HAL
open science

Hiérarchisation et visualisation multirésolution de résultats issus de codes de simulation

Fabien Vivodtzev

To cite this version:

Fabien Vivodtzev. Hiérarchisation et visualisation multirésolution de résultats issus de codes de simulation. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT : . tel-00011230

HAL Id: tel-00011230

https://theses.hal.science/tel-00011230v1

Submitted on 17 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ GRENOBLE I - JOSEPH FOURIER

Hiérarchisation et visualisation multirésolution de résultats issus de codes de simulation

Fabien VIVODTZEV

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier
Spécialité Informatique

préparée au sein du

Commissariat à l'Energie Atomique
Centre d'Etudes Scientifiques et Techniques d'Aquitaine

et du

Projet EVASION, Laboratoire Graphisme, Vision et Robotique
UMR 5527 (UJF, INP Grenoble, CNRS, INRIA)

soutenue le 5 décembre 2005.

Composition du jury :

Georges-Pierre	BONNEAU	*Directeur de thèse*	(GRAVIR - Univ. Joseph Fourier, Grenoble)
Paul	LE TEXIER	*Encadrant CEA*	(CEA/CESTA)
Pascal	GUITTON	*Président du jury*	(LaBRI - INRIA Futurs - Univ. Bordeaux 1)
Jean-Michel	DISCHLER	*Rapporteur*	(LSIIT - Univ. Louis Pasteur, Strasbourg)
Wilfrid	LEFER	*Rapporteur*	(LIUPPA - Univ. de Pau et des Pays de l'Adour)
Jean-Philippe	NOMINÉ	*Examinateur*	(CEA/DIF)

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ma femme, Sophie, pour son soutien, ses encouragements et sa patience tout au long de ces années et ce, malgré les longues heures passées à programmer. Je remercie également mes parents pour leur confiance et leur aide pour finaliser ce document.

Je remercie très sincèrement Georges-Pierre BONNEAU pour m'avoir permis de participer à ce projet et pour m'avoir introduit auprès de la communauté de visualisation scientifique. J'ai beaucoup appris à ses côtés notamment grâce à sa grande disponibilité dans le travail et aux nombreuses idées échangées.

Merci à Paul LE TEXIER pour son encadrement quotidien sans faille au CEA/CESTA. En identifiant une problématique en visualisation, il a été à l'origine de ce sujet passionnant qui répond à des besoins du CEA/CESTA.

Je remercie Xavier CARLOTTI, Thierry LAUNAY et Nicolas KOEKE pour m'avoir accueilli dans leur unité respective et pour leurs discussions sur l'aspect industriel de ce projet de thèse. Merci également à Jean-Philippe NOMINÉ pour son suivi et nos échanges tout au long de ces travaux. Je remercie Michel MANDALLENA pour les données résultats, indispensables à la validation de ces travaux.

Je souhaite aussi remercier Bernd HAMANN, Ken JOY et Kwan-Liu MA pour leur accueil à l'Université de Californie à Davis dans d'excellentes conditions. Les sujets de recherches abordés ont toujours été passionnants. Je remercie particulièrement Ken pour m'avoir introduit et donné goût à la visualisation à travers des cours originaux. Merci aussi à tous les membres de l'Institut IDAV à Davis notamment Christopher, Lars, David, Karim, Conrad, Oliver et Haeyoung auprès desquels j'ai beaucoup appris.

Merci à Jean-Michel DISCHLER et Wilfrid LEFER pour avoir accepté de rédiger les rapports sur ce manuscrit de thèse. Merci également à Pascal GUITTON pour avoir accepté d'être membre du jury.

Un grand merci à tous les membres du service SIS du CEA/CESTA pour leur bonne humeur et pour les innombrables discussions improvisées. Un merci particulier à Thierry HOCQUELLET pour ses millions de tétraèdres.

Bien que distant géographiquement depuis trois ans, je remercie aussi les membres des équipes EVASION et ARTIS qui ont toujours répondu présents dans nos échanges.

Table des matières

1 Introduction **11**
1.1 Objectifs . . . 13
1.2 Contributions . . . 13
1.3 Organisation du document . . . 14

2 Etat de l'art en simplification de maillages **17**
2.1 Composition d'un algorithme de simplification . . . 17
2.1.1 Préservation de la topologie . . . 17
2.1.2 Re-échantillonnage des données . . . 18
2.1.3 Condition d'arrêt . . . 19
2.1.4 Evaluation de l'erreur d'approximation . . . 19
2.1.5 Modification itérative ou globale . . . 20
2.2 Classification des méthodes de simplification . . . 20
2.3 Méthodes globales . . . 20
2.3.1 Ondelettes et surfaces de subdivisions . . . 20
2.3.2 Re-échantillonnage . . . 21
2.3.3 Fusion de régions . . . 21
2.3.4 Amas de sommets . . . 22
2.3.5 Filtres volumiques . . . 22
2.4 Méthodes itératives . . . 22
2.4.1 Décimation de sommets . . . 22
2.4.2 Contraction de paires de sommets . . . 23
2.4.3 Contraction de simplexes . . . 23
2.5 Simplification surfacique par contractions d'arêtes . . . 26
2.5.1 Algorithme général . . . 26
2.5.2 Heuristiques les plus utilisées . . . 26
2.5.3 Préservation de caractéristiques . . . 27
2.6 Simplification de maillages tétraédriques . . . 28
2.7 Techniques de préservation de la topologie . . . 34
2.7.1 Critères topologiques pour des courbes et surfaces . . . 34
2.7.2 Heuristiques incomplètes . . . 35
2.7.3 Condition du lien . . . 37
2.7.4 Adaptation de la condition du lien . . . 37
2.8 Mesures d'erreur . . . 37
2.8.1 Erreur dans l'espace de l'objet . . . 38

2.8.2 Erreur dans l'espace des attributs 39
2.8.3 Erreur dans l'espace de l'image 39
2.9 Conclusion 40

3 Problématique industrielle et stratégie de visualisation 41
3.1 Les objectifs 41
3.2 Les logiciels de calculs 42
3.2.1 Composition d'un logiciel de calcul 42
3.2.2 Les logiciels de calculs au CESTA 42
3.2.3 Dimension des maillages 43
3.2.4 Types de maillages associés aux codes du CESTA 43
3.3 Les contraintes de l'environnement de travail 46
3.3.1 Les moyens informatiques au CEA 46
3.3.2 Contraintes sur l'espace de stockage au CESTA 46
3.3.3 Contraintes sur le transfert des données 47
3.3.4 Contraintes sur les stations d'exploitation 47
3.3.5 Avancées technologiques inégales 47
3.3.6 Grandes masses de données 48
3.4 Cas particulier de l'Électromagnétisme en furtivité 48
3.4.1 Composition des objets modélisés 48
3.4.2 Sous-structures de la géométrie 49
3.4.3 Nouveau problème 52
3.4.4 Données résultats 52
3.5 Approche par hiérarchisation des données 53
3.5.1 Stratégies de visualisation 53
3.5.2 Préparation au post-traitement 54
3.5.3 Stratégie de visualisation adoptée : approche multirésolution 55
3.5.4 Choix de l'opérateur de simplification 57
3.6 Conclusion 58

4 Préservation de la topologie d'un 3-complexe 59
4.1 Notion de topologie 59
4.2 Espace topologique 61
4.3 Complexes simpliciaux et triangulations 64
4.4 Maillage 66
4.5 Homéomorphismes entre complexes simpliciaux 69
4.6 Notions associées aux complexes simpliciaux 70
4.6.1 Ordre 71
4.6.2 Frontière 73
4.7 Contraction d'arêtes 74
4.8 Condition du lien 77
4.9 Exemples 79
4.10 Conclusion 81

5 Préservation de la topologie de sous-structures imbriquées **83**
5.1 Présentation de l'algorithme . . . 83
5.2 Préservation de la topologie des sous-structures d'un 2-complexe . . . 84
5.2.1 Représentation de sous-structures dans un 2-complexe . . . 84
5.2.2 Contractions d'arêtes dans le complexe étendu . . . 85
5.3 Exemples . . . 86
5.4 Implémentation du test topologique pour un 2-complexe . . . 89
5.4.1 Librairies implémentant des structures de données . . . 89
5.4.2 Structure de données choisie . . . 90
5.4.3 Implémentation . . . 91
5.4.4 Algorithme . . . 93
5.5 Préservation de la topologie des sous-structures d'un 3-complexe . . . 94
5.5.1 Représentation des sous-structures d'un 3-complexe . . . 94
5.5.2 Contractions d'arêtes dans le complexe étendu . . . 95
5.5.3 Conditions du lien dans $\widetilde{K}$ . . . 96
5.6 Implémentation du test topologique pour un 3-complexe . . . 97
5.6.1 Structure de données . . . 97
5.6.2 Algorithme général de simplification . . . 99
5.6.3 Extraction des ordres des simplexes dans $\widetilde{K}$ . . . 100
5.6.4 Gestion du tas d'arêtes . . . 101
5.6.5 Algorithme . . . 101
5.7 Exemples . . . 103
5.7.1 Contraction d'une arête sur une interface . . . 104
5.7.2 Contraction d'arêtes connectant polylignes et interfaces . . . 105
5.7.3 Contraction d'arêtes modifiant un trou d'une surface . . . 108
5.7.4 Remarque . . . 110
5.7.5 Critères topologiques sur des données manipulées en simulation . . . 111
5.7.6 Contractions autorisées . . . 114
5.8 Conclusion . . . 114

6 Mise en œuvre et résultats **117**
6.1 Critères d'erreurs géométriques simples . . . 117
6.2 Simplification surfacique . . . 118
6.2.1 Applications en géologie . . . 118
6.2.2 Applications en CAO . . . 121
6.3 Applications en neurosciences . . . 123
6.4 Simplification volumique . . . 129
6.5 Simplification de données résultats . . . 131
6.6 Visualisation multirésolution . . . 135
6.6.1 Les modèles multirésolution . . . 135
6.6.2 Structures de données des modèles multirésolution . . . 136
6.6.3 Structure de données des maillages tétraédriques non structurés . . . 137
6.6.4 Intégration d'un modèle multirésolution existant . . . 138
6.6.5 La librairie MT [FMP00] . . . 138
6.6.6 Instanciation d'une MT pour les besoins du projet . . . 139

6.6.7 Construction d'une MT pour les besoins du projet 140
6.6.8 Intégration des composants logiciels 141
6.6.9 Limitations et évolutions des modules de visualisation 143
6.6.10 Visualisation multirésolution 144
6.7 Conclusion 149

7 Conclusion et perspectives **151**
7.1 Préservation de la topologie de sous-structures 151
7.2 Visualisation multirésolution dans un cadre industriel 152
7.3 Perspectives 154

A Publications relatives à ces travaux **157**

Table des figures

1.1 Résultat d'une simulation électromagnétique du CEA/CESTA 11

2.1 Contraction d'une paire de sommets (u,v) en w. 23
2.2 Contractions d'arêtes d'un maillage triangulaire. 24
2.3 Contraction du triangle rst en w. 25
2.4 Contraction du tétraèdre $qrst$ en un sommet w. 25
2.5 Représentation progressive de complexes simpliciaux 29
2.6 Intersection de deux tétraèdres 30
2.7 Calcul de l'erreur d'approximation de [THW98] 31
2.8 Construction de l'espace de l'erreur d'approximation de [CCM+00] 31
2.9 Triangulation de l'enveloppe convexe 32
2.10 Adaptation de la mesure d'erreur sous forme quadrique 33
2.11 Critères de suppression de sommets de [SZL92] 35
2.12 Tests de préservation de la topologie de [Hop96] 36
2.13 Inconsistances topologiques détectées dans [SG98] 36
2.14 Distance de Hausdorff 38

3.1 Résultat d'une simulation laser 44
3.2 Maillage hexaédrique d'une simulation en aérodynamique 45
3.3 Le supercalculateur Téra du CEA/DAM 46
3.4 Décomposition en domaines des logiciels de calcul en électromagnétisme. . . . 49
3.5 Couches minces de matériaux en simulation électromagnétique 49
3.6 Sous-structures présentes dans les maillages volumiques 50
3.7 Détails d'ensembles volumiques avec des sous-structures 51
3.8 Différentes stratégies de visualisation sur le centre du CEA/DAM DIF 54
3.9 Intégration de la hiérarchisation des données 55
3.10 Visualisations multirésolution. 56

4.1 Topologie d'objets simples 60
4.2 Origines et applications de la topologie algorithmique 61
4.3 Exemple de discontinuité au voisinage d'un point 62
4.4 Ensembles particuliers construits à partir d'un sous-ensemble A de $\mathbb{X}$. 63
4.5 Exemples de variétés et non-variétés à bords 64
4.6 k-simplexes avec $0 \leq k \leq 3$. 65
4.7 Complexes simpliciaux et non simpliciaux 66
4.8 Exemples de cellules utilisées dans les maillages non-structurés. 67

4.9 Représentation 2D de trois types de maillages. 67
4.10 Maillage 2D uniforme multi-blocs 68
4.11 Etoilés et liens du sommet u et de l'arête uv dans un maillage triangulaire . . . 71
4.12 Ordre des simplexes dans un 2-complexes 72
4.13 Illustration de l'ordre d'un simplexe dans un 3-complexe 72
4.14 Extraction des frontières 75
4.15 Contraction d'arête définie comme une application simpliciale 76
4.16 Exemples de subdivisions d'un complexe associé à des recouvrements 76
4.17 Evaluation des conditions du lien pour une contraction valide 79
4.18 Evaluation des conditions du lien pour une contraction non valide 80
4.19 Condition du lien dans K^{ω} d'un 3-complexe 81

5.1 Complexe étendu 85
5.2 Maillages initiaux pour l'évaluation des conditions du lien 86
5.3 Evaluation de la première condition du lien 87
5.4 Evaluation de la seconde condition du lien 88
5.5 Maillage triangulaire après contraction 88
5.6 Liens d'un sommet dans un complexe étendu. 92
5.7 Structure de données des maillages avec des sous-structures 93
5.8 Représentation d'un 3-complexe étendu 96
5.9 Nommage relatif des k-faces d'un complexe 98
5.10 Notation des éléments du lien 102
5.11 Exemple de contraction valide 105
5.12 Contraction entre interfaces 106
5.13 Contraction entre une interface et une polyligne 106
5.14 Contraction d'une polyligne reliée à une interface 107
5.15 Contraction comblant un trou 108
5.16 Contraction reliant deux parties d'une surface 109
5.17 Complexité de la combinatoire 110
5.18 Vue d'ensemble d'un modèle possédant une structure linéique 111
5.19 Contraction d'une arête interdite sur la base des ailerons. 112
5.20 Contraction d'une arête interdite entre les deux ailerons. 112
5.21 Contraction d'une arête interdite impliquant un sommet d'ordre 3 113
5.22 Section d'un modèle utilisé en simulation électromagnétique 113
5.23 Contraction d'arêtes de sous-structures 114

6.1 Simplification de données de terrain 119
6.2 Vue rapprochée de données de terrain 120
6.3 Simplification d'une surface non-manifold en géologie 121
6.4 Simplification d'un modèle CAO d'un piston 122
6.5 Vue rapprochée d'une simplification extrême d'un modèle CAO d'un piston. . . 123
6.6 Transfert d'information d'un atlas vers un patient 124
6.7 Schéma général d'utilisation de la multirésolution 125
6.8 Simplification d'une surface de cortex avec préservation de la topologie 127
6.9 Cortex segmenté et graphes topologiques 128

6.10 Annotation de modèles de cortex à l'aide de nuages de points 129
6.11 Simplification volumique d'un cône 130
6.12 Résultats de simplification volumique. 131
6.13 Evolution des taux de simplification par dimensions 132
6.14 Simplification volumique minimisant la déviation d'un champ scalaire. 133
6.15 Préservation d'un champ scalaire 133
6.16 Mesure d'erreur sur des isosurfaces 134
6.17 Exemple de visualisation multirésolution 135
6.18 Phases de construction et d'utilisation d'un modèle multirésolution 136
6.19 Schéma d'intégration des composants intervenant dans la visualisation MR . . 142
6.20 Module de visualisation multirésolution 143
6.21 Détail du bord de trois matériaux 144
6.22 Visualisation multirésolution d'un maillage et de ses sous-structures linéiques . 145
6.23 Visualisation multirésolution de données résultats 146
6.24 Déplacement du volume d'intérêt au sein d'un maillage volumique 147
6.25 Agrandissement du volume d'intérêt 148

Chapitre 1

Introduction

La *simulation numérique* est devenue un moyen incontournable pour concevoir et valider un système complexe subissant des phénomènes réels. L'explosion de la puissance de calcul des ordinateurs depuis une dizaine d'années a permis le développement de logiciels de calculs toujours plus complexes, basés sur des modèles théoriques interdisciplinaires. En raison de la grande quantité d'information traitée et générée par ces codes, les moyens d'exploitation des résultats doivent évoluer en permanence pour faire face aux nouveaux besoins.

Les simulations utilisées de nos jours imposent l'utilisation de modèles complexes pouvant décrire différentes propriétés physiques sur des objets multidimensionnels. Au sein d'un domaine $3D$ des *sous-structures* de plus petites dimensions sont modélisées explicitement pour décrire des caractéristiques fines des objets. Les méthodes aux éléments finis volumiques mises en œuvre pour résoudre les schémas théoriques, utilisent souvent une discrétisation du domaine par des maillages tétraédriques non structurés incluant des mailles $2D$ et $1D$. Plus exactement, les sous-structures surfaciques et linéiques, manipulées dans le cadre de ce projet au CEA/CESTA, sont imbriquées dans les triangles, les arêtes et les sommets du maillage tétraédrique englobant. Ces éléments constituent des caractéristiques fondamentales des modèles qui doivent être mises en valeur et étudiées précisément lors de la phase d'exploitation.

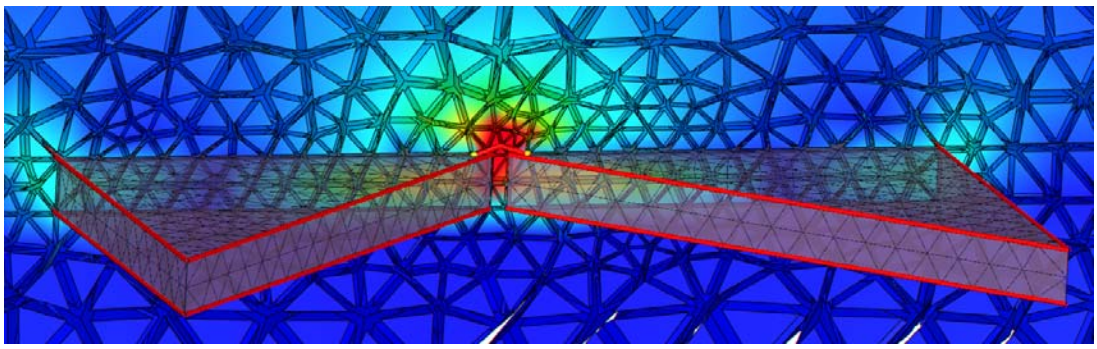


FIG. 1.1: Résultat d'une simulation électromagnétique d'un code du CEA/CESTA effectuée sur un maillage tétraédrique non structuré possédant des sous-structures surfaciques et linéiques.

La *visualisation scientifique* est devenue l'outil indispensable pour comprendre et communiquer les résultats obtenus. Ce domaine de l'informatique exploite la représentation graphique pour aider à la compréhension des données, en utilisant les conventions d'un langage visuel propre au domaine d'application visé. Avec ces outils, un utilisateur est capable de visualiser et d'interagir, à temps interactif, avec une représentation de ses résultats. Dans certains cas, les tendances et les anomalies apparaissent visuellement évidentes alors qu'une étude statistique sur les données les aurait révélées partiellement ou ne les aurait tout simplement pas détectées. Sans parler de visualisation universelle, cette dernière doit être suffisamment indépendante des données notamment pour appréhender des phénomènes inattendus au sein de la simulation.

La notion d'*interactivité* est indispensable lors de l'exploitation de données volumiques. La représentation bidimensionnelle (sur un moniteur) d'un environnement tridimensionnel (domaine de la simulation) n'est compréhensible que lorsque l'utilisateur peut interagir avec son modèle. Pour être réellement utilisables dans un cadre industriel, les outils de visualisation doivent impérativement maintenir cette interactivité même pour de grandes quantités de données.

Cependant, bien que les moyens informatiques dédiés à la visualisation aient aussi évolué, leur capacité reste bien inférieure par rapport à la quantité de données à traiter, n'assurant pas l'interactivité. Au-delà de cette divergence matérielle, la complexité des données est telle que les résultats doivent être prétraités avant d'être présentés à l'utilisateur. Est-il nécessaire de concevoir un système de post-traitement capable d'afficher le comportement de dizaines de variables sur un domaine discrétisé par des centaines de millions de mailles volumiques, le tout sur un écran de quelques centimètres de large ? Aussi précis que soit le système de visualisation, l'utilisateur, en temps qu'être humain, ne peut interpréter qu'une quantité limitée d'information à un instant donné.

La *visualisation multirésolution* aborde le problème de l'exploitation de résultats de façon pertinente. Elle est fondée sur une hiérarchisation des données afin de maintenir une manipulation interactive du modèle. Le fil conducteur de la démarche proposée est de réduire la quantité d'information à afficher en créant un ensemble de représentations simplifiées des données initiales (résolution), tout en préservant au mieux les caractéristiques du modèle étudié. Les transformations appliquées pour créer les différentes résolutions sont continues, inversibles et surtout locales. A la suite de ce traitement les données sont représentées par une approximation du modèle à basse résolution et un ensemble de transformations reconstruisant progressivement les données initiales. La visualisation multirésolution utilise ces niveaux de détails pour maintenir, à tout moment, la manipulation interactive des données.

La *simplification volumique* de maillages et des données attachées sur celui-ci est à la base d'une approche multirésolution puisqu'elle permet de décimer un modèle pour obtenir différentes résolutions. Cette technique doit préserver (i) la géométrie et la topologie du domaine volumique, (ii) les données issues de la simulation et (iii) la géométrie et la topologie des sous-structures imbriquées. Alors qu'un travail considérable de recherche a été mené sur les deux premiers points, le dernier a reçu peu d'attention. Les critères d'erreur proposés jusqu'à présent pour contrôler la simplification, ne permettaient pas de décimer des maillages tétraédriques en

préservant des sous-structures imbriquées. Les critères géométriques traditionnellement utilisés ne détectent pas toutes les inconsistances qui peuvent apparaître lors de la simplification de maillages complexes.

1.1 Objectifs

Les travaux présentés dans cette thèse ont été menés dans le cadre d'un contrat de formation par la recherche (CFR) financé par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) sur son Centre d'Etudes Scientifiques et Techniques d'Aquitaine (CESTA), en collaboration avec le projet EVASION du laboratoire GRAVIR (UJF, CNRS, INP Grenoble, INRIA). La grande quantité d'information générée par les codes du CEA/CESTA, ses caractéristiques particulières (sous-structures, domaine d'étude, ...) et l'environnement de travail (intra et inter centres) imposent l'utilisation de systèmes de post-traitement efficaces et spécialisés.

L'objectif dans le cadre de cette thèse est de proposer et d'évaluer une stratégie de visualisation, sur le centre du CEA/CESTA, permettant de manipuler les dizaines de millions de mailles, utilisées par des codes actuels en production.

Avec la stratégie de visualisation choisie (multirésolution), l'objectif est de certifier que les critères topologiques utilisés lors de l'étape de simplification volumique, préservent la topologie du maillage et de toutes ses sous-structures. Notamment, il faut certifier lors de la simplification qu'une couche mince de matériau (épaisse de quelques tétraèdres) *ne se transperce pas* ; que les éléments linéiques fins *ne se détachent pas* des structures qu'ils traversent ou sur lesquels ils sont définis ; que les interfaces entre matériaux *s'intersectent* de la même façon.

1.2 Contributions

Les contributions de la présente thèse s'inscrivent dans la mise en œuvre d'une solution de visualisation multirésolution assurant, lors de l'exploitation, la préservation de la topologie des sous-structures des données volumiques, issues de codes de simulations.

- **Proposition d'une stratégie de visualisation pour des données du CEA/CESTA**
  Une étude a été menée sur les besoins en visualisation pour un code spécifique en électromagnétisme et les moyens d'exploitation du centre du CEA/CESTA. Cette étude a conduit au choix d'une stratégie de visualisation multirésolution. Elle aborde le fonctionnement des codes de calculs, les types de maillages utilisés et l'organisation des moyens informatiques disponibles. Le nombre de mailles volumiques (plusieurs dizaines de millions) et leur aspect multidimensionnel (sous-structures) constituent les principales difficultés. Les couches minces de matériaux (couches de quelques tétraèdres en épaisseur dans des maillages composés de millions de tétraèdres) posent aussi des problèmes en termes d'exploitation. Des maillages non structurés tétraédriques possédant des sous-structures du domaine de la simulation électromagnétique ont été utilisés pour d'une part répondre à un problème précis au CEA/CESTA et d'autre part valider l'approche choisie.

► **Introduction de critères topologiques robustes**
Basés sur le cadre théorique de la *topologie algébrique*, des critères topologiques novateurs, indépendants de la complexité géométrique des modèles, ont été proposés pour assurer la préservation de la topologie d'un maillage tétraédrique et de ses sous-structures linéiques et surfaciques, lors de la simplification volumique. Un maillage est représenté par un complexe simplicial K et les sous-structures par des sous-complexes simpliciaux L_i de K. La simplification de K et L_i est réalisée par la contraction itérative des arêtes du maillage tétraédrique. *L'idée est d'étendre le complexe K par un cône de simplexes s'appuyant sur les simplexes de L_i afin de représenter toutes les caractéristiques multidimensionnelles dans un même complexe étendu $\widetilde{K}$.* En utilisant des résultats établis en topologie algébrique sur ce complexe étendu, il est possible de savoir si une arête peut être contractée sans modifier la topologie du maillage ni celle de toutes ses sous-structures.

► **Validation de l'approche multirésolution**
Les techniques de simplification avec préservation de la topologie ont été validées sur des données issues de différents domaines d'application (électromagnétisme, géologie, CAO, médecine, ...) pour mettre en valeur leur généricité. De plus, l'approche multirésolution a été utilisée dans un cadre plus large que la visualisation haute performance, au sein d'une collaboration[1] avec l'Institut IDAV (Institut for Data Analysis and Visualization) de l'Université de Californie à Davis (UCDavis). Appliquées à des données complexes et bruitées du domaine des neurosciences, les techniques multirésolution sont utilisées pour faciliter la comparaison et l'annotation de modèles de cortex humain.

► **Production d'un outil de visualisation multirésolution**
Afin de proposer un élément de réponse au problème industriel posé, un prototype de visualisation multirésolution a été développé au CEA/CESTA. Cet outil permet de naviguer dans un maillage volumique à basse résolution qui peut être raffiné localement pour présenter le maillage avec une meilleure précision (voire exacte). Les maillages des différentes résolutions sont les plus proches possible du maillage initial et surtout avec leurs caractéristiques topologiques préservées. La résolution est choisie afin de maintenir au mieux l'interactivité même pour un ensemble de données très important. De plus, grâce à l'approche multirésolution, le maillage peut être raffiné localement dans un volume d'intérêt manipulé par l'utilisateur. Ainsi, tout en préservant l'interactivité, l'utilisateur manipule localement et de façon dynamique ses données initiales.

1.3 Organisation du document

Après ce chapitre d'introduction, le second chapitre présentera l'état de l'art en simplification de maillages en détaillant les étapes d'un algorithme de simplification et les opérateurs utilisés. Les simplifications de maillages triangulaires et tétraédriques seront détaillées notamment à travers leurs critères d'erreur topologiques et géométriques.

[1] Cette collaboration a débuté en 2001, à la suite de mon séjour d'un an à UCDavis, dans le cadre d'un programme d'échange (EAP) entre l'Université Joseph Fourier à Grenoble et l'Université de Californie à Davis. Plusieurs publications depuis 2003 résultent de ce travail commun.

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude, effectuée au CEA/CESTA, sur les contraintes et les besoins en visualisation scientifique. Le cas particulier de l'exploitation de résultats en électromagnétisme sera abordé et l'approche par visualisation multirésolution sera présentée.

Le quatrième chapitre introduira le cadre théorique, emprunté au domaine de la topologie algébrique et présentera, par l'exemple, les résultats existants proches de la problématique du projet.

Le cinquième chapitre énoncera les critères topologiques proposés dans cette thèse, en utilisant des notions de topologie algébrique, afin de préserver la topologie des maillages et de ses sous-structures. De nombreux exemples seront donnés pour illustrer la robustesse de la méthode. Les implémentations dans le cas surfacique puis dans le cas volumique seront données.

Enfin, le sixième chapitre présentera des résultats obtenus grâce aux techniques de simplification surfacique et volumique avec préservation de la topologie. L'application au domaine des neurosciences et la prise en compte de données issues de simulation seront présentées. Pour conclure, l'outil de visualisation multirésolution, développé au CEA/CESTA, sera détaillé à travers son implémentation et les résultats obtenus.

Chapitre 2

Etat de l'art en simplification de maillages

Les méthodes de simplification dépendent du type géométrique des objets modélisés et des données définies sur ce domaine. Dans le cadre de cette thèse, les données à traiter sont issues de simulations utilisant des méthodes aux éléments finis volumiques. Les discrétisations utilisées correspondent à des maillages tétraédriques non structurés possédant des éléments imbriqués et des données (scalaires et vectorielles). C'est pourquoi ce chapitre s'intéresse exclusivement aux méthodes de simplification de maillages triangulaires (en 2D) et tétraédriques (3D).

Ce chapitre débute par la présentation générale d'une méthode de simplification de maillages (paragraphe 2.1) puis les classes d'algorithmes globaux (paragraphe 2.3) et itératifs (paragraphe 2.4) sont décrits. L'étude est ensuite centrée autour des types de maillages manipulés dans le cadre de ce projet avec d'une part la simplification de maillages triangulaires (paragraphe 2.5), d'autre part la simplification de maillages tétraédriques (paragraphe 2.6). Le paragraphe 2.7 s'intéresse plus particulièrement aux techniques existantes de préservation de la topologie du maillage et le paragraphe 2.8 aux mesures d'erreurs utilisées pour contrôler la simplification.

2.1 Composition d'un algorithme de simplification

La simplification de maillages (surfacique et volumique) est un thème de l'informatique graphique et de la visualisation largement traité depuis plus d'une douzaine d'années. Le vaste panel de techniques peut être partitionné selon des critères liés à l'exploitation des modèles obtenus après simplification. La préservation de la topologie est, par exemple, le critère le plus important en visualisation multirésolution alors que la rapidité de simplification serait le point crucial en infographie (au détriment de la préservation de la topologie). Les paragraphes suivants présentent les notions qui différencient les méthodes de simplification existantes.

2.1.1 Préservation de la topologie

Les algorithmes de simplification préservant la topologie modifient un modèle en préservant son genre. Puisqu'aucun trou ou tunnel n'est créé ou supprimé, la fidélité visuelle a tendance à être de bonne qualité. Par contre, cette contrainte limite le taux de simplification, puisque les objets ayant un genre élevé ne peuvent pas être simplifiés sans fermer des trous dans le modèle.

Les algorithmes modifiant la topologie peuvent, à l'inverse, combler des trous et assembler des objets non connectés, permettant une simplification bien supérieure par rapport aux méthodes précédentes. Par contre cette forte simplification est souvent au prix d'une ressemblance visuelle médiocre car des trous, constituant les détails majeurs d'un modèle, disparaissent.

Les méthodes de création de niveaux de détails requièrent des ressemblances, entre les modèles à toutes les résolutions. C'est pourquoi la préservation de la topologie est indispensable pour une approche multirésolution. De plus si le maillage simplifié est utilisé à d'autres fins que celui de la visualisation, alors la topologie doit être préservée. Ce cas se présente par exemple en neurosciences, où l'organisation des replis d'un cortex est extraite par une segmentation des régions, effectuée sur un maillage simplifié. Dans ce cas, la simplification doit préserver ces régions en interdisant le regroupement de régions initialement disjointes.

Les notions de topologie abordées dans ce paragraphe et dans l'ensemble de cette thèse portent sur les cellules et les nœuds du maillage, en opposition avec la topologie des attributs. En effet il existe des méthodes s'intéressant à la préservation de la topologie des données portées par le maillage lors de la simplification. Par exemple, la simplification d'isosurfaces peut être réalisée en préservant la topologie de toutes surfaces extractibles d'un domaine, en simplifiant directement le champ scalaire d'une manière particulière.

A titre d'exemple, le lecteur peut se référer à [GP00] où un ensemble d'isosurfaces, à différentes résolutions, est généré en certifiant la préservation de la topologie de ces surfaces entre les niveaux de résolution. Cette méthode utilise les propriétés d'une grille régulière et les points critiques du champ scalaire, c'est-à-dire les points où une isosurface changerait de genre. Plus récemment, [CL03] prend en compte des grilles non structurées. Les auteurs segmentent le volume en régions dans lesquelles tous les attributs ont la même topologie. Ils simplifient ensuite chaque région indépendamment, en rejetant les modifications qui introduisent de nouveaux points critiques dans ces attributs.

2.1.2 Re-échantillonnage des données

Certaines méthodes utilisent un sous-ensemble des sommets originaux pour les niveaux grossiers de la multirésolution, alors que d'autres approximent la position des sommets initiaux. Le re-échantillonnage des sommets n'est pas approprié au domaine de la simulation puisque les résultats du calcul sont souvent portés par les sommets. L'approximation des données est un problème non trivial et une pratique qui n'est pas forcément appréciée du côté des utilisateurs. Les techniques de simplification par sous-échantillonnage sont donc principalement utilisées dans le domaine de la visualisation. Par contre ce sous-échantillonnage peut mener à des simplifications de faible qualité puisque la forme géométrique de l'objet est directement liée à sa discrétisation. A l'inverse, le déplacement des sommets pour minimiser une erreur commise sur l'apparence générale de l'objet, génère des simplifications de meilleure qualité visuelle, appréciée en infographie.

2.1.3 Condition d'arrêt

Le critère d'arrêt de la simplification peut être défini en terme d'une erreur sur l'approximation. Dans ce cas, l'objectif est de construire un maillage de taille minimale qui satisfasse la précision demandée. Cette condition est particulièrement utile lorsque l'on s'intéresse à la préservation des données portées par le maillage. En effet, elle certifie qu'aucune caractéristique portée par le maillage ne sera altérée au-delà de l'erreur définie par l'utilisateur. D'autres méthodes utilisent un nombre de mailles ou de nœuds comme condition d'arrêt. Dans ce cas l'objectif est de minimiser l'erreur pour un maillage de taille fixe. Ces techniques permettent de contrôler la quantité d'information transmise vers un processeur graphique ou à travers un réseau, notamment en majorant cette quantité pour assurer l'interactivité.

2.1.4 Evaluation de l'erreur d'approximation

Les techniques de simplification utilisent une métrique pour contrôler la décimation. Cette valeur mesure les différences entre un modèle (maillage et données) simplifié et un modèle de référence. Elle est appelée *l'erreur d'approximation* par abus de langage. Parce que les modèles sont souvent très complexes et composés de millions d'éléments, l'algorithme de simplification doit avoir un temps d'exécution en $o(n \log n)$ pour qu'il soit utilisable. En raison de la difficulté de calculer une solution quasi-optimale de cette erreur d'approximation et des contraintes de performance, la plupart des algorithmes de simplification, en informatique graphique, utilisent des *heuristiques* pour obtenir des simplifications acceptables. Ces heuristiques intègrent des distances géométriques, des critères topologiques et des écarts calculés sur les attributs.

L'erreur d'approximation *géométrique* peut être calculée de nombreuses façons différentes, qui dépendent des données initiales et de l'application visée. Ces techniques sont résumées au paragraphe 2.8. L'erreur *topologique* n'est pas, par nature, une grandeur mesurable mais est tout de même intégrée dans l'heuristique pour pénaliser ou interdire les modifications qui altèrent la topologie du modèle. Ce choix dépend encore une fois de l'application, comme expliqué au paragraphe 2.1.1. L'erreur sur les *attributs* peut utiliser des distances géométriques entre les maillages pour déterminer les valeurs à comparer. La distance dans l'espace des données entre valeurs comparables est ensuite intégrée à l'heuristique pour pénaliser les modifications introduisant une forte variation des attributs.

L'intégration de ces trois quantités est elle aussi un point important de l'algorithme de simplification. La minimisation de cette heuristique est un problème d'optimisation particulier. En effet le but est de trouver une solution optimale selon l'utilisateur, qui choisira par exemple de favoriser la conservation des attributs, tout en minimisant la déformation des cellules du maillage. Certaines méthodes utilisent une simple somme pondérée, d'autres minimisent un ou plusieurs termes, en les exprimant dans un espace normé, de dimension égale au nombre d'erreurs voulant être prises en compte.

2.1.5 Modification itérative ou globale

De nombreuses méthodes de simplification débutent avec un maillage initial et le modifient itérativement jusqu'à obtenir la précision ou la taille souhaitée. Grâce à la répétition de ces modifications unitaires, une séquence de représentations est créée ayant une précision croissant ou décroissant progressivement. Ces méthodes de simplification progressives ou *itératives* sont particulièrement intéressantes pour la construction d'une représentation multirésolution.

D'autres méthodes de simplification ne sont pas itératives dans le sens où les opérations ne sont pas effectuées de façon progressive sur le maillage initial. Ces méthodes utilisent en général une structure régulière annexe recouvrant l'ensemble du domaine à simplifier. Ces méthodes sont rapides mais ne permettent pas, dans le cadre d'une analyse multirésolution, une description progressive des déformations.

2.2 Classification des méthodes de simplification

Les points détaillés au paragraphe 2.1 constituent le cœur d'un algorithme de simplification mais ne permettent pas de classifier le grand nombre de techniques existantes. L'opérateur de simplification appliqué sur le maillage permet, quant à lui, de regrouper ces méthodes, puisqu'il va déterminer le processus de simplification et autoriser ou non le calcul de l'erreur d'approximation et la préservation de la topologie. Une description exhaustive de tous les algorithmes existants n'est pas l'objet de ce chapitre, c'est pourquoi, pour plus de détails, le lecteur peut se référer à des études détaillant la simplification surfacique [HG97, CMS98, Gar99, Lue01, LWC+02] ou la simplification volumique [CFL+04].

Les sections 2.3 et 2.4 présentent l'ensemble des opérateurs de simplification de maillages surfaciques et volumiques. Les opérateurs décrits au paragraphe 2.3 sont non itératifs c'est-à-dire qu'ils traitent le domaine de façon globale. A l'inverse, le paragraphe 2.4 introduit un ensemble d'opérateurs fonctionnant par déformations locales et continues du domaine à simplifier.

2.3 Méthodes globales

2.3.1 Ondelettes et surfaces de subdivisions

La décomposition en ondelettes est un outil mathématique qui permet de décomposer une fonction initiale, en une fonction d'approximation et une autre de détail qui modifie la fonction d'origine à diverses échelles. Comme expliqué par [Mal89], cette décomposition est adaptée à une analyse multirésolution. Les auteurs représentent une fonction compliquée de façon hiérarchique en utilisant une partie de basse résolution plus simple et une collection de déformations appelées cœfficients d'ondelettes qui permettent de reconstruire la fonction d'origine. Cependant ces méthodes théoriques (énoncées sur un ensemble infini) ne sont pas adaptées aux données finies utilisées en infographie ou en visualisation.

En analyse du signal et en imagerie, les ondelettes sont utilisées en décomposant le domaine en une séquence de grilles régulières imbriquées qui correspondent à des niveaux. Depuis le niveau le plus fin, les détails les plus petits sont séparés du signal et codés sous forme de différences (les cœfficients d'ondelettes). Le signal, sans les détails, est transmis au niveau supérieur plus grossier et le même traitement est effectué jusqu'à la racine. A la fin de ce traitement, la grille régulière la plus grossière décrit le signal par un ensemble de moyennes de fonctions définies sur ses cellules. Ces fonctions sont associées aux cellules de chaque grille d'un niveau plus raffiné et représentent les détails qui doivent être combinés avec la représentation du signal du niveau inférieur permettant de le raffiner.

Pour utiliser les ondelettes sur des surfaces triangulées de topologies arbitraires, les résultats de [Mal89] ont été généralisés à une classe de fonctions définies sur un intervalle borné. Les premières méthodes utilisables sur des surfaces irrégulières ont été présentées par [DLW93, LDW97]. Les domaines imbriqués nécessaires à la représentation en ondelettes sont obtenus grâce à la subdivision récursive de triangles équilatéraux (en quatre autres). Cette subdivision récursive génère une collection de fonctions d'échelle qui peuvent être hiérarchisées par des ondelettes. De nombreuses techniques de subdivisions sont alors utilisées pour traiter des surfaces toujours plus complexes [SS95, EDD+95]. Certaines méthodes permettent également la prise en compte d'attributs comme la couleur [CPD+96].

2.3.2 Re-échantillonnage

La technique de re-échantillonnage[1] a été introduite par [Tur92]. De nouveaux sommets sont insérés de façon aléatoire sur la surface originale d'un maillage triangulaire, puis déplacés vers une position optimale qui dépend de la courbure de la surface. Les sommets et triangles du maillage initial sont supprimés et les points échantillonnés sur la surface sont utilisés pour construire un nouveau maillage qui correspond à une approximation du premier. Cette technique préserve la topologie de la surface, mais ne conserve pas les arêtes vives d'un maillage et ne permet pas non plus de contrôler l'erreur d'approximation.

2.3.3 Fusion de régions

Ces méthodes de simplification de surfaces[2] fusionnent des groupements de triangles et de sommets inscrits dans une certaine région. Certaines méthodes détectent les triangles qui sont quasi-coplanaires en comparant leur normale, les fusionnent et re-triangulent le trou résultant [HH93]. Ces méthodes préservent la topologie des surfaces mais ne permettent pas de borner l'erreur d'approximation. D'autres méthodes utilisent des critères de distance pour déterminer les triangles et sommets à fusionner dans une région. [KT96] utilise la distance entre un plan moyen porté par un triangle de référence et les sommets candidats. [GWH01] utilise aussi ces distances mais autorise la fusion de régions voisines créant ainsi une hiérarchie.

[1] *re-tiling* en anglais
[2] *region merging* en anglais

2.3.4 Amas de sommets

Les techniques d'amas de sommets[3] sont des méthodes directes qui ne se soucient ni de la topologie, ni des caractéristiques de la surface. Basée sur la proximité géométrique, cette approche découpe le maillage à l'aide d'une grille régulière et unifie tous les sommets se trouvant dans une même cellule (*cluster*). Un sommet représentatif de l'ensemble de la cellule régulière est alors utilisé pour le maillage simplifié [RB92]. Ces techniques sont particulièrement intéressantes lorsque les données initiales doivent être partitionnées de façon régulière, pour la parallélisation ou la description en mémoire.

2.3.5 Filtres volumiques

Ces méthodes globales, transforment un maillage polygonal en un champ scalaire défini sur une grille volumique et simplifient ce champ pour créer une approximation du maillage initial. Pour cela, une grille régulière est superposée au maillage et une valeur scalaire est affectée par cellule. A l'aide de filtres de convolution, ce champ est simplifié et utilisé pour extraire un nouveau maillage triangulaire à l'aide d'un algorithme standard du *marching cube* [LC87]. Plusieurs techniques existent pour la création du champ scalaire. [HHVW96] assigne une valeur booléenne à une cellule de la grille régulière (*voxel*) étant zéro si le centre de la cellule est à l'intérieur de l'objet sinon, un. [NT03] associe à chaque *voxel* sa plus petite distance à l'objet et affine ce premier choix par des méthodes dites de dilatation et d'érosion. L'erreur sur l'approximation peut être quantifiée et contrôlée malgré un re-échantillonnage complet du domaine. Ces méthodes sont utilisées pour modifier volontairement la topologie du maillage initial afin d'effectuer des simplifications à basse résolution.

2.4 Méthodes itératives

A l'inverse des algorithmes précédents, les méthodes *itératives* génèrent une séquence continue de modifications appliquées à un maillage. Cette séquence est particulièrement bien adaptée à une description multirésolution. Il existe deux opérateurs de modification locale à savoir la décimation et la contraction, comme expliquées dans les paragraphes suivants.

2.4.1 Décimation de sommets

Ces techniques suppriment un sommet du maillage et toutes ses cellules adjacentes puis comblent le trou créé par une nouvelle triangulation. [SZL92] introduit pour la première fois un algorithme utilisant cet opérateur en classifiant les sommets supprimables selon leur topologie et leur géométrie locale. Les techniques liées à la préservation de la topologie seront détaillées au paragraphe 2.7. Au niveau géométrique, la décision de supprimer un sommet candidat est obtenue par une estimation de la distance entre ce sommet et le nouveau maillage qui serait obtenu avec cette suppression. Cette distance, calculée pour chaque suppression, ne permet d'estimer l'erreur d'approximation qu'entre deux résolutions et non avec le maillage initial. C'est pourquoi, cette méthode ne peut borner l'erreur d'approximation globale par rapport aux données

[3] *vertex clustering* en anglais

d'origine.

De nombreuses autres méthodes ont été publiées à partir de cette idée originale pour permettre l'approximation globale de l'erreur due à la déformation. Par exemple [SL96] calcule l'erreur entre les sommets d'origine et le maillage courant, [CCMS97] calcule l'erreur entre des points échantillonnés sur les arêtes du maillage d'origine et le maillage courant, ou encore [CVM+96] force la surface simplifiée à évoluer dans un intervalle borné entre deux surfaces, l'une intérieure au maillage et l'autre extérieure (*simplification envelopes*).

2.4.2 Contraction de paires de sommets

La contraction de paires de sommets est une variante de la contraction d'arêtes dans le sens où deux sommets n'ont pas à être reliés par une arête du maillage pour être contractés. [GH97] introduit cet opérateur pour permettre de modifier la topologie d'un maillage au cours de la simplification et pour atteindre un taux de décimation supérieur aux méthodes traditionnelles de contractions d'arêtes. Puisque les sommets ne sont pas connectés, aucun triangle n'est supprimé, par contre, au même titre que la contraction d'arêtes, les triangles adjacents aux deux sommets contractés sont modifiés. Les paires sont choisies parmi un ensemble de sommets proches les uns des autres. La notion de proximité est bien sûr une heuristique qui dépend des données. La figure 2.1 illustre cette contraction dans un maillage triangulaire entre deux sommets u et v appartenant à des parties non connectées du même maillage.

