart par rapport à l'équilibre. En particulier, si le système nominal (sans contraintes géométriques) est stable, alors le système soumis à des non-régularités est stable seulement si l'écart par rapport à la solution zéro est très petit.

Perspectives pour de futures recherches On peut, à partir de ce travail, suggérer trois développements possibles pour de futures recherches:

La modélisation des forces aérodynamiques proposée ici pourrait être améliorée par un développement de méthodes de réduction du modèle aérodynamique, plus spécialement dédiées au problème avec turbulence atmosphérique. Afin d'alimenter ces futurs modèles, il serait opportun d'effectuer des calculs CFD pour un fluide avec turbulence dans l'écoulement amont. Une meilleure compréhension pourrait également être obtenue à l'aide d'essais en soufflerie de ces configurations.

Il serait intéressant d'étudier les probabilités de dépassement d'un seuil d'amplitude de réponse structurale, car même si le système dynamique aléatoire modélisant le problème avec excitation multiplicative est stable, il peut y avoir des amplitudes importantes et problématiques avant que la réponse ne tende, à long terme, vers la solution zéro. Par ailleurs, il serait important de pouvoir estimer un intervalle de confiance pour les approximations du plus grand exposant de Lyapunov. Ceci permettrait de mieux connaître la durée de simulation nécessaire pour une précision souhaitée.

Enfin, l'étude du problème de stabilité avec non-régularité structurale pourrait être plus approfondie. Nous avons proposé une méthode de modélisation pour ce problème mais le comportement asymptotique de la réponse du modèle avec jeu dépend de la condition initiale. Ainsi, la stabilité n'est pas globale et l'information qu'on peut tirer des simulations ne permet pas de conclusion générale quant à la stabilité du système.

ANNEXE

Annexe A

Systèmes dynamiques déterministes

Soit l'équation différentielle ordinaire non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \in \mathbb{R}^d, \; x(0) = x_0, \tag{A.1}$$

où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application C^1 définie sur $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour chaque $x_0 \in \mathcal{O}$, l'équation (A.1) admet une unique solution $\phi(t, x_0)$ telle que $\phi(0, x_0) = x_0$. L'application $(t, x) \to \phi(t, x)$ est appelée le flot associé à l'équation (A.1) ou au champ de vecteurs f. L'application $\phi(t, x)$ vérifie alors la propriété bien connue

$$\phi(t + s) = \phi(s, \phi(t)) \doteq \phi(s) \circ \phi(t),$$

avec la notation $\phi(t) \doteq \phi(t, \cdot)$. On appelle point fixe ou point d'équilibre de l'équation (A.1) tout point $\overline{x}$ dans $\mathcal{O}$ vérifiant $f(\overline{x}) = 0$. Bien évidemment, tout point d'équilibre vérifie $\phi(t, \bar{x}) = \bar{x}$, d'où le terme point fixe.

A.1 Stabilité de systèmes linéaires

Considérons d'abord le cas d'un système dynamique linéaire:

$$\dot{x} = A\,x \in \mathbb{R}^d, \; x(0) = x_0. \tag{A.2}$$

La solution du système différentiel (A.2) est donnée par $x(t, x_0) = e^{At}x_0$, où l'exponentielle de matrice e^{At} est appelée matrice fondamentale ou encore résolvante de l'équation (A.2). Les sous-espaces propres E_i de l'opérateur linéaire A définissent les sous-espaces invariants du flot $\phi = e^{At}$. Il existe trois types de sous-espaces

- **le sous-espace stable** E^s engendré par les vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres à partie réelle strictement négative,

- **le sous-espace centré** E^c engendré par les vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres à partie réelle nulle,
- **le sous-espace instable** E^u engendré par les vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres à partie réelle strictement positive.

Ces sous-espaces sont tels que

$$\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^c \oplus E^u.$$

Si la valeur initiale se trouve dans le sous-espace stable E^s, alors la solution restera dans E^s et l'amplitude de la réponse décroît exponentiellement. Si la trajectoire s'initie dans le sous-espace instable E^u, elle croît exponentiellement. Les solutions se trouvant dans E^c oscillent à amplitude constante ou restent constantes si la partie imaginaire de la valeur propre est également nulle.

Ainsi, le système linéaire est stable si toutes les parties réelles des valeurs propres sont négatives.

A.2 Stabilité de systèmes dynamiques non linéaires

Soit $Df(x) = [\partial f_i/\partial x_j]$, $i, j = \{1, \dots, d\}$, la matrice jacobienne de f au point x. Le théorème de Grobman-Hartman permet l'étude de la stabilité des solutions de l'équation (A.1) dans un voisinage du point fixe $\bar{x}$. Il dit que, si le système linéarisé autour du point fixe $\bar{x}$ est stable, alors le système non linéaire est également stable dans un voisinage du point fixe.

Théorème 7 (Théorème de Grobman-Hartman). *Si $Df(\overline{x})$ n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle (on dit aussi que le point fixe est hyperbolique), alors il existe un homéomorphisme h défini dans un voisinage de $\overline{x}$ tel que le flot $h \circ \phi_t$, ϕ étant le flot non linéaire, prenne localement les mêmes trajectoires que le flot linéaire $e^{Df(\overline{x})t}$. Par ailleurs, h peut être choisi de façon que le sens de la paramétrisation en temps des trajectoires soit préservé.*

On parle de théorème de Grobman-Hartman local s'il existe un homéomorphisme h de $\mathbb{R}^d$ comme ci-dessus dans un voisinage U_T de $\overline{x}$ pour tout $x \in U_T$ et $|t| \leq T$, $T > 0$.

Annexe B

Processus de Wiener

Soit le processus de Wiener normalisé $W(t)$, défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indexé sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. $W(t)$ est un processus gaussien, du second ordre, centré, à trajectoires continues p.s. De plus, il vérifie les propriétés suivantes:

- les processus $(W_1(t), \ldots, W_d(t))$ sont indépendants dans leur ensemble
- $W(0) = 0$ p.s.
- pour tout $0 \leq t \leq t'$, l'accroissement $\Delta W_{t,t'} = W_{t'} - W_t$ est une v.a. gaussienne, centrée, de covariance $R_{\Delta W_{t,t'}} = E\big(\Delta W_{t,t'} \Delta W_{t,t'}^T\big) = (t' - t)I$
- ses accroissements $\Delta W_{t,t'}$ sont indépendants et stationnaires

Par ailleurs, la dérivée au sens des processus généralisés du processus de Wiener normalisé est le bruit blanc gaussien normalisé $\dot{W} = N_\infty$.

