HAL
open science

SIMULATION NUMERIQUE DE LA DYNAMIQUE DES SYSTEMESMULTICORPS APPLIQUEE AUX MILIEUX GRANULAIRES

Jérôme Fortin

To cite this version:

Jérôme Fortin. SIMULATION NUMERIQUE DE LA DYNAMIQUE DES SYSTEMESMULTICORPS APPLIQUEE AUX MILIEUX GRANULAIRES. Modélisation et simulation. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2000. Français. NNT : . tel-00011222

HAL Id: tel-00011222

https://theses.hal.science/tel-00011222v1

Submitted on 16 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LILLE U.F.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES DEPARTEMENT DE MECANIQUE FONDAMENTALE

THÉSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE I

Spécialité : **MÉCANIQUE**

présentée par

Jérôme FORTIN

Titre de la thèse :

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MULTICORPS APPLIQUÉE AUX MILIEUX GRANULAIRES

soutenue le 6 janvier 2000 devant le jury composé de

M. Frémond	Directeur de Recherche C.N.R.S., L.C.P.C.	Président, Rapporteur
M. Jean	Directeur de Recherche C.N.R.S., L.M.A.	Rapporteur
N. E. Abriak	H.D.R., Ecole des Mines de Douai	Examinateurs
P. Coorevits	Professeur, I.N.S.S.E.T., St Quentin	
D. Kondo	Professeur, Université de Lille I	
G. de Saxcé	Professeur, Université de Lille I	Directeur de thèse
O. Millet	Maître de Conférences, Université de Lille I	

“...Il me semble que je n’ai jamais été qu’un enfant jouant sur une plage, m’amusant à trouver ici ou là un galet plus lisse ou un coquillage plus beau que d’ordinaire, tandis que, totalement inconnu, s’étendait devant moi le grand océan de la vérité...”

Isaac Newton

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés dans le cadre d'une Allocation du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, au sein de l'U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Département de Mécanique Fondamentale, de l'Université des Sciences et technologies de Lille, en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique de Lille. A ce titre, je tiens à remercier Monsieur G. Caignaert, directeur du laboratoire, de m'avoir acceuilli pour réaliser cette thèse dans les mellieures conditions.

Cette thèse a été effectuée sous la direction scientifique de Monsieur G. de Saxcé. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour les conseils et la confiance qu'il m'a accordées durant ces trois années de travail. De même, j'adresse mes remerciements à Monsieur O. Millet codirecteur scientifique de mon travail pour son aide et sa disponibilité.

Je remercie vivement Messieurs M. Frémond et M. Jean pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, je leur suis très reconnaissant d'avoir bien voulu en être les rapporteurs. J'exprime également ma gratitude à Monsieur M. Frémond pour avoir accepté d'assurer la présidence du jury. Je voulais, tout particulièrement, remercier N.-E. Abriak, qui m'a fait partager ces connaissances sur les milieux granulaires et qui a bien voulu participer à mon jury de thèse. Mes remerciements vont de même à Messieurs P. Coorevits et D. Kondo qui ont accepté d'être menbres de ce jury.

De même, je remercie J.-B. Tritsch qui m'a accepté dans son bureau et avec qui j'ai passé trois années formidables. Je lui en suis très reconnaissant. Je voulais aussi exprimer mes remerciements à Y. Tinel du Centre de Ressources Informatiques, qui a toujours su être disponible.

Je remercie aussi tous les collègues du Laboratoire de Mécanique de Lille pour la bonne ambiance qu'ils ont fait régner.

Table des matières

Introduction générale **3**

1 Modélisation d'un milieu granulaire par un système multicorps **11**
1.1 Introduction 11
1.2 Cinématique pour un corps rigide 12
1.2.1 Vecteur position 12
1.2.2 Vecteur vitesse 13
1.2.3 Paramétrage pour un système multicorps 14
1.3 Dynamique d'un système multicorps 15
1.3.1 Principe des puissances virtuelles 15
1.3.2 Identification des équations de Lagrange 18
1.4 Les liaisons complémentaires 20
1.4.1 Utilisation d'une loi de comportement 20
1.4.2 Variables duales pour la loi de comportement 21
1.4.3 Relations cinématiques 25
1.5 Conclusion 26

2 Modélisation du contact frottant dans le cas d'un système discret par l'approche du bipotentiel **29**
2.1 Introduction 29
2.2 Loi de contact unilatéral 31
2.2.1 Conditions de Signorini 32
2.2.2 Loi de contact unilatéral en vitesses 34
2.3 Loi sur le frottement sec 37
2.3.1 Introduction 37
2.3.2 Réaction normale et réaction tangentielle 39
2.3.3 Modélisation de la loi de Coulomb 41
2.4 Modélisation implicite de la loi de contact unilatéral avec frottement sec . 43
2.4.1 Loi de contact complète : loi non-associée 43
2.4.2 Bipotentiel de contact 47
2.5 Résolution de la loi de contact complète 48
2.5.1 Schéma prédicteur-correcteur 48

2.5.2 Interprétation graphique de la projection 49
2.5.3 Interprétation analytique de la projection 50
2.6 Conclusion 53

3 Algorithme de la dynamique des contacts basé sur le concept du bipotentiel 55
3.1 Introduction 55
3.2 Évolution non-régulière 56
3.2.1 Dynamique non-régulière 56
3.2.2 Loi de choc 56
3.3 Algorithme global 59
3.3.1 Sélection des candidats aux contacts 59
3.3.2 Schéma global de prédiction-correction 60
3.4 Calibrage du modèle : contact simple 61
3.4.1 Estimation du paramètre ρ 61
3.4.2 Vérification de la loi de restitution normale 63
3.4.3 Vérification de la loi avec frottement 65
3.4.4 Calibrage du modèle numérique : contacts multiples 68
3.5 Erreur en relation de comportement 77
3.5.1 Définition 77
3.5.2 Performance de l'algorithme 79
3.6 Conclusion 79

4 Simulation numérique des milieux granulaires 81
4.1 Introduction 81
4.2 Code de calcul MULTICOR 81
4.2.1 Logiciel CHARLY 81
4.3 Mise en place d'un matériau analogique 85
4.3.1 Génération automatique des particules 85
4.3.2 Déversement de particules soumises à la gravité 85
4.3.3 Anisotropie de structure 92
4.4 Simulation d'un milieu granulaire ensilé 92
4.4.1 Mises en évidence de l'effet de voûte dans les silos 92
4.4.2 Milieu granulaire ensilé avec présence d'une inclusion 95
4.5 Simulation d'un matériau granulaire soumis à un cisaillement direct . . . 99
4.5.1 Résultats expérimentaux 100
4.5.2 Résultats numériques 101
4.6 Conclusion 107

5 Contrainte moyenne dans les milieux granulaires 109
5.1 Introduction 109
5.2 Contrainte de Cauchy 110

5.3 Définition de la contrainte moyenne 114
5.3.1 Contrainte pour une cellule élémentaire finie 114
5.3.2 Propriétés du tenseur des contraintes 116
5.3.3 Contrainte pour un polyèdre 117
5.3.4 Contrainte pour un ensemble de polyèdres 118
5.4 Influence des effets dynamiques sur la contrainte moyenne 120
5.4.1 Cas d'un cylindre qui roule sur un plan incliné 120
5.4.2 Application numérique 125
5.5 Conclusion 129

Conclusion et perspectives **133**

A Quelques résultats d'analyse convexe **137**
A.1 Ensemble et fonction convexes 137
A.2 Sous-différentiels 138
A.3 Transformée de Legendre-Fenchel 139

B Les matériaux Standard Implicites **141**
B.1 Potentiel et loi de normalité 141
B.2 Pseudo-potentiel et loi de sous-normalité 142
B.3 Bipotentiel et loi de sous-normalité implicite 144

Bibliographie **147**

Introduction générale

Par définition, un milieu granulaire est un ensemble discret de grains susceptibles d'interagir entre eux. La granulométrie, la forme et l' arrangement des grains, l'indice des vides ou encore la présence de fluide intersticiel sont autant de paramètres susceptibles d'influencer le comportement mécanique des milieux granulaires. Ce comportement met en jeu certaines propriétés macroscopiques caractéristiques (à l'échelle de l'échantillon), comme la dilatance[1] [9][94], la localisation de la déformation[2], ou encore la ségrégation[3] et l'effet de voûte[4] [1][40][58] dans des applications dynamiques.

De ces diverses constatations, Coulomb [25] a montré que le frottement est en partie responsable du comportement complexe des milieux granulaires et proposa un critère de rupture. A partir de ce critère et avec le développement de la méthode des Éléments Finis (E.F.), les mécaniciens des sols ont intensifié les études sur les milieux granulaires, en développant des lois rhéologiques susceptibles de rendre compte du comportement complexe de ces milieux [10][31][32][98]. Cependant, des essais de laboratoire sur des matériaux analogiques de type Schneebeli[5] ont mis en évidence l'existence de contacts privilégiés entre certaines particules par l'intermédiaire desquels sont transmis les efforts [30][34][88][89][100]. C'est pourquoi, pour prendre en compte la transmission hétérogène des efforts de contact, les modèles rhéologiques utilisés dans les méthodes E.F. ne suffisent pas. Il faut alors développer d'autres modèles qui puissent tenir compte

[1] Un milieu granulaire, pour se déformer, subit une variation de volume.

[2] Un milieu granulaire se cisaille le long de surfaces de rupture.

[3] On parle aussi de l'effet "noix du brésil" [40].

[4] Le mouvement d'un milieu granulaire confiné ou ensilé peut se bloquer.

[5] Schneebeli [97] a montré la possibilité de réaliser un milieu granulaire, homogène, bi-dimensionnel et obéissant à la loi de Coulomb, par empilement de cylindres horizontaux, de différents diamètres et de même longueur.

des phénomènes qui ont lieu au niveau microscopique, à l'échelle de la particule.

Ces modèles sont basés sur des théories d'homogénéisation qui moyennent les informations microscopiques telles que la cinématique des grains et les efforts intergranulaires [15][16][17]. Il est donc nécessaire de développer des outils qui donnent accès à ces informations. On parle alors d'approche micromécanique. Bien que réaliste, elle est difficile à mettre en oeuvre, tant expérimentalement que numériquement. En conséquence, dans une première approximation, il est nécessaire de réduire le nombre de paramètres, afin de mieux les contrôler. On s'intéressera ici aux milieux granulaires composés de particules qui ne sont soumises qu'à la pesanteur et aux forces de contact interparticulaires[6]. Dans les modèles les plus courants, modèles de Schneebeli [97], les grains ont une forme circulaire ou sphérique et leurs contacts sont régis par les lois de Coulomb. Les conditions aux limites, ainsi que la manière de préparer l'échantillon de matériau modèle (anisotropie, compacité) [74] sont autant de paramètres qu'il convient de maîtriser pour permettre une approche micromécanique qui s'effectue généralement en deux étapes. La première consiste à récolter les informations microscopiques par des essais de laboratoire ou des méthodes numériques et la seconde à utiliser une théorie d'homogénéisation pour passer du comportement microscopique au comportement macroscopique.
Du point de vue expérimental, tous les essais de la mécanique des sols utilisant le modèle de Schneebeli [97] sont réalisables, comme l'essai œdométrique [100], l'essai triaxial [42], l'essai bi-directionnel [8] et l'essai de cisaillement direct [1]. L'avantage de ces essais de laboratoire est de fournir des valeurs en grandes quantités dans des cas bien déterminés de conditions limites et de chargement. De plus, par des techniques de visualisation appropriées, les essais sur matériau modèle autorisent l'analyse de la microstructure. On peut distinguer la photoélasticité qui met en évidence l'hétérogénéité des efforts de contact et la technique du traitement d'images qui rend compte de la cinématique des grains et de certains paramètres structuraux [45][55][70]. Cependant, par manque de répétabilité[7] [42], les essais de laboratoire ne permettent pas d'identifier et de classifier avec précision les variables locales. Ce ne sera pas l'objet de notre travail[8].

[6]Cette définition exclut les milieux cohérents, pour lesquels existent des interactions électrochimiques, et les poudres fines soumises à des forces de Vanderwaals.

[7]Pour un même échantillon (mêmes conditions initiales, mêmes conditions limites), les résultats sont rarement identiques.

[8]Cependant, des essais de cisaillement direct [45] nous permettront de valider notre modèle numérique.

Notre travail s'inscrit dans le cadre des approches numériques. On parle de méthode des Eléments Discrets (E.D.) par opposition à la méthode des Eléments Finis (E.F.) cette dernière étant utilisée lorsqu'une loi de comportement homogénéisée a été choisie, assimilant le milieu granulaire à un milieu continu. Nous allons rappeler brièvement la méthode E.D. dont l'un des précurseurs est P.A. Cundall [26][27]. Il proposa une modélisation du comportement de blocs rocheux en considérant un assemblage de blocs rigides dont les interactions étaient modélisées par des ressorts et des amortisseurs. La méthode E.D. consiste à suivre individuellement chaque particule et quand un contact interparticulaire se produit, une loi de comportement locale détermine les mouvements résultants des particules impliquées. Ainsi plusieurs modélisations E.D. ont été proposées, chacune proposant une gestion particulière de la loi de contact et des chocs multiples.

Dans pratiquement tous les cas, la loi de contact unilatéral avec frottement sec est utilisée pour modéliser le contact interparticulaire. Cette loi permet de traduire à la fois la condition de Signorini et le frottement de Coulomb [25][28]. C'est une loi dissipative non linéaire comportant trois statuts : non-contact, contact avec adhérence et contact avec glissement. La difficulté pour implanter numériquement cette loi repose sur le fait qu'elle est non-régulière, c'est-à-dire que c'est une loi multivoque.

Afin de gérer numériquement le caractère multivoque de cette loi de contact, certaines modélisations E.D., comme la Dynamique Moléculaire (D.M.) [101], utilisent des approximations régularisantes[9]. Les outils mathématiques nécessaires à une telle modélisation sont les techniques usuelles de l'analyse non linéaire régulière. Dans ce cas, les interactions de frottement et le mécanisme de restitution n'interviennent que lorsque les particules s'interpénétrent, et dépendent de cette interpénétration [4][27][29][63]. La réaction normale de contact est proportionnelle à la pénétration[10], et lorsque la vitesse de glissement est négligeable, la réaction tangentielle de contact est proportionnelle et opposée à la vitesse de glissement[11]. La raideur impose des pas de discrétisation très petits, et souvent, des inerties ou des viscosités artificielles sont introduites pour assurer la stabilité

[9] On parle aussi de méthode de pénalisation.
[10] La pente de la droite correspond à la raideur d'un ressort.
[11] Elle correspond à un effet d'amortissement visqueux.

numérique. Ainsi, l'utilisation d'une telle loi nécessite un compromis entre exigence de précision et raideur des équations approximantes.
Une façon plus rigoureuse de modéliser une telle loi de contact multivoque est l'utilisation de la théorie moderne des fonctions convexes et du calcul sous-différentiel (rappelés en annexe A). A partir de ce formalisme mathématique, J.-J. Moreau [79] propose d'introduire le concept de pseudo-potentiel, qui est convexe et semi-défini positif [78][81]. La condition de Signorini et la loi de Coulomb s'expriment alors sous forme de loi de sous-normalité. Dans ce cas, la résolution numérique de ces problèmes de minimisation [41], par des techniques du lagrangien augmenté [44][61], utilise deux schémas de prédiction-correction [4][69]. La méthode de dynamique des contacts, développée par J.-J. Moreau et M. Jean [66][82], est basée sur ce formalisme.

La seconde difficulté de ces méthodes E.D. qui utilisent les conditions de contact exactes est de gérer les multiples collisions qui peuvent se produire au sein du milieu granulaire dense[12]. En effet, on ne peut utiliser efficacement les techniques classiques de discrétisations en temps, puisqu'à tout moment la collision de deux particules peut provoquer dans le système des oscillations dont la fréquence temporelle peut être supérieure à celle de la discrétisation.
Pour résoudre ce problème, une première façon de faire est d'utiliser une méthode gérée par les événements, comme les méthodes collisionnelles : l'idée est de déterminer dans un système particulaire la date de la prochaine collision, de déplacer toutes les particules jusqu'à cette date et de calculer les vitesses des particules partenaires après le choc. L'une des difficultés dans ce type de modélisation est d'être très précis dans le calcul des temps de collisions et dans la gestion des événements. Ainsi, cette méthode semble être très efficace pour des simulations de milieux granulaires lâches mais inapplicable dès qu'il s'agit de simuler des milieux granulaires denses [75].
Une deuxième façon de faire permettant de gérer les contacts multiples, est d'utiliser la méthode de la Dynamique des Contacts (D.C.) développée par J.-J. Moreau et M. Jean [66][82]. C'est une méthode de type incrémentale et implicite qui simule à la fois les

[12] Les méthodes de D.M. qui utilisent les conditions de contact régularisées ne sont pas affectées par ce problème, puisque l'amortissement dû à la pénétration des particules permet d'éviter le phénomène d'oscillations.

milieux granulaires denses et lâches. Cette méthode est fondée sur la dynamique non-régulière [87]. A chaque pas de temps, l'ensemble des forces de contact du système est déterminé itérativement par la méthode dite des équilibres successifs qui est basée sur un schéma de Gauss-Seidel. Chaque force de contact est calculée en adoptant des valeurs provisoires des forces sur les autres contacts. La convergence est obtenue quand chaque force interparticulaire vérifie la loi de contact unilatéral avec frottement sec. Pour la modélisation des chocs, la D.C. utilise la notion de vitesse formelle au sens de J.-J. Moreau [82], pour des particules circulaires ou sphériques. Par contre, pour des particules plus complexes, telles que des polyèdres, M. Frémond [21][39][51][52][53][54] propose une modélisation du contact multiple à partir du formalisme de la mécanique des milieux continus. L'idée principale est de considérer un système déformable constitué de corps indéformables et d'introduire des efforts intérieurs au système qui sont des forces ou des percussions définies par leur travail. Les outils nécessaires à une telle résolution sont le principe des travaux virtuels et la thermodynamique des milieux continus.

Ainsi, les modélisations Eléments Discret (E.D.), que ce soit la Dynamique Moléculaire (D.M.), Dynamique des Contacts (D.C.) ou les méthodes collisionnelles, permettent actuellement d'approcher localement le comportement des milieux granulaires. Cependant les temps de calcul, qui augmentent avec le nombre de corps candidats au contact, ne permettent pas la simulation de grands systèmes granulaires. De plus, le critère de convergence classique basé sur les réactions de contact peut se révéler, dans des exemples compliqués, complètement inadapté, c'est-à-dire trop tolérant ou inutilement sévère.

Notre étude consiste à développer une simulation numérique de type Eléments Discrets (E.D.) en deux dimensions du mouvement d'un ensemble de corps rigides, entrant en collision entre eux ou avec les parois d'une enceinte, et sujets à des forces de frottement lors de ces chocs [46][47][48][49].
Dans le premier chapitre, nous nous attacherons à mettre en place les équations indispensables à la modélisation de type Eléments Discrets. L'utilisation des coordonnées généralisées nous permet d'aboutir au formalisme des équations de Lagrange qui sont fonction du paramétrage utilisé. Le mouvement individuel des particules étant conditionné par d'éventuelles liaisons de contact, il sera indispensable d'ajouter aux équations de La-

grange, des lois de comportement local entre les variables duales régissant le contact local. Nous préciserons les relations cinématiques entre les variables locales et les variables généralisées.

Afin de modéliser et gérer numériquement la loi de contact exacte, nous utiliserons le formalisme du bipotentiel [35]. Ce formalisme, présenté au second chapitre, permet de conserver les avantages d'une écriture de loi d'évolution à l'aide d'une fonction à valeurs scalaires et d'une loi de sous-normalité. G. de Saxcé [35][36] a proposé d'abandonner l'idée d'une séparation en deux pseudo-potentiels duaux et postuler l'existence d'une fonction unique des variables duales appelée bipotentiel. Elle doit être biconvexe et satisfaire une inégalité généralisant celle de Fenchel. A partir de ce formalisme, G. de Saxcé et Z.-Q. Feng [38] ont proposé une modélisation du contact unilatéral avec frottement sec pour des corps déformables, qui aboutit à un bipotentiel de contact. L'intérêt numérique est de n'utiliser qu'un seul schéma de prédiction-correction dans la recherche des réactions de contact. Les corps sont considérés comme parfaitement rigides et aucune flexibilité au contact interparticulaire n'est prise en compte. Dans le cas d'une modélisation E.D., le bipotentiel de contact doit être réécrit en intégrant la notion de collisions multiples. L'intérêt est double : cela doit permettre de simplifier l'algorithme local qui prédomine dans les méthodes E.D. et d'utiliser, comme critère de convergence, une relation en loi de comportement.

Dans le troisième chapitre, on réécrira le système d'équations présenté dans le premier chapitre avec le formalisme de la dynamique non-régulière développé par J.-J. Moreau [87] et on proposera un algorithme global de la Dynamique des Contacts basé sur l'utilisation du bipotentiel de contact. On s'appliquera à montrer, sur des exemples numériques de contacts simples et de contacts multiples, l'efficacité de l'algorithme. En outre, une autre originalité de l'algorithme sera d'utiliser, comme critère de convergence, une erreur en relation de comportement dont on présentera succinctement le formalisme et la vitesse de convergence.

Dans le quatrième chapitre, on présentera le code MULTICOR, son organigramme général et son fonctionnement, ainsi que quelques simulations numériques de matériaux ensilés [47][48] et de cisaillement direct. On s'attachera à valider notre modèle sur un exemple quasi-statique de matériau analogique soumis à un cisaillement direct, par comparaison avec des essais de laboratoire que nous avons réalisés dans le cadre d'un précédent travail [45].

Un autre problème important dans les milieux granulaires est celui de la définition d'un tenseur des contraintes moyen. Nous avons vu que l'approche micromécanique doit permettre le passage de l'échelle microscopique à une échelle macroscopique. Dans ce cas, l'utilisation d'une modélisation E.D. est indispensable pour accéder aux informations locales telles que les efforts de contact et le mouvement des particules. A l'échelle mésoscopique,[13] ces informations sont utilisées pour quantifier le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Cependant, ces techniques d'homogénéisations ne sont valables que s'il existe, à grande échelle, un comportement moyen bien défini, avec peu de fluctuations,... et si le Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.), sur lequel sont basées les moyennes qu'impliquent toutes ces approches, est bien défini et n'est pas de taille trop grande par rapport à la taille de l'échantillon ou de la structure [14][15]. D'autre part, compte tenu de la non-périodicité du milieu granulaire les théories classiques d'homogénéisation [92] ne sont pas applicables. Une possibilité est alors d'utiliser la formule de Weber[14] [15][16][17][103] qui permet de calculer un tenseur des contraintes moyen à partir des seules forces de contact. Cependant, cette formule, qui néglige les efforts volumiques (gravité et efforts d'inertie), restreint son domaine d'application aux problèmes quasi-statiques et ne permet pas d'appréhender les problèmes dynamiques. Il serait donc intéressant d'établir une expression du tenseur des contraintes moyen qui prenne en compte les efforts de contact et les efforts volumiques.

Ce sera l'objet de notre dernière partie. On proposera une définition du tenseur des contraintes moyen pour les milieux granulaires à partir du formalisme de la mécanique des milieux continus. L'originalité de cette écriture est de prendre en compte les forces volumiques (forces de pesanteur et forces d'inertie), qui dans la plupart des applications sont négligées. On montrera sur un exemple analytique et numérique simple comment les effets dynamiques sont essentiels pour obtenir la symétrie du tenseur des contraintes.

[13] Echelle où les constituants de la matière première sont vus ensemble et forment un tout équivalent à un milieu homogène.

[14] Bien que C. Chree [22] ait été un précurseur en la matière, la formule du tenseur des contraintes est attribuée par beaucoup d'auteurs à J.-C. Weber.

Chapitre 1

Modélisation d'un milieu granulaire par un système multicorps

1.1 Introduction

L'objectif général de l'étude est de proposer une modélisation des milieux granulaires par la méthode des Eléments Discrets (E.D.) [26][27]. La première hypothèse consiste à limiter notre étude à un milieu granulaire composé de particules discrètes qui n'ont pour interactions que la pesanteur et les forces de contact. Dans une seconde hypothèse, on modélise ce milieu granulaire par un modèle de Schneebeli [97] qui permet d'approcher le comportement réel des milieux granulaires [43][56][100]. On considère alors un milieu granulaire modélisé par un système $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_k$ de p corps rigides Ω_k.

A partir des formules fondamentales de la cinématique établies pour un corps rigide, nous proposons de paramétrer un système Σ constitué de p corps rigides par des coordonnées généralisées $\mathbf{q} = (q_1, q_2, .., q_n)$.

Dans un premier temps nous établissons, à partir du principe des puissances virtuelles, les équations de la dynamique qui s'identifient aux équations de Lagrange et dans un second temps, pour des corps en contact les uns avec les autres, on précise comment tenir compte de ces liaisons supplémentaires.

Dans notre cas, les équations de liaisons s'identifient à des lois de comportement dont on présentera les variables duales. Chaque loi de comportement étant calculée dans un repère local, nous établirons les relations cinématiques entre les variables duales et les variables généralisées afin de permettre la résolution du système d'équations.

1.2 Cinématique pour un corps rigide

1.2.1 Vecteur position

On définit par $< \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3 >$, le système de coordonnées attaché à un repère Galiléen orthonormé $(O; E_1, E_2, E_3)$ que l'on notera R_g et $< x_1, x_2, x_3 >$ le système de coordonnées attaché au repère barycentrique orthonormé $(O'; E_1, E_2, E_3)$ que l'on notera R_b où O' est le centre de gravité de Ω_k, figure 1.1.

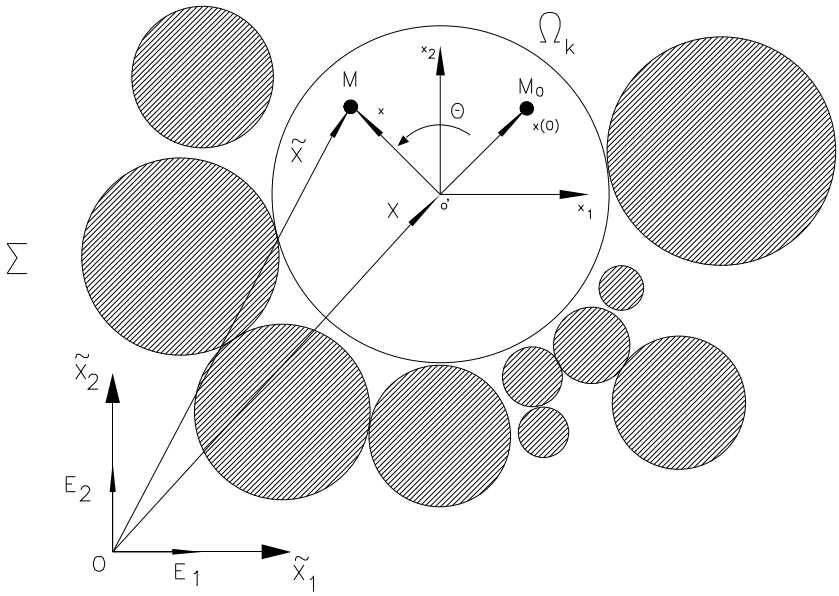


FIG. 1.1 – Configuration d'un système multicorps modélisant un milieu granulaire.

La position d'un point M du solide, ayant subit un déplacement de solide rigide à l'instant *t*, s'écrit

$$\mathbf{O'M} = \mathbf{R}(t)\mathbf{O'M_0}$$

où $\mathbf{R}(t)$ est la matrice de rotation de centre O' et d'angle θ autour de E_3. De façon équivalente,

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{R}(t).(\tilde{\mathbf{X}}(0) - \mathbf{X}(0)), \tag{1.1}$$

où $\mathbf{X}(t) =< X_1(t), X_2(t), X_3(t) >$ représente le vecteur position du centre de gravité de Ω_k calculé dans R_g à l'instant t et $\tilde{\mathbf{X}}(t) =< \tilde{X}_1(t), \tilde{X}_2(t), \tilde{X}_3(t) >$ la position du point M calculé dans R_g à l'instant *t*.

Par ailleurs, la matrice rotation vérifie la propriété d'orthogonalité,

$$\mathbf{R^t R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^t = \mathbf{I}, \tag{1.2}$$

où **I** est la matrice identité et $\mathbf{R}^t$ la matrice transposée de $\mathbf{R}$. Son déterminant est égal à 1.

Ainsi, tout corps solide se présente comme un système mécanique à six degrés de liberté, trois en translation et trois en rotation.

Dans un système à deux dimensions, la matrice rotation est égale à

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{R_b}. \tag{1.3}$$

La position du solide est alors non plus déterminée par six degrés de liberté mais par trois : 2 en translation et 1 en rotation.

1.2.2 Vecteur vitesse

La dérivée par rapport au temps de l'équation (1.1) dans R_g nous donne l'expression de la vitesse Lagrangienne d'un point du corps rigide,

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t).(\tilde{\mathbf{X}}(0) - \mathbf{X}(0)).$$

En utilisant la relation (1.1) et la propriété d'orthogonalité (1.2), nous obtenons alors l'écriture suivante :

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) + j(\mathbf{w}).(\tilde{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t)), \tag{1.4}$$

où ici $j(\mathbf{w})$[1] représente la matrice des vitesses angulaires définie par :

$$j(\mathbf{w}) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^t = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}_{R_b}. \tag{1.5}$$

Dans le cas 2-D, on a $\mathbf{w} =< w_1, w_2, w_3 >=< 0, 0, \dot{\theta} >$.

1.2.3 Paramétrage pour un système multicorps

Pour étudier le mouvement d'un système Σ de p corps rigides Ω_k, il est nécessaire de savoir caractériser leurs positions dans un repère par un paramétrage adapté. De plus, les solides sont généralement liés par des liaisons qui limitent leurs possibilités de mouvement, ce qui influe sur le choix du paramétrage. Classiquement, on associe à toute position du système Σ, un ensemble de variables réelles q_i, appelées coordonnées généralisées. La position d'un point M de Σ est déterminée par la donnée des $n + 1$ variables réelles $q_1, q_2, ..., q_n, t$. Le vecteur position de M est donné par :

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{M}(t, \mathbf{q}). \tag{1.6}$$

Dans cette configuration, si $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_k$ et en ne tenant pas compte des liaisons internes et externes, il est possible de définir un paramétrage primitif avec $n = 6p$ paramètres q_i en 3D et $n = 3p$ en 2D. Soit sous forme matricielle

$$\mathbf{q}^t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & . & . & . & q_n \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Prenons l'exemple d'un corps rigide, en deux dimensions, libre de tout mouvement, la

[1] $j(\mathbf{x})$ est l'opérateur "produit vectoriel par $\mathbf{x}$" défini par $j(\mathbf{x})(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$

position d'un point de ce corps par rapport au référentiel R_g, vu (1.1), est donnée par

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) + X_1(0)cos\theta(t) - X_2(0)sin\theta(t) \\ X_2(t) + X_1(0)sin\theta(t) - X_2(0)cos\theta(t) \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Dans cette situation, les coordonnées généralisées du système composé d'un corps rigide libre de toute liaison, pourront être les coordonnées du centre de masse du corps et l'angle de rotation θ, soit

$$\mathbf{q}^t = \begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \theta(t) \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Cependant, la donnée des coordonnées généralisées n'est pas suffisante pour déterminer le mouvement mécanique du système. Il faut aussi connaître les vitesses. On définit les vitesses généralisées, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ comme les dérivées par rapport au temps des paramètres $q_1, q_2, ..., q_n$ à cet instant. La vitesse Lagrangienne d'un point de Σ à t est définie en utilisant le théorème des fonctions composées :

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{V}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{M}(t, \mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{M}(t, \mathbf{q})}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Dans le cas scléronomique[2], on a $\dfrac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial t} = 0$.

1.3 Dynamique d'un système multicorps

Nous venons de préciser le paramétrage que nous utiliserons pour suivre l'évolution d'un système Σ constitué de corps rigides Ω_k. Il nous faut maintenant préciser les équations de la dynamique par rapport au paramétrage $\mathbf{q}$.

1.3.1 Principe des puissances virtuelles

Soit le principe des puissances virtuelles :

[2] Si les liaisons, prises en compte dans la définition du paramétrage $q_1, q_2, ..., q_n$, sont indépendantes du temps

Théorème 1 *Il existe au moins un référentiel Galiléen R_g dans lequel, pour tout système matériel $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_k$ et pour tout mouvement virtuel V^*, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs et des efforts intérieurs au système Σ*

$$P_a^*(\Sigma/R_g) = P_e^*(\overline{\Sigma} \to \Sigma/R_g) + P_i^*(\Sigma/R_g), \tag{1.11}$$

où l'on notera $\overline{\Sigma}$ le système extérieur à Σ.

Par application du principe des puissances virtuelles, on choisit un espace de mouvements virtuels. Pour l'étude d'un système de corps rigides, on définit ainsi l'espace de champ de torseur suivant :

$$\mathbf{V}^*(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*, \tag{1.12}$$

où $\dot{q}_i^* = \dfrac{d}{dt} q_i^*$, q_i^* représentant la variation virtuelle du paramétrage q_i. Par rapport à la vitesse réelle, il manque la contribution du temps *t* qui est figé. D'après (1.10), on montre que si les q_i et les $\dot{q}_i$ sont indépendantes alors :

$$\frac{\partial \mathbf{V}(M)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}. \tag{1.13}$$

Notons que le champ $\mathbf{V}(P)$ a une structure de torseur sur le corps rigide Ω_k. Ce qui entraîne :

$$\mathbf{V}(P) = \mathbf{V}(M) + \mathbf{PM} \wedge \mathbf{w}. \tag{1.14}$$

Par dérivation par rapport aux $\dot{q}_i$, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathbf{V}(P)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{V}(M)}{\partial \dot{q}_i} + \mathbf{PM} \wedge \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.15}$$

Étant données (1.12), (1.13) et (1.15), le champ des vitesses virtuelles $\mathbf{V}^*(\Omega_k)$ possède également une structure de torseur qui se note pour chaque corps rigide Ω_k :

$$[\mathbf{V}^*(\Omega_k)] = \sum_{i=1}^{i=6} \dot{q}_i^* \, [V_i^*] \quad \text{avec} \quad [V_i^*] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial \dot{q}_i} \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{V}(M)}{\partial \dot{q}_i} \end{bmatrix}_M . \tag{1.16}$$

Prenons l'exemple d'un système composé d'un corps rigide. Le champ des vitesses virtuelles étant un champ de torseur, il est rigidifiant pour le solide Ω_k soit alors :

Axiome 1 *Dans tout mouvement rigidifiant d'un système matériel Σ, la puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle.*

Il reste alors à calculer la puissance virtuelle des quantités d'accélération $P_a^*(\Omega_k/R_g)$ (que l'on notera P_a^*) et la puissance virtuelle des efforts extérieurs $P_e^*(\Omega_k/R_g)$ (que l'on notera P_e^*) pour le corps Ω_k. Soit par définition,

$$P_a^* = \int_{\Omega_k} \rho \mathbf{A}(M) \cdot \mathbf{V}^*(M) dV = \dot{q}_i^* \int_{\Omega_k} \mathbf{A}(M) \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \rho dV, \tag{1.17}$$

où $\mathbf{A}(M)$ représente l'accélération calculée dans R_g. Le terme sous l'intégrale se développe d'après (1.13) comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(M) \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt}\left\{ \mathbf{V}(M) \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \right\} - \mathbf{V}(M) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt}\left\{ \mathbf{V}(M) \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(M)}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \mathbf{V}(M) \cdot \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathbf{V}^2(M)}{2} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\mathbf{V}^2(M)}{2} \right). \end{aligned}$$

(1.17) s'écrit donc :

$$P_a^* = \dot{q}_i^* \left[\frac{d}{dt}\left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \int_{\Omega_k} \left(\frac{\mathbf{V}(M)^2}{2} \right) \rho dV \right\} - \frac{\partial}{\partial q_i} \int_{\Omega_k} \left(\frac{\mathbf{V}(M)^2}{2} \right) \rho dV \right].$$

Le terme sous l'intégrale n'est autre que l'énergie cinétique $T(\Omega_k/R_g)$. La puissance virtuelle des quantités d'accélération P_a^* est alors égale à

$$P_a^* = \dot{q}_i^* \left[\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T(\Omega_k/R_g)}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial T(\Omega_k/R_g)}{\partial q_i} \right]. \tag{1.18}$$

De même, la puissance virtuelle des efforts extérieurs se calcule à partir du champ de torseur des vitesses virtuelles et du champ de torseur des forces extérieures. D'après (1.16), on a :

$$P_e^*(\Omega_k/R_g) = [\mathbf{V}^*] \left[\mathbf{F}(\overline{\Omega}_k \to \Omega_k) \right] = \sum_{i=1}^{i=6} \dot{q}_i^* . Q_i(\overline{\Omega}_k \to \Omega_k/R_g) \tag{1.19}$$

où $\overline{\Omega}_k$ s'identifie à l'extérieur de Ω_k et où

$$Q_i(\overline{\Omega}_k \to \Omega_k/R_g) = [V_i^*] \left[F(\overline{\Omega}_k \to \Omega_k) \right] \tag{1.20}$$

désigne la force généralisée associée à $F(\overline{\Omega}_k \to \Omega_k)$ pour la coordonnée généralisée q_i. Alors, d'après le principe des puissances virtuelles (1.11) et d'après (1.18) et (1.19), nous avons :

$$\sum_{i=1}^{i=6} \dot{q}_i^* \cdot \left[\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T(\Omega_k/R_g)}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial T(\Omega_i/R_g)}{\partial q_i} - Q_i(\overline{\Omega}_k \to \Omega_k/R_g) \right] = 0. \tag{1.21}$$

Comme les q_i^* sont toutes indépendantes les unes des autres pour les corps Ω_k libres de toute liaison, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T(\Omega_k/R_g)}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial T(\Omega_k/R_g)}{\partial q_i} = Q_i(\overline{\Omega}_k \to \Omega_k/R_g). \tag{1.22}$$

Ces relations constituent les équations de Lagrange, pour un corps rigide Ω_k paramétré par des coordonnées généralisées q_i indépendantes. L'extension à un système discret de p corps rigides $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_k$, donne par sommation sur *k*, les *n=6p* équations de Lagrange pour Σ

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T(\Sigma/R_g)}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial T(\Sigma/R_g)}{\partial q_i} = Q_i(\overline{\Sigma} \to \Sigma/R_g) + \sum_{j,k=1}^{j,k=n} Q_i(\Omega_j \leftrightarrow \Omega_k), \tag{1.23}$$

où les $Q_i(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g)$ sont les forces généralisées associées aux efforts extérieurs du système Σ et les $Q_i(\Omega_j \leftrightarrow \Omega_k)$ sont les forces généralisées associées aux efforts de contact entre les Ω_j et Ω_k constituant le système Σ.

1.3.2 Identification des équations de Lagrange

On définit l'énergie cinétique d'un système $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_k$ par

$$T(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} \mathbf{V}^2(M)dm \tag{1.24}$$

où m est la masse du système. D'après (1.10), l'énergie cinétique s'écrit

$$T(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(t,\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_i b^i(t,\mathbf{q})\dot{q}_i + \frac{1}{2}c(t,\mathbf{q}),$$

avec

$$a^{ij} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_j}dm, \quad b^i = \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}dm \quad \text{et} \quad c = \int_{\Sigma}\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right)^2 dm.$$

Dans l'hypothèse d'un système scléronomique, l'énergie cinétique se réduit à

$$T(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{1.25}$$

où dans ce cas a^{ij} est une matrice symétrique. L'énergie cinétique est donc quadratique par rapport aux $\dot{q}_i$. Dans la pratique, nous ne calculons pas l'énergie cinétique en intégrant sur le système mais nous déterminons l'énergie cinétique de chaque corps puis nous sommons sur l'ensemble des corps.

D'après (1.25), le premier terme du premier membre de (1.23) donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(\Sigma/R_g)}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{1}{2}\sum_{j,k} a^{jk}(q)\left(\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_k + \dot{q}_j\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k} a^{jk}(q)\left(\delta^i_j\dot{q}_k + \dot{q}_j\delta^i_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_k a^{ik}(q)\dot{q}_k + \sum_j a^{ji}(q)\dot{q}_j\right) \\
&= \sum_j a^{ij}(q)\dot{q}_j,
\end{aligned}$$

d'où les équations de Lagrange pour un système scléronomique :

$$\sum_j a^{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j,k}\frac{\partial a^{ij}(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial a^{jk}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k = Q_i(\overline{\Sigma}\to\Sigma/R_g) + \sum_{j,k} Q_i(\Omega_j\leftrightarrow\Omega_k).$$

En posant

$$F_i(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = Q_i(\overline{\Sigma}\to\Sigma/R_g) - \sum_{j,k}\frac{\partial a^{ij}(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial a^{jk}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

on obtient la formulation classique [84]

$$\sum_j a^{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j = F_i(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \sum_{j,k=1}^{j,k=n} Q_i(\Omega_j\leftrightarrow\Omega_k). \tag{1.26}$$

Dans l'hypothèse d'une modélisation des corps Ω_k par des cylindres, la matrice a^{ij} est indépendante des q_i, et les *n* équations de Lagrange deviennent

$$(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_i = F_i + \sum_{j,k=1}^{j,k=n} Q_i(\Omega_j\leftrightarrow\Omega_k) \quad \text{pour} \quad i = 1,...,n, \tag{1.27}$$

où $\mathbf{M} = \sum_j a^{ij}$ et $F_i = Q_i(\overline{\Sigma}\to\Sigma/R_g)$.

1.4 Les liaisons complémentaires

1.4.1 Utilisation d'une loi de comportement

Supposons maintenant que $\Sigma = \bigcup_{j=1}^{p} \Omega_j$ (possédant *a priori n=6p* degrés de liberté) soit soumis à *k* liaisons supplémentaires entre les corps Ω_j laissant $n-k$ degrés de liberté $\mathbf{q}^t = (q_1, q_2, .., q_{n-k})$ (l'ensemble des configurations permises par ces liaisons). La réalisation de telles liaisons implique l'action sur Σ d'efforts de liaison, *a priori* inconnus, dont Q_L^i est la force généralisée. Il convient de définir les restrictions auxquelles doivent satisfaire les variables réelles

$$\mathbf{q}^t = (q_1, q_2, .., q_n)$$

du fait des liaisons complémentaires

$$\mathbf{f}_c(t, \mathbf{q}) = 0 \qquad (c = 1, 2..., k). \tag{1.28}$$

L'étude du mouvement, dans ce cas précis, nous oblige à avoir des informations sur ces liaisons. Il existe alors différentes stratégies de résolution. Dans le cas de liaisons bilatérales fermes, on peut utiliser les équations de Lagrange (1.27) mais en tenant compte des liaisons au niveau du calcul des forces généralisées **Q**. Ceci introduit un terme supplémentaire au second membre, fonction des *k* multiplicateurs de Lagrange λ_c associés aux liaisons, soit :

$$(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_i = F_i + \sum_{c=1}^{k} \lambda^c \frac{\partial f_c}{\partial q_i}. \tag{1.29}$$

Pour notre part, nous utiliserons une autre stratégie de résolution qui consiste à utiliser les *n* équations de Lagrange (1.27) sans tenir compte des liaisons et d'ajouter les *k* équations (1.28) dans le système à résoudre. Ce qui nous donne, dans les deux cas, *n*+*k* équations pour les *n*+*k* fonctions inconnues ($(q_1, ..., q_n)$ et les *k* efforts de liaisons). Le système est donc résolvable.

Mais ici les informations concernant les efforts de liaison sont très limitées. Dans le but d'utiliser ces équations pour modéliser le mouvement d'un milieu granulaire frottant, les

équations (1.28) ne sont pas suffisantes. En particulier, dans le cas où nous avons des liaisons traduisant le contact unilatéral entre les solides,

$$\mathbf{f}_c(t, \mathbf{q}) \leq 0 \qquad (c = 1, 2..., k), \tag{1.30}$$

les liaisons fermes peuvent se rompre. Donc, si nous voulons avoir de plus amples informations sur la sthénique des liaisons, nous devons traduire les liaisons de contact entre les corps par une relation dite de comportement

$$\text{loi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = .\text{VRAI.} \quad (c = 1, 2..., k), \tag{1.31}$$

où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des variables duales choisies pour traduire la liaison d'un point de vue cinématique et sthénique. Le système d'équations que nous aurons à résoudre devient alors

$$\begin{cases} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_i = F_i + \displaystyle\sum_{j,k=1}^{j,k=n} Q_i(\Omega_j \leftrightarrow \Omega_k) \\ \\ \text{loi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = .\text{VRAI.} \quad (c = 1, 2..., k). \end{cases} \tag{1.32}$$

Avant de discuter plus en détails de la forme de la loi de comportement et de sa modélisation (chapitre 2), nous allons, dans un premier temps, définir les variables duales qui vont intervenir dans la loi de comportement. Dans un second temps, nous établirons les relations cinématiques permettant de faire le lien entre les variables duales de (1.31) et les coordonnées et forces généralisées intervenant dans (1.32).

