



HAL
open science

Quelques relations entre propriétés algébriques des groupes de transformation et géométrie des espaces

Fabio Zuddas

► **To cite this version:**

Fabio Zuddas. Quelques relations entre propriétés algébriques des groupes de transformation et géométrie des espaces. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00011158

HAL Id: tel-00011158

<https://theses.hal.science/tel-00011158>

Submitted on 7 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)

préparée en cotutelle: à l'Institut Fourier et au Dipartimento di Matematica,
Laboratoire de mathématiques Università degli Studi di Cagliari
UMR 5582 CNRS - UJF Via Ospedale 72, 09124

QUELQUES RELATIONS ENTRE
PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES
GROUPE DE TRANSFORMATIONS ET
GÉOMÉTRIE DES ESPACES

Fabio ZUDDAS

Soutenue à Grenoble le 20 octobre 2005 devant le jury:

Giuseppina D'AMBRA (Professeur, Université de Cagliari), Co-directeur
Pierre DE LA HARPE (Professeur, Université de Genève), Rapporteur, Président du jury.
Louis FUNAR (Chargé de Recherches au CNRS, Institut Fourier de Grenoble)
Damien GABORIAU (Directeur de Recherches au CNRS, E.N.S. de Lyon)
Sylvestre GALLOT (Professeur, Université de Grenoble), Co-directeur
Stefano MARCHIAFAVA (Professeur, Université de Rome), Rapporteur

Au vu des rapports de Pierre DE LA HARPE et Stefano MARCHIAFAVA

Avertissement

Le présent texte est la version française abrégée de la thèse ; il est suivi de la version complète, rédigée en italien. Nous l'avons organisé en suivant la même division en chapitres et en essayant de rappeler tous les résultats contenus dans la version italienne complète. En ce qui concerne les preuves, cette version française ne contient que les schémas des preuves des résultats les plus importants, le lecteur étant renvoyé à la version italienne pour le détail de ces preuves.

Table des matières

Introduction	5
1 Le lemme classique de Margulis et une généralisation	9
2 Une version du lemme de Margulis où les hypothèses sont algébriques	20
3 Quelques résultats de finitude pour les groupes dont l'entropie algébrique est majorée	27
4 Un lemme de Margulis pour les quasi-isométries	38
VERSION ITALIENNE COMPLETE	45
5 Il Lemma classico di Margulis e una sua generalizzazione	48
5.1 Rivestimenti e gruppi di lacci di lunghezza limitata	48
5.2 Il Lemma di Margulis	55
5.3 Una generalizzazione del Lemma di Margulis	67
5.4 Qualche risultato nuovo	78
6 Una definizione algebrica della δ-non abelianità	104
6.1 Nuovi esempi	104
6.2 I prodotti amalgamati	107
6.3 I gruppi iperbolici	111
6.4 Il caso dei limiti di gruppi	115
7 Alcuni risultati di finitezza per gruppi con entropia algebrica limitata	122
8 Un lemma di Margulis per quasi isometrie	140
8.1 Presentazione dei risultati	140

A	Generatori, relazioni e grafo di Cayley	150
B	Azioni di gruppo e presentazioni	155
C	Entropia di gruppi	162
	Bibliographie	175

Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu Giuseppina D'Ambra et Sylvestre Galot, qui m'ont introduit à la recherche avec patience et pleine disponibilité. L'enrichissement professionnel que je leur dois n'a pas de prix, et déjà la possibilité de travailler en cotutelle qu'ils m'ont accordé est une chance énorme que je souhaite à tous ceux qui veulent élargir leur horizons scientifiques, culturels et personnels.

Je remercie sincèrement Pierre De La Harpe et Stefano Marchiafava qui ont accepté d'écrire un rapport sur cette thèse, et également Louis Funar et Damien Gaboriau qui me font l'honneur de prendre part au jury de cette soutenance.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les collègues et au personnel scientifique et administratif du Dipartimento di Matematica de l'Université de Cagliari et de l'Institut J. Fourier de Grenoble qui ont plus ou moins consciemment contribué à cette thèse. Sans les citer tous, je ne peux pas ne pas mentionner Andrea Loi, Fabrizio Cuccu, Enrico Tolis, Bertrand Remy, Anne Parreau, Gerard Besson, Christophe Champetier, Michael Marchand.

Je tiens aussi à remercier Etienne Ghys, pour l'attention qu'il a dédiée à ma note publiée aux CRAS, et Andrea Sambusetti pour les discussions stimulantes sur les aspects algébriques de mon travail.

Ma famille a donné à cette thèse la contribution plus invisible, mais qui dans un sens est sans doute la plus grande. On peut considérer ce travail comme le dernier moment d'un grand parcours de croissance sur lequel mes parents m'ont guidé dans les premiers pas, avec beaucoup de sacrifices matériels et spirituels. Un merci immense à eux et à ma soeur.

Enfin, je remercie Dina. Malgré la distance qui nous sépare, son pensée n'a jamais cessée de me faire compagnie.

Introduction

Une des versions du célèbre lemme de Margulis assure que, si X est une variété riemannienne n -dimensionnelle complète de courbure sectionnelle négative et supérieure ou égale à -1 , alors il existe une constante réelle positive $\varepsilon_0(n)$ telle que, pour tout $x \in X$, le sous-groupe du groupe fondamental de X engendré par les lacets de point base x et de longueur inférieure à $\varepsilon_0(n)$, est presque-nilpotent.

Si nous décomposons la variété en une partie “mince” (i.e. l’ensemble des points où le rayon d’injectivité est plus petit que $\varepsilon_0(n)/2$) et une partie “épaisse” (i.e. le complémentaire de la partie mince), le résultat de Margulis entraîne que les composantes connexes de la partie mince sont topologiquement simples, alors qu’une méthode inspirée des théorèmes classiques de finitude de J. Cheeger et M. Gromov limite à un nombre fini les types topologiques possibles de la partie épaisse (cf. [A-C], page 267).

Sous l’hypothèse que la courbure sectionnelle K vérifie $-1 \leq K < 0$, si le diamètre de la variété est majoré par une constante positive D , on démontre que la partie mince est vide parce que, dans ce cas, il existe une constante universelle $\varepsilon(n, D)$ qui minore le rayon d’injectivité de la variété en chaque point¹ et les théorèmes de finitude s’appliquent alors à la variété toute entière ([B-K], page 28).

G. Margulis a également proposé une lecture plus “dynamique” du lemme ci-dessus, à savoir une version valable pour les actions discrètes et sans points fixes de groupes d’isométries sur les variétés simplement connexes de courbure négative bornée (ou, plus généralement, de courbure bornée et n’admettant pas de petits lacets géodésiques homotopes à zéro). Le lemme de Margulis apparaît, dans cette dernière version, comme un pas fondamental dans la recherche des liens entre les propriétés algébriques intrinsèques des groupes et les propriétés géométriques de leurs actions sur un certain type

¹Ici, l’hypothèse de courbure *strictement* négative (qui entraîne, entre autres, l’existence et l’unicité de la géodésique invariante de toute transformation de revêtement et le théorème de Preissman) est nécessaire, comme on le voit en considérant la famille des tores plats $(\mathbb{T}^n, \varepsilon^2 g)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, g étant la métrique plate canonique.

d'espaces. Un travail récent de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot ([B-C-G]) exploite ce point de vue de manière systématique en élargissant la classe des espaces sur lesquels le lemme de Margulis est vérifié, plus précisément, dans la version de [B-C-G], on n'a plus besoin de supposer la courbure négative, ni même bornée, cette dernière hypothèse étant remplacée par une borne d'un invariant de la géométrie globale de la variété : l'*entropie*² (par "invariant de la géométrie globale" nous entendons un invariant qui, à la différence de la courbure, est quasiment insensible à des fortes variations de la géométrie - et même de la topologie - locale de la variété). En courbure sectionnelle négative, l'entropie (telle que nous l'avons définie) a une signification dynamique car elle coïncide avec l'entropie topologique du flot géodésique sur le fibré tangent unitaire (dans le cas général de courbure quelconque, l'entropie telle que nous l'avons définie est un minorant de l'entropie topologique). Une autre conséquence de la quasi-insensibilité de l'entropie aux variations locales de la géométrie est qu'on peut généraliser cette notion aux espaces métriques et que, à certaines conditions, lorsqu'une suite de variétés a pour limite (au sens de Gromov-Hausdorff) un espace métrique, l'entropie de ce dernier est la limite des entropies des variétés de la suite (cf [Re], page 138).

Nous avons vu que la borne supérieure de l'entropie remplace la borne inférieure de la courbure sectionnelle, en revanche l'hypothèse sur le signe de celle-ci est remplacée par l'hypothèse (purement algébrique) que le groupe d'isométries donné a des propriétés similaires à celles des groupes fondamentaux des variétés de courbure strictement négative, en un sens précisé par la notion, essentielle dans [B-C-G], de *groupe δ -non abélien* (définition 1.0.1) à laquelle s'ajoute, dans certaines des applications, l'hypothèse de *transitivité de la commutation* (définie dans la note du pied de la page 14).

Dans le premier chapitre nous donnons un exposé du lemme de Margulis sous sa forme classique, puis sous sa forme généralisée par G. Besson, G. Courtois et S. Gallot. Nous étendons le résultat principal de [B-C-G] à des actions qui peuvent avoir des points fixes, et donnons des résultats de [B-C-G] des versions quantitativement améliorées (Théorème 1.0.4), de manière à les rendre optimales dans le cas de ce qu'on appelle les "groupes de surfaces". Les travaux de G. Besson, G. Courtois, S. Gallot généralisent également aux variétés d'entropie majorée (et aux espaces métriques) la décomposition de Margulis en parties minces et partie épaisse. Une relecture de ce résultat permet une description géométrique plus complète des parties minces : toute boule géodésique de rayon $\sim C \cdot \text{Log}(\frac{1}{\varepsilon})$, centrée en un point de la partie

²L'entropie mesure le taux asymptotique de croissance exponentielle de la mesure des grandes boules du revêtement universel riemannien de la variété considérée. En particulier deux espaces qui admettent un revêtement riemannien commun ont la même entropie.

mince où le rayon d’injectivité vaut ε , est isométrique à la boule de même rayon, tracée sur le cylindre obtenu en quotientant le revêtement universel par un groupe d’isométries isomorphe à \mathbb{Z} (proposition 1.0.7).

Dans [B-C-G], l’hypothèse de δ -non abélianité est utilisée pour prouver que, si deux éléments quelconques γ_1 et γ_2 ne commutent pas, alors un des deux semi-groupes engendrés par $\{\gamma_1^N, \gamma_2^N\}$ et $\{\gamma_1^N, \gamma_2^{-N}\}$ (où $N = [4/\delta]$) est libre (propriété que nous appellerons $FSG(N)$ dans la suite), le point important étant que le calcul de N ne dépend que de δ et pas du groupe Γ considéré.

Dans le chapitre 2, nous nous affranchissons de la ressemblance entre les groupes discrets Γ considérés et les groupes fondamentaux de variétés compactes de courbure strictement négative en remplaçant l’hypothèse de “ δ -non abélianité” par l’hypothèse $FSG(N)$; une simple relecture de [B-C-G] montre que cette hypothèse suffit pour prouver le lemme de Margulis généralisé (à la façon de [B-C-G]). Les corollaires de ce lemme donnés dans [B-C-G] sont plus difficiles à obtenir et nécessitent (pour un certain nombre d’entre eux) l’introduction de deux nouvelles hypothèses algébriques³ (hypothèse NAS et hypothèse dite “de transitivité de la commutation”).

Nous montrons que cette généralisation n’est pas vide en donnant une liste d’exemples de groupes Γ qui ne sont généralement pas δ -non abéliens, mais qui vérifient cependant la propriété $FSG(N)$ (pour une valeur de N indépendante de Γ) : produits libres et amalgamés, limites de groupes et groupes hyperboliques selon Gromov. En restreignant légèrement cette liste, nous montrons que ces groupes vérifient aussi la propriété NAS et de transitivité de la commutation.

Le lemme de Margulis généralisé et ses corollaires sont donc encore valables pour toute action discrète d’un groupe de la liste ci-dessus sur un espace métrique d’entropie majorée. Ceci nous amène, dans le chapitre 3, à reformuler et à généraliser les résultats de [B-C-G] de manière à contenir ce type de groupes. Comme corollaires, nous obtenons des théorèmes de finitude pour certaines catégories de groupes discrets (une première version abrégée de ces résultats a fait l’objet de la note [Z1]). Plus précisément, étant donné un groupe G de type fini et un système fini S de générateurs, on associe au couple (G, S) un espace métrique : le graphe de Cayley $\mathbb{C}(G, S)$, sur lequel G et (plus généralement) ses sous-groupes Γ agissent par isométries, de manière discrète et sans point fixe. La version du lemme de Margulis établie au chapitre 2 étant valable dans le cadre des espaces métriques, nous pouvons l’appliquer à l’ac-

³Ces deux hypothèses sont automatiquement vérifiées dans le cas des groupes fondamentaux de variétés compactes de courbure sectionnelle négative considérés dans [B-C-G]. N’étant plus automatiques pour les groupes généraux que nous considérons ici, il faut les ajouter.

tion de Γ sur $\mathbb{C}(G, S)$, à condition de supposer que Γ vérifie les hypothèses algébriques étudiées au chapitre 2 (hypothèses $FSG(N)$, NAS et de transitivité de la commutation) et que l'entropie algébrique de G relativement à S est bornée. On obtient ainsi une borne a priori sur le nombre d'éléments de S , qui entraîne des théorèmes de finitude (corollaire 3.0.19, corollaire 3.0.21, corollaire 3.0.22, corollaire 3.0.23, théorème 3.0.25, corollaire 3.0.26) pour les classes de groupes marqués vérifiant les hypothèses ci-dessus et dont chaque élément (G, S) admet au moins une présentation $\langle S, R \rangle$ où les relations de base $r \in R$ sont de longueurs bornées (par exemple les groupes hyperboliques selon Gromov, ou les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes). Convenablement reformulés, ces théorèmes apportent un nouvel éclairage à la conjecture qui porte sur l'existence éventuelle d'une minoration universelle de l'entropie algébrique des groupes hyperboliques non élémentaires, cette conjecture étant (dans le cas des groupes hyperboliques) une variante plus forte d'une autre conjecture, attribuée à M. Gromov (chez lequel elle ne figure que sous forme de question, voir [G-L-P]), qui demande si l'entropie algébrique d'un groupe à croissance exponentielle est strictement positive. Notons que J. Wilson a donné à cette dernière question une réponse négative dans le cas général ([Wi]); cependant, la variante de cette conjecture que nous en proposons ici est justifiée par le fait que la réponse à la question originelle de M. Gromov est positive dans le cas des groupes hyperboliques non élémentaires ([Ko]).

Dans le Chapitre 4 les résultats de [B-C-G] et ceux du chapitre 2 sont étendus à des quasi-actions par quasi-isométries (théorème 4.0.29). Une quasi-action (par quasi-isométries) d'un groupe sur un espace X est la donnée d'une application ρ du groupe dans l'ensemble des quasi-isométries de X telle que la distance entre $\rho(\gamma_1\gamma_2)(x)$ et $\rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2)(x)$ soit bornée indépendamment de x . Les quasi-actions apparaissent naturellement lorsqu'on considère des quasi-isométries entre groupes et espaces métriques, et elles sont l'instrument clef dans la preuve de résultats récents de rigidité quasi-isométrique dus entre autres à B. Farb, M. Kapovich, P. Pansu.

Des développements et applications des résultats du Chapitre 4 sont le sujet d'étude dans un travail en cours d'exécution.

Chapitre 1

Le lemme classique de Margulis et une généralisation

Une des versions du lemme de Margulis classique affirme que, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), *il existe une constante* $\varepsilon_0(n) > 0$ *telle que, pour toute variété riemannienne* n -*dimensionnelle* (M^n, g) *dont la courbure sectionnelle* K *vérifie* $-K_0^2 \leq K \leq 0$, *le sous-groupe* $\Pi_\varepsilon(x)$ *de* $\pi_1(M, x)$, *engendré par les lacets de point-base* $x \in M^n$ *et de longueur strictement inférieure à* ε , *est presque-nilpotent dès que* $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)/K_0$.

Le lemme de Margulis se démontre en considérant l'action canonique du groupe fondamental $\Gamma \simeq \pi_1(M, x)$ sur le revêtement universel riemannien (\tilde{M}, \tilde{g}) de (M, g) . Il signifie que les hypothèses faites sur la géométrie de l'espace (\tilde{M}, \tilde{g}) sur lequel le groupe Γ agit imposent des restrictions algébriques fortes sur Γ , i.e. que, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}$, le sous-groupe engendré par l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(\tilde{x}, \gamma\tilde{x}) < \varepsilon$ est presque-nilpotent.

La preuve du lemme de Margulis n'utilise pas réellement l'hypothèse de négativité de la courbure sectionnelle, qu'on peut remplacer par l'absence dans (\tilde{M}, \tilde{g}) de lacets géodésiques de longueur inférieure à une constante positive L fixée a priori. En revanche l'hypothèse de courbure sectionnelle bornée (en valeur absolue) par K_0^2 intervient de manière déterminante.

Dans certains des corollaires du lemme de Margulis (existence d'un point où le rayon d'injectivité est minoré par $\varepsilon_0(n)/K_0$ par exemple) on demande que la courbure sectionnelle soit *strictement* négative, ce qui entraîne l'existence et unicité (pour tout $\gamma \in \Gamma$ hyperbolique) de la géodésique γ -invariante dans (\tilde{M}, \tilde{g}) , mais cette hypothèse n'est réellement utilisée qu'à travers ses conséquences sur les propriétés algébriques du groupe Γ , parmi lesquelles la propriété de transitivité de la relation de commutation sur $\Gamma \setminus \{e\}$ et la non-existence de sous-groupe normal abélien non trivial dans Γ (propriété NAS).

Cette remarque est à l'origine du programme de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, qui vise à réduire au minimum les hypothèses faites sur la géométrie de l'espace sur lequel le groupe agit et à remplacer les autres hypothèses géométriques par des hypothèses purement algébriques faites sur le groupe Γ . L'avantage d'un tel programme est évident, car sa conséquence serait que, si une variété (M_0, g_0) est à courbure $-K_0^2 \leq K < 0$, alors toute variété M de groupe fondamental semblable vérifie la propriété de Margulis et ses corollaires pour toute métrique g sur M d'entropie bornée, sans restriction sur la courbure de g . Une étape importante dans ce sens a été établie par G. Besson, G. Courtois et S. Gallot, qui ont prouvé une version du lemme de Margulis valable sans aucune hypothèse sur la courbure, où l'hypothèse $K \geq -K_0^2$ est remplacée par celle, beaucoup plus faible, d'entropie bornée.

Si (X, d) est un espace métrique et si μ est une mesure borélienne positive sur X (i.e. telle que les ouverts de la topologie induite par d soient mesurables), et si, pour tout $R > 0$ et tout $x \in X$, on note $B(x, R)$ la boule de (X, d) de point-base x et de rayon R , l'entropie de (X, d, μ) est définie par l'égalité $\text{Ent}(X, d, \mu) = \liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[\mu(B(x, R))]}{R}$ (elle ne dépend pas du choix de $x \in X$). Dans la suite, (X, d, μ) sera appelé *espace métrique mesuré*.

Si (M, g) est une variété riemannienne, son entropie (volumique) est définie comme l'entropie de l'espace métrique mesuré $(\tilde{M}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$, où $d_{\tilde{g}}$ et $dv_{\tilde{g}}$ sont respectivement la distance et la forme de volume induites par la métrique riemannienne \tilde{g} sur \tilde{M} relevée de la métrique g .

Le lemme de Margulis et ses conséquences restent valables pour les variétés dont le groupe fondamental a les propriétés algébriques typiques des groupes fondamentaux des variétés de courbure strictement négative. La définition suivante, introduite dans [B-C-G], précise cette idée.

Définition 1.0.1. *Soit Γ un groupe finiment engendré et soit $\delta > 0$. On dit que Γ est δ -non abélien s'il est non abélien et si, pour chaque couple d'éléments $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ qui ne commutent pas, il existe une variété riemannienne compacte connexe X , de courbure sectionnelle $K \leq -1$ et de rayon d'injectivité $\text{inj}(X) \geq \delta$, et un morphisme ρ du sous-groupe engendré par γ_1 et γ_2 dans le groupe fondamental $\pi_1(X)$, tel que $\rho(\gamma_1)$ et $\rho(\gamma_2)$ ne commutent pas.*

Tous les groupes fondamentaux des surfaces compactes orientables (à l'exception de \mathbb{S}^2 et \mathbb{T}^2) sont δ -non abéliens avec $\delta = \text{Arg ch}(2)$. D'autres exemples de groupes δ -non abéliens sont donnés par les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes X qui satisfont $K \leq -1$ et $\text{inj}(X) \geq \delta$ (les groupes que [B-C-G] appelle δ -épais); par les produits directs de groupes δ -non abéliens; par les produits directs d'un groupe δ -non abélien par un groupe

abélien (voir 1.3, 1.4, 1.5 dans [B-C-G]). Remarquons que, pour toute variété compacte X qui admet une métrique g de courbure sectionnelle $K_g < 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que le groupe $\Gamma = \pi_1(X)$ soit δ -épais (donc δ -non abélien). En effet, la compacité assure que $K_g \leq -a^2 < 0$ et, en remplaçant g par $g_0 = a^2 \cdot g$, on obtient $K_{g_0} \leq -1$, donc Γ est δ -épais avec $\delta = \text{inj}(g_0)$. Le défaut de cette estimation est évidemment de ne pas être universelle, puisque δ dépend alors de X .

Rappelons que, si Γ est un groupe qui agit sur un ensemble X , pour tout $x \in X$, l'orbite de x est l'ensemble $\Gamma \cdot x = \{y \in X \mid y = \gamma \cdot x \text{ pour au moins un } \gamma \in \Gamma\}$ et le stabilisateur de x est le sous-groupe $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x = x\}$. Si Γ est un groupe qui agit sur un espace métrique (Y, d) , étant donné un point $y \in Y$ et un réel $\varepsilon > 0$, nous noterons $\Gamma_\varepsilon(y)$ le sous-groupe de Γ engendré par les $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(y, \gamma \cdot y) < \varepsilon$.

Si Γ est un groupe qui agit sur un espace métrique mesuré (Y, d, μ) , on dira que Γ agit par isométries si tout $\gamma \in \Gamma$ préserve simultanément la distance d et la mesure μ . Le théorème principal de [B-C-G] est le suivant :

Théorème 1.0.2. ([B-C-G], théorème 2.1) *Soient δ et H des nombres réels positifs. Soit (Y, d, μ) un espace métrique mesuré dont l'entropie est majorée par H et dont les boules de rayon positif sont de mesure non nulle, soit Γ un groupe δ -non abélien qui agit par isométries sur (Y, d, μ) et $y \in Y$ un point dont le stabilisateur est trivial et l'orbite discrète. On a alors $\text{Ent}(Y, d, \mu) > 0$; de plus,*

- (i) *si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ sont deux éléments qui ne commutent pas, on a $\max\{d(y, \gamma_1 \cdot y), d(y, \gamma_2 \cdot y)\} \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$. En particulier, $\Gamma_\varepsilon(y)$ est abélien pour tout $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$;*
- (ii) *Pour tout $\eta > 0$, si $d(y, \gamma_1 \cdot y) \leq \eta$, alors tout élément γ_2 de Γ qui ne commute pas avec γ_1 satisfait*

$$d(y, \gamma_2 \cdot y) \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{1}{H\eta} \right).$$

Si de plus (Y, d) est un espace de longueur connexe et si le centre de Γ est nul, les inégalités suivantes (iii) et (iv) sont valables :

- (iii) $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(y, \gamma \cdot y) \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{1}{H} e^{-2\frac{4+\delta}{\delta} HD}$ pour tout majorant D de $D(y) = \sup_{z \in Y} d(\Gamma \cdot y, \Gamma \cdot z)$.
- (iv) $\text{Ent}(Y, d, \mu) \sup_{z \in Y} d(\Gamma \cdot y, z) \geq \frac{\delta \text{Log}2}{8+2\delta}$.

Remarques.

- a) Conformément à ce que nous avons annoncé ci-dessus, la seule hypothèse faite sur la géométrie de l'espace métrique (Y, d) (à l'exception de la non nullité du volume des boules, automatique dans certains cas, par exemple dans le cas des variétés) est d'être d'entropie bornée.
- b) Pour toute variété riemannienne compacte (M, g) , le groupe $\Gamma = \text{Aut}(\tilde{M})$ des automorphismes du revêtement universel $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ de M agit sur (\tilde{M}, \tilde{g}) par isométries, sans points fixes et toutes ses orbites sont discrètes.

Alors, si Γ est δ -non abélien pour un $\delta > 0$, le point (i) du théorème 1.0.2 affirme que, pour tout $\tilde{y} \in \tilde{M}$, le sous-groupe $\Gamma_\varepsilon(\tilde{y})$ engendré par les $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y}) < \varepsilon$ est abélien pour tout ε inférieur ou égal à une certaine valeur qui dépend seulement de δ et de l'entropie $\text{Ent}(\tilde{M}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$ de l'espace métrique mesuré $(\tilde{M}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$.

Remarquons que le groupe $\Gamma_\varepsilon(\tilde{y})$ dont il est question dans le théorème 1.0.2 s'identifie dans ce cas au sous-groupe $\Pi_\varepsilon(y)$ (engendré par les lacets de point-base y et de longueur inférieure à ε) concerné par l'énoncé du lemme de Margulis classique.¹

Au sens strict du terme, le théorème 1.0.2 n'est pas une généralisation du lemme de Margulis classique : en effet, en dimension 3 par exemple, il existe des suites $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de variétés riemanniennes compactes telles que leurs courbures sectionnelles K_{g_n} restent strictement négatives et bornées (i.e. $-K_0^2 \leq K_{g_n} < 0$) et dont le rayon d'injectivité global $\text{inj}(g_n)$ tend vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$. Pour chaque valeur de n , le groupe fondamental de M_n est δ_n -non abélien, mais la valeur de δ_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Le lemme de Margulis classique assure alors qu'il existe un ε fixé tel que $\Pi_\varepsilon(x_n)$ soit nilpotent dans chacun des groupes $\pi_1(M_n)$ (et pour chaque point $x_n \in M_n$), alors que le théorème 1.0.2 n'assure le même résultat que pour un nombre fini de valeurs de n .

En revanche, si on fixe la variété compacte M et si celle-ci a un groupe fondamental δ -non abélien, le lemme de Margulis classique (tel qu'il est rappelé ci-dessus) n'assure la propriété " $\Pi_\varepsilon(x)$ est virtuellement abélien" que pour l'ensemble (éventuellement vide) des métriques g sur M dont la courbure sectionnelle vérifie $\frac{-\varepsilon_0(n)^2}{\varepsilon^2} \leq K_g \leq 0$, alors que le théorème 1.0.2 assure la même propriété pour toute métrique g sur

¹Rappelons que, une fois fixé un point $\tilde{y} \in \tilde{M}$, on définit un automorphisme de groupes $\phi_{\tilde{y}} : \text{Aut}(\tilde{M}) \rightarrow \pi_1(M, y)$, où $y = \pi(\tilde{y})$ (pour tout $g \in \text{Aut}(\tilde{M})$, $\phi_{\tilde{y}}(g)$ est la classe du lacet $\pi \circ \tilde{c}$, où \tilde{c} est un chemin d'origine \tilde{y} et d'extrémité $g \cdot \tilde{y}$). De plus, pour tout $g \in \text{Aut}(\tilde{M})$, $d(\tilde{y}, g \cdot \tilde{y})$ est égal à la longueur du plus petit lacet de point-base y qui représente la classe $\phi_{\tilde{y}}(g)$, ce qui prouve que $\phi_{\tilde{y}}$ envoie $\Gamma_\varepsilon(\tilde{y})$ sur $\Pi_\varepsilon(y)$.

M dont l'entropie est majorée par $\frac{\delta}{4+\delta} \frac{\text{Log}2}{\varepsilon}$ (certaines de ces métriques possèdent des plans de courbure sectionnelle positive et d'autres plans de courbure sectionnelle arbitrairement proche de $-\infty$).

Rappelons que, par définition de la métrique relevée, pour tous les $y, z \in M$ et tout $\tilde{y} \in \tilde{M}$ (resp. $\tilde{z} \in \tilde{M}$) qui se projette sur y (resp. sur z), on a

$$d_{\tilde{M}}(\Gamma \cdot \tilde{y}, \Gamma \cdot \tilde{z}) = \inf_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} d_{\tilde{M}}(\gamma \cdot \tilde{y}, \gamma' \cdot \tilde{z}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d_{\tilde{M}}(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{z}) = d_M(y, z).$$

Donc, pour tout $\tilde{y} \in \tilde{M}$ fixé, la valeur $\sup_{\tilde{z} \in \tilde{M}} d_{\tilde{M}}(\Gamma \cdot \tilde{y}, \Gamma \cdot \tilde{z})$ est majorée par le diamètre de (M, g) . Si (M, g) est de courbure sectionnelle négative, son rayon d'injectivité en un point x est égal à $\frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d_{\tilde{M}}(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x})$, cette dernière quantité ne dépendant pas du choix de \tilde{x} dans $\pi^{-1}(x)$ ([S], Prop. III.4.13). Autrement dit, le point (iii) du théorème 1.0.2 étend aux espaces métriques mesurés le résultat de M. Gromov ([B-K], Prop. 2.5.3) qui dit que, si (M^n, g) est une variété dont la courbure sectionnelle K_g vérifie $-K_0^2 \leq K_g < 0$ (cette hypothèse étant un peu plus forte que l'hypothèse de courbure du lemme de Margulis classique²) et dont le diamètre est majoré par $D > 0$, alors pour tout point $x \in M^n$ on a $\text{inj}(x) \geq \varepsilon(n, K_0, D)$.

En l'absence de majoration du diamètre, si M^n est encore supposée compacte, une autre conséquence du lemme classique en courbure strictement négative est qu'il existe un point $x_0 \in M^n$ tel que $\text{inj}(x_0) \geq \varepsilon_0(n)/K_0$. Le théorème suivant généralise ce dernier résultat :

Théorème 1.0.3. ([B-C-G], théorème 2.6) *Soient δ et H des nombres réels positifs. Pour tout espace métrique mesuré connexe (Y, d, μ) dont l'entropie est majorée par H et pour tout sous-groupe Γ δ -non abélien du groupe des isométries de (Y, d, μ) qui agit sans points fixe, dont toutes les orbites sont discrètes et qui admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte arbitraire X de courbure strictement négative, il existe un $y \in Y$ tel que*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(y, \gamma \cdot y) \geq \frac{\delta \text{Log}2}{4 + \delta} \cdot \frac{1}{H}.$$

Dans le théorème 5.3.7, l'hypothèse “ Γ admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété compacte X de courbure négative”

²Remarquons que, si (M^n, g) est de courbure strictement négative, alors $\pi_1(M^n)$ est automatiquement de centre nul. Cette hypothèse a du être ajoutée dans la version généralisée (théorème 1.0.2 (iii)) car, pour les groupes δ -non abéliens, elle n'est plus automatique.

peut être remplacée, les autres hypothèses étant inchangées, par l'hypothèse plus faible (et surtout plus intrinsèque) “La relation de commutation est transitive sur $\Gamma \setminus \{e\}$ ”³ ([B-C-G], Remarque 2.7).

Nous allons maintenant établir une version du lemme de Margulis généralisé qui, par rapport au théorème 1.0.2, contient quelques améliorations. Dans la suite, (X, d, μ) sera toujours un espace de longueur mesuré connexe, localement compact et complet tel que la mesure de chaque boule de rayon positif soit non nulle. Notons $Isom(X, d, \mu)$ son groupe d'isométries, i.e. le groupe des bijections de X qui préservent la distance et la mesure.

Théorème 1.0.4. (théorème 5.4.1 de la version italienne complète) *Soient δ et H des nombres réels positifs. Soit (X, d, μ) vérifiant les hypothèses ci-dessus et tel que $\text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$, et soit Γ un sous-groupe δ -non abélien de $Isom(X, d, \mu)$, discret par rapport à la topologie C-O. Alors, pour tout $x \in X$ on a :*

(i) *pour tout couple d'éléments γ_1 et γ_2 de Γ qui ne commutent pas,*

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{4+\delta}{\delta} H d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right);$$

(ii) *pour tout couple d'éléments γ_1 et γ_2 de Γ qui ne commutent pas,*

$$\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H};$$

(iii) *le groupe $\Gamma_\varepsilon(x)$ engendré par les $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(x, \gamma \cdot x) < \varepsilon$ est abélien pour tout $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$;*

(iv) *si de plus le centre de Γ est réduit à l'élément neutre, alors*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{4+\delta}{\delta} 2DH}} \right)$$

pour tout majorant D de $D(x) = \sup_{z \in X} d(\Gamma \cdot x, z)$.

Remarques 1.0.5. L'hypothèse “ Γ est un sous-groupe discret de $Isom(X, d, \mu)$ ” peut être remplacée par une des deux hypothèses (a) ou (b) suivantes, qui lui sont équivalentes :

(a) Pour au moins un $x \in X$ et pour tout $R > 0$, l'ensemble Γ_R des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma \cdot x$ appartient à $B_C(x, R)$ est fini (où B_C désigne la boule fermée de centre x et de rayon R dans (X, d)).

³ C'est à dire, si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma \setminus \{e\}$ et si $\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_2 \gamma_1$ et $\gamma_2 \gamma_3 = \gamma_3 \gamma_2$, alors $\gamma_1 \gamma_3 = \gamma_3 \gamma_1$.

(b) Il existe un point $x \in X$ dont l'orbite $\Gamma \cdot x$ est discrète et tel que le stabilisateur Γ_x est fini.

L'hypothèse de *compacité locale* pour l'espace X est fondamentale : en fait, si on la supprime, on trouve des exemples de groupes qui agissent isométriquement sur un espace non localement compact (X, d) , qui sont discrets dans $Isom(X, d)$, mais qui admettent des points dont le stabilisateur est infini, par exemple, l'action du groupe des automorphismes du revêtement \tilde{M} d'une variété riemannienne compacte M sur $L^2(\tilde{M}, \tilde{g})$ (Exemples 5.4.9). Remarquons que, dans cet exemple, le stabilisateur de la fonction nulle est le groupe entier et que les conclusions du théorème 1.0.4 sont fausses pour ce type d'action. Par contre, il existe des exemples simples d'actions isométriques de groupes δ -non abéliens sur un espace localement compact qui admettent des points fixes (par exemple, si Γ est le groupe fondamental d'une variété compacte de courbure négative, l'action de $G = \Gamma \times \mathbb{Z}_p$ sur $X = C(\Gamma) \times D_2$ définie par $(\gamma, i) \cdot (x, z) = (\gamma x, e^{\frac{2\pi i}{p}} z)$, où $C(\Gamma)$ est le graphe de Cayley de Γ par rapport à un système de générateurs arbitraire et D_2 est le disque euclidien bidimensionnel. On remarquera que le centralisateur de $(x, 0)$ est fini et égal à $\{e\} \times \mathbb{Z}_p$).

Si on ajoute l'hypothèse que le centre de Γ est réduit à l'élément neutre, (b) implique que l'action de Γ est proprement discontinue et sans points fixes, puisque les sous-groupes finis des groupes δ -non abéliens sont contenus dans le centre du groupe⁴.

Remarques. En comparant le théorème 1.0.4 et le théorème 1.0.2 nous remarquons que :

- (1) Les inégalités (i) et (iv) du théorème 1.0.4 améliorent quantitativement les inégalités correspondantes du théorème 1.0.2. Plus précisément, le théorème 1.0.2 affirme que, si γ_1 et γ_2 ne commutent pas, on a

$$(*) \quad d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \max \left[\text{Log} \left(\frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{1}{H \cdot d(x, \gamma_1 \cdot x)} \right), e^{-\frac{4+\delta}{\delta} H \cdot d(x, \gamma_1 \cdot x)} \right]$$

(on utilise l'inégalité (ii) du théorème 1.0.2 deux fois, en échangeant les rôles de γ_1 et γ_2).

⁴En raisonnant par l'absurde, si F est un sous-groupe fini d'un groupe δ -non abélien Γ et si $g \in F$ n'est pas dans le centre de Γ , alors il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que g et γ ne commutent pas. Quitte à remplacer γ par γ^{-1} , on peut supposer que γ^N et g^N ($N \geq 4/\delta$) engendrent un semi-groupe libre. L'ensemble $\{g^{kN}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est donc infini et contenu dans F , ce qui contredit la finitude de F .

Le théorème 1.0.4 (ii) affirme, sous les mêmes hypothèses, que

$$(**) d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right).$$

Comme le comportement de ces deux minoration de $d(x, \gamma_2 \cdot x)$ est le même quand $d(x, \gamma_1 \cdot x) \rightarrow 0_+$ et quand $d(x, \gamma_1 \cdot x) \rightarrow +\infty$, cette amélioration pourrait sembler sans conséquences pratiques. Pourtant, on peut remarquer que :

- a) L'inégalité (i) : $\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$ du théorème 1.0.2 ne peut pas être déduite de (*) et il faut une preuve à part ; au contraire, dans le théorème 1.0.4 la même inégalité est une conséquence immédiate de (**);
- b) l'inégalité (**) devient optimale quand on l'adapte aux *groupes de surfaces*. Un groupe de surface Γ est un groupe δ -non abélien tel que la variété X de la définition 1.0.1 soit une surface compacte de genre $g \geq 2$ ($g > 2$ si elle n'est pas orientable), ou une surface hyperbolique non compacte. Ceci implique que deux éléments de Γ qui ne commutent pas engendrent un groupe libre. Si on adapte la preuve du théorème 1.0.4 au cas des groupes de surface, on obtient la version suivante du théorème 1.0.4.

Théorème 1.0.6. (théorème 5.4.15 de la version italienne complète)

Soit H un nombre réel positif. Soit (X, d, μ) tel que $\text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$ et soit Γ un sous-groupe de $\text{Isom}(X, d, \mu)$, discret pour la topologie C-O est isomorphe à un groupe de surface. Alors, pour tout $x \in X$, on a :

- (i) pour tout couple d'éléments γ_1 et γ_2 de Γ qui ne commutent pas

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \text{Log} \left(\frac{1 + 3e^{-Hd(x, \gamma_1 \cdot x)}}{1 - e^{-Hd(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right)$$

et

$$[d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)] \geq \frac{\text{Log}3}{H};$$

- (ii) le groupe $\Gamma_\varepsilon(x)$ engendré par les $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(x, \gamma \cdot x) < \varepsilon$ est abélien pour tout $\varepsilon \leq \frac{\text{Log}3}{H}$;

(iii) si de plus le centre de Γ est réduit à l'élément neutre, alors

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \text{Log} \left(\frac{1 + 3e^{-2DH}}{1 - e^{-2DH}} \right).$$

Remarquons que, si Γ est un groupe libre à deux générateurs a et b (qui est un groupe de surface) et si X est le graphe de Cayley de Γ muni du système générateur $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ et de la distance algébrique d_S associée, on peut appliquer le théorème 1.0.6 (i), qui donne

$$d_S(e, \gamma_2) \geq \frac{1}{\text{Log}3} \cdot \text{Log} \left(\frac{3^{d_S(e, \gamma_1)} + 3}{3^{d_S(e, \gamma_2)} - 1} \right).$$

Cette inégalité est optimale, puisqu'elle est une égalité lorsque $\gamma_1 = a$ et $\gamma_2 = b$.

L'inégalité (i) du théorème 1.0.6 est encore une égalité, pour tout $(l_1, l_2) \in (0, +\infty)^2$, lorsqu'on munit le graphe de Cayley X de Γ de la distance de longueur d_l obtenue en donnant aux arêtes correspondants à a la longueur l_1 et aux arêtes correspondants à b la longueur l_2 et en posant $\gamma_1 = a$ et $\gamma_2 = b$. En reprenant pas à pas la preuve du théorème 1.0.6 (page 99), on voit que, dans ce cas, toutes les inégalités sont des égalités et que

$$d_l(e, b) = l_2 = \frac{1}{\text{Ent}(X, d_l)} \cdot \text{Log} \left(\frac{1 + 3e^{-\text{Ent}(X, d_l)d_l(e, a)}}{1 - e^{-\text{Ent}(X, d_l)d_l(e, a)}} \right)$$

ce qui est bien le cas d'égalité dans l'inégalité (i).

- (2) L'hypothèse “pour tout x , l'orbite $\Gamma \cdot x$ est discrète” est remplacée, dans le théorème 1.0.4, par l'hypothèse “il existe un x_0 tel que $\Gamma \cdot x_0$ soit discrète et tel que le stabilisateur Γ_{x_0} soit fini” (Remarques 1.0.5). Autrement dit, il suffit que cette dernière hypothèse soit vérifiée pour au moins un point $x_0 \in X$ pour que les conclusions du théorème soient valables en chaque point $x \in X$. De plus, le théorème 1.0.4 reste valable pour les actions qui admettent des points fixes ; de telles actions étaient exclues dans [B-C-G].

Schéma de la preuve du théorème 1.0.4 (pour les détails, voir pp. 85-92)

La preuve suit les mêmes idées que la preuve du théorème 2.1 de [B-C-G].

Si $x_0 \in X$ est un point dont l'orbite $\Gamma \cdot x_0$ est discrète et le stabilisateur Γ_{x_0} est fini, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq R\}$ est fini pour tout $R > 0$

parce que la boule fermée $B_C(x_0, R)$ est compacte ⁵. L'inégalité triangulaire entraîne alors que pour tout $x \in X$ l'orbite $\Gamma \cdot x$ est discrète et le stabilisateur Γ_x est fini.

Soit donc $x \in X$ un point arbitraire et soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ qui ne commutent pas : comme Γ est δ -non abélien, quitte à changer γ_2 en γ_2^{-1} , on peut supposer que γ_1^N et γ_2^N engendrent un semi-groupe libre F^+ dans Γ , pour $N \geq 4/\delta$ ([B-C-G], proposition 1.14). Si h désigne l'entropie du graphe de Cayley de F^+ (associé au système de générateurs $\{\gamma_1^N, \gamma_2^N\}$) par rapport à la mesure de comptage des sommets et à la distance de longueur d_l invariante à gauche obtenue en affectant les arêtes correspondant à γ_1^N (resp. à γ_2^N) de la longueur $l_1 = d(x, \gamma_1^N \cdot x)$ (resp. de la longueur $l_2 = d(x, \gamma_2^N \cdot x)$), on a l'égalité $e^{-hd(x, \gamma_1^N \cdot x)} + e^{-hd(x, \gamma_2^N \cdot x)} = 1$ (lemme 5.4.14) d'où il suit que $d(x, \gamma_2^N \cdot x) = \frac{1}{h} \cdot \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-h d(x, \gamma_1^N \cdot x)}} \right)$. Du fait que $h \leq \text{Ent}(X, d, \mu)$ et de l'inégalité triangulaire, on déduit (i); les inégalités (ii) et (iii) se déduisent de (i) par un calcul direct. Pour prouver (iv), notons γ_1 l'élément de $\Gamma \setminus \{e\}$ qui réalise l'infimum de $\gamma \rightarrow d(x, \gamma \cdot x)$. D'après le lemme 2.5 de [B-C-G], il existe un système générateur S dont tout élément s vérifie $d(x, s \cdot x) \leq 2D$; choisissons un élément $\gamma_2 \in S$ qui ne commute pas avec γ_1 . L'inégalité (iv) s'obtient en appliquant l'inégalité (i) au couple d'éléments γ_1 et γ_2 .

Remarquons que l'inégalité (iv) est compatible avec le fait que le stabilisateur Γ_x du point x est trivial, puisque le centre de Γ est trivial. De même, l'inégalité (i) est compatible avec le fait que les éléments du stabilisateur de x commutent avec tous les éléments de Γ . Pour clarifier ces deux dernières remarques, dans la version italienne détaillée, les rapports entre centre et stabilisateur d'un point et entre les différentes formes de discrétude sont étudiés systématiquement dans le cadre de groupes plus généraux que les groupes δ -non abéliens (voir la proposition 5.4.7 et les corollaires 5.4.8, 5.4.11 et 5.4.12). \square

Concluons le chapitre en énonçant deux autres résultats que nous avons prouvé dans la version italienne complète.

Rappelons que, dans ce qui suit, (X, d, μ) est supposé être un espace métrique de longueur mesuré, connexe, complet, localement compact et dont toutes les boules de rayon non nul sont de mesure non nulle.

Proposition 1.0.7. (proposition 5.4.3 de la version italienne complète) *Soit (X, d, μ) vérifiant les hypothèses ci-dessus et tel que $\text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$. Supposons que Γ soit un sous-groupe discret δ -non abélien du groupe des isométries*

⁵En effet, d'après [Gr2], théorème 1.11, un espace de longueur complet et localement compact a ses boules fermées compactes.

de (X, d, μ) qui a la propriété de transitivité de la commutation, et supposons que tout sous-groupe abélien de Γ soit isomorphe à $\{e\}$ ou à \mathbb{Z} .

Si on considère un point $x_0 \in X$ tel que $\inf_{g \in \Gamma} d(x_0, g \cdot x_0) = \varepsilon < \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$,

et si $R_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{H} \frac{\delta}{4+\delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{\delta}{4+\delta} \varepsilon}} \right)$, alors :

- (i) il existe un $\tau \in \Gamma$ tel que le sous-groupe $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0)$ engendré par les éléments $g \in \Gamma$ tels que $d(x_0, g \cdot x_0) < 2R_\varepsilon$ soit de la forme $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0) = \tau^{\mathbb{Z}} = \{\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- (ii) l'application quotient $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$, l'application $\bar{\pi} : X \rightarrow X/\tau^{\mathbb{Z}}$ et l'application $p : X/\tau^{\mathbb{Z}} \rightarrow X/\Gamma$ (définie par $p \circ \bar{\pi} = \pi$) sont des revêtements ; si sur le quotient $X/\tau^{\mathbb{Z}}$ (resp. X/Γ) on définit la distance $d([x], [y]) = \inf_{g \in \tau^{\mathbb{Z}}} d(x, g \cdot y)$ (resp. $d([x], [y]) = \inf_{g \in \Gamma} d(x, g \cdot y)$) pour tous $x, y \in X$, et si $\bar{x}_0 = \bar{\pi}(x_0)$ et $\hat{x}_0 = \pi(x_0)$, alors la restriction de p à la boule $B(\bar{x}_0, R_\varepsilon)$ est un homéomorphisme sur la boule $B(\hat{x}_0, R_\varepsilon)$ qui est une isométrie locale (en particulier, c'est une isométrie globale par rapport aux métriques de longueur sur $B(\bar{x}_0, R_\varepsilon)$ (resp. $B(\hat{x}_0, R_\varepsilon)$) induites par la distance sur $X/\tau^{\mathbb{Z}}$ (resp. X/Γ)).

Remarques. L'hypothèse “ Γ est un sous-groupe discret du groupe des isométries de (X, d, μ) pour la topologie C-O” implique que l'action de Γ est libre et proprement discontinue : ceci se déduit du corollaire 5.4.8 et de la proposition 5.4.13 (en utilisant le fait que Γ est δ -non abélien) et du fait que, Γ étant non abélien et ayant la propriété de transitivité de la commutation, son centre est trivial, donc le stabilisateur de tout point est trivial.

Théorème 1.0.8. (théorème 5.4.4 de la version italienne complète) *Soit δ un nombre réel strictement positif. Soit (X, d, μ) un espace de longueur vérifiant les hypothèses ci-dessus sur lequel agit par isométries un groupe Γ δ -non abélien, qui a la propriété de transitivité de la commutation et qui est un sous-groupe discret du groupe des isométries de (X, d, μ) . Alors $\text{Ent}(X) > 0$; de plus, il existe un point $x_0 \in X$ tel que*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) > \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}(X)}$$

où $\text{Ent}(X)$ désigne l'entropie de l'espace métrique mesuré (X, d, μ) .

Remarque. La différence entre ce théorème et le résultat analogue de [B-C-G] (théorème 1.0.3 ci-dessus) réside dans le fait qu'il n'est plus besoin de supposer que Γ agit sans point fixe et que, pour tout x , l'orbite $\Gamma \cdot x$ est discrète. En effet, il suffit de supposer qu'il existe un x tel que $\Gamma \cdot x \cap B(x, R)$ soit fini pour tout R .

Chapitre 2

Une version du lemme de Margulis où les hypothèses sont algébriques

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la notion de groupe δ -non abélien joue un rôle essentiel dans la généralisation du lemme de Margulis due à G. Besson, G. Courtois et S. Gallot ([B-C-G]). Dans quelques corollaires (théorème 1.0.8) nous avons demandé que le groupe ait de plus la propriété de transitivité de la commutation. Pourtant, dans [B-C-G] on ne construit pas d'exemples explicites de groupes qui satisfont ces deux propriétés et qui ne soient pas des groupes fondamentaux de variétés compactes de courbure strictement négative. La difficulté que nous rencontrons pour construire de tels exemples est due au fait que la définition de δ -non abélien fait explicitement référence à l'existence d'immersions injectives dans les groupes fondamentaux de telles variétés, alors que la transitivité de la commutation est une propriété purement algébrique intrinsèque d'un groupe. Il devient donc nécessaire de substituer, à la notion de δ -non abélien, une hypothèse purement algébrique. Pour voir que cet objectif est atteignable, il suffit de relire les preuves des théorèmes 1.0.4 et 1.0.8 et de se rendre compte du fait qu'ils n'utilisent l'hypothèse de δ -non abélien du groupe qu'à travers ses conséquences algébriques, données par les deux propositions suivantes :

Proposition 2.0.9. (cf. [B-C-G], prop. 1.14) *Soit $\delta > 0$ un nombre réel, soit Γ un groupe δ -non abélien et $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ des éléments qui ne commutent pas. Alors, pour tout entier $N \geq 4/\delta$, quitte à remplacer éventuellement γ_2 par γ_2^{-1} , les éléments γ_1^N et γ_2^N engendrent un semi-groupe libre dans G .¹*

¹Si G est un groupe, nous dirons que $g_1, g_2 \in G$ engendrent un semi-groupe libre dans G si tout élément de G qui peut être écrit comme produit de puissances positives de g_1

Proposition 2.0.10. (proposition 5.4.12 de la version italienne complète) *Si G est un groupe δ -non abélien, tout sous-groupe normal abélien de G est contenu dans son centre. En particulier, un groupe δ -non abélien ayant la propriété de transitivité de la commutation ne contient pas de sous-groupes normaux abéliens non triviaux.*

Ces remarques amènent naturellement à la définition suivante :

Définition 2.0.11. (définition 6.1.1 de la version italienne complète) *Soit G un groupe. On dira que G a la propriété FSG(N) (pour un entier $N > 0$ fixé) si, pour tous les $g_1, g_2 \in G$ qui ne commutent pas, $\{g_1^N, g_2^N\}$ ou $\{g_1^N, g_2^{-N}\}$ engendrent un semi-groupe libre dans G ; on dira que G a la propriété NAS si le seul sous-groupe normal abélien de G est le sous-groupe trivial $\{e\}$.*

On peut donc, au prix de légères modifications des preuves originales, réénoncer le théorème 1.0.4 et le théorème 1.0.8 comme suit.

Dans les énoncés qui suivent, (X, d, μ) sera supposé être un espace métrique de longueur mesuré connexe, complet, localement compact et dont toutes les boules de rayon non nul sont de mesure non nulle. Pour faire bref nous écrirons $\text{Ent}(X)$ au lieu de $\text{Ent}(X, d, \mu)$.

Théorème 2.0.12. (théorème 6.1.2 de la version italienne complète) *Soient H un nombre réel positif et N un entier positif. Soit (X, d, μ) un espace de longueur vérifiant les hypothèses ci-dessus tel que $\text{Ent}(X) \leq H$. Soit Γ un sous-groupe du groupe des isométries $\text{Isom}(X, d, \mu)$, discret par rapport à la topologie C - O , qui a la propriété FSG(N). Alors, pour tout $x \in X$, les propriétés suivantes sont valables :*

(i) *pour tout couple d'éléments γ_1 et γ_2 de Γ qui ne commutent pas,*

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{1}{N} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H N d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right);$$

(ii) *pour tout couple d'éléments γ_1 et γ_2 de Γ qui ne commutent pas,*

$$\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{H};$$

(iii) *le groupe $\Gamma_\varepsilon(x)$ engendré par les $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(x, \gamma \cdot x) < \varepsilon$, est abélien pour tout $\varepsilon \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$;*

et g_2 admet une expression unique de ce type.

(iv) si de plus Γ est de centre nul, alors

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-2NDH}} \right)$$

pour tout nombre réel $D > 0$ tel que $D(x) = \sup_{z \in X} d(\Gamma \cdot x, z) \leq D$.

Théorème 2.0.13. (théorème 6.1.3 de la version italienne complète) *Soit N un entier positif. Soit (X, d, μ) un espace de longueur qui vérifie les hypothèses rappelées ci-dessus. Soit Γ un sous-groupe discret du groupe des isométries de (X, d, μ) qui a la propriété $FSG(N)$, la propriété NAS et la propriété de transitivité de la commutation. Alors l'entropie de (X, d, μ) , notée $\text{Ent}(X)$, est strictement positive ; de plus, il existe un point $x_0 \in X$ tel que*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log} 2}{\text{Ent}(X)}.$$

La suite du chapitre est destinée à montrer que la classes des groupes qui satisfont la propriété $FSG(N)$, la propriété NAS et la propriété de transitivité de la commutation est assez large. Nous verrons qu'elle contient les produits libres, les produits amalgamés malnormaux (proposition 2.0.14), les groupes hyperboliques selon Gromov sans torsion (proposition 2.0.15) et des limites de groupes qui satisfont ces propriétés (proposition 2.0.16). Nous montrerons comment, dans chacune de ces classes d'exemples, on trouve des groupes qui ne sont pas des groupes fondamentaux de variétés compactes de courbure négative.

Rappelons qu'un *produit amalgamé* $A *_C B$ ([Rot], Chap. 11) est dit *malnormal* ([K-S], page 933) si C est malnormal à la fois dans A et dans B (un sous-groupe H d'un groupe G est dit malnormal si, pour tout $g \in G \setminus H$, on a $gHg^{-1} \cap H = \{e\}$).

Proposition 2.0.14. (proposition 6.2.3 de la version italienne complète) *Soit $N > 0$ un entier, et soient A et B deux groupes sans torsion qui ont la propriété $FSG(N)$ (par exemple, des groupes sans torsion qui sont δ -non abéliens pour une valeur de $\delta \geq 4/N$). Alors un produit amalgamé malnormal $A *_C B$ (en particulier, le produit libre $A * B$) a la propriété $FSG(N)$. Si de plus A et B ont la propriété de transitivité de la commutation et si C est différent de A et de B , alors $A *_C B$ a la propriété de transitivité de la commutation et la propriété NAS.*

Schéma de la preuve de la proposition 2.0.14

La propriété $FSG(N)$ (resp. la propriété de transitivité de la commutation) découle des résultats de A. Karrass et D. Solitar ([K-S]) sur la structure des

sous-groupes à deux générateurs (resp. sur la structure des centralisateurs) des produits amalgamés malnormaux (proposition 6.2.1).

Par les mêmes résultats, tout sous-groupe abélien K de $A *_C B$ est soit contenu dans le conjugué d'un facteur, soit cyclique. Mais un tel K ne peut pas être normal (proposition 6.2.2), et ceci prouve la propriété NAS. \square

Dans le cas des produits libres $G * H$ il est possible de donner une preuve directe de la propriété de transitivité de la commutation, basée sur l'écriture de chaque élément de $G * H$ sous forme normale (page 118).

Exemples. Le produit libre $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ des groupes fondamentaux de deux variétés riemanniennes compactes X, Y de courbure $K \leq -1$ vérifie la propriété NAS, la propriété de transitivité de la commutation et la propriété FSG(N) pour tout $N \geq 4 \cdot \max\{1/\text{inj}(X), 1/\text{inj}(Y)\}$.

Remarquons que $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ n'est pas le groupe fondamental d'une variété compacte de courbure négative, parce qu'il a un nombre infini de bouts alors que le groupe fondamental d'une variété compacte de courbure négative n'a qu'un seul bout².

Le produit libre $\pi_1(X) * \mathbb{Z}^k$ vérifie aussi les conclusions de la proposition (nous remarquons que ce groupe n'est pas hyperbolique au sens de Gromov si $k \geq 2$).

Un exemple de produit amalgamé malnormal non libre est donné par le produit $\pi_1(X) *_C \pi_1(Y)$ des groupes fondamentaux de deux variétés riemanniennes compactes de courbure strictement négative par rapport aux deux sous-groupes cycliques C_1 et C_2 (identifiés à C) de $\pi_1(X)$ (resp. de $\pi_1(Y)$) engendrés chacun par un lacet géodésique simple de X (resp. de Y).

Proposition 2.0.15. (proposition 6.3.5 de la version italienne complète)
Soit G un groupe hyperbolique au sens de Gromov, non abélien et sans torsion. Alors G a la propriété de transitivité de la commutation et la propriété NAS. Si de plus G est δ -hyperbolique par rapport à un système de générateurs S fixé, alors il a la propriété FSG(N) pour un entier N qui ne dépend que de δ et d'un majorant de $\#(S)$.

Schéma de la preuve de la proposition 2.0.15

Pour tout groupe G , si S est un système de générateurs de G , nous noterons d_S la distance algébrique associée et $b_S(R)$ le nombre d'éléments g de G tels que $d_S(e, g) < R$.

²En effet, un tel groupe agissant de manière discrète et cocompacte sur un espace simplement connexe de courbure négative, il est quasi-isométrique à cet espace qui est difféomorphe à \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) et donc il a le même nombre de bouts ([H1], p. 114).

Nous nous appuyons sur le résultat suivant (cf. [C-G 1]) : pour tout groupe hyperbolique G , pour tout système complet S de générateurs qui rend l'espace métrique (G, d_S) δ -hyperbolique, si on pose

$$N = ([328\delta] + 1) \cdot \max\{b_S(64\delta)!, b_S^2(8\delta)!\},$$

alors toute paire $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ d'éléments de G a la propriété suivante : soit le sous-groupe engendré par γ_1^N et γ_2^N est isomorphe à $\{e\}$ ou à \mathbb{Z} , soit (quitte à changer γ_2 en γ_2^{-1}) γ_1^N et γ_2^N engendrent un semi-groupe libre dans G . Ceci entraîne la propriété $FSG(N)$ dans notre contexte. Pour montrer que N ne dépend que de $\#S$ et de δ , il suffit de remarquer que, pour tout $r > 1$, on a : $1 + \#S \leq b_S(r) \leq (\#S)^{[r]+1}$. Ceci nous donne une estimation $N(\delta, \#S)$ de N , où $N(\delta, \#S) = ([328\delta] + 1) \cdot ((\#S)^{[64\delta]+1})!$.

Pour démontrer la propriété de transitivité de la commutation, on rappelle le résultat classique suivant : le centralisateur $C(g)$ de tout élément d'ordre infini g d'un groupe hyperbolique G est une extension finie du groupe cyclique engendré par g . Comme G est par hypothèse sans torsion, $C(g)$ est cyclique infini, et on conclut. Pour la propriété NAS, on applique le même résultat en rappelant qu'un groupe non abélien ayant la propriété de transitivité de la commutation et sans torsion n'a pas de sous-groupes normaux cycliques. \square

Exemples. Le groupe G donné par la présentation

$$G = \langle a, b \mid R = ab^2ab^{-1}ab^{-2}aba^{-2}b = e \rangle$$

est hyperbolique non élémentaire, sans torsion, avec un seul bout, et il n'est pas le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative, ce qui prouve que G n'est δ -épais pour aucune valeur de δ (il reste à comprendre si G est δ -non abélien pour au moins un $\delta > 0$). L'hyperbolicité de G découle de la propriété de petite simplification (voir par exemple l'appendice de [G-H]) ; l'absence de torsion découle du fait que R n'est pas une puissance, et le fait d'avoir un seul bout du théorème de Stallings combiné avec un résultat de Grushko. Finalement, si G était le groupe fondamental d'une variété compacte de courbure négative, son bord serait homéomorphe à S^{n-1} pour un entier $n \geq 2$; mais un résultat de [Be-K] (p. 19) entraîne que $\partial G = S^1$, et G serait alors le groupe fondamental d'une surface hyperbolique, ce qui est absurde parce que a et b n'engendrent pas un groupe libre (pour les détails, voir page 113).

Rappelons que, si G (resp. G') est un groupe finiment engendré et $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ (resp. $S' = \{s'_1, \dots, s'_n\}$) est un système générateur symétrique³ et

³Rappelons que ceci signifie que $e \notin S$ et que, pour tout s , $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$.

ordonné fixé, les couples (G, S) et (G', S') sont à distance inférieure ou égale à e^{-R} ([C-G 2]) si et seulement si ils ont exactement les mêmes relations de longueur inférieure ou égale à R (une fois que, pour tout $i = 1, \dots, n$, s_i est identifié avec s'_i).

Ceci permet de définir la limite d'une suite $\{(G_i, S_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de groupes marqués. Des exemples élémentaires montrent que les propriétés algébriques communes à une suite de groupes ne sont pas généralement hérités par la limite (ex. être fini, être de rang k etc.). Par contre, une partie des propriétés qui nous intéressent passent à la limite, comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 2.0.16. (proposition 6.4.2 de la version italienne complète)
Soit $N > 0$ un entier. Soit G un groupe muni d'un système fini S de générateurs ; si (G, S) est la limite d'une suite $((G_i, S_i))_{i \in \mathbb{N}}$ de groupes marqués, où S_i est un système fini de générateurs de G_i et où chacun des G_i a la propriété FSG(N) (resp. la propriété de transitivité de la commutation), alors G a lui aussi la propriété FSG(N) (resp. la propriété de transitivité de la commutation).

Schéma de la preuve de la proposition 2.0.16

Comme la négation de la propriété FSG(N) et la relation de commutation peuvent être exprimées en terme de relations de longueur finie, la proposition découle de la possibilité de “copier” dans G_i les relations valables dans G , pour un entier $i \in \mathbb{N}$ assez grand (voir p. 117 pour les détails de la preuve).

□

Remarque. La méthode utilisée dans la preuve de la proposition 2.0.16 n'est pas directement applicable pour démontrer que la limite (G, S) d'une suite de groupes qui ont la propriété NAS a elle-même la propriété NAS. En effet, un sous-groupe normal abélien K dans le groupe G n'est pas forcément finiment engendré ([B-M]), donc on ne peut pas en général le “copier” dans les G_i pour obtenir une contradiction.

Exemples. Soit Σ_2 la surface compacte orientable de genre 2. Son groupe fondamental a pour présentation canonique :

$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = e \rangle.$$

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(G_n, S_n) = (\pi_1(\Sigma_2), \{a, b, c, d, d^n\})$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (G_n, S_n) = (G, S)$, où

$$G = \pi_1(\Sigma_2) *_\mathbb{Z} \mathbb{Z}^2 = \langle a, b, c, d, f \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = e, df = fd \rangle$$

et $S = \{a, b, c, d, f\}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ le groupe $G_n = \pi_1(\Sigma_2)$ est un groupe de surface, il a la propriété de transitivité de la commutation et la

propriété FSG(1). Nous appliquons la proposition 2.0.16 à la suite (G_n, S_n) et concluons que le groupe G a la propriété de transitivité de la commutation et la propriété FSG(1). Remarquons que ceci ne peut pas être déduit de la proposition 2.0.14, puisque G n'est pas un produit amalgamé malnormal, ni de la proposition 2.0.15, puisque G n'est pas hyperbolique (car il contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2).

Chapitre 3

Quelques résultats de finitude pour les groupes dont l'entropie algébrique est majorée

Dans ce chapitre nous présentons quelques résultats de finitude pour certaines catégories de groupes marqués (en particulier les groupes fondamentaux des variétés Riemanniennes compactes et les groupes hyperboliques selon Gromov). Une partie de ces résultats, avec des démonstrations abrégées a été présentée dans [Z]. Nous appliquons le lemme de Margulis généralisé (théorème 2.0.12 et théorème 2.0.13), valable pour des groupes discrets agissant isométriquement sur des espaces métriques mesurés, au graphe de Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ d'un groupe finiment engendré G associé à un système générateur fixé S et à l'action d'un sous-groupe de G sur ce graphe.

Plus précisément, nous considérons le groupe G muni de la métrique des mots¹ d_S : on définit alors, sur le graphe de Cayley $\mathbb{C}(G, S)$, une *notion de longueur des chemins* qui empruntent les arêtes du graphe en identifiant isométriquement chaque arête avec l'intervalle $[0, 1]$ (muni de sa notion canonique de longueur) et une *distance de longueur* en décidant que la distance entre deux points du graphe est la longueur du plus court chemin qui les joint dans le graphe de Cayley. L'application qui, à chaque point $g \in G$ associe le sommet correspondant de $\mathbb{C}(G, S)$ étant un plongement isométrique de (G, d_S) dans $\mathbb{C}(G, S)$ muni de cette distance, nous appellerons encore d_S cette nouvelle distance ; de plus, pour chaque sous-groupe Γ de G , l'action naturelle de Γ sur G par translations à gauche s'étend en une action isométrique sur $\mathbb{C}(G, S)$ muni de cette distance (voir page 131).

¹Rappelons que $d_S(g_1, g_2)$ est par définition égale à l'infimum des longueurs des mots en S qui représentent $g_1^{-1}g_2$. Tout système générateur est ici supposé symétrique, i.e. $e \notin S$ et, pour tout s , $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$.

Ici, Γ sera un sous-groupe d'indice fini dans G : les hypothèses algébriques que nous ferons (propriété de transitivité de la commutation, propriété FSG(N) et propriété NAS, voir les définitions de ces notions en 2.0.11) porteront sur le sous-groupe Γ , mais pas sur le groupe G . Pour simplifier les notations, nous introduisons la définition suivante :

Définition 3.0.17. (définition 7.0.3 de la version italienne complète) *Soit $N > 0$ un entier. Un groupe Γ avec la propriété FSG(N) et la propriété NAS est dit groupe N -non abélien.*

La notion de N -non abélianité définie ici ne coïncide pas avec la notion de δ -non abélianité définie dans [B-C-G] (voir aussi le chapitre 1 ci-dessus), mais peut être vue comme une généralisation de cette dernière, ce qui explique l'emploi du même vocable. Plus précisément, nous avons vu que tout groupe δ -non abélien (au sens de [B-C-G]) et de centre nul est automatiquement N -non abélien (au sens de la définition 3.0.17), si on pose $N = \lceil 4/\delta \rceil$. La réciproque est fautive puisque nous avons donné au chapitre 2 des exemples de groupes N -non abéliens (au sens de la définition 3.0.17) mais qui ne sont δ -non abéliens (au sens de [B-C-G]) pour aucune valeur de δ .

Par rapport à la mesure de longueur et à la distance de longueur définie ci-dessus, le graphe de Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ est d'entropie bornée, celle-ci étant égale à l'entropie $\text{Ent}_S(G)$ de G par rapport à S . Par définition, $\text{Ent}_S(G) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} f_S(n)}{n}$, où $f_S(n)$ désigne, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le nombre des éléments $g \in G$ tels que $d_S(e, g) < n$. L'entropie algébrique de G (notée $\text{Ent}_{\text{alg}}(G)$) est l'infimum des $\text{Ent}_S(G)$ lorsque S parcourt l'ensemble des systèmes générateurs de G .

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 3.0.18. (théorème 7.0.5 de la version italienne complète) *Soit G un groupe finiment engendré et soit Γ un sous-groupe N -non abélien de G qui a la propriété de transitivité de la commutation. Alors :*

- (i) *pour tout système générateur S de G , on a $\text{Ent}_S(G) > 0$;*
- (ii) *pour tout système générateur S de G , il existe $g \in G$ tel que (si $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{e\}$)*

$$d_S(e, g\Gamma^*g^{-1}) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}_S(G)} - 1;$$

- (iii) *si Γ est d'indice fini d dans G , alors tout système générateur S de G tel que $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ contient au plus $d - 1$ éléments;*
- (iv) *pour tout système générateur S , on a $\text{Ent}_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\max(d-k,0)+3}$ où d est l'indice de Γ dans G et k est le nombre des éléments de S . En particulier, on a $\text{Ent}_{\text{alg}}(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\max(d,3)}$ (on a $\text{Ent}_{\text{alg}}(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\max(d-1,3)}$ si, de plus, G est sans torsion).*

Remarques.

- (a) Si Γ est un groupe non abélien avec la propriété FSG(N) pour un entier $N > 0$, alors pour tout système générateur S on a $\text{Ent}_S(\Gamma) \geq \frac{\text{Log}2}{N}$. Par exemple, Γ peut être un groupe α -hyperbolique (par rapport à un système générateur S) sans torsion et non élémentaire, et dans ce cas N peut être calculé explicitement en fonction de α et de la cardinalité de S (proposition 2.0.15).
- (b) Les groupes fondamentaux des variétés compactes localement symétriques de type non compact et de rang 1 sont, parmi les exemples de groupes qui contiennent un sous-groupe N -non abélien d'indice fini, une classe d'un certain intérêt. Plus précisément, on montre que ces variétés admettent des revêtements compacts d'indice fini et de rayon d'injectivité $\geq \delta$, pour tout $\delta > 0$: le groupe fondamental de ces revêtements est donc un sous-groupe d'indice fini du groupe fondamental initial, qui est N -non abélien pour $N \geq 4/\delta$ ([B-C-G], lemme 1.6). La preuve découle du fait que les groupes en question sont résiduellement finis (par un théorème de Mal'cev, [Mal]). Savoir s'il est possible de généraliser cette propriété aux groupes fondamentaux des variétés (non localement homogènes) de courbure sectionnelle négative est un problème ouvert.
- (c) Nous remarquons que, dans les inégalités (i) et (ii) du théorème 3.0.18, le groupe G peut être une extension finie ou infinie de Γ . Si Γ est normal, on obtient $d_S(e, \Gamma^*) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}_S(G)} - 1$.