Annexe C

Calcul de l'exposant de Lyapunov par projection sur l'hypersphère

On se place maintenant dans le cadre de l'analyse stochastique d'équations différentielles stochastiques ou aléatoires. Les développements décrits dans ce paragraphe permettent, d'une part, d'obtenir des résultats sur l'existence et l'unicité de l'exposant de Lyapunov, et d'autre part, ils permettent d'aboutir à une formule analytique pour le calcul du plus grand exposant de Lyapunov d'équations linéaires. L'idée de Khasminskii [56] était d'exprimer la solution de l'EDS à l'aide de coordonnées polaires car seule la partie radiale est nécessaire pour décrire l'évolution de la norme des solutions et c'est elle qui détermine le plus grand exposant de Lyapunov. Furstenberg a abouti à la même formulation dans ses travaux concernant les produits de matrices aléatoires [44].

On note $x_t \doteq x_t(\omega, x_0) \in \mathbb{R}^d$ les trajectoires solution d'une EDA donnée par l'équation (4.3). La projection de la solution sur l'hypersphère $\mathcal{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d | \ \|x\| = 1\}$ (en dimension deux c'est le cercle unité), permet d'étudier le comportement radial et angulaire indépendamment. En posant $s(t) = x_t/\|x_t\| \in \mathcal{S}^{d-1}$, $s_0 = x_0/\|x_0\|$ et $r(t) = \|x_t\| \in \mathbb{R}^+$, $r_0 = \|x_0\|$, on obtient les équations suivantes pour le cas de l'excitation par bruit réel:

$$\begin{aligned} \dot{s_t} &= h(A(\xi_t), s_t), \\ \dot{r_t} &= q(A(\xi_t), s_t)\, r_t, \\ \text{avec} \quad h(\xi, s) &= A\, s - q(\xi, s) s \quad \text{et} \quad q(\xi, s) = s^T A(\xi) s. \end{aligned}$$

Le processus radial est alors donné par

$$r = \|x_t\| = \|x_0\| \exp\Big[\int_0^t q\big(\xi_\tau, s_\tau\big)\, d\tau\Big]. \tag{C.1}$$

Enfin, à l'aide de (C.1), il est possible d'exprimer l'exposant de Lyapunov comme suit:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} log\|x_t(\omega, x_0)\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q\big(\xi_\tau, s_\tau(s_0)\big)\, d\tau. \tag{C.2}$$

S'il existe une unique loi de probabilité stationnaire pour la diffusion (s_t, ξ_t) sur $\mathcal{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^m$ il est possible de remplacer la moyenne en temps par une moyenne en probabilité. Arnold, Klieman et Oeljeklaus [10] ont montré qu'il existe une unique mesure invariante si la dimension de l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $h(\xi, \cdot)$ au point s est maximale:

$$(H1) \qquad \dim \mathrm{LA}\big(h(\xi, \cdot), \xi \in \mathbb{R}^m\big)(s) = d - 1 \quad \forall s \in \mathcal{S}^{d-1}.$$

Ici, $\mathrm{LA}\, h(s)$ désigne l'algèbre de Lie engendrée par le champ de vecteur h au point s. Cette condition est généralement vérifiée dans les cas pratiques, et notamment les problèmes issus de la mécanique.

Dans ce cas, le processus $Z_t = \big(s_t, \xi_t\big),\ t \geq 0$ est solution de l'EDS d'Itô non linéaire mais autonome $dZ_t = G(Z_t)dt + Q\, dW_t, \quad Z(t_0) = Z_0$ telle que

$$dZ_t = \begin{pmatrix} A(\xi_t) + (A(\xi_t)s, s) & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix} Z_t dt + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_0 \end{pmatrix} dW_t.$$

C'est un processus de diffusion homogène et gaussien si Z_0 suit une loi normale ou est constant. Le processus Z_t sera stationnaire si une mesure invariante existe. Son générateur est donné par $\mathcal{L} = G + h^T \frac{\partial}{\partial s}$ où G est le générateur de ξ (voir annexe D).

Si le processus ξ est ergodique, non dégénéré et si, de plus, la condition (H1) est vérifiée, l'opérateur $\mathcal{L}$, qui est le générateur de la diffusion $Z_t = (s_t, \xi_t)$, est hypoelliptique et par conséquent, pour toute mesure invariante, il existe une loi de probabilité continue et régulière. En outre, afin d'assurer l'unicité, il est nécessaire de travailler désormais sur l'espace projectif $\mathcal{P}$ de $\mathcal{S}^{d-1}$ obtenu en identifiant $+s$ et $-s$.

Théorème 8 (formule de Furstenberg-Khasminskii (bruit coloré)). *S'il existe une unique mesure de probabilité (stationnaire) ρ pour le processus (s_t, ξ_t) sur $\mathcal{P} \times \mathbb{R}^m$, on a, avec probabilité 1, $\lambda(x_0) = \lambda_{max}$ et on peut écrire:*

$$\lambda_{max} = \int_{\mathcal{P}\times\mathbb{R}^m} q(A(\xi), s)\, d\rho \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \tag{C.3}$$

Ainsi, on peut écrire pour le plus grand exposant de Lyapunov:

$$\lambda_{max} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \|x_t(\omega, x_0)\|.$$

Néanmoins, l'application efficace de la formule de Furstenberg Khaminskii se limite à des problèmes de petite taille car il est nécessaire de connaître la loi de probabilité ρ ce qui n'est généralement pas le cas. En effet, cette loi est solution de l'équation

de Fokker-Planck (EFP), qui, mis à part quelques cas très particuliers, doit être résolue numériquement, ce qui est envisageable uniquement sur $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, le coût de l'évaluation numérique de l'expression $q(A(\xi), s)$ est en général trop élevé. Cependant, pour des cas très particuliers, la formule de Furstenberg-Khasminskii pour une excitation par bruit blanc a pu être utilisée comme point de départ pour des études asymptotiques de λ_{max} avec petit bruit, par exemple [103] [113].