1.4.2 Variables duales pour la loi de comportement

Afin de prendre en compte les possibles conditions (1.30), nous faisons le choix d'utiliser ici comme variables de comportement $\dot{\mathbf{u}}_{ji} = \dot{\mathbf{u}}$, la vitesse relative locale de Ω_i par rapport à Ω_j et $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}$, la réaction de contact de Ω_j sur Ω_i.

1.4.2.1 Le repère local

A chaque paire de rouleaux Ω_i et Ω_j, candidats au contact, est associé un référentiel local d'axes orientés suivant les deux vecteurs unitaires $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$, respectivement normal et tangent au plan de contact. $\mathbf{n}$ est dirigé de Ω_j vers Ω_i, figure 1.2

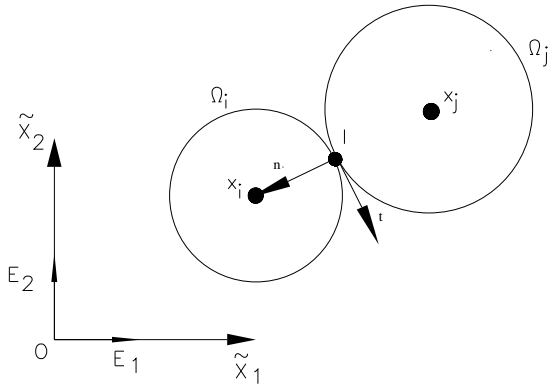


FIG. 1.2 – Repère local

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)}{||\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j||} \tag{1.33}$$

et $\mathbf{t}$ est orienté positivement par rapport au vecteur $\mathbf{n}$ ($\mathbf{t} = e_3 \wedge \mathbf{n}$). La base locale orthonormée est $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, E_3)$ et $\mathbf{T}$ est la matrice de changement de base entre

$$(E_1, E_2, E_3) \xrightarrow{\mathbf{T}} (\mathbf{n}, \mathbf{t}, E_3),$$

qui s'écrit en 3-D

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} n_1 & t_1 & 0 \\ n_2 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{E_i} . \tag{1.34}$$

Par suite, quand rien ne sera précisé, les matrices seront rapportées à la base (E_1, E_2, E_3) de R_g.

1.4.2.2 La vitesse relative locale

D'après (1.4), la vitesse relative du corps i par rapport au corps j s'écrit

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{ij} = \dot{\mathbf{X}}_i + j(\mathbf{w}_i)(\tilde{\mathbf{X}}_i - \mathbf{X}_i) - \dot{\mathbf{X}}_j - j(\mathbf{w}_j)(\tilde{\mathbf{X}}_j - \mathbf{X}_j). \tag{1.35}$$

Si les corps ont une géométrie sphérique ou, dans le cas plan, une géométrie circulaire, nous pouvons écrire, dans le cas d'un point de contact à la surface :

$$\tilde{\mathbf{X}}_i - \mathbf{X}_i = -a_i\mathbf{n} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{X}}_j - \mathbf{X}_j = a_j\mathbf{n} \tag{1.36}$$

où a_i et a_j sont les rayons des corps i et j respectivement. Soit alors en remplaçant dans (1.35),

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{ij} = \dot{\mathbf{X}}_i - a_i j(\mathbf{w}_i)\mathbf{n} - \dot{\mathbf{X}}_j - a_j j(\mathbf{w}_j)\mathbf{n}. \tag{1.37}$$

Or

$$j(\mathbf{w}_i)\mathbf{n} = -j(\mathbf{n})\mathbf{w}_i \quad \text{et} \quad j(\mathbf{w}_j)\mathbf{n} = -j(\mathbf{n})\mathbf{w}_j,$$

soit alors l'expression de la vitesse relative :

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{ij} = \dot{\mathbf{X}}_i + a_i j(\mathbf{n})\mathbf{w}_i - \dot{\mathbf{X}}_j + a_j j(\mathbf{n})\mathbf{w}_j,$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & a_i j(\mathbf{n}) & -\mathbf{I} & a_j j(\mathbf{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{i} \\ \mathbf{w}_\mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{j} \\ \mathbf{w}_\mathbf{j} \end{pmatrix}$$

où les vecteurs $\dot{\mathbf{X}}_i$, $\mathbf{w}_i$, et $\dot{\mathbf{X}}_j$,$\mathbf{w}_j$, représentent les vitesses généralisées des corps i et j respectivement. On a encore :

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & a_i j(\mathbf{n}) & -\mathbf{I} & a_j j(\mathbf{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

où, dans le cas 3-D, $\dot{\mathbf{q}}$ est une matrice 12×1, $\mathbf{I}$ la matrice identité de dimensions 3×3 et $j(\mathbf{n})$ une matrice de dimensions 3×3.

En projetant (1.38) sur la base locale $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, E_3)$, nous obtenons une relation, entre la vitesse relative locale $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^t\dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{ij}$ et les vitesses généralisées des deux corps candidats au contact $\dot{\mathbf{q}}$, exprimée par une matrice $\mathbf{P}^t$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^t\dot{\mathbf{q}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}^t = \mathbf{T}^t \begin{pmatrix} \mathbf{I} & a_i\tilde{\mathbf{n}} & -\mathbf{I} & a_j\tilde{\mathbf{n}} \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

La vitesse relative locale se décompose de la façon suivante :

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_t + \dot{u}_n \mathbf{n} \tag{1.40}$$

où $\dot{u}_n$ représente la vitesse de séparation normale (en référence à la condition (1.30)) et $\dot{\mathbf{u}}_t$ la vitesse de glissement.

1.4.2.3 La réaction de contact local

On modélise les actions de contact, exercées par un solide Ω_j sur un solide Ω_i, en considérant que, sur la surface de Ω_i en contact avec Ω_j, agit un ensemble de forces auquel on associe un torseur des actions de contact, figure 1.3.

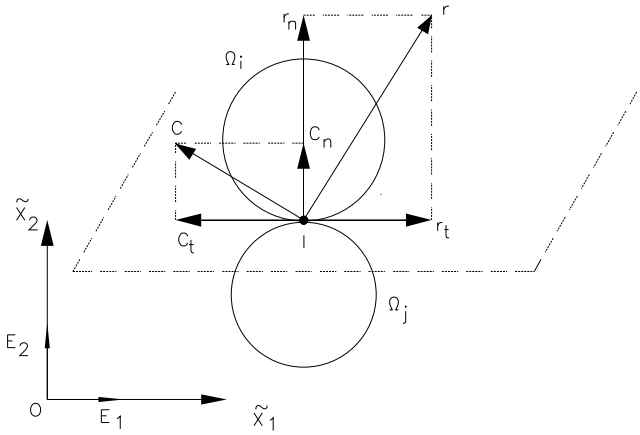


FIG. 1.3 – Schématisation du contact

Reprenant le repère local défini à la figure 1.2, les éléments de réduction du torseur des actions de contact peuvent être écrits sous la forme

$$[R]_I = \begin{bmatrix} \mathbf{r} = \mathbf{r}_t + r_n \mathbf{n} \\ \mathbf{C}_I = \mathbf{C}_{I_t} + C_{I_n} \mathbf{n} \end{bmatrix}_I , \tag{1.41}$$

où r_n représente la réaction normale ou pression de contact, $\mathbf{r}_t$ la force de frottement ou force de résistance au glissement ou encore force d'adhérence, C_{I_n} le moment de résistance au pivotement au point I et $\mathbf{C}_{I_t}$ le moment de résistance au roulement au point

I[3].

La loi de contact cherchée (1.31) s'écrit maintenant entre la vitesse relative locale et les réactions de contact locales

$$\text{loi}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) = .\text{VRAI}. \quad (c = 1, 2..., k). \tag{1.42}$$

1.4.3 Relations cinématiques

Nous avons défini en (1.39) une relation entre la vitesse relative locale et les vitesses généralisées des deux corps candidats au contact par

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^t \dot{\mathbf{q}}\,. \tag{1.43}$$

Nous allons, de même, préciser la relation entre les forces généralisées Q_i, associées aux efforts de contact entre les corps, définies en (1.20) et les réactions de contact locales. On prend le cas d'un système Σ constitué de deux corps Ω_1 et Ω_2. Les efforts généralisés correspondant à une liaison de contact entre les deux corps s'écrivent

$$Q_i = Q_i(\Omega_2 \to \Omega_1) + Q_i(\Omega_1 \to \Omega_2),$$

avec d'après (1.16) et (1.19)

$$Q_i(\Omega_2 \to \Omega_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{21} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{I_1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{w}_1}{\partial \dot{q}_i} \\ \\ \dfrac{\partial (\mathbf{T}^t \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{I_1})}{\partial \dot{q}_i} \end{bmatrix}_{I_1},$$

où I_1 est le point de contact appartenant à Ω_1 et où $\mathbf{T}^t \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{I_1}$ désigne la vitesse de I_1 calculée dans la base locale $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, E_3)$ et

[3]Lorsqu'il y a effectivement glissement, il est plus souvent légitime de négliger les frottements de roulement et de pivotement. Par contre, dans le cas de non-glissement, si on néglige le frottement de pivotement, le corps circulaire va, par exemple, tourner indéfiniment à vitesse contante, voir [83].

$$Q_i(\Omega_1 \to \Omega_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{I_2} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial \dot{q}_i} \\ \\ \dfrac{\partial (\mathbf{T}^t \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{I_2})}{\partial \dot{q}_i} \end{bmatrix}_{I_2},$$

où I_2 est le point de contact appartenant à Ω_2 et où $\mathbf{T}^t \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{I_2}$ désigne la vitesse de I_2 calculée dans la base locale $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, E_3)$.

D'après le principe de l'action et de la réaction $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$, nous avons

$$Q_i = \mathbf{r} \cdot \frac{\partial (\mathbf{T}^t \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_{12})}{\partial \dot{q}_i} = \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \dot{q}_i}, \tag{1.44}$$

donc d'après (1.39), nous obtenons

$$Q_i = \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\mathbf{P}^t \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{P}\mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

car $\mathbf{P}$ est indépendant des $\dot{q}_i$. Soit finalement

$$Q_i = (\mathbf{P}\mathbf{r})_i, \tag{1.45}$$

où $(\mathbf{P}\mathbf{r})_i$ désigne la composante i du vecteur $\mathbf{P}\mathbf{r}$.

En généralisant à l'ensemble des k contacts c d'un système multicorps, nous obtenons les équations de Lagrange sous la forme suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \sum_{c=1}^{k} \mathbf{P}\mathbf{r}^c. \tag{1.46}$$

1.5 Conclusion

Nous constatons que l'équation de la dynamique est suffisante pour étudier le mouvement d'un corps rigide libre, c'est-à-dire susceptible d'occuper toutes les positions dans l'espace sous l'action de forces extérieures connues. Mais le plus souvent, elle n'est pas suffisante pour prévoir le mouvement d'un système de corps rigides dès que certains d'entre

eux se trouvent, soit en contact avec des obstacles (extérieurs au système), soit en contact mutuel. On dit alors que le système est soumis à des liaisons. Les efforts provenant de ces contacts, ou "efforts de liaison", constituent des inconnues supplémentaires venant s'ajouter à celles qui définissent la configuration du système. Le nombre des équations données par l'énoncé fondamental est alors inférieur à celui des inconnues. Il faut donc adjoindre à ces équations d'autres relations qui nous renseignent sur les efforts de contact *a priori* inconnus : ce sont les "lois de comportement des liaisons". Le système d'équations à résoudre est alors

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \sum_{c=1}^{k} \mathbf{Q}^c$$
$$\text{loi}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}^c) = \text{.VRAI.} \quad (c = 1, 2..., k)$$

avec les relations cinématiques $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^t\dot{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{Q}^c = \mathbf{P}\mathbf{r}^c$.

Chapitre 2

Modélisation du contact frottant dans le cas d'un système discret par l'approche du bipotentiel

2.1 Introduction

Nous avons montré dans le chapitre 1, que le comportement d'un système discret Σ constitué de corps rigides pouvait être régi par les équations suivantes :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \sum_{c=1}^{k} \mathbf{Q}^c, \tag{2.1}$$

$$\text{loi}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}^c) = \text{.VRAI.} \quad (c = 1, 2..., k), \tag{2.2}$$

où (2.1) sont les équations de la dynamique pour un mouvement régulier et (2.2) la loi de comportement qui identifie les réactions de contact $\mathbf{r}^c$. Ledit contact, doit être modélisé par une liaison qui n'est autre qu'une loi de force dont la formulation comporte deux types d'informations [80]. Des informations cinématiques et des informations sthéniques. Dans la littérature, pour un système multicorps nous distinguons principalement deux classes de modélisations du contact ; soit la loi de contact est régularisée, soit la loi de contact est exacte.

L'approche classique de la loi de contact régularisée utilise les théories de Hertz et de Midlin. La théorie de Hertz étudie le contact élastique entre deux grains sphériques analogues, comprimés sous l'action d'une force de contact normale F_n, figure 2.1a.

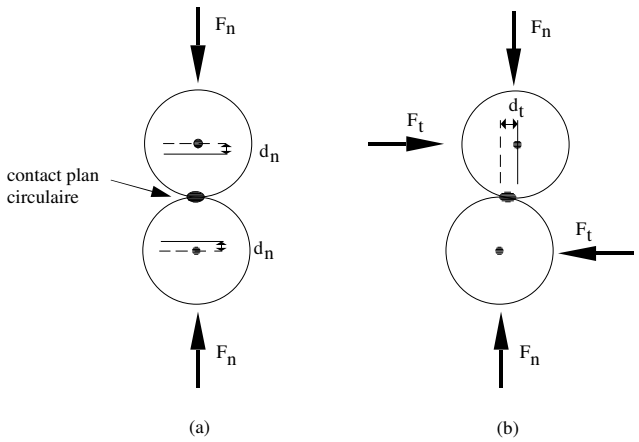


FIG. 2.1 – Théorie de Hertz (a) et de Midlin (b).

Elle prédit un contact plan circulaire de rayon a et le rapprochement d_n de leur centre.

$$a^3 = KF_n r, \qquad d_n^{3/2} = \frac{2KF_n}{\sqrt{r}}, \tag{2.3}$$

avec $K = \dfrac{3(1-\nu^2)}{4E}$ où r, E et ν sont respectivement le rayon de la sphère, le module d'Young et le coefficient de Poisson. La théorie de Midlin quant à elle, tient compte, en plus, des déformations irréversibles dues aux glissements relatifs des points de contact engendrés par la composante tangentielle de la force de contact F_t, figure 2.1b. Au point de contact, la force de contact est supposée obéir aux lois de frottement solide qui utilisent comme critère de plasticité $F_t \leq F_n \tan\mu$, où μ est le coefficient de frottement. La force normale F_n est fixée, alors que la force tangentielle F_t est supposée agir dans le plan de contact avec une intensité croissant progressivement de zéro à une certaine valeur. Il se produit un anneau de glissement sur les bords du cercle de contact, qui engendre un

déplacement relatif tangentiel irréversible d_t

$$d_t^3 = a\left(1 - \left(\frac{F_t}{\mu F_n}\right)\right). \tag{2.4}$$

Du point de vue modélisation, la composante normale du contact est classiquement représentée par le modèle rhéologique de Kelvin-Voigt, qui associe en parallèle un ressort de rigidité k_n traduisant l'élasticité de contact et un amortisseur de coefficient c_n traduisant l'absorption d'énergie, figure 2.2a. Le même modèle rhéologique est employé pour la composante tangentielle du contact où le comportement plastique dû au frottement de Coulomb est ajouté sous la forme d'un patin de coefficient μ, figure 2.2b.

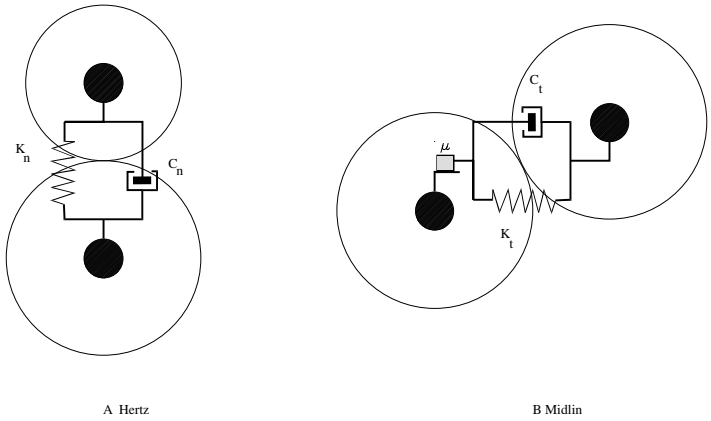


FIG. 2.2 – Modélisation du contact déformable.

Pour la résolution de ce type de contact, certaines modélisations E.D. comme la Dynamique Moléculaire (D.M.) utilisent des approximations régularisantes mais les résultats sont un compromis entre exigence de précision et raideur des équations approximantes [101].

Dans le cas de la loi de contact exacte, aucune flexibilité au contact interparticulaire n'est prise en compte. La modélisation utilise la loi de contact unilatéral traduisant les conditions de Signorini et la loi de Coulomb traduisant le frottement interparticulaire. La déperdition de la quantité de mouvement est alors caractérisée par un (ou des) coefficient(s) de restitution. La résolution classique est basée sur une mise en équations

exactes des problèmes à liaisons unilatérales comme la méthode collisionnelle ou plus récemment la Dynamique des Contacts (D.C.), développée par J.-J. Moreau et M. Jean [63][64][65][66][85][86][82][77][91].

Nous proposons, dans ce chapitre, une modélisation du contact non déformable et une résolution originale des équations (2.1) et (2.2), en utilisant le formalisme des matériaux Standard Implicites[1] (S.I.) initié par G. de Saxcé [35][36][38][60].

Nous procéderons, dans une première et deuxième partie, à la présentation des lois de contact unilatéral et de Coulomb utilisées pour modéliser le contact non déformable. Il en résultera une écriture avec des pseudo-potentiels dus au caractère multivoque de ces lois. Nous verrons que la loi est non-associée et que nous aurons tout intérêt à utiliser le formalisme des matériaux Standard Implicites, constituant la troisième partie de ce chapitre. Dans une quatrième partie, nous présenterons la résolution numérique de la loi de comportement par la méthode du lagrangien augmenté.

2.2 Loi de contact unilatéral

Les corps sont considérés comme parfaitement rigides et aucune flexibilité au contact interparticulaire n'est prise en compte.

2.2.1 Conditions de Signorini

La loi de contact unilatéral traduit les conditions de Signorini, c'est-à-dire la non-pénétrabilité, la non-adhésion et l'état de contact ou de non-contact.

2.2.1.1 Non-pénétrabilité

Les corps rigides peuvent entrer en contact, mais non pénétrer l'un dans l'autre. Cette propriété restreint l'ensemble des configurations possibles des corps l'un par rapport à

[1] voir annexe B

l'autre. Une telle restriction se traduit par :

$$f_c(t, \mathbf{q}) \geq 0 \qquad (c = 1, 2..., k), \tag{2.5}$$

où l'indice c désigne le contact potentiel entre deux corps.

Dans le cas d'une modélisation d'un matériau analogique de géométrie circulaire, deux corps rigides Ω_i et Ω_j potentiellement en contact, qui ont pour frontières deux surfaces circulaires de centre O_i et O_j et de rayon a_i et a_j respectivement, la restriction s'écrit

$$\mathbf{O}_j\mathbf{O}_i \geq a_i + a_j, \tag{2.6}$$

et (2.5) se traduit par la condition géométrique unilatérale suivante :

$$f_c = ||\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|| - (a_i + a_j) \geq 0. \tag{2.7}$$

On définit alors l'interstice ou le déplacement relatif u_n entre les corps[2] comme étant la projection de (2.52) sur le repère local, figure 2.3.

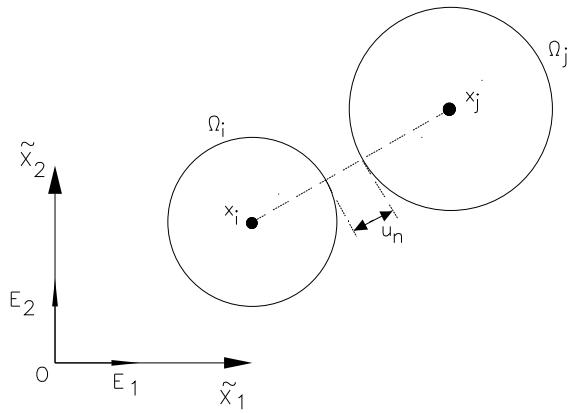


FIG. 2.3 – Définition graphique de l'interstice.

[2]voir chapitre 1

On obtient alors la condition de non-pénétration

$$u_n \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{ll} \text{si } \dot{u}_n = 0 & \text{! contact,} \\ \text{si } \dot{u}_n > 0 & \text{! non contact.} \end{array} \tag{2.8}$$

2.2.1.2 Non-adhésion

La condition de non-adhésion, dite condition statique, exprime que le point de contact I du corps Ω_i ne doit pas coller au corps Ω_j. Elle s'exprime dans le repère local par

$$u_n = 0 \qquad r_n \geq 0. \tag{2.9}$$

La réaction de contact normale est toujours supérieure ou égale à zéro. Les efforts ne seront que des efforts de compression et non de traction.

2.2.1.3 État de contact ou de non-contact

Si l'interstice est supérieur à zéro, la réaction de contact normale doit être nulle, il n'y a pas contact. Par contre, pour une réaction de contact normale non nulle, c'est-à-dire supérieure où égale à zéro, il y a contact et $u_n = 0$.

On traduit généralement cette condition par

$$u_n.r_n = 0. \tag{2.10}$$

En résumé, les conditions de Signorini se traduisent[3] par

$$u_n \geq 0 \ , \qquad r_n \geq 0 \ , \qquad u_n.r_n = 0. \tag{2.11}$$

2.2.2 Loi de contact unilatéral en vitesses

Il faut bien faire la distinction entre un contact persistant et un contact ouvert. Un contact persistant est un contact où l'interstice est nul et la vitesse normale relative nulle. Par

[3]Le caractère unilatéral de la liaison nous obligera par la suite à prendre en considération une loi de choc qui traduit plus ou moins le phénomène de dissipation, rencontré lorsqu'il y a contact entre deux corps. Nous nous intéresserons aux différentes lois de chocs au chapitre 3. Ici, nous allons traduire les conditions de Signorini en fonction des vitesses.

contre, pour un contact ouvert, l'interstice est toujours égal à zéro mais la vitesse relative normale est positive. On traduit ces conditions par

$$\dot{u}_n \geq 0 \ , \qquad r_n \geq 0 \ , \qquad \dot{u}_n . r_n = 0, \tag{2.12}$$

soit graphiquement, figure 2.4,

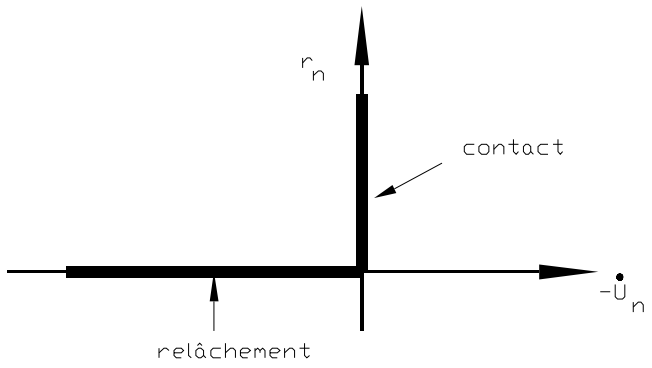


FIG. 2.4 – loi de contact unilatéral.

soit sous forme algorithmique,

$$\begin{array}{ll} \text{si } \dot{u}_n > 0, \text{ alors } r_n = 0 & \text{! relâchement du contact,} \\ \text{et si } \dot{u}_n = 0, \text{ alors } r_n \geq 0 & \text{! compression si contact.} \end{array} \tag{2.13}$$

D'après la figure 2.4, la loi de contact unilatéral n'est pas un graphe de fonction. C'est une loi multivoque. Considérons le point $\dot{u}_n = 0$, la "fonction" représentant la loi de contact unilatéral n'est pas dérivable. Il existe une infinité d'hyperplans en contact avec le graphe de la fonction en $\dot{u}_n = 0$ et minorant toujours cette fonction. Il faut avoir recours à la notion de sous-différentiels (annexe A). Ici, nous avons toujours $-\dot{\mathbf{u}}_n \leq 0$. J.-J. Moreau [80] propose alors d'introduire $\psi_{\mathbb{R}^-}(-\dot{u}_n)$ comme potentiel, où $\psi_{\mathbb{R}^-}$ désigne la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$. Cette fonction prend la valeur zéro si $-\dot{\mathbf{u}}_n \in \mathbb{R}^-$ et $+\infty$ autrement. Soit alors le potentiel $\varphi_n(-\dot{u}_n) = \psi_{\mathbb{R}^-}(-\dot{u}_n)$.

Définition 1 *La loi de force qui existe entre la vitesse normale de séparation et la réaction normale de contact s'écrit sous forme d'un sous-différentiel où $\varphi_n(-\dot{u}_n)$ représente un pseudo-potentiel*

$$r_n \in \partial\varphi_n(-\dot{u}_n) \tag{2.14}$$

et où r_n représente le sous-gradient de φ_n en $(-\dot{u}_n)$, figure 2.5

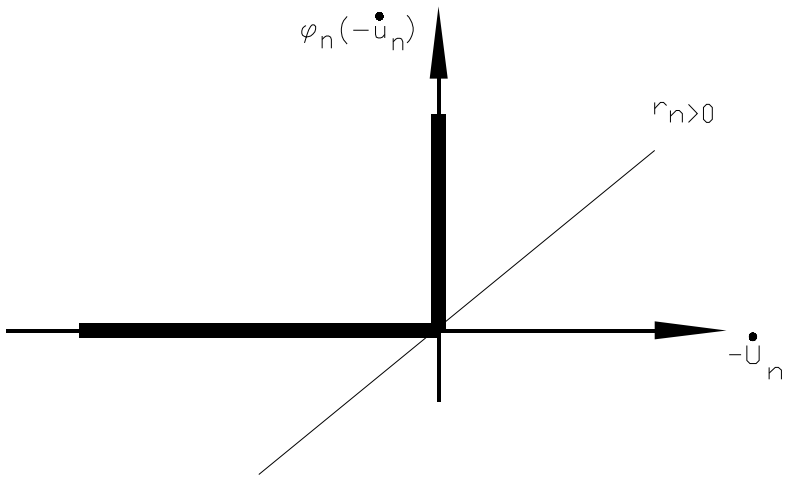


FIG. 2.5 – Sous-gradient r_n.

En effet,

si $-\dot{u}_n < 0$, $\varphi_n(-\dot{u}_n)$ est dérivable $\Rightarrow \partial\varphi_n(-\dot{u}_n) = \{\varphi'_n(-\dot{u}_n)\} = \{0\}$;
si $\dot{u}_n = 0$,$\varphi_n(-\dot{u}_n)$ est non dérivable $\Rightarrow \partial\varphi_n(0) = \{r_n$tels que$\forall -\dot{u}'_n \leq 0, -\dot{u}'_n r_n \leq 0\}$.

De même, la loi inverse de la loi de contact unilatéral s'interprète, du point de vue algorithmique, par

$$\begin{aligned} &\text{si } r_n > 0 \text{ alors } \dot{u}_n = 0 \quad \text{! contact,} \\ &\text{si } r_n = 0 \text{ alors } \dot{u}_n \geq 0 \quad \text{! relâchement du contact,} \end{aligned} \tag{2.15}$$

soit graphiquement, figure 2.6

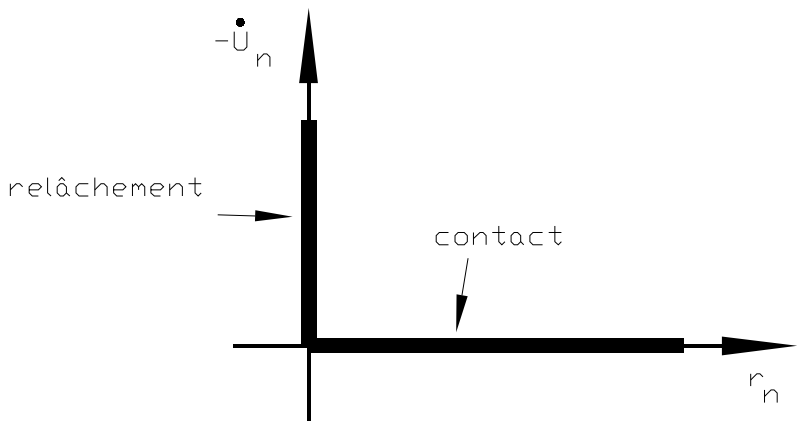


FIG. 2.6 – Loi inverse de la loi de contact unilatéral.

La loi inverse étant une fonction multivoque, on utilise la même démarche que précédemment. Soit alors $\psi_{\mathbb{R}_+}(r_n)$ la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. Cette fonction prend la valeur zéro si $r_n \in \mathbb{R}^+$ et $-\infty$ sinon. Soit alors le potentiel $\chi_n(r_n) = \psi_{\Re_+}(r_n)$.

Définition 2 *La loi de force inverse qui existe entre la vitesse de séparation normale et la réaction normale de contact s'écrit sous forme d'un sous-différentiel où $\chi_n(r_n)$ représente un pseudo-potentiel*

$$-\dot{u}_n \in \partial\chi_n(r_n), \tag{2.16}$$

où $-\dot{u}_n$ représente le sous-gradient de χ_n en r_n, figure 2.7.

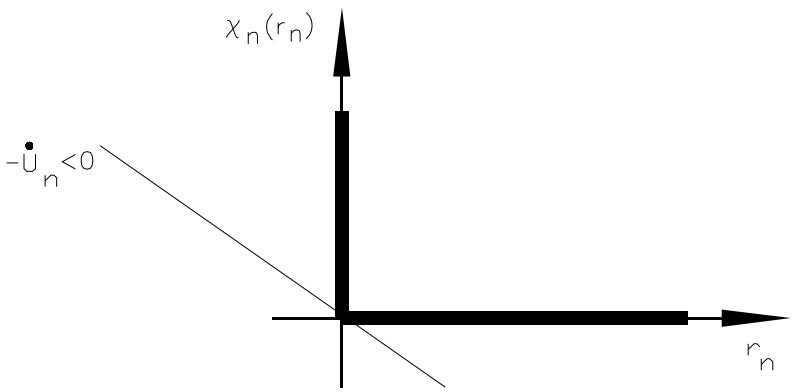


FIG. 2.7 – Exemple de sous-gradient de χ_n en $-\dot{u}_n$.

En effet,

si $r_n > 0$, $\chi_n(r_n)$ est dérivable $\Rightarrow \partial\chi_n(r_n) = \{\chi_n'(r_n)\} = \{0\}$;
Si $r_n = 0$, $\chi_n(r_n)$ est non dérivable $\Rightarrow \partial\chi_n(0) = \{-\dot{u}_n$tels que $\forall r_n' \geq 0, -\dot{u}_n r_n' \leq 0\}$.

En résumé, la loi de contact unilatéral et sa loi inverse s'écrivent sous forme de loi sous-normale

$$r_n \in \partial\varphi_n(-\dot{u}_n) \Longleftrightarrow -\dot{u}_n \in \partial\chi_n(r_n). \tag{2.17}$$

2.3 Loi sur le frottement sec

2.3.1 Introduction

Les lois dites "macroscopiques", d'origine purement expérimentale, qui régissent la statique et le mouvement de deux corps en contact, sont simples d'apparence, mais elles reposent sur des bases physiques complexes. Ces lois phénoménologiques du frottement de glissement entre corps ont été introduites dès le 15e siècle par Léonard de Vinci. Il observe que, pour mettre en mouvement un solide posé sur un autre, il faut exercer une force tangentielle qui ne dépend pas de la surface en contact, mais qui est proportionnelle

à la force qui presse les deux solides l'un contre l'autre. Deux siècles plus tard, en 1699, c'est au tour d'Amontons d'énoncer les deux lois du frottement statique :

- en contact sec, deux objets résistent au glissement selon une force directement proportionnelle à la charge normale ;
- cette résistance au glissement est indépendante de la surface apparente de contact entre les deux objets.

Dans son modèle physique, les surfaces en contact présentent des aspérités qui s'emboîtent les unes dans les autres. Le frottement correspond à la force nécessaire pour tirer une surface sur les petits plans inclinés formés par les aspérités de l'autre. En 1789, Coulomb confirme les lois d'Amontons, il établit également l'importance de la déformation des matériaux et de l'adhésion dans le frottement. De plus, il étudie le frottement "cinétique" reprenant les travaux d'Euler de 1750. Dans le frottement cinétique, l'objet est déjà en mouvement. Le frottement est la force qu'il est nécessaire de vaincre pour entretenir le mouvement . Il remarque que lorsque les surfaces sont en mouvement, le frottement est moins important que le frottement statique et à peu près constant. C'est au 20e siècle que ces lois vont être vérifiées. En étudiant le rôle de l'adhésion dans le processus de frottement, Bowden et Tabord proposent une explication physique de la seconde loi de frottement. Ils remarquent, dans un premier temps, que toutes les surfaces sont plus ou moins rugueuses. Quand elles sont en contact, seuls les sommets de leurs aspérités se touchent. A partir de cette constatation, ils montrent que le coefficient de frottement μ, c'est-à-dire le rapport de la résistance au glissement sur la charge normale, est égal à $\frac{s}{p}$, où s représente la contrainte du cisaillement limite du matériau le moins résistant et p la pression moyenne. Cette simple analyse montre que la résistance au glissement dépend de la charge : une conclusion en accord avec la première loi de frottement. De plus, la force de frottement est indépendante de la dimension et de la forme de la surface de contact apparente, la deuxième loi est ainsi confirmée. Les lois fondamentales du frottement solide se résument ainsi :

- la force de frottement est indépendante de l'aire apparente de contact ;
- la force de frottement est proportionnelle à la force normale de contact ;
- il faut distinguer un frottement statique μ_s et un frottement dynamique μ_d où $\mu_d \leq \mu_s$.

2.3.2 Réaction normale et réaction tangentielle

2.3.2.1 Réaction normale r_n

La réaction normale, exercée par le corps Ω_j sur Ω_i, est dirigée vers l'intérieur de Ω_i. De même, la réaction normale, exercée par le corps Ω_i, sur Ω_j est dirigée vers l'intérieur de Ω_j. La réaction normale est donc une force de compression et non une force de traction. Du point de vue de sa norme, la réaction normale a une valeur qui dépend des conditions du mouvement ou de l'équilibre et des autres actions extérieures qui s'exercent sur Ω_i.

2.3.2.2 Réaction tangentielle $\mathbf{r}_t$

Les lois auxquelles satisfait la réaction tangentielle sont différentes suivant la valeur nulle ou non nulle de la vitesse de glissement $\dot{\mathbf{u}}_t$.

cas où $\dot{\mathbf{u}}_t = 0$:

Exerçons sur le corps Ω_i, en contact sans glissement avec le corps Ω_j, une force de traction $\mathbf{r}_t$ située dans le plan tangent en I aux surfaces limitant Ω_i et Ω_j, figure 2.8. L'expérience montre que la vitesse reste nulle tant que T n'atteint pas une valeur maximale égale à $||\mathbf{r}_{t,max}||$ telle que

$$||\mathbf{r}_{t,max}|| = \mu_s ||r_n||. \tag{2.18}$$

On a donc, dans le cas de non-glissement, l'inégalité suivante

$$||\mathbf{r}_t|| \leq \mu_s ||r_n||. \tag{2.19}$$

Géométriquement, la réaction $\mathbf{r}$ est située à l'intérieur d'un cône de révolution, d'axe la normale en I au plan tangent, de sommet I et de demi-angle $\Phi_s = \arctan \mu_s$. Ce cône est appelé cône de frottement, figure 2.8.

cas où $\dot{\mathbf{u}}_t \neq 0$:

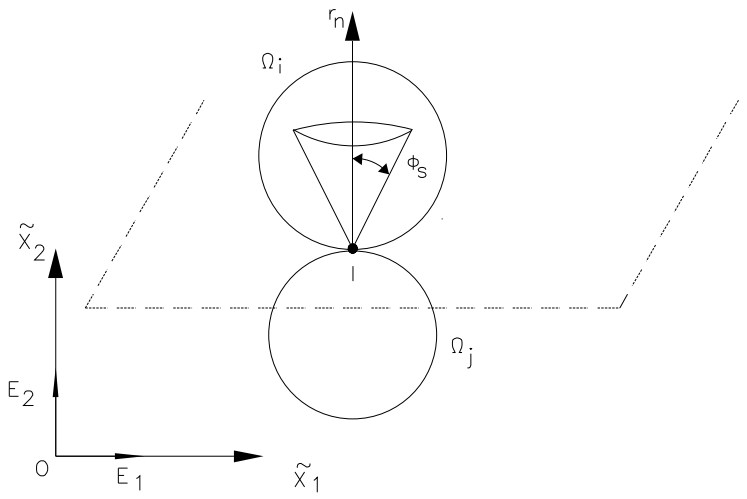


FIG. 2.8 – Cône de frottement.

La force de frottement $\mathbf{r}_t$, qu'exerce Ω_j sur Ω_i, a même support que la vitesse de glissement $\dot{\mathbf{u}}_t$,

$$\mathbf{r}_t \wedge \dot{\mathbf{u}}_t = 0. \tag{2.20}$$

La force de frottement $\mathbf{r}_t$, qu'exerce Ω_j sur Ω_i, a un sens opposé à celui de la vitesse de glissement $\dot{\mathbf{u}}_t$,

$$\mathbf{r}_t.\dot{\mathbf{u}}_t < 0. \tag{2.21}$$

Pour une vitesse de glissement fixée, la norme de la force de frottement est proportionnelle à la norme de la réaction normale :

$$||\mathbf{r}_t|| = \mu||r_n||, \tag{2.22}$$

où μ est égal à μ_d, le facteur de frottement dynamique. Celui-ci est indépendant de la vitesse de glissement et inférieur au facteur de frottement statique : $\mu \leq \mu_s$.

On supposera, par la suite, l'égalité entre coefficient de frottement dynamique et statique.

2.3.3 Modélisation de la loi de Coulomb

Les conditions précédentes permettent de définir la loi inverse du frottement de Coulomb de façon algorithmique :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \dot{u}_t = 0 \text{ alors } ||r_t|| \leq \mu r_n & \text{! adhérence,} \\ \text{si } -\dot{u}_t > 0 \text{ alors } r_t = \mu r_n & \text{! glissement,} \\ \text{si } -\dot{u}_t < 0 \text{ alors } r_t = -\mu r_n & \text{! glissement.} \end{array} \tag{2.23}$$

Soit graphiquement, figure 2.9

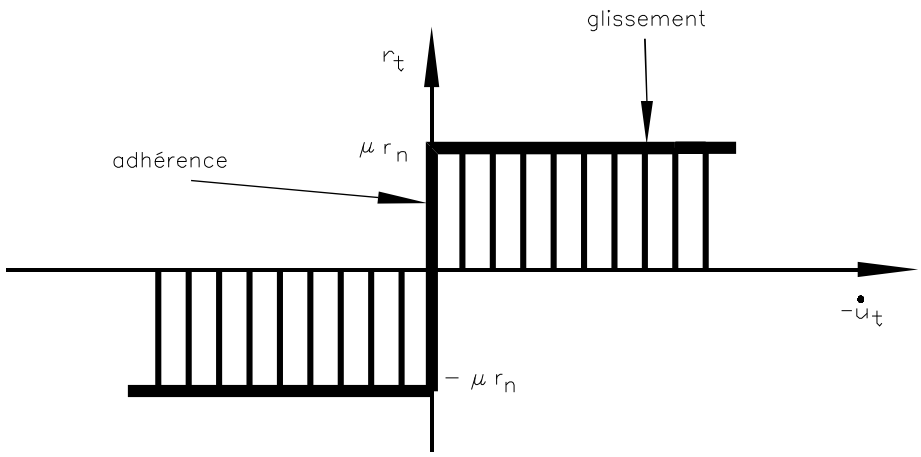


FIG. 2.9 – Loi inverse de frottement.

J.-J. Moreau, dans [80], a précisé que la valeur de la fonction de résitance (décrite par un pseudo-potentiel) détermine la valeur de la puissance dissipée. Soit l'introduction du pseudo-potentiel dit de dissipation : $\varphi_{r_n}(-\dot{\mathbf{u}}_t) = \mu r_n || - \dot{\mathbf{u}}_t ||$,

Définition 3 *La loi inverse qui existe entre la vitesse de glissement et la réaction de contact tangentielle peut se mettre sous la forme d'une inclusion différentielle*

$$r_t \in \partial \varphi_{r_n}(-\dot{u}_t). \tag{2.24}$$

En effet,

si $-\dot{u}_t > 0$,$\varphi_{r_n}(-\dot{u}_t)$ est dérivable $\Rightarrow \partial\varphi_{r_n}(-\dot{u}_t) = \{\varphi'_{r_n}(-\dot{u}_t)\} = \mu r_n$;
si $-\dot{u}_t < 0$,$\varphi_{r_n}(-\dot{u}_t)$ est dérivable $\Rightarrow \partial\varphi_{r_n}(-\dot{u}_t) = \{\varphi'_{r_n}(-\dot{u}_t)\} = -\mu r_n$;
si $\dot{u}_t = 0$,$\varphi_{r_n}(-\dot{u}_t)$ est non dérivable $\Rightarrow \partial\varphi_{r_n}(0) = \{r_t \text{tels que} \forall -\dot{u}'_t \leq 0, -\dot{u}'_t r_t \leq 0\}$.

De même, la loi de glissement

$$\begin{array}{ll} \text{si } ||r_t|| < \mu r_n \text{ alors } \dot{u}_t = 0 & \text{! adhérence,} \\ \text{si } r_t = \mu r_n \text{ alors } -\dot{u}_t \geq 0 & \text{! glissement,} \\ \text{si } r_t = -\mu r_n \text{ alors } -\dot{u}_t \leq 0 & \text{! glissement,} \end{array} \tag{2.25}$$

peut s'écrire sous forme d'une inclusion différentielle. Pour ce faire, on introduit un intervalle $I_{r_n} = [-\mu r_n, \mu r_n]$ et le potentiel $\chi_{r_n}(||\mathbf{r}_t||) = \psi_{I_{r_n}}(||\mathbf{r}_t||)$, où $\psi_{I_{r_n}}(r_t)$ est une fonction indicatrice qui prend la valeur zéro si $\mathbf{r}_t \in I_{r_n}$ et ∞ sinon.

On va définir, comme en plasticité, une fonction de charge

$$f_{r_n}(||\mathbf{r}_t||) = ||\mathbf{r}_t|| - \mu r_n. \tag{2.26}$$

Le cône de frottement est défini par

$$f_{r_n}(||\mathbf{r}_t||) \leq 0, \tag{2.27}$$

et le domaine de validité du frottement s'écrit

$$K(r_n) = \{\mathbf{r}_t \quad \text{tels que} \quad f_{r_n}(||\mathbf{r}_t||) \leq 0\}. \tag{2.28}$$

On posera $\partial K(r_n)$ la surface de glissement.

A partir de ces différentes relations, on introduit la notion de règle de normalité développée par J.-J. Moreau [80]. Dans le cas de la loi de frottement, la vitesse de glissement est per-

pendiculaire à la surface de glissement. Soit le calcul de la dérivée de l'équation (2.26) par rapport à $\mathbf{r}_t$,

$$\frac{\partial f_{r_n}}{\partial \mathbf{r}_t} = \frac{\mathbf{r}_t}{||\mathbf{r}_t||}$$

soit, en application de la règle de normalité

$$\dot{\mathbf{u}}_t = -\dot{\lambda}\frac{\partial f_{r_n}}{\partial \mathbf{r}_t} = -\dot{\lambda}\frac{\mathbf{r}_t}{||\mathbf{r}_t||} \tag{2.29}$$

où le multiplicateur $\dot{\lambda} \geq 0$.