- (d) Dans la littérature on trouve des résultats classiques où le nombre des générateurs d'un groupe Γ est majoré par une constante universelle ([B-K], proposition 2.5.6). Par exemple, si $\Gamma = \pi_1(M^n)$ est le groupe fondamental d'une variété riemannienne complète n -dimensionnelle de courbure sectionnelle non-négative, alors Γ admet un système générateur de cardinalité inférieure ou égale à $5^{\frac{1}{2}n}$; si M^n est compacte de diamètre $\text{diam}(M^n) \leq D/2$ et de courbure sectionnelle $K \geq -K_0^2$ pour un certain $K_0 > 0$, alors Γ admet un système générateur de cardinalité inférieure ou égale à $2[3 + 2 \cosh(K_0 D)^{\frac{1}{2}n}]$. On remarquera que ces résultats sont valables pour au moins un système générateur (lié à la géométrie de (M^n, g)) et non pour tout système générateur.
- (e) Les hypothèses du théorème 3.0.18 impliquent automatiquement que Γ est sans torsion, par contre G peut avoir des éléments de torsion. C'est pourquoi les cas "avec" et "sans" torsion sont tous deux considérés dans (iv).
- (f) On peut comparer l'inégalité (iv) du théorème 3.0.18 sur l'entropie algébrique avec le résultat plus général dû à P. B. Shalen et P. Wagreich ([Sh-W]) : si G est un groupe finiment engendré et si Γ est un sous-groupe d'indice fini d dans G , on a $\text{Ent}_{\text{alg}}(G) \geq \frac{1}{2d-1} \text{Ent}_{\text{alg}}(\Gamma)$. Comme nous sommes dans un contexte moins général, le théorème 3.0.18 (iv) donne un minorant plus explicite pour l'entropie de G et une meilleure dépendance de l'indice d .

Remarque. Il existe des suites de groupes $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n contienne un sous-groupe Γ_n N -non abélien ($N > 0$ fixé) ayant la propriété de transitivité de la commutation (mais pas d'indice fini), et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ent}_{S_n}(G_n) = 0$ pour un bon choix de S_n ([Gr-H] et p. 173 de cette thèse).

Schéma de la preuve du théorème 3.0.18

L'action de Γ sur le graphe de Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ qui étend l'action par translations à gauche sur G est proprement discontinue et sans points fixes. On peut donc appliquer le théorème 2.0.13, qui implique qu'il existe $x_0 \in \mathbb{C}(G, S)$ tel que $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}(\mathbb{C}(G, S))}$. Comme $\text{Ent}(\mathbb{C}(G, S)) = \text{Ent}_S(G)$, en considérant le sommet g du graphe le plus proche de x_0 , on obtient $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d_S(g, \gamma g) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}_S(G)} - 1$, i.e. l'inégalité (ii) du théorème. Notons $\Gamma' = g^{-1}\Gamma g$. Si Γ est d'indice d , l'ensemble G/Γ' a d éléments et donc, pour tout système générateur S de cardinalité $> d - 1$, on a nécessairement $d_S(e, (\Gamma')^*) \leq 2$ (soit il existe $s \in S$ tel que $s \in \Gamma'$, soit il existe $s, s' \in S$ tels que $\Gamma's = \Gamma's'$). Mais si $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$, on a $d_S(e, (\Gamma')^*) > 2$, d'où une

contradiction, ce qui termine la preuve de (iii). Pour prouver (iv), supposons, par l'absurde, que $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\max(d-k,0)+3}$ (où $k = \sharp(S)$), (ii) implique que $d_S(e, (\Gamma')^*) + 1 > \max(d-k+3, 3)$. Si $s_{i_1} \dots s_{i_p}$ représente le plus court élément non trivial de Γ' , on obtient une contradiction en comptant les éléments distincts de l'ensemble $\{\Gamma', \Gamma' s_1, \dots, \Gamma' s_k, \dots, \Gamma' s_{i_3} \dots s_{i_p}, \dots, \Gamma' s_{i_{p-1}} s_{i_p}\}$. Finalement on note que, pour tout système générateur symétrique S de G , on a $\sharp(S) \geq 3$ ($\sharp(S) \geq 4$ si G est sans torsion), ce qui achève la preuve de (iv). \square

Le théorème 3.0.18 sera dans la suite appliqué aux classes de groupes qui admettent une majoration uniforme de la longueur des relations qui apparaissent dans une présentation. Plus précisément, soient $N, d, N_0 \in \mathbb{N}$, notons $g(N, d, N_0)$ l'ensemble des groupes marqués (G, S) qui satisfont les propriétés suivantes :

- (i) G contient au moins un sous-groupe N -non abélien (d'indice inférieur ou égal à d) ayant la propriété de transitivité de la commutation,
- (ii) il existe une présentation $\langle S | R \rangle$ de G (où S est le système générateur donné) telle que la longueur de tout élément $r \in R$ (par rapport à la métrique des mots d_S) soit inférieure ou égale à N_0 .

On a le résultat suivant :

Corollaire 3.0.19. (corollaire 7.0.6 de la version italienne complète)
Soient $N, d, N_0 \in \mathbb{N}^$ arbitraires. Le nombre des groupes marqués (G, S) appartenant à $g(N, d, N_0)$ qui satisfont $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ est (à isomorphisme marqué près) majoré par $(d-3)_+ 2^{(d-1)(d-2)N_0}$ (ici $a_+ = \max\{a, 0\}$). Par conséquent, soit $\text{Ent}_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ pour tout $(G, S) \in g(N, d, N_0)$, soit $\inf_{(G,S) \in g(N,d,N_0)} [\text{Ent}_S(G)]$ est atteint pour au moins un $(G_0, S_0) \in g(N, d, N_0)$.*

Remarques.

- (a) Remarquons que pour tous les $N \geq 1, d \geq 1, N_0 \geq 0$, l'ensemble des groupes G tels que, pour au moins un $S, (G, S) \in g(N, d, N_0)$, n'est pas vide : il contient les groupes libres de rang $k > 1$; de plus, pour tous les $N \geq 1$ et $N_0 \geq 3$, il existe des valeurs de d telles que cet ensemble contienne les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes localement symétriques de courbure strictement négative. En effet, par le théorème de Mal'cev toute variété riemannienne compacte localement symétrique X qui satisfait $K \leq -1$ admet un revêtement \bar{X} compact, de rayon d'injectivité supérieur ou égal à 4. Le groupe fondamental $\pi_1(\bar{X})$ de \bar{X} a alors la propriété $FSG(1)$, la propriété de transitivité de la commutation et la propriété NAS et s'identifie

à un sous-groupe d'indice fini d du groupe fondamental $\pi_1(X)$ de X . Ceci prouve que $\pi_1(X)$ satisfait la condition (i) de la définition de $g(N, d, N_0)$, pour $N = 1$. De plus, grâce à un théorème de M. Gromov et J. P. Serre (proposition B.0.8), $\pi_1(X)$ admet une présentation $\langle S | R \rangle$ dont les relations $r \in R$ sont de longueur inférieure ou égale à 3, et donc $(\pi_1(X), S) \in g(1, d, 3)$.

- (b) Si on enlève l'hypothèse d'indice fini (majoré par d), l'ensemble des groupes marqués (G, S) qui contiennent un sous-groupe N -non abélien ayant la propriété de transitivité de la commutation et tels que $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$, n'est pas fini (Remarques de la page 30).

Schéma de la preuve du corollaire 3.0.19

Le corollaire découle du point (iii) du théorème 3.0.18 qui assure que la cardinalité de S est majorée par $d - 1$, et du fait que le nombre des présentations, qui peuvent être écrites avec un système générateur S de cardinalité bornée et avec des relations de longueur bornée par N_0 , est fini et majoré par le nombre de sous-ensembles de la boule de rayon N_0 dans le groupe libre construit sur le système générateur S . \square

Dans la suite, nous allons donc limiter notre attention aux classes de groupes qui admettent une présentation dont les relations sont de longueur majorée. Un exemple important est donné par les groupes hyperboliques au sens de Gromov : si G est un groupe δ -hyperbolique par rapport à S , il admet une présentation $\langle S | R \rangle$ dont les relations $r \in R$ sont de longueur inférieure ou égale à $3n$, où $n = [4\delta + 2]$ ([G-H], Prop. 4.17, ici on a noté $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x).

Un groupe hyperbolique est dit *non élémentaire* s'il n'est pas fini et s'il ne contient pas de sous-groupe d'indice fini isomorphe à \mathbb{Z} . Pour de tels groupes, on a le résultat de finitude donné par le lemme suivant. Afin d'énoncer ce lemme, nous aurons besoin de la définition suivante : nous dirons que deux systèmes générateurs (symétriques) S et Σ d'un groupe G sont équivalents (ce que nous noterons $S \sim \Sigma$) s'il existe un isomorphisme $G \rightarrow G$ qui envoie S bijectivement sur Σ .

Lemme 3.0.20. (lemme 7.0.7 de la version italienne complète) *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire et sans torsion. Pour tout nombre réel $\alpha > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, il existe au plus $2^{(p^{12\alpha+9})}([p/2] - 1)_+$ systèmes générateurs (symétriques) S de G (modulo la relation $S \sim \Sigma$) vérifiant $\sharp(S) \leq p$ et tels que G soit α -hyperbolique pour la distance algébrique associée à S (ici on note $[x]$ le plus grand entier inférieur ou égal à x).*

Remarque. Les hypothèses du lemme 3.0.20 impliquent que $p \geq 4$. (En

effet, S étant symétrique, si $p \leq 3$ et si G est sans torsion, alors S s'écrit comme $\{s, s^{-1}\}$ pour un $s \in G$, et G est isomorphe à \mathbb{Z}

Du théorème 3.0.18 (iii), combiné avec le lemme ci-dessus, on déduit directement le résultat suivant :

Corollaire 3.0.21. (corollaire 7.0.8 de la version italienne complète) *Soient $d, N \in \mathbb{N}$ des entiers positifs arbitraires et soit G une extension finie d'indice inférieur ou égal à d et sans torsion d'un groupe N -non abélien ayant la propriété de transitivité de la commutation. Alors l'ensemble des classes d'équivalence (par rapport à la relation " \sim " définie ci-dessus) des systèmes générateurs S de G tels que :*

- (a) G est α -hyperbolique par rapport à la distance algébrique associée à S ;
- (b) $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$

est un ensemble fini contenant au plus $2^{((d-1)(12\alpha+9))}([(d-3)/2]_+)$ éléments.

Remarque. *Si $d \leq 4$ on a toujours $\text{Ent}_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ (théorème 3.0.18 (iv)).*

L'hypothèse que le groupe G est sans torsion n'est pas vraiment nécessaire dans le lemme 3.0.20 et dans le corollaire 3.0.21 (comparer avec le corollaire 3.0.22 suivant). De plus, ce lemme et ce corollaire se réfèrent à des systèmes générateurs différents d'un groupe G fixé. Dans la suite, nous allons considérer des groupes différents munis de systèmes de générateurs différents. C'est pourquoi nous allons travailler dans la catégorie des groupes marqués et allons appliquer le corollaire 3.0.19.

Soit $\alpha \geq 0$ un nombre réel. *Un groupe marqué (G, S) est dit α -hyperbolique si le groupe G est α -hyperbolique par rapport à la distance algébrique associée à S .*

Corollaire 3.0.22. (corollaire 7.0.9 de la version italienne complète) *Soit $\alpha \geq 0$ un nombre réel, et soient $N, d \in \mathbb{N}$ des entiers positifs. Notons $h(\alpha, N, d)$ l'ensemble des classes de groupes marqués α -hyperboliques (G, S) (à isomorphisme de groupes marqués près), qui sont des extensions finies (d'indice inférieur ou égal à d) d'au moins un groupe N -non abélien qui satisfait la propriété de transitivité de la commutation. Alors, pour tous les éléments (G, S) de $h(\alpha, N, d)$ sauf un nombre fini, on a $\text{Ent}_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$.*

Remarquons que l'ensemble $h(\alpha, N, d)$ est non vide pour tous $\alpha \geq 0, N \geq 1$ et $d \geq 1$, puisqu'il contient les groupes libres de rang $k > 1$.

Il reste à comprendre si la valeur $\frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ est un minorant de l'entropie de tout groupe marqué $(G, S) \in h(\alpha, N, d)$. Par exemple, c'est le cas si $\alpha = 0$ (N

et d étant quelconques), puisque tout groupe 0-hyperbolique non élémentaire est d'entropie algébrique supérieure ou égale à $\text{Log}2$.

Rappelons que tout sous-groupe d'indice fini d'un groupe hyperbolique est lui-même hyperbolique (la propriété d'hyperbolicité étant un invariant de quasi-isométrie). Comme un groupe marqué α -hyperbolique sans torsion (Γ, Σ) est N -non abélien par la proposition 2.0.15 (pour une valeur de N dépendant de α et de $\sharp(\Sigma)$), on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 3.0.23. (corollaire 7.0.10 de la version italienne complète) *Soient $A, \alpha \geq 0$ des nombres réels et soit d un entier positif. Soit $h(A, \alpha, d)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes marqués A -hyperboliques (G, S) qui sont des extensions finies (d'indice inférieur ou égal à d) d'au moins un groupe hyperbolique non élémentaire et sans torsion Γ , α -hyperbolique par rapport à un système de générateurs Σ fixé. Alors tous les $(G, S) \in h(A, \alpha, d)$ sauf un nombre fini vérifient $\text{Ent}_S(G) \geq \frac{\text{Log}2}{3N}$, où N est une constante qui ne dépend que de α et de la cardinalité de Σ .*

Remarque. La valeur de A peut être arbitrairement grande par rapport à α , et α peut être choisi comme l'infimum, pour tous les systèmes de générateurs Σ de Γ de cardinalité majorée par une constante réelle $c > 0$, des constantes d'hyperbolicité de (Γ, d_Σ) ; on peut donc écrire N comme une fonction qui dépend seulement de c et α (la valeur exacte de N est donnée dans le schéma de preuve de la proposition 2.0.15).

Corollaire 3.0.24. (corollaire 7.0.11 de la version italienne complète) *Soit $\alpha \geq 0$, et soit Γ un groupe sans torsion et α -hyperbolique (non élémentaire) par rapport à un système de générateurs Σ . Soit G une extension finie de Γ . Alors, pour tout $A \geq 0$, au moins une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

(i) *l'infimum de $\text{Ent}_S(G)$, pour tous les systèmes de générateurs S de G tels que G soit A -hyperbolique par rapport à S , est atteint,*

ou

(ii) *pour tout système de générateurs S de G tel que G soit A -hyperbolique par rapport à S , on a $\text{Ent}_S(G) \geq \frac{\text{Log}2}{3N}$, où $N = N(\alpha, \sharp\Sigma)$ est la constante donnée dans l'énoncé du corollaire 3.0.23 et calculée dans le schéma de la preuve de la proposition 2.0.15.*

Remarques. Les résultats précédents sont liés aux questions ouvertes suivantes :

- (1) ([G]) Existe-t-elle une constante universelle $c > 0$ (indépendante de G) telle que $\text{Ent}_S(G) \geq c$ pour tout groupe hyperbolique non élémentaire G et tout système de générateurs S ?

- (2) ([Sa]) Est-ce que l'entropie algébrique des groupes hyperboliques est atteinte pour au moins un système de générateurs ?

Les questions précédentes sont très naturelles dans le cadre de la question générale de M. Gromov ([G-L-P]) qui consiste à établir si la croissance exponentielle implique la croissance exponentielle uniforme² et qui, après le contre-exemple de J. S. Wilson, est devenue : pour quelles classes de groupes la croissance exponentielle implique-t-elle la croissance exponentielle uniforme ?

Nous allons maintenant appliquer nos résultats aux groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes qui, suivant un résultat de M. Gromov (que l'on peut trouver, sous une forme plus générale, chez J. P. Serre ([Ser] p. 30), voir aussi l'Appendice B de la version italienne complète, théorème B.0.7), admettent des présentations dont les relations sont de longueur inférieure ou égale à 3 ([Gr2], Prop. 5.28). On obtient donc les résultats suivants :

Théorème 3.0.25. (théorème 7.0.12 de la version italienne complète)
Soient N et d deux entiers positifs arbitraires et soit $\chi(N, d)$ l'ensemble des variétés différentiables compactes X qui satisfont les propriétés suivantes :

- (i) $\pi_1(X)$ contient un sous-groupe N -non abélien d'indice inférieur ou égal à d qui satisfait la propriété de transitivité de la commutation ;
- (ii) il existe une métrique g sur X telle que :

$$\text{diam}(g) \cdot \text{Ent}_{\text{vol}}(g) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{6}.$$

Alors l'ensemble $\chi(N, d)$ contient un nombre fini (inférieur ou égal à $(d-3)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$) de types d'homotopie d'ordre 1. De plus, le premier nombre de Betti de toute variété $X \in \chi(N, d)$ satisfait $b_1(X) \leq d-1$.

²C'est à dire, on se demande si, pour un groupe G donné, le fait que $\text{Ent}_S(G) > 0$ pour tous les systèmes de générateurs S implique que $\inf_S \text{Ent}_S(G) = \text{Ent}_{\text{alg}}(G) > 0$ (voir, par exemple, l'Annexe C).

Corollaire 3.0.26. (corollaire 7.0.13 de la version italienne complète) *Soit $\bar{\chi}(\delta, d)$ l'ensemble des variétés différentiables compactes X qui satisfont, pour des valeurs arbitraires de $\delta \in (0, +\infty)$ et $d \in \mathbb{N}^*$, les propriétés suivantes :*

- (i) *X admet un revêtement fini X' (d'indice inférieur ou égal à d) qui peut être muni d'une métrique riemannienne g' telle que la courbure sectionnelle $K_{g'}$ et le rayon d'injectivité $\text{inj}(X', g')$ satisfont $K_{g'} \leq -1$ et $\text{inj}(X', g') \geq \delta$;*
- (ii) *X admet une métrique riemannienne g de courbure sectionnelle négative telle que*

$$\text{diam}(g) \cdot \text{Ent}_{\text{vol}}(g) \leq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{6}.$$

Alors l'ensemble $\bar{\chi}(\delta, d)$ contient un nombre fini de types d'homotopie, majoré par $(d - 4)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$ et, pour tout élément $X \in \bar{\chi}(\delta, d)$, on a $b_1(X) \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$.

Schéma de la preuve du théorème 3.0.25

Par la proposition 5.28 de [Gr2] et un résultat de Schwarz-Milnor ([Gr2], théorème 5.16), $\pi_1(X)$ admet une présentation $\langle S_g | R \rangle$ dont le système générateur S_g satisfait $\text{Ent}_{S_g}(\pi_1(X)) \leq 2\text{diam}(X, g)\text{Ent}_{\text{vol}}(X, g)$ et dont chaque relation $r \in R$ est de longueur (par rapport à la distance algébrique d_{S_g}) inférieure ou égale à 3. Par l'hypothèse (ii), on a donc $\text{Ent}_{S_g}(\pi_1(X)) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ et, en ajoutant l'hypothèse (i), on peut appliquer le corollaire 3.0.19 qui borne le nombre de groupes marqués $(\pi_1(X), S_g)$ possibles. Pour la majoration du nombre de Betti, on utilise le fait que $b_1(X) \leq \sharp(S_g)$. \square

Remarques.

- (a) Les métriques g' et g peuvent être choisies indépendamment.
- (b) L'énoncé du corollaire 3.0.26 reste valable quand la métrique g n'est pas supposée de courbure sectionnelle négative. Dans ce cas, seul le nombre des 1-types d'homotopie est fini. De plus, les majorants du nombre des 1-types d'homotopie possibles et du premier nombre de Betti sont alors respectivement $(d - 3)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$ et $(d - 1)$.
- (c) L'hypothèse (ii) du corollaire ne dépend pas de la dimension de la variété X . Ceci signifie que, pour toutes les dimensions $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ sauf un nombre fini, l'inégalité

$$\text{diam}(X^n, g) \cdot \text{Ent}_{\text{vol}}(X^n, g) \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{6}$$

vaut pour toutes les variétés riemanniennes n -dimensionnelles (X^n, g) de courbure strictement négative, qui satisfont l'hypothèse (i). En particulier, si $n \geq 4$ et si X^n est une variété localement symétrique compacte de rang 1 de type non compact (i.e. de courbure négative) nous pouvons donner un minorant du volume $\text{vol}(X^n)$ (l'entropie de ces variétés est connue et leur diamètre est borné en fonction du volume). Nous rappelons à ce propos que, si n est paire, en appliquant la formule de Allendoerfer-Chern-Weil, l'ensemble des valeurs des volumes de ces variétés est un sous-ensemble de l'ensemble $\alpha_n \cdot \mathbb{N}^*$, où α_n est une constante universelle fixée (par exemple, dans le cas hyperbolique réel, on a $\alpha_n = \text{vol}(S^n)$). On a alors le problème ouvert suivant : est-il possible, en utilisant l'inégalité ci-dessus, de prouver que les premières valeurs possibles pour les volumes (à savoir $\alpha_n, 2\alpha_n$ etc...) ne sont atteintes pour aucune dimension paire n sauf pour un nombre fini ?

Chapitre 4

Un lemme de Margulis pour les quasi-isométries

Rappelons les définitions suivantes :

Définition 4.0.27. (cf. [H1], p. 85) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et soient $\lambda \geq 1$, $c > 0$ des nombres réels. Une application $f : X \rightarrow Y$ est dite (λ, c) -immersion quasi-isométrique si pour tous les $x_1, x_2 \in X$, on a

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - c \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$$

et est dite c -quasi surjective si pour tout $y \in Y$ il existe un $x \in X$ tel que $d_Y(y, f(x)) \leq c$. Finalement, f est dite (λ, c) -quasi-isométrie si c'est une (λ, c) -immersion quasi-isométrique qui est de plus c -quasi surjective.

Définition 4.0.28. (cf. [F-M], p. 623) Soit (X, d) un espace métrique et G un groupe. Une application $\phi : G \times X \rightarrow X$ est dite c -quasi-action de G sur X si, pour tout couple $g_1, g_2 \in G$ et tout $x \in X$, on a $d(x, \phi(e)x) \leq c$ (où e est l'élément neutre de G) et $d(\phi(g_1 g_2)x, \phi(g_1)\phi(g_2)x) \leq c$ (ici $\phi(g, x)$ est noté $\phi(g)x$).

Exemples. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques tels que leur distance de Gromov-Hausdorff $d_{GH}(X, Y)$ soit inférieure à ε . Rappelons que ceci signifie qu'il existe deux applications $\phi : X \rightarrow Y$ et $\psi : Y \rightarrow X$ telles que : $|d_Y(\phi(x), \phi(x')) - d_X(x, x')| < 2\varepsilon$; $|d_X(\psi(y), \psi(y')) - d_Y(y, y')| < 2\varepsilon$; $d_X(\psi(\phi(x)), x) < 2\varepsilon$; $d_X(\phi(\psi(y)), y) < 2\varepsilon$. Si Γ est un groupe qui agit par isométries sur X , l'application $\rho : \Gamma \times Y \rightarrow Y$ définie par $\rho(\gamma, y) = \phi(\gamma \cdot \psi(y))$ est une 4ε -quasi-action par $(1, 6\varepsilon)$ -quasi-isométries (pour les détails, voir page 143).

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et $G = \pi_1(M)$ son groupe fondamental. Soit G' un groupe quasi-isométrique à G (par rapport aux distances algébriques $d_{S'}$ et d_S associées à deux systèmes de générateurs S' et S fixés respectivement sur G' et G). Par définition, il existe une quasi-isométrie $\phi : (G, d_S) \rightarrow (G', d_{S'})$ et une quasi-inverse $\bar{\phi} : (G', d_{S'}) \rightarrow (G, d_S)$ de ϕ . Comme G agit par isométries et de manière co-compacte sur le revêtement universel Riemannien (\tilde{M}, \tilde{g}) de (M, g) , il existe par ailleurs deux quasi-isométries $f : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (G, d_S)$ et $\bar{f} : (G, d_S) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ l'une étant quasi-inverse de l'autre. Alors l'application $\rho : G' \times \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ définie par $\rho(\gamma, \tilde{x}) = (\bar{f} \circ \bar{\phi})(\gamma \cdot (\phi \circ f)(\tilde{x}))$ est une quasi-action par quasi-isométries (pour les détails, voir page 144).

Théorème 4.0.29. (théorème 8.1.3 de la version italienne complète) *Soit N un entier positif, et soit Γ un groupe N -non abélien. Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré connexe, dont l'entropie vérifie $\text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$, où H est un nombre réel positif arbitraire. Soient $C \geq 0$, $L \geq 1$ et $A \geq 0$ des nombres réels, supposons qu'il existe une C -quasi-action par (L, A) -quasi-isométries de Γ sur X (notée $(\gamma, x) \rightarrow \gamma \cdot x$), qui vérifie les hypothèses suivantes :*

- (i) *il existe $x_0 \in X$ tel que, pour tout $R > 0$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq R\}$ est fini.*
- (ii) *il existe un point $x_0 \in X$ et un nombre réel $\alpha_0 > 0$ tels que $\inf_{\gamma \in \Gamma} \mu(B(\gamma \cdot x_0, \alpha_0)) > 0$ (où $B(\gamma \cdot x_0, \alpha_0)$ désigne la boule de (X, d) de centre $\gamma \cdot x_0$ et de rayon α_0).*

Alors :

- (1) *pour tout $x \in X$ et tous les $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ qui ne commutent pas, on a*

$$NL^2d(x, \gamma_2 \cdot x) + (NL + 1)(A + C) \geq \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H[NL^2d(x, \gamma_1 \cdot x) + (NL + 1)(A + C)]}} \right);$$

- (2) *pour tout $x \in X$ et tous les $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ qui ne commutent pas, on a*

$$\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{1}{NL^2} \left[\frac{\text{Log} 2}{H} - (NL + 1)(A + C) \right];$$

- (3) *pour tout $x \in X$ et tout $\eta > 0$, notons $\Gamma_\eta(x)$ le sous-groupe de Γ engendré par l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma \cdot x) < \eta\}$. Si $\eta < \frac{1}{NL^2} \left[\frac{\text{Log} 2}{H} - (NL + 1)(A + C) \right]$, alors $\Gamma_\eta(x)$ est abélien ;*

- (4) *supposons que Γ satisfait la propriété de transitivité de la commutation. Alors, il existe un point $x_1 \in X$ tel que*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_1, \gamma \cdot x_1) \geq \frac{1}{NL^3} \left[\frac{\text{Log} 2}{H} - (NL + 1)(A + C) - NL^2(A + 3C + LC) \right].$$

Remarque. A la différence de ce qui figurait dans les théorèmes précédents (voir en particulier le théorème 1.0.4), l'hypothèse de compacité locale n'est plus nécessaire dans le théorème 4.0.29 ; elle est en effet remplacée par l'hypothèse (i).

Remarques. Lorsque $L = 1$ et $A = C = 0$, la quasi-action est une action par isométries et nous retrouvons les inégalités du théorème 2.0.12 et du

théorème 2.0.13. Il est donc légitime de se demander si le théorème 4.0.29 ne peut être obtenu comme corollaire des théorèmes 2.0.12 et 2.0.13, en montrant que toute quasi-action ρ_1 de Γ sur (X, d) par quasi-isométries est (presque) conjuguée à une vraie action par isométries ρ_2 de Γ sur un espace (Y, d') quasi-isométrique à (X, d) (ce qui signifie que la quasi-isométrie $\phi : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ vérifie $d'(\phi(\rho_1(\gamma) \cdot x), \rho_2(\gamma) \cdot \phi(x)) \leq C$ pour tout x). Cette question est voisine d'autres questions plus classiques sur les quasi-isométries, que nous résumerons comme suit : soient $\rho_1 : \Gamma \times X \rightarrow X$ et $\rho_2 : \Gamma \times X \rightarrow X$ deux quasi-actions d'un groupe Γ sur un espace métrique (X, d) , nous dirons que ρ_1 et ρ_2 sont *équivalentes* s'il existe $C > 0$ tel que $d(\rho_1(\gamma)x, \rho_2(\gamma)x) \leq C$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in X$. Si ρ_1 est une action par quasi-isométries d'un groupe Γ sur X , on se pose les questions suivantes :

- (1) existe-t-elle une action par isométries ρ_2 de Γ sur X équivalente à ρ_1 ?
- (2) existe-t-elle une action ρ_2 de Γ sur X par homéomorphismes bi-lipschitz (c'est à dire par $(\lambda, 0)$ -quasi-isométries bijectives) équivalente à ρ_1 ?
- (3) Si ρ_1 est une quasi-action par quasi-isométries de Γ sur X , existe-t-elle une action ρ_2 de Γ sur X par quasi-isométries équivalente à ρ_1 ?

Dans un travail récent ([M-S-W]) il a été prouvé que les groupes $G_1 = \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p$ et $G_2 = \mathbb{Z}_q * \mathbb{Z}_q$ (où $p, q \in \mathbb{Z}$ sont deux nombres premiers distincts) ne peuvent pas agir par isométries sur un même espace géodésique propre de façon discrète et cocompacte. D'autre part, si $p, q \geq 3$, alors G_1 et G_2 sont quasi-isométriques (par rapport aux distances des mots d_{S_1}, d_{S_2} associées à deux systèmes de générateurs arbitraires S_1 et S_2 sur G_1 et G_2 respectivement, voir [H1], page 105) et il existe une quasi-action par quasi-isométries de G_1 sur le graphe de Cayley $\mathbb{C}(G_2, S_2)$ ¹, alors qu'il n'existe aucune action par isométries de G_1 sur ce même graphe de Cayley. Cet exemple répond partiellement à la question (1) puisqu'il s'agit d'une quasi-action par quasi-isométries qui n'est équivalente à aucune action *discrète* par isométries.

Pour ce qui concerne la question (2), remarquons que, si Γ_1 et Γ_2 sont des groupes non-moyennables quasi-isométriques, d'après un résultat de K. Whyte (voir [H1], page 104) ils sont bi-lipschitz équivalents, et donc il existe une action par homéomorphismes bi-lipschitz de Γ_1 sur (Γ_2, Σ_2) , où Σ_2 est un système de générateurs arbitraire de Γ_2 .

La question (3), pour ce qui concerne le cas d'une quasi-action discrète et cocompacte sur un espace géodésique propre, apparaît comme question ouverte dans un travail de B. Farb et L. Mosher ([F-M]). Si X est un espace riemannien symétrique différent de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ et de l'espace

¹Pour le voir, reprendre la construction de l'exemple de la page 38, en remplaçant G, G' et (\tilde{M}, \tilde{g}) respectivement par G_2, G_1 et $\mathbb{C}(G_2, S_2)$.

hyperbolique complexe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, P. Pansu a donné une réponse partielle ([Pa]), en prouvant que toute quasi-action par quasi-isométries sur ces espaces est équivalente à une action isométrique.

Une collection de résultats récents sur les quasi-actions et les quasi-isométries peut être trouvée dans [K] (pages 77 et suivantes).

Schéma de la preuve du théorème 4.0.29 (pour une preuve détaillée, voir p. 145)

La preuve suit le même schéma que la preuve du théorème 1.0.4 et du théorème 1.0.3. Remarquons que l'inégalité triangulaire et la définition des quasi-isométries impliquent que les hypothèses (i) et (ii) sont automatiquement vraies pour tout $x_0 \in X$. Soit donc un point $x \in X$ arbitraire et soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ qui ne commutent pas. Comme Γ est N -non abélien, nous pouvons supposer (quitte à remplacer γ_2 par γ_2^{-1}) que γ_1^N et γ_2^N engendrent un semi-groupe libre F dans Γ . Chacune des arêtes du graphe de Cayley de F correspond à un élément (γ_1^N ou γ_2^N) générateur de F . En affectant chaque arête correspondant à γ_i^N ($i \in \{1, 2\}$) de la longueur $l(\gamma_i^N) = Ld(x, \gamma_i^N \cdot x) + A + C$, on munit le graphe de Cayley de F d'une distance de longueur d_l et d'une entropie correspondante h par rapport à la mesure de comptage. Le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 1.0.4 (cf. le lemme 5.4.14) donne : $e^{-h[Ld(x, \gamma_1^N \cdot x) + A + C]} + e^{-h[Ld(x, \gamma_2^N \cdot x) + A + C]} = 1$. Un calcul direct et l'inégalité $h \leq \text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$ (qui se déduit de l'hypothèse (ii)) donnent l'inégalité (1) du théorème; les inégalités (2) et (3) sont des corollaires immédiats. En raisonnant par l'absurde, si l'inégalité (4) est fautive, alors $\Gamma_\eta(x)$ est différent de $\{e\}$ et abélien pour tout $x \in X$ et pour $\eta = \frac{1}{NL^3} \left[\frac{\text{Log} 2}{H} - (NL + 1)(A + C) - NL^2(A + 3C + LC) \right]$. On considère la classe d'équivalence $K_\eta(x)$ de $\Gamma_\eta(x) \setminus \{e\}$ par rapport à la relation de commutation (qui est transitive) et on démontre que l'application $x \mapsto K_\eta(x)$ est constante sur X . Posons $\Gamma_0 = K_\eta(x) \cup \{e\}$. On observe que, pour tout $g \in \Gamma$, on a $\Gamma_\eta(g \cdot x) \subseteq g\Gamma_{L\eta+A+(3+L)C}(x)g^{-1}$; comme $\Gamma_{L\eta+A+(3+L)C}(x)$ est aussi abélien par (3), il s'ensuit que $g\Gamma_0g^{-1} \subseteq \Gamma_0$, et donc que Γ_0 est normal dans Γ , ce qui contredit la définition d'un groupe N -non abélien. \square

La version italienne de la thèse (qui fait l'objet des chapitres 5, 6, 7, et 8) est suivie de 3 annexes qui servent à compléter le contexte de cette thèse et à donner des précisions sur quelques résultats classiques utilisés.

Dans l'Annexe A, nous décrivons en détails la construction du graphe de Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ d'un groupe finiment engendré G par rapport à un système de générateurs fini S .

Dans l'Annexe B, nous démontrons en détails un théorème général de J. P. Serre qui permet d'associer, à un groupe qui agit sur un espace métrique connexe et simplement connexe et au choix d'un ouvert connexe contenant un domaine fondamental de cette action, une présentation canonique dont les relations sont de longueur algébrique inférieure ou égale à 3. Nous appliquons ce théorème au cas où le groupe considéré est le groupe fondamental d'une variété riemannienne de diamètre borné ², ce qui donne une preuve d'un théorème classique de M. Gromov. Nous appliquons aussi ce théorème au cas où le groupe considéré est hyperbolique au sens de Gromov. Ces résultats sont largement utilisés dans le Chapitre 3 ci-dessus. Nous terminons par des rappels sur le lemme du Ping-Pong.

L'Annexe C traite de la croissance des groupes et, dans le cas où la croissance est exponentielle, de leur entropie algébrique. Une des motivations est une conjecture de M. Gromov qui pose la question de savoir s'il y a équivalence entre croissance exponentielle et croissance exponentielle uniforme ³. Nous rappelons à ce propos un certain nombre de minoration classiques de l'entropie algébrique dans le cas des groupes libres, des groupes quotients, des sous-groupes d'indice fini, des produits amalgamés, des extensions HNN et des groupes ayant une infinité de bouts (via le théorème de Stallings). Dans le cas des groupes fondamentaux de variétés riemanniennes, nous rappelons les rapports (classiques) entre type de croissance et hypothèses de courbure. Quelques autres résultats concernant les groupes moyennables et les groupes résolubles⁴ sont également rappelés. Enfin nous détaillons un exemple (dû à R. Grigorchuk et P. de La Harpe) de suite de groupes dont l'entropie algébrique tend vers zéro par valeurs strictement positives.

L'Annexe C dresse donc le cadre dans lequel s'insèrent les résultats du chapitre 3; de plus, un certain nombre des arguments exposés dans cette annexe

²Cette présentation est alors fortement liée aux propriétés géométriques de l'action, en particulier le système générateur est alors l'ensemble des éléments γ du groupe tels que $d(x, \gamma(x)) \leq 2D$, où D désigne le majorant du diamètre.

³C'est à dire, on se demande si, pour un groupe G donné, le fait que $\text{Ent}_S(G)$ soit strictement positif pour tout système de générateurs S implique que l'entropie algébrique $\inf_S \text{Ent}_S(G) = \text{Ent}_{\text{alg}}(G)$ est également strictement positive.

⁴en particulier la résolution par D. V. Osin de la conjecture de Gromov dans le cas résoluble.

interviennent dans les preuves des résultats des chapitres 2 et 3.

VERSION ITALIENNE

COMPLETE - Introduzione

Il celebre Lemma di Margulis (Teorema 5.1.2) afferma che, data una varietà Riemanniana X n -dimensionale completa a curvatura sezionale strettamente negativa e maggiore o uguale a -1 , esiste una costante reale positiva $\varepsilon_0(n)$ tale che per ogni $x \in X$ il sottogruppo del gruppo fondamentale di X generato dai lacci centrati in x di lunghezza inferiore a $\varepsilon_0(n)$, è quasi-nilpotente.

Se decomponiamo la varietà in una parte "sottile" (i.e. l'insieme dei punti in cui il raggio d'iniettività della varietà è minore di $\varepsilon_0(n)/2$) e una parte "spessa" (i.e. il complementare della parte sottile), il risultato di Margulis implica che le componenti connesse della "parte sottile" sono topologicamente semplici, mentre i teoremi di finitezza classici di J. Cheeger e M. Gromov limitano a un numero finito i possibili tipi topologici della "parte spessa".

Se il diametro della varietà è limitato superiormente da una costante positiva D , si dimostra che non esiste alcuna parte "sottile" perchè, in questo caso, esiste una costante universale $\varepsilon(n, D)$ che minora il raggio d'iniettività della varietà in ogni punto (cfr. Teorema 5.2.5) e i teoremi di finitezza si applicano all'intera varietà.

Il Lemma di Margulis, la cui dimostrazione si basa sulle proprietà dinamiche dell'azione del gruppo fondamentale della varietà sul suo rivestimento universale, è uno strumento essenziale nello studio della topologia delle varietà a curvatura negativa limitata. Margulis ha stabilito anche una versione del Lemma valida per azioni discrete e prive di punti fissi di gruppi di isometrie su varietà semplicemente connesse a curvatura negativa, per la cui dimostrazione le proprietà algebriche di tali gruppi svolgono un ruolo fondamentale.

Alla luce di un recente lavoro ([B-C-G]) di G. Besson, G. Courtois e S. Gallot, si ha che tali proprietà algebriche sono sufficienti da sole a garantire il risultato, a patto di far intervenire tra le ipotesi una maggiorazione di un invariante geometrico della varietà, cioè l'*entropia* (cfr. Definizione 5.3.1), di omogeneità inversa rispetto alla metrica. Questo invariante, che esprime il tasso di crescita esponenziale della misura delle bolle del rivestimento uni-

versale Riemanniano, si può definire in generale per spazi metrici dotati di una misura e consente di normalizzare, rendendole insensibili alle omotetie, quantità quali il raggio di iniettività e la lunghezza minima dei lacci non omotopi a zero.

La maggiorazione dell'entropia sostituisce così la limitazione dal basso della curvatura, mentre l'ipotesi sul segno della stessa viene sostituita dall'ipotesi che il gruppo di isometrie considerato sia simile al gruppo fondamentale di una varietà a curvatura negativa, in un senso precisato dalla nozione, essenziale in [B-C-G], di *gruppo δ -non abeliano* (Definizione 5.3.3).

Un vantaggio di questa nuova impostazione è che l'entropia, contrariamente alla curvatura, è quasi insensibile a modificazioni anche drastiche della metrica e della topologia. Esempi che evidenziano questo fatto sono costruiti esplicitamente in [Re], e sono in parte riportati nel Paragrafo 1.3 di questa tesi.

Daremo qui una descrizione della geometria e della topologia della "parte sottile" che segue dal lemma di Margulis generalizzato in [B-C-G] seguendo un punto di vista leggermente diverso. Più precisamente, nel caso di varietà mostreremo esplicitamente che la bolla geodetica di raggio $\sim C \cdot \text{Log}(\frac{1}{\varepsilon})$, centrata in un punto della parte sottile di raggio d'iniettività ε , è diffeomorfa isometricamente alla stessa bolla in un cilindro ottenuto quotizzando il rivestimento universale tramite un gruppo di isometrie isomorfo a \mathbb{Z} (cfr. Proposizione 5.4.3).

Abbiamo strutturato questa tesi in un testo (costituito di quattro capitoli) e in tre appendici : nel testo si è cercato di fare un'esposizione in cui il filo conduttore fosse sempre presente e chiaro, rinviando alle appendici i richiami di tutti i fatti necessari alla comprensione ma collaterali. Nelle appendici sono raccolti questi fatti senza alcuna pretesa di organicità (tra l'altro, abbiamo inserito molti riferimenti bibliografici) ma dandone una presentazione finalizzata al modo in cui essi vengono utilizzati nel testo.

Nel primo capitolo si dà un'esposizione approfondita e autocontenuta sia del Lemma di Margulis classico che della sua generalizzazione in [B-C-G]. Nel Paragrafo 1.4 il risultato principale di [B-C-G] viene esteso ad azioni non necessariamente prive di punti fissi, e vengono migliorate alcune delle stime che vi compaiono (Teorema 5.4.1), così da renderle ottimali nel caso dei cosiddetti "gruppi di superfici" (Teorema 5.4.15).

Il secondo capitolo è dedicato a esempi di gruppi con la proprietà di δ -non abelianità i quali non siano gruppi fondamentali di varietà a curvatura negativa. Inoltre, si definiscono delle nuove proprietà puramente algebriche (*proprietà FSG(N)* e *proprietà NAS*) che, completando il percorso di generalizzazione iniziato in [B-C-G], semplificano definizioni e dimostrazioni, e nel

contempo forniscono una gran quantità di nuovi esempi di gruppi che verificano il Lemma di Margulis generalizzato (*prodotti liberi, prodotti amalgamati, limiti di gruppi e gruppi iperbolici secondo Gromov*).

Nel terzo capitolo si ottengono nuove applicazioni dei teoremi di [B-C-G] (riformulati ed estesi attraverso i risultati del Capitolo 2) che conducono a teoremi di finitezza per gruppi discreti. Questi ultimi sono stati dimostrati in un articolo pubblicato nel 2004 ([Z]).

Dati un gruppo finitamente generato G e un suo sistema di generatori S , alla coppia (G, S) si può associare uno spazio metrico (detto grafo di Cayley) sul quale G , e più in generale i suoi sottogruppi, agiscono per isometrie e in modo discreto. Se supponiamo che G contenga sottogruppi con le proprietà considerate nel capitolo 2 (*N -non abeliani*), allora con un'ipotesi di limitazione dell'entropia algebrica di G rispetto a S si ottiene una limitazione sul numero degli elementi di S . Tale risultato implica teoremi di finitezza (Corollario 7.0.6, Corollario 7.0.9, Teorema 7.0.12, Corollario 7.0.13) per classi di gruppi che ammettono un controllo sulla lunghezza delle relazioni di una presentazione (ad esempio i gruppi iperbolici secondo Gromov, o i gruppi fondamentali di varietà Riemanniane compatte). Formulati opportunamente, questi teoremi fanno luce anche sul problema dell'esistenza di una minora-zione universale per l'entropia algebrica dei gruppi iperbolici non elementari, che risale ai risultati di M. Koubi ([Ko]) e rientra nel quadro della congettura di M. Gromov sull'entropia algebrica, alla quale J. S. Wilson ([Wi]) ha recentemente dato un controesempio non iperbolico.

Nel Capitolo 4 i risultati di [B-C-G] vengono estesi a quasi azioni per quasi isometrie (Teorema 8.1.3). Una quasi azione di un gruppo su uno spazio X è il dato, per ogni elemento del gruppo, di una quasi isometria di X , tale che al prodotto di due elementi del gruppo non corrisponde la composizione delle quasi-isometrie corrispondenti (come accade per le azioni), ma un'applicazione uniformemente "vicina" (nel senso della topologia della convergenza uniforme) a tale composizione. Le quasi azioni compaiono naturalmente quando si considerano quasi isometrie tra gruppi e spazi metrici, e sono lo strumento chiave nella dimostrazione di recenti risultati di rigidità quasi isometrica dovuti a M. Kapovich, P. Pansu, B. Farb e altri.

Sviluppi e applicazioni dei risultati del Capitolo 4 sono argomento di studio in un lavoro attualmente in corso.

Chapitre 5

Il Lemma classico di Margulis e una sua generalizzazione

Lo scopo di questo capitolo è presentare, illustrandola, una versione generalizzata del Lemma (classico) di Margulis dimostrata da G. Besson, G. Courtois e S. Gallot in un lavoro del 2003 ([B-C-G]), a partire dalla quale si sono ottenuti alcuni nuovi risultati, descritti nel Paragrafo 1.4.

Il capitolo è organizzato come segue : nel Paragrafo 1.1 vengono richiamate le nozioni di base sui rivestimenti e i concetti fondamentali che intervengono nell'enunciato del Lemma di Margulis classico di cui nel paragrafo successivo si analizzano le principali conseguenze. In particolare, si discutono la topologia delle varietà a curvatura negativa limitata, le minorazioni sul raggio di iniettività come pure il ruolo che il Lemma classico riveste relativamente ai risultati di compattezza e finitezza per la distanza di Gromov-Hausdorff.

Nel Paragrafo 1.3 vengono introdotte nozioni (come quella di entropia e di gruppo δ -non abeliano) che saranno fondamentali in tutta la tesi.

Il Paragrafo 1.4 contiene il primo risultato originale di questa tesi : una versione leggermente migliorata del teorema principale di [B-C-G].

Allo scopo di facilitare il lettore, tutte le dimostrazioni dei risultati che presentiamo sono state rinviate alla fine dei vari paragrafi.

5.1 Rivestimenti e gruppi di lacci di lunghezza limitata

Sia M una varietà Riemanniana connessa, sia $x \in M$ e sia $\pi_1(M, x)$ il gruppo fondamentale di M centrato in x . Per ogni numero reale $R > 0$, definiamo $\Pi_{2R}(x)$ come il sottogruppo di $\pi_1(M, x)$ generato dalle classi di tutti i lacci di lunghezza $l < 2R$ e centrati in x . Si ha la seguente :

Proposition 5.1.1. *Sia M una varietà Riemanniana, sia $x \in M$ e sia $\pi_1(M, x)$ il suo gruppo fondamentale. Sia $p : \bar{M} \rightarrow M$ un rappresentante della classe di isomorfismo dei rivestimenti Riemanniani di M corrispondenti alla classe di coniugazione di $\Pi_{2R}(x)$ in $\pi_1(M, x)$, e sia \bar{x} un punto di $p^{-1}(x)$ tale che $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x})) = \Pi_{2R}(x)$. Allora p è un diffeomorfismo isometrico (i.e. un diffeomorfismo globale che preserva la metrica Riemanniana) dalla bolla $B(\bar{x}, R)$ di \bar{M} alla bolla $B(x, R)$ di M .*

Remarques. Il gruppo $\Pi_{2R}(x)$ agisce sullo spazio totale del rivestimento universale $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ di M identificandosi a un sottogruppo, denotato $\Gamma_{2R}(\tilde{x})$, del gruppo degli automorfismi di questo rivestimento. L'identificazione dipende dalla scelta di un punto $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ (cfr. Osservazioni 5.1.3). Fatta tale scelta, il rivestimento della proposizione può essere costruito ponendo $\bar{M} = \tilde{M}/\Gamma_{2R}(\tilde{x})$: in questo caso, bisogna scegliere $\bar{x} = \bar{\pi}(\tilde{x})$, dove $\bar{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ è l'applicazione di passaggio al quoziente (si veda la dimostrazione della proposizione a pag. 54).

La proposizione 5.1.1 afferma che data una qualunque varietà Riemanniana M , è possibile costruire una varietà Riemanniana topologicamente più semplice (il rivestimento \bar{M}) la quale, a distanza finita, (i.e. su una bolla di raggio R) ha la stessa geometria che M ha a distanza finita. Il nostro scopo è ottenere sia un valore di R che sia il più grande possibile, sia una varietà \bar{M} la più semplice possibile. Vogliamo inoltre che il procedimento di costruzione di \bar{M} si applichi senza cambiamenti alla classe di varietà più ampia possibile. Tutto ciò comporta che R dovrà essere maggiore di una certa costante universale ε_0 indipendente dalla varietà, ma non troppo grande (se $R = \text{diam}(M, g)$, allora $(\bar{M}, \bar{g}) = (M, g)$ e non rispettiamo la condizione di semplicità). Questo problema ammette la formulazione algebrica seguente : si trovi il più grande valore di R tale che il gruppo $\Gamma_{2R}(\tilde{x})$ sia il più semplice possibile. (La risposta che, a seconda dei casi, troveremo sarà che $\Gamma_{2R}(\tilde{x})$ risulta essere isomorfo a $\{0\}$ o a \mathbb{Z} , oppure abeliano o nilpotente). Un primo passo in questa direzione è proprio il teorema che segue.

Théorème 5.1.2. (Lemma di Margulis, 1978) *Sia (M^n, g) una varietà Riemanniana completa di curvatura sezionale che soddisfa $-K_0^2 \leq K < 0$ per qualche costante $K_0 \in \mathbb{R}$. Allora esiste una costante $\varepsilon_0(n)$ (detta costante di Margulis) tale che, per ogni punto $x \in M^n$ e ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)/K_0$, il gruppo $\Pi_\varepsilon(x)$ è quasi nilpotente.*

Notiamo che una conseguenza del Lemma di Margulis e della Proposizione 5.1.1, rilevante in questo contesto è che su una varietà M che verifica le ipotesi

del Lemma di Margulis le bolle di raggio $\varepsilon_0(n)/2K_0$ sono diffeomorfe in modo isometrico a una bolla del quoziente di \bar{M} rispetto a un gruppo quasi nilpotente (che sarà isomorfo a $\{e\}$ o a \mathbb{Z} se M è compatta, cfr. Corollario 5.2.2). Si noti che in questo caso \bar{M} è diffeomorfa a \mathbb{R}^n e quindi \bar{M} è diffeomorfa a \mathbb{R}^n oppure a un cilindro \mathbb{R}^n/\mathbb{Z} , per cui ha una forma "semplice".

Richiamiamo ora alcuni fatti fondamentali sui rivestimenti Riemanniani che occorrono per dimostrare la Proposizione 5.1.1 e discutere il Teorema 5.1.2. Rimandiamo il lettore a [Ma], [DoC] e [Rot] rispettivamente per le nozioni di base di topologia algebrica, di geometria differenziale e Riemanniana e i fondamenti della teoria dei gruppi .

Rivestimenti Riemanniani e Proposizione 5.1.1

Siano M, \bar{M} varietà differenziabili. Un'applicazione differenziabile $p : \bar{M} \rightarrow M$ si dice *rivestimento* se è suriettiva e se, per ogni punto $x \in M$, esiste un intorno aperto U_x connesso per archi tale che p invia diffeomorficamente su U_x ogni componente connessa di $p^{-1}(U_x)$. Un intorno di $x \in M$ che soddisfi tale proprietà è detto *intorno elementare* e diremo anche che \bar{M} *riveste* M . Si noti che un rivestimento è un diffeomorfismo locale.

Siano $p_1 : \bar{M}_1 \rightarrow M$ e $p_2 : \bar{M}_2 \rightarrow M$ due rivestimenti di M . Un'applicazione differenziabile $\phi : \bar{M}_1 \rightarrow \bar{M}_2$ tale che $p_1 = p_2 \circ \phi$ si dice *omomorfismo di rivestimenti*. Se esiste un omomorfismo di rivestimenti $\psi : \bar{M}_2 \rightarrow \bar{M}_1$ tale che $\phi \circ \psi = Id_{\bar{M}_2}$ e $\psi \circ \phi = Id_{\bar{M}_1}$, allora ϕ si dice *isomorfismo di rivestimenti* (e i rivestimenti p_1 e p_2 si dicono in tal caso isomorfi). Se $\bar{M}_1 = \bar{M}_2 = \bar{M}$ e $p_1 = p_2$, l'isomorfismo ϕ è detto *automorfismo di rivestimento*. La totalità degli automorfismi di rivestimento con l'operazione di composizione di applicazioni forma un gruppo, che denotiamo $Aut(\bar{M})$.

Sia $p : \bar{M} \rightarrow M$ un rivestimento di una varietà M , e sia $\bar{x} \in \bar{M}$. Allora l'applicazione indotta sui gruppi fondamentali $p_* : \pi_1(\bar{M}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(M, p(\bar{x}))$, la quale associa alla classe di omotopia di un laccio \bar{c} centrato in \bar{x} la classe di omotopia del laccio $p \circ \bar{c}$, è iniettiva, e identifica il gruppo fondamentale di \bar{M} a un sottogruppo del gruppo fondamentale di M . In effetti si dimostra che i rivestimenti di una varietà M sono in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugio dei sottogruppi del gruppo fondamentale di M . Più precisamente, valgono le seguenti proprietà :

- (1) per ogni sottogruppo H di $\pi_1(M, x)$, esistono un rivestimento $p : \bar{M} \rightarrow M$ di M e un punto $\bar{x} \in \bar{M}$ tali che $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x})) = H$.
- (2) due rivestimenti $p_1 : \bar{M}_1 \rightarrow M$ e $p_2 : \bar{M}_2 \rightarrow M$ sono isomorfi se e solo se i sottogruppi $p_{1*}(\pi_1(\bar{M}_1, \bar{x}_1))$ e $p_{2*}(\pi_1(\bar{M}_2, \bar{x}_2))$ appartengono alla stessa classe di coniugio in $\pi_1(M, x)$ (dove $p_1(\bar{x}_1) = p_2(\bar{x}_2) = x$).

Esiste un unico rivestimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ tale che la varietà \tilde{M} sia semplicemente connessa : esso è detto *rivestimento universale* di M . Il rivestimento universale di una varietà M riveste ogni altro rivestimento di M .

Tra i rivestimenti $p : \bar{M} \rightarrow M$ di una varietà M , distinguiamo quelli tali che $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ è un sottogruppo normale in $\pi_1(M, x)$, che sono detti *regolari* o *di Galois*. In questo caso, ogni elemento del gruppo fondamentale di M agisce per automorfismi di rivestimento su \bar{M} , e gli elementi di $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ agiscono come l'identità. In particolare, se $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ è il rivestimento universale di M , per ogni $x \in M$ e ogni $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, si definisce un isomorfismo $\phi_{\tilde{x}} : \pi_1(M, x) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{M})$ tra il gruppo fondamentale di M e il gruppo degli automorfismi di \tilde{M} in questo modo : per ogni $\gamma \in \pi_1(M, x)$, se c è un laccio che rappresenta γ , $\phi_{\tilde{x}}(\gamma)$ è l'unico elemento di $\text{Aut}(\tilde{M})$ tale che $\phi_{\tilde{x}}(\gamma) \cdot \tilde{x}$ sia l'estremo finale del sollevamento \tilde{c} del laccio c con origine \tilde{x} . Reciprocamente, per ogni $g \in \text{Aut}(\tilde{M})$ si definisce $\phi_{\tilde{x}}^{-1}(g)$ come la classe del laccio $p \circ \tilde{c}$, dove \tilde{c} è un cammino qualunque di origine \tilde{x} e estremo finale $g \cdot \tilde{x}$. Questo isomorfismo dipende da x ma anche dalla scelta di \tilde{x} in $\pi^{-1}(x)$: più precisamente, per ogni $g \in \text{Aut}(\tilde{M})$, si ha $g \cdot \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ e $\phi_{g \cdot \tilde{x}}(\gamma) = g \circ \phi_{\tilde{x}}(\gamma) \circ g^{-1}$. (Per le dimostrazioni di questi e altri fatti sui rivestimenti richiamiamo il lettore ai paragrafi 5.7 e 5.8 di [Ma]).

Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e sia $p : \bar{M} \rightarrow M$ un rivestimento. Allora \bar{M} può essere dotata della *metrica sollevata* \bar{g} (definita per tutti i vettori tangenti v, w su \bar{M} dall'identità $\bar{g}(v, w) = g(dp(v), dp(w))$, dove dp denota il differenziale di p) e p è detto *rivestimento Riemanniano*. Un automorfismo di rivestimento ϕ è allora un'isometria di (\bar{M}, \bar{g}) . Infatti, $p \circ \phi = p$, da cui

$$\bar{g}(d\phi(v), d\phi(w)) = g(dp \circ d\phi(v), dp \circ d\phi(w)) = g(dp(v), dp(w)) = \bar{g}(v, w).$$

Notiamo inoltre che un rivestimento Riemanniano $p : \bar{M} \rightarrow M$ è un'isometria locale che, in quanto tale, conserva le lunghezze delle curve e invia geodetiche in geodetiche. Se ne deduce che p è globalmente una contrazione, perchè, se \bar{c} varia tra tutte le curve che uniscono \bar{x} e \bar{y} , allora

$$d(p(\bar{x}), p(\bar{y})) \leq \inf_{\bar{c}}(\text{lunghezza di } p \circ \bar{c}) = \inf_{\bar{c}}(\text{lunghezza di } \bar{c}) = d(\bar{x}, \bar{y}).$$

Ne discende che se $p : \bar{M} \rightarrow M$ è un rivestimento Riemanniano regolare (di Galois), dati due punti $x, y \in M$, si ha $d(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\bar{x}, \gamma \cdot \bar{y}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma \cdot \bar{x}, \bar{y})$, dove $\Gamma = \text{Aut}(\bar{M})$ è il gruppo degli automorfismi di rivestimento, e dove \bar{x} e \bar{y} sono due punti arbitrariamente fissati in $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ rispettivamente. Infatti, $d(x, y)$ è uguale alla lunghezza di una geodetica minimizzante c che unisce x e y : sollevando c a una curva \bar{c} che parte da \bar{x} , si ottiene una geodetica della stessa lunghezza che termina in $\gamma \cdot \bar{y}$,

per qualche $\gamma \in \Gamma$. (Si noti che l'ipotesi sul rivestimento comporta che Γ agisce transitivamente su $p^{-1}(y)$). Se ne deduce che $d(x, y) = \text{lunghezza}(c) = \text{lunghezza}(\tilde{c}) \geq d(\bar{x}, \gamma \cdot \bar{y}) \geq \inf_{g \in \Gamma} d(\bar{x}, g \cdot \bar{y})$.

Si ha inoltre $d(x, y) \leq \inf_{g \in \Gamma} d(\bar{x}, g \cdot \bar{y})$, poichè p contrae le distanze.

Remarques 5.1.3. L'osservazione che segue sarà da noi utilizzata più volte. Consideriamo il rivestimento universale Riemanniano $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ e denotiamo $l(\gamma)$ la lunghezza del più piccolo laccio che rappresenta $\gamma \in \pi_1(M, x)$. Si ha allora $l_{\tilde{x}}(\phi_{\tilde{x}}(\gamma)) = l(\gamma)$, dove $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ e la lunghezza $l_{\tilde{x}}(g)$ di un elemento $g \in \text{Aut}(\tilde{M})$ è definita come $d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x})$. Infatti, dalla definizione di $\phi_{\tilde{x}}$ data prima si ha, per ogni $\varepsilon > 0$ e per una scelta opportuna del rappresentante c di γ ,

$$l(\gamma) \geq \text{lunghezza}(c) - \varepsilon = \text{lunghezza}(\tilde{c}) - \varepsilon \geq d(\tilde{x}, \phi_{\tilde{x}}(\gamma) \cdot \tilde{x}) - \varepsilon$$

(dove \tilde{c} denota un sollevamento di c con origine \tilde{x}) e inoltre, poichè (\tilde{M}, \tilde{g}) è uno spazio di lunghezza¹ esiste una curva \tilde{c} che unisce \tilde{x} a $\phi_{\tilde{x}}(\gamma) \cdot \tilde{x}$ tale che

$$d(\tilde{x}, \phi_{\tilde{x}}(\gamma) \cdot \tilde{x}) \geq l(\tilde{c}) - \varepsilon = l(\pi \circ \tilde{c}) - \varepsilon \geq l(\gamma) - \varepsilon$$

(notiamo che, in questo caso, $\pi \circ \tilde{c}$ rappresenta γ). Una conseguenza immediata di ciò è che $\inf_{g \in \text{Aut}(\tilde{M}) \setminus \{e\}} d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x})$ rappresenta la lunghezza del più piccolo laccio non omotopo a zero e centrato in $x = \pi(\tilde{x})$.

Dato un numero reale $R > 0$, definiamo $\Pi_{2R}(x)$ come il sottogruppo di $\pi_1(M, x)$ generato dagli elementi $\gamma \in \pi_1(M, x)$ tali che $l(\gamma) < 2R$.

Sia $\Gamma_{2R}(\tilde{x})$ il sottogruppo di $\text{Aut}(\tilde{M})$ generato dagli elementi g tali che $d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x}) < 2R$. Questi due sottogruppi sono legati dalla relazione $\phi_{\tilde{x}}(\Pi_{2R}(x)) = \Gamma_{2R}(\tilde{x})$. (Infatti, $l(\gamma) < 2R$ è equivalente a $l_{\tilde{x}}(\phi_{\tilde{x}}(\gamma)) < 2R$, che a sua volta equivale a $d(\tilde{x}, \phi_{\tilde{x}}(\gamma) \cdot \tilde{x}) < 2R$).

Data una varietà Riemanniana M , un suo rivestimento Riemanniano $p : \bar{M} \rightarrow M$, e un $\bar{x} \in p^{-1}(x)$, si vuole stabilire quando p è un diffeomorfismo isometrico della bolla $B(\bar{x}, R)$ centrata in \bar{x} e di raggio $R > 0$ sulla bolla $B(x, R)$. Come si è detto precedentemente, ciò può essere interpretato come il problema di descrivere la geometria di una bolla di raggio significativo di M in termini della geometria di una bolla dello stesso raggio in uno spazio più semplice. Dimostriamo ora la Proposizione 5.1.1.

¹Ciò significa che la distanza tra due punti è uguale all'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che li uniscono. Tratteremo in dettaglio gli spazi di lunghezza e le loro proprietà alla fine del Paragrafo 1.3 (pagina 74).

Dimostrazione della Proposizione 5.1.1.

Un passo preliminare alla dimostrazione vera e propria consiste nella costruzione esplicita del rivestimento $p : \overline{M} \rightarrow M$ che appare nell'enunciato della proposizione. Sia $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ il rivestimento universale di M , e sia $\Gamma_{2R}(\tilde{x})$ il sottogruppo di $\Gamma = \text{Aut}(\tilde{M})$ generato dagli automorfismi di rivestimento $g \in \Gamma$ tali che $d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x}) < 2R$, dove $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ (nelle Osservazioni 5.1.3, abbiamo mostrato che $\phi_{\tilde{x}}^{-1}(\Gamma_{2R}(\tilde{x})) = \Pi_{2R}(x)$). Sia $\overline{M} = \tilde{M}/\Gamma_{2R}(\tilde{x})$ e sia $\bar{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \overline{M}$ l'applicazione di passaggio al quoziente. La proiezione $\bar{\pi}$ è un rivestimento regolare in quanto Γ agisce su \tilde{M} in maniera propriamente discontinua e senza punti fissi ([Ma], Paragrafo 5.8). Per ogni $\bar{y} \in \overline{M}$, il rivestimento π è costante su $\bar{\pi}^{-1}(\bar{y})$ e risulta quindi definita un'unica applicazione $p : \overline{M} \rightarrow M$ tale che $p \circ \bar{\pi} = \pi$. Ora, p è un diffeomorfismo locale in quanto $dp \circ d\bar{\pi} = d\pi$ e l'essere π e $\bar{\pi}$ diffeomorfismi locali implica che $d\pi$ e $d\bar{\pi}$ siano isomorfismi (i differenziali si intendono applicati ai punti opportuni). Dotando \overline{M} della metrica sollevata definita per tutti i vettori tangenti v, w su \overline{M} dall'identità $\bar{g}(v, w) = g(dp(v), dp(w))$, si ottiene che p è un'isometria locale. Chiaramente p è suriettiva. Dimostriamo che essa è in realtà un rivestimento. Sia $\bar{y} \in \overline{M}$ e $\alpha = \inf_{g \in \Gamma \setminus \{id\}} d(\tilde{y}, g \cdot \tilde{y}) > 0$, dove $\tilde{y} \in \bar{\pi}^{-1}(\bar{y})$, e sia $\bar{y}' \in p^{-1}(p(\bar{y}))$ tale che $\bar{y}' \neq \bar{y}$. Essendo $\bar{y}' = \bar{\pi}(\gamma \cdot \tilde{y})$ per qualche $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_{2R}(\tilde{x})$, si ha che $d(\bar{y}, \bar{y}') = \inf_{g \in \Gamma_{2R}(\tilde{x})} d(\tilde{y}, g \gamma \cdot \tilde{y}) \geq \alpha > 0$. Ciò implica che le bolle $B(\bar{y}, \alpha/2)$ e $B(\bar{y}', \alpha/2)$ sono disgiunte.

Dimostriamo ora che $p^{-1}[B(p(\bar{y}), \alpha/2)] = \bigcup_{\bar{y}' \in p^{-1}(p(\bar{y}))} B(\bar{y}', \alpha/2)$. Se $\bar{z} \in B(\bar{y}', \alpha/2)$ per qualche $\bar{y}' \in p^{-1}(p(\bar{y}))$, allora $d(p(\bar{z}), p(\bar{y}')) < \alpha/2$ perchè p , essendo un'isometria locale, contrae le distanze. Poichè $p(\bar{y}) = p(\bar{y}')$, questo dimostra che $p^{-1}[B(p(\bar{y}), \alpha/2)] \supseteq \bigcup_{\bar{y}' \in p^{-1}(p(\bar{y}))} B(\bar{y}', \alpha/2)$. Se viceversa $\bar{z} \in p^{-1}[B(p(\bar{y}), \alpha/2)]$, i.e. $d(p(\bar{z}), p(\bar{y})) < \alpha/2$, allora dati $\tilde{z} \in \bar{\pi}^{-1}(\bar{z})$ e $\tilde{y} \in \bar{\pi}^{-1}(\bar{y})$, si ha che $d(\pi(\tilde{z}), \pi(\tilde{y})) = \inf_{g \in \Gamma} d(\tilde{z}, g \cdot \tilde{y}) < \alpha/2$. Esiste dunque $g \in \Gamma$ tale che $d(\bar{\pi}(\tilde{z}), \bar{\pi}(g \cdot \tilde{y})) < \alpha/2$ ($\bar{\pi}$ contrae le distanze). Poichè $\bar{\pi}(\tilde{z}) = \bar{z}$ e $\bar{\pi}(g \cdot \tilde{y}) \in p^{-1}(p(\bar{y}))$, abbiamo dimostrato che $p^{-1}[B(p(\bar{y}), \alpha/2)] \subseteq \bigcup_{\bar{y}' \in p^{-1}(p(\bar{y}))} B(\bar{y}', \alpha/2)$.

Dimostriamo ora che, per ogni $\bar{y}' \in p^{-1}(p(\bar{y}))$, la restrizione di $p : \overline{M} \rightarrow M$ a $B(\bar{y}', \alpha/2)$, è un diffeomorfismo su $B(p(\bar{y}), \alpha/2)$. Sia $z \in B(p(\bar{y}), \alpha/2)$, e siano $z = \pi(\tilde{z})$, $p(\bar{y}) = \pi(\tilde{y})$ per qualche $\tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{M}$. Allora $d(\pi(\tilde{y}), \pi(\tilde{z})) = \inf_{g \in \Gamma} d(g \cdot \tilde{z}, \tilde{y}) < \alpha/2$. Se $g \in \Gamma$ è tale che $d(\tilde{y}, g \cdot \tilde{z}) < \alpha/2$ e $\gamma \in \Gamma$ è tale che $\bar{\pi}(\gamma \cdot \tilde{y}) = \bar{y}'$ (si noti che, essendo $\bar{\pi}$ un rivestimento regolare, Γ agisce transitivamente sulla fibra di \bar{y}'), si ha $d(\bar{\pi}(\gamma g \cdot \tilde{z}), \bar{y}') < \alpha/2$, dove $\bar{\pi}(\gamma g \cdot \tilde{z})$ si proietta mediante p su z e appartiene a $B(\bar{y}', \alpha/2)$.