Remarque 12 (Régularité et ergodicité de ξ). *Considérons le processus ξ solution de l'EDS* (3.14) *modélisant la composante longitudinale de la turbulence atmosphérique (chapitre §3.5). Il est possible de calculer sa densité.*

En effet, pour notre cas, l'équation de Fokker-Planck (définie par équation D.5) stationnaire s'écrit

$$\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} p - (q_0 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + q_1 + q_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}) p - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial {\xi_2}^2} p = 0.$$

On vérifie que

$$p(\xi) = p(\xi_1, \xi_2) = N \exp(-\xi_1^2 q_0 q_1 - \xi_2^2 q_1)$$

est solution de cette équation, avec constante de normalisation N. Par ailleurs, on peut montrer que le générateur G est hypoelliptique car l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs $\big(\xi_2,\ (-q_0\xi_2 - q_1\xi_2)\big)$ et $(0,1)$ est maximale (il n'est pas elliptique puisque Q_0 est dégénérée), par conséquent toutes les solutions $G^*p = 0$ sont C^∞. Kliemann [57] a montré qu'une autre mesure C^∞ ne peut pas coexister avec une mesure positive partout. Le processus ξ est ergodique et régulier (et donc non dégénéré) et, avec les notations de §3.5, le processus modélisant la turbulence est donné par $\eta(t) = R_0\, \xi_1(t)$.

Le processus ξ étant gaussien et stationnaire, l'ergodicité peut être déduite également de la forme de la fonction d'autocorrélation.

Annexe D

Équations différentielles stochastiques

De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, on considère des équations du type suivant:

$$dX_t = f(X_t, t)dt + B(X_t, t)dW_t \ , \qquad X_{t_0} = X_0, \tag{D.1}$$

où dW_t est la différentielle du processus de Wiener (ou mouvement brownien). Le processus de Wiener n'étant pas différentiable, l'expression (D.1) doit plutôt être interprétée au sens d'une équation intégrale, à savoir:

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} f(X_t, t)\, dt + \int_{t_0}^{t} B(X_t, t)\, dW_t, \qquad t_0 \leq t \leq T.$$

Néanmoins, il reste à construire l'intégrale par rapport à $dW(t)$ afin de donner un sens à l'expression

$$\int_{t_0}^{t} B(X_t, t)dW_t.$$

En effet, les trajectoires du processus de Wiener étant p.s. à variations non bornées sur un intervalle fini, c'est-à-dire qu'elles sont de longueur infinie, il n'est pas possible de définir l'intégrale par rapport à $dW(t)$ comme une intégrale de Riemann-Stieltjes. La construction de cette intégrale est due à Itô:

Définition de l'intégrale stochastique d'Itô Soit W_t, $t \geq 0$, un processus de Wiener unidimensionnel sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ où $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, est la suite de tribus engendrée par W_t, une suite de sous-tribus de $\mathcal{B}$. Soit $(H(t))_{t\geq 0} \in \mathbb{R}$ un processus $\mathcal{F}_t$ adapté, c'est-à-dire que pour tout t, $H(t)$ est mesurable par rapport à la filtration engendré par $(W_s)_{s\leq t}$. L'intégrale stochastique $\left(\int_0^t H(t)\, dW_t\right)_{0\leq t\leq T}$ est

définie dès que, pour tout $t \geq 0$, $\int_0^T H(s)^2\, ds < +\infty$, P-p.s.

Définition. *Soit une partition de* $[t_0, T]$ *tel que* $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ *et* $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n}(t_i - t_{i-1})$. *On appelle intégrale stochastique au sens d'Itô la limite dans* $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ *des suites* $\sum_{i=1}^n H(t_{i-1})\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big)$ *quand* n *tend vers l'infini:*

$$\int_{t_0}^T H(t) dW(t) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^n H(t_{i-1})\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big).$$

Remarque 13. *Une autre définition possible de l'intégrale stochastique est due à Stratonovich:*

La suite de v.a. $\sum_{i=1}^n 1/2\big(H(t_i) + H(t_{i-1})\big)\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big)$ *converge en probabilité vers une limite appelée intégrale stochastique de Stratonovich. Ainsi, on peut écrire:*

$$\int_{t_0}^T H(t) \circ dW(t) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^n \frac{H(t_i) + H(t_{i-1})}{2}\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big).$$

De manière équivalente, on note la différentielle au sens de Stratanovich par $H(t) \circ dW(t)$.

Remarquons également que la valeur de l'intégrale change quand on considère la moyenne entre le point à gauche et le point à droite, comme c'est fait ici, au lieu de considérer le point à gauche. Par contre, l'intégrale de Stratanovich présente des avantages du point de vue du calcul différentiel, voir aussi l'annexe D.5 pour plus d'informations sur les EDS au sens de Stratonovich et d'Itô et notamment la relation entre les deux.

D.1 Définition de l'équation différentielle stochastique d'Itô

Soit W_t, $t \geq 0$, un processus de Wiener m-dimensionnel sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ où $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, est la suite de tribus engendrée par W_t, une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On introduit le processus d-dimensionnel X_t, solution de

$$X_t = X_0 + \int_{t_0}^t f(X_t, t)\, dt + \int_{t_0}^t B(X_t, t)\, dW_t, \qquad t_0 \leq t \leq T, \tag{D.2}$$

où f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et B à valeurs dans $Mat_{\mathbb{R}}(d, m)$.

Une solution de l'équation (D.2), X_t, $t_0 \leq t \leq T$, est un processus continu p.s. et tel que:

- Les accroissements du processus de Wiener W_t, $t_0 \leq t \leq T$, et la v.a. X_0 (la valeur initiale) sont indépendants.

- X_t , $f(X_t,t)$ et $B(X_t,t)$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurables pour $t_0 \leq t \leq T$, (c'est-à-dire qu'ils sont non-anticipants).
- Les fonctions $f(X_t,t)$ et $B(X_t,t)$ sont telles que, avec probablité 1, $\int_{t_0}^T |f(X_t,t)|\,dt < +\infty$ et $\int_{t_0}^T |B(X_t,t)|^2\,dt < +\infty$.