Nous obtenons alors la loi de frottement sec de Coulomb

$$\begin{array}{ll} \text{si } ||\mathbf{r}_t|| < \mu r_n \text{ alors } \dot{\mathbf{u}}_t = 0 & \text{! adhérence,} \\ \text{si } ||\mathbf{r}_t|| = \mu r_n \text{ alors } \exists \dot{\lambda} \geq 0 \text{ tel que } \dot{\mathbf{u}}_t = -\dot{\lambda}\dfrac{\mathbf{r}_t}{||\mathbf{r}_t||} & \text{! glissement.} \end{array} \tag{2.30}$$

ou sous forme d'une inclusion différentielle

$$-\dot{\mathbf{u}}_t \in \partial\psi_{K_{r_n}}(\mathbf{r}_t). \tag{2.31}$$

Graphiquement, nous obtenons, figure 2.10 :

En résumé, la loi de frottement sec et sa loi inverse peuvent s'écrire sous forme de loi sous-normale

$$-\dot{\mathbf{u}}_t \in \partial\psi_{K_{r_n}}(\mathbf{r}_t) \Longleftrightarrow r_t \in \partial\varphi_{r_n}(-\dot{u}_t). \tag{2.32}$$

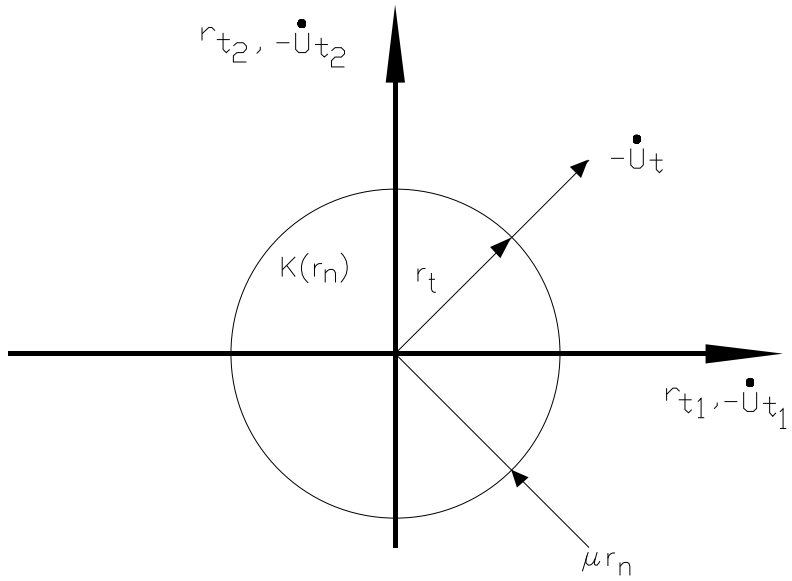


FIG. 2.10 – Loi de frottement sec de Coulomb.

2.4 Modélisation implicite de la loi de contact unilatéral avec frottement sec

2.4.1 Loi de contact complète : loi non-associée

La loi de contact complète (unilatéral et frottement) est une loi dissipative non-linéaire incluant trois statuts : relâchement, contact avec frottement et contact avec glissement. Sous forme d'un schéma algorithmique, nous obtenons

si $r_n = 0$ alors $\dot{u}_n \geq 0$	! relâchement,
si $r_n > 0$ et $\|\|\mathbf{r}_t\|\| \leq \mu r_n$ alors $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$	! adhérence,
si $r_n > 0$ et $\|\|\mathbf{r}_t\|\| = \mu r_n$ alors $\dot{u}_n = 0$, $\exists \dot{\lambda} \geq 0$ tel que $\dot{\mathbf{u}}_t = -\dot{\lambda}\dfrac{\mathbf{r}_t}{\|\|\mathbf{r}_t\|\|}$	! glissement.

On définit le cône de frottement de Coulomb, figure 2.11,

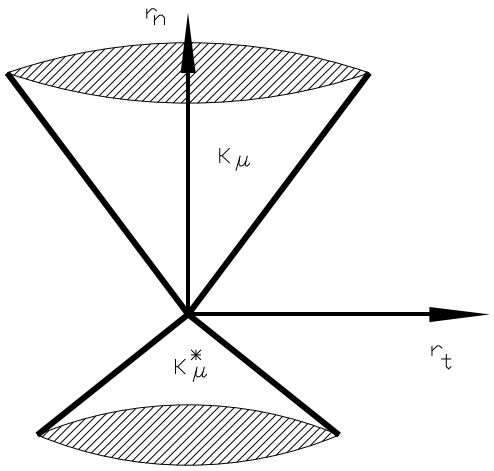


FIG. 2.11 – Cône et cône dual de Coulomb.

$$K_\mu = \{(r_n, \mathbf{r}_t) \quad \text{tels que} \quad f_{rn}(r_n, \mathbf{r}_t) = \|\|\mathbf{r}_t\|\| - \mu r_n \leq 0\}, \tag{2.33}$$

et la surface de glissement ∂K_μ dans l'espace $(r_n, \mathbf{r}_t)$.

De même, la loi inverse

$$\begin{array}{ll} \text{si } \dot{u}_n > 0 \text{ alors } \mathbf{r} = \mathbf{0} & \text{! relâchement,} \\ \text{si } \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ alors } \mathbf{r} \in K_\mu & \text{! adhérence,} \\ \text{si } -\dot{u}_t < 0 \text{ alors } r_n > 0 \text{ et } r_t = -\mu r_n \dfrac{\dot{u}_t}{||\dot{u}_t||} & \text{! glissement.} \end{array} \tag{2.34}$$

On définit le cône polaire de K_μ, figure 2.11 :

$$K_\mu^* = \{(\dot{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_t) \quad \text{tels que} \quad \mu||\dot{\mathbf{u}}_t|| + \dot{u}_n \leq 0\} \tag{2.35}$$

L'interprétation géométrique nous permet de dire que le vecteur de vitesse relative $\dot{\mathbf{u}}$ n'est pas normal au cône de Coulomb, car, sur la surface de glissement, $\dot{u}_n$ est égale à zéro. D'autre part, au sommet du cône de Coulomb (relâchement) tous les vecteurs $\dot{\mathbf{u}}$ tels que $\dot{u}_n \leq 0$ sont autorisés, figure 2.12.

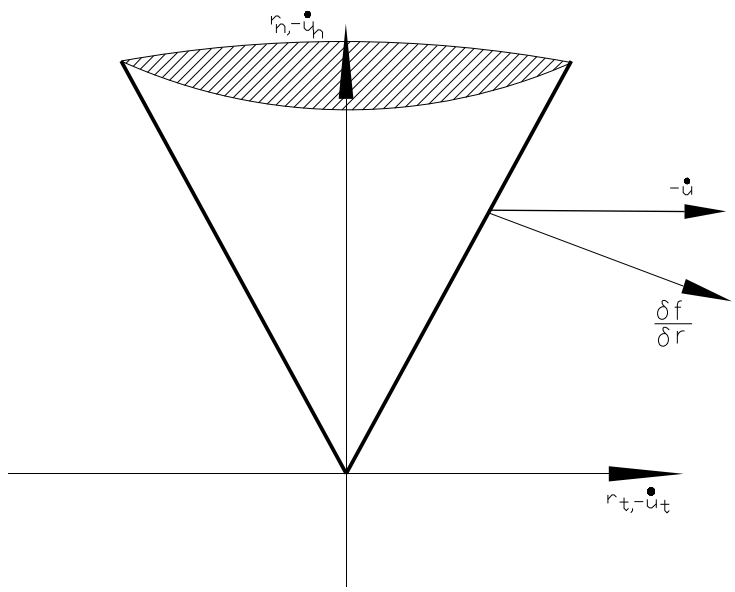


FIG. 2.12 – Loi de contact unilatéral avec frottement sec.

Ces constatations ne nous permettent pas d'utiliser la règle de normalité et donc de mettre

la loi de contact unilatéral avec frottement sec sous forme d'une inclusion différentielle du type $-\dot{\mathbf{u}} \in \partial\psi_{K_\mu}(\mathbf{r})$. G. de Saxcé et Z.-Q. Feng [38] ont montré que la loi de contact unilatéral avec frottement sec peut se mettre sous la forme de l'inclusion différentielle suivante

$$-(\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{u}_n + \mu||\dot{\mathbf{u}}_t||)\mathbf{n}) \in \partial\psi_{K_\mu}(\mathbf{r}) \tag{2.36}$$

mais qu'il n'existe pas de pseudo-potentiel car la condition de monotonie cyclique, condition nécessaire et suffisante provenant du théorème de Rockafellar, n'est pas vérifiée. Le comportement des matériaux ayant une loi complémentaire de ce type sont qualifiés de non-standard ou à loi non-associée. G. de Saxcé [36] propose alors de généraliser la loi de dissipation normale, basée sur la construction d'un potentiel unique, fonction des variables flux et forces thermodynamiques. Il propose d'établir une nouvelle classe de matériaux appelés Standard Implicites (S.I.), annexe B. Elle généralise d'une manière simple et claire les matériaux standard et non standard.

2.4.2 Bipotentiel de contact

On suppose un système matériel décrit par un espace V de vitesses généralisées $\dot{\mathbf{v}}$, muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. V est mis en dualité avec un espace vectoriel F des forces $\mathbf{f}$ par une forme bilinéaire $(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{f}) \longrightarrow \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}$, représentant la puissance dissipée. V et F sont munis de topologies localement convexes compatibles avec leur dualité. Nous proposons de modéliser le contact unilatéral avec frottement sec par le bipotentiel suivant

$$b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) = \Psi_{\mathbb{R}^-}(-\dot{u}_n) + \Psi_{K_\mu}(\mathbf{r}) + \mu r_n||-\dot{\mathbf{u}}_t||. \tag{2.37}$$

G. de Saxcé et Z.-Q. Feng [38] ont montré, d'une part, que cette fonction est un bipotentiel, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall -\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \Psi_{\mathbb{R}^-}(-\dot{u}_n) + \Psi_{K_\mu}(\mathbf{r}) + \mu r_n||-\dot{\mathbf{u}}_t|| \geq -(\dot{\mathbf{u}}_t\mathbf{r}_t + \dot{u}_n r_n), \tag{2.38}$$

et d'autre part, que les couples extrémaux du bipotentiel vérifient la loi de contact à frottement sec, c'est-à-dire que le bipotentiel vérifie l'égalité :

$$\mu r_n||-\dot{\mathbf{u}}_t|| = -(\dot{\mathbf{u}}_t\mathbf{r}_t + \dot{u}_n r_n). \tag{2.39}$$

En conclusion, la loi de contact complète et sa loi inverse peuvent être écrites respectivement sous forme de lois de sous-normalité implicites

$$-\dot{\mathbf{u}} \in \partial_r b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}), \qquad \mathbf{r} \in \partial_{-\dot{\mathbf{u}}} b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) \tag{2.40}$$

2.5 Résolution de la loi de contact complète

L'approche classique pour la résolution du problème de contact avec frottement est basée sur deux principes de minimum et sur deux inégalités variationnelles [4][28][29][69]. La première concerne le contact unilatéral, l'autre le frottement. En pratique, ceci conduit à un algorithme de résolution alternative des deux problèmes jusqu'à la convergence. L'utilisation de la méthode des matériaux S.I., conduit à un seul principe variationnel et une seule inégalité. Dans ce cas, le contact unilatéral et le frottement sont couplés. Pour la résolution numérique, nous utiliserons la méthode du lagrangien augmenté [44] afin d'éviter les potentiels non différentiables qui apparaissent dans la représentation du contact.

2.5.1 Schéma prédicteur-correcteur

Nous avons établi en (2.40) que la loi de contact avec frottement pouvait se mettre sous la forme d'une loi de sous-normalité. Utilisant la définition des sous-différentiels, nous définissons une inéquation variationnelle :

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}') - b_c(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) \geq -\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \tag{2.41}$$

Choisissons alors un coefficient ρ positif dont la valeur est choisie dans un certain intervalle pour assurer la convergence numérique. L'inégalité (2.41) s'écrit alors :

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad \rho b(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}') - \rho b(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}) + [\mathbf{r} - (\mathbf{r} + \rho(-\dot{\mathbf{u}}))].(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0. \tag{2.42}$$

Cette inéquation montre que $\mathbf{r}$ est le proximal de la réaction augmentée $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{u}}$ par rapport à la fonction $\rho b(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r})$,

$$\mathbf{r} = prox(\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{u}}, \rho b(-\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r})). \tag{2.43}$$

Cette équation peut être résolue en utilisant l'algorithme d'Usawa [44][61]. Soit, $(-\dot{\mathbf{u}}_i, \mathbf{r}_i)$ une approximation à l'itération i, le calcul de $\mathbf{r}_{i+1}$ se décompose en deux étapes,

$$\begin{aligned} &\text{prédiction :} \quad \hat{\mathbf{r}}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \rho\dot{\mathbf{u}}_i \ , \\ &\text{correction :} \quad \mathbf{r}_{i+1} = prox(\hat{\mathbf{r}}_{i+1}, \rho b(-\dot{\mathbf{u}}_i, \mathbf{r}_i)) \ . \end{aligned} \tag{2.44}$$

A partir de la définition du bipotentiel de contact, et en faisant les hypothèses : $\dot{u}_n \geq 0$ et $\mathbf{r} \in K_\mu$,

(2.37) s'écrit

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, \quad \rho\mu(r'_n - r_n)|| - \dot{\mathbf{u}}_t|| + [\mathbf{r} - (\mathbf{r} + \rho(-\dot{\mathbf{u}}))].(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0$$

soit encore :

$$\forall \mathbf{r}' \in K_\mu, (\mathbf{r} - \tau).(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \geq 0 \tag{2.45}$$

où τ représente la réaction augmentée

$$\tau = \mathbf{r} - \rho[\dot{\mathbf{u}}_t + (\dot{\mathbf{u}}_n + \mu|| - \dot{\mathbf{u}}_t||).\mathbf{n}].$$

L'équation précédente montre que $\mathbf{r}$ est la projection de τ sur le cône de Coulomb,

$$\mathbf{r} = proj(\tau, K_\mu). \tag{2.46}$$

Cette équation correspond aux lois de contact avec frottement sous une forme implicite. L'algorithme d'Usawa, appliqué à (2.46), conduit à une procédure itérative composée de deux étapes

$$\begin{aligned} &\text{prédiction :} \quad \tau^{i+1} = \mathbf{r}^i - \rho[\dot{\mathbf{u}}_t^i + (\dot{\mathbf{u}}_n^i + \mu|| - \dot{\mathbf{u}}_t^i||).\mathbf{n}] \ , \\ &\text{correction :} \quad \mathbf{r}^{i+1} = proj(\tau^{i+1}, K_\mu). \end{aligned} \tag{2.47}$$

2.5.2 Interprétation graphique de la projection

L'étape de correction du schéma (2.47) s'identifie aux trois possibilités suivantes :

$$\begin{aligned} &\text{si } \tau \in K_\mu^*, && \text{relâchement du contact,} \\ &\text{si } \tau \in K_\mu, && \text{contact avec frottement,} \\ &\text{si } \tau \in \mathbb{R}^3 - (K_\mu \cup K_\mu^*) && \text{contact avec glissement,} \end{aligned} \tag{2.48}$$

et elle est représentée graphiquement par la figure 2.13.

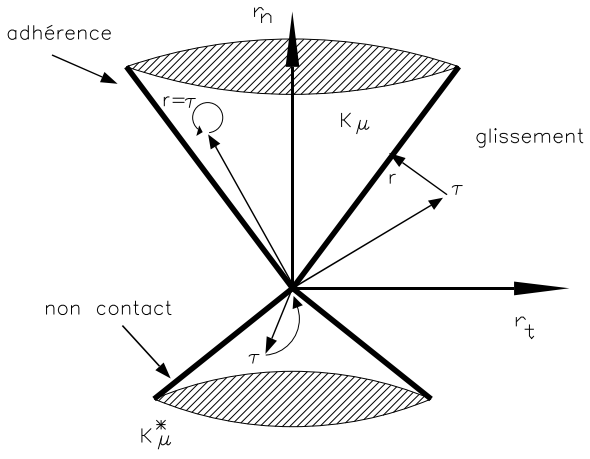


FIG. 2.13 – Projection de la réaction augmentée sur le cône de frottement.

2.5.3 Interprétation analytique de la projection

L'étape de correction qui correspond à la projection de la prédiction sur le cône de Coulomb peut être reformulée comme une solution d'un problème non-linéaire de minimisation sur un convexe :

$$\mathbf{r} = proj(\tau, K_\mu) = \inf_{\mathbf{r}\in K_\mu} \frac{1}{2}||\mathbf{r} - \tau||^2. \tag{2.49}$$

En d'autres termes, (2.49) est un problème de minimisation sous contraintes utilisant la technique des multiplicateurs de Lagrange :

$$\mathbf{r} = proj(\tau, K_\mu) = \sup_{\lambda\geq 0} \inf_{r_n, r_t} L(\lambda, r_n, \mathbf{r_t}) \tag{2.50}$$

où $L = \frac{1}{2}||\mathbf{r} - \tau||^2 + \lambda(||\mathbf{r_t}|| - \mu r_n)$.

Soient les conditions de stationnarité

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \quad ||\mathbf{r}_t|| - \mu r_n = 0, \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_n} = \quad r_n - \tau_n - \mu\lambda = 0, \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_t} = \quad \mathbf{r}_t - \tau_t + \lambda \frac{\mathbf{r}_t}{||\mathbf{r}_t||} = 0. \tag{2.53}$$

Calcul de λ :

De l'équation (2.53), nous avons

$$\mathbf{r}_t(1 + \frac{\lambda}{||\mathbf{r}_t||}) = \tau_t \tag{2.54}$$

comme $\lambda \geq 0$, on peut écrire que

$$||\mathbf{r}_t||(1 + \frac{\lambda}{||\mathbf{r}_t||}) = ||\tau_t||,$$

soit

$$||\mathbf{r}_t|| + \lambda = ||\tau_t||. \tag{2.55}$$

En reprenant l'équation (2.51), d'après (2.55), nous obtenons $\mu r_n + \lambda = ||\tau_t||$. Comme $r_n = \tau_n + \mu\lambda$, d'après (2.52), nous obtenons :

$$\lambda = \frac{||\tau_t|| - \mu\tau_n}{1 + \mu^2}. \tag{2.56}$$

Calcul de r_n et $\mathbf{r}_t$:

D'après (2.56) et (2.52)

$$r_n = \tau_n + \mu(\frac{||\tau_t|| - \mu\tau_n}{1 + \mu^2}). \tag{2.57}$$

D'après (2.55)

$$||\mathbf{r}_t|| = ||\tau_t|| - \lambda = ||\tau_t|| - \frac{||\tau_t|| - \mu\tau_n}{1 + \mu^2} = \frac{\mu^2||\tau_t|| + \mu\tau_n}{1 + \mu^2}. \tag{2.58}$$

D'après (2.54), (2.56) et (2.58) nous obtenons :

$$\mathbf{r}_t = \tau_t - \frac{\tau_t}{||\tau_t||}\left(\frac{||\tau_t|| - \mu\tau_n}{(1+\mu^2)}\right), \tag{2.59}$$

sous forme condensée d'après (2.57) et (2.59)

$$\mathbf{r}^{i+1} = \tau^{i+1} - \left(\frac{||\tau_t^{i+1}|| - \mu\tau_n^{i+1}}{(1+\mu^2)}\right)\left(\frac{\tau_t^{i+1}}{||\tau_t^{i+1}||} - \mu\mathbf{n}\right). \tag{2.60}$$

La résolution de la loi de contact unilatéral utilise un seul schéma prédicteur-correcteur avec l'utilisation de la projection sur le cône de Coulomb :

Réaction augmentée (prédiction)

$$\tau^{i+1} = \mathbf{r}^i - \rho\left[\dot{\mathbf{u}}_t^i + (\dot{\mathbf{u}}_n^i + \mu||-\dot{\mathbf{u}}_t^i||).\mathbf{n}\right]; \tag{2.61}$$

Projection (correction)

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \mu||\tau_t^{i+1}|| < -\tau_n^{i+1} \text{ alors } \mathbf{r}^{i+1} = 0 && \text{! relâchement,}\\
&\text{Et si } ||\tau_t^{i+1}|| \leq \mu\tau_n^{i+1} \text{ alors } \mathbf{r}^{i+1} = \tau^{i+1} && \text{! frottement,}\\
&\text{Sinon } \mathbf{r}^{i+1} = \tau^{i+1} - \left(\frac{||\tau_t^{i+1}|| - \mu\tau_n^{i+1}}{(1+\mu^2)}\right)\left(\frac{\tau_t^{i+1}}{||\tau_t^{i+1}||} - \mu\mathbf{n}\right) && \text{! glissement.}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

2.6 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, la loi de contact unilatéral avec frottement sec qui utilise la condition de Signorini (2.4) et la loi de Coulomb (2.9). Nous avons fait le choix d'utiliser la forme exacte et non les formes régularisées classiquement admises pour représenter le contact interparticulaire [4][27][29][63]. Ce choix nous a obligé à utiliser les outils de l'analyse convexe et du calcul sous-différentiel (annexe A) puisque cette loi est multivoque. A la différence des classiques lois dissipatives, cette loi ne vérifiant pas la règle de normalité (2.36), nous avons utilisé le formalisme des Matériaux Standard Implicites (annexe B) [35]. Celui-ci nous a permis d'écrire la loi de contact en utilisant un bipotentiel (2.37). On aboutit alors, par utilisation de méthodes numériques comme le lagrangien augmenté et l'algorithme d'Usawa, à un seul schéma de prédiction-correction (2.47). L'étape de correction correspond à une projection sur le cône de Coulomb. Les possibilités de cette projection ont pour conséquence de définir trois statuts : non-contact, contact avec frottement et contact avec glissement.

Chapitre 3

Algorithme de la dynamique des contacts basé sur le concept du bipotentiel

3.1 Introduction

Nous discutons, ici, de la prise en compte de contacts multiples[1] dans la gestion du système d'équations établi dans le chapitre 1. A un instant t, une particule qui collisionne un ensemble multicorps peut provoquer, au sein de ce système, une redistribution des efforts de contact. Dans l'hypothèse d'une modélisation de la loi de comportememnt par une loi de contact exacte, il est très difficile numériquement de résoudre ce problème. Certaines modélisations des Eléments Discrets (E.D.) comme la méthode collisionnelle[2] ou plus récemment la Dynamique des Contacts (D.C.), développée par J.-J. Moreau et M. Jean [66][82], fondée sur la dynamique non-régulière, permettent de s'affranchir de cette situation de contacts multiples.

Nous proposons une méthode E.D. de type D.C. en deux dimensions du mouvement d'un ensemble de rouleaux rigides. L'interaction est modélisée par un bipotentiel qui utilise la condition de non-pénétration et le frottement Coulombien, décrit au chapitre 2. Le contact

[1] Susceptibles de se produire au sein du milieu.

[2] L'idée est de déterminer, dans un système particulaire, la date de la prochaine collision, de déplacer toutes les particules jusqu'à cette date et de calculer les vitesses des particules partenaires après le choc.

est alors qualifié de non-déformable. Les corps sont considérés parfaitement rigides et aucune flexibilité au contact interparticulaire n'est prise en compte. La déperdition de la quantité de mouvement doit alors être prise en compte.

3.2 Évolution non-régulière

3.2.1 Dynamique non-régulière

Dans le chapitre 1, nous avons établi, en utilisant le formalisme lagrangien, l'équation de la dynamique pour un système $\Sigma = \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_k$ constitué de p corps rigides, soit

$$\begin{gathered} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \sum_{c=1}^{k} \mathbf{Q}^c \\ \text{loi}(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{r}^c) = \text{.VRAI.} \quad (c = 1, 2..., k) \end{gathered} \tag{3.1}$$

avec les relations cinématiques $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^t \dot{\mathbf{q}}$ et $\mathbf{Q}^c = \mathbf{P}\mathbf{r}^c$.

Dans le cas d'un mouvement régulier, les équations (3.1) sont acceptables. Mais dans le cas de chocs à répétition entre corps, le mouvement n'est pas régulier. La vitesse $\dot{\mathbf{u}}$ n'est plus une fonction continue du temps mais une fonction discontinue.

J.-J. Moreau [87][82][76] propose alors l'utilisation de la mécanique non-régulière, dont le cadre mathématique est celui des fonctions à variation localement bornée. En utilisant ce formalisme, (3.1) s'écrit

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = \mathbf{F}dt + \sum_c \mathbf{P}\mathbf{s}^c. \tag{3.2}$$

où $\dot{\mathbf{q}}^-$ est la limite à gauche (vitesse avant le choc) et $\dot{\mathbf{q}}^+$ la limite à droite (vitesse après le choc) et les $\mathbf{s}$ sont définies comme étant l'élément dual des fonctions à variation localement bornée, c'est-à-dire des mesures. Dans le cadre d'une évolution régulière, ces mesures ont une densité par rapport à la mesure de Lebesgue qui correspond aux forces appliquées. Par contre, lorsqu'il y a discontinuité de vitesse, elles possèdent une densité par rapport à des mesures de Dirac.

3.2.2 Loi de choc

La modélisation du contact unilatéral avec frottement sec, définie au chapitre 2, qui utilise le schéma prédicteur-correcteur suivant

$$\begin{array}{ll} \text{prédiction :} & \tau^{i+1} = \mathbf{r}^i - \rho[\dot{\mathbf{u}}_t^i + (\dot{\mathbf{u}}_n^i + \mu|| - \dot{\mathbf{u}}_t^i||).\mathbf{n}] \,, \\ \text{correction :} & \mathbf{r}^{i+1} = proj(\tau^{i+1}, K_\mu), \end{array} \tag{3.3}$$

n'est plus valable dans le cadre de la mécanique non-régulière. Nous n'avons aucune information sur l'état du système après un choc. La résolution du problème nécessite l'utilisation d'une relation supplémentaire qui nous est fournie par la loi de choc. On distingue différentes lois de choc[3].

3.2.2.1 Contact simple

On étudie ici le choc entre deux corps. On distingue les chocs sans frottement et les chocs avec frottement. On ne décrira pas ici le modèle de Hertz qui tient compte de la déformabilité des corps.

En général, un choc sans frottement est modélisé par la loi de restitution qui donne des résultats très satisfaisants par comparaison avec des essais de laboratoire [99]. Classiquement, on introduit le coefficient de restitution de Newton e_n

$$\dot{u}_n^+ = -e_n \dot{u}_n^- \quad \text{avec} \quad 0 \leq e_n \leq 1 \tag{3.4}$$

où $\dot{u}_n^-$ est la vitesse normale avant le choc et $\dot{u}_n^+$ la vitesse normale après le choc.

Couplée aux équations (3.1), la loi de restitution (3.3) permet la description du comportement des deux corps, dans la direction normale au plan de contact. On parle alors de collision élastique ($e_n = 0$) et inélastique ($e_n > 0$)

Dans le cas d'un choc avec frottement, la modélisation doit tenir compte des efforts tangentiels qui ne peuvent être négligés au cours d'une collision. Les efforts tangentiels sont

[3] On pourra trouver, dans [21], une description détaillée des différentes modélisations des lois de choc.

alors modélisés par la classique loi de Coulomb réécrite au sens des mesures

$$|s_t| \leq \mu |s_n| \tag{3.5}$$

où s_t et s_n s'identifient respectivement aux impulsions tangentielle et normale.

Dans une première approximation, on pourrait penser que la loi de frottement est suffisante pour décrire le phénomène dissipatif engendré par le contact entre deux corps. Mais dans le cas d'une collision, dans la formulation de la loi de contact unilatéral avec frottement sec (3.3), la vitesse normale $\dot{u}_n$ et la vitesse tangentielle $\dot{u}_t$ sont corrélées, c'est-à-dire qu'une vitesse normale non-régulière implique une non-régularité de la vitesse de glissement. Dans ce cas, la résolution est plus délicate, dans le sens où (3.5) va engendrer deux situations : une première situation dans laquelle le glissement est prépondérant pendant toute la durée du choc (on est à la limite du cône de frottement) et une seconde situation dans laquelle le frottement est prépondérant et la vitesse de glissement est nulle (on est à l'intérieur du cône du frottement). D'autre part, R.-M. Brach [12] a montré en deux dimensions qu'il existe une situation intermédiaire dans laquelle les forces de frottement couplées aux effets d'inertie, inversent le signe de la vitesse de glissement. Dans ce cas, $\dot{u}_t$ doit être réécrite.

A partir de ces quelques considérations, différentes modélisations ont été proposées [11][12][67][68][95][96]. On distingue le modèle [102] qui utilise trois coefficients : un coefficient de restitution normal e_n (3.4), un coefficient de frottement μ (3.5) et un coefficient de restitution tangentiel défini par

$$\dot{u}_t^+ = -e_t \dot{u}_t^- \quad \text{avec} \quad -1 \leq e_t \leq 1 \tag{3.6}$$

où $\dot{u}_t^+$ et $\dot{u}_t^-$ représentent respectivement la vitesse après le choc et avant le choc. Ce modèle permet de rendre compte du changement de signe de la vitesse de glissement.

3.2.2.2 Contacts multiples

On considère maintenant un système constitué de plusieurs corps. Dans ce cas, une collision entre deux corps rigides va provoquer, à un instant donné dans le système, une modification de structure qui peut créer de nouveaux points de contact ou au contraire

supprimer des points de contact.

Dans ce cas, l'application de (3.3) à des contacts multiples ne permet pas de rendre compte d'une telle propogation. J.-J. Moreau [82] propose alors, pour des corps circulaires ou sphériques, d'utiliser une vitesse qui soit encore vraie pour des contacts multiples [91]

$$\tilde{\dot{u}}_n = \frac{\dot{u}_n^+ + e_n \dot{u}_n^-}{1 + e_n} \qquad \tilde{\dot{u}}_t = \frac{\dot{\mathbf{u}}_t^+ + e_t \dot{\mathbf{u}}_t^-}{1 + e_t}. \tag{3.7}$$

Cette vitesse formelle correspond à la vitesse réelle lors d'une évolution régulière.

D'autre part, M. Frémond [21][39][51][52][53][54] propose une modélisation du contact multiple pour des géométries diverses à partir du formalisme de la mécanique des milieux continus. L'idée principale est de considérer un système déformable constitué de corps indéformables : le principe des travaux virtuels permet d'aborder de manière systématique le problème délicat des collisions et le second principe de la thermodynamique pour définir des évolutions thermodynamiques possibles. Dans ce cadre, C. Cholet [21] a montré que cette modélisation rend compte avec efficacité de certains problèmes de contacts multiples comme par exemple, un système constitué de trois billes alignées, mais surtout permet de traiter les contacts entre corps anguleux.

Dans le cas d'une modélisation de corps circulaires, nous allons considèré la vitesse formelle (3.7) au sens de J.-J. Moreau [82]. Le schéma local de prédiction-correction (3.3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\text{prédiction :} \quad \tau^{i+1} = \mathbf{s}^i - \rho[\tilde{\dot{u}}_t^i + (\tilde{\dot{u}}_n^i + \mu|| - \tilde{\dot{u}}_t^i||).\mathbf{n}] \,, \\ &\text{correction :} \quad \mathbf{s}^{i+1} = proj(\tau^{i+1}, K_\mu). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dans ce contexte, nous présentons une méthode E.D. de type D.C. en deux dimensions du mouvement d'un ensemble de rouleaux rigides qui utilise comme loi de contact un seul schéma de prédiction-correction.

3.3 Algorithme global

3.3.1 Sélection des candidats aux contacts

Afin de réduire la taille du problème non linéaire, on sélectionne les contacts potentiels. C'est-à-dire que le schéma de prédiction-correction (3.8) ne va pas s'appliquer à toutes les paires de corps possibles, mais aux paires qui sont potentiellement en contact. Pour ce faire, nous introduisons une condition de contact basée sur l'inégalité suivante

$$u_n \leq \epsilon,$$

où u_n représente une prédiction par un schéma explicite de l'interstice (ou déplacement relatif, défini en(2.2.1)) et ϵ est un petit paramètre.

Dans le cas précis d'une modélisation bi-dimensionnelle de p objets circulaires, la détection des contacts (repèrage de toutes les paires susceptibles d'interagir) nécessite un algorithme d'ordre 0(p^2). Dans notre cas, chaque contact est identifié par la donnée de ses deux candidats. C'est-à-dire que, dans un premier temps, on boucle sur l'ensemble des candidats,

$$i = 1, nbcand$$

ce qui détermine le nom du corps situé en première position dans le contact potentiel et dans un second temps, on effectue une boucle interne

$$j = 1, (nbcand - 1)$$

ce qui permet d'identifier le corps situé en deuxième position dans le contact potentiel. L'ordre est ainsi réduit à

$$0\left(\frac{p(p-1)}{2}\right).$$

Par exemple, pour un système de 100 candidats, la sélection s'effectue sur 4950 paires de candidats au lieu de 10 000 pour une détection classique.

3.3.2 Schéma global de prédiction-correction

On utilise un schéma global de prédiction-correction aux différences finies de type implicite. On définit $[t_n, t_{n+1}]$ (avec $t_{n+1} = t_n + h$) l'intervalle de discrétisation en temps. On aboutit à un algorithme comportant, à chaque itération, une phase de résolution de l'équation de la dynamique, fournissant une nouvelle approximation de la vitesse, et une phase d'utilisation du schéma (3.8) de la loi de contact, qui donne une nouvelle valeur de la réaction ou plus exactement de l'impulsion.

Pour cela, nous introduisons le temps moyen t_m et une prédiction sur les coordonnées généralisées $\mathbf{q}_m$:

$$t_m = t_n + \frac{1}{2}h, \qquad \mathbf{q}_m = \mathbf{q}_n + \frac{1}{2}h\dot{\mathbf{q}}_n.$$

On sélectionne les candidats au contact,

$$u_n(t_m, \mathbf{q}_m) \leq \epsilon,$$

et une nouvelle estimation de la vitesse $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ est alors calculée par résolution de l'équation (3.2)

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}dt + \sum_c \mathbf{P}\mathbf{s}^{c,i+1}).$$

Une nouvelle estimation de l'impulsion pour chaque contact c, $\mathbf{s}^{c,i+1}$, est alors calculée par utilisation du schéma local (3.8)

$$\begin{aligned} &\text{prédiction :} \quad \tau^{i+1} = \mathbf{s}^i - \rho[\tilde{\dot{u}}_t^i + (\tilde{\dot{u}}_n^i + \mu|| - \tilde{\dot{u}}_t^i||).\mathbf{n}]\ , \\ &\text{correction :} \quad \mathbf{s}^{i+1} = proj(\tau^{i+1}, K_\mu). \end{aligned}$$

où la vitesse relative formelle $\tilde{\dot{u}}^i$ s'écrit pour chaque contact

$$\tilde{\dot{u}}_n^i = \frac{\dot{u}_n^+ + e_n\dot{u}_n^-}{1+e_n} \qquad \tilde{\dot{u}}_t^i = \frac{\dot{u}_t^+ + e_t\dot{u}_t^-}{1+e_t},$$

avec

$$\dot{\mathbf{u}}^- = \mathbf{P}^t\dot{\mathbf{q}}_n, \qquad \dot{\mathbf{u}}^+ = \mathbf{P}^t\dot{\mathbf{q}}_{n+1},$$

les vitesses avant et après le choc où $\mathbf{P}$ a été précisé dans le chapitre 1. S'il y a convergence, les valeurs des coordonnées généralisées sont alors données par

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_m + \frac{1}{2}h\dot{\mathbf{q}}_{n+1},$$

et la simulation peut continuer au pas de temps suivant. Sinon on réitère sur le schéma local jusqu'à obtenir la convergence.

3.4 Calibrage du modèle : contact simple

Le modèle numérique proposé utilise, dans sa procédure, différents paramètres. Ils peuvent être internes à l'algorithme ; par exemple le paramètre ρ[4] utilisé dans l'algorithme local (3.8). Ils peuvent aussi dépendre des applications mais surtout de la nature du milieu réel à modéliser, comme le coefficient de frottement et les deux coefficients de restitution normal et tangentiel. Nous allons, à partir d'exemples de contact simple, estimer, en vue d'utilisation dans diverses applications, la valeur du ρ et vérifier si le modèle de choc utilisé est acceptable.

3.4.1 Estimation du paramètre ρ

D'après (3.8), on constate que le coefficient ρ (paramètre numérique intervenant dans le schéma de prédiction-correction) a pour ordre de grandeur

$$\rho \approx 0 \left(\frac{\text{impulsion}}{\text{vitesse}} \right). \tag{3.9}$$

Nous allons, à partir d'un exemple classique de collision, estimer la valeur de ρ. Dans un premier temps, afin de pouvoir appliquer la conservation de l'énergie, on suppose une collision élastique ($e_n = 0$) entre un objet de petites dimensions (m sa masse, v^- et v^+ les vitesses avant et après le choc) et un objet de grandes dimensions (M sa masse, $V^- = 0$ et V^+ les vitesses avant et après le choc), figure 3.1.

[4] Provenant de la résolution par le lagrangien augmenté.

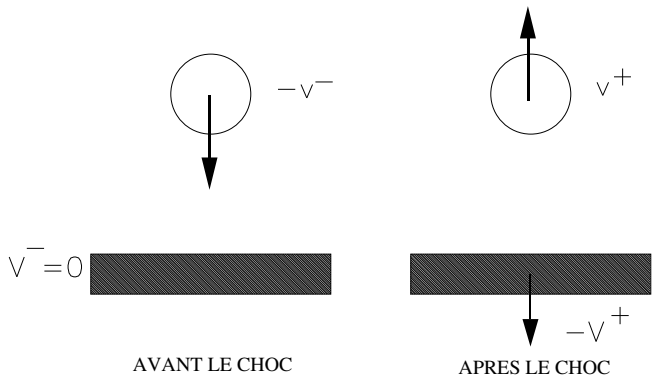


FIG. 3.1 – Collision élastique frontale entre des corps de petites et de grandes dimensions : à gauche, la configuration avant la collision, à droite, la configuration après la collision.

Dans un premier temps, nous déterminons v^+ et V^+. La conservation de la quantité de mouvement nous donne l'équation suivante

$$-\mathrm{m}v^- = -\mathrm{M}V^+ + \mathrm{m}v^+, \tag{3.10}$$

et la conservation de l'énergie l'équation suivante

$$\mathrm{m}(v^-)^2 = \mathrm{M}(V^+)^2 + \mathrm{m}(v^+)^2. \tag{3.11}$$

De (3.11), nous obtenons

$$\mathrm{m}((v^-)^2 - (v^+)^2) = \mathrm{M}(V^+)^2. \tag{3.12}$$

D'après (3.10) et (3.12), nous obtenons

$$V^+ = v^- - v^+. \tag{3.13}$$

D'après ce qui précède, les vitesses après le choc sont égales à

$$v^+ = \left(\frac{1 - \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}}}{1 + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}}}\right) v^- \qquad \text{et} \qquad V^+ = \left(\frac{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}}}{1 + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}}}\right) 2v^-. \tag{3.14}$$

Dans un second temps, on suppose que l'objet de grandes dimensions est une paroi de masse infinie $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{M}} \to 0\right)$ et fixe. Soit d'après (3.14), $v^+ = v^-$ et $V^+ = 0$. Dans ce cas, l'impulsion s est égale d'après (3.10) et (3.14) à

$$\mathrm{s} = r_n dt = \mathrm{m}[v] = \mathrm{m}(v^+ + v^-) = 2\mathrm{m}v^-. \tag{3.15}$$

Nous estimons alors, pour une collision élastique entre un corps circulaire et une paroi de masse infinie, d'après (3.9) que

$$\rho \approx 2\mathrm{m}. \tag{3.16}$$

A partir de ces considérations et d'essais numériques sur des exemples simples, nous avons estimé le ρ, pour des collisions frontales et inélastique de deux objets de masse respective m_i et m_j,

$$\rho = \frac{(1+e_n)\mathrm{m}_i}{\left(1+\frac{\mathrm{m}_i}{\mathrm{m}_j}\right)}. \tag{3.17}$$

A titre indicatif, pour un disque (de rayon $5mm$ et de masse volumique $1400kg.m^{-3}$) qui rentre en contact avec une paroi de masse infinie, la valeur du ρ est estimée à

$$\rho \approx 11.10^{-2}(1+e_n) \qquad \text{suivant le coefficient de restitution } e_n \text{ choisi.}$$

3.4.2 Vérification de la loi de restitution normale

On abandonne un disque sans vitesse initiale, à une hauteur h_0 au-dessus d'un plan horizontal. Le disque touche le plan avec une vitesse v_0, rebondit et repart vers le haut avec une vitesse v_1, figure 3.2.

Analytiquement, l'impact du disque sur le plan introduit une dissipation générant des rebonds successifs de plus en plus petits suivant le coefficient de restitution normal e_n utilisé. Nous allons, dans un premier temps, établir analytiquement les altitudes maximales successives du disque h_p, la durée du p^{ieme} rebond t_p et la durée totale de ces rebonds τ. Le choc du disque sur le plan s'accompagne en pratique d'une dissipation d'énergie cinétique, $\mathrm{m}v_1^2 < \mathrm{m}v_0^2$. Soit v_{p-1} et v_p les vitesses de la bille juste avant et juste après le p^{ieme} rebond, avec $v_p = e_n v_{p-1}$. L'énergie cinétique $\frac{1}{2}\mathrm{m}v_p^2$ fait remonter le disque jusqu'à

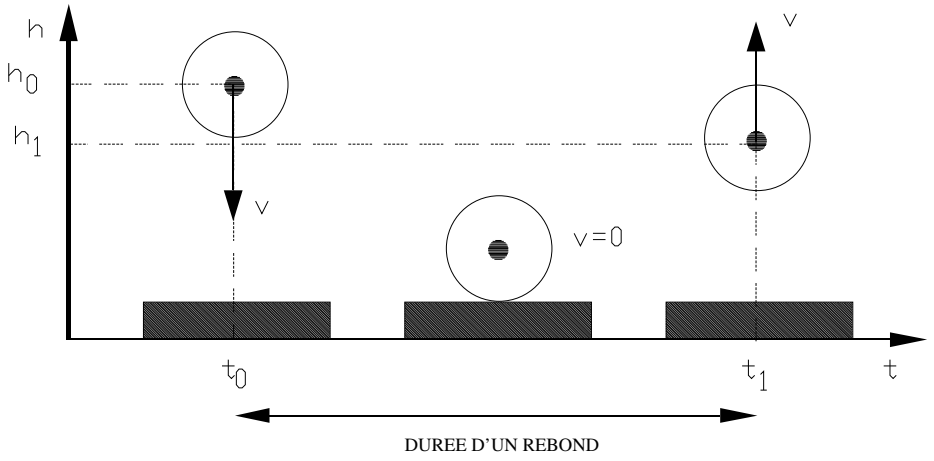


FIG. 3.2 – Étude des rebonds successifs d'un disque sur un plan horizontal en fonction du coefficient de restitution normale.

la hauteur h_p telle que $\mathrm{m}gh_p = \dfrac{1}{2}\mathrm{m}v_p^2$ soit alors $h_p = e_n^2 h_{p-1}$. Les altitudes maximales successives du disque sont donc

$$h_p = h_0(e_n)^{2p}. \tag{3.18}$$

Lorsque la bille remonte avec la vitesse v_p, sa vitesse décroît selon la loi $v = v_p - gt$ et s'annule pour $t = \frac{v_p}{g}$. La durée du p^{ieme} rebond est $t_p = 2\sqrt{\frac{2h_p}{g}}$. Comme $v_p = \sqrt{2gh_p}$, nous avons

$$t_p = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}e_n^p. \tag{3.19}$$

La durée totale des rebonds successifs est $\tau = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}e_n(1 + e_n + e_n^2 + \ldots + e_n^p + \ldots)$, soit

$$\tau \approx 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{e_n}{1 - e_n}. \tag{3.20}$$

Dans un second temps, nous montrons que l'algorithme défini en (3.3) permet de modéliser cette dissipation, figure 3.3. Le pas de temps est égal à 10^{-4} s. Pour chaque collision, la convergence est obtenue au bout de deux itérations. Dans le tableau 3.1, les résultats numériques (N) sont comparés aux résultats analytiques (A). La valeur du ρ, estimée en (3.4.1), permet une bonne concordance entre les résultats numériques et analytiques.

	A			N			ϵ=erreur relative		
e_n (-)	1.0	0.9	0.8	1.0	0.9	0.8	1.0	0.9	0.8
h_1 (m)	0.1	0.081	0.064	0.1	0.0828	0.0675	0.0	0.021	0.051
h_2 (m)	0.1	0.065	0.040	0.1	0.0689	0.0468	0.0	0.056	0.145
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_1 (s)	0.285	0.258	0.228	0.285	0.257	0.244	0.0	0.003	0.0655
t_2 (s)	0.285	0.232	0.182	0.285	0.231	0.195	0.0	0.004	0.067
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
τ (s)	-	2.570	1.142	-	2.582	1.152	-	0.0046	0.0086

TAB. 3.1 – Influence du coefficient de restitution e_n sur les rebonds successifs d'un disque sur un plan horizontal.