Resta da dimostrare l'iniettività. Si supponga per assurdo che $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in B(\bar{y}', \alpha/2)$ siano punti distinti tali che $p(\bar{z}_1) = p(\bar{z}_2)$. Siano ora $\tilde{z}_1 \in \tilde{M}$ e $g \in \Gamma$ tali che $\bar{\pi}(\tilde{z}_1) = \bar{z}_1$ e $\bar{\pi}(g \cdot \tilde{z}_1) = \bar{z}_2$ (si noti che $g \notin \Gamma_{2R}(\tilde{x})$, perchè $\bar{z}_1 \neq \bar{z}_2$). Pos-

siamo scegliere $\tilde{y}' \in \bar{\pi}^{-1}(\bar{y}')$ tale che $d(\bar{y}', \bar{z}_1) = d(\tilde{y}', \tilde{z}_1) < \alpha/2$. Allora $d(\bar{\pi}(g \cdot \tilde{y}'), \bar{\pi}(g \cdot \tilde{z}_1)) \leq d(g \cdot \tilde{y}', g \cdot \tilde{z}_1) < \alpha/2$, ovvero $\bar{z}_2 \in B(\bar{y}', \alpha/2) \cap B(\bar{\pi}(g \cdot \tilde{y}'), \alpha/2)$. Ma questo contraddice il fatto che tale intersezione sia disgiunta, perchè $\bar{y}' \neq \bar{\pi}(g \cdot \tilde{y}')$.

Dunque la bolla $B(p(\bar{y}), \alpha/2)$ è un intorno elementare di $p(\bar{y})$ e p è un rivestimento di M (si veda anche [Go], Teorema IX.6.1). Mostriamo ora che, se $\bar{x} = \bar{\pi}(\tilde{x})$, allora $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x})) = \Pi_{2R}(x)$. Infatti, gli elementi di $\pi_1(\bar{M}, \bar{x})$ sono esattamente le classi dei lacci $\bar{\pi} \circ \tilde{c}$, dove \tilde{c} è una curva che unisce \tilde{x} a $g \cdot \tilde{x}$, $g \in \Gamma_{2R}(\tilde{x})$. Quindi $p_*[\bar{\pi} \circ \tilde{c}] = [p \circ \bar{\pi} \circ \tilde{c}] = [\pi \circ \tilde{c}] = \phi_{\tilde{x}}^{-1}(g)$ (per definizione di $\phi_{\tilde{x}}$) e quindi $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x})) = \phi_{\tilde{x}}^{-1}(\Gamma_{2R}(\tilde{x})) = \Pi_{2R}(x)$ (cfr. Osservazioni 5.1.3). Con questo si conclude la costruzione di $p : \bar{M} \rightarrow M$, preliminare alla dimostrazione.

Dimostriamo ora che $p : \bar{M} \rightarrow M$, ristretto alla bolla $B(\bar{x}, R)$ di \bar{M} ($\bar{x} = \bar{\pi}(\tilde{x})$), è un diffeomorfismo isometrico sulla bolla $B(x, R)$ di M . Poichè p è un'isometria locale, è sufficiente mostrare che tale restrizione è bigettiva. Per dimostrare la suriettività, si consideri un qualunque $y \in B(x, R)$ e una curva c minimizzante che unisce x a y . Sollevando c in \bar{M} con punto iniziale \bar{x} , si ottiene una curva della stessa lunghezza che è interamente contenuta in $B(\bar{x}, R)$, e la cui estremità finale si proietta su y . Sia ora \bar{x}' un punto di $p^{-1}(x)$ tale che $\bar{x}' \neq \bar{x}$, e sia \tilde{x}' un sollevamento di \bar{x}' in \tilde{M} , i.e. $\bar{x}' = \bar{\pi}(\tilde{x}')$. Poichè $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}') = x$, esiste $g \in \Gamma$ tale che $\tilde{x}' = g \cdot \tilde{x}$, e $g \notin \Gamma_{2R}(\tilde{x})$ perchè $\bar{\pi}(\tilde{x}) \neq \bar{\pi}(g \cdot \tilde{x})$. Possiamo scegliere \tilde{x}' in modo che $d(\bar{x}, \bar{x}') = d(\tilde{x}, \tilde{x}') = d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x})$. Ora, $d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x}) \geq 2R$ perchè $g \notin \Gamma_{2R}(\tilde{x})$, quindi $d(\bar{x}, \bar{x}') \geq 2R$ e le bolle $B(\bar{x}, R)$ e $B(\bar{x}', R)$ sono disgiunte. Ora, se la restrizione di p a $B(\bar{x}, R)$ non fosse iniettiva, esisterebbero due punti $\bar{y}, \bar{y}' \in B(\bar{x}, R)$ distinti tali che $p(\bar{y}) = p(\bar{y}')$. Siano $\tilde{y} \in \bar{\pi}^{-1}(\bar{y})$ e $g \in \Gamma \setminus \Gamma_{2R}(\tilde{x})$ tali che $\bar{\pi}(g \cdot \tilde{y}) = \bar{y}'$. Non è restrittivo supporre che $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) < R$. Allora $d(g \cdot \tilde{x}, g \cdot \tilde{y}) < R$, da cui $d(\bar{\pi}(g \cdot \tilde{x}), \bar{y}') < R$. Questo implica che $\bar{y}' \in B(\bar{x}, R) \cap B(\bar{\pi}(g \cdot \tilde{x}), R)$, contro il fatto che tale intersezione sia disgiunta per $g \notin \Gamma_{2R}(\tilde{x})$. \square

L'azione del gruppo fondamentale per automorfismi di rivestimento.

Richiameremo ora alcuni fatti fondamentali sull'azione del gruppo fondamentale per automorfismi di rivestimento. Per maggiori dettagli, rimandiamo il lettore a [Ma], paragrafi 5.7 e 5.8. Sia $p : \bar{M} \rightarrow M$ un rivestimento e sia $x \in M$ un punto fissato. Allora il gruppo fondamentale $\pi_1(M, x)$ agisce sulla fibra $p^{-1}(x)$ come segue : per ogni $\bar{x} \in p^{-1}(x)$, e ogni $\gamma \in \pi_1(M, x)$ rappresentato da un laccio c centrato in x , definiamo $\bar{x} \cdot \gamma$ come il punto finale dell'unico sollevamento di c in \bar{M} con punto iniziale \bar{x} . Tale costruzione (che non di-

pende dalla scelta del laccio c che rappresenta γ) definisce un'azione destra transitiva che in generale non è libera. (Il gruppo di isotropia di $\bar{x} \in p^{-1}(x)$ uguale a $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$)

Dati $\bar{x} \in p^{-1}(x)$ e $\gamma \in \pi_1(M, x)$, si ha che esiste un automorfismo di rivestimento $h \in \text{Aut}(\bar{M})$ tale che $h(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \gamma$ solo se $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x})) = p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x} \cdot \gamma))$. Poichè $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x} \cdot \gamma)) = \gamma^{-1}p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))\gamma$, ne segue che se $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ non è normale in $\pi_1(M, x)$, allora l'azione di $\pi_1(M, x)$ sulla fibra non può essere estesa a un'azione su tutto \bar{M} . Viceversa, se $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ è normale in $\pi_1(M, x)$, allora si può definire una tale azione come segue : per ogni $\bar{y} \in \bar{M}$, si fissi una qualunque curva \bar{b} di punto iniziale \bar{y} e punto finale \bar{x} . Sia $b = p \circ \bar{b}$ la proiezione di \bar{b} su M tramite p . Allora, per ogni $\gamma \in \pi_1(M, x)$ (rappresentato da un laccio c) definiamo $\gamma \cdot \bar{y}$ come il punto finale del sollevamento di $bc\bar{b}^{-1}$ che parte da \bar{y} (qui e nel seguito, la concatenazione di curve si legge da sinistra a destra). Tale costruzione non dipende dalla scelta di \bar{b} . Infatti, sia \bar{b}' un'altra curva di punto iniziale \bar{y} e punto finale \bar{x} (si noti che $[\bar{b}^{-1}\bar{b}'] \in \pi_1(\bar{M}, \bar{x})$ e quindi $[b^{-1}b'] \in p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$). Allora, la costruzione data è ben posta se e solo se i sollevamenti di cb^{-1} e cb'^{-1} con punto iniziale \bar{x} hanno lo stesso punto finale. Questo equivale a richiedere che il sollevamento di $cb^{-1}b'c^{-1}$ con punto iniziale \bar{x} sia un laccio chiuso in \bar{M} , dunque equivale a richiedere che $[cb^{-1}b'c^{-1}] \in p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$, il che è vero perchè $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ è normale in $\pi_1(M, x)$.

Un rivestimento $p : \bar{M} \rightarrow M$ tale che $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ è normale in $\pi_1(M, x)$ si dice *regolare* o *di Galois* (cfr. anche pag. 51). Equivalentemente un rivestimento è regolare se e solo se il gruppo $\text{Aut}(\bar{M})$ degli automorfismi di \bar{M} agisce transitivamente su almeno una fibra $p^{-1}(y)$ (per esempio, su $p^{-1}(x)$), il che equivale al fatto che $\text{Aut}(\bar{M})$ agisca transitivamente su ogni fibra $p^{-1}(y)$. Questo è il solo caso in cui si hanno un diffeomorfismo $M \sim \bar{M}/\text{Aut}(\bar{M})$ e un isomorfismo di gruppi $\text{Aut}(\bar{M}) \sim \pi_1(M, x)/p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$. Per rivestimenti non regolari, si ha $\text{Aut}(\bar{M}) \sim N(p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))) / p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$, dove $N(p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x})))$ denota il normalizzatore di $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ in $\pi_1(M, x)$, i.e. il più grande sottogruppo di $\pi_1(M, x)$ che contiene $p_*(\pi_1(\bar{M}, \bar{x}))$ come sottogruppo normale.

5.2 Il Lemma di Margulis

Sappiamo, attraverso la Proposizione 5.1.1, che se $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ è il rivestimento universale di una varietà M , $\tilde{x} \in \tilde{M}$ e $r > 0$, il gruppo $\Gamma_r(\tilde{x})$ generato dagli elementi $g \in \text{Aut}(\tilde{M})$ tali che $d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x}) < r$ è essenziale per lo studio della geometria della varietà M .

In questo contesto si inserisce il Lemma di Margulis.

Sia G un gruppo. Il sottogruppo $[G, G]$ generato dagli elementi della forma $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, al variare di $g, h \in G$ è detto *commutatore* di G . L' m -esimo commutatore di G è definito ricorsivamente dalla formula $G^0 = G$, $G^m = [G, G^{m-1}]$. Se esiste un intero positivo n tale che $G^n = \{e\}$ il gruppo G si dice *nilpotente*. Il primo intero n che verifica questa uguaglianza si dice *grado di nilpotenza di G* . Se G contiene un sottogruppo nilpotente di indice finito, si dirà *quasi nilpotente*.

Théorème 5.2.1. (*Lemma di Margulis*) Sia (M^n, g) una varietà Riemanniana completa di dimensione n con curvatura sezionale K che soddisfa $-K_0^2 \leq K < 0$ per qualche costante $K_0 \in \mathbb{R}$. Allora esiste una costante $\varepsilon_0(n)$ (detta costante di Margulis) tale che, per ogni punto $x \in M^n$ e ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)/K_0$, il sottogruppo $\Pi_\varepsilon(x)$ di $\pi_1(M, x)$ generato dai lacci centrati in x e di lunghezza strettamente inferiore a ε è quasi nilpotente.

Remarques. In realtà, Margulis ha dimostrato una versione più generale di questo teorema, valida sotto l'ipotesi $-K_0^2 \leq K \leq K_0^2$, dove è necessario fare un'ipotesi aggiuntiva sul rivestimento universale Riemanniano di (M^n, g) , ossia richiedere che esso non contenga alcun laccio geodetico di lunghezza $l < 1/K_0$ (ipotesi che è automaticamente verificata allorchè $K < 0$). La versione più appropriata per il nostro studio è comunque quella stabilita sopra.

Il corollario seguente, che dimostriamo alla fine del paragrafo, precisa la struttura del gruppo $\Pi_\varepsilon(x)$.

Corollaire 5.2.2. Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa di dimensione n con curvatura sezionale K che soddisfa $-K_0^2 \leq K < 0$ per qualche costante $K_0 \in \mathbb{R}$, e sia $x \in M$. Sia $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ il rivestimento universale di M e sia $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Sia ε un numero reale positivo minore o uguale a $\varepsilon_0(n)/K_0$, dove $\varepsilon_0(n)$ è la costante di Margulis. Sia $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ il sottogruppo di $\text{Aut}(\tilde{M})$ isomorfo, tramite l'isomorfismo $\phi_{\tilde{x}}$ introdotto nel paragrafo precedente, al sottogruppo $\Pi_\varepsilon(x)$ di $\pi_1(M, x)$ generato dai lacci centrati in x e di lunghezza strettamente inferiore a ε . Risulta allora verificata almeno una delle seguenti :

- (i) $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x}) \simeq \Pi_\varepsilon(x) = \{e\}$;
- (ii) $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x}) \simeq \Pi_\varepsilon(x) \simeq \mathbb{Z}$;
- (iii) ogni $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ ha un unico punto fisso nel bordo all'infinito del rivestimento universale (\tilde{M}, \tilde{g}) e questo punto fisso è lo stesso per tutti gli elementi di $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$.

Se la curvatura sezionale K di M è costante e uguale a $-K_0^2$, (iii) può essere sostituito da

(iii)' $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ è isomorfo a un sottogruppo discreto di $\text{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})$ (i.e. il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo \mathbb{R}^{n-1}); se inoltre $n = 2$, o $n = 3$ e M è orientabile, allora $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ è isomorfo a un sottogruppo discreto del gruppo delle traslazioni di \mathbb{R}^n (e dunque abeliano).

Quando M è compatta, il caso (iii) ((iii)') non si verifica e $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ è isomorfo a $\{e\}$ o a \mathbb{Z} .

Remarques. Nel caso di curvatura variabile, (iii) implica che $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ invia orosfere centrate in θ in orosfere centrate in θ , dove θ è il punto fisso (nel bordo all'infinito di \tilde{M}) comune a tutti gli elementi di $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$. Denotiamo $HS(\theta, \tilde{x})$ una tale orosfera passante per un punto $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Allora per ogni $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ esiste un $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che, se \tilde{c} è una geodetica di \tilde{M} per la quale $\tilde{c}(+\infty) = \theta$, $\gamma[HS(\theta, \tilde{c}(t))] = HS(\theta, \tilde{c}(t + k_0))$. Per vederlo, si denoti con $B(\tilde{x}, \theta)$ la funzione di Busemann centrata in θ , normalizzata fissando un'origine $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ tale che $B(\tilde{x}_0, \theta) = 0$ (se \tilde{c}_0 è la geodetica in \tilde{M} tale che $\tilde{c}_0(0) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{c}_0(+\infty) = \theta$, si definisce $B(\tilde{x}, \theta) = \lim_{s \rightarrow +\infty} d(\tilde{x}, \tilde{c}_0(s)) - s$), e si ricordi che ogni orosfera $HS(\theta, \tilde{x})$ è l'insieme di livello $\{\tilde{y} \in \tilde{M} \mid B(\tilde{y}, \theta) = c\}$ della funzione di Busemann, per qualche $c \in \mathbb{R}$.

Se $\gamma \in \Gamma$ è un'isometria di \tilde{M} che fissa θ , allora $B(\gamma \cdot \tilde{x}, \theta) = B(\gamma \cdot \tilde{x}, \gamma \cdot \theta) = B(\tilde{x}, \theta) + B(\gamma \cdot \tilde{x}_0, \theta)$ (l'ultima uguaglianza discende dalla formula $B(g \cdot \tilde{x}, g \cdot b) - B(g \cdot \tilde{x}_0, g \cdot b) = B(\tilde{x}, b) - B(\tilde{x}_0, b)$, valida per ogni $g \in \text{Aut}(\tilde{M})$ e ogni $b \in \partial\tilde{M}$). Questo dimostra che γ manda l'orosfera $\{\tilde{y} \mid B(\tilde{y}, \theta) = c\}$ nell'orosfera $\{\tilde{y} \mid B(\tilde{y}, \theta) = c + B(\gamma \cdot \tilde{x}_0, \theta)\}$. D'altra parte, per ogni geodetica $\tilde{c}(t)$ in \tilde{M} tale che $\tilde{c}(+\infty) = \theta$, esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{s \rightarrow \infty} d(\tilde{c}(s+a), \tilde{c}_0(s)) = 0$ e quindi, per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B(\tilde{c}(t), \theta) - B(\tilde{c}(t + t_0), \theta) &= \lim_{s \rightarrow \infty} d(\tilde{c}(t), \tilde{c}_0(s)) - d(\tilde{c}(t + t_0), \tilde{c}_0(s)) = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} d(\tilde{c}(t), \tilde{c}(s+a)) - d(\tilde{c}(t+t_0), \tilde{c}(s+a)) = t_0. \end{aligned}$$

Ne segue che se $HS(\theta, \tilde{c}(t))$ l'orosfera definita come insieme di livello $\{\tilde{y} \in \tilde{M} \mid B(\tilde{y}, \theta) = c\}$ per qualche $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\gamma[HS(\theta, \tilde{c}(t))] = \{\tilde{y} \in \tilde{M} \mid B(\tilde{y}, \theta) = c + k_0\} = HS(\theta, \tilde{c}(t + k_0))$$

dove abbiamo denotato $k_0 = B(\gamma \cdot \tilde{x}_0, \theta)$ (cfr. le Osservazioni che precedono l'Esempio 3.8 in [B-G-S]).

Se la varietà M è compatta, un'importante conseguenza del Lemma di Margulis è espressa nel successivo Teorema 5.2.3. Data una varietà M e un

punto $x \in M$, il raggio di iniettività di M in x (denotato $inj(x)$) è definito come il più grande numero reale $r > 0$ tale che l'applicazione esponenziale $exp_x : T_x(M) \supseteq B(0, r) \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo globale sulla sua immagine. Il raggio di iniettività (globale) di M è definito come $inj(M) = \inf_{x \in M} inj(x)$. Se denotiamo con l_x la lunghezza del più piccolo laccio non omotopo a zero centrato in x , e con t_x la distanza tra x e il suo primo punto coniugato lungo le geodetiche che partono da x , si ha $inj(x) = \min\{t_x, l_x/2\}$ (Prop. III.4.13 in [S]). In particolare, se M ha curvatura sezionale ovunque non positiva, $t_x = +\infty$ ([G-H-L], Corollario 3.88) e quindi $inj(x) = l_x/2$. (Come controesempio, nel caso di curvatura positiva, si può considerare l'esempio della sfera unitaria n -dimensionale S^n , che ha in ogni punto raggio d'iniettività uguale a π , ma è semplicemente connessa e quindi non possiede lacci non omotopi a zero). Si ricordi che $l_x = \inf_{g \in Aut(\tilde{M}) \setminus \{id\}} d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x})$, per $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ (cfr. Osservazioni 5.1.3). Possiamo ora enunciare il

Théorème 5.2.3. (Margulis) *Sia M^n una varietà compatta n -dimensionale di curvatura sezionale $-1 \leq K < 0$, e sia $\varepsilon_0(n)$ la costante di Margulis. Allora esiste un punto $x \in M^n$ tale che $inj(x) = \frac{1}{2} \inf_{g \in Aut(\tilde{M}) \setminus \{id\}} d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x}) \geq \varepsilon_0(n)/2$.*

da cui segue :

Corollaire 5.2.4. (Margulis) *Sia M^n una varietà Riemanniana compatta di dimensione n e curvatura sezionale $-K_0^2 \leq K < 0$. Allora esiste una costante universale $c(n)$ dipendente solo da n tale che $vol(M^n) \geq c(n)K_0^{-n}$.*

Il teorema sopra è dimostrato alla fine del paragrafo. Per la dimostrazione del corollario si veda [B-Z], Teorema 37.1.1.

La minorazione del volume fornita da questo, combinata con una disuguaglianza di J. Cheeger ([Ch]) con cui è possibile minorare la lunghezza della più piccola geodetica periodica, otteniamo una minorazione del raggio d'iniettività globale.

Théorème 5.2.5. (cfr. [B-K], pag. 28) *Dati n, K_0, D , si può calcolare $\varepsilon(n, K_0, D)$ tale che ogni varietà Riemanniana (M^n, g) compatta n -dimensionale, con diametro $diam(M^n) \leq D$ e curvatura sezionale $-K_0^2 \leq K < 0$ soddisfa*

$$inj(M^n) = \inf_{x \in M^n} inj(x) \geq \varepsilon(n, K_0, D).$$

Si osservi che, per ogni varietà di curvatura sezionale $-K_0^2 \leq K < 0$, il Teorema 5.2.3 fornisce una minorazione esplicita di $\sup_{x \in M^n} inj(x)$, mentre

il Teorema 5.2.5 fornisce una minorazione di $\inf_{x \in M^n} \text{inj}(x)$. Questo spiega perchè in quest'ultimo sia necessaria l'ipotesi aggiuntiva della maggiorazione sul diametro.

Il seguente risultato è valido per $\dim(M) \geq 4$.

Théorème 5.2.6. (M. Gromov, [Gr4]) *Per ogni intero $n \geq 4$ e ogni $K_0 > 0$, esiste una costante $C(n)$ tale che su ogni varietà Riemanniana compatta (M^n, g) di dimensione n e curvatura sezionale $-K_0^2 \leq K < 0$ risulta*

$$\text{diam}(M^n) \leq C(n)K_0^{nr-1} \text{vol}(M^n)^r.$$

dove $r = 1$ se $n \geq 8$ e $r = 3$ se $4 \leq n \leq 7$.

Una conseguenza di questo teorema è che, in dimensione $n \geq 4$, si può rileggere la minorazione espressa dal Teorema 5.2.5 come $\text{inj}(M^n) \geq \varepsilon(n, K_0, V_0)$, dove V_0 è un limite superiore del volume di (M^n, g) .

Ora, definiamo *parte sottile* $M_{(0,\varepsilon)}$ della varietà M^n l'insieme dei punti $x \in M^n$ tali che esiste un laccio chiuso centrato in x , non omotopo a zero e di lunghezza $< \varepsilon$. Chiamiamo *parte spessa* il complementare $M_{\geq \varepsilon} = M^n \setminus M_{(0,\varepsilon)}$ della parte sottile.

Nel caso di curvatura costante, una volta determinato $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$, con $\varepsilon < \varepsilon(n)$, il Lemma di Margulis consente di descrivere la topologia di M^n come segue :

Théorème 5.2.7. *Sia M^n una varietà iperbolica completa di dimensione n , e fissiamo $\varepsilon < \varepsilon_0(n)$, dove $\varepsilon_0(n)$ è la costante di Margulis.*

Allora la parte sottile $M_{(0,\varepsilon)}$ è unione di parti disgiunte ciascuna omeomorfa a un sottoinsieme tra i seguenti :

- (i) *il cilindro $D^{n-1} \times S^1$;*
- (ii) *$V \times [0, +\infty)$, dove V è una varietà differenziabile $(n-1)$ -dimensionale che ammette una metrica euclidea.*

Per la dimostrazione del Teorema 5.2.7 si veda ad esempio [B-P], Teorema D.3.3.

Si noti che se M^n è compatta, il caso (ii) del teorema non si verifica e vale il seguente risultato.

Théorème 5.2.8. *Sia (M^n, g) una varietà iperbolica compatta. Sia $\varepsilon < \varepsilon_0(n)$, dove $\varepsilon_0(n)$ è la costante di Margulis e sia $M_{(0,\varepsilon)}$ la parte sottile di M^n definita come sopra. Allora $M_{(0,\varepsilon)}$ è unione di parti disgiunte ciascuna omeomorfa al cilindro $D^{n-1} \times S^1$ (quoziente rispetto al sottogruppo $\Pi_\varepsilon(x) \simeq \mathbb{Z}$ di un intorno tubolare di una geodetica in \tilde{M} globalmente invariante).*

Concludiamo con un risultato che mostra come tutta la topologia di M sia racchiusa - in un certo senso - nella parte spessa $M_{\geq \varepsilon}$ (cfr. il Corollario a pag. 1162 di [B-G-L-M]).

Théorème. ([B-G-L-M]) *Sia M una varietà iperbolica completa di dimensione $n \geq 4$ e sia $\varepsilon = \varepsilon_0(n)$ la costante di Margulis. Allora si ha $\pi_1(M) = \pi_1(M_{\geq \varepsilon})$.*

Dimostrazione del Corollario 5.2.2

Il rivestimento universale Riemanniano (\tilde{M}, \tilde{g}) di una varietà Riemanniana completa (M, g) a curvatura strettamente negativa, è una varietà Riemanniana completa, semplicemente connessa e a curvatura strettamente negativa. Il gruppo $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ è un sottogruppo del gruppo delle isometrie di (\tilde{M}, \tilde{g}) . Ricordiamo che un'isometria γ di (\tilde{M}, \tilde{g}) è detta *iperbolica* se il suo insieme limite L_γ (i.e. l'insieme dei punti del bordo ideale $\partial\tilde{M}$ che sono punti di accumulazione per un'orbita di $\{\gamma^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$) ha due soli punti; *parabolica* se L_γ ha un solo punto; *ellittica* se L_γ è vuoto (Corollario 8.20 in [G-H]). Il gruppo fondamentale di M agisce per isometrie sul rivestimento universale \tilde{M} senza elementi ellittici, perchè l'azione è discreta e priva di punti fissi. Si noti che, se γ è iperbolica o parabolica, L_γ coincide con l'insieme dei punti fissi di γ in $\partial\tilde{M}$. Due isometrie non ellittiche di \tilde{M} che commutano tra loro sono o entrambe iperboliche con gli stessi punti fissi all'infinito, o entrambe paraboliche con lo stesso punto fisso all'infinito. Infatti, sia ϕ un'isometria iperbolica e siano p, q i punti all'infinito di \tilde{M} tali che $\phi(p) = p, \phi(q) = q$. Se ψ commuta con ϕ , si ha $\psi(p) = \psi(\phi(p)) = \phi(\psi(p))$ e $\psi(q) = \psi(\phi(q)) = \phi(\psi(q))$. Quindi o ψ è un'isometria iperbolica con gli stessi punti all'infinito di ϕ , oppure $\psi(p) = q$ e $\psi(q) = p$. In tal caso ψ agisce sulla geodetica di estremi p e q identificandosi a un'isometria di \mathbb{R} che inverte l'orientazione, e deve quindi avere un punto fisso, il che è escluso per gli elementi del gruppo fondamentale.

Il caso in cui ϕ è parabolica si mostra in modo analogo.

Per il Lemma di Margulis, $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ contiene un sottogruppo nilpotente H di indice finito. Se H è banale, allora $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ è finito, dunque i suoi elementi sono ellittici: questo è assurdo a meno che $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x}) = \{e\}$ (caso (i)).

Se H non è banale, esso ha centro non banale (se m è il grado di nilpotenza di H , l' $(m-1)$ -esimo commutatore H^{m-1} non è banale ed è contenuto nel centro di H) e dunque o H consiste interamente di elementi iperbolici con gli stessi punti fissi all'infinito, o consiste interamente di elementi parabolici con lo stesso punto fisso all'infinito.

D'altra parte, poichè H ha indice finito in $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$, per ogni $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ esiste un intero $k \neq 0$ tale che $\gamma^k \in H$. Poichè γ commuta con γ^k , ne segue che anche $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ consiste interamente di elementi iperbolici con gli stessi punti

fissi all'infinito, oppure consiste interamente di elementi parabolici con lo stesso punto fisso all'infinito. Quest'ultimo caso è il caso (iii) del corollario. Supponiamo allora che $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ consista interamente di elementi iperbolici, e siano p e q i punti all'infinito fissati dai suoi elementi. L'unica geodetica c di estremi p e q è globalmente invariante rispetto a $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ che si identifica quindi con un sottogruppo discreto di isometrie di \mathbb{R} privo di punti fissi, ed è cioè isomorfo a \mathbb{Z} (caso (ii)).

Nel caso in cui la curvatura sezionale K di M è costante e uguale a $-K_0^2$, possiamo supporre (a meno di moltiplicare la metrica per una costante di proporzionalità positiva) che sia $K_0 = 1$, e cioè che \tilde{M} sia lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n , dove n è la dimensione di M . Consideriamo il modello del semipiano superiore, che identifica \mathbb{H}^n all'insieme delle coppie $(y, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ dotato della metrica Riemanniana $g_{(y,t)} = \frac{dy_1^2 + \dots + dy_{n-1}^2 + dt^2}{t^2}$. In questa rappresentazione di \mathbb{H}^n , il bordo all'infinito $\partial\mathbb{H}^n$ di \mathbb{H}^n si identifica con il compatificato di $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ (bordo di $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$) aggiungendo il punto ∞ . Supponiamo allora di essere nel caso (iii), e che ∞ sia l'unico punto fisso comune a tutti gli elementi di $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$. Allora, ogni elemento γ di $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ è tale che $\gamma(y, t) = \lambda(Ay + b, t)$, per qualche $\lambda > 0$, $A \in O(n-1)$ e $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ (si vedano i teoremi A.3.9 e A.4.2 di [B-P]).

In realtà, l'ipotesi che γ sia parabolico implica che $\lambda = 1$, come ora dimostriamo: in caso contrario, infatti, a meno di sostituire γ con γ^{-1} , possiamo supporre che $\lambda < 1$. Allora un calcolo diretto mostra che $\gamma^k(0, t) = (\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{i+1} A^i b, \lambda^k t)$ per ogni $t > 0$ e ogni $k \in \mathbb{N}$. Poichè la norma (euclidea) di $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{i+1} A^i b$ è maggiorata da una costante reale positiva C per ogni $k > 0$, si ha che per $k \rightarrow \infty$ $\gamma^k(0, t)$ tende a un punto di $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \partial\mathbb{H}^n \setminus \{\infty\}$, che denotiamo p' . Allora $\gamma(p') = \gamma(\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^k(0, t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^{k+1}(0, t) = p'$, contro l'ipotesi che γ abbia ∞ come solo punto fisso sul bordo all'infinito.

Essendo quindi $\lambda = 1$, ogni orosfera $\{t = t_0\}$ (centrata nel punto ∞) è $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ -invariante ed è dotata della struttura euclidea. Questo dimostra la prima affermazione di (iii)'. Ora, poichè ogni $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ proviene tramite $\phi_{\tilde{x}}$ da un elemento del gruppo fondamentale, esso agisce senza punti fissi su \mathbb{H}^n , e quindi A e b devono essere tali che l'equazione $(A - I)(y) = -b$ non ha alcuna soluzione, il che equivale a dire che A ammette almeno un autovalore $\lambda = +1$ e che $b \notin \text{Im}(A - I)$. (Si noti che $\text{Im}(A - I)$ coincide con l'ortogonale al sottospazio E_1 formato dagli autovettori associati all'autovalore $+1$) Se $n = 2$, allora l'esistenza di un autovalore $= +1$ implica che $A = (1)$ e quindi che γ agisce sull'orosfera per traslazioni (i.e. $\gamma(y, t) = (y + b, t)$). Se $n = 3$ e M è orientabile, allora si ha che $A \in SO(2)$ e l'esistenza di un autovalore uguale a $+1$ implica che $A = I_2$, da cui la conclusione (si noti che se M non è orientabile, $\Gamma_\varepsilon(\tilde{x})$ può essere isomorfo al gruppo fondamentale della bottiglia

di Klein).

L'ultima affermazione del teorema discende dal fatto che il gruppo fondamentale di una varietà compatta a curvatura negativa contiene solo elementi di tipo iperbolico (si veda ad esempio la Proposizione 2.6, Cap.12 di [DoC]).
□

Dimostrazione del Teorema 5.2.3

(si veda anche [B-Z], pag. 281) Sia $\Gamma = \text{Aut}(\tilde{M})$ e definiamo, per ogni $\tilde{x} \in \tilde{M}$, la funzione $\delta_\Gamma(\tilde{x}) = \inf_{g \in \Gamma \setminus \{id\}} d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x})$. Poichè d_Γ è Γ -invariante e $M = \tilde{M}/\Gamma$ è compatta, si ha che δ_Γ raggiunge il suo massimo in un punto $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$. Se $\delta_\Gamma(\tilde{x}_0) \geq \varepsilon_0(n)$, abbiamo concluso. Supponiamo quindi che $\delta_\Gamma(\tilde{x}_0) < \varepsilon_0(n)$. Questo implica che il sottogruppo $\Gamma_{\varepsilon_0(n)}(\tilde{x}_0)$ (generato dai $g \in \Gamma$ tali che $d(\tilde{x}_0, g \cdot \tilde{x}_0) < \varepsilon_0(n)$) sia non banale, e quindi, per il Corollario 5.2.2 nel caso compatto, è isomorfo a \mathbb{Z} .

Definiamo la funzione $\delta_\varepsilon(\tilde{x}) = \inf_{g \in \Gamma_{\varepsilon_0(n)}(\tilde{x}_0) \setminus \{id\}} d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{x})$. E' chiaro che $\delta_\varepsilon(\tilde{x}_0) = \delta_\Gamma(\tilde{x}_0)$. D'altra parte, in un intorno di \tilde{x}_0 si ha $\delta_\varepsilon = \delta_\Gamma$: infatti, supponiamo che $\delta_\Gamma(\tilde{x}_0) = d(\tilde{x}_0, g_{min} \cdot \tilde{x}_0)$, dove $g_{min} \in \Gamma_{\varepsilon_0(n)}(\tilde{x}_0)$. Sia \tilde{z} un punto di \tilde{M} e $g \in \Gamma$ tale che $\delta_\Gamma(\tilde{z}) = d(\tilde{z}, g \cdot \tilde{z})$. Allora

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_0, g \cdot \tilde{x}_0) &\leq d(\tilde{x}_0, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, g \cdot \tilde{z}) + d(g \cdot \tilde{z}, g \cdot \tilde{x}_0) = \\ &= 2d(\tilde{z}, \tilde{x}_0) + d(\tilde{z}, g \cdot \tilde{z}) \leq 2d(\tilde{x}_0, \tilde{z}) + d(\tilde{x}_0, g_{min} \cdot \tilde{x}_0) \end{aligned}$$

(perchè $d(\tilde{z}, g \cdot \tilde{z}) = \delta_\Gamma(\tilde{z}) \leq \delta_\Gamma(\tilde{x}_0) = d(\tilde{x}_0, g_{min} \cdot \tilde{x}_0)$).

Poichè l'azione è discreta, esiste un $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $h \in \Gamma$ tale che $d(\tilde{x}_0, h \cdot \tilde{x}_0) \neq d(\tilde{x}_0, g_{min} \cdot \tilde{x}_0)$, si ha $d(\tilde{x}_0, h \cdot \tilde{x}_0) - d(\tilde{x}_0, g_{min} \cdot \tilde{x}_0) \geq \varepsilon_0$. Allora, se $d(\tilde{x}_0, \tilde{z}) < \varepsilon_0/2$, si ha $d(\tilde{x}_0, g \cdot \tilde{x}_0) = d(\tilde{x}_0, g_{min} \cdot \tilde{x}_0) < \varepsilon(n)$, da cui $g \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0)$ e quindi $\delta_\varepsilon(\tilde{z}) = \delta_\Gamma(\tilde{z})$. Questo dimostra che $\delta_\varepsilon = \delta_\Gamma$ in un intorno di \tilde{x}_0 , e quindi che δ_ε ha un massimo locale in \tilde{x}_0 .

Poichè $\Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0)$ è abeliano, esiste un'unica geodetica invariante che è fissata da tutti i suoi elementi. Questo discende da risultati classici sulle varietà compatte a curvatura strettamente negativa che dicono che ogni automorfismo di rivestimento ha un'unica geodetica invariante. (E' immediato vedere che se due automorfismi commutano, allora hanno la stessa geodetica invariante) La geodetica invariante può essere descritta, per ogni $\gamma \in \Gamma$, come $C(\gamma) = \{\tilde{x} \in \tilde{M} \mid d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x}) = \min_{\tilde{y} \in \tilde{M}} d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y})\}$. Per vederlo, si consideri una successione $\{\tilde{y}_k\}$ tale che $d(\tilde{y}_k, \gamma \cdot \tilde{y}_k) \rightarrow m = \min_{\tilde{y} \in \tilde{M}} d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y})$. Poichè \tilde{M} è compatta, possiamo supporre che $\pi(\tilde{y}_k) \rightarrow \pi(\tilde{z})$, i.e. che esistano $g_k \in \Gamma$ tali che $d(g_k \cdot \tilde{y}_k, \tilde{z}) \rightarrow 0$. Allora, $d(\tilde{z}, g_k \gamma g_k^{-1} \cdot \tilde{z}) \rightarrow m$ che, essendo l'azione discreta, implica $d(\tilde{z}, g_k \gamma g_k^{-1} \cdot \tilde{z}) = m$ per k abbastanza grande. Dunque esiste un $\tilde{a} \in \tilde{M}$ tale che $d(\tilde{a}, \gamma \cdot \tilde{a}) = \min_{\tilde{y} \in \tilde{M}} d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y})$. Detta allora l l'unica geodetica passante per \tilde{a} e $\gamma \cdot \tilde{a}$, l è invariante per γ , perchè se esistesse un $\tilde{b} \in l$

compreso tra \tilde{a} e $\gamma \cdot \tilde{a}$ tale che $\gamma \cdot \tilde{b} \notin l$, si avrebbe

$$d(\tilde{b}, \gamma \cdot \tilde{b}) < d(\tilde{b}, \gamma \cdot \tilde{a}) + d(\gamma \cdot \tilde{a}, \gamma \cdot \tilde{b}) = d(\tilde{b}, \gamma \cdot \tilde{a}) + d(\tilde{a}, \tilde{b}) = d(\tilde{a}, \gamma \cdot \tilde{a})$$

contro le ipotesi. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento per \tilde{b} compreso tra $\gamma^k \cdot \tilde{a}$ e $\gamma^{k+1} \cdot \tilde{a}$ per ogni $k > 0$, e concludere. L'unicità della geodetica invariante implica $C(\gamma) = l$. Per semplicità di notazione, denotiamo ancora l la geodetica invariante di $\Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0)$. Ora, si ha $\tilde{x}_0 \notin l$: infatti, se $\tilde{x}_0 \in l$ si avrebbe $d(\tilde{x}_0, \gamma \cdot \tilde{x}_0) < d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x})$ per ogni $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0)$ e ogni $\tilde{x} \notin l$. Ma questo implicherebbe che $\delta_\varepsilon(\tilde{x}_0) < \delta_\varepsilon(\tilde{x})$ per ogni $\tilde{x} \notin l$, il che è falso in un intorno di \tilde{x}_0 . Si consideri allora un arco geodetico $\tilde{c}(t)$ che parte da $\tilde{c}(0) \in l$ e che passa per \tilde{x}_0 . La convessità della distanza su varietà semplicemente connesse a curvatura strettamente negativa, comporta che per ogni $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0)$ la funzione $d(\tilde{c}(t), \gamma \cdot \tilde{c}(t))$ è strettamente convessa (le due geodetiche \tilde{c} e $\gamma \circ \tilde{c}$ non coincidono, perchè $\tilde{x}_0 \notin l$). Inoltre, se $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0)$ essa è strettamente crescente perchè ha il suo minimo in $\tilde{c}(0)$. L'azione essendo discreta, lungo tale arco si ha $d(\tilde{c}(t), \gamma \cdot \tilde{c}(t)) \leq \delta_\varepsilon(\tilde{x}_0) + 1$ per un numero finito di $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0)$. Ne segue che $\delta_\varepsilon(\tilde{c}(t)) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(\tilde{x}_0) \setminus \{e\}} d(\tilde{c}(t), \gamma \cdot \tilde{c}(t))$ è anch'essa una funzione strettamente crescente, in contraddizione col fatto che il punto \tilde{x}_0 sia un massimo locale per δ_ε . \square

Lemma di Margulis e teoremi di compattezza

La famiglia delle varietà compatte M aventi diametro $diam(M) \leq D$ e curvatura sezionale $-K_0^2 \leq K < 0$ ammette una minorazione universale del raggio di iniettività globale del tipo $inj(M) \geq \varepsilon(n, K_0, D)$, dove $n = dim(M)$ (Teorema 5.2.5).

D'altra parte, un noto risultato di M. Berger ([B]) afferma che per ogni varietà Riemanniana compatta M di dimensione n si ha $vol(M) \geq c(n)[inj(M)]^n$ per una qualche costante $c(n)$ che dipende solo dalla dimensione e pertanto la famiglia suddetta soddisfa le ipotesi di un famoso teorema di finitezza di Cheeger²:

Théorème 5.2.9. (J. Cheeger, Teorema di finitezza, 1970) *Siano n, d, K_0, v reali positivi fissati. La famiglia $\mathcal{F}(n, d, K_0, v)$ delle varietà Riemanniane compatte n -dimensionali (M^n, g) di diametro $diam(M^n) \leq d$, volume $vol(M^n) \geq v$ e curvatura sezionale $|K| \leq K_0$ contiene un numero finito di tipi di diffeomorfismo (calcolabile esplicitamente in termini di n, d, K_0, v).*

²Un corrispondente risultato di finitezza per tipi di omotopia fu ottenuto da A. Weinstein già nel 1967 ([W]).

E' possibile controllare anche la struttura metrica delle varietà in $\mathcal{F}(n, d, K_0, v)$ introducendo la cosiddetta *distanza di Gromov-Hausdorff* (Definizione 5.2.11) tra spazi metrici compatti, così da immergere la famiglia $\mathcal{F}(n, d, K_0, v)$ in uno spazio metrico nel quale essa risulta relativamente compatta.

Théorème 5.2.10. (M. Gromov, Teorema di compattezza, 1981) *Siano n, d, K_0, v reali positivi fissati. Allora, nella classe delle varietà con metriche $C^{1,\alpha}$ (per ogni $0 < \alpha < 1$ fissato), la famiglia $\mathcal{F}(n, d, K_0, v)$ delle varietà Riemanniane compatte n -dimensionali (M^n, g) di diametro $\text{diam}(M^n) \leq d$, volume $\text{vol}(M^n) \geq v$ e curvatura sezionale $|K| \leq K_0$ è relativamente compatta rispetto alla distanza di Gromov-Hausdorff.*

Ricordiamo che, dati uno spazio metrico Z e due sottoinsiemi $A, B \subseteq Z$, la distanza di Hausdorff $d_H^Z(A, B)$ tra A e B è definita come

$$d_H^Z(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B \subseteq U_\varepsilon(A), A \subseteq U_\varepsilon(B)\}$$

dove $U_\varepsilon(A)$ (risp. $U_\varepsilon(B)$) denota l'insieme dei punti di Z che si trovano a distanza $\leq \varepsilon$ da A (risp. da B).

Définition 5.2.11. *Siano X e Y spazi metrici. Si dice distanza di Gromov-Hausdorff tra X e Y (e si denota con $d_{GH}(X, Y)$) l'estremo inferiore delle distanze $d_H^Z(f(X), g(Y))$ al variare di Z tra tutti gli spazi metrici e per tutti gli embedding isometrici (i.e. iniettivi e che conservano la distanza) $f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z$.*

Remarques.

- 1) Se X e Y sono compatti, la distanza di Gromov-Hausdorff $d_{GH}(X, Y)$ è finita .
- 2) Due spazi metrici X e Y possono avere distanza di Gromov-Hausdorff nulla e non essere isometrici (per esempio : X sia l'intervallo reale $[0, 1]$ e Y sia $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Si noti però che i completamenti di questi due spazi sono isometrici).

Si dimostra che d_{GH} è una distanza propriamente detta sull'insieme delle classi di isometria degli spazi metrici compatti, e che tale insieme è completo rispetto a d_{GH} (si vedano, per esempio, il Teorema 6.3 a pag. 306 di [S] e il Teorema 7.3.30 a pag. 259 di [B-B-I]).

Un altro risultato di rilievo, da menzionare in questo stesso contesto, è il seguente :

Théorème 5.2.12. (M. Gromov, Teorema di precompattezza, 1981) *Siano n, d, K_0 reali positivi fissati. L'insieme delle varietà Riemanniane compatte n -dimensionali (M^n, g) di diametro $\text{diam}(M^n) \leq d$ e curvatura di Ricci $\text{Ric}(g) \geq -(n-1)K_0^2 \cdot g$ è precompatto rispetto alla distanza di Gromov-Hausdorff.*

Si ricordi che un sottospazio A di uno spazio metrico $X = (X, d)$ si dice *precompatto* se ogni successione di suoi elementi ammette una sottosuccessione di Cauchy. Il sottospazio $A \subseteq X$ si dice *relativamente compatto* se la sua chiusura \overline{A} è compatta in X . Se X è completo, A è precompatto se e solo se esso è relativamente compatto.

Remarques. Si noti che l'ipotesi $\text{Ric}(g) \geq -(n-1)K_0^2 \cdot g$ sulla curvatura di Ricci è molto più debole dell'ipotesi $K \geq -K_0^2$ fatta precedentemente.

Risultati di precompattezza e compattezza come quelli appena citati devono la loro importanza al fatto che forniscono un controllo sull'insieme delle metriche Riemanniane soddisfacenti alle condizioni date. Nel caso del Teorema di precompattezza tale controllo, però, non è ottimale, in quanto il limite di una successione di varietà che soddisfano alle ipotesi non è in generale una varietà, come dimostrano gli esempi che ora descriviamo :

Exemples. Sia $X_k = (0, L) \times S^{n-1}$ lo "spazio di rivoluzione" dotato della metrica Riemanniana prodotto $g_k = (dr)^2 + \frac{1}{k^2}b(r)^2g_{S^{n-1}}$ (dove $b(r)$ è una funzione C^∞ tale che $b(0_+) = b(L_-) = 0$ e $b'(0) = 1, b'(L) = -1$). Il limite per $k \rightarrow \infty$ della sequenza X_k nel senso di Gromov-Hausdorff è l'intervallo $[0, L]$ munito della distanza usuale (in quanto $g_k \rightarrow (dr)^2$). Il calcolo della curvatura sezionale dà $K(X, \partial/\partial r) = -b''/b$ per ogni campo X tale che $\|X\| = 1$ e $X \perp \partial/\partial r$. Inoltre $K(X, Y) = \frac{k^2}{b^2} - \frac{b'^2}{b}$ se X e Y sono campi tali che $X \perp Y, X, Y \perp \partial/\partial r$. Ne segue che, se $\text{Ric}_{g_1} \geq -(n-1)K_0^2$, lo stesso vale per Ric_{g_k} e (X_k, g_k) soddisfa le ipotesi del teorema di precompattezza per ogni $k \geq 1$. Normalizziamo b in modo che $\int_0^L b(r)^{n-1} dr = 1$. Osserviamo che la misura naturale su $[0, L]$ (i.e. la misura limite delle misure Riemanniane di probabilità $\frac{dv_{g_k}}{\text{vol}(g_k)}$) non è la misura di Lebesgue, ma la misura $b(r)^{n-1} dr$. Infatti, $dv_{g_k} = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} b(r)^{n-1} dr \cdot dv_{S^{n-1}}$, da cui $\text{vol}(g_k) = \frac{\text{vol}(S^{n-1})}{k^{n-1}} \int_0^L b(r)^{n-1} dr$, e

$$\int_{X_k} f(r) \frac{dv_{g_k}}{\text{vol}(g_k)} = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \int_0^L f(r) \left(\int_{S^{n-1}} dv_{S^{n-1}}\right) b(r)^{n-1} dr}{\frac{\text{vol}(S^{n-1})}{k^{n-1}} \int_0^L b(r)^{n-1} dr} = \int_0^L f(r) b(r)^{n-1} dr.$$

Ciò mostra che il limite della successione (X_k, g_k) è uno spazio metrico di lunghezza misurato (l'intervallo $[0, L]$, munito della distanza canonica

$d(x, y) = |x - y|$ e della misura $b(r)^{n-1}dr$, come conferma il fatto che alcuni invarianti (ad es. lo spettro del laplaciano di (X_k, g_k)) hanno come limite l'invariante corrispondente dello spazio metrico misurato $([0, L], d, b(r)^{n-1}dr)$. Su tali spazi metrici di lunghezza dotati di una misura lavoreremo nel prossimo paragrafo e per il resto della tesi.

D'altronde, se si vuole confrontare la topologia del limite con quella delle varietà della successione, questo esempio (come anche quello dei tori $\mathbb{T}^{n-k} \times \varepsilon \cdot \mathbb{T}^k$ che hanno come limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ il toro \mathbb{T}^{n-k}) sembrerebbe suggerire che la topologia del limite è più semplice della topologia delle varietà della successione. Questo in generale è falso. Per vederlo, si consideri l'esempio della sfera S^{2n+1} , vista come spazio totale della fibrazione di Hopf $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, munita di una metrica Riemanniana consistente nella metrica canonica $g_{S^{2n+1}}$ sullo spazio orizzontale e della metrica $\varepsilon^2 g_{S^{2n-1}}$ sulla fibra. Tale metrica converge, per $\varepsilon \rightarrow 0$, verso $\mathbb{C}P^n$ con la metrica canonica, che, contrariamente alla sfera, ha gruppi di omotopia di ordine superiore non nulli.

Il problema non facile di comprendere la struttura dei limiti delle sequenze di famiglie precompatte di varietà è stato studiato nei lavori di J. Cheeger e T.H. Colding ([C-C 1], [C-C 2]) dove vengono descritte le proprietà di regolarità di tali spazi limite.

Remarques. E' possibile dimostrare quanto segue : esiste un $\varepsilon = \varepsilon(n, d, K_0, v)$ tale che se due spazi X, Y appartenenti alla famiglia $\mathcal{F}(n, d, K_0, v)$ delle varietà che soddisfano $diam(M^n) \leq d$, $vol(M^n) \geq v$ e $|K| \leq K_0$ sono tali che $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, allora essi sono diffeomorfi. (Si veda, per esempio, [S], Teorema 6.8 a pag. 309) La condizione determinante per un tale risultato di discretezza sulla struttura differenziale è proprio l'esistenza di una minora-zione universale del raggio di iniettività globale. In sviluppi successivi, che risalgono a Gromov ([Gr5]) tale condizione è stata sostituita da una minora-zione universale sul cosiddetto raggio di contraibilità. Essendo quest'ultimo un concetto puramente metrico (nel senso degli spazi metrici astratti) ciò ha consentito a S.C. Ferry, R.E. Greene, P. Petersen e altri di ottenere teoremi di precompattezza e finitezza per spazi metrici ([F], [G-P], [P]).

Remarques. Nel caso di una famiglia di varietà iperboliche compatte M n -dimensionali ($n \geq 4$) di volume uniformemente maggiorato, si può dare una stima esplicita (inferiore e superiore) del numero dei tipi di omotopia (e quindi di isometria, secondo il teorema di rigidità di Mostow). Detto in breve, ciò può farsi decomponendo la varietà M in parte spessa e parti sottili, e associando alla parte spessa un complesso simpliciale finito che ha il suo stesso tipo di omotopia, e in cui il numero di vertici e di lati può essere stimato in funzione della costante di Margulis e del volume. A questo punto

si conclude osservando che la parte spessa di M ha lo stesso tipo di omotopia di M (Si veda [B-G-L-M] per i dettagli).

Concludiamo con un risultato che è un corollario del Teorema 5.2.10.

Corollaire 5.2.13. *Siano n, K_0, V_0 numeri reali positivi fissati. La famiglia delle varietà Riemanniane compatte (M^n, g) di dimensione $n \geq 4$, di curvatura sezionale $-K_0^2 \leq K < 0$ e di volume $\text{vol}(M^n, g) \leq V_0$ è relativamente compatta (rispetto alla distanza di Gromov-Hausdorff) nella classe delle varietà con metriche $C^{1,\alpha}$ (per ogni $0 < \alpha < 1$ fissato) e contiene un numero finito di tipi di diffeomorfismo.*

Démonstration. Il Teorema 5.2.6 implica che $\text{diam}(M^n, g) \leq C(n)K_0^{nr-1}V_0^r$ e, per il Corollario 5.2.4, $\text{vol}(M^n, g) \geq c(n) \cdot K_0^{-n}$. Poichè per ipotesi (M^n, g) ha curvatura sezionale limitata (superiormente e inferiormente), la famiglia di varietà considerata verifica le ipotesi del Teorema 5.2.9 e del Teorema 5.2.10 e applicando questi due risultati si conclude. \square

5.3 Una generalizzazione del Lemma di Margulis

Una generalizzazione del Lemma di Margulis (Teorema 5.2.1 in questa tesi) a varietà di curvatura non limitata e, più in generale, a spazi metrici misurati aventi entropia limitata superiormente, è stata data in [B-C-G] da G. Besson, G. Courtois e S. Gallot.

L'idea di partenza è che l'ipotesi di curvatura sezionale negativa del Lemma originario per la varietà M^n non sia necessaria di per sè, ma che siano piuttosto le proprietà algebriche del gruppo fondamentale $\pi_1(M^n)$ di M^n (e, attraverso di esse, la dinamica dell'azione di $\pi_1(M^n)$ sul suo rivestimento universale) a giocare un ruolo determinante. Lavorando in questa direzione, G. Besson, G. Courtois e S. Gallot hanno stabilito una versione del Lemma di Margulis valida senza alcuna ipotesi sulla curvatura (l'ipotesi $K \geq -K_0^2$ del Lemma classico è stata sostituita con l'ipotesi, assai più debole, di entropia limitata).

Proposition (Définition) 5.3.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia μ una misura boreliana su X (i.e. tale che gli aperti della topologia indotta da d siano misurabili). Per ogni $R > 0$ e $x \in X$, denotiamo $B(x, R)$ la bolla in X di centro x e raggio R rispetto alla distanza d . Allora, il numero*

$$Ent(X, d, \mu) = \text{Inf} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[\mu(B(x, R))]}{R}$$

non dipende dalla scelta di $x \in X$ e si dice entropia di (X, d, μ) .

Per la dimostrazione di questa proposizione che contiene al suo interno la definizione dell'entropia $Ent(X, d, \mu)$ è sufficiente vedere che il limite inferiore è indipendente dalla scelta di x , e ciò discende immediatamente dal fatto che, se $y \in X$ e $d = d(x, y)$, allora $B(x, r) \subseteq B(y, r + d) \subseteq B(x, r + 2d)$.

La terna (X, d, μ) si dirà *spazio metrico misurato*.

Nel caso in cui (M, g) è una varietà Riemanniana, la sua entropia (di volume) è definita come l'entropia dello spazio metrico misurato $(\tilde{M}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$, dove (\tilde{M}, \tilde{g}) è il rivestimento universale Riemanniano di (M, g) , e $d_{\tilde{g}}$ e $dv_{\tilde{g}}$ sono rispettivamente la distanza e la forma di volume indotte da \tilde{g} .

Aggiungiamo che lo spazio metrico X ammette un gruppo Γ di isometrie (nel senso degli spazi metrici misurati, cioè che preservano sia la distanza che la misura) co-compatto, allora si può dimostrare che il limite inferiore che compare nella Proposizione 5.3.1 è un limite finito. (Si veda, ad esempio, [Rob], pag. 20, e per il caso delle varietà Riemanniane [K-H], pag. 373). Inoltre, in questo caso, l'entropia non dipende dalla scelta della misura μ purchè essa sia una misura Γ -invariante. (Si veda [Na] per un controesempio esplicito in cui i limiti superiore e inferiore sono finiti ma non coincidono)

Remarques. L'ipotesi di minorazione della curvatura di Ricci e l'ipotesi di minorazione della curvatura sezionale usate solitamente per provare teoremi di finitezza, precompattatezza e compattatezza (cfr. Paragrafo 1.2) sono più forti dell'ipotesi di maggiorazione dell'entropia. Infatti, per ogni varietà Riemanniana (M^n, g) , si ha

$$K \geq -K_0^2 \Rightarrow Ric_g \geq -(n-1)K_0^2 \cdot g \Rightarrow Ent(M^n, g) \leq (n-1)K_0$$

dove l'ultima implicazione discende dal teorema di confronto di R. L. Bishop ([G-H-L], Teorema 3.101), secondo il quale il volume di una bolla di raggio R nel rivestimento universale Riemanniano (\tilde{M}^n, \tilde{g}) di (M^n, g) è maggiorato da $vol(S^{n-1}) \int_0^R \left(\frac{\text{sh}K_0 t}{K_0}\right)^{n-1} dt$.

Si noti anche che esistono esempi di successioni di varietà Riemanniane (M_k, g_k) tali che $\lim_{k \rightarrow +\infty} Ric_{g_k} \rightarrow -\infty$, mentre le entropie $Ent(M_k, g_k)$ restano uniformemente limitate. Attraverso questi esempi, descritti alla fine del

paragrafo, si vede che, sostituendo l'ipotesi di minorazione della curvatura di Ricci con un'ipotesi di maggiorazione dell'entropia il Teorema di precompattanza 5.2.12 non è più valido, come pure i teoremi di continuità del volume e della struttura differenziale di J. Cheeger e T. Colding. In effetti, una delle difficoltà che emergono dal Teorema 5.2.12 è quella di descrivere gli spazi limite possibili, che sono spazi di lunghezza. Lo studio delle proprietà degli spazi limite di successioni di varietà a curvatura di Ricci minorata è stato affrontato piuttosto recentemente in una serie di lavori da J. Cheeger e da T. Colding ([C-C 1], [C-C 2]). Sostituendo l'ipotesi di minorazione della curvatura di Ricci con l'ipotesi di maggiorazione sull'entropia si ha il vantaggio che gli spazi limite appartengono alla stessa categoria dell'insieme considerato : infatti, il limite di una successione di spazi di lunghezza a entropia maggiorata è uno spazio di lunghezza a entropia maggiorata (cfr. [Re] e la fine di questo paragrafo). Questo giustifica anche la necessità di definire l'entropia per spazi metrici astratti.

Remarques. L'entropia può essere infinita. Questo si vede chiaramente prendendo come esempio lo spazio euclideo \mathbb{R}^n munito della metrica g che, in coordinate polari $(r, \nu) \in (0, +\infty) \times S^{n-1}$ si scrive $(dr)^2 + sh(r^2)g_{S^{n-1}}$. Infatti, il volume della bolla centrata nell'origine e di raggio R si scrive $vol(B(R)) = vol(S^{n-1}) \int_0^R (sh(r^2))^{\frac{n-1}{2}} dr$. Per R abbastanza grande, $vol(B(R)) \geq Ce^{\frac{n-1}{4}R^2}$, e quindi $Ent(\mathbb{R}^n, g) = \frac{1}{R} \text{Log}[vol(B(R))] \geq \frac{n-1}{4}R - \frac{c'}{R} \rightarrow +\infty$ per $R \rightarrow \infty$.

Il Lemma di Margulis e le sue conseguenze restano validi per quelle varietà il cui gruppo fondamentale abbia le proprietà tipiche dei gruppi fondamentali delle varietà a curvatura negativa. Le definizioni che seguono, introdotte in [B-C-G], saranno utilizzate in modo cruciale per precisare questo concetto.

Définition 5.3.2. *Sia Γ un gruppo finitamente generato e sia $\delta > 0$. Γ si dice δ -spesso se è il gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana compatta connessa X con curvatura sezionale $K \leq -1$ e raggio di iniettività $inj(X) \geq \delta$.*

Définition 5.3.3. *Sia Γ un gruppo finitamente generato e sia $\delta > 0$. Γ si dirà δ -non abeliano se è non abeliano e se, per ogni coppia di elementi $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ che non commutano tra loro, esistono una varietà Riemanniana compatta connessa X con curvatura sezionale $K \leq -1$ e raggio di iniettività $inj(X) \geq \delta$ e un morfismo ρ dal sottogruppo generato da γ_1 e γ_2 al gruppo fondamentale $\pi_1(X)$, tale che $\rho(\gamma_1)$ e $\rho(\gamma_2)$ non commutano in $\pi_1(X)$.*

Exemples 5.3.4. Per costruire esempi di gruppi δ -non abeliani (si vedano 1.3, 1.4, 1.5 in [B-C-G]) sono da tenere in mente i seguenti fatti (i), (ii), (iii) :

- (i) Un gruppo δ -spesso Γ è banalmente δ -non abeliano. Inoltre, un gruppo δ -spesso Γ possiede la *proprietà di transitività della commutazione*, nel senso che se γ_1 commuta con γ_2 e γ_2 commuta con γ_3 , allora γ_1 commuta con γ_3 per ogni γ_1, γ_2 e $\gamma_3 \in \Gamma \setminus \{e\}$ (Questo fatto si può vedere usando risultati classici sulle geodetiche invarianti nel rivestimento universale delle varietà a curvatura negativa, cfr. Lemma 3.5 a pag. 26 in [DoC]). Si ricordi, in particolare, che il gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana compatta a curvatura sezionale strettamente negativa ha centro nullo.
- (ii) Il prodotto $G \times H$ di un gruppo δ -non abeliano G con un gruppo abeliano H è δ -non abeliano.
- (iii) Il prodotto $G_1 \times G_2$ di due gruppi δ -non abeliani G_1, G_2 è δ -non abeliano.

Le asserzioni (ii) e (iii) sono vere perchè in un prodotto diretto, se due elementi non commutano allora non commutano le loro proiezioni su almeno uno dei fattori. (Pertanto, basta comporre tali proiezioni con il morfismo ρ della Definizione 5.3.3)

In generale, i gruppi in (ii) e (iii) non sono δ -spessi. Ciò segue dal Teorema di Preissman (si veda, ad esempio, [DoC], pag. 260), in quanto un prodotto diretto contiene in generale sottogruppi abeliani non banali diversi da \mathbb{Z} (ad esempio il sottogruppo generato da (g_1, e) e (e, g_2) , dove g_1 e g_2 sono elementi non nulli di G_1 e G_2 rispettivamente).

Siamo ora in grado di enunciare il risultato principale ottenuto in [B-C-G]. Ricordiamo che, data un'azione di un gruppo Γ su un insieme X e un punto $x \in X$, si definisce l'*orbita di x* come l'insieme $\Gamma \cdot x = \{y \in X \mid y = \gamma \cdot x \text{ per qualche } \gamma \in \Gamma\}$ e lo *stabilizzatore di x* come il sottogruppo Γ_x di Γ definito da $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x = x\}$. Consideriamo ora uno spazio metrico misurato (Y, d, μ) , e denotiamo con $\Gamma_\varepsilon(y)$ il sottogruppo di Γ generato dai $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(y, \gamma \cdot y) < \varepsilon$, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e ogni $y \in Y$.

Théorème 5.3.5. (cfr. [B-C-G], Teorema 2.1) *Siano δ e H numeri reali positivi arbitrari. Sia (Y, d, μ) uno spazio metrico misurato arbitrario la cui entropia sia maggiorata da H , sia Γ un gruppo δ -non abeliano che agisce per isometrie su (Y, d, μ) e $y \in Y$ un punto con stabilizzatore banale la cui orbita $\Gamma \cdot y$ sia discreta. Risulta allora quanto segue :*

(0) $Ent(Y, d, \mu) > 0$;

(i) se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ sono due elementi che non commutano, si ha $\max\{d(y, \gamma_1 \cdot y), d(y, \gamma_2 \cdot y)\} \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{Log2}{H}$. In particolare, $\Gamma_\varepsilon(y)$ è abeliano per ogni $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{Log2}{H}$;

(ii) Per ogni $\eta > 0$, se esiste un elemento $\gamma_1 \in \Gamma \setminus \{e\}$ tale che $d(y, \gamma_1 \cdot y) \leq \eta$, allora ogni elemento γ_2 di Γ che non commuta con γ_1 verifica

$$d(y, \gamma_2 \cdot y) \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{1}{H} Log \left(\frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{1}{H\eta} \right).$$

Se inoltre (Y, d) è uno spazio di lunghezza connesso e se il centro di Γ è nullo, valgono le seguenti disuguaglianze :

(iii) $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(y, \gamma \cdot y) \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{1}{H} e^{-2\frac{4+\delta}{\delta}HD}$ per ogni maggiorante D di $\sup_{z \in Y} d(\Gamma \cdot y, \Gamma \cdot z)$.

(iv) $Ent(Y, d, \mu) \sup_{z \in Y} d(\Gamma \cdot y, z) \geq \frac{\delta Log2}{8+2\delta}$.

Remarques. In una varietà Riemanniana compatta (M, g) , il gruppo fondamentale $\Gamma = \pi_1(M)$ agisce sul rivestimento universale Riemanniano (\tilde{M}, \tilde{g}) per isometrie, senza punti fissi ed ha tutte le orbite discrete.

Allora, se Γ è δ -non abeliano per qualche $\delta > 0$, il punto (i) del Teorema 5.3.5 dice che per ogni $\tilde{y} \in \tilde{M}$ il sottogruppo $\Gamma_\varepsilon(\tilde{y})$ generato dai $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y}) < \varepsilon$ è abeliano per ogni ε minore o eguale a un certo valore che dipende solo da δ e dall'entropia $Ent(\tilde{M}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$ dello spazio metrico misurato $(\tilde{M}, d_{\tilde{g}}, dv_{\tilde{g}})$. (Si ricordi che, per quanto dimostrato nel Paragrafo 1.1, $\Gamma_\varepsilon(\tilde{y})$ si identifica con il sottogruppo $\Pi_\varepsilon(y)$ di $\pi_1(M, y)$ generato dai lacci centrati in $y = \pi(\tilde{y})$ e di lunghezza strettamente minore di ε).

Ne segue che, poichè un gruppo abeliano è nilpotente, il risultato del Teorema 5.3.5 generalizza il Lemma di Margulis (Teorema 5.2.1).

Ricordiamo che, per definizione di metrica sollevata, si ha, per ogni $y, z \in M$ e ogni $\tilde{y} \in \tilde{M}$ (risp. $\tilde{z} \in \tilde{M}$) che si proietta su y (risp. su z), $d_{\tilde{M}}(\Gamma \cdot \tilde{y}, \Gamma \cdot \tilde{z}) = \inf_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} d_{\tilde{M}}(\gamma \cdot \tilde{y}, \gamma' \cdot \tilde{z}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d_{\tilde{M}}(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{z}) = d_{\tilde{M}}(\tilde{y}, \Gamma \cdot \tilde{z}) = d_M(y, z)$. Pertanto, per ogni $\tilde{y} \in \tilde{M}$ fissato, il valore $\sup_{\tilde{z} \in \tilde{M}} d_{\tilde{M}}(\Gamma \cdot \tilde{y}, \Gamma \cdot \tilde{z})$ è maggiorato dal diametro di (M, g) . Nel caso in cui M ha curvatura negativa, il suo raggio di

iniettività in un punto x è uguale a $\frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d_{\tilde{M}}(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x})$ per ogni $\tilde{x} \in \tilde{M}$ che si proietta su x (cfr. pag. 57). In altre parole, il punto (iii) del Teorema sopra estende agli spazi metrici misurati il precedente Teorema 5.2.5 (si ricordi che, se M ha curvatura strettamente negativa, allora $\pi_1(M)$ è privo di centro). Il caso di curvatura non necessariamente negativa, è contemplato nel seguente :

Corollaire 5.3.6. (cfr. [B-C-G], Corollario 3.9) *Siano δ e H numeri reali positivi arbitrari e sia Y una varietà arbitraria il cui gruppo fondamentale è δ -non abeliano e di centro ridotto a zero, munita di una metrica Riemanniana g la cui entropia di volume sia maggiorata da H . Per ogni punto $y \in Y$, la lunghezza $l_g(y)$ di ogni laccio γ non omotopo a zero e di punto base y verifica*

$$l_g(y) \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \frac{1}{H} e^{-\frac{2(4+\delta)}{\delta} H \text{diam}(Y,g)}.$$

Se $\text{inj}(Y, g)$ e $\text{inj}(\tilde{Y}, \tilde{g})$ denotano rispettivamente il raggio d'iniettività globale di Y e il raggio di iniettività globale del suo rivestimento universale Riemanniano, si ha inoltre

$$\text{inj}(Y, g) \geq \min \left(\text{inj}(\tilde{Y}, \tilde{g}), \frac{\delta}{8 + 2\delta} e^{-\frac{2(4+\delta)}{\delta} H \text{diam}(Y,g)} \right).$$

Remarques. Si osservi che $\text{inj}(\tilde{Y}, \tilde{g}) = +\infty$ quando \tilde{Y} ha curvatura sezionele non positiva o, più generalmente, è priva di punti coniugati.

Il risultato seguente generalizza il Teorema 5.2.3 a spazi metrici misurati.

Théorème 5.3.7. (cfr. [B-C-G], Teorema 2.6) *Siano δ e H numeri reali positivi. Per ogni spazio metrico misurato connesso (Y, d, μ) la cui entropia sia maggiorata da H e ogni sottogruppo Γ δ -non abeliano del gruppo delle isometrie di (Y, d, μ) che agisce senza punti fissi, le cui orbite sono tutte discrete e che ammette una rappresentazione iniettiva nel gruppo fondamentale di una qualunque varietà compatta X di curvatura negativa, esiste un $y \in Y$ tale che*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(y, \gamma \cdot y) \geq \frac{\delta \text{Log} 2}{4 + \delta} \cdot \frac{1}{H}.$$

Si noti che nel Teorema 5.3.7, l'ipotesi

(H_1) Γ ammette una rappresentazione iniettiva nel gruppo fondamentale di almeno una varietà compatta X di curvatura negativa

può essere sostituita, lasciando invariate le altre ipotesi, dall'ipotesi più debole (e soprattutto più intrinseca) :

(H_2) La relazione di commutazione è transitiva su $\Gamma \setminus \{e\}$

e la tesi del teorema mantiene la sua validità (cfr. [B-C-G], Remark 2.7). Riporteremo in dettaglio la dimostrazione di questo fatto alla fine del capitolo (Teorema 5.4.4).