On peut écrire (D.2) sous forme d'équation différentielle stochastique

$$dX_t = f(X_t,t)dt + B(X_t,t)dW_t\ , \qquad X_{t_0} = X_0. \tag{D.3}$$

L'existence et l'unicité de la solution de (D.3) pour sont vérifiées si f et B satisfont les conditions de Lipschitz et sont bornées (voir, par exemple, la référence [2] pour plus de détails).

D.2 Solution stationnaire d'une EDS linéaire autonome

Soit l'équation différentielle stochastique d'Itô linéaire

$$dX_t = (AX_t + a(t))dt + BdW_t\ , \qquad X_{t_0} = X_0, \tag{D.4}$$

dont la solution X_t sur $[t_0,T]$ est donnée par

$$X_t = \Phi(t)\Big(X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}a(s)\,ds\ +\ \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}B\,dW_s\Big).$$

La matrice résolvante $\Phi(t)$ de l'équation homogène avec $a(t) \equiv 0$ vérifie $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ avec $\Phi(t_0) = I$ et $\phi(t) = e^{A\,(t-t_0)}$.

Soit $a(t) \equiv 0$. La solution de (D.4) est un processus gaussien stationnaire si les valeurs propres de A sont à parties réelles négatives et si X_0 suit une loi gaussienne avec $\mathbb{E}X_0 = 0$ et $\mathbb{E}X_0X_0^T = C_0$. La covariance pour $t = t_0$, C_0, est solution de l'équation de Riccatti:

$$AC_0 + C_0A^T = -BB^T.$$

Elle est donnée par

$$C_0 = \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\,dt.$$

Par ailleurs, on a

$$\mathbb{E}X_{t+u}X_t^T = C(u) = \begin{cases} e^{Au}C_0\,, & u \geq 0, \\ C_0e^{A^Tu}\,, & u \leq 0. \end{cases}$$

C'est à dire que, pour obtenir une solution stationnaire, il faut prendre, pour X_0, un vecteur aléatoire dont la loi de probabilité est invariante pour l'EDS et qui, de plus, soit indépendant de W_t, $\forall t \geq 0$.

D.3 La solution comme processus de Markov

Une propriété importante des solutions des EDS d'Itô réside dans le fait que, sous conditions d'existence et d'unicité, ce sont des processus de Markov. Heuristiquement, le processus X_t possède la propriété de Markov s'il est sans mémoire, c'est-à-dire qu'à l'instant s, la connaissance que l'on a du processus $X(t)$, pour $t > s$, n'augmente pas si l'on rajoute des observations du processus à des instants quelconques du passé. Si (D.3) satisfait les conditions d'existence et d'unicité, alors la solution X_t est un processus de Markov dont la distribution de probabilité initiale (à l'instant t_0) est la distribution de X_0 et dont la probabilité de transition est donnée par

$$P(s, x, t, B) = P(X_t \in B | X_s = x) = P[X_t(s, x) \in B]$$

où $X_t(s, x)$ est solution de (D.2) avec $X_s = x$.

Dans le cas d'une EDS linéaire avec une valeur initiale X_0 gaussienne ou constante, X_t est un processus de Markov gaussien. Si l'équation (D.3) est autonome, c'est-à-dire $f(t, X_t) = f(X_t)$ et $B(t, X_t) = B(X_t)$, alors la solution X_t est un processus de Markov homogène avec probabilité de transition stationnaire telle que $P[X_t(t_0, x) \in B] = P(t - t_0, x, B)$.

Un processus de Markov est stationnaire si et seulement s'il existe une mesure de probabilité stationnaire ρ, invariante par rapport à $P(t, x, dy)$ et telle que

$$\rho(dy) = \rho_t(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t, x, dy)\rho(dx), \quad \forall t > 0.$$

La mesure (ou densité) de probabilité ρ est alors indépendante de la variable temps. Si ρ admet une densité $p(x)dx = \rho(dx)$ et si la loi de probabilité de x_0 est $p_0(x) = p(x)$, alors $X(t)$ est un processus de Markov homogène stationnaire. Si, par contre, la loi de probabilité de la valeur initiale $p(t_0, x) = \rho_0(x)$ est quelconque, alors $X(t)$ tend, en probabilité et pour $t \to +\infty$, vers un processus stationnaire $X_{st}(t)$ et l'on a $p(x) = \lim_{t\to\infty} \rho(t, x)$.

D.4 La solution comme processus de diffusion et équation de Fokker-Planck

Sous conditions d'existence et d'unicité et si f et B sont des fonctions continues par rapport à la variable t ou si l'EDS est autonome, alors la solution X_t est un processus de diffusion avec matrice de diffusion $\sigma(t, x) = B(t, x)B(t, x)^T$ et vecteur dérive $f(x, t)$. Aussi, $p(x, t)$ vérifie l'équation de Fokker-Planck avec la condition de normalisation $\int_{\mathbb{R}^d} p(x)dx = 1$.

L'EFP pour le processus de diffusion s'écrit:

$$\partial_t p + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{x_i}(f_i(t,x)\,p) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i x_j}(\sigma_{ij}(t,x)\,p) = 0. \tag{D.5}$$

Par ailleurs, on a la condition initiale pour $t \to s$ par valeurs supérieures:

$$\lim_{t \downarrow s} p(s,x,t,y) = \delta(y-x).$$

Dans le cas stationnaire on a $\partial_t p = 0$ et on peut écrire pour (D.5) $G^* p = 0$. L'opérateur adjoint G est appelé le générateur du processus $X(t)$:

$$G = \sum_{i=1}^{d} f_i(t,x)\frac{\partial}{x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i x_j}.$$

D.5 Relation entre l'EDS d'Itô et l'EDS de Stratonovich

Si l'excitation d'une équation différentielle est un bruit blanc (processus de Wiener), alors l'équation différentielle doit être interprétée au sens d'Itô.

Néanmoins, en général, les processus modélisant les phénomènes de la physique sont des processus d'énergie finie et à trajectoires régulières. L'excitation réelle n'est pas un bruit blanc mais ce qu'on appelle un bruit coloré (on dit aussi bruit réel). L'équation différentielle peut alors être traitée au sens des équations différentielles ordinaires: pour ω fixé, l'équation différentielle peut être résolue trajectoire par trajectoire comme une EDO non-autonome et on parle d'équations différentielles aléatoires EDA.