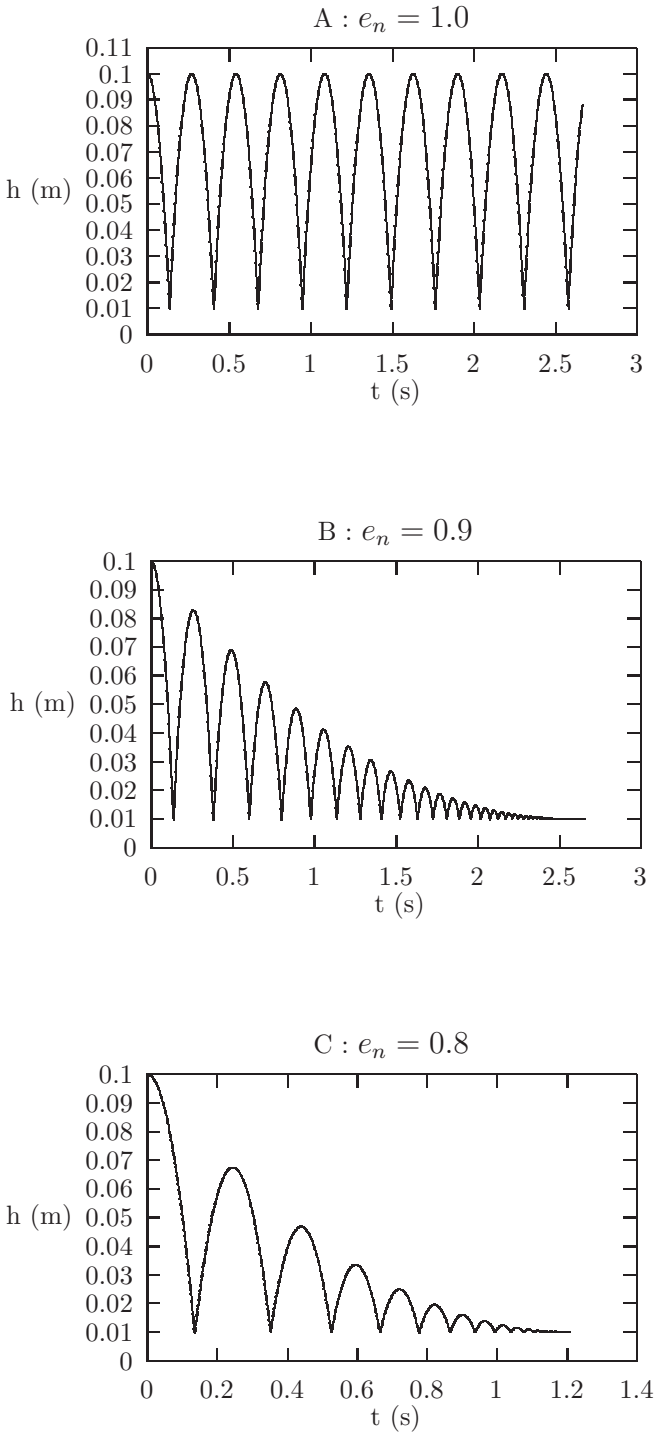


FIG. 3.3 – Simulation d'une collision entre un disque et un plan horizontal : influence du coefficient de restitution normal sur les rebonds successifs, pour $e_n = 1.0$ (a), $e_n = 0.9$ (b) et $e_n = 0.8$ (c).

3.4.3 Vérification de la loi avec frottement

On vérifie ici, que le schéma local de prédiction-correction (3.3) qui identifie les réactions de contact normales et tangentielles, permet de valider la loi classique de frottement qui prédit que la vitesse d'un cylindre lancé sur un plan horizontal s'accompagne d'une phase de glissement avant de rouler[5]. Soit alors un cylindre lancé avec une vitesse initiale ($v_0 = 1m.s^{-1}$) sur un plan horizontal, figure 3.4. Le coefficient de frottement est égal à 0.5. Nous faisons l'hypothèse que le contact est maintenu sans variation de l'effort normal r_n.

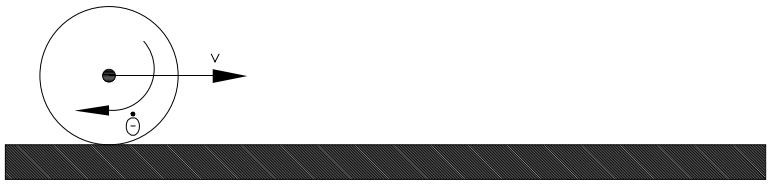


FIG. 3.4 – Roulement d'un cylindre sur un plan horizontal : contact maintenu sans variation de l'effort normal N.

Analytiquement, nous calculons le temps nécessaire t_1 et la vitesse atteinte v_1 pour que la vitesse du cylindre se stabilise. Le principe fondamental de la dynamique nous permet d'écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = I_\Delta \ddot{\theta} \\ \mathbf{r_t} = \mathrm{m}\gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \mu \frac{r_n a}{I_\Delta} t + \dot{\theta}_0 & \text{(a)} \\ v = -\frac{\mathbf{r_t}}{\mathrm{m}} t + v_0 & \text{(b)} \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est le couple, $\mathbf{r_t}$ est reliée à $\mu r_n = \mu$mg (g l'accélération de gravité, m la masse) et $I_\Delta = m\frac{a^2}{2}$ le moment d'inertie par rapport à l'axe principal Δ. La vitesse de glissement s'annule pour $v_1 = a\dot{\theta}_1$ (a=rayon et $\dot{\theta}_1$=vitesse de rotation), lorsque $t = t_1$. En remplaçant dans (a), on obtient

$$a^2 \mu \frac{r_n}{I_\Delta} t_1 = -\frac{\mu r_n}{\mathrm{m}} t_1 + v_0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{v_0}{\mu r_n \left(\frac{a^2}{I_\Delta} + \frac{1}{\mathrm{m}} \right)}.$$

[5]On supposera négligé le frottement de pivotement [83].

Soit alors

$$t_1 = \frac{v}{3\mu g} \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{2}{3} v_0. \tag{3.21}$$

La figure 3.5 présente les résultats de la simulation, pour différents coefficients de frottement. Le pas de temps est égal à 5.10^{-4}s.

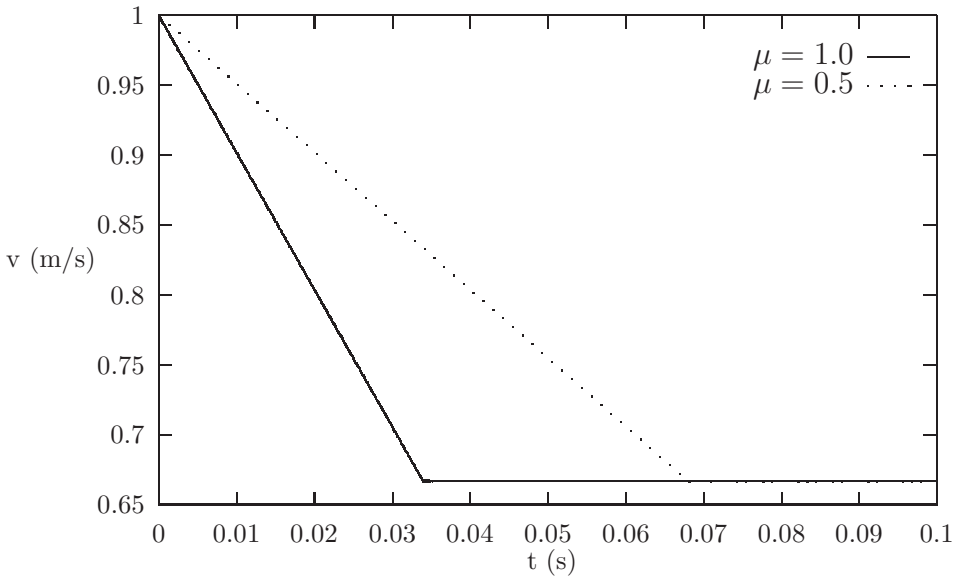


FIG. 3.5 – Roulement d'un cylindre sur un plan horizontal : analyse numérique de la loi de frottement.

Par comparaison avec les résultats analytiques présentés en (3.21), nous constatons que la simulation permet de modéliser avec précision la loi de frottement, tableau 3.2.

	A		N		ϵ=erreur relative	
μ	0.5	1.0	0.5	1.0	0.5	1.0
v_1(m.s^-1)	0.666	0.666	0.666	0.666	0.0	0.0
t_1 (s)	0.0679	0.0339	0.0679	0.0353	0.0	0.039

TAB. 3.2 – Influence du coefficient de frottement sur la stabilisation de la vitesse.

3.4.4 Calibrage du modèle numérique : contacts multiples

Afin de calibrer le modèle numérique pour des contacts multiples, nous procédons à des essais numériques sur des échantillons constitués de matériau analogique homogène.

3.4.4.1 Cas quasi-statique

Soit un ensemble de cylindres homogènes confinés dans une boîte constituée de deux parois verticales et de deux parois horizontales immobiles. Nous faisons l'hypothèse que les cylindres et les parois sont parfaitement rigides. Chaque cylindre est sujet à l'accélération de gravité g et à des efforts de contact dus aux parois et aux cylindres voisins. Pour trois arrangements initiaux des cylindres, nous présentons les résultats de notre modélisation (intensité et répartition des efforts de contact).

La figure 3.6 présente la modélisation d'un exemple de contacts multiples pour un assemblage rectangulaire. L'algorithme modélise bien le phénomène de "descente des charges" caractéristique de ce type d'arrangement : l'intensité de la force qui s'exerce sur un objet est fonction de sa hauteur dans l'échantillon considéré. Cependant, on constate que les efforts de frottement ne sont pas apparents. En effet, ici, les disques sont homogènes (même rayon) et assemblés rectangulairement. D'autre part, la modélisation donne pour la résultante sur la paroi horizontale, située en bas, une valeur numérique de -17.2 N qui est équivalente au poids de tous les cylindres.

La figure 3.7 présente la modélisation d'un exemple de contacts multiples pour un assemblage triangulaire de 95 cylindres homogènes. Cet exemple met en valeur une caractéristique très importante dans les milieux discrets : la résultante des efforts de contact sur la paroi horizontale inférieure (-15.9 N) n'est pas équivalente au poids total des cylindres (-16.34 N) mais inférieure, car les parois latérales subissent des efforts de contact normaux et tangentiels.

La figure 3.8 présente la modélisation d'un exemple de contacts multiples pour un assemblage dit "boulets de canon" de 55 cylindres homogènes. Il existe des modèles analytiques sur ce type d'assemblage qui permettent une identification des efforts de contact normaux et tangentiels pour chaque objet, [62]. Une comparaison avec ce modèle n'est pas en-

visageable car les calculs analytiques ont été effectués sans parois latérales. Dans notre modélisation, l'assemblage est constitué de cylindres qui ne permettent pas sa stabilisation, c'est pourquoi l'utilisation de parois latérales est indispensable. On le constate sur les figures 3.7 et 3.8 où les parois latérales subissent des efforts normaux de la part des cylindres situés aux extrémités (dans la première rangée pour 3.8).

La figure 3.9 présente, pour un assemblage rectangulaire de 100 cylindres homogènes, une modélisation des efforts de contact provenant d'une compression isotrope de 100 N. La modélisation numérique permet de déterminer les efforts subis par chacune des parois. Les valeurs numériques normales sont équivalentes aux efforts appliqués pour chacune des parois. D'autre part, on constate que les efforts de frottement sur les parois latérales ne sont pas négligeables, de l'ordre de 6%.

La figure 3.10 présente, pour un système constitué de 2500 cylindres de granulométrie hétérogène, une modélisation des efforts de contact provenant d'une compression bidirectionnelle de 1000 N suivant la paroi verticale de droite et suivant la paroi horizontale du bas. Cet exemple met en évidence l'hétérogénéité des efforts de contact à l'intérieur d'un assemblage discret de particules.

3.4.4.2 Cas dynamique

Nous présentons, figure 3.11, un exemple dynamique de cylindres monodisperses soumis aux oscillations (de la gauche vers la droite) répétées de la boîte les contenant. On constate l'instabilité de l'assemblage pour une faible fréquence d'oscillations. Suivant les paramètres de contact (ici $e_n = 1.0$ et $e_t = 1.0$ et $\mu = 0.0$), le déséquilibre du "tas" sera plus ou moins marqué.

Nous présentons figure 3.12, un exemple dynamique de grains polydisperses soumis à la gravité. On constate que l'algorithme rend bien compte du caractère impulsionnel des efforts de contact au sein du matériau.

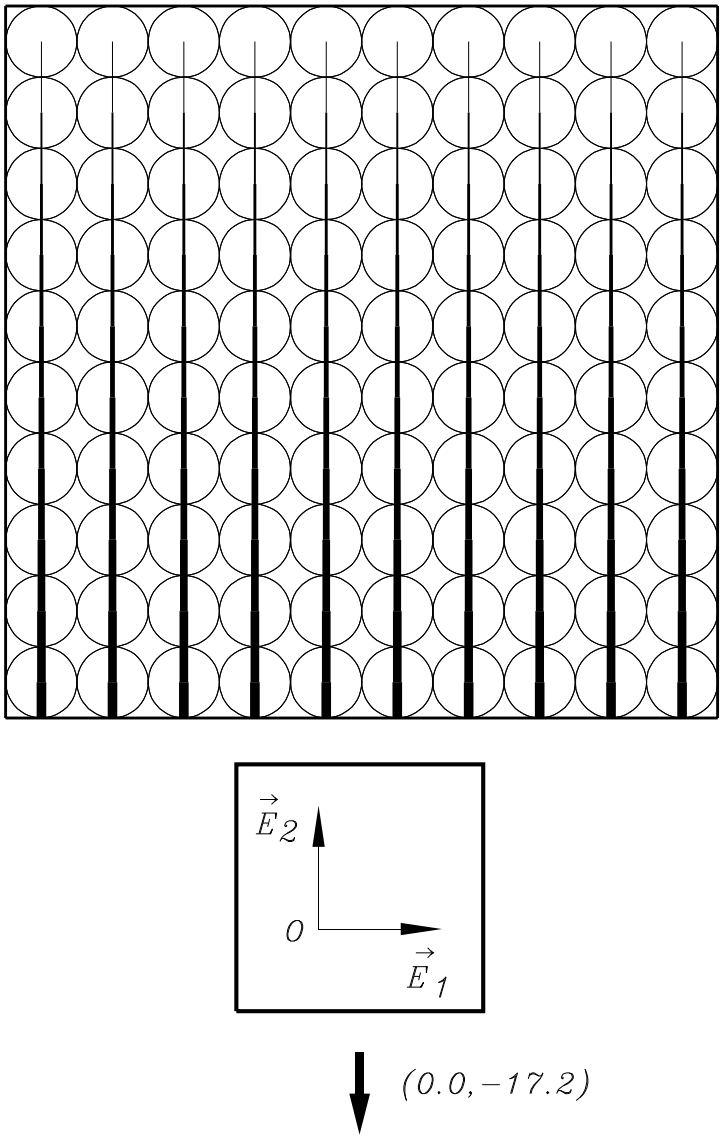


FIG. 3.6 – Visualisation des efforts normaux de contact (l'épaisseur des segments est fonction de l'intensité des efforts) pour un arrangement rectangulaire de 100 objets cylindriques de granulométrie homogène, en haut ($\emptyset\ 4mm$, $l = 10^{-2}m$, $\mu = 0.3$ et $\rho = 1400kg.m^{-3}$) et en bas, représentation de la direction et de l'intensité (en N) des efforts qui s'exercent sur les parois, par rapport au repère $(O, \vec{E}_1, \vec{E}_2)$.

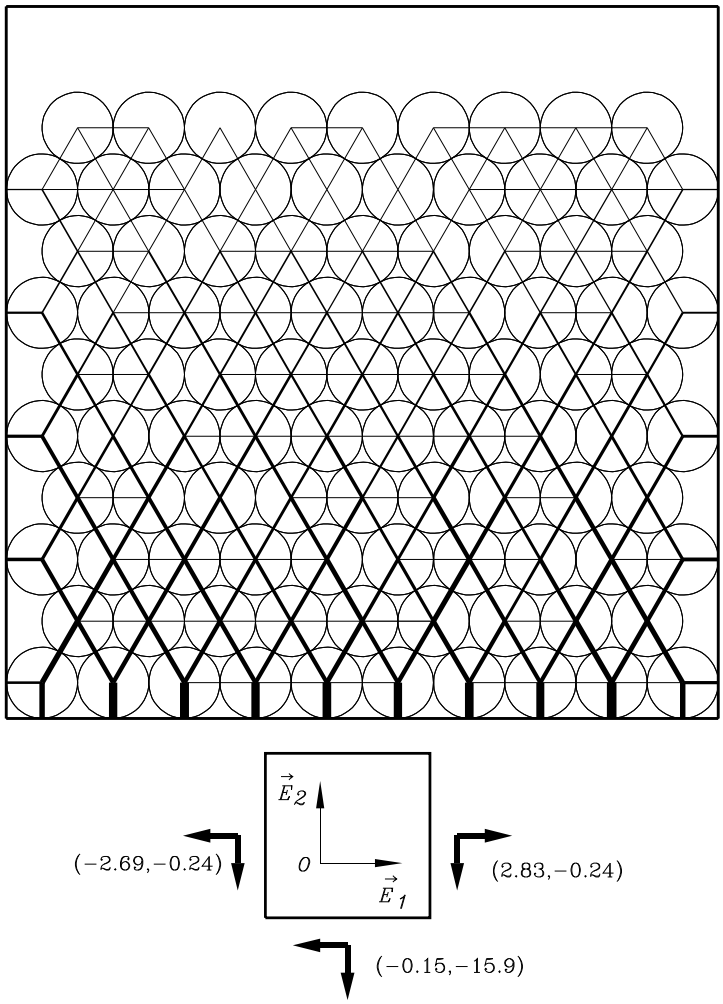


FIG. 3.7 – Visualisation des efforts normaux de contact pour un arrangement triangulaire de 95 objets cylindriques de granulométrie homogène, en haut (∅ 4.10^{-3} m, $l = 10^{-2}m$, $\mu = 0.3$ et en bas, représentation de la direction et de l'intensité (en N) des efforts qui s'exercent sur les parois, par rapport au repère $(O, \vec{E}_1, \vec{E}_2)$.

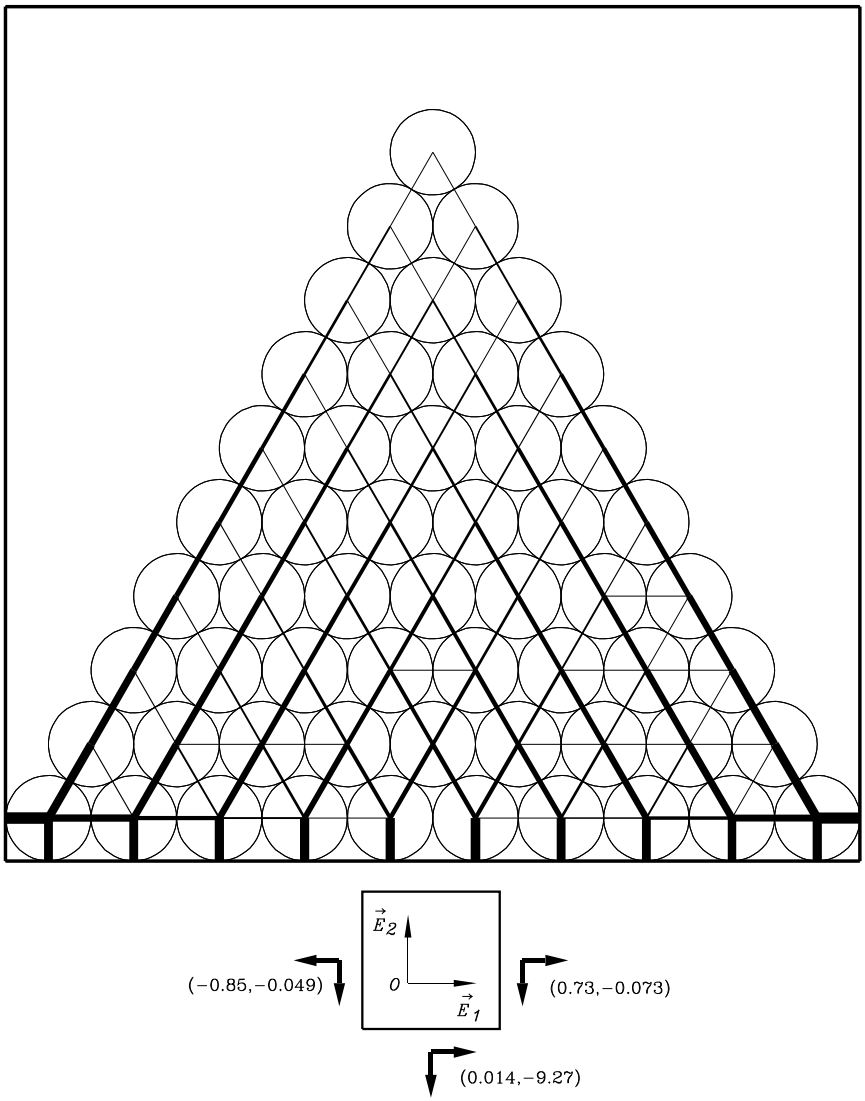


FIG. 3.8 – Visualisation des efforts normaux de contact pour un arrangement dit “boulets de canon” de 55 objets circulaires de granulométrie homogène, en haut (∅ 4 mm, $\rho = 1400 kg.m^{-3}$) et en bas, représentation de la direction et de l’intensité (en N) des efforts qui s’exercent sur les parois, par rapport au repère (O, $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$).

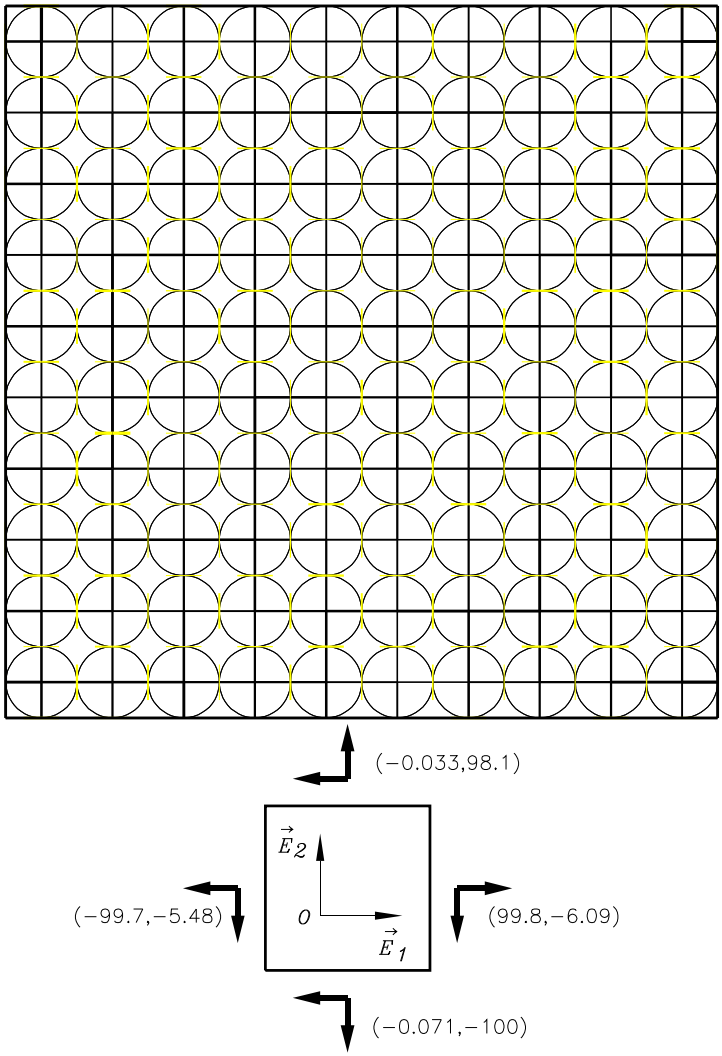


FIG. 3.9 – Visualisation des efforts normaux et tangentiels de contact pour un arrangement rectangulaire de 100 objets circulaires de granulométrie homogène, en haut (∅ 4 mm, $\rho = 1400 kg.m^{-3}$) soumis à une compression isotrope de 100 N et en bas, représentation de la direction et de l'intensité (en N) des efforts qui s'exercent sur les parois, par rapport au repère $(O, \vec{E}_1, \vec{E}_2)$.

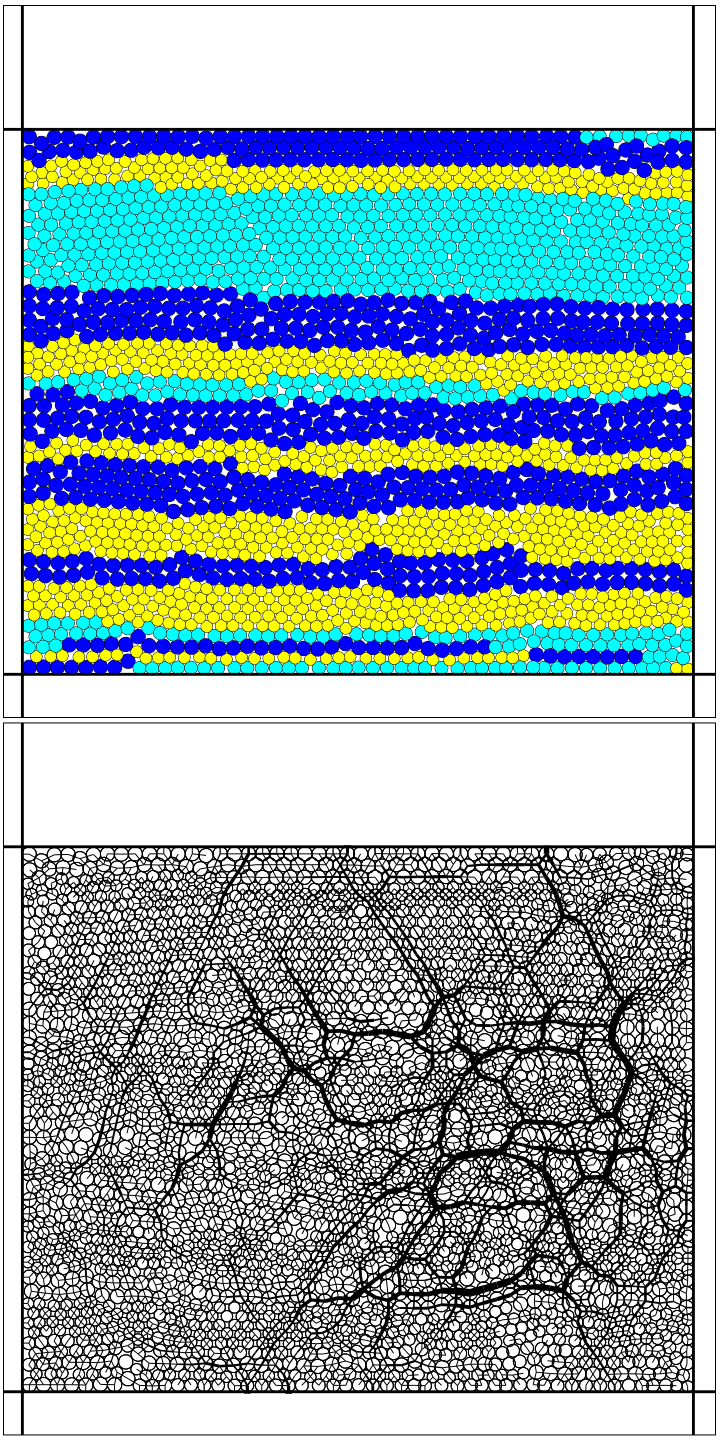


FIG. 3.10 – Visualisation des efforts normaux de contact pour une compression bilatérale de 2470 objets circulaires en 2D de granulométrie égale à 25% de ∅ 1.3 mm, 50% de ∅ 1.6 mm et 25% de ∅ 2.0 mm. Les paramètres de contact sont : $e_n = 0.0$ et $e_t = 1.0$ et $\mu = 0.1$.

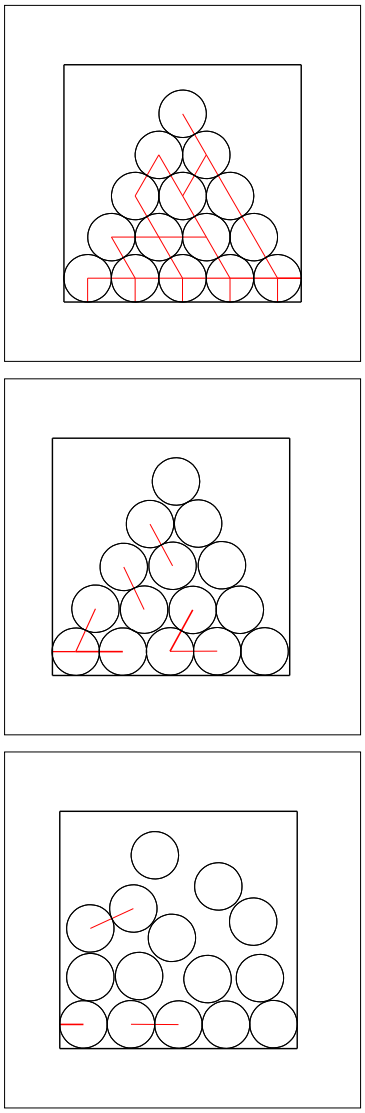


FIG. 3.11 – Vibration d'un assemblage dit "boulets de canon". La boîte est vibrée de la droite vers la gauche.

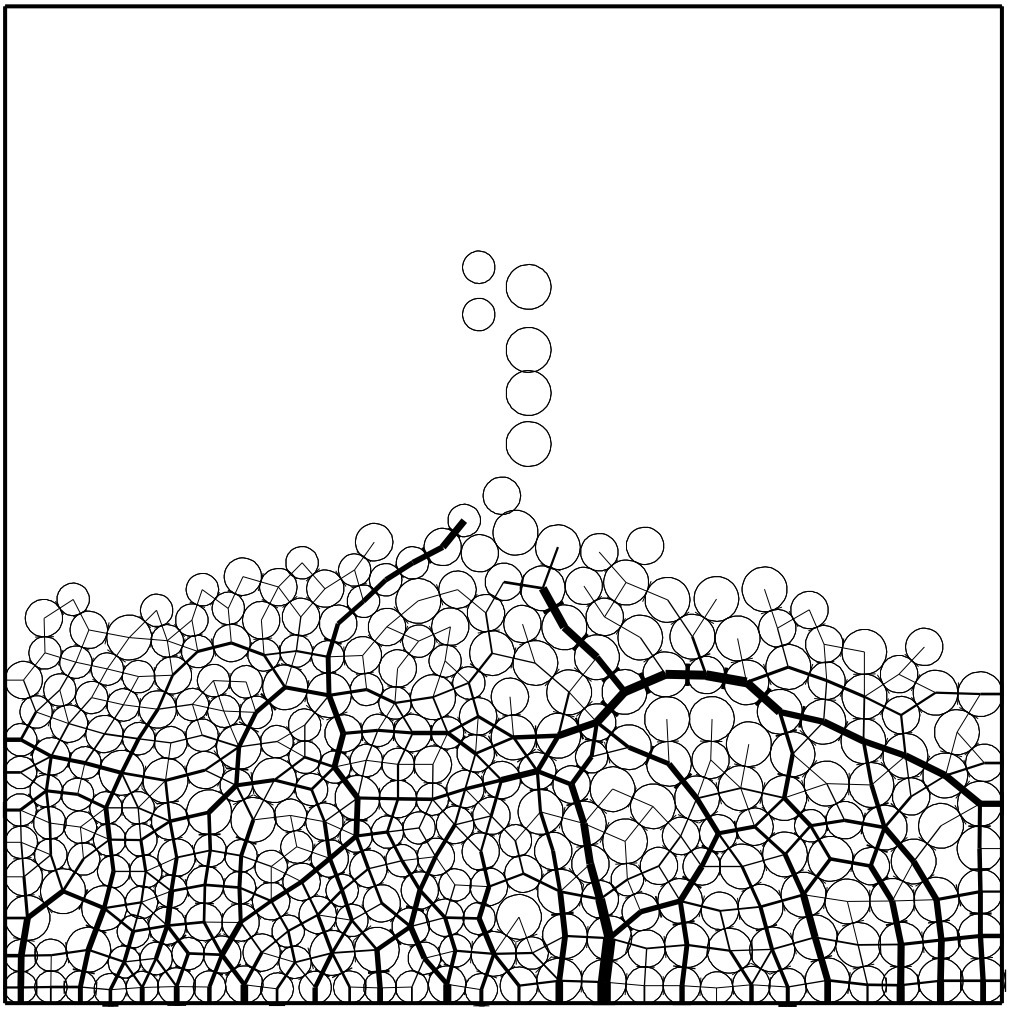


FIG. 3.12 – Compactage par gravité d'environ 342 objets circulaires en 2-D de granulométrie égale à 25% de ∅ 1.3 mm, 50% de ∅ 1.5 mm et 25% de ∅ 1.8 mm. Les paramètres de contact sont : $e_n = 0.1$, $e_t = 1.0$ et $\mu = 0.3$ et le pas de temps $\tau = 8.10^{-4}s$.

3.5 Erreur en relation de comportement

3.5.1 Définition

Généralement, pour les méthodes E.D., le critère de convergence est basé sur la norme Euclidienne de la différence des réactions de contact entre deux itérations consécutives

$$\eta = \frac{||s^{i+1} - s^i||}{||s^{i+1}||}. \tag{3.22}$$

Nous proposons, dans notre modélisation, de contrôler la convergence par un indicateur en relation de comportement

$$\epsilon = \frac{\sum b_c(-\tilde{\dot{u}}, \mathbf{s}^{i+1}) + \tilde{\dot{u}}.\mathbf{s}^{i+1}}{\sum b_c(-\tilde{\dot{u}}, \mathbf{s}^{i+1})}, \tag{3.23}$$

où la sommation porte sur les contacts actifs. Ce type d'erreur a été proposé pour la première fois par P. Ladeveze [71] dans la méthode des Eléments Finis, et utilisé dans le cadre des matériaux Standard Implicites par M. Hjiaj [60]. En effet, cette quantité, issue du concept de bifonctionnelle, est toujours positive, vue la définition même du bipotentiel (annexe B)

$$\text{pour tout} \quad (\dot{v}', f') \in V \times F, \quad b(\dot{v}', f') \geq \dot{v}'.f', \tag{3.24}$$

et nulle lorsqu'un couple de variables duales est extrémal. Dans notre cas, le bipotentiel de contact (2.37) s'identifie à

$$b_c(-\tilde{\dot{u}}, \mathbf{s}) = \Psi_{\mathbb{R}^-}(-\tilde{\dot{u}}_n) + \Psi_{K_\mu}(\mathbf{s}) + \mu s_n|| - \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_t||. \tag{3.25}$$

Afin d'obtenir une valeur finie du bipotentiel, on procède de manière à satisfaire exactement les conditions de non-pénétration et de Coulomb, c'est-à-dire que $b_c(-\tilde{\dot{u}}, \mathbf{s})$ s'identifie à

$$b_c(-\tilde{\dot{u}}, \mathbf{s}) = \mu s_n|| - \tilde{\dot{\mathbf{u}}}_t||, \tag{3.26}$$

soit d'après (3.24), l'inégalité suivante doit être respectée

$$\mu s_n|| - \tilde{\dot{u}}_t|| \geq \tilde{\dot{u}}.\mathbf{s}\,. \tag{3.27}$$

D'une manière générale, le taux de convergence de l'indicateur d'erreur relative dépend fortement de la nature du problème considéré. La convergence des problèmes quasi-statiques semble paradoxalement plus délicate que celle des problèmes dynamiques.

Pour le problème de la figure 3.6, la sensibilité de l'erreur au nombre d'itérations est représentée dans le diagramme de la figure 3.13.

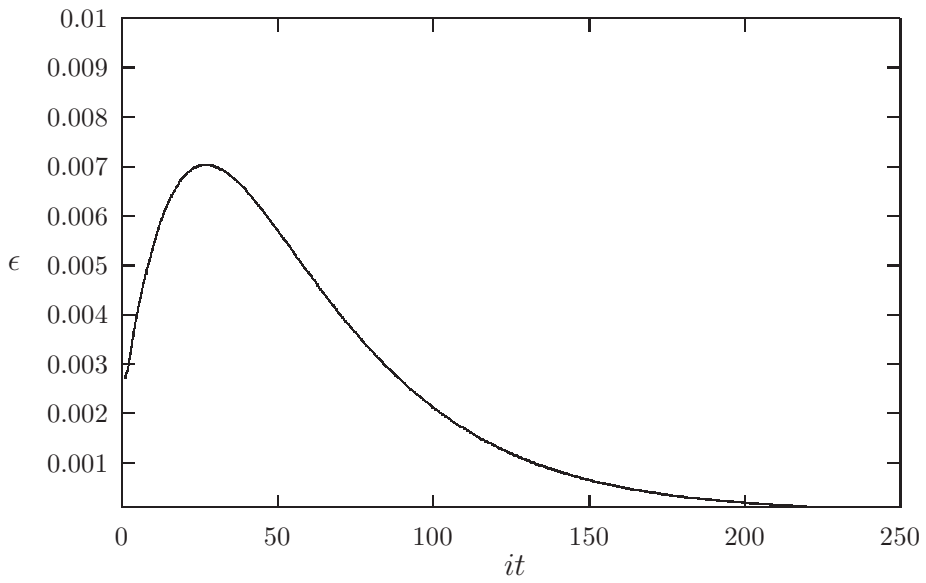


FIG. 3.13 – Graphe de l'évolution du critère de convergence ϵ basé sur la relation en loi de comportement, pour un assemblage rectangulaire de cylindres homogènes soumis à la pesanteur.

On observe une accélération très nette de la convergence au-delà d'un certain nombre seuil d'itérations, dans le cas d'espèces autour de 30. Dans un premier temps, le calcul est instable. Cela peut s'expliquer par le fait que le calcul des réactions de contact est implicite. Au départ, les valeurs des réactions sont égales à zéro. Afin de réduire la phase d'instabilité, il serait intéressant d'introduire, dès le départ, une valeur numérique de la réaction qui pourrait être évaluée en fonction de la vitesse relative. Après cette phase critique autour de 30, la vitesse de convergence augmente très vite.

3.5.2 Performance de l'algorithme

Finalement, pour un exemple d'assemblage rectangulaire de particules homogènes, avec les hypothèses numériques de la figure 3.6, on présente le graphe du nombre d'itérations en fonction du nombre de particules, figure 3.14.

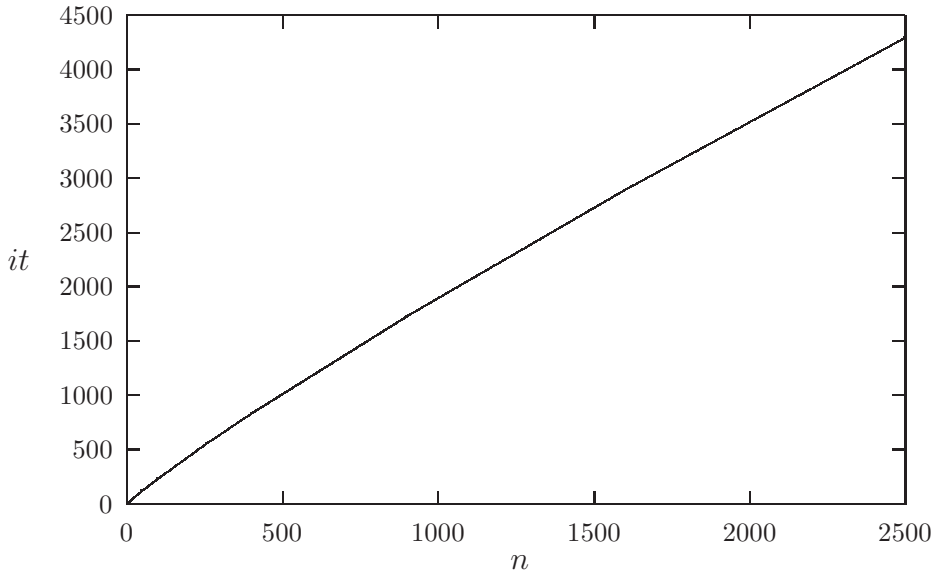


FIG. 3.14 – Graphe de l'évolution du nombre d'itérations "it" en fonction du nombre de particules "n", pour un assemblage rectangulaire de cylindres homogènes soumis à la pesanteur.

La dépendance est quasi-linéaire. Cela montre que le temps de calcul dépend de la taille du problème, suivant une loi de puissance pour laquelle l'exposant est donné par la pente de la droite, figure 3.14, et approximativement égal à 1.042. Ces observations permettent, bien que l'exemple soit un cas particulier, d'évaluer approximativement les temps de calculs pour des exemples numériques plus compliqués.

3.6 Conclusion

Dans une première partie, nous avons montré que notre système d'équations n'était pas suffisant pour appréhender des systèmes non-réguliers comportant plusieurs contacts actifs. De ce fait, nous avons fait le choix d'utiliser, comme vitesse de choc dans le schéma

de prédiction-correction local, la vitesse formelle au sens de Moreau [82]. De plus, dans le cadre de la dynamique non-régulière, nous avons réécrit l'équation de la dynamique définie dans le chapitre 1. D'après toutes ces considérations, nous avons proposé, à partir d'un algorithme de la Dynamique des Contacts, une modélisation d'un système de particules rigides. L'originalité de cet algorithme est le fait d'utiliser, comme modélisation de la loi de contact, le bipotentiel de contact. Son intérêt est double : il permet, d'une part, de déterminer les réactions de contact avec un seul schéma prédicteur-correcteur et, d'autre part, d'utiliser d'une façon simple l'indicateur de l'erreur en relation de comportement. De nombreuses applications, tant quasi-statiques que dynamiques, mettent en évidence la convergence et la robustesse de l'algorithme.

Chapitre 4

Simulation numérique des milieux granulaires

4.1 Introduction

A partir du modèle numérique exposé dans le chapitre 3, nous présentons succinctement le code MULTICOR que nous avons développé. Nous verrons qu'il permet de simuler les milieux granulaires pour différentes applications tant quasi-statiques que dynamiques. Nous présentons, à travers quelques applications, la mise en place numérique du milieu granulaire, soit par compactage dû à la gravité, soit par compactage dû à une compression isotrope. Nous constaterons sur ces exemples que la mise en place d'un matériau granulaire s'accompagne d'une anisotropie de structure.
De plus, nous procéderons à la simulation d'un milieu granulaire dans le cas de vidanges et d'essais de cisaillement direct dont les résultats numériques seront comparés avec des essais de laboratoire que nous avons effectué précédemment [45].

4.2 Code de calcul MULTICOR

4.2.1 Logiciel CHARLY

Avant de présenter le code MULTICOR, nous rappelons que celui-ci a été interfacé avec le logiciel CHARLY, développé par G. de Saxcé [37]. Le logiciel CHARLY a été conçu,

dans un premier temps, pour réaliser un programme modulaire d'éléments finis de nouvelle génération. Il a été appliqué dans ce sens avec succès dans [10] et [60]. Le fait d'interfacer un code de calcul avec le logiciel CHARLY permet entre autre d'intégrer plus facilement et plus rapidement de nouvelles routines, d'améliorer la lisibilité du programme et la possibilité d'évoluer plus facilement vers une programmation parallèle[1]. L'architecture de CHARLY repose : sur une base de données qui limite et normalise les échanges d'informations entre unités de programme, sur un langage destiné à donner une structure logique aux objets de la base et à commander de manière souple le déroulement des calculs, et sur une base d'algorithmes linéaires et non linéaires obtenue par segmentation en unités autonomes échangeant les informations entre elles par l'intermédiaire des primitives du Système de Gestion de la Base de Données (S.G.B.D.).

4.2.1.1 Le code MULTICOR

Afin d'utiliser le logiciel CHARLY, nous avons défini les structures de données dans un fichier "multicor.tex" du type de base de données et un fichier "multicor.cmd" où l'on a défini toutes les commandes permettant la fonctionnalité du code MULTICOR.