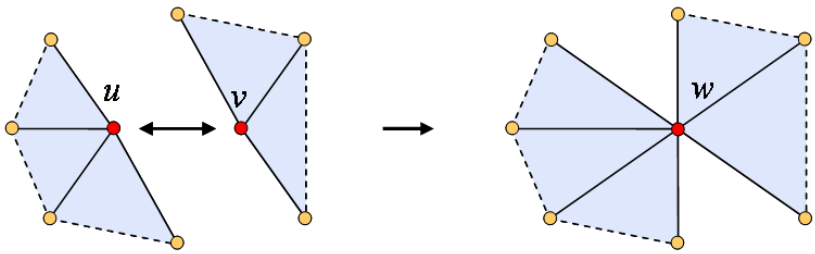


FIG. 2.1: Contraction d'une paire de sommets (u,v) en w.

2.4.3 Contraction de simplexes

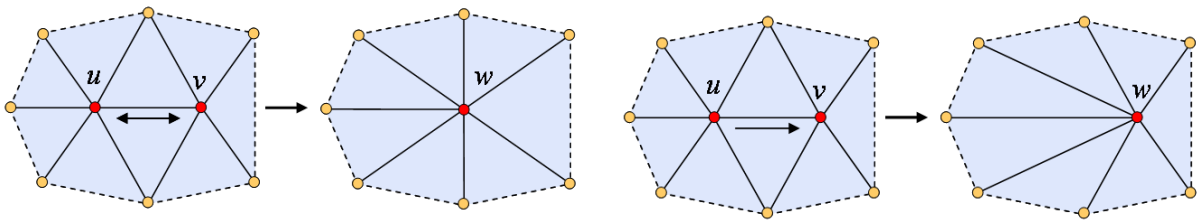
La contraction[4] consiste à écraser tous les sommets et les faces d'un simplexe en un unique sommet, modifiant les simplexes directement adjacents. L'opérateur de contraction de simplexes (arête, triangle, tétraèdre, ...) simplifie localement le maillage de façon progressive. Il est possible d'associer à toute opération de contraction, son opération inverse d'insertion ou d'éclatement[5]. Cette dernière permet, dans le cas d'une analyse multirésolution, de *redescendre* dans la hiérarchie vers un niveau plus raffiné.

[4] *collapse* en anglais
[5] *split* en anglais

Avec cet opérateur, l'erreur d'approximation peut être bornée localement ou globalement autorisant ainsi un contrôle fin des déformations. En définissant cet opérateur dans un cadre formel, emprunté à la topologie algébrique, il est possible de définir rigoureusement cet opérateur et son influence sur le maillage. Le contrôle de la topologie du maillage et de l'ensemble de ses caractéristiques est alors théoriquement possible et prouvable. C'est pour toutes ces raisons que l'opérateur de contraction a été le plus utilisé dans le domaine de la simplification de maillages surfaciques ou volumiques. Il existe cependant plusieurs variantes de contraction selon la dimension du simplexe contracté. Les paragraphes suivants les décrivent.

Contraction d'arêtes

La première approche de simplification de maillages, basée sur la contraction d'arêtes, a été introduite par [HDD+93a]. Une arête $e = uv$ est contractée en un sommet w entraînant la suppression des cellules adjacentes à e. Par exemple, la contraction d'une arête dans un maillage ayant les propriétés d'une 2-variété implique la suppression d'exactement deux triangles alors qu'au sein d'une 3-variété, c'est l'ensemble de tous les tétraèdres d'un diamant, construit autour de l'arête, qui sont dégénérés.



(a) Contraction complète de l'arête uv en w

(b) Demi-contraction de l'arête uv en w

FIG. 2.2: Contractions d'arêtes d'un maillage triangulaire.

Le schéma *a* de la figure 2.2 montre la contraction *complète* d'une arête sur un maillage surfacique. Cette contraction implique un déplacement des sommets u et v, une modification des valeurs attachées aux sommets et une déformation de toutes les cellules adjacentes aux deux sommets. Les deux triangles adjacents à l'arête sont supprimés. Le schéma *b* montre une *demi*-contraction d'arête, puisque u est écrasé sur v. Dans ce cas v et w correspondent au même sommet (par symétrie avec la contraction *complète*, le sommet v non déplacé est renommé en w). Dans ce cas la modification affecte uniquement les cellules adjacentes à u, autrement dit, la moitié des cellules en opposition à la contraction *complète* (d'où le nom de *demi*-contraction).

Contraction de triangles

[Ham94] introduit la contraction de triangles en un sommet qui peut être vue, dans certains cas, comme deux contractions successives d'arêtes. Cet opérateur est cependant plus rapide puisqu'il fait intervenir un plus grand nombre de simplexes par contraction. Par contre, cet

avantage se transforme en désavantage au niveau de l'erreur d'approximation puisque la modification n'est pas aussi locale qu'une contraction d'arête. La figure 2.3 illustre la contraction du triangle *rst* en *w*, dans un maillage en deux dimensions.

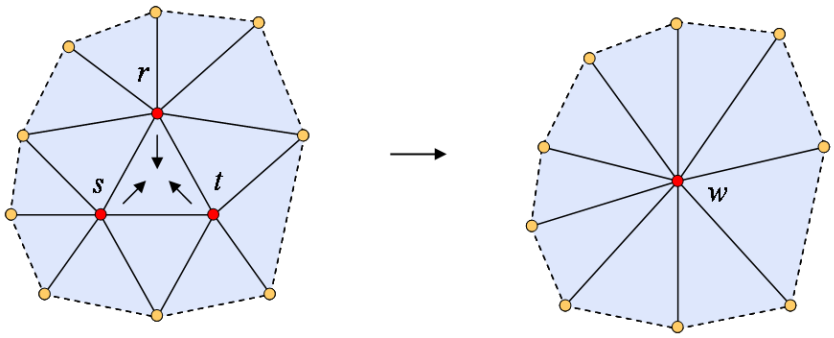


FIG. 2.3: Contraction du triangle *rst* en *w*.

Contraction de tétraèdres

[THW98] introduit cet opérateur contractant successivement trois arêtes d'un même tétraèdre. Plus récemment, [CM02] réutilise cet opérateur construit en fusionnant les quatre sommets du tétraèdre vers un unique sommet (méthode appelée *TetFusion*). Le schéma de la figure 2.4 illustre la fusion du tétraèdre central $(qrst)$ en un sommet *w*, correspondant dans ce cas, à son barycentre. Avec cet opérateur au moins onze tétraèdres sont supprimés par fusion unitaire

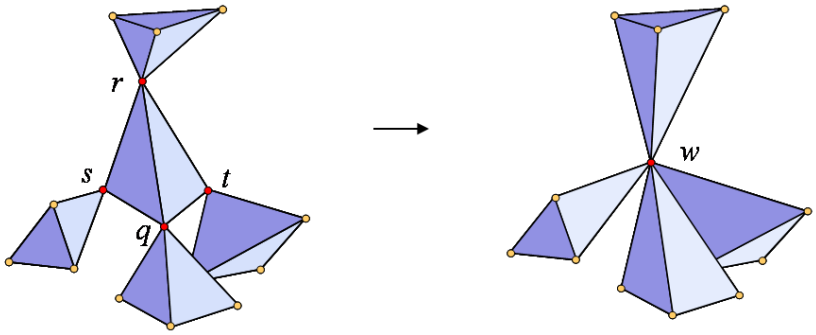


FIG. 2.4: Contraction du tétraèdre *qrst* en un sommet *w*.

d'un tétraèdre intérieur au domaine (celui fusionné, les quatre voisins par face et au moins six adjacents le long des arêtes) autorisant une simplification rapide. Par contre, cette rapidité de contraction est une fois de plus au détriment du contrôle de l'approximation. Cette méthode ne permet pas d'approximer la frontière du volume, c'est pourquoi [CM02] ne contracte ni des tétraèdres à la frontière, ni ceux qui modifieraient les tétraèdres à la frontière.

L'utilisation de ces opérateurs est discutée au paragraphe 3.5.4, page 57, dans le cadre des travaux abordés dans cette thèse.

2.5 Simplification surfacique par contractions d'arêtes

2.5.1 Algorithme général

Les techniques de simplification de maillages surfaciques par contractions d'arêtes, utilisent le même algorithme, mais diffèrent par l'heuristique qu'elles utilisent pour ordonner la séquence de contractions. Le maillage initial est simplifié, jusqu'à une résolution grossière, par une succession de *demi*-contractions d'arêtes. Le coût de contraction de chaque arête du maillage est calculé et utilisé pour ordonner les arêtes dans un tas. Ce coût correspond à une déviation géométrique, topologique et calculée sur les attributs. L'algorithme de simplification extrait la contraction au sommet du tas qui correspond à l'opération introduisant l'erreur minimale sur le maillage. La validité de cette contraction est ensuite testée pour assurer la cohérence de la topologie, de la géométrie et des attributs définis sur le maillage. Si cette opération est acceptée (c'est-à-dire que l'erreur calculée est inférieure à une borne choisie), l'algorithme met à jour le maillage et le tas d'arêtes en modifiant, supprimant ou insérant des simplexes.

2.5.2 Heuristiques les plus utilisées

***Progressive Meshes* de Hoppe** La méthode développée dans [Hop96], variante de [HDD+93a], appliquée exclusivement aux contractions d'arêtes, effectue une séquence de contractions en essayant de minimiser une erreur définie par :

$$E = E_{dist} + E_{spring} + E_{scalar} + E_{disc}. \tag{2.1}$$

Dans cette erreur, E_{dist} est la somme des carrés des distances entre les points d'origine et le maillage courant (minimisation de la distance entre les deux maillages). E_{spring} est la somme des longueurs des arêtes permettant d'obtenir des triangles simplifiés ayant un rapport de forme proche de celui d'un triangle équilatéral. E_{scalar} prend en compte les erreurs d'approximation faites sur des valeurs scalaires attachées au maillage. E_{disc} est destinée à préserver les discontinuités dans ces valeurs souvent à l'origine de caractéristiques importantes. Les simplifications ainsi obtenues sont de bonne qualité au prix d'un temps de calcul relativement élevé.

***Tolerance volumes* de Guéziec** La méthode introduite dans [Gué96] maintient un volume de tolérance autour de la surface simplifiée, de telle sorte que la surface originale soit bien contenue dans ce volume. Les arêtes les plus courtes sont contractées en priorité. Des contraintes supplémentaires sont ajoutées à l'erreur afin de prévenir un changement de la topologie, la création de triangles étirés et la variation des normales. Le volume de tolérance est défini par des sphères situées en chaque sommet de l'approximation. Il représente l'accumulation de l'erreur au cours de la simplification. Si une contraction génère un volume dans lequel la surface originale n'est pas contenue alors la contraction est rejetée. Cette méthode a l'avantage de préserver le volume global de l'objet.

***Full-range approximation* de Ronfard et Rossignac** [RR96] représente la déviation de la surface pour chaque sommet, comme la somme des distances au carré entre un ensemble de plans. L'ensemble initial des plans pour chaque sommet est composé des plans portés par ses

faces adjacentes. Au cours des contractions, ces ensembles de plans sont fusionnés et attribués au sommet résultant de la contraction, fournissant une borne de l'erreur globale d'approximation. Les auteurs utilisent aussi une erreur pénalisant les contractions introduisant une auto-intersection de parties du maillage.

***Quadric error metric* de Garland et Heckbert** [GH97] construit lui aussi une métrique à partir de distances d'un ensemble de plans mais optimise le calcul coûteux de [RR96] en représentant la métrique par une forme quadrique (matrice carrée symétrique 4×4). A chaque sommet est associée une matrice qui mesure la somme au carré des distances de ce point avec tous les plans des faces voisines. Certains problèmes liés aux valeurs et vecteurs propres de ces matrices pour des surfaces à faible courbure sont traités par le calcul de la courbure principale et des directions principales. Cette méthode rapide fournit de bons résultats malgré les importantes approximations choisies.

***Memoryless simplification* de Lindstrom et Turk** La méthode [LT98] diffère des précédentes dans le sens où elle n'utilise aucune erreur d'approximation entre les surfaces d'origine et simplifiées. A la place, les auteurs minimisent la variation de l'aire de la surface et du volume renfermé. Ils montrent que leurs résultats ont la même qualité visuelle que les méthodes utilisant une erreur d'approximation.

2.5.3 Préservation de caractéristiques

De nombreux algorithmes de simplification surfacique, de différents domaines, s'intéressent à la préservation de caractéristiques. Chacune de ces méthodes a sa propre mesure d'erreur puisque la définition même d'une caractéristique dépend du domaine d'application. En informatique graphique, par exemple, des discontinuités sont souvent observées pour des attributs non géométriques, comme de forts contrastes de couleurs dus à la projection d'ombres sur la surface. La préservation de ces contrastes est importante pour une bonne restitution visuelle du modèle simplifié. En visualisation de données de terrains, les routes, les frontières ou les fleuves sont souvent représentés par une séquence d'arêtes correspondant à un sous-ensemble des arêtes du maillage initial. Même si une déviation géométrique de ces caractéristiques peut être acceptée lors de la simplification, il n'est pas concevable d'introduire un nouveau croisement ou de couper une route existante (préservation de la topologie).

Attributs non géométriques [Hop98] utilise une structure de données appelée *wedges* dans laquelle les discontinuités d'attributs sont stockées par couple sommet-triangle. [GH98, EM99] intègrent la déviation sur les attributs dans une erreur représentée par une forme quadrique adaptée de [GH97]. Un re-échantillonnage du champ des valeurs peut aussi être utilisé comme présenté dans [CMSR98] où une carte de déplacements est calculée à haute résolution et appliquée comme une texture sur le maillage simplifié. [COM98] découple l'erreur géométrique de l'erreur spécifique aux attributs permettant de calculer dynamiquement une texture de déviation au niveau des pixels pour les normales et les couleurs. Cette texture est ensuite utilisée pour borner la déviation des attributs projetés sur la surface approximée.

Sous-structures d'une surface Certains algorithmes de simplification font appel à l'intervention d'un utilisateur (*user-guided simplification*) pour spécifier manuellement des détails à préserver sur une surface. Ces techniques utilisées principalement en informatique graphique permettent de préserver des arêtes vives, des variations de courbures ou un sous-ensemble d'arêtes au voisinage d'une région définie par l'utilisateur [CMRS98, LW01, KG03]. Ces dernières utilisent des mesures d'erreurs spécifiques à la préservation des régions spécifiées par l'utilisateur. De nombreuses méthodes ont été proposées pour construire des courbes définies par morceaux sur une surface triangulée [MKT88, HG01]. Ces courbes étant extraites, il est possible de leur associer un certain poids (*feature-guided simplification*) qui contribue à des erreurs d'approximation déjà existantes, comme [WHC04] qui étend l'erreur quadrique de [GH97].

Courbes sur des terrains Les réseaux irréguliers triangulés (*TIN : Terrain Irregular Network*) et les grilles régulières portant un champ de hauteur sont les structures les plus utilisées pour décrire un modèle de terrain (voir [FMP96, LWC+02] pour référence). La simplification des TIN (*terrain simplification*), utilisée pour une visualisation multirésolution, doit préserver des courbes extraites à la surface, représentant des détails cartographiques. Ces détails peuvent être obtenus de façon automatique [FL79]. La préservation de ces structures peut être une tâche non triviale étant donné leur complexité et leur densité. C'est pourquoi différentes méthodes ont été publiées sur le sujet. De nombreuses méthodes utilisent une extension de l'algorithme de simplification de courbes de Douglas-Peucker [DP73] en intégrant des informations sur la topologie du réseau de courbes qui n'est pas traitée dans l'algorithme d'origine. [MMC99] simplifie de telles données en utilisant une distance géométrique autour des courbes pour éviter les intersections mutuelles entre courbes. [BMMKN02] simplifie, dans un premier temps, les courbes jusqu'à obtenir des chaînes d'une seule arête de long. Ces lignes segmentent le TIN en différentes régions que les auteurs simplifient individuellement. [Mag99] simplifie un TIN à l'aide d'une technique de suppression de sommet en classifiant les sommets à supprimer selon leur topologie locale.

2.6 Simplification de maillages tétraédriques

De nombreuses techniques de simplification surfacique présentées précédemment peuvent être étendues au cas volumique. Dans la suite de l'étude, seules les méthodes ayant un lien direct avec le domaine d'application de la présente thèse sont présentées, c'est-à-dire les algorithmes de simplification volumique appliqués aux maillages tétraédriques. Une minorité des algorithmes utilise une stratégie de raffinement, c'est-à-dire la subdivision d'une représentation grossière d'un ensemble approximant le modèle initial. Ces techniques ne sont pas adéquates dans le cadre de la simulation numérique car elles sont basées sur le re-échantillonnage du volume [CFL+04]. A l'inverse, les techniques de décimation sont les plus largement utilisées, permettant de construire une représentation multirésolution et de contrôler précisément les déformations du maillage.

Historiquement, une des premières tentatives de simplification de maillages tétraédriques a été proposée par [RO96]. Des sommets internes sont supprimés aléatoirement puis le trou est re-triangulé par une triangulation de Delaunay. Cet algorithme cherche l'existence d'un sous-

ensemble de tétraèdres à créer, tels que leurs faces correspondent à des faces des tétraèdres du maillage non simplifié. Si ce sous-ensemble n'existe pas alors le sommet n'est pas supprimé. Si le maillage initial n'est pas de Delaunay alors ce test ne réussit que très rarement. Cette méthode de re-échantillonnage ne permet pas de contrôler la précision de la simplification, ni les modifications de la topologie.

La première méthode utilisant la contraction d'arête pour la simplification volumique a été présentée par [PH97] dans laquelle les auteurs étendent la représentation progressive de surfaces [Hop96] à des complexes simpliciaux. Cette méthode très générale simplifie la topologie et ne détaille pas l'utilisation éventuelle d'attributs scalaires dans l'erreur d'approximation, indispensable en visualisation scientifique. La figure 2.5 illustre les résultats obtenus avec cette méthode sur un maillage ayant une topologie complexe.

FIG. 2.5: Illustration de l'article [PH97]. Représentation progressive de complexes simpliciaux. Les 0-simplexes sont représentés par des sphères, les 1-simplexes par des cylindres et les 2-simplexes par des triangles. Cette représentation ne tient pas compte de la topologie du maillage lors de la simplification.

[SG98] introduit la notion de tétraédrisation progressive, générée à partir de contractions d'arêtes sur le même modèle que [Hop96]. Les auteurs redéfinissent une mesure d'erreur d'approximation, adaptée au cas volumique, ainsi qu'un ensemble de tests préservant la consistance du maillage. Le sommet issu de la contraction est positionné au centre de l'arête supprimée. La mesure d'erreur d'approximation est définie par :

$$E = E_{grad} + E_{vol} + E_{equi} + E_{edgelen}. \tag{2.2}$$

E_{grad} mesure la différence d'un champ scalaire le long de l'arête, attribuant une erreur importante pour les arêtes définies par des sommets portant des valeurs très différentes. E_{vol} pénalise les arêtes qui, après contraction, introduisent un important changement du volume simplifié. E_{equi} permet de favoriser une forme équilatérale des tétraèdres. De plus selon les cas, le terme $E_{edgelen}$ peut être utilisé pour favoriser la contraction des arêtes les plus courtes.

Les auteurs interdisent la contraction d'une arête introduisant l'intersection, la dégénérescence ou l'inversion de tétraèdres. Pour cela ils étendent l'heuristique sur l'inversion des normales de [RR96] au cas volumique. Le calcul du volume des tétraèdres modifiés par une contraction est obtenu par le produit croisé de trois de ses arêtes (e_i, e_j, e_k) :

$$\frac{1}{6}[e_i, e_j, e_k] = \frac{1}{6}\langle e_i \times e_j, e_k \rangle. \tag{2.3}$$

Si le volume d'un des tétraèdres au voisinage d'une contraction devient négatif alors une inversion se produit et le test rejette la contraction. La dégénérescence est aussi détectée par ce test

en utilisant un seuil minimal autorisé sur le volume des tétraèdres simplifiés. Les auteurs s'intéressent aussi au problème coûteux de l'intersection de tétraèdres de bords après une contraction dans une région non adjacente à la contraction. Ce cas peut se produire dans des zones concaves à la frontière du volume. La figure 2.6 illustre l'intersection de tétraèdres non adjacents mais se trouvant à la frontière du volume. La détection est effectuée par un test d'intersection triangle-

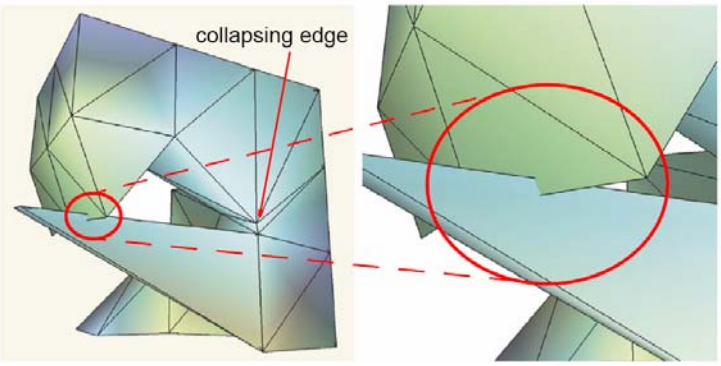


FIG. 2.6: Illustration de l'article [SG98]. Intersection de deux tétraèdres : les arêtes de deux tétraèdres à la frontière du volume et non adjacents s'intersectent lorsqu'une arête est contractée dans une région concave.

triangle entre les faces de bord, modifiées par une contraction et toutes les autres faces du bord. Le parcours des tétraèdres est effectué de façon progressive à partir de la modification en visitant tous les tétraèdres directement adjacents. Si aucune intersection n'est détectée les tétraèdres adjacents non visités sont envisagés et ainsi de suite. En pratique seulement deux itérations sont utilisées. Cette méthode introduit aussi un test statique topologique détaillé au paragraphe 2.7.

Dans [THW98] les auteurs utilisent la contraction de tétraèdres réalisée par trois contractions d'arêtes successives et associent une erreur par tétraèdre calculée sur la déviation d'un champ scalaire. Les mêmes auteurs optimisent leur méthode en utilisant la contraction d'arête et une erreur par arête [THJ99]. L'algorithme borne l'erreur entre le maillage simplifié et le maillage initial en calculant les déviations sur l'approximation d'un champ scalaire par des fonctions splines. L'erreur est accumulée au cours des contractions fournissant une borne supérieure de l'erreur d'approximation. La figure 2.7 illustre le calcul d'une borne supérieure de l'erreur d'approximation pour un triangle modifié lors de la contraction d'une arête. Les coordonnées barycentriques et les attributs scalaires par sommets sont utilisés pour définir les segments de splines. L'intersection de tétraèdres est détectée par la préservation du signe de leur volume comme défini dans l'équation 2.3. Les contractions d'arêtes impliquant des sommets de bord sont effectuées en direction de la frontière pour la préserver au mieux. Les arêtes définies avec des sommets de coins ne sont pas contractées. L'erreur pour les sommets de bord est calculée par extension du volume avec un cône de simplexe construit depuis un sommet fictif vers toutes les faces de bord. De ce fait le cas particulier du parcours de l'étoilé d'un sommet de bord est traité dans le cas général d'un sommet intérieur. L'erreur liée à une contraction d'une arête intérieure mesure la déviation du champ scalaire alors que celle calculée pour les arêtes de bord utilise une distance entre surfaces.

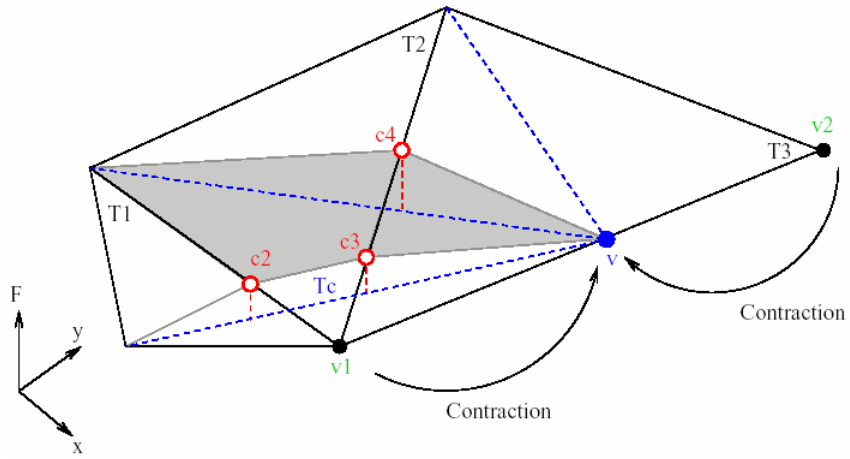


FIG. 2.7: Illustration de l'article [THW98]. Calcul de l'erreur pour le triangle T^c obtenu à partir du triangle T_1 et après la contraction de (v_1, v_2) en v. Une borne de l'erreur sur l'approximation des triangles T_1, T_2 et T_3 est obtenue à l'aide du maximum de l'erreur aux points d'intersection c_2, c_3 et c_4.

[DEGN98] introduit des critères locaux, appelés *conditions du lien*, pour détecter les contractions d'arêtes dans un complexe modifiant la topologie. Le calcul de cette condition est expliquée au paragraphe 2.7 et les notions théoriques utilisées détaillées au chapitre 4. Ce critère constitue le point de départ des principaux travaux menés dans cette thèse.

[CMPS97] présentent de façon générale plusieurs stratégies de simplification volumique afin d'introduire leur logiciel *TAn* utilisant, selon les données, une technique de raffinement ou de décimation par contractions d'arêtes. Ces travaux ont abouti à une seconde version d'un logiciel appelé *TAn2* et à une méthode de simplification par demi-contractions d'arêtes préservant la topologie du maillage [CCM+00]. Dans cette méthode, la mesure d'erreur d'approximation intègre une approximation de la distance de Hausdorff calculée entre la peau du maillage initial et simplifié. Cette erreur minimise la déformation de la géométrie de l'objet. L'inversion et la

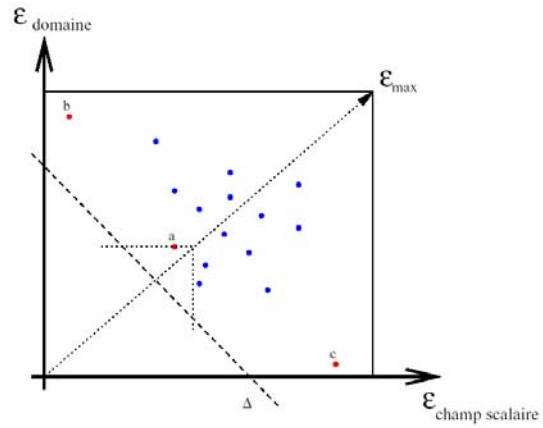


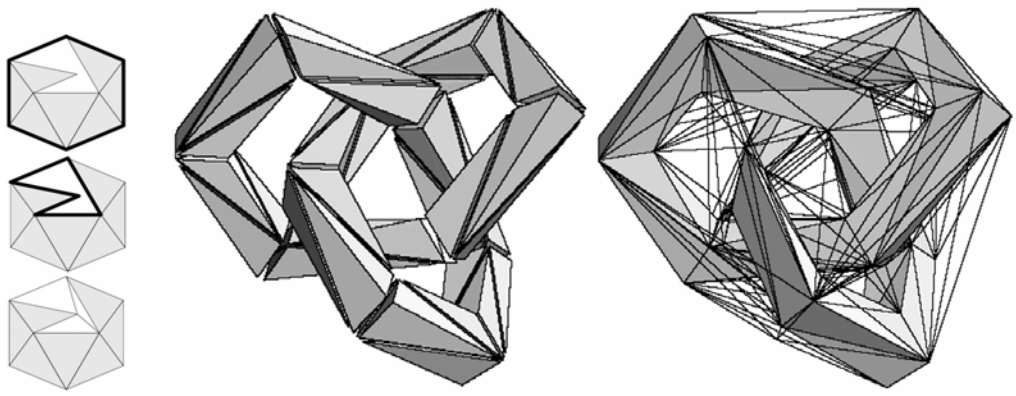
FIG. 2.8: Illustration de l'article [CCM+00]. Construction d'un espace de l'erreur d'approximation intégrant une erreur géométrique et calculée sur les données.

génération de tétraèdres étirés sont interdites par des tests géométriques. La mesure d'erreur

prend aussi en compte la déviation d'un champ scalaire calculé par une intégration sur le volume global, de la différence au carré entre les valeurs du champ avant et après contraction. Enfin différentes heuristiques sont présentées pour intégrer ces grandeurs non comparables, comme illustrées sur la figure 2.8. Au niveau topologique les auteurs utilisent, pour la première fois, le résultat de [DEGN98] fournissant un test unitaire détectant et refusant les contractions d'arêtes qui modifient la topologie du maillage.

[GVW99] utilise la contraction d'arêtes avec une mesure d'erreur du champ intégré sur un certain volume. La préservation de la peau du domaine est réalisée par une mesure de distance spécifique pour les tétraèdres de bord et en ne contractant qu'entre eux les sommets à la frontière. Aucune notion de topologie n'intervient dans cette méthode.

[KE00] s'intéresse à la simplification de maillages tétraédriques non convexes. Le test coûteux de détection d'intersections de tétraèdres de bord, utilisé dans [SG98], est remplacé par un calcul sur le volume des tétraèdres, généralisé aux frontières du domaine. Cette méthode, bien qu'incomplète, est intéressante puisqu'elle introduit des tests spécifiques à la topologie, en étudiant le voisinage de l'arête à contracter. L'algorithme calcule l'enveloppe convexe du maillage puis détecte et triangule toutes les cavités dans les zones concaves. La figure 2.9 illustre cette démarche. Ces nouvelles cellules virtuelles sont ajoutées au maillage permettant d'utiliser le



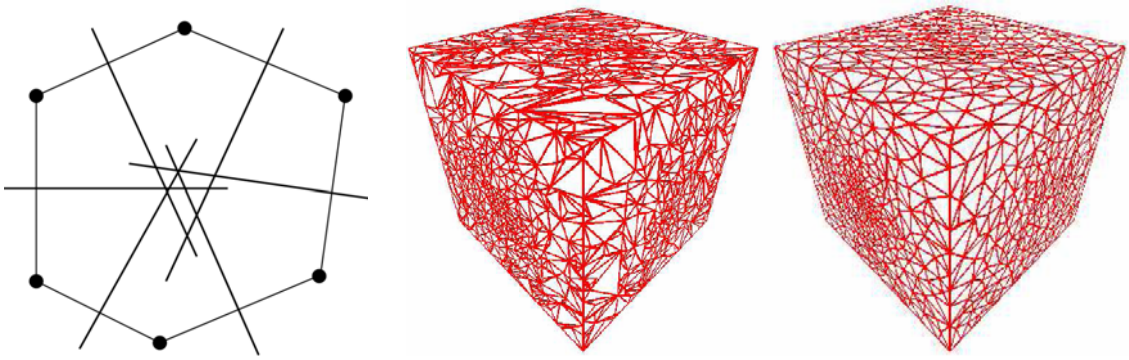
(a) (b) Résultat de la méthode proposée par [KE00].

FIG. 2.9: Illustrations de l'article [KE00]. (a) Exemple en 2D : l'enveloppe convexe du maillage est calculée. Les zones concaves entre l'enveloppe convexe et la frontière du maillage sont triangulées. (b) Exemple en 3D : le maillage avant et après la triangulation est exhibé avec les nouvelles cellules en fil de fer $(droite)$.

test d'inversion du volume d'un tétraèdre sur le maillage initial et ces nouveaux tétraèdres virtuels. Le changement de signe du volume d'un tétraèdre virtuel correspond, dans ce cas, à une intersection de tétraèdres de la frontière et donc peut être détecté systématiquement. A l'aide des cellules fictives, les auteurs introduisent une série de tests topologiques détaillés au paragraphe 2.7.

[CM02] propose une méthode rapide de simplification en contractant des tétraèdres, comme présenté au paragraphe 2.4.3. Tous les problèmes de déformations et d'intersections, à la frontière du domaine, sont contournés en interdisant simplement la contraction de tétraèdres qui ont une influence sur la frontière. Un champ scalaire rentre en compte dans la mesure d'erreur calculée à partir d'une simple différence entre les valeurs du champ avant et après simplification. Aucun test topologique n'est exhibé puisque cette méthode ne souffre pas des difficultés topologiques liées aux contractions d'arêtes. Par contre les approximations obtenues correspondent à un re-échantillonnage des données d'origine, avec la triangulation initiale de la frontière.

[NE04] calcule une approximation d'un champ scalaire défini sur un maillage tétraédrique en modifiant la mesure d'erreur calculée par une forme quadrique de [GH97]. Les auteurs définissent un sommet dans $\mathbb{R}^4$ utilisant les trois coordonnées d'un point et une valeur scalaire correspondant à la valeur du champ scalaire. Un ensemble d'hyperplans est ensuite associé, par sommet et par arête, et une distance au carré est utilisée pour la mesure d'erreur entre un sommet de $\mathbb{R}^4$ et un ensemble d'hyperplans. La figure 2.10 illustre la création des hyperplans (en 2D) et les résultats obtenus lorsque la mesure d'erreur intègre une composante basée sur des distances aux hyperplans.



(a) Hyperplans basés sur les bissectrices des arêtes en 2D

(b) L'aspect des tétraèdres est modifié par la contribution des hyperplans dans la mesure d'erreur.

FIG. 2.10: Illustrations de l'article [NE04]. (a) Le plan bissectrice dans $\mathbb{R}^3$ de chaque arête du lien autour d'une arête est étendu à un hyperplan dans $\mathbb{R}^4$ (illustration des bissectrices en 2D). (b) Différentes pondérations des termes de l'erreur d'approximation génèrent des éléments plus ou moins proche d'une forme équilatérale.

Les hyperplans influencent la position du sommet après contraction et améliorent la forme des tétraèdres modifiés. Les auteurs montrent comment la pondération des différents termes de l'erreur d'approximation (topologique, géométrique et sur les attributs) a une influence sur le taux de simplification et sa qualité. Notamment, un poids faible mais non nul sur la qualité du maillage permet d'obtenir de meilleures approximations du champ. Cette méthode préserve la topologie du maillage en détectant les contractions valides par un calcul du lien de [DEGN98] optimisé. Cette modification est présentée au paragraphe 2.7.

A part [PH97], aucune des méthodes précédentes n'est assez générale pour contrôler la simplification de cellules de différentes dimensions (3D, 2D et 1D). [GZ05] aborde ce problème en envisageant des mesures d'erreurs géométriques dans les trois dimensions du domaine. Les auteurs étendent la mesure [GH97] en utilisant des vecteurs tangents à la place des normales perpendiculaires aux plans, lors du calcul des distances. Cette méthode préserve la frontière du domaine en déformant la forme quadrique pour des contractions au bord du domaine. Cet algorithme, plus général que les précédents, peut traiter des maillages ne représentant pas des variétés mais ne préserve pas leur topologie.

Enfin il existe d'autres méthodes de simplification de maillages tétraédriques adaptées de méthodes existantes et développées pour des applications précises. Par exemple [PT04] s'intéresse à la simplification d'un champ de vecteurs défini sur un maillage tétraédrique ou [CDM04] simplifie et améliore des maillages tétraédriques pour la simulation, réalisée par des méthodes aux éléments finis volumiques. Une autre approche de simplification est employée par [VCL+05] où les données sont arrangées en mémoire externe pour être ensuite simplifiées par petites portions successivement chargées en mémoire (*streaming*). Dans ce cas, l'erreur d'approximation pour la contraction d'une arête est exprimée par la mesure de [GZ05]. [UBF+05] simplifie agressivement des maillages tétraédriques en créant une nouvelle tétraédrisation de Delaunay contrainte par un sous-ensemble des points intérieurs. Cette méthode ne tient pas compte de la topologie et re-échantillonne entièrement le domaine.

2.7 Techniques de préservation de la topologie

Parmi ce vaste panel de méthodes de simplification surfaciques ou volumiques présentées, seules [SZL92, HDD+93a, Hop96, SG98, KE00, DEGN98, NE04] proposent des techniques novatrices de préservation de la topologie du volume, de la surface ou de polylignes définies comme sous-ensembles d'arêtes. La préservation des polylignes n'est malheureusement pas traitée dans le cas volumique et n'est traitée dans le cas surfacique que par une heuristique fondée sur l'énumération des sommets au voisinage de la contraction. Il est important de noter que le test de préservation de la topologie proposé par [DEGN98] en 1998 s'est affirmé comme le test le plus robuste. De par son utilisation par d'autres méthodes de simplification par contraction d'arêtes, ce résultat constitue à présent un standard dans ce domaine.

2.7.1 Critères topologiques pour des courbes et surfaces

[SZL92] a très tôt abordé les problèmes topologiques, lors de la simplification de surfaces par suppressions de sommets. Les auteurs classifient les sommets, candidats à la suppression, selon leur voisinage. Si une condition *non-manifold* est présente autour d'un sommet u, figure 2.11(a), alors u est marqué non supprimable car sa suppression changerait la topologie du maillage. Si les triangles adjacents à u ne forment qu'un demi-disque, alors l'angle entre les deux arêtes de bord adjacentes à u est utilisé. Si cet angle est inférieur à une tolérance alors u n'est pas supprimé car il forme un coin à la frontière, figure 2.11(b), sinon il est supprimé car c'est un simple sommet de bord 2.11(c). Pour tous les sommets intérieurs à la surface, des caractéristiques topologiques liées à des structures linéiques, sont utilisées. Ces arêtes corres-

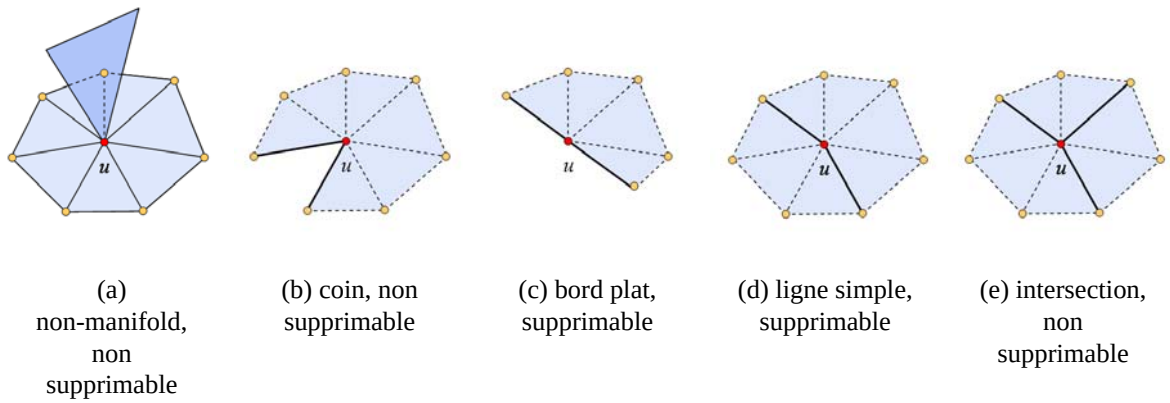


FIG. 2.11: Critères de suppression de sommets de [SZL92]

pondent à des arêtes saillantes à la surface marquées en prétraitement. Si deux arêtes marquées sont incidentes à u, 2.11(d), alors le sommet peut être supprimé, à condition de recréer une triangulation sans u qui contienne l'arête définie par les deux points à l'extrémité de ces arêtes. Si plus de deux arêtes marquées sont incidentes à u, 2.11(e), alors le sommet n'est pas supprimé. Dans tous les autres cas les sommets sont candidats à la suppression.

[HDD+93a] utilise trois tests locaux permettant d'identifier les contractions qui préservent la topologie de la surface triangulée. Dans les annexes d'une version détaillée de l'article [HDD+93b], les auteurs prouvent à l'aide d'outils de topologie algébrique la pertinence de ces tests. La contraction de l'arête uv préserve la topologie de la surface si les conditions suivantes sont vérifiées : (i) Pour tous les sommets w adjacents à la fois à u et v , alors uvw est une face de la triangulation. (ii) Si u et v sont tous deux des sommets de bord alors l'arête uv est une arête de bord. (iii) Pour une triangulation avec au moins quatre sommets, ni u ni v est un sommet de bord et pour une triangulation avec au moins trois sommets u ou v est un sommet de bord, mais pas les deux.

[Hop96] utilise les tests précédents en ajoutant la préservation de la topologie de polylignes pour les contractions d'arêtes. A l'inverse du cas surfacique, les auteurs proposent une série de conditions, sans preuves, qui permettent de préserver la topologie de polylignes. Ces tests sont résumés dans la table de la figure 2.12. Ils interdisent la dégénérescence de polylignes par écrasement (test 1 et 2), la connexion de polylignes non connectées (test 3), la contraction d'arêtes impliquant la suppression de sommets à l'intersection de plusieurs polylignes (test 4) ou la suppression de bouts de polylignes longs d'une arête (test 5 et 6).

2.7.2 Heuristiques incomplètes

[SG98] utilise un test topologique pour interdire les contractions d'arêtes qui isoleraient un sommet de bord. Ce test est effectué de façon statique, en prétraitement, en marquant les arêtes et sommets comme étant à la frontière ou à l'intérieur. Selon les cas reportés dans la table de la figure 2.13, les arêtes sont marquées acceptables pour contraction, ou non, une fois pour toutes.

Test	Condition
1	$poly(u,s)$ et $poly(v,t)$
2	$poly(u,t)$ et $poly(v,s)$
3	$nb_poly(u) \geq 1$ et $nb_poly(v) \geq 1$ et non $poly(u,v)$
4	$nb_poly(u) \geq 3$ et $nb_poly(v) \geq 3$ et $poly(u,v)$
5	$poly(u,v)$ et $nb_poly(u) = 1$ et $nb_poly(v) \neq 2$
6	$poly(u,v)$ et $nb_poly(v) = 1$ et $nb_poly(u) \neq 2$

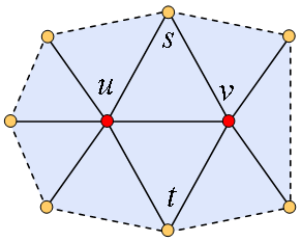


FIG. 2.12: Tests de préservation de la topologie de [Hop96] pour des polylignes définies sur la triangulation. La fonction $poly(u,v)$ renvoie vrai si une polyligne est définie sur l'arête uv et la fonction $nb_poly(u)$ renvoie le nombre de polylignes adjacentes au sommet u. Le schéma montre l'agencement des sommets s, t, u et v utilisés dans le tableau.

Le cas numéro 4 peut être utilisé pour assurer la préservation de la frontière du volume. En contractant une arête qui ne satisfait pas ce test, un sommet de bord peut être déconnecté de la frontière modifiant ainsi la topologie. La figure 2.13 illustre en 2D l'isolement du sommet t dans le cas d'une contraction de l'arête uv. Ce test topologique n'est valable que pour des simplexes à la frontière du domaine et donc ne traite pas des problèmes topologiques qui peuvent apparaître à l'intérieur du domaine. Les auteurs n'utilisent par la suite, que des tests dynamiques géométriques pour garantir une certaine consistance des maillages.

Cas	e	u	v	contractable
1	.	.	.	oui
2	.	frontière	.	oui
3	.	.	frontière	oui
4	.	frontière	frontière	non
5	frontière	frontière	frontière	oui

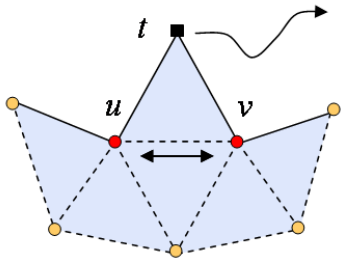


FIG. 2.13: Les cinq cas possibles selon la position des sommets ou de l'arête, permettant de détecter certaines inconsistances topologiques. Le cas numéro 4 est illustré sur le schéma où l'isolement du sommet t, en cas de contraction de l'arête uv, implique une modification dans la topologie du maillage.

[KE00] introduit des tests de préservation de la topologie aux frontières partant du fait que l'enveloppe convexe du domaine peut être modifiée par une contraction. L'algorithme ne recalcule pas à chaque fois l'enveloppe convexe du domaine mais re-triangule l'espace éventuellement créé entre le sommet issu de la contraction et l'enveloppe convexe. Un ensemble d'arêtes appartenant à ces tétraèdres fictifs peuvent introduire une inconsistance topologique lors de leur contraction. Le type d'une cellule est donc réel ou fictif. Pour ne pas connecter deux régions indépendantes, la contraction d'une arête $e = uv$ est refusée si les trois propriétés suivantes sont vérifiées : tous les voisins de e sont du même type, au moins un voisin de u est de type différent et au moins un voisin de v est de type différent.

De plus, les auteurs utilisent un test topologique pour éviter de séparer des régions initialement connectées. Une cellule adjacente à e de type t est *activement isolée* si ses faces, non

adjacentes à e, ne sont pas de type t. Si toutes les faces adjacentes à e étaient *activement isolées* alors la contraction de e entraînerait un changement de topologie en connectant deux régions non adjacentes. Ces contractions sont donc refusées. Comme le soulignent les auteurs, ces tests locaux ne sont pas suffisants pour répondre à tous les problèmes topologiques existants et donc ne constituent pas une solution robuste en soi.

2.7.3 Condition du lien

Le lien, défini au paragraphe 4.6, est l'ensemble des simplexes en contact (autrement dit qui font *le lien*) entre les cellules modifiées par une contraction d'arête et le reste du modèle. La condition du lien proposée par [DEGN98] compare le lien d'une arête uv, candidate à la contraction, avec le lien de ses sommets extrémités. Dans un 3-complexe sans bord, [DEGN98] montre que la contraction d'une arête uv préserve la topologie du complexe si l'intersection des liens des sommets est égale au lien de l'arête. Pour une même arête cette condition est calculée sur plusieurs ensembles créés selon l'ordre des simplexes autour de l'arête. Un cône de simplexes fictifs s'appuyant sur les faces de bord est ajouté au complexe à bord pour utiliser cette condition seulement valable sur des complexes sans bord. Cette condition robuste, basée sur des résultats théoriques de topologie algébrique fournit la solution la plus robuste pour préserver la topologie d'un modèle surfacique ou volumique.

2.7.4 Adaptation de la condition du lien

Pour simplifier l'implémentation de la condition du lien de [DEGN98], [NE04] l'adapte pour ne pas avoir à construire et à stocker les simplexes fictifs adjacents à la frontière du domaine. La condition du lien pour une 3-variété à bords est alors séparée en trois cas selon le type des sommets et de l'arête $e = uv$:

- Si u et v sont des sommets de bord mais e n'est pas une arête de bord alors la contraction de e est refusée car elle introduirait un *pincement* de surface et changerait la topologie. Ces arêtes ne sont donc pas traitées dans cette nouvelle condition du lien.
- Au moins un des sommets est à l'intérieur donc l'arête n'est pas à la frontière. La condition du lien se simplifie puisque le sommet et les simplexes fictifs ne peuvent être présents ni dans l'intersection des liens des sommets, ni dans le lien de l'arête. Dans ce cas la condition est identique à celle calculée pour une arête entièrement à l'intérieur du domaine.
- L'arête e est à la frontière. Dans ce cas les auteurs montrent que la condition peut être séparée en deux conditions. La première correspond à l'évaluation de la condition dans le volume sans les simplexes fictifs et la seconde uniquement sur la surface, sans bord, de la frontière.