On peut montrer que (sous certaines conditions) si on approche le bruit blanc par un processus suffisamment régulier (un processus delta corrélé avec covariance $C(t)$, par exemple) alors on peut écrire l'équation différentielle sous forme classique et celle-ci tend vers une EDS au sens de Stratanovich quand on fait tendre l'excitation vers le bruit blanc [2]. C'est pour cette raison que, pour des modélisations de phénomènes physiques avec une excitation large bande, on simplifie souvent le problème en utilisant une formulation au sens de Stratanovich.

Il existe une formule qui relie l'EDS au sens de Stratonovich à celle au sens d'Itô. En effet, l'équation différentielle de Stratonovich

$$dX_t = f(t,X_t)dt + B(t,X_t) \circ dW_t\,, \quad X_{t_0} = X_0,$$

correspond à l'EDS au sens d'Itô suivante:

$$dX_t = \tilde{f}(t,X_t)dt + B(t,X_t)dW_t,\,, \quad X_{t_0} = X_0, \tag{D.6}$$

$$\text{avec} \quad \tilde{f}_i(t, X_t) = f_i(t, X_t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial X_k} [B(t, X_t)]_{ij} \; [B(t, X_t)]_{kj},$$

où $i \in \{1, \dots, d\}$.

L'EDS de Stratonovich peut être traitée comme une équation différentielle au sens ordinaire mais on ne dispose plus des outils du calcul d'Itô. Cependant, il est possible de ramener l'EDS au sens de Stratonovich à une EDS d'Itô par la relation (D.6). Si B est une matrice constante telle que $B(t, X_t) \equiv B$, alors l'EDS au sens d'Itô et celle au sens de Stratonovich coïncident.

Annexe E

Estimateur de la densité spectrale

Afin d'étudier la solution d'une EDS (voir chapitre 5), on a été amené à construire un estimateur de la densité spectrale S_x des trajectoires issues de la simulation numérique des trajectoires. Dans ce qui suit, la construction de ces estimateurs est décrite.

On suppose que la mesure spectrale matricielle du processus vectoriel $X(t)$ admet une densité $\omega \to S_x(\omega) : \mathbb{R} \to Mat_{\mathbb{C}}(d,d)$ qui est à support compact $\Sigma_L = [-\omega_L, \omega_L]$ avec $\omega_L > 0$. Le théorème de Shannon indique comment il faut échantillonner la coordonnée t d'un processus stationnaire afin d'obtenir sa représentation discrète: $\Delta_t = \pi/\omega_L$. Les bornes du domaine temporel sur lequel on échantillonne sont données par la discrétisation temporelle et on note $T_L = [0,T]$ où $T = N_T \Delta_t$. Par conséquent, le pas de fréquence est donné par $\Delta_\omega = 2\omega_L/N_T$.

On appelle K le nombre de simulations de trajectoires réalisées. La durée des signaux étant finie, on utilise une fenêtre temporelle naturelle définie par

$$W_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathbf{1}_{[0,T]}(t)$$

où $\mathbf{1}_{[0,T]}$ est la fonction indicatrice sur l'intervalle de temps T. C'est une fenêtre temporelle d'énergie normalisée. Pour tout $l, j \in \{1, \dots, d\}$ et pour tout $\omega \in \Sigma_L$ l'estimateur $S_{lj}^{K,T}(\omega)$ de la densité spectrale $[S_x(\omega)]_{lj}$ est donné par

$$\begin{aligned} S_{lj}^{K,T}(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \hat{X}_l^k(\omega) \overline{\hat{X}_j^k(\omega)}, \quad k = \{1, \dots, K\}, \\ \text{avec} \quad \hat{X}_j^k(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T X_j^k(t)\, e^{i\,\omega,t}\, dt. \end{aligned}$$

Cet estimateur est biaisé, car en effet

$$\mathbb{E}(S_{lj}^{K,T}(\omega)) = ([S_x(\omega)]_{lj} * G_T)(\omega),$$

où $*$ désigne le produit de convolution, mais il est asymptotiquement sans biais

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(S_{lj}^{K,T}(\omega)) = [S_x(\omega)]_{lj}.$$

En effet, le biais est dû à l'utilisation de la fenêtre temporelle

$$G_T = \frac{1}{2\pi}|\hat{W}_T(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi}|\int_0^T \frac{1}{\sqrt{(T)}} e^{i\omega t}|^2,$$

pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [101].

Par ailleurs, afin de pouvoir utiliser un algorithme de transformée de Fourier rapide, on utilise une subdivision à pas constant pour chaque coordonnée vérifiant $N_T = 2^M$.

Bibliographie

[1] Albano, E. et Rodden, W. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flow. *AIAA-Journal*, **7**(2), 279–285 (1969).

[2] Arnold, L. *Stochastic differential equations: Theory and applications*. Wiley, New York (1974).

[3] Arnold, L. A formula connecting sample stability and moment stability of linear stochastic systems. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **44**(4), 793–802 (1984).

[4] Arnold, L. Lyapunov exponents of nonlinear differential stochastic systems. Dans *Nonlinear stochastic dynamic engineering systems*, edité par F. Ziegler et G. Schueller, IUTAM Symposium Innsbruck/Igls, Austria, pages 181–201. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1988).

[5] Arnold, L. *Random dynamical systems*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1998).

[6] Arnold, L. Recent progress in stochastic bifurcation theory. Dans *IUTAM Symposium on Nonlinearity and Stochastic Structural Dynamics 1999 (Madras India)*, edité par S.Narayanan et R.N.Iyengar, pages 15–27. Kluwer, Dordrecht (2001).

[7] Arnold, L., Bleckert, G. et Schenk-Hoppé, K. The stochastic Brusselator: parametric noise destroys Hopf bifurcation. Dans *Stochastic Dynamics*, edité par H. Crauel et M. Gundlach, pages 71–90. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1999).

[8] Arnold, L. et Boxler, P. Additive noise turns a hyperbolic fixed point into a stationary solution. Dans *Lyapunov exponents. Proceedings, Oberwolfach 1990*, edité par L. Arnold, H. Crauel et J.-P. Eckmann, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1486, pages 159–164. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1991).

[9] Arnold, L. et Kedai, X. Invariant measures for random dynamical systems, and a necessary condition for stochastic bifurcation from a fixed point. *Random and Computational Dynamics*, **2**(2), 165–182 (1994).