Le code MULTICOR permet la simulation en 2D du mouvement d'un ensemble de corps rigides, entrant en collision entre eux ou avec les parois d'une enceinte, et sujets à des forces de frottement lors de ces chocs. A partir de l'algorithme général défini dans le chapitre 3, nous proposons dans le tableau 4.1 l'architecture du code MULTICOR[2]. On présente ici, en s'appuyant sur (4.1), le déroulement d'une session de MULTICOR.

Dans un premier temps (constituant le POST-PROCESSEUR), l'utilisateur doit choisir, par l'intermédiaire de la variable "APL", la simulation qu'il souhaite effectuer (le cisaillement direct, le cisaillement bidirectionnel, le compactage (sous pesanteur ou par compression isotrope), la ségrégation ou les problèmes de dynamique pure). La possibilité est alors offerte de préciser la saisie des données (suivant la valeur de "REP1") soit par un fichier d'application (commande SFICHIER), soit par une saisie directe au clavier (commande SMANUEL). Une saisie par un fichier donne la possibilité (suivant la valeur de "REP2") d'écrire dans le fichier d'application les données relatives aux corps (position,

[1] Qui, dans les modélisations E.D., ne serait pas à négliger [13].
[2] On trouvera les caractéristiques de chaque commande dans [50].

vitesse, masse volumique, rayon) ou de générer les objets automatiquement (commande GCORCI). Une fois que toutes les données relatives à la simulation sont précisées, on initialise les coordonnées, les vitesses et les accélérations généralisées (commande INITIALE), et les données numériques telles que “ipas” et “it”. Dans le cas où la simulation est un compactage avec pesanteur, c’est la commande INIT qui est utilisée.

Dans un second temps (constituant le PROCESSEUR), le calcul de la simulation débute au pas de temps “ipas=ipas+1“, et rentre ainsi dans le schéma global de prédiction-correction de l’algorithme. Le MODULE 1 qui regroupe plusieurs commandes permet de calculer :

• la prédiction sur le pas de temps moyen t_m et les coordonnées généralisées $\mathbf{q}_m$ (commande PREDICT),

$$t_m = t_n + \frac{1}{2}h \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_m = \mathbf{q}_n + \frac{1}{2}h\dot{\mathbf{q}}_n,$$

• de sélectionner les candidats potentiels au contact (commande SELCAND)

$$u_n(t_m, \mathbf{q}_m) \leq \epsilon,$$

• de calculer au pas “n+1” les vitesses généralisées $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ (commande DYNAMIQ)

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{M}^{-1}(h\mathbf{F} + \sum \mathbf{P}\mathbf{s}^{i+1}).$$

Les impulsions “$\mathbf{s}^{i+1}$” sont calculées dans le schéma de prédiction-correction local, par l’intermédiaire du MODULE 2 constitué des commandes :

• CONTACT où le schéma local est calculé,

$$\begin{aligned} &\text{prédiction :} \quad \tau^{i+1} = \mathbf{s}^i - \rho[\tilde{\dot{u}}_t^i + (\tilde{\dot{u}}_n^i + \mu|| - \tilde{\dot{u}}_t^i||).\mathbf{n}] \,, \\ &\text{correction :} \qquad\qquad \mathbf{s}^{i+1} = proj(\tau^{i+1}, K_\mu), \end{aligned}$$

• ASSEMBL où est assemblé pour chaque corps la résultante des différentes actions locales,

• et CONVERG qui permet, à partir de

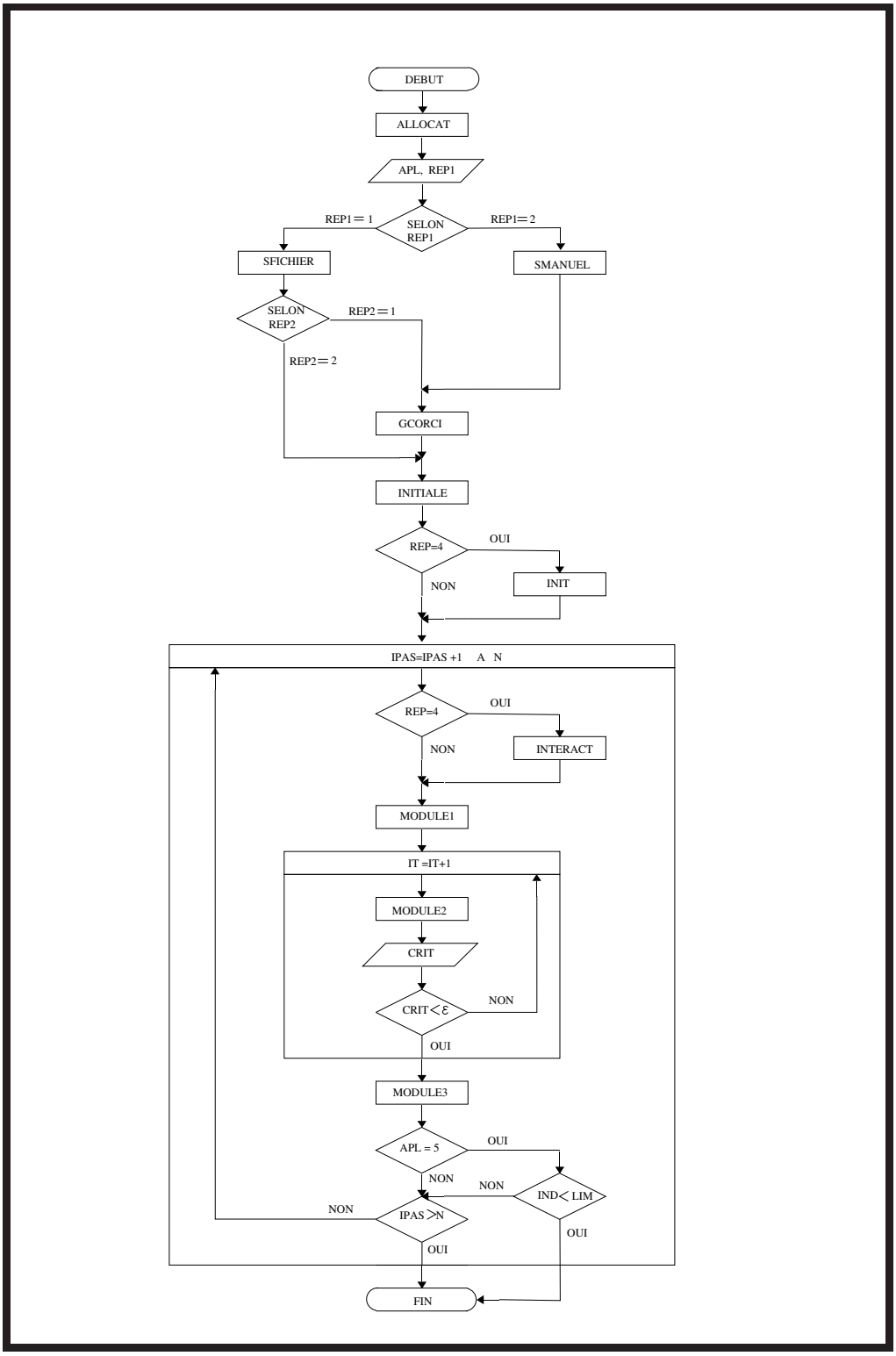
$$\epsilon = \frac{\sum b_c(-\tilde{\dot{u}}, \mathbf{s}^{i+1}) + \tilde{\dot{u}}.\mathbf{s}^{i+1}}{\sum b_c(-\tilde{\dot{u}}, \mathbf{s}^{i+1})},$$

d'établir la convergence du schéma numérique.

Dans un troisième temps (constituant le PRE-PROCESSEUR), si la convergence est établie, le MODULE 3 permet de corriger les $\mathbf{q}_{n+1}$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_m + \frac{1}{2} h \dot{\mathbf{q}}_{n+1},$$

et d'interfacer les résultats avec le logiciel de visualisation GKS, par l'intermédiaire de la commande GRAPHIC.



TAB. 4.1 – Organigramme du code MULTICOR qui traduit un algorithme comportant, à chaque itération “n”, une phase de résolution de l’équation de la dynamique, fournissant une nouvelle approximation de la vitesse, et à chaque itération “it” une phase d’utilisation du schéma de la loi de contact, fournissant une nouvelle valeur de la réaction.

4.3 Mise en place d'un matériau analogique

Dans MULTICOR, la mise en place d'un matériau analogique peut s'effectuer de différentes manières, soit par génération automatique des particules sur un réseau de petits carrés de dimensions égales au diamètre de la plus grande particule, soit par déversement interactif des particules soumises à la gravité.

4.3.1 Génération automatique des particules

La figure 4.1 (à gauche) présente un échantillon de 248 objets analogiques générés dans une enceinte de 6.4 cm de côté. L'échantillon est constitué de particules de 1 mm de diamètre (50%), de 1.5 mm de diamètre (25%) et de 2.0 mm de diamètre (25%). La figure 4.1 (à droite) présente un échantillon de 553 objets analogiques générés dans un silo. L'échantillon est constitué de particules de 1 mm de diamètre (25%), de 1.5 mm de diamètre (50%) et de 2.0 mm de diamètre (25%). Dans ce cas, les particules n'étant pas en contact ou très légèrement, il faut procéder au compactage du matériau. A partir de l'état initial, le compactage du milieu granulaire peut s'effectuer de deux manières, soit par gravité, soit par compression isotrope.

4.3.1.1 Compactage par gravité

On présente, à la figure 4.2, le résultat d'un compactage par gravité ($g = 9.81ms^{-2}$) de l'échantillon dont l'état initial est présenté en (4.3.1). L'échantillon contient 553 objets de granulométrie comprise entre 1 et 4 mm de diamètre. Le paramètre numérique est : $\tau = 5.10^{-4}s$. Les paramètres de contact sont : $\mu = 0.1$ le coefficient de frottement, et $e_n = 0.1$, $e_t = 1.0$ les coefficients de restitution.

4.3.1.2 Compactage par compression

On présente à la figure 4.3 le résultat de la simulation d'un compactage par compression isotrope de l'échantillon dont l'état initial est présenté en (4.3.1). Chaque paroi est soumise à une force de 100 N. Le pas de temps utilisé est égal à $10^{-4}s$. Les paramètres de contact sont : $\mu = 0.1$ partout, $e_n = 0.1$ et $e_t = 1.0$.

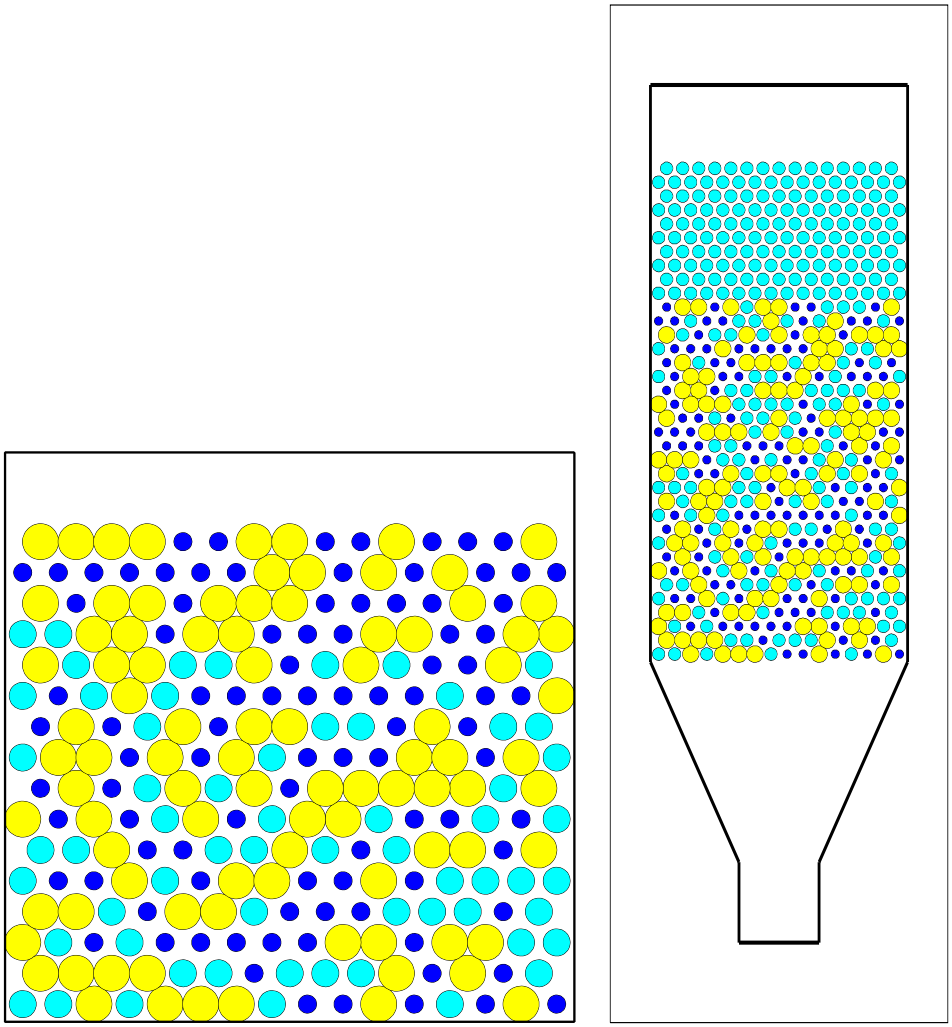


FIG. 4.1 – Mise en place d'un matériau analogique par génération automatique dans une enceinte (à gauche) constituée de deux parois verticales et deux parois horizontales où la granulométrie est constituée de 50% d'objets de 1 mm de diamètre, 25% d'objets de 1.5 mm de diamètre et de 25% d'objets de 2.0 mm de diamètre et dans un silo (à droite) où la granulométrie est constituée de 25% d'objets de 1 mm de diamètre, 50% d'objets de 1.5 mm de diamètre et de 25% d'objets de 2.0 mm de diamètre.

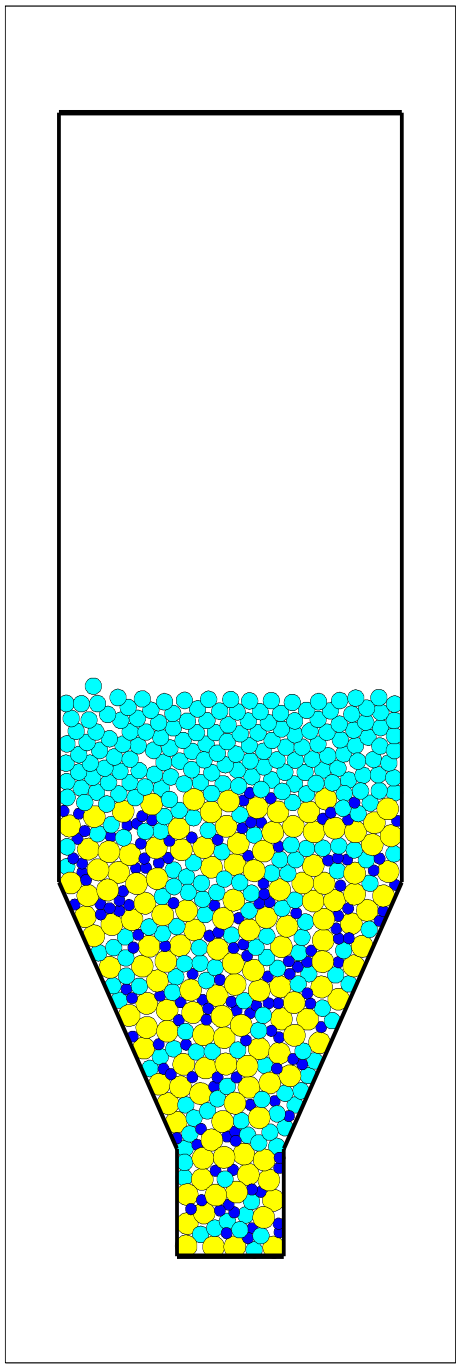


FIG. 4.2 – Compactage par gravité de 553 objets analogiques dans un silo où la granulométrie est constituée de 25% d'objets de 1 mm de diamètre, 50% d'objets de 1.5 mm de diamètre et de 25% d'objets de 2.0 mm de diamètre. Le paramètre numérique est : $\tau = 5.10^{-4}s$. Les paramètres de contact sont : $\mu = 0.1$, $e_n = 0.1$ et $e_t = 1.0$.

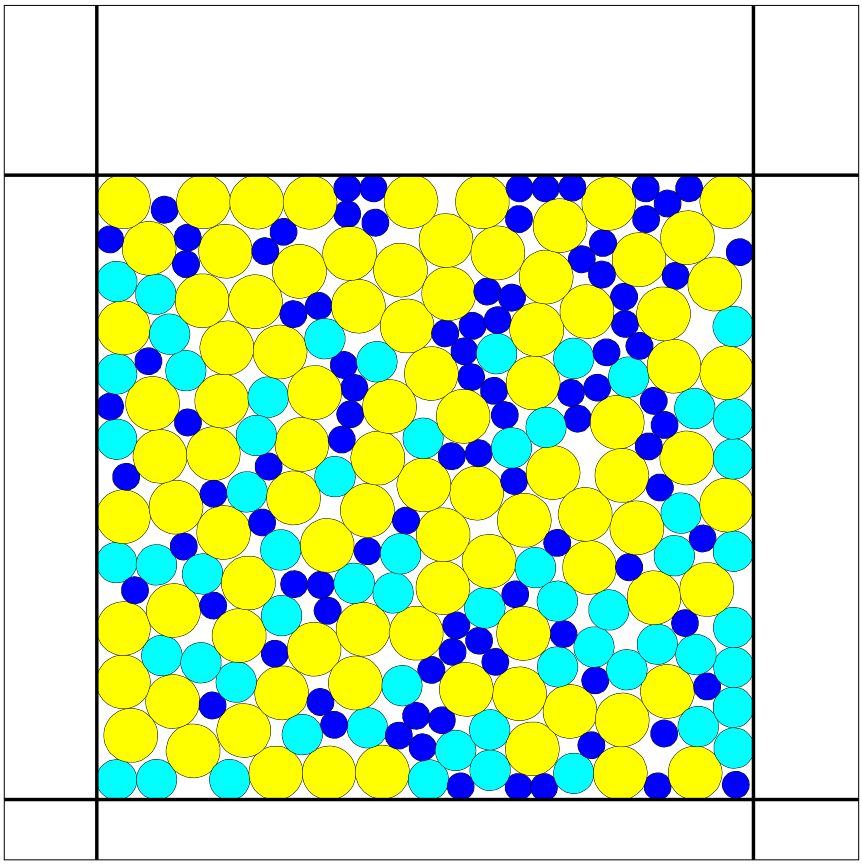


FIG. 4.3 – Compactage par compression isotrope d'un matériau analogique constitué de 248 objets où la granulométrie est constituée de 50% d'objets de 1 mm de diamètre, 25% d'objets de 1.5 mm de diamètre et de 25% d'objets de 2.0 mm de diamètre. Le pas de temps utilisé est égal à $10^{-4}s$. Les paramètres de contact sont : $\mu = 0.1$ partout, $e_n = 0.1$ et $e_t = 1.0$.

4.3.2 Déversement de particules soumises à la gravité

Pour générer les particules, le choix peut être fait de déverser les particules dans une configuration choisie. Cela permet de compacter “naturellements’ le matériau.

La figure 4.4 montre un exemple de particules déversées dans une boîte de dimensions assez grandes pour permettre une bonne répartition des particules. La simulation a été obtenue avec un pas de temps de $5.10^{-4}s$, des coefficients de restitution normaux et tangentiels, égaux respectivement à 0.1 et 1.0 et un coefficient de frottement égal à 0.5. Les particules sont générées tous les 10 pas de temps. La simulation présentée a demandé 3000 pas de temps.

On observe la formation d’un tas qui, ici, est principalement dû à la présence de parois latérales qui empêchent le matériau de s’étaler et non à la présence de frottement, puisque dans notre configuration les particules sont circulaires[3]. D’autre part, on constate que les particules de plus gros diamètre (4 mm) ont tendance à s’étaler sur la droite du tas. Cela s’explique par le fait que ces particules sont toutes lâchées du même côté (à 1.5 mm à droite du milieu).

La figure 4.5 présente la même simulation où l’on a matérialisé le champ de vitesse. On constate d’une part, que les particules en surface ont tendance à glisser ou rouler sur les côtés, influençant la formation du tas. Cependant le champ de vitesse à l’intérieur du tas n’est pas nul pour certaines particules. Cela s’explique par le fait qu’une particule qui touche le tas va provoquer au sein de ce même tas des ”arcs” de lignes de contact, figure 4.6[4] provoquant le déplacement de la particule ou la création d’autres contacts au sein de l’échantillon. Cela montre, sur ce cas, l’importance de prendre en compte, à chaque instant, l’ensemble des contacts.

[3] La possibilité d’obtenir un tas est de coller des particules sur la paroi horizontale [77].

[4] Sur cette planche, les 6 images n’ont pas été prises aux mêmes instants que sur les planches 4.4 et 4.5.

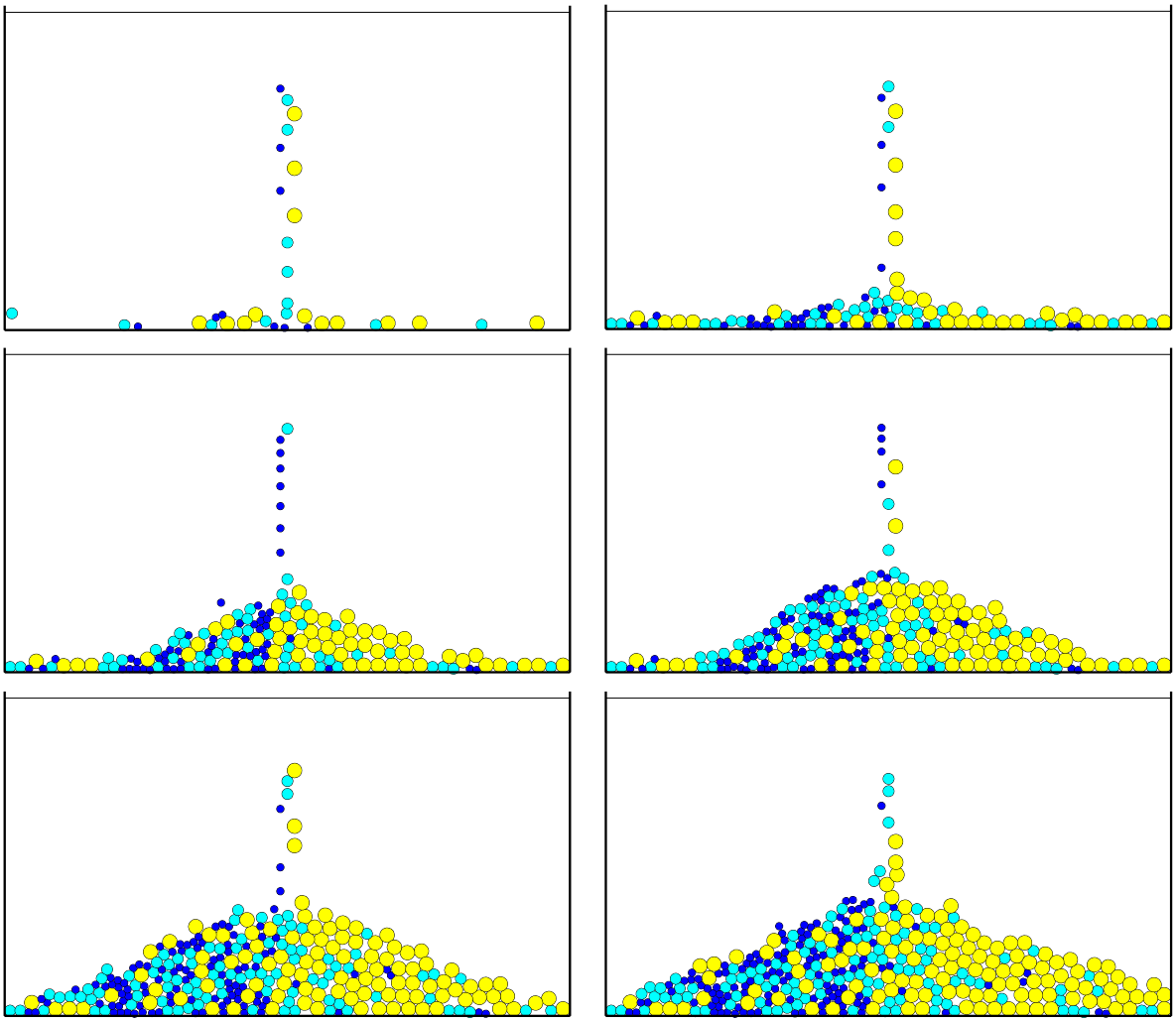


FIG. 4.4 – Déversement de particules soumises à la gravité ($\tau = 5.10^{-4}s$, $e_n = 0.1$, $e_t = 1.0$ et $\mu = 0.5$). Les particules sont générées tous les 10 pas de temps. La simulation présentée a demandé 3000 pas de temps : visualisation de la granulométrie.

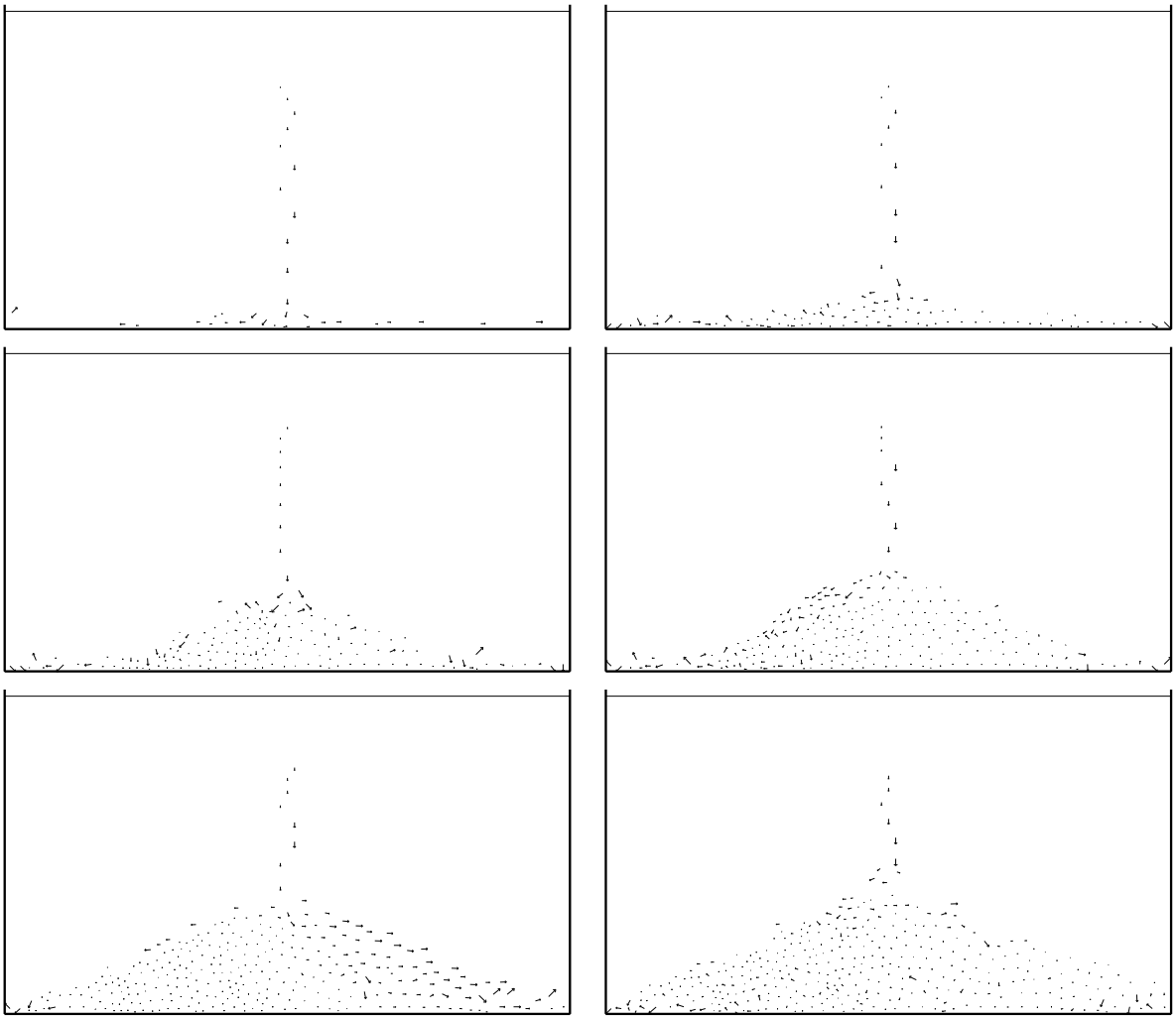


FIG. 4.5 – Déversement de particules soumises à la gravité ($\tau = 5.10^{-4}s$, $e_n = 0.1$, $e_t = 1.0$ et $\mu = 0.5$). Les particules sont générées tous les 10 pas de temps. La simulation présentée a demandé 3000 pas de temps : visualisation des champs de vitesse.

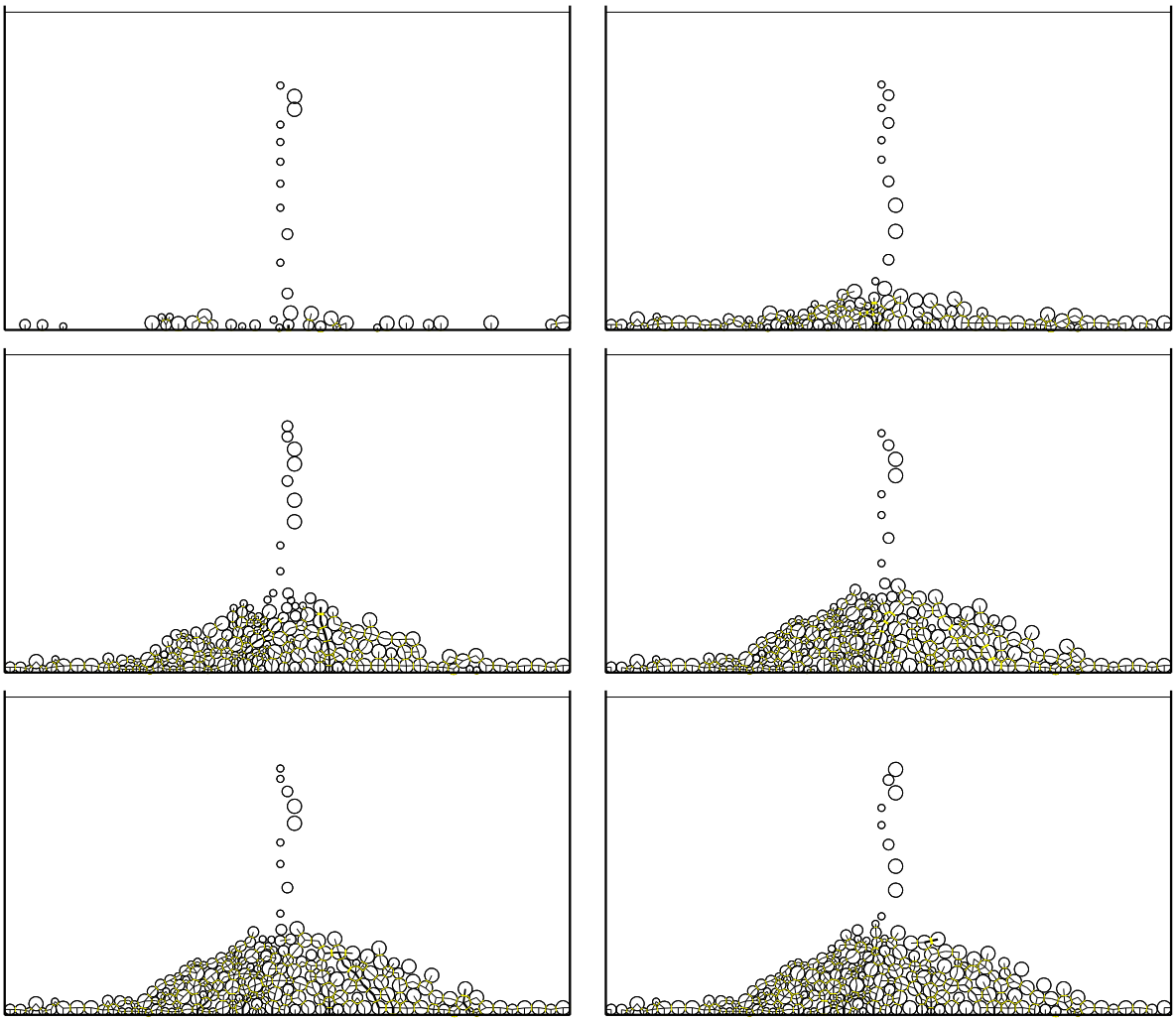


FIG. 4.6 – Déversement de particules soumises à la gravité ($\tau = 5.10^{-4}s$, $e_n = 0.1$, $e_t = 1.0$ et $\mu = 0.5$). Les particules sont générées tous les 10 pas de temps. La simulation présentée a demandé 3000 pas de temps : visualisation des efforts de contact normaux (en noir) et de frottement (en gris). L'épaisseur des traits est fonction de l'intensité des efforts de contact.

4.3.3 Anisotropie de structure

La préparation de l'échantillon est très importante et demande beaucoup de précautions. Le risque est d'introduire une anisotropie [6][7][73] et de perturber la simulation. Afin de mettre en évidence ce phénomène, nous proposons, sur les exemples des figures 4.2 et 4.3, une visualisation des forces normales et tangentielles de contact et les graphes associés à la distribution des orientations de contact et à la distribution des forces normales et tangentielles de contact, figure 4.7 et figure 4.8.

La distribution des orientations de contact est calculée comme dans le code Eléments Discrets L.M.G.C. développé par M. Jean et J.-J. Moreau [104]. On subdivise l'intervalle $[0, \pi]$ en 20 petits intervalles, soit

$$I_i = [i\frac{\pi}{20}, (i+1)\frac{\pi}{20}] \quad i = 0, 19.$$

Pour chaque contact, on détermine l'angle d'orientation de contact θ que fait le vecteur normal $\mathbf{n}$ à ce point de contact avec l'horizontale et on calcule $N(i)$ le nombre de contacts dont l'angle d'orientation se trouve dans l'intervalle I_i. Soit alors la distribution des orientations de contact

$$n(i) = \frac{N(i)}{k},$$

où k est le nombre total de contacts. D'autre part, pour chaque intervalle I_i, on calcule la moyenne des forces de contact normales $s_n^{moy}(i)$ et des forces de contact tangentielles $s_t^{moy}(i)$, soit

$$s_n^{moy}(i) = \sum_{c \in I_i} \frac{s_n^c(i)}{N(i)} \quad \text{et} \quad s_t^{moy}(i) = \sum_{c \in I_i} \frac{s_t^c(i)}{N(i)}.$$

La figure 4.7 présente une caractéristique de l'état granulaire ensilé, à savoir que les parois latérales subissent, de la part du matériau, des forces de contact qui ne permettent pas l'écoulement régulier. Ces observations sont appuyées par les figures 4.7A, 4.7B et 4.7C. De même, la figure 4.8 montre les efforts hétérogènes qui s'exercent à l'intérieur de la boîte sous compression isotrope.

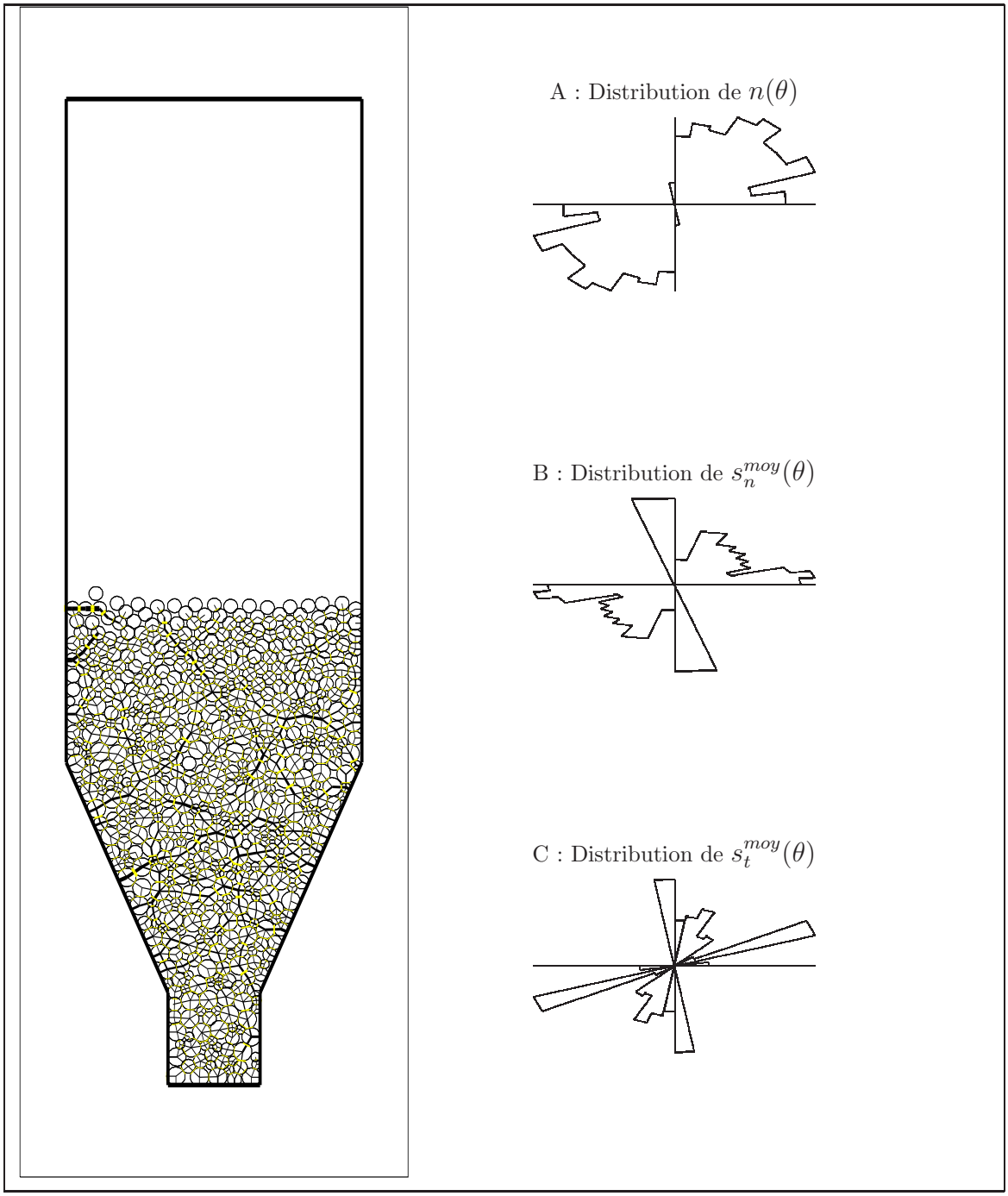


FIG. 4.7 – Compactage par gravité d'un matériau analogique ensilé : mise en évidence de l'hétérogénéité des forces de contact, des orientations de contact (A), des distributions des forces normales (B) et des forces tangentielles (C)

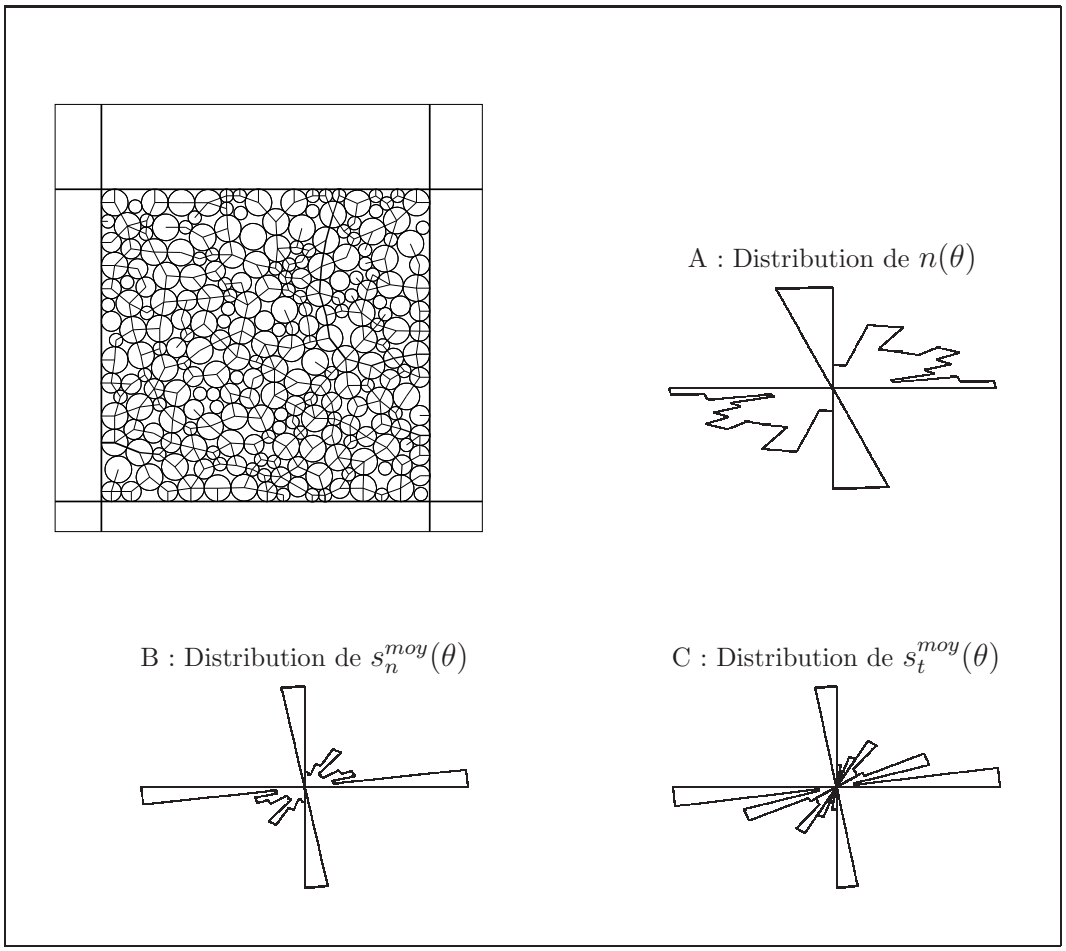


FIG. 4.8 – Compactage par compression isotrope (100 N) d'un matériau analogique dans une enceinte de côté égal à 6.4 cm : mise en évidence de l'hétérogénéité des forces de contact, des orientations de contact (A), des distributions des forces normales (B) et des forces tangentielles (C).

4.4 Simulation d'un milieu granulaire ensilé

4.4.1 Mises en évidence de l'effet de voûte dans les silos

Nous présentons le résultat numérique d'une simulation d'un système de 250 rouleaux analogiques ensilés de granulométrie étalée entre 1 mm et 2 mm de rayon, figure 4.9. Les paramètres numériques utilisés sont égaux à : $\mu_{cc} = 0.7$ (le coefficient de frottement entre deux particules), $\mu_{cp} = 0.2$ (le coefficient de frottement entre une particule et la paroi), $e_n = 0.1$ et $e_t = 1.0$. La simulation (en continu) montre que les rouleaux s'écoulent de façon saccadée. A un instant t, nous avons isolé une ligne de force qui caractérise l'effet de voûte. Une voûte est une structure granulaire dans laquelle s'exercent des efforts de pesanteur, des efforts interparticulaires et des pressions de paroi. Elle se manifeste par la formation d'une véritable structure au-dessus de l'orifice de sortie, empêchant l'écoulement de la matière, figure 4.9. La résistance de ces voûtes dépend fortement de la conception du silo et de la cohésion du milieu.

4.4.2 Milieu granulaire ensilé avec présence d'une inclusion

Nous présentons le résultat d'une simulation d'un matériau analogique constitué de 800 rouleaux homogènes (4 mm de diamètre) se vidangeant d'un silo à fond plat, figures 4.10, 4.11 et 4.12. L'originalité de cet essai est d'avoir placé, à l'intérieur de la structure, une inclusion mobile de 8 mm de diamètre. On constate d'une part, que l'inclusion reste à la même abscisse tout au long de la simulation, ce qui est confirmé par des essais de laboratoire [1]. Cela montre que, dans les modèles à fond plat, l'écoulement à travers un orifice centré est symétrique. Confirmé aussi en observant que l'inclusion descent plus vite que les rouleaux positionnés à la même hauteur. De plus, la mise en vidange du silo, crée, sur une certaine hauteur (le quart de la hauteur du silo), une fluidification du matériau. Cette remarque est mise en évidence par la figure 4.12 où le champ de vitesse est actif dans cette zone et nulle au-delà de cette limite. D'autre part, la figure 4.11, montre que les efforts de contact ont tendance à converger vers l'inclusion. Cela s'explique par le fait que l'assemblage initial est triangulaire et qu'une rupture dans celui-ci va créer un déséquilibre de structure provoquant un squelette des efforts de contact identique à un assemblage dit "boulets de canon" figure 3.8.