2.8 Mesures d'erreur

Le calcul de l'erreur sur l'approximation pendant et après la simplification est le point crucial d'un algorithme de réduction de données pour évaluer la qualité du modèle obtenu.

2.8.1 Erreur dans l'espace de l'objet

La plupart des algorithmes intègrent des erreurs de type géométrique, évaluées dans l'espace de l'objet. L'erreur d'approximation entre deux maillages, basée sur une norme L_∞, peut être définie comme suit :

Définition 2.8.1 (ε-approximation) Soient M_i et M_j deux objets continus par morceaux, M_i et M_j sont des ε-approximations entre eux si et seulement si chaque point de M_i est au plus à une distance ε de points de M_j et que chaque point de M_j est au plus à une distance ε de points de M_i.

La façon la plus rigoureuse de calculer cette approximation (norme L_∞) est d'utiliser la distance de Hausdorff.

Définition 2.8.2 (Distance de Hausdorff) Soient deux ensembles de points U et V, la distance de Hausdorff H est le maximum des distances minimales entre les points des deux ensembles. Cette distance non symétrique est illustrée sur la figure 2.14. Elle s'exprime algébriquement sous la forme

$$H(U,V) = max(h(U,V), h(V,U)) \tag{2.4}$$

avec

$$h(U,V) = \max_{u \in U} \min_{v \in V} \|u - v\| \tag{2.5}$$

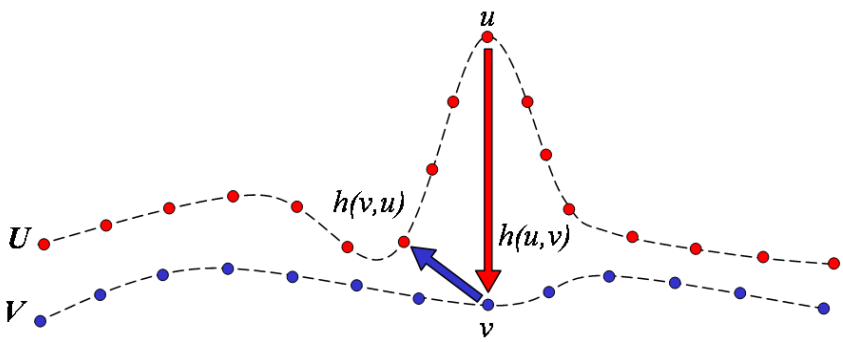


FIG. 2.14: La distance de Hausdorff mesure une distance entre deux ensembles de points. Dans cet exemple la distance de Hausdorff entre U et V est la distance maximale représentée par la flèche rouge.

L'échantillonnage fin des surfaces, utilisé pour le calcul, rend cette méthode coûteuse et sensible aux discontinuités. Une méthode alternative peut être utilisée basée sur la projection continue et bijective des surfaces les unes sur les autres. La distance est calculée à partir de ces projections. Etant donné une projection continue

$$F : U \rightarrow V, \tag{2.6}$$

la distance D est le maximum de la distance entre des points de U et V avec une correspondance entre les surfaces, obtenue par la projection F et exprimée algébriquement par

$$D(F) = \max_{u \in U} \|u - F(u)\|. \tag{2.7}$$

La projection F d'une surface sur une autre n'étant pas unique, il existe de nombreuses distances. En théorie la distance minimale $D_{\min}(F)$ est obtenue en calculant la distance minimale pour toutes les projections. En pratique, n'importe quelle fonction de projection fournit une borne maximale de l'erreur parfois acceptable, si le but n'est pas d'obtenir un minimum global. Les deux erreurs précédentes basées sur une norme L_∞ fournissent de bons résultats mais d'autres distances plus approximatives sont parfois suffisantes. Notamment, la moyenne entre deux surfaces (norme L_1) ou la distance Euclidienne (norme L_2) peuvent être utilisées pour approximer l'erreur introduite sur la géométrie.

2.8.2 Erreur dans l'espace des attributs

Les maillages utilisés en visualisation scientifique sont porteurs d'information de dimensions très différentes. Cette diversité a naturellement été génératrice d'un grand nombre de métriques qui dépendent du domaine d'application. Certaines méthodes utilisent les mêmes distances géométriques introduites précédemment, pour déterminer les valeurs à comparer. La déformation des attributs entre ces points est ensuite intégrée à l'erreur d'approximation.

D'autres méthodes expriment des variations entre les attributs dans un espace de la dimension du nombre de variables. Les couleurs, par exemple, sont traditionnellement exprimées par un triplet r, v, b avec des valeurs comprises entre zéro et un. La méthode standard pour traiter l'erreur dans l'espace des couleurs est de construire un espace Euclidien fictif RVB de dimension trois tel que les valeurs r, v et b forment une base orthonormée du système. Dans cet espace, la distance entre deux points correspond à l'erreur entre ceux-ci. Cet exemple est révélateur des problèmes de discontinuité qui peuvent apparaître avec ces méthodes de projection dans un espace, puisque l'espace des couleurs n'est pas continu de façon perceptuelle (structure non Riemannienne).

2.8.3 Erreur dans l'espace de l'image

La différence entre deux images d'un même point de vue mais pour des résolutions différentes d'un modèle peut être utilisée pour juger la qualité de l'approximation. Certaines méthodes utilisent même ces différences dans l'espace de l'image pour contrôler l'ordre de contraction des arêtes. De nombreuses métriques peuvent être utilisées pour comparer des images, mais dans le cadre de la simplification de maillages, une simple comparaison de pixels est suffisante, fournissant ainsi des méthodes à moindre coût. De plus, pour optimiser ce calcul, seule la luminance peut être utilisée puisqu'elle suffit pour décrire les formes et les contrastes dans une image. Dans ce cadre, l'erreur est une différence (méthode des moindres carrés), et notée d_{RMS} entre la luminance des pixels de deux images Y^0 et Y^1 de tailles respectives m et n pixels. Elle s'exprime par :

$$d_{RMS}(Y^0, Y^1) = \sqrt{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^0 - y_{ij}^1)^2}. \tag{2.8}$$

Cette métrique est cependant trop coûteuse pour être évaluée en plusieurs points de vue pour chaque contraction. Les méthodes les utilisant doivent optimiser la génération des images en

utilisant au maximum les calculs précédents. Seulement les sous-parties de l'image correspondant au voisinage de la contraction sont mises à jour.

2.9 Conclusion

Ce chapitre présente le vaste panel de techniques de simplification de maillages surfaciques et volumiques. Les opérateurs de simplification ont été présentés en insistant sur les critères locaux. Ils constituent une solution efficace dans le cadre de la simplification de maillages pour la visualisation multirésolution de résultats de logiciels de simulations. Plus exactement, l'opérateur de contractions d'arêtes permet de déformer le maillage de façon progressive vers une résolution grossière. Le maillage simplifié peut être continuellement raffiné par l'opérateur inverse, associé à la contraction. Le maillage à la plus basse résolution, la séquence de contractions et ces deux opérateurs constituent la base des algorithmes de visualisation multirésolution.

Cependant, ces algorithmes de simplification par contraction d'arêtes ont un certain nombre d'inconvénients :

- La contraction d'une arête peut altérer la topologie du maillage et des sous-ensembles définis sur celui-ci. La détection de telles contractions est un problème non trivial qui n'a pas, à notre connaissance, de solution générale. Il existe des méthodes de préservation de la topologie dans le cas de maillages représentés par des complexes simpliciaux. Par contre la préservation de la topologie de sous-ensembles de cellules ou de cellules n'étant pas représentées par un simplexe est encore un problème ouvert.

- La création d'une séquence de contractions est une opération coûteuse en temps de calcul. Le choix des arêtes à contracter, l'erreur associée à leur contraction et la minimisation des déformations du domaine et des attributs sont toutes des opérations coûteuses. De plus elles doivent être réalisées pour toutes les arêtes candidates à la contraction.

- Les techniques de simplification classiques en mémoire principale utilisent, en général, un ordre sur l'ensemble des arêtes du maillage. Cette structure assimilée à un tas à priorité peut, dans certain cas, nécessiter l'utilisation d'une grande quantité de mémoire.

Les limitations du point de vue de l'espace mémoire et du temps de calcul sont traitées, dans les présents travaux, grâce à l'organisation matérielle du site d'exploitation. Toutes les opérations coûteuses de cette stratégie de visualisation sont effectuées, en prétraitement, sur une machine à hautes performances (approche présentée au chapitre 3). Les travaux menés dans cette thèse s'intéressent donc principalement aux problèmes de nature topologique lors de la simplification, détaillés au chapitre 4.

Chapitre 3

Problématique industrielle au CEA/CESTA et stratégie de visualisation

Le cadre de travail de la présente thèse réalisée au CEA/CESTA, est le traitement de grandes masses de données issues de simulations numériques. Les logiciels de simulation numérique, appelés aussi codes (de calcul), produisant les données à traiter, proviennent de différents domaines d'applications traitant de phénomènes physiques variés. Ces codes constituent un système informatique puissant, regroupant plusieurs disciplines telles que la physique théorique, les mathématiques, le calcul scientifique ou encore la physique expérimentale. La conception et la réalisation d'un code nécessitent de nombreuses compétences. Les spécialistes intervenants (les utilisateurs) sont souvent géographiquement distants avec des moyens informatiques hétérogènes mais travaillant sur les mêmes données et les mêmes résultats. Que ce soit au cours de la simulation ou a posteriori, la visualisation constitue un moyen universel de comprendre et d'échanger des résultats. Dans cette optique la visualisation est partie intégrante de la chaîne de production associée à un code.

Ce chapitre introduit au paragraphe 3.1 les objectifs du projet dans le domaine de la visualisation scientifique. Les contraintes de l'environnement de travail au CESTA sont détaillées aux paragraphes 3.2 et 3.3, en illustrant les besoins par l'exploitation de résultats d'un code de calcul en électromagnétisme au paragraphe 3.4. Enfin la stratégie de visualisation par une approche multirésolution sera justifiée au paragraphe 3.5.

3.1 Les objectifs

Un des objectifs de la visualisation scientifique est de permettre à un utilisateur d'explorer interactivement ses propres données de façon autonome. L'organisation convenable des données en mémoire externe (disques) ou en mémoire interne (RAM[1]) avant visualisation, est une étape décisive pour réaliser une exploitation interactive. Cette organisation est particulièrement importante lorsque les données dépassent les capacités de traitement usuelles. La notion d'interactivité est primordiale dans le contexte de la simulation pour la compréhension d'une scène 3D. En effet la manipulation d'un objet volumique est nécessaire pour comprendre sa composition

[1] *Random Access Memeory*, constituant la mémoire principale d'un ordinateur.

et ses caractéristiques. De même les données définies sur ces modèles varient, non seulement à la surface de l'objet, mais aussi au sein de son volume en formant éventuellement des caractéristiques isolées, tels les "vortex" pour des données vectorielles.

L'organisation ou *hiérarchisation* des données doit être réalisée sans duplication systématique des données originales et doit tenir compte d'un certain nombre de contraintes liées à l'environnement de travail. Les principales contraintes au CESTA proviennent à la fois de l'utilisation de logiciels de calculs complexes, ayant des données formatées non modifiables et de l'architecture centralisée du parc informatique. En effet, cette organisation introduit des contraintes de communications et de performances dues à l'hétérogénéité entre :

- le serveur de fichiers évoluant sur une machine dédiée locale (au CEA/CESTA),
- la machine de production se trouvant à plusieurs centaines de kilomètres,
- les machines locales d'exploitation.

3.2 Les logiciels de calculs

3.2.1 Composition d'un logiciel de calcul

En amont de la simulation, les phénomènes physiques sont généralement décrits par des systèmes d'équations aux dérivées partielles énoncés par des physiciens. La complexité de ces systèmes nécessite le travail des numériciens, qui à l'aide des mathématiques, vont développer des méthodes numériques permettant de calculer une solution approchée des équations en un nombre fini de points (méthodes aux éléments finis).

L'implémentation de ces méthodes numériques est ensuite réalisée par des informaticiens, qui doivent également prendre en compte la représentation des objets (structure) et toute interaction homme-machine avec les modèles. La présentation des résultats est le cœur de la présente thèse. Les contraintes fortes qu'impose un code sur ses données et ses résultats ont une influence sur les travaux de thèse. En effet les résultats doivent être traités sur des données formatées et non modifiables. La visualisation doit être sans perte d'information et effectuée sur des stations graphiques standard, c'est-à-dire celles dont dispose chaque utilisateur dans son bureau.

La dernière étape du code (et la plus importante) est la validation de l'ensemble du système informatique par des expérimentateurs. En effet un défaut observé sur les résultats peut mettre en évidence une incohérence à n'importe quel niveau de la chaîne telles des erreurs sur la modélisation, sur la méthode numérique, sur l'approximation ou encore sur l'implémentation. Dans le cas contraire, le domaine de validité du code est défini en analysant sa capacité à restituer les phénomènes physiques.

3.2.2 Les logiciels de calculs au CESTA

Il existe une grande variété de codes de calculs développés sur le centre du CESTA, qui répondent aux demandes des différents projets du CEA. Les principaux domaines d'applications sont les suivants (liste non exhaustive) :

- **codes de thermomécanique** simulant la résistance de conteneurs de transport ou de perforation d'enceintes.
- **codes laser** simulant la propagation et l'amplification de faisceaux, issus d'un laser de puissance, dans les chaînes optiques.
- **codes de mécanique du vol et aérodynamique** simulant l'écoulement d'un fluide le long d'un objet et des problèmes de couches limites.
- **codes d'électromagnétisme** simulant le comportement électromagnétique d'un objet éclairé par un champ incident.

Des modèles multiphysiques apparaissent, permettant de résoudre par exemple, des problèmes de mécanique, d'aérodynamique, de chimie ou encore de thermique au sein d'un même code. Par exemple, l'étude de l'ablation, qui impose une simulation avec un couplage fort entre l'aérodynamique et la thermique, est une simulation faisant intervenir différentes physiques.

3.2.3 Dimension des maillages

Afin de modéliser un phénomène et d'effectuer un calcul sur celui-ci, des choix sur les niveaux de représentation doivent être faits à chaque étape de la chaîne de calcul : précision du modèle physique, taille de la géométrie, discrétisation des méthodes numériques, capacité de la station d'exploitation ... La construction du maillage d'un domaine de calcul est l'une des premières étapes de la modélisation informatique qui consiste à remplacer ce domaine par une union finie de cellules. Ces dernières dépendent de la dimension spatiale du domaine mais sont généralement représentées par des triangles, des tétraèdres ou des hexaèdres.

Les maillages supportant les données sont créés en amont de la simulation par des ingénieurs spécialisés. Tout d'abord, une géométrie décrivant les caractéristiques du domaine est créée à partir d'un modeleur[2]. Cette géométrie ne tient pas compte du phénomène physique à étudier mais décrit précisément l'objet sur lequel la simulation aura lieu. Puis cette géométrie est discrétisée[3] à l'échelle du phénomène à étudier. C'est pourquoi le nombre de mailles ainsi que leur densité au sein du domaine varient selon l'application.

3.2.4 Types de maillages associés aux codes du CESTA

L'utilisation de types de maillages différents selon les codes, impose un post-traitement adapté en terme de visualisation. La connaissance de ces maillages est donc importante afin d'obtenir une exploitation optimisée des résultats. Les maillages peuvent être de structurés réguliers (ou cartésiens), structurés curvilinéaires ou non structurés (voir le paragraphe 4.4 page 66). Il peuvent aussi être définis sur un seul bloc recouvrant tout le domaine d'étude ou en plusieurs blocs conformes, semi-conformes ou non conformes (avec éventuellement des chevauchements entre les blocs).

[2]Les modeleurs `IDEAS` développé par `UGSPLM` et `CATIA` développé par `Dassault System` sont majoritairement utilisés au CEA/CESTA. Les géométries sont transférées aux mailleurs via le format `STEP (ISO 10303)`.

[3]Les principaux mailleurs utilisés au CESTA sont `ICEM`, développé par `ANSYS`, et `IDEAS`.

Les codes de thermomécanique simulent des torsions et déformations d'objets à géométrie peu complexe. Ils utilisent des grilles hexaédriques non structurées avec éventuellement l'utilisation locale de grilles tétraédriques pour des parties plus complexes de la géométrie. Certaines sous-parties du domaine correspondent à la modélisation de poutres ou ressorts consolidant l'objet. Ces éléments sont maillés à l'aide d'éléments filaires plongés dans l'objet.

Les codes laser simulent la propagation des faisceaux à travers des composants optiques constituant la chaîne laser. Ces composants peuvent être par exemple des plaques de verre dopé au néodyme[4] pour la partie amplificatrice ou des cristaux de KDP[5] pour la partie conversion de fréquence. La modélisation doit suivre la croissance de défauts sur ces composants, traversés par un faisceau à section carrée de 40×40 cm. C'est pourquoi la discrétisation spatiale dans une tranche perpendiculaire au faisceau est de l'ordre de 10000×10000. Les endommagements que subissent les composants sont alors modélisés par seulement quelques pixels sur ces images. La photo 3.1 est le résultat d'une simulation laser montrant la carte des intensités pour une tranche d'un faisceau.

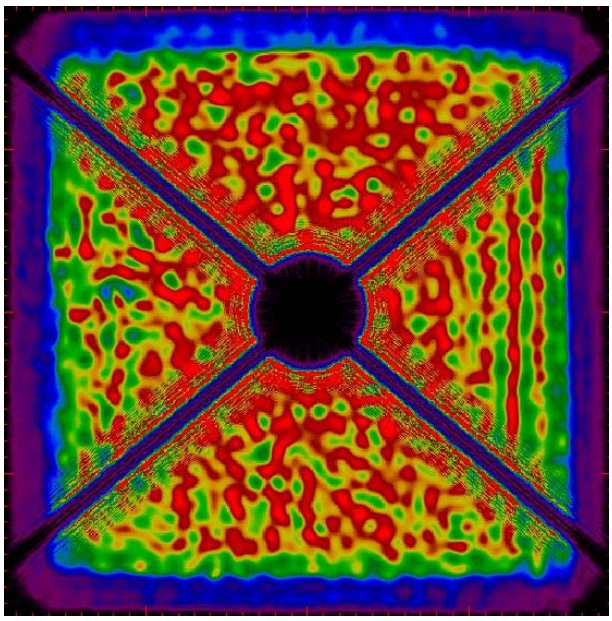


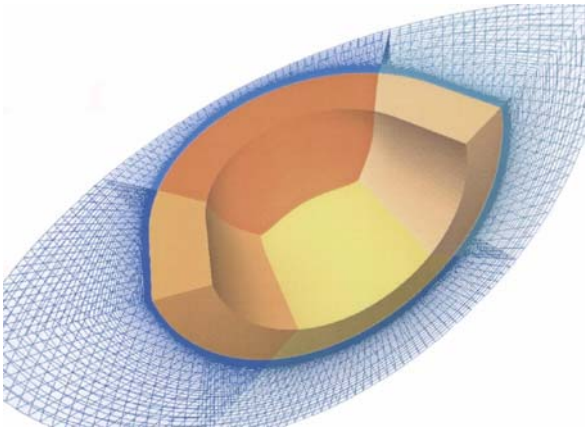
FIG. 3.1: Résultat d'une simulation laser montrant la carte des intensités pour une tranche d'un faisceau. Les zones sombres, formant les diagonales, représentent la modélisation de barres de soutien aux outils de diagnostics, telles les caméras. Les défauts à étudier sur ces résultats (non visibles sur cette photo à cette échelle) sont de l'ordre du micron pour cette tranche de 40×40 cm.

Les codes de mécanique du vol modélisent la physique entre des milieux hétérogènes (air, liquide, solide). Un modèle est discrétisé de façon différente selon la nature du milieu qu'il

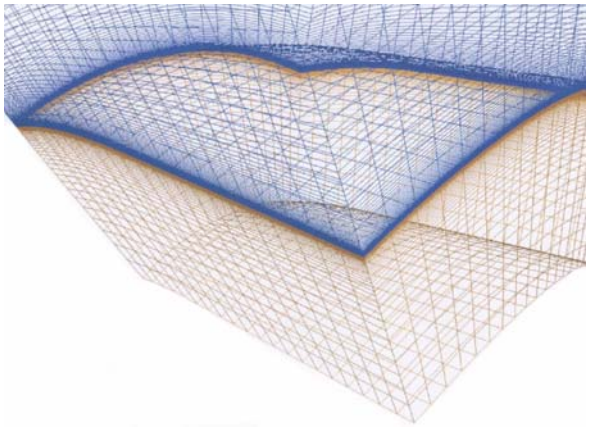
[4]Le néodyme appartient à la famille des terres rares. Malgré sa présence en faible quantité, il est à l'origine de la multiplication des photons

[5]C'est un cristal (phosphate diacide de potassium : KDP) qui a la propriété, sous certaines conditions, de changer la fréquence d'un faisceau laser

représente. Des grilles structurées curvilignes multiblocs sont utilisées, avec en moyenne, une dizaine de blocs de $100 \times 100 \times 100$ mailles. En aérodynamique des grilles hexaédriques sont utilisées pour modéliser à la fois l'écoulement d'un fluide autour d'un solide mais aussi la thermique à l'intérieur de ce dernier. La particularité de ces maillages réside dans la discrétisation très inégale, entre l'intérieur du corps solide et sa paroi en contact avec le corps fluide. Il peut exister un rapport de forme de l'ordre du million entre ces mailles. La figure 3.2 montre un maillage utilisé au CESTA en aérodynamique où un corps (représenté par le solide jaune) est en contact avec un milieu extérieur (maillage en fil de fer bleu). La discrétisation varie en fonction de la distance à la paroi, avec la plus forte densité au contact entre ces milieux, comme illustré par la figure 3.2(b).



(a) Modélisation d'un corps solide plongé dans un fluide



(b) Rapport de forme des mailles de l'ordre du million

FIG. 3.2: Maillage hexaédrique de 500000 mailles utilisé comme support aux simulations en aérodynamique. La thermique du corps solide, en jaune, est étudiée ainsi que l'écoulement du fluide, dans la partie extérieure, représentée par le maillage en fil de fer en bleu (a). Les mailles à la paroi de l'objet, en contact avec le fluide, sont jusqu'à un millionième plus petites que les mailles intérieures (b).

Les codes en électromagnétisme modélisent le comportement d'un champ, aussi bien à la surface de l'objet, qu'en son intérieur. La discrétisation du modèle est réalisée à l'échelle de la longueur d'onde du champ électromagnétique incident afin de capturer les plus légères variations de ce champ. Ces phénomènes étant volumiques et non localisés, les maillages utilisés sont des grilles tétraédriques non structurées. Etant donné les dimensions des objets étudiés, 50 millions de cellules sont nécessaires pour les simulations actuelles. Des interfaces entre des sous-parties (matériaux) de l'objet sont modélisées à l'aide de surfaces triangulées. Des éléments linéiques provenant directement de la géométrie initiale sont discrétisés par un ensemble de polylignes.

3.3 Les contraintes de l'environnement de travail

3.3.1 Les moyens informatiques au CEA

Il existe neuf centres du CEA en France, chacun spécialisé dans des domaines disjoints. Dans le cadre de grands programmes, des équipes de différents centres travaillent ensemble en partageant leurs connaissances et leurs moyens. Plus particulièrement, le CESTA/DAM a mis en place en 1995 le programme "Simulation". Ce programme consiste à reproduire, par le calcul, les différentes étapes du fonctionnement d'une arme nucléaire. Pour le mener à bien, des logiciels de calculs rigoureux sont développés à partir des modèles physiques validés en laboratoire et de résultats des essais nucléaires passés.

Afin de supporter la charge de calcul nécessaire pour ce type de simulation, le CEA/DAM s'est équipé en 2001 d'un supercalculateur nommé "Téra". Cette machine massivement parallèle est composée de 2560 processeurs atteignant une puissance de calcul théorique de 5 téraflops ($1,3$ téraflop en soutenu). La figure 3.3 montre la salle actuelle contenant les nœuds de calcul. Fin 2005, un nouveau supercalculateur "Téra-10" sera mis en service portant la puis-

FIG. 3.3: Le supercalculateur Téra du CEA/DAM

sance de calcul à 62 Téraflops en crète ($12,5$ Téraflops en soutenu) grâce à ses quelques 8000 processeurs. Cette machine va répondre aux nouveaux besoins matériels des utilisateurs du CEA en terme de puissance de calcul.

3.3.2 Contraintes sur l'espace de stockage au CESTA

La centralisation du serveur de fichiers facilite la sauvegarde des données manipulées quotidiennement et répond aux critères de sécurité du CEA/DAM. En effet, les disques contenant les données peuvent être isolés physiquement et l'accès à tout fichier du système peut être contrôlé systématiquement puisqu'ils sont localement sur le serveur de fichiers. Par contre cette centralisation constitue un goulot d'étranglement dans la chaîne de production. L'espace disque disponible est limité et son augmentation est une opération délicate puisqu'il s'agit d'une machine centralisée à l'inverse d'un poste autonome. La visualisation doit être réalisée en utilisant une faible quantité de structures annexes souvent en contradiction avec l'exploitation de maillages non structurés (nécessitant la table de connectivité pour tous les éléments ou de plusieurs niveaux de résolution du même maillage).

3.3.3 Contraintes sur le transfert des données

Certains logiciels de simulation développés ou utilisés sur le centre du CESTA requièrent une importante puissance de calcul afin d'obtenir un résultat dans les délais impartis. La production est alors réalisée sur le super-calculateur "Téra", localisé en région Parisienne et contrôlée via une ligne longue distance à débit limité. Etant donné la quantité de données générée à distance sur la machine de production, le transfert retour vers le CESTA de ces résultats nécessite jusqu'à plusieurs heures d'attente. Cette contrainte de temps de transfert motive la demande d'une visualisation intermédiaire plus légère à transférer qui permet de valider des résultats intermédiaires. La méthode repose sur sa capacité à extraire un sous-ensemble représentatif des données, suffisant pour une exploitation partielle ou locale à une caractéristique.

3.3.4 Contraintes sur les stations d'exploitation

Les stations d'exploitation des utilisateurs du CESTA sont caractérisées par des performances hétérogènes. Certains exploitent leurs résultats directement sur des nœuds de la machine de production, connectés à distance via un serveur de terminaux X. Dans ce cas, les performances graphiques sont limitées par le réseau et surtout par l'émulation du contexte graphique sur le terminal qui ne possède pas de processeur graphique. D'autres utilisateurs, demandeurs d'une plus grande puissance graphique, utilisent des stations isolées connectées par un réseau, qui limite une fois de plus les performances dans le cas de visualisation de données distantes. Pour des problèmes de sécurité de l'information, aucune station ne doit posséder de mémoire rémanente dans les bureaux, ce qui explique le choix traditionnel des terminaux X comme stations d'exploitation. Malheureusement, avec l'augmentation rapide de la quantité et de la complexité des résultats issus de simulations, d'autres outils d'exploitation doivent être utilisés comme des stations avec des contraintes fortes de sécurité (isolement physique de la station).

3.3.5 Avancées technologiques inégales

Depuis une vingtaine d'années, l'explosion technologique des machines parallèles permet une utilisation intensive du calcul haute performance. Cependant malgré ces progrès, une dissymétrie s'installe entre, d'une part, les moyens d'acquisitions et de simulations qui ont connu un gain de puissance de l'ordre du million en dix ans et d'autre part, les outils et méthodes d'exploration des données qui eux ont seulement été multipliés par dix. Les limites naturelles du traitement de l'information de l'œil et du cerveau humain obligent les utilisateurs à concevoir des méthodes d'analyse de données de plus en plus complexes. Les méthodes actuelles de visualisation de masses de données utilisent la notion d'organisation des données (hiérarchisation, *clustering*, *streaming*, ...) avant exploitation. Certaines, comme le clustering, sont utilisées pour accélérer le rendu en optimisant la répartition des primitives graphiques sur plusieurs machines dédiées à la visualisation. D'autres, comme la hiérarchisation, allègent le traitement d'un résultat en extrayant un sous-ensemble caractéristique du modèle. Dans tous les cas, les méthodes organisent les données (en les modifiant ou non) pour une exploration optimale en terme de performances graphiques de la station d'exploitation.

3.3.6 Grandes masses de données

Les ressources nécessaires pour stocker et afficher des données sont proportionnelles à la résolution du maillage volumique (densité de points du modèle). Les logiciels de calculs notamment ceux du CESTA décrits au paragraphe 3.2 étudient des phénomènes toujours plus petits pour un même domaine d'étude. La finesse des grilles nécessaires à cette précision rend les données difficiles à manipuler de façon interactive sur une station graphique de faible coût. En furtivité, par exemple, les phénomènes observés sont approximativement mille fois plus petits que l'objet modélisé et donc discrétisé par plusieurs dizaines de millions d'éléments. Cette montée en précision s'explique aussi par la mise en place de codes multiphysiques traitant de phénomènes de nature indépendante, réalisée par un couplage fort au sein d'un même code.

3.4 Cas particulier de l'Électromagnétisme en furtivité

L'électromagnétisme est un domaine de la physique utilisé dans de nombreuses applications comme la compatibilité électromagnétique, la furtivité ou la création de nouveaux supports absorbants. La technologie furtive repose sur la conception de nouveaux matériaux absorbants et de géométries complexes. L'objectif est d'atténuer le champ électromagnétique diffracté par une cible quand celui-ci est éclairé par un champ incident émis par un radar. La mesure de visibilité d'un objet par rapport à un radar est exprimée par un unique scalaire complexe appelé la *Section Effective Radar* (SER) qui correspond à un bilan d'énergie entre le champ diffracté et le champ incident. L'optimisation de celle-ci est indispensable pour la conception d'objets furtifs.

La minimisation de la SER dans le cadre de la simulation, est réalisée en analysant le comportement du champ électromagnétique diffracté d'un objet en tous points de l'espace. Dans le cadre de la thèse, les données à traiter pour la visualisation sont issues d'un logiciel de simulation électromagnétique 3D hautes fréquences. Les équations de Maxwell en 3D, sont résolues par une méthode d'éléments finis volumiques à l'intérieur et faiblement couplée à une résolution du problème extérieur, par des équations intégrales. Etant donné la taille des phénomènes électromagnétiques étudiés, les modèles sont discrétisés à l'échelle de la longueur d'onde du champ électromagnétique.

3.4.1 Composition des objets modélisés

La taille importante des maillages, la présence de couches minces de matériaux et de sous-structures de différentes dimensions dans la géométrie sont les caractéristiques qui différencient ces données d'autres applications. Ces dernières imposent l'utilisation de techniques de visualisation adaptées issues pour certaines, de la présente thèse.

La taille des maillages croît avec la fréquence du champ utilisée pour la simulation. C'est pourquoi, pour les hautes fréquences, la discrétisation génère des maillages de plusieurs millions de cellules. Le domaine intérieur peut alors être décomposé en une somme de sous-domaines imbriqués en pelures d'oignons comme illustré sur la figure 3.4. Lors de la résolution les domaines sont traités un à un et de façon séquentielle avec une parallélisation possible du

calcul au sein d'un même domaine. Le couplage entre les domaines est réalisé via des conditions de transmissions aux interfaces utilisées aussi pour le couplage avec le domaine extérieur.

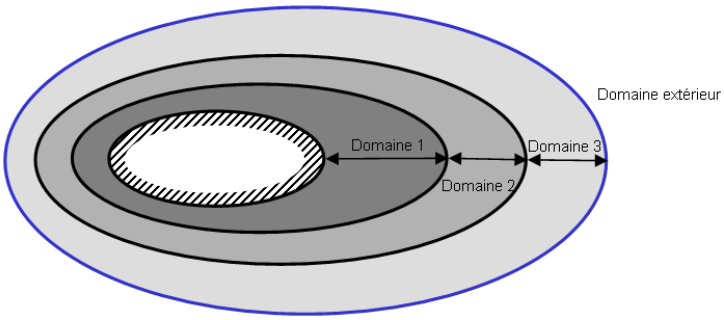


FIG. 3.4: Décomposition en domaines des logiciels de calcul en électromagnétisme.

Les objets modélisés ont la particularité d'être composés de couches fines de matériaux représentées dans les modélisations par des tranches de quelques tétraèdres d'épaisseur comme illustré sur la figure 3.5. Même pour des maillages de plusieurs dizaines de millions de mailles ces couches peuvent être modélisées par un seul tétraèdre en épaisseur. De plus une même couche peut évoluer dans l'ensemble du domaine en formant éventuellement une coquille fermée englobant d'autres couches de matériaux. La différence de taille entre le maillage et l'épaisseur de ces couches pose un problème en terme de visualisation puisque le sous-échantillonnage utilisé pour la hiérarchisation doit préserver ces couches minces et donc simplifier sans *percer* ces fines tranches.

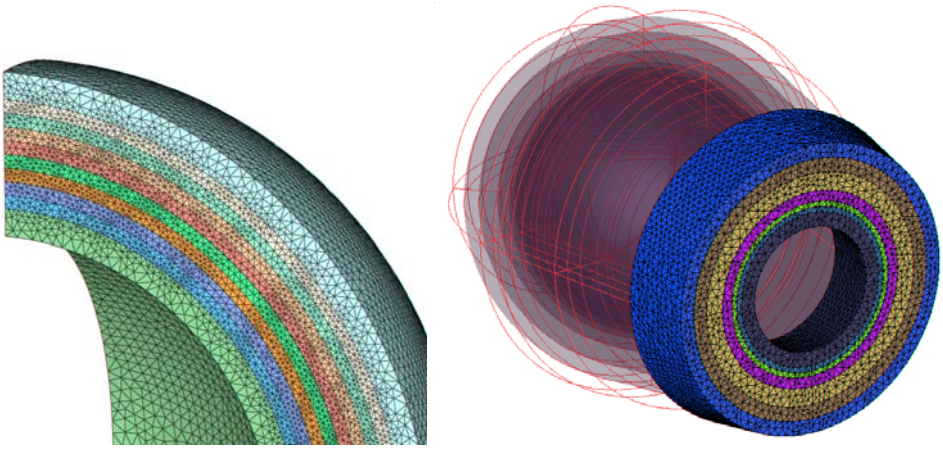
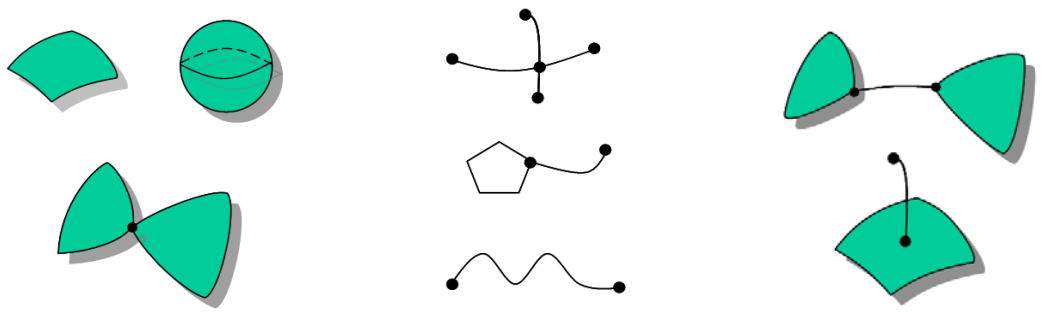


FIG. 3.5: Couches minces de matériaux dans des modèles utilisés en simulation électromagnétique.

3.4.2 Sous-structures de la géométrie

Les interfaces entre des couches de matériaux sont représentées sous forme de surfaces. Les utilisateurs exploitant ces résultats sont particulièrement intéressés par le comportement

du champ le long de ces interfaces, modélisées explicitement dans le modèle, par un maillage surfacique triangulaire. Dans le cas précis des résultats traités dans un projet du CESTA, les tri-



(a) Surfaces à bords, fermées ou avec des singularités

(b) Intersections ou cycles de polylignes

(c) Ensemble de surfaces et polylignes adjacentes

FIG. 3.6: Schémas représentatifs des sous-structures présentes dans les maillages volumiques.

angles de la surface sont des faces de tétraèdres du maillage volumique englobant. Ces surfaces (schématisées en figure 3.6 (a)) peuvent avoir des bords comme l'interface représentée en jaune sur la figure 3.7 (c) ou être fermées si l'on s'intéresse à une poche de matériau plongée dans un autre matériau englobant. Dans d'autres cas, ces surfaces peuvent être caractérisées par des singularités en certains points pertinents.

Une autre particularité de la géométrie des objets étudiés, est la présence d'éléments filaires représentés par une succession d'arêtes de tétraèdres formant des polylignes. L'étape de maillage en amont de la simulation, a été contrôlée par la présence dans la géométrie, de ces éléments surfaciques et linéiques. C'est pourquoi les tétraèdres au voisinage de tels éléments suivent parfaitement la courbure et l'échantillonnage de ces structures de plus petites dimensions (raffinement du maillage comme illustré figure 3.7 (c)).

Ces polylignes peuvent posséder des cycles, des intersections multiples ou des points terminaux comme illustré sur la figure 3.6 (b). Les figures 3.7 (b) et (d) montrent quant à elles, des polylignes complexes issues de maillages réels utilisés par les codes. Certaines simulations en électromagnétisme simulent le comportement d'une antenne plongée dans un volume discrétisé. Dans ce cas les cellules volumiques sont porteuses de l'information sur le champ électrique et magnétique. La structure des antennes est quant à elle modélisée par des cellules surfaciques (2D) et linéiques (1D) comme schématisée en figure 3.6 (c) et illustrée figure 3.7 (a) et (c). Ce mélange de cellules de différentes dimensions introduit un certain nombre de points et régions importants à la simulation. Notamment les points de contact entre les structures linéiques et surfaciques sont d'une grande importance.

La visualisation de ces sous-structures est fondamentale pour comprendre les résultats. C'est pourquoi, la simplification préparant la visualisation multirésolution, doit maintenir la cohé-

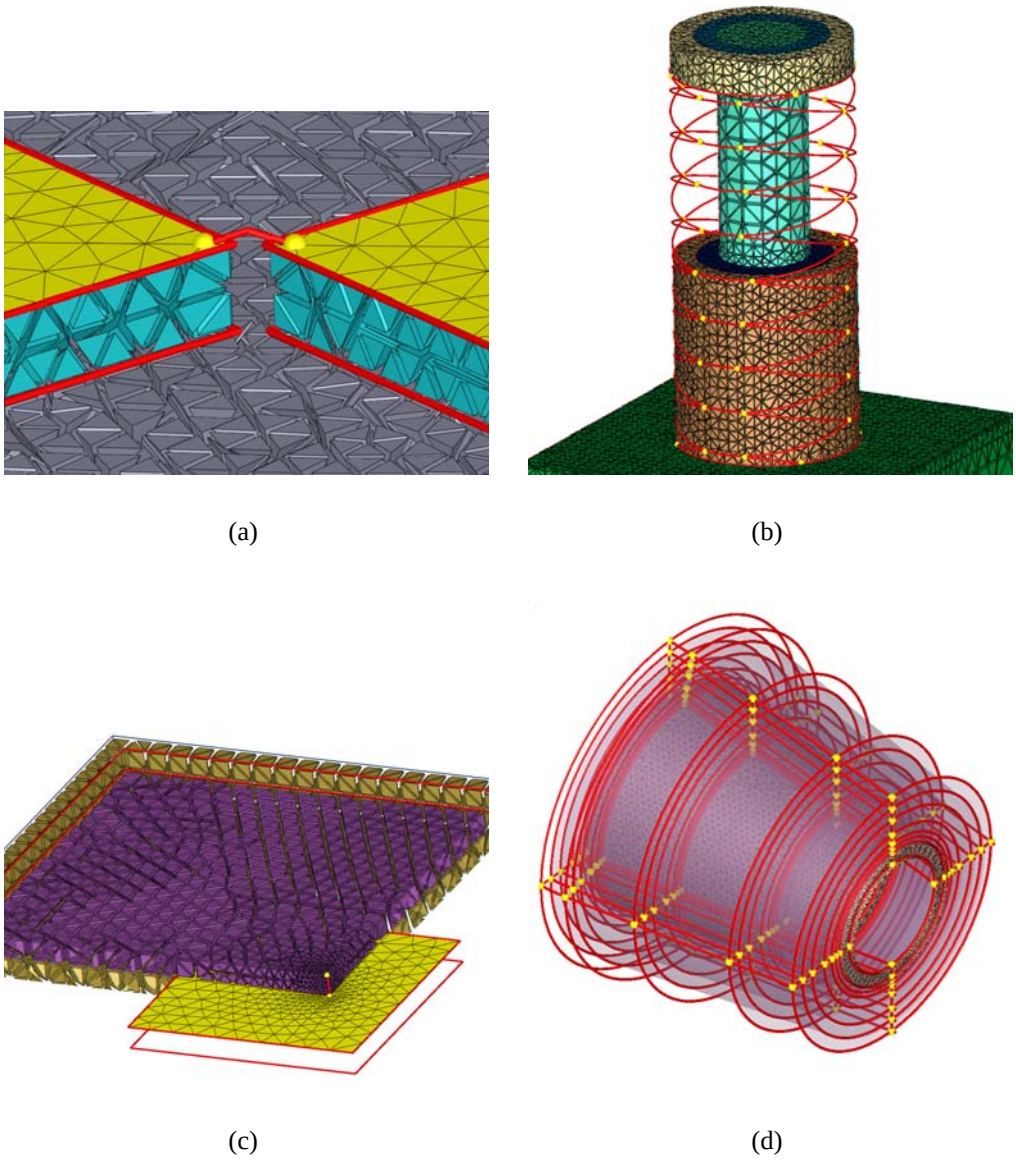


FIG. 3.7: (a) Détail de deux structures surfaciques $(jaunes)$ reliées par une polyligne $(rouge)$. Les deux sommets de contacts *(sphères jaunes)* sont les seuls points de raccords entre les deux surfaces. (b) Structure linéique torsadée avec multiples intersections autour d'une masse cylindrique. (c) Polyligne émergeant d'un plan orthogonal. Le modèle est très finement maillé autour de cet élément linéique. (d) Détail de structures linéiques et surfacique transparentes décrivant la géométrie d'un objet.

rence de ces structures. En d'autres termes, la simplification volumique doit intégrer des critères d'erreur géométriques pour limiter la déformation de ces dernières. Cependant, étant donné leur petite taille, la précision géométrique peut être mise à défaut. C'est pourquoi des critères topologiques robustes sont nécessaires pour certifier la préservation des interfaces, des polylignes et de leur connectivité lors d'une visualisation hiérarchique. Ces critères topologiques novateurs, utilisant des notions de topologie algébrique, constituent le cœur théorique de cette thèse.

3.4.3 Nouveau problème

Traditionnellement, l'unique information extraite de ces simulations électromagnétiques pour la caractérisation d'un objet furtif est la SER. C'est-à-dire que le comportement du champ dans le volume n'est pas exploité par les utilisateurs pour la caractérisation. A l'inverse, depuis quelques années des recherches sont menées dans le développement de nouvelles technologies furtives où le comportement du champ est primordial, même à une étape intermédiaire de la simulation. L'exploitation des champs fait apparaître de nouveaux besoins en terme de visualisation que les utilisateurs n'avaient pas forcément spécifiés. En effet, la taille des maillages non structurés, l'aspect volumique, le comportement 3D de champ de vecteurs et l'analyse d'interfaces 2D dans le domaine rendent cette exploitation des mêmes données plus complexe que la caractérisation par un scalaire.

L'aspect novateur de cette activité amène un autre problème. Les utilisateurs n'ayant jamais exploité ces composants lors de la simulation, aucune spécification des caractéristiques recherchées n'a été émise. Notamment, quelle partie de l'objet contribue le plus à la SER (interfaces, arrière, ...) et dans quel secteur angulaire (angle d'incidence de l'onde et angle d'observation) ? Comment ces phénomènes varient-ils en fonction de la fréquence ?

3.4.4 Données résultats

Les degrés de liberté utilisés dans la résolution du système sont les circulations du champ électrique le long des arêtes des tétraèdres. Après une étape de post-traitement, les champs électrique et magnétique sont calculés, constants par tétraèdre et éventuellement pour plusieurs polarisations[6] dans le cas d'un calcul passif. Les équations de Maxwell en fréquentiel sont résolues par un système linéaire dépendant de la fréquence, de la direction d'incidence et de la polarisation. La composante E_0 du champ électrique incident, indépendante du temps, est utilisée dans la résolution

$$\vec{E} = E_0 e^{j\omega t} \tag{3.1}$$

Les vecteurs calculés des champs électrique et magnétique après simulation s'expriment sous la forme

$$A(r) = A_x(r)u_x + A_y(r)u_y + A_z(r)u_z \tag{3.2}$$

Afin d'interpréter visuellement les résultats, les champs sont observés en fonction du temps pour une fréquence, une incidence et une polarisation données. La forme temporelle du champ est obtenue simplement par la relation

$$a(r,t) = \Re[A(r)e^{j\omega t}] \tag{3.3}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires des champs

$$A(r) = a_r(r) + ja_i(r) \tag{3.4}$$

on obtient la relation suivante des champs variant au cours du temps dans l'objet étudié

$$a(r,t) = a_r \cos(\omega t) - a_i \sin(\omega t) \tag{3.5}$$

[6] orientation du trièdre formé par le vecteur porteur du champ électrique, celui du champ magnétique et la direction de propagation de l'onde incidente

L'équation 3.5 permet de visualiser ces vecteurs complexes en fonction du temps notamment en animant la variation de la norme du vecteur obtenu. Cette représentation correspond à une demande explicite de la part des physiciens.

3.5 Approche par hiérarchisation des données

La visualisation de grandes masses de données est un problème abordé par une vaste communauté de chercheurs et d'industriels ayant des moyens d'exploitation hétérogènes. Cette diversité explique le grand nombre de solutions orientées principalement selon des contraintes matérielles.

3.5.1 Stratégies de visualisation

Il existe cinq stratégies de visualisation à savoir :

- **visualisation parallèle** utilisant une grappe d'ordinateurs dédiée au rendu. Le processus d'affichage (traitement de la géométrie des primitives graphiques et tramage) est parallélisé. Un tri des éléments à traiter peut être réalisé à tous les niveaux du pipeline d'affichage. Ces techniques sont basées sur un partitionnement du volume pour répartir la charge de calcul et nécessitent un réseau d'interconnexion à haut débit.