[10] Arnold, L., Kliemann, W. et Oeljeklaus, E. Lyapunov exponent of linear stochastic systems. Dans *Lyapunov exponents*, edité par L. Arnold et V. Wihs-

tutz, Lecture Notes in Mathematics 1186, pages 85–159. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1984).

[11] Arnold, L., Oeljeklaus, E. et Pardoux, E. Almost sure and moment stability for linear Itô equations. Dans *Lyapunov exponents*, edité par L. Arnold et V. Wihstutz, Lecture Notes in Mathematics 1186, pages 85–159. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1984).

[12] Arnold, L., Sri Namachchivaya, N. et Schenk-Hoppé, K. R. Towards an understanding of stochastic Hopf bifurcation: A case study. *Int J. Bifurcation and Chaos*, **6**(11), 1947–1975 (1996).

[13] Bae, J.-S., Inman, D. et Lee, I. Effects of structural nonlinearity on subsonic aeroelastic characteristics of an aircraft wing with control surface. *Journal of Fluids and Structures*, **19**, 747–763 (2004).

[14] Ballard, P. The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints. *Archive Rational Mech.*, **154**, 199–274 (2000).

[15] Bathe, K. et Bouzinov, P. On the constraint function method for contact problems. *Computers & Structures*, **64**(5), 1069–1085 (1997).

[16] Bathe, K.-J. et Wilson, E. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice Hall, New York (1976).

[17] Bauchau, O. A., Rodriguez, J. et Bottasso, C. L. Modeling of unilateral contact conditions with application to aerospace systems involving backlash, freeplay and friction. *Mechanics Research Communications*, **28**(5), 571–599 (2001).

[18] Berggren, D. Investigation of limit cycle oscillations for a wing section with nonlinear stiffness. *Aerospace Science and Technology*, **8**, 27–34 (2004).

[19] Bernard, P. et Bonnemoy, C. An algorithm for spectral factorization using random search techniques. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **4**(2), 66–73 (1989).

[20] Bernard, P., Fogli, M., Bressolette, P. et Lemaire, M. Un algorithme de simulation stochastique par markovianisation approchée, application à la mécanique aléatoire. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, **3**(6), 905–950 (1984).

[21] Bhattacharya, R. On the functional central limit theorem and the law of the iterated logarithm for Markov processes. *Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete*, **60**, 185–201 (1982).

[22] Boxler, P. A stochastic version of center manifold theory. *Probability Theory and Realted Fields*, **83**, 509–545 (1989).

[23] Boxler, P. Lyapunov exponents indicate stability and detect stochastic bifurcations. Dans *Probabilistic methods in applied physics*, edité par P. Krée et W. Wedig, Lecture Notes in Physics, pages 97–119. Springer Verlag, Heidelberg (1995).

[24] Boxler, P. Stochastic center as a tool in a stochastic bifurcation theory. Dans *Probabilistic methods in applied physics*, edité par P. Krée et W. Wedig, Lecture Notes in Physics, pages 149–166. Springer Verlag, Heidelberg (1995).

[25] Breitbach, E. Effects of structural nonlinearities on aircraft vibration and flutter. Rap. tech. 665, NATO AGARD (1978).

[26] Brogliato, B. *Nonsmooth Mechanics. Models, Dynamics and Control*. Springer Verlag, London (1999).

[27] Brogliato, B. Absolute stability and the Lagrange-Dirichlet theorem with monotone multivalued mappings. *Systems & Control Letters*, **51**, 343–353 (2004).

[28] Bucher, C. et Lin, Y. Effect of spanwise correlation of turbulence field on the motion stability of long-span bridges. *Journal of Fluids and Structures*, **2**, 437–451 (1988).

[29] Bucher, C. et Lin, Y. Stochastic stability of bridges considering coupled modes. *Journal of Engineering Mechanics*, **114**(12), 2055–2071 (1988).

[30] Castanier, M. et Pierre, C. Lyapunov exponents and localization phenomena in multi-coupled nearly-periodic systems. *J. Sound and Vibration*, **183**(3), 493–515 (1995).

[31] Coddington, E. et Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. 8th edition, McGraw-Hill, New Delhi (1985).

[32] Cowan, T., Arena, A. et Gupta, K. Accelerating computational fluid dynamics based aeroelastic predictions using system identification. *J. Aircraft*, **38**(1), 81–87 (2001).

[33] Craig, R. et Bampton, M. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, **6**(7), 1313–1319 (1968).

[34] Dautry, R. et Lions, J.-L. *Mathematical analysis and numerical methods for science and engineering*. Springer Verlag (1992).

[35] Dellnitz, M. et Hohmann, A. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors. *Numer. Math.*, **75**, 293–317 (1997).

[36] Dimitrijevic, Z. *Détermination des bifurcations de Hopf et des cycles limites d'une structure non linéaire soumise à un écoulement transsonique d'un fluide parfait*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris (2000).

[37] Dimitrijevic, Z., Mortchelewicz, G. et Poirion, F. Nonlinear dynamics of a two dimensional airfoil with freeplay in an inviscid compressible flow. *Aerospace Science and Technology*, **4**, 125–133 (2000).

[38] Doedel, E. Lecture notes on numerical analysis of bifurcation problems. pub/doedel/doc/hamburg.ps.Z (1997).

[39] Dowell, E., Edwards, J. et Strganac, T. Nonlinear aeroelasticity. *J. Aircraft*, **40**(5), 857–873 (2003).

[40] Dowell, E., Thomas, J. et Hall, K. Transsonic limit cycle oscillation analysis using reduced order aerodynamic models. *J. Fluids and Structures*, **19**, 17–27 (2004).

[41] Doyle, M., Sri Namachchivaya, N. et van Roessel, H. Asymptotic stability of structural systems based on Lyapunov exponents and moment Lyapunov exponents. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **32**(4), 681–692 (1997).

[42] Duflo, M. *Algorithmes stochastiques*. Springer (1996).

[43] Fung, Y. *An introduction to the theory of aeroelasticity*. Wiley, New York (1955).

[44] Furstenberg, H. Noncommuting random products. *Trans. Am. Math. Soc.*, **108**, 377–428 (1963).