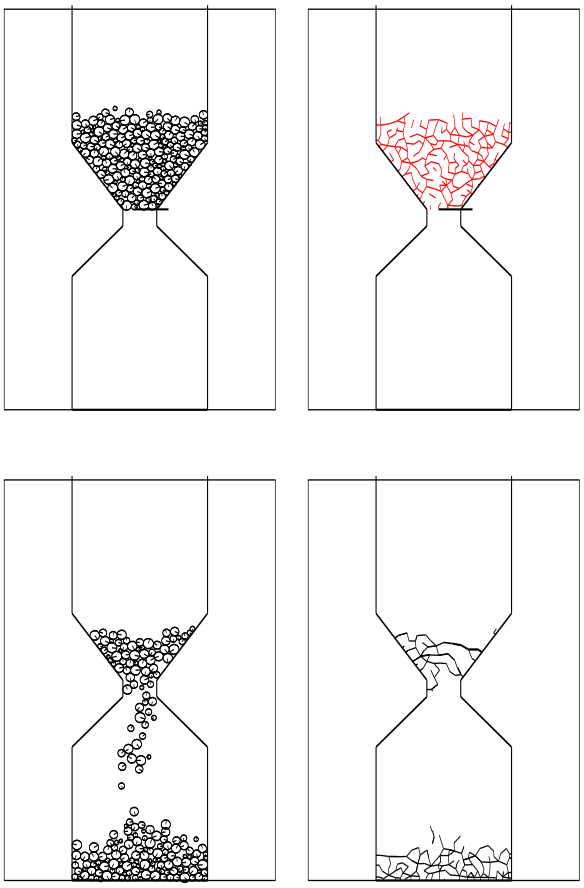


FIG. 4.9 – Simulation de rouleaux analogiques, ensilés : (à gauche) visualisation de la rotation des rouleaux indiquée par une barre initialement horizontal, (à droite) visualisation des efforts de contact normaux : mise en évidence d'un effet de voûte.

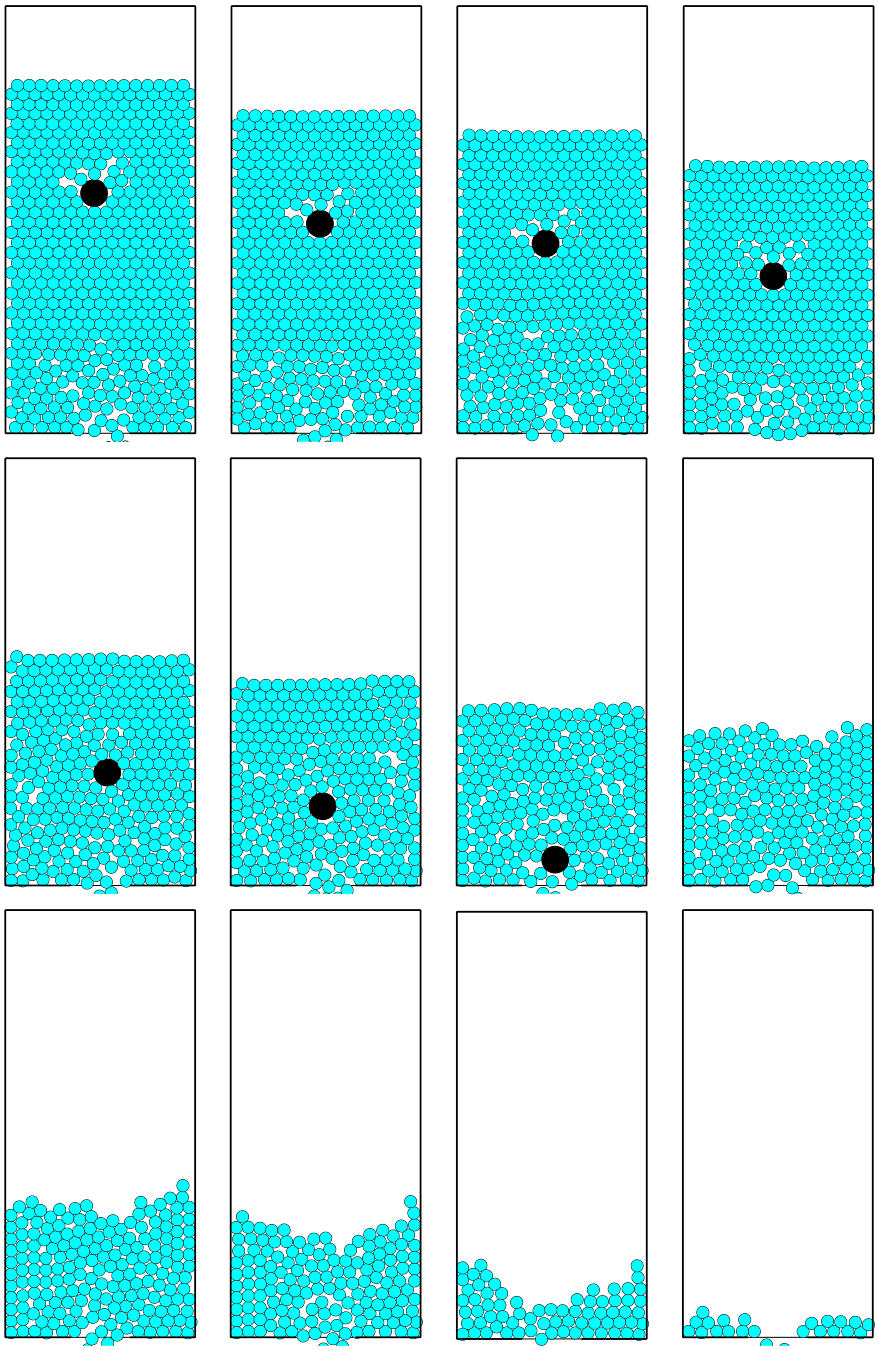


FIG. 4.10 – Simulation d'un matériau analogique ensilé (silo à fond plat) constitué de 800 rouleaux avec présence d'une inclusion mobile de 8 mm de diamètre.

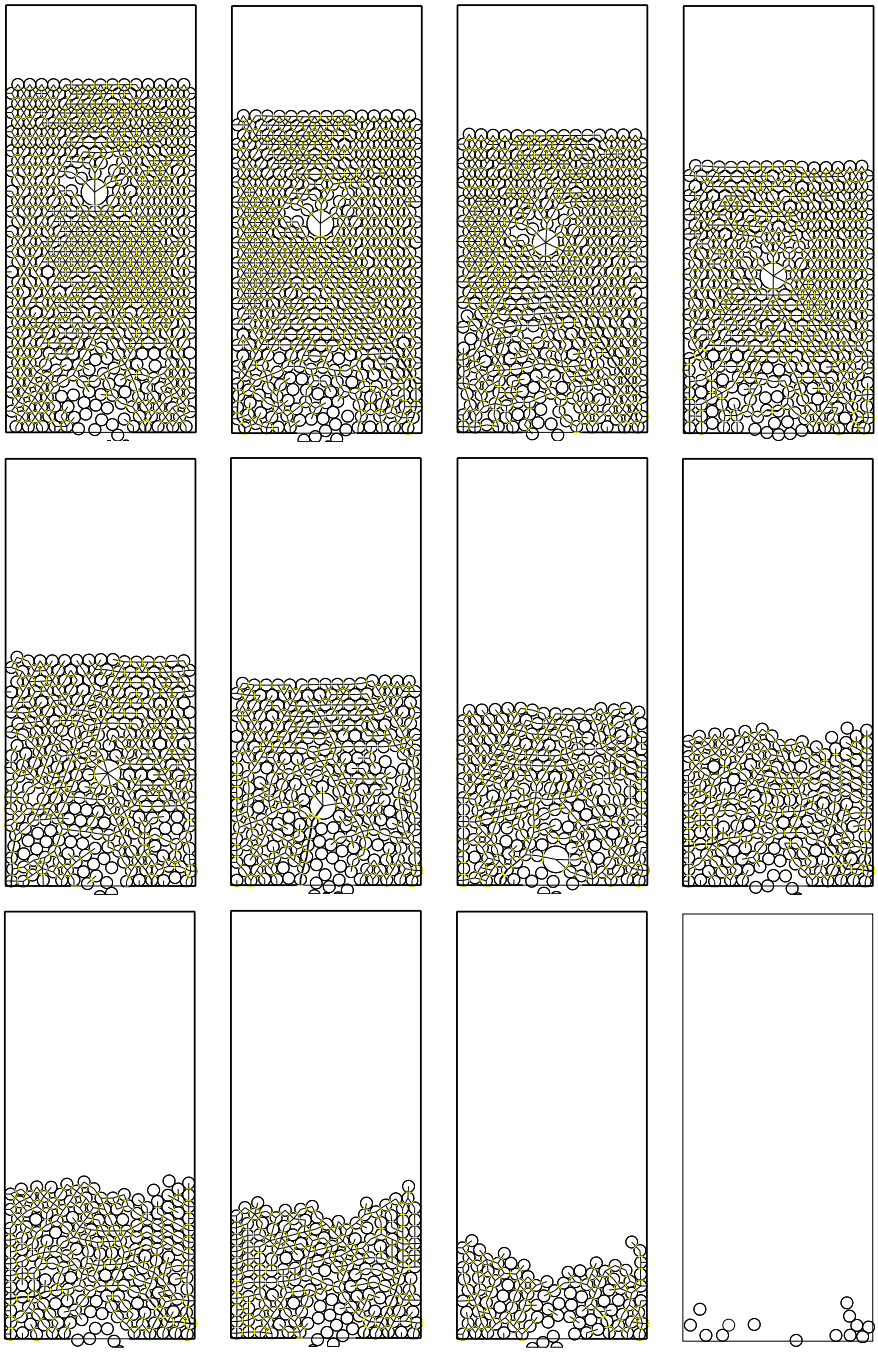


FIG. 4.11 – Simulation d'un matériau analogique ensilé (silo à fond plat) constitué de 800 rouleaux avec présence d'une inclusion mobile de 8 mm de diamètre : visualisation des efforts de contact.

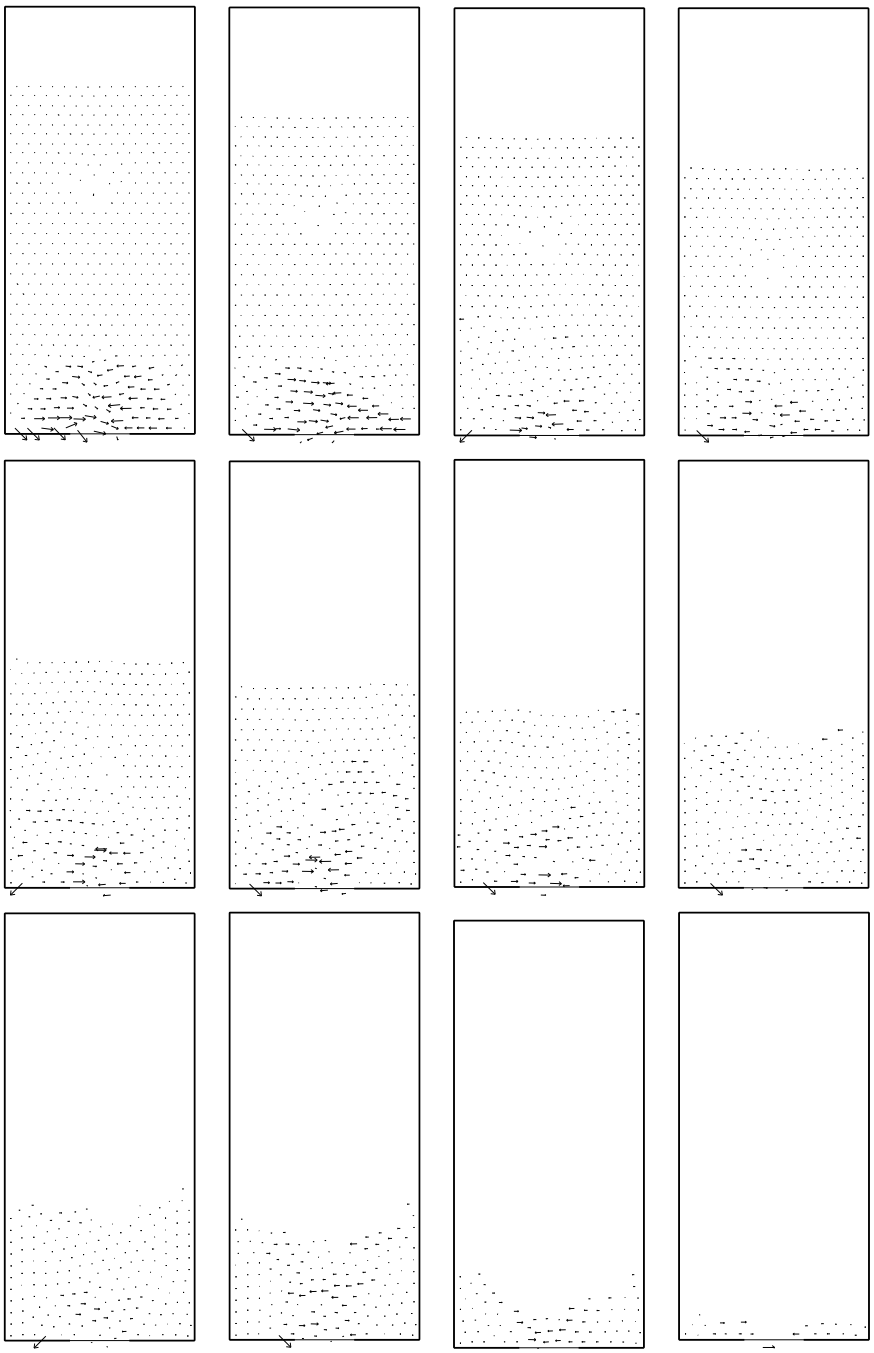


FIG. 4.12 – Simulation d'un matériau analogique ensilé (silo à fond plat) constitué de 800 rouleaux avec présence d'une inclusion mobile de 8 mm de diamètre : visualisation du champ de déplacement.

4.5 Simulation d'un matériau granulaire soumis à un cisaillement direct

Les résultats expérimentaux présentés ici ont été effectués dans le cadre d'un travail précédent de D.E.A. [45]. Toutefois, afin de simuler numériquement les expériences réalisées et de comparer les résultats obtenus, il nous semble intéressant de rappeler les principaux résultats expérimentaux obtenus. On s'est intéressé à mettre en application l'utilisation des matériaux modèles à travers des essais de laboratoires effectués sur une boîte de cisaillement direct modifiée [1], figure 4.13.

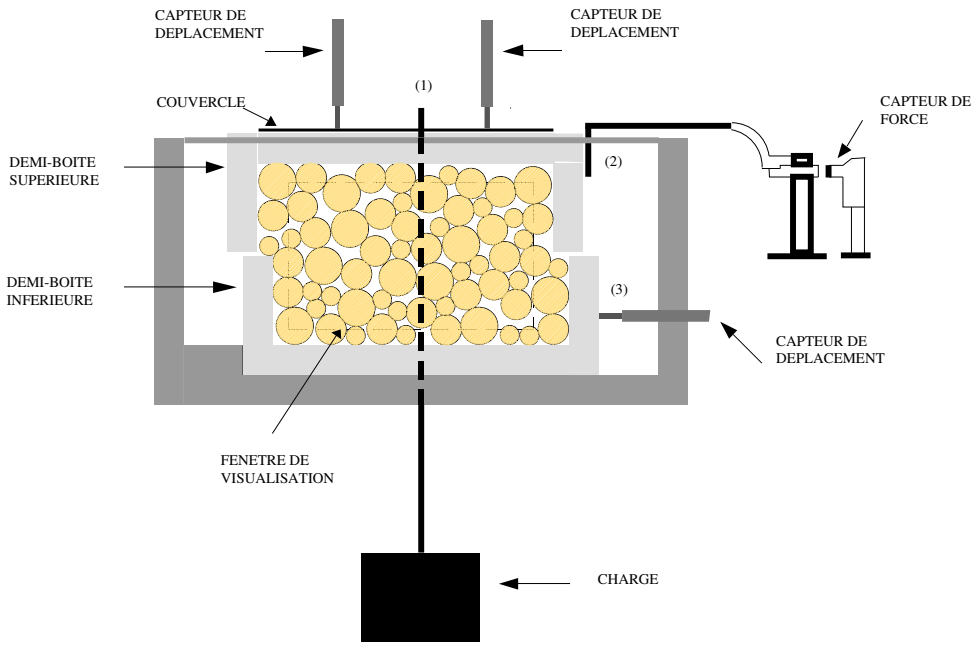


FIG. 4.13 – Dispositif expérimental constitué d'une boîte de Casagrande de dimensions $(60 \times 100 \times 120\text{mm}^3)$ avec ouvertures frontales : permet d'analyser globalement et localement (par traitement d'images) le cisaillement direct d'un échantillon de rouleaux polydisperses ou monodisperses.

4.5.1 Résultats expérimentaux

Nous avons pu mettre en évidence le comportement macroscopique non-linéaire caractéristique dans les milieux hétérogènes. La figure 4.14 présente l'évolution de la contrainte de cisaillement τ et de la variation de hauteur dh pour un déplacement relatif de la boîte inférieure.

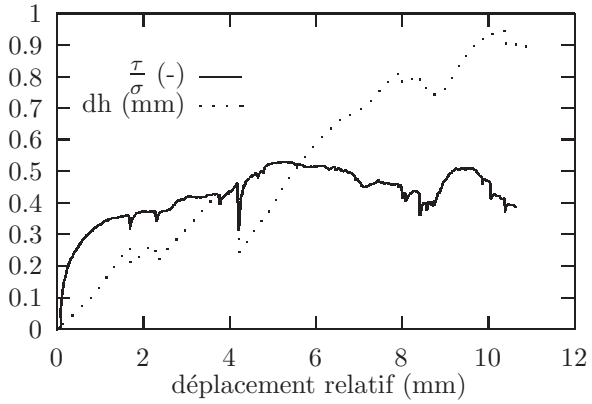


FIG. 4.14 – Résultats macroscopiques d'un essai de cisaillement direct sur un échantillon constitué de 1052 rouleaux en P.V.C..

Pour se convaincre de l'importance du frottement et des degrés de liberté, et dans une certaine mesure, du glissement et du roulement dans les matériaux granulaires, nous avons étudié expérimentalement le comportement d'échantillons monodisperses constitués de rouleaux de 4 mm de diamètre. Le confinement est égal à 50 kPa. L'assemblage est triangulaire. Cet essai est équivalent au déplacement de deux blocs compacts sans mouvement local des grains. C'est-à-dire que l'on a collé les rouleaux localisés sur la bande de cisaillement sur des plaques de plexiglass, figure 4.15.

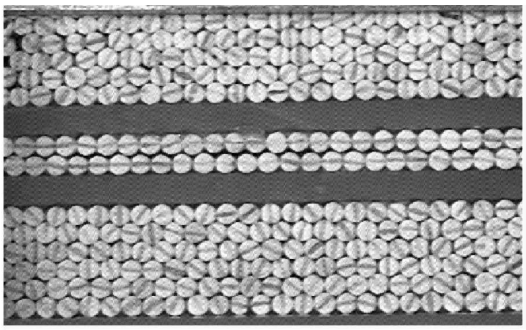


FIG. 4.15 – Mise en place de rouleaux monodisperses pour étudier le cisaillement direct sans degré de liberté.

Les résultats de cet essai sont présentés à la figure 4.16. On constate que l'évolution de la dilatance et de la contrainte de cisaillement suit un cycle de période à peu prés égale à 4 mm, équivalent au diamètre d'un rouleau. Ici le déplacement des rouleaux s'effectue simplement par glissement.

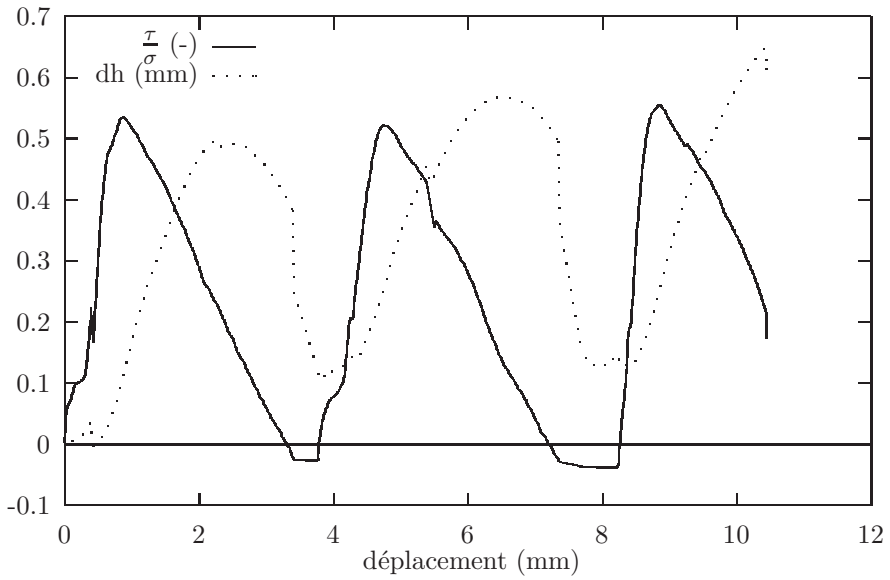


FIG. 4.16 – Essais de cisaillement direct sur un matériau analogique bi-dimensionnel monodisperse avec 0 degré de liberté, confinement de 50 kPa.

4.5.2 Résultats numériques

4.5.2.1 Cas d'un matériau monodisperses

Nous proposons ici le résultat numérique d'un essai de cisaillement direct sur un assemblage de rouleaux monodisperses (4 mm de diamètre). Afin de comparer le résultat obtenu à la figure 4.16, nous considérons le contact sans frottement. Le pas de temps est égal à $5.10^{-5}s$ et le coefficient de restitution normal est égal à $e_n = 0.1$. La force sur le couvercle est égale à 60 N et la vitesse de déplacement de la boîte inférieure est égale à $0.1ms^{-1}$. La figure 4.17 montre l'évolution de la simulation. On observe que l'échantillon passe d'un assemblage rectangulaire à un assemblage triangulaire puis d'un assemblage triangulaire à un assemblage rectangulaire. D'autre part, la figure 4.18 visualise les efforts de contact

normaux. On observe la brisure des efforts lors du passage entre l'assemblage rectangulaire et triangulaire, caractérisant l'assemblage triangulaire [8].

La figure 4.20 présente le résultat numérique de l'évolution de la contrainte de cisaillement et de la dilatance pour un déplacement relatif de la boîte inférieure. Par comparaison avec la figure 4.16 on constate une bonne concordance entre le résultat numérique et le résultat expérimental.

4.5.2.2 Cas d'un matériau polydisperse

Nous proposons ici le résultat numérique d'un essai de cisaillement direct sur un assemblage de 300 rouleaux polydisperses (50 % de rouleaux de 2.0 mm de diamètre, 25% de rouleaux de 1.0 mm de diamètre et 25% de rouleaux de 1.5 mm de diamètre). Nous considèrons le contact sans frottement. Le pas de temps est égal à $10^{-5}s$ et le coefficient de restitution normal est égal à $e_n = 0.1$. La force sur le couvercle est égale à 400 N et la vitesse de déplacement de la boîte inférieure est égale à $0.1m.s^{-1}$. La figure 4.20 montre l'état des efforts de contact normaux et tangentiels ainsi que le champ de vitesse à un instant [5] de la simulation. On constate que l'échantillon est principalement soumi dans un premier temps, à un compactage par le haut dû à la force imposée sur le couvercle. L'échantillon est soumi dès le départ à une anisotropie. D'autre part, la figure 4.21 montre l'évolution de la contrainte de cisaillement et de la dilatance par rapport au déplacement relatif de la boîte inférieure. Les résultats numériques, figure 4.21, sont très subjectifs, puisque l'on s'est limité à un déplacement relatif de la boîte inférieure autour de 4%. En comparant avec la figure 4.14, on constate que le résultat numérique (sur un très petit déplacement) correspond à la phase de plastification de l'échantillon. On dit qu'il se compacte, comfirmé par l'évolution de la dilatance, figure 4.20.

[5] juste après la mise en fonction du cisaillement direct.

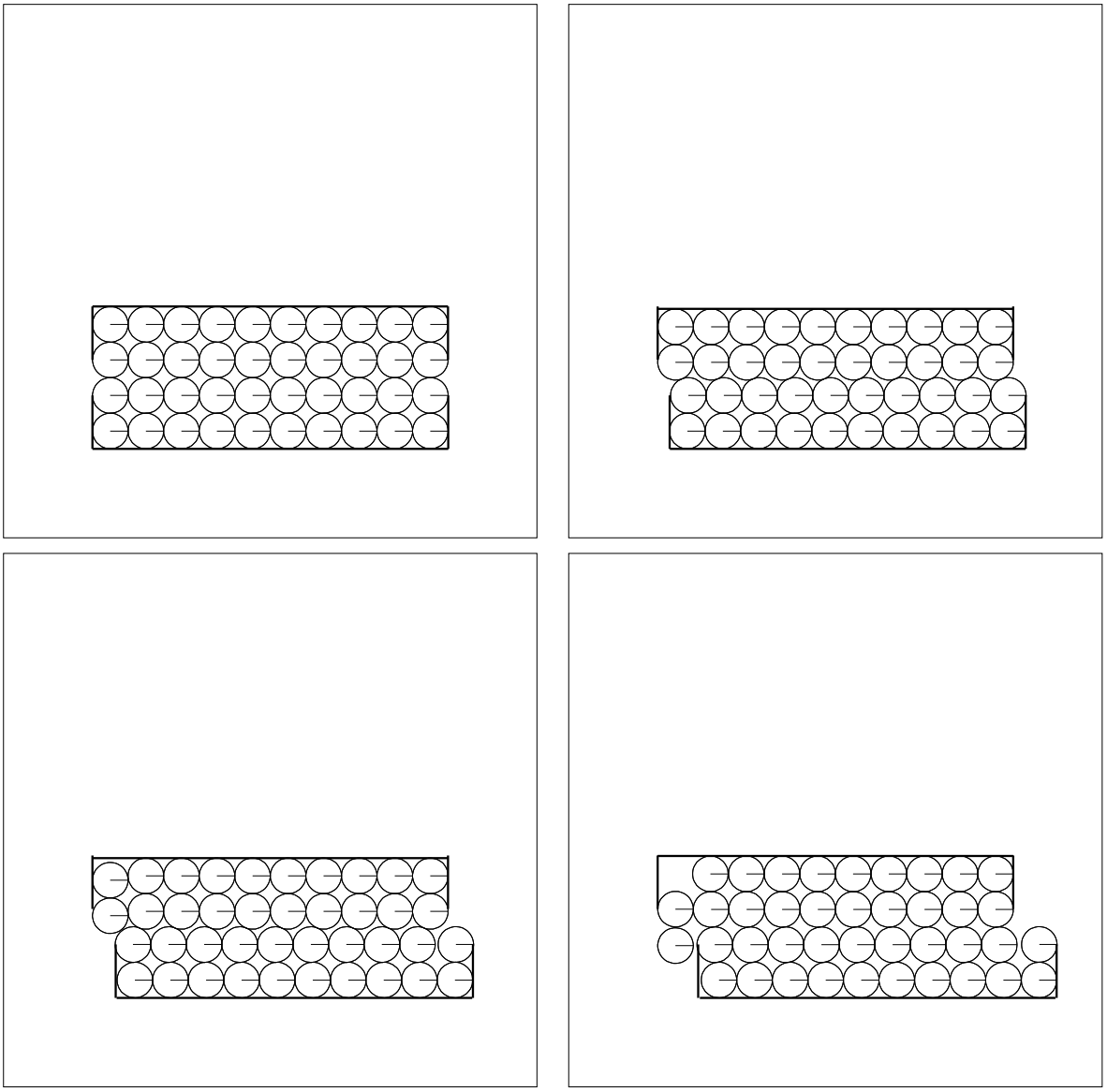


FIG. 4.17 – Simulation d'un essai de cisaillement direct sur un échantillon monodisperse : $\tau = 5.10^{-5}s$ et $e_n = 0.1$. La force sur le couvercle est égale à 60 N et la vitesse de déplacement de la boîte inférieure est égale à $0.1ms^{-1}$.

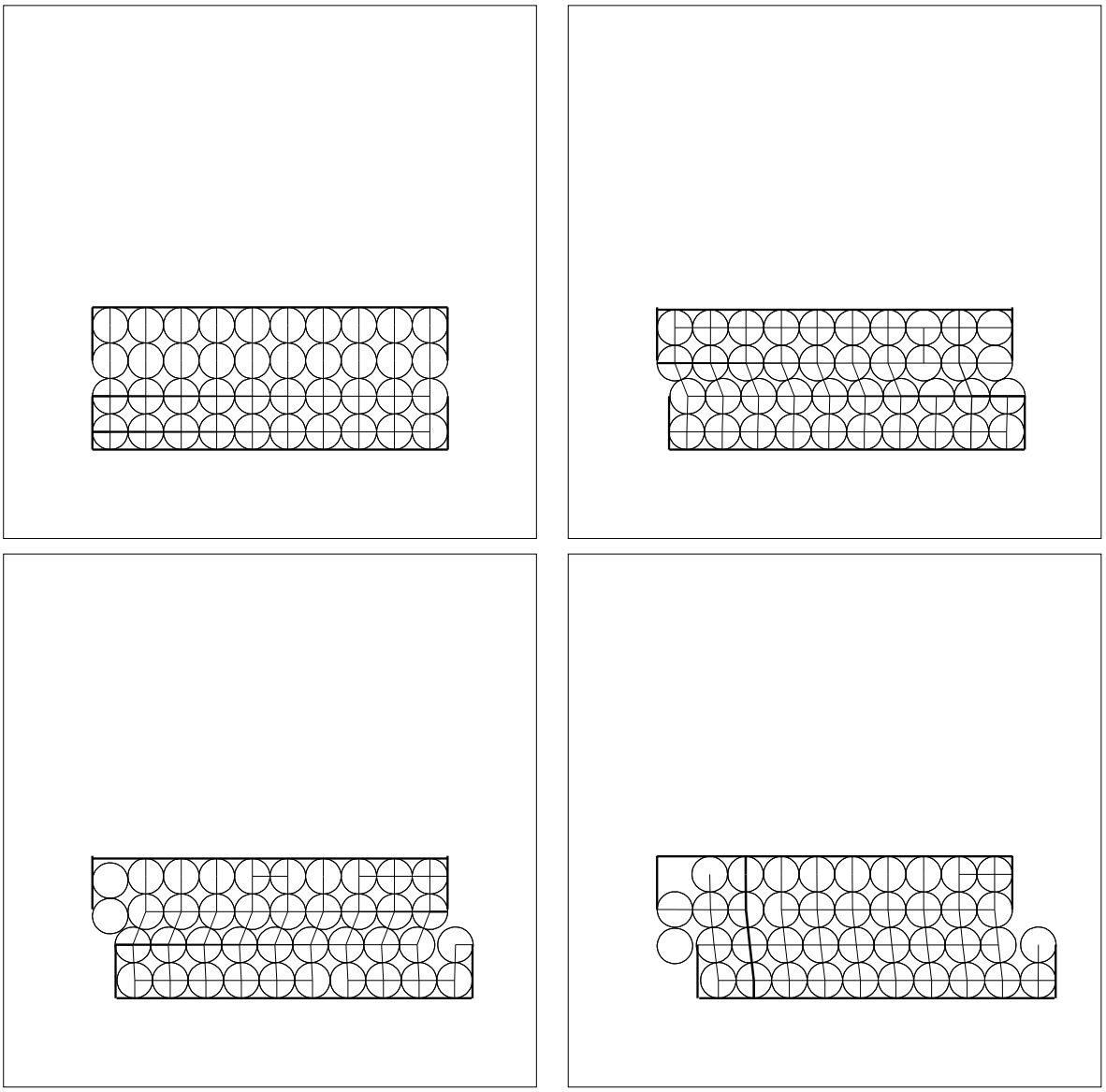
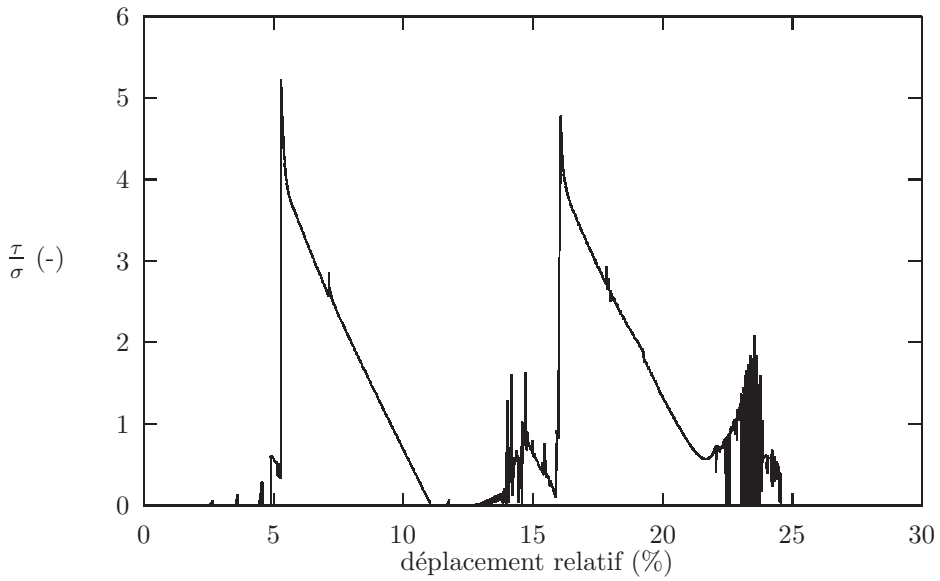


FIG. 4.18 – Simulation d'un essai de cisaillement direct sur un échantillon monodisperse : $\tau = 5.10^{-5}s$ et $e_n = 0.1$. La force sur le couvercle est égale à 60 N et la vitesse de déplacement de la boîte inférieure est égale à $0.1m.s^{-1}$: visualisation des forces de contact normales



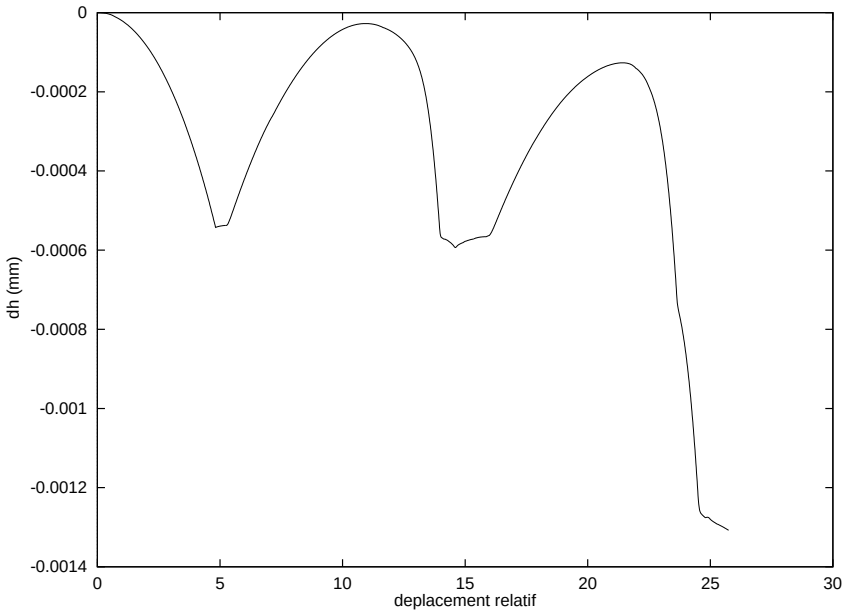


FIG. 4.19 – Résultats numériques d'un essai de cisaillement direct sur un échantillon de rouleaux monodisperses, $\tau = 5.10^{-5}s$ et $e_n = 0.1$. La force sur le couvercle est égale à 60 N et la vitesse de déplacement de la boîte inférieure est égale à $0.1ms^{-1}$: variation de la contrainte de cisaillement et de la variation de hauteur en fonction du déplacement relatif de la boîte inférieure.

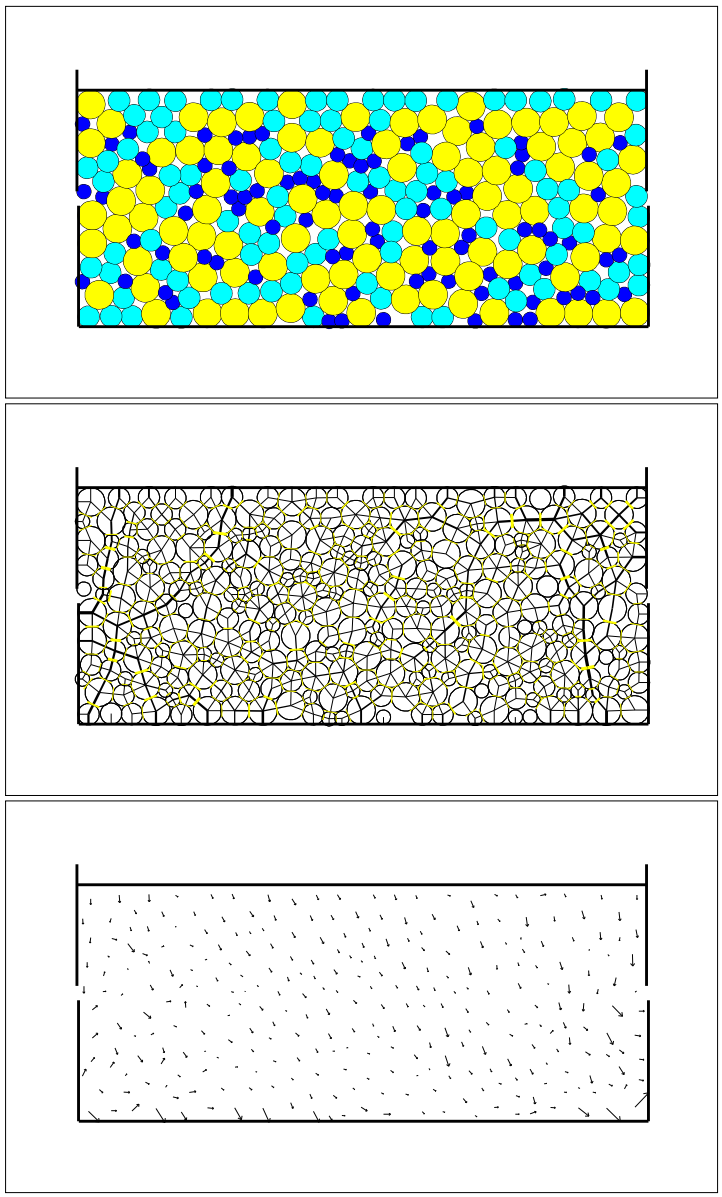
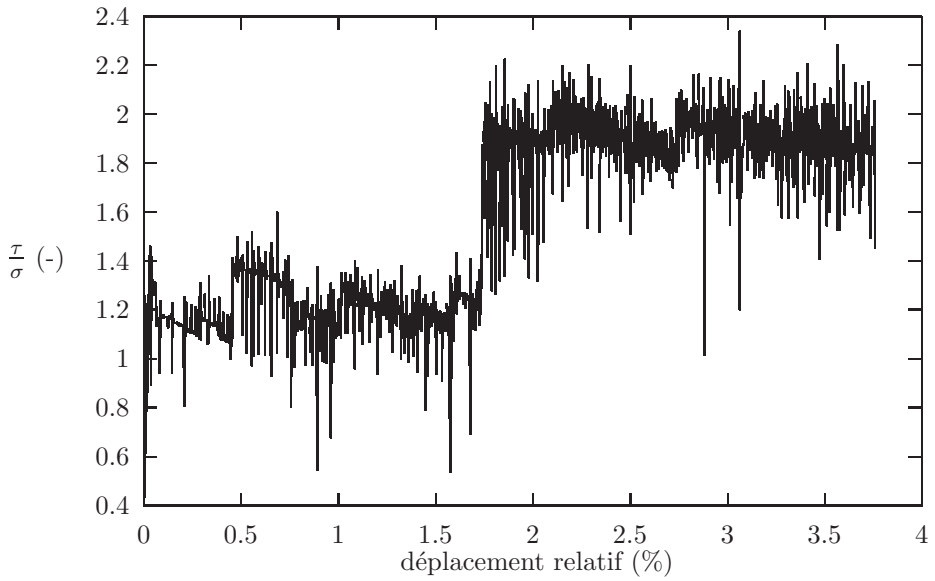


FIG. 4.20 – Simulation d'un essai de cisaillement direct sur un échantillon de 300 rouleaux polydisperses : $\tau = 10^{-5}s$ et $e_n = 0.1$. La force sur le couvercle est égale à 400 N et la vitesse de déplacement de la boîte inférieure est égale à $0.1m.s^{-1}$: visualisation des forces de contact normales et du champ de vitesse.



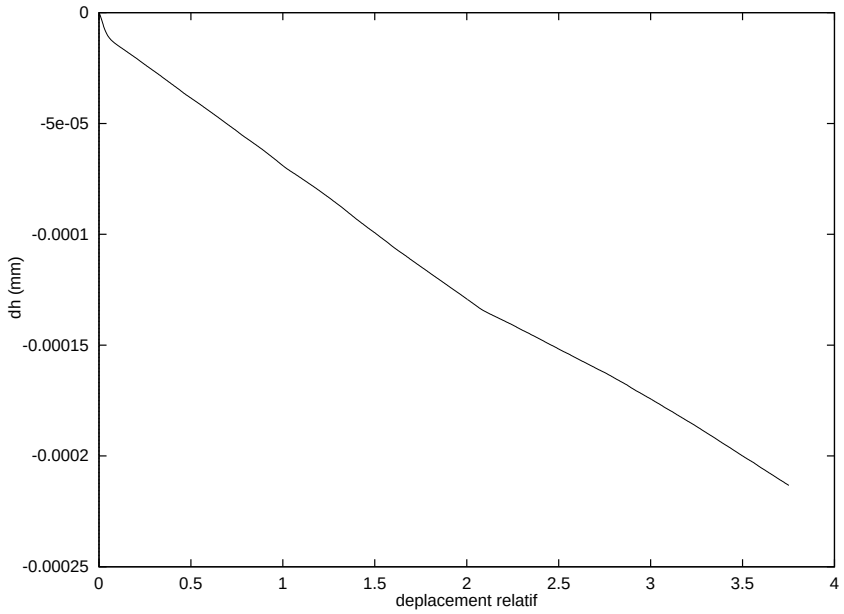


FIG. 4.21 – Résultats numériques d'un essai de cisaillement direct sur un échantillon de rouleaux polydisperses, $\tau = 10^{-5}s$ et $e_n = 0.1$. La force sur le couvercle est égale à 400 N et la vitesse de déplacement de la boîte inférieure est égale à $0.1ms^{-1}$: variation de la contrainte de cisaillement et de la variation de hauteur en fonction du déplacement relatif de la boîte inférieure.

4.6 Conclusion

Dans la continuité du chapitre (3) nous avons présenté des simulations utilisant le code MULTICOR. Une première simulation a permis de montrer des exemples de matériaux ensilés. L'intérêt de ces exemples, était d'une part de mettre en évidence l'effet de voûte qui du point de vu industriel pose énormément de difficultés. D'autre part, nous avons présenté une simulation d'un système de matériau analogique ensilé dans un silo à fond plat. Pour montrer une caractéristique des silos à fond plat, à savoir que l'écoulement est symétrique, nous avons procédé à la mise en place d'une inclusion mobile. Nous avons constaté que l'inclusion garde une abscisse constante tout au long de la simulation, et de plus elle crée une symétrie des efforts de contact normaux qui convergent tous vers l'inclusion.

Dans une seconde simulation, nous avons confronté les résultats numériques avec ceux issus d'essais de laboratoire que nous avons effectués sur la boîte de Casagrande. Malgré la difficulté engendrée par ce type de simulation, il semble que le code s'affranchisse assez bien de ce problème quasi-statique.