- **visualisation distante** basée sur une architecture client/serveur. Le serveur est une machine centralisée puissante gérant tout le pipeline graphique, transféré aux clients à faible ressource graphique pouvant être géographiquement distants. Une interaction collaborative des données est réalisable mais cette solution requiert aussi un réseau à haut débit.

- **visualisation distribuée** effectuée sur plusieurs supports de projection juxtaposés. Une grille de moniteurs standard ou de projecteurs forme un écran de plusieurs milliers de pixels. Cette solution nécessite une station haute performante (parallèle ou distribuée) pour contrôler l'ensemble des éléments de la grille.

- **visualisation d'information** minimisant le coût de sélection d'une caractéristique. Les données étudiées sont principalement des ensembles d'observations à plusieurs variables, généralement sans représentation géométrique. Des interfaces utilisateurs évoluées et des comparaisons de cas sont développées.

- **visualisation hiérarchique** organisant les données avant leur exploitation. Un sous- ensemble du domaine d'étude est extrait dynamiquement de la hiérarchie pour atteindre une manipulation interactive. La résolution dépend de mesures d'erreur sur l'approximation entre les niveaux, ce qui permet aussi d'extraire des caractéristiques spécifiques. La hiérarchisation, réalisée en prétraitement, est une étape coûteuse.

La visualisation hiérarchique nous apparaît comme la solution adaptée au problème de visualisation de grandes masses de données du CEA/CESTA, satisfaisant les contraintes détaillées

au paragraphe 3.3. En effet, les techniques de visualisation parallèle et distribuée nécessitent un déploiement important de moyens d'exploitation qui n'est pas réalisable sur le centre. De plus l'éloignement géographique des sites de calculs et d'exploitations n'est pas pris en compte par ces types de solutions. Il est par contre intéressant de noter que ces stratégies sont étudiées et réalisées dans d'autres centres du CEA avec succès, notamment ceux proches des centres de calcul. L'approche visualisation distante n'est pas non plus envisageable puisque le réseau actuel d'interconnection entre les centres du CEA ne permettrait pas le transfert de dizaines de visualisations collaboratives. La géométrie des données est primordiale dans les simulations effectuées au CEA/CESTA puisqu'elle décrit la structure du modèle porteur du phénomène physique étudié. C'est pourquoi, la visualisation d'information n'est pas non plus la solution la mieux adaptée.

(a) Visualisation distribuée avec un mur d'images de seize écrans.

(b) Visualisation parallèle avec une grappe de PC contrôlant un rendu sur quatre écrans.

FIG. 3.8: Exemples de mises en œuvre de différentes stratégies de visualisation sur le centre du CEA/DAM DIF.

3.5.2 Préparation au post-traitement

L'objectif est donc de manipuler de grands résultats de calcul en les organisant de façon hiérarchique pour permettre une visualisation adaptée. Cette organisation est parfois utilisée par le calcul et ne requiert aucun post-traitement notamment dans le cas des codes AMR[7]. Le partitionnement régulier effectué par ces codes lors de la simulation peut être utilisé directement pour la visualisation. Des agglomérats réguliers de cellules peuvent être traités sur différents processeurs graphiques ou utilisés comme boîte englobante d'une sous-partie du modèle pour accélérer la suppression des parties cachées d'une visualisation.

Malheureusement peu de codes exploités sur le CESTA utilisent une structure régulière hiérarchique, c'est pourquoi il est souvent nécessaire de réorganiser les données après leur génération et avant leur exploitation. Cette organisation n'est à effectuer qu'une seule fois pour

[7] Adaptative Mesh Refinement

toute exploitation après simulation. Par contre elle est coûteuse en ressources de calcul puisqu'un tri sur l'ensemble des données doit être effectué. Le principal avantage de cette approche de visualisation provient du fait que la hiérarchisation peut être effectuée de façon centralisée et à distance, sur la machine de production. Les clients n'ont alors aucune tâche lourde à effectuer puisqu'ils ne sont pas impliqués dans cette phase d'organisation. La figure 3.9 résume cette si-

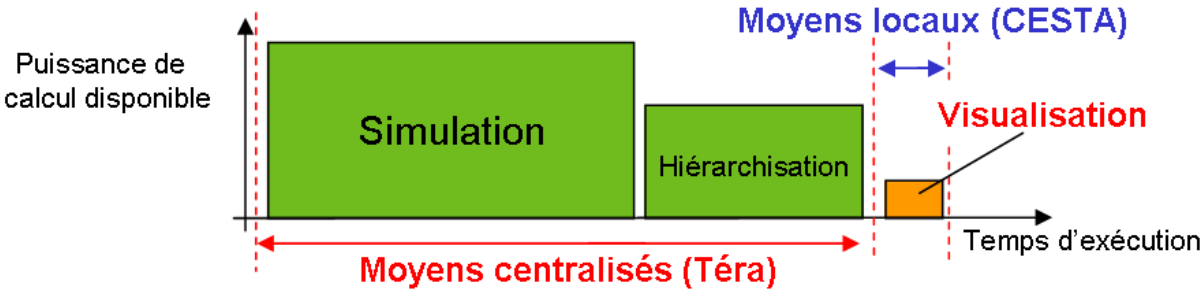


FIG. 3.9: L'étape de hiérarchisation est intégrée au début du post-traitement des données sur des moyens centralisés.

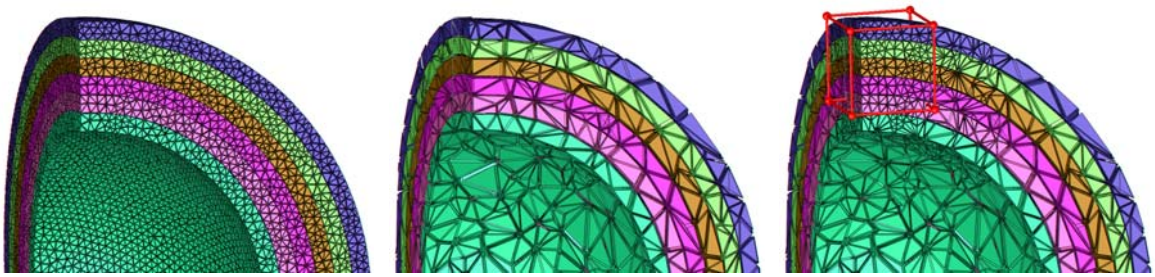
tuation. En amont, la simulation est effectuée sur des moyens centralisés tel le super-calculateur Téra avec une puissance de calcul considérable et un temps d'exécution pouvant atteindre plusieurs jours. En aval, la visualisation est réalisée sur des moyens locaux telle une simple station graphique et avec un temps d'exécution le plus proche possible de l'interactivité. Cette situation est rendue possible grâce à une étape de hiérarchisation des données, préparatoire au post-traitement, effectuée avec une puissance de calcul de l'ordre de celle du super-calculateur et un temps d'exécution aussi long que nécessaire.

3.5.3 Stratégie de visualisation adoptée : approche multirésolution

L'utilisation d'une représentation multirésolution permet de hiérarchiser des données pour les visualiser de façon interactive. L'idée générale est de réduire la résolution des données initiales tout en préservant au mieux les caractéristiques du modèle étudié. Les transformations appliquées sont continues, inversibles et locales. Les données sont alors codées par une approximation très grossière et un ensemble de transformations reconstruisant progressivement les données initiales. La visualisation utilise ces niveaux de détails d'un modèle pour présenter à tout moment un affichage interactif.

Si ces méthodes ont connu un développement intensif avec une croissance exponentielle de l'effort de recherche dans ce domaine, la majeure partie des résultats développés est dédiée à des applications relevant plus de l'industrie du loisir audio-visuel que de l'étude de phénomènes physiques complexes. La précision d'approximation dans le monde du multimédia est bien en-dessous des besoins en visualisation scientifique. La production d'une représentation simplifiée, précise et adaptée, est un problème difficile et coûteux. Cependant qu'importe le prix, la compression avec perte d'information n'est pas acceptable dans le domaine de la simulation.

La multirésolution est utilisée de deux façons différentes pour la visualisation. La première consiste à présenter une *résolution uniforme* à l'utilisateur où l'ensemble du modèle est sous-échantillonné (Figure 3.10 (b)). Le niveau de décimation est contrôlé globalement par un seuil



(a) Résolution uniforme, la plus fine.

(b) Résolution uniforme, la plus grossière.

(c) Résolution variable à partir d'un volume d'intérêt (cube rouge).

FIG. 3.10: Visualisations multirésolution.

sur l'erreur introduite dans cette représentation simplifiée. La seconde à *résolution variable* utilise pleinement la hiérarchie en exhibant les données originales non simplifiées dans une certaine région d'intérêt et une représentation simplifiée dans le reste du modèle (Figure 3.10 (c)). L'avantage de cette seconde approche est la présentation sans perte d'information pour l'utilisateur dans une région d'intérêt tout en maintenant la manipulation interactive du modèle. Le sous-échantillonnage en dehors de cette région d'intérêt allège considérablement la charge d'affichage du client. Cependant, cette représentation bien que simplifiée du reste du modèle est aussi importante car elle décrit le contexte dans lequel l'utilisateur étudie une caractéristique locale.

Le choix du niveau de détail, que ce soit pour une résolution uniforme ou variable, peut être effectué en majorant soit l'erreur introduite sur les données simplifiées, soit le nombre de primitives. La première approche minimise le nombre de cellules et de sommets dans le maillage tout en satisfaisant une précision sur l'erreur demandée par l'utilisateur. La seconde utilise un nombre fixe de primitives graphiques à envoyer au serveur d'affichage et essaye de minimiser l'erreur d'approximation pour ce nombre fixe de primitives. Ce nombre est toujours inférieur à la capacité d'affichage du processeur graphique assurant ainsi l'interactivité.

La borne supérieure sur l'erreur permet de certifier à l'utilisateur la pertinence de la visualisation qu'il exploite en quantifiant précisément l'imprécision due au rendu. Si un phénomène propre à la simulation est caractérisé par des valeurs inférieures à cette borne, l'utilisateur peut diminuer de façon dynamique le seuil. De ce fait il autorise une quantité plus importante d'information à être présentée notamment au voisinage de la caractéristique. A l'inverse, une exploration rapide d'un modèle à basse résolution peut révéler qu'aucune autre inspection n'est nécessaire pour ce résultat. Le gain de temps et de ressources peut être considérable surtout avec une exploitation à distance comme celle du CESTA nécessitant des heures de transfert de données.

3.5.4 Choix de l'opérateur de simplification

La représentation multirésolution est créée en réduisant itérativement le nombre de sommets et de cellules du maillage. Seuls les opérateurs locaux (voir paragraphe 2.4 page 22), c'est-à-dire n'impliquant que des cellules directement adjacentes à la modification, sont envisagés dans le cadre du projet. En effet, les maillages ciblés étant de grandes dimensions, il n'est pas possible de les simplifier de façon globale (voir paragraphe 2.3 page 20) en modifiant différentes parties indépendantes réparties dans l'ensemble du domaine.

Cependant l'utilisation d'un opérateur influe sur la qualité de l'approximation et surtout sur les moyens de contrôler les modifications. La préservation de la topologie du maillage et l'approximation contrôlée des données attachées au maillage sont les contraintes fortes dans le cadre du présent projet de thèse. C'est pourquoi, l'opérateur utilisé doit répondre au mieux à ces critères. Les opérateurs itératifs, globaux ou encore locaux sont décrits au paragraphe 2.2, page 20. De manière générale, les méthodes itératives sont mieux adaptées à une représentation multirésolution.

La *décomposition en ondelettes* utilise une grille régulière ou une subdivision régulière du domaine. Etant donné la taille des maillages manipulés par les codes du CESTA, l'ajout d'une telle structure multiplierait la taille des données à traiter, rendant difficile leur exploitation compte tenu des moyens informatiques disponibles. De plus la subdivision d'un espace irrégulier est une tâche non triviale et coûteuse.

Toutes les techniques rapides de simplification manipulant un grand nombre de cellules du maillage, ne permettent pas, en général, de préserver la topologie de la surface ou du volume et encore moins celle de sous-structures imbriquées (*fusion de régions*, *amas de sommets*). Le calcul de l'erreur d'approximation est aussi délicat puisque la déformation du domaine est importante.

Les techniques de *re-échantillonnage* et celles utilisant des *filtres volumiques* ne sont pas adaptées au traitement de résultats de simulation, puisqu'une approximation non triviale (et non autorisée du coté post-traitement) des données doit être réalisée. La *contraction de paire de sommets* ne préserve pas, par définition, la topologie puisque deux composantes non connexes du maillage peuvent être regroupées lors d'une contraction. La *suppression de sommets* est un opérateur plus fin introduisant des modifications locales, mais la re-triangulation nécessaire est une étape coûteuse et non-triviale.

La *demi-contraction d'arêtes*, décrite au paragraphe 2.4.3 page 24 est l'opérateur le mieux adapté pour contrôler précisément les déformations du maillage et des données portées par ce dernier, lors de la simplification. En effet les déformations impliquent peu d'éléments facilitant une description exhaustive des cellules au voisinage du sommet supprimé, énumération à la base des critères de préservation de la topologie.

Dans le cas d'exploitation de résultats de simulation, les utilisateurs dépensent beaucoup de temps et de puissance de calcul pour obtenir une approximation des résultats localisée préci-

sément aux nœuds ou en certains points des cellules. Dans cette optique, un maillage simplifié doit correspondre à un sous-échantillonnage du maillage initial et non à une approximation afin de minimiser les artefacts dus à la visualisation. C'est pourquoi la *demi*-contraction d'arêtes est particulièrement adaptée à ce besoin puisque aucun point n'est déplacé lors de la simplification. Quel que soit le niveau de résolution sélectionné par l'utilisateur, tout sommet du maillage simplifié correspond à un sommet du maillage original. Puisque peu de cellules sont impliquées, par contraction, leur déformation et l'évolution de leur connectivité sont contrôlées précisément.

3.6 Conclusion

L'étude des besoins en visualisation et des moyens de calcul disponibles au CEA/CESTA, a conduit au choix d'une technique de visualisation multirésolution. Cette représentation multirésolution des données est créée à partir d'une étape de simplification, contrôlée par des critères d'erreur adaptés aux données manipulées.

Les mesures de l'erreur d'approximation sont composées de critères de type topologique, géométrique et calculées sur les données. Afin de répondre aux besoins spécifiques du CESTA dans le cadre de ce projet, des techniques standard de simplification ont été utilisées pour traiter l'erreur géométrique. Par contre un effort considérable de recherche a été fourni au niveau des critères topologiques qui étaient jusqu'à présent, insuffisants pour traiter les données complexes utilisées par les simulations numériques du CEA. Notamment, la préservation (topologique et géométrique) des interfaces entre des matériaux et des structures linéiques définies dans le domaine volumique était problématique.

Ces critères de préservation de la topologie lors de la simplification, chapitre 5, indépendant de la dimension de l'objet, sont les principales contributions théoriques de cette thèse.

Chapitre 4

Préservation de la topologie d'un 3-complexe

La construction d'une représentation multirésolution s'effectue par transformation d'un modèle en une séquence de représentations simplifiées possédant toutes le même type topologique. La préservation de la topologie à travers ces transformations est le facteur de garantie du bon fonctionnement de ces méthodes. L'étude mathématique des propriétés qui sont préservées par déformations *élastiques* est connue sous le nom de *topologie*. Le cadre formel de la topologie fournit l'ensemble des outils mathématiques permettant d'énoncer rigoureusement les techniques de simplification de maillages, dans le cadre de la visualisation multirésolution de données issues de la simulation.

Ce chapitre introduit le cadre théorique, en topologie algébrique, des critères de préservation de la topologie proposés dans cette thèse. Tout d'abord est présenté le domaine de la topologie algébrique (paragraphe 4.1) puis plus précisément, l'ensemble des outils de ce domaine utilisés dans les critères topologiques, à savoir : les espaces topologiques (paragraphe 4.2), les complexes simpliciaux (paragraphe 4.3) et la représentation des maillages dans ce contexte (paragraphe 4.4). Ensuite, l'étude est portée sur la classe des transformations entre espaces topologiques liées aux contractions d'arêtes qui préservent la topologie du complexe. C'est pourquoi, les homéomorphismes entre complexes simpliciaux sont présentés (paragraphe 4.5) ainsi que les notions permettant de manipuler des sous-complexes simpliciaux tels l'étoilé ou le lien (paragraphe 4.6). Les paragraphes 4.7 et 4.8 s'intéressent aux contractions d'arêtes définies par des applications simpliciales et aux résultats existants permettant de préserver la topologie d'un complexe avec de telles applications. Enfin, des exemples sont donnés (paragraphe 4.9) pour montrer la construction des conditions du lien, à la base des critères topologiques.

4.1 Notion de topologie

La topologie, en tant que discipline indépendante, est une branche assez récente de la géométrie (milieu du XIXme siècle). La géométrie Euclidienne étudie les propriétés invariantes à travers des déplacements rigides dans l'espace Euclidien. Au contraire la topologie s'intéresse aux propriétés géométriques invariantes par des déformations continues. Grâce à la topologie,

la connaissance des objets manipulés est séparée de leur représentation métrique et projective tels l'aire, les angles ou les distances. Elle peut être utilisée pour décrire la connectivité des objets en ignorant leur plongement dans l'espace et en n'utilisant que des propriétés de voisinage et de continuité. Par exemple un triangle peut être déformé en un cercle alors qu'il ne peut en aucun cas être déformé en un huit (figure 4.1). De même un disque à bord, un disque sans bord

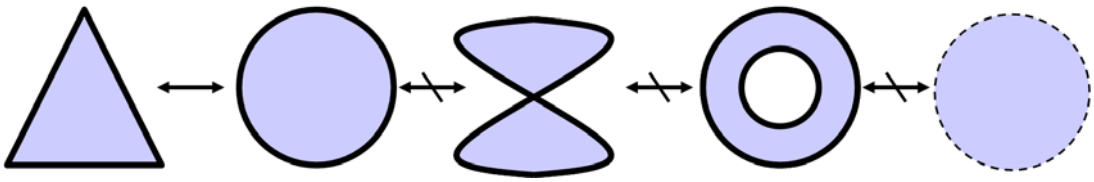


FIG. 4.1: Objets comparés selon leur topologie. Le triangle et le cercle sont des objets topologiquement équivalents alors que le huit, l'anneau et le disque sans bord ne le sont pas.

et un anneau sont des objets topologiquement distincts puisqu'il n'existe pas de déformation continue permettant de passer de l'un à l'autre.

Une transformation élastique possède un certain nombre de propriétés. Par exemple tout point intérieur doit rester un point intérieur, deux points voisins doivent rester voisins ou encore une courbe fermée ne doit pas se scinder en une courbe ouverte. Par contre l'image d'une droite n'est pas nécessairement une droite. Les propriétés fondamentales de ces transformations sont leur réversibilité et leur continuité, amenant naturellement la notion d'homéomorphisme (application bijective et bicontinue) pour les définir. S'il existe un homéomorphisme entre deux ensembles alors ces derniers sont *topologiquement équivalents.*

Les résultats présentés dans cette thèse sont basés sur cette propriété. La question de préservation de la topologie de l'ensemble lors de la simplification s'exprime, dans le cadre formel de la topologie, par la question suivante : *Existe-t-il un homéomorphisme entre l'ensemble avant contraction et l'ensemble après contraction ?*

Les éléments de réponse à cette question font intervenir de nombreux concepts algorithmiques, topologiques et géométriques. La diversité des domaines abordés constitue la principale difficulté de cette recherche. Comme illustrés par la figure 4.2, les travaux menés dans cette thèse s'inscrivent dans le domaine de la *topologie algorithmique*[1]. Cette discipline a pour objectif d'énoncer et de formaliser les problèmes topologiques en informatique. Elle étudie des algorithmes, leur complexité et leurs invariants pour des problèmes de nature topologique, sur des structures combinatoires. La question est souvent de reconnaître si deux objets combinatoires, susceptibles de représenter des espaces topologiques, décrivent la même topologie et donc acceptent les mêmes invariants. Les articles [VY90, DEG99, BEA+99] introduisent cette discipline récente qui s'appuie majoritairement sur des notions de *géométrie algorithmique*[2] et de *topologie algébrique*. La géométrie algorithmique est un domaine à la frontière des mathématiques et de l'informatique, qui traite des algorithmes efficaces manipulant des

[1] *Computational topology* en anglais
[2] *Computational geometry* en anglais

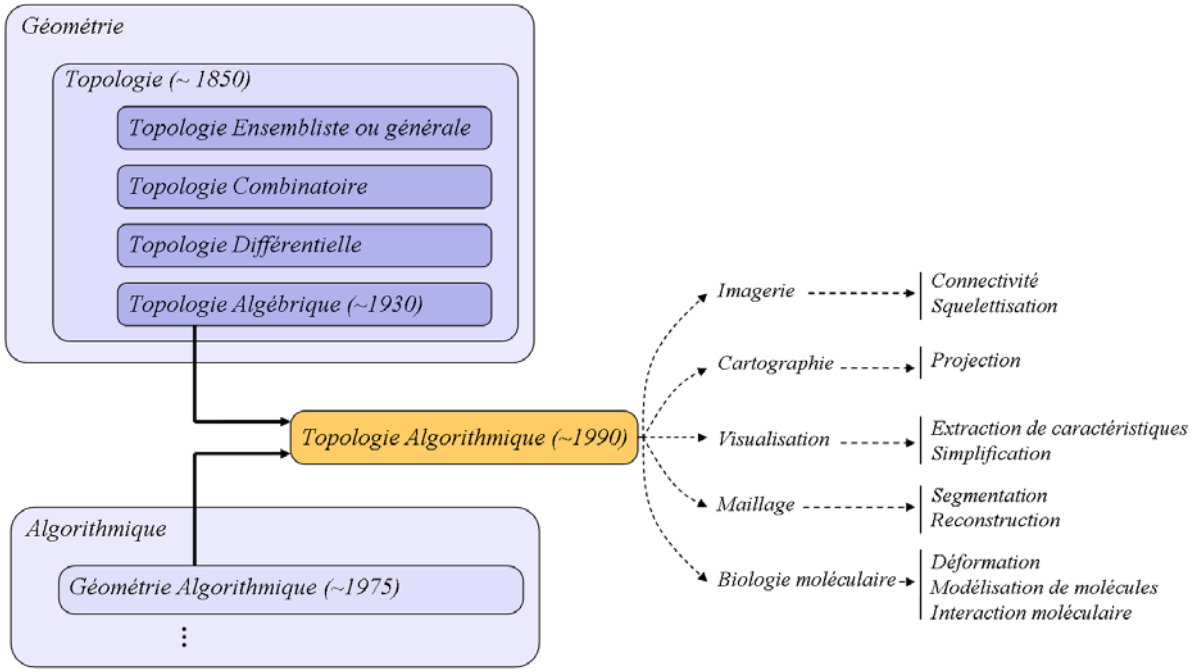


FIG. 4.2: Origines et applications de la topologie algorithmique, domaine dans lequel s'inscrivent les travaux de cette thèse, sur des critères topologiques pour la simplification appliquée à la visualisation multirésolution.

concepts géométriques. La topologie algébrique étudie les propriétés intrinsèques des objets, telle la connectivité, qui sont invariantes par des transformations bijectives et bicontinues.

De nombreuses applications sont confrontées à des problèmes de nature topologique, par exemple en visualisation (simplification de données, extraction de caractéristiques, ...), en robotique (planification de trajectoires), dans les systèmes d'informations géographiques (meilleurs chemins, projections de cartes, ...), ou encore en CAO (assemblage, déplacement d'outils, ...).

4.2 Espace topologique

Définition 4.2.1 (Espace topologique) Une *topologie* sur un ensemble X est une collection $\mathfrak{T}$ de sous-ensembles de X, appelés *ouverts*, vérifiant les axiomes suivants :

(i) l'ensemble vide et X sont dans $\mathfrak{T}$

(ii) une réunion quelconque d'éléments de $\mathfrak{T}$ est dans $\mathfrak{T}$

(iii) une intersection finie d'éléments de $\mathfrak{T}$ est dans $\mathfrak{T}$.

Un ensemble X sur lequel a été défini une topologie $\mathfrak{T}$ est appelé un *espace topologique*, noté $\mathbb{X} = (X, \mathfrak{T})$. Les complémentaires des ouverts s'appellent les *fermés*. Une topologie renseigne sur la connectivité d'un espace sans utiliser de métriques particulières comme les aires, les distances ou les angles.

Définition 4.2.2 (Base d'une topologie) Soit $\mathbb{X} = (X, \mathfrak{T})$ un espace topologique. On appelle

base toute partie $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{T}$ telle que tout ouvert non vide puisse être obtenu comme réunion d'éléments de $\mathfrak{B}$.

Définition 4.2.3 (voisinage) Un *voisinage* de $x \in \mathbb{X}$ est une partie de $\mathbb{X}$ contenant un ouvert qui contient x. Cette notion de voisinage va permettre de définir les principales propriétés liées aux espaces topologiques, comme la continuité, nécessaires pour définir un homéomorphisme.

Définition 4.2.4 (Continuité) Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces topologiques et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application. Si $x_0 \in \mathbb{X}$, on dit que f est *continue en* x_0 si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans $\mathbb{Y}$, il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{X}$ tel que $f(U) \subset V$. Autrement dit pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe au moins un voisinage de x_0 dont l'image soit entièrement incluse dans V. Dans l'exemple de la figure 4.3, $f(x_0)$ possède un voisinage V tel qu'aucun voisinage U de x_0,

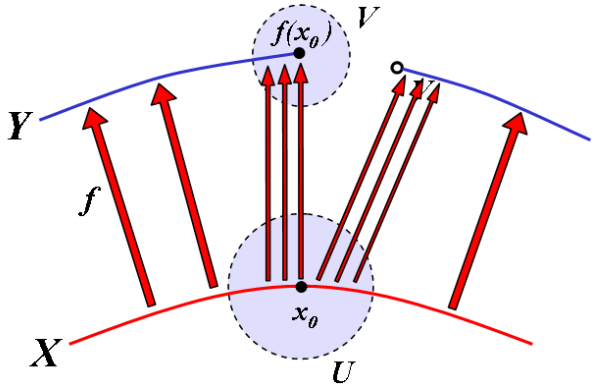


FIG. 4.3: Exemple de discontinuité au voisinage d'un point. $f(x_0)$ possède un voisinage V tel qu'aucun voisinage U de x_0, aussi petit soit-il, n'a d'image entièrement incluse dans V après la transformation.

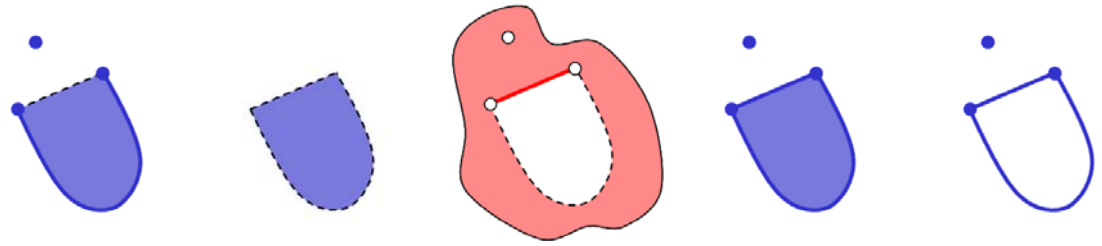
aussi petit soit-il, n'a d'image entièrement incluse dans V après la transformation. La fonction f n'est donc pas continue au point x_0.

Définition 4.2.5 (Homéomorphisme) Un *homéomorphisme* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est une application bijective telle que f et f^{-1} soient continues. Deux espaces topologiques $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont dits *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$. Un homéomorphisme définit une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques. Ainsi les espaces topologiques connectés de la même façon peuvent être regroupés dans une même classe d'équivalence.

Définition 4.2.6 (Intérieur et adhérence) Soit $\mathbb{X}$ un espace topologique et A un sous-ensemble de $\mathbb{X}$. L'*intérieur* de A est l'ensemble des points de A dont A est un voisinage. Autrement dit, l'intérieur de A est l'union de tous les ouverts contenus dans A. Il en suit qu'un ouvert n'est constitué que de points intérieurs. A est dit *fermé*, si l'ensemble $\mathbb{X}$ privé de A (le complémentaire de A) est un ouvert. L'*adhérence* de A est l'ensemble des points de $\mathbb{X}$ dont tout voisinage rencontre A.

Définition 4.2.7 (Fermeture et frontière) Ces notions permettent d'introduire la *fermeture* d'un sous-ensemble A, noté $\overline{A}$, comme étant d'une part l'intersection de tous les fermés contenant A, d'autre part l'ensemble de tous les points adhérents. Cette notion de fermeture est es-

sentielle en topologie algébrique et sera largement utilisée dans les résultats de cette thèse notamment dans la définition du lien. La *frontière* de A est l'ensemble des points de $\mathbb{X}$ adhérents à A et à son complémentaire. Ces notions sont illustrées sur la figure 4.4.



(a) Sous-ensemble A (b) Intérieur de A (c) Complémentaire de A (d) Fermeture de A (e) Frontière de A

FIG. 4.4: Ensembles particuliers construits à partir d'un sous-ensemble A de $\mathbb{X}$.

La définition 4.2.1 permet de définir un espace topologique de façon très générale. Dans le cadre de cette thèse, seule une sous-classe de ces espaces va être utilisée. Les définitions suivantes les introduisent.

Définition 4.2.8 (Métrique) Une *métrique* ou *distance* sur X est une application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :
(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(ii) $\forall (x,y)\ d(x,y) = d(y,x)$,
(iii) $\forall (x,y,z)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Définition 4.2.9 (Boule ouverte) En utilisant la métrique d, une *boule ouverte* de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ est définie par $\mathbb{B}(x,\varepsilon) = \{y |\ d(x,y) < \varepsilon\}$.

Définition 4.2.10 (Espace métrique) Un *espace métrique* est un espace X, non vide, muni d'une métrique d. Tout espace métrique peut être transformé en un espace topologique. Un sous-ensemble non vide de X est ouvert s'il contient au moins une boule ouverte centrée en chacun de ses points. Dans une telle topologie, les boules ouvertes jouent le rôle des ouverts d'un espace topologique vérifiant les axiomes de la définition 4.2.1. Ainsi la notion de voisinage est représentée par l'ensemble des boules ouvertes centrées en un point. Un espace métrique est donc un espace topologique. Les espaces utilisés dans cette thèse n'appartiennent en fait qu'à un sous-ensemble des espaces métriques.

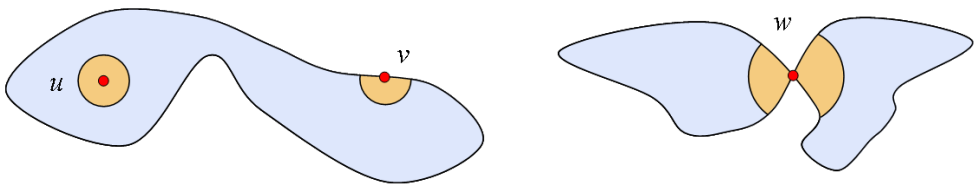
Définition 4.2.11 (Espace Euclidien) L'espace $\mathbb{R}^n$, muni de la distance Euclidienne $d_\varepsilon(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ entre deux points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, définit l'*espace Euclidien*.

De même, d'autres espaces topologiques peuvent être construits à partir de $\mathbb{R}^n$ et utiles pour la classification des surfaces et des volumes. La topologie dépend de la métrique choisie. La

boule fermée de dimension d est définie par $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d | \ \|x\| \leq 1\}$ et le *demi-espace* de dimension d par $\mathbb{H}^d = \{x \in \mathbb{R}^d | \ \|x_1\| \geq 0\}$.

Définition 4.2.12 (Topologie naturelle) La *topologie naturelle* sur $\mathbb{R}^n$ est la topologie engendrée par les boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$, qui sont donc des ouverts de cette topologie.

Définition 4.2.13 (Variété) Un espace possédant une base d'ouverts dénombrables est appelé une *k-variété* [3] *(topologique)* si chaque point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^k$ muni de sa topologie naturelle. Un tel espace est appelé *k-variété à bord* si chaque point possède un voisinage homéomorphe soit à un ouvert de $\mathbb{R}^k$, soit à un ouvert du demi-espace Euclidien $\mathbb{H}^k$. Cette définition est illustrée par la figure 4.5.



(a) 2-variété à bord

(b) Espace topologique n'étant pas une variété

FIG. 4.5: Les points intérieurs (u) ont un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$ et les points à la frontière (v) homéomorphe à $\mathbb{H}^2$. Le point w est le seul point de contact entre deux parties de l'espace. Son voisinage n'est homéomorphe ni à $\mathbb{R}^2$, ni à $\mathbb{H}^2$. L'espace représenté sur l'illustration b n'est pas une 2-variété.

Les notions de topologie introduites jusqu'à présent, concernent essentiellement des ensembles de points infinis et des ouverts. La nature discrète et finie des objets manipulés en visualisation, c'est-à-dire des maillages, nécessite l'expression de ces notions de façon discrète. La suite de ce chapitre s'intéresse donc aux aspects combinatoires de la topologie algébrique.

4.3 Complexes simpliciaux et triangulations

Les *complexes simpliciaux* sont des objets combinatoires permettant de représenter des espaces topologiques.

Définition 4.3.1 (Combinaison) Soit $S = \{p_0, p_1, ..., p_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble de points de dimension d. Une *combinaison affine* est définie par $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$. Une *combinaison convexe* est une combinaison affine telle que tous les λ_i soient des réels positifs ou nuls. L'enveloppe convexe de S est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de S. Elle correspond au plus petit convexe contenant S.

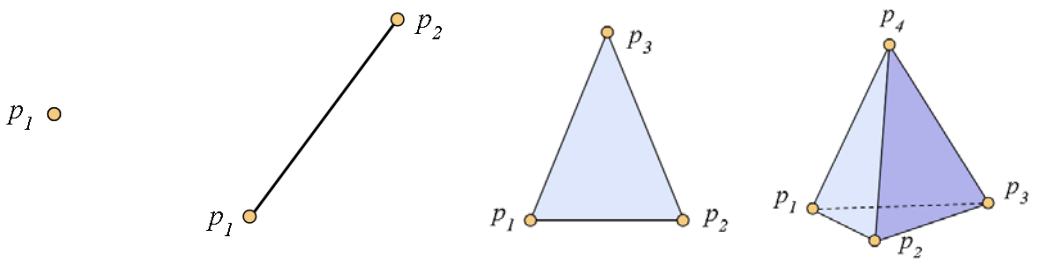
Définition 4.3.2 (Indépendance affine) Un ensemble fini S de points de $\mathbb{R}^d$ est *affinement indépendant* si aucun point de S n'est combinaison affine d'autres points de S.

[3] *k-manifold* en anglais

Définition 4.3.3 (Coordonnées barycentriques) Si les $k+1$ points de la définition 4.3.1 sont affinements indépendants, alors les λ_i sont uniques et se somment à un. Les coefficients λ_i sont alors appelés les *coordonnées barycentriques* de x par rapport aux points p_i.

Définition 4.3.4 (Simplexe) Un *k-simplexe* τ est l'enveloppe convexe de $k+1$ points linéairement indépendants.

Un k-simplexe est un sous-espace de dimension k de $\mathbb{R}^d$. Les simplexes de dimensions inférieures ou égales à 3 sont représentés sur la figure 4.6. Un *sommet* est un 0-simplexe défini par



(a) 0-simplexe : sommet $\{p_1\}$ — (b) 1-simplexe : arête $\{p_1, p_2\}$ — (c) 2-simplexe : triangle $\{p_1, p_2, p_3\}$ — (d) 3-simplexe : tétraèdre $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

FIG. 4.6: k-simplexes avec $0 \leq k \leq 3$.

un point ; il est de dimension 0. Une arête est un 1-simplexe défini par deux points distincts. Elle correspond à l'ensemble des points du segment $[p_1, p_2]$. Elle est de dimension 1. Un *triangle* est un 2-simplexe défini par trois points non alignés. Le triangle est la réunion du polygone fermé $\{p_1, p_2, p3\}$ et de son intérieur. Il est de dimension 2. Enfin un tétraèdre est un 3-simplexe défini par quatre points non coplanaires. Les quatre triangles $p_i\ p_j\ p_k$ sont ses faces et les six segments $p_i\ p_j$ sont ses arêtes. Le tétraèdre est la réunion de la surface fermée constituée par ses quatre faces et de l'intérieur de celle-ci. Il est de dimension 3.

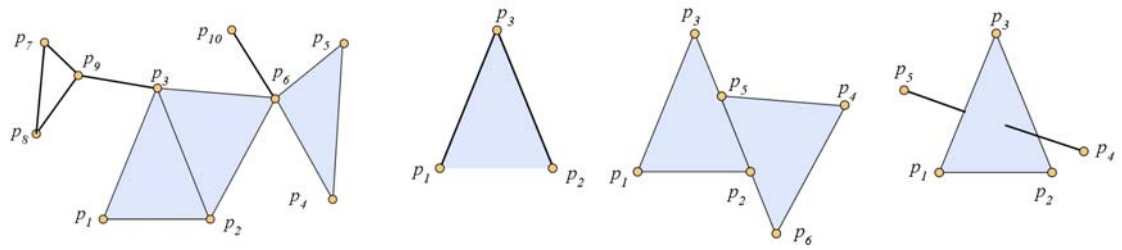
Définition 4.3.5 (Face et coface) Une *k-face* η du simplexe $\tau = \{p_0 p_1 \ldots p_p\}$ est un simplexe de dimension k dont les sommets sont $(k+1)$ points choisis parmi les $(p+1)$ sommets $p_0 p_1 \ldots p_p$ de τ. Elle est notée $\eta \leq \tau$ ou $\tau \geq \eta$. Si η est une face de τ alors τ est appelée *coface* de η. L'ensemble vide et τ sont des faces de τ. Une face η de τ est *propre* si $\eta \neq \emptyset$ et $\eta \neq \tau$.

Définition 4.3.6 (Complexe simplicial) Soit K un ensemble fini de simplexes et η une face d'un simplexe τ de K. K est un *complexe simplicial* si les axiomes suivants sont vérifiés :

(i) $\tau \in K, \eta \leq \tau \Rightarrow \eta \in K$

(ii) $\tau, \tau' \in K \Rightarrow \tau \cap \tau' \leq \tau, \tau'$.

Si s est la dimension maximale des simplexes d'un complexe simplicial K, alors K est de dimension s et noté *s-complexe simplicial*. Des exemples d'arrangements de simplexes sont donnés en figure 4.7 montrant des configurations autorisées ou non.



(a) Complexe simplicial

(b) Ensemble de simplexes ne formant pas un complexe simplicial

FIG. 4.7: (a) Illustration d'un complexe simplicial. (b) Exemples de configurations interdites : $(gauche)$ La 1-face p_1p_2 du 2-simplexe $p_1p_2p_3$ n'est pas dans le complexe. $(milieu)$ L'intersection des 2-faces $p_1p_2p_3$ et $p_4p_5p_6$ n'est pas une face du complexe. $(droite)$ L'intersection du 1-simplexe p_4p_5 et du 2-simplexe $p_1p_2p_3$ n'est pas une face du complexe.

Définition 4.3.7 (Complexe simplicial pur) Soit K un k-complexe simplicial. K est *pur* si quel que soit τ un l-simplexe de K avec $l < k$, τ est une face d'un k-simplexe de K.

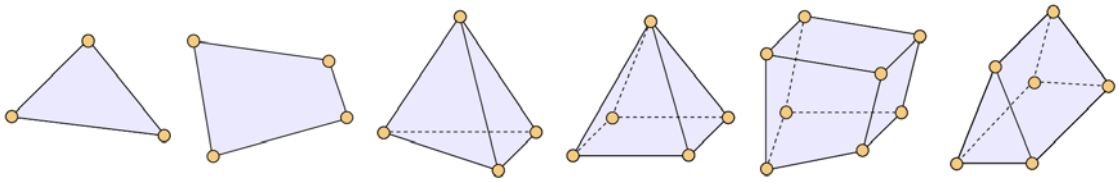
Définition 4.3.8 (Sous-complexe) Si L est une sous-collection de K qui contient toutes les faces de ses éléments, alors L est un complexe simplicial appelé *sous-complexe* de K. L'ensemble des simplexes de K de dimension au plus égal à p forment un sous-complexe appelé *p-squelette* de K, noté $K^{(p)}$. Le sous-complexe $K^{(0)}$ correspond à l'ensemble des sommets de K.

Définition 4.3.9 (Topologie et espace sous-jacent) La topologie utilisée dans le cadre de cette étude est construite comme suit : soit $|K|$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ correspondant à l'union des simplexes de K. En introduisant la topologie naturelle de chaque simplexe comme des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, K est muni d'une topologie en déclarant qu'un sous-ensemble A de $|K|$ est fermé si et seulement si $A \cap \sigma$ est fermé dans σ, pour chaque σ de K. Cette propriété définit une topologie sur $|K|$ pour cette collection d'ensembles. L'espace $|K|$ muni de sa topologie, est appelé *espace sous-jacent* du complexe simplicial K.

Définition 4.3.10 (Triangulation) Le terme triangulation, en topologie, est relatif à la notion d'une structure combinatoire sur un domaine continu. Plus exactement, un complexe simplicial K est une *triangulation* d'un espace topologique $\mathbb{X}$, si son espace (topologique) sous-jacent est homéomorphe à l'espace : $|K| \approx \mathbb{X}$. Le terme *tétraédrisation* est parfois utilisé dans le cas d'une triangulation d'un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

4.4 Maillage

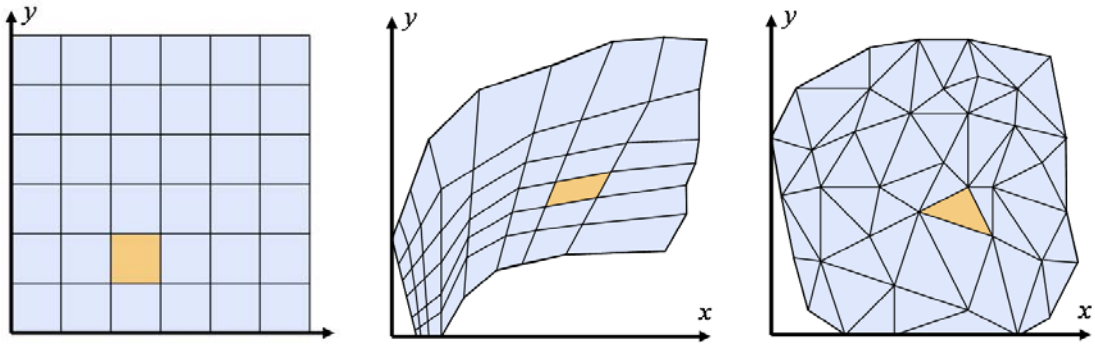
Un *maillage* constitue un recouvrement d'un espace par un ensemble de cellules géométriques. Une triangulation est un maillage particulier dans lequel les cellules sont des simplexes. Dans les maillages généraux, les cellules peuvent avoir de nombreuses formes géométriques, comme illustrées sur la figure 4.8.



(a) triangle (b) quadrilatère (c) tétraèdre (d) pyramide (e) hexaèdre (f) prisme

FIG. 4.8: Exemples de cellules utilisées dans les maillages non-structurés.

Il existe trois types de maillages, différenciés par la connectivité des cellules, comme illustrés sur la figure 4.9. Un *maillage uniforme* (figure 4.9(a)) est composé de sommets uniformément répartis le long des axes. Seules les valeurs extrémales et le nombre de subdivisions le long des axes sont nécessaires pour décrire la géométrie. La position géométrique d'un point suffit pour connaître la ou les cellules adjacentes à ce point. L'acquisition de données par images à résonance magnétique (IRM) fournit ce type de maillages. Un *maillage structuré* (figure 4.9(b))

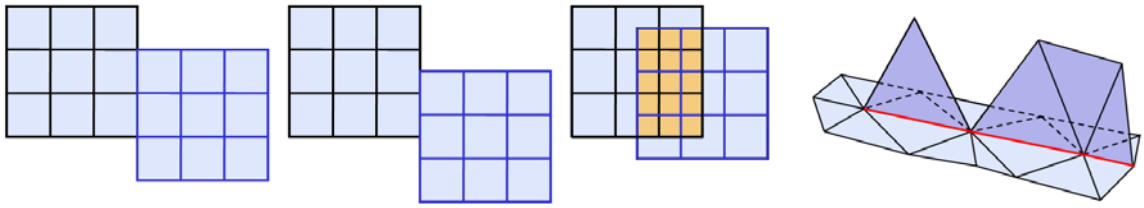


(a) Maillage uniforme (régulier) (b) Maillage structuré (c) Maillage non-structuré

FIG. 4.9: Représentation 2D de trois types de maillages.

est un maillage curvilinéaire ou rectilinéaire dont la géométrie est entièrement spécifiée. Bien que le découpage des cellules ne soit pas uniforme, la connectivité entre les cellules est implicite. Même si le nombre de sommets est fixe le long des axes, leur position géométrique arbitraire, permet de mieux épouser des géométries complexes. Les simulations en dynamique des fluides et les méthodes aux éléments finis utilisent principalement ce type de maillages. Un *maillage non-structuré* (figure 4.9(c)) requiert le stockage explicite de sa géométrie et de toute la connectivité entre ses cellules. La quantité d'information supplémentaire nécessaire rend cette représentation coûteuse. Cependant, la majorité des applications "réelles" se situe dans des domaines à géométries irrégulières. Ce type de maillages est donc le plus utilisé, dans tous les domaines de la modélisation et de la simulation.

Les maillages dits *multi-blocs*, illustrés figure 4.10(a), sont constitués de plusieurs blocs de mailles indépendants. Ces maillages sont conformes si les mailles de différents blocs coïncident,



(a) Maillages multi-blocs (b) Non-variété

FIG. 4.10: (a) Exemples 2D d'un maillage uniforme multi-blocs illustrant différentes configurations de type conforme $(gauche)$, semi-conforme $(centre)$, non-conforme avec chevauchement $(droite)$. (b) Maillage surfacique triangulaire représentant une non-variété. Les arêtes, représentées en rouge, sont voisines à trois triangles. Leur voisinage n'est homéomorphe ni à un disque ouvert, ni à un demi-disque ouvert.

semi-conformes si elles ont un certain décalage sans chevauchement et non conforme avec chevauchement dans le cas général où plusieurs blocs se recouvrent. Pour des maillages composés de simplexes, la notion de voisinage permet de différencier des maillages formant des variétés, variétés à bords ou non-variétés (voir définition 4.2.13 page 64). Le maillage triangulaire de la figure 4.10(b) n'est pas une variété. En effet, les arêtes représentées en rouge sont utilisées par trois triangles. Donc leur voisinage n'est homéomorphe ni à un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ni à un ouvert de $\mathbb{H}^2$, caractérisant ce maillage comme étant une non-variété. Les données géologiques représentant plusieurs couches de matériaux dans un sol sont souvent modélisées par des non-variétés. Certains modèles de CAD/CAM [4] possèdent aussi des arêtes à l'intersection de plusieurs faces.