Nei due corollari seguenti si generalizza la descrizione della parte sottile data dal Teorema 5.2.7.

Corollaire 5.3.8. (cfr. [B-C-G], Corollario 3.4) *Si fissino due numeri reali positivi arbitrari δ e H e sia $\varepsilon_0 = \frac{\delta \text{Log} 2}{(4+\delta)H}$. Consideriamo una qualunque varietà connessa Y tale che il suo gruppo fondamentale è δ -non abeliano e ammette una rappresentazione iniettiva nel gruppo fondamentale di almeno una varietà compatta X di curvatura negativa. Supponiamo Y dotata di una metrica Riemanniana g qualunque (in particolare, non si suppone che g sia di curvatura negativa o limitata) la cui entropia di volume sia maggiorata da H , e sia $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ il rivestimento universale Riemanniano di Y . Chiamiamo "parte sottile" di Y (e la denotiamo Y_{ε_0}) l'insieme degli $y \in Y$ tali che $l(y) < \varepsilon_0$ (dove $l(y)$ denota la lunghezza del più piccolo laccio non omotopo a zero centrato in y). Allora, ciascuna delle componenti connesse di Y_{ε_0} (denotate $Y_{\varepsilon_0}^i$, $i \in I$) ha le proprietà seguenti :*

- (i) *esiste un aperto $\tilde{Y}_{\varepsilon_0}^i \subseteq \tilde{Y}$ tale che la restrizione π_i di π a $\tilde{Y}_{\varepsilon_0}^i$ sia un rivestimento di $Y_{\varepsilon_0}^i$, e coincide con il quoziente di $\tilde{Y}_{\varepsilon_0}^i$ rispetto all'azione di un sottogruppo Γ_i di $\Gamma = \text{Aut}(\tilde{M})$ isomorfo a \mathbb{Z} . Più precisamente, $\tilde{Y}_{\varepsilon_0}^i$ è una delle componenti connesse di $\tilde{Y}_{\varepsilon_0} = \{\tilde{y} \in \tilde{Y} \mid \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d_{\tilde{g}}(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y}) < \varepsilon_0\}$ e Γ_i è il sottogruppo di Γ che lascia $\tilde{Y}_{\varepsilon_0}^i$ stabile ;*
- (ii) *per ogni $y \in Y_{\varepsilon_0}^i$, l'immagine di $\pi_1(Y_{\varepsilon_0}^i, y)$ in Γ (tramite il morfismo $i_* : \pi_1(Y_{\varepsilon_0}^i, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ indotto dall'inclusione $i : Y_{\varepsilon_0}^i \rightarrow Y$ e composto con l'isomorfismo $\phi_{\tilde{y}} : \pi_1(Y, y) \rightarrow \Gamma$ che, qui, non dipende dalla scelta di $\tilde{y} \in \pi_i^{-1}(y)$) coincide con Γ_i , è isomorfo a \mathbb{Z} e contiene $\Gamma_{\varepsilon_0}(\tilde{z})$ per ogni $\tilde{z} \in \tilde{Y}_{\varepsilon_0}^i$.*

Corollaire 5.3.9. (cfr. Corollario 3.8 in [B-C-G]) *Consideriamo tre numeri reali positivi arbitrari δ , H e ε , dove $\varepsilon \leq \varepsilon_0/2 = \frac{1}{2} \frac{\delta \text{Log} 2}{(4+\delta)H}$. Poniamo $R_\varepsilon = \frac{\delta}{2(4+\delta)} \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{\delta}{4+\delta} \frac{1}{H\varepsilon} \right)$. Sia (Y, g) una varietà Riemanniana connessa con entropia di volume maggiorata da H , il cui gruppo fondamentale sia δ -non abeliano e ammetta una rappresentazione iniettiva nel gruppo fondamentale di una varietà di curvatura negativa. Sia σ un laccio non omotopo a zero centrato in un punto $y \in Y$ di lunghezza strettamente minore di ε , e sia B_{R_ε} la bolla geodetica di raggio R_ε in (Y, g) centrata in y , e sia $\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)$. Poniamo $\tilde{U}_{R_\varepsilon} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})} B(\gamma \cdot \tilde{y}, R_\varepsilon)$. Allora :*

- (i) $\tilde{U}_{R_\varepsilon}$ è la componente connessa di \tilde{y} in $\pi^{-1}(B_{R_\varepsilon})$, e $B_{R_\varepsilon} = \tilde{U}_{R_\varepsilon}/\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})$, dove l'applicazione di passaggio al quoziente è la restrizione di π a $\tilde{U}_{R_\varepsilon}$;
- (ii) $\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})$ è isomorfo a \mathbb{Z} ;
- (iii) per ogni $z \in B_{R_\varepsilon}$, l'immagine di $\pi_1(B_{R_\varepsilon}, z)$ in $\pi_1(Y, z)$ (per il morfismo indotto dall'inclusione $B_{R_\varepsilon} \rightarrow Y$) è isomorfa a \mathbb{Z} e si identifica con $\Gamma_{2R_\varepsilon}(\tilde{y})$ (tramite l'isomorfismo $\phi_{\tilde{z}}$ che, qui, non dipende dalla scelta di \tilde{z} in $\pi^{-1}(z) \cap \tilde{U}_{R_\varepsilon}$).

In effetti il corollario sopra è una versione semplificata del corrispondente risultato in [B-C-G].

Concludiamo il paragrafo con tre proposizioni che ci saranno utili in seguito : la prima (Proposizione 5.3.10) stabilisce alcune proprietà dell'entropia, la seconda (Proposizione 5.3.11) riguarda le proprietà degli spazi di lunghezza e la terza (Proposizione 5.3.12) una proprietà dei gruppi δ -non abeliani.

Proposition 5.3.10. *Sia X un insieme non vuoto, siano d_1 e d_2 distanze su X tali che $d_1 \leq d_2$ (i.e. $d_1(x, y) \leq d_2(x, y)$ per ogni $x, y \in X$) e sia μ una misura boreliana su X . Allora,*

- (i) $Ent(X, d_1, \mu) \geq Ent(X, d_2, \mu)$.
- Se d è una distanza su X e $\lambda > 0$, allora :
- (ii) $Ent(X, \lambda d, \mu) = \frac{1}{\lambda} Ent(X, d, \mu)$.

Démonstration. Sia $x \in X$, e $B_1(x, R)$ (risp. $B_2(x, R)$) la bolla in X di centro x e raggio R rispetto alla distanza d_1 (risp. d_2). E' chiaro che $B_2(x, R) \subseteq B_1(x, R)$, da cui $\mu(B_2(x, R)) \leq \mu(B_1(x, R))$. Calcolando i logaritmi, dividendo per R e passando al limite inferiore per $R \rightarrow \infty$, si ottiene (i).

Per dimostrare (ii), si denoti $B(x, R)$ (risp. $B_\lambda(x, R)$) la bolla centrata in x e di raggio R rispetto alla distanza d (risp. λd). Allora è chiaro che $B_\lambda(x, R) = B(x, R/\lambda)$. Calcolando i logaritmi, dividendo per R/λ e passando al limite inferiore per $R \rightarrow \infty$, si ottiene (ii). □

Tra gli spazi metrici che consideriamo, rivestono particolare importanza i cosiddetti *spazi di lunghezza*. Ricordiamo che uno spazio metrico (X, d) , un'applicazione continua $c : [0, 1] \rightarrow X$ è detta *curva* di X . La *lunghezza* $l(c)$ di una curva c di X è definita come $l(c) = \sup \sum_{i=1, \dots, n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1}))$ tra tutte le possibili partizioni $\{t_0, \dots, t_n\}$ dell'intervallo $[0, 1]$, con $t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

Définition. *Uno spazio metrico (X, d) è detto spazio di lunghezza (e la metrica d metrica di lunghezza) se, per ogni $x, y \in X$, la distanza $d(x, y)$ è uguale all'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che congiungono x e y (i.e. le curve $c : [0, 1] \rightarrow X$ tali che $c(0) = x$ e $c(1) = y$).*

Le varietà Riemanniane complete sono spazi metrici di lunghezza. Altri esempi sono dati dai grafi. In particolare, il grafo di Cayley di un gruppo finitamente generato rispetto a un suo sistema generatore finito (o, più generalmente, dal grafo di Cayley sul quale assegniamo a ogni generatore una lunghezza positiva fissata) è uno spazio metrico di lunghezza. Quest'ultimo esempio sarà studiato in dettaglio nel Capitolo 3.

Un esempio di spazio metrico non di lunghezza è la circonferenza $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, dotata della metrica indotta da \mathbb{R}^2 .

Le proprietà fondamentali degli spazi di lunghezza sono riassunte nella seguente :

Proposition 5.3.11. (si vedano [B-B-I], corollario 2.4.12 e [Gr2], pag. 9) *Sia (X, d) uno spazio metrico di lunghezza completo e localmente compatto (i.e. ogni $x \in X$ ha un intorno a chiusura compatta). Allora,*

- (i) *per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x, y \in X$, esiste una sequenza finita di punti $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$ tali che $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ per $i = 1, \dots, n - 1$ e $\sum_{i=1, \dots, n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x, y) + \varepsilon$;*
- (ii) *ogni insieme chiuso e limitato di X è compatto;*
- (iii) *ogni bolla di X è connessa per archi.*

Il lettore può consultare [B-B-I], Cap.2 o [Gr2], Cap. 1 per il materiale di base sugli spazi di lunghezza.

Nella proposizione 5.3.12 che segue è descritta una proprietà algebrica fondamentale dei gruppi δ -non abeliani.

Premettiamo che, dati un gruppo G e due elementi $g_1, g_2 \in G$, diremo che g_1 e g_2 generano un semigruppone libero in G se ogni elemento di G che può essere scritto come prodotto di potenze positive di g_1 e g_2 ammette un'unica espressione di questo tipo.

Proposition 5.3.12. (cfr [B-C-G], Prop. 1.14) *Sia $\delta > 0$ un numero reale, sia Γ un gruppo δ -non abeliano e $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ elementi che non commutano. Allora, per ogni intero $N \geq 4/\delta$, eventualmente sostituendo γ_2 con γ_2^{-1} , gli elementi γ_1^N e γ_2^N generano un semigruppone libero in G .*

La dimostrazione della Proposizione 5.3.12 si basa sul cosiddetto "Ping-Pong Lemma", che enunciamo e dimostriamo in Appendice B (pag. 160).

Entropia e curvatura di Ricci

Abbiamo notato precedentemente (Osservazioni a pagina 68) che uno dei problemi che scaturiscono dal teorema di precompattezza di M. Gromov (Teorema 5.2.12) è che l'ipotesi $Ric(g) \geq -(n-1)K_0^2 \cdot g$ non passa al limite per

successioni di varietà Riemanniane convergenti per la distanza di Gromov-Hausdorff, mentre l'entropia si comporta in modo più stabile. Non solo, se si considera una successione di varietà Riemanniane (M_k, g_k) di diametro uniformemente limitato e che soddisfano l'ipotesi $Ric(g_k) \geq -(n-1)K_0^2 \cdot g_k$ del teorema di precompattezza di M. Gromov, che sia convergente per la topologia di Gromov-Hausdorff, il limite è in generale uno spazio di lunghezza (X, d) che non è dotato di una metrica Riemanniana (si vedano comunque i lavori di J. Cheeger e T. Colding [C-C 1] e [C-C 2] che dimostrano che lo spazio limite è uno spazio metrico misurato che ha in comune con le varietà della successione alcune proprietà di crescita della misura delle bolle). Tuttavia, essendo il limite (X, d) compatto, si può considerare l'entropia di volume del suo rivestimento universale dotato della distanza di lunghezza sollevata e di una qualunque misura boreliana invariante rispetto all'azione del suo gruppo fondamentale (abbiamo già fatto notare che l'entropia non dipende dalla scelta di questa misura). Hanno allora un senso le seguenti domande :

- (i) Per ogni successione (M_k, g_k) di varietà convergenti (per la distanza di Gromov-Hausdorff) a (X, d) si ha $Ent(X, d) = \lim_{k \rightarrow \infty} Ent(M_k, g_k)$?
- (ii) l'insieme degli spazi di lunghezza aventi diametro e entropia limitati è chiuso per la topologia di Gromov-Hausdorff ?

La risposta a tali questioni è affermativa, purchè ci si restringa a una famiglia di varietà il cui gruppo fondamentale verifichi la stessa ipotesi algebrica che abbiamo fatto nel paragrafo precedente : essere δ -non abeliano e avere centro nullo ([Re]).

A questo proposito è bene rimarcare come alcuni risultati importanti, come il teorema di precompattezza di M. Gromov, il teorema di continuità del volume di T. Colding e il teorema di stabilità della struttura differenziale di J. Cheeger e T. Colding³ non sono più validi se si sostituisce l'ipotesi di minorazione della curvatura di Ricci con l'ipotesi di maggiorazione dell'entropia. In [Re], questo è dimostrato in dettaglio : noi riassumiamo qui soltanto le idee fondamentali che servono a evidenziare come il fenomeno è dovuto alla grande stabilità dell'entropia, che è quasi insensibile a modifiche anche drastiche della distanza, del volume e della topologia, mentre le stesse modifiche fanno tendere a meno infinito il minimo della curvatura di Ricci (denotato Ric_{min}).

Come esempio, si può considerare la costruzione seguente. Si taglino da una varietà Riemanniana fissata (M, g) k bolle disgiunte B_1, \dots, B_k (di raggio

³questi due ultimi teoremi affermano che, per ogni successione (M_k, g_k) di varietà Riemanniane di curvatura di Ricci minorata che converge a una varietà Riemanniana compatta (M, g) della stessa dimensione, M_k è diffeomorfa a M per k abbastanza grande e $vol(M, g) = \lim_{k \rightarrow \infty} vol(M_k, g_k)$.

$\varepsilon_k \ll e^{-k^2}$) e si incollino k cilindri $\partial B_1 \times [0, L_k], \dots, \partial B_k \times [0, L_k]$ (identificando ∂B_i con $\partial B_i \times \{0\}$). Su ciascuno di questi cilindri si incollino poi delle varietà semplicemente connesse Y_1^k, \dots, Y_k^k mediante lo stesso procedimento (i.e. si taglia una bolla B_i' da Y_i^k e si identifica $\partial B_i'$ con $\partial B_i \times \{L_k\}$). Si ottiene così una nuova varietà Riemanniana (M_k, g_k) , e si può dimostrare (cfr. [Re], Capitolo 2) che risulta $Ent(M, g) \leq Ent(M_k, g_k) \leq Ent(M, g)(1 + c\varepsilon_k)$, per cui la successione $Ent(M_k, g_k)$ ha diametro ed entropia uniformemente maggiorate. Distinguiamo i casi seguenti :

- 1) Se la lunghezza L_k dei cilindri è costante (ad esempio = 1) la successione (M_k, g_k) non ammette alcuna sottosuccessione di Cauchy, il che mostra che il teorema di precompattatezza di M. Gromov non è più vero se si sostituisce l'ipotesi di minorazione della curvatura di Ricci con una maggiorazione sull'entropia.
- 2) Se la lunghezza L_k dei cilindri e il diametro delle varietà Y_i^k tendono a zero per $k \rightarrow \infty$, allora (M_k, g_k) tende nel senso di Gromov-Hausdorff a (M, g) , che è una varietà compatta della stessa dimensione. Se la dimensione di M è pari (uguale a $2d$), scegliendo $Y_1^k = \dots = Y_k^k = (\mathbb{C}P^d, \frac{1}{k^2} \cdot can)$, si ottiene, per l'additività della caratteristica di Eulero, che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \chi(M_k) = \chi(M) + k(d-1) \rightarrow +\infty$. In tal caso, M_k non è mai diffeomorfa a M : ovvero il risultato di stabilità della struttura differenziale non vale quando il diametro e l'entropia restano limitati.
- 3) Se, con le stesse notazioni di prima, si sceglie $Y_1^k = \dots = Y_k^k = (S^n, h_k)$, dove h_k è una successione di metriche Riemanniane sulla sfera S^n tale che $\varepsilon_k \ll \sup_{x \in S^n} inj_{h_k}(x) \leq diam(S^n, h_k) \leq 1/k$, mentre $vol(S^n, h_k) = 1$, e L_k tende a zero per k che tende all'infinito, si ottiene che (M_k, g_k) tende a (M, g) nel senso di Gromov-Hausdorff, e tuttavia $\lim_{k \rightarrow +\infty} vol(M_k, g_k) \rightarrow +\infty$. Quindi non è valido il risultato di continuità del volume sotto l'ipotesi di limitazione del diametro e dell'entropia.

I risultati di precompattatezza, continuità del volume e stabilità della struttura differenziale implicano chiaramente che nei casi 1), 2), 3) sopra si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} Ric_{min}(M_k, g_k) = -\infty$ per $k \rightarrow \infty$. Non solo, ma nell'esempio $Y_1^k = \dots = Y_k^k = (\mathbb{C}P^d, \frac{1}{k^2} \cdot can)$ descritto per il caso 2), si può dimostrare che le M_k non ammettono alcuna successione di metriche a curvatura limitata. Infatti, la teoria delle classi caratteristiche permette di scrivere la caratteristica di Eulero di una varietà compatta M tale che $dim(M) = n$ sia pari come integrale di un polinomio nella curvatura di grado $n/2$, a coefficienti universali : questo implica che, per ogni metrica g'_k su M_k , si abbia $\chi(M_k) \leq c_n \int_{M_k} ||R(g'_k)||^{n/2} dv_{g'_k}$, dove $R(g'_k)$ è il tensore di curvatura della

metrica g'_k . Ogni successione g'_k di metriche sulle varietà M_k verifica quindi $\int_{M_k} \|R(g'_k)\|^{n/2} dv_{g'_k} \rightarrow \infty$. Se si normalizza questa successione di metriche (con una omotetia) di modo che i volumi $vol(g'_k)$ siano uniformemente limitati, si ottiene che $\|R(g'_k)\| \rightarrow \infty$, dunque $\max |K_{g'_k}| \rightarrow +\infty$ per ogni successione di metriche su M_k . Questo significa che tutte le strutture differenziali su M_k (eccetto un numero finito) sono escluse dall'insieme delle varietà compatte che ammettono una metrica Riemanniana di curvatura sezionale e volume limitati da costanti K_0^2 e V_0 , mentre tutte ammettono metriche di entropia e diametro limitato da costanti H e D rispettivamente.

5.4 Qualche risultato nuovo

Siamo ora in grado di stabilire una versione del Lemma di Margulis generalizzato che, rispetto alla precedente (Teorema 5.3.5), contiene qualche miglioramento. Sia (X, d, μ) uno spazio metrico misurato e denotiamo $Isom(X, d, \mu)$ il suo *gruppo delle isometrie*, i.e. il gruppo delle bigezioni di X che preservano sia la distanza che la misura.

Théorème 5.4.1. *Siano dati due numeri reali positivi δ e H . Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza misurato connesso, localmente compatto e completo, tale che $Ent(X, d, \mu) \leq H$. Supponiamo che la misura di ogni bolla di raggio positivo in X sia strettamente positiva. Allora, per ogni sottogruppo δ -non abeliano Γ del gruppo delle isometrie $Isom(X, d, \mu)$, discreto rispetto alla topologia C-O, e per ogni $x \in X$, si hanno le seguenti (i), (ii), (iii), (iv) :*

(i) *per ogni coppia di elementi γ_1 e γ_2 di Γ che non commutano tra loro*

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right);$$

(ii) *per ogni coppia di elementi γ_1 e γ_2 di Γ che non commutano tra loro,*

$$\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H};$$

(iii) *il gruppo $\Gamma_\varepsilon(x)$ generato dai $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(x, \gamma \cdot x) < \varepsilon$, è abeliano per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$;*

(iv) *se inoltre il centro di Γ è ridotto al solo elemento neutro, allora*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{4+\delta}{\delta} 2DH}} \right)$$

per ogni maggiorante D di $D(x) = \sup_{z \in X} d(\Gamma \cdot x, z)$.

La dimostrazione di questo risultato si trova a pagina 85.

Remarques 5.4.2. (cfr. Proposizione 5.4.13) L'ipotesi " Γ è un sottogruppo discreto di $Isom(X, d, \mu)$ " può essere sostituita da una delle due ipotesi equivalenti (a) e (b).

(a) Esiste un punto $x \in X$ tale che, per ogni $R > 0$, l'insieme Γ_R degli elementi γ di Γ tali che $\gamma \cdot x$ appartiene a $B_C(x, R)$ sia finito (dove B_C denota la bolla chiusa).

(b) Esiste un punto $x \in X$ tale che l'orbita $\Gamma \cdot x$ del gruppo Γ sia discreta e tale che lo stabilizzatore Γ_x di x sia finito.

Vedremo (cfr. Corollario 5.4.8) che sotto l'ipotesi che il centro di Γ sia ridotto al solo elemento neutro, (b) implica che l'azione di Γ sia propriamente discontinua e priva di punti fissi.

Nell'enunciato del Teorema 5.4.1 si fa riferimento alla topologia C-O. Ricordiamo che in uno spazio metrico (X, d) , dove $C(X, X)$ denota l'insieme delle

funzioni continue $f : X \rightarrow X$, la *topologia C-O su $C(X, X)$* (o *topologia compatto-aperto* o *topologia della convergenza compatta*) è la topologia che ha come base la famiglia degli insiemi

$$B_K(f, \varepsilon) = \{g \in C(X, X) \mid \sup_K d(f(x), g(x)) < \varepsilon\},$$

al variare di $f \in C(X, X)$, $\varepsilon > 0$ e di K tra i compatti di X . In particolare, una successione $\{f_n\}$ di funzioni in $C(X, X)$ converge a f se per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni compatto $K \subseteq X$, esiste un numero naturale $N(\varepsilon, K)$ tale che $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ per ogni $n \geq N(\varepsilon, K)$ e ogni $x \in K$. Inoltre, $C(X, X)$ è uno spazio metrico completo rispetto alla topologia C-O; un sottospazio A di $C(X, X)$ è discreto se e solo se ogni sua successione convergente $f_n \rightarrow f$ ($f \in A$) è definitivamente costante (Per i dettagli su questo argomento si veda [Mu], cap. 7).

D'ora in poi considereremo il gruppo delle isometrie $Isom(X, d)$ dello spazio metrico (X, d) sempre munito della topologia C-O. Dato che un gruppo Γ è discreto in $Isom(X, d, \mu)$ se e solo se è discreto in $Isom(X, d)$ (purchè sia un sottogruppo di $Isom(X, d, \mu)$) è sempre possibile considerare $Isom(X, d)$ piuttosto che $Isom(X, d, \mu)$.

Remarques. Ponendo a confronto tra il Teorema 5.4.1 e il Teorema 5.3.5 si può osservare che :

- (1) Le disuguaglianze (i) e (iv) del Teorema 5.4.1 migliorano quantitativamente le disuguaglianze corrispondenti del Teorema 5.3.5. Più precisamente, il Teorema 5.3.5 afferma che, se γ_1 e γ_2 non commutano, si ha

$$(*) \quad d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \max \left[\text{Log} \left(\frac{\delta}{4 + \delta} \frac{1}{H \cdot d(x, \gamma_1 \cdot x)} \right), e^{-\frac{4+\delta}{\delta} H \cdot d(x, \gamma_1 \cdot x)} \right]$$

(si usi la disuguaglianza in (ii) del Teorema 5.3.5 due volte, scambiando i ruoli di γ_1 e γ_2).

Il Teorema 5.4.1 (ii) afferma sotto le stesse ipotesi che

$$(**) \quad d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right).$$

Tale miglioramento potrebbe apparire senza conseguenze pratiche, essendo il comportamento di queste due minorazioni per $d(x, \gamma_2 \cdot x)$ lo stesso per $d(x, \gamma_1 \cdot x) \rightarrow 0_+$ e per $d(x, \gamma_1 \cdot x) \rightarrow +\infty$. D'altra parte, possiamo rilevare che :

- a) La disuguaglianza (i) : $\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$ del Teorema 5.3.5 non può essere dedotta dalla sola (*) sopra e necessita di una dimostrazione a parte, mentre nel Teorema 5.4.1 la stessa disuguaglianza è una conseguenza immediata di (**);
- b) la disuguaglianza (**) diventa ottimale quando la si adatta ai gruppi di superficie (a questo riguardo si vedano i risultati alle pagine 98 e seguenti).
- (2) L'ipotesi "per ogni x , l'orbita $\Gamma \cdot x$ è discreta" è, nel Teorema 5.4.1, sostituita con l'ipotesi "esiste un x_0 tale che $\Gamma \cdot x_0$ sia discreto e lo stabilizzatore Γ_{x_0} di x_0 sia finito" (cfr. Osservazioni 5.4.2). In altri termini, si mostra che è sufficiente che sia verificata quest'ultima ipotesi in almeno un punto x_0 perchè le conclusioni del Teorema siano valide in ogni punto x . Infine, sono ammesse le azioni di gruppi con punti fissi che in [B-C-G] andavano escluse.

Proposition 5.4.3. *Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza misurato, completo, localmente compatto e connesso, tale che $\text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$ e tale che in X le bolle di raggio positivo abbiano misura strettamente positiva. Supponiamo che Γ sia un sottogruppo discreto del gruppo delle isometrie di (X, d, μ) che sia δ -non abeliano, abbia la proprietà di transitività della commutazione e sia tale che ogni suo sottogruppo abeliano sia isomorfo a $\{e\}$ o \mathbb{Z} . Si consideri un punto $x_0 \in X$ tale che $\inf_{g \in \Gamma} d(x_0, g \cdot x_0) = \varepsilon < \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$.*

Posto $R_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{H} \frac{\delta}{4+\delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} \varepsilon}} \right)$, si ha :

- (i) esiste un $\tau \in \Gamma$ tale che, per il sottogruppo $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0)$ generato dagli elementi $g \in \Gamma$ tali che $d(x_0, g \cdot x_0) < 2R_\varepsilon$ risulta $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0) = \tau^{\mathbb{Z}} = \{\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- (ii) la mappa quoziente $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$, la mappa $\bar{\pi} : X \rightarrow X/\tau^{\mathbb{Z}}$ e la mappa $p : X/\tau^{\mathbb{Z}} \rightarrow X/\Gamma$ (quest'ultima definita da $p \circ \bar{\pi} = \pi$) sono rivestimenti; se sul quoziente $X/\tau^{\mathbb{Z}}$ (risp. X/Γ) si definisce la distanza $d([x], [y]) = \inf_{g \in \tau^{\mathbb{Z}}} d(x, g \cdot y)$ (risp. $d([x], [y]) = \inf_{g \in \Gamma} d(x, g \cdot y)$) per ogni $x, y \in X$, e se $\bar{x}_0 = \bar{\pi}(x_0)$ e $\hat{x}_0 = \pi(x_0)$, allora la restrizione di p alla bolla $B(\bar{x}_0, R_\varepsilon)$ è un omeomorfismo sulla bolla $B(\hat{x}_0, R_\varepsilon)$ che è un'isometria locale.

Remarques. L'ipotesi " Γ è un sottogruppo discreto del gruppo delle isometrie di (X, d, μ) " implica che l'azione di Γ sia libera e propriamente discontinua in quanto Γ , essendo non abeliano con la proprietà di transitività della commutazione, ha centro nullo (Corollario 5.4.8).

Théorème 5.4.4. *Sia δ un numero reale strettamente positivo. Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza con una misura completo, localmente compatto e connesso, sul quale agisce per isometrie un gruppo Γ δ -non abeliano, con la*

proprietà di transitività della commutazione e che supponiamo sia un sottogruppo discreto del gruppo delle isometrie di (X, d, μ) . Supponiamo inoltre che su X la misura di ogni bolla di raggio positivo sia strettamente positiva. Allora : $Ent(X) > 0$; inoltre, esiste un punto $x_0 \in X$ tale che

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) > \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{Log 2}{Ent(X)}$$

dove $Ent(X)$ denota l'entropia dello spazio metrico misurato (X, d, μ) .

Remarques 5.4.5. Qui l'ipotesi che Γ sia discreto sostituisce l'ipotesi che tutte le orbite di Γ siano discrete e l'azione sia priva di punti fissi (Teorema 5.3.7). In questo modo è sufficiente verificare le ipotesi su una sola orbita, invece che su tutte, (Osservazioni 5.4.2).

Allo scopo di approfondire il significato delle ipotesi fatte nei risultati precedenti (dove in particolare abbiamo, oltre alla δ -non abelianità, richiesto che il centro di Γ sia nullo) studiamo ora le proprietà dei sottogruppi finiti dei gruppi δ -non abeliani.

Premettiamo che le proprietà qualitative che ora vedremo non dipendono, a differenza delle disuguaglianze quantitative stabilite nel Teorema 5.4.1, dal valore scelto per δ . Ciò apparirà più evidente formulando i risultati che seguono in termini di *gruppi iperbolici per coppie*.

Définition 5.4.6. Sia Γ un gruppo finitamente generato. Si dice che Γ è iperbolico per coppie se è non abeliano e se, per ogni coppia di elementi $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ che non commutano, esiste una varietà Riemanniana compatta connessa X di curvatura sezionale $K < 0$ insieme con un morfismo ρ dal sottogruppo generato da γ_1 e γ_2 al gruppo fondamentale di X tale che $\rho(\gamma_1)$ e $\rho(\gamma_2)$ non commutano.

Remarques. L'insieme dei gruppi δ -non abeliani è contenuto (per qualunque valore di δ) nell'insieme dei gruppi iperbolici per coppie. Tuttavia, sostituire l'ipotesi di δ -non abelianità con l'ipotesi di iperbolicità per coppie non è soltanto una generalizzazione : la seconda ipotesi, oltre ad essere più semplice e più naturale, è verificata da tutti i gruppi fondamentali delle varietà compatte connesse a curvatura negativa. Inoltre, col rendere gli enunciati dei teoremi indipendenti dal valore di δ , quest'ipotesi si allinea con una congettura di G. Besson, G. Courtois e S. Gallot, secondo la quale dovrebbe essere possibile stabilire una versione del Teorema 5.4.1 in cui le disuguaglianze in (i),..., (iv) non dipendono dalla costante δ . (Più precisamente, si vuole sostituire l'ipotesi " Γ è δ -non abeliano" con l'ipotesi "le coppie di elementi di Γ si

comportano come le coppie di elementi del gruppo fondamentale di almeno una varietà X che verifica le ipotesi del Lemma di Margulis classico⁴.)

Proposition 5.4.7. *Se Γ è un gruppo iperbolico per coppie, allora ogni suo sottogruppo finito è incluso nel suo centro; inoltre, se Γ è di centro ridotto a zero, allora ogni suo sottogruppo finito risulta uguale a $\{e\}$. In particolare, questa proprietà vale per i gruppi δ -non abeliani.*

Corollaire 5.4.8. *Sia $Isom(X, d)$ il gruppo delle isometrie di uno spazio di lunghezza (X, d) connesso, completo e localmente compatto, e sia Γ un suo sottogruppo δ -non abeliano o, più in generale, iperbolico per coppie. Allora*

- (1) *se Γ è discreto in $Isom(X, d)$, allora, per ogni $x \in X$, l'orbita $\Gamma \cdot x$ è discreta e lo stabilizzatore di x è finito e incluso nel centro di Γ ;*
- (2) *se Γ è discreto in $Isom(X, d)$ e se il suo centro è nullo, allora l'azione di Γ su (X, d) è libera e propriamente discontinua⁵;*
- (3) *se Γ è un sottogruppo di $Isom(X, d)$ avente centro nullo, e se esiste un punto $x_0 \in X$ la cui orbita è discreta e il cui stabilizzatore è finito, allora ogni punto di X ha (sotto l'azione di Γ) orbita discreta e stabilizzatore banale (i.e. $\Gamma_x = \{e\} \forall x$).*

Exemples 5.4.9. Se si elimina l'ipotesi di locale compattezza per lo spazio X si trovano dei controesempi al Corollario 5.4.8. In particolare, mostreremo esempi di gruppi la cui azione è isometrica su uno spazio non localmente compatto (X, d) , che sono discreti in $Isom(X, d)$, ma che ammettono punti con stabilizzatore infinito.

- 1) Sia $\mathbb{C}(\Gamma, S)$ il grafo di Cayley di un gruppo Γ finitamente generato rispetto a un suo sistema di generatori S . Consideriamo $\mathbb{C}(\Gamma, S)$ dotato della struttura canonica di spazio metrico. Denotiamo con l^2 lo spazio di tutte le successioni di numeri reali $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tali che la norma $\|\{a_i\}\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2}$ sia finita, che consideriamo munito della distanza indotta dalla norma $\|\{a_i\}\|$. Prendiamo ora il prodotto $X = l^2 \times \mathbb{C}(\Gamma, S)$ munito della metrica prodotto (che è una distanza di lunghezza). Su tale X è definita l'azione del gruppo $G = \mathbb{Z} \times \Gamma$ data da $(n, \gamma) \cdot (\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, x) = (\{a_{i+n}\}_{i \in \mathbb{Z}}, \gamma \cdot x)$ dove $\gamma \cdot x$ denota l'immagine di x rispetto all'azione canonica di un gruppo sul suo grafo di Cayley. E'

⁴Qui si intende che per ogni coppia di elementi $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ che non commutano, esiste una varietà X tale che $-1 \leq K_X < 0$ e un morfismo ρ di Γ in $\pi_1(X)$ tale che $\rho(\gamma_1)$ e $\rho(\gamma_2)$ non commutano.

⁵Ricordiamo che l'azione di un gruppo Γ su uno spazio topologico X si dice *libera e propriamente discontinua* se : (i) per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x tale che $g \cdot U_x \cap U_x = \emptyset$ per ogni $g \in \Gamma \setminus \{e\}$; (ii) per ogni $x, y \in X$ esistono intorni aperti U_x e V_y tali che $g \cdot U_x \cap V_y = \emptyset$ per ogni $g \in \Gamma$.

facile vedere che l'azione di G è isometrica su X . Inoltre, G è discreto nella topologia C-O : per vederlo, è sufficiente trovare un punto $x_0 \in X$ la cui orbita è discreta e priva di punti fissi. (Infatti, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$ nel senso della topologia C-O, allora $\gamma_n \cdot x_0 \rightarrow \gamma \cdot x_0$ e, poichè l'orbita è discreta, sarà $\gamma_n \cdot x_0 = \gamma \cdot x_0$ per $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande e quindi, essendo l'azione libera, $\gamma_n = \gamma$.) Ad esempio si può prendere $x_0 = ((\delta_i^k)_i, c)$ dove c è un vertice arbitrario del grafo di Cayley e $(\delta_i^k)_i$ è la successione i cui elementi sono tutti nulli eccetto quello di posto k . Si noti che G è δ -non abeliano se lo è Γ (ma il centro di G è chiaramente non nullo).

D'altra parte, se consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $g_n = (n, e) \in G$, si ha che g_n agisce su X fissando il punto $(0, e)$ (dove 0 rappresenta la successione che ha tutti gli elementi nulli) e quindi lo stabilizzatore di tale punto è infinito. Questo è un contro-esempio al Corollario 5.4.8 per il caso non localmente compatto. Infatti lo spazio X non è localmente compatto perchè l^2 non è localmente compatto.

- 2) Sia (M, g) una varietà Riemanniana compatta con curvatura sezionale strettamente negativa e sia (\tilde{M}, \tilde{g}) il suo rivestimento universale Riemanniano. Si denoti con $L^2(\tilde{M}, \tilde{g})$ lo spazio vettoriale (che non è localmente compatto) delle funzioni $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che la norma $\|f\| = \left(\int_{\tilde{M}} |f|^2 dv_{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}}$ è finita per ogni f (dove $dv_{\tilde{g}}$ denota la forma di volume associata a \tilde{g}). Si noti che qui si intende che ogni $f \in L^2(\tilde{M}, \tilde{g})$ è definita "quasi ovunque", i.e. tranne che su un insieme di misura nulla.

Sia $Isom(L^2(\tilde{M}, \tilde{g}))$ il gruppo delle isometrie di $L^2(\tilde{M}, \tilde{g})$. Allora, poichè il gruppo Γ degli automorfismi di rivestimento di \tilde{M} agisce per isometrie su \tilde{M} , si ha una rappresentazione di Γ in $Isom(L^2(\tilde{M}, \tilde{g}))$ definita da $(\gamma \cdot f)(\tilde{x}) = f(\gamma^{-1} \cdot \tilde{x})$.

Mostriamo che tale rappresentazione è iniettiva e discreta. Sia $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ un punto fissato e poniamo $\alpha = \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(\tilde{x}_0, \gamma \cdot \tilde{x}_0)$. Essendo l'azione di Γ su \tilde{M} discontinua, si ha $\alpha > 0$. Sia f_0 la funzione caratteristica della bolla $B(\tilde{x}_0, \varepsilon)$, dove $\varepsilon < \alpha/2$. Se γ e γ' sono elementi distinti di Γ , si ha

$$(\gamma \cdot f_0 - \gamma' \cdot f_0)(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tilde{x} \in B(\gamma \cdot \tilde{x}_0, \varepsilon) \\ -1 & \text{se } \tilde{x} \in B(\gamma' \cdot \tilde{x}_0, \varepsilon) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

poichè $B(\gamma \cdot \tilde{x}_0, \varepsilon) \cap B(\gamma' \cdot \tilde{x}_0, \varepsilon) = \emptyset$ Ne segue che $\|\gamma \cdot f_0 - \gamma' \cdot f_0\|_{L^2} = \sqrt{2 \text{vol}(B(\tilde{x}_0, \varepsilon))}$ è un numero positivo indipendente da γ e γ' . Allora $\gamma \neq \gamma' \Rightarrow \gamma \cdot f_0 \neq \gamma' \cdot f_0$ e la rappresentazione è iniettiva.

Inoltre, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$ (uniformemente su ogni compatto di $L^2(\tilde{M})$), allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\gamma_n \cdot f_0 - \gamma \cdot f_0\|_{L^2} = 0$, il che implica, per $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, che $\gamma_n = \gamma$.

Ne segue che Γ agisce su $L^2(\tilde{M}, \tilde{g})$ come un sottogruppo discreto di isometrie rispetto alla topologia C-O. Questo, nel caso in cui lo spazio non è localmente compatto, è un controesempio al Corollario 5.4.8 in quanto la funzione nulla è fissata da tutto Γ e non ha quindi stabilizzatore finito. Si noti che Γ è un gruppo δ -non abeliano il cui centro è nullo per ipotesi.

Exemple 5.4.10. Descriviamo ora un esempio semplice di gruppo δ -non abeliano che agisce per isometrie su uno spazio di lunghezza localmente compatto, è discreto rispetto alla topologia C-O e ammette punti fissi. Si consideri il grafo di Cayley $C(\Gamma)$ di un gruppo δ -spesso Γ (rispetto a un qualunque sistema di generatori finito) e sia \mathbb{Z}_p il gruppo ciclico finito di ordine p . L'azione di $G = \Gamma \times \mathbb{Z}_p$ sullo spazio $X = C(\Gamma) \times D_2$ (dove D_2 denota il disco chiuso di raggio unitario nel piano complesso) definita da $(\gamma, i) \cdot (x, z) = (\gamma x, e^{\frac{2\pi i}{p}} z)$, è isometrica. Inoltre, il gruppo G è discreto perchè ammette un'orbita discreta senza punti fissi (si prenda un qualunque (x, z) , con z diverso da 0), ed è δ -non abeliano (si veda (ii) degli Esempi 5.3.4). Tuttavia, per ogni punto $x \in C(\Gamma)$, il punto $(x, 0)$ è fissato da $\{e\} \times \mathbb{Z}_p \subseteq G$.

Abbiamo supposto, in alcune applicazioni del Lemma di Margulis (in particolare dove si minora in un punto il raggio di iniettività e dove si stabilisce la decomposizione in parti sottili e parti spesse, o anche nel Teorema 5.4.3) che il gruppo Γ abbia la proprietà di transitività della commutazione (cfr. Esempi 5.3.4) il che, nel caso in cui Γ è non abeliano (e a maggior ragione nel caso iperbolico per coppie) implica che il centro di Γ sia nullo. Tenendo conto della Proposizione 5.4.7, poichè un elemento di torsione genera un sottogruppo finito, è immediato il seguente :

Corollaire 5.4.11. *Un gruppo Γ iperbolico per coppie di centro nullo è privo di torsione; in particolare, un gruppo Γ δ -non abeliano ($\delta > 0$) che ha la proprietà di transitività della commutazione è privo di torsione.*

Per finire, enunciamo una proposizione che stabilisce una proprietà algebrica notevole dei gruppi iperbolici per coppie, che utilizzeremo più avanti nella dimostrazione del Teorema 5.4.4.

Proposition 5.4.12. *In un gruppo Γ iperbolico per coppie (in particolare, δ -non abeliano) ogni sottogruppo normale abeliano è contenuto nel centro. In particolare, un gruppo iperbolico per coppie con la proprietà di transitività della commutazione non contiene sottogruppi normali abeliani diversi da $\{e\}$.*

Passiamo ora alle dimostrazioni di alcuni dei risultati presentati finora.

Dimostrazione del Teorema 5.4.1

Questa dimostrazione può dividersi in tre passi successivi. Il primo passo consiste nel dimostrare la seguente :

Proposition 5.4.13. *Sia (X, d) uno spazio metrico di lunghezza completo e localmente compatto. Sia Γ un sottogruppo del gruppo $Isom(X, d)$ delle isometrie di (X, d) . Allora i quattro enunciati seguenti sono equivalenti :*

- (i) *esiste un punto $x_0 \in X$ tale che, per ogni $R \in \mathbb{R}^+$, l'insieme $\Sigma_R(x_0)$ dei $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq R$ è finito ;*
- (ii) *esiste un punto $x_0 \in X$ la cui orbita $\Gamma \cdot x_0$ è discreta e il cui stabilizzatore è finito ;*
- (iii) *ogni punto x ha orbita $\Gamma \cdot x$ discreta e stabilizzatore Γ_x finito ;*
- (iv) *Γ è discreto in $Isom(X, d)$, munito della topologia C-O.*

Si osservi che qui consideriamo $Isom(X, d)$ piuttosto che $Isom(X, d, \mu)$ (cfr. pag. 80).

Dimostrazione

(iii) \Rightarrow (ii) : l'implicazione è banale.

(ii) \Rightarrow (i) : supponiamo che esista $R > 0$ tale che $\Sigma_R(x_0)$ sia infinito. Allora esiste una successione $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di Γ distinti tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n \cdot x_0 \in B_C(x_0, R)$. Grazie a un teorema di Gromov che stabilisce che le bolle chiuse di uno spazio di lunghezza completo e localmente compatto sono compatte ([Gr2], Teorema 1.11), possiamo estrarre dalla successione $\gamma_{\phi(n)} \cdot x_0$ una sottosuccessione $\{\gamma_{\phi(n)} \cdot x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ che per $n \rightarrow \infty$ converge a un punto $y \in B_C(x_0, R)$. Poichè x_0 è un punto isolato nell'orbita $\Gamma \cdot x_0$, si può scegliere un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che $B(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma \cdot x_0 = \{x_0\}$. Ora, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni intero $n \geq N$, si ha :

$$d(\gamma_{\phi(N)}^{-1} \gamma_{\phi(n)} \cdot x_0, x_0) = d(\gamma_{\phi(n)} \cdot x_0, \gamma_{\phi(N)} \cdot x_0) < \varepsilon.$$

Ne segue che, per ogni $n \geq N$, si ha $\gamma_{\phi(N)}^{-1} \gamma_{\phi(n)} \in \Gamma_{x_0}$. Poichè Γ_{x_0} è finito, esistono $n, p \in \mathbb{N}$ distinti tali che $\gamma_{\phi(N)}^{-1} \gamma_{\phi(p)} = \gamma_{\phi(N)}^{-1} \gamma_{\phi(n)}$, e quindi $\gamma_{\phi(p)} = \gamma_{\phi(n)}$, il che contraddice l'ipotesi che gli elementi $\gamma_{\phi(k)}$ fossero distinti. Quindi $\Sigma_R(x_0)$ è finito per ogni $R > 0$.

(i) \Rightarrow (iii) : sia $x_0 \in X$ il punto che esiste per (i), di modo che, per ogni $R > 0$, l'insieme $\Sigma_R(x_0)$ sia finito. Se $\Gamma \cdot x$ non è discreto (risp. se Γ_x non è finito) per qualche $x \in X$, esiste una successione $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi distinti di Γ tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \cdot x = x$ (risp. tale che $\gamma_n \cdot x = x$ per ogni n). Per $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, la disuguaglianza triangolare dà $d(x_0, \gamma_n \cdot x_0) \leq 2d(x_0, x) + d(x, \gamma_n \cdot x) \leq R$ per $R = 2d(x_0, x) + 1$, e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n \in \Gamma_R(x_0)$, il che contraddice l'ipotesi (i). Pertanto l'orbita $\Gamma \cdot x$ è discreta e lo stabilizzatore Γ_x è finito per ogni $x \in X$.

(ii) \Rightarrow (iv) : supponiamo che (ii) sia verificata in un punto $x_0 \in X$, ma che Γ non sia discreto. Si ha allora una successione $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, formata da elementi distinti di Γ e tale che per $n \in \mathbb{N}$ che tende all'infinito γ_n converge a γ uniformemente, e quindi anche semplicemente, su ogni compatto. Si ottiene così $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \cdot x_0 = \gamma \cdot x_0$. Inoltre, essendo $\Gamma \cdot x_0$ discreto, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N$, si ha $\gamma_n \cdot x_0 = \gamma \cdot x_0$, e quindi $\gamma^{-1}\gamma_n \in \Gamma_{x_0}$, il che contraddice il fatto che Γ_{x_0} sia finito. Notiamo infine che l'implicazione (ii) \Rightarrow (iv) non utilizza l'ipotesi "(X, d) completo e localmente compatto".

(iv) \Rightarrow (iii) : se per assurdo Γ si suppone discreto e se (iii) non è verificata, allora esistono un punto x_0 e una successione $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formata da elementi distinti di Γ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \cdot x_0 = x_0$ (o perchè $\gamma_n \cdot x_0 = x_0$ se Γ_{x_0} è infinito, o perchè $\gamma_n \cdot x_0 \rightarrow x_0$ - per valori distinti - se $\Gamma \cdot x_0$ non è discreta). A questo punto un tipico ragionamento alla Ascoli-Arzelà (si veda il Lemma 5.4.18) implica che la successione $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia definitivamente costante, che è una contraddizione. \square

Si noti che la Proposizione 5.4.13 dimostra in particolare le Osservazioni 5.4.2.

Il secondo passo per la dimostrazione del Teorema 5.4.1 è il successivo Lemma 5.4.14.

Consideriamo un insieme finito $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ e denotiamo S^+ il semigruppone libero generato dalle potenze non negative degli s_i , per $i = 1, \dots, k$. Scelta una funzione arbitraria $l : S \rightarrow \mathbb{R}^+$, la estendiamo a tutto S^+ definendo, per ogni $\gamma = s_{i_1} \dots s_{i_n} \in S^+$, $l(\gamma) = l(s_{i_1}) + \dots + l(s_{i_n})$. Sia $F(S)$ il gruppo libero generato dagli s_i e dai loro inversi formali s_i^{-1} . Estendiamo ora l a una funzione \bar{l} definita su $F(S)$ al fine di definire su S^+ una distanza associata a l . Poniamo $l(s_i^{-1}) = l(s_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$ e denotiamo con $\bar{l}(\gamma)$ la lunghezza della parola ridotta negli s_i e i loro inversi che rappresenta γ . (Per parola ridotta si intende una parola negli s_i e nei loro inversi tale che un generatore e il suo inverso non appaiono consecutivamente. In un gruppo libero c'è un solo modo di rappresentare un elemento tramite una parola ridotta. Si veda ad esempio [Rot], pag. 344) Ora, per $\gamma, \gamma' \in S^+$ dati, definiamo la distanza $d_l(\gamma, \gamma') = \bar{l}(\gamma^{-1} \cdot \gamma')$ che, poichè non ci sono relazioni non banali tra gli elementi di S , ci dà una distanza per ogni $l : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ e, se dotiamo S^+ della misura che conta \sharp , S^+ ha la struttura di spazio metrico misurato, con entropia definita da

$$Ent(S^+, d_l, \sharp) = \inf \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[\sharp(B(e, R))]}{R}$$

dove $B(e, R)$ è la bolla di raggio R su (S^+, d_l) centrata nell'elemento neutro e (si veda la Definizione 5.3.1).

Dopo questa premessa, possiamo dimostrare il

Lemma 5.4.14. *Sia S^+ il semigruppato libero generato dalle potenze non negative degli elementi di $S = \{s_1, \dots, s_k\}$. Se $h = \text{Ent}(S^+, d_l, \sharp)$, allora si ha :*

$$\sum_{s \in S} e^{-h l(s)} = 1.$$

Démonstration. Seguiremo, per la dimostrazione, lo stesso schema che viene utilizzato in [Rob], Lemma 3.3.3.

Cominciamo col provare che $\text{Ent}(S^+, d_l, \sharp) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[\sharp(B(e, R))]}{R}$ esiste. A questo scopo, si noti che se $L = \max_{s \in S} l(s)$, la funzione $f(R) = \text{Log}[\sharp(B(e, R+L))]$ è *subadditiva*, i.e. $f(R_1 + R_2) \leq f(R_1) + f(R_2)$ per ogni $R_1, R_2 > 0$. Infatti, se $g = s_{i_1} \dots s_{i_n}$ è un elemento di lunghezza $l(g) = l(s_{i_1}) + \dots + l(s_{i_n}) < R_1 + R_2 - L$, e k è il più grande intero tale che $l(s_{i_1} \dots s_{i_k}) = l(s_{i_1}) + \dots + l(s_{i_k}) < R_1$, allora $l(s_{i_1} \dots s_{i_{k+1}}) \geq R_1$ e $l(s_{i_{k+1}} \dots s_{i_n}) = l(g) - l(s_{i_1} \dots s_{i_{k+1}}) + l(s_{i_{k+1}}) < R_2$. Quindi la funzione $p : B(e, R_1) \times B(e, R_2) \rightarrow B(e, R_1 + R_2 - L)$ definita da $p(g_1, g_2) = g_1 g_2$ è suriettiva, da cui la subadditività. Ora, si fissi un qualunque $R_0 > 0$. Per ogni $R \geq R_0$ si può scrivere $R = R_0 \cdot q + r$, con q intero e $0 \leq r < R_0$. Segue dalla subadditività che

$$\frac{f(R)}{R} \leq \frac{q \cdot f(R_0) + f(r)}{R_0 \cdot q + r} \leq \frac{f(R_0)}{R_0} + \frac{f(r)}{R_0 \cdot q}$$

da cui, essendo $f(r)$ limitato superiormente, si ha $\sup \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(R)}{R} \leq \frac{f(R_0)}{R_0}$. Poichè R_0 è arbitrario, $\sup \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(R)}{R} \leq \inf_{R_0 > 0} \frac{f(R_0)}{R_0}$, il che, combinato con la disuguaglianza ovvia $\inf_{R_0 > 0} \frac{f(R_0)}{R_0} \leq \inf \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(R)}{R}$, conclude la dimostrazione.

Si noti che abbiamo dimostrato che $\sharp(B(e, R)) \geq e^{h(R-L)}$ per ogni $R > 0$.

Osserviamo che se $h = 0$ il lemma è vero, perchè in tal caso $k = \sharp(S) = 1$ (se ciò non fosse vero, per ogni $n > 0$ la bolla di raggio $n \cdot \max_{s \in S} l(s)$ conterrebbe almeno $\frac{k^n - 1}{k - 1}$ elementi, i.e. le parole che in un semigruppato libero si possono scrivere con meno di n generatori, e sarebbe $h > 0$).

Possiamo quindi supporre $h > 0$. Consideriamo la somma di Poincaré

$$I(c, l) = \sum_{\gamma \in S^+} e^{-c l(\gamma)}$$

dove $c > 0$ e l è estesa a tutto il semigruppato libero come sopra.

Dimostriamo ora che se $c > h$, allora $I(c, l)$ è finito e che $\lim_{c \rightarrow h^-} I(c, l) = +\infty$. Sia $b(n) = \sharp(B(e, n))$: si osservi che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} [b(n+1) - b(n)] e^{-(n+1)c} \leq I(c, l) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} [b(n+1) - b(n)] e^{-nc}$$

in quanto $b(n+1) - b(n)$ è esattamente il numero dei $\gamma \in S^+$ tali che $n \leq l(\gamma) < n+1$. Raccogliendo i termini nelle serie sopra, si ha

$$(1 - e^{-c}) \sum_{n \geq 1} b(n) e^{-nc} \leq I(c, l) \leq (e^c - 1) \sum_{n \geq 1} b(n) e^{-nc}.$$

Se $c > h$, fissiamo $\varepsilon = c - h$: esiste un n_0 tale che $n \geq n_0$ implica $\frac{\text{Log}[b(n)]}{n} \leq h + \frac{\varepsilon}{2}$, e quindi $b(n) \leq e^{(h+\frac{\varepsilon}{2})n}$. Allora $\sum_{n \geq n_0} b(n) e^{-nc} \leq \sum_{n \geq n_0} e^{(h+\frac{\varepsilon}{2}-c)n}$, e l'ultima serie converge perchè $e^{(h+\frac{\varepsilon}{2}-c)} = e^{-\varepsilon/2} < 1$. Dunque $I(c, l)$ è finita per $c > h$.

Ora, poichè prima abbiamo dimostrato che $b(n) \geq e^{h(n-L)}$ per ogni $n > 0$, si ha

$$\sum_{n \geq 1} b(n) e^{-nc} \geq \sum_{n \geq 1} e^{h(n-L)} e^{-nc} = e^{-hL} \sum_{n \geq 1} e^{(h-c)n} = e^{-hL} \frac{e^{h-c}}{1 - e^{h-c}}$$

e quindi $I(c, l) \geq (1 - e^{-c}) e^{-hL} \frac{e^{h-c}}{1 - e^{h-c}}$. Ora, l'ultimo termine tende all'infinito quando c tende a h , per $c > h > 0$. Dunque $\lim_{c \rightarrow h^-} I(c, l) = +\infty$.

Sia ora E_s^+ l'insieme degli elementi di S^+ che si scrivono come prodotto in S che comincia con $s \in S$. Posto

$$I_s(c, l) = \sum_{\gamma \in E_s^+} e^{-c l(\gamma)}$$

valgono le seguenti :

- (i) $e^{c l(s)} I_s(c, l) = I(c, l)$.
- (ii) $I(c, l) = 1 + \sum_{s \in S} I_s(c, l)$.

Infatti, (i) segue da

$$e^{c l(s)} I_s(c, l) = e^{c l(s)} \sum_{\gamma \in E_s^+} e^{-c l(\gamma)} = \sum_{\gamma \in E_s^+} e^{-c[l(\gamma) - l(s)]} = \sum_{\gamma' \in S^+} e^{-c[l(s \cdot \gamma') - l(s)]} = I(c, l)$$

dove le ultime due uguaglianze derivano dal fatto che esiste una bigezione $f : S^+ \rightarrow E_s^+$ data da $f(\gamma') = s\gamma'$, tale che $l(f(\gamma')) = l(s) + l(\gamma')$.

L'uguaglianza (ii) è vera perchè $S^+ = \{e\} \cup \bigcup_{s \in S} E_s^+$ e $l(e) = 0$. Sostituendo (i) in (ii), otteniamo

$$I(c, l) = 1 + I(c, l) \sum_{s \in S} e^{-c l(s)}.$$

Poichè $c > h$ possiamo dividere per $I(c, l)$ e passare al limite per c che tende a h , ottenendo la tesi del lemma. □

Consideriamo ora due elementi $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ che non commutano. Poichè Γ è δ -non abeliano possiamo supporre che γ_1^N e γ_2^N generino un semigruppone libero in Γ (vedi Proposizione 5.3.12). Si noti che γ_1^N e γ_2^N non appartengono allo stabilizzatore Γ_x di alcun punto $x \in X$, perchè, essendo Γ_x finito (Proposizione 5.4.13 (iii)), se $\gamma_i^N \in \Gamma_x$ deve esistere un intero $p > 0$ tale che $(\gamma_i^N)^p = e$, il che è escluso se il semigruppone generato dai γ_i^N è libero. Dunque $l(\gamma_1^N) = d(x, \gamma_1^N \cdot x)$ e $l(\gamma_2^N) = d(x, \gamma_2^N \cdot x)$ sono entrambi numeri strettamente positivi. Sia h l'entropia del semigruppone libero S^+ generato da γ_1^N e γ_2^N rispetto alla distanza di lunghezza d_l data sopra. Allora, segue dal Lemma 5.4.14 che

$$e^{-h l(\gamma_1^N)} + e^{-h l(\gamma_2^N)} = 1$$

Poichè $l(\gamma_1^N) \leq Nd(x, \gamma_1 \cdot x)$ e $l(\gamma_2^N) \leq Nd(x, \gamma_2 \cdot x)$, abbiamo

$$e^{-h N d(x, \gamma_2 \cdot x)} \leq 1 - e^{-h N d(x, \gamma_1 \cdot x)}$$

e, passando ai logaritmi,

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{hN} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-h N d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right).$$

Scegliamo $N = \lceil \frac{4}{\delta} \rceil + 1$, così che $N \leq \frac{4+\delta}{\delta}$ e quindi

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{h} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-h \frac{4+\delta}{\delta} d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right).$$

Infine, dimostriamo che $h \leq Ent(X)$, dove $Ent(X) = Ent(X, d, \mu)$. La disuguaglianza triangolare e la definizione della distanza d_l associata a l comportano che, per ogni $\gamma \in S^+$, $d(x, \gamma \cdot x) \leq d_l(e, \gamma)$, da cui, se si pone $\Sigma_R(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x \in B(x, R)\}$,

$$h \leq \text{Inf} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[\#\Sigma_R(x)]}{R}$$

in quanto $B_{d_l}(e, R) \subseteq \{\gamma \in S^+ \mid \gamma \cdot x \in B(x, R)\}$. Il Lemma seguente, che generalizza il Lemma 2.3 di [B-C-G] ad azioni che ammettono punti fissi, ci permette di concludere la dimostrazione del Teorema 5.4.1.

Lemme. Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza misurato connesso, completo e localmente compatto, dove le bolle di raggio positivo hanno misura positiva. Se Γ è un sottogruppo discreto di $\text{Isom}(X, d, \mu)$, allora l'orbita di x è discreta e lo stabilizzatore Γ_x è finito e, per ogni $x \in X$, e si ha

$$\text{Ent}(X, d, \mu) \geq \text{Inf} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[\#\Sigma_R(x)]}{R}.$$

Démonstration. Sia $x \in X$ e $\alpha(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_x} d(x, \gamma \cdot x)$. Il gruppo Γ essendo discreto, la Proposizione 5.4.13 implica $\alpha(x) > 0$. Poniamo $\mu[B(x, \alpha(x)/2)] = v(x)$. Osserviamo che $v(x) > 0$ e che due bolle $B(\gamma_1 \cdot x, \alpha(x)/2)$ e $B(\gamma_2 \cdot x, \alpha(x)/2)$ in X hanno intersezione non vuota se e solo se $\gamma_1 \cdot x = \gamma_2 \cdot x$. Poichè per ogni $R > 0$ vale l'inclusione $B(x, R + \alpha(x)/2) \supseteq \bigcup_{\gamma \cdot x \in B(x, R)} B(\gamma \cdot x, \alpha(x)/2)$, la disuguaglianza

$$\mu \left[B \left(x, R + \frac{\alpha(x)}{2} \right) \right] \geq \sum \mu \left[B \left(\gamma \cdot x, \frac{\alpha(x)}{2} \right) \right]$$

è vera se la somma a destra è calcolata sull'insieme $\Sigma_R(x)$ dei $\gamma \in \Gamma$ tali che $\gamma \cdot x \in B(x, R)$ e se, per ogni laterale in Γ/Γ_x , si sceglie esattamente un rappresentante. Poichè le bolle $B(\gamma \cdot x, \frac{\alpha(x)}{2}) = \gamma \left(B \left(x, \frac{\alpha(x)}{2} \right) \right)$ hanno tutte volume positivo uguale a $v(x)$, otteniamo

$$\mu \left[B \left(x, R + \frac{\alpha(x)}{2} \right) \right] \geq v(x) \cdot \frac{\#\Sigma_R(x)}{\#\Gamma_x},$$

da cui $\#\Gamma_x \cdot \mu \left[B \left(x, R + \frac{\alpha(x)}{2} \right) \right] \geq v(x) \cdot \#\Sigma_R(x)$.

Da qui, passando ai logaritmi, dividendo per R e passando al limite inferiore per $R \rightarrow \infty$ su entrambi i membri della disuguaglianza, si ottiene il lemma (si noti che $\#\Gamma_x$ è finito per la Proposizione 5.4.13). □

Sia $H > 0$ un maggiorante qualunque di $\text{Ent}(X)$. Si può allora scrivere

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right)$$

che dimostra il punto (i) del Teorema 5.4.1.

Per dimostrare (ii), supponiamo che $d(x, \gamma_1 \cdot x) < \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$ e sostituiamo questa disuguaglianza in (i). Otteniamo così $d(x, \gamma_2 \cdot x) > \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$. Ora, se $\varepsilon \leq \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$, (ii) implica che i generatori di $\Gamma_\varepsilon(x)$ commutano tra loro, e quindi $\Gamma_\varepsilon(x)$ è abeliano, il che prova (iii).

Procediamo ora seguendo lo stesso ragionamento usato in [B-C-G] per dimostrare il Lemma 2.5 a pag. 21.

Supponiamo che il centro di Γ sia ridotto al solo elemento neutro e consideriamo $x \in X$ e $\gamma \in \Gamma$. Essendo (X, d) uno spazio di lunghezza, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una sequenza di punti $x_i \in X$, $i = 0, \dots, n$, con $x_0 = x$, $x_n = \gamma \cdot x$ e tale che $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ e (si veda la Proposizione 5.3.11)

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x, \gamma \cdot x) + \varepsilon.$$

Sia $D > 0$ un maggiorante di $\sup_{z \in X} d(\Gamma \cdot x, z)$. Allora, per ogni $i = 0, \dots, n$, esiste un elemento $\gamma_i \in \Gamma$ tale che $d(\gamma_i \cdot x, x_i) \leq D$, con $\gamma_0 = e$ e $\gamma_n = \gamma$. Definendo $\sigma_i = \gamma_i^{-1} \gamma_{i+1}$, così che $\gamma = \sigma_0 \cdot \dots \cdot \sigma_{n-1}$, si ha

$$d(x, \sigma_i \cdot x) = d(x, \gamma_i^{-1} \gamma_{i+1} \cdot x) = d(\gamma_i \cdot x, \gamma_{i+1} \cdot x) < 2D + \varepsilon$$

(l'ultima disuguaglianza discende dalla disuguaglianza triangolare) e possiamo concludere che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $\{\gamma \mid d(x, \gamma \cdot x) < 2D + \varepsilon\}$ è un sistema generatore di Γ .

Si consideri ora un arbitrario $\sigma \in \Gamma$: poichè il centro di Γ è ridotto al solo elemento neutro, esiste un $\gamma \in \Gamma$ che non commuta con σ tale che $d(x, \gamma \cdot x) < 2D + \varepsilon$, pertanto

$$2D + \varepsilon > d(x, \gamma \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} d(x, \sigma \cdot x)}} \right)$$

da cui, quando ε tende a zero, si ottiene

$$2D \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{\delta}{4 + \delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} d(x, \sigma \cdot x)}} \right)$$

ovvero

$$d(x, \sigma \cdot x) \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{4+\delta}{\delta} 2DH}} \right)$$

che ci dà (iv) in quanto σ è arbitrario in Γ . □

Dimostrazione della Proposizione 5.4.3.

Sappiamo, poichè $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) = \varepsilon < \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log} 2}{H}$, che esiste un $\sigma \in \Gamma$ tale che $d(x_0, \sigma \cdot x_0) = \varepsilon < \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{\text{Log} 2}{H}$. Sia $\gamma \in \Gamma$ tale che $d(x_0, \gamma \cdot x_0) < 2R_\varepsilon = \frac{1}{H} \frac{\delta}{4+\delta} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H \frac{4+\delta}{\delta} \varepsilon}} \right)$. Tale γ commuta con σ ((i) del Teorema 5.4.1), e poichè è un generatore arbitrario di $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0)$, la proprietà di transitività della commutazione implica che $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0)$ è abeliano. Inoltre, $\sigma \in \Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0)$

poichè $\varepsilon < \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{Log2}{H} \Rightarrow 2R_\varepsilon > \frac{\delta}{4+\delta} \cdot \frac{Log2}{H}$, e quindi $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0)$ è isomorfo a \mathbb{Z} , il che dimostra (i).

Poichè Γ è discreto per la topologia C-O in $Isom(X, d, \mu)$ ed ha centro nullo, il Corollario 5.4.8 implica che l'azione di Γ su X è propriamente discontinua e libera. Le applicazioni $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ e $\bar{\pi} : X \rightarrow X/\tau^{\mathbb{Z}}$ sono allora rivestimenti regolari. Consideriamo su X/Γ (risp. su $X/\tau^{\mathbb{Z}}$) la distanza $d_{X/\Gamma}$ (risp. $d_{X/\tau^{\mathbb{Z}}}$) definita per ogni $x, y \in X$ dall'identità $d_{X/\Gamma}([x], [y]) = \inf_{g \in \Gamma} d(x, g \cdot y)$ (risp. $d_{X/\tau^{\mathbb{Z}}}([x], [y]) = \inf_{g \in \tau^{\mathbb{Z}}} d(x, g \cdot y)$). Ne deriva che entrambi i quozienti X/Γ e $X/\tau^{\mathbb{Z}}$ sono spazi di lunghezza. Per vederlo, utilizziamo il fatto che se (Y, d_Y) è uno spazio metrico completo tale che per ogni $x, y \in Y$ esiste un $z \in Y$ per il quale $d_Y(x, z) = d_Y(y, z) = d_Y(x, y)/2$, allora d_Y è una metrica di lunghezza (vedi [B-B-I], Teorema 2.4.16). Consideriamo $[x], [y] \in X/\Gamma$. Dalla definizione di $d_{X/\Gamma}$, l'azione essendo discreta, segue che esiste un $g_0 \in \Gamma$ tale che $d_{X/\Gamma}([x], [y]) = d(x, g_0 \cdot y)$. Sia z tale che $d(x, z) = d(z, g_0 \cdot y) = d(x, g_0 \cdot y)/2$. Allora $d_{X/\Gamma}([x], [z]) \leq \frac{1}{2}d_{X/\Gamma}([x], [y])$ e $d_{X/\Gamma}([y], [z]) \leq \frac{1}{2}d_{X/\Gamma}([x], [y])$ da cui, per la disuguaglianza triangolare, $d_{X/\Gamma}([x], [z]) = d_{X/\Gamma}([y], [z]) = \frac{1}{2}d_{X/\Gamma}([x], [y])$, il che prova che $d_{X/\Gamma}$ è una metrica di lunghezza. La dimostrazione per $d_{X/\tau^{\mathbb{Z}}}$ è identica.

Dimostriamo ora che, con questa scelta di metriche, i rivestimenti $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ e $\bar{\pi} : X \rightarrow X/\tau^{\mathbb{Z}}$ sono isometrie locali. Partiamo da $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$. Poichè l'azione è discreta, per ogni $x \in X$ si ha $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) = \alpha_x > 0$. Si vede allora che la restrizione di π a $B(x, \alpha_x/4)$ è una bigezione su $B(\pi(x), \alpha_x/4)$ che preserva la metrica ereditata dagli spazi ambiente. Infatti, se $d(x, z) < \alpha_x/4$ si ha $d(\pi(x), \pi(z)) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma \cdot z) < \alpha_x/4$. Viceversa, se $\pi(z) \in B(\pi(x), \alpha_x/4)$, allora esiste un $\gamma_0 \in \Gamma$ tale che $d(x, \gamma_0 \cdot z) < \alpha_x/4$, e $\pi(\gamma_0 \cdot z) = \pi(z)$. Inoltre, se $y_1, y_2 \in B(x, \alpha_x/4)$ sono tali che $\pi(y_1) = \pi(y_2)$, allora esiste un $\gamma_0 \in \Gamma$ tale che $\gamma_0 \cdot y_1 = y_2$. Ne segue che $d(x, \gamma_0 \cdot x) \leq d(x, y_2) + d(\gamma_0 \cdot y_1, \gamma_0 \cdot x) < \alpha_x/2$, il che implica per definizione di α_x che $y_1 = y_2$. Pertanto $\pi : B(x, \alpha_x/4) \rightarrow B(\pi(x), \alpha_x/4)$ è bigettiva.

Infine, per ogni $y_1, y_2 \in B(x, \alpha_x/4)$, si ha $d(\pi(y_1), \pi(y_2)) = d(y_1, \gamma_0 \cdot y_2) < \alpha_x/2$ per qualche $\gamma_0 \in \Gamma$. Ma allora $d(x, \gamma_0 \cdot x) \leq d(x, y_1) + d(y_1, \gamma_0 \cdot y_2) + d(\gamma_0 \cdot y_2, \gamma_0 \cdot x) < \alpha_x$, il che implica che $\gamma_0 = e$, e cioè $d(\pi(y_1), \pi(y_2)) = d(y_1, y_2)$, ossia π è un'isometria locale. Ripetendo lo stesso ragionamento, si ottiene l'analogo risultato per $\bar{\pi} : X \rightarrow X/\tau^{\mathbb{Z}}$ e, usando la relazione $p \circ \bar{\pi} = \pi$, si deduce che $p : X/\tau^{\mathbb{Z}} \rightarrow X/\Gamma$ è un'isometria locale.