Chapitre 5

Contrainte moyenne dans les milieux granulaires

5.1 Introduction

En mécanique des milieux continus il existe principalement deux façons d'introduire le tenseur des contraintes, soit en modélisant les efforts exercés par une partie du milieu sur son complémentaire en une densité surfacique de forces localisées sur la surface séparant les deux parties, soit en utilisant le principe des puissances virtuelles.

Pour introduire le tenseur des contraintes dans un milieu granulaire considéré comme un milieu continu, les deux alternatives sont également possibles. En négligeant le poids propre de chaque grain et les effets dynamiques devant les forces de contact connues $\mathbf{r}_\alpha$ qui lui sont appliquées, Weber [103] a calculé le tenseur des contraintes en un point par une moyenne des forces de contact sur un volume V entourant ce point :

$$\sigma = \frac{1}{2V} \sum_\alpha \mathbf{d}^{ij} \mathbf{r}_\alpha^t, \tag{5.1}$$

où la sommation porte sur les contacts α, $\mathbf{d}^{ij}$ étant la distance entre les centres de gravité des deux corps Ω_i et Ω_j en contact. Une autre approche [14][16][17][23] consiste à postuler l'identité de la puissance virtuelle d'un milieu continu avec celle développée par tous les efforts de contact pour des vitesses virtuelles des grains déduites du champ des vitesses virtuelles du milieu continu. On aboutit à la même formulation (5.1). Dans les

deux cas, le poids et les efforts dynamiques ont été négligés.

D. Caillerie [14], par le principe des puissances virtuelles, analyse ce tenseur des contraintes et définit des cellules sur lesquelles sont effectuées les sommations de (5.1). D'après l'auteur, ce tenseur des contraintes n'est pas symétrique et cette antisymétrie provient des grains qui sont situés à l'extérieur de chaque cellule. En conséquence, il a essayé d'analyser l'ordre de grandeur de la partie antisymétrique de ce tenseur des contraintes. Cela permet de définir une taille de la cellule et de négliger la partie antisymétrique par rapport aux autres grandeurs, aboutissant à la notion très classique dans les théories d'homogénéisations de Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.).

Pour essayer de prendre en compte cette partie antisymétrique du tenseur des contraintes, certains auteurs [5][18][19][20][33][72][90] utilisent la théorie micropolaire (ou dit de Cosserat [24]) qui tient compte dans la description des efforts, des couples surfaciques, modélisant les rotations locales entre les grains dues au contact frottant.
J.-J. Moreau [77], quant à lui, propose de ne pas négliger les efforts volumiques et aboutit, dans le cas particulier de grains circulaires, à un tenseur des contraintes symétriques. Ainsi, bien que pour un milieu continu le tenseur des contraintes soit depuis longtemps, bien défini pour un milieu discret, le passage au continuum, en définissant le tenseur des contraintes à partir des forces discrètes, n'est pas très clair. On se propose, dans une première partie, de trouver une expression générale du tenseur des contraintes à partir d'une répartition des forces discrètes permettant de retrouver (5.1), dans le cas particulier où les efforts de volumes (pesanteur et accélération) sont négligés. Dans un second temps, un calcul analytique dans le cas très simple d'un rouleau sur un plan incliné, montre comment les effets dynamiques sont essentiels pour symétriser le tenseur des contraintes. Enfin, nous présenterons une simulation numérique utilisant cette formulation pour calculer le tenseur des contraintes dans un cas simple.

5.2 Contrainte de Cauchy

On suppose que l'on a un milieu continu de Cauchy occupant un domaine V de $\mathbb{R}^3$. La force élémentaire $d\vec{F}(x)$ agissant sur un élément de surface dS, portée par deux vecteurs

non colinéaires $d\vec{x}_1$ et $d\vec{x}_2$ de perturbation au point x, est donnée par :

$$d\vec{F}(x) = -\sigma(x)(d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2), \tag{5.2}$$

où $\sigma(x)$[1] désigne ici la contrainte s'exerçant sur la cellule élémentaire du milieu continu constituée par le cube de côtés dx_1, dx_2 et dx_3, figure 5.1.

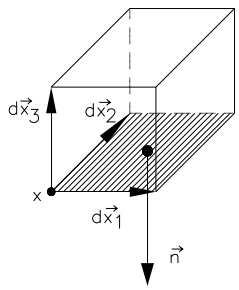


FIG. 5.1 – Représentation de la cellule élémentaire constituant le milieu continu

Soit $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire à la surface $\vec{n} = -\dfrac{d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2}{dS}$ et $dS = ||d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2||$. On définit alors le vecteur de contrainte $\vec{p} = \dfrac{d\vec{F}}{dS}$ par :

$$\vec{p} = \sigma(x)\vec{n} \quad \text{ou encore} \quad d\vec{F} = \sigma(x)d\vec{S} \tag{5.3}$$

Le problème qui nous intéresse maintenant est le suivant : Comment obtenir une expression du tenseur des contraintes à partir d'une répartition de forces discrètes s'exerçant sur une cellule élémentaire, compatible avec les notions classiques du tenseur des contraintes de Cauchy dans un milieu continu ?

L'idée est d'exprimer la contrainte de Cauchy en fonction des efforts qui s'exercent sur les faces du tétraèdre dont le volume élémentaire est égal à $dv = \dfrac{1}{6}d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)$ considéré comme une cellule élémentaire du milieu continu, figure 5.2.
Pour cela on utilise la formule suivante :

[1] le signe moins provient de la convention mécanicienne de considérer la contrainte normale positive en traction et négative en compression

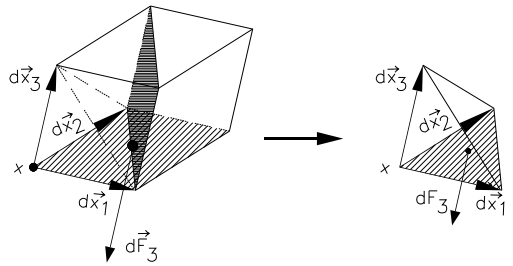


FIG. 5.2 – Passage du parallélépipède au tétraèdre de Cauchy

Théorème 2 *Soit E un espace vectoriel Euclidien de 3 dimensions muni d'une forme volume. Alors pour tout* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *et* $\vec{u}_3 \in E$, *on a :*

$$\vec{u}_1(\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3)^t + \vec{u}_2(\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1)^t + \vec{u}_3(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)^t = \vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) I, \tag{5.4}$$

où ^{t} désigne la transposée au sens du produit scalaire.

Par analogie avec notre problème et le théorème précédent, on peut écrire la matrice identité sous la forme :

$$I = \frac{d\vec{x}_1(d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)^t + d\vec{x}_2(d\vec{x}_3 \wedge d\vec{x}_1)^t + d\vec{x}_3(d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2)^t}{d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)}. \tag{5.5}$$

Soit alors en multipliant (5.5) par σ, nous obtenons

$$\sigma = I \cdot \sigma = \frac{d\vec{x}_1(d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)^t\sigma + d\vec{x}_2(d\vec{x}_3 \wedge d\vec{x}_1)^t\sigma + d\vec{x}_3(d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2)^t\sigma}{6dv}. \tag{5.6}$$

D'autre part, à partir de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy et de l'équation (5.2), les forces élémentaires s'exerçant sur les faces du tétraèdre s'écrivent :

$$d\vec{F}_i^t = d\vec{S}_i^t \sigma \tag{5.7}$$

où les $d\vec{S}_i$ définis par

$$d\vec{S}_1 = \frac{1}{2} d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3, \quad d\vec{S}_2 = \frac{1}{2} d\vec{x}_3 \wedge d\vec{x}_1, \quad d\vec{S}_3 = \frac{1}{2} d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2,$$
$$\text{et} \quad d\vec{S}_4 = \frac{1}{2}(d\vec{x}_3 - d\vec{x}_1) \wedge (d\vec{x}_2 - d\vec{x}_1). \tag{5.8}$$

désignent les surfaces élémentaires des faces opposées au sommet dx_i du tétraèdre, figure 5.3.

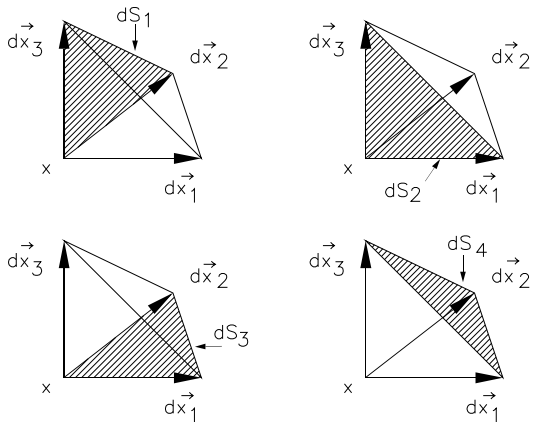


FIG. 5.3 – Représentation des surfaces élémentaires du tétraèdre de Cauchy

On a donc,

$$d\vec{F}_1^t = -\frac{1}{2}(d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)^t\sigma, \quad d\vec{F}_2^t = -\frac{1}{2}(d\vec{x}_3 \wedge d\vec{x}_1)^t\sigma \quad \text{et} \quad d\vec{F}_3^t = -\frac{1}{2}(d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2)^t\sigma. \tag{5.9}$$

Soit alors en remplaçant dans (5.6),

$$\sigma = -\frac{\left[d\vec{x}_1 d\vec{F}_1^t + d\vec{x}_2 d\vec{F}_2^t + d\vec{x}_3 d\vec{F}_3^t\right]}{3dv}, \tag{5.10}$$

soit sous forme d'une sommation

$$\sigma = -\frac{1}{3dv}\sum_{i=1}^{3} d\vec{x}_i d\vec{F}_i^t. \tag{5.11}$$

On remarque, d'autre part, dans (5.11) que la sommation est indicée jusqu'à trois alors que le tétraèdre contient 4 faces. Cela vient du fait que nous avons pris comme origine l'un des sommet du tétraèdre ($d\vec{x}_4 = \vec{0}$). Pour faire apparaître cette 4e face dans (5.11), nous allons effectuer une translation uniforme $\delta\vec{x}$ de l'origine, soit

$$d\vec{x'}_i = d\vec{x}_i - \delta\vec{x}. \tag{5.12}$$

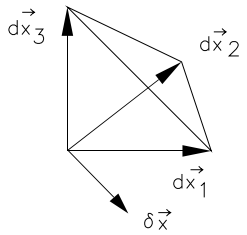


FIG. 5.4 – Translation uniforme de l'origine

Donc de (5.11) nous avons

$$-3dv \cdot \sigma = \sum_{i=1}^{3} d\vec{x}_i d\vec{F}_i^t = \sum_{i=1}^{3} d\vec{x'}_i d\vec{F'}_i^t + \delta\vec{x} \sum_{i=1}^{3} d\vec{F}_i^t. \tag{5.13}$$

comme $\sum_{i=1}^{4} d\vec{F}_i = \vec{0}$, provenant de l'équilibre du tétraèdre, (5.13) devient

$$-3dv \cdot \sigma = \sum_{i=1}^{3} d\vec{x'}_i d\vec{F'}_i^t + (-\delta\vec{x}) d\vec{F}_4^t. \tag{5.14}$$

Or d'après (5.12), $d\vec{x'}_4 = \vec{0} - \delta\vec{x} = -\delta\vec{x}$ donc $-3dv \cdot \sigma = \sum_{i=1}^{4} d\vec{x'}_i d\vec{F'}_i^t$
car les surfaces du tétraèdre ne sont pas affectées par la translation : $d\vec{S}_i = d\vec{S'}_i$.

Finalement, on obtient

$$\sigma = -\frac{1}{3dv} \sum_{i=1}^{4} d\vec{x}_i d\vec{F}_i^t. \tag{5.15}$$

5.3 Définition de la contrainte moyenne

Imaginons maintenant le contraire, c'est-à-dire que le tenseur des contraintes ne soit pas connu et que l'on cherche à trouver une expression du tenseur des contraintes en fonction des forces discrètes qui s'exercent sur le milieu. Dans la présente partie, le milieu est discret et non plus continu. Dans ce cas, nous allons considérer que la taille des cellules est finie et rajouter les efforts de volumes dans (5.15).

5.3.1 Contrainte pour une cellule élémentaire finie

Soit la cellule tétraèdrique “c” de taille finie. Les quantités infinitésimales, notées avec un “d”, seront remplacées par leurs correspondantes finies, soit “Δ”. L’origine étant arbitrairement choisie (voir 5.12), la position des vecteurs des i^{eme} sommets de toutes les cellules sera notée $\Delta\vec{x}_i$. Dans ce cas, il faut rajouter les efforts de volumes, dont la résultante $\Delta\vec{F}_0$, est supposée s’exercer au barycentre de la cellule

$$\Delta\vec{c}_0 = \Delta\vec{x}_0 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}\Delta\vec{x}_j. \tag{5.16}$$

Donc de (5.15), on obtient le tenseur de contrainte pour la cellule finie “c”

$$\sigma_c = -\frac{1}{3\Delta v_c}\sum_{i=0}^{4}\Delta\vec{x}_i.\Delta\vec{F}_i^t. \tag{5.17}$$

où $\Delta v_c = \frac{1}{6}\Delta\vec{x}_1 \cdot (\Delta\vec{x}_2 \wedge \Delta\vec{x}_3)$ représente le volume de la cellule tétraèdrique.

Maintenant, on veut revenir à la notion classique des tétraèdres de Cauchy où les efforts sont exercés au centre de gravité des sections (figure 5.5)

$$\Delta\vec{c}_i = \frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{4}\Delta\vec{x}_j - \Delta\vec{x}_i\right) = \frac{1}{3}\left(4\Delta\vec{x}_0 - \Delta\vec{x}_i\right). \tag{5.18}$$

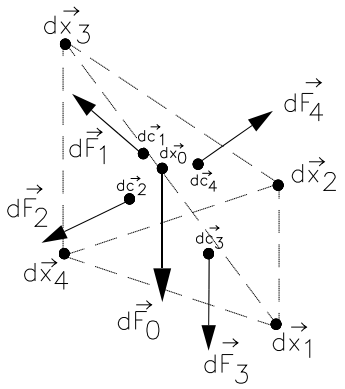


FIG. 5.5 – Représentation des efforts surfaciques et volumique pour un tétraèdre : équilibre en translation et en rotation de la cellule

Comme, $\Delta\vec{F} = \sum_{i=0}^{4} \Delta\vec{F}_i = \vec{0}$ et d'après (5.16) et (5.18), on peut réecrire (5.17)

$$\begin{aligned} -3\Delta v_c \cdot \sigma_c &= \sum_{i=1}^{4} \Delta\vec{x}_i d\vec{F}_i^t + \Delta\vec{x}_0 \Delta\vec{F}_0^t \\ &= \sum_{i=1}^{4} \left[4\Delta\vec{x}_0 d\vec{F}_i^t\right] - 3\sum_{i=1}^{4} \Delta\vec{c}_i d\vec{F}_i^t + \Delta\vec{x}_0 \Delta\vec{F}_0^t \\ &= -3\sum_{i=0}^{4} \Delta\vec{c}_i \Delta\vec{F}_i^t, \end{aligned} \tag{5.19}$$

d'où

$$\sigma_c = \frac{1}{\Delta v_c} \sum_{i=0}^{4} \Delta\vec{c}_i \Delta\vec{F}_i^t. \tag{5.20}$$

5.3.2 Propriétés du tenseur des contraintes

On suppose vérifié l'équilibre du tétraèdre en translation,

$$\sum_{i=1}^{4} \Delta\vec{F}_i = \vec{0} \tag{5.21}$$

et en rotation,

$$\sum_{i=0}^{4} \Delta\vec{c}_i \wedge \Delta\vec{F}_i = \vec{0}. \tag{5.22}$$

Alors, on montre que les deux propriétés fondamentales telles que, l'invariance par translation du tenseur des contraintes, et la symétrie du tenseur des contraintes sont vérifiées.

En effet, dans le cas où l'origine du repère, dans lequel on travaille, est translatée,

$$\Delta\vec{c}_i' = \Delta\vec{c}_i + \delta\vec{c}$$

(5.20) devient

$$\sigma_c' = \frac{1}{\Delta v_c} \sum_{i=0}^{4} \left(\Delta\vec{c}_i + \delta\vec{c}\right) \Delta\vec{F}_i^t = \frac{1}{\Delta v_c} \sum_{i=0}^{4} \Delta\vec{c}_i \Delta\vec{F}_i^t + \frac{\delta\vec{c}}{\Delta v_c} \sum_{i=1}^{4} \Delta\vec{F}_i^t,$$

d'après (5.21), on a

$$\sigma'_c = \sigma_c \tag{5.23}$$

est la propriété d'invariance par translation. De même, un calcul simple conduit

$$\sigma_c^t - \sigma_c = \frac{1}{\Delta v_c} \sum_{i=0}^{4} \left(\Delta \vec{F}_i \Delta \vec{c}_i^t - \Delta \vec{c}_i \Delta \vec{F}_i^t \right) = \frac{1}{\Delta v_c} j \left(\sum_{i=0}^{4} \Delta \vec{c}_i \wedge \Delta \vec{F}_i \right),$$

d'après (5.22), nous vérifions la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\sigma_c^t = \sigma_c \tag{5.24}$$

5.3.3 Contrainte pour un polyèdre

5.3.3.1 Définition

On définit maintenant un polyèdre v_p, représenté par la réunion de N_c tétraèdres "c". D'après le principe de l'action et de la réaction que l'on suppose vérifié, les efforts qui s'exercent à l'intérieur du polyèdre s'annulent deux à deux, figure 5.6. Nous obtenons alors une sommation qui porte sur les efforts de contact s'exerçant sur les faces situées à la frontière de v_p. En indiçant les faces de la frontière de v_p par α (variant de 1 à N_f) de centre de gravité $\Delta \vec{c}_\alpha$, on définit le tenseur des contraintes pour un polyèdre.

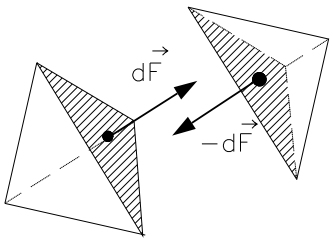


FIG. 5.6 – Principe de l'action et de la réaction : cas de 2 cellules tétraédriques.

$$\sigma_{v_p} = \frac{1}{v_p} \left(\sum_{c=1}^{N_c} \Delta \vec{c}_{0(c)} \Delta \vec{F}_{0(c)}^t + \sum_{\alpha=1}^{N_f} \Delta \vec{c}_\alpha \Delta \vec{F}_\alpha^t \right) \tag{5.25}$$

où $\Delta\vec{F}_{0(c)}$ représente la force de volume agissant au barycentre $\Delta\vec{c}_{0(c)}$ d'une cellule tétraèdrique "c" constituant le polyèdre.

De plus, le principe de l'action et de la réaction implique la propriété d'additivité des moments [77]

$$\sigma_{v_p} = \frac{1}{v_p}\sum_{c=1}^{N_c} \Delta v_c \sigma_c. \tag{5.26}$$

Les propriétés de (5.25) sont identiques à celles définies au paragraphe (5.3.2).

5.3.3.2 Exemple de la sphère en 3-D

On se propose de modéliser une sphère de rayon a par un polyèdre qui est lui même constitué de N_c tétraèdres, figure 5.7.

On choisit de positionner, pour chaque tétraèdre c, le vecteur position $\Delta\vec{x}_4$ au centre de la sphère. Dans ce cas et par application de la formulation (5.25), les forces qui s'exercent sur la sphère se réduisent à celles s'appliquant sur la face de surface élémentaire $d\vec{S}_4$ des cellules élémentaires qui présentent un contact et

$$\text{pour} \quad N_c \to +\infty, \quad \text{on a} \quad \Delta c_4 \to a.$$

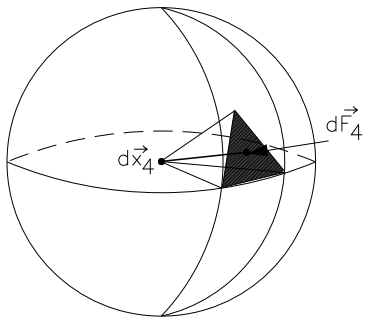


FIG. 5.7 – Sphère modélisée par un polyèdre lui même constitué par un ensemble de tétraèdres.

5.3.3.3 Remarques

Dans le cadre d'une décomposition "infinie" du polyèdre en tétraèdre, le passage à la limite quand la taille des cellules tend vers zéro, implique que :

• la distribution des forces de volumes devient une mesure sur v_p avec pour densité $\vec{f}$ représentant les forces par unité de volume $d\vec{F}_0 = \vec{f} dv_p$.

• la distribution des forces de surface sur la frontière ∂v_p devient une mesure sur ∂v_p avec pour densité $\vec{p}$ représentant le vecteur de contrainte $d\vec{F} = \vec{p} dS$. Le vecteur position $\Delta\vec{c}$ est alors noté $\vec{x}$ et les sommations dans (5.25) se transforment en intégrale, soit

$$\sigma_{v_p} = \frac{1}{v_p}\left(\int_{v_p} \vec{x}\vec{f}^t dv_p + \int_{\partial v_p} \vec{x}\vec{p}^t dS\right). \tag{5.27}$$

Ainsi, nous retrouvons la formulation de la contrainte moyenne due à Chree [22]. En fait, (5.27) est un cas particulier d'une formulation plus générale due à Signorini [93]. La démonstration est donnée par Gurtin [57].

5.3.4 Contrainte pour un ensemble de polyèdres

On cherche maintenant à calculer le tenseur des contraintes pour un ensemble de polyèdres. Pour cela on définit maintenant un Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.) de volume V, comme étant un ensemble de N_p polyèdres "p", figure 5.8. Dans le cas particulier où V ne coupe pas les polyèdres, le volume total de l'échantillon est égal à,

$$V = \sum_{p \in V} v_p(1+e), \tag{5.28}$$

où e est l'indice des vides égal à

$$e = \frac{V - \sum v_p}{\sum v_p} = \frac{\text{volume des vides}}{\text{volume des polyèdres}}.$$

Les efforts surfaciques internes au V.E.R. s'annulent, donc en indiçant les faces de la frontière de V par α (variant de 1 à N_{f_v}), on définit le tenseur des contraintes moyen pour

un ensemble de polyèdres

$$\sigma_V = \frac{1}{V}\left(\sum_{p=1}^{N_p}\left(\sum_{i=1}^{N_c}\Delta\vec{c}_{0(c)}\Delta\vec{F}^t_{0(c)}\right)+\sum_{\alpha=1}^{N_{fv}}\Delta\vec{c}_\alpha\Delta\vec{F}^t_\alpha\right)\cdot \tag{5.29}$$

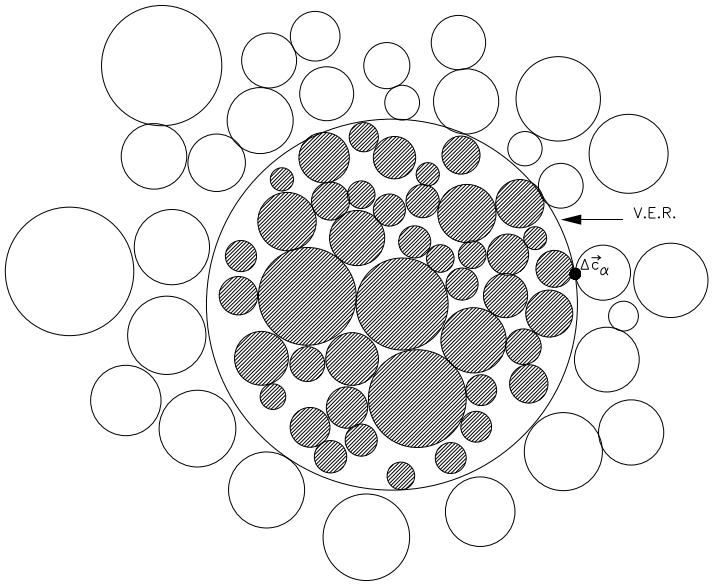


FIG. 5.8 – Le V.E.R. de volume V est un ensemble de polyèdres : cas d'un ensemble de disques de granulométrie hétérogène

Dans le cas où l'origine du V.E.R. est le centre de gravité de V, les forces de gravité disparaissent. Il reste alors la contribution des forces surfaciques sur les bords du V.E.R. constituant l'échantillon étudié ainsi que la contribution des effets dynamiques.

D'après encore une fois la propriété d'additivité des moments, on peut aussi définir la contrainte moyenne pour un V.E.R. constitué par un ensemble de polyèdres par

$$\sigma_V = \frac{1}{V}\sum_{p\in V} v_p\sigma_p = \frac{1}{\sum_{V_p}(1+e)}\sum_{p\in V} v_p\sigma_p. \tag{5.30}$$

5.4 Influence des effets dynamiques sur la contrainte moyenne

La grande majorité des travaux sur les milieux granulaires ont tendance à négliger les effets dynamiques et les effets de pesanteur. On se propose, en utilisant (5.27), de calculer

analytiquement la contrainte moyenne d'un cylindre roulant avec frottement sur un plan incliné et de montrer que les efforts volumiques sont indispensables pour symétriser le tenseur des contraintes.

5.4.1 Cas d'un cylindre qui roule sur un plan incliné

Soit V_b un cylindre rigide qui roule sans glissement sur un plan incliné d'un angle φ, figure 5.9. Les caractéristiques du cylindre sont : a (rayon), ρ_b (densité) et $m_b = \rho_b V_b$ (masse totale). En deux dimensions, le cylindre sera assimilé à un disque. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal direct $R_p = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, avec $\vec{e}_1$ parallèle au plan incliné. De plus, on considére le repère orthonormal direct $R_b = (c, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$, attaché au cylindre et en mouvement par rapport au plan incliné, avec pour vitesse angulaire : $\vec{w} = \dot{\theta}\vec{e}_3$.

Dans cette configuration, la vitesse d'un point P du cylindre, de vecteur position $\vec{x}$ dans le repère R_p, est égale à

$$\vec{v}(P/R_p) = \underbrace{\vec{v}(P/R_b)}_{v_r} + \underbrace{\vec{v}(c/R_p) + \vec{w} \wedge \overrightarrow{CP}}_{v_e},$$

où v_r représente la vitesse relative égale à zéro (cylindre rigide) et v_e la vitesse d'entrainement. Par la suite, on adoptera les notations réduites

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{c}} + \vec{w} \wedge (\vec{x} - \vec{c}), \tag{5.31}$$

où $\vec{c}$ représente le vecteur position du centre de gravité du cylindre, calculé comme suit

$$\vec{c} = \frac{1}{V_b} \int_{V_b} \vec{x} dV, \tag{5.32}$$

où le point désigne la dérivée par rapport au temps, dans le repère R_p.

5.4.1.1 Étude du mouvement

Les actions extérieures exercées sur V_b sont la pesanteur dont le torseur résultant en "c" est

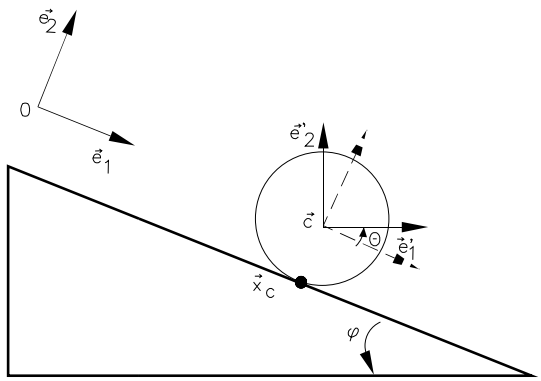


FIG. 5.9 – Cylindre qui roule sans glissement sur un plan incliné.

$$\begin{bmatrix} m_b g(sin\varphi\vec{e}_1 - cos\varphi\vec{e}_2) \\ \vec{0} \end{bmatrix}_c$$

et les efforts de contact dont le torseur résultant en x_c (point de contact) est

$$\begin{bmatrix} r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 \\ \vec{0} \end{bmatrix}_{x_c}$$

Les paramètres du mouvement sont $(\vec{c}, \theta)$ et les inconnues sthéniques sont r_1 et r_2. Il nous faut donc 4 équations. Soit alors le théorème du centre de masse :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_b\ddot{\vec{c}} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lccl} \vec{e}_1/ & m_b\ddot{c}_1 & = & r_1 + m_b \mathrm{g} sin\varphi \\ \vec{e}_2/ & 0 & = & r_2 - m_b \mathrm{g} cos\varphi \end{array} \right. \tag{5.33}$$

et le théorème du moment dynamique appliqué en c :

$$\sum \overrightarrow{M}_c(ext \to V_b) = \frac{d}{dt}\left(\int_{V_b} \vec{x} \wedge (\rho_b\dot{\vec{x}})dV\right) \quad \Longrightarrow I\ddot{\theta} = ar_1 \tag{5.34}$$

où I est le moment d'inertie du cylindre suivant l'axe e_3, $I = \dfrac{m_b a^2}{2}$. Il nous manque une équation pour que le système soit homogène. On utilise alors l'hypothèse de roulement sans glissement qui stipule la nullité de la vitesse de glissement au point x_c, soit

$$\dot{c}_1 + a\dot{\theta} = 0. \tag{5.35}$$

La résolution du système d'équations (5.33), (5.34) et (5.35) permet de déterminer les inconnues du problème

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{\theta} = \dfrac{2r_t}{m_b a} \quad \text{et} \quad \ddot{c}_1 = \dfrac{2}{3} g sin\varphi \\ \\ r_1 = -\dfrac{m_b \mathrm{g}}{3} sin\varphi \quad \text{et} \quad r_2 = m_b \mathrm{g} cos\varphi \end{array}\right. \tag{5.36}$$

5.4.1.2 Calcul de la contrainte moyenne

On rappelle que les calculs seront effectués dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Dans le cas considéré, il n'y a qu'un seul contact concentré en $\vec{x}_c$. On modélise alors en première approximation, le disque par un polyèdre, et en seconde approximation, le polyèdre par une infinité de tétraèdres tel que le second terme du second menbre de (5.25) s'identifie à $\vec{x}_c \vec{r}^{\,t}$, et la contrainte moyenne est donnée par :

$$\sigma_{v_b} = \frac{1}{v_b} \left(\int_{v_b} \vec{x} \vec{f}^{\,t} dV + \vec{x}_c \vec{r}^{\,t} \right). \tag{5.37}$$

A partir de la définition des forces de volume

$$\vec{f} = \rho_b (\vec{g} - \ddot{\vec{x}}), \tag{5.38}$$

et d'après (5.37), on décompose la contrainte en trois termes :

$$\sigma_{v_b} = \sigma_r + \sigma_g + \sigma_\gamma, \tag{5.39}$$

où σ_r représente la contrainte due aux efforts de contact, σ_g représente la contrainte due aux effets de pesanteur et σ_γ la contrainte due aux effets dynamiques.

• Calcul de σ_r :

D'après (5.36), nous pouvons écrire que

$$\sigma_r = \frac{1}{v_b} \vec{x}_c \vec{r}^{\,t} = \frac{m_b}{v_b} \mathrm{g} \begin{pmatrix} c_1 \\ -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Soit alors la contrainte due aux efforts de contact identifiable à la formulation usuelle donnée par J. Weber (5.1)

$$\sigma_r = \rho_b \mathrm{g} \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{3} sin\varphi & c_1 cos\varphi \\ \frac{a}{3} sin\varphi & -acos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

Nous constatons que ce tenseur n'est pas symétrique.

• Calcul de σ_g :

On suppose l'uniformité de la gravité et d'après (5.32), nous pouvons écrire que

$$\sigma_g = \frac{1}{v_b} \int_{v_b} \vec{x}(\rho_b \vec{g})^t dV = \rho_b \mathrm{g} \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sin\varphi & -cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Soit alors la contrainte due aux effets de la pesanteur

$$\sigma_g = \rho_b \mathrm{g} \begin{pmatrix} c_1 sin\varphi & -c_1 cos\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Nous constatons, de même, que le tenseur des effets de pesanteur ne permet pas de symétriser le tenseur σ_r. Ainsi, il semble que les efforts d'inertie soient indispensables pour satisfaire la symétrie du tenseur moyen des contraintes.

• Calcul de σ_γ :

Soit

$$\sigma_\gamma = -\frac{1}{v_b} \int_{v_b} \vec{x}(\rho_b \ddot{\vec{x}})^t dV.$$

Se basant sur (5.31), l'accélération de tout point P appartenant au cylindre est égale à

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où $\vec{a}_r$, l'accélération relative et $\vec{a}_c$, l'accélération de Coriolis sont nulles (cylindre rigide).

Donc l'accélération d'un point P se résume par le calcul de l'accélération d'entrainement $\vec{a}_e$,

$$\ddot{\vec{x}} = a_e = \ddot{\vec{c}} + \dot{\vec{w}} \wedge (\vec{x} - \vec{c}) + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge (\vec{x} - \vec{c})) = \ddot{\vec{c}} + \left(j(\dot{\vec{w}}) + (j(\vec{w}))^2 \right) (\vec{x} - \vec{c})$$

où $j(\vec{w}).\vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{u}$.

$\vec{w}$ étant constant sur le cylindre,

$$\sigma_\gamma = -\frac{1}{v_b} \left(\int_{v_b} \vec{x}(\rho_b \ddot{\vec{c}})^t dV + \int_{v_b} \vec{x}(\vec{x} - \vec{c})^t \rho_b dV \left((j(\vec{w}))^2 - j(\dot{\vec{w}}) \right) \right),$$

et d'après (5.32) nous avons

$$\int_{v_b} \vec{x}(\vec{x} - \vec{c})^t dV = \int_{v_b} (\vec{x} - \vec{c})(\vec{x} - \vec{c})^t dV + \vec{c} \left(\int_{v_b} \vec{x} dV - v_b \vec{c} \right)^t = \int_{v_b} (\vec{x} - \vec{c})(\vec{x} - \vec{c})^t dV,$$

comme l'accélération $\ddot{c}$ est constante sur le cylindre

$$\sigma_\gamma = -\frac{1}{v_b} \left(v_b \vec{c}(\rho_b \ddot{\vec{c}})^t + \int_{v_b} (\vec{x} - \vec{c})(\vec{x} - \vec{c})^t \rho_b dV \left((j(\vec{w}))^2 - j(\dot{\vec{w}}) \right) \right).$$

Finalement, par un théorème dû à Poinsot, la contrainte des effets dynamiques est égale à

$$\sigma_\gamma = -\vec{c}(\rho_b \ddot{\vec{c}})^t - \frac{1}{v_b}(I.id - J) \left((j(\vec{w}))^2 - j(\dot{\vec{w}}) \right), \tag{5.42}$$

où J représente la matrice d'inertie en c du cylindre (si l'on fait tendre le cylindre vers un disque),

$$J = \frac{m_b a^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

et $I = \dfrac{m_b a^2}{2}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe $\vec{e}_3$ et id l'identité de $\mathbb{R}^2$.

Nous décomposons alors (5.42) en un terme de translation σ_t

$$\sigma_t = -\vec{c}(\rho_b \ddot{\vec{c}})^t = -\rho_b \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{c}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit

$$\sigma_t = \rho_b \mathrm{g} \begin{pmatrix} -\frac{2c_1}{3} sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.44}$$

et un terme de rotation σ_s

$$\sigma_s = -\frac{1}{v_b}(I.id - J)\left((j(\vec{w}))^2 - j(\dot{\vec{w}})\right). \tag{5.45}$$

Or, d'après (5.43), $\frac{1}{v_b}(I.id - J) = \frac{I}{2v_b} id = \frac{\rho_b a^2}{4} id$, soit alors

$$\sigma_s = \frac{\rho_b a^2}{4}\left(\ddot{\theta} j(\vec{e}_3) - \dot{\theta}^2 \left(j(\vec{e}_3)\right)^2\right) = \frac{\rho_b a^2}{4}\left\{\ddot{\theta}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

De plus, on supposera que pour t=0, le cylindre est immobile par rapport au plan, c'est-à-dire que $\dot{c}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. D'après (5.34) et (5.37), nous obtenons :

$$\dot{\theta} = -\frac{2\mathrm{g}t}{3a} sin\varphi, \quad \mathcal{L} = c_1(t) - c_1(0) = \frac{gt^2}{3} sin\varphi \quad \text{et} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{4\mathrm{g}\mathcal{L}}{3a^2} sin\varphi \tag{5.46}$$

et le tenseur rotation devient

$$\sigma_s = \rho_b \mathrm{g}\left\{\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{6} sin\varphi \\ -\frac{a}{6} sin\varphi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{L}}{3} sin\varphi & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{L}}{3} sin\varphi \end{pmatrix}\right\}. \tag{5.47}$$

Finalement, en additionnant les σ_r, σ_g, σ_t et σ_s, calculés respectivement en (5.40), (5.41), (5.44) et (5.47), nous obtenons le tenseur des contraintes moyen pour le cylindre qui roule sans glissement sur un plan incliné

$$\sigma_{v_b} = \rho_b \mathrm{g} a\left\{\begin{pmatrix} 0 & \frac{sin\varphi}{6} \\ \frac{sin\varphi}{6} & -cos\varphi \end{pmatrix} + \frac{\mathcal{L}}{a}\begin{pmatrix} \frac{sin\varphi}{3} & 0 \\ 0 & \frac{sin\varphi}{3} \end{pmatrix}\right\}. \tag{5.48}$$

On constate que la contribution de σ_s est essentielle pour symétriser le tenseur des contraintes moyen[2].

[2]Cette remarque est confirmer si l'on prend l'origine du repère au centre de gravité du cylindre.

5.4.2 Application numérique

5.4.2.1 Préliminaire

Afin de quantifier l'influence des tenseurs σ_r, σ_g, σ_t et σ_s sur l'évolution et le calcul du tenseur des contraintes moyennes, nous avons simulé le cylindre qui roule sur un plan incliné avec le logiciel "MULTICOR"[3], figure 5.10.

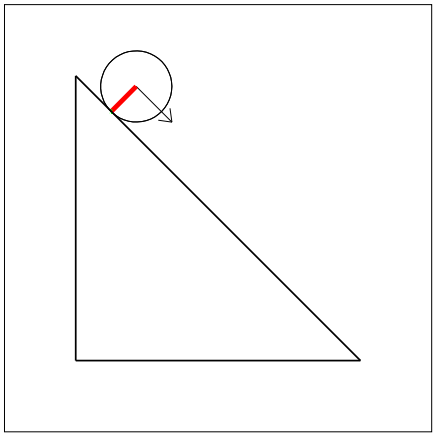


FIG. 5.10 – **Simulation numérique** d'un cylindre sur un plan incliné de pente égale à $-\frac{\pi}{4}rad.$. **Paramètres du cylindre** : $a = 5.10^{-3}$m, $\rho_b = 1400kg.m^{-3}$, $l = 10^{-3}m$ et $\mu = 0.3$. **Paramètres numériques** : $\tau = 10^{-4}s$, $e = 0.1$ et $t = 1$. En gris, l' intensité de la force de contact.

Dans "MULTICOR", les calculs sont effectués par rapport à un repère $(0, \vec{E}_1, \vec{E}_2)$, situé en bas à gauche de la simulation, figure 5.11. Afin de pouvoir comparer et valider le calcul de la contrainte moyenne défini en (5.48), nous avons utilisé deux propriétés : la première est l'invariance par translation (voir 5.23) et la seconde est le fait qu'une matrice exprimée dans le repère $(0, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$, s'écrit dans un autre repère orthonormé $(0', \vec{x}'_1, \vec{x}'_2)$ par la formulation suivante

$$\forall R \in 0_3 \qquad \sigma' = R\sigma R^t \tag{5.49}$$

où R est la matrice de passage entre les deux repères

$$R = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

[3]Le calcul de la contrainte moyenne s'effectue dans la commande CONTRAI [50].

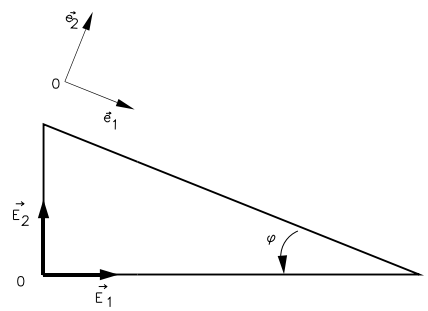


FIG. 5.11 – Position du repère $(0, \vec{E}_1, \vec{E}_2)$ dans le calcul numérique du cylindre qui roule sur un plan incliné.

5.4.2.2 Calcul numérique

A partir des paramètres numériques : $\tau = 10^{-4}s$, e=0.1 et t=1, et des paramètres du cylindre : $a = 5.10^{-3}m$, $l = 10^{-3}m$, $\mu = 0.3$ et $\rho_b = 1400kg.m^{-3}$, nous présentons le résultat numérique de la contrainte moyenne $\sigma^N_{v_b}$, exprimée en $N.m^{-3}$, à un instant t donné ($t = 4.10^{-3}s$) pour une inclinaison du plan égale à $\varphi = \dfrac{\pi}{4}(rad.)$, calculée dans un premier temps dans le repère $(0, \vec{E}_1, \vec{E}_2)$[4] et dans un second temps, dans $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ par application de l'équation (5.49) :

$$\sigma^N_{v_b} = \begin{pmatrix} -16.9 & -24.28 \\ -24.28 & -31.46 \end{pmatrix}_{(0,\vec{E}_1,\vec{E}_2)} \quad \text{soit} \quad \sigma^N_{v_b} = \begin{pmatrix} 0.11 & 7.28 \\ 7.28 & -48.45 \end{pmatrix}_{(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)}$$

Le calcul numérique s'identifie à la contrainte analytique $\sigma^A_{v_b}$ déterminée en (5.48), à une erreur relative près $e = \dfrac{\sigma^A_{v_b} - \sigma^N_{v_b}}{\sigma^A_{v_b}}$,

$$\sigma^A_{v_b} = \begin{pmatrix} 0.12 & 8.1 \\ 8.1 & -48.43 \end{pmatrix}_{(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \qquad e = \begin{pmatrix} 8\% & 9\% \\ 9\% & 0\% \end{pmatrix}$$

[4]Ici on présente les calculs dans les deux repères pour que la comparaison soit possible, mais par la suite tous les calculs numériques seront présentés dans le repère $(0, \vec{E}_1, \vec{E}_2)$.

On constate que la composante σ_{22} de la contrainte moyenne prédomine.

D'autre part, pour montrer l'influence des tenseurs σ_r, σ_g, σ_t et σ_s sur l'évolution et le calcul du tenseur des contraintes moyen, nous présentons pour $t = 4.10^{-3}s$ les valeurs numériques de ces quatre tenseurs, tableau (5.1) :

$\sigma_r = \begin{pmatrix} 24 & 45 \\ 168 & 312 \end{pmatrix}$	$\sigma_g = \begin{pmatrix} 0 & -117 \\ 0 & -528 \end{pmatrix}$
$\sigma_t = \begin{pmatrix} -41 & 41 \\ -185 & 185 \end{pmatrix}$	$\sigma_s = \begin{pmatrix} 0.1 & 7.28 \\ -7.28 & 0.1 \end{pmatrix}$

TAB. 5.1 – Calculs numériques pour $t = 4.10^{-3}s$, des composantes des tenseurs σ_r, σ_g, σ_t et σ_s : les valeurs sont données en $N.m^{-3}$.

On constate que les composantes de σ_s sont assez faibles par comparaison avec les autres tenseurs. Par contre, pour $t = 0.14s$ (moment où le cylindre quitte le plan incliné), le tenseur moyen est égal à

$$\sigma_{v_b}^N = \begin{pmatrix} 101 & -24.28 \\ -24.28 & 87 \end{pmatrix}_{(0,\vec{E}_1,\vec{E}_2)}$$

Dans ce cas, les termes de rotation sont dominants, tableau (5.2) :
D'autre part, on présente l'évolution au cours du temps des composantes des tenseurs σ_r, σ_g, σ_t, σ_s et σ_{v_b}.

5.5 Conclusion

A partir d'un simple théorème d'algèbre linéaire, nous avons établi une expression du tenseur des contraintes moyen pour un ensemble de polyèdres, en tenant compte des efforts de contact exercés sur les cellules élémentaires, ainsi que des efforts volumiques.