Les maillages utilisés dans cette thèse sont issus de la simulation et par conséquent, correspondent à des maillages surfaciques et volumiques non-structurés. Plus précisément, les techniques de simplification mises en place ont été dédiées au traitement de maillages possédant des cellules triangulaires et tétraédriques. Ces maillages non-structurés particuliers sont représentés par un couple $M = (K,V)$ séparant la connectivité du maillage et sa géométrie. K est généralement un *complexe simplicial* représentant la connectivité des sommets, des arêtes, des triangles et des tétraèdres. [Sta01] l'associe à la *microtopologie*. En opposition, certaines propriétés topologiques du modèle sont indépendantes de sa discrétisation, comme le nombre de trous ou le nombre de composantes connexes. Ces propriétés liées à la *macrotopologie* définissent des caractéristiques telles que le genre ou le type de variété. La *géométrie* du maillage est représentée par un ensemble V de positions de sommets dans $\mathbb{R}^3$. Ce découplage permet de mettre en évidence des propriétés topologiques indépendantes du plongement géométrique du modèle.

[4] Le sigle anglais *CAD/CAM* signifie *dessin assisté par ordinateur/modélisation assistée par ordinateur*

4.5 Homéomorphismes entre complexes simpliciaux

Les espaces topologiques représentés sous forme de complexes simpliciaux (définition 4.3.6 page 65) peuvent être comparés à l'aide d'applications dites simpliciales. Ce sont des applications linéaires par morceaux liant les complexes simpliciaux. Celles-ci permettent de définir un homéomorphisme de façon combinatoire et par suite de comparer le type topologique des complexes.

Définition 4.5.1 (Association de sommets *(vertex map)*) Soient K et L deux complexes simpliciaux. Une *association de sommets* de K dans L est une application $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ qui associe les sommets d'un simplexe de K aux sommets d'un simplexe de L.

Définition 4.5.2 (Application simpliciale) Soient K et L deux complexes simpliciaux et $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ une association de sommets. Ainsi lorsque les sommets $v_0, \ldots, v_n$ de K définissent un simplexe de K, les sommets $f(v_0), \ldots, f(v_n)$ sont les sommets d'un simplexe de L. L'association de sommets f peut donc être étendue à une application continue par construction $g : |K| \to |L|$, appelée *application simpliciale*, telle que

$$x = \sum_{i=0}^{n} b_i v_i \Rightarrow g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i f(v_i)$$

avec $b_i > 0$ pour tout i et $\sum_{i=0}^{n} b_i = 1$. En associant les b_i aux coordonnées barycentriques (définition 4.3.3 page 65), l'application simpliciale ainsi obtenue est linéaire par morceaux. A l'inverse de f, l'application simpliciale g est définie sur l'espace sous-jacent $|K|$, et à valeur dans $|L|$.

Si une association de sommets $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ est bijective et que son inverse est aussi une association de sommets alors l'application simpliciale associée $g : |K| \to |L|$ est un homéomorphisme. En effet g est continue par construction et supposée bijective. Son inverse est aussi une extension d'association de sommets, donc est aussi continue. L'application g est donc bien bijective et bicontinue.

L'application simpliciale $g : |K| \to |L|$ réalisant un homéomorphisme est appelée *homéomorphisme simplicial* ou *isomorphisme* de K dans L, noté $K \sim L$. Cette qualification d'isomorphisme provient de la linéarité par morceaux de l'application. Deux complexes simpliciaux isomorphes sont dits *simplicialement équivalents*. Intuitivement, on peut les voir comme étant les mêmes complexes, au plongement géométrique près.

Un condition suffisante plus souple pour assurer que deux complexes sont homéomorphes est obtenue grâce à la notion de subdivision d'un complexe.

Définition 4.5.3 (subdivision) Une *subdivision* de K, notée $\mathrm{Sd}\, K$, est un complexe simplicial K' tel que chaque simplexe de K' est contenu dans un simplexe de K et que K et K' ont le même espace sous-jacent.

Définition 4.5.4 (Equivalence combinatoire) Deux complexes simpliciaux sont *combinatoirement équivalents* ou *PL-équivalents*, notés $K \simeq L$, s'il existe des subdivisions K' de K et L' de L simplicialement équivalentes.

Par définition, si K et L sont *PL*-équivalents alors $|K|$ et $|L|$ sont homéomorphes. C'est cette condition d'équivalence combinatoire que les algorithmes développés dans cette thèse vont s'attacher à assurer.

4.6 Notions associées aux complexes simpliciaux

Afin de définir et d'étudier précisément la contraction d'une arête dans un complexe simplicial, d'autres notions comme l'ordre et la frontière doivent être introduites. En effet, la condition de préservation de la topologie de [DEGN98] est basée sur cette notion de frontière permettant de hiérarchiser les simplexes d'un complexe.

Soit B un sous-ensemble de simplexes d'un complexe simplicial K. Pour les définitions de la fermeture, de l'étoilé et du lien, B n'a pas besoin d'être un sous-complexe.

Définition 4.6.1 (Fermeture) La définition générale de la fermeture 4.2.7 est appliquée, ici, au cas combinatoire. La *fermeture* de B, notée $\overline{B}$, est l'ensemble de toutes les faces des simplexes de B, autrement dit :

$$\overline{B} = \{\tau \in K | \tau \leq \eta \in B\}.$$

Définition 4.6.2 (Etoilé) L'*étoilé*[5] de B, noté St B, est l'ensemble de toutes les cofaces des simplexes de B. De façon plus formelle :

$$\mathrm{St}\, B = \{\eta \in K | \eta \geq \tau \in B\}.$$

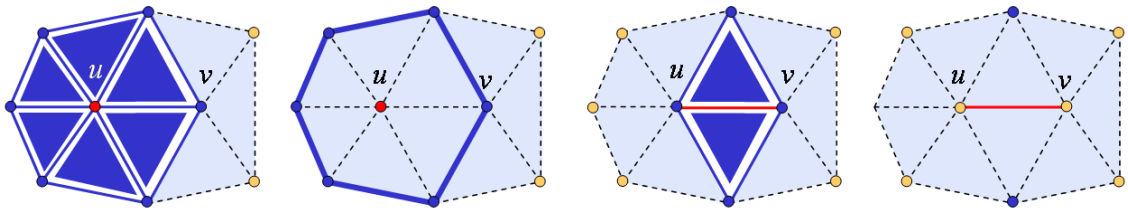
Intuitivement l'étoilé d'un simplexe τ est l'ensemble des simplexes de dimension supérieure, adjacents à τ. La recherche des étoilés dans les complexes simpliciaux est l'une des tâches les plus répétées lors du test de préservation de la topologie.

Définition 4.6.3 (Lien) Le *lien*[6], est l'ensemble de toutes les faces des cofaces des simplexes de B, qui sont disjointes des simplexes de B. Intuitivement, le lien d'un simplexe s est simplement la frontière de l'étoilé de s et il est généralement obtenu par suppression de l'ensemble des simplexes adjacents à s dans l'étoilé de s. Cette suppression de simplexes s'exprime par :

$$\mathrm{Lk}\, B = \overline{\mathrm{St}\, B} - \mathrm{St}\, \overline{B}.$$

La figure 4.11 illustre les notions d'étoilé et de lien pour un 2-complexe.

[5] *Star* en anglais
[6] *Link* en anglais



(a) Etoilé de u (b) Lien de u (c) Etoilé de uv (d) Lien de uv

FIG. 4.11: Etoilés et liens du sommet u et de l'arête uv dans un maillage triangulaire. Les simplexes en bleu foncé appartiennent respectivement à l'étoilé et au lien du simplexe représenté en rouge.

4.6.1 Ordre

L'ordre d'un simplexe τ dans un complexe simplicial K, mesure la complexité topologique du voisinage de τ dans K.

Définition 4.6.4 (Ordre d'un simplexe) Soit k la dimension de l'étoilé de τ ($k = \dim \mathrm{St}\,\tau$). L'ordre de τ est le plus petit entier i ($i = \mathrm{ord}\,\tau$) pour lequel il existe un $(k-i)-$simplexe η possédant un étoilé combinatoirement équivalent ($\mathrm{St}\,\tau \simeq \mathrm{St}\,\eta$).

L'ordre d'un simplexe τ est majoré par la différence entre la dimension de l'étoilé de τ et la dimension de τ :

$$\mathrm{ord}\,\tau \leq \dim \mathrm{St}\,\tau - \dim \tau. \tag{4.1}$$

Pour le voir, il suffit de choisir $\eta = \tau$ dans la définition 4.6.4 de l'ordre d'un simplexe.

De la propriété 4.1 on peut déduire la table 4.1 détaillant l'ordre maximal des simplexes dans un 2-complexe et un 3-complexe.

Simplexe τ	1-complexe	2-complexe	3-complexe
sommet (0-simplexe)	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 1$	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 2$	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 3$
arête (1-simplexe)	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 0$	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 1$	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 2$
triangle (2-simplexe)	.	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 0$	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 1$
tétraèdre (3-simplexe)	.	.	$\mathrm{ord}\,\tau \leq 0$

TAB. 4.1: Ordre des n-simplexes dans un k-complexe simplicial avec $n \leq k \leq 3$.

Comme illustré par la table 4.1, dans un 2-complexe, l'ordre des simplexes est 0, 1 ou 2. Un simplexe τ a un ordre de 0 si $\mathrm{St}\,\tau$ est homéomorphe à un disque ouvert de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas simple, le complexe est une 2-variété au voisinage de τ. Les simplexes représentés en bleu sur la figure 4.12 sont d'ordre 0. Tous les triangles dans cette figure sont d'ordre 0 puisqu'ils sont définis dans un 2-complexe. L'ordre de τ est 1 si $\mathrm{St}\,\tau$ est homéomorphe à p triangles partageant une même arête avec $p \neq 2$. Ce cas apparaît pour les arêtes et les sommets de frontière, représentés en orange sur la figure 4.12. Les sommets, représentés en rouge, en contact avec le plan

et l'aileron et se situant à l'extrémité de ce dernier, sont d'ordre 2. Dans ce cas il est impossible de trouver un simplexe ayant un étoilé combinatoirement équivalent à $\mathbb{B}$ ou $\mathbb{H}$ (voir définition 4.2.13 page 64).

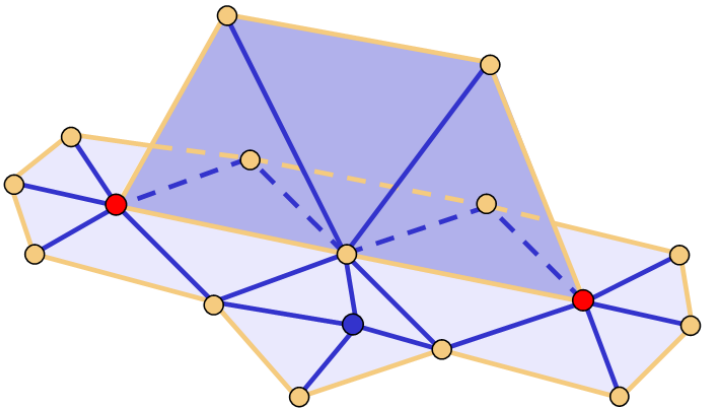
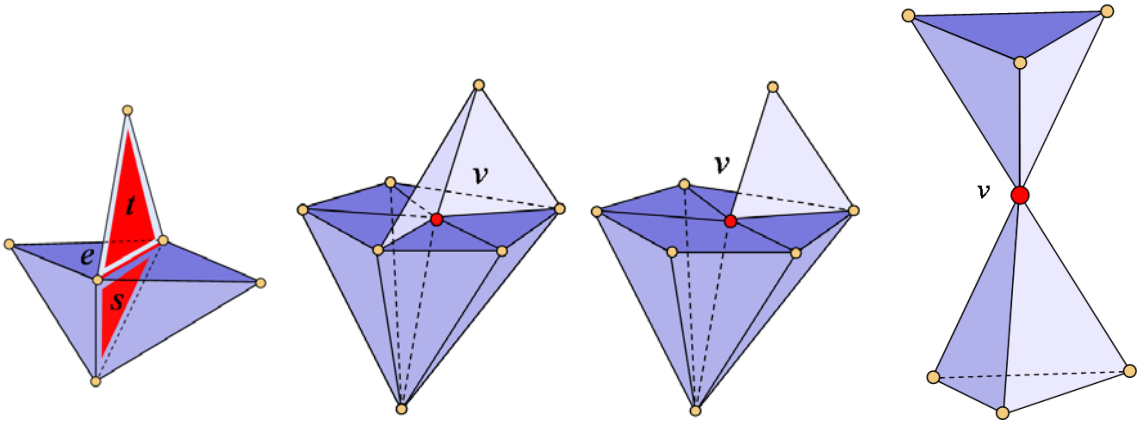


FIG. 4.12: Ordre des simplexes dans un 2-complexes : les simplexes représentés en bleu sont d'ordre 0, en orange d'ordre 1 et en rouge d'ordre 2.

Dans un 3-complexe, l'ordre d'un simplexe est inférieur ou égal à 3. Les simplexes d'ordre élevé ont un voisinage de topologie complexe, notamment dans le cas de complexes non purs. Les schémas de la figure 4.13 montrent des assemblages de simplexes amenant de telles situations. Un tétraèdre d'un 3-complexe est toujours d'ordre 0. Un triangle porté par exactement



(a) ord $s = 0$, ord $t = 0$, ord $e = 2$ (b) ord $v = 2$ (c) ord $v = 3$ (d) ord $v = 3$

FIG. 4.13: Illustration de l'ordre d'un simplexe dans un 3-complexe. Le complexe étudié est dans chaque cas représenté en rouge.

deux faces de tétraèdres du complexe est d'ordre 0, figure 4.13(a). Par contre un triangle de bord

est d'ordre 1. Un triangle adjacent à un tétraèdre par seulement une arête, comme le triangle t du schéma 4.13(a), est aussi d'ordre 0, car la dimension de son étoilé est 2. Les arêtes ont un ordre au plus égal à 2. Une arête intérieure au complexe est d'ordre 0. Une arête à la frontière du domaine est d'ordre 1, son voisinage est combinatoirement équivalent à une demi-sphère.

L'arête e de la figure 4.13(a) à la frontière du complexe et adjacente à un triangle isolé, est d'ordre 2. En effet, $\dim \mathrm{St}\, e = 3$ car des tétraèdres sont adjacents à e. L'ordre de e est le plus petit entier i tel qu'un $(3-i)$-*simplexe* η ait un étoilé combinatoirement équivalent à e. Pour $i = 0$, η est un 3-simplexe et pour $i = 1$, η est un 2-simplexe. Dans ces deux cas les étoilés de η et e ne peuvent pas être combinatoirement équivalents. Par contre, pour $i = 2$, il est possible de trouver un 1-simplexe qui satisfasse la définition de l'ordre (il suffit de prendre e).

L'ordre d'un sommet dans un 3-complexe est inférieur ou égal à 3. Les sommets intérieurs au complexe sont d'ordre 0, les sommets à la frontière, d'ordre 1. Les ordres plus élevés correspondent à des configurations complexes. Le sommet v du schéma 4.13(b) est d'ordre 2 puisqu'il est possible de trouver une arête qui est un étoilé combinatoirement équivalent à l'étoilé de v. L'ordre le plus élevé, pour un sommet d'un 3-complexe, peut être par exemple obtenu au sommet de bord d'un aileron comme sur le schéma 4.13(c) ou dans la configuration du schéma 4.13(d) où deux tétraèdres ne sont adjacents que par un sommet. Dans ces cas, seul l'étoilé d'un sommet (0-simplexe) peut avoir une topologie aussi complexe que celle de l'étoilé de v.

Les configurations présentées dans la figure 4.13 ne sont pas des cas isolés : bien au contraire elles apparaissent systématiquement si aucun test de préservation de la topologie n'est effectué lors de la simplification.

4.6.2 Frontière

Pour une 2-variété à bord, la frontière est simplement le cycle fermé d'arêtes ne possédant qu'un seul triangle adjacent. A l'aide de la notion d'ordre, la frontière peut être généralisée à d'autres dimensions et des complexes qui ne sont pas des variétés.

Définition 4.6.5 (Frontière d'ordre j) La *frontière d'ordre j* d'un complexe simplicial K, est définie par l'ensemble de tous les simplexes d'ordre j ou supérieur :

$$\mathrm{Bd}_j\, K = \{\tau \in K |\ \mathrm{ord}\, \tau \geq j\}.$$

De l'inégalité 4.1, il suit que la frontière d'ordre j contient seulement des simplexes de dimension $(\dim K - j)$ ou inférieure. La frontière d'ordre j contient toujours celle d'ordre $j+1$. C'est pourquoi, si la frontière Bd_j est vide alors toutes les frontières d'ordre supérieur sont vides.

La figure 4.14(a) montre les simplexes appartenant à la frontière d'ordre 1 de la figure 4.12. Les deux sommets rouges constituent la frontière d'ordre 2 (inclus aussi dans $\mathrm{Bd}_1\, K$).

Les schémas (b, c, d, e) de la figure 4.14 illustrent l'ensemble des frontières non-vides d'un 3-complexe K. Dans la frontière d'ordre 0, tous les simplexes sont présents. La frontière d'ordre 1 correspond à la peau du complexe, ne comprenant plus les tétraèdres ni l'arête commune au

cinq tétraèdres adjacents. La frontière d'ordre 2 ne contient que des simplexes d'ordre supérieur ou égal à 2. C'est pourquoi seule l'arête en contact avec le triangle isolé ainsi que le point de contact entre les deux parties de l'ensemble sont inclus dans cette frontière. La frontière d'ordre 3 n'est constituée que de trois sommets.

4.7 Contraction d'arêtes

Définition 4.7.1 (Cône de simplexes) Soit K un complexe dans $\mathbb{R}^n$ et ω un point de $\mathbb{R}^n$ tel que chaque rayon émergeant de ω intersecte $|K|$ en au plus un point. Le *cône de simplexes* sur K de sommet ω, noté $\omega \cdot K$, est la collection de tous les simplexes de la forme $\omega s_0 \ldots s_p$ où $s_0 \ldots s_p$ est un simplexe de K. Le point ω est affinement indépendant des sommets des simplexes de K. C'est pourquoi les nouveaux simplexes du cône sont de dimension supérieure à leur simplexe de base : $\dim(\omega \cdot s_0 \ldots s_p) = 1 + \dim(s_0 \ldots s_p)$.

L'opérateur de simplification par contraction d'arête, présenté au paragraphe 2.4.3, peut être défini par les notations introduites dans ce chapitre. La contraction d'une arête uv dans un complexe K remplace l'étoilé de la fermeture de l'arête uv ($\mathrm{St}\,\overline{uv}$) par l'étoilé d'un nouveau sommet w ($\mathrm{St}\,w$). Soient $E = \overline{\mathrm{St}\,\overline{uv}}$ et $C = \overline{\mathrm{St}\,w}$ correspondant aux fermetures respectives des étoilés de uv et w. E et C sont connectés à K grâce aux mêmes simplexes appartenant respectivement au lien de $\overline{uv}$ et au lien de w, noté $X = E - \mathrm{St}\,\overline{uv} = C - \mathrm{St}\,w$. Le complexe K est donc modifié par la contraction en un nouveau complexe L défini par :

$$L = K - \mathrm{St}\,\overline{uv} \cup w \cdot \mathrm{Lk}\,\overline{uv}.$$

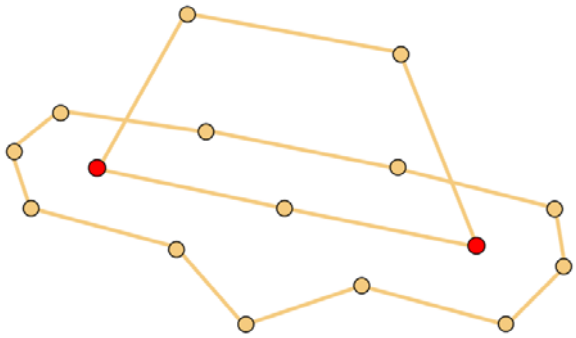
De plus les espaces sous-jacents de K et L sont liés par une application simpliciale $\varphi_{uv} : |K| \to |L|$ à l'aide de l'association de sommets f définie par :

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{si } u \in K^{(0)} - \{u,v\}, \\ w & \text{si } u \in \{u,v\} \end{cases}$$

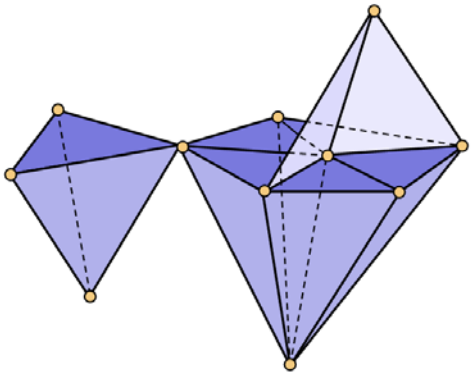
A l'extérieur de $|E|$, φ_{uv} est l'identité puisque la contraction est une opération locale qui modifie le complexe seulement au voisinage de l'arête. A l'intérieur de $|E|$ l'application est surjective mais pas injective. Plusieurs points de $|K|$ peuvent avoir la même image. En d'autres termes un sommet de $|L|$ peut avoir plusieurs antécédents dans $|K|$, ne satisfaisant pas la condition d'injectivité.

Afin de préserver le type topologique des complexes avant et après modification, il est nécessaire de vérifier si l'opération de contraction est homéomorphe. Pour cela, il faut chercher une application simpliciale $\psi : |K| \to |L|$ qui réalise un isomorphisme entre des subdivisions de K et L. Un tel isomorphisme est appelé un *recouvrement*[7] de φ_{uv}. Il est *local* si ψ diffère de φ_{uv} seulement dans $|E|$ et il est *relaxé* si ψ diffère de φ_{uv} seulement dans $\overline{\mathrm{St}\,E}$. Un recouvrement relaxé correspond donc à une transformation impliquant une région plus étendue que son homologue local, agrandie d'une bande de simplexes directement adjacents à $|E|$.

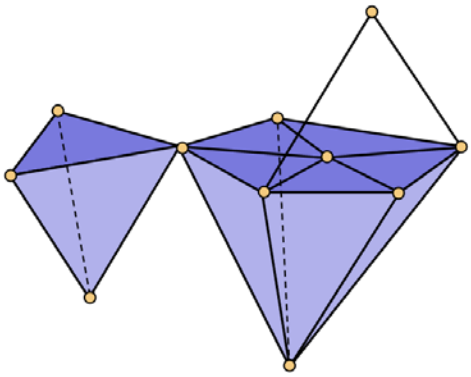
[7] *unfolding* en anglais



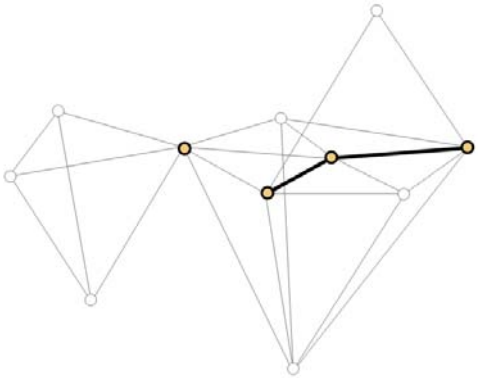
(a) $\mathrm{Bd}_1\ K$ (jaune) et $\mathrm{Bd}_2\ K$ (rouge)



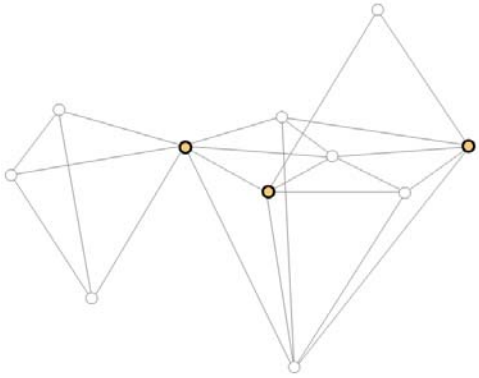
(b) $\mathrm{Bd}_0\ K$



(c) $\mathrm{Bd}_1\ K$

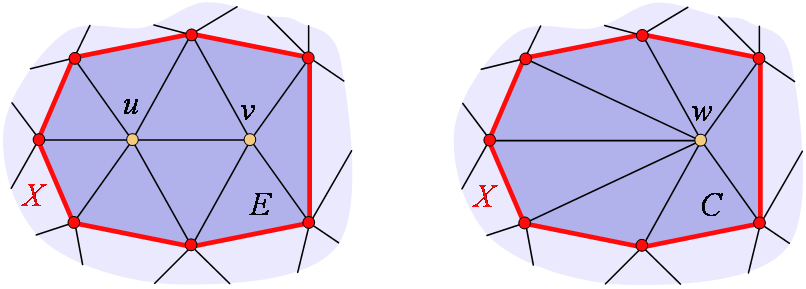


(d) $\mathrm{Bd}_2\ K$



(e) $\mathrm{Bd}_3\ K$

FIG. 4.14: (a) Frontières d'ordre 1 et 2 du 2-complexe simplicial représenté sur la figure 4.12. La frontière d'ordre 2 n'est constituée que des deux sommets rouges. (b,c,d,e) Extraction des frontières d'ordre j d'un 3-complexe simplicial K avec $0 \leq j \leq 3$.

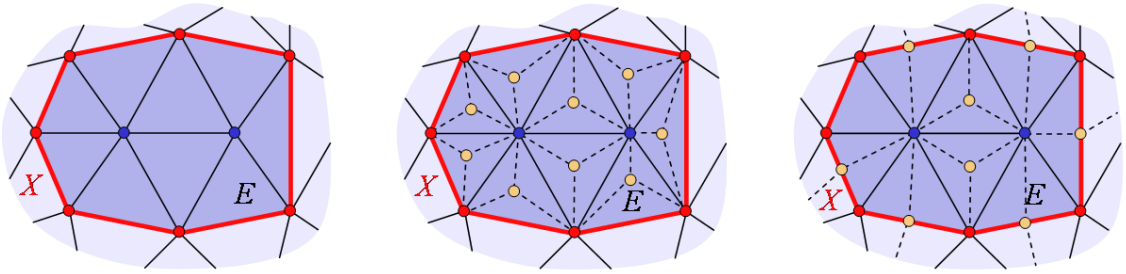


(a) Complexe K contenant E et X (b) Complexe L contenant C et X

FIG. 4.15: Notations utilisées pour définir la contraction d'une arête comme une application simpliciale.

Un recouvrement ψ de φ_{uv} correspond à une paire de subdivisions isomorphes entre les deux complexes K et L. Si ces subdivisions ne modifient que des simplexes de St $\overline{uv}$ et St c alors ψ est local, si elles affectent St E et St C alors ψ est relaxé.

La figure 4.16(a) montre un complexe K initial. La subdivision de K représentée en 4.16(b)



(a) K (b) $X \subseteq \mathrm{Sd}\, K$ (c) $X \subsetneq \mathrm{Sd}\,' K$

FIG. 4.16: Exemples de subdivisions d'un complexe associé à un recouvrement local (b) ou à un recouvrement relaxé (c). Sur le schéma (c), les arêtes initiales rouges de X ne sont pas contenues dans $\mathrm{Sd}\,' K$ puisque certaines arêtes ont été subdivisées par des sommets orange de $\mathrm{Sd}\,' K$.

ne modifie pas la frontière du complexe initial (dessinée en rouge), alors que la subdivision représentée en figure 4.16(c) modifie sa frontière en ajoutant des sommets. C'est pourquoi, le recouvrement associé à la paire de subdivisions (4.16(a), 4.16(b)) est local, alors que celui associé à la paire (4.16(a), 4.16(c)) est relaxé.

Définition 4.7.2 (Subdivision transparente) L'isomorphisme $\psi : |\mathrm{Sd}\, E| \to |\mathrm{Sd}\, C|$ *préserve la connexion* si $\psi(x) \in \sigma$ pour tout point $x \in \sigma \in X$ avec $X = E \cap C$. $\mathrm{Sd}\, E$ est dite *transparente* si $X \subseteq \mathrm{Sd}\, E$.

Lemme 4.7.1 Subdivisions isomorphes Si E et C ont des subdivisions $\mathrm{Sd}\,E$ et $\mathrm{Sd}\,C$ admettant un isomorphisme préservant la connexion alors φ_{uv} a un recouvrement relaxé. Si de plus $\mathrm{Sd}\,E$ et $\mathrm{Sd}\,C$ sont transparentes alors φ_{uv} a un recouvrement local.

Une démonstration du lemme 4.7.1 est donnée dans [DEGN98].

Par définition de la construction de l'application simpliciale, si φ_{uv} a un recouvrement local ou relaxé alors K et L sont combinatoirement équivalents.

4.8 Condition du lien

Une contraction d'arête transforme un complexe simplicial K en un nouveau complexe simplicial L. Le problème est toujours de savoir si une contraction préserve la topologie de K, autrement dit que K et L sont du même type topologique. Pour cela, une contraction d'arête peut être représentée par une application simpliciale (surjective) de $|K|$ dans $|L|$. Seules les applications simpliciales réalisant un homéomorphisme vont être envisagées. Pour cela on associe un recouvrement (homéomorphisme simplicial) à l'application simpliciale, qui permet de faire correspondre une paire de subdivisions isomorphes de K et L. Il faut alors trouver des subdivisions, simplicialement équivalentes, qui préservent la connexion. Si de telles subdivisions existent alors l'application simpliciale a un recouvrement au minimum relaxé. Dans ce cas par définition, les complexes K et L sont combinatoirement équivalents.

Pour prouver qu'une contraction d'arête admet un recouvrement local ou relaxé dans un 3-complexe, [DEGN98] a énoncé les théorèmes 4.8.1 et 4.8.2 qui utilisent plusieurs conditions du lien dans des complexes étendus.

Comme présenté au paragraphe 4.6.2, la frontière d'ordre i est constituée de l'ensemble des simplexes d'ordre inférieur ou égal à i. Soit M_i la classe de complexes simpliciaux ayant des frontières vides pour les ordres supérieurs à i, notée :

$$M_i \;=\; \{K \mid \mathrm{Bd}_{i+1}\,K \;=\emptyset\}.$$

Puisque les frontières d'ordres supérieurs sont contenues dans les précédentes, il est possible de définir une hiérarchie de complexes, de la forme :

$$\emptyset = M_{-1} \subset M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

La frontière d'ordre i est étendue en ajoutant un sommet fictif ω et le cône de simplexes de ω vers tous les simplexes de la frontière d'ordre $i+1$:

$$\mathrm{Bd}_i^{\omega}\,K \;=\; \mathrm{Bd}_i\,K \;\cup\; \omega\cdot\mathrm{Bd}_{i+1}\,K.$$

Dans un complexe étendu, le lien d'un simplexe $\sigma \in \mathrm{Bd}_i^{\omega}\,K$ dans $\mathrm{Bd}_i^{\omega}\,K$ est noté Lk_i^{ω} . Les conditions du lien correspondent à un ensemble d'égalités comparant les liens des arêtes et l'intersection des liens de ses sommets extrémités, exprimées par :

$$\mathrm{Lk}_i^{\omega}\,u \cap \mathrm{Lk}_i^{\omega}\,v = \mathrm{Lk}_i^{\omega}\,uv,\ \forall i \geq 0.$$

Avec toutes ces définitions, deux théorèmes, proposés par [DEGN98], peuvent être énoncés s'appliquant respectivement aux 2-complexes et aux 3-complexes. Comme expliqué dans les paragraphes précédents, la contraction d'une arête uv est, pour ces théorèmes, une application simpliciale $\varphi_{uv} : |K| \to |L|$. Dans les différents calculs des liens des simplexes, ω désigne le sommet fictif utilisé pour étendre la frontière. Les notations suivantes seront utilisées dans l'ensemble des paragraphes de ce chapitre :

$$K^{\omega} = K \cup (\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, K)$$

$$G^{\omega} = \mathrm{Bd}_1\, K \cup (\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\, K)$$

$$H^{\omega} = \mathrm{Bd}_2\, K \cup (\omega \cdot \mathrm{Bd}_3\, K)$$

K^{ω} et G^{ω} sont utilisés pour les 2-complexes et les 3-complexes alors que H^{ω} uniquement pour les 3-complexes. Avec ces notations, les liens $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, \tau$, $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\, \tau$ et $\mathrm{Lk}_2^{\omega}\, \tau$ désignent respectivement les liens de τ dans K^{ω}, G^{ω} et H^{ω}.

Théorème 4.8.1 *Soit K un 2-complexe et uv une arête de K. Si $K \in M_2$ est un 2-complexe alors le premier axiome implique le second :*

(i) uv satisfait les conditions du lien pour $i = 2$:

(i.0) $Lk_0^{\omega}\, u \cap Lk_0^{\omega}\, v = Lk_0^{\omega}\, uv$,

(i.1) $Lk_1^{\omega}\, u \cap Lk_1^{\omega}\, v = \emptyset$.

(ii) φ_{uv} admet un recouvrement local.

Théorème 4.8.2 *Soit K un 3-complexe et uv une arête de K. Si $K \in M_3$ est un 3-complexe alors le premier axiome implique le second :*

(i) uv satisfait les conditions du lien pour $i = 3$:

(i.0) $Lk_0^{\omega}\, u \cap Lk_0^{\omega}\, v = Lk_0^{\omega}\, uv$,

(i.1) $Lk_1^{\omega}\, u \cap Lk_1^{\omega}\, v = Lk_1^{\omega}\, uv$ *et*

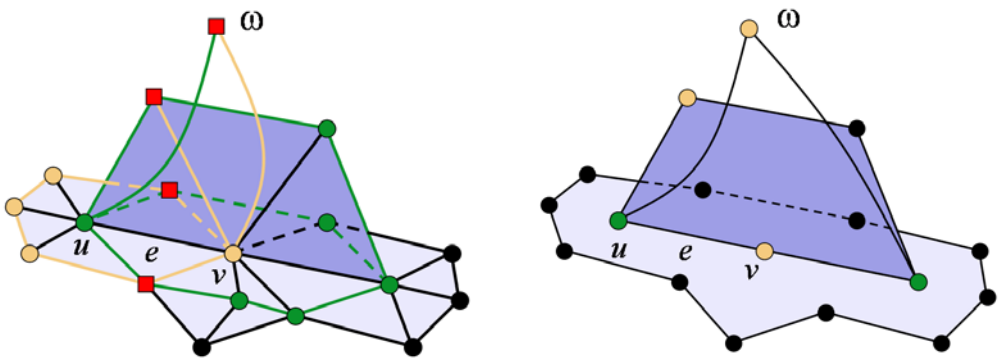
(i.2) $Lk_2^{\omega}\, u \cap Lk_2^{\omega}\, v = \emptyset$.

(ii) φ_{uv} admet un recouvrement relaxé.

Les preuves de ces théorèmes sont détaillées dans l'article [DEGN98] sections 5 et 6. Ces théorèmes permettent d'utiliser des outils combinatoires, telles les conditions du lien, pour assurer la préservation de la topologie dans un complexe lors d'une contraction d'arête. Les maillages ne représentant pas des variétés sont donc traités avec les mêmes théorèmes, puisque ceux-ci sont valables pour des complexes simpliciaux quelconques. Notons également que ces complexes ne sont pas supposés purs : des 3-complexes peuvent contenir des triangles non-face de tétraèdres.

4.9 Exemples

La figure 4.17 illustre le test topologique du théorème 4.8.1, dans un 2-complexe non-manifold. L'illustration de gauche représente la première condition du théorème et celle de droite la seconde.



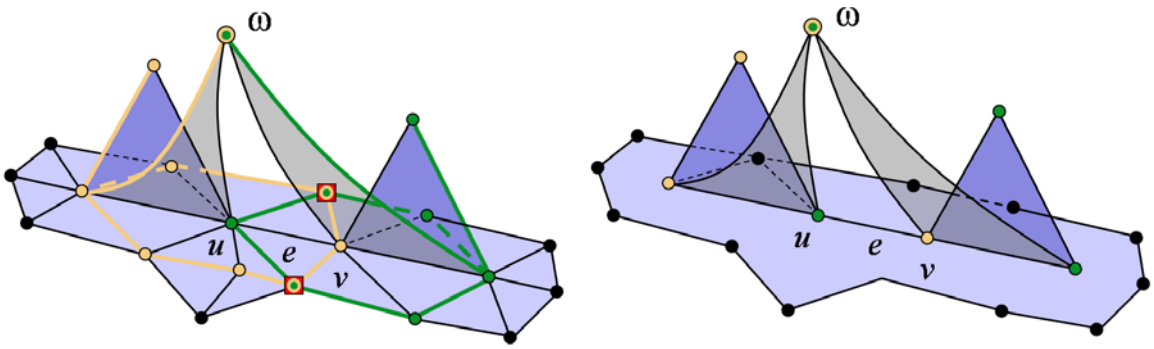
(a) $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega\, v = \mathrm{Lk}_0^\omega\, uv$, (b) $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_1^\omega\, v = \emptyset$

FIG. 4.17: Evaluation des conditions du lien dans K^ω *(à gauche)* et G^ω *(à droite)* pour une contraction d'arête préservant la topologie du complexe.

L'aileron, composé de trois triangles intersecte un plan de base en deux arêtes d'ordre 1. Le calcul des liens de cet ensemble utilise l'ordre des simplexes, illustré en figure 4.12, et les frontières d'ordres 1 et 2, illustrées en figure 4.14(a). Le test topologique porte sur la contraction de l'arête $e = uv$. Les simplexes représentés en orange et en rouge sur le schéma 4.17(a) représentent $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$. Il est important de noter que l'arête $v\omega$ est dans ce lien puisque le triangle $uv\omega$ correspond à un simplexe du cône de ω. Les simplexes représentés en vert et en rouge appartiennent à $\mathrm{Lk}_0^\omega\, v$ et $\mathrm{Lk}_0^\omega\, e$ ne contient que les sommets rouges. Dans cette configuration la condition du lien est vérifiée. Sur le schéma 4.17(b), $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u$ ne contient que trois sommets (orange) et $\mathrm{Lk}_1^\omega\, v$ deux sommets (vert). Dans ce cas l'intersection de ces deux ensembles est vide, la deuxième condition du théorème est réalisée. La contraction de e préserve la topologie du maillage.

Le deuxième exemple, figure 4.18, montre un cas de contraction d'arête modifiant la topologie du maillage. L'arête e, est sur un plan et connecte deux ailerons disjoints. La contraction de e lierait ces deux éléments et donc modifierait la topologie. La convention des couleurs est la même que pour l'exemple précédent. Dans ce complexe, l'arête e est d'ordre 0 et n'appartient pas à la frontière d'ordre de 1 du complexe.

Ses sommets extrémités sont par contre d'ordre 2 puisqu'ils sont au coin d'un aileron en contact avec le plan. Dans le calcul de $\mathrm{Lk}_0^\omega\, e$, aucun simplexe relié à ω n'intervient puisque e est d'ordre 0. Le lien de l'arête dans K^ω ne contient que deux sommets, alors que l'intersection des liens de ses sommets extrémités contient ω. En effet u et v sont d'ordre 2 donc inclus dans



(a) $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega\, v \neq \mathrm{Lk}_0^\omega\, uv$. L'intersection des liens des sommets contient ω. Le lien de l'arête ne le contient pas.

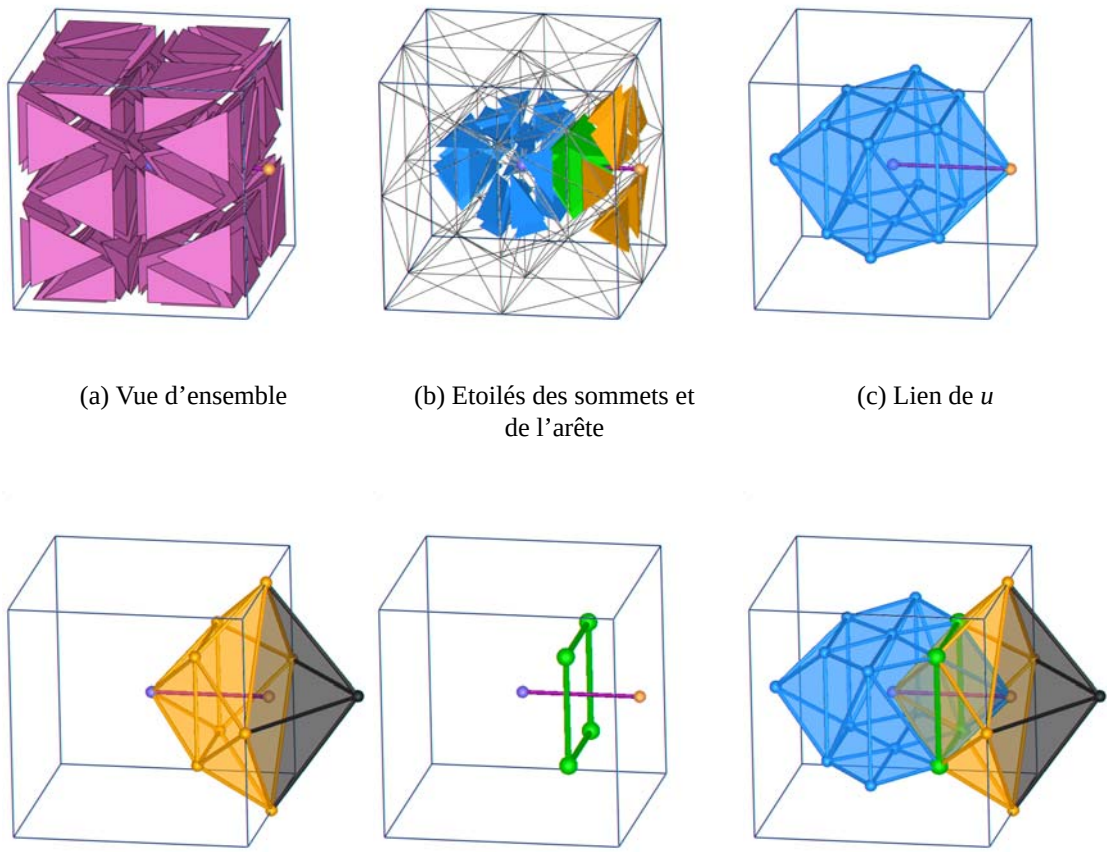
(b) $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_1^\omega\, v \neq \emptyset$. L'intersection des liens des sommets contient le sommet ω.

FIG. 4.18: Evaluation des conditions du lien dans K^ω *(à gauche)* et G^ω *(à droite)* dans le cas d'une contraction d'arête modifiant la topologie du 2-complexe.

la frontière d'ordre 2. Puisque les frontières d'ordre supérieures sont incluses dans les précédentes, u et v sont inclus dans $\mathrm{Bd}_1\, K$ et donc utilisés pour former les cônes de ω. Dans ce cas ω est dans l'intersection de $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ et $\mathrm{Lk}_0^\omega\, v$ mais pas dans $\mathrm{Lk}_0^\omega\, uv$. La modification de la topologie de K est détectée dans K^ω.

En pratique le calcul de Lk_1^ω n'est pas nécessaire puisque la première condition du lien n'a pas été vérifiée. Il est cependant intéressant de voir que la deuxième condition n'est pas non plus vérifiée. u et v étant tous deux des sommets d'ordre 2, ils sont reliés à ω dans G^ω par un cône restreint aux arêtes $u\omega$ et $v\omega$. L'intersection des liens des sommets n'est donc pas vide.

La figure 4.19 illustre le calcul du lien dans un 3-complexe. Les étoilés et les liens du sommet u à supprimer sont en bleu, ceux du sommet destination v en orange et ceux de l'arête en vert.4.19(b) montre les étoilés de ces trois simplexes. Le sommet v étant au bord du domaine, son étoilé représente une demi-boule ouverte le long de la frontière. Le lien de u correspond à une surface fermée centrée en u, figure 4.19(c). Le lien de v, figure 4.19(d), est constitué d'une demi-sphère utilisant des faces des tétraèdres du volume et un ensemble de faces de tétraèdres fictifs. Le sommet v étant au bord, le cône $\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, K$ contient un ensemble de tétraèdres fictifs adjacents à v. La peau de ce cône est incluse dans le lien de v représenté par les triangles noirs de l'illustration 4.19(d). Le lien de l'arête est constitué d'un anneau d'arêtes et de sommets, comme illustré en 4.19(e). La vue générale 4.19(f) montre les trois liens superposés, exhibant de ce fait l'égalité dans K^ω. L'intersection des liens (surfaces bleues et orange) est égale au lien de l'arête (anneau vert). Les conditions du lien dans G^ω et H^ω sont vides puisque aucun simplexe (à part la frontière autour de v uniquement) n'est d'ordre supérieur à 0 dans l'étoilé de la fermeture de l'arête.



(a) Vue d'ensemble

(b) Etoilés des sommets et de l'arête

(c) Lien de u

(d) Lien de v

(e) Lien de e

(f) Vue générale

FIG. 4.19: Condition du lien dans K^{ω} d'un 3-complexe. Les autres conditions sont vides. Cette contraction est valide. Le sommet orange de la contraction est un sommet de bord d'où la fermeture du complexe par un cône de tétraèdres fictifs.

4.10 Conclusion

Le domaine de la topologie algébrique permet de définir précisément l'opération de contraction d'arête appliquée sur des maillages représentés par des complexes simpliciaux. Les complexes simpliciaux peuvent être comparés à l'aide d'applications simpliciales construites à partir d'une association de sommets. Pour assurer que deux complexes simpliciaux sont homéomorphes, on cherche des subdivions isomorphes de ces complexes. La préservation de la topologie du maillage au cours de la simplification est garantie, en prouvant l'existence de telles subdivisions entre les complexes avant et après simplification.

Cependant, dans le cadre de ce projet, les maillages manipulés possèdent des sous-structures représentées par des sous-ensembles de simplexes particuliers. Bien que la topologie du complexe simplicial englobant soit préservée avec ces méthodes, rien ne certifie que la topologie de ces sous-ensembles est préservée. En étendant ces résultats au présent problème, de nouveaux

critères topologiques vont être proposés permettant de préserver en plus la topologie de ces sous-structures. Le cadre théorique de cette extension et sa réalisation sont détaillés au chapitre suivant.