Osserviamo ora che un'isometria locale tra spazi di lunghezza preserva la lunghezza L delle curve. Infatti, siano X e Y spazi di lunghezza e sia $f : X \rightarrow Y$ un'isometria locale. Sia $c : [0, a] \rightarrow X$ una curva. Si noti che l'applicazione $\alpha : x \rightarrow \alpha(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x)$ definita prima è continua su X . Infatti il

fatto che Γ agisce per isometrie e la disuguaglianza triangolare implicano

$$d(x_2, \gamma \cdot x_2) - 2d(x_1, x_2) \leq d(x_1, \gamma \cdot x_1) \leq 2d(x_1, x_2) + d(x_2, \gamma \cdot x_2)$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$, $x_1, x_2 \in X$. Sia $\gamma_1 \in \Gamma \setminus \{e\}$ tale che $d(x_1, \gamma_1 \cdot x_1) = \alpha(x_1)$. (Un tale γ_1 esiste perchè Γ è discreto e X è uno spazio di lunghezza completo e localmente compatto, cfr. la Proposizione 5.4.13) Allora, segue dalla disuguaglianza a sinistra che $\alpha(x_2) - 2d(x_1, x_2) \leq d(x_2, \gamma_1 \cdot x_2) - 2d(x_1, x_2) \leq \alpha(x_1)$. Analogamente, se $\gamma_2 \in \Gamma \setminus \{e\}$ è tale che $d(x_2, \gamma_2 \cdot x_2) = \alpha(x_2)$, si ha $\alpha(x_1) \leq d(x_1, \gamma_2 \cdot x_1) \leq 2d(x_1, x_2) + \alpha(x_2)$ e quindi $|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \leq 2d(x_1, x_2)$, cioè α è continua.

Si denoti ora $\alpha_0 = \min\{x \in c([0, a])\} \alpha(x)/4$, di modo che, per ogni $t \in [0, a]$, la restrizione di f alla bolla $B(c(t), \alpha_0)$ sia un'isometria. L'applicazione $c : [0, a] \rightarrow X$ è uniformemente continua (essendo $[0, a]$ compatto), e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $|t - t'| < \delta \Rightarrow d(c(t), c(t')) < \alpha_0$.

Sia $S = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_n = a\}$ una partizione di $[0, a]$ tale che $|s_i - s_{i+1}| < \delta$ per ogni $i = 0, \dots, n-1$. Poichè per ogni $t \in [0, a]$, $s_i \leq t \leq s_{i+1}$ implica $d(c(t), c(s_i)) < \alpha_0$, si ha che $\{B(c(s_i), \alpha_0)\}_{i=0, \dots, n-1}$ è un ricoprimento di $c([0, a])$ e ogni sottointervallo $c[s_i, s_{i+1}]$ è interamente contenuto nella bolla $B(c(s_i), \alpha_0)$. Ne segue che la restrizione di f a $c[s_i, s_{i+1}]$ è una isometria, e si ha $L(c[s_i, s_{i+1}]) = L(f \circ c[s_i, s_{i+1}])$ (si ricordi che la lunghezza L di una curva c è definita da $L(c) = \inf \sum_{i=0}^{m-1} d(c(s_i), c(s_{i+1}))$ al variare di tutte le partizioni $\{s_0, \dots, s_m\}$ dell'intervallo $[0, a]$). Poichè L è additiva (i.e. $L(c_1 * c_2) = L(c_1) + L(c_2)$ per due curve $c_1 : [a_0, a_1] \rightarrow X$, $c_2 : [a_1, a_2] \rightarrow X$ tali che $c_1(a_1) = c_2(a_1)$), dove $c_1 * c_2 : [a_0, a_2] \rightarrow X$ è definito da $(c_1 * c_2)(t) = c_i(t)$ per $t \in [a_{i-1}, a_i]$, si conclude che $L(f \circ c) = L(c)$. Ne segue che se $f : X \rightarrow Y$ è un rivestimento, c è una curva in Y e \tilde{c} un suo sollevamento in X , risulta $L(\tilde{c}) = L(c)$. Questo ci permette, attraverso gli stessi argomenti utilizzati nella dimostrazione della Proposizione 5.1.1 (pag. 54), di dimostrare l'iniettività dell'applicazione p ristretta alla bolla centrata in $\bar{\pi}(x_0)$ di raggio R_ε , il che conclude la dimostrazione di (ii). \square

Remarques. Si noti che lo stesso ragionamento usato per mostrare che la restrizione di $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ alla bolla $B(x, \alpha(x)/4)$ è iniettiva si può applicare senza cambiamenti alla bolla $B(x, \alpha(x)/2)$. Se denotiamo $inj(x)$ l'estremo superiore degli $r > 0$ tali che π , ristretta alla bolla $B(x, r)$, è iniettiva, si ha allora $inj(x) \geq \alpha(x)/2$. Analogamente, se denotiamo $isom(x)$ l'estremo superiore degli $r > 0$ tali che π , ristretta alla bolla $B(x, r)$, è isometrica (per la distanza ereditata dagli spazi ambiente), si ha $isom(x) \geq \alpha/4$. Inoltre, le funzioni $inj(x)$ e $isom(x)$ sono continue su X . Infatti, si noti che per ogni $x, y \in X$ si ha $B(y, isom(x) - d(x, y)) \subseteq B(x, isom(x))$, e poichè su $B(x, isom(x))$ la funzione π è isometrica, si ha $isom(y) \geq isom(x) - d(x, y)$.

Scambiando x e y , si ottiene infine $|isom(x) - isom(y)| \leq d(x, y)$. Analogamente si dimostra che $inj(x)$ è continua.

Dimostrazione del Teorema 5.4.4

Supporremo che l'entropia $Ent(X)$ sia finita (altrimenti il teorema è banalmente vero). Sia $x \in X$. La misura della bolla $B(x, R)$ in X , centrata in x e di raggio R , è finita; inoltre $\Gamma \cdot x \cap B(x, R)$ è finito per l'ipotesi di discretezza di Γ e per la Proposizione 5.4.13.

Per ogni intero $N \geq 4/\delta$ e per ogni coppia $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ di elementi di Γ che non commutano, possiamo supporre (eventualmente scambiando γ_2 con γ_2^{-1}) che le potenze non negative di γ_1^N e γ_2^N generino un semigruppato libero, che denotiamo F^+ (Proposizione 5.3.12). Dati due numeri reali $l_1, l_2 > 0$, definiamo la funzione $l : F^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ come $l(\gamma_{i_1}^N \gamma_{i_2}^N \dots \gamma_{i_k}^N) = l(\gamma_{i_1}^N) + \dots + l(\gamma_{i_k}^N)$. Estendiamo l a una funzione \bar{l} sul gruppo libero astratto generato dai γ_i^N ponendo $\bar{l}(\gamma_i^{-N}) = l(\gamma_i^N) = l_i$, $i = 1, 2$, così da dotare F^+ di una distanza d_l definita come $d_l(\gamma, \gamma') = \bar{l}(\gamma^{-1}\gamma')$. Scegliendo $l_1 = d(x, \gamma_1^N \cdot x)$ e $l_2 = d(x, \gamma_2^N \cdot x)$, otteniamo una prima distanza di tipo d_l , che denotiamo d_l^{geom} . (Si osservi che γ_1^N e γ_2^N non appartengono a Γ_x , essendo quest'ultimo sottogruppo finito e quindi incluso nel centro di Γ) Posto $L = \max\{d(x, \gamma_1^N \cdot x), d(x, \gamma_2^N \cdot x)\}$, per $l_1 = l_2 = L$, otteniamo un'altra distanza di tipo d_l , che denotiamo d_l^{max} . Infine, scegliendo $l_1 = l_2 = 1$, otteniamo l'usuale distanza algebrica, che denotiamo d_l^{alg} . Definiamo ora h come l'entropia di F^+ rispetto alla distanza d_l^{geom} . Essendo $d_l^{geom} \leq d_l^{max} = L \cdot d_l^{alg}$, deduciamo (Proposizione 5.3.10) che

$$h = Ent(F^+, d_l^{geom}) \geq Ent(F^+, d_l^{max}) = \frac{1}{L} Ent(F^+, d_l^{alg}) = \frac{Log 2}{L}$$

(dove le entropie sono calcolate rispetto alla misura che conta). Ne segue, per la disuguaglianza triangolare, che

$$h \cdot \max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{h L}{N} \geq \frac{Log 2}{N}.$$

Dimostriamo che $h \leq Ent(X)$. A tale scopo, osserviamo che per ogni $\gamma \in F^+$ la disuguaglianza triangolare e la definizione di d_l^{geom} comportano che $d(x, \gamma \cdot x) \leq d_l^{geom}(e, \gamma)$. Questo implica che $h \leq Inf \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \cdot Log \# \Sigma_R(x)$, dove $\Sigma_R(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x \in B(x, R)\}$. D'altra parte, grazie al lemma usato nella dimostrazione del Teorema 5.4.1 (pag. 91), si ha che

$Inf \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \cdot Log \# \Sigma_R(x) \leq Ent(X)$, da cui $h \leq Ent(X)$. Questo implica che, se γ_1 e γ_2 non commutano, allora $Ent(X) \geq \frac{1}{N} \frac{Log 2}{\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\}}$ e, poichè Γ non è abeliano, una tale coppia di elementi $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ esiste e $Ent(X) > 0$, essendo $d(x, \gamma_i \cdot x) < +\infty$ per $i = 1, 2$. Supponiamo ora per

assurdo che per ogni $x \in X$ si abbia $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) < c$, i.e. che il gruppo $\Gamma_c(x)$ sia non banale per ogni $x \in X$, con $c = \frac{\text{Log}2}{N \text{Ent}(X)}$. Denotiamo con $\Sigma_c(x)$ l'insieme dei γ in Γ tali che $d(x, \gamma \cdot x) < c$. Poichè ogni coppia $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ di elementi che non commutano soddisfa $\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq c$, il gruppo $\Gamma_c(x)$ generato da $\Sigma_c(x)$ è abeliano e, poichè la commutazione è transitiva su Γ , possiamo definire $K(x)$ come la classe di equivalenza di $\Gamma_c(x) \setminus \{e\}$ rispetto alla relazione di commutazione. Poniamo $\beta(x) = c - \max_{\gamma \in \Sigma_c(x)} d(x, \gamma \cdot x)$. Essendo $\Sigma_c(x)$ finito, $\beta(x)$ risulta strettamente positivo e, per la disuguaglianza triangolare, se $z \in X$ è tale che $d(x, z) < \frac{\beta(x)}{2}$, abbiamo $\Gamma_c(x) \subseteq \Gamma_c(z)$. Ciò implica che $K(x) = K(z)$, ossia la funzione $x \rightarrow K(x)$ è localmente costante su X , e quindi, poichè X è connesso, costante. Sia $K(x) \cup \{e\} = \Gamma_0$, di modo che $\Gamma_c(x) \subseteq \Gamma_0$ per ogni $x \in X$. Per ogni $\gamma \in \Gamma$ si ha $\Gamma_c(\gamma \cdot x) \subseteq \Gamma_0$ e $\Gamma_c(\gamma \cdot x) = \gamma \Gamma_c(x) \gamma^{-1}$, da cui $\Gamma_c(x) \subseteq \gamma^{-1} \Gamma_0 \gamma$. Ma allora $\Gamma_0 \supseteq \gamma^{-1} \Gamma_0 \gamma$ per ogni $\gamma \in \Gamma$, perchè $\Gamma_0 \setminus \{e\}$ è una classe di equivalenza per la relazione di commutazione. Applicando lo stesso argomento a γ^{-1} invece che a γ , otteniamo che $\gamma \Gamma_0 \gamma^{-1} \subseteq \Gamma_0$ e quindi che $\Gamma_0 = \gamma^{-1} \Gamma_0 \gamma$: pertanto Γ_0 è un sottogruppo abeliano normale non banale di Γ , il che contraddice la Proposizione 5.4.12. In conclusione esiste un $x_0 \in X$ tale che $\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq \frac{1}{N} \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}(X)}$, e poichè $\frac{4}{\delta} \leq N < \frac{4}{\delta} + 1$, otteniamo

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) > \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}(X)}.$$

□

Dimostrazione della Proposizione 5.4.7

Sia H un sottogruppo finito di Γ . Se $H = \{e\}$, il teorema è banalmente vero. Per il caso $H \neq \{e\}$, si prenda un qualunque $\sigma \in H \setminus \{e\}$ e si supponga per assurdo che σ non appartenga al centro di Γ . Ciò significa che esiste un $\gamma \in \Gamma$ tale che γ e σ non commutano. Ma, tenendo conto della definizione di gruppo iperbolico per coppie (Def. 5.4.6) avremmo una varietà compatta a curvatura negativa X insieme con un morfismo $\rho : \langle \gamma, \sigma \rangle \rightarrow \pi_1(X)$ (dove $\langle \gamma, \sigma \rangle$ denota il sottogruppo di Γ generato da γ e σ) tale che $\rho(\gamma)$ e $\rho(\sigma)$ non commutano. Ne seguirebbe $\rho(\sigma) \neq e$ e $\rho(\sigma)^k \neq e$ per ogni intero k diverso da zero, per il teorema di Preissman ([DoC], cap.12). Ciò contraddice l'ipotesi che il sottogruppo H sia finito, perchè si avrebbe $\sigma^k \neq e$ per ogni $k \neq 0$. □

Dimostrazione del Corollario 5.4.8

Il punto (1) segue dalla Proposizione 5.4.7 combinata con l'equivalenza tra (iii) e (iv) nella Proposizione 5.4.13. Per dimostrare il punto (2), osserviamo che se il centro di Γ è nullo, allora l'azione di Γ è discreta e libera (Proposizione 5.4.7). Questo implica che per ogni $x \in X$, $\inf_{g \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, g \cdot x) \geq$

$\alpha_x > 0$. Sia $U_x = B(x, \alpha_x/2)$: la disuguaglianza triangolare implica che $U_x \cap g \cdot U_x = \emptyset$ per ogni $g \in \Gamma \setminus \{e\}$. Inoltre, per ogni $y \in X \setminus \Gamma \cdot x$, si ha $\inf_{g \in \Gamma} d(y, g \cdot x) \geq \delta = \delta(x, y) > 0$ perchè altrimenti esisterebbe una successione di elementi distinti $g_k \in \Gamma$ tali che $d(y, g_k \cdot x) \rightarrow 0$, il che implicherebbe a sua volta $d(x, g_n^{-1}g_m \cdot x) = d(g_n \cdot x, g_m \cdot x) \rightarrow 0$ per $n, m \rightarrow \infty$. Dunque l'azione di Γ è propriamente discontinua perchè se poniamo $U_x = B(x, \delta/2)$ e $V_y = B(y, \delta/2)$, si ha $g \cdot U_x \cap V_y = \emptyset$ per ogni $g \in \Gamma$. Infine, combinando (2) con l'equivalenza tra (ii) e (iv) nella Proposizione 5.4.13 si ottiene (3). \square

Dimostrazione della Proposizione 5.4.12

Sia Γ_0 un sottogruppo normale abeliano e supponiamo $\Gamma_0 \neq \{e\}$. Supponiamo per assurdo che Γ_0 non sia contenuto nel centro di Γ . Allora esistono $g \in \Gamma_0 \setminus \{e\}$ e $\gamma \in \Gamma$ che non commutano tra loro. Essendo Γ abeliano normale, si ha $\Gamma_0 = \gamma^{-1}\Gamma_0\gamma$, e quindi $\gamma^{-1}g\gamma$ e $\gamma g\gamma^{-1}$ commutano con g . Poichè Γ è iperbolico per coppie, esisterà un morfismo $\rho : \langle g, \gamma \rangle \rightarrow \pi_1(X)$ che invia il sottogruppo generato da g e γ nel gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ di una varietà X a curvatura sezionale negativa e tale che $\rho(\gamma)$ e $\rho(g)$ non commutano. Ora, in $\pi_1(X)$ la commutazione è transitiva (si vedano gli Esempi 5.3.4 (i)). Sia C'_0 la classe di equivalenza di $\rho(g)$ e poniamo $\Gamma'_0 = C'_0 \cup \{e\}$. Il gruppo Γ'_0 , essendo un sottogruppo abeliano non banale di $\pi_1(X)$, è isomorfo a \mathbb{Z} per il teorema di Preissman. Denotando la relazione di commutazione con il simbolo \sim si può scrivere, per ogni $\gamma' \in C'_0$,

$$\rho(\gamma)\gamma'\rho(\gamma)^{-1} \sim \rho(\gamma)\rho(g)\rho(\gamma)^{-1} \sim \rho(g)$$

e

$$\rho(\gamma)^{-1}\gamma'\rho(\gamma) \sim \rho(\gamma)^{-1}\rho(g)\rho(\gamma) \sim \rho(g).$$

Si vede allora che la funzione definita da $\gamma' \rightarrow \rho(\gamma)\gamma'\rho(\gamma)^{-1}$ è un automorfismo di $\Gamma'_0 \simeq \mathbb{Z}$ (in quanto stabilizza Γ'_0 e ammette come inversa la funzione $\gamma' \rightarrow \rho(\gamma)^{-1}\gamma'\rho(\gamma)$). Sia τ un generatore libero di Γ'_0 : risulta $\rho(\gamma)\tau\rho(\gamma)^{-1} = \tau^{\pm 1}$, di modo che $\rho(\gamma)^2\tau\rho(\gamma)^{-2} = \tau$, che significa $\rho(\gamma) \sim \rho(\gamma)^2 \sim \tau \sim \rho(g)$. Questo contraddice il fatto che $\rho(\gamma)$ e $\rho(g)$ non commutano. \square

Il caso dei gruppi di superficie

Définition. Sia Γ un gruppo finitamente generato. Diremo il gruppo Γ di superficie se esso è non abeliano e se, per ogni coppia di elementi $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ che non commutano, esiste un morfismo ρ dal sottogruppo generato da γ_1 e γ_2 al gruppo fondamentale di una superficie compatta di genere $g \geq 2$ ($g > 2$ nel caso non orientabile), oppure iperbolica non compatta, tale che $\rho(\gamma_1)$ e $\rho(\gamma_2)$ non commutano.

Remarques. In un gruppo di superficie, due elementi che non commutano generano un sottogruppo libero. Infatti, l'abelianizzato del gruppo fondamentale $\pi_1(\Sigma_g)$ di una superficie compatta di genere g è \mathbb{Z}^{2g} nel caso orientabile, e $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$ nel caso non orientabile. Due elementi che non commutano in $\pi_1(\Sigma_g)$ generano un sottogruppo il cui abelianizzato ha al più rango 2 (e il rango è esattamente 2 se tale sottogruppo è libero), quindi esso è di indice infinito in $\pi_1(\Sigma_g)$, e si identifica con il gruppo fondamentale di una superficie non compatta (il rivestimento di Σ_g associato), il quale è libero ([Ma], capitolo 4).

Stabiliamo ora tre risultati che sono le versioni, valide per gruppi di superficie, del Teorema 5.4.1, della Proposizione 5.4.3 e del Teorema 5.4.4 rispettivamente :

Théorème 5.4.15. *Sia dato un numero reale positivo H . Per ogni spazio di lunghezza misurato (X, d, μ) completo, localmente compatto e connesso, tale che la misura delle bolle di raggio positivo sia strettamente positiva e per il quale si abbia $Ent(X) \leq H$, per ogni sottogruppo Γ del gruppo delle isometrie $Isom(X, d, \mu)$ che sia un gruppo di superficie e sia discreto rispetto alla topologia $C-O$, le seguenti (i), (ii), (iii) e (iv) sono verificate per ogni $x \in X$:*

(i) *Per ogni coppia di elementi γ_1 e γ_2 di Γ che non commutano tra loro*

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1 + 3 e^{-H d(x, \gamma_1 \cdot x)}}{1 - e^{-H d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right);$$

(ii) *per ogni coppia di elementi γ_1 e γ_2 di Γ che non commutano tra loro,*

$$\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{\text{Log}3}{H};$$

(iii) *il gruppo $\Gamma_\varepsilon(x)$ generato dai $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(x, \gamma \cdot x) < \varepsilon$, è abeliano per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{\text{Log}3}{H}$;*

(iv) *se il centro di Γ è ridotto al solo elemento neutro, allora*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) \geq \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1 + 3 e^{-2DH}}{1 - e^{-2DH}} \right)$$

per ogni maggiorante D di $D(x) = \sup_{z \in X} d(\Gamma \cdot x, z)$.

Remarques. Sia Γ il gruppo libero generato da $S = \{a, b\}$ (vale a dire, Γ è il gruppo fondamentale della superficie non compatta che si ottiene incollando lungo il bordo due triangoli iperbolici ideali). Sia $X = \mathbb{C}(\Gamma, S)$ il grafo di

Cayley di Γ rispetto a S , dotato della distanza di lunghezza d_l associata a un'applicazione $l : S \rightarrow \mathbb{R}^+$, definita in modo tale che la lunghezza del cammino corrispondente alla parola $\gamma = s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_p^{n_p}$ ($s_i \in S$) sia $l(\gamma) = n_1 l(s_1) + n_2 l(s_2) + \dots + n_p l(s_p)$, l'enunciato del teorema sopra è ottimale. Infatti, si scelga $x = e$, $\gamma_1 = a$, $\gamma_2 = b$ e $d(x, \gamma_1 \cdot x) = l(a)$, $d(x, \gamma_2 \cdot x) = l(b)$. Si ha allora $\sum_{s \in S} \frac{1}{1+e^{h l(s)}} = \frac{1}{2}$, dove h denota l'entropia di (X, d_l) (vedi [Rob], Lemma 3.3.3). Un calcolo diretto mostra che

$$l(b) = \frac{1}{h} \text{Log} \left(\frac{1 + 3 e^{-h l(a)}}{1 - e^{-h l(a)}} \right).$$

Proposition 5.4.16. *Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza con una misura completo, localmente compatto e connesso, tale che $\text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$ e tale che le bolle di raggio positivo abbiano misura positiva. Supponiamo che Γ sia un sottogruppo discreto del gruppo delle isometrie di (X, d, μ) che sia un gruppo di superficie, abbia la proprietà di transitività della commutazione e tale che ogni suo sottogruppo abeliano sia isomorfo a $\{e\}$ o \mathbb{Z} .*

Sia $x_0 \in X$ tale che $\inf_{g \in \Gamma} d(x_0, g \cdot x_0) = \varepsilon < \frac{\text{Log} 3}{H}$. Poniamo $R_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1+3 e^{-H\varepsilon}}{1-e^{-H\varepsilon}} \right)$.

Allora si ha :

- (i) *esiste un $\tau \in \Gamma$ tale che il sottogruppo $\Gamma_{2R_\varepsilon}(x_0)$ generato dai $g \in \Gamma$ tali che $d(x_0, g \cdot x_0) < 2R_\varepsilon$ è uguale a $\tau^{\mathbb{Z}} = \{\tau^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;*
- (ii) *la mappa quoziente $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$, la mappa $\bar{\pi} : X \rightarrow X/\tau^{\mathbb{Z}}$ e la mappa $p : X/\tau^{\mathbb{Z}} \rightarrow X/\Gamma$ (quest'ultima definita da $p \circ \bar{\pi} = \pi$) sono rivestimenti; se sul quoziente $X/\tau^{\mathbb{Z}}$ (risp. X/Γ) si definisce la distanza $d([x], [y]) = \inf_{g \in \tau^{\mathbb{Z}}} d(x, g \cdot y)$ (risp. $d([x], [y]) = \inf_{g \in \Gamma} d(x, g \cdot y)$) per ogni $x, y \in X$, e se $\bar{x}_0 = \bar{\pi}(x_0)$ e $\hat{x}_0 = \pi(x_0)$, allora la restrizione di p alla bolla $B(\bar{x}_0, R_\varepsilon)$ è un omeomorfismo sulla bolla $B(\hat{x}_0, R_\varepsilon)$ che è un'isometria locale.*

Théorème 5.4.17. *Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza misurato completo, localmente compatto e connesso, e sia Γ un gruppo di superficie che agisce su X per isometrie, che soddisfa la proprietà di transitività della commutazione e che supponiamo sia un sottogruppo discreto del gruppo delle isometrie di (X, d, μ) . Supponiamo inoltre che la misura di ogni bolla in X di raggio positivo sia strettamente positiva. Risulta allora $\text{Ent}(X) > 0$, ed esiste un punto $x_0 \in X$ tale che*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq \frac{\text{Log} 3}{\text{Ent}(X)}$$

dove $\text{Ent}(X)$ denota l'entropia dello spazio metrico misurato (X, d, μ) .

Le dimostrazioni del Teorema 5.4.15, della Proposizione 5.4.16 e del Teorema 5.4.17 si svolgono esattamente come quelle degli analoghi risultati corrispondenti al caso δ -non abeliano, con la differenza che il numero N (e quindi il

valore $\frac{\delta}{4+\delta}$ che maggiore N) è sostituito ovunque da 1, e il Lemma 5.4.14 è sostituito dal Lemma 3.3.3 di [Rob], perchè se γ_1 e γ_2 non commutano, e \mathbb{F} denota il gruppo libero generato da $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, si minora l'entropia di (X, d, μ) con quella di (\mathbb{F}, d_l) invece che quella del semigruppoo libero (\mathbb{F}^+, d_l) . Si noti anche che l'entropia di \mathbb{F} (resp. \mathbb{F}^+) per la distanza d_l che corrisponde a $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = 1$ è $\text{Log}3$ (resp. $\text{Log}2$).

Il confronto fra h e $\text{Ent}(X)$ rimane invece invariato come nella dimostrazione del Teorema 5.4.1.

Per concludere la dimostrazione della Proposizione 5.4.13 ci siamo avvalsi di un risultato classico (cfr. [Ra], Teorema 5.3.5) che ora per completezza dimostriamo.

Lemme 5.4.18. *Sia $Isom(X, d)$ il gruppo delle isometrie di uno spazio metrico di lunghezza completo e localmente compatto (X, d) e sia Γ un suo sottogruppo. Ogni successione $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di Γ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n \cdot x_0 = x_0$ per qualche $x_0 \in X$, ammette una sottosuccessione che converge nella topologia C-O a un'isometria $\gamma \in Isom(X, d)$. Se inoltre Γ è discreto in $Isom(X, d)$, si ha che $\gamma \in \Gamma$ e la successione $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è definitivamente costante.*

Démonstration. Dimostriamo dapprima che X ammette per ogni $\varepsilon > 0$ un ε -reticolo numerabile localmente finito. Sia $\overline{B(y_0, 1)}$ la bolla chiusa in X di centro arbitrario $y_0 \in X$ e raggio 1 : poichè X è uno spazio di lunghezza completo e localmente compatto, $\overline{B(y_0, 1)}$ è compatta (Proposizione 5.3.11) e ammette quindi un ε -reticolo finito, che denotiamo R_ε^1 . Analogamente, l'insieme $\overline{B(y_0, 2)} \setminus B(y_0, 1)$ ammette un ε -reticolo finito che denotiamo R_ε^2 . Per ogni intero $n \geq 2$, sia R_ε^n un ε -reticolo finito di $\overline{B(y_0, n)} \setminus B(y_0, n-1)$. Poichè $X = \bigcup_{n \geq 1} [\overline{B(y_0, n)} \setminus B(y_0, n-1)]$, l'insieme $R_\varepsilon = \bigcup_{n \geq 1} R_\varepsilon^n$ è un ε -reticolo numerabile per X che è localmente finito dal momento che $R_\varepsilon \cap \overline{B(y_0, n)} \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, n+1} R_\varepsilon^i$. Sia $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in Γ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_k \cdot x_0 = x_0$, per $x_0 \in X$. L'insieme $\{\gamma_k \cdot x_0\}_{k \in \mathbb{N}}$ è limitato e quindi, per le ipotesi fatte su X , la sua chiusura $\overline{\{\gamma_k \cdot x_0\}_{k \in \mathbb{N}}}$ è compatta. Poichè per ogni $x \in X$ e ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $d(x, \gamma_k \cdot x) \leq 2d(x, x_0) + d(x_0, \gamma_k \cdot x_0)$, anche l'insieme $\{\gamma_k \cdot x\}_{k \in \mathbb{N}}$ è limitato e la sua chiusura $\overline{\{\gamma_k \cdot x\}_{k \in \mathbb{N}}}$ è compatta. Si consideri ora l'insieme $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} R_{1/k}$: si tratta di un insieme numerabile denso in X . Per ogni $k \in \mathbb{N}$, la restrizione $\gamma_k|_E$ di γ_k a E è un elemento del prodotto $\prod_{x \in E} \overline{\{\gamma_k \cdot x\}_{k \in \mathbb{N}}}$ che, essendo prodotto numerabile di spazi metrici compatti, è uno spazio compatto metrizzabile (si veda, ad esempio, [Sz]). Ne segue che la successione $\{\gamma_k|_E\}_{k \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione $\{\gamma_{\phi(k)}|_E\}_{k \in \mathbb{N}}$, che converge per k che tende all'infinito a un elemento γ_0 appartenente a $\prod_{x \in E} \overline{\{\gamma_k \cdot x\}_{k \in \mathbb{N}}}$ (i.e. la successione $\{\gamma_{\phi(k)}|_E\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una funzione $\gamma_0 : E \rightarrow X$). Dimostriamo ora che $\{\gamma_{\phi(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy per la topologia C-O. Sia $\varepsilon > 0$ e K un qualunque sottoinsieme compatto di X . Sia $n \in \mathbb{N}$: l'insieme $K \cap R_{1/n}$ è finito, perchè $R_{1/n}$ è localmente finito. Se $n \geq 3/\varepsilon$, per ogni $x \in K$ e ogni $a \in K \cap R_{1/n}$ per il quale si ha $d(a, x) < \varepsilon/3$, abbiamo

$$\begin{aligned} d(\gamma_{\phi(k)} \cdot x, \gamma_{\phi(k')} \cdot x) &\leq d(\gamma_{\phi(k)} \cdot x, \gamma_{\phi(k)} \cdot a) + d(\gamma_{\phi(k)} \cdot a, \gamma_{\phi(k')} \cdot a) + d(\gamma_{\phi(k')} \cdot a, \gamma_{\phi(k')} \cdot x) = \\ &= 2d(a, x) + d(\gamma_{\phi(k)} \cdot a, \gamma_{\phi(k')} \cdot a) < \varepsilon \end{aligned}$$

per $k, k' \in \mathbb{N}$ abbastanza grandi da avere $d(\gamma_{\phi(k)} \cdot a, \gamma_{\phi(k')} \cdot a) < \varepsilon/3$ per ogni $a \in K \cap R_{1/n}$. Poichè lo spazio X è completo, la disuguaglianza sopra dimostra anche che per k che tende all'infinito la successione $\{\gamma_{\phi(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge nella topologia C-O a una funzione $\gamma : X \rightarrow X$.

La funzione limite γ conserva le distanze, perchè per ogni $x, y \in X$ e ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo

$$d(x, y) \leq d(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) + [d(\gamma \cdot x, \gamma_k \cdot x) + d(\gamma \cdot y, \gamma_k \cdot y)] < d(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) + \varepsilon$$

(dove per brevità abbiamo denotato $\gamma_k = \gamma_{\phi(k)}$) e analogamente $d(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) < d(x, y) + \varepsilon$.

Inoltre, γ è una bigezione : infatti, poichè per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ si ha $d(\gamma_k^{-1} \cdot x, \gamma_n^{-1} \cdot x) \leq d(x, \gamma_k \cdot x) + d(x, \gamma_n \cdot x)$, anche la successione $\{\gamma_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge nella topologia C-O a una funzione $g : X \rightarrow X$. Osservando che per ogni $x \in X$ e ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$0 \leq d(x, g\gamma \cdot x) \leq d(\gamma_k^{-1} \cdot z, g \cdot z) + d(\gamma_k \cdot x, \gamma \cdot x) < \varepsilon$$

(dove abbiamo posto $z = \gamma_k \cdot x$) si vede che g è l'inversa di γ . Ne segue che $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette ammette una sottosuccessione convergente a un'isometria $\gamma \in Isom(X, d)$.

L'ultima affermazione del lemma discende dal fatto generale che un sottogruppo discreto Γ di un gruppo topologico G dotato di una metrica, è chiuso. Infatti, se $G \setminus \Gamma$ fosse aperto in G , esisterebbe $g \in G \setminus \Gamma$ tale che per ogni intero positivo $n \in \mathbb{N}$ la bolla $B(g, 1/n)$ in G di centro g e raggio $1/n$ avrebbe intersezione non vuota con Γ . Esisterebbe quindi una successione $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ (dove possiamo supporre che i g_n siano distinti) tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = g$ e quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n g_{n+1}^{-1} = e$ in Γ . Essendo Γ discreto, la successione $\{g_n g_{n+1}^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è costante per n abbastanza grande, il che contraddice l'ipotesi che i g_n sono distinti. □

Aggiungiamo infine l'osservazione seguente : se (X, d) è anche dotato di una misura boreliana μ , e se $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Isom(X, d, \mu)$ è una successione convergente nella topologia C-O, il limite γ della successione preserva la misura, i.e. $\mu(\gamma(A)) = \mu(A)$ per ogni $A \subseteq X$ misurabile. Per vederlo, supponiamo dapprima che A sia limitato. In tal caso, poichè A è relativamente compatto per le ipotesi fatte su X (si veda la Proposizione 5.3.11), si ha che $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \gamma$ uniformemente su A . Ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\gamma_k(A) \subseteq (\gamma(A))_\varepsilon$ per $k \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, dove $(\gamma(A))_\varepsilon$ denota l'insieme dei punti di X la cui distanza da $\gamma(A)$ è strettamente minore di ε . Allora $\mu(A) = \mu(\gamma_k(A)) \leq \mu((\gamma(A))_\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$. L'uguaglianza $\bigcap_{\varepsilon > 0} (\gamma(A))_\varepsilon = \overline{\gamma(A)}$ implica che

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu((\gamma(A))_\varepsilon) = \mu(\gamma(A))$ e risulta quindi $\mu(A) \leq \mu(\gamma(A))$ per ogni A misurabile limitato. Ripetendo lo stesso argomento per la successione γ_k^{-1} che, come abbiamo dimostrato sopra, converge per k che tende all'infinito all'inversa γ^{-1} di γ , si ottiene $\mu(B) \leq \mu(\gamma^{-1}(B))$ per ogni B misurabile limitato : scegliendo allora $B = \gamma(A)$, si ottiene $\mu(\gamma(A)) \leq \mu(A)$ e quindi $\mu(\gamma(A)) = \mu(A)$.

Sia A non limitato. Poichè $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A \cap B(x, n)]$ (dove $B(x, n)$ denota la bolla in X centrata in $x \in X$ e di raggio $n \in \mathbb{N}$), risulta $\gamma(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma[A \cap B(x, n)]$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\gamma[A \cap B(x, n)]) = \mu(\gamma(A))$. Ma poichè per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A \cap B(x, n)$ è limitato, si ha $\mu(\gamma[A \cap B(x, n)]) = \mu(A \cap B(x, n))$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \cap B(x, n)) = \mu(A)$, cioè $\mu[\gamma(A)] = \mu(A)$.

Chapitre 6

Una definizione algebrica della δ -non abelianità

6.1 Nuovi esempi

Abbiamo visto nel capitolo precedente (cfr. Paragrafo 1.3) che il concetto di gruppo δ -non abeliano gioca un ruolo essenziale nella generalizzazione del Lemma di Margulis su cui è imperniata questa tesi. E' significativo notare però che, in alcuni dei risultati trovati (Teorema 5.3.5 e Teorema 5.3.7) non basta fare questa richiesta sul gruppo Γ in questione : occorre anche che esso abbia la proprietà di transitività della commutazione, o, più in generale, che il suo centro sia nullo. Una difficoltà nel trovare gruppi di questo tipo (che non siano gruppi fondamentali di varietà compatte a curvatura negativa) nasce dal fatto che la definizione di gruppo δ -non abeliano è per sua natura geometrica, mentre la proprietà di transitività della commutazione è una proprietà puramente algebrica. Con questa motivazione, siamo condotti ad approfondire il percorso che aveva portato a introdurre la nozione di δ -non abelianità, fornendone una versione completamente algebrica. Partiremo da una definizione che descrive proprietà algebriche che sono possedute dai gruppi δ -non abeliani, come dimostrano la Proposizione 1.14 di [B-C-G] (cfr. la nostra Proposizione 5.3.12) e la Proposizione 5.4.12. Non soltanto, ma esse sono anche sufficienti a dimostrare le seguenti versioni modificate del Teorema 5.3.5 e del Teorema 5.3.7.

Définition 6.1.1. *Sia G un gruppo. Diremo che G ha la proprietà $FSG(N)$ (per qualche intero $N > 0$) se per ogni $g_1, g_2 \in G$ che non commutano, $\{g_1^N, g_2^N\}$ o $\{g_1^N, g_2^{-N}\}$ generano un semigruppone libero in G ; diremo che G ha la proprietà NAS se l'unico sottogruppo normale abeliano di G è $\{e\}$ (dove e denota l'elemento neutro in G).*

Théorème 6.1.2. *Siano dati un numero reale positivo H e un numero naturale positivo N . Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza misurato completo, localmente compatto e connesso, per il quale si abbia $Ent(X) \leq H$ e tale che in X le bolle di raggio positivo abbiano misura strettamente positiva. Sia Γ un sottogruppo del gruppo delle isometrie $Isom(X, d, \mu)$, discreto rispetto alla topologia $C-O$, che abbia la proprietà $FSG(N)$. Allora, per ogni $x \in X$, valgono le seguenti (i), (ii), (iii), (iv) :*

(i) *per ogni coppia di elementi γ_1 e γ_2 di Γ che non commutano tra loro,*

$$d(x, \gamma_2 \cdot x) \geq \frac{1}{H} \cdot \frac{1}{N} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H N d(x, \gamma_1 \cdot x)}} \right);$$

(ii) *per ogni coppia di elementi γ_1 e γ_2 di Γ che non commutano tra loro,*

$$\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{H};$$

(iii) *il gruppo $\Gamma_\varepsilon(x)$ generato dai $\gamma \in \Gamma$ tali che $d(x, \gamma \cdot x) < \varepsilon$, è abeliano per ogni $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{H}$;*

(iv) *se inoltre Γ ha centro nullo, allora*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, \gamma \cdot x) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-2NDH}} \right)$$

per ogni numero reale $D > 0$ tale che $D(x) = \sup_{z \in X} d(\Gamma \cdot x, z) \leq D$ per ogni $x \in X$.

Théorème 6.1.3. *Sia N un intero positivo. Sia (X, d, μ) uno spazio di lunghezza misurato completo, localmente compatto e connesso, tale che le bolle di raggio positivo in X abbiano misura strettamente positiva. Sia Γ un sottogruppo discreto del gruppo delle isometrie di (X, d, μ) con la proprietà $FSG(N)$, la proprietà NAS e la proprietà di transitività della commutazione. Allora l'entropia dello spazio X , che denotiamo $Ent(X)$, è strettamente positiva; inoltre esiste un punto $x_0 \in X$ tale che*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{Ent(X)}.$$

Remarques. I due teoremi sopra valgono se Γ è un gruppo α -iperbolico secondo Gromov rispetto a un suo sistema di generatori S , non elementare e privo di torsione, per un certo intero N minore o uguale a una costante calcolabile esplicitamente in funzione di α e della cardinalità di S (cfr. Proposizione 6.3.5).

Le dimostrazioni di questi teoremi sono immediate (si ottengono in modo analogo ai corrispondenti Teoremi 5.4.1 e 5.4.4, sfruttando la Proposizione 5.4.13, il Lemma 5.4.14 e il Lemma interno alla dimostrazione del Teorema 5.4.1 a pag. 90).

L'impostazione algebrica che seguiremo in questo capitolo ci consentirà di dimostrare tre proposizioni (Proposizioni 6.2.3, 6.3.5 e 6.4.2) a partire dalle quali si ottengono esempi di gruppi che soddisfano il Teorema 6.1.2 e il Teorema 6.1.3, e pertanto anche i risultati descritti nel Capitolo 1. Oltre che a dimostrare queste tre proposizioni, il resto del capitolo sarà dedicato alla discussione dei suddetti esempi.

Remarques 6.1.4.

- (1) *In un gruppo G che soddisfa alla proprietà $FSG(N)$ per qualche intero $N > 0$ gli elementi di ordine finito sono contenuti nel centro di G .* La dimostrazione di ciò è del tutto simile a quella della Proposizione 5.4.7. Siano $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo e $g \in G$ tali che $g^n = e$. Se g non appartiene al centro di G , esiste un $g' \in G$ che non commuta con g . Allora g^N e g'^N (o g^N e g'^{-N}) generano un semigruppone libero in G . Ma questo è assurdo perchè $(g^N)^n = (g^n)^N = e$.

In particolare, un gruppo non abeliano con la proprietà di transitività della commutazione e la proprietà $FSG(N)$ è privo di torsione. Si noti che ogni gruppo abeliano (anche con torsione) verifica banalmente la proprietà di transitività della commutazione e la proprietà $FSG(N)$ per ogni $N \geq 1$, ma non soddisfa la proprietà NAS. Per questo, se non faremo l'ipotesi che il gruppo abbia la proprietà NAS, quando sarà necessario aggiungeremo esplicitamente l'ipotesi di assenza di torsione per i gruppi con queste due proprietà.

- (2) *Un gruppo G non abeliano con la proprietà di transitività della commutazione e privo di torsione non contiene sottogruppi normali ciclici.* Infatti, sia per assurdo H un sottogruppo normale ciclico di G (H è isomorfo a \mathbb{Z} , perchè G è senza torsione). Sia τ un generatore libero di H : poichè per ogni $g \in G \setminus \{e\}$ l'applicazione che associa a ogni $\gamma \in H$ $g\gamma g^{-1}$ è un automorfismo di H , si ha $g\tau g^{-1} = \tau$, o $g\tau g^{-1} = \tau^{-1}$. Ne segue che $g^2\tau g^{-2} = \tau$, cioè τ commuta con g^2 , e dunque con g per la proprietà di transitività della commutazione (si noti che $g^2 \neq e$). Poichè g è arbitrario, questo implica (contro le ipotesi) che G sia abeliano per la proprietà di transitività della commutazione.

Exemple. Un gruppo policiclico è un gruppo che possiede una serie ciclica $\{e\} = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ di sottogruppi G_i tale che per ogni intero $i = 0, \dots, n-1$ il sottogruppo G_i è normale in G_{i+1} e il quoziente G_{i+1}/G_i è ciclico.

Un gruppo polieciclico possiede sempre un sottogruppo normale abeliano non banale e pertanto non soddisfa alla proprietà NAS. (Per una dimostrazione di ciò si veda, ad esempio, [Ro], Prop. 5.4.15)

Esempi di gruppi polieciclici sono : i gruppi abeliani; il gruppo $Sym(n)$ delle permutazioni di un insieme di n elementi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il quale ammette come serie ciclica $\{e\} < Alt(n) < Sym(n)$ (dove $Alt(n)$ denota il sottogruppo normale di indice 2 in $Sym(n)$ costituito dalle permutazioni pari); i gruppi che ammettono una presentazione del tipo $\langle t, a_1, \dots, a_n \mid a_i a_j = a_j a_i, t a_i t^{-1} = \phi_M(a_i), i, j = 1, \dots, n \rangle$ (M essendo una matrice quadrata di ordine $n \in \mathbb{N}$ a entrate intere e determinante $det(M) = \pm 1$ e $\phi_M(a_i) = a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}$ dove (m_1, \dots, m_n) è l' i -esima colonna di M).

6.2 I prodotti amalgamati

Siano A e B due gruppi e siano $C_1 < A$ e $C_2 < B$ due sottogruppi tali che esiste un isomorfismo $\phi : C_1 \rightarrow C_2$. Sia $F = A * B$ il prodotto libero di A e B (i.e. il gruppo delle espressioni formali del tipo $a_1 b_1 \dots a_k b_k$, dove $a_i \in A$ e $b_j \in B$, con prodotto definito per giustapposizione e semplificazione) e sia N il più piccolo sottogruppo normale di F contenente tutti gli elementi della forma $\phi(c)c^{-1}$, al variare di $c \in C_1$. Si dice *prodotto amalgamato di A e B rispetto all'isomorfismo ϕ* , e si denota $A *_\phi B$, il gruppo quoziente F/N . Scriveremo anche $A *_C B$ sottintendendo l'identificazione $C_1 \simeq C_2 \simeq C$ data da ϕ . I gruppi A e B si chiamano *fattori* del prodotto $A *_C B$. Nel seguito supporremo sempre $A \neq C \neq B$, i.e. $C_1 \neq A$ e $C_2 \neq B$ (senza quest'ipotesi, ogni gruppo G si può scrivere come prodotto amalgamato, in quanto $G = G *_G G$).

Exemples. La costruzione appena descritta ha origine nella topologia algebrica. Sia $X = X_1 \cup X_2$ uno spazio topologico unione di due aperti connessi X_1 e X_2 , tali che $Y = X_1 \cap X_2$ è connesso. Allora, se le inclusioni canoniche $i_1 : Y \rightarrow X_1$ e $i_2 : Y \rightarrow X_2$ inducono sui gruppi fondamentali dei morfismi iniettivi $i_{1*} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X_1)$ e $i_{2*} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X_2)$, si ha $\pi_1(X) = \pi_1(X_1) *_\phi \pi_1(X_2)$, dove $C_1 = i_{1*}(\pi_1(Y))$, $C_2 = i_{2*}(\pi_1(Y))$ e $\phi = i_{2*} \circ i_{1*}^{-1} : C_1 \rightarrow C_2$. (Ciò discende dal teorema di Seifert-van Kampen. Per una dimostrazione, si veda il Capitolo 11 di [Rot], dove sono anche descritte le proprietà fondamentali dei prodotti amalgamati)

Un altro esempio di prodotto amalgamato è dato dal gruppo B_3 delle trecce di ordine 3 (si veda, ad esempio, [Bi]), il quale ammette come presentazione $B_3 = \langle a, b \mid aba = bab \rangle$. Si noti infatti che la sostituzione $aba = \alpha$, $ba = \beta$ fornisce la presentazione equivalente $B_3 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^3 \rangle$, il che dimostra

che $B_3 = A *_\phi B$, dove $A = B = \mathbb{Z}$, $C_1 = 2\mathbb{Z}$, $C_2 = 3\mathbb{Z}$ e $\phi : C_1 \rightarrow C_2$ è l'unico morfismo tale che $\phi(2) = 3$.

La seguente definizione è stata introdotta da B. Baumslag ([Ba]).

Définition. *Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G si dice malnormale in G se, per ogni $g \in G \setminus H$, si ha $gHg^{-1} \cap H = \{e\}$.*

Exemples. Il sottogruppo $\{e\} < G$ costituito dal solo elemento neutro è banalmente malnormale in G per ogni gruppo G . Un esempio non banale di sottogruppo malnormale è il seguente : sia G un gruppo iperbolico senza torsione (ad esempio il gruppo fondamentale di una varietà compatta a curvatura sezionale strettamente negativa) e sia H un suo sottogruppo abeliano massimale (i.e. tale che non esiste nessun sottogruppo abeliano di G che contenga strettamente H). Allora H è malnormale in G (si veda, ad esempio, [Gr]).

Définition. ([K-S], pag. 933¹) *Un prodotto amalgamato $A *_C B$ si dice malnormale se C è malnormale sia in A che in B .*

L'esempio più semplice di prodotto malnormale è il prodotto libero $A * B$. Nella dimostrazione della Proposizione 6.2.3, che enunceremo più avanti, faremo uso delle proprietà dei prodotti malnormali descritte nelle due proposizioni seguenti.

Proposition 6.2.1. ([K-S]) *Se $G = A *_C B$ è un prodotto amalgamato malnormale, allora si ha :*

- (i) *ogni sottogruppo di G a due generatori è il prodotto libero di due gruppi ciclici oppure è contenuto nel coniugato di un fattore (Teorema 6 in [K-S]) ;*
- (ii) *il centralizzatore $C(g)$ di ogni $g \in G$ (i.e. il sottogruppo costituito dagli elementi di G che commutano con g) è ciclico infinito oppure è contenuto nel coniugato di un fattore. In particolare, ogni sottogruppo abeliano di G è ciclico infinito oppure è contenuto nel coniugato di un fattore (Teorema 1 in [K-S]).*

Proposition 6.2.2. *Sia $G = A *_C B$ un prodotto amalgamato (con $A \neq C \neq B$). Allora si ha :*

- (i) *G non è abeliano ;*
- (ii) *se G è malnormale, non esistono sottogruppi normali di G contenuti in uno dei fattori.*

¹La nostra definizione corrisponde a quello che in [K-S] viene chiamato "0-step malnormal product".

Proposition 6.2.3. *Sia $N > 0$ un intero, e siano A e B gruppi privi di torsione con la proprietà FSG(N) (ad esempio, gruppi δ -non abeliani privi di torsione, con $\delta \geq 4/N$). Allora un loro qualunque prodotto amalgamato malnormale $A *_C B$ (in particolare, il prodotto libero $A * B$) ha la proprietà FSG(N). Se inoltre A e B hanno la proprietà di transitività della commutazione e $A \neq C \neq B$, allora $A *_C B$ ha la proprietà di transitività della commutazione e la proprietà NAS.*

Remarques. Per il caso particolare del prodotto libero, si notino i seguenti fatti :

- (1) Il prodotto libero $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ dei gruppi fondamentali di due varietà Riemanniane compatte X e Y a curvatura sezionale $K \leq -1$ verifica le conclusioni della Proposizione 6.2.3 per ogni $N \geq 4 \cdot \max\{1/\text{inj}(X), 1/\text{inj}(Y)\}$, dove $\text{inj}(X)$ e $\text{inj}(Y)$ denotano i raggi di iniettività di X e Y rispettivamente. Si osservi che $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ non è il gruppo fondamentale di una varietà compatta a curvatura negativa. Ciò può spiegarsi osservando che un tale prodotto libero ha un numero infinito di ends, mentre il gruppo fondamentale di una varietà compatta a curvatura negativa ha un solo end (proprietà quest'ultima derivante dal fatto che tale gruppo agisce in modo discontinuo e cocompatto su uno spazio diffeomorfo a \mathbb{R}^n). Il numero di ends di un gruppo è definito nell'Appendice C, pag. 171.
- (2) Il prodotto libero $\pi_1(X) * \mathbb{Z}^k$, dove $\pi_1(X)$ è il gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana compatta a curvatura sezionale negativa, verifica le conclusioni della Proposizione 6.2.3 per ogni intero $k > 0$ (si noti che \mathbb{Z}^k ha banalmente la proprietà FSG(N) per ogni intero $N \geq 1$).

Dimostriamo ora le ultime due proposizioni.

Dimostrazione della Proposizione 6.2.2

Ci servirà la nozione di *forma normale* di un elemento $g \in G = A *_C B$, che ora richiamiamo. Consideriamo gli insiemi A/C e B/C dei laterali destri di C in A e B rispettivamente e scegliamo per ogni classe laterale un rappresentante, con la sola condizione di scegliere l'elemento neutro come rappresentante della classe C sia in A/C che in B/C . Tali rappresentanti sono detti *trasversali*. Allora (si veda ad esempio [Ro], Teorema 6.4.1) ogni elemento $g \in G$ può essere scritto in forma unica come $g = c\bar{g}_1 \dots \bar{g}_r$, dove $c \in C$, i \bar{g}_i sono trasversali diversi dall'elemento neutro, e due trasversali consecutivi \bar{g}_i e \bar{g}_{i+1} non appartengono allo stesso fattore, per $i = 1, \dots, r-1$. Tale espressione si dice *forma normale* di g .

Dimostriamo ora (i) : poichè per ipotesi $A \neq C$ e $B \neq C$, esistono $a \in A \setminus C$ e $b \in B \setminus C$. Facciamo una scelta di trasversali tale che a sia il rappresentante

scelto per la classe Ca e b quello scelto per la classe Cb . Allora ab e ba sono elementi scritti in forma normale, e per unicità, $ab \neq ba$.

Per dimostrare (ii), supponiamo ora che K sia un sottogruppo normale di G contenuto in uno dei fattori, diciamo in B . Allora possiamo scegliere $k \in K \setminus C$ (perchè altrimenti K non sarebbe normale). Sia $a \in A \setminus C$ e scegliamo in G trasversali in modo che k sia il rappresentante scelto del laterale Ck , e a e a^{-1} siano i rappresentanti scelti rispettivamente per le classi Ca e Ca^{-1} (eventualmente $a = a^{-1}$). In questo modo, il coniugato aka^{-1} è scritto in forma normale, e non può appartenere a K perchè ogni elemento $h \in K$ si scrive in forma normale come $h = cb$ per qualche $c \in C$ e $b \in B$, il che dimostra (ii). \square

Dimostrazione della Proposizione 6.2.3

Supponiamo che A e B abbiano la proprietà FSG(N) per qualche intero $N > 0$ e che g_1 e g_2 siano elementi di G che non commutano. Per la Proposizione 6.2.1, il sottogruppo $\langle g_1, g_2 \rangle$ da essi generato è prodotto libero di due gruppi ciclici oppure è contenuto nel coniugato di uno dei fattori, per esempio A . Nel primo caso, poichè A e B non hanno torsione, G è privo di torsione ([Rot], Teorema 11.69, o [Ro], Proprietà 6.4.4), $\langle g_1, g_2 \rangle$ è isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e la proprietà FSG(N) è verificata per ogni $N \geq 1$. Nel secondo caso, si ha $g_i = \gamma a_i \gamma^{-1}$, per $i = 1, 2$, dove $\gamma \in G$ e $a_i \in A$ e, poichè A ha la proprietà FSG(N), si può supporre che a_1^N e a_2^N generino un semigruppato libero in A (eventualmente scambiando a_2 con a_2^{-1}), per cui g_1^N e g_2^N generano un semigruppato libero in G , e G ha la proprietà FSG(N).

Supponiamo ora che A e B abbiano la proprietà di transitività della commutazione. Siano $g_1, g_2, g_3 \in G \setminus \{e\}$ tali che $g_1 g_2 = g_2 g_1$ e $g_2 g_3 = g_3 g_2$. Allora g_1, g_2, g_3 appartengono al centralizzatore $C(g_2)$ di g_2 , che per la Proposizione 6.2.1 è ciclico oppure è contenuto in un coniugato di uno dei fattori, diciamo A . Nel primo caso si ha ovviamente $g_1 g_3 = g_3 g_1$; nel secondo caso si ha $g_i = \gamma a_i \gamma^{-1}$, per $i = 1, 2, 3$, dove $\gamma \in G$ e gli $a_i \in A$ sono tali che $a_1 a_2 = a_2 a_1$, $a_2 a_3 = a_3 a_2$. Poichè A ha la proprietà di transitività della commutazione, si ha $a_1 a_3 = a_3 a_1$ e quindi $g_1 g_3 = g_3 g_1$. Dunque G ha la proprietà di transitività della commutazione.

Sia ora H un sottogruppo abeliano normale non banale di $G = A *_C B$. Per la Proposizione 6.2.1, H è ciclico oppure è contenuto nel coniugato di uno dei fattori, per esempio A . Il primo caso non si verifica per il punto (2) delle Osservazioni 6.1.4, perchè G è non abeliano (Proposizione 6.2.2) e perchè è privo di torsione. Nel secondo caso si ha $H = \gamma K \gamma^{-1}$, dove K è un sottogruppo di A e $\gamma \in G$. Allora G ha la proprietà NAS perchè, H essendo normale, si ha $K = H$ che porta a una contraddizione in quanto (cfr. Proposizione 6.2.2) H sarebbe un sottogruppo normale di G contenuto

in uno dei fattori. □

6.3 I gruppi iperbolici

Sia (X, d) uno spazio metrico e $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso dotato della metrica euclidea ereditata da \mathbb{R} . Un'applicazione $f : [a, b] \rightarrow X$ che conserva le distanze si dice *cammino geodetico*. L'immagine $f([a, b])$ si dice *segmento geodetico* e i punti $f(a), f(b) \in X$ si dicono *estremi* del segmento geodetico (o estremi del cammino geodetico).

Uno spazio metrico (X, d) è *geodetico* se, comunque siano dati due punti $x, y \in X$, con $d_0 = d(x, y)$, esiste un segmento geodetico $f : [0, d_0] \rightarrow X$ che li unisce. Un tale segmento (che non è in generale unico) verrà denotato $[x, y]$.

Dati tre punti x, y, z in uno spazio metrico geodetico (X, d) , si definisce *triangolo geodetico* T di vertici x, y, z l'unione di tre segmenti geodetici $[x, y], [y, z], [x, z]$, che si dicono *lati* del triangolo.

Définition 6.3.1. *Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale. Uno spazio metrico geodetico (X, d) si dice α -iperbolico secondo Gromov se ogni triangolo geodetico T in X è tale che ogni punto di ogni suo lato ha distanza dall'unione degli altri due lati inferiore o uguale a α .*

Uno spazio metrico geodetico si dirà iperbolico secondo Gromov se, per qualche $\alpha \geq 0$ è α -iperbolico secondo Gromov.

Exemples.

- a) E' immediato verificare che uno spazio geodetico compatto X di diametro $D \geq 0$ è D -iperbolico secondo Gromov.
- b) Lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n è, per ogni intero $n \geq 2$, uno spazio iperbolico secondo Gromov. In \mathbb{H}^2 , ciò si può vedere mostrando prima che il cerchio inscritto nel triangolo ideale con i vertici all'infinito ha diametro uguale a $\text{Log}3$ e quindi, se D è il diametro del cerchio inscritto in un triangolo arbitrario, si ha $D \leq \text{Log}3$. Da ciò segue, per $\alpha = \text{Log}3$, la proprietà richiesta nella Definizione 6.3.1 (si veda [C-D-P], pag. 11). Si noti che, per $n \geq 3$, ogni triangolo di \mathbb{H}^n è incluso in una sottovarietà totalmente geodetica isometrica a \mathbb{H}^2 .
- c) Un albero reale X (i.e. un grafo 1-dimensionale connesso privo di cammini chiusi e dotato di una metrica di lunghezza) è uno spazio 0-iperbolico secondo Gromov : infatti, un triangolo T in X è l'unione di tre segmenti con un solo punto in comune (un cosiddetto "tripode"), e ogni lato di T è contenuto nell'unione degli altri due.

- d) Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$, non è uno spazio iperbolico secondo Gromov. Per vederlo nel caso $n = 2$, si consideri la successione di triangoli T_k di vertici $(0, 0)$, $(0, k)$, $(k, 0)$, per $k \in \mathbb{N}$ (la distanza del punto $(k/2, k/2)$ del lato diagonale dagli altri due lati è uguale a $k/2$, e va all'infinito per k che tende all'infinito).

Définition 6.3.2. *Sia $\mathbb{C}(G, S)$ il grafo di Cayley² rispetto a un sistema generatore finito S di un gruppo finitamente generato G . Allora G si dice iperbolico secondo Gromov se $\mathbb{C}(G, S)$ è uno spazio α -iperbolico secondo Gromov per qualche $\alpha \geq 0$. In tal caso, si dice che G è α -iperbolico rispetto a S .*

D'ora in avanti, quando parleremo di gruppi iperbolici intenderemo gruppi che soddisfano a questa definizione. Per semplicità di linguaggio, ometteremo la dicitura “secondo Gromov”.

Si dimostra che l'essere un gruppo iperbolico non dipende dal sistema generatore scelto ([C-D-P], Paragrafo 4.3). Più precisamente, se G è α -iperbolico rispetto a S , allora G è α' -iperbolico rispetto a S' (con α generalmente diverso da α').

Due proprietà algebriche dei gruppi iperbolici, fondamentali nel nostro contesto, sono espresse nei due risultati che seguono.

Théorème 6.3.3. ([C-G 1], pag. 158) *Sia Γ un gruppo δ -iperbolico rispetto a un suo sistema di generatori S . Per ogni numero reale $r > 0$ si denoti con b_r il numero degli elementi di Γ che si possono scrivere come il prodotto di meno di r elementi di S e dei loro inversi³. Allora, dati due elementi qualunque γ_1 e γ_2 di Γ , le potenze γ_1^N e γ_2^N sono banali, o generano un sottogruppo isomorfo a \mathbb{Z} , o generano un semigruppone libero (eventualmente scambiando γ_2 con γ_2^{-1}) per $N = ([328\delta] + 1) \cdot \max\{b_{64\delta}!, b_{8\delta}^2!\}$.*

Théorème 6.3.4. (Corollario 7.2, cap.10 di [C-D-P]) *Sia G un gruppo iperbolico, e sia $g \in G$ un elemento di ordine infinito. Allora il centralizzatore $C(g)$ di g (i.e. il sottogruppo costituito dagli elementi di G che commutano con g) è un'estensione finita del gruppo ciclico infinito $E(g)$ generato da g , cioè $E(g)$ ha indice finito in $C(g)$.*

Possiamo ora enunciare il risultato principale di questo paragrafo :

²E' il grafo i cui vertici sono gli elementi di G e due vertici $g_1, g_2 \in G$ sono uniti da un lato se e solo se $g_1^{-1}g_2 \in S$, dotato della metrica di lunghezza che identifica ogni lato con l'intervallo $[0, 1]$ (cfr. Appendice A).

³si supponga che $e \notin S$.

Proposition 6.3.5. *Sia G un gruppo iperbolico, non abeliano e privo di torsione. Allora G ha la proprietà di transitività della commutazione e la proprietà NAS. Se inoltre G è δ -iperbolico rispetto a un sistema generatore simmetrico S fissato, allora ha la proprietà $FSG(N)$ per un intero N che dipende solo da δ e da un maggiorante di $\sharp(S)$.*

Remarques. Alla fine del paragrafo dimostreremo che G ha la proprietà $FSG(N)$ per il valore di N dato nella Proposizione 6.3.3. Si osservi che per ogni $r > 1$ si ha $\max\{1 + \sharp(S_0), 2 \cdot [r] - 1\} \leq b_r \leq \sharp(S_0)^{([r]+1)}$, e quindi N dipende solo da δ e da $\sharp(S_0)$.

Exemples. I gruppi finiti; i gruppi liberi; i gruppi fondamentali delle varietà compatte a curvatura strettamente negativa sono tutti esempi di gruppi iperbolici (per quest'ultimo esempio, cfr. [C-D-P], pagg. 50-51). Un gruppo commensurabile⁴ a un gruppo iperbolico è esso stesso iperbolico (con una costante di iperbolicità eventualmente diversa).

I gruppi iperbolici finiti e quelli commensurabili a \mathbb{Z} sono detti *iperbolici elementari* (pag. 148 in [H1]).

Non sono gruppi iperbolici i gruppi \mathbb{Z}^k , con $k \geq 2$. Più in generale, un gruppo iperbolico non può contenere sottogruppi isomorfi a \mathbb{Z}^k , per $k \geq 2$ (si veda [C-D-P], Corollario 7.3). Ad esempio, il prodotto libero $\pi_1(X) * \mathbb{Z}^k$ considerato nelle Osservazioni a pag. 109, dove $\pi_1(X)$ è il gruppo fondamentale di una varietà compatta a curvatura sezionale negativa, non è un gruppo iperbolico. Questo implica anche che un gruppo iperbolico è abeliano solo se è elementare, perchè un gruppo abeliano finitamente generato si scrive come $\mathbb{Z}^k \times F$ (per qualche gruppo finito F) e non è iperbolico se $k \geq 2$.

Un rilievo importante da farsi nel nostro contesto è che esistono gruppi iperbolici non elementari, privi di torsione e con un solo end (cfr. Appendice C, pag. 171) che sono diversi dai gruppi fondamentali di varietà Riemanniane compatte a curvatura strettamente negativa. Un esempio di un gruppo G così fatto è fornito dalla presentazione

$$G = \langle a, b \mid R = ab^2ab^{-1}ab^{-2}aba^{-2}b = e \rangle.$$

Per dare un'idea della dimostrazione partiamo dall'osservazione che G è iperbolico perchè la sua presentazione soddisfa la *condizione di piccola cancellazione* $C'(1/6)$ che, per definizione, significa che se si considerano due permutazioni cicliche arbitrarie v_1 e v_2 della relazione R o della sua inversa R^{-1} , non esiste un elemento $u \in G$ di lunghezza $|u| \geq \frac{1}{6}|R| = \frac{13}{6}$ tale che $v_1 = uv'_1$

⁴Due gruppi G_1 e G_2 si dicono *commensurabili* se esistono due sottogruppi $H_1 < G_1$, $H_2 < G_2$ di indice finito e tali che H_1 è isomorfo a H_2

e $v_2 = uv'_2$ (come parole ridotte in a e b). In questo caso, la costante di iperbolicità di G è uguale a $|R| = 13$ (per maggiori dettagli sui gruppi a piccola cancellazione si veda, ad esempio, l'Appendice di [G-H]).

Un risultato di S. D. Brodskij ([Ho], Teorema 3.1) afferma che se G è un gruppo finitamente generato che ammette una presentazione con una sola relazione R , dove R non è una potenza propria, allora G è *localmente indicabile*, cioè per ogni sottogruppo non banale H di G esiste un morfismo suriettivo che manda H in \mathbb{Z} . In particolare, questo implica che G è privo di torsione, altrimenti si avrebbe una contraddizione prendendo come H il sottogruppo generato da un suo elemento di ordine finito.

Per vedere che G ha un solo end si utilizza un risultato di Stallings (cfr. Teorema C.0.19) che implica che se il numero dei suoi ends è maggiore o uguale a 2, allora o G è uguale a un prodotto amalgamato $A *_F B$ oppure a un'estensione HNN $A *_F$, dove F denota un gruppo finito. Poichè G è privo di torsione, l'unica possibilità è che $G = A * B$ (per il caso del prodotto amalgamato, si noti che $A *_{\{e\}} = A * \mathbb{Z}$). Applicando a G un teorema di Grushko ([Rot], pag. 393) che afferma che se denotiamo con $\mu(\Gamma)$ il minimo numero di generatori di un gruppo finitamente generato Γ , allora $\mu(A * B) = \mu(A) + \mu(B)$, la sua presentazione implica che $\mu(A * B) = 2$, e perciò $\mu(A) = \mu(B) = 1$. Ma allora A e B sono ciclici infiniti perchè G non ha torsione, e G sarebbe il gruppo libero \mathbb{F}_2 di rango 2, il che è assurdo.

Infine, se G fosse il gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana compatta (M^n, g) di dimensione $n \geq 2$ a curvatura sezionale negativa, la frontiera ∂G di G sarebbe omeomorfa al bordo all'infinito del suo rivestimento universale Riemanniano (\tilde{M}^n, \tilde{g}) , ovvero, essendo la curvatura $K_{\tilde{g}} < 0$, alla sfera S^{n-1} per qualche $n \geq 2$. Poichè per ogni gruppo iperbolico privo di torsione e con un solo end, dato da una presentazione che soddisfa la condizione di piccola cancellazione, risulta $\dim(\partial G) = 1$ ([Be-K], pag. 19) e quindi $\partial G = S^1$, G sarebbe il gruppo fondamentale di una superficie iperbolica e, poichè i suoi generatori a e b non commutano tra loro, dovrebbero generare un sottogruppo libero (cfr. Osservazioni a pag. 98), il che è incompatibile con la presentazione data.

Concludiamo citando una congettura di M. Gromov (cfr. [Gr], oppure [G-H], pag. 20) che viene spesso citata dicendo che "quasi ogni gruppo è iperbolico". Tale congettura è stata risolta in senso positivo da A. Y. Ol'shanskii ([O]), che ha dimostrato quanto segue. Consideriamo l'insieme delle presentazioni di gruppo del tipo $G = \langle a_1, \dots, a_h \mid r_1, \dots, r_k \rangle$, dove k e h sono interi positivi fissati, e r_i è una relazione di lunghezza fissata $n_i > 0$, per ogni $i = 1, \dots, k$. Se $N = N(k, h, n_1, \dots, n_k)$ denota il numero di tali presentazioni, e N_{hyp} denota il numero di quelle che rappresentano gruppi iperbolici, allora N/N_{hyp} tende

a 1 quando $\min(n_1, \dots, n_k)$ tende a infinito.

Dimostrazione della Proposizione 6.3.5

Dimostriamo dapprima che G possiede la proprietà di transitività della commutazione. Sia $g \in G$ e siano $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ elementi che commutano con g . Allora γ_1 e γ_2 appartengono al centralizzatore $C(g)$ di g che, per il Teorema 6.3.4 è estensione finita di un gruppo ciclico. Ma, se un gruppo π ammette un sottogruppo ciclico infinito di indice finito, allora esiste un sottogruppo finito $F < \pi$, normale in π , e tale che π/F è isomorfo a \mathbb{Z} o a $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (Lemma 4.1 in [Wa]). Sia $\pi = C(g)$. Poichè G è per ipotesi privo di torsione, si ha $F = \{e\}$ e necessariamente $C(g)$ è isomorfo a \mathbb{Z} , per cui γ_1 e γ_2 commutano tra loro.