[45] Gérardin, M. et Rixen, D. *Théorie des vibrations*. Masson, Paris (1993).

[46] Germain, P. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson, Paris (1973).

[47] Grisval, J., Meurzec, J. et Poirion, F. Numerical method for the response of an aircraft to the atmospheric turbulence. Application to the Nord 260 airplane. Dans *Proceedings of the European Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, pages 351–357. DGLR (1989).

[48] Grorud, A. et Talay, D. Approximation of Lyapunov exponents of nonlinear stochastic differential equations. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **56**(2), 627–650 (1996).

[49] Guckenheimer, J. et Holmes, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1983).

[50] Horsthemke, W. et Lefever, R. *Noise-induced transitions*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1984).

[51] Houbolt, J. C. Atmospheric turbulence. *AIAA Journal*, **11**(4), 421–437 (1973).

[52] Hurmuzlu, Y. An energy based coefficient of restitution for planar impacts of slender bars with massive external forces. *ASME J. Appl. Mech.*, **65**, 952–962 (1998).

[53] Jean, M. The non-smooth contact dynamics method. *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, **177**, 235–257 (1999).

[54] Karpel, M. Design for active flutter supression and gust alleviating using state-space unsteady aeroelastic modelling. *Journal of Aircraft*, **19**(3), 221–227 (1982).

[55] Keller, H. et Ochs, G. Numerical approximation of random attractors. Dans *Stochastic Dynamics*, edité par H. Crauel et M. Gundlach, pages 93–114. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1999).

[56] Khasminskii, R. Necessary and sufficiant conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems. *Theory Probability Appl.*, **12**, 144–147 (1967).

[57] Kliemann, W. et Colonius, F. Ergodic theory of stochastic flows. Dans *Diffusion processes and related problems in analysis, volume II: Stochastic flows*, edité par M. A. Pinsky et V. Wihstutz, pages 203–239. Birkhauser, Boston, Basel, Berlin (1992).

[58] Kloeden, P. E. et Platen, E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1992).

[59] Kousen, K. et Bendiksen, O. Limit cycle phenomena in computational transsonic aeroelasticity. *J. of Aircraft*, **31**(6), 1257–1263 (1994).

[60] Kree, P. et Soize, C. *Mathematics of Random Phenomena*. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland (1986).

[61] Kunze, M. et Küpper, T. Nonsmooth dynamical systems: An overview. Dans *Ergodic Theory, Analysis, and Efficient Simulation of Dynamical systems*, edité par B. Fiedler, pages 431–452. Springer Verlag, Berlin, New York (2001).

[62] Kunze, M. et Monteiro Marques, M. An introduction to Moreau's sweeping process. Dans *Impacts in Mechanical Systems, Analysis and Modelling*, edité par B. Brogliato, pages 1–60. Springer Verlag, Berlin (2000).

[63] Küssner, H. Schwingungen von Flugzeugflügeln. *Luftfahrtforschung*, **4** (1929).

[64] Lee, B., Price, S. et Wong, Y. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos. *Progress in Aerospace Sciences*, **35**, 205–334 (1999).

[65] Li, Q. et Lin, Y. New stochastic theory for bridge stability in turbulent flow II. *Journal of Engineering Mechanics*, **121**(1), 102–116 (1995).

[66] Lin, Y. et Ariaratnam, S. Stability of bridge motion in turbulent winds. *Journal of Structural Mechanics*, **8**(1), 1–15 (1988).

[67] Liu, L., Wong, Y. et Lee, B. Application of the centre manifold theory in non-linear aeroelasticity. *Journal of Sound and Vibration*, **234**(4), 641–659 (2000).

[68] Lucia, D. et Silva, P. B. W. Reduced-order models: new approaches for computational physics. *Progress in Aerospace Science*, **40**(1), 51–117 (2004).

[69] Mabrouk, M. A unified variational model for the dynamics of perfect unilateral constraints. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **17**, 819–842 (1998).

[70] Monteiro Marques, M. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems. Shocks and dry friction*. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin (1993).

[71] Moreau, J. Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série II*, **296**, 1473–1476 (1983).

[72] Moreau, J. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. Dans *Nonsmooth mechanics and Applications*, edité par J. Moreau et P. Panagiotopoulus, tm. 302 de *CISM Courses and Lectures*, pages 1–82. Springer Verlag, Wien, New York (1988).

[73] Moreau, J. Numerical aspects of the sweeping process. *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, **177**, 329–349 (1999).

[74] Mortchelewicz, G. Application of the linearized Euler equations to flutter. *85th AGARD SMP Meeting, Aalborg (Denmark)* (1997).

[75] Mortchelewicz, G. et Daudois, L. Limit cycle analysis of a structure in an inviscid compressible flow in presence of freeplay nonlinearities. *42nd Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, Haifa (Israel)* (2002).

[76] Most, T., Bucher, C. et Schorling, Y. Dynamic stability analysis of nonlinear structures with geometrical imperfections under random loading. *J. of Sound and Vibration*, **276**(1-2), 381–400 (2004).

[77] Oseledets, V. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Mathematical Society*, **19**, 197–231 (1968).

[78] Paoli, L. et Schatzmann, M. Dynamics of an impacting bar. Dans *Proceedings of ECCM'99* (1999).

[79] Paoli, L. et Schatzmann, M. Penalty approximation for dynamical systems submitted to multiple non-smooth constraints. *Multibody System dynamics*, **8**(3), 345–364 (2002).

[80] Pardoux, E. et Talay, D. Stability of linear differential systems with parametric excitation. Dans *Nonlinear stochastic dynamic engineering systems*, edité par F. Ziegler et G. Schueller, IUTAM Symposium Innsbruck/Igls, Austria, pages 153–168. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1988).

[81] Peters, D., Karunamoorthy, S., Cao, W. et He, C. Finite state induced flow models. Part I and II. *Journal of Aircraft*, **32**(2), 313–333 (1995).

[82] Pironneau, O. et Bardos, C. Petites perturbations et équations d'Euler pour l'aéroélasticité. *Mathematical Modelling And Numerical Analysis*, **28**(4), 463–407 (1994).

[83] Poirel, D. et Price, S. Post-instability of a structurally nonlinear airfoil in longitudinal turbulence. *Journal of Aircraft*, **34**(5), 619–626 (1997).