Chapitre 5

Préservation de la topologie de sous-structures imbriquées

La préservation de la topologie d'un modèle, lors de la simplification par contractions d'arêtes, est facilitée par l'implémentation des théorèmes présentés au chapitre précédent. Pour des maillages triangulaires ou tétraédriques, les conditions du lien sont évaluées, permettant de rejeter les arêtes qui conduiraient à un changement de topologie du maillage. Cependant, les maillages utilisés dans le cadre du présent projet ont la particularité d'être constitués de sous-structures, présentées au paragraphe 3.4.2, imbriquées dans les cellules du modèle initial. La contribution majeure de ces travaux, est la prise en compte de telles sous-structures, afin de préserver leur topologie lors de la simplification.

Ce chapitre présente les critères topologiques novateurs, proposés dans cette thèse. Après une présentation générale de l'algorithme (paragraphe 5.1), le cas surfacique est présenté à travers la représentation des sous-structures dans un 2-complexe (paragraphe 5.2), des exemples (paragraphe 5.3) et l'implémentation de ces tests dans un outil de simplification surfacique (paragraphe 5.4). Le critère topologique dans le cas surfacique a été utilisé pour valider l'approche du cas volumique plus complexe. Ce dernier est ensuite présenté en détaillant la représentation des sous-structures dans un 3-complexe (paragraphe 5.5), son implémentation (paragraphe 5.6) et une série d'exemples montrant la grande variété de cas traités par ce critère volumique (paragraphe 5.7).

5.1 Présentation de l'algorithme

L'idée générale des algorithmes présentés dans ce chapitre est de traiter de façon uniforme, les problèmes topologiques lors de la simplification du modèle et de toutes ses sous-structures. Pour cela, les sous-structures vont être représentées par un sous-ensemble de cellules particulières, ajoutées au maillage initial. Ces cellules ainsi que celles du maillage forment alors un maillage *étendu*, dans lequel les deux types de mailles coexistent. L'avantage d'une telle représentation est de permettre l'utilisation des théorèmes de préservation de la topologie, présentés au chapitre précédent, directement sur le maillage étendu.

Ces théorèmes sont valables pour des maillages représentés par des complexes simpliciaux. C'est pourquoi, chaque élément de ces sous-structures est défini par un nouveau simplexe, ajouté au complexe simplicial initial. Le test de préservation de la topologie, implémenté des théorèmes 4.8.1 et 4.8.2, va être utilisé sur le complexe simplicial étendu. Il assure la validité d'une contraction d'arête vis-à-vis de la topologie des éléments présents dans tout le complexe, y compris de l'ensemble des simplexes associés aux sous-structures.

Les maillages manipulés dans le cadre de ce projet sont essentiellement des maillages triangulaires et tétraédriques. Dans le premier cas, des sous-structures sont définies comme un sous-ensemble d'arêtes de la triangulation avec d'éventuelles intersections créant des points particuliers. Dans le second cas, les sous-structures, plus complexes, sont composées de sommets, d'arêtes mais aussi de surfaces formées par un ensemble de triangles correspondant à des faces de tétraèdres. Ces surfaces peuvent s'intersecter en polylignes ou créer des points particuliers à partir d'intersections multiples. Des exemples sont donnés en figure 3.7.

Les travaux de cette thèse ont été menés dans le but de simplifier des maillages volumiques. Cependant, il apparut important de valider l'approche présentée, dans un cas plus simple, c'est-à-dire pour un 2-complexe. Ce travail théorique et d'implémentation a facilité la spécification des problèmes qui allaient apparaître dans le cas d'un 3-complexe. De plus, l'utilisation importante des maillages triangulaires en visualisation et en informatique graphique rendent cette méthode intéressante pour de nombreuses applications détaillées au chapitre 6.

5.2 Préservation de la topologie des sous-structures d'un 2-complexe

5.2.1 Représentation de sous-structures dans un 2-complexe

Soit K un 2-complexe et E un sous-ensemble des arêtes de K qui représente l'ensemble des sous-structures linéiques à conserver. La fermeture $\overline{E}$ de E correspond à une collection d'arêtes de K formant des polylignes. La topologie de ces dernières peut être complexe avec de nombreuses intersections, divisions, cycles ou encore fusions. De même, la surface triangulée peut être aussi générale que possible, en représentant notamment une non-variété, appelée *non-manifold* par habitude. Les arêtes non-manifold, à l'intersection de surfaces, sont des caractéristiques linéiques aussi importantes que les polylignes. L'ordre des arêtes non-manifold étant 1 (voir illustration 4.12), elles sont incluses dans la frontière d'ordre 1 du complexe. Ces arêtes non-manifold ainsi que les arêtes des polylignes définissent un 1-complexe :

$$F = \overline{E} \cup \mathrm{Bd}_1\, K.$$

La contraction d'une arête de K peut évidemment modifier la topologie de K mais aussi celle du 1-complexe F. Le but de l'algorithme présenté dans ce paragraphe, est de développer un test topologique robuste qui détecte les changements de topologie de K, tout en détectant le changement de topologie des polylignes de K. La topologie des polylignes, représentées par F, va être codée *implicitement* dans le complexe englobant K, créant de ce fait un nouveau *complexe*

étendu $\widetilde{K}$. La construction de ce complexe va être réalisée de façon à ce qu'une contraction, préservant la topologie de $\widetilde{K}$, préserve la topologie de K et des polylignes imbriquées F.

5.2.2 Contractions d'arêtes dans le complexe étendu

Les arêtes de la collection E sont considérées comme des arêtes d'ordre 0 sans influencer sur le contenu de F. En effet, si E contient une arête d'ordre 1 alors elle sera forcément contenue dans $\mathrm{Bd}_1\ K$, et donc dans F. Le complexe étendu $\widetilde{K}$ utilise le sommet fictif ω utilisé dans le théorème 4.8.1 pour construire la frontière d'ordre 1. Plus exactement $\widetilde{K}$ est construit en ajoutant les cônes de simplexes depuis le sommet fictif ω vers toutes les arêtes de E :

$$\widetilde{K} = K \cup \omega \cdot \overline{E}.$$

Avec cette définition, les arêtes des polylignes imbriquées sont étendues à un 2-sous-complexe du complexe étendu $\widetilde{K}$. La figure 5.1 illustre un complexe étendu créé à partir de deux polylignes

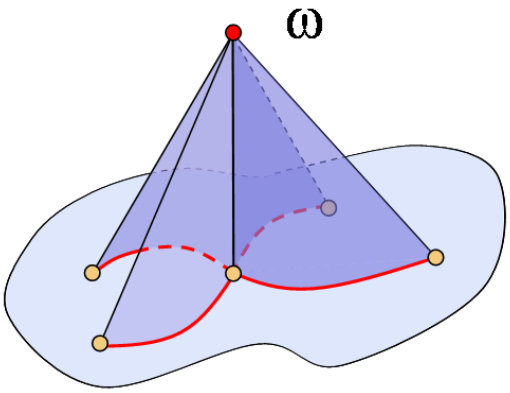


FIG. 5.1: Représentation du complexe étendu : les cônes de simplexes à partir d'un sommet fictif (représenté en rouge) vers les arêtes des polylignes (polylignes rouges) sont ajoutés au complexe initial.

qui s'intersectent. Le sommet rouge représente le sommet fictif ω qui, en réalité, n'a aucune position géométrique définie. Les arêtes de la polyligne représentées en rouge, sont étendues par des triangles ayant ω comme sommet opposé à l'arête de la polyligne. Dans ce contexte le complexe étendu est défini tel que sa frontière d'ordre 1 soit égale à F :

Lemme 5.2.1 $\mathrm{Bd}_1\ \widetilde{K} = F$

Preuve Une arête de E est d'ordre 0, c'est-à-dire qu'elle a exactement deux triangles adjacents dans K, et trois triangles adjacents dans $\widetilde{K}$. Donc elle est d'ordre 1 dans $\widetilde{K}$. Une arête d'ordre 1 dans K n'est pas dans E, donc elle a le même étoilé dans K et $\widetilde{K}$. Elle est encore d'ordre 1 dans $\widetilde{K}$. Donc $F \subset \mathrm{Bd}_1\ K$ est bien vérifié. A présent, soit e une arête d'ordre 1 dans $\widetilde{K}$. e a soit un, soit trois ou plus triangles dans son étoilé. Si e a seulement un triangle dans son étoilé alors elle appartient à la frontière de K. Si elle a trois triangles ou plus dans son étoilé, e est soit une arête non-manifold de K, soit une arête de E. Dans ce cas, $\mathrm{Bd}_1\ \widetilde{K} \subset F$ est aussi vérifié. □

Le lemme 5.2.1 montre que la topologie des structures imbriquées F est codée implicitement dans le complexe étendu. Une contraction d'arête dans K correspond à une contraction dans $\widetilde{K}$. Les cônes de simplexes de ω vers les simplexes de la frontière d'ordre 1 ont été créés pour la contraction. L'ensemble des polylignes modifiées F peut donc être retrouvé facilement comme étant l'ensemble des arêtes opposées à ω dans un triangle.

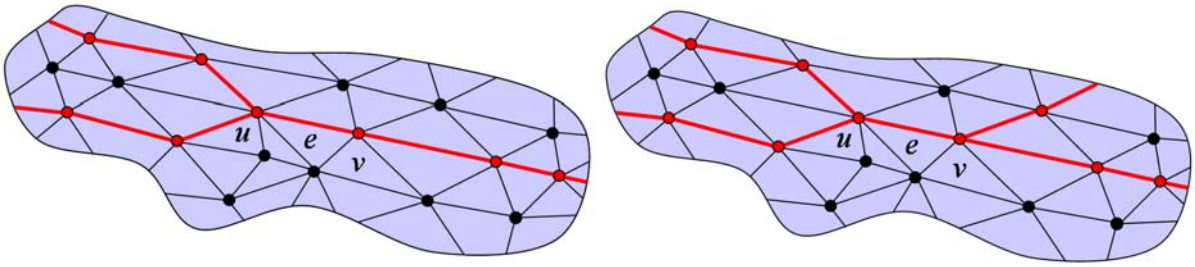
Le lemme 5.2.2 appliqué à un complexe étendu $\widetilde{K}$ prouve que si une contraction d'arête préserve la topologie de $\widetilde{K}$, alors elle préserve aussi la topologie de $\mathrm{Bd}_1\ \widetilde{K}$. En d'autres termes, elle préserve bien la topologie de l'ensemble des polylignes puisque $\mathrm{Bd}_1\ \widetilde{K} = F$, d'après le lemme 5.2.1.

Lemme 5.2.2 Soit K un 2-complexe et uv une arête dans K telle que les conditions du lien (i) et (ii) du théorème 4.8.1 soient vérifiées. Alors la contraction de l'arête uv préserve la topologie de $\mathrm{Bd}_1\ K$.

Preuve Soient $M = \mathrm{Bd}_1\ K$, et $M^\omega = \mathrm{Bd}_0\ M \cup \omega \cdot \mathrm{Bd}_1\ M$. Le 1-complexe M correspond à la fermeture de l'ensemble des arêtes d'ordre 1 dans K. Le fait que M soit un 1-complexe suffit à montrer qu'il n'y a pas de sommet dans l'intersection des liens de u et v dans M^ω. Comme $\mathrm{Bd}_1\ M = \mathrm{Bd}_1\ (\mathrm{Bd}_1\ K) \subset \mathrm{Bd}_2\ K$, tout sommet dans le lien de u (respectivement de v) dans M^ω, est aussi dans le lien de u (respectivement de v) dans G^ω. La condition (ii) du théorème 4.8.1 implique le lemme. □

5.3 Exemples

Les deux exemples suivants illustrent le test topologique présenté au paragraphe précédent. Les complexes K_a et K_b, figure 5.2, utilisent la même triangulation mais diffèrent par la définition d'une branche supplémentaire de polyligne présente uniquement dans K_b. L'arête e plongée



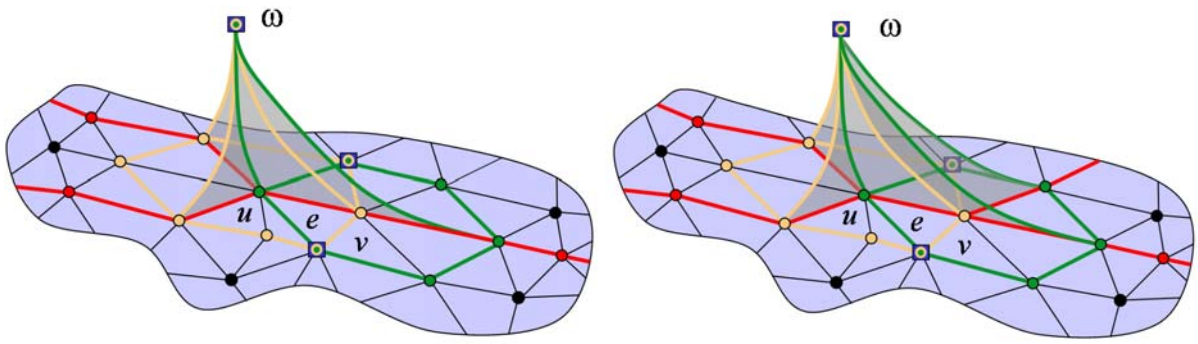
(a) Maillage initial K_a (b) Maillage initial K_b

FIG. 5.2: Maillages triangulaires initiaux avec des sous-structures représentées par la polyligne rouge.

dans la triangulation est candidate à la contraction. Le test va donc déterminer si la contraction

de e préserve la topologie du complexe K_a (respectivement de K_b) ainsi que la topologie de la polyligne imbriquée. Les couleurs suivantes sont associées aux simplexes des figures : le rouge pour la polyligne, l'orange pour le lien de u, le vert pour le lien de v et le bleu pour le lien de e. Les triangles fictifs sont représentés de façon courbe en semi-transparent.

Dans le premier exemple, utilisant le complexe K_a, la polyligne n'a qu'un seul point d'auto-intersection, point u sur le schéma 5.2(a). Les sommets u et v étant sur la polyligne, le cône de simplexe de ω vers les arêtes de la polyligne, adjacentes à u et v, intervient dans le calcul du lien dans $\widetilde{K}_a^\omega$. La figure 5.3(a) montre le complexe étendu uniquement autour des sommets de l'arête. Quatre triangles fictifs reposent sur les quatre arêtes de la polyligne, adjacentes soit à u, soit à v. Le lien de u dans $\widetilde{K}_a^\omega$ correspond d'une part au cycle d'arêtes sur le plan, d'autre part aux arêtes opposées à u dans les triangles fictifs adjacents. Ce lien est représenté par les simplexes orange de la figure 5.3(a). Le lien de v dans $\widetilde{K}_a^\omega$ est obtenu de façon similaire. L'in-



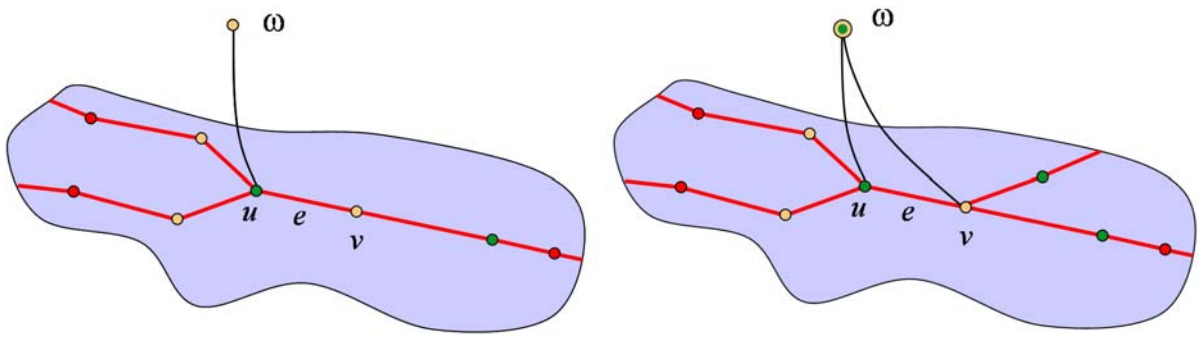
(a) Condition du lien dans $\widetilde{K}_a^\omega$: $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega\, v = \mathrm{Lk}_0^\omega\, uv$

(b) Condition du lien dans $\widetilde{K}_b^\omega$: $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega\, v = \mathrm{Lk}_0^\omega\, uv$

FIG. 5.3: Evaluation de la première condition du lien du théorème 4.8.1.

tersection de ces liens contient trois sommets dont ω. L'arête e coïncide avec une arête de la polyligne. Le complexe étendu $\widetilde{K}_a$ comprend donc le triangle fictif $uv\omega$. Le lien de l'arête est composé des deux sommets opposés des triangles adjacents à e sur le plan. Il contient aussi le sommet opposé à l'arête dans le triangle fictif, c'est-à-dire ω. Dans ce cas le lien de l'arête est identique à l'intersection des liens des sommets. La condition du lien dans $\widetilde{K}^\omega$ est vérifiée.

L'évaluation de la condition du lien dans $\widetilde{G}_a^\omega$ est illustrée sur la figure 5.4(a). L'étoilé d'un sommet dans $\widetilde{G}_a^\omega = \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K}_a \cup \omega \cdot \mathrm{Bd}_2\, \widetilde{K}_a$ ne peut contenir que des arêtes incidentes au sommet. Si bien que le lien ne contiendra que des sommets. La composante $\mathrm{Bd}_1\, K_a$ de $\widetilde{G}_a^\omega$ autour de u contient les arêtes de la polyligne. Le sommet u étant sur un embranchement de polyligne, au moins trois triangles fictifs utilisent l'arête $u\omega$. Cette arête est donc d'ordre 1 dans $\widetilde{K}$ et aussi présente dans la première composante. Le voisinage de u a un voisinage très complexe entre les triangles du plan et les triangles fictifs. Son ordre est 2. La composante $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\, K_a)$ de $\widetilde{G}_a^\omega$ contient l'arête $u\omega$ donc le lien de u dans $\widetilde{G}_a^\omega$ contient le sommet ω. L'ordre du sommet v n'étant pas si élevé, $\widetilde{G}_a^\omega$ autour de v ne contiendra que les deux arêtes des polylignes. Le sommet ω n'est donc pas inclus dans ce lien. La condition du lien est vérifiée dans $\widetilde{G}_a^\omega$. Le théorème 4.8.1



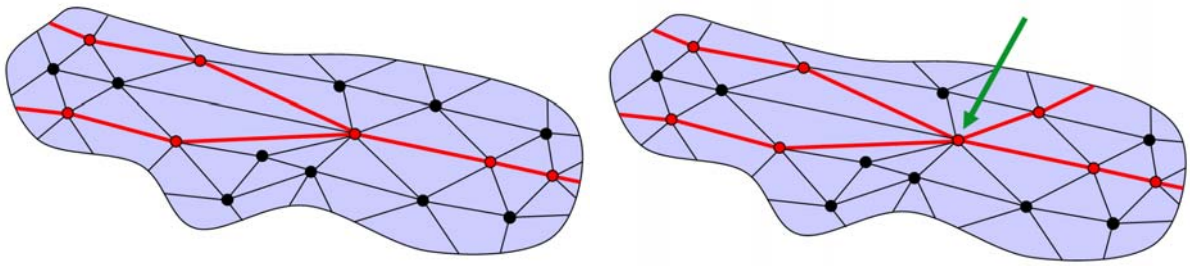
(a) Condition du lien dans $\widetilde{G}_a^\omega$: $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_1^\omega\, v = \emptyset$

(b) Condition du lien dans $\widetilde{G}_b^\omega$: $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_1^\omega\, v \neq \emptyset$

FIG. 5.4: Evaluation de la seconde condition du lien du théorème 4.8.1. Les liens des sommets u et v dans $\widetilde{G}_b^\omega$ ont le sommet ω en commun. La condition du lien n'étant pas vérifiée, une modification de la topologie de $\widetilde{K}_b$ est détectée.

s'applique, prouvant la préservation de la topologie de K_a et de ses sous-structures, figure 5.5(a).

Le deuxième exemple, utilisant le complexe K_b, possède deux points d'intersection entre des branches de la polyligne. Ces deux points sont les points u et v de l'arête candidate à la contraction. Les liens dans $\widetilde{K}_b^\omega$ sont sensiblement les mêmes que ceux de $\widetilde{K}_a^\omega$. La seule différence est une arête dans le lien de v qui appartient à un triangle fictif, construit à partir du segment de polyligne supplémentaire, figure 5.3(b). La condition du lien dans $\widetilde{K}_b^\omega$ est vérifiée.



(a) Maillage K_a après la contraction de e

(b) Maillage K_b après la contraction de e

FIG. 5.5: La topologie du maillage et de la polyligne est préservée après la contraction de e dans K_a. Elle ne l'est pas dans K_b puisqu'un embranchement de polyligne disparaîtrait après une telle contraction.

Dans K_b, v est un sommet particulier à l'intersection de plusieurs branches de polylignes. Plusieurs triangles fictifs, adjacents à v sont insérés pour construire $\widetilde{K}_b^\omega$, comme illustrés sur le schéma 5.4(b). L'arête $v\omega$ est d'ordre 1 dans $\widetilde{K}_b^\omega$ et de ce fait présente dans $\widetilde{G}_b^\omega$. Le lien de u

est identique dans $\widetilde{G}_b^\omega$ et $\widetilde{G}_a^\omega$. L'intersection des liens contient le sommet ω ne satisfaisant pas la condition du lien dans $\widetilde{G}_b^\omega$ du théorème 4.8.1. L'arête e est rejetée, puisqu'elle introduirait un changement de la topologie de la polyligne en contractant deux sommets d'ordre 2 dans $\widetilde{K}_b^\omega$, comme sur le schéma 5.5(b).

5.4 Implémentation du test topologique pour un 2-complexe

La structure de données utilisée pour ce projet a été choisie pour appréhender du mieux possible le traitement des structures imbriquées. Lors d'une contraction, il est important d'avoir le minimum de données à mettre à jour. Or toutes les sous-structures peuvent être affectées par une contraction. Dans le cas surfacique, seules les arêtes des triangles peuvent porter des polylignes. Dans le cas volumique, un même tétraèdre peut coder jusqu'à six segments de polylignes et quatre triangles d'une interface. Cette diversité a motivé le choix d'une structure spécifique par dimension mais fonctionnant de façon similaire.

5.4.1 Librairies implémentant des structures de données

Le suivi de caractéristiques, la simplification de maillages et la représentation multirésolution sont des opérations étroitement liées à la structure de données. Dans un travail amont, différentes solutions d'implémentation ont été étudiées notamment en utilisant des librairies adaptées à la manipulation de triangulations. Les librairies, citées ci-après, sont disponibles gratuitement sur le réseau Internet et constituent les ressources les plus proches des besoins de cette thèse.

MT *Multi-Tesselation* (`http://disi.unige.it/person/MagilloP/MT`)
Librairie `C++` qui implémente la manipulation de complexes simpliciaux dans toutes les dimensions. Elle autorise la création d'une représentation multirésolution à partir d'une séquence de modifications. De plus elle permet une exploitation de cette représentation multirésolution en extrayant des maillages à résolution variable.

VCG *Visualization and Computer Graphics* (`http://vcg.sourceforge.net`)
Librairie `C++` utilisant abondamment la notion de *template*. Elle permet de manipuler, modifier et afficher (avec `OpenGL`) des complexes simpliciaux. Cette librairie a bénéficié de l'expérience de la librairie `MT` pour son implémentation. Elle est utilisée dans le logiciel `METRO` (mesure d'erreur entre surfaces) et au sein de projets Européens.

VTK *Visual Toolkit* (`http://www.vtk.org`)
Librairie `C++` dédiée à la visualisation et à l'imagerie. Elle est très largement utilisée dans le monde industriel à travers des outils de visualisation (`MayaVI`, `VisIt`, `ParaView` ...) ou au sein de développements spécifiques. Des techniques de simplification de maillages surfaciques sont implémentées ([SZL92], [Lin00]). De nombreuses interfaces vers d'autres langages existent implémentant un très vaste panel de techniques de visualisation.

CGAL *Computational Geometry Algorithm Library* (http://www.cgal.org)
Librairie C++ fournissant des algorithmes robustes en géométrie algorithmique. Elle implémente des algorithmes très complexes sur des triangulations 2D, 3D ou des polyèdres. Elle est utilisée principalement dans le monde de la recherche et de l'enseignement de par sa rigueur. Des méthodes de simplification utilisent les algorithmes de retriangulation disponibles dans CGAL, comme [UBF+05].

GTS *GNU Triangulated Surface* (http://gts.sourceforge.net)
Librairie C, orientée objet, pour la manipulation de surfaces triangulées. Elle implémente des algorithmes de simplification de surfaces par contractions d'arêtes [LT98], réalisables en mémoire externe à l'aide d'amas de sommets [Lin00]. La contraction d'arêtes et l'éclatement de sommets de [Hop96] sont aussi disponibles.

LibMesh (http://libmesh.sourceforge.net)
Environnement de programmation en C++ pour la simulation aux éléments finis utilisant des techniques AMR[1]. Elle autorise la manipulation de maillages non structurés hybrides 2D ou 3D. Elle est interfacée avec d'autres codes utilisés dans le cadre de la simulation tels METIS ou PETSc. Cette librairie fournit directement une méthode de lecture des fichiers au format UNV[2] et fournit des méthodes de suppression de cellules.

Autres Il existe bien sûr d'autres librairies permettant de manipuler des maillages mais les précédentes sont celles se rapprochant le plus des besoins de cette thèse. Une liste plus complète est disponible sur le site Internet du livre [LWC+02] : http://lodbook.com/source.

5.4.2 Structure de données choisie

Le logiciel de validation du test topologique, présenté dans cette thèse, a été implémenté avec une structure de données spécifique et minimale pour les besoins du projet. La modification de sous-structures, l'extension d'un maillage (ajout de cellules provenant d'un cône de simplexe) et la contraction d'arêtes sont des opérations qualifiées de bas-niveau par rapport à la structure de données. Cette dernière doit donc offrir tous ces services à un coût réduit, puisque dans ce projet, ce sont les opérations les plus utilisées.

En effet, MT a été conçue de façon généraliste indépendamment de la dimension et nécessite un travail non négligeable pour construire une séquence d'opérations sur un maillage. Par contre une fois cette séquence construite, les méthodes et la documentation permettent facilement de mettre à profit cette hiérarchie en construisant une représentation multirésolution avec extraction de maillages à résolutions variables. MT est utilisée dans ce projet, pour exploiter la hiérarchie c'est-à-dire après la simplification. VCG, offre un vaste panel d'outils de manipulation

[1] Adaptive Mesh Refinement
[2] Format de fichiers UNIVERSEL généré par le mailleur IDEAS. Ce format est utilisé dans le cadre du projet de cette thèse.

de complexes simpliciaux. Cette librairie réimplémente les fonctionnalités de MT. La documentation et des exemples détaillés d'utilisation seraient les légers défauts de cette contribution. Elle constitue une solution pour l'implémentation du présent projet, mais n'ayant été disponible qu'à partir de 2004, n'a pas été utilisée (l'implémentation du projet ayant débuté en 2003).

VTK, largement utilisée dans la communauté, est dédiée à la visualisation. Comme présentée en 3.5.2, l'étape de hiérarchisation des données doit pouvoir être effectuée sur une machine n'étant pas dédiée à la visualisation (autrement dit n'ayant aucune librairie graphique d'installée comme OpenGL). L'utilisation de la structure de données de VTK nécessite son installation et donc l'accès à des ressources graphiques. La séparation des parties de hiérarchisation et de visualisation n'est donc pas possible. CGAL et LibMesh constituent des environnements très complets de manipulation de maillages qui vont bien au-delà des besoins du projet. Leur utilisation est envisageable mais ne constitue pas la solution la mieux adaptée. Enfin GTS implémente de nombreuses techniques de simplifications mais est seulement dédiée aux surfaces.

Il est évident que l'ensemble des algorithmes présentés, peuvent être implémentés avec les librairies existantes. Cependant l'implémentation d'une structure de données propre au projet a permis un contrôle précis des opérations et une meilleure compréhension des techniques utilisées. De plus elle a permis de minimiser les ressources nécessaires puisque la dimension et la composition des modèles étaient connues.

5.4.3 Implémentation

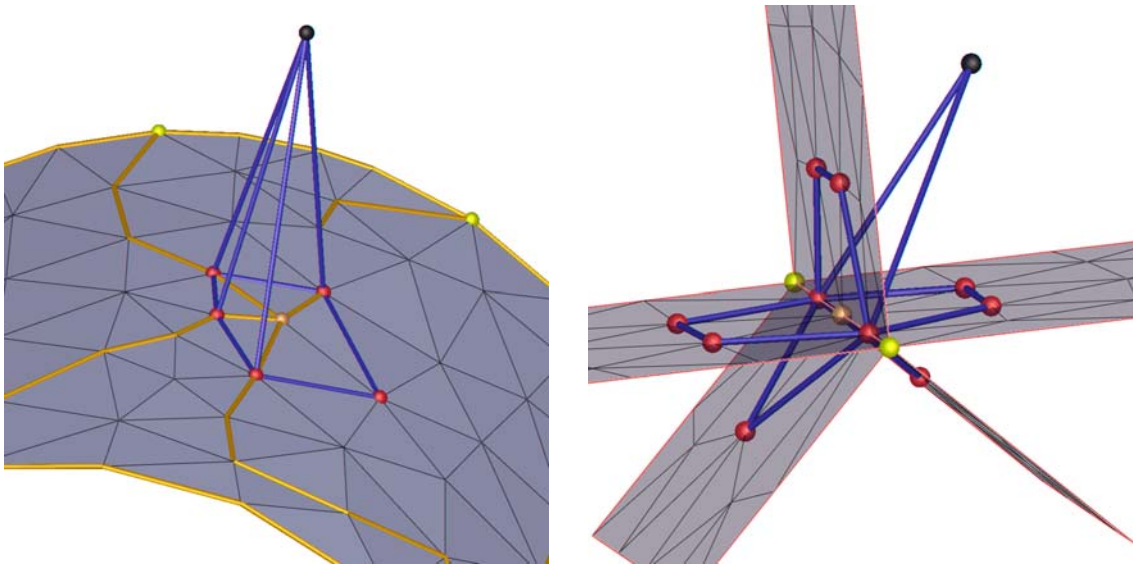
Les structures de données et les opérations de simplification sont implémentées par environ 4000 lignes de code C. La gestion de la mémoire est contrôlée de façon rigoureuse puisqu'elle constitue un goulot d'étranglement dans ce type d'algorithme en mémoire principale (en opposition avec les algorithmes en mémoire externe). Un outil de visualisation permettant de suivre la simplification a été proposé, implémenté avec OpenGL. La simplification et la visualisation représentent environ 9000 lignes de codes C.

Les maillages triangulaires non structurés, manipulés dans ce projet, sont codés à l'aide d'une structure indexée avec stockage explicite de la table de connectivité des triangles aux faces. Ainsi les sommets stockant leurs coordonnées par des flottants, sont indexés par leur position dans le fichier maillage. Les triangles sont des triplets d'index de sommets. Ils possèdent aussi un triplet d'entiers stockant les indices des triangles voisins à travers leurs faces.

Les faces adjacentes à une arête non-manifold sont représentées à l'aide d'une structure en *diamant*. Le parcours de ces faces autour d'une arête référence est réalisé de la même façon que dans le cas volumique. Seules les faces adjacentes à l'arête sont alors envisagées dans ces amas de faces représentant des tétraèdres. La figure 5.6(a) représente le lien d'un sommet se trouvant à l'intersection de polylignes. La figure 5.6(b) illustre le calcul du lien d'un sommet se trouvant sur une arête non-manifold. Le cycle fermé d'arêtes du lien se prolonge sur chaque aileron autour du sommet *orange*.

Les arêtes des polylignes, définies sur les arêtes des triangles, sont codées à l'aide de trois

bits d'un champ de bits dans la structure d'un triangle. Ainsi le couple $s_{poly} = (T_i, r_j)$ désigne un segment de polyligne représenté par l'arête r_j (avec $r_j = 0, 1, 2$) du triangle T_i, comme illustré sur la figure 5.7(a).



(a) Lien d'un sommet à l'intersection de plusieurs polylignes.

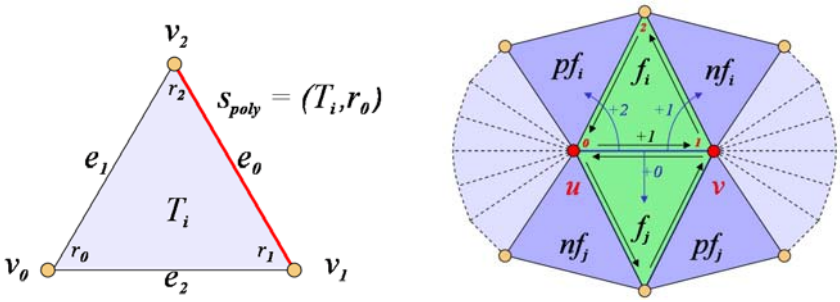
(b) Lien d'un sommet à l'intersection de plusieurs surfaces non-manifold.

FIG. 5.6: Liens d'un sommet dans un complexe étendu. Dans le complexe étendu, les triangles fictifs sont ajoutés depuis les segments des polylignes *(gauche)* vers le sommet fictif, ou depuis l'intersection des surfaces *(droite)* modifiant le lien du sommet orange. Les sommets jaunes sont les intersections des polylignes représentées par des arêtes orange. Les sommets rouges, les arêtes bleues et le sommet noir sont les simplexes du lien du sommet orange. Le sommet noir correspond au sommet fictif ω.

Grâce à cette *représentation relative*, aucune information de connectivité n'est gérée au niveau des sous-structures, puisqu'elles utilisent la connectivité des triangles. Ainsi une modification de la connectivité des triangles se répercutera automatiquement sur la connectivité des polylignes sans surcoût. Cette représentation est d'autant plus avantageuse en volumique où deux niveaux d'imbrication existent avec les interfaces et les polylignes.

La représentation relative est utilisée pour le stockage des sous-structures mais aussi pour le parcours du maillage et l'énumération des arêtes candidates à la contraction. La figure 5.7(b) illustre les relations entre les indices relatifs des sommets, des arêtes et des faces. Dans cet algorithme de simplification par contraction d'arêtes, l'énumération d'un voisinage s'effectue toujours autour d'une arête. Puisqu'elles sont stockées par un couple (T_i, r_j), la relation de connectivité du sommet vers la face est connue localement. Cette représentation permet de ne pas stocker la relation d'un sommet vers ses faces adjacentes et allège considérablement la structure de données[3]. L'énumération des simplexes autour d'un sommet ou d'une arête est réa-

[3] A titre d'exemple [CFM+04] utilise cette relation *sommet* → *tétraèdre* dans le cas volumique.



(a) Représentation des sous-structures par index relatifs

(b) Déplacement dans la triangulation

FIG. 5.7: Structure de données représentant des maillages triangulaires avec des sous-structures.

lisée à partir de l'indice relatif de l'arête référence et de l'indice absolu du triangle, comme illustrée dans le pseudo-code suivant :

```
// Extrait les indices absolus des sommets et faces autour de l'arête (fi,re)
// le '%' designe la fonction modulo
AnnotateNeighbors(Face* F, int fi, int er)
{
  u   = F[fi].V[ (er+1)%3 ]     // V[i] est l'indice du sommet i
  v   = F[fi].V[ (er+2)%3 ]
  nfi = F[fi].N[ (er+1)%3 ]     // N[i] est l'indice de la face voisine i
  pfi = F[fi].N[ (er+2)%3 ]
  fj  = F[fi].N[  er      ]
  ...
}
```

5.4.4 Algorithme

Ce paragraphe décrit l'implémentation de l'algorithme détectant si une arête $e = uv$ du maillage M peut être contractée sans modifier la topologie de la surface, ni la topologie des polylignes définies sur les arêtes des triangles.

```
Algorithme principal IsEdgeCollapseValid(K, Ti, er)
entrée : Complexe, indice absolu d'une face, indice relatif d'une arête
sortie : Renvoie VRAI si la contraction préserve la topologie, FAUX sinon
```

1. **Création du complexe étendu :** Marquer les sommets et les faces autour de u, v et e pour optimiser le parcours. Parcourir chaque arête e_i adjacente à u ou v et ajouter un triangle fictif $e_i \cdot \omega$ si e_i est une arête de polyligne ou appartient à la frontière d'ordre 1 du complexe. Le complexe étendu est créé localement le temps d'une contraction.

2. **Calcul des sommets de $\mathbf{Lk}_0^\omega\ u$:** Parcourir les arêtes e_i adjacentes à u dans le complexe étendu. Pour chaque arête e_i stocker le sommet opposé à u dans $\mathrm{Lk}_0^\omega\ u$. Ce sommet opposé

est ω si l'arête est un segment de polyligne ou appartient à la frontière d'ordre 1 de M. Puisque le voisinage de u a été localement étendu, ce cas est traité implicitement par un simple parcours exhaustif des triangles adjacents à u.

3. **Calcul des arêtes de $\mathbf{Lk}_0^\omega$ u :** Parcourir les faces f_i adjacentes à u dans le complexe étendu. Pour chaque face f_i stocker l'arête opposée à u dans Lk_0^ω u.
4. **Calcul de $\mathbf{Lk}_0^\omega$ v :** Le calcul des sommets et des arêtes de Lk_0^ω v est obtenu de la même façon que le calcul de Lk_0^ω u, c'est-à-dire en appliquant les étapes 2 et 3 de l'algorithme à v.
5. **Calcul de $\mathbf{Lk}_0^\omega$ e :** Parcourir les faces f_i adjacentes à e dans le complexe étendu. Pour chaque face f_i stocker le sommet opposé à e dans Lk_0^ω e.
6. **Comparaison de $\mathbf{Lk}_0^\omega$ $u \cap \mathbf{Lk}_0^\omega$ v et $\mathbf{Lk}_0^\omega$ e :** L'intersection de Lk_0^ω u et Lk_0^ω v est calculée. Si l'intersection contient une arête, **la contraction est rejetée** car Lk_0^ω e ne peut contenir d'arêtes. Comparer le nombre de sommets dans l'intersection Lk_0^ω $u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega$ v avec le nombre de sommets dans Lk_0^ω e. Si ces nombres diffèrent alors **la contraction est rejetée**. Il suffit de comparer le nombre de sommets et non l'égalité parfaite des indices car dans tous les cas les sommets de Lk_0^ω e forment un sous-ensemble des sommets de Lk_0^ω $u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega$ v.
7. **Calcul de $\mathbf{Lk}_1^\omega$ u :** Parcourir les arêtes e_{bi} adjacentes à u et incluses dans la frontière d'ordre 1 du complexe étendu. Pour chaque arête e_{bi} stocker le sommet opposé à u dans Lk_1^ω u. Il est important de noter que si u est dans la frontière d'ordre 2 du complexe étendu, alors l'arête ωu est incluse dans la composante $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\ K)$ de G^ω et par conséquent le sommet ω est inclus dans Lk_1^ω u.
8. **Calcul de $\mathbf{Lk}_1^\omega$ v :** Le calcul des sommets Lk_1^ω v est obtenu de la même façon que le calcul de Lk_1^ω u, c'est-à-dire en appliquant l'étape 7 de l'algorithme à v.
9. **Calcul de $\mathbf{Lk}_1^\omega$ $u \cap \mathbf{Lk}_1^\omega$ v :** L'intersection de Lk_1^ω u et Lk_1^ω v est calculée. Si l'intersection n'est pas vide alors **la contraction est rejetée** car la seconde condition du théorème 4.8.1 n'est pas vérifiée.
10. **Terminaison :** Si aucune des étapes précédentes de l'algorithme n'a rejeté la contraction, alors **la contraction est acceptée**. Les faces fictives utilisant ω, construites localement autour de u et v, à l'étape 1, sont détruites.

5.5 Préservation de la topologie des sous-structures d'un 3-complexe

5.5.1 Représentation des sous-structures d'un 3-complexe

Soit K un 3-complexe, L_f un sous-ensemble de faces de K et L_a un sous-ensemble d'arêtes de K. La fermeture de L_f représente les sous-structures surfaciques qu'il est important de préserver, comme les interfaces entre matériaux dans le cadre de ce projet. La fermeture de L_a correspond aux sous-structures linéiques qui caractérisent des détails fins à préserver, paragraphe 3.4.2. L'algorithme de préservation de la topologie des sous-structures et du maillage,

décrit dans ce paragraphe, utilise l'idée d'extension de complexes, mais en utilisant une association de simplexes particulière. Précédemment, au sein d'un 2-complexe, la préservation de la topologie des sous-structures linéiques était testée sur F (voir paragraphe 5.2), formées des simplexes d'ordre 1 dans le complexe étendu.

Dans le cas d'un 3-complexe, les sous-structures sont de dimensions 2 ou 3. Leur ordre varie en conséquence mais reste borné par l'inégalité 4.1. Une sous-structure linéique L_a a un ordre inférieur ou égal à 2, alors que l'ordre d'une sous-structure surfacique L_f est inférieur ou égal à 1. C'est pourquoi L_f (respectivement L_a) peut être associée à des simplexes de la frontière d'ordre 1 (respectivement 2). Ces associations de simplexes forment un 2-complexe F_f et un 1-complexe F_p tels que :

$$\begin{aligned} F_f = &\ \overline{L_f} \cup \mathrm{Bd}_1\, K \\ F_p = &\ \overline{L_a} \cup \mathrm{Bd}_2\, K. \end{aligned}$$

Afin de représenter implicitement la topologie de F_f et F_p, K est étendu à un complexe $\widetilde{K}$ en ajoutant un ensemble de cônes de simplexes. Après cette construction bien choisie, si une contraction d'arête préserve la topologie de $\widetilde{K}$ alors les topologies de K, L_f et L_a seront aussi préservées, comme expliqué ci-après.

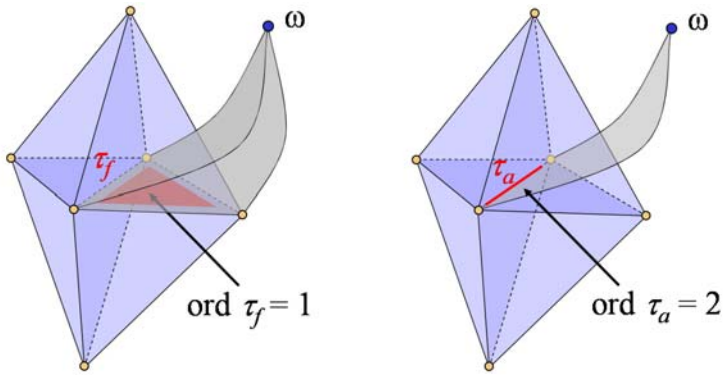
5.5.2 Contractions d'arêtes dans le complexe étendu

Afin de préserver la topologie des deux sous-structures, le complexe K est étendu de façon à préserver la dimension et la différence d'ordre des simplexes de ses caractéristiques. Les faces de la collection L_f sont considérées uniquement comme des faces d'ordre 0. En effet si une face de L_f est d'ordre 1, par exemple à la frontière du volume, alors elle sera contenue dans $\mathrm{Bd}_1\, K$ et donc dans F_f. Le même sommet fictif ω, utilisé pour fermer le complexe K, est utilisé pour étendre le complexe et ainsi l'ordre des simplexes de F_f. De même, les arêtes de la collection L_a sont considérées comme des arêtes d'ordre 0. Si une arête de L_a est d'ordre supérieur (1 ou 2) alors elle sera incluse dans $\mathrm{Bd}_1\, K$. Les arêtes d'ordre 2 sont aussi incluses dans $\mathrm{Bd}_1\, K$ puisque $\mathrm{Bd}_2\, K \in \mathrm{Bd}_1\, K$. Les cônes de simplexes de ω vers les simplexes de $\overline{L_a}$ sont aussi ajoutés au complexe K. Ainsi le 3-complexe étendu $\widetilde{K}$ est défini par :

$$\widetilde{K} = K \cup \omega \cdot \overline{L_f} \cup \omega \cdot \overline{L_a}.$$

La dimension de L_f étant 2, le cône $\omega \cdot L_f$ est de dimension 3 contenant des tétraèdres (et toutes leurs k-faces) ayant une 2-face $\tau_f \in L_f$ et ω comme sommet opposé à τ_f. Le cône $\omega \cdot L_a$ définit un ensemble de triangles (et leurs k-faces) ayant une arête (1-face) $\tau_a \in L_a$ et ω comme sommet opposé à τ_a. La figure 5.8 illustre cette construction. Au sein du complexe étendu, les triangles des sous-structures surfaciques de L_f sont d'ordre 1 et les arêtes des polylignes de L_a sont d'ordre 2 (paragraphe 4.6.1). Il est important de noter que tous les simplexes fictifs n'ont aucune représentation géométrique. Ces éléments sont représentés sur les figures d'une façon courbe pour les différencier des simplexes du complexe.

De façon similaire au cas bidimensionnel, la frontière d'ordre 1 du complexe étendu $\widetilde{K}$



(a) Cône de simplexe de ω vers $\overline{L}_f$

(b) Cône de simplexe de ω vers $\overline{L}_a$

FIG. 5.8: Représentation d'un 3-complexe étendu. L'arête rouge symbolise un segment de polyligne et le triangle rouge une face d'une sous-structure surfacique. Les cônes de simplexes de ces deux sous-structures sont représentés par les cellules fictives *courbes*, en gris, qui utilisent le sommet fictif ω.

correspond au complexe F_f, et la frontière d'ordre 2 de $\widetilde{K}$ au complexe F_p :

$$\begin{aligned} \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K} = &\quad F_f \\ \mathrm{Bd}_2\, \widetilde{K} = &\quad F_p \end{aligned}$$

Le théorème de préservation de la topologie 4.8.2 s'applique sur un complexe sans bord. C'est pourquoi, le complexe étendu $\widetilde{K}$, construit précédemment, va être fermé à l'aide d'un cône de simplexes fictifs. Ce cône utilise un sommet fictif. Il n'est cependant pas nécessaire d'introduire un nouveau sommet fictif. En effet la fermeture d'un 3-complexe correspond à l'ajout d'un sous-ensemble de simplexes complétant son bord d'ordre 1. Un ensemble de tétraèdres fictifs est ajouté à K s'appuyant sur la frontière du complexe. Il y a analogie entre la frontière et une sous-structure surfacique qui se justifie par le fait qu'un bord peut être assimilé à une sous-structure surfacique particulière qu'il est important de préserver.