Per dimostrare che G soddisfa alla proprietà NAS, osserviamo che ogni sottogruppo abeliano non banale K di G è contenuto nel centralizzatore di uno qualunque dei suoi elementi e quindi, per quanto appena dimostrato, è un gruppo ciclico infinito. Ne segue che K non può essere normale (per il punto (2) delle Osservazioni 6.1.4) a meno che G non sia abeliano : ma questo è escluso perchè G è non elementare (cfr. Esempi a pagina 113).

Infine, se G è δ -iperbolico rispetto a S per qualche numero reale $\delta \geq 0$, sia N la costante che appare nell'enunciato del Teorema 6.3.3. Se g_1 e g_2 sono elementi di G che non commutano, le potenze g_1^N e g_2^N non sono banali (perchè G è per ipotesi senza torsione) e non generano un gruppo abeliano, dunque per il Teorema 6.3.3 generano un semigruppato libero (eventualmente scambiando g_2 con g_2^{-1}). Questo dimostra che G ha la proprietà FSG(N). \square

6.4 Il caso dei limiti di gruppi

Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero positivo, e sia \mathbb{F}^n il gruppo libero di rango n , con base libera $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Siano A, B due sottoinsiemi di \mathbb{F}^n . Definiamo

$$\nu(A, B) = \sup\{R > 0 \mid A \cap B(e, R) = B \cap B(e, R)\},$$

dove $B(e, R)$ denota, rispetto alla metrica delle parole⁵ associata a E , la bolla aperta di raggio $R > 0$ e centrata nell'elemento neutro $e \in \mathbb{F}^n$ (in altri termini, l'insieme degli elementi di \mathbb{F}^n che si possono scrivere come espressioni negli e_i e nei loro inversi formate da meno di R lettere). Poniamo $d(A, B) = e^{-\nu(A, B)}$. Allora d definisce una distanza tra i sottoinsiemi di \mathbb{F}^n . Infatti, $d(A, B) = 0$ se e solo se $\nu(A, B) = +\infty$, cioè A e B coincidono

⁵Si tratta della distanza di lunghezza d_l definita nelle Osservazioni a pag. 98, con $l(e_i) = l(e_i^{-1}) = 1$ per ogni intero $i = 1, \dots, n$.

su tutto \mathbb{F}^n . La simmetria $d(A, B) = d(B, A)$ è immediata. Per provare la disuguaglianza triangolare, osserviamo che se A, B, C sono sottoinsiemi di \mathbb{F}^n e R_1, R_2 sono numeri reali positivi tali che $R_1 \leq \nu(A, B)$ e $R_2 \leq \nu(B, C)$, allora $\min\{R_1, R_2\} \leq \nu(A, C)$. Quindi $\nu(A, C) \geq \min\{\nu(A, B), \nu(B, C)\}$ e risulta

$$e^{-\nu(A, C)} \leq e^{-\min\{\nu(A, B), \nu(B, C)\}} = e^{\max\{-\nu(A, B), -\nu(B, C)\}} \leq e^{-\nu(A, B)} + e^{-\nu(B, C)}.$$

Définition 6.4.1. *Dato un gruppo finitamente generato G e un sistema di generatori finito S , la coppia (G, S) si dice gruppo marcato ([Cha], [C-G 2]).*

Sia (G, S) un gruppo marcato e supporremo che $e \notin S$ e che per ogni $s \in S$, si abbia $s^{-1} \in S$ se e solo se $s = s^{-1}$. Sia $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ e, con le stesse notazioni sopra, si consideri la bigezione $f_S : E \rightarrow S$ definita ponendo, per ogni $i = 1, \dots, n$, $f_S(e_i) = s_i$. Tale applicazione induce un unico omomorfismo suriettivo $\bar{f}_S : \mathbb{F}^n \rightarrow G$, con nucleo N , che induce a sua volta un isomorfismo $G \simeq \mathbb{F}^n/N$. Pertanto, una volta assegnata l'identificazione f_S , il gruppo G è univocamente determinato dal sottogruppo normale N di \mathbb{F}^n , detto *sottogruppo delle relazioni* di (G, S) .

Siano ora (G, S) e (G', S') due gruppi marcati tali che $\sharp(S) = \sharp(S') = n$. Fissiamo due identificazioni f_S e $f_{S'}$ e siano N e N' i nuclei degli omomorfismi \bar{f}_S e $\bar{f}_{S'}$, rispettivamente.

Definiamo allora una distanza tra gruppi marcati ponendo $d((G, S), (G', S')) = d(N, N')$, dove $d(N, N')$ è la distanza definita prima tra sottoinsiemi di \mathbb{F}^n .

Si ha quindi che, per ogni numero reale $R > 0$, (G, S) e (G', S') sono a distanza minore o uguale a e^{-R} se e solo se essi hanno esattamente le stesse relazioni di lunghezza minore o uguale a R .

Data una successione $\{(G_i, S_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ di gruppi marcati dove $\sharp(S_i)$ è costante per $i \in \mathbb{N}$, diremo che $\lim_{i \rightarrow \infty} (G_i, S_i) = (G, S)$, con $\sharp(S) = \sharp(S_i)$ se, per ogni $R > 0$, esiste un intero $i(R)$ tale che per ogni intero $i \geq i(R)$, si ha $d((G_i, S_i), (G, S)) \leq e^{-R}$. (Si veda, ad esempio, [C-G 2]).

Exemples. I gruppi marcati $(\mathbb{Z}, \{1\})$ e $(\mathbb{Z}_p, \{1'\})$ (dove 1 e $1'$ indicano generatori fissati di \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_p rispettivamente) si trovano a distanza e^{-p} , e quindi, per p che tende all'infinito, $(\mathbb{Z}_p, \{1'\}) \rightarrow (\mathbb{Z}, \{1\})$. Si noti che nelle definizioni precedenti le identificazioni tra i sistemi di generatori sono essenziali. Ad esempio, si consideri il prodotto libero $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_p$, dotato del sistema di generatori $S = \{1, 1'\}$. Se consideriamo l'identificazione $f : S \rightarrow S$ data da $f(1) = 1'$, $f(1') = 1$, la distanza del gruppo marcato (G, S) da se stesso è uguale a e^{-p} , mentre tale distanza è chiaramente uguale a zero rispetto all'identità $id : S \rightarrow S$.

In seguito, nel parlare di distanza tra gruppi marcati e argomenti ad essa correlati ometteremo di ricordare l'esistenza delle identificazioni f_S (che si suppongono fissate a priori).

Proposition 6.4.2. *Sia $N > 0$ un intero. Sia $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di gruppi finitamente generati con la proprietà FSG(N) (risp. con la proprietà di transitività della commutazione). Per ogni $i \in \mathbb{N}$, sia S_i un sistema di generatori finito di G_i e supponiamo che per qualche gruppo G dotato di un sistema di generatori S , si abbia $\lim_{i \rightarrow \infty} (G_i, S_i) = (G, S)$. Allora G ha la proprietà FSG(N) (risp. la proprietà di transitività della commutazione).*

Exemples. Sia Σ_2 la superficie compatta orientabile di genere 2, e si consideri il gruppo fondamentale $\pi_1(\Sigma_2)$, con la presentazione canonica

$$\pi_1(\Sigma_2) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = e \rangle.$$

Si consideri, per $n \in \mathbb{N}$ la successione di gruppi marcati $(G_n, S_n) = (\pi_1(\Sigma_2), \{a, b, c, d, d^n\})$. Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} (G_n, S_n) = (G, S)$, dove

$$G = \pi_1(\Sigma_2) *_Z \mathbb{Z}^2 = \langle a, b, c, d, f \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = e, df = fd \rangle$$

e $S = \{a, b, c, d, f\}$. Ciò si dimostra osservando che, se \mathbb{Z}^2 è dotato della sua base canonica $\{d, f\}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il quoziente di \mathbb{Z}^2 tramite il sottogruppo di relazioni R_n generato dall'elemento $d^n f^{-1}$ (in notazione moltiplicativa) tende a \mathbb{Z}^2 per n che tende all'infinito, perchè per ogni $R > 0$ si ha $R_n \cap B(0, R) = \{e\}$ per $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande.

Poichè per ogni $n \in \mathbb{N}$ il gruppo $G_n = \pi_1(\Sigma_2)$ è un gruppo iperbolico per coppie, esso possiede le proprietà di transitività della commutazione, la proprietà NAS e la proprietà FSG(1). Dunque, applicando la Proposizione 6.4.2 si ha che il gruppo G ha la proprietà di transitività della commutazione e la proprietà FSG(1).

Ciò non può essere dedotto dalla Proposizione 6.2.3, in quanto G è un prodotto amalgamato non malnormale (\mathbb{Z} non è malnormale in \mathbb{Z}^2). Inoltre, G non è un gruppo iperbolico, in quanto contiene un sottogruppo isomorfo a \mathbb{Z}^2 .

Dimostrazione della Proposizione 6.4.2

Mostreremo che, se $g_1, g_2 \in G$ non commutano, allora (sostituendo se necessario g_2 con g_2^{-1}), le potenze g_1^N e g_2^N generano un semigruppone libero in G .

Supponiamo dunque che $g = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \neq e$, per assurdo, che nè $\{g_1^N, g_2^N\}$ nè $\{g_1^N, g_2^{-N}\}$ generino un semigruppone libero in G . Questo equivale a dire che esistono due relazioni non banali $R = g_{i_1}^N g_{i_2}^N \dots g_{i_n}^N g_{k_1}^{-N} g_{k_2}^{-N} \dots g_{k_p}^{-N} = e$, dove $g_{i_r}, g_{k_s} \in \{g_1, g_2\}$ per $r = 1, \dots, n$ e $s = 1, \dots, p$, e $R' = g_{j_1}^N g_{j_2}^N \dots g_{j_m}^N g_{l_1}^{-N} g_{l_2}^{-N} \dots g_{l_q}^{-N} = e$, con $g_{j_r}, g_{l_s} \in \{g_1, g_2^{-1}\}$ per $r = 1, \dots, m$ e $s = 1, \dots, q$. Se scriviamo g_1 e g_2 come parole in S di lunghezza minore o uguale a q , allora g, R e R' si scrivono come parole in S di lunghezza minore o uguale a $L = \max\{qN(n+p), qN(m+q), 4q\}$. Sia $i > 0$ un intero abbastanza grande affinchè (G_i, S_i) e (G, S) abbiano esattamente le stesse relazioni di lunghezza minore o uguale a L . Allora gli elementi che corrispondono a g_1, g_2 in G_i tramite l'identificazione $S \sim S_i$ (i.e. se $f^i : S \rightarrow S_i$ è questa identificazione, a $s_{i_1} \dots s_{i_p} \in G$ si fa corrispondere $f^i(s_{i_1}) \dots f^i(s_{i_p}) \in G_i$), sono elementi che non commutano e le cui potenze N -esime (positive o negative) non generano un semigruppone libero in G_i , il che contraddice la proprietà FSG(N) per G_i .

Infine, dimostriamo la proprietà di transitività della commutazione. Siano $g_1, g_2, g_3 \in G$ elementi diversi dall'elemento neutro tali che $g_1 g_2 = g_2 g_1$ e $g_2 g_3 = g_3 g_2$. Scriviamo gli elementi g_i come parole in S , diciamo di lunghezza minore o uguale a q , e consideriamo un intero $i > 0$ abbastanza grande perchè (G, S) e (G_i, S_i) abbiano esattamente le stesse relazioni di lunghezza minore o uguale a $4q$. Allora gli elementi $f^i(g_1), f^i(g_2), f^i(g_3) \in G_i$ corrispondenti a g_1, g_2, g_3 soddisfano le relazioni di commutazione sopra : per la proprietà di transitività della commutazione, valida per ipotesi in G_i , si ha $f^i(g_1) f^i(g_3) = f^i(g_3) f^i(g_1)$ e quindi vale in G la relazione $g_1 g_3 = g_3 g_1$ essendo la sua lunghezza minore o uguale a $4q$. \square

Prodotti liberi e transitività della commutazione

Questo paragrafo è dedicato ad una dimostrazione diretta, per il caso dei prodotti liberi, della proprietà di transitività della commutazione.

Richiamiamo preliminarmente alcuni fatti fondamentali e fissiamo le notazioni. Si denoti con $\Gamma = G * H$ il prodotto libero di due gruppi G e H . Allora ogni elemento $\gamma \in \Gamma$ può essere scritto in modo unico come prodotto $\gamma = g_1 h_1 \dots g_k h_k$, dove per ogni $i, j = 1, \dots, k$ si ha $g_i \in G$ e $h_j \in H$, e solo g_1 e h_k possono essere uguali all'elemento neutro ($g_1 h_1 \dots g_k h_k$ è detta *forma normale di γ*). La scrittura $\gamma = a - b$ significa qui che la forma normale di γ inizia con a e finisce con b , dove $a, b \in (G \cup H) \setminus \{e\}$. Denotiamo con $G - H$ l'insieme degli elementi di Γ della forma $a - b$, dove $a \in G \setminus \{e\}$ e $b \in H \setminus \{e\}$. Gli insiemi $G - G, H - H$ e $H - G$ sono definiti in modo analogo.

Siano $\gamma_1 = a_1 - b_1$ e $\gamma_2 = a_2 - b_2$ due elementi di Γ . Se $b_1 = a_2^{-1}$ o $b_2 = a_1^{-1}$, diremo che tra γ_1 e γ_2 ci sono semplificazioni.

Théorème. *Se G e H sono gruppi con la proprietà di transitività della commutazione, il prodotto libero $\Gamma = G * H$ ha la proprietà di transitività della commutazione.*

Démonstration. Nel seguito, a meno che non venga detto esplicitamente il contrario, considereremo solo elementi del gruppo diversi dall'elemento neutro. Dobbiamo dimostrare che se $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ sono tali che $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$ e $\gamma_2\gamma_3 = \gamma_3\gamma_2$, allora $\gamma_1\gamma_3 = \gamma_3\gamma_1$. Osserviamo preliminarmente che se $\gamma \in G \setminus \{e\}$ e $\gamma' \in \Gamma$ commuta con γ , allora $\gamma' \in G$. Infatti, per l'identità delle forme normali $\gamma'\gamma = \gamma\gamma'$, possiamo escludere che $\gamma' \in G - H$, $\gamma' \in H - H$ e $\gamma' \in H - G$. Dunque $\gamma' = g - g'$ ($g, g' \in G \setminus \{e\}$). Per la commutatività si ha $\gamma g - g' = g - g'\gamma$, da cui $\gamma g = g$ e $g' = g'\gamma$ e cioè $\gamma = e$ contro le ipotesi, a meno che $\gamma' \in G$. Analogamente, se $\gamma \in H$ e γ' commuta con γ si conclude che $\gamma' \in H$. Poichè per ipotesi G e H hanno la proprietà di transitività della commutazione, questo ci permette di concludere nel caso in cui uno dei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ appartiene a un fattore del prodotto libero.

Per ogni $\gamma \in \Gamma$, denotiamo con $l(\gamma)$ il numero di lettere che compongono la forma normale di γ . Possiamo supporre che $l(\gamma_i) > 2$ per $i = 1, 2, 3$.

Siano $\gamma = a - b$ e $\gamma' = a' - b'$ elementi di Γ che commutano. Notiamo che se a e b non appartengono allo stesso fattore, ad esempio $\gamma \in G - H$, allora a meno di sostituire γ' con γ'^{-1} , possiamo supporre che $\gamma' \in G - H$. Infatti, se $\gamma' \in H - G$, $\gamma'^{-1} \in G - H$ (se γ commuta con γ' , allora γ commuta con γ'^{-1}). Il caso $\gamma' \in G - G$ (e analogamente $\gamma' \in H - H$) è escluso dalla commutatività e dall'unicità della forma normale, perchè si avrebbe $\gamma\gamma' \in G - G$ e $\gamma'\gamma \in G - H$, o $\gamma'\gamma \in H - H$, o ancora $\gamma'\gamma \in G - G$ e $l(\gamma\gamma') > l(\gamma'\gamma)$, il che implicherebbe $\gamma\gamma' \neq \gamma'\gamma$ per unicità della forma normale (questi ultimi due casi si verificano se nella forma normale di $\gamma'\gamma$ uno dei due elementi si semplifica completamente).

Se a e b appartengono allo stesso fattore, cioè $\gamma \in G - G$ o $\gamma \in H - H$, allora con argomenti analoghi si prova che anche $\gamma' \in G - G$ o $\gamma' \in H - H$ rispettivamente.

Se $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$ sono tali che $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$ e $\gamma_2\gamma_3 = \gamma_3\gamma_2$, possiamo quindi ridurci ai seguenti due casi :

$$(1) \quad \gamma_1 = g_1 - h_1, \quad \gamma_2 = g_2 - h_2, \quad \gamma_3 = g_3 - h_3;$$

$$(2) \quad \gamma_1 = g_1 - g'_1, \quad \gamma_2 = g_2 - g'_2, \quad \gamma_3 = g_3 - g'_3$$

(qui si intende che $g_i, g'_i \in G$ e $h_i \in H$ per $i = 1, 2, 3$).

Partiamo dal caso (1). Una successione $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ è n -periodica per qualche $n \in \mathbb{N}$ se per ogni $i \in \mathbb{N}^*$, $u_{i+n} = u_i$. Se $\gamma_1 = a_1 \dots a_n$ e $\gamma_2 = b_1 \dots b_m$ sono forme normali, consideriamo le sequenze periodiche (rispettivamente n -periodica e m -periodica) definite da $u_i = a_i$, dove $1 \leq i \leq n$, e $v_j = b_j$, dove $1 \leq j \leq m$. Poichè γ_1 e γ_2 commutano per ipotesi, per ogni $p, q \in \mathbb{N}$ l'identità delle forme normali di $\gamma_1^p \gamma_2^q$ e $\gamma_2^q \gamma_1^p$ implica che $u_i = v_i$ per ogni $i \leq \inf\{np, mq\}$, da cui $u_i = v_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$ (in quanto p e q possono essere scelti arbitrariamente grandi). Le sequenze u_i e v_i sono allora contemporaneamente n -periodiche e m -periodiche, e quindi k -periodiche, dove k è il massimo comune divisore di m e n (se $jn = lm + k$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha $v_{k+i} = v_{lm+k+i} = v_{jn+i} = v_i$, e analogamente $u_{k+i} = u_i$). Questo dimostra che $\gamma_1 = (a_1 \dots a_k)^{n/k}$ e $\gamma_2 = (a_1 \dots a_k)^{m/k}$. Analogamente, se $\gamma_3 = c_1 \dots c_s$, la commutatività di γ_2 e γ_3 implica $\gamma_2 = (a_1 \dots a_r)^{m/r}$ e $\gamma_3 = (a_1 \dots a_r)^{s/r}$ (dove r è il massimo comune divisore di m e s). Dunque la sequenza $(v_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ è contemporaneamente k -periodica e r -periodica. Lo stesso argomento di prima ci dà allora $a_1 \dots a_r = (a_1 \dots a_d)^{r/d}$ e $a_1 \dots a_k = (a_1 \dots a_d)^{k/d}$ (dove d è il massimo comune divisore di r e k) e questo dimostra che $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono potenze di uno stesso elemento di Γ , e quindi $\gamma_1 \gamma_3 = \gamma_3 \gamma_1$.

Analizziamo ora il caso (2). Se tra γ_1 e γ_2 ci sono semplificazioni, allora $\gamma_2 = g_1'^{-1} - g_1^{-1}$ e $\gamma_2^{-1} = g_1 - g_1'$ (questo deriva dal fatto che $l(\gamma_1 \gamma_2) = l(\gamma_2 \gamma_1)$). Se anche tra γ_2 e γ_3 ci sono semplificazioni, allora $\gamma_3 = g_1 - g_1'$ e, sostituendo γ_2 con γ_2^{-1} ci si riduce a considerare il caso $\gamma_i = g - g'$, per $i = 1, 2, 3$ (sostituzioni di questo tipo sono lecite in quanto, se γ commuta con γ' , allora γ commuta anche con γ'^{-1}). Se tra γ_2 e γ_3 non ci sono semplificazioni, l'unicità della forma normale implica che $g_3 = g_1$ e $g_3' = g_1'$, e concludiamo (si noti che $l(\gamma_i) \geq 3$, altrimenti $\gamma_i \in G$ e abbiamo concluso). Lo stesso argomento si può applicare nel caso in cui nè tra γ_1 e γ_2 , nè tra γ_2 e γ_3 ci sono semplificazioni e, eventualmente sostituendo i γ_i con i loro inversi, possiamo ancora supporre che $\gamma_i = g - g', i = 1, 2, 3$.

Ora, se $g' \neq g^{-1}$, sostituendo γ_i con $\gamma_i' = g' \gamma_i g'^{-1}$ per $i = 1, 2, 3$ si ha che $\gamma_1' \gamma_2' = \gamma_2' \gamma_1'$, $\gamma_2' \gamma_3' = \gamma_3' \gamma_2'$ e $\gamma_i' \in G - H$: ci siamo quindi ridotti al caso (1) e concludiamo che $\gamma_1' \gamma_3' = \gamma_3' \gamma_1'$, da cui $\gamma_1 \gamma_3 = \gamma_3 \gamma_1$.

Supponiamo ora $g' = g^{-1}$ e ragioniamo per induzione su $m_0 = \min\{l(\gamma_1), l(\gamma_2), l(\gamma_3)\}$, mostrando che la conclusione del teorema è vera se $m_0 = 3$, e che se è vera per $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3' \in \Gamma$ tali che $\min\{l(\gamma_1'), l(\gamma_2'), l(\gamma_3')\} < \min\{l(\gamma_1), l(\gamma_2), l(\gamma_3)\}$, allora è vera per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Se $m_0 = 3$, possiamo supporre che $l(\gamma_1) = 3$: sostituendo γ_i con $\gamma_i' = g^{-1} \gamma_i g$ per $i = 1, 2, 3$ siamo condotti a studiare il caso $\gamma_1' = h \in H$, $\gamma_2' h = h \gamma_2'$, $\gamma_3' h = h \gamma_3'$ da cui, come abbiamo visto prima, si conclude (in quanto $\gamma_2', \gamma_3' \in H$ e H ha la proprietà di transitività della commutazione).

Supponiamo ora $m_0 > 3$. In questo caso, per $i = 1, 2, 3$ gli elementi $\gamma_i' =$

$g^{-1}\gamma_i g \in H - H$ sono tali che $\gamma'_1\gamma'_2 = \gamma'_2\gamma'_1$ e $\gamma'_2\gamma'_3 = \gamma'_3\gamma'_2$. L'ipotesi induttiva, poichè $\min\{l(\gamma'_1), l(\gamma'_2), l(\gamma'_3)\} < \min\{l(\gamma_1), l(\gamma_2), l(\gamma_3)\}$, implica $\gamma'_1\gamma'_3 = \gamma'_3\gamma'_1$ da cui, coniugando, si ottiene $\gamma_1\gamma_3 = \gamma_3\gamma_1$.

□

E' da notare che, poichè abbiamo dimostrato che in un prodotto libero $\Gamma = G * H$, il centralizzatore di un elemento $\gamma \neq e$ è ciclico o contenuto nel coniugato di un fattore (cfr. Proposizione 6.2.1), questo implica, come abbiamo visto nella dimostrazione della Proposizione 6.2.3 che $G * H$ ha la proprietà NAS se G e H hanno tale proprietà.

Chapitre 7

Alcuni risultati di finitezza per gruppi con entropia algebrica limitata

In questo capitolo presentiamo alcuni risultati di finitezza sui gruppi marcati (Corollario 7.0.6, Corollario 7.0.9, Teorema 7.0.12, Corollario 7.0.13). Parte di questi risultati che, in particolare, sono applicabili ai gruppi fondamentali delle varietà Riemanniane compatte e ai gruppi iperbolici senza torsione, è già apparsa in [Z]. Partendo dal lemma di Margulis generalizzato (Teorema 6.1.2 e Teorema 6.1.3), valido nella categoria degli spazi metrici misurati, che comprende non solo le varietà Riemanniane (oggetto del Lemma classico) ma anche spazi di lunghezza non Riemanniani come i grafi, utilizzeremo in particolare il fatto che i metodi descritti nel Capitolo 1 sono applicabili per lavorare sul grafo di Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ di un gruppo finitamente generato G associato a un sistema generatore fissato S , che è uno spazio di lunghezza misurato connesso.

Si ricordi che un gruppo G si dice *finitamente generato* se esiste un insieme finito $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subseteq G$ tale che ogni elemento $g \in G$ si può scrivere come prodotto di elementi di S (per semplicità, salvo avviso contrario, supporremo sempre che S sia *simmetrico*, cioè che S contenga gli s_i e i loro inversi, e che $e \notin S$). Il gruppo G può essere dotato di una struttura di spazio metrico definendo per ogni $g_1, g_2 \in G$ la distanza $d_S(g_1, g_2)$ come il più piccolo intero $n \geq 0$ tale che $g_1^{-1}g_2$ si può scrivere come prodotto di n elementi di S . La distanza d_S è detta *metrica delle parole associata a S* . Lo spazio metrico (G, d_S) può essere isometricamente immerso nel grafo di Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ (che definiremo più avanti nelle dimostrazioni a pag. 131) e, in questo modo, per ogni sottogruppo Γ di G , l'azione naturale di Γ su G per traslazioni a sinistra si estende a un'azione isometrica su $\mathbb{C}(G, S)$, e le relazioni tra Γ e G possono

essere interpretate come relazioni tra le proprietà dinamiche dell'azione di Γ e le proprietà geometriche del grafo associato a G .

Nel nostro contesto, Γ sarà un sottogruppo di indice finito in G dotato della proprietà $FSG(N)$, della proprietà NAS e della proprietà di transitività della commutazione (Definizione 6.1.1). Per semplificare le notazioni, introduciamo le seguenti definizioni.

Définition 7.0.3. *Sia $N > 0$ un intero. Un gruppo Γ dotato della proprietà $FSG(N)$ e della proprietà NAS si dice gruppo N -non abeliano.*

Définition 7.0.4. *L'entropia $Ent_S(G)$ di un gruppo G rispetto a un sistema generatore S è il limite $\text{Inf} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} f_S(n)}{n}$, dove $f_S(n)$ denota il numero degli elementi di G che si possono scrivere con meno di n elementi di S . Denoteremo con $Ent_{alg}(G)$ l'estremo inferiore di $Ent_S(G)$ al variare di S tra tutti i sistemi generatori di G .*

Quest'ultima definizione è motivata dal fatto che considereremo gruppi a entropia positiva limitata superiormente da una funzione di N .

Il teorema che segue è il risultato principale in questo capitolo :

Théorème 7.0.5. *Sia G un gruppo finitamente generato e sia Γ un suo sottogruppo N -non abeliano con la proprietà di transitività della commutazione. Allora :*

- (i) *per ogni sistema generatore S di G , si ha $Ent_S(G) > 0$;*
- (ii) *per ogni sistema generatore S di G , esiste $g \in G$ tale che (se $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{e\}$)*

$$d_S(e, g\Gamma^*g^{-1}) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{Ent_S(G)} - 1;$$

- (iii) *se Γ ha indice finito d in G , allora ogni sistema generatore S di G tale che $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ contiene al più $d - 1$ elementi ;*
- (iv) *per ogni sistema generatore S , si ha $Ent_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\max(d-k, 0)+3}$ dove d è l'indice di Γ in G e k è il numero di elementi di S . In particolare, si ha $Ent_{alg}(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\max(d, 3)}$ (si ha $Ent_{alg}(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\max(d-1, 3)}$ se, inoltre, G è privo di torsione).*

Remarques.

- (a) Se Γ è un gruppo non abeliano con la proprietà $FSG(N)$ per qualche intero $N > 0$, allora per ogni suo sistema generatore S si ha $Ent_S(\Gamma) \geq \frac{\text{Log}2}{N}$ (vedi pag. 134 per la dimostrazione) . Ad esempio, Γ può essere un gruppo α -iperbolico per qualche $\alpha \geq 0$ (rispetto a un sistema di generatori S) privo

di torsione e non elementare, e in questo caso N può essere stimato esplicitamente in funzione di α e della cardinalità di S (cfr. Proposizione 6.3.5). I prodotti amalgamati malnormali $\Gamma = A *_C B$, dove A, B sono gruppi privi di torsione con la proprietà FSG(N) (si veda la Proposizione 6.2.3), forniscono un altro esempio.

- (b) Le ipotesi del Teorema 7.0.5 implicano automaticamente che Γ è privo di torsione (Osservazioni 6.1.4), mentre G può contenere elementi di torsione. Questa è la ragione per cui nel punto (iv) sono considerati i due casi.
- (c) Ci sono in letteratura risultati classici dove il numero di generatori di un gruppo Γ è maggiorato da una costante universale ([B-K], Proposizione 2.5.6). Ad esempio, se $\Gamma = \pi_1(M^n)$ è il gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana completa n -dimensionale di curvatura sezionale non negativa, si ha che Γ ammette un sistema generatore di cardinalità minore o uguale a $5^{\frac{1}{2}n}$; se M^n è compatta con diametro $diam(M^n) \leq D/2$ e curvatura sezionale $K \geq -K_0^2$ per qualche $K_0 > 0$, allora Γ ammette un sistema generatore di cardinalità minore o uguale a $2[3 + 2cosh(K_0D)^{\frac{1}{2}n}]$.
- (d) I gruppi fondamentali delle varietà compatte localmente simmetriche di tipo non compatto e rango 1 formano, tra gli esempi di gruppi che contengono un sottogruppo N -non abeliano di indice finito, una classe di particolare interesse. Più precisamente, si dimostra che tali gruppi contengono un sottogruppo δ -spesso di indice finito per ogni $\delta > 0$ ([B-C-G], Lemma 1.6) che è quindi N -non abeliano per ogni $N \geq 4/\delta$.

La dimostrazione deriva dal fatto che i gruppi in questione sono residualmente finiti (per un teorema di Mal'cev, [Mal]). Stabilire se sia possibile generalizzare questa proprietà ai gruppi fondamentali di varietà (non localmente omogenee) a curvatura sezionale negativa è un problema aperto.

- (e) Si noti che, nella disuguaglianza (ii) del Teorema 7.0.5, il gruppo G può essere un'estensione finita o infinita di Γ . Nel caso in cui Γ sia normale, si ottiene $d_S(e, \Gamma^*) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}_S(G)} - 1$.
- (f) Si può confrontare la stima (iv) del Teorema 7.0.5 sull'entropia algebrica con il risultato più generale di P. B. Shalen e P. Wagreich ([Sh-W]) : dati un gruppo finitamente generato G e un sottogruppo Γ di indice finito d in G , si ha $\text{Ent}_{alg}(G) \geq \frac{1}{2d-1} \text{Ent}_{alg}(\Gamma)$. Essendo il nostro contesto meno generale, il Teorema 7.0.5 (iv) fornisce un limite inferiore più esplicito per l'entropia di G con una migliore dipendenza dall'indice d (si veda anche il Teorema C.0.14 dell'Appendice C per una stima leggermente più debole).

Remarques. E' possibile avere una successione di gruppi $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, G_n contiene un sottogruppo Γ_n N -non abeliano con la proprietà di transitività della commutazione (ma non di indice finito), e tale

che $\lim_{n \rightarrow +\infty} Ent_{S_n}(G_n) = 0$ per una scelta appropriata di S_n . (La descrizione di questo esempio è a pag. 173 ed è tale che il sottogruppo Γ_n è un gruppo libero non abeliano per ogni $n \in \mathbb{N}$.)

Torniamo ora ai gruppi marcati (Definizione 6.4.1). Un *isomorfismo marcato* tra due gruppi marcati (G, S) e (G', S') è un isomorfismo di gruppi $\phi : G \rightarrow G'$ tale che $\phi(S) = S'$. Il sottogruppo delle relazioni di (G, S) , già definito a pag. 116 come la totalità delle espressioni della forma $s_1 \dots s_k$ in S che rappresentano l'elemento neutro, è un sottogruppo normale del gruppo libero $\mathbb{F}(S)$ generato da S , che denotiamo N_{rel} .

Sia R un sottoinsieme del sottogruppo N_{rel} , tale che N_{rel} è generato da tutti gli elementi della forma grg^{-1} , al variare di $r \in R$ e $g \in \mathbb{F}(S)$. Allora la coppia (S, R) determina univocamente il gruppo G ed è detta *presentazione di G* (cfr. Definizione 1, pag. 117 in [H1]). Scriveremo $G = \langle S | R \rangle$ utilizzando una notazione classica. Se S e R sono finiti, G si dice *finitamente presentato*. D'ora in poi considereremo solo gruppi finitamente presentati.

Dati $N, d, N_0 \in \mathbb{N}$, denotiamo con $g(N, d, N_0)$ come l'insieme dei gruppi marcati (G, S) che soddisfano alle proprietà seguenti :

- (i) *G contiene almeno un sottogruppo N -non abeliano (di indice minore o uguale a d) con la proprietà di transitività della commutazione,*
- (ii) *esiste una presentazione $\langle S | R \rangle$ di G (dove S è il sistema generatore assegnato) tale che la lunghezza di ogni elemento $r \in R$ (per la metrica delle parole d_S) sia minore o uguale a N_0 .*

E' da osservare che per ogni $N \geq 1, d \geq 1, N_0 \geq 0$, l'insieme $g(N, d, N_0)$ è non vuoto : infatti, esso contiene i gruppi liberi di rango $k > 1$; inoltre, per ogni $N \geq 1$, ogni $d \geq 1$ e ogni $N_0 \geq 3$, contiene anche alcuni gruppi fondamentali di varietà Riemanniane compatte con curvatura sezionale $K \leq -1$. Infatti, per il teorema di Mal'cev ogni varietà Riemanniana localmente simmetrica X che soddisfa $K \leq -1$ ammette un rivestimento \bar{X} compatto con raggio d'inietività maggiore o uguale a 4. Il gruppo fondamentale $\pi_1(\bar{X})$ di \bar{X} ha allora la proprietà FSG(1), la proprietà di transitività della commutazione e la proprietà NAS (Proposizione 5.3.12) e si identifica a un sottogruppo di indice finito d del gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ di X . Questo prova che $\pi_1(X)$ soddisfa la condizione (i) della definizione di $g(N, d, N_0)$, per $N = 1$. Inoltre, grazie a un teorema di M. Gromov (Proposizione B.0.8), $\pi_1(X)$ ammette una presentazione con relazioni di lunghezza minore o uguale a 3, e quindi $\pi_1(X) \in g(1, d, 3)$.

Per ottenere i nostri risultati di finitezza, applicheremo ai gruppi iperbolici e ai gruppi fondamentali di varietà il seguente corollario del Teorema 7.0.5, nel quale abbiamo denotato $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Corollaire 7.0.6. *Per $N, d, N_0 \in \mathbb{N}^*$ arbitrari, il numero di gruppi marcati (G, S) in $g(N, d, N_0)$ che soddisfano $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{3}$ è (a meno di isomorfismo marcato) limitato superiormente da $(d-3)_+ 2^{(d-1)(d-2)^{N_0}}$. Di conseguenza, o $Ent_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{3}$ per ogni $(G, S) \in g(N, d, N_0)$, oppure $\inf_{(G,S) \in g(N,d,N_0)} [Ent_S(G)]$ è raggiunto su qualche $(G_0, S_0) \in g(N, d, N_0)$.*

Remarques. E' da rilevare (cfr. Appendice C, pag. 173) che l'insieme dei gruppi marcati (G, S) che contengono un sottogruppo N -non abeliano (non necessariamente di indice finito) con la proprietà di transitività della commutazione e tali che $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{3}$, non è finito.

Applicazioni ai gruppi iperbolici

Abbiamo definito i gruppi iperbolici nel Paragrafo 2.3. Per tale classe di gruppi, sussistono una serie di questioni aperte, che ora elenchiamo. I nostri risultati si inquadrano nel contesto di tali questioni :

- (1) ([G]) Esiste una costante universale $c > 0$ tale che $Ent_S(G) \geq c$ per ogni gruppo iperbolico non elementare G e ogni sistema generatore S ?
- (2) ([Sa]) I gruppi iperbolici realizzano l'entropia minimale per qualche sistema di generatori?

Riprenderemo questi argomenti per una discussione un po' più dettagliata nell'Appendice C, dove considereremo le stesse questioni ma relativamente a diverse classi di gruppi come i gruppi liberi, i prodotti liberi, i prodotti amalgamati, le estensioni HNN, i gruppi con infiniti ends etc. Su queste stesse classi di gruppi, così come su quelle dei gruppi risolubili e dei gruppi iperbolici, considereremo anche una questione (posta da M. Gromov e fortemente legata alle due precedenti) che riguarda stabilire se la crescita esponenziale implichi la crescita esponenziale uniforme. Vale a dire, ci si chiede se l'essere $Ent_S(G) > 0$ per ogni sistema generatore S di un gruppo G implica $Ent_{alg}(G) > 0$. Sempre nell'ambito di queste idee, e anche al fine di sottolineare che il problema (1) è considerato più difficile rispetto a quest'ultima questione, riporteremo, alla fine dell'Appendice C, l'esempio di una successione $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di gruppi a crescita esponenziale uniforme tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} Ent_{alg}(\Gamma_n) = 0$.

Un gruppo iperbolico si dice *non elementare* se non è finito e non contiene un sottogruppo di indice finito isomorfo a \mathbb{Z} . Se un gruppo iperbolico è privo di torsione, esso è elementare se e solo se è isomorfo a \mathbb{Z} ([Wa], Lemma 4.1). Per questi gruppi, vale il risultato di finitezza espresso nel Lemma seguente. Premettiamo che, in un qualunque gruppo G , se S e Σ sono due sistemi

generatori (simmetrici) di G , li diremo equivalenti (scrivendo $S \sim \Sigma$) se esiste un isomorfismo $G \rightarrow G$ che manda S bigettivamente su Σ .

Lemma 7.0.7. *Sia G un gruppo iperbolico non elementare e privo di torsione. Per ogni numero reale $\alpha > 0$ e ogni $p \in \mathbb{N}$, esistono al più $2^{(p^{(12\alpha+9)})}([p/2]-1)_+$ sistemi generatori (simmetrici) S di G (modulo la relazione $S \sim \Sigma$) con $\sharp(S) \leq p$ e tali che G sia α -iperbolico rispetto a S (qui si denota con $[x]$ il più grande intero minore o uguale a x).*

Remarques. Le ipotesi del Lemma implicano che $p > 3$. (Infatti, essendo S simmetrico, se $p \leq 3$ e se G è privo di torsione, allora S si scrive come $\{s, s^{-1}\}$ per qualche $s \in G$, e G è isomorfo a \mathbb{Z})

Dal Teorema 7.0.5 (iii) combinato con il Lemma sopra si ottiene direttamente il seguente

Corollaire 7.0.8. *Siano $d, N \in \mathbb{N}$ interi positivi arbitrari e sia G un'estensione finita di indice minore o uguale a d e priva di torsione di un gruppo N -non abeliano con la proprietà di transitività della commutazione. Allora l'insieme delle classi di equivalenza (rispetto alla relazione " \sim " definita prima) di sistemi generatori S di G tali che :*

- (a) G è α -iperbolico rispetto a S ;
- (b) $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{3}$

è un insieme finito con al più $2^{((d-1)^{(12\alpha+9))}([(d-3)/2])_+}$ elementi.

Démonstration. La disuguaglianza (b) insieme a (iii) del Teorema 7.0.5 assicura che il numero degli elementi di S è maggiorato da $d-1$. Il gruppo G contiene un sottogruppo N -non abeliano, quindi esso è non abeliano e quindi è non elementare. L'ipotesi (a) permette allora di applicare (per $p = d-1$) il Lemma 7.0.7 e concludere. \square

Remarques. *Se $d \leq 4$ si ha sempre $Ent_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{3}$ (cfr. Teorema 7.0.5 (iv)).*

L'ipotesi di assenza di torsione per il gruppo G non è realmente necessaria nel Lemma 7.0.7 e nel Corollario 7.0.8 (si confronti con il successivo Corollario 7.0.9). Inoltre, sia il lemma che il corollario si riferiscono a differenti sistemi generatori di un gruppo G fissato. In quanto segue considereremo gruppi diversi dotati di sistemi generatori diversi. Per questa ragione lavoreremo nella categoria dei gruppi marcati e applicheremo il Corollario 7.0.6.

Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale. *Un gruppo marcato (G, S) si dice α -iperbolico se il gruppo G è α -iperbolico rispetto alla distanza algebrica associata a S .*

Come conseguenza del Corollario 7.0.6 si ha :

Corollaire 7.0.9. *Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale e siano $N, d \in \mathbb{N}$ interi positivi. Si denoti con $h(\alpha, N, d)$ l'insieme dei gruppi marcati α -iperbolici (G, S) , che sono estensioni finite (di indice minore o uguale a d) di almeno un gruppo N -non abeliano che soddisfa la proprietà di transitività della commutazione. Allora, tranne che per un numero finito di coppie $(G, S) \in h(\alpha, N, d)$, si ha che $Ent_S(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{Log^2}{3}$.*

Si osservi che l'insieme $h(\alpha, N, d)$ è non vuoto per ogni $\alpha \geq 0, N \geq 1$ e $d \geq 1$, in quanto contiene i gruppi liberi di rango $k > 1$.

Inoltre, si osservi che l'insieme dei gruppi marcati appartenenti a $h(\alpha, N, d)$ e tali che $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{Log^2}{3}$ può eventualmente essere vuoto.

Corollaire 7.0.10. *Siano $A, \alpha \geq 0$ numeri reali e sia d un intero positivo. Sia $h(A, \alpha, d)$ l'insieme dei gruppi marcati A -iperbolici (G, S) che sono estensioni finite (di indice minore o uguale a d) di almeno un gruppo Γ iperbolico non elementare e senza torsione. Se Γ è α -iperbolico rispetto a un sistema generatore Σ fissato, allora tutti i $(G, S) \in h(A, \alpha, d)$ tranne un numero finito verificano $Ent_S(G) \geq \frac{Log^2}{3N}$, dove N è una costante dipendente solo da α e dalla cardinalità di Σ .¹*

Remarques. A può essere scelto arbitrariamente grande rispetto ad α , e α può essere scelto come il minimo, per tutti i sistemi generatori Σ di Γ di cardinalità $\sharp(\Sigma)$ maggiorata da una costante reale $c > 0$, delle costanti d'iperbolicità di (Γ, d_Σ) ; in tal caso N si scrive come una funzione che dipende solo da c e α .

Corollaire 7.0.11. *Sia $\alpha \geq 0$, e sia Γ un gruppo senza torsione che sia α -iperbolico non elementare rispetto a un suo sistema di generatori Σ . Sia G un'estensione finita di Γ . Allora, per ogni $A \geq 0$, si verifica una delle seguenti due possibilità :*

(i) *l'estremo inferiore di $Ent_S(G)$, al variare di S tra tutti i sistemi generatori di G tali che G sia A -iperbolico rispetto a S , viene raggiunto,*

oppure

(ii) *per ogni sistema generatore S di G tale che G sia A -iperbolico rispetto a S , si ha $Ent_S(G) \geq \frac{Log^2}{3N}$, dove N è la stessa costante che appare nel Corollario 7.0.10.*

¹Più precisamente, $N = ([328\alpha] + 1) \max\{b_{64\alpha}!, b_{8\alpha}^2!\}$, dove per ogni $r > 1$ si ha $\max\{1 + \sharp(\Sigma), 2 \cdot [r] - 1\} \leq b_r \leq \sharp(\Sigma)^{([r]+1)}$ (cfr. Prop. 6.3.5 e Osservazioni successive).

Applicazioni ai gruppi fondamentali di varietà

Sia ora (X, g) una varietà Riemanniana compatta e sia (\tilde{X}, \tilde{g}) il suo rivestimento universale Riemanniano, dotato della metrica sollevata \tilde{g} . Sia $\mu_{\tilde{g}}$ la misura Riemanniana canonicamente associata a \tilde{g} . Ricordiamo che l'entropia di volume $Ent_{vol}(g)$ di (X, g) è definita (pag. 68) come il limite inferiore $Inf \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{Log \mu_{\tilde{g}}(B(\tilde{x}, R))}{R}$, dove $B(\tilde{x}, R)$ denota la bolla centrata nel punto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e di raggio R rispetto alla distanza $d_{\tilde{g}}$ associata a \tilde{g} (il limite non dipende dalla scelta del punto \tilde{x}).

Possiamo ora enunciare un risultato che è un'applicazione geometrica dei risultati appena visti.

Théorème 7.0.12. *Siano N e d interi positivi arbitrari e sia $\chi(N, d)$ l'insieme delle varietà differenziabili compatte X che soddisfano le seguenti proprietà :*

- (i) $\pi_1(X)$ contiene un sottogruppo N -non abeliano di indice minore o uguale a d che soddisfa la proprietà di transitività della commutazione;
- (ii) esiste una metrica g su X tale che :

$$diam(g) \cdot Ent_{vol}(g) < \frac{1}{N} \cdot \frac{Log 2}{6}.$$

Allora l'insieme $\chi(N, d)$ contiene un numero finito (minore o uguale a $(d-3)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$) di 1-tipi di omotopia. Inoltre il primo numero di Betti di ogni varietà $X \in \chi(N, d)$ soddisfa $b_1(X) \leq d-1$.

Ne segue il :

Corollaire 7.0.13. *Sia $\bar{\chi}(\delta, d)$ l'insieme delle varietà differenziabili compatte X che soddisfano, per valori arbitrari di $\delta \in (0, +\infty)$ e $d \in \mathbb{N}^*$, le proprietà seguenti :*

- (i) *X ammette un rivestimento finito X' (di indice minore o uguale a d) che possa essere dotato di una metrica Riemanniana g' tale che la curvatura sezionale $K_{g'}$ e il raggio di iniettività $\text{inj}(X', g')$ soddisfino $K_{g'} \leq -1$ e $\text{inj}(X', g') \geq \delta$;*
- (ii) *X ammette una metrica Riemanniana g di curvatura sezionale negativa tale che*

$$\text{diam}(g) \cdot \text{Ent}_{\text{vol}}(g) \leq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{6}.$$

Allora l'insieme $\bar{\chi}(\delta, d)$ contiene un numero finito di tipi di omotopia, limitato superiormente da $(d - 4)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$ e, per ogni elemento $X \in \bar{\chi}(\delta, d)$, si ha $b_1(X) \leq \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$.

Remarques.

- (a) Le metriche g' e g possono essere scelte indipendentemente.
- (b) L'enunciato del Corollario 7.0.13 resta vero anche quando non si suppone che la metrica g sia di curvatura sezionale negativa. In questo caso, solo il numero di 1-tipi di omotopia è finito. Inoltre, per i limiti sul numero di 1-tipi di omotopia e sul primo numero di Betti otteniamo rispettivamente $(d - 3)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$ e $(d - 1)$.
- (c) L'ipotesi (ii) del Corollario non dipende dalla dimensione della varietà X . Questo significa che, per ogni varietà n -dimensionale a curvatura negativa (X^n, g) che soddisfi l'ipotesi (i), la disuguaglianza

$$\text{diam}(X^n, g) \cdot \text{Ent}_{\text{vol}}(X^n, g) \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \cdot \frac{\text{Log}2}{6}$$

vale in tutte le dimensioni $n \in \mathbb{N}$, eccetto che per un numero finito. In particolare, se $n \geq 4$ e X^n è una varietà localmente simmetrica compatta di rango 1 di tipo non compatto (i.e. a curvatura negativa) siamo in grado di dare un limite inferiore per il volume $\text{vol}(X^n)$ (l'entropia di queste varietà è nota e il loro diametro è limitato in termini del volume). E' da ricordare, a questo riguardo, che se n è dispari, applicando la formula di Allendoerfer-Chern-Weil, i possibili valori per i volumi di queste varietà (per esempio, nel caso iperbolico reale) formano un sottoinsieme di $\mathbb{N}^* \omega_n$ (dove $\omega_n = \text{Vol}(S^n)$). E' anche da segnalare il seguente problema, non ancora risolto : è possibile,

utilizzando la stima sopra, mostrare che i primi valori possibili per i volumi $\omega_n, 2\omega_n$ etc. non si ottengono per tutte le dimensioni n eccetto che per un numero finito?

Veniamo ora alle dimostrazioni dei risultati enunciati finora.

Dimostrazione del Teorema 7.0.5.

Sia $\mathbb{C}(G, S)$ il grafo di Cayley di G rispetto a S , ossia il grafo che ha per vertici gli elementi di G e tale che due elementi $g_1, g_2 \in G$ sono congiunti da un lato se e solo se $g_1^{-1}g_2 \in S$. Dotiamo $\mathbb{C}(G, S)$ della struttura di spazio metrico misurato identificando ogni lato (dal punto di vista metrico e della misura) con l'intervallo chiuso $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ (tale identificazione si chiama anche *parametrizzazione*), e definendo la distanza d tra due punti come l'estremo inferiore delle lunghezze dei cammini che li uniscono. In questo modo, $\mathbb{C}(G, S)$ è uno spazio di lunghezza misurato completo, localmente compatto e connesso, e tale che le bolle di raggio positivo hanno misura positiva. (Per i dettagli su questa costruzione, si veda l'Appendice A, o anche [H1], pag. 76).

Su $\mathbb{C}(G, S)$ è definita un'azione canonica del sottogruppo $\Gamma \subseteq G$ che ora descriviamo : siano $x \in \mathbb{C}(G, S)$ e $\gamma \in G$. Se $[g_1, g_2]$ è un lato di $\mathbb{C}(G, S)$ che contiene x , allora definiamo γx come il punto del lato $[\gamma g_1, \gamma g_2]$ che corrisponde nell'intervallo $[0, 1]$ allo stesso punto cui corrisponde x in $[g_1, g_2]$, una volta fissate due parametrizzazioni $h_0 : [0, 1] \rightarrow [g_1, g_2]$ e $h_\gamma : [0, 1] \rightarrow [\gamma g_1, \gamma g_2]$ tali che $h_0(0) = g_1$ e $h_\gamma(0) = \gamma g_1$. (Si noti che, se $x \in G$, $\gamma \cdot x$ corrisponde all'usuale moltiplicazione nel gruppo.) Per dimostrare che tale azione soddisfa le ipotesi del Teorema 6.1.3 ci serviamo del seguente

Lemme. *Sia $N \in \mathbb{N}$ un intero positivo fissato. Sia G un gruppo finitamente generato e sia Γ un sottogruppo N -non abeliano di G con la proprietà di transitività della commutazione. Sia S un sistema generatore finito di G e sia $\mathbb{C}(G, S)$ il grafo di Cayley di G rispetto a S , dotato della distanza canonica d e della corrispondente misura 1-dimensionale μ . Allora, l'azione canonica di Γ su $\mathbb{C}(G, S)$ è libera (i.e. lo stabilizzatore di ogni punto di X è banale) e l'orbita $\Gamma \cdot x$ di ogni punto $x \in X$ è discreta. Quindi, Γ è un sottogruppo discreto di $\text{Isom}(\mathbb{C}(G, S), d, \mu)$.*

Démonstration. Mostriamo che l'azione di Γ è libera. Supponiamo che $x \in \mathbb{C}(G, S)$ e $\gamma \in \Gamma$ siano tali che $\gamma \cdot x = x$. Allora, se $[g, g']$ è un lato di $\mathbb{C}(G, S)$ che contiene x , abbiamo $[g, g'] = [\gamma g, \gamma g']$: questo implica, per definizione di lato, che $g = \gamma g$, oppure $g = \gamma g'$ e $g' = \gamma g$. Nel primo caso, abbiamo $\gamma = e$; altrimenti dovremmo avere $\gamma^2 = e$, che è impossibile (cfr. Osservazioni 6.1.4). Per vedere che l'orbita di Γ è discreta, si consideri un punto $x \in \mathbb{C}(G, S)$ arbitrario e si supponga per assurdo che l'orbita $\Gamma \cdot x$ ammetta un punto di

accumulazione $y \in \mathbb{C}(G, S)$. Allora si trova una sequenza $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi distinti di $\Gamma \setminus \{e\}$ con la proprietà che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $N(\varepsilon)$ tale che $n \geq N(\varepsilon)$ implica $d(x, \gamma_n \cdot x) < \varepsilon$. Se $x \in G$, questo è impossibile perchè $d(x, \gamma_n x) \geq 1$. Supponiamo ora che il punto x giaccia all'interno di un lato $[g, g']$ di $\mathbb{C}(G, S)$: allora, per $\varepsilon < \min\{d(x, g), d(x, g')\}$ e $n \geq N(\varepsilon)$, il punto $\gamma_n \cdot x$ dovrebbe appartenere ancora a $[g, g']$. Questo significa che $[g, g'] = [\gamma_n g, \gamma_n g']$, il che per lo stesso argomento di prima implica $\gamma_n = e$. L'ultima affermazione del lemma è conseguenza diretta della Proposizione 5.4.13. \square

Conclusione della dimostrazione del Teorema 7.0.5

Sia $B_d(e, R)$ la bolla aperta in $\mathbb{C}(G, S)$ di centro e e raggio $R > 0$ definita rispetto alla distanza d , la cui misura è, per definizione, uguale alla somma $\sum \mu(B_d(e, R) \cap [g, h])$ calcolata sull'insieme dei lati $[g, h]$ di $\mathbb{C}(G, S)$, ed è limitata superiormente (risp. inferiormente) dalla cardinalità dell'insieme A dei lati che incontrano $B_d(e, R)$ (risp. dalla cardinalità dell'insieme B dei lati interamente contenuti in $B_d(e, R)$). Si ha allora

$$\#(B_{d_S}(e, R)) - 1 \leq \mu[B_d(e, R)] \leq k \cdot \#(B_{d_S}(e, R))$$

dove k denota la cardinalità di S e $B_{d_S}(e, R)$ è la bolla aperta in G di centro e e raggio R rispetto alla metrica delle parole d_S . La disuguaglianza a destra è vera perchè la funzione $B_{d_S}(e, R) \times S \rightarrow A$ che invia la coppia (g, s) nel lato $[g, gs]$ è suriettiva (essendo S simmetrico); la disuguaglianza a sinistra perchè il numero dei lati in ogni grafo connesso finito è maggiore o uguale al numero di vertici diminuito di uno, quindi $\#(B) \geq \#(B_{d_S}(e, R)) - 1$.

Ne deriva che $Ent_S(G) = Ent(\mathbb{C}(G, S), d, \mu)$.

Applicando il Teorema 6.1.3 all'azione di Γ su $X = \mathbb{C}(G, S)$, si ha $Ent_S(G) = Ent(\mathbb{C}(G, S), d, \mu) > 0$, il che dimostra (i) del Teorema 7.0.5 e ci garantisce che esiste $x_0 \in \mathbb{C}(G, S)$ tale che

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_0, \gamma \cdot x_0) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{Ent(\mathbb{C}(G, S), d, \mu)} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{Ent_S(G)}.$$

Ora, se $[g, g']$ è un lato di $\mathbb{C}(G, S)$ che contiene x_0 possiamo assumere, scambiando eventualmente g e g' in modo da avere $d(x_0, g) \leq d(x_0, g')$, che

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d_S(g, \gamma g) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{Ent_S(G)} - 1$$

poichè la distanza d (definita nel grafo) coincide con la distanza algebrica d_S se ristretta a G e questa disuguaglianza dimostra (ii) del Teorema 7.0.5.

Ora, se supponiamo che Γ abbia indice finito d in G , il suo sottogruppo coniugato $\Gamma' = g^{-1}\Gamma g$ ha anch'esso indice d . Si può allora vedere che ogni sistema generatore S per cui $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{3}$ possiede al più $d-1$ elementi. Sia $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$ un tale sistema generatore. Supponiamo per assurdo che sia $q > d-1$, q essendo il numero degli elementi di S . Allora, poichè d è il numero degli elementi dell'insieme G/Γ' , esistono due interi distinti k, j , con $1 \leq k < j \leq q$ tali che $\overline{\alpha_k} = \overline{\alpha_j}$, oppure esiste un intero s , con $1 \leq s \leq q$, tale che $\overline{\alpha_s} = \bar{e}$ (qui denotiamo $\bar{\gamma}$ la classe di γ in G/Γ'). Questo implica che $\alpha_k \alpha_j^{-1} \in (\Gamma')^*$ (dove $(\Gamma')^* = \Gamma' \setminus \{e\}$), o altrimenti che $\alpha_s \in (\Gamma')^*$, da cui $d(e, (\Gamma')^*) \leq 2$, in contraddizione con (ii) appena dimostrata che implica $d(e, (\Gamma')^*) > 2$. Concludiamo quindi che deve essere $q \leq d-1$.

Resta da dimostrare la stima sull'entropia di G in (iv). Supponiamo per assurdo che $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{max(d-k,0)+3}$, dove k denota il numero degli elementi dell'insieme S .

Sia γ_0 un elemento di $(\Gamma')^*$ tale che $d_S(e, \gamma_0) = \inf_{\gamma \in (\Gamma')^*} d_S(e, \gamma)$ e sia $s_{i_1} \dots s_{i_p}$ una parola ridotta minimale che rappresenta γ_0 . Da (ii) e dalle ipotesi fatte segue

$$p+1 \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{Ent_S(G)} > max(d-k+3, 3).$$

Per ogni l compreso tra 1 e $p-1$, poniamo $g_l = s_{i_1} \dots s_{i_p}$. Poichè $s_{i_1} \dots s_{i_p}$ è una parola minimale, gli elementi $e, s_1, \dots, s_k, g_3, \dots, g_{p-1}$ sono tutti distinti perchè se $g_l = s_j$ per qualche $s_j \in S$, o $g_l = g_r$, $3 \leq l < r \leq p-1$, sarebbe possibile accorciare $s_{i_1} \dots s_{i_p}$.

Nell'insieme $A = \{\bar{e}, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k, \bar{g}_3, \dots, \bar{g}_{p-1}\}$ (che si riduce a $\{\bar{e}, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k\}$ se $p=3$) ci sono almeno due elementi uguali essendo $d < p+k-2$, dove $\bar{\gamma}$ denota la classe dell'elemento $\gamma \in G$ in G/Γ' . Ma \bar{s}_i e \bar{g}_j sono diversi da \bar{e} , perchè $2 \leq d_S(e, g_j) \leq p-2$ e $d_S(e, s_i) = 1$ implicano che $s_i, g_j \notin \Gamma'$. D'altronde, se $\bar{g}_l = \bar{g}_j$, con $l < j$, abbiamo $g_l g_j^{-1} \in (\Gamma')^*$, mentre la lunghezza di $g_l g_j^{-1} = s_{i_1} \dots s_{i_{j-1}}$ è strettamente minore di p , il che contraddice la definizione di p . Analogamente, $\bar{s}_j \neq \bar{s}_l$ perchè $p > 2$ e $\bar{g}_j \neq \bar{s}_l$ quando $3 \leq j \leq p-1$. Concludiamo quindi che $Ent_{alg}(G) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{Log2}{max(d-k,0)+3}$.

Si osservi che l'ultima affermazione in (iv) è vera perchè, per ogni sistema generatore simmetrico S di un gruppo G che soddisfa le ipotesi dell'enunciato, si ha $\sharp(S) \geq 3$. Infatti, se $\sharp(S) \leq 2$, allora G è isomorfo a un quoziente di \mathbb{Z} oppure a un quoziente del gruppo diedrale infinito $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ il che implicherebbe che $Ent_S(G) = 0$ (poichè \mathbb{Z} e $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ hanno crescita sottoesponenziale, ogni loro quoziente ha crescita sottoesponenziale e quindi entropia nulla, cfr. l'Osservazione a pag. 164). Infine, otteniamo $\sharp(S) \geq 4$ perchè, essendo G è privo di torsione, $\sharp(S)$ è pari (la funzione su S che manda s in s^{-1} stabilizza S e non ha punti fissi). \square

Prima di passare alla dimostrazione del Corollario 7.0.6, dimostriamo quanto asserito nelle Osservazioni (a) a pag. 124.

Il grafo di Cayley $\mathbb{C}(\Gamma, S)$ è uno spazio di lunghezza localmente compatto, completo e connesso rispetto alla distanza canonica di lunghezza, essendo S un sistema generatore finito (vedi pag. 131). L'azione canonica di Γ su $\mathbb{C}(\Gamma, S)$ identifica Γ a un sottogruppo del gruppo delle isometrie $Isom(\mathbb{C}(\Gamma, S))$, discreto rispetto alla topologia C-O (come si vede subito considerando, per esempio, l'orbita e lo stabilizzatore del punto $x = e \in \mathbb{C}(\Gamma, S)$). Poichè G è non abeliano, esistono $s_1, s_2 \in S$ che non commutano. Applicando il Teorema 6.1.2 otteniamo $1 = \max\{d_S(e, s_1 \cdot e), d_S(e, s_2 \cdot e)\} \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{\text{Ent}(\mathbb{C}(\Gamma, S))}$, che conclude la dimostrazione.

Dimostrazione del Corollario 7.0.6

Dal Teorema 7.0.5 (iii) sappiamo che, per ogni gruppo marcato (G, S) in $g(N, d, N_0)$, si ha $\sharp(S) \leq d - 1$. Inoltre, poichè le parole di lunghezza minore o uguale a N_0 che possono essere scritte con $(d - 1)$ lettere sono soltanto un numero finito, si sa che esiste solo un numero finito di presentazioni $\langle S|R \rangle$ (a meno di isomorfismi) tali che $\sharp(S) \leq d - 1$ e che, per ogni relazione $r \in R$, la lunghezza di r sia minore o uguale a N_0 . Ciò premesso, osserviamo che per ottenere la maggiorazione sul numero dei gruppi marcati in $g(N, d, N_0)$ che soddisfano $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$, se $\sharp(S) = k$ e S è simmetrico, allora il numero di relatori possibili di lunghezza minore o uguale a N_0 è non più grande di $k^2 + k(k - 1)^2 + \dots + k(k - 1)^{N_0 - 1} \leq k(k - 1)^{N_0}$ (questa disuguaglianza è vera perchè, per definizione di $g(N, d, N_0)$, $\sharp(S) \geq 3$ cfr. la conclusione della dimostrazione del Teorema 7.0.5). Inoltre, notiamo che se Σ è un altro insieme finito con la stessa cardinalità di S , fissando una bigezione qualunque $S \rightarrow \Sigma$, ogni sistema di relazioni R definito sugli elementi di S si copia su un sistema di relazioni R' definito sugli elementi di Σ (Σ si identifica con S tramite la bigezione data) tale che i gruppi definiti dalle presentazioni $\langle S|R \rangle$ e $\langle \Sigma|R' \rangle$ sono isomorfi, tramite un isomorfismo che invia S bigettivamente su Σ . Il numero di possibili presentazioni è pertanto minore o uguale a $\sum_{k=3}^{d-1} 2^{k(k-1)^{N_0}}$. Per finire, si osservi che se $d \leq 3$ si ha sempre $\text{Ent}(G, S) \geq \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ per ogni $(G, S) \in g(N, d, N_0)$ (Teorema 7.0.5 (iv)). L'ultima affermazione del Corollario segue dal fatto che, se $\inf_{(G,S) \in g(N,d,N_0)} [\text{Ent}_S(G)] < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$, allora esso può essere calcolato restringendosi all'insieme delle classi d'isomorfismo di $(G, S) \in g(N, d, N_0)$ tali che $\text{Ent}_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$, ed è raggiunto essendo questo insieme finito. (Si noti che l'entropia è invariante per isomorfismo di gruppi marcati). \square

Dimostrazione del Lemma 7.0.7

Poichè G è privo di torsione, su ogni sistema generatore simmetrico S di G , l'applicazione che manda $s \in S$ in s^{-1} stabilizza S e non ha punti fissi; quindi la cardinalità di S è pari e uguale a $2n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, ed esistono $s_1, \dots, s_n \in S$ tali che $S = \{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{2n}\}$, dove $s_{n+i} = s_i^{-1}$ per $1 \leq i \leq n$. Definiamo, sul gruppo libero \mathbb{F}^n con sistema generatore libero $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ (conveniamo che l'elemento neutro non appartenga a E , e che $e_i \in E \Rightarrow e_i^{-1} \notin E$), il morfismo canonico $h_S : \mathbb{F}^n \rightarrow G$ ponendo $h_S(e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_p}^{k_p}) = s_{i_1}^{k_1} \dots s_{i_p}^{k_p}$ per ogni p -upla (i_1, \dots, i_p) tale che $i_1, \dots, i_p \leq n$ e $i_{k+1} \neq i_k$, e per ogni $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (si noti che $h_S(e_i) = s_i$ e $h_S(e_i^{-1}) = s_i^{-1} = s_{n+i}$). Per procedere nella dimostrazione, ci occorre una proprietà dei gruppi iperbolici che costituisce l'enunciato del lemma seguente.

Lemma. *Sia G un gruppo privo di torsione e sia S un sistema generatore simmetrico di G tale che $\sharp(S) = 2n$ ordinato in modo che sia $S = \{s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}\}$ e tale che, per qualche $\alpha > 0$, G sia α -iperbolico rispetto a S . Sia \mathbb{F}^n il gruppo libero generato da n elementi $\{e_1, \dots, e_n\}$, e $h_S : \mathbb{F}^n \rightarrow G$ il morfismo che invia e_i in s_i per ogni $i = 1, \dots, n$. Sia Σ un altro sistema generatore simmetrico di G con lo stesso numero di elementi di S e sia $h_\Sigma : \mathbb{F}^n \rightarrow G$ il corrispondente morfismo. Si denoti con $B_{\mathbb{F}^n}(e, R)$ la bolla in \mathbb{F}^n di centro e e raggio $R > 0$, definita rispetto alla distanza delle parole associata al sistema generatore $\{e_1, \dots, e_n\}$. Se*

$$B_{\mathbb{F}^n}(e, R_0) \cap h_S^{-1}(e) \subseteq B_{\mathbb{F}^n}(e, R_0) \cap h_\Sigma^{-1}(e)$$

per $R_0 = 12\alpha + 9$, allora esiste un automorfismo di G che invia S bigettivamente su Σ .

Démonstration. Poichè $S = \{s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}\}$, per ogni relazione $s_{i_1}^{k_1} \dots s_{i_p}^{k_p} = e$ e valida in G tale che $|k_1| + \dots + |k_p| < R_0$, si ha che $e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_p}^{k_p} \in B_{\mathbb{F}^n}(e, R_0) \cap h_S^{-1}(e)$. Per le ipotesi ne segue che $e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_p}^{k_p} \in B_{\mathbb{F}^n}(e, R_0) \cap h_\Sigma^{-1}(e)$ e, se $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}\}$, allora $\sigma_{i_1}^{k_1} \dots \sigma_{i_p}^{k_p} = h_\Sigma(e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_p}^{k_p}) = e$. Per ogni $g \in \mathbb{F}^n$, ponendo $\phi(h_S(g)) = h_\Sigma(g)$ risulta ben definita un'applicazione $\phi : G \rightarrow G$: infatti, se $h_S(g) = h_S(g')$, allora $g^{-1}g' \in h_S^{-1}(e)$, i.e. $g^{-1}g'$, espresso come parola in e_1, \dots, e_n e nei loro inversi, è una relazione vera per ogni presentazione del tipo $\langle S|R \rangle$ per G (si noti che $h_S^{-1}(e)$ è il sottogruppo delle relazioni introdotto nel Paragrafo 2.4). Una proprietà dei gruppi iperbolici (Proposizione B.0.9) afferma che se $N \in \mathbb{N}$ è il più piccolo intero positivo tale che $N \geq 4\alpha + 2$, allora esiste una presentazione $\langle S|R_N \rangle$ di G tale che ogni parola in R_N abbia lunghezza al più $3N$ e quindi sia contenuta nella bolla aperta $B_{\mathbb{F}^n}(e, R_0)$ centrata in e e di raggio $R_0 = 12\alpha + 9$. Questo ci dice che $g^{-1}g'$ può essere espresso come prodotto di coniugati di parole

del tipo $e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_p}^{k_p} \in B_{\mathbb{F}^n}(e, R_0) \cap h_S^{-1}(e) \subseteq B_{\mathbb{F}^n}(e, R_0) \cap h_\Sigma^{-1}(e)$ il che implica $h_\Sigma(g^{-1}g') = e$ e $h_\Sigma(g) = h_\Sigma(g')$.

Mostriamo ora che l'applicazione ϕ è un isomorfismo. Poichè

$$\phi(h_S(g)h_S(g')) = \phi(h_S(gg')) = h_\Sigma(gg') = h_\Sigma(g)h_\Sigma(g') = \phi(h_S(g))\phi(h_S(g')),$$

ϕ è un morfismo; è suriettiva perchè la sua immagine contiene Σ che è un sistema generatore di G (si noti che non è possibile ragionare analogamente scambiando i ruoli di S e Σ , in quanto non abbiamo alcuna stima sulla costante di iperbolicità di G rispetto a Σ). Il fatto che ϕ sia anche iniettiva, ossia un isomorfismo, segue da un risultato di Z. Sela ([Se]) secondo il quale ogni gruppo G iperbolico e privo di torsione è hopfiano (vedi pag. 165), i.e. ogni epimorfismo da G in G è un isomorfismo, che conclude la dimostrazione del Lemma sopra. \square

Per semplicità di notazione, denotiamo con B la bolla aperta di raggio $R_0 = 12\alpha + 9$ nel gruppo libero \mathbb{F}^n , e sia $b(n)$ la cardinalità di $B \setminus \{e, e_1, \dots, e_n, e_1^{-1}, \dots, e_n^{-1}\}$. Se P denota l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $B \setminus \{e, e_1, \dots, e_n, e_1^{-1}, \dots, e_n^{-1}\}$, si ha $\sharp(P) = 2^{b(n)}$. Denotiamo $\Phi(S) = h_S^{-1}(e) \cap (B \setminus \{e\}) \in P$, dove $h_S : \mathbb{F}^{k'} \rightarrow G$ è il morfismo definito prima.