[84] Poirel, D. et Price, S. Structurally nonlinear fluttering airfoil in turbulent flow. *AIAA Journal*, **39**(10), 1960–1968 (2001).

[85] Poirel, D. et Price, S. Response probability structure of a structurally nonlinear fluttering airfoil in turbulent flow. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **18**, 185–202 (2003).

[86] Poirion, F. Modélisation et prise en compte des incertitudes dans les modèles numériques de prévision des instabilités aéroélastiques. *La Recherche Aérospatiale*, **1**(6), 31–41 (1992).

[87] Poirion, F. Modélisation temporelle des systèmes aéroélastiques. Application à l'étude des rétards. *La Recherche Aérospatiale*, (2), 103–114 (1995).

[88] Poirion, F. On some stochastic methods applied to aeroservoelasticity. *Aerospace Science and Technology*, (4), 201–214 (2000).

[89] Poirion, F. et Angelini, J. Vibrations aléatoires avec contraintes: Modélisation et résolution numérique dans le cas d'une gouverne. *La Recherche Aérospatiale*, (6), 385–394 (1985).

[90] Poirion, F. et Zentner, I. Nonsmooth dynamics of aeroelastic systems featuring a freeplay nonlinearity. *International Journal of Non-Linear Mechanics* (submitted 2005).

[91] Price, S., Alighanbari, H. et Lee, B. The aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with bilinear and cubic structural nonlinearities. *Journal of Fluids and Structures*, **9**, 175–193 (1995).

[92] Roger, K. Airplane math modeling methods for active control design. structural aspects of active controls. Rap. tech. CP 228, AGARD (1977).

[93] Roos, R. et Zwaan, R. Calculation of instationary pressure distributions and generalized aerodynamic forces with the doublet-lattice method. Rap. tech. TR 72037 U, NLR, Amsterdam, Netherlands (1972).

[94] Ruelle, D. *Chaotic evolution and strange attractors: the statistical analysis of time series for deterministic nonlinear systems*. Cambridge University Press (1989).

[95] Scanlan, R. et Tomko, J. Airfoil and bridge deck flutter derivatives. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **97**(EM6), 1717–1737 (1971).

[96] Schatzmann, M. Uniqueness and continuous dependance on data for one dimensional impact problems. *Nonl. Analysis, Theory, Methods & Applications*, **2**, 355–373 (1998).

[97] Schenk-Hoppé, K. R. Bifurcation scenarios of the noisy Duffing-van der Pol oscillator. *Nonlinear Dynamics*, **11**, 255–274 (1996).

[98] Schenk-Hoppé, K. R. Stochastic Hopf bifurcation: An example. *Int J. Non-Linear Mechanics*, **31**(5), 685–692 (1996).

[99] Seifried, R., Schiehlen, W. et Eberhardt, P. Numerical and experimental evaluation of the coefficient of restitution for repeated impacts. *Int. J. Impact Engineering*, (article in press) (2005).

[100] Silva, W. Application of nonlinear systems theory to unsteady transonic aerodynamic responses. *J. Aircraft*, **30**(5), 660–668 (1993).

[101] Soize, C. *Méthodes Mathématiques en Analyse du Signal*. Masson, Paris (1993).

[102] Sri Namachcchivaya, N., Roessel, H. V. et Doyle, M. Moment Lyapunov exponents for two coupled oscillators driven by real noise. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **56**(5), 1400–1423 (1996).

[103] Sri Namachchivaya, N. et Vedula, L. Stabilization of linear systems by noise: application to flow induced oscillations. *Dynamics and Stability of Systems*, **15**(2), 185–208 (2000).

[104] Talay, D. Approximation of upper Lyapunov exponents of bilinear stochastic differential systems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **28**(4), 1141–1164 (1991).

[105] Tang, D., Dowell, E. et Virgin, L. Limit cycle behaviour of an airfoil with a control surface. *J. of Fluids and Structures*, **12**(7), 839–858 (1998).

[106] Theodorsen, T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. Rap. tech. 496, NACA report (1934).

[107] van der Wall, B. et Leishmann, J. On the influence of time-varying flow velocity on unsteady aerodynamics. *Journal of the American Helicopter Society*, **39**(4), 25–36 (1994).

[108] Vidyasagar, M. *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, New Jersey (1978).

[109] Viguier, P. Wind tunnel test of a non-linear flutter model. Dans *Proceedings of IFASD'03*. CD-ROM (2003).

[110] Wagner, H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. *Math. Mech.* (1925).

[111] Wanner, T. Linearization of random dynamical systems. Dans *Dynamics reported*, edité par C. Jones, U. Kirchgraber et H. Walther, tm. 4, pages 203–269. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1995).

[112] Wolf, A., Swift, J., Swinney, H. et Vastano, A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, **16**, 285–317 (1985).

[113] Xie, W.-C. Moment Lyapunov exponents of a two-dimensional system under bounded noise parametric excitation. *J. Sound and Vibration*, **263**(3), 593–616 (2003).

[114] Xie, W.-C. et Ariaratnam, S. Vibration mode localization in disordered cyclic structures I et II. *J. Sound and Vibration*, **189**(5), 625–660 (1996).

[115] Zeeman, E. Stability of dynamical systems. *Nonlinearity*, **1**, 115–155 (1988).

[116] Zentner, I. *Modélisation de la turbulence atmosphérique: Application aux éoliennes.*. ONERA (2002). Rapport de stage de DEA.

[117] Zentner, I. et Poirion, F. Stochastic stability of fluid-structure coupled systems with multiplicative and additive noise: Application to airfoil flutter. Dans *Proceedings of the Fourth Conference on Engineering Computational Technology, Lisbonne*. Civil-Comp Press, CD-ROM (2004).

[118] Zentner, I. et Poirion, F. Flutter stability of aircraft subjected to random fluctuations of the flow velocity. Dans *Proceedings of IFASD'05, Munich*. CD-ROM (2005).

[119] Zentner, I. et Poirion, F. Stability of aircraft in turbulent flow based on the theory of random dynamical systems. Dans *Proceedings of Icossar'05, Rome*. CD-ROM (2005).

[120] Zienkiewicz, O. et Taylor, R. *The finite element method*. 4th edition, McGraw-Hill (1989).