5.5.3 Conditions du lien dans $\widetilde{K}$

Les conditions du lien dans le complexe étendu ne sont donc pas modifiées par ces cônes de simplexes, qui n'ont pour effet que d'augmenter l'ordre de certains simplexes. Ainsi les trois conditions du lien du théorème 4.8.2 sont évaluées logiquement dans :

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^{\omega} = &\quad \widetilde{K} \cup (\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K}) \\ \widetilde{G}^{\omega} = &\quad \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K} \cup (\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\, \widetilde{K}) \\ \widetilde{H}^{\omega} = &\quad \mathrm{Bd}_2\, \widetilde{K} \cup (\omega \cdot \mathrm{Bd}_3\, \widetilde{K}) \end{aligned}$$

avec Lk_0^{ω} , Lk_1^{ω} et Lk_2^{ω} désignant respectivement les liens d'un simplexe dans $\widetilde{K}^{\omega}$, $\widetilde{G}^{\omega}$ et $\widetilde{H}^{\omega}$. Le tableau 5.1 exhibe la composition de ces trois ensembles. Les relations entre la dimension

Sous-ensemble	Tétraèdre	Triangle	arête	sommet
$\mathrm{Bd}_0\ K$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$\mathrm{Bd}_1\ K$	...	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$\mathrm{Bd}_2\ K$	...	...	$\surd$	$\surd$
$\mathrm{Bd}_3\ K$	...	...	...	$\surd$
$\widetilde{K}^{\omega}:\ \mathrm{Lk}_0^{\omega}\ u$	...	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$\widetilde{K}^{\omega}:\ \mathrm{Lk}_0^{\omega}\ e$	...	...	$\surd$	$\surd$
$\widetilde{G}^{\omega}:\ \mathrm{Lk}_1^{\omega}\ u$	...	...	$\surd$	$\surd$
$\widetilde{G}^{\omega}:\ \mathrm{Lk}_1^{\omega}\ e$	...	...	...	$\surd$
$\widetilde{H}^{\omega}:\ \mathrm{Lk}_2^{\omega}\ u$	...	...	...	$\surd$
$\widetilde{H}^{\omega}:\ \mathrm{Lk}_2^{\omega}\ e$	...	...	...	...

TAB. 5.1: Simplexes présents dans les frontières de différents ordres. La composition de ces ensembles permet d'appréhender la composition des liens.

et l'ordre d'un simplexe permettent de comprendre le rôle de chacune des conditions. En effet certaines caractéristiques topologiques font intervenir des simplexes d'ordre élevé qui ne sont pas détectés dans $\widetilde{K}^{\omega}$. Ce catalogue est utile pour l'implémentation détaillée au paragraphe suivant.

5.6 Implémentation du test topologique pour un 3-complexe

Le test de préservation de la topologie a été implémenté dans un module de prétraitement à l'exploitation des données. Ce module charge un maillage tétraédrique et génère une séquence de contractions valides en termes de préservation de la topologie (maillage et sous-structure) et de préservation de la géométrie (déviation des frontières, interfaces et des polylignes). L'algorithme de simplification volumique et les tests topologiques représentent environ 7000 lignes de code `C`. Ce module a été intégré dans un outil de visualisation par réduction de données, utilisé pour valider l'approche de simplification. Ce module intégré constitue un programme d'environ 15000 lignes de code `C` utilisant `OpenGL` et compilé pour plusieurs plateformes (PC Windows et Linux, TX, OSF1, ...).

La prise en compte de données issues d'un code de simulation et attachées au maillage n'est pas détaillée dans ce chapitre. Ces données sont prises en compte dans la simplification pour influencer l'ordre de contraction mais n'interviennent pas dans le test topologique. La description de l'implémentation de ce test fait donc abstraction de ces données. Leur intégration dans l'algorithme de simplification sera exposée au chapitre suivant.

5.6.1 Structure de données

Le maillage tétraèdrique non-structuré de référence utilise une structure indexée avec une relation d'adjacence aux faces. n_{tet} et n_{ver} désignent respectivement le nombre de tétraèdres et de sommets. Sur les architectures des ordinateurs utilisés dans ce projet, les entiers et les flottants sont codés sur 4 octets. Par expérience, le codage des coordonnées des sommets par des

flottants est suffisant, étant donné la précision des maillages manipulés. L'occupation mémoire du maillage tétraédrique est exprimée par :

- Information topologique :
  - $4\ n_{tet} \times 4\ octets$ pour la relation *tétraèdre/sommet*
  - $4\ n_{tet} \times 4\ octets$ pour la relation *tétraèdre/tétraèdre*
- Information géométrique :
  - $3\ n_{ver} \times 4\ octets$ pour les coordonnées des sommets
- L'occupation mémoire totale est en moyenne de $\sim 51\ n_{tet} \times 4\ octets = 204\ n_{ver}\ octets$ en supposant $n_{tet} \sim 6\ n_{ver}$ (valeur obtenue en pratique sur l'ensemble des maillages manipulés).

Dans la structure adoptée, les sommets n'ont pas de référence vers les tétraèdres, économisant au minimum $n_{ver}\ octets$ pour la relation *sommet/tétraèdre*. Cette minimisation est réalisable grâce à la représentation imbriquée des sous-structures. Les arêtes candidates à la contraction, stockées dans un tas, sont codées par un couple d'entiers représentant le tétraèdre de référence et un indice relatif d'une 1-face du tétraèdre. La figure 5.9 illustre le codage relatif de toutes les k-faces d'un tétraèdre, autorisant leur accès à temps constant. Cette représentation occupe le

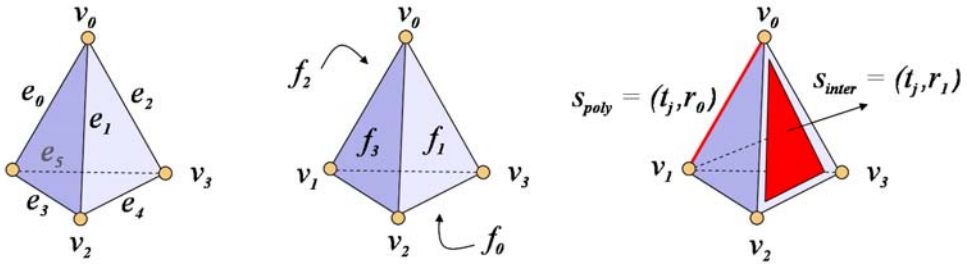


FIG. 5.9: Nommage relatif des arêtes d'un tétraèdre (*gauche*) et de ses faces (*milieu*). Représentation relative des sous-structures (*droite*). Le segment de polyligne s_{poly} est représenté par un indice absolu de tétraèdre t_j et l'indice relatif r_0 de l'arête de t_j correspondante. Le triangle s_{inter} d'une sous-structure est aussi représenté par un couple d'indices *(tétraèdre absolu, face relative)*

même espace mémoire que le stockage traditionnel d'une arête par deux indices de sommets, mais a l'avantage de ne pas utiliser de relation *sommet/tétraèdre*.

Afin de minimiser l'occupation mémoire et d'augmenter la rapidité d'accès, aucune sous-structure n'est mémorisée de façon explicite dans les 3-complexes. Les sous-structures surfaciques et linéiques sont représentées par un marquage des k-face des tétraèdres. Cette représentation est performante dans la mesure où tous les simplexes manipulés dans le calcul des liens et au sein des sous-structures sont des k-faces des tétraèdres. De ce fait, la connectivité d'une surface et d'une polyligne est obtenue de façon implicite à l'aide de la connectivité du maillage tétraédrique, sans surcoût. Dans le cadre de la simplification, ce choix facilite aussi la mise à jour des connectivités des sous-structures après contraction. Une modification de la connectivité des tétraèdres sera directement répercutée sur les sous-structures, sans travail supplémentaire.

Traditionnellement la topologie d'un maillage triangulaire est codée par trois indices de sommets et trois indices des faces voisines par triangle : $M_{indexed} = n_{tri} \times (3+3) \times 4\ octets =$

192 n_{tri} *bits*. Le codage relatif d'un maillage triangulaire plongé dans un maillage tétraédrique utiliserait moins d'espace mémoire pour les triangles mais nécessiterait une relation *tétraèdre/triangle* très coûteuse avec un index de triangle par tétraèdre : $M_{relatif} = n_{tri} \times 2 + n_{tet} \times 1 \times 4\ octets = 2\ n_{tri} + n_{tet}\ bits$.

Avec une représentation imbriquée, l'occupation mémoire ne dépend pas du nombre de triangles définissant la sous-structure et ne nécessite pas de relation de connectivité supplémentaire : $M_{embedded} = n_{tet} \times 4 \times 1\ bits = 4 \times n_{tet}\ bits$. Bien que les tétraèdres ne supportant pas de sous-structures allouent de la mémoire inutilement, cette structure est la mieux adaptée et la plus économe par rapport au type de données manipulées. Les ensembles de données utilisés en électromagnétisme ou en CAO ont, en pratique, au moins 10% de leurs tétraèdres porteurs de sous-structures surfaciques. Les couches minces de matériaux utilisées en électromagnétisme et présentées au chapitre suivant, créent des modèles avec encore plus de sous-structures surfaciques (interfaces entre les différents matériaux). Le codage des polylignes utilise de façon similaire 4 bits par tétraèdres. Au niveau de l'implémentation, les *champs de bits*[4] des polylignes et des surfaces sont stockés dans la même structure pour minimiser l'espace mémoire lors de l'allocation de tableaux de ces structures.

Les temps d'accès des relations *arête/tétraèdre*, *triangle/tétraèdre*, *tétraèdre/tétraèdre*, *tétraèdre/arête* et *tétraèdre/triangle* sont toutes à temps constant. Cette caractéristique a motivé l'emploi de cette structure de données. L'extraction des liens d'un simplexe, utilisant abondamment ces relations est l'opération la plus répétée de l'algorithme et doit être optimisée. Il est important de noter que les relations d'un sommet vers les cellules ne sont pas du tout utilisées dans l'algorithme de simplification.

5.6.2 Algorithme général de simplification

```
Algorithme général de simplification SimplifyThroughEdgeCollapse(K)
entrée : Complexe K
sortie : Complexe simplifié, séquence de contractions
```

1. **Initialisation du maillage** Le maillage volumique est chargé et la connectivité aux faces est extraite. Un tas ordonné d'arêtes est créé en énumérant d'une part, toutes les arêtes du maillage, d'autre part en calculant un coût de contraction pour chacune d'entre elles (déviation géométrique et sur les données).
2. **Initialisation des sous-structures** Les sous-structures surfaciques et linéiques sont stockées au sein des k-faces des tétraèdres. Elles sont soit chargées du fichier, soit construites dynamiquement. Les interfaces entre les matériaux sont des surfaces construites à l'exécution, en comparant les matériaux de deux tétraèdres voisins.
3. **Détection des arêtes d'ordre** 2 Les arêtes se trouvant à l'intersection de plusieurs surfaces, ou à l'intersection d'une surface et d'un bord sont marquées comme des segments de polylignes particuliers. Ce marquage correspond à la détection des arêtes d'ordre 2 dans le complexe.

[4] terminologie du langage C.

4. **Détection des sommets d'ordre** 3 Les sommets à l'intersection de plusieurs polylignes sont marqués comme des caractéristiques du maillage (sommet d'ordre 3). Les intersections de surfaces ont déjà été marquées par des arêtes d'ordre 2, donc seules ces arêtes sont utilisées pour détecter ces sommets particuliers.
5. **Selection d'une arête candidate** La sélection d'une arête au sommet du tas vérifie les conditions suivantes : le tas n'est pas vide, l'arête sélectionnée est à jour et le taux de simplification n'est pas atteint.
6. **Test de validité de la contraction** Le maillage tétraédrique est fermé localement (construction d'un cône de tétraèdres avec les faces de bords) autour de l'arête candidate si cette dernière utilise des sommets de bords. La validité de la contraction de l'arête candidate est testée et acceptée si elle préserve la topologie, n'introduit pas de chevauchements de tétraèdres, ne dévie ni les polylignes ni les surfaces au-delà d'un certain seuil.
7. **Contraction d'arête** Si les tests précédents sont valides, alors la contraction est réalisée. Dans l'algorithme proposé, l'opérateur de demi-contraction d'arête est utilisé donc un des sommets est *écrasé* sur le second sommet de l'arête. Les tétraèdres du diamant autour de l'arête sont supprimés et la connectivité des tétraèdres aux faces est mise à jour. Les arêtes du maillage modifiées sont réinsérées dans le tas. Si un tétraèdre supprimé du diamant contient la définition d'une sous-structure alors il la transmet à un de ses voisins par face ou arête. De même si le sommet supprimé est d'ordre 3, alors le second sommet de l'arête est marqué d'ordre 3. Les tétraèdres fictifs du cône sont supprimés.

5.6.3 Extraction des ordres des simplexes dans $\widetilde{K}$

L'implémentation proposée pour la simplification de maillages avec des sous-structures est le résultat de plusieurs implémentations dont les performances ont été comparées. Dans des versions antérieures, dédiées à l'implémentation directe de la théorie, le complexe étendu $\widetilde{K}$ était construit entièrement. Pour chaque test topologique d'une arête, les tétraèdres du cône $(\omega \cdot L_f)$ étaient insérés au complexe K. La connectivité des tétraèdres de K était donc modifiée en conséquence. Ensuite le calcul des liens était réalisé sur l'ensemble de l'étoilé du simplexe de référence contenant les simplexes fictifs. En pratique, cette construction est coûteuse car réalisée pour chaque contraction et peut être simplifiée. Au lieu de construire l'étoilé étendu, le lien est directement extrait à partir du marquage de certains simplexes.

La détection des arêtes d'ordre 2 et des sommets d'ordre 3 sont des étapes coûteuses car elles demandent un parcours exhaustif de tout l'étoilé. Elles sont par contre primordiales pour le calcul du lien. Par exemple, pour chaque arête adjacente à un sommet référence, il faudrait calculer le diamant de l'arête pour déterminer son ordre. Dans les versions antérieures, l'ordre des simplexes était calculé localement. Cependant, puisque l'ordre d'un sommet évolue de façon contrôlée au cours de la simplification, un mécanisme de marquage a été mis en place (points 3 et 4 de l'algorithme de simplification), accélérant considérablement l'algorithme. De plus, ce marquage des ordres des simplexes correspond à une réelle demande du côté des utilisateurs puisqu'il y a un lien direct entre les caractéristiques à étudier sur le maillage et les ordres des simplexes.

5.6.4 Gestion du tas d'arêtes

Le tas d'arêtes candidates à la contraction est une des structures les plus conséquentes de l'algorithme en terme d'occupation mémoire. En moyenne, le nombre d'arêtes dans un maillage tétraédrique est de l'ordre de $n_{edge} =\sim 7n_{ver}$. La contraction d'une arête créée, supprime et modifie plusieurs arêtes du maillage. Ces transformations sur les arêtes du maillage doivent être répercutées sur les arêtes dans le tas, après chaque contraction, en utilisant une relation *arêtes du maillage / arêtes du tas*. Etant donné la grande quantité d'arêtes manipulées, l'implémentation proposée n'utilise pas cette relation. Les arêtes du maillage (qui ne sont de toute façon pas stockées explicitement) n'ont pas de référence vers les arêtes du tas, diminuant grandement la quantité de mémoire nécessaire à l'algorithme.

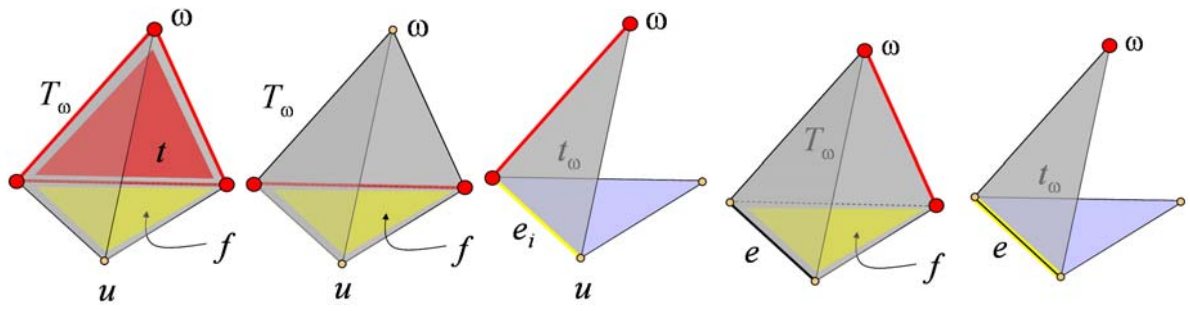
Lors d'une contraction, aucune arête du tas n'est modifiée ou supprimée, c'est-à-dire que toutes les arêtes modifiées ou créées sont insérées à nouveau dans le tas. Cela veut dire qu'à un instant donné, il existe plusieurs versions de la même arête dans le tas. Seule une d'entre elles correspond à une arête valide du maillage (utilisant des sommets encore présents dans le maillage et avec la bonne priorité).

Afin d'extraire uniquement des arêtes valides du tas, un mécanisme de datation a été mis en place. Les arêtes du tas et les sommets du maillage disposent d'un marqueur de temps (un entier par structure). A chaque contraction, un compteur global est incrémenté. Cette valeur est attribuée au sommet supprimé et à toutes les arêtes réinsérées dans le tas. Il est important de noter, que dans le cas d'une demi-contraction d'arête $e = uv$ aucune arête adjacente au sommet v, résultant de la contraction, n'est modifiée. Les arêtes adjacentes à v et incluses dans l'étoilé de l'arête sont supprimées alors que celles n'étant pas incluses dans l'étoilé sont inchangées. Cette situation n'est pas vraie dans le cas d'une contraction complète d'arête.

Ainsi, lorsqu'une arête est extraite au sommet du tas, si le marqueur de l'arête est inférieur à l'un des marqueurs des sommets de l'arête, alors cela signifie que le maillage a évolué depuis l'insertion de cette arête. Elle ne correspond plus à une arête valide du maillage et est donc rejetée. Il n'y a donc pas de suppression systématique des arêtes du tas après contraction, mais en pratique l'extraction d'une arête valide nécessite au préalable le refus d'environ 6 arêtes. Cette opération est réalisée à temps constant (accès direct) puisque l'arête sélectionnée est toujours au sommet du tas, et est donc négligeable par rapport au reste des opérations. Le nombre d'arêtes extraites au sommet du tas, avant de trouver une arête valide dépend de la priorité et de l'avancement de la simplification mais, en pratique, croît et décroît progressivement. Dans un cas extrême, si le nombre d'arêtes dépasse une valeur-seuil alors le tas est nettoyé par suppression de toutes ses arêtes invalides puis est reconstruit. Cette opération n'a d'influence ni sur le maillage, ni sur l'ordre de contraction.

5.6.5 Algorithme

L'algorithme suivant décrit une demi-contraction d'arête $e = uv$ où u est contracté en v. Le complexe K correspond au complexe initial *fermé* dans le cas où au moins un de ses sommets est un sommet de bord (point 6 de l'algorithme général de simplification).



(a) Eléments de $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ (b) Eléments de $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u$ (c) Eléments de $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ (d) Eléments de $\mathrm{Lk}_0^\omega\, e$ (e) Eléments de $\mathrm{Lk}_0^\omega\, e$

FIG. 5.10: Notation des éléments intervenant dans la construction des liens décrite dans l'algorithme. Les simplexes en jaune représentent des sous-structures (surfacique et linéique) et en rouge ceux ajoutés au lien à calculer.

```
Test de préservation de la topologie IsEdgeCollapseValid(K, Ti, er)
entrée : Complexe K, indice absolu d'un tet, indice relatif d'une arête
sortie : Renvoie VRAI si la contraction préserve la topologie, FAUX sinon
```

1. **Pour tous les tétraèdres T de l'étoilé de u**
   (a) Contribution de $\widetilde{K}$ de $\widetilde{K}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ la 2-face de T opposée à u, ses trois arêtes et ses trois sommets. T peut être un tétraèdre fictif dans le cas où u est un sommet de bord.
   (b) **Pour les trois faces f adjacentes à u dans T**
      i. **Si f est une face d'une sous-structure** alors elle correspond à la base d'un tétraèdre du cône $\omega \cdot L_f$. L'extension du complexe élève l'ordre de f à 1.
         A. Contribution de $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K})$ de $\widetilde{K}^\omega$: f étant d'ordre 1, elle est incluse dans $\mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K}$. La composante $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K})$ de $\widetilde{K}^\omega$ définit un tétraèdre fictif T_ω composé de u, ω et f (figure 5.10(a)). La face t de T_ω opposée à u, les trois arêtes de t et les trois sommets de t sont ajoutés à $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$.
         B. Contribution de $(\mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K})$ de $\widetilde{G}^\omega$: L'arête opposée à u de f et ses deux sommets (figure 5.10(b)) sont ajoutés à $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u$ puisque f est d'ordre 1.
   (c) **Pour les trois arêtes e_i adjacentes à u dans T**
      i. **Si e_i est une arête d'une polyligne** alors elle constitue la base d'un triangle fictif $t_\omega = e \cdot \omega$ dans le complexe étendu (figure 5.10(c)). L'arête e_i est d'ordre 2 puisque seul un 1-simplexe peut avoir un voisinage homéomorphe au voisinage de e_i.
         A. Contribution de $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K})$ de $\widetilde{K}^\omega$: Le triangle fictif t_ω contribue à $\widetilde{K}^\omega$ à travers la composante $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K})$ car $\mathrm{Bd}_2\, \widetilde{K} \in \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K}$. Ajouter à $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ l'arête de t_ω opposé à u et ses deux sommets. L'un d'entre eux étant le sommet fictif ω.

B. Contribution de $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\ \widetilde{K})$ de $\widetilde{G}^\omega$: Puisque e_i est d'ordre 2, le triangle fictif $t_\omega = e \cdot \omega$ est inclus dans $\widetilde{G}^\omega$. Ajouter à $\mathrm{Lk}_1^\omega\ u$ l'arête de t_ω opposé à u et ses deux sommets.

C. Contribution de $(\mathrm{Bd}_2\ \widetilde{K})$ de $\widetilde{H}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_2^\omega\ u$ le sommet opposé à u de l'arête e_i.

(d) **Si u est un sommet d'ordre** 3 le cône $\omega \cdot u$ est créé. Contribution de $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_3\ \widetilde{K})$ de $\widetilde{H}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_2^\omega\ u$ le sommet ω. Un sommet d'ordre 3 est forcément au voisinage de sous-structures surfaciques ou de polylignes, si bien que le sommet ω est inclus de toute façon dans $\mathrm{Lk}_0^\omega\ u$ et $\mathrm{Lk}_1^\omega\ u$.

2. **Pour tous les tétraèdres T de l'étoilé de v**

   La construction des liens de v est réalisée de façon similaire au sommet u. Les points $(a)(b)(c)(d)$ sont appliqués autour de v pour construire $\mathrm{Lk}_0^\omega\ v$, $\mathrm{Lk}_1^\omega\ v$ et $\mathrm{Lk}_2^\omega\ v$.

3. **Pour tous les tétraèdres T de l'étoilé de e**

   (a) Contribution de $\widetilde{K}$ de $\widetilde{K}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_0^\omega\ e$ l'arête de T opposée à e et ses deux sommets. Le sommet fictif ω peut être inséré à cette étape si e est au bord du complexe (non fermé).

   (b) **Pour les deux faces f de T adjacentes à e**

   i. **Si f est une face d'une sous-structure** alors le même tétraèdre T_ω du cône $\omega \cdot L_f$, introduit au point $(1.b.i)$, contribue au lien de l'arête. f est d'ordre 1.

   A. Contribution de $\omega \cdot \widetilde{K}$ de $\widetilde{K}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_1^\omega\ e$ l'arête de T_ω opposée à e et ses deux sommets (figure 5.10(d)). Au moins un de ces sommets est ω.

   B. Contribution de $\mathrm{Bd}_1\ \widetilde{K}$ dans $\widetilde{G}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_1^\omega\ e$ le sommet de f opposé à e.

   (c) **Si e est une arête d'une polyligne** alors elle porte un triangle fictif du cône $\omega \cdot L_a$ ayant ω comme sommet opposé à e (figure 5.10(e)).

   i. Contribution de $\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\ \widetilde{K}$ dans $\widetilde{K}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_0^\omega\ e$ le sommet ω.

   ii. Contribution de $\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\ \widetilde{K}$ dans $\widetilde{G}^\omega$: Ajouter à $\mathrm{Lk}_1^\omega\ e$ le sommet ω.

4. **Evaluer les conditions du lien dans $\widetilde{K}^\omega$, $\widetilde{G}^\omega$ et $\widetilde{H}^\omega$** A présent tous les ensembles utilisés dans le théorème 4.8.2 dans le complexe étendu sont connus. Les trois conditions du lien sont évaluées $\mathrm{Lk}_0^\omega\ u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega\ v = \mathrm{Lk}_0^\omega\ e$, $\mathrm{Lk}_1^\omega\ u \cap \mathrm{Lk}_1^\omega\ v = \mathrm{Lk}_1^\omega\ e$ et $\mathrm{Lk}_2^\omega\ u \cap \mathrm{Lk}_2^\omega\ v = \emptyset$. Si l'une d'entre elles n'est pas vérifiée, alors **la contraction est rejetée**, sinon **la contraction est acceptée**.

5.7 Exemples

La validation de l'implémentation de l'algorithme a été réalisée à la fois sur les maillages utilisés dans les codes du CESTA et sur une série de tests unitaires. Ces cas simples ont la particularité de tester les différentes conditions et peuvent, dans certains cas, correspondre à des caractéristiques présentes dans des données réelles. La fin de ce chapitre est dédiée à l'étude

Couleur	Ensemble
bleu	simplexes des liens de u
orange	simplexes des liens de v
vert	simplexes des liens de e
noir	simplexes des cônes $\omega \cdot L_f$ et $\omega \cdot L_a$
jaune	triangles des sous-structures de L_f (d'ordre 1)
rouge	arêtes des polylignes de L_a (d'ordre 2)
jaune	sommets caractéristiques (d'ordre 3)
magenta	arête candidate à la contraction

TAB. 5.2: Catalogue des couleurs utilisées dans les exemples du calcul des liens.

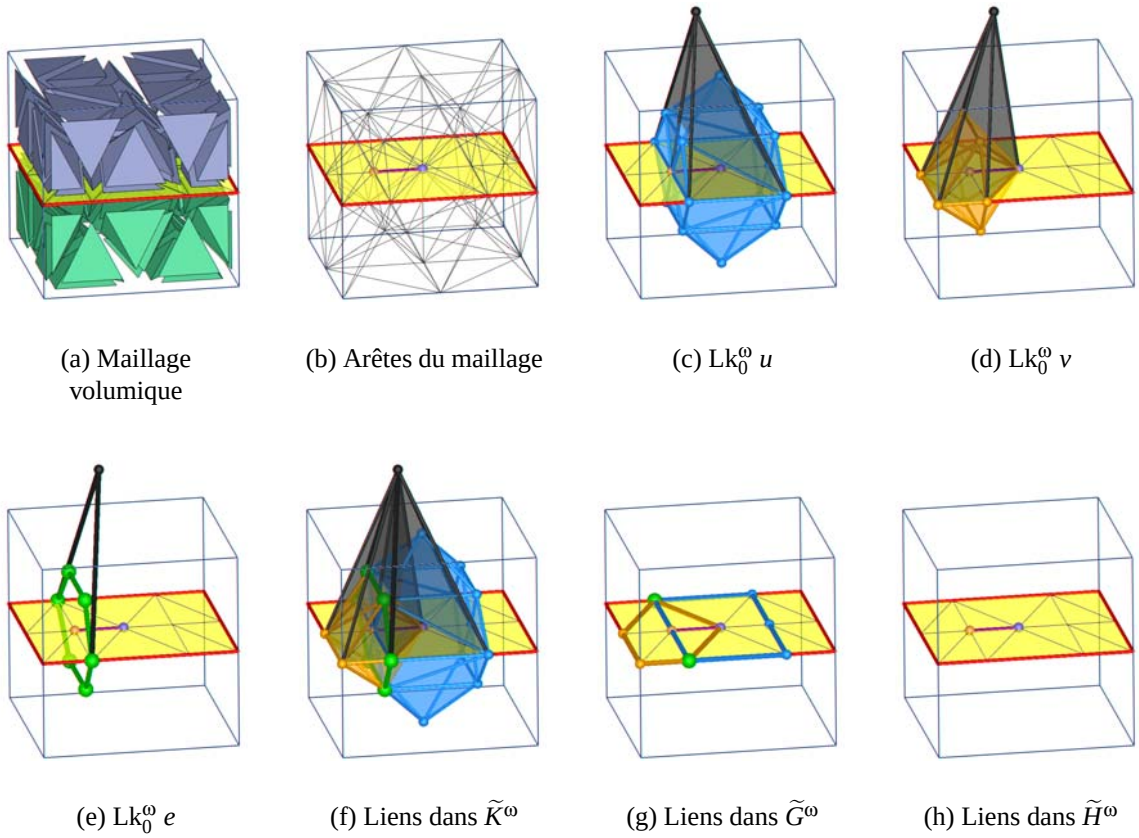
de certains cas tests qui permettent de mieux comprendre le rôle des différentes conditions du théorème 4.8.2. Tous les maillages du *cube*, présentés dans les exemples, utilisent la même tétraédrisation. Seules, l'appartenance à une famille de matériaux d'un tétraèdre et la définition de polylignes, changent. Les couleurs utilisées sont cataloguées dans le tableau 5.2 et restent cohérentes pour décrire les étoilés et les liens.

5.7.1 Contraction d'une arête sur une interface

Cet exemple simple, illustre la contraction d'une arête se trouvant sur une interface entre deux matériaux de l'ensemble. Intuitivement la contraction est acceptable puisque aucune caractéristique ne disparaîtrait après la transformation. Les conditions du lien vont confirmer cette impression. L'arête $e = uv$, candidate à la contraction, est entièrement incluse sur l'interface et ne fait pas intervenir de sommets de bords. Les liens $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$, figure 5.11(c) et $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$, figure 5.11(c), sont composés d'une surface fermée autour de u (resp. v) s'appuyant sur les tétraèdres du maillage. De même l'arête étant entièrement sur l'interface, le point $1.b.i.A$ (resp. $2.b.i.A$) de l'algorithme définit un tétraèdre fictif pour chaque face de l'interface adjacente à u (resp. v). La 2-face opposée à u (resp. v) et ses k-faces sont incluses dans $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ (resp. $\mathrm{Lk}_0^\omega\, v$). Le lien de l'arête, figure 5.11(d), contient l'anneau des arêtes opposées à e de chaque tétraèdre adjacent à e. De plus, les tétraèdres fictifs introduits précédemment, adjacents à e contribuent aussi au lien de l'arête. La condition dans $\widetilde{K}^\omega$ est vérifiée.

Les liens dans $\widetilde{G}^\omega$ sont plus simples, car il y a peu d'éléments d'ordre élevé au voisinage de la contraction, figure 5.11(e). Les seuls éléments présents dans $\widetilde{G}^\omega$ se trouvent sur l'interface. $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ (resp. $\mathrm{Lk}_0^\omega\, v$) forme un anneau d'arêtes autour des triangles de l'interface adjacents à u (resp. v). Ces deux anneaux s'intersectent en deux points coïncidant avec le lien de l'arête. L'arête étant sur l'interface, deux triangles adjacents sont d'ordre 1 et contribuent à $\mathrm{Lk}_1^\omega\, e$ avec leur sommet opposé à e. La condition dans $\widetilde{G}^\omega$ est vérifiée.

Les liens des sommets dans $\widetilde{H}^\omega$ sont vides, figure 5.11(f), puisque aucun simplexe du complexe n'est d'ordre 2 ou plus. La condition dans $\widetilde{H}^\omega$ est vérifiée et la contraction est acceptée à la contraction.



(a) Maillage volumique (b) Arêtes du maillage (c) $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ (d) $\mathrm{Lk}_0^\omega\, v$

(e) $\mathrm{Lk}_0^\omega\, e$ (f) Liens dans $\widetilde{K}^\omega$ (g) Liens dans $\widetilde{G}^\omega$ (h) Liens dans $\widetilde{H}^\omega$

FIG. 5.11: Contraction valide d'une arête sur une interface entre matériaux.

5.7.2 Contraction d'arêtes connectant polylignes et interfaces

Les trois exemples suivants illustrent la contraction de la même arête, mais dans des maillages où les sous-structures diffèrent. L'arête candidate à la contraction est l'arête centrale et verticale reliant les interfaces ou la polyligne. L'exemple de la figure 5.12(a) montre une arête e candidate reliant deux interfaces non-connectées. La contraction de cette arête les connecterait et ferait apparaître un sommet d'ordre 3. Cette situation change profondément la topologie de l'ensemble et n'est donc pas souhaitable.

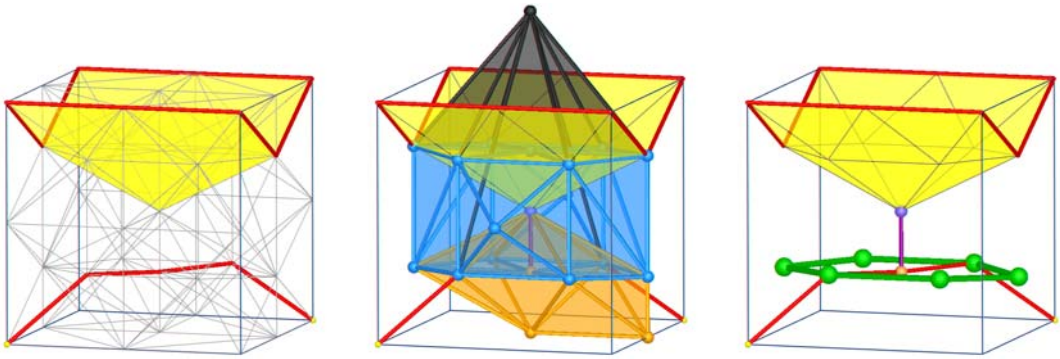
Le changement de topologie s'illustre dans $\widetilde{K}^\omega$ en raison de la grande différence des voisinages des sommets et de l'arête. Les deux sommets, bien que situés sur deux interfaces différentes, ont un voisinage dans le complexe étendu augmenté des tétraèdres $\omega \cdot L_f$. Ces cônes créent différents tétraèdres pour u et v mais tous deux utilisent ω comme pointe du cône, figure 5.12(b). Le sommet ω est inclus dans $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega\, v$.

Bien que l'arête e ait ses deux sommets extrémités d'ordre 1 sur les interfaces, elle n'est porteuse d'aucune sous-structure. Elle est d'ordre 0 et son étoilé dans $\widetilde{K}^\omega$ ne contient que des tétraèdres de K. Le lien $\mathrm{Lk}_0^\omega\, e$ contient un anneau d'arêtes autour de e et ne contient pas, bien entendu ω, figure 5.12(c). La condition du lien dans $\widetilde{K}^\omega$ n'est pas vérifiée à cause du sommet ω présent uniquement dans l'intersection des liens des sommets.

(a) Vue d'ensemble (b) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, u$ et $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, v$ (c) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, e$

FIG. 5.12: Test de contraction d'une arête reliant deux interfaces. La condition du lien dans $\widetilde{K}^{\omega}$ n'est pas vérifiée.

Le second exemple illustre le cas où le sommet v de e n'est pas sur une interface mais sur une polyligne, figure 5.13(a). De la même manière que précédemment, les étoilés des sommets



(a) Vue d'ensemble (b) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, u$ et $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, v$ (c) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, e$

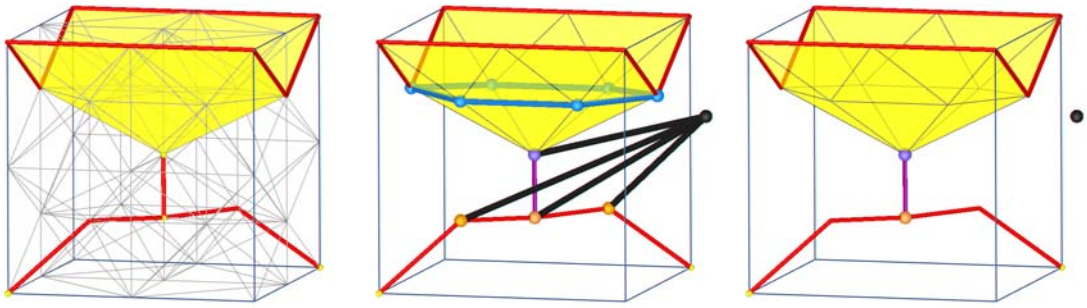
FIG. 5.13: Test de contraction d'une arête reliant une polyligne à une interface, toutes deux disjointes. La condition du lien dans $\widetilde{K}^{\omega}$ n'est pas vérifiée.

sont composés d'éléments du complexe étendu puisqu'ils sont tous deux sur une caractéristique. L'étoilé de u dans $\widetilde{K}^{\omega}$ contient le cône de tétraèdres de ω vers les faces de l'interface, adjacentes à u. Le lien de v contient entre autres ω, figure 5.13(b)

L'étoilé de v, plus simple, contient un cône de triangles de ω vers les arêtes de la polyligne adjacentes à v. L'extension du complexe par ces triangles fictifs élève l'ordre des arêtes de la polyligne adjacentes à v et contribue, de ce fait, au lien de v dans $\widetilde{K}^{\omega}$ à travers la composante $(\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, \widetilde{K})$. Le sommet ω est donc dans l'intersection des liens des sommets.

L'arête e n'est adjacente à aucune caractéristique. Son étoilé contient uniquement des simplexes d'ordre 0. Son lien forme un anneau d'arêtes, figure 5.13(b). Le sommet ω n'est pas inclus dans $\mathrm{Lk}_0^\omega\, e$ mais est inclus dans $\mathrm{Lk}_0^\omega\, u \cap \mathrm{Lk}_0^\omega\, v$. La condition du lien dans $\widetilde{K}^\omega$ n'est pas vérifiée.

L'exemple de la figure 5.14 montre l'influence d'une sous-structure définie sur l'arête à contracter. Cet exemple est une légère variation de l'exemple précédent où seulement une arête



(a) Vue d'ensemble (b) $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u$ et $\mathrm{Lk}_1^\omega\, v$ (c) $\mathrm{Lk}_2^\omega\, u$ et $\mathrm{Lk}_2^\omega\, v$

FIG. 5.14: Test de contraction d'une arête définissant un segment de polyligne et reliant une interface à une double branche d'une polyligne. La condition du lien dans $\widetilde{H}^\omega$ n'est pas vérifiée.

de plus du maillage est définie comme étant une polyligne. Cette arête correspond exactement à e, arête candidate à la contraction, figure 5.14(a). La principale différence de ce cas est la présence d'un cône de simplexe dans l'étoilé de l'arête.

$\mathrm{Lk}_0^\omega\, u$ et $\mathrm{Lk}_0^\omega\, v$ sont sensiblement les mêmes que dans le cas précédent, à la différence de l'arête opposée à u (resp. v) du triangle $\omega \cdot e$ de $\widetilde{K}^\omega$. Par contre leur intersection est la même. Le lien de l'arête est aussi constitué de l'anneau précédent mais contient en plus ω. L'intersection des liens est dans ce cas égale au lien de l'arête qui contient ω. La condition du lien dans $\widetilde{K}^\omega$ est vérifiée.

La condition du lien dans $\widetilde{G}^\omega$ ne permet pas, non plus, de détecter le changement de topologie qui résulterait de la contraction de l'arête 5.14(b). $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u$ contient un anneau d'arête sur l'interface adjacente à u. L'arête e étant sur une polyligne, elle est porteuse d'un triangle de $\omega \cdot L_a$. Son ordre est élevé à 2 dans le complexe étendu. La composante $\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\, \widetilde{K}$ de $\widetilde{G}^\omega$ contribue à $\mathrm{Lk}_1^\omega\, u$ en ajoutant l'arête ωv. Le lien $\mathrm{Lk}\ 1v$ contient trois arêtes, chacune correspondant à une arête des triangles fictifs portés par les trois segments des polylignes adjacentes à v. L'intersection de ces liens en est donc réduite à ω. De même l'arête e étant d'ordre 2, ω est aussi présent dans $\mathrm{Lk}\ 1e$ qui ne contient d'ailleurs que ce sommet. La condition du lien dans $\widetilde{G}^\omega$ est vérifiée.

Enfin, la condition dans $\widetilde{H}^\omega$ va permettre de déceler le changement de topologie. Ce chan-

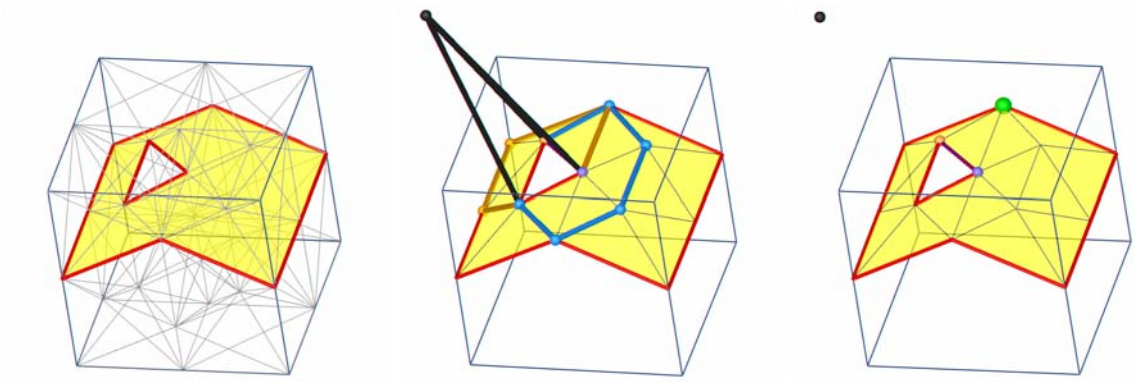
gement est en fait lié à la contraction de deux sommets d'ordre 2. Ce type de contraction est interdit puisque celle-ci supprimerait un point pertinent de l'ensemble. Dans l'exemple 5.14, la caractéristique supprimée peut être qualifiée de point de contact entre une interface et une branche de polyligne, mais aussi comme une branche de polyligne longue d'une seule arête. Il est intéressant de noter que chaque condition du lien traite de problèmes topologiques d'ordre différents. Le cas d'une contraction de deux sommets d'ordre 3 est justement traité par $\widetilde{H}^{\omega}$ comme expliqué ci-après.

L'inégalité 4.1 montre que l'ordre et la dimension d'un simplexe sont liés. C'est pourquoi d'après la définition de $\widetilde{H}^{\omega}$ le lien d'une arête dans cet ensemble est nécessairement vide. L'étoilé d'une arête dans $\widetilde{H}^{\omega}$ est réduit à l'arête elle-même. En effet $\mathrm{Bd}_2\ K$ contient uniquement des arêtes et des sommets, or deux arêtes adjacentes l'une de l'autre, dans un 3-complexe, sont nécessairement confondues. De plus aucun sommet ne peut être adjacent à une arête. La composante $\omega \cdot \mathrm{Bd}_3\ K$ est nécessairement vide puisque seul un sommet peut être d'ordre 3 et aucun sommet n'est adjacent à toute une arête. L'étoilé d'une arête dans $\widetilde{H}^{\omega}$ étant réduit à l'arête seule, le lien est vide.

Par contre, l'étoilé d'un sommet u peut contenir un sommet d'ordre 3, qui est en fait lui-même. Dans ce cas $\omega \cdot \mathrm{Bd}_3\ K$ de la condition du lien introduit l'arête $u\omega$. Le lien dans cet ensemble correspond au sommet extrémité de cette arête, c'est-à-dire ω. Les deux sommets de l'arête candidate à la contraction de l'exemple sont d'ordre 3. Les liens Lk_2^{ω} de ces sommets contiennent tous deux ω, figure 5.14(c). La condition du lien dans $\widetilde{H}^{\omega}$ n'est donc pas vérifiée.

5.7.3 Contraction d'arêtes modifiant un trou d'une surface

Une des caractéristiques topologiques d'une surface est son nombre de trous. La suppression d'un d'entre eux modifie sa topologie. L'exemple de la figure 5.15(a) montre une surface ayant un trou de la dimension d'un triangle (trois arêtes de bords dans ce trou). La contraction



(a) Vue d'ensemble (b) $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ u$ et $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ v$ (c) $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ e$

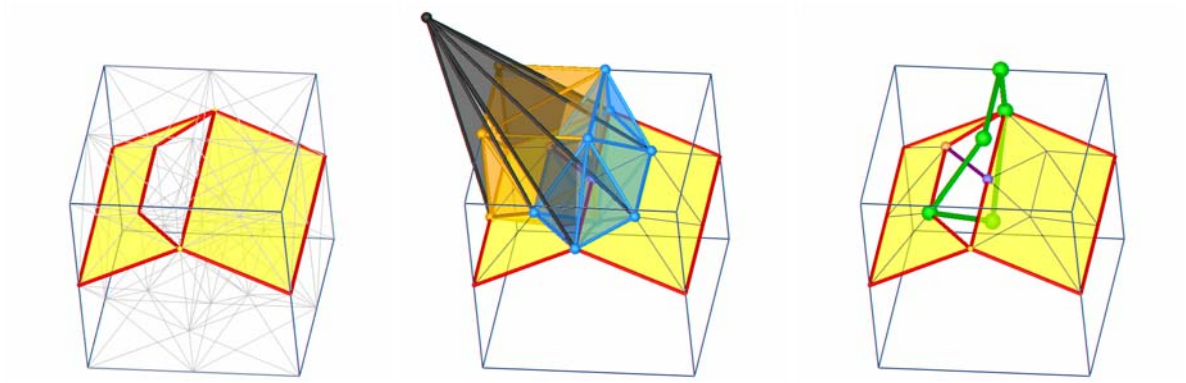
FIG. 5.15: Contraction comblant un trou d'une surface. Le changement de topologie de la surface est détecté dans $\widetilde{K}^{\omega}$ et $\widetilde{G}^{\omega}$ et illustré dans $\widetilde{G}^{\omega}$.

d'une de ses trois arêtes comblerait le trou puisque les triangles adjacents à l'arête sont dégénérés. Cette contraction est refusée dans plusieurs conditions notamment dans $\widetilde{G}^{\omega}$.

Le lien du sommet u (resp. v) dans $\widetilde{G}^{\omega}$ contient l'anneau d'arêtes sur la surface qui correspond aux arêtes opposées à u (resp. v) des triangles d'ordre 1 de la surface, figure 5.15(b). De plus u (resp. v) se trouve au bord d'une interface, c'est-à-dire le long d'une arête d'ordre 2. La composante $\omega \cdot \mathrm{Bd}_2\, K$ introduit un triangle fictif. La particularité de ce cas test est l'utilisation de deux points communs aux triangles fictifs de u et v. Si p désigne le troisième point du triangle formant le trou de la surface différent de u et v alors les deux triangles fictifs introduits sont $up\omega$ et $vp\omega$. Il est clair que ces deux triangles ont l'arête $p\omega$ commune qui se retrouve ainsi dans $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\, u \cap \mathrm{Lk}_1^{\omega}\, v$.

Le lien de l'arête dans $\widetilde{G}^{\omega}$, figure 5.15(c), contient le sommet opposé du triangle sur la surface et ω. Ce dernier est présent dans le lien car e correspond à une arête de bord d'une surface. En aucun cas l'arête ωp n'est présente dans ce lien. La condition du lien dans $\widetilde{G}^{\omega}$ n'est donc pas vérifiée.

Le second exemple, illustré figure 5.16(a), montre le cas d'une interface percée de part en part. La surface ainsi définie possède deux points particuliers, correspondant aux points d'inter-



(a) Vue d'ensemble (b) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, u$ et $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, v$ (c) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, e$

FIG. 5.16: Contraction d'une arête reliant deux parties d'une surface initialement connectées par deux points, de part et d'autre d'un trou. La contraction relierait ces deux parties par une arête supprimant le sommet d'ordre 3. Cette transformation est détectée dans $\widetilde{K}^{\omega}$.

section des deux parties de la surface. La contraction d'une arête à proximité d'un de ces points et à travers le trou, comblerait le voisinage de ce point en connectant par une arête (et non plus un sommet) les deux parties de la surface. Dans ce cas, un sommet caractéristique d'ordre 3 disparaîtrait et les deux parties de la surface serait reliée par une arête commune.

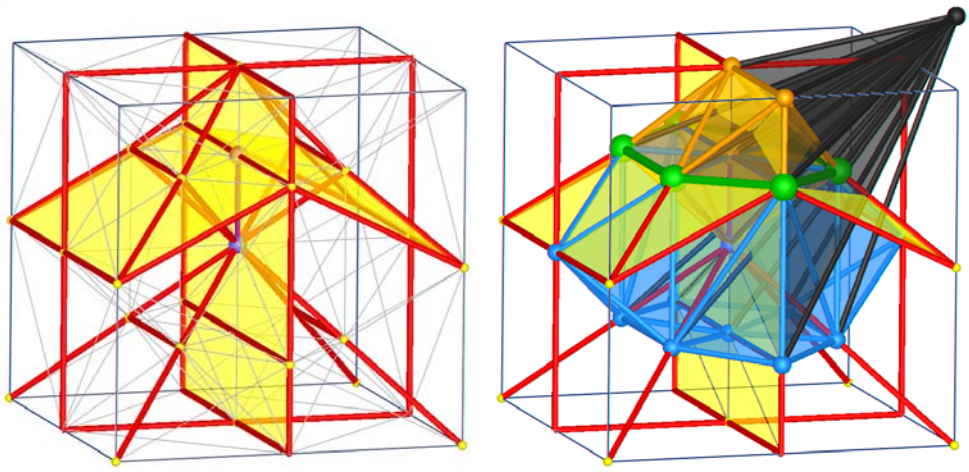
Le changement de topologie lié à la contraction est détecté, entre autres dans $\widetilde{K}^{\omega}$. Les deux sommets étant sur le bord de la surface sont d'ordre 2. La composante $\omega \cdot \mathrm{Bd}_1\, K$ introduit un cône de simplexe utilisant ces sommets (puisque $\mathrm{Bd}_2\, K \subset \mathrm{Bd}_1\, K$). L'intersection de $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, u$ et

$\mathrm{Lk}_0^{\omega}\, v$ contient donc ω, figure 5.16(b).

L'arête traversant le trou n'étant adjacente à aucune caractéristique, son lien ne contient qu'un anneau d'arêtes provenant des tétraèdres de K, figure 5.16(c). Dans ce cas ω n'est pas inclus dans cet ensemble. La condition du lien dans $\widetilde{K}^{\omega}$ n'est pas vérifiée.

5.7.4 Remarque

L'exemple de la figure 5.17 n'est en rien constructif sur la compréhension des conditions du lien mais a pour but de montrer la complexité de la combinatoire mise en jeu dans les tests de préservation de la topologie. Ce 3-complexe composé d'un grand nombre de sous-structures



(a) Vue d'ensemble (b) Les liens de u, v et e dans $\widetilde{K}^{\omega}$

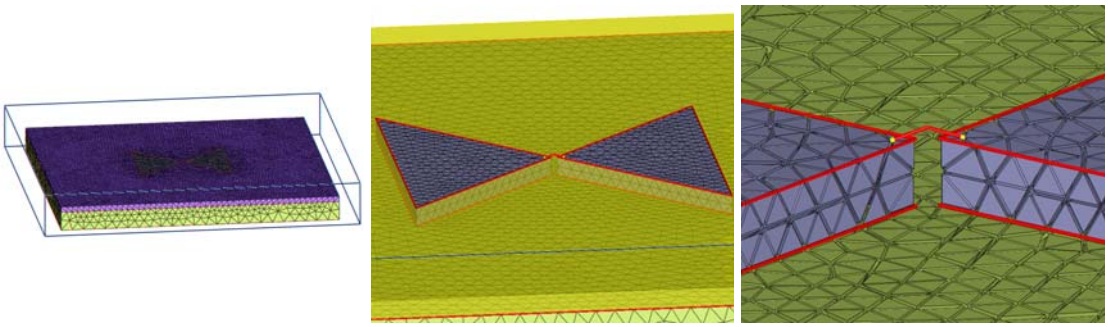
FIG. 5.17: Maillage composé d'un grand nombre de sous-structures ayant pour unique but de montrer la complexité de la combinatoire impliquée dans le calcul des liens des sommets dans un complexe étendu.

linéiques et surfaciques est traité avec la même précision et les performances que les cas tests simples présentés dans ce chapitre.

L'implémentation des tests topologiques, basée sur une étude théorique robuste, permet de traiter et de prouver la préservation de la topologie dans tous les cas du domaine couvert. La complexité du domaine n'influe pas sur la robustesse de la méthode. Le nombre de configurations possibles dans un 3-complexe est tel qu'une implémentation par cas ne serait pas crédible ou en tout cas susceptible de ne pas être exhaustive. De plus, ces tests ont été proposés pour résoudre les problèmes de préservation de la topologie dans des ensembles qui a priori ne nous sont pas forcément tous fournis dans le cadre de ce projet au CEA. C'est pourquoi, il n'existe pas d'étude exhaustive des cas que l'algorithme doit couvrir. Ce point a validé l'approche théorique de la topologie algébrique pour résoudre ces problèmes en simplification de maillages avec des sous-structures.

5.7.5 Critères topologiques sur des données manipulées en simulation

Les exemples suivants montrent la mise en œuvre des tests topologiques sur des données utilisées pour des simulations en électromagnétisme au CESTA. Le maillage de la figure 5.18



(a) Vue d'ensemble (b) Vue des interfaces (c) Vue rapprochée d'un élément linéique

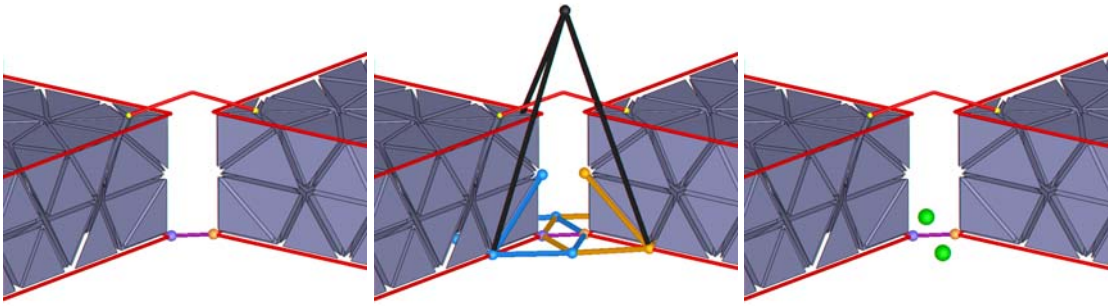
FIG. 5.18: Vue d'ensemble d'un modèle utilisé en simulation et composé d'une structure linéique particulière.

est composé de plusieurs matériaux organisés en couches horizontales, figure 5.18(a). Le centre du maillage contient un volume d'un matériau particulier en forme de papillon, figure 5.18(b). Les deux parties indépendantes de ce matériau sont reliées par une structure linéique en forme de V. Cette structure s'appuie sur quatre arêtes de tétraèdres dans une couche de matériau différente, figure 5.18(c).

La contraction des arêtes au voisinage de cet élément doit être réalisée avec précaution car cette caractéristique fondamentale utilise un petit nombre d'arêtes et se trouve à proximité d'autres caractéristiques. Par contre, ne pas simplifier tout le voisinage de cet élément linéique et des interfaces conduirait à un taux trop faible de simplification. Les figures 5.19, 5.20 et 5.21 détaillent les tests topologiques au voisinage de l'élément linéique de la figure 5.18.

L'arête candidate de la figure 5.19(a) relie des sommets appartenant aux deux ailerons non-adjacents. Cette arête se situe sur l'interface porteuse de cet élément en forme de papillon. C'est pourquoi, les deux sommets de l'arête appartiennent à des arêtes d'ordre 2, puisque 3 surfaces s'intersectent en ces points. Le changement de topologie est détecté dans $\widetilde{G}^{\omega}$. Le lien de u (resp. v) contient un anneau (horizontal) d'arêtes sur l'interface porteuse, figure 5.19(b). Il contient aussi des arêtes à la frontière des ailerons. Enfin puisque u (resp. v) est sur une polyligne, le cône $\omega \cdot L_a$ étend le complexe de triangles fictifs. L'intersection des liens des sommets dans $\widetilde{G}^{\omega}$ contient deux sommets sur l'interface porteuse et le sommet ω.

L'arête e située sur une interface mais pas sur une polyligne, $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\, e$ ne contient que les deux sommets opposés à e des triangles adjacents de l'interface, figure 5.19(c). Le sommet ω n'est pas inclus dans ce lien. Dans ce cas la condition dans $\widetilde{G}^{\omega}$ n'est pas vérifiée. Il est intéressant de noter que la condition $\widetilde{K}^{\omega}$ ne permet pas, dans ce cas, de détecter ce changement de topologie.

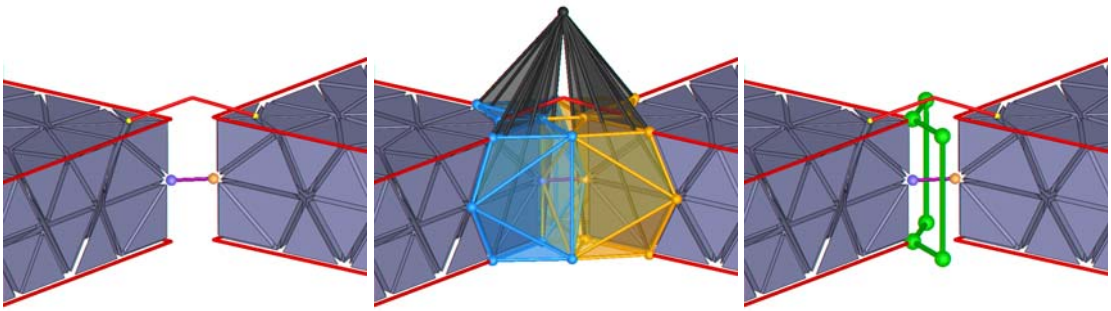


(a) Arête candidate e (b) $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ u$ et $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ v$ (c) $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ e$

FIG. 5.19: Contraction d'une arête interdite sur la base des ailerons.

Notamment, le sommet ω est présent dans $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\ e$ car l'arête est sur une interface.

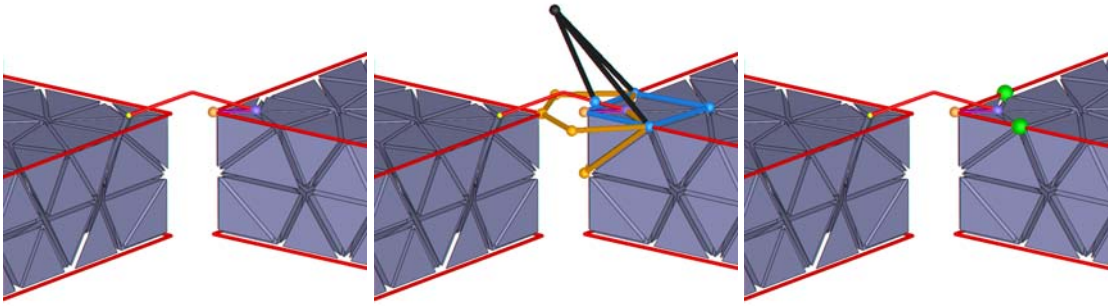
L'exemple suivant, figure 5.20(a), est exactement le cas où l'arête précédente n'est pas sur une interface mais située au milieu du volume entre les deux ailerons. Dans ce cas la contraction est refusée puisqu'elle relierait les deux ailerons. La figure 5.20(b) montre les liens des sommets dans $\widetilde{K}^{\omega}$ où le sommet ω est présent. Par contre le lien, de l'arête isolée dans le volume, ne contient pas ω, figure 5.20(c). L'étoilé de l'arête ne contient que des simplexes d'ordre 0. Dans ce cas le changement de topologie est directement détecté dans $\widetilde{K}^{\omega}$.



(a) Arête candidate e (b) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\ u$ et $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\ v$ (c) $\mathrm{Lk}_0^{\omega}\ e$

FIG. 5.20: Contraction d'une arête interdite entre les deux ailerons.

Le dernier exemple avec cet ensemble illustre la contraction d'une arête à la surface d'un des ailerons et reliant le point de contact de la structure linéique avec une interface, figure 5.21(a). Cette contraction interdite déplacerait le sommet de contact de la structure linéique sur une arête à l'intersection de plusieurs interfaces. Ce cas intéressant fait intervenir une arête d'ordre 1, un sommet d'ordre 2 et un sommet d'ordre 3. Le changement de la topologie des sous-structures est détecté dans $\widetilde{G}^{\omega}$. Dans cet ensemble les liens des sommets contiennent ω puisqu'ils ont des ordres supérieurs à 1 dans $\widetilde{K}$, figure 5.21(b). L'arête au bord d'un aileron est seulement d'ordre



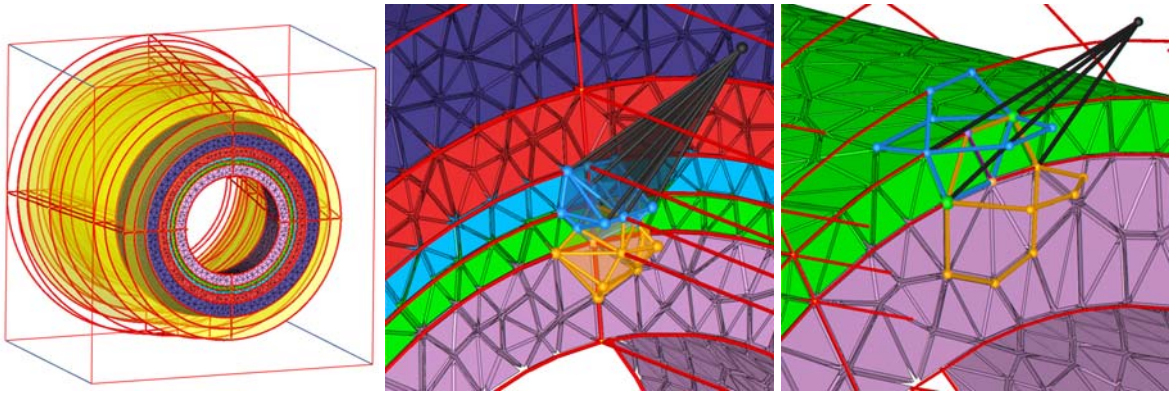
(a) Arête candidate e (b) $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ u$ et $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ v$ (c) $\mathrm{Lk}_1^{\omega}\ e$

FIG. 5.21: Contraction d'une arête interdite impliquant un sommet d'ordre 3

1, figure 5.21(c) et donc ne contient pas ω. La condition dans $\widetilde{G}^{\omega}$ n'est pas vérifiée.

Comme expliqué précédemment, certains objets modélisés en électromagnétisme sont composés de couches minces de matériaux. L'illustration 5.22(a) montre une section d'un tel ensemble composé de couches fines cylindriques. Un grand nombre d'interfaces, de polylignes et de sommets particuliers sont présents dans l'ensemble. Les couches de matériaux représentées en vert et en bleu clair ont seulement un tétraèdre en épaisseur. Les arêtes traversant ces couches sont bien évidemment non contractables puisqu'elles perceraient la couche. L'illustration 5.22(b) montre les liens dans $\widetilde{K}^{\omega}$ de deux sommets d'une arête traversant la couche verte.

La condition du lien dans $\widetilde{G}^{\omega}$, illustrée sur la figure 5.22(c), détecte ce changement de topologie, engendré par la perforation d'une ou plusieurs couches. Dans cet ensemble l'intersection



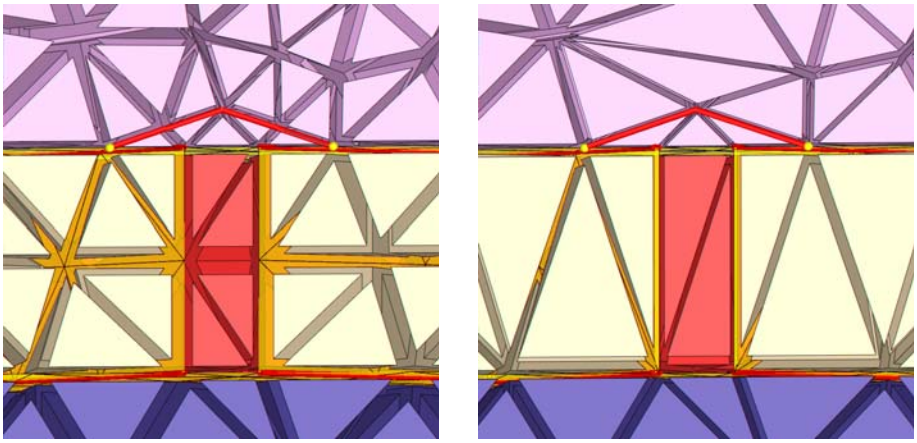
(a) Section (b) Liens dans $\widetilde{K}^{\omega}$ (c) Liens dans $\widetilde{G}^{\omega}$

FIG. 5.22: Section d'un maillage utilisé en simulation électromagnétique composé de couches minces de matériaux. Certaines couches ont seulement un tétraèdre en épaisseur introduisant une contrainte d'ordre topologique, lors de la simplification.

des liens des sommets u et v contient le sommet ω qui n'est pas présent dans le lien de l'arête puisque cette dernière n'est pas un segment d'une polyligne. La contraction est donc rejetée préservant ainsi les couches minces de matériaux. Cette préservation a été un des points déterminant dans la définition du présent projet de thèse.

5.7.6 Contractions autorisées

La majorité des exemples présentés illustrent des contractions qui modifient la topologie. En reprenant le même maillage de l'exemple 5.18, la figure 5.23 montre une vue détaillée, autour de l'élément linéique, avec les tétraèdres de toutes les couches de matériaux. Cet exemple illustre le cas de contractions effectuées sur des caractéristiques linéiques et surfaciques. L'élément linéique composé initialement de quatre arêtes, figure 5.23(a), est, après simplification, figure 5.23(b), constitué d'un nombre minimum de deux arêtes. De même, l'interface entre les



(a) Maillage initial (b) Maillage après simplification

FIG. 5.23: Illustration de quelques contractions le long de caractéristiques linéiques et surfaciques. Par exemple, la polyligne en V constituée de quatre arêtes (*gauche*) est simplifiée au nombre minimum de deux arêtes (*droite*).

tétraèdres des ailerons *(beige)* et ceux de l'interstice *(rouge)* a subi une simplification. Ces illustrations montrent que même au voisinage et au sein de caractéristiques fines, des contractions sont possibles sans modifier la topologie. Les conditions du lien, bien que robustes, ne sont donc pas trop contraignantes.

5.8 Conclusion

L'extension des complexes par des cônes de simplexes créés à partir des sous-structures permet de garantir la préservation de la topologie du complexe et de toutes ses caractéristiques.

Dans le cas surfacique, des triangles fictifs sont ajoutés à partir d'arêtes particulières. Ces arêtes correspondent aux segments de polylignes portées par les arêtes des triangles de la sur-

face, par les arêtes de bords et celles à l'intersection de plusieurs surfaces non-manifold. De plus des arêtes fictives sont ajoutées au complexe pour finaliser le complexe étendu à partir de tout sommet d'ordre 2. Ces sommets correspondent à des intersections multiples entre polylignes et surfaces.

Dans le cas volumique, les sous-structures surfaciques (interfaces entre matériaux et frontières du volume), représentées au sein des faces des tétraèdres du complexe initial, sont porteuses de tétraèdres fictifs. De même, les polylignes sont porteuses de triangles fictifs et les sommets d'ordre 3, d'arêtes fictives.

En utilisant des résultats en topologie algorithmique énoncés à partir de notions de topologie algébrique, la préservation de la topologie du complexe étendu est garantie. Etant donné la construction de ce complexe étendu, ces résultats permettent de certifier la préservation de la topologie des sous-structures linéiques et surfaciques. En s'appuyant sur un cadre théorique robuste, les critères proposés ont l'avantage d'être indépendants de la complexité du maillage (pouvant être un obstacle avec des critères géométriques) et surtout ils sont implicites. Aucune heuristique n'est utilisée pour adapter les théorèmes existants puisque l'idée principale de cette approche réside dans la représentation pertinente des sous-structures au sein du complexe.

Chapitre 6

Mise en œuvre et résultats

De nombreux domaines d'applications utilisent une modélisation de structures imbriquées au sein d'un maillage surfacique ou volumique. Les présents travaux de thèse ont été motivés par des problèmes particuliers rencontrés en géologie, CAO, neurologie et en électromagnétisme. Ce chapitre détaille d'une part la mise en œuvre des techniques de préservation de la topologie lors de la simplification et d'autre part l'exploitation d'une visualisation multirésolution utilisant cette simplification. L'utilisation de maillages de différentes disciplines illustre la versatilité des tests et leur robustesse pour des applications en visualisation scientifique.

Ce chapitre présente les résultats obtenus grâce aux critères topologiques développés dans le cadre de cette thèse et appliqués sur des données de différentes disciplines. Les critères d'erreur de l'approximation géométrique sont d'abord précisés (paragraphe 6.1). Les résultats de la simplification avec préservation de la topologie des sous-structures est présentée dans le cas surfacique (paragraphe 6.2). Puis, l'utilisation de la multirésolution est exposée dans le domaine de la segmentation de caractéristiques en neurosciences (paragraphe 6.3). Ensuite, les résultats obtenus dans le cas volumique sont discutés (paragraphe 6.4) en insistant sur les résultats de codes de simulation du CEA/CESTA (paragraphe 6.5). Enfin, l'application de visualisation multirésolution, développée pour le CEA/CESTA, est présentée, à travers les choix de l'implémentation, les résultats et une étude des performances (paragraphe 6.6).

6.1 Critères d'erreurs géométriques simples

La problématique de la présente thèse est la préservation de la topologie des maillages et des sous-structures imbriquées au cours de la simplification. L'objectif du projet est, quant à lui, de permettre l'exploitation interactive de maillages de grandes dimensions. L'approche multirésolution utilisée met en œuvre cette simplification avec ce contrôle rigoureux de la topologie. Par contre dans le cadre de l'exploitation de données par les utilisateurs, ces critères topologiques ne sont pas suffisants en termes de qualité visuelle.

Tous les résultats présentés dans cette thèse utilisent les critères topologiques certifiant la préservation de la topologie et utilisent en plus des mesures d'erreur de déformation géométrique simples. Il est important de noter que les critères d'erreurs géométriques utilisés pour la

simplification permettent d'obtenir des résultats visuellement acceptables. Par contre, les métriques utilisées peuvent être améliorées par des méthodes proposées dans le vaste panel de solutions dans la littérature sur la simplification de maillages (voir chapitre 2). Le maillage et chaque sous-structure sont traités par une mesure d'erreur par dimension. Ce traitement indépendant permet de bien contrôler (même avec des critères simples) la forme de chaque sous-structure, qui constitue les caractéristiques clés des maillages manipulés.

Au niveau volumique, l'inversion de tétraèdres est interdite par un contrôle du volume des tétraèdres avant et après contraction. Le volume signé d'un tétraèdre est calculé par l'équation 2.3, page 29. Une contraction est refusée si ce volume change de signe après contraction. La forme des tétraèdres n'est pas optimisée au cours de la simplification parce que l'opérateur de demi-contraction d'arêtes est utilisé. En effet, des méthodes de simplification optimisent l'aspect des tétraèdres vers une forme équilatérale en déplaçant le sommet résultant de la contraction. Au sein de ce projet il a été décidé (traduisant une demande utilisateur) de préserver la position des sommets pour conserver à tout moment un sous-ensemble des points initiaux. Cette optimisation n'est donc pas réalisable.

Une autre solution consiste à ordonner les contractions d'arêtes telles que le volume des tétraèdres après contraction soit le plus proche possible d'un tétraèdre équilatéral. Cette solution a été testée pour ce projet mais n'a pas été intégrée car elle contraignait trop les simplifications obtenues. Les résultats alors obtenus n'étaient pas meilleurs étant donné le sous-échantillonnage des sommets dû aux demi-contractions.

Au niveau surfacique, l'erreur géométrique correspond à la déviation des normales des triangles modifiés par une contraction. Pour chaque triangle d'une sous-structure, adjacent au sommet modifié, sa normale est calculée avant et après la contraction. Si l'angle entre ces deux normales varie, au-delà d'un seuil, alors la contraction est refusée. En pratique le produit scalaire de ces deux vecteurs est calculé et des seuils de l'ordre de $1/1000$ sont utilisés.

Au niveau linéique, l'erreur géométrique correspond à la déviation d'un segment de polyligne avant et après contraction. Si le produit scalaire des deux vecteurs portés par l'arête avant et après contraction est inférieur à un seuil (de l'ordre de $1/100$ pour les résultats présentés) alors l'arête est rejetée.

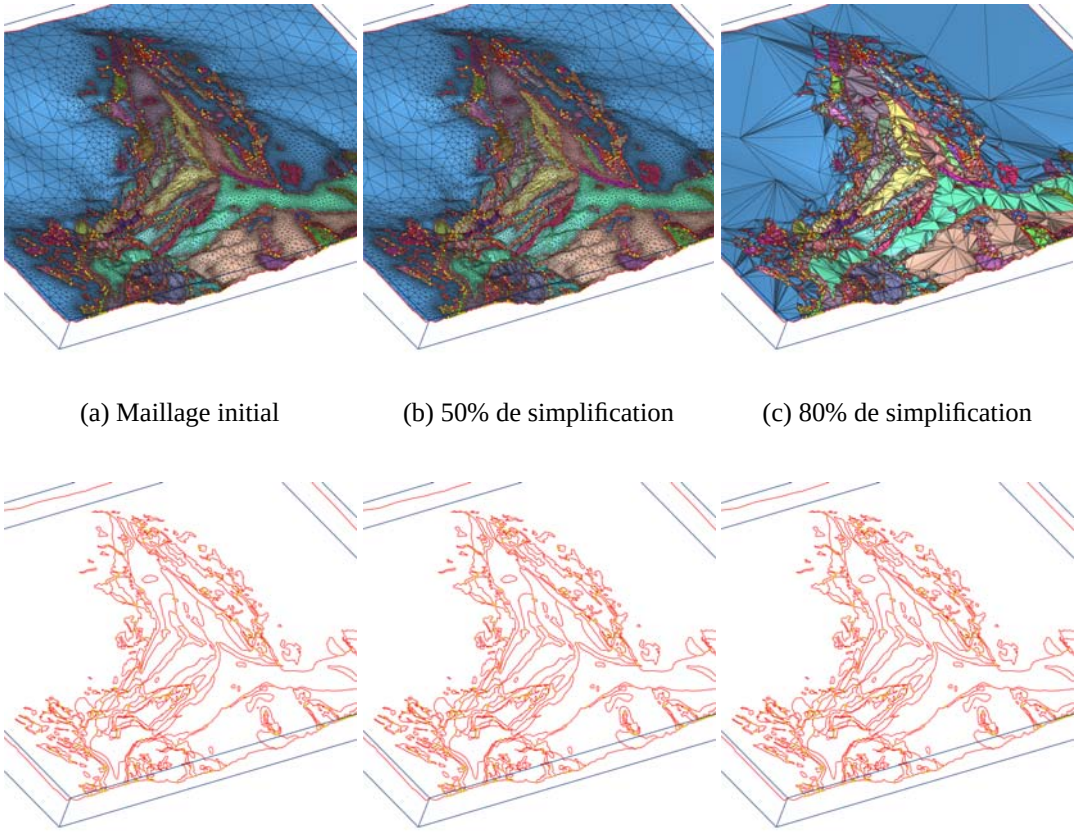
6.2 Simplification surfacique

6.2.1 Applications en géologie

La connaissance de la qualité d'un sol est fondamentale pour une exploitation agricole ou pour estimer la santé d'un environnement. Les études sur les sols sont présentées sous forme de cartes représentant la proportion de chaque type de sol dans une certaine région. Les frontières entre ces domaines sont très importantes car elles permettent de déterminer l'utilisation de l'espace étudié (localisation d'un forage ou suivi des frontières d'un sol fertile pour une exploitation agricole).

En terme de visualisation, la multirésolution est souvent utilisée, à cause de l'important rapport de forme entre la zone d'étude (à l'échelle de la centaine de kilomètres) et la taille d'un type de sol (à l'échelle de la dizaine de mètres). Les triangulations, introduites au paragraphe 2.5.3, page 28, sont composées de millions de triangles et décrivent deux types de géométries.

La première, construite à partir d'un champ de hauteur, définit une surface simple. Le grand nombre de matériaux éventuellement présents sur ces surfaces, introduit par contre des sous-structures linéiques complexes (frontières entre deux types de sols). Le second type de géométrie rencontré, décrit la composition d'un sol sous forme de couches enchevêtrées. Les interfaces entre ces couches peuvent être vues comme une surface non-manifold, à multiples intersections. Des structures linéiques peuvent être présentes sur ces surfaces.



(a) Maillage initial (b) 50% de simplification (c) 80% de simplification

(d) Maillage initial (e) 50% de simplification (f) 80% de simplification

FIG. 6.1: Simplification de données de terrain définies par un champ de hauteur. Chaque région de l'ensemble a une couleur différente. Les frontières *(polylignes rouges)* et leurs intersections *(sommets jaunes)* définissent les sous-structures. Leur topologie complexe doit être préservée.

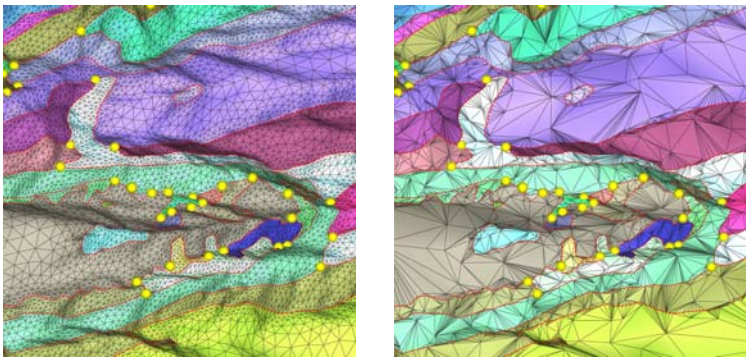
Les données de terrain[1] utilisées sur la figure 6.1 sont extraites d'une carte des matériaux su-

[1]Données disponibles sur le site de la Commission géologique du Canada (`http://sts.gsc.nrcan.gc.ca`)

perficiels[2] du Canada. Chaque région colorée correspond à un sédiment différent. Ces données sont caractérisées par la complexité des frontières de ces sédiments, qui forment les polylignes *rouges* sur les illustrations. Les points de contacts de plus de deux régions différentes sont matérialisés par des sommets *jaunes*.

Lors de la simplification il est primordial de préserver la totalité des régions, aussi petites soient-elles. Les critères topologiques mis en œuvre dans cette thèse répondent à cette attente puisqu'ils assurent la préservation de la topologie des frontières et donc des matériaux proprement dits. La visualisation de la figure 6.1(c), montre des données simplifiées à 80%.

Sur ce type de données, la simplification est stoppée prématurément (80%) à cause de l'erreur géométrique sur les polylignes. Les frontières entre les sédiments évoluent de façon désordonnée en créant des surfaces fermées de petite taille, figure 6.2, contraignant la triangulation



(a) Maillage initial (b) 80% de simplification

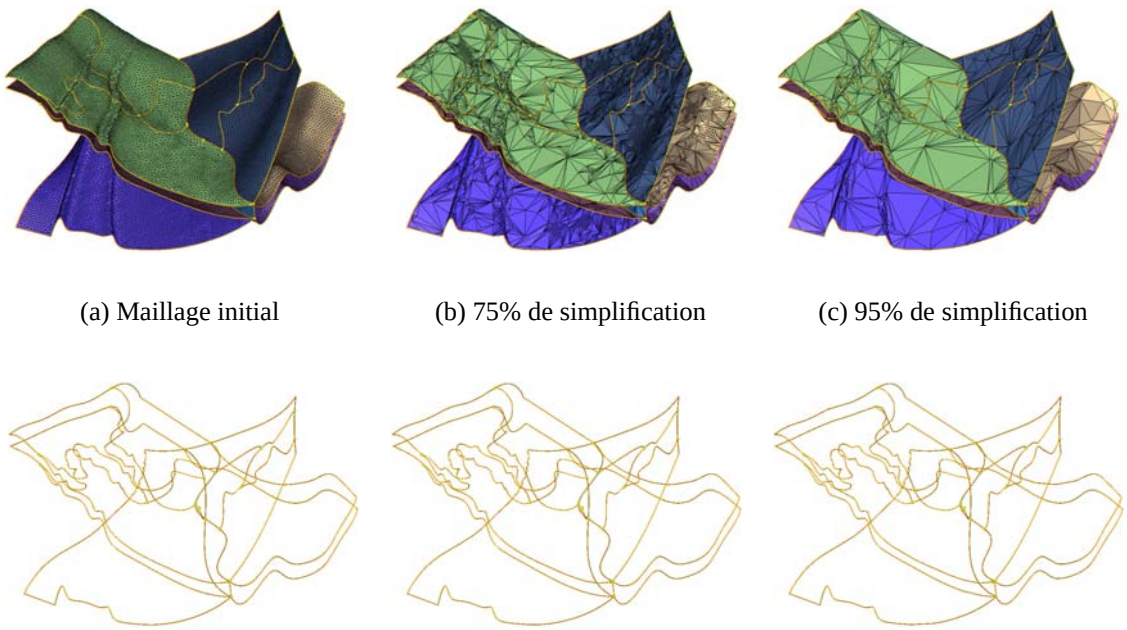
FIG. 6.2: Vue rapprochée d'une simplification de données de terrain montrant la complexité des frontières entre les régions d'intérêt. Chaque intersection de frontière est marquée par une sphère jaune correspondant à un sommet d'ordre 2 dans le complexe.

simplifiée. Par contre même à ce niveau de simplification les tests topologiques montrent leur efficacité puisque certaines régions ne s'étendent plus que sur quelques triangles sans être supprimées pour autant. De même, les intersections entre polylignes ne sont pas modifiées. Aucun sommet d'ordre 2 n'est supprimé, ce qui correspond à l'une des actions des conditions de préservation de la topologie.

Le second type de données en géologie correspond au traitement des couches de matériaux en profondeur[3]. La surface présentée en figure 6.3 est constituée de plusieurs interfaces, adjacentes le long d'arêtes non-manifold. Les conditions du lien, étant définies pour des 2 ou 3 complexes, peuvent traiter ces cas de surfaces sans condition particulière.

[2]Matériaux d'origine glaciaire, non consolidés, recouvrant la masse continentale

[3]Plusieurs ensembles de données de ce type sont disponibles librement sur le site français du Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM) `http://www.brgm.fr/`



(a) Maillage initial (b) 75% de simplification (c) 95% de simplification

(d) Maillage initial (e) 75% de simplification (f) 95% de simplification

FIG. 6.3: Données géologiques décrivant plusieurs surfaces séparant différents types de sols. Des structures linéaires sont présentes sur les surfaces. Toutes ces interfaces définissent une surface non-manifold.

Les illustrations du bas de la figure 6.3 montrent les bords de ces interfaces et certaines caractéristiques linéiques définies sur les surfaces. Ces structures traversent et intersectent le bord des interfaces en formant des sommets d'ordre 2 qui, une fois de plus, sont convenablement préservés.

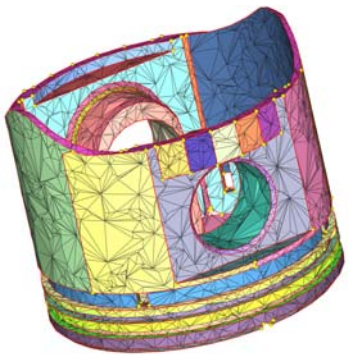
6.2.2 Applications en CAO

Les modèles CAO sont basés sur une géométrie modélisée par un utilisateur et adaptés à la conception (par simulation) de pièces mécaniques. Ces géométries réalisées par une personne peuvent être composées de nombreuses caractéristiques, comme les matériaux, et de détails fins. Dans ces modèles, il y a une relation forte entre la géométrie du maillage et la définition des structures, représentées par des matériaux en surface. En effet, les simulations basées sur des méthodes aux éléments finis surfaciques utilisent des modèles, éventuellement non-manifold, dans lesquels les caractéristiques correspondent à la géométrie.

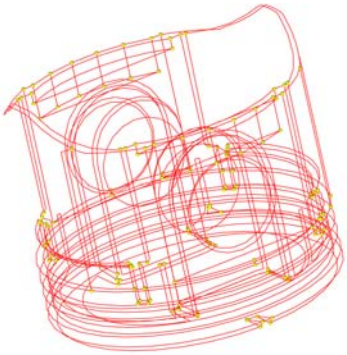
Les polylignes de ces modèles sont plus rectilignes que celles de l'exemple précédent. Ceci explique le taux plus important de simplification possible sans altérer la qualité visuelle du modèle ni sa topologie. Les vues des structures linéiques de la figure 6.4 montrent la qualité de préservation même après 95% des primitives simplifiées. La figure 6.5 montre un détail de l'ensemble du piston. La simplification extrême à 98% montre une légère déformation géométrique mais une préservation totale de la topologie. Ce type de simplification extrême permet de montrer l'influence du critère topologique sur la décision de contraction. Le graphique 6.4(g) montre

(a) Maillage initial

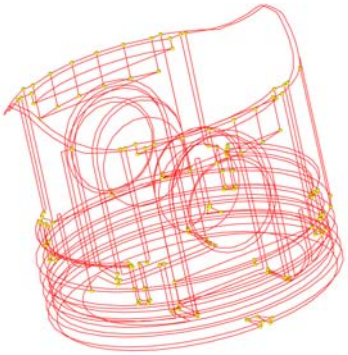
(b) 75% de simplification



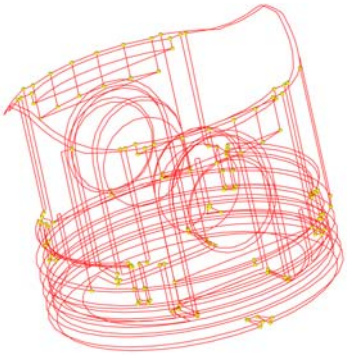
(c) 90% de simplification



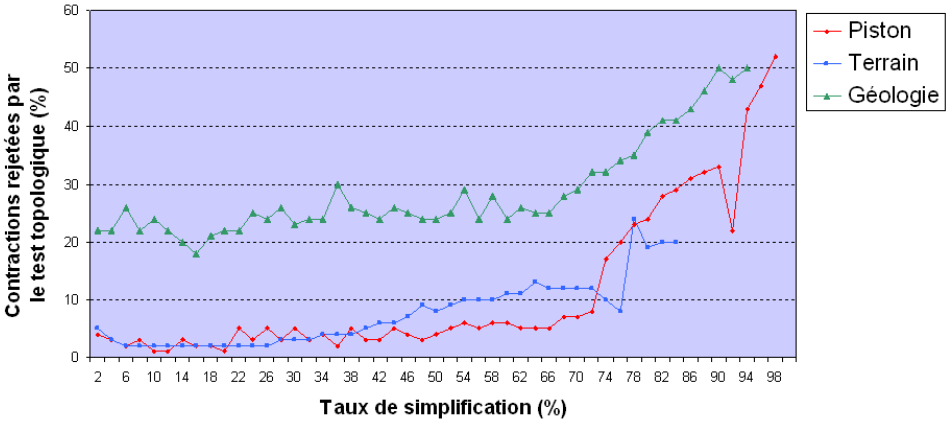
(d) Maillage initial



(e) 75% de simplification

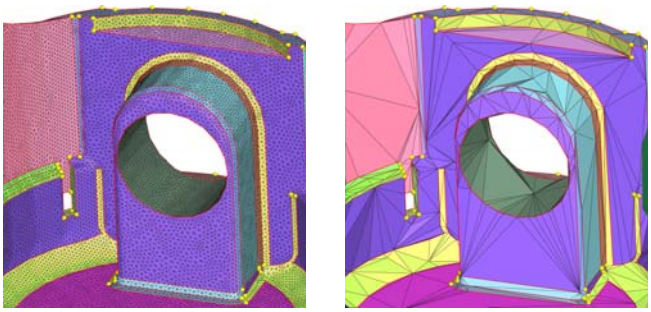


(f) 90% de simplification



(g) Proportion d'arêtes rejetées à cause du critère topologique en fonction du taux de simplification

FIG. 6.4: Simplification d'un modèle CAO d'un piston. La topologie des interfaces entre matériaux définis à sa surface est assurée.



(a) Maillage initial (b) 98% de simplification

FIG. 6.5: Vue rapprochée d'une simplification extrême d'un modèle CAO d'un piston. Après cette simplification préservant la topologie des structures, seulement 2% des données sont conservées.

la quantité d'arêtes rejetées à cause du critère topologique par rapport aux arêtes rejetées pour des critères géométriques. L'axe des ordonnées montre le pourcentage de rejet du critère topologique par rapport à toutes les arêtes rejetées (topologie, déviation de polylignes et de surfaces).

Ce graphique illustre l'importance que prend le critère topologique lorsque le taux de suppression augmente. En moyenne, une arête sur deux est rejetée à cause du critère topologique pour les taux de simplification les plus hauts de chaque ensemble. Sur ce graphique les courbes s'arrêtent lorsque aucune arête ne peut être contractée dans l'ensemble avec les critères d'erreur choisis.

6.3 Applications en neurosciences

L'imagerie en neurosciences est un domaine d'application, où la simplification de maillages peut être utilisée avec préservation ou non de la topologie. Les travaux présentés dans cette section sont les résultats d'une collaboration entre l'institut IDAV[4] de l'Université de Californie à Davis (UCDavis), le Centre de Neurologie du Département de Psychologie de UCDavis et le projet EVASION du laboratoire GRAVIR. Ces travaux ont donné lieu à plusieurs publications introduites ci-après, sur des thèmes variés comme la simplification et la segmentation de surface ou l'estimation de courbures ...

Les recherches menées au sein de cette collaboration, débutée en 2002, s'intègrent dans le projet mondial *The Human Brain Project*. Ce projet s'intéresse à l'aide au diagnostic de maladies cérébrales pour les neurologues. L'une des difficultés est de pouvoir unifier de l'information collectée dans différents cerveaux. Notamment, il est important de pouvoir combiner les nombreuses études effectuées sur des images à résonance magnétique (IRM) au sein d'un même atlas. Cette tâche requiert une étape difficile de segmentation et d'association de détails d'un modèle de cerveau sur un autre (de l'atlas vers le patient ou vice versa).

[4]Institut for Data Analysis and Visualization

Les premiers résultats obtenus et publiés dans les actes du symposium en visualisation VISSYM'03 [VLB+03] traitent de la segmentation d'une surface utilisant une estimation des courbures et une approche multirésolution. Les principales caractéristiques du cortex humain sont les réseaux de plis (*sulci* et *gyri*) qui constituent sa surface. La projection d'information d'un cerveau sur un autre peut utiliser ces caractéristiques pour calibrer la projection et comparer deux régions correspondantes. Pour cela, il est nécessaire de pouvoir segmenter correctement la surface irrégulière d'un cortex.

A partir des images IRM, une séquence d'opérations transforme un modèle de cortex pour permettre son annotation à partir d'un modèle atlas. Le schéma 6.6 illustre chaque étape de cette séquence. L'ensemble de données initial correspond à un volume créé à partir d'environ

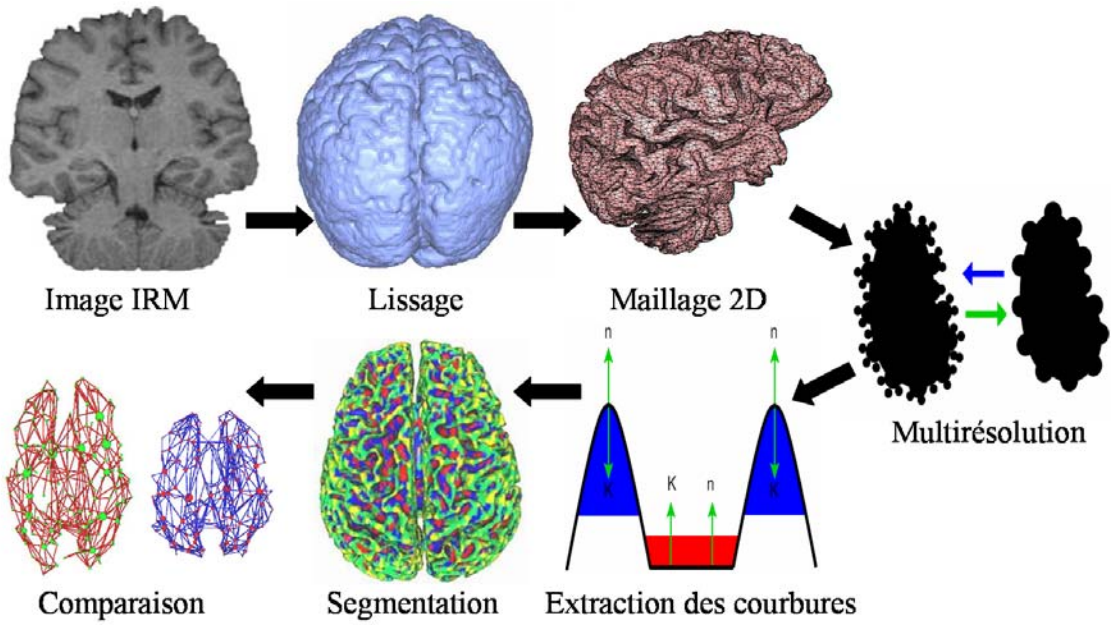