Se $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}\}$ è un sistema generatore simmetrico di G con la stessa cardinalità di S ed esiste un isomorfismo $\phi : G \rightarrow G$ che invia s_i in σ_i per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha, dal momento che tali applicazioni coincidono sugli e_i , $h_\Sigma = \phi \circ h_S$ da cui

$$h_S^{-1}(e) = h_S^{-1}[\phi^{-1}(e)] = (\phi \circ h_S)^{-1}(e) = h_\Sigma^{-1}(e).$$

Ne segue $\Phi(S) = \Phi(\Sigma)$, che dimostra che Φ definisce un'applicazione sull'insieme delle classi di equivalenza dei sistemi generatori simmetrici di G (di cardinalità $2n$) con codominio P . Se G è α -iperbolico rispetto a S , e restringiamo Φ alle classi di equivalenza dei sistemi generatori simmetrici Σ tali che G è α -iperbolico rispetto a Σ , per il Lemma dimostrato prima Φ è iniettiva e l'insieme di tali classi di equivalenza contiene al più $2^{b(n)}$ elementi. La conclusione del Lemma 7.0.7 segue osservando che $b(n) \leq 2n(2n-1) + \dots + 2n(2n-1)^{[R_0]-1} \leq (2n)^{R_0}$ (quando R_0 non è intero la prima disuguaglianza è un'uguaglianza) da cui, sommando,

$$\sum_{2 \leq n \leq [p/2]} 2^{(2n)^{R_0}} \leq ([p/2] - 1)_+ 2^{(p^{R_0})}.$$

Si noti che $n \geq 2$, perchè G si suppone non elementare, il che esclude il caso $S = \{s, s^{-1}\}$ e $G \simeq \mathbb{Z}$ (che è l'unico caso di gruppo privo di torsione tale che

$n = 1$). Quindi la somma che appare a sinistra dell'ultima disuguaglianza vale zero quando $[p/2] \leq 1$. \square

Dimostrazione del Corollario 7.0.9

Se G è un gruppo α -iperbolico rispetto a un sistema di generatori S , allora per ogni intero $n \geq 4\alpha + 2$ G ammette una presentazione finita $G = \langle S \mid R \rangle$ tale che gli elementi di R hanno lunghezza al più $3n$ (Proposizione B.0.9). Ne segue che ogni gruppo marcato $(G, S) \in h(\alpha, N, d)$ e tale che $Ent_S(G) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\text{Log}2}{3}$ appartiene, per $N_0 = 12\alpha + 9$, alla famiglia $g(N, d, N_0)$ definita prima del Corollario 7.0.6 che, applicato, ci fa concludere. \square

Dimostrazione del Corollario 7.0.10

Per ogni numero reale $r > 0$, sia b_r la cardinalità della bolla aperta in Γ , centrata nell'elemento neutro e di raggio r rispetto alla metrica delle parole associata a Σ . Poniamo $N = ([328\alpha] + 1) \max\{b_{64\alpha}!, b_{8\alpha}^2!\}$. Allora (vedi Corollario 7.0.9) ogni $(G, S) \in h(A, \alpha, d)$ appartiene alla famiglia $h(A, N, d)$ in quanto, per tale valore di N , Γ è N -non abeliano e ha la proprietà di transitività della commutazione (cfr. Proposizione 6.3.5). \square

Dimostrazione del Corollario 7.0.11

Se G è un'estensione finita di Γ , al variare di S tra tutti i sistemi generatori tali che G è A -iperbolico rispetto a S , la coppia (G, S) appartiene alla famiglia $h(A, \alpha, d)$ definita nel Corollario 7.0.10. Se non si verifica (ii), per tali sistemi generatori si ha $\inf_S Ent_S(G) < \frac{\text{Log}2}{3N}$, per un valore intero di N dipendente solo da α e dalla cardinalità di Σ . Ma, per il Corollario 7.0.10, il numero di S tali che G è A -iperbolico rispetto a S e tale che $Ent_S(G) < \frac{\text{Log}2}{3N}$ è finito, quindi l'estremo inferiore è raggiunto, il che prova (i).

Dimostrazione del Teorema 7.0.12

Grazie a un teorema di Gromov (riportato come Proposizione B.0.8) $\pi_1(X)$ ammette una presentazione $\langle S_g \mid R \rangle$ con sistema generatore S_g tale che per ogni $\gamma \in S_g$ si abbia $d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x}) \leq 2 \text{diam}(X, g)$, dove \tilde{x} è un punto fissato del rivestimento universale Riemanniano \tilde{X} di X , e dove R è un sistema di relazioni tale che ogni $r \in R$ è una parola di lunghezza minore o uguale a 3 (rispetto a S_g). Poichè il gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ agisce su \tilde{X} per isometrie, S_g è simmetrico. Sia γ un elemento arbitrario di $\pi_1(X)$ e sia $\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}$ una parola di lunghezza minimale che rappresenta γ rispetto all'insieme S_g . Per la disuguaglianza triangolare e l'invarianza della distanza d per l'azione

di $\pi_1(X)$, si ha

$$d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x}) \leq d(\tilde{x}, \gamma_{i_1} \cdot \tilde{x}) + \dots + d(\tilde{x}, \gamma_{i_k} \cdot \tilde{x}) \leq 2d \operatorname{diam}(g) d_{S_g}(e, \gamma).$$

Poniamo ora $d_{geom}(e, \gamma) = d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x})$ per ogni $\gamma \in \pi_1(X)$. Per le proprietà dell'entropia (Proposizione 5.3.1) si ha $Ent(d_{S_g}) \leq 2d \operatorname{diam}(X, g) Ent(d_{geom})$ (si noti che entrambe le entropie sono definite rispetto alla misura che conta su $\pi_1(X)$). Inoltre, poichè

$$Ent(d_{geom}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \operatorname{Log} \# \{ \gamma \in \pi_1(X) \mid d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x}) \leq R \},$$

si ha che $Ent(d_{geom})$ coincide con $Ent_{vol}(X, g)$ (si veda, ad esempio, la Proposizione 9.6.6. di [K-H]). Ne deriva che $Ent_{S_g}(\pi_1(X)) \leq 2d \operatorname{diam}(X, g) Ent_{vol}(X, g)$ ([Gr2], Teorema 5.16). Allora, per l'ipotesi (ii), si ha $Ent_{S_g}(\pi_1(X)) < \frac{1}{N} \cdot \frac{\operatorname{Log} 2}{3}$ e, poichè $(\pi_1(X), S_g) \in g(N, d, 3)$ per l'ipotesi (i), possiamo applicare il Teorema 7.0.6 che dimostra la prima affermazione dell'enunciato.

Infine, l'immagine del morfismo di Hurewicz $\pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{b_1(X)}$ è un reticolo in $\mathbb{R}^{b_1(X)}$ (cfr. [Sp], pag. 387), perciò il sistema generatore S_g è mandato suriettivamente su un sistema generatore di $\mathbb{R}^{b_1(X)}$, e quindi $b_1(X)$ è minore o uguale a $\#(S_g)$, che è limitato da $(d-1)$ per il Teorema 7.0.5 (iii). \square

Dimostrazione del Corollario 7.0.13

Il gruppo fondamentale Γ' del rivestimento X' di X è, per la teoria dei rivestimenti, un sottogruppo di indice minore o uguale a d in $\pi_1(X)$. Inoltre, per le ipotesi esso è δ -spesso, quindi N -non abeliano per ogni $N \geq 4/\delta$ (Osservazioni 6.1.4 (1)). Ne segue che $\pi_1(X)$ contiene un sottogruppo N -non abeliano di indice minore o uguale a d che ha la proprietà di transitività della commutazione di cui godono i gruppi fondamentali delle varietà Riemanniane compatte a curvatura sezionale negativa. Perciò la classe di varietà $\bar{\chi}(\delta, d)$ considerata soddisfa le condizioni del Teorema 7.0.12. Poichè la metrica g ha curvatura negativa, la finitezza degli 1-tipi di omotopia implica la finitezza dei tipi di omotopia (cfr. [Pi], Corollario 6.3.10). Qui, essendo $\pi_1(X)$ non abeliano e privo di torsione, un sistema generatore simmetrico ha almeno 4 elementi. Il fatto che il numero delle possibili classi di isomorfismo per $\pi_1(X)$ sia limitato superiormente da $(d-4)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$ (invece che da $(d-3)_+ 2^{(d-1)(d-2)^3}$ come nel Teorema 7.0.12) è dovuto all'assenza nei gruppi fondamentali delle varietà a curvatura negativa di elementi di torsione. Questo implica che $\#(S_g)$ è pari e che $\#(S_g) \geq 4$, quindi (per il Teorema 7.0.5 (iii)) $d \geq 5$. La stima migliorata si ottiene inserendo questo nella dimostrazione del Teorema 7.0.6. Abbiamo già detto nella dimostrazione del Teorema 7.0.12 che l'immagine di S_g tramite il morfismo di Hurewicz è un insieme generatore dello spazio

vettoriale $\mathbb{R}^{b_1(X)}$. Poichè $\pi_1(X)$ è privo di torsione, γ e γ^{-1} sono, per ogni $\gamma \in S_g$, elementi distinti di S_g che sono inviati in vettori opposti di $\mathbb{R}^{b_1(X)}$. Ne segue che $b_1(X) \leq \frac{1}{2}\#(S_g) \leq \left[\frac{d-1}{2}\right]$.

Chapitre 8

Un lemma di Margulis per quasi isometrie

8.1 Presentazione dei risultati

Vogliamo estendere il Teorema 6.1.2 e il Teorema 6.1.3 ad una situazione più generale di quella già considerata. I risultati che presentiamo qui sono parte di un lavoro ancora in corso.

Définition 8.1.1. (cfr. [H1], pag. 85) *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, e siano $\lambda \geq 1$, $c > 0$ numeri reali. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice (λ, c) -immersione quasi isometrica se per ogni $x_1, x_2 \in X$, si ha*

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x_1, x_2) - c \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + c$$

e si dice c -quasi suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $d_Y(y, f(x)) \leq c$. Infine, f si dice (λ, c) -quasi isometria se essa è una (λ, c) -immersione quasi isometrica ed è c -quasi suriettiva.

Définition 8.1.2. (cfr. [F-M], pag. 623) *Sia (X, d) uno spazio metrico e G un gruppo. Un'applicazione $\phi : G \times X \rightarrow X$ è detta c -quasi azione di G su X se per ogni coppia $g_1, g_2 \in G$ e ogni $x \in X$ si ha $d(x, \phi(e)x) \leq c$ ("e" denota l'elemento neutro di G) e $d(\phi(g_1g_2)x, \phi(g_1)\phi(g_2)x) \leq c$. (Qui $\phi(g, x)$ si denota con $\phi(g)x$).*

D'ora in poi, se ϕ è una quasi azione di un gruppo G su uno spazio X , ometteremo l'applicazione ϕ e denoteremo con $g \cdot x$ l'elemento $\phi(g, x)$, per ogni $g \in G$ e ogni $x \in X$.

Théorème 8.1.3. *Sia N un intero positivo, e sia Γ un gruppo N -non abeliano. Sia (X, d, μ) uno spazio metrico misurato connesso, con entropia $Ent(X, d, \mu) \leq H$ per qualche $H > 0$. Siano $C \geq 0$, $L \geq 1$ e $A \geq 0$ numeri reali, e supponiamo che esista una C -quasi azione per (L, A) -quasi isometrie di Γ su X , che verifichi le ipotesi seguenti :*

- (i) *esiste un $x_0 \in X$ tale che, per ogni $R > 0$, l'insieme $\{\gamma \in \Gamma \mid d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq R\}$ è finito e la sua cardinalità è limitata da un numero $N_0(R)$ dipendente da R .*
- (ii) *esistono un $x_0 \in X$ e un numero reale $\alpha_0 > 0$ tale che $\inf_{\gamma \in \Gamma} \mu(B(\gamma \cdot x_0, \alpha_0)) > 0$ (dove $B(\gamma \cdot x_0, \alpha_0)$ denota la bolla in X di centro $\gamma \cdot x_0$ e raggio α_0).*

Supponiamo inoltre che $(NL + 1)(A + C) + NL^2(A + 3C + LC) < \frac{Log2}{H}$. Allora :

- (1) *per ogni $x \in X$ e ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ che non commutano, si ha*

$$NL^2d(x, \gamma_2 \cdot x) + (NL + 1)(A + C) \geq \frac{1}{H} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-H[NL^2d(x, \gamma_1 \cdot x) + (NL+1)(A+C)]}} \right);$$

- (2) *per ogni $x \in X$ e ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ che non commutano, si ha*

$$\max\{d(x, \gamma_1 \cdot x), d(x, \gamma_2 \cdot x)\} \geq \frac{1}{NL^2} \left[\frac{Log2}{H} - (NL + 1)(A + C) \right];$$

- (3) *per ogni $x \in X$ e ogni $\eta > 0$, denotiamo con $\Gamma_\eta(x)$ il sottogruppo di Γ generato dall'insieme $\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma \cdot x) < \eta\}$. Se $\eta < \frac{1}{NL^2} \left[\frac{Log2}{H} - (NL + 1)(A + C) \right]$, allora $\Gamma_\eta(x)$ è abeliano;*

- (4) *supponiamo che Γ soddisfi la proprietà di transitività della commutazione. Allora, esiste $x_1 \in X$ tale che*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x_1, \gamma \cdot x_1) \geq \frac{1}{NL^3} \left[\frac{Log2}{H} - (NL + 1)(A + C) - NL^2(A + 3C + LC) \right].$$

Remarques. Grazie all'ipotesi (i), qui l'ipotesi di locale compattezza per X , fatta nel Teorema 5.4.1, non è necessaria (cfr. anche Osservazioni 5.4.2).

Remarques. Per $L = 1$ e $A = C = 0$, la quasi azione è un'azione per isometrie e ritroviamo le stesse stime contenute nel Teorema 6.1.2 e nel Teorema 6.1.3. E' lecito perciò chiedersi se non sia possibile, riducendo la quasi azione ad una azione, ottenere il Teorema 8.1.3 come corollario di questi risultati. Per precisare i termini del problema, siano $\rho_1 : \Gamma \times X \rightarrow X$ e $\rho_2 : \Gamma \times X \rightarrow X$ due quasi azioni di un gruppo Γ su uno spazio metrico (X, d) . Diciamo che

ρ_1 e ρ_2 sono *equivalenti* se esiste $D > 0$ tale che $d(\rho_1(\gamma)x, \rho_2(\gamma)x) \leq D$ per ogni $\gamma \in \Gamma$ e ogni $x \in X$. Se ρ_1 è un'azione per quasi isometrie di un gruppo Γ su X , possiamo porci le seguenti domande :

- (1) esiste su X un'azione per isometrie ρ_2 di Γ equivalente a ρ_1 ?
- (2) esiste un'azione ρ_2 di Γ su X per omomorfismi bi-lipschitz (che significa $(\lambda, 0)$ -quasi isometrie bigettive) equivalente a ρ_1 ?
- (3) Se ρ_1 è una quasi azione per quasi isometrie di Γ su X , esiste una azione ρ_2 di Γ su X per quasi isometrie equivalente a ρ_1 ?

In un lavoro recente ([M-S-W]) è stato dimostrato che $G_1 = \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p$ e $G_2 = \mathbb{Z}_q * \mathbb{Z}_q$, dove $p, q \in \mathbb{Z}$ sono numeri primi distinti, non possono agire per isometrie sullo stesso spazio geodetico proprio in maniera discreta e cocompatta. D'altra parte, se $p, q \geq 3$, allora G_1 e G_2 sono bi-lipschitz equivalenti, ossia esiste una $(\lambda, 0)$ -quasi isometria bigettiva $f : G_1 \rightarrow G_2$ (rispetto a distanze delle parole d_{S_1}, d_{S_2} associate a due sistemi generatori qualunque S_1 e S_2 su G_1 e G_2 rispettivamente, cfr. [H1], pag. 105). In questo caso esiste una vera azione di G_1 per $(\lambda^2, 0)$ -quasi isometrie sul grafo di Cayley $\mathbb{C}(G_2, S_2)$ come viene mostrato nella costruzione illustrata a pag. 144. Questo esempio risponde alla domanda (1) perchè ci presenta un'azione per quasi isometrie che non può essere ridotta ad un'azione per isometrie ad essa equivalente.

Riguardo alla domanda (2) osserviamo che se Γ_1 e Γ_2 sono gruppi non amenabili (si veda l'Appendice C, pag. 169) quasi isometrici, grazie a un risultato di K. Whyte essi sono bi-lipschitz equivalenti, e quindi esiste un'azione per omomorfismi bi-lipschitz di Γ_1 sul grafo di Cayley di Γ_2 rispetto a un sistema di generatori qualunque (si utilizzi ancora la costruzione illustrata nell'Esempio a pag. 144).

La domanda (3), relativamente al caso di una quasi azione discreta e cocompatta su uno spazio geodetico proprio compare come questione aperta in un articolo di B. Farb e L. Mosher ([F-M]). Se X è uno spazio Riemanniano simmetrico diverso dagli spazi iperbolico reale $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ e complesso $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ è stata data una risposta parziale da P.Pansu in [Pa], dove si dimostra che ogni quasi azione su tali spazi è equivalente a un'azione isometrica.

Una raccolta aggiornata dei risultati anche recenti su quasi azioni e quasi isometrie è reperibile in [K] (pagg. 77 e seguenti).

Esempi

Presentiamo ora sotto forma di esempi alcune situazioni concrete dove viene naturale introdurre quasi azioni per quasi isometrie.

Exemple (a). Sia $\varepsilon > 0$ un numero reale, e siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici tali che la distanza di Gromov-Hausdorff (Def. 5.2.11) tra X e Y è strettamente minore di ε . Sia Γ un sottogruppo del gruppo delle isometrie di (X, d_X) . Esistono due applicazioni $\phi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow X$ ([B-B-I], Corollario 7.3.28) tali che le seguenti disuguaglianze sono verificate per ogni $x, x' \in X$ e ogni $y, y' \in Y$:

$$|d_Y(\phi(x), \phi(x')) - d_X(x, x')| < 2\varepsilon;$$

$$|d_X(\psi(y), \psi(y')) - d_Y(y, y')| < 2\varepsilon;$$

$$d_X(\psi(\phi(x)), x) < 2\varepsilon;$$

$$d_Y(\phi(\psi(y)), y) < 2\varepsilon.$$

Ponendo $\gamma \cdot y = \phi(\gamma \cdot \psi(y))$ per ogni $y \in Y$, definiamo ora una 4ε -quasi azione per $(1, 6\varepsilon)$ -quasi isometrie di Γ su Y . Cominciamo con l'osservare che ogni $\gamma \in \Gamma$ induce una $(1, 4\varepsilon)$ -immersione quasi isometrica su Y . Infatti, per ogni $y_1, y_2 \in Y$, risulta

$$\begin{aligned} |d_Y(\gamma \cdot y_1, \gamma \cdot y_2) - d_Y(y_1, y_2)| &\leq |d_Y(\phi(\gamma \cdot \psi(y_1)), \phi(\gamma \cdot \psi(y_2))) - d_X(\gamma \cdot \psi(y_1), \gamma \cdot \psi(y_2))| + \\ &\quad + |d_X(\gamma \cdot \psi(y_1), \gamma \cdot \psi(y_2)) - d_Y(y_1, y_2)| < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Per vedere che abbiamo definito una 4ε -quasi azione di Γ su Y , notiamo che per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ e ogni $y \in Y$, si ha

$$\begin{aligned} d_Y(\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot y), \gamma_1 \gamma_2 \cdot y) &= d_Y(\phi(\gamma_1 \cdot \psi(\phi(\gamma_2 \cdot \psi(y)))) , \phi(\gamma_1 \gamma_2 \cdot \psi(y))) \leq \\ &\leq d_X(\gamma_1 \cdot \psi(\phi(\gamma_2 \cdot \psi(y))), \gamma_1 \gamma_2 \cdot \psi(y)) + 2\varepsilon = \\ &= d_X(\psi(\phi(\gamma_2 \cdot \psi(y))), \gamma_2 \cdot \psi(y)) + 2\varepsilon < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo $d_Y(y, e \cdot y) = d_Y(y, \phi(\psi(y))) < 2\varepsilon$ per ogni $y \in Y$, dove e denota l'elemento neutro di Γ .

Infine, per ogni $\gamma \in \Gamma$ la 6ε -quasi suriettività di $\gamma : Y \rightarrow Y$ discende dal fatto che, per ogni $y \in Y$, si ha $d_Y(y, \gamma \cdot (\gamma^{-1} \cdot y)) < 6\varepsilon$.

Remarques. Nell'esempio precedente, l'ipotesi (i) del Teorema 8.1.3 è soddisfatta dalla quasi azione di Γ su Y se l'azione di Γ per isometrie su X è tale che l'insieme $\{\gamma \in \Gamma \mid d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq R\}$ è finito per qualche $x_0 \in X$ e ogni $R > 0$. Infatti, per ogni $y \in Y$, l'essere $d_Y(y, \gamma \cdot y) \leq R$ implica

$$d_X(\psi(y), \gamma \cdot \psi(y)) \leq d_X(\psi(y), \psi(\phi(\gamma \cdot \psi(y)))) + d_X(\gamma \cdot \psi(y), \psi(\phi(\gamma \cdot \psi(y)))) \leq R + 4\varepsilon.$$

Questo può essere vero solo per un numero finito di $\gamma \in \Gamma$ in quanto se $\{\gamma \in \Gamma \mid d_X(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq R\}$ è finito, allora per ogni $x \in X$ è finito anche $\{\gamma \in \Gamma \mid d_X(x, \gamma \cdot x) \leq R\}$ è finito (si usi la disuguaglianza triangolare). Inoltre, se fissiamo $y_0 \in Y$ e dotiamo Y della misura che conta gli elementi di $\Gamma \cdot y_0 = \{\gamma \cdot y_0 \mid \gamma \in \Gamma\}$ (i.e. $\mu_{\#}(A) = \#(A \cap \Gamma \cdot y_0)$), l'ipotesi (ii) del Teorema 8.1.3 è soddisfatta perchè $\mu_{\#}(B(\gamma \cdot y_0, \alpha_0)) \geq 1$ per ogni $\alpha_0 > 0$.

Exemple (b). Supponiamo che M sia una varietà Riemanniana compatta e che $G = \pi_1(M)$. Sia G' un gruppo quasi isometrico a G (rispetto a sistemi generatori S', S fissati rispettivamente su G' e su G). Poichè M è compatta, esiste una (λ, c) -quasi isometria $f : \mathbb{C}(G', S') \rightarrow \tilde{M}$, dove \tilde{M} è il rivestimento universale Riemanniano di M e $\mathbb{C}(G', S')$ è il grafo di Cayley di G' rispetto a S' ([H1], pag. 87). Ne segue che esiste una $(\lambda, 3\lambda c)$ -quasi isometria $\bar{f} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}(G', S')$ tale che per ogni $x \in \mathbb{C}(G', S')$ sia $d(x, \bar{f}(f(x))) \leq 2\lambda c$ e che per ogni $\tilde{x} \in \tilde{M}$ risulti $d(\tilde{x}, f(\bar{f}(\tilde{x}))) \leq 2\lambda c$ (tale \bar{f} si dice *quasi inversa di f* : ne dimostreremo l'esistenza nel prossimo paragrafo).

Ora definiamo per ogni $g \in G'$ l'applicazione $\phi(g) : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ tale che $\phi(g) = f \circ g \circ \bar{f}$, ricorrendo all'azione naturale per isometrie di G' su $\mathbb{C}(G', S')$ (vedi pagina 131).

Per ogni $g \in G'$, $\phi(g) : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ è una $(\lambda^2, (3\lambda^2 + 1)c)$ -immersione quasi isometrica, poichè dati $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{M}$, si ha

$$\begin{aligned} d(\phi(g)(\tilde{x}_1), \phi(g)(\tilde{x}_2)) &= d((f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x}_1), (f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x}_2)) \leq \lambda d((g \circ \bar{f})(\tilde{x}_1), (g \circ \bar{f})(\tilde{x}_2)) + c = \\ &= \lambda d(\bar{f}(\tilde{x}_1), \bar{f}(\tilde{x}_2)) + c \leq \lambda[\lambda d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + 3\lambda c] + c = \\ &= \lambda^2 d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (3\lambda^2 + 1)c \end{aligned}$$

e :

$$\begin{aligned} d(\phi(g)(\tilde{x}_1), \phi(g)(\tilde{x}_2)) &= d((f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x}_1), (f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x}_2)) \geq \frac{1}{\lambda} d((g \circ \bar{f})(\tilde{x}_1), (g \circ \bar{f})(\tilde{x}_2)) - c = \\ &= \frac{1}{\lambda} d(\bar{f}(\tilde{x}_1), \bar{f}(\tilde{x}_2)) - c \geq \frac{1}{\lambda} [\frac{1}{\lambda} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - 3\lambda c] - c = \frac{1}{\lambda^2} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - 4c \geq \frac{1}{\lambda^2} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - (3\lambda^2 + 1)c \end{aligned}$$

(si noti che $\lambda \geq 1$ implica $3\lambda^2 + 1 \geq 4$).

Resta da far vedere che ϕ definisce una $(2\lambda^2 + 1)c$ -quasi azione di G' su \tilde{M} . Dalla definizione di quasi inversa segue che $d(\tilde{x}, \phi(e)(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, (\bar{f} \circ f)(\tilde{x})) \leq 2\lambda c$. D'altra parte, ponendo $(g_2 \circ \bar{f})(\tilde{x}) = z$ nell'uguaglianza

$$d(\phi(g_1 g_2)(\tilde{x}), \phi(g_1) \phi(g_2)(\tilde{x})) = d((f \circ g_1 g_2 \circ \bar{f})(\tilde{x}), (f \circ g_1 \circ \bar{f} \circ f \circ g_2 \circ \bar{f})(\tilde{x})),$$

si ottiene

$$\begin{aligned} d((f \circ g_1)(z), (f \circ g_1 \circ \bar{f} \circ f)(z)) &\leq \lambda d(g_1 z, (g_1 \circ \bar{f} \circ f)(z)) + c = \lambda d(z, (\bar{f} \circ f)(z)) + c \leq \\ &\leq \lambda(2\lambda c) + c = (2\lambda^2 + 1)c \end{aligned}$$

da cui risulta che ϕ definisce una quasi azione.

Infine, per ogni $g \in G'$, $\phi(g) : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ è quasi suriettiva perchè

$$d(\tilde{x}, \phi(g)\phi(g^{-1})\tilde{x}) \leq 2\lambda c + (2\lambda^2 + 1)c.$$

Con gli stessi argomenti utilizzati in quest'ultimo esempio, sostituendo $\mathbb{C}(G, S)$ a \tilde{M} , si può dimostrare che se G e G' sono gruppi quasi isometrici (rispetto a sistemi generatori S, S' fissati su G e G' rispettivamente), esiste una quasi azione per quasi isometrie di G' su $\mathbb{C}(G, S)$.

Remarques. La quasi azione costruita nell' Esempio (b) soddisfa l'ipotesi (i) del Teorema 8.1.3. Per vederlo, si consideri $\tilde{x} \in \tilde{M}$ e un numero reale $R > 0$. sia $g \in G'$ e supponiamo che sia $d(\phi(g)(\tilde{x}), \tilde{x}) \leq R$, cioè $d((f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x}), \tilde{x}) \leq R$. Poichè \bar{f} è una $(\lambda, 3\lambda c)$ -quasi isometria, si ha

$$d((\bar{f} \circ f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x}), \bar{f}(\tilde{x})) \leq \lambda R + 3\lambda c \text{ e, per la disuguaglianza triangolare,}$$

$$\begin{aligned} d(\bar{f}(\tilde{x}), (g \circ \bar{f})(\tilde{x})) &\leq d(\bar{f}(\tilde{x}), (\bar{f} \circ f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x})) + d((\bar{f} \circ f \circ g \circ \bar{f})(\tilde{x}), (g \circ \bar{f})(\tilde{x})) \leq \\ &\leq \lambda R + 3\lambda c + c' \end{aligned}$$

(dove c' è la costante che interviene nella definizione di quasi inversa). Poichè G' è quasi isometrico a un gruppo finitamente generato, è esso stesso finitamente generato e possiamo supporre che la cardinalità di S' sia finita. Allora il grafo di Cayley $\mathbb{C}(G', S')$ è localmente compatto e l'azione di G' su $\mathbb{C}(G', S')$ è discreta. Ne discende che l'insieme $\{g \in G' \mid d(\bar{f}(\tilde{x}), (g \circ \bar{f})(\tilde{x})) \leq \lambda R + 3\lambda c + c'\}$ è finito, e si conclude.

Per quanto riguarda l'ipotesi (ii) del Teorema 8.1.3, mostriamo che è soddisfatta per ogni punto di \tilde{M} e per $\alpha_0 = D$, dove $D = \text{diam}(\tilde{M})$. Infatti, per ogni $\tilde{x} \in \tilde{M}$ si ha $\text{vol}(B(\tilde{x}, D)) \geq \text{vol}(\tilde{M})$ (in quanto $B(\tilde{x}, D)$ contiene un dominio fondamentale per l'azione di $\pi_1(\tilde{M})$ su \tilde{M}).

Dimostrazione del Teorema 8.1.3

Faremo uso delle seguenti formule (a), (b), (c), (d) valide per una C -quasi azione per (L, A) -quasi isometrie di un gruppo Γ su uno spazio metrico X .

$$(a) \quad d(x, \gamma \cdot (\gamma^{-1} \cdot x)) \leq 2C.$$

$$(b) \quad d(x, \gamma^{-1}\gamma' \cdot x) \leq Ld(\gamma \cdot x, \gamma' \cdot x) + A + 3C;$$

$$(c) \quad d(x, \gamma_1 \dots \gamma_k \cdot x) \leq L[d(x, \gamma_1 \cdot x) + \dots + d(x, \gamma_k \cdot x)] + k(A + C).$$

$$(d) \quad d(x, \gamma^N \cdot x) \leq NLd(x, \gamma \cdot x) + N(A + C).$$

Per dimostrare (c), basta scrivere le disuguaglianze

$$\begin{aligned} d(x, \gamma_1 \dots \gamma_k \cdot x) &\leq d(x, \gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \cdot x) + d(\gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \cdot x, \gamma_1 \dots \gamma_k \cdot x) \leq \\ &\leq d(x, \gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \cdot x) + d(\gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \cdot x, \gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \cdot (\gamma_k \cdot x)) + \\ &+ d(\gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \cdot (\gamma_k \cdot x), \gamma_1 \dots \gamma_k \cdot x) \leq d(x, \gamma_1 \dots \gamma_{k-1} \cdot x) + \\ &+ Ld(x, \gamma_k \cdot x) + A + C \end{aligned}$$

e continuare per induzione. Le altre formule sono immediate.

Passiamo ora alla dimostrazione e cominciamo col notare che l'ipotesi (i) dell'enunciato implica che per ogni $x \in X$ e ogni $R > 0$ l'insieme $\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma \cdot x) \leq R\}$ è finito e la sua cardinalità è limitata superiormente da una costante $N_x(R) > 0$. Infatti, se $d(x, \gamma \cdot x) \leq R$, la disuguaglianza triangolare e la definizione di (L, A) -quasi isometria danno $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq N_x(R) = (L + 1)d(x_0, x) + A + R$. In modo analogo, ponendo $\alpha = \alpha_0 + A + Ld(x_0, x)$ l'ipotesi (ii) implica che per ogni $x \in X$, si ha $\inf_{\gamma \in \Gamma} \mu(B(\gamma \cdot x, \alpha)) > 0$, in quanto per ogni $\gamma \in \Gamma$, $B(\gamma \cdot x_0, \alpha_0) \subseteq B(\gamma \cdot x, \alpha_0 + A + Ld(x_0, x))$. Ora, per definizione di gruppo N -non abeliano, se γ_1 e γ_2 sono elementi di Γ che non commutano, possiamo supporre che γ_1^N e γ_2^N generino un semigruppone libero F in Γ . Ponendo $l_1 = l(\gamma_1^N) = Ld(x, \gamma_1^N \cdot x) + A + C$ e $l_2 = l(\gamma_2^N) = Ld(x, \gamma_2^N \cdot x) + A + C$, dotiamo F di una distanza di lunghezza che denotiamo d_l , e di una corrispondente entropia h rispetto alla misura che conta (come si era già fatto nella dimostrazione del Teorema 5.4.1). Vogliamo ora dimostrare che $h \leq Ent(X, d, \mu)$. Per farlo, ricorriamo a due lemmi.

Lemma (a). *Sia $R > 0$ un numero reale, sia $x \in X$ e sia $\Sigma_R(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot x \in B(x, R)\}$. Allora $h \leq \inf \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}^\#(\Sigma_R(x))}{R}$.*

Démonstration. Per semplicità di notazione scriviamo $s = \gamma_1^N$ e $t = \gamma_2^N$, e sia $\gamma = s^{p_1} t^{q_1} \dots s^{p_k} t^{q_k}$ un elemento di F ($p_i, q_i \geq 0$). Allora, usando le formule (c) e (d) che abbiamo scritto sopra, si ha

$$\begin{aligned} d(x, \gamma \cdot x) &\leq L[(p_1 + \dots + p_k)d(x, s \cdot x) + (q_1 + \dots + q_k)d(x, t \cdot x)] + \\ &+ (p_1 + \dots + p_k + q_1 + \dots + q_k)(A + C) = l_1(p_1 + \dots + p_k) + \\ &+ l_2(q_1 + \dots + q_k) = d_l(e, \gamma). \end{aligned}$$

Quindi $d_l(e, \gamma) < R$ implica, per ogni $R > 0$, $d(x, \gamma \cdot x) < R$ e risulta

$$B_{d_l}(e, R) \subseteq \{\gamma \in F \mid \gamma \cdot x \in B(x, R)\} \subseteq \Sigma_R(x),$$

da cui otteniamo la disuguaglianza $\sharp(B_{d_i}(e, R)) \leq \sharp(\Sigma_R(x))$. Passando ai logaritmi, dividendo per R e calcolando il limite inferiore per R che tende all'infinito su entrambi i membri di questa disuguaglianza, si ottiene il risultato di questo primo lemma (si noti che per l'ipotesi (i), la cardinalità di $\Sigma_R(x)$ è finita).

□

Lemma (b). *Se $\Sigma_R(x)$ è definito come nel Lemma (a), si ha*

$$\inf \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Log} \sharp(\Sigma_R(x))}{R} \leq \text{Ent}(X, d, \mu).$$

Démonstration. Per ogni $R > 0$ e ogni $\alpha > 0$, la disuguaglianza triangolare implica che $\bigcup_{\gamma \in \Sigma_R(x)} B(\gamma \cdot x, \alpha) \subseteq B(x, R + \alpha)$, da cui segue l'uguaglianza $\sum_{\gamma \in \Sigma_R(x)} \mu(B(\gamma \cdot x, \alpha)) = \int_{B(x, R + \alpha)} N(z) d\mu(z)$, dove denotiamo con $N(z)$ il numero dei $\gamma \in \Sigma_R(x)$ tali che $B(\gamma \cdot x, \alpha)$ contiene z , per ogni $z \in B(x, R + \alpha)$. Mostriamo ora che $N(z) \leq K$, dove K è una costante reale positiva che dipende solo da $x \in X$. Fissiamo $\gamma_0 \in \Sigma_R(x)$ tale che $z \in B(\gamma_0 \cdot x, \alpha)$ (se un tale γ_0 non esiste, abbiamo finito perchè si avrebbe $N(z) = 0$). Per ogni altro $\gamma \in \Sigma_R(x)$ tale che $z \in B(\gamma \cdot x, \alpha)$ si ha, per la disuguaglianza triangolare, $d(\gamma_0 \cdot x, \gamma \cdot x) \leq 2\alpha$ e quindi, per la formula (b), $d(x, \gamma_0^{-1} \gamma \cdot x) \leq 2L\alpha + A + 3C$. Ma il numero dei γ che soddisfano quest'ultima disuguaglianza è (tenendo conto dell'osservazione fatta all'inizio della dimostrazione del teorema circa l'ipotesi (i)) minore o uguale a $K = N_x(2L\alpha + A + 3C)$.

Ne segue : $\sum_{\gamma \in \Sigma_R(x)} \mu(B(\gamma \cdot x, \alpha)) \leq K \cdot \mu(B(x, R + \alpha))$.

Per l'ipotesi (ii), esiste un $\alpha > 0$ tale che $\inf_{\gamma \in \Gamma} \mu(B(\gamma \cdot x, \alpha)) = v > 0$. Per un tale α , si ha allora $\sum_{\gamma \in \Sigma_R(x)} \mu(B(\gamma \cdot x, \alpha)) \geq v \cdot \sharp(\Sigma_R(x))$, e cioè $v \cdot \sharp(\Sigma_R(x)) \leq K \cdot \mu(B(x, R + \alpha))$. Passando ai logaritmi di entrambi i membri, dividendo per R e passando al limite inferiore per R che tende all'infinito in entrambi i membri di quest'ultima disuguaglianza, si conclude la dimostrazione di questo secondo lemma.

□

A questo punto, applichiamo il Lemma 5.4.14 al semigruppato F generato da γ_1^N e γ_2^N e otteniamo :

$$e^{-h[Ld(x, \gamma_1^N \cdot x) + A + C]} + e^{-h[Ld(x, \gamma_2^N \cdot x) + A + C]} = 1$$

da cui

$$Ld(x, \gamma_2^N \cdot x) + A + C = \frac{1}{h} \text{Log} \left(\frac{1}{1 - e^{-h[Ld(x, \gamma_1^N \cdot x) + A + C]}} \right).$$

Da qui, si ottiene il punto (1) del Teorema applicando le disuguaglianze $h \leq \text{Ent}(X, d, \mu) \leq H$ e $d(x, \gamma_i^N \cdot x) \leq NLd(x, \gamma_i \cdot x) + N(A + C)$.

Il punto (2) si ottiene da (1) imponendo la disuguaglianza $NL^2d(x, \gamma_1x) + (NL + 1)(A + C) < \frac{Log2}{H}$.

Il punto (3) discende immediatamente da (2).

Per dimostrare il punto (4), si osservi che se si pone

$$\eta = \frac{1}{NL^3} \left[\frac{Log2}{H} - (NL + 1)(A + C) - NL^2(A + 3C + LC) \right]$$

allora i gruppi $\Gamma_{L\eta+A+(3+L)C}(x)$, $\Gamma_{\eta+A}(x)$ e $\Gamma_\eta(x)$ sono abeliani per ogni $x \in X$ come conseguenza del punto (3).

Se, per assurdo, il punto (4) è falso, allora per ogni $x \in X$, $\Gamma_\eta(x) \neq \{e\}$. Ne segue che, per l'ipotesi di transitività della commutazione, possiamo considerare la classe di equivalenza di $\Gamma_\eta(x) \setminus \{e\}$ rispetto a tale relazione, che denotiamo con $K_\eta(x)$. Sia ora $\Sigma_\eta(x) = \{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma \cdot x) < \eta\}$ e sia $\nu = \eta - \max_{\gamma \in \Sigma_\eta(x)} d(x, \gamma \cdot x)$ (tale ν è strettamente positivo perchè $\Sigma_\eta(x)$ è finito). Se $z \in X$ è tale che $d(x, z) < \frac{\nu}{L+1}$, allora per ogni $\gamma \in \Sigma_\eta(x)$ si ha

$$\begin{aligned} d(z, \gamma \cdot z) &\leq d(\gamma \cdot x, \gamma \cdot z) + d(x, \gamma \cdot x) + d(x, z) \leq (L+1)d(x, z) + A + d(x, \gamma \cdot x) < \\ &< \nu + d(x, \gamma \cdot x) + A < \eta + A \end{aligned}$$

e cioè $\Gamma_\eta(x) \subseteq \Gamma_{\eta+A}(z)$. Poichè $\Gamma_{\eta+A}(z)$ è abeliano e, per definizione, $\Gamma_\eta(z) \subseteq \Gamma_{\eta+A}(z)$, si ha che $K_\eta(x)$ e $K_\eta(z)$ contengono entrambi il gruppo abeliano non banale $\Gamma_{\eta+A}(z)$ e, poichè due classi di equivalenza sono o disgiunte o coincidono, si conclude che $K_\eta(x) = K_\eta(z)$. Questo significa che l'applicazione che invia ogni $x \in X$ in $K_\eta(x)$ è localmente costante e quindi, poichè X è connesso, costante. Posto $K_\eta(x) \cup \{e\} = \Gamma_0$, si ha che Γ_0 è un sottogruppo abeliano non banale di Γ .

Si osservi che per ogni $g \in \Gamma$ e ogni $\gamma \in \Sigma_\eta(g \cdot x)$ si ha

$$\begin{aligned} d(x, g^{-1}\gamma g \cdot x) &\leq d(x, g^{-1} \cdot (g \cdot x)) + d(g^{-1} \cdot (g \cdot x), g^{-1} \cdot (\gamma g \cdot x)) + d(g^{-1} \cdot (\gamma g \cdot x), g^{-1}\gamma g \cdot x) \leq \\ &\leq Ld(g \cdot x, \gamma g \cdot x) + A + 3C \leq L[d(g \cdot x, \gamma \cdot (g \cdot x)) + C] + A + 3C < \\ &< (3 + L)C + L\eta + A \end{aligned}$$

che comporta $\Gamma_\eta(g \cdot x) \subseteq g\Gamma_{L\eta+A+(3+L)C}(x)g^{-1}$. Da ciò segue, poichè $\Gamma_{L\eta+A+(3+L)C}(x)$ è un gruppo abeliano non banale, che la classe di equivalenza $K_\eta(g \cdot x)$ contiene $g\Gamma_{L\eta+A+(3+L)C}(x)g^{-1}$, e quindi contiene $gK_\eta(x)g^{-1}$. Ma allora essendo $K_\eta(x) = K_\eta(g \cdot x) = \Gamma_0 \setminus \{e\}$, si ha che $g\Gamma_0g^{-1} \subseteq \Gamma_0$ per ogni $g \in \Gamma$, e perciò Γ_0 è un sottogruppo abeliano normale di Γ , il che contraddice l'ipotesi che Γ sia N -non abeliano. \square

Prima di concludere il capitolo diamo una dimostrazione dell'esistenza della quasi inversa di una (λ, c) -quasi isometria $X \rightarrow Y$, che avevamo già anticipato nell'Esempio (b) illustrato precedentemente.

Sia $f : X \rightarrow Y$ una (λ, c) -quasi isometria. Per definizione, una tale f è c -quasi suriettiva, e quindi per ogni $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $d_Y(y, f(x)) \leq c$. Tramite l'assioma di scelta, ponendo $g(y) = x$, definiamo un'applicazione $g : Y \rightarrow X$. La prima condizione richiesta perchè g sia una quasi inversa di f , ovvero $d_Y(y, f(g(y))) \leq c$, è soddisfatta. Stimiamo $d_X(x, g(f(x)))$. Posto $x' = g(f(x))$, osserviamo che $d_Y(f(x), f(x')) \leq c$ per definizione e, poichè f è una (λ, c) -quasi isometria, si ha $d_X(x, g(f(x))) = d_X(x, x') \leq \lambda[d_Y(f(x), f(x')) + c] \leq 2\lambda c$.

Per dimostrare che g è una quasi isometria, poniamo $x = g(y)$, $x' = g(y')$ per $y, y' \in Y$ dati. Allora si ha

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(g(y)), f(g(y'))) \leq \lambda d_X(x, x') + c$$

e

$$d_Y(f(g(y)), f(g(y'))) \leq d_Y(f(g(y)), y) + d_Y(y, y') + d_Y(y', f(g(y'))) \leq d_Y(y, y') + 2c.$$

Analogamente,

$$d_Y(f(g(y)), f(g(y'))) \geq d_Y(y, y') - d_Y(f(g(y)), y) - d_Y(y', f(g(y'))) \geq d_Y(y, y') - 2c.$$

Si ottiene quindi

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - 3c \leq d_Y(y, y') \leq \lambda d_X(x, x') + 3c$$

ovvero

$$\frac{1}{\lambda}d_Y(y, y') - 3\lambda c \leq d_X(g(y), g(y')) \leq \lambda d_Y(y, y') + 3\lambda c$$

vale a dire g è una $(\lambda, 3\lambda c)$ -immersione quasi isometrica e, poichè g è per definizione $2\lambda c$ -quasi suriettiva, questo conclude la dimostrazione. \square

Exemple. L'inclusione isometrica $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ammette come quasi inversa la parte intera $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ (che associa ad ogni numero reale x il più grande intero $[x]$ tale che $[x] \leq x$).

Annexe A

Generatori, relazioni e grafo di Cayley

In questa appendice riprendiamo l'argomento dei gruppi finitamente generati richiamando brevemente alcune definizioni di base che abbiamo utilizzato nei capitoli 2 e 3. In particolare, definiremo la distanza delle parole, mostreremo la relazione esistente tra distanze associate a sistemi generatori diversi e discuteremo il concetto di presentazione di un gruppo. Infine, descriveremo la costruzione formale del grafo di Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ che è stata utilizzata in modo essenziale per dimostrare alcuni risultati del Capitolo 3.

Sia G un gruppo finitamente generato e sia $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un suo sistema di generatori, che supporremo *simmetrico* (questo significa che $e \notin S$, e che S assieme a ogni suo elemento s contiene anche l'inverso s^{-1}). Se $g \in G$ è tale che $g = s_{i_1} \dots s_{i_k}$, si dice che *la parola $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ rappresenta g rispetto a S* e l'intero k è detto *lunghezza* della parola.

Si definisce la *norma di un elemento $g \in G$ rispetto al sistema generatore S* , e si denota $\|g\|_S$, il più piccolo intero non negativo k tale che g si può scrivere come prodotto di k elementi di S . In tal caso, esiste una parola in S che rappresenta g e di lunghezza esattamente $\|g\|_S$: tale parola (che non è in generale unica) si dice *parola (o scrittura) minimale* per g .

La norma rispetto a S soddisfa le tre proprietà seguenti :

- (i) $\|g\|_S = 0$ se e solo se $g = e$ (l'elemento neutro in G) : per convenzione l'elemento neutro è l'unica parola di lunghezza zero in G ;
- (ii) $\|g\|_S = \|g^{-1}\|_S$ per ogni $g \in G$: questo segue direttamente dal fatto che se $g = s_{i_1} \dots s_{i_k}$, allora $g^{-1} = s_{i_k}^{-1} \dots s_{i_1}^{-1}$;
- (iii) $\|gh\|_S \leq \|g\|_S + \|h\|_S$ per ogni $g, h \in G$: infatti, se $g = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ e $h = s_{j_1} \dots s_{j_l}$ sono scritture minimali per g e h rispettivamente, allora $gh = s_{i_1} \dots s_{i_k} s_{j_1} \dots s_{j_l}$ e quindi $\|gh\|_S \leq k + l = \|g\|_S + \|h\|_S$.

Le proprietà (i), (ii), (iii) permettono di definire sul gruppo G la *distanza delle parole* d_S ponendo $d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S$ per ogni g e h appartenenti a G . (La verifica che d_S così definita è una distanza è immediata.)

Si noti che $d_S(hg_1, hg_2) = \|g_1^{-1}h^{-1}hg_2\|_S = \|g_1^{-1}g_2\|_S = d_S(g_1, g_2)$, il che si esprime dicendo che la distanza d_S è *invariante a sinistra*.

Siano $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ e $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ due sistemi generatori di G e siano d_S e d_T due distanze delle parole definite come sopra. Allora, per ogni $i = 1, \dots, m$, si ha $t_i = s_{i_1} \dots s_{i_{k(i)}}$, dove $s_{i_j} \in S$ e, per ogni $\gamma \in G$, se $\gamma = t_1 \dots t_r$ è una scrittura minimale per γ (i.e. $\|\gamma\|_T = r$), $\gamma = s_{1_1} \dots s_{1_{k(1)}} \dots s_{r_1} \dots s_{r_{k(r)}}$ è una parola in S che rappresenta γ e si ha $\|\gamma\|_S \leq Lr = L\|\gamma\|_T$, per $L = \max_{i=1, \dots, r} \{k(i)\}$.

Ripetendo lo stesso argomento se si scambiano S e T si conclude che esiste una costante $L' \geq 1$ tale che $\|\gamma\|_T \leq L'\|\gamma\|_S$ per ogni $\gamma \in G$. Sostituendo L e L' con $c = \max\{L, L'\}$, possiamo scrivere $c^{-1}\|\gamma\|_T \leq \|\gamma\|_S \leq c\|\gamma\|_T$ per ogni $\gamma \in G$ o, equivalentemente,

$$c^{-1} d_T(g_1, g_2) \leq d_S(g_1, g_2) \leq c d_T(g_1, g_2)$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$. Ciò mostra che passando da un sistema generatore S a un altro T la deformazione della metrica delle parole che si verifica è controllata superiormente e inferiormente da una costante reale $c \geq 1$ che dipende solo da S e T . Questo fatto si esprime dicendo che gli spazi metrici (G, d_S) e (G, d_T) sono *quasi-isometrici*, come nella seguente :

Définition A.0.4. ([B-B-I]) *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $c \geq 1$ un numero reale. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice immersione c -quasi isometrica ($c > 0$) se per ogni $x_1, x_2 \in X$, si ha*

$$\frac{1}{c} d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq c d_X(x_1, x_2).$$

Se inoltre l'immagine $f(X)$ è una rete in Y (i.e. se esiste una costante $N > 0$ tale che per ogni $y \in Y$ si ha $d(f(x), y) \leq N$ per qualche $x \in X$) X e Y si dicono quasi isometrici.

Exemple. Se S e T sono sistemi generatori di un gruppo G , l'identità $Id : G \rightarrow G$ è una quasi isometria tra (G, d_S) e (G, d_T) .

Définition. *Si dice relatore in (G, S) una parola $s_{i_1} \dots s_{i_k} \in S$ che rappresenta l'elemento neutro $e \in G$. L'espressione $s_{i_1} \dots s_{i_k} = e$ è detta relazione in (G, S) .*

Se $\mathbb{F}(S)$ denota il gruppo libero generato da S , esiste un unico omomorfismo di gruppi $\phi : \mathbb{F}(S) \rightarrow G$ tale che $\phi(s) = s$ per ogni $s \in S$. Allora, l'insieme dei relatori in (G, S) si identifica con il sottogruppo normale N_{rel} dei $\gamma \in \mathbb{F}(S)$ tali che $\phi(\gamma) = e$, detto *sottogruppo delle relazioni di* (G, S) . Il gruppo G è univocamente determinato da S e N_{rel} , in quanto l'applicazione $\phi : \mathbb{F}(S) \rightarrow G$ è un epimorfismo con nucleo N_{rel} che induce un isomorfismo $G \simeq \mathbb{F}(S)/N_{rel}$. Una *presentazione finita di* G è una coppia $\langle S|R \rangle$, dove R è un insieme finito che genera N_{rel} come sottogruppo normale (vale a dire, N_{rel} è generato dall'insieme $\{grg^{-1} \mid r \in R, g \in \mathbb{F}(S)\}$). Se G ammette una presentazione finita, G si dice *finitamente presentato*.

Esistono gruppi finitamente generati che non hanno una presentazione finita : sia ad esempio \mathbb{F}_2 il gruppo libero a due generatori $\{a, b\}$ e sia \mathbb{F}' il suo sottogruppo commutatore (che è un gruppo libero di rango infinito : [Rot], pag. 386). Allora il gruppo

$$G = \langle a, b, p \mid p^{-1}w_n p = w_n, n \geq 1 \rangle$$

dove $\{w_1, \dots, w_i, \dots\}$ è una base di \mathbb{F}' , è finitamente generato ma non finitamente presentato ([Rot], pag. 417).

Esiste un'infinità non numerabile di gruppi finitamente generati a due a due non isomorfi ([Rot], pag. 406). D'altra parte, si vede facilmente che i gruppi finitamente presentati sono un'infinità numerabile : dunque esiste un'infinità non numerabile di gruppi finitamente generati che non sono finitamente presentati.

Assegnati ora un gruppo G e un suo sistema di generatori finito simmetrico S , vogliamo costruire il grafo di Cayley $\mathbb{C}(G, S)$.

Définition A.0.5. (cfr. [Ma], pag. 190) *Un grafo è una coppia (X, X_0) formata da uno spazio di Hausdorff X e da un sottoinsieme $X_0 \subseteq X$ (i cui elementi si dicono vertici di X) tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni :*

- i) X_0 è un sottospazio chiuso e discreto di X ;
- ii) $X \setminus X_0$ è l'unione disgiunta di una famiglia $E = \{e_i\}_{i \in I}$ di aperti di X , ciascuno omeomorfo a un intervallo aperto di \mathbb{R} . La chiusura \bar{e}_i di ogni $e_i \in E$ è detta lato del grafo ;
- iii) per ogni $e_i \in E$, la frontiera $\bar{e}_i \setminus e_i$ consiste di uno o due punti. Se $\bar{e}_i \setminus e_i$ consiste di due punti, la coppia (\bar{e}_i, e_i) è omeomorfa alla coppia $([0, 1], (0, 1))$; se $\bar{e}_i \setminus e_i$ consiste di un solo punto, la coppia (\bar{e}_i, e_i) è omeomorfa alla coppia $(S^1, S^1 \setminus \{p\})$, dove S^1 è la circonferenza unitaria nel piano (in quest'ultimo caso \bar{e}_i è detto loop) ;

iv) un sottoinsieme $A \subseteq X$ è aperto (chiuso) se e solo se $A \cap \bar{e}_i$ è aperto (chiuso) per ogni $e_i \in E$, dove \bar{e}_i si intende dotato della topologia usuale per $[0, 1]$ o S^1 .

Nel caso in cui il grafo X abbia un numero finito di lati la condizione iv) è automaticamente soddisfatta (il grafo si dice allora finito). Un grafo è *localmente finito* se ogni vertice appartiene solo a un numero finito di lati. Si osservi che un grafo localmente finito è localmente compatto (per queste e altre questioni topologiche sui grafi, si veda ad esempio [Ma], Capitolo 6).

In termini combinatori, un grafo è definito come una coppia (A_e, A_0) costituita da un insieme A_e (insieme dei lati), un insieme A_0 (insieme dei vertici) e da due funzioni $\phi : A_e \rightarrow A_0 \times A_0$ e $I : A_e \rightarrow A_e$, dove per ogni $y \in A_e$ poniamo $\phi(y) = (o(y), t(y))$, tali che le seguenti condizioni sono soddisfatte : per ogni $y \in A_e$, $I(y) \neq y$; $I(I(y)) = y$; $o(y) = t(I(y))$. I punti $o(y)$ e $t(y)$ si dicono *vertice iniziale* e *vertice finale* del lato y rispettivamente.

La corrispondenza fra le descrizioni topologica (Definizione A.0.5) e combinatoria di un grafo si ottiene considerando la *realizzazione* $Real(A_e, A_0)$ della coppia (A_e, A_0) . Si dotano A_e e A_0 della topologia discreta, e si considera l'unione topologica disgiunta $T = (A_e \times [0, 1]) \cup A_0$. Su T definiamo la relazione d'equivalenza \sim come segue : per ogni $y \in A_e$, e ogni $\alpha \in [0, 1]$, sia $(y, \alpha) \sim (I(y), 1 - \alpha)$; $(y, 0) \sim o(y)$ e $(y, 1) \sim t(y)$. Definiamo $Real(A_e, A_0)$ come il quoziente T / \sim . La topologia di $Real(A_e, A_0)$ soddisfa allora alle proprietà i), ii), iii) e iv) della Definizione A.0.5 se, come insieme dei vertici si considera l'insieme delle classi di equivalenza degli elementi di A_0 rispetto alla relazione \sim . (Si noti che, in questa corrispondenza, un lato y è un loop se e solo se $o(y) = t(y)$)

Nella descrizione topologica di un grafo, manca la distinzione tra il vertice iniziale e quello finale dei lati. Per ovviare a ciò, per ogni lato e del grafo diciamo che due omeomorfismi $h_0 : e \rightarrow (0, 1)$, $h_1 : e \rightarrow (0, 1)$ sono *equivalenti* se la mappa composta $h_0 \circ h_1^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ è monotona crescente. Un'*orientazione* per il lato e è allora una scelta di una classe di equivalenza di omeomorfismi $h : e \rightarrow (0, 1)$. Un lato si dice *orientato* se ha un'orientazione. Dato un lato orientato e , e un omeomorfismo $h : \bar{e} \rightarrow [0, 1]$ (o $h : \bar{e} \rightarrow S^1$) tale che la restrizione $h|_e$ appartiene alla classe che definisce l'orientazione scelta, diremo che il punto iniziale di e è $h^{-1}(0)$ e il punto finale di e è $h^{-1}(1)$. In un grafo, un *cammino* è una sequenza di lati orientati (e_1, \dots, e_n) tali che il punto finale di e_i è il punto iniziale di e_{i+1} , per ogni $i = 1, \dots, n - 1$.

Il *punto iniziale* (risp. *punto finale*) di un cammino (e_1, \dots, e_n) è il punto iniziale di e_1 (risp. il punto finale di e_n). Il punto iniziale e il punto finale di un cammino sono detti *estremi* del cammino.

Su un grafo X definiamo una misura μ come segue : dato un sottoinsieme

$A \subseteq X$, poniamo $\mu(A) = \sum l(A \cap \bar{e}_i)$, dove $l(A \cap \bar{e}_i)$ è la lunghezza usuale di $A \cap \bar{e}_i$ visto come sottoinsieme di $\bar{e}_i = [0, 1]$ (risp. $\bar{e}_i = S^1$) dotato della misura di Lebesgue ereditata da \mathbb{R} (risp. della misura unitaria sulla circonferenza, cioè tale che $\mu(S^1) = 1$) e la somma è estesa a tutti i lati del grafo.

Infine, un grafo X può essere metrizzato definendo su di esso una distanza di lunghezza come segue : dati due punti $x, y \in X$, la distanza $d(x, y)$ è definita come l'estremo inferiore delle misure dei cammini di estremi x e y .

Définition A.0.6. ([H1], pag. 76) *Sia (G, S) un gruppo marcato. Si dice grafo di Cayley di (G, S) e si denota con $\mathbb{C}(G, S)$ la realizzazione del grafo combinatorio che ha come insieme dei vertici gli elementi di G , come insieme dei lati le coppie (g, gs) con $g \in G$ e $s \in S$, e dove $o(g, gs) = g$, $t(g, gs) = gs$, $I((g, gs)) = (gs, g) = (gs, gss^{-1})$.*

Si noti che se S è simmetrico, $\mathbb{C}(G, S)$ è privo di loop. Inoltre, se S è finito, da ogni vertice di $\mathbb{C}(G, S)$ parte un numero finito di lati, e $\mathbb{C}(G, S)$ è localmente compatto. Il lato (g, gs) viene usualmente denotato $[g, gs]$ quando esso si intende identificato all'intervallo $[0, 1]$ nella realizzazione del grafo.

Dati due vertici $g_1, g_2 \in G$, un cammino che li unisce è una sequenza $((g_1, g_1s_1), (g_1s_1, g_1s_1s_2), \dots, (g_1s_1\dots s_{k-1}, g_2))$ tale che esiste un $s_k \in S$ con $s_1\dots s_k = g_1^{-1}g_2$. La lunghezza (misura) di tale cammino è quindi uguale a k , e ne discende che la distanza di lunghezza definita come sopra su $\mathbb{C}(G, S)$ coincide, se ristretta a G , con la distanza delle parole $d_S(g_1, g_2)$ definita all'inizio di questa appendice.

Annexe B

Azioni di gruppo e presentazioni

Discutiamo qui i legami tra le proprietà algebriche di un gruppo G e le proprietà geometriche dell'azione di G su uno spazio X . In particolare, dimostreremo due risultati classici (Proposizione B.0.8 e Proposizione B.0.9) che nel Capitolo 3 abbiamo utilizzato in modo essenziale per ottenere alcuni risultati di finitezza. Infine, dimostreremo una versione del "Ping-Pong Lemma" che in [B-C-G] è stata utilizzata per dimostrare una proprietà algebrica essenziale dei gruppi δ -non abeliani (cfr. pag. 75).

Dati un gruppo G e un insieme non vuoto X , un'azione di G su X è un'applicazione $\phi : G \times X \longrightarrow X$ tale che :

- (i) $\phi(e, x) = x$ per ogni $x \in X$, dove e denota l'elemento neutro di G ;
- (ii) $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ per ogni $g, h \in G$ e ogni $x \in X$.

In seguito indicheremo con la giustapposizione gx l'elemento $\phi(g, x)$. Se G agisce su X , diremo anche che X è un G -insieme.

Se X è uno spazio topologico, un'azione di un gruppo G su X è detta *azione continua* se, per ogni $g \in G$ fissato, l'applicazione $\phi_g : X \longrightarrow X$ definita ponendo $\phi_g(x) = gx$ per ogni $x \in X$ è un'applicazione continua. Si noti che la ϕ_g è un omomorfismo con inversa $\phi_{g^{-1}}$. In tal caso si dice che X è un G -spazio.

Su un G -insieme X risulta definita una relazione di equivalenza naturale : dati $x, y \in X$, diciamo che $x \sim y$ se e solo se esiste un $g \in G$ tale che $y = gx$. La classe di equivalenza $Gx = \{y \in X \mid y = gx \text{ per qualche } g \in G\}$ rispetto a questa relazione è detta *orbita di x* . L'insieme quoziente X/\sim (denotato anche X/G) è detto *spazio delle orbite*. Se X è uno spazio topologico e l'azione

di G su X è continua, lo spazio delle orbite si intende dotato della topologia quoziente.

E' opportuno richiamare qui un risultato generale sulle presentazioni di gruppo che noi abbiamo utilizzato applicandolo ai gruppi fondamentali di varietà (Teorema 7.0.12) ed ancora ai gruppi iperbolici (Corollario 7.0.9) per ottenere risultati di finitezza.

Théorème B.0.7. ([Ser], pag. 30) *Sia X un G -spazio, e sia $U \subseteq X$ un aperto tale che $X = \bigcup_{g \in G} gU$. Supponiamo X connesso per archi e semplicemente connesso, e supponiamo U connesso per archi. Risulta allora :*

- (i) *l'insieme Σ dei $g \in G$ tali che $gU \cap U \neq \emptyset$ genera G ;*
- (ii) *$\langle \{x_s\}_{s \in \Sigma} \mid \{x_s x_t x_{st}^{-1}\}_{(s,t) \in W} \rangle$ è una presentazione di G , dove W è l'insieme delle coppie (s, t) di elementi di Σ tali che $U \cap sU \cap stU \neq \emptyset$ (si noti che $st \in \Sigma$) e $\{x_s\}_{s \in \Sigma}$ è una base del gruppo libero $\mathbb{F}(\Sigma)$ generato da Σ .*

Démonstration. Sia H il sottogruppo di G generato dagli elementi di Σ . Lo spazio X si scrive come unione $HU \cup (G \setminus H)U$. Gli insiemi HU e $(G \setminus H)U$ sono aperti (in quanto unione di aperti) e disgiunti : se infatti si avesse $hu = gu'$, con $h \in H, g \in G \setminus H$, e $u, u' \in U$, sarebbe $g^{-1}hU \cap U \neq \emptyset$, ovvero $g^{-1}h \in \Sigma$, il che implica $g \in H$, contro le ipotesi. Poichè X è connesso, HU e $(G \setminus H)U$ non possono essere entrambi non vuoti. Poichè H contiene l'elemento neutro di G , deve essere $G \setminus H = \emptyset$, ovvero $G = H$, il che prova (i).

Proviamo ora (ii). Sia $R = \{x_s x_t x_{st}^{-1}\}_{(s,t) \in W}$. Si noti che ponendo $t = e$ (risp. $t = s^{-1}$) nelle relazioni che definiscono W si ottiene $x_e \in R$ (risp. $x_{s^{-1}} x_s \in R$). Sia $\mathbb{F}(\Sigma)$ il gruppo libero generato da $\{x_s\}_{s \in \Sigma}$, e sia $p : \mathbb{F}(\Sigma) \rightarrow G$ l'unico omomorfismo di gruppi tale che $p(x_s) = s$ per ogni $s \in \Sigma$. Sia \tilde{G} il gruppo quoziente di $\mathbb{F}(\Sigma)$ rispetto al più piccolo sottogruppo normale che contiene $R = \{x_s x_t x_{st}^{-1}\}_{(s,t) \in W}$, e sia $\tilde{p} : \mathbb{F}(\Sigma) \rightarrow \tilde{G}$ la proiezione canonica. Per ogni $s \in \Sigma$, denotiamo $\tilde{s} = \tilde{p}(x_s)$. Si noti che l'insieme $\{\tilde{s}\}_{s \in \Sigma}$ genera \tilde{G} . Poichè gli elementi di R sono relazioni valide in G (i.e. $p(r) = e$ per ogni $r \in R$), si ha che esiste un unico omomorfismo $\tilde{\pi} : \tilde{G} \rightarrow G$ tale che $\tilde{\pi} \circ \tilde{p} = p$, definito univocamente ponendo $\tilde{\pi}(\tilde{s}) = s$. Chiaramente $\tilde{\pi}$ è suriettivo. Dimostriamo che $\tilde{G} = G$ facendo vedere che $\text{Ker}(\tilde{\pi}) = \{e\}$.

Per ogni $\tilde{g} \in \tilde{G}$, denotiamo $\tilde{g}U$ una copia di U indicizzata da \tilde{g} . Sia \tilde{X} lo spazio topologico che si ottiene come quoziente dell'unione topologica disgiunta $\bigcup_{\tilde{g} \in \tilde{G}} \tilde{g}U$ rispetto alla relazione di equivalenza (che denotiamo \sim) definita come segue : $\tilde{g}_1 u_1 \sim \tilde{g}_2 u_2$ se e solo se per qualche $s \in \Sigma$ si ha $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 \tilde{s}$ e $u_2 = s u_1$. (Per la transitività, si noti che se $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 \tilde{s}_1$, $u_2 = s_1 u_1$ e $\tilde{g}_2 = \tilde{g}_3 \tilde{s}_2$, $u_3 = s_2 u_2$, allora $\tilde{g}_1 = \tilde{g}_3 \tilde{s}_2 \tilde{s}_1$ e $u_3 = s_2 s_1 u_1$, dove $s_2 s_1 \in \Sigma$ e $\tilde{s}_2 \tilde{s}_1 = \widetilde{s_2 s_1}$ in quanto $\tilde{p}(x_{s_2} x_{s_1} x_{s_2 s_1}^{-1}) = \tilde{s}_2 \tilde{s}_1 \widetilde{s_2 s_1}^{-1}$ e $x_{s_2} x_{s_1} x_{s_2 s_1}^{-1} \in R$).

Si osservi che \tilde{X} è connesso per archi. Per vederlo, siano $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$. Supponiamo che $\tilde{x}_1 = [\tilde{g}_1 u_1]$ e $\tilde{x}_2 = [\tilde{g}_2 u_2]$. Sia $\tilde{g}_1^{-1} \tilde{g}_2 = \tilde{s}_1 \dots \tilde{s}_k$, e consideriamo la sequenza di copie di U indicizzate $\tilde{g}_1 U, \tilde{g}_1 \tilde{s}_1 U, \tilde{g}_1 \tilde{s}_1 \tilde{s}_2 U, \dots, \tilde{g}_2 U$. Dimostriamo che l'unione $[\tilde{g}_1 U] \cup [\tilde{g}_1 \tilde{s}_1 U] \cup \dots \cup [\tilde{g}_2 U]$ è connessa per archi. Consideriamo per ogni $i = 0, \dots, k$ l'insieme $\tilde{V}_i = [\tilde{g}_1 U] \cup \dots \cup [\tilde{g}_1 \tilde{s}_1 \dots \tilde{s}_i U]$ e ragioniamo per induzione su i (assumendo $\tilde{V}_0 = [\tilde{g}_1 U]$). In quanto proiezione sul quoziente di $\tilde{g}_1 U$, che è connesso per archi, \tilde{V}_0 è connesso per archi. Supponiamo per ipotesi induttiva che \tilde{V}_i sia connesso per archi. Allora lo è anche $\tilde{V}_{i+1} = \tilde{V}_i \cup [\tilde{g}_1 \tilde{s}_1 \dots \tilde{s}_{i+1} U]$ in quanto unione di due insiemi connessi per archi aventi intersezione non vuota (per ogni $u \in U$, si ha $[\tilde{g}_1 \tilde{s}_1 \dots \tilde{s}_i u] = [\tilde{g}_1 \tilde{s}_1 \dots \tilde{s}_{i+1} (s_{i+1}^{-1} u)]$). Ne segue che \tilde{V}_k è connesso per archi.