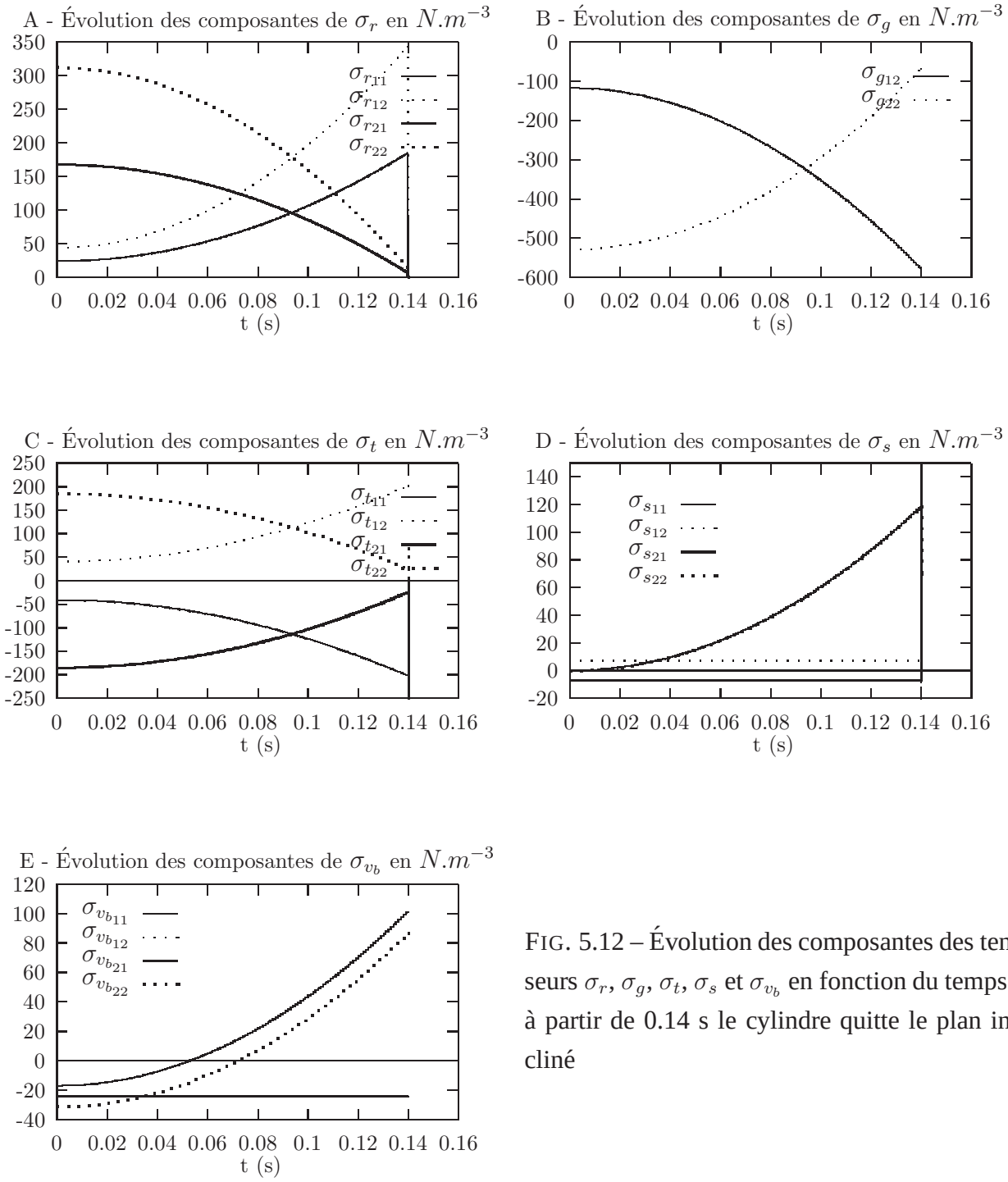


FIG. 5.12 – Évolution des composantes des tenseurs σ_r, σ_g, σ_t, σ_s et σ_{v_b} en fonction du temps : à partir de 0.14 s le cylindre quitte le plan incliné

$\sigma_r = \begin{pmatrix} 185 & 343 \\ 7.24 & 13.5 \end{pmatrix}$	$\sigma_g = \begin{pmatrix} 0 & -576 \\ 0 & -69 \end{pmatrix}$
$\sigma_t = \begin{pmatrix} -202 & 202 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}$	$\sigma_s = \begin{pmatrix} 118 & 7.28 \\ -7.28 & 118 \end{pmatrix}$

TAB. 5.2 – Calculs numériques pour $t = 0.14s$, des composantes des tenseurs σ_r, σ_g, σ_t et σ_s : les valeurs sont données en $N.m^{-3}$.

Notons que si l'on annule la contribution des efforts volumiques, on retrouve exactement la formule de Weber [103] qui ne tient compte que des efforts de contact. Cependant, nous avons montré analytiquement et numériquement, sur un exemple simple, que les forces volumiques d'inertie sont essentielles pour symétriser le tenseur des contraintes. A partir de ce même calcul analytique, nous avons obtenu l'expression suivante du tenseur des contraintes moyen :

$$\sigma_{v_b} = \rho_b \mathrm{g} a \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{sin\varphi}{6} \\ \frac{sin\varphi}{6} & -cos\varphi \end{pmatrix} + \frac{\mathcal{L}}{a} \begin{pmatrix} \frac{sin\varphi}{3} & 0 \\ 0 & \frac{sin\varphi}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

qui se décompose naturellement en deux termes. Le premier a la structure d'un tenseur des contraintes dans un milieu solide avec des termes de cisaillement qui semblent provenir du frottement. Le second terme, qui provient des effets centrifuges, est sphérique. Il correspond typiquement au terme de pression intervenant dans les fluides non visqueux. De plus, la contribution respective des deux termes, fluide et solide, est gouvernée par le rapport $\frac{\mathcal{L}}{a}$, où $\mathcal{L}$ peut être interprété comme le libre parcourt moyen entre deux chocs[5] et où a (le rayon de la bille) correspond à la granulométrie du milieu. Pour un milieu dense où $\frac{\mathcal{L}}{a}$ est petit, c'est la partie solide du tenseur des contraintes qui prédomine, alors que

[5] En généralisant ce calcul analytique à un ensemble de billes.

pour un milieu lâche, où $\frac{\mathcal{L}}{a}$ peut être grand, c'est la partie fluide qui prédomine. Pour des états intermédiaires, que l'on rencontre par exemple lors d'écoulements de silos, le rapport $\frac{\mathcal{L}}{a}$ gouverne la phase de transition entre un comportement solide et un comportement fluide.

Conclusion et perspectives

Nous avons proposé dans ce mémoire une méthode numérique des Eléments Discrets en deux dimensions pour étudier, par une approche micromécanique, le comportement des milieux granulaires.

Nous avons établi le système d'équations régissant le comportement de particules rigides. Ce système est constitué des équations de Lagrange et d'une loi de comportement utilisée pour déterminer les inconnues dues aux contacts potentiels entre les corps. Cette écriture nous a permis d'établir les relations cinématiques entre les variables duales de la loi de comportement et les variables généralisées.

L'originalité de notre modélisation réside d'une part dans la prise en compte d'une loi de comportement exacte, la loi de contact unilatéral avec frottement de Coulomb, et d'autre part, dans l'utilisation du bipotentiel de contact écrit pour cette loi de contact. L'avantage de ce formalisme est de n'utiliser qu'un seul schéma de prédiction-correction, ce qui n'est pas à négliger lorsque le système à modéliser est constitué d'un grand nombre de corps.

Cependant, la prise en compte exacte des conditions de Signorini et des conditions de frottement nous a obligé à prendre en compte les phénomènes de chocs multiples. Dans ce cadre, nous avons utilisé le formalisme de la mécanique non-régulière qui emprunte ses outils mathématiques aux fonctions à variations localement bornées, et redéfini les variables duales du bipotentiel de contact en termes de vitesse formelle et d'impulsion. Nous avons abouti à un algorithme comportant, à chaque itération, une phase de résolution de l'équation de la dynamique, fournissant une nouvelle approximation de la vitesse par un schéma implicite de type Euler, et une phase d'utilisation de l'algorithme local de prédiction-correction, fournissant une nouvelle valeur de l'impulsion.

Des simulations numériques nous ont permis de mettre en évidence l'efficacité et la validité de l'algorithme dans des situations quasi-statiques et dynamiques.
L'écriture de la loi de contact avec un bipotentiel permet de contrôler la convergence par un critère basé sur l'erreur en relation de comportement [6], qui rend très performants les résultats de nos simulations. Cependant, les performances de l'algorithme restent subjectives car aucune comparaison avec des codes E.D. existants n'a été réalisée[7].

D'autre part, à partir du code développé et validé, nous avons effectué des simulations numériques. Une première simulation a consisté à montrer des exemples de matériaux ensilés. L'intérêt de ces exemples était d'une part de mettre en évidence l'effet de voûte qui est une propriété caractéristique des milieux granulaires et d'autre part de montrer l'évolution d'une inclusion mobile dans un silo à fond plat. Dans une seconde simulation, nous avons confronté les résultats numériques avec ceux issus d'essais de laboratoire que nous avons effectués sur la boîte de Casagrande. Malgré la difficulté engendrée par ce type de simulation, il semble que le code s'affranchisse assez bien de ce problème quasi-statique. Cependant, il faudrait augmenter le nombre des corps pour permettre une meilleure stabilité de la boîte supérieure et pouvoir choisir un volume élémentaire représentatif, dans l'optique d'utiliser l'approche micromécanique.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons pu établir une expression du tenseur des contraintes pour un ensemble de polyèdres, qui prend en compte les efforts volumiques. Nous nous sommes aperçu, par un calcul analytique et numérique simple, que les effets dynamiques, en l'occurence les effets rotationnels, sont essentiels pour symétriser le tenseur des contraintes. De plus, nous avons pu mettre en évidence sur le même exemple analytique le fait que le tenseur des contraintes peut se décomposer en deux parties. Une première qui semblerait correspondre à la partie fluide du tenseur des contraintes et qui serait prédominante dans les exemples de milieux granulaires lâches. Et une seconde partie

[6] Afin d'obtenir une valeur finie du bipotentiel de contact, il faut procéder de manière à satisfaire exactement les conditions de non-pénétration et de Coulomb.

[7] On peut souligner qu'une comparaison directe entre deux codes pour mesurer le temps de calcul reste très aléatoire dans la mesure où il existe beaucoup de paramètres tant numériques qu'algorithmiques, qui sont susceptibles d'intervenir.

qui correspondrait plutôt à la partie solide du tenseur des contraintes, et qui serait dominante dans les milieux granulaires denses.

A la vue des résultats encourageants que nous avons obtenus, plusieurs axes de recherche peuvent être envisagés.

Il conviendrait d'une part, à partir du logiciel de simulations dont nous disposons, de calculer le tenseur des contraintes moyen sur un grand nombre de billes, à partir de la formulation développée dans le dernier chapitre.
Il serait intéressant d'étudier dans différentes configurations d'écoulement, de situations quasi-statiques à des situations de dynamique rapide, l'importance respective de la partie fluide et de la partie solide de ce tenseur des contraintes. L'objectif final serait de pouvoir écrire une loi de comportement macroscopique du milieu granulaire considéré, reliant les contraintes moyennes aux déformations moyennes. Ces dernières devraient pouvoir être calculées en utilisant la même démarche que pour les contraintes moyennes.
On pourrait également envisager de modéliser des grains de forme polygonale. Cette modélisation, plus réaliste, devrait permettre d'étudier des phénomènes instables, comme le déclenchement des avalanches ou l'équilibre des talus.

Annexe A

Quelques résultats d'analyse convexe

A.1 Ensemble et fonction convexes

Soient **U** un espace vectoriel réel et F(**u**) une fonction à variable dans **U** et à valeur réelle pouvant prendre les valeurs +∞ et -∞.

• Un ensemble K $\subset$ **U** est dit convexe si pour tout couple ($\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$) de points de K, le segment [$\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$] est inclus dans K. En d'autres termes :

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathrm{K}, \qquad \forall \lambda \in [0,1], \qquad \lambda \mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2 \in \mathrm{K}\cdot \tag{A.1}$$

• La fonction F est dite convexe si l'épigraphe (ensemble au-dessus du graphe) est convexe. En d'autres termes :

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U},\ \forall \lambda \in [0,1],\ F(\lambda \mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2) \leq \lambda F(\mathbf{u}_1) + (1-\lambda)F(\mathbf{u}_2)\cdot \tag{A.2}$$

• Si la fonction F est dérivable une fois, on peut définir son gradient sous la forme d'une dérivée directionnelle :

$$\frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = \lim_{\lambda \to 0} \quad \frac{F(\mathbf{u} + \lambda \delta \mathbf{u}) - F(\mathbf{u})}{\lambda}\cdot \tag{A.3}$$

• La définition A.2 de la convexité est peu commode et peut être remplacée dans le cadre

des fonctions dérivables une fois par la suivante :

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}, \qquad F(\mathbf{u}_2) - F(\mathbf{u}_1) \geq \frac{\partial F(\mathbf{u}_1)}{\partial \mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \tag{A.4}$$

• Si F est convexe et dérivable deux fois, la matrice hessienne est semi-définie positive.

A.2 Sous-différentiels

• Considérons une fonction convexe F(**u**) non dérivable en un point $\mathbf{u}_1$. Il existe une infinité d'hyperplans en contact avec le graphe de la fonction en $\mathbf{u}_1$ et minorant toujours cette fonction. Les vecteurs $\mathbf{v}_1$ représentant la pente de ces hyperplans sont appelés sous-gradients de F en $\mathbf{u}_1$.

Géométriquement les sous-gradients vérifient l'inégalité :

$$\forall \mathbf{V}_1 \in \mathbf{U} \qquad F(\mathbf{u}_2) - F(\mathbf{u}_1) \geq \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \tag{A.5}$$

On appelle sous-différentiel de F en $\mathbf{u}_1$, l'ensemble de ces sous-gradients :

$$\partial F(\mathbf{u}_1) = \{\mathbf{v}_1 \quad \text{tels que} \quad \forall \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}, F(\mathbf{u}_2) - F(\mathbf{u}_1) \geq \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)\} \cdot \tag{A.6}$$

Le sous-différentiel de F en **u** est un ensemble convexe. Dire que $\mathbf{v}_1$ est un sous-gradient de F en $\mathbf{u}_1$ s'écrit :

$$\mathbf{v}_1 \in \partial F(\mathbf{u}_1) \tag{A.7}$$

qui s'appelle une inclusion différentielle. Si F est dérivable en $\mathbf{u}_1$, le seul sous-gradient est le gradient de la fonction :

$$\partial F(\mathbf{u}_1) = \left\{ \frac{\partial F(\mathbf{u}_1)}{\partial \mathbf{u}} \right\} \cdot \tag{A.8}$$

D'une part, $\mathbf{v} \in \partial F(\mathbf{u})$ généralise l'opérateur de dérivation $\mathbf{v} = \dfrac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ et d'autre part, il résulte qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{u}_0$ minimise F est que

$$\mathbf{0} \in \partial F(\mathbf{u}_0) \tag{A.9}$$

ce qui généralise la condition de stationnarité des fonctions dérivables $\dfrac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = 0$.

A.3 Transformée de Legendre-Fenchel

Soient **V** et **F** deux espaces vectoriels munis de topologies localement convexes compatibles avec leur dualité et $\varphi(\mathbf{v})$ une fonction définie sur **V**, convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i.). La transformée de Legendre-Fenchel de $\varphi(\mathbf{v})$ (ou encore la conjuguée de $\varphi(\mathbf{v})$), notée $\varphi^*(\mathbf{f})$, est définie par :

$$\varphi^*(\mathbf{f}) = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} - \varphi(\mathbf{v})\} \qquad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}. \tag{A.10}$$

Par construction, $\varphi^*(\mathbf{f})$ est une fonction convexe et s.c.i.. Comme conséquence de la définition (A.10), nous avons l'inégalité suivante :

$$\varphi(\mathbf{v}) + \varphi^*(\mathbf{f}) \geq \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}. \tag{A.11}$$

appelée inégalité de Fenchel.

Un couple **(v, f)** est dit extrémal si l'égalité A.11 est atteinte. De même, nous avons les implications suivantes :

$$\mathbf{f} \in \partial\varphi(\mathbf{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\mathbf{v}) + \varphi^*(\mathbf{f}) = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}, \tag{A.12}$$

$$\mathbf{v} \in \partial\varphi^*(\mathbf{f}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\mathbf{v}) + \varphi^*(\mathbf{f}) = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}. \tag{A.13}$$

Annexe B

Les matériaux Standard Implicites

On s'intéresse ici à l'écriture des lois de comportement dissipatives. On décrit un système matériel par un espace V de vitesses généralisées $\dot{\mathbf{v}}$, muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. **V** est mis en dualité avec un espace vectoriel F des forces **f** par une forme bilinéaire $(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{f}) \longrightarrow \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}$, représentant la puissance dissipée. V et F sont munis de topologies localement convexes compatibles avec leur dualité.

B.1 Potentiel et loi de normalité

Usuellement, la loi dissipative A et sa loi inverse A^{-1} sont définies par :

$$A : V \to F : \dot{\mathbf{v}} \mapsto f = A(\dot{\mathbf{v}}), \tag{B.1}$$

$$A^{-1} : F \to V : f \mapsto \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(f)\cdot \tag{B.2}$$

Mais dans beaucoup de comportements mécaniques, toutes les informations concernant la loi dissipative sont contenus dans une unique fonction scalaire continuement differentiable mais non nécessairement convexe, appelée potentiel de dissipation

$$\varphi : V \to \mathbb{R} : \dot{\mathbf{v}} \mapsto \varphi(\dot{\mathbf{v}})\cdot \tag{B.3}$$

Plus précisément, la loi dissipative s'écrit sous forme d'une loi de normalité

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \varphi(\dot{\mathbf{v}})}{\partial \dot{\mathbf{v}}}\cdot \tag{B.4}$$

Nous supposons de plus que la loi est inversible. On peut alors définir le potentiel dual suivant :

$$\chi(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot A^{-1}(\mathbf{f}) - \varphi(A^{-1}(\mathbf{f})), \tag{B.5}$$

qui permet d'écrire la loi inverse sous forme d'une loi de normalité

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \chi(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \cdot \tag{B.6}$$

Les couples de variables duales $(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{f})$ vérifiant la loi dissipative, satisfont les deux lois de normalité (B.4) et (B.6) et de plus l'égalité suivante

$$\varphi(\dot{\mathbf{u}}) + \chi(\mathbf{f}) = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f} \cdot \tag{B.7}$$

qui n'est autre que la transformée de Legendre.

B.2 Pseudo-potentiel et loi de sous-normalité

Pour une majorité de lois dissipatives, le concept de potentiel n'est pas applicable. Ces lois ont la particularité d'avoir une relation "A" qui ne se trouve pas "résoluble" par rapport à f ou v, c'est-à-dire qu'il existe des f correspondant à une infinité de valeurs de v et des v correspondant à une infinité de valeurs de f. On parle de loi multivoque. L'idée pour ce type de loi est d'introduire des sous-ensembles $\Gamma(F)$ et $\Gamma(V)$ tels que

$$A : V \to \Gamma(F) : \dot{\mathbf{v}} \mapsto \mathbf{f} \in A(\dot{\mathbf{v}}) \subset F, \tag{B.8}$$

$$A_{-} : F \to \Gamma(V) : \mathbf{f} \mapsto \dot{\mathbf{v}} \in A_{-}(\mathbf{f}) \subset V \cdot \tag{B.9}$$

La résolution mathématique de ces lois passe par l'utilisation des techniques de la théorie moderne des fonctions convexes et du calcul sous-différentiel (A), ce qui permet une formalisation tout aussi univoque par rapport à f ou v.
A partir de ce formalisme mathématique, Moreau [79] propose d'introduire le concept de pseudo-potentiel φ, défini sur V, tel que

$$\varphi : V \to [-\infty, +\infty] : \dot{\mathbf{u}} \mapsto \varphi(v), \tag{B.10}$$

lequel est convexe et semi-défini positif,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \{\dot{\mathbf{u}} \in V \quad \text{tel que} \quad \varphi(\dot{\mathbf{u}}) \leq a\}\cdot$$

Maintenant, la transformée de Legendre est remplacée par l'inégalité de Fenchel

$$\forall(\dot{\mathbf{v}}', \mathbf{f}') \in V \times F, \qquad \varphi(\dot{\mathbf{v}}') + \chi(\mathbf{f}') \geq \dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{f}', \tag{B.11}$$

où φ et χ sont des pseudo-potentiels. Les couples $\dot{\mathbf{v}}', \mathbf{f}'$ relatifs à la loi dissipative sont dits extrémaux dans le sens où l'égalité précedente est vérifiée

$$\varphi(\dot{\mathbf{v}}') + \chi(\mathbf{f}) = \dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{f}'\cdot \tag{B.12}$$

D'autre part, prenons $\dot{\mathbf{v}}' = \dot{\mathbf{v}}$ dans (B.11) et soustrayons membre à membre (B.12) de (B.11), nous obtenons

$$\forall \mathbf{f}' \in F, \qquad \chi(\mathbf{f}') - \chi(\mathbf{f}) \geq \dot{\mathbf{v}}' \cdot (\mathbf{f}' - \mathbf{f})\cdot \tag{B.13}$$

La solution $\dot{\mathbf{v}}$ de cette inéquation est appelée sous-gradient, l'ensemble $\partial\chi(\mathbf{f})$ de ces sous-gradient est appelé le sous-différentiel. La loi multivoque dissipative ainsi que sa loi inverse peuvent s'écrire sous forme de loi sous-normale :

$$\dot{\mathbf{v}} \in \partial\chi(\mathbf{f}) \tag{B.14}$$

$$\mathbf{f} \in \partial\varphi(\dot{\mathbf{v}})\cdot \tag{B.15}$$

Les matériaux, dont la loi complémentaire est représentée par de telles relations, sont appelés des matériaux Standard Généralisés (S.G.) [59]. De plus l'existence d'un pseudo-potentiel est donnée par le théorème de Rockafellar, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que $A_- \subset \partial\chi$ et que A_- soit cycliquement monotone. En d'autres termes, pour toute famille de couples $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{i}, \mathbf{f}_\mathbf{i} \in V \times F, i = 0, 1, ..., n$, tels que $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{i} \in A(\mathbf{f}_\mathbf{i})$, l'inégalité suivante doit être vérifiée

$$(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_n + (\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n-1}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_{n-1} + ... + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_{n-0}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_0 \leq 0\cdot \tag{B.16}$$

En particulier, en considérant uniquement deux couples, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1) \cdot (\dot{\mathbf{v}}_0 - \dot{\mathbf{v}}_1) \geq 0, \tag{B.17}$$

ce qui signifie que l'application est monotone croissante. Les inégalités (B.16) et (B.17) sont appelées respectivement l'inégalité de monotonie cyclique et l'inégalité de monotonie. L'idée de la démonstration initiée par Rockafellar est d'introduire le pseudo-potentiel suivant

$$\chi(\mathbf{f}) = \sup\{(\mathbf{f} - \mathbf{f}_n) \cdot \dot{\mathbf{v}}_n + (\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n-1}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_{n-1} + ... + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_{n-0}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_0\}\cdot \tag{B.18}$$

où le "sup" est étendu à toutes valeurs de n positif et à tout couple $\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{i}, \mathbf{f}_\mathbf{i} \in V \times F$ tel que $\dot{\mathbf{u}}_i \in A_-(\mathbf{f}_i)$. Si l'application est cycliquement monotone, la relation (B.18) fournit un moyen de trouver l'expression du pseudo-potentiel. Pour une loi donnée, l'expression du pseudo-potentiel est unique.

B.3 Bipotentiel et loi de sous-normalité implicite

Pour certains comportements, tels que les matériaux granulaires, la normalité généralisée ne permet plus une description satisfaisante du comportement. Ces lois de comportement sont dites non-standards. Pour conserver les avantages d'une écriture de loi d'évolution à l'aide d'une fonction à valeurs scalaires et d'une loi de sous-normalité, de Saxcé propose de généraliser l'inégalité de Fenchel. Cette généralisation consiste à abandonner l'idée d'une séparation en deux pseudo-potentiels duaux et à postuler l'existence d'une fonction unique $b(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{f})$ appelée bipotentiel. Soit b une fonction sur V×F à valeur dans $[-\infty, +\infty]$, convexe par rapport à $\dot{v}$, lorsque la variable f est fixée, et convexe par rapport à f, lorsque la variable $\dot{v}$ est fixée.
Cette fonction est appelée bi-potentiel si elle vérifie l'inégalité suivante

$$\forall(\dot{v}', f') \in V \times F, \qquad b(\dot{v}', f') \geq \dot{v}'.f'\cdot \tag{B.19}$$

Un couple ($\dot{v}$,f) est dit extrémal si l'égalité est atteinte pour ce couple

$$b(\dot{v}, f) = \dot{v}.f\cdot \tag{B.20}$$

Tout couple extrémal vérifie donc les conditions de convexité séparée

$$\forall \dot{v}' \in V, \qquad b(\dot{v}', f) - b(\dot{v}, f) \geq f.(\dot{v}' - \dot{v}), \tag{B.21}$$

$$\forall f' \in F, \qquad b(\dot{v}, f') - b(\dot{v}, f) \geq \dot{v}.(f' - f)\cdot \tag{B.22}$$

Soit en terme de sous-différentiel :

$$\dot{v} \in \partial_f b(\dot{v}, f), \qquad f \in \partial_{\dot{v}} b(\dot{v}, f)\cdot \tag{B.23}$$

Un matériau Standard Implicite est un matériau dont les comportements réels correspondent aux couples extrémaux d'un certain bi-potentiel. En d'autres termes, les relations (B.23) définissent la loi constitutive multivoque d'un tel matériau.

Moreau [80] a montré que H, sur-potentiel, fonction sur V, et W sa fonction polaire sur F, vérifient l'inégalité de Fenchel, c'est-à-dire

$$\text{pour tout} \quad (\dot{v}', f') \in V \times F, \quad H(\dot{v}') + W(f') \geq \dot{v}' \cdot f'\cdot \tag{B.24}$$

La somme de H et W est donc un bi-potentiel séparé dont les couples extrémaux vérifient les inclusions différentielles

$$\dot{v} \in \partial W(f), \qquad f \in \partial H(\dot{v})\cdot \tag{B.25}$$

Ces relations définissent la loi constitutive d'un matériau standard usuel. Elles expriment un lien explicite entre les vitesses et les forces. Au contraire, dans (B.23), ce lien est implicite, d'où le nom choisi pour désigner la nouvelle classe de matériaux.

Bibliographie

[1] Abriak N.E., *Ecoulement d'un matériau granulaire à travers un orifice, effet de paroi*, Thèse de Doctorat de l'Université de Lille 1, p. 273, 1991.

[2] Abriak N. E., Flow of a granular material containing inclusions, *International journal of solids handling*, vol. 17, n° 3, july/september 1997.

[3] Abriak N. E., Local friction effect of the global behaviour of granular media, *Mathl. Comput. Modelling* vol. 28, n° 4-8, pp. 121-133, 1998.

[4] Alart P. et Curnier A., A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 92, n° 2, november 1991.

[5] Badur J. et Stumpf H., On the influence E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory, *Mitteilungen aus dem institut fur mechanik*, dezember 1989.

[6] Bathurst R. et Rothenburg L., Micromechanical aspect of isotropic granular assemblies with linear contact interactions, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55, march 1988.

[7] Bathurst R. et Rothenburg L., Observations on stress-force-fabric relationships in idealzed granular materials, *Mehanics of Materials*, n° 9, pp. 65-80, 1990.

[8] Biarez J., Evesque P. et Meftah W., De l'ordre au désordre, *rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux*, 1992.

[9] Bolton M. D., The strength and dilatancy of sands, *Géotechnique* vol. 36, n° 1, pp. 65-78, 1986.

[10] Boussine L., Simulation numérique des processus de poinçonnement, de coupe et de formage des métaux et des matériaux granulaires, *Faculté Polytechnique de Mons*, Octobre 1994.

[11] Brach R. M., Friction, restitution, and energy loss in planar collisions, *Journal of Applied Mechanics*, vol.51, march 1984

[12] Brach R. M., Rigid Body Collisions, *Journal of Applied Mechanics*, vol.56, march 1989.

[13] Breitkopf P. et Jean M., Modélisation parallèle des matériaux granulaires, 4e *Colloque en Calcul des Structures*, vol. 1, pp. 387-392, 18-21 mai 1999,

[14] Caillerie D., Tenseur des contraintes dans un milieu granulaire, *rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux*, 1991.

[15] Cambou B., Analyse du comportement des milieux granulaires basé sur leur comportement discontinue, *Revue Française de Géotechnique*, n° 31, pp. 3-23, 1981.

[16] Cambou B. et Sidoroff F., Description de l'état d'un matériau granulaire par varialbles internes statiques à partir d'une approche discrète, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, vol. 4, n° 2, pp. 223-242, 1985.

[17] Cambou B., Dubujet P., Emeriault F. et Sidoroff F., Homogeneization for granular materials, *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 14, n° 2, pp. 255-276, 1995.

[18] Chang C. S. et Ma L., Modeling of discrete granulates as micropolar continua, *Journal of engineering mechanics*, vol. 116, n° 12, december 1990.

[19] Chang C. S., Ma L., A micromechanical-based micropolar theory for deformation of granular solids, *Int. J. Solids Structures*, vol. 28. n° 1, pp. 67-86, 1991.

[20] Chapuis R. P., *De la structure géométrique des milieux granulaires en relation avec leur comportement mécanique*, Thèse de l'Université de Montréal, 1976.

[21] Cholet C., *Chocs de solides rigides*, Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI, p. 209, 1998.

[22] Chree C., Changes in the Dimension of Elastic Bodies Due to Given Systems of Forces, *Cambridge Phil. Soc. Trans.*, vol. 15, pp. 313-33, 1892.

[23] Christoffersen J., Mehrabadi M. M. et Nemat-Nasser S., A micromechanical description of granular material behavior, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, june 1981.

[24] Cosserat E. et Cosserat F., *Théorie des corps déformables*, Librairie Scientifique A. Herman et fils , 6 rue de la sorbonne Paris, 1909.

[25] Coulomb C., Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture, *Mem. Acad. Royale des Sciences*, vol. 973, pp.343-382, 1776.

[26] Cundall P.A., A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems, *Proceedings of the Symposium of the international Society of Rock Mechanics*, vol. 1, pp. 132-150, Nancy, France, 1971.

[27] Cundall P.A. et Strack O.D.L., A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, vol. 29, pp. 47-65, 1979.

[28] Curnier A., A theory of friction, *Int. J. Solids Structures*, vol. 20, n° 7, pp. 637-647, 1984.

[29] Curnier A. et Alart P., A generalized Newton method for contact problems with friction, *Journal of theoritical and applied mechanics*, Special issue, supplement, vol. 7, n° 1, 1988.

[30] Dantu P., Contribution à l'étude mécanique et géométrique des milieux pulvérulents, *Comptes Rendus du IVème Congrès de Mécanique des Sols et des Fondations*, pp. 144-148, 1957.

[31] Darve F., Hicher P.-Y. et Reynouard J.-M., *Les géomatériaux, théorie, expériences et modèles*, Hermés, Paris, 1995.

[32] Darves F. et Laouafa F., Plane strain instabilities in soil. Application to slopes stability, *In Proceeding Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics*, Graz, Austria, 1-3 sept, 1999.

[33] De Buhan P., Dormieux L. et Salençon J., Modélisation micropolaire de la résistance d'un milieu renforcé par inclusions, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 326, série II b, pp. 163-170, 1998.

[34] De Josselin de Jong G. et Verruijt A., Etude photo-élastique d'un empilement de disques, *Cahiers du Groupe Français de Rhéologie*, n° 2, pp. 73-85, 1969.

[35] De Saxce G. et Feng Z.-Q., New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach, *Mechanics of Strutures and Machines*, vol 19, n° 3, pp. 301-325, 1991.

[36] De Saxce G., Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 314, série II, pp. 125-129, 1992.

[37] De Saxcé G., *Manuel d'utilisation du logiciel CHARLY*, 1989.

[38] De Saxce G. et Feng Z.-Q., The bipotentiel method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms, *Mathl. Comput. Modelling*, vol. 28, n° 4-8, pp. 225-245, 1998.

[39] Dimmet E. et Frémond M., Chocs de solides rigides, 4e *Colloque en calcul des structures*, Gien, vol. 1, pp. 153-158, 1999.

[40] Duran J., *Sables, poudres et grains. Introduction à la physique des milieux granulaires*, Eyrolles sciences, 1997.

[41] Duvaut G. et Lions J.L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972.

[42] Evesque P., Meftah W. et Biarez J., Mise en évidence de variations brutales et d'évolutions quasi discontinues dans les courbes contraintes-déformation d'un milieux granulaire bi-dimensionnel de rouleaux, *C. R. Acad. Sci. 316*, série IIb, pp. 321-327, 1993.

[43] Faugeras J.C., Gourves R., Mesure des contraintes au sein d'un massif analogique de Schneebeli, *Rev. Franç. Géoteh.*, n° 11, pp. 5-16, 1980.

[44] Fortin M. et Glowinski R., *Méthodes de Lagrangien augmenté*, Dunod, 1982.

[45] Fortin J., *Etude théorique et expérimentale des matériaux granulaires*, D.E.A. de Mécanique de l'Université de Lille 1, 1995.

[46] Fortin J. et de Saxcé G., Modélisation numérique des milieux granulaires par l'approche du bi-potentiel, *C. R. Acad. Sci. 327*, série IIb, pp. 721-724, 1999.

[47] Fortin J. et de Saxcé G., Dynamique des milieux granulaires par l'approche du bipotentiel, *4 ^{e} Colloque en Calcul des Structures*, Gien, pp. 141-146, 18-21 mai 1999.

[48] J. Fortin et G. de Saxcé : Simulation numérique par un modèle discret de l'écoulement et du stockage des matériaux granulaires, 14eme *Congrés Français de Mécanique*, Toulouse, 30 août-3 septembre 1999.

[49] J. Fortin, G. de Saxcé et M. Hjiaj : A 2D numerical simulation of granular materials, 5th *U.S. National Congress on Computational Mechanics*, pp. 132-133, 1999.

[50] Fortin J., *Manuel d'utilisation du logiciel MULTICOR*, 1999.

[51] Frémond M., Adhérence des solides, *C. R. Acad. Sci. t. 295*, série II, pp. 769-772, 15 novembre 1982.

[52] Frémond M., Equilibre de structures qui adhèrent à leur support, *C. R. Acad. Sci. t. 295*, série II pp. 913-916, 29 novembre 1982.

[53] Frémond M., Dissipation dans l'adhérence des solides, *C. R. Acad. Sci. t. 300*, série II, n° 15, pp. 709-714, 1985.

[54] Frémond M., Rigid bodies collisions, *Physics Letters A*, vol. 204, pp.33-41, 1995.

[55] Ganiou F., *Etude de la localisation des déformaions dans les matériaux granulaires par la technique de traitement d'images*, Thèse de doctorat de l'Université de Lille 1, 1994.

[56] Gourvès R. et Mezghani F., Micromécanique des milieux granulaires, approche expériementale utilisant le modèle de Schneebeli, *Revue Française de Géotechnique*, n° 42, pp. 11-25, 1988.

[57] Gurtin M. E., *The linear Theory of Elasticity*, in (Flugge ed.) Encyclopedia of Physics, Volume VIa/2, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[58] Guyon E. et Troadec J.-P., *du sac de billes au tas de sable*, Odile Jacob, Paris, 1994.

[59] Halphen B. et Nguyen Q.-S., Sur les matériaux standards généralisés, *Journal de Mécanique*, vol. 14, n° 1, 1975.

[60] Hjiaj M., *Sur la classe des matériaux standard implicites : Concept, Aspect discrétisés et Estimation de l'erreur a posteriori*, Thèse de doctorat, Faculté Polytechnique de Mons, 1999.

[61] Hiriart-Urruty J.-B., *Optimisation et analyse convexe*, Presses Universitaires de France, 1re édition, 1998.

[62] Hong D.C., Stress distribution of a hexagonally packed granular pile, *Physical Review E.*, vol. 47, number 1, january 1993.

[63] Jean M. et Touzot G., Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformations problems, *Journal of theoritical and applied mechanics*, Special issue, supplement n° 1 to vol. 7, 1988.

[64] Jean M., Dynamics with partially elastic shocks and dry friction : double scale method and numerical approach, *4d Meeting on unilateralproblems in structural analysis*, 1989.

[65] Jean M., Moreau J.-J., Dynamics of elastic or rigid bodies with frictional contact : numerical methods, *publications du L.M.A.*, n^0 124, pp. 9-29, 1991.

[66] Jean M., Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterial motions, Mechanics of Geomaterial Interfaces, *Elsevier Sciences Publishers B.V.* ed A.P.S.. Selvadurai, M.J. Boulon, pp. 463-486, 1995.

[67] Keller J. B., Impact with friction, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, march 1986.

[68] Keller J. B., Impact with an impulsive frictional moment, *Journal of Applied Mechanics*, vol 54, march 1987.

[69] Klarbring A., Mathematical programmming and augmented lagrangien methods for frictional contact problems, *Proc. contact mechanics int. Symp.*, Edt A. Curnier, PPUR, pp. 409-422, 1992.

[70] Khati S., *Comportement des matériaux granulaires : Etude micro-macro du frottement et de la dilatance*, Thèse de doctorat de l'Université de Lille 1, 1996.

[71] Ladevèze P., *Mécanique non linéaire des structures : nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Hermès, Paris, 1996.

[72] Limat L., Effets rotationnels dans le cisaillement d'un milieu granulaire, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 326, série II b, pp. 501-509, 1998.

[73] Lanier J., Géomatériaux non cohérents, *Rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux*, 1988.

[74] Lanier J., L'anisotropie induite : un aspect essentiel du comportement des géomatériaux, *Rapport du G.R.E.C.O. géomatériaux*, 1989.

[75] Lovighi J.-F., *Le tamisage*, D.E.A. de Mathématiques et Mécanique théorique, Université Montpellier II, 1999.

[76] Moreau J.-J., Evolution en présence de liaisons unilatérales : notions de base, *4 ^{e} Colloque National en Calcul des structures*, Gien, pp. 25-40, 18-21 mai 1999.

[77] Moreau J.-J., Numerical investigation of shear zones in granular materials, Proc. HLRZ-Workshop on friction in Grassberger, P. et Wolf, D., eds., Arching, Contact Dynamics, World Scientific, Singapore, 1997, pp. 233-247.

[78] Moreau J.-J., La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastoplastique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 267, 16 Décembre 1968.

[79] Moreau J.-J., Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, 12 Juillet 1971.

[80] Moreau J.-J., *Fonctions de résistance et fonctions de dissipation, Séminaire d'analyse convexe*, Exposé n° 6, Montpellier, 1971.

[81] Moreau J.-J., Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, Série A, pp. 608-611, 1970.

[82] Moreau J.-J., Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials, *Eur.J. Mech, A/Solids*, vol. 13, $n^0$4 suppl., pp. 93-114, 1994.

[83] Moreau J.-J., *Mécanique classique*, Tome I, Masson & Cie, 1971.

[84] Moreau J.-J., *Mécanique classique*, Tome II, Masson & Cie, 1971.

[85] Moreau J.-J., Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, *CISM courses and lectures*, vol 302, Springer-Verlag, 1988, pp. 1-83.

[86] Moreau J.-J., New computation methods in granular dynamics, *Powders & Grains 93*, Thornton, C., Ed., Balkema, Rotterdam, pp. 227-232, 1993.

[87] Moreau J.-J. et Panagiotopoulos P.D., Nonsmooth Mechanics and Applications, *CISM Courses and Lectures*, Springer-Verlag, Wien, New York, vol. 302, september 14-18, 1987.

[88] Oda M., Konishi J. et Nemat-Nasser S., Experimental micromechanical evaluation of strenght of granular materials : Effects of particle rolling, *Mechanics of Materials 1*, pp. 269-283, 1982.

[89] Oger L., Charmet J.-C., Bideau D. et Troadec J.-P., Propriétés mécaniques de milieux pulvérulents 2D, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 302, série II, n° 6, 1986.

[90] Pradel F. et Sab K., Cosserat modelling of elastic periodic lattice structures, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 326, série II b, pp. 699-704, 1998.

[91] Radjai F., *Dynamique des rotations et frottement collectif dans les systèmes granulaires*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris-sud, le 7 Décembre 1995.

[92] Sanchez-Palencia E., *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.

[93] Signorini A., Sollecitazioni Iperastatiche, *Rend. Inst. Lombardo*, vol. 2, n° 65, pp. 1-7, 1932.

[94] Sirieys P., Dilatance-Contractance des milieux pulvérulents : déformation d'un milieu analogique, *Revue Française de Géotechnique*, n° 67, 1994.

[95] Smith C. E., Predicting rebounds using rigid-body dynamics, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 58, september 1991.

[96] Smith C. E. et liu P. P., Coefficients of restitution, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 59, december 1992.

[97] Schneebeli G., Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion, *C.R. Acad. Sc. Paris*, séance du 9 Juillet, pp. 125-126, 1956.

[98] Skempton A.W., Les premiers temps de la mécanique des sols, *Revue Française de Géotechnique*, n° 15, pp. 5-16, 1981.

[99] Sondergaard R., Chaney K. et Brennen C.E., Measurements of solid spheres bouncing off plates, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, september 1990. september

[100] Travers T., Ammi M., Bideau, Gervois A., Lemaitre J., Messager J.C. et Troadec J.P., Compression de milieux granulaires modèles à deux dimensions, *Revue Française de Géotechnique* n° 43, pp. 21-33, 1988.

[101] Walton O. R., Application of molecular dynamics to macroscopic particles, *Int. J. Engng. Sci.*, n° 22, pp. 1097-1107, 1984.

[102] Walton O. R., *Numerical simulation of inelastic, frictional particle-particle interactions*. Particulate two-phase flow, Butterworth-Heinemann, 1992.

[103] Weber J., Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents, *bul. liaison P. et Ch.* n^o, juil.-août 1966.

[104] Yemmas R., *Simulations numériques des matériaux granulaires*, Thèse de l'Université de Montpellier II, le 20 Décembre 1993.

SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MULTICORPS APPLIQUÉE AUX MILIEUX GRANULAIRES

Notre travail s'inscrit dans le cadre de l'étude du comportement des milieux granulaires. Dans un premier temps, nous présentons une méthode numérique par Eléments Discrets de type Dynamique des Contacts, qui modélise en 2D le mouvement d'un ensemble de corps rigides, entrant en collision entre eux et avec des parois, et sujets à des forces de frottement lors de ces chocs. L'utilisation du bipotentiel de contact conduit à un algorithme local basé sur un schéma prédicteur-correcteur par projection sur le cône de frottement et à un critère de convergence fondé sur un indicateur d'erreur relative en loi de comportement. La prise en compte exacte des conditions de Signorini et de Coulomb nous oblige à considérer les phénomènes de chocs multiples. Dans ce cadre, nous utilisons le formalisme de la mécanique non-régulière. Nous aboutissons à un algorithme comportant, à chaque itération, une phase de résolution de l'équation de la dynamique, fournissant une nouvelle approximation de la vitesse, et une phase d'utilisation de l'algorithme local, fournissant une nouvelle valeur de l'impulsion. Les simulations numériques tant quasi-statiques que dynamiques mettent en évidence la convergence et la robustesse de l'algorithme.
Dans un second temps, pour permettre le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, nous établissons une expression du tenseur des contraintes moyen, qui prend en compte les efforts volumiques. Nous montrons sur un exemple analytique simple d'un grain rigide cylindrique roulant sur un plan incliné, que les effets dynamiques sont essentiels pour symétriser le tenseur des contraintes moyen.

MOTS-CLES :
milieux granulaires, Dynamique des Contacts, Méthode des Eléments Discrets, bipotentiel, tenseur des contraintes.

NUMERICAL SIMULATION OF THE DYNAMIC OF MULTIBODIES SYSTEMS APPLIED TO GRANULAR MEDIUM

The general topic of this work is the study of granular media behaviour. In the first time, a Discret Element Method, inspired from the Contact Dynamics approach is proposed. This method enables us to modelise in 2D the moving rigid bodies running into themselves or into walls and subjected to friction forces during these collisions. The use of the contact bipotential leads to an algorithm of resolution based on the projection on the friction cone and to a convergence criterion based on the estimator of relative error in constitutive law. The Signorini's and Coulomb's conditions constraint us to take into account the phenomenon of multiple collisions. In this frame, we use the formalism of the nonsmooth mechanics. The issues is an algorithm involving, at each iteration, a global step producting a new value of the impulse. Numerical simulations in quasi static or dynamic cases show the convergence and the robustess of the algorithm. Within the framework of an homogeneization procedure, we establish an expression of the mean stress tensor, taking into account the body forces. We show, on a simple analytical example of a cylindrical rigid bead rolling on an inclined plane, that the inertia forces are essential to insure the symmetry of the bead mean stress tensor.

KEYWORDS :
granular media, Contact Dynamics, Discrets Elements Method, bipotential, stress tensor.