Sia $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ l'applicazione definita per ogni $\tilde{g} \in \tilde{G}$ e ogni $u \in U$ ponendo $\pi([\tilde{g}u]) = \tilde{\pi}(\tilde{g})u$. Si ha che π è suriettiva in quanto $\tilde{\pi}$ lo è e perchè $X = \bigcup_{g \in G} gU$. Inoltre $[\tilde{g}u] \in \pi^{-1}(U)$ solo se $\tilde{\pi}(\tilde{g})u \in U$ e cioè, per definizione di Σ , se e solo se $\tilde{\pi}(\tilde{g}) = s$ per qualche $s \in \Sigma$. In tal caso si ha $\tilde{g} = \tilde{r}\tilde{s}$ per qualche $\tilde{r} \in Ker(\tilde{\pi})$. Quindi ogni elemento di $\pi^{-1}(U)$ si può scrivere come $[\tilde{r}u]$ per qualche $\tilde{r} \in Ker(\tilde{\pi})$ e $u \in U$, e tale espressione è unica in quanto si ha $\tilde{r}_1 u_1 \sim \tilde{r}_2 u_2$ se e solo se $u_2 = u_1 s$ e $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_2 \tilde{s}$ per qualche $s \in \Sigma$: ma questo implica che $s = e$.

In conclusione $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{r} \in Ker(\tilde{\pi})} [\tilde{r}U]$ (dove l'unione è disgiunta). Ciò dimostra che U è un intorno elementare (nel senso dei rivestimenti) di un qualunque suo elemento. Analogamente, per ogni $\gamma \in G$, si ha $\pi^{-1}(\gamma U) = \bigcup_{\tilde{r} \in Ker(\tilde{\pi})} [\tilde{\gamma} \tilde{r}U]$. Ne segue che $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ è un rivestimento di X di indice uguale alla cardinalità di $Ker(\tilde{\pi})$. Ma, poichè X è per ipotesi semplicemente connesso, deve essere $Ker(\tilde{\pi}) = \{e\}$ e quindi $\tilde{G} = G$.

□

Exemple. Sia (X, g) una varietà Riemanniana compatta, e sia $\pi_1(X)$ il suo gruppo fondamentale. Sia (\tilde{X}, \tilde{g}) il rivestimento universale Riemanniano di X , dotato della metrica sollevata \tilde{g} . Il gruppo $\pi_1(X)$ agisce per isometrie su (\tilde{X}, \tilde{g}) , e l'azione è propriamente discontinua (i.e. per ogni compatto $K \subseteq \tilde{X}$, l'insieme dei $\gamma \in \pi_1(X)$ tali che $\gamma K \cap K \neq \emptyset$ è finito).

Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$ un punto fissato e sia

$$D(\tilde{x}) = \{\tilde{y} \in \tilde{X} \mid d(\tilde{y}, \tilde{x}) \leq d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x}) \text{ per ogni } \gamma \in \pi_1(X)\}$$

il dominio di Dirichlet di \tilde{X} rispetto all'azione di $\pi_1(X)$, centrato in \tilde{x} .

Allora $\tilde{X} = \bigcup_{\gamma \in \pi_1(X)} \gamma D(\tilde{x})$. Infatti, per ogni $\tilde{z} \in \tilde{X}$, l'essere l'azione di $\pi_1(X)$ propriamente discontinua implica che esiste $\gamma_0 \in \pi_1(X)$ tale che $d(\gamma_0 \cdot \tilde{z}, \tilde{x}) \leq d(\gamma \cdot \tilde{z}, \tilde{x})$ per ogni $\gamma \in \pi_1(X)$. Poichè $d(\gamma \cdot \tilde{z}, \tilde{x}) = d(\gamma_0 \cdot \tilde{z}, \gamma_0 \gamma^{-1} \cdot \tilde{x})$, si ha che $\gamma_0 \cdot \tilde{z} \in D(\tilde{x})$ e quindi $\tilde{z} \in \gamma_0^{-1} D(\tilde{x})$.

Si noti che $D(\tilde{x})$ è connesso per archi. Per vederlo, dimostriamo che per ogni $\tilde{z} \in D(\tilde{x})$, ogni geodetica minimizzante \tilde{c} di punto iniziale \tilde{x} e punto finale \tilde{z} è interamente contenuta in $D(\tilde{x})$. Infatti, se esistesse su \tilde{c} un punto $\tilde{y} \notin D(\tilde{x})$, allora esisterebbe $\gamma \in \pi_1(X)$ tale che $d(\tilde{y}, \tilde{x}) > d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})$, e quindi si avrebbe

$$d(\tilde{x}, \tilde{z}) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}) > d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}) \geq d(\tilde{z}, \gamma \cdot \tilde{x})$$

contro l'ipotesi che $\tilde{z} \in D(\tilde{x})$.

Per ogni numero reale $\nu > 0$, denotiamo ora con U_ν l'aperto di \tilde{X} costituito dai punti che si trovano a distanza strettamente minore di ν da $D(\tilde{x})$. Chiaramente $\bigcup_{\gamma \in \pi_1(X)} \gamma U_\nu = \tilde{X}$. Essendo l'azione di $\pi_1(X)$ propriamente discontinua, risulta $\inf d(D(\tilde{x}), \gamma D(\tilde{x})) > 0$, dove l'estremo inferiore è calcolato tra i $\gamma \in \pi_1(X)$ tali che $\gamma D(\tilde{x}) \cap D(\tilde{x}) = \emptyset$ (se così non fosse, esisterebbe in $\pi_1(X)$ una successione $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi distinti tali che $K \cap \gamma_n K \neq \emptyset$, dove K è il compatto costituito dai punti di \tilde{X} che distano al più c da $D(\tilde{x})$, per un qualunque $c > 0$ fissato). Allora, se $\nu < \inf d(D(\tilde{x}), \gamma D(\tilde{x}))$ si ha $\gamma U_\nu \cap U_\nu = \emptyset$ se e solo se $\gamma D(\tilde{x}) \cap D(\tilde{x}) = \emptyset$.

Se si applica il Teorema B.0.7 a \tilde{X} e all'aperto $U_\nu \subseteq \tilde{X}$, per $G = \pi_1(X)$, se ne deduce che il gruppo $\pi_1(X)$ è generato dall'insieme Σ dei $\gamma \in \pi_1(X)$ tali che $\gamma D(\tilde{x}) \cap D(\tilde{x}) \neq \emptyset$. Poiché l'azione è propriamente discontinua, si ha che Σ è un insieme finito.

Inoltre ogni elemento $\gamma \in \Sigma$ è tale che $d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x}) \leq 2 \text{diam}(X, g)$: infatti, per ogni $\tilde{z} \in D(\tilde{x})$, $d(\tilde{x}, \tilde{z}) = d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{z}))$ perchè, per definizione di metrica quoziente, si ha $d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{z})) = d(g \cdot \tilde{x}, \tilde{z})$ per qualche $g \in \pi_1(X)$. Ne segue che se $\tilde{z} \in D(\tilde{x}) \cap \gamma D(\tilde{x})$ allora

$$d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x}) \leq d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{z}, \gamma \cdot \tilde{x}) = d(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{z})) + d(\pi(\tilde{z}), \pi(\gamma \cdot \tilde{x})) \leq 2 \text{diam}(X, g).$$

Dal Teorema B.0.7 si deriva anche che $\pi_1(X)$ ammette una presentazione $\langle \Sigma | R \rangle$ in cui la lunghezza delle parole in R è al più 3.

L'esempio appena descritto rispecchia quanto stabilito nella proposizione che segue.

Proposition B.0.8. ([Gr2], Prop. 5.28, pag. 290) *Sia V una varietà Riemanniana di diametro $\text{diam}(V) = d$. Allora per ogni $\tilde{v} \in \tilde{V}$, il gruppo $\pi_1(V)$ ammette un insieme finito di generatori $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ per i quali $d(\tilde{v}, \gamma_i \cdot \tilde{v}) \leq 2d$ e tali che tutte le relazioni tra i γ_i siano della forma $\gamma_i \gamma_j \gamma_k^{-1}$.*

Per il caso delle presentazioni dei gruppi iperbolici, illustriamo il seguente.

Exemple. Sia G un gruppo finitamente generato dotato di un sistema di generatori finito S , e sia n un intero positivo. Il complesso simpliciale i cui

k -simplessi sono le $(k + 1)$ -uple (g_0, \dots, g_k) tali che $d_S(g_i, g_j) \leq n$ per ogni $i, j = 0, \dots, k$ si denota con $P_n(G, S)$ e prende il nome di *complesso di Rips* ([G-H], pag. 68). Si definisce su $P_n(G, S)$ un'azione simpliciale di G denotando con $\gamma(g_0, \dots, g_k)$ il semplice $(\gamma g_0, \dots, \gamma g_k)$, per ogni $\gamma \in G$ e ogni semplice (g_0, \dots, g_k) .

Se il gruppo G è α -iperbolico secondo Gromov per qualche $\alpha \geq 0$ (Definizione 6.3.2) e se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4\alpha + 2$, allora $P_n(G, S)$ è contraibile e in particolare semplicemente connesso ([G-H], Teorema 4.10). Sia m la dimensione di $P_n(G, S)$ (i.e. il massimo degli interi k tali che esiste un k -simple in $P_n(G, S)$). Denotiamo con U l'insieme dei punti interni dell'unione degli m -simplessi di $P_n(G, S)$ che contengono l'elemento neutro $e \in G$. Allora U è un aperto connesso in $P_n(G, S)$ che contiene l'elemento neutro. Inoltre, $\bigcup_{\gamma \in G} \gamma U = P_n(G, S)$ in quanto $e \in U$ e per ogni semplice (g_0, \dots, g_m) di dimensione m si ha $(g_0, \dots, g_m) = g_0(e, g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_m)$.

Applicando all'azione di G su $P_n(G, S)$ il Teorema B.0.7, si ha che G è generato dall'insieme $\Sigma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$ dei γ_i tali che $\gamma_i U \cap U \neq \emptyset$, e ammette una presentazione del tipo $G = \langle \Sigma | R \rangle$ dove ogni elemento di R è del tipo $\gamma_i \gamma_j \gamma_s$, $i, j, s = 1, \dots, l$. Ora, si può avere $\gamma_i U \cap U \neq \emptyset$ se e solo se U e $\gamma_i U$ hanno in comune un semplice di dimensione uguale alla dimensione di $P_n(G, S)$, cioè se esiste un'uguaglianza tra simplessi del tipo $(e, g_1, \dots, g_{m-1}) = (\gamma_i, \gamma_i g'_1, \dots, \gamma_i g'_{m-1})$. Ne segue che $e \in (\gamma_i, \gamma_i g'_1, \dots, \gamma_i g'_{m-1})$ e $d_S(e, \gamma_i) \leq n$. Allora, detta l la lunghezza di un relatore $\gamma_i \gamma_j \gamma_s \in R$, si ha $l \leq 3n$. Vediamo quindi che l'esempio descritto verifica la seguente :

Proposition B.0.9. ([G-H], Prop. 4.17) *Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale e sia Γ un gruppo α -iperbolico rispetto a un suo sistema di generatori S . Allora esiste una presentazione finita $\langle S | R_n \rangle$ di Γ tale che le relazioni in R_n hanno (rispetto al sistema S) lunghezza $l \leq 3n$, per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4\alpha + 2$.*

Concludiamo questa appendice con un risultato ben noto (dimostrato per la prima volta da F. Klein nel 1883).

Théorème B.0.10. (Ping-Pong Lemma) *Sia X un G -insieme, siano Γ_1, Γ_2 due sottogruppi di G , e sia Γ il sottogruppo di G generato da Γ_1 e Γ_2 . Supponiamo che Γ_1 contenga almeno tre elementi, Γ_2 contenga almeno due elementi e che esistano due sottoinsiemi non vuoti $X_1, X_2 \subseteq X$, $X_2 \not\subseteq X_1$, tali che*

- (1) $\gamma(X_2) \subseteq X_1$ per ogni $\gamma \in \Gamma_1 \setminus \{e\}$;
- (2) $\gamma(X_1) \subseteq X_2$ per ogni $\gamma \in \Gamma_2 \setminus \{e\}$.

Allora Γ è isomorfo al prodotto libero $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

Démonstration. (cfr. [H1], Lemma II-24) In una formulazione equivalente, la tesi del teorema dice che per ogni espressione $w = w_1 \dots w_k$ tale che si abbia $w_i \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \setminus \{e\}$ e tale che due elementi consecutivi w_i, w_{i+1} non appartengono allo stesso Γ_j ($j = 1, 2, i = 1, \dots, k$), risulta allora $w \neq e$.

Per vederlo, supponiamo dapprima che $w_1, w_k \in \Gamma_1 \setminus \{e\}$. Allora, in base alle ipotesi, $w(X_2) \subseteq X_1$ e quindi $w \neq e$, in quanto $X_2 \not\subseteq X_1$.

Se $w_1, w_k \in \Gamma_2 \setminus \{e\}$, scegliendo $a \in \Gamma_1 \setminus \{e\}$ e considerando il coniugato awa^{-1} ci si riduce al caso precedente.

Lo stesso ragionamento funziona sia nel caso in cui $w_1 \in \Gamma_1 \setminus \{e\}$ e $w_k \in \Gamma_2 \setminus \{e\}$, scegliendo $a \in \Gamma_1 \setminus \{e, w_1^{-1}\}$, sia nel caso in cui $w_1 \in \Gamma_2 \setminus \{e\}$ e $w_k \in \Gamma_1 \setminus \{e\}$, scegliendo $a \in \Gamma_1 \setminus \{e, w_k\}$. \square

Esiste anche una versione più debole del Ping-Pong Lemma, che è quella utilizzata in [B-C-G] per la dimostrazione della Proposizione 5.3.12.

Théorème B.0.11. ([H1], Proposizione VII.A.2) *Sia Γ un gruppo che agisce su un insieme X , e siano $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Supponiamo che esistano due sottoinsiemi non vuoti disgiunti $X_1, X_2 \subseteq X$, tali che*

- (1) $\gamma_1(X_1 \cup X_2) \subseteq X_1$;
- (2) $\gamma_2(X_1 \cup X_2) \subseteq X_2$.

Allora γ_1 e γ_2 generano un semigruppato libero in Γ .

Démonstration. Sia $\gamma \in \Gamma$ un elemento che può essere scritto come prodotto di potenze non negative di γ_1 e γ_2 . Se $\gamma = \gamma_1^{p_1} \gamma_2^{q_1} \dots \gamma_1^{p_k} \gamma_2^{q_k}$ (dove $p_1 \geq 0, q_k \geq 0, p_i > 0$ per $i = 2, \dots, k$ e $q_j > 0$ per $j = 1, \dots, k-1$), allora $\gamma_1^{p_1} \gamma_2^{q_1} \dots \gamma_1^{p_k} \gamma_2^{q_k}$ si dice *forma normale* di γ . L'enunciato sopra è equivalente all'essere la forma normale unica. Supponiamo che si abbia

$$\gamma = \gamma_1^{p_1} \gamma_2^{q_1} \dots \gamma_1^{p_k} \gamma_2^{q_k} = \gamma_1^{p'_1} \gamma_2^{q'_1} \dots \gamma_1^{p'_r} \gamma_2^{q'_r}. \quad (*)$$

Senza ledere la generalità, possiamo supporre che $k \geq r$. Se $p_1 \neq 0$ e $p'_1 = 0$ allora, facendo agire γ su un punto $x \in X_1 \cup X_2$, le ipotesi (1) e (2) implicherebbero che $\gamma x \in X_1 \cap X_2$, contro l'ipotesi che X_1 e X_2 sono disgiunti. E' chiaro che ci si può sempre ridurre al caso $p_1 \neq 0, p'_1 = 0$ se $p_1 \neq p'_1$, moltiplicando entrambi i membri di (*) a sinistra per $\gamma_1^{-\min\{p_1, p'_1\}}$. Quindi, deve essere $p_1 = p'_1$. Moltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza (*) a sinistra per $\gamma_1^{-p_1}$ ottenendo $\gamma_2^{q_1} \dots \gamma_1^{p_k} \gamma_2^{q_k} = \gamma_2^{q'_1} \dots \gamma_1^{p'_r} \gamma_2^{q'_r}$ e ripetiamo lo stesso ragionamento, che ci porta a concludere che $q_1 = q'_1$. Allora se $r = k$ si arriva alla conclusione che $(p_1, q_1, \dots, p_k, q_k) = (p'_1, q'_1, \dots, p'_r, q'_r)$, e cioè che la forma normale è unica. Se $r < k$, si ottiene un'uguaglianza del tipo $\gamma_1^{p_i} \gamma_2^{q_i} \dots \gamma_1^{p_k} \gamma_2^{q_k} = e$, con $1 \leq i \leq k$, dove possiamo supporre $p_i \neq 0$. Allora, dato $x \in X_2$, si

ha $x = \gamma_1^{p_i} \gamma_2^{q_i} \dots \gamma_1^{p_k} \gamma_2^{q_k} x \in X_1$, il che contraddice l'ipotesi che X_1 e X_2 siano disgiunti. Il caso $r > k$ si tratta in modo analogo.

□

Annexe C

Entropia di gruppi

Quest'appendice è dedicata a un'esposizione autocontenuta dei risultati principali relativi all'entropia dei gruppi finitamente generati. Nel Capitolo 3 (Teorema 7.0.5) abbiamo considerato maggiorazioni e minorazioni sull'entropia che hanno un significato solo se esistono gruppi, appartenenti alle classi considerate, che le soddisfano. L'esistenza di gruppi "a piccola entropia" (pag. 173) è di particolare interesse in questo contesto.

Sia G un gruppo finitamente generato e S un suo sistema di generatori finito. Ricordiamo (Definizione 7.0.4) che l'entropia di G rispetto a S è il limite $Ent_S(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[f_S(n)]}{n}$ dove per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_S(n)$ denota la cardinalità della bolla di centro $e \in G$ e raggio n rispetto alla metrica delle parole d_S . L'entropia così definita coincide con l'entropia dello spazio metrico misurato (G, d_S, \sharp) (dove \sharp denota la misura che conta), definita a pag. 68.

Se T è un altro sistema generatore di G abbiamo dimostrato (pag. 151) che esiste un numero reale $c \geq 1$ tale che $c^{-1}d_S \leq d_T \leq cd_S$. Ciò implica immediatamente l'inclusione $B_S(e, \frac{n}{c}) \subseteq B_T(e, n) \subseteq B_S(e, cn)$, dove $B_S(e, r)$ (risp. $B_T(e, r)$) denota per ogni $r > 0$ la bolla centrata nell'elemento neutro $e \in G$ e di raggio r rispetto alla metrica delle parole d_S (risp. d_T). Ne segue che $f_S(\frac{n}{c}) \leq f_T(n) \leq f_S(cn)$. Quindi risulta $Ent_S(G) > 0$ se e solo se $Ent_T(G) > 0$.

Définition. *Un gruppo finitamente generato G si dice a crescita esponenziale se $Ent_S(G) > 0$ per qualche (e quindi per ogni) sistema generatore S . Si dice che G ha crescita esponenziale uniforme se $\inf_S Ent_S(G) > 0$, dove S varia tra tutti i sistemi generatori di G . L'estremo inferiore $\inf_S Ent_S(G)$ si dice entropia minimale (o algebrica) di G e si denota con $Ent_{alg}(G)$.*

Nel nostro contesto un caso rilevante tra i gruppi a crescita esponenziale uniforme è dato dai gruppi N -non abeliani (vedi pag. 124).

Conjecture. (M. Gromov, 1981, cfr. [G-L-P]) *Ogni gruppo a crescita esponenziale ha crescita esponenziale uniforme.*

Nel 1999, A. Sambusetti ([Sa]) ha dimostrato che esistono gruppi G tali che, per ogni sistema generatore S , $Ent_{alg}(G) < Ent_S(G)$. Questo risultato giustifica la congettura sopra.

Più recentemente, sono stati mostrati esempi di gruppi che hanno crescita esponenziale ma che non hanno crescita esponenziale uniforme in un articolo di J. S. Wilson ([Wi]). E' naturale allora porre le seguenti domande : quali sono le classi di gruppi con la proprietà che la loro entropia algebrica è raggiunta per qualche sistema di generatori ? Per quali classi di gruppi l'entropia algebrica è limitata inferiormente da qualche costante universale ? Affronteremo questi problemi nei paragrafi che seguono.

Gruppi liberi

La classe più semplice di gruppi per i quali la congettura di Gromov ha risposta affermativa è quella dei gruppi liberi.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, denotiamo con \mathbb{F}^n il gruppo libero di rango n e con S_n la sua base libera.

Conveniamo in partenza che S_n non contenga l'elemento neutro e che per ogni $s \in S_n$, si abbia $s^{-1} \in S_n$ se e solo se $s = s^{-1}$.

Il gruppo \mathbb{F}^n ha crescita esponenziale se e solo se $n \geq 2$. Infatti, per ogni $k \in \mathbb{N}$ la bolla chiusa di raggio k contiene $1 + 2n + 2n(2n - 1) + \dots + 2n(2n - 1)^{k-1}$ elementi, e quindi

$$f_{S_n}(k) = 1 + 2n[1 + (2n-1) + (2n-1)^2 + \dots + (2n-1)^{k-2}] = 1 + 2n \frac{(2n-1)^{k-1} - 1}{2n-2}.$$

Ne segue che $Ent(\mathbb{F}^n, S_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{Log}[f_{S_n}(k)]}{k} = \text{Log}(2n - 1)$.

Nella proposizione seguente si dimostra che $Ent_{alg}(\mathbb{F}^n) = Ent_{S_n}(\mathbb{F}^n)$. In particolare, se un gruppo libero ha crescita esponenziale, esso ha crescita esponenziale uniforme.

Proposition C.0.12. *Sia \mathbb{F}^n il gruppo libero di rango n definito sopra e sia S_n la sua base libera. Per ogni altro sistema generatore S di \mathbb{F}^n , si ha $Ent_S(\mathbb{F}^n) \geq Ent_{S_n} \mathbb{F}^n$. In particolare, $Ent_{alg}(\mathbb{F}^n) = Ent_{S_n} \mathbb{F}^n = \text{Log}(2n - 1)$.*

Démonstration. (cfr. [H1], Proposizione VII.B.13) Si consideri un qualunque sistema di generatori S di \mathbb{F}^n . Denotiamo con $\overline{\mathbb{F}^n}$ l'abelianizzato di \mathbb{F}^n (i.e. \mathbb{F}^n quozientato tramite il suo sottogruppo commutatore $[\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n]$). E' noto che $\overline{\mathbb{F}^n}$ è isomorfo \mathbb{Z}^n . Sia $\overline{S} = \{a_1, \dots, a_m\}$ l'immagine di S in $\overline{\mathbb{F}^n}$ tramite

la proiezione canonica $\pi : \mathbb{F}^n \rightarrow \overline{\mathbb{F}^n}$. Se $\{b_1, \dots, b_n\}$ denota la base canonica di \mathbb{Z}^n , allora usando la notazione additiva si ha $a_i = \alpha_{i1}b_1 + \dots + \alpha_{in}b_n$, per qualche $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$, dove $i, j = 1, \dots, n$. Estraiamo da $\{a_1, \dots, a_n\}$ un insieme massimale di n vettori indipendenti su \mathbb{Q} che (cambiando eventualmente gli indici) possiamo supporre sia $\{a_1, \dots, a_n\}$. Per ogni $j = 1, \dots, n$ denotiamo con $m_j = MCD(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})$ il massimo comune divisore delle j -esime coordinate degli a_i , per $i = 1, \dots, n$. Il sottogruppo $\overline{R} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ generato da a_1, \dots, a_n è isomorfo a $m_1\mathbb{Z} \times \dots \times m_n\mathbb{Z}$, ed è quindi di indice finito uguale a $m_1 \dots m_n$ in \mathbb{Z}^n . Questo implica che il rango di \overline{R} è esattamente n . Siano ora f_1, \dots, f_n gli elementi di S che si proiettano tramite π su a_1, \dots, a_n rispettivamente. Il sottogruppo R generato da f_1, \dots, f_n è libero in quanto sottogruppo di \mathbb{F}^n , che è un gruppo libero (cfr. [Ma], Teorema 7.2). Inoltre, R ha rango n perchè il suo abelianizzato \overline{R} ha rango n . Pertanto $\{f_1, \dots, f_n\}$ è una base libera di R , e si ha $Ent(\mathbb{F}^n, S) \geq Ent(R, \{f_1, \dots, f_n\}) = Ent(\mathbb{F}_n, S_n)$. (La prima disuguaglianza discende dal fatto che $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq S$).

□

Si noti che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni gruppo finitamente generato G dotato di un sistema generatore simmetrico S con n elementi, si ha $Ent_S(G) \leq \text{Log}(2n - 1)$. Ciò segue dal fatto che G è isomorfo a un quoziente del gruppo libero \mathbb{F}^n di rango n combinato con la seguente :

Proposition. *Sia G un gruppo finitamente generato e sia S un suo sistema di generatori. Sia \overline{G} un quoziente di G tramite un sottogruppo normale e sia \overline{S} l'immagine di S mediante la proiezione canonica $\pi : G \rightarrow \overline{G}$. Allora $Ent_S(G) \geq Ent_{\overline{S}}(\overline{G})$.*

Démonstration. Per ogni numero reale $R > 0$, denotiamo con $B_S(e, R)$ la bolla centrata nell'elemento neutro $e \in G$ e di raggio R , rispetto alla metrica delle parole d_S su G . Sarà sufficiente, per dimostrare la proposizione, mostrare che la restrizione di π alla bolla $B_S(e, R)$, è suriettiva sulla bolla $B_{\overline{S}}(\pi(e), R)$ (quest'ultima denota la bolla di raggio R e centrata nell'elemento neutro \bar{e} rispetto alla metrica delle parole $d_{\overline{S}}$ su \overline{G}). Questo è vero perchè se $g \in G$ è tale che $d_S(e, g) = k < R$ e se $g = s_{1_1} \dots s_{1_k}$ è una scrittura minimale di g , allora l'essere π un morfismo di gruppi implica che $\pi(g) = \pi(s_{1_1}) \dots \pi(s_{1_k})$. Quindi $d_{\overline{S}}(\pi(e), \pi(g)) \leq k < R$. Viceversa, ogni elemento di $B_{\overline{S}}(\pi(e), R)$ si scrive come $\pi(g) = \pi(s_{1_1}) \dots \pi(s_{1_k})$, e l'elemento $g = s_{1_1} \dots s_{1_k}$, che appartiene a $B_S(e, R)$, si proietta su $\pi(g)$. □

Remarque. Si noti che se $Ent_S(G) = 0$ per qualche sistema generatore S , allora per ogni quoziente \overline{G} di G e ogni sistema generatore T di \overline{G} si

ha $\text{Ent}_T(\overline{G}) = 0$ (l'averne entropia nulla non dipende dal sistema generatore scelto).

Un gruppo G si dice *Hopfiano* ([H1], pag. 55) se ogni endomorfismo $\phi : G \rightarrow G$ suriettivo è anche iniettivo. Equivalentemente, G è Hopfiano se non ammette quozienti G/H propri (i.e. $H \neq \{e\}$) isomorfi a se stesso. L'esempio più semplice di gruppo finitamente generato non Hopfiano è dato dal gruppo di Baumslag-Solitar $B(2, 3) = \langle a, b \mid a^{-1}b^2a = b^3 \rangle$.

Théorème C.0.13. ([Sa], Corollario 2) *Sia $G = A * B$ il prodotto libero di un gruppo non Hopfiano A con un qualunque gruppo non banale B . Allora non esiste alcun sistema generatore S di G tale che $\text{Ent}_S(G) = \text{Ent}_{\text{alg}}(G)$.*

L'idea della dimostrazione è la seguente : si dimostra che, per ogni sistema generatore S di $G = A * B$, G è a crescita forte rispetto a S . Per definizione, questo significa che, per ogni quoziente proprio \overline{G} di G , si ha $\text{Ent}_{\overline{S}}(\overline{G}) < \text{Ent}_S(G)$ (dove \overline{S} denota l'immagine di S in \overline{G} mediante la proiezione canonica $\pi : G \rightarrow \overline{G}$). Questa proprietà di G , combinata col fatto che essendo A non hopfiano G è non hopfiano, conclude la dimostrazione, in quanto per ogni sistema generatore S , detto $\phi : \overline{G} \rightarrow G$ un isomorfismo tra G e un suo quoziente proprio \overline{G} , si ha $\text{Ent}_{\phi(\overline{S})}(G) = \text{Ent}_{\overline{S}}(\overline{G}) < \text{Ent}_S(G)$, e quindi non può essere $\text{Ent}_S(G) = \text{Ent}_{\text{alg}}(G)$.

Entropia e sottogruppi

Sia G un gruppo finitamente generato, S un sistema generatore qualunque di G e Γ un sottogruppo di G . Se Γ ha crescita esponenziale, allora G ha crescita esponenziale. Infatti, sia $T = \{t_1, \dots, t_k\}$ un sistema generatore di Γ , e sia $R = \max_{i=1, \dots, k} \|t_i\|_S$, dove $\|\cdot\|_S$ denota la norma rispetto a S (definita a pag. 150). Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la bolla $B_S(e, nR)$ contiene la bolla $B_T(e, n)$ in Γ . Dunque $f_S(nR) \geq f_T(n)$ e $\text{Ent}_S(G) \geq \frac{\text{Ent}_T(\Gamma)}{R}$.

Se Γ ha indice finito in G vale un analogo risultato anche per la crescita esponenziale uniforme.

Théorème C.0.14. *Sia $d \in \mathbb{N}$ un intero positivo e sia Γ un sottogruppo di indice finito d di un gruppo finitamente generato G . Allora $\text{Ent}_{\text{alg}}(G) \geq \frac{\text{Ent}_{\text{alg}}(\Gamma)}{2d+1}$.*

Démonstration. Poichè Γ ha indice finito $d \in \mathbb{N}$ in G , G si può scomporre come unione disgiunta $G = \bigcup_{i=1}^d g_i \Gamma$ di classi laterali, dove $g_1, \dots, g_d \in G$ e possiamo supporre $g_1 = e$. Mostriamo che per ogni sistema generatore S di G , il rappresentante g_i della classe $g_i \Gamma$ può essere scelto in modo tale che, se

$\|g_i\|_S$ è la sua norma rispetto a S , sia $\|g_i\|_S \leq d$. Infatti, supponiamo per assurdo che per qualche $i \in \{1, \dots, d\}$ si abbia $\|g_i\gamma\|_S > d$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Sia $\gamma_0 \in \Gamma$ tale che $\|g_i\gamma_0\|_S = \min_{\gamma \in \Gamma} \|g_i\gamma\|_S$, e sia $g_i\gamma_0 = s_{i_1} \dots s_{i_n}$ una scrittura minimale per $g_i\gamma_0$ ($n > d$). Sia $a_k = s_{i_{k+1}} \dots s_{i_n}$, per $k = 0, \dots, n$.

Poichè $n > d$, esistono due interi $k, j \in \mathbb{N}$, con $0 < k < j < n + 1$, tali che $a_{j-1} = a_{k-1}\gamma$ per qualche $\gamma \in \Gamma$, ovvero $s_{i_j} \dots s_{i_n} = s_{i_k} \dots s_{i_n}\gamma$. Allora $g_i\gamma_0\gamma = s_{i_1} \dots s_{i_n}\gamma = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} s_{i_k} \dots s_{i_n}\gamma = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} s_{i_j} \dots s_{i_n}$ da cui $\|g_i\gamma_0\gamma\|_S < \|g_i\gamma_0\|_S$, il che contraddice la scelta di γ_0 . Possiamo quindi supporre che nella decomposizione $G = \bigcup_{i=1}^d g_i\Gamma$, sia $\|g_i\|_S \leq d$ per ogni $i = 1, \dots, d$.

Mostriamo ora che $T = \{g_i s g_j^{-1}\}_{s \in S, i, j=1, \dots, d} \cap \Gamma$ è un sistema generatore di Γ . Supponiamo che $\gamma = s_1 \dots s_k$ sia un'espressione che rappresenta, rispetto a S , un elemento $\gamma \in \Gamma$ dato. Ma, poichè $G = \bigcup_{i=1}^d g_i\Gamma$, esiste un intero $i_k \in \{1, \dots, d\}$ tale che $g_{i_k}^{-1} s_k \in \Gamma$, quindi $\gamma = s_1 \dots s_{k-1} g_{i_k} g_{i_k}^{-1} s_k$. Analogamente, esiste $i_{k-1} \in \{1, \dots, d\}$ tale che $g_{i_{k-1}}^{-1} s_{k-1} g_{i_k} \in \Gamma$, e possiamo scrivere $\gamma = s_1 \dots s_{k-2} g_{i_{k-1}} (g_{i_{k-1}}^{-1} s_{k-1} g_{i_k}) (g_{i_k}^{-1} s_k)$. Iterando questo argomento, arriviamo a una decomposizione di γ in parole del tipo $g_i s g_j^{-1}$, dove $s \in S$ e $i, j = 1, \dots, d$, che dimostra l'asserto.

Poichè $\|g_i\|_S \leq d$ per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$, si ha che $\|g_i s g_j^{-1}\|_S \leq 2d+1$ per ogni $g_i s g_j^{-1} \in T$. Questo implica che $Ent_S(G) \geq \frac{Ent_T(\Gamma)}{2d+1}$ e, poichè S è arbitrario, si ottiene la tesi. □

E' da menzionare che una stima migliore per $Ent_{alg}(G)$, ossia $Ent_{alg}(G) \geq \frac{Ent_{alg}(\Gamma)}{2d-1}$, è stata dimostrata in [Sh-W].

Crescita polinomiale e gruppi risolubili

Définition. Un gruppo G si dice risolubile se ha una serie abeliana finita, i.e. se esiste una successione finita $\{e\} = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ di sottogruppi G_i tale che per ogni $i = 0, \dots, n-1$, G_i è normale in G_{i+1} e il quoziente G_{i+1}/G_i è abeliano.

Sono gruppi risolubili i gruppi abeliani e i gruppi policiclici (i.e. i gruppi risolubili tali che i quozienti G_{i+1}/G_i della definizione sopra sono ciclici).

Esempi di gruppi risolubili non policiclici sono dati, per ogni $n \in \mathbb{N}$ positivo, dai gruppi di Baumslag-Solitar $B(1, n) = \langle a, b \mid aba^{-1} = b^n \rangle$.

Altri esempi di gruppi risolubili sono i gruppi *nilpotenti*. Per definizione, questi sono gruppi per i quali esiste una serie abeliana $\{e\} = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$ come nella definizione sopra, tale che per ogni $i = 0, \dots, n-1$ il quoziente G_{i+1}/G_i è contenuto nel centro di G/G_i .

Alternativamente, si possono dare le seguenti definizioni di gruppo risolubile e nilpotente. Sia G un gruppo, siano H e K due sottogruppi di G e sia $[H, K]$ il sottogruppo commutatore generato dall'insieme dei commutatori $hkh^{-1}k^{-1}$ al variare di $h \in H$ e $k \in K$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca ricorsivamente la serie derivata G^n di G ponendo $G^0 = G$, $G^n = [G^{n-1}, G^{n-1}]$ e si definisca ricorsivamente la serie centrale inferiore G_n di G ponendo $G_0 = G$, $G_n = [G, G_{n-1}]$.

Allora G è risolubile (risp. nilpotente) se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $G^n = \{e\}$ (risp. $G_n = \{e\}$). (Maggiori dettagli sui gruppi risolubili si possono trovare, ad esempio, in [Ro], Cap. 5).

Définition. *Un gruppo finitamente generato G si dice a crescita polinomiale se esistono due interi $C, n > 0$ tali che, per ogni sistema generatore S di G , la funzione di crescita f_S di G rispetto a S soddisfa $f_S(k) \leq Ck^n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ che soddisfa tale disuguaglianza si dice ordine di crescita di G .*

Equivalentemente, in virtù della relazione (pag. 162) tra funzioni di crescita relative a sistemi generatori diversi, nella definizione sopra si può richiedere che sia $f_S(k) \leq Ck^n$ per un certo sistema generatore S fissato. Un gruppo G a crescita polinomiale ha chiaramente entropia $Ent_S(G)$ nulla per ogni sistema generatore S .

I gruppi a crescita polinomiale sono caratterizzati algebricamente grazie al teorema seguente, dovuto a M. Gromov.

Théorème. ([Gr3]) *Un gruppo finitamente generato G ha crescita polinomiale se e solo se esso è virtualmente nilpotente (i.e. ha un sottogruppo nilpotente di indice finito).*

Per quanto riguarda la crescita dei gruppi risolubili abbiamo il seguente risultato generale :

Théorème. ([Os]) *Sia G un gruppo risolubile finitamente generato. Allora,*

- (i) *G ha entropia nulla se e solo se ha crescita polinomiale ;*
- (ii) *se G ha crescita esponenziale, allora G ha crescita esponenziale uniforme.*

Il punto (ii) del teorema dice che, per la classe dei gruppi risolubili, la congettura di Gromov è vera.

Riguardo al punto (i), si osservi che esistono gruppi finitamente generati con entropia nulla ma che non hanno crescita polinomiale. Questi gruppi si dicono a crescita intermedia : un esempio è il gruppo di Grigorchuk descritto a pag. 173.

Crescita del gruppo fondamentale di una varietà Riemanniana; crescita dei gruppi iperbolici

Un capitolo a sè nello studio dell'entropia dei gruppi è da riservare alla classe dei gruppi fondamentali delle varietà Riemanniane (M, g) , date le strette relazioni tra la geometria di (M, g) e la crescita di $\pi_1(M)$.

Richiamiamo i risultati principali che legano il segno della curvatura scalare, della curvatura di Ricci e della curvatura sezionale di una varietà Riemanniana (M, g) alla crescita del gruppo fondamentale $\pi_1(M)$.

(1) Curvatura scalare

Ogni varietà differenziabile n -dimensionale, per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ammette una metrica di curvatura scalare negativa.

Se (M, g) è una varietà Riemanniana arbitraria, allora la varietà prodotto $M \times S^n$ (dove S^n denota la sfera n -dimensionale) ammette una metrica a curvatura scalare positiva, purchè, se M è non compatta, la sua curvatura scalare sia limitata superiormente e inferiormente. Poichè $\pi_1(M \times S^n) = \pi_1(M)$, si vede che un'ipotesi sul segno della curvatura scalare non implica alcuna condizione sul gruppo fondamentale.

(2) Curvatura di Ricci

Ogni varietà differenziabile n -dimensionale, per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ammette una metrica di curvatura di Ricci negativa ([Lo]).

Una varietà Riemanniana compatta con curvatura di Ricci strettamente positiva ha gruppo fondamentale finito ([DoC], Paragrafo 9.3).

Il gruppo fondamentale di ogni varietà Riemanniana compatta con curvatura di Ricci non negativa contiene un sottogruppo abeliano di indice finito isomorfo a \mathbb{Z}^k per qualche intero $k > 1$. Nel caso non compatto, si ha che il gruppo fondamentale ha crescita polinomiale e quindi, per il teorema di Gromov (pag. 167) sulla crescita polinomiale, esso contiene un sottogruppo nilpotente di indice finito ([Mi]).

(3) Curvatura sezionale

Poichè ogni varietà Riemanniana con curvatura sezionale non negativa ha curvatura di Ricci non negativa, per le varietà di curvatura sezionale non negativa valgono le proprietà dette in (2).

Ogni varietà Riemanniana n -dimensionale non-compatta è diffeomorfa a \mathbb{R}^n se la sua curvatura sezionale è strettamente positiva (Teorema di D. Gromoll e M. Meyer).

Se la curvatura sezionale K di una varietà Riemanniana compatta (M, g) è strettamente negativa, allora il gruppo fondamentale ha crescita esponenziale (questo si dimostra con un calcolo diretto : si veda ad

esempio [H1], Teorema VII.6). Questo risultato può essere migliorato come segue : se (M, g) è una varietà Riemanniana compatta connessa di dimensione $n \geq 3$ e curvatura sezionale $K \leq 0$, allora il suo gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ ha crescita esponenziale se e solo se la metrica g non è piatta ([H1]).

Se la curvatura sezionale di M è strettamente negativa, allora $\pi_1(M)$ è un gruppo iperbolico non elementare (infatti, non è nè finito nè isomorfo a \mathbb{Z}). Inoltre, vale il seguente risultato di Koubi.

Théorème C.0.15. ([Ko]) *Sia G un gruppo finitamente generato. Se G è iperbolico non elementare, allora G ha crescita esponenziale uniforme.*

Si noti che, poichè un gruppo iperbolico non elementare contiene sempre un sottogruppo libero di rango $n > 1$ ([G-H], Teorema 37 del Capitolo 8), esso ha crescita esponenziale.

Concludiamo con l'osservare che il Teorema di M. Koubi dice che, sulla classe dei gruppi iperbolici, la congettura di Gromov è vera.

Gruppi amenabili

Sia Γ un gruppo finitamente generato, e sia $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un suo sistema di generatori. Sia d_S la distanza delle parole associata a S . Per ogni sottoinsieme $A \subseteq \Gamma$ definiamo la *frontiera* ∂A di A come

$$\partial A = \{x \in A \mid \text{esiste } y \notin A \text{ tale che } d_S(x, y) = 1 \}.$$

Sia ora $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione crescente. Diremo che il gruppo Γ soddisfa la *disuguaglianza isoperimetrica data da f* se esistono due costanti reali $K, K' > 0$ tali che, per ogni sottoinsieme finito $A \subseteq \Gamma$, risulta $\sharp(A) \leq K \cdot f[K' \cdot \sharp(\partial A)]$.

Se Γ soddisfa, rispetto a un sistema di generatori finito dato, la disuguaglianza isoperimetrica data da f , esso la soddisfa anche rispetto a tutti gli altri suoi sistemi di generatori finiti (cfr. [G-H], Esercizio 24 del Capitolo 1). Ha senso allora la seguente :

Définition. *Un gruppo finitamente generato si dice amenabile se esso non soddisfa la disuguaglianza isoperimetrica data dalla funzione $f(t) = t$.*

I gruppi finiti, i gruppi abeliani, e i gruppi risolubili sono amenabili. Non è amenabile il gruppo libero a due generatori \mathbb{F}^2 . Poichè ogni sottogruppo di un gruppo amenabile è amenabile, si ha che se un gruppo G contiene un sottogruppo libero, allora G non è amenabile.

Ogni gruppo non amenabile Γ ha crescita esponenziale. Per vederlo, sia S un sistema di generatori e per ogni $R > 0$ sia $B_S(e, R)$ la bolla di centro

$e \in G$ e raggio R rispetto alla distanza d_S . Per l'ipotesi di non amenabilità, esiste una costante reale $c > 1$ tale che $\#B_S(e, R) \leq c \#(\partial B_S(e, R))$. Poichè $\partial B_S(e, R) \subseteq B_S(e, R) \setminus B_S(e, R-1)$, si ha $\#B_S(e, R) \geq \frac{c}{c-1} \#B_S(e, R-1)$, e per ricorrenza $\#B_S(e, R) \geq (\frac{c}{c-1})^{[R]-1}$ per ogni $R > 0$.

Esempi di gruppi amenabili a crescita esponenziale sono dati ([Os], Teorema 1.1) dai gruppi risolubili non virtualmente nilpotenti (ad esempio, i gruppi di Baumslag-Solitar $B(1, n)$ già citati).

Prodotti amalgamati e estensioni HNN

Abbiamo visto (pag. 107) che il prodotto amalgamato $A *_\phi B$ di due gruppi finitamente generati A e B rispetto a un isomorfismo $\phi : C_1 \rightarrow C_2$, dove C_1 e C_2 sono sottogruppi di A e B rispettivamente, è il quoziente $\frac{A*B}{K}$, dove $A*B$ denota il prodotto libero di A e B e K è il più piccolo sottogruppo normale di $A*B$ che contiene l'insieme $\{\phi(c)c^{-1}\}_{c \in C_1}$. Qui denoteremo tale prodotto con $A *_C B$, dove, sottointendendo l'identificazione $C \simeq C_1 \simeq C_2$ data da ϕ , parleremo di C come di un sottogruppo comune a A e B . Denoteremo inoltre con $|A : C|$ (risp. $|B : C|$) l'indice di C_1 in A (risp. di C_2 in B).

Un criterio sufficiente perchè un prodotto amalgamato abbia crescita esponenziale uniforme è dato dal

Théorème C.0.16. ([B-H]) *Siano A e B gruppi finitamente generati e sia C un sottogruppo comune di A e B . Supponiamo $(|A : C| - 1)(|B : C| - 1) \geq 2$. Allora $Ent_{alg}(A *_C B) \geq \frac{\text{Log}2}{4}$.*

Si osservi che il risultato non può essere migliorato a $(|A : C| - 1)(|B : C| - 1) \geq 1$. Infatti, se ad esempio $A = B = \mathbb{Z}_2$ e $C = \{e\}$, il prodotto amalgamato $A *_C B = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ non ha crescita esponenziale. Tuttavia esistono esempi ([B-H]) di prodotti amalgamati $A *_C B$ tali che $|A : C| = |B : C| = 2$ e che hanno crescita esponenziale uniforme.

Nel caso dei prodotti liberi, abbiamo una stima migliore.

Proposition C.0.17. *Se $G = A * B$ è un prodotto libero non banale diverso da $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, allora $Ent_{alg}(G) \geq \frac{\text{Log}3}{6}$.*

Démonstration. Si veda [H1], Prop. VII.18. □

Un risultato analogo al Teorema C.0.16 vale anche ([B-H]) per le *estensioni HNN*. Dati un gruppo A , due sottogruppi C_1, C_2 di A e un isomorfismo $\phi : C_1 \rightarrow C_2$, l'*estensione HNN* $A *_\phi$ di A rispetto a ϕ si definisce come il quoziente del prodotto libero $A * \mathbb{Z}$ rispetto al più piccolo sottogruppo normale di $A * \mathbb{Z}$ che contiene l'insieme $\{tct^{-1}\phi(c)^{-1}\}_{c \in C_1}$ (dove t è un generatore di

\mathbb{Z}). Sottointendendo i sottogruppi C_1 e C_2 identificati a C dall'automorfismo ϕ , scriveremo anche $A*_C$ per indicare $A*_\phi$.

La costruzione appena descritta ha origine nella topologia algebrica. Infatti, sia X uno spazio topologico connesso, siano $Y_1, Y_2 \subseteq X$ due aperti connessi e sia $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ un omeomorfismo. Consideriamo il *manico* $T = Y_1 \times [0, 1]$ e lo spazio quoziente $K = \frac{X \cup T}{\sim}$, dove \sim denota la relazione di equivalenza definita, per ogni $y \in Y_1$, ponendo $(y, 0) \sim y$, $(y, 1) \sim f(y)$. Allora, se le inclusioni $i_1 : Y_1 \rightarrow X$ e $i_2 : Y_2 \rightarrow X$ inducono sui gruppi fondamentali dei morfismi iniettivi $i_{1*} : \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(X)$ e $i_{2*} : \pi_1(Y_2) \rightarrow \pi_1(X)$, si ha $\pi_1(X) = \pi_1(X_1)*_\phi$, dove $\phi : \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(Y_2)$ è il morfismo indotto da f sui gruppi fondamentali.

Exemples. Il gruppo additivo degli interi \mathbb{Z} è un'estensione HNN in quanto $\mathbb{Z} = \{1\}*\{1\}$.

Un altro esempio è dato, per ogni coppia $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$, dai gruppi $B(n, m)$ di Baumslag-Solitar, descritti dalla presentazione $\langle a, b \mid ab^m a^{-1} = b^n \rangle$. Questi gruppi sono estensioni HNN di $\mathbb{Z} = \langle b \rangle$ rispetto ai sottogruppi $C_1 = \langle b^n \rangle$, $C_2 = \langle b^m \rangle$ e all'omomorfismo $\phi : C_1 \rightarrow C_2$ definito univocamente da $\phi(b^n) = b^m$.

Il risultato principale sulla crescita delle estensioni HNN è il seguente :

Théorème C.0.18. ([B-H]) *Sia A un gruppo finitamente generato e siano C_1, C_2 sottogruppi di A di indice rispettivamente $|A : C_1|$ e $|A : C_2|$. Sia $\phi : C_1 \rightarrow C_2$ un isomorfismo e sia $A*_\phi$ l'estensione HNN corrispondente. Allora, se $|A : C_1| + |A : C_2| \geq 3$, si ha $Ent_{alg}(A*_\phi) \geq \frac{\text{Log}2}{4}$.*

Le costruzioni algebriche di prodotto amalgamato e estensione HNN sono legate a un importante invariante geometrico, il *numero di ends*.

Sia X uno spazio topologico connesso localmente compatto. Per ogni compatto $K \subseteq X$, denotiamo con $e(K)$ il numero di componenti connesse a chiusura non compatta di $X \setminus K$. Si definisce il *numero di ends di X* , e si denota $e(X)$, l'estremo superiore di $e(K)$ al variare di K tra i sottoinsiemi compatti di X .

Se G è un gruppo finitamente generato, si dimostra che il numero di ends del suo grafo di Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ (pag. 154) è indipendente dalla scelta del sistema generatore S di G ([H1], pag. 114). In particolare, il *numero di ends di un gruppo finitamente generato G* si definisce come il numero di ends del suo grafo di Cayley $\mathbb{C}(G, S)$ rispetto a un qualunque sistema di generatori finito S .

Exemples.

- 1) Per ogni gruppo finito G , si ha $e(G) = 0$ in quanto non esistono componenti connesse a chiusura non compatta in $\mathbb{C}(G, S) \setminus K$, qualunque sia il compatto $K \subseteq \mathbb{C}(G, S)$.
- 2) Sia $G = \mathbb{Z}$. Il complementare in $\mathbb{C}(\mathbb{Z}, \{\pm 1\})$ della bolla chiusa di raggio r e centro arbitrari consiste di due rami infiniti. Si ha quindi $e(\mathbb{Z}) = 2$.
- 3) Sia $G = \mathbb{Z}^2$. Considerando il grafo di Cayley di G rispetto alla sua base libera canonica, si vede che il complementare della bolla chiusa di raggio qualunque è sempre connesso. Di conseguenza $e(\mathbb{Z}^2) = 1$.
- 4) Sia $G = \mathbb{F}^2$ il gruppo libero di rango 2 e S_n la sua base libera. Considerando, per ogni $R > 0$ la bolla chiusa $B_R \subseteq \mathbb{C}(\mathbb{F}^2, S_2)$ centrata nell'elemento neutro e di raggio R , si vede che il numero $e(B_R)$ di componenti connesse di $\mathbb{C}(\mathbb{F}^2, S_2) \setminus B_R$ è una funzione di R che ha andamento esponenziale. Di conseguenza \mathbb{F}^2 ha un numero infinito di ends.

Il seguente risultato afferma che gli esempi sopra sono, in un certo senso, esaustivi.

Théorème. ([S-W]) *Il numero di ends di un gruppo finitamente generato può assumere solo i valori 0, 1, 2, oppure essere infinito.*

Exemples.

- 1) Sia G un gruppo finitamente generato che agisce per isometrie e in maniera co-compatta e propriamente discontinua su uno spazio metrico X geodetico e localmente compatto. Allora G è quasi-isometrico a X e quindi $e(G) = e(X)$ ([H1], pag. 114). Ne segue che se (X, g) è una varietà Riemanniana n -dimensionale ($n \geq 2$) compatta di curvatura sezionale non positiva, si ha $e(\pi_1(X)) = 1$ (infatti, $\pi_1(X)$ è quasi isometrico al rivestimento universale di X , che è diffeomorfo a \mathbb{R}^n e ha quindi un solo end).
- 2) Se Γ è un sottogruppo di indice finito in un gruppo G , si ha $e(G) = e(\Gamma)$ (Γ è quasi isometrico a G).

È opportuno menzionare il seguente risultato, dovuto a Stallings :

Théorème C.0.19. ([S-W]) *Se G è un gruppo finitamente generato, si ha $e(G) \geq 2$ se e solo se G si decompone su un gruppo finito, cioè se e solo se esistono due gruppi A e B , e un gruppo finito C (con $A \neq C \neq B$), tali che $G = A *_C B$ oppure $G = A *_C$. Inoltre, $e(G) = 2$ se e solo se $|A : C| = |B : C| = 2$ (nel caso del prodotto amalgamato) o $G = C *_C$ (nel caso dell'estensione HNN).*

Combinando insieme i teoremi C.0.16, C.0.18 e C.0.19, si ottiene il

Corollaire C.0.20. *Se G è un gruppo finitamente generato con infiniti ends, allora si ha $Ent_{alg}(G) \geq \frac{Log2}{4}$. In particolare, se G contiene un sottogruppo libero di indice finito, allora $Ent_{alg}(G) \geq \frac{Log2}{4}$.*

Gruppi a piccola entropia

Nel Capitolo 3 abbiamo considerato famiglie di gruppi G del tipo $\mathcal{G}_c = \{G \mid Ent_{alg}(G) \leq c\}$ dove $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale positivo. Una tale famiglia contiene (evidentemente) i gruppi a crescita sottoesponenziale per ogni $c > 0$.

Il problema di stabilire se esistano valori di c per i quali \mathcal{G}_c non contiene gruppi di un certo tipo è equivalente a quello dell'esistenza di minorazioni universali dell'entropia algebrica per certe famiglie di gruppi. Ad esempio, per il Teorema C.0.16, se $c < \frac{Log2}{4}$, \mathcal{G}_c non contiene prodotti liberi diversi da $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. In tale contesto, un esempio significativo di problema aperto è il seguente : esiste una costante $c > 0$ tale che ogni gruppo iperbolico non elementare G soddisfi $Ent_{alg}(G) \geq c$? (si veda, ad esempio, [G]).

In [Gr-H], R. Grigorchuk e P. de La Harpe hanno costruito una famiglia $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di gruppi a crescita esponenziale uniforme e tali che $Ent_{alg}(G_k) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$. Questo dice che \mathcal{G}_c contiene anche gruppi a crescita esponenziale uniforme per ogni $c > 0$. Vogliamo ora illustrare questo risultato.

Sia $\Gamma_{-1} = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = e \rangle$ e sia $\sigma : \Gamma_{-1} \rightarrow \Gamma_{-1}$ l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\sigma(a) = aca$, $\sigma(b) = d$, $\sigma(c) = b$, $\sigma(d) = c$. Siano $u_0 = (ad)^4$, $v_0 = (adacac)^4$, e denotiamo $u_n = \sigma^n(u_0)$, $v_n = \sigma^n(v_0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora,

$$\Gamma = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = e, u_n = v_n = e \text{ per ogni } n \geq 0 \rangle$$

è il cosiddetto gruppo di Grigorchuk a crescita intermedia. In particolare, si ha $Ent_{\Sigma}(\Gamma) = 0$ per ogni sistema generatore Σ di Γ . Ora, per ogni $n \geq 0$ sia

$$\Gamma_n = \langle a, b, c, d \mid a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = bcd = e, u_0 = \dots = u_{n-1} = v_0 = \dots = v_{n-1} = e \rangle.$$

Il gruppo Γ_n contiene, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un sottogruppo di indice finito isomorfo al prodotto diretto di gruppi liberi non abeliani ([Gr-H]). Questo implica che Γ_n ha crescita esponenziale uniforme. D'altra parte, vale il seguente :

Théorème. *Sia $S_n = S = \{a, b, c, d\}$ per ogni $n \geq 0$ e Γ_n definito come sopra. Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} Ent_{S_n}(\Gamma_n) = 0$.*

Démonstration. Per ogni intero $n \geq -1$, siano $M_n = Ker(\pi_n)$ e $M = Ker(\pi)$, dove $\pi_n : \Gamma_{-1} \rightarrow \Gamma_n$ e $\pi : \Gamma_{-1} \rightarrow \Gamma$ sono proiezioni sul quoziente. Si osservi che per ogni $n \geq -1$ si ha $M_n \subseteq M_{n+1}$ e $M = \bigcup_{n \geq 0} M_n$. Per ogni $k \geq 0$, denotiamo con $B_n(e, k)$ (risp. $B(e, k)$) la bolla di centro l'elemento neutro e raggio k in Γ_n (risp. in Γ) rispetto alla metrica delle parole d_S . Essendo $M = \bigcup_{n \geq 0} M_n$ per ogni $k \geq 0$, per ogni $g \in B_{-1}(e, 2k) \cap M$ esiste un intero $N(g)$ tale che per ogni $n \geq N(g)$ si ha $g \in B_{-1}(e, 2k) \cap M_n$. Denotiamo $n(k) = \max\{N(g) \mid g \in B_{-1}(e, 2k) \cap M\}$. Per ogni intero k , $n(k)$ è finito essendo $B_{-1}(e, 2k) \cap M$ finito. Inoltre, $B_{-1}(e, 2k) \cap M_n = B_{-1}(e, 2k) \cap M$ per ogni intero $n \geq n(k)$.

Sia ora $p_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma$ la proiezione canonica, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, la restrizione $p_n : B_n(e, k) \rightarrow B(e, k)$ è ben definita, suriettiva, e iniettiva per $n \geq n(k)$, perchè se esistono $\gamma_1, \gamma_2 \in B_n(e, k)$ distinti tali che $p_n(\gamma_1) = p_n(\gamma_2)$, si ha che $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in B_n(e, 2k) \cap M$ ma $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \notin M_n$ (perchè $\gamma_1 \neq \gamma_2$ in Γ_n). Quindi, per ogni $n \geq n(k)$ si ha $\sharp(B_n(e, k)) = \sharp(B(e, k))$.

Ora, essendo $Ent_S(\Gamma) = 0$, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un intero $k > 0$ tale che $\frac{Log\sharp(B(e, k+1))}{k} < \varepsilon$. Allora, per ogni $n \geq n(k)$ si ha

$$Ent_{S_n}(\Gamma_n) \leq \frac{Log\sharp(B_n(e, k+1))}{k} = \frac{Log\sharp(B(e, k+1))}{k} < \varepsilon,$$

dove la prima disuguaglianza discende dalla subadditività della funzione $f(k) = Log\sharp(B(e, k+1))$. (Per vederlo, si segue un ragionamento simile a quello della dimostrazione del Lemma 5.4.14, con la differenza che qui $l(s) = 1$ per ogni $s \in S$). Dalla disuguaglianza segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} Ent_{S_n}(\Gamma_n) = 0$, e abbiamo concluso. □

Bibliographie

- [B] **M. Berger** : *Une borne inférieure pour le volume d'une variété riemannienne en fonction du rayon d'injectivité*, Annales de l'Institut Fourier Grenoble 30 (1980), 259-265.
- [B-B-I] **D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov** : *A course in metric geometry*, American Mathematical society (2001).
- [B-C-G] **G. Besson, G. Courtois, S. Gallot** : *Un lemme de Margulis sans courbure et ses applications*, Prépublications de l'Institut Fourier Grenoble n 595, (2003).
- [B-G-L-M] **M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky, S. Mozes** : *Counting hyperbolic manifolds*, GAFA, Vol. 12 (2002), 1161-1173.
- [B-G-S] **W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder** : *Manifolds of non-positive curvature*, Progress in Mathematics 61, Birkhauser (1985).
- [B-H] **M. Bucher, P. de La Harpe** : *Free products with amalgamation and HNN-extensions which are of uniformly exponential growth*, (1991).
- [B-K] **P. Buser, H. Karcher** : *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque 81 (1981).
- [B-M] **G. Baumslag, C. F. Miller III** : *Some odd finitely presented groups*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988) no. 3, 239-244.
- [B-P] **R. Benedetti, C. Petronio** : *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer-Verlag (1992).
- [B-Z] **Y. Burago, V. A. Zalgaller** : *Geometric inequalities*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 285, Springer-Verlag (1980).
- [Ba] **B. Baumslag** : *Generalized free products whose two-generator subgroups are free*, J. London Math. Soc. 43 (1968), 601-606.
- [Be-K] **N. Benakli, I. Kapovich** : *Boundaries of hyperbolic groups*, Contemporary Mathematics, A.M.S. (2002).
- [Bi] **J. S. Birman** : *Braids, links and mapping class groups*, Princeton University Press (1974).

- [C-C 1] **J. Cheeger, T. Colding** : *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below I*, J. Differential Geom. 46 (3), 406-480 (1997).
- [C-C 2] **J. Cheeger, T. Colding** : *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below II*, J. Differential Geom. 54 (1), 13-35 (2000).
- [C-D-P] **M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos** : *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture notes in Mathematics 1441 , Springer-Verlag (1990).
- [C-G 1] **C. Champetier, V. Guirardel** : *Monoides libres dans les groupes hyperboliques*, Seminaire de theorie spectrale et geometrie Grenoble, Volume 18 (2000) 157-170.
- [C-G 2] **C. Champetier, V. Guirardel** : *Limit groups as limit of groups*, (2003).
- [Ch] **J. Cheeger** : *Finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 92 (1970), 61-74.
- [Cha] **C. Champetier** : *L'espace des groupes de type fini*, Topology 39, 4 (2000), 657-680.
- [DoC] **M. P. Do Carmo** : *Riemannian Geometry*, Mathematics : Theory and Applications, Birkhäuser (1992).
- [F] **S. C. Ferry** : *Topological finiteness theorems for manifolds in Gromov-Hausdorff space*, Duke Mathematical Journal, Vol.74 n.1, 95-106 (1994).
- [F-M] **B. Farb, L. Mosher** : *Quasi-isometric rigidity for the Baumslag-Solitar groups, II*, Inventiones Mathematicae 137, 613-649 (1999).
- [G] **V. Guirardel** : *Une alternative sur l'entropie des groupes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 743-746.
- [G-H] **E. Ghys, P. de la Harpe** : *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, Birkhäuser (1990).
- [G-H-L] **S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine** : *Riemannian Geometry*, Universitext, Springer-Verlag (1987).
- [G-L-P] **M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu** : *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes mathématiques 1, Cedric-Nathan (1981).
- [G-P] **R. E. Greene, P. Petersen** : *Little topology, big volume*, Duke Mathematical Journal, Vol.67 n.2, 273-290 (1992).

- [Go] **C. Godbillon** : *Eléments de topologie algébrique*, Collection Méthodes, Hermann Paris (1971).
- [Gr] **M. Gromov** : *Hyperbolic groups*, In MSRI Publications, editor, Essays in Group Theory, pp. 75-263, Springer-Verlag (1987).
- [Gr2] **M. Gromov** : *Metric structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics 152, Birkhäuser (1999).
- [Gr3] **M. Gromov** : *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 53 (1981), 53-73.
- [Gr4] **M. Gromov** : *Manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom. 13 (1978), 223-230.
- [Gr5] **M. Gromov** : *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 18 (1983), 1-147.
- [Gr-H] **R. Grigorchuk, P. de La Harpe** : *Limit behaviour of exponential growth rates for finitely generated groups*, Monographie de l'Enseignement Mathématique 38 (2001), 351-370.
- [H1] **P. de la Harpe** : *Topics in Geometric Group Theory*, The University of Chicago Press, (2000).
- [H2] **P. de la Harpe** : *Uniform growth in groups of exponential growth*, lecture presented at the Haifa conference (June 13-21, 2000).
- [Ho] **J. Howie** : *Minimal Seifert manifolds for higher ribbon knots*, Geometry and topology monographs, Volume 1 (The Epstein Birthday Schrift), 261-293.
- [K] **M. Kapovich** : *Lectures on geometric group theory*, notes on the course at University of Utah (2002).
- [K-H] **A. Katok, B. Hasselblatt** : *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its applications 54, Cambridge University Press (1998).
- [K-L] **B. Kleiner, B. Leeb** : *Groups quasi-isometric to symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom., 9 (2001), pp. 239-260.
- [K-S] **A. Karrass, D. Solitar** : *The free product of two groups with a malnormal amalgamated subgroup*, Can. J. Math., Vol. XXIII, No. 6, 1971, pp. 933-959.
- [Ko] **M. Koubi** : *Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 48, 5 (1998), 1441-1453.
- [Lo] **J. Lohkamp** : *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. 140 (1994), 655-683.

- [M-S-W] **L. Mosher, M. Sageev, K. Whyte** : *Quasi-actions on trees I, Bounded valence*, (2003).
- [Ma] **W. S. Massey** : *Algebraic topology : an introduction*, Graduate Texts in Mathematics 56, Springer-Verlag (1984).
- [Mal] **A. I. Mal'cev** : *On the faithful representation of infinite groups by matrices*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 45 (1965), 1-18.
- [Mi] **J. Milnor** : *A note on curvature and the fundamental group*, J. Diff. Geom. 2 (1968), 1-7.
- [Mu] **J. R. Munkres** : *Topology*, Prentice Hall (2000).
- [Na] **Andrés Navas** : *On the volumetric entropy in the non-compact case*, Proyecciones Universidad Católica del Norte, Vol. 21 n. 1 (2002), 97-108.
- [O] **A. Y. Ol'shanskii** : *Almost every group is hyperbolic*, International Journal of Algebra and Computation Vol. 2, No. 1 (1992), 1-17.
- [Os] **D. V. Osin** : *The entropy of solvable groups*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2003), 23, 907-918.
- [P] **P. Petersen** : *A finiteness theorem for metric spaces*, J. Diff. Geom, 31 (1990), 387-395.
- [Pa] **P. Pansu** : *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math., 129 (1989), 1-60.
- [Pi] **R. A. Piccinini** : *Lectures on Homotopy Theory*, North Holland Mathematical Studies 171, North Holland (1992).
- [Ra] **J. G. Ratcliffe** : *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag (1994).
- [Re] **G. Reviron** : *Thèse*, Institut J. Fourier des Maths Pures, Grenoble (2004).
- [Ro] **D. J. S. Robinson** : *A course in the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics 80, Springer-Verlag, 2nd ed. (1996).
- [Rob] **G. Robert** : *Invariants topologiques et géométriques reliés aux longueurs des géodésiques et aux sections harmoniques de fibres*, These de Doctorat, UJF (1994).
- [Rot] **D. Rotman** : *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics 148, Springer-Verlag (1994).
- [S] **T. Sakai** : *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs 149, AMS (1996).

- [S-W] **P. Scott, T. Wall** : *Topological methods in group theory*, in Homological group theory, London Mathematical Society Lecture Note Series 36, 137-203 (1979).
- [Sa] **A. Sambusetti** : *Minimal growth of non-Hopfian free products*, C.R. Acad. Sci. t. 329, Serie I, Paris (1999), 943-946.
- [Se] **Z. Sela** : *Endomorphisms of hyperbolic groups I : the Hopf property*, Topology 38, 301-321 (1999).
- [Ser] **J. Serre** : *Trees*, Springer-Verlag (1980).
- [Sh-W] **P. B. Shalen, P. Wagreich** : *Growth rates, \mathbb{Z}_p -homology, and volumes of hyperbolic 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), 895-917.
- [Sp] **E. Spanier** : *Algebraic topology*, Springer-Verlag (1966).
- [Sz] **L. Schwartz** : *Analysis and topology*.
- [Tu] **P. Tukia** : *Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups*, J. Reine Angew. Math. 391 (1988), 1-54.
- [W] **A. Weinstein** : *On the homotopy types of positively-pinched manifolds*, Arch. Math. (Basel) 18 (1967), 523-524.
- [Wa] **C. T. C. Wall** : *Poincaré complexes*, I. Ann. of Math. 86 (1967), 213-245.
- [Wi] **J. S. Wilson** : *On exponential growth and uniformly exponential growth for groups*, Invent. Math. 155 (2004), no. 2, 287-303.
- [Ya] **T. Yamaguchi** : *Homotopy type finiteness theorems for certain pre-compact families of Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), no. 3, 660-666.
- [Z] **F. Zuddas** : *Some finiteness results for groups with bounded algebraic entropy*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004) 915-920.

RÉSUMÉ

On s'intéresse ici aux actions (discrètes, par isométries) d'un groupe Γ sur un espace métrique mesuré X et à la manière dont ces actions écartent les points. Le lemme de Margulis classique conclut lorsque X est une variété simplement connexe de courbure strictement négative et bornée. Une version récente (due à G. Besson, G. Courtois et S. Gallot) conclut lorsque X est un espace métrique mesuré d'entropie bornée, mais est essentiellement limitée au cas où Γ est un groupe fondamental d'une variété de courbure négative majorée et de rayon d'injectivité minoré. Nous montrons que ce dernier résultat (et ses applications géométriques) se généralise à une classe \mathcal{C} plus vaste de groupes (qui contient les groupes hyperboliques selon Gromov, les produits libres et les produits amalgamés "malnormaux") et aux quasi-actions par quasi-isométries (avec points fixes éventuels) de ces groupes sur un espace métrique mesuré d'entropie bornée. Nous montrons aussi que \mathcal{C} est fermé pour une topologie naturelle. Nous appliquons ce résultat au cas où X est le graphe de Cayley d'un groupe G commensurable à un groupe $\Gamma \in \mathcal{C}$, obtenant des résultats de finitude qui s'appliquent en particulier aux groupes hyperboliques selon Gromov et aux groupes fondamentaux de variétés de diamètre borné. Ces derniers résultats apportent un éclairage nouveau aux questions de l'existence d'un minorant universel de l'entropie pour cette classe de groupes et de l'existence, pour chacun de ces groupes, d'un système générateur d'entropie algébrique minimale.

MOTS CLÉS

Actions de groupes, Lemme de Margulis, Rayon d'injectivité, Entropie des groupes et des espaces métriques, Théorèmes de finitude, Groupes fondamentaux des variétés de courbure négative, Groupes hyperboliques selon Gromov, Produits libres et amalgamés, Graphe de Cayley, Réalisation de l'entropie algébrique, Minorations universelles pour l'entropie algébrique, Quasi-isométries.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

20F67, 28D20, 53C20, 53C23, 51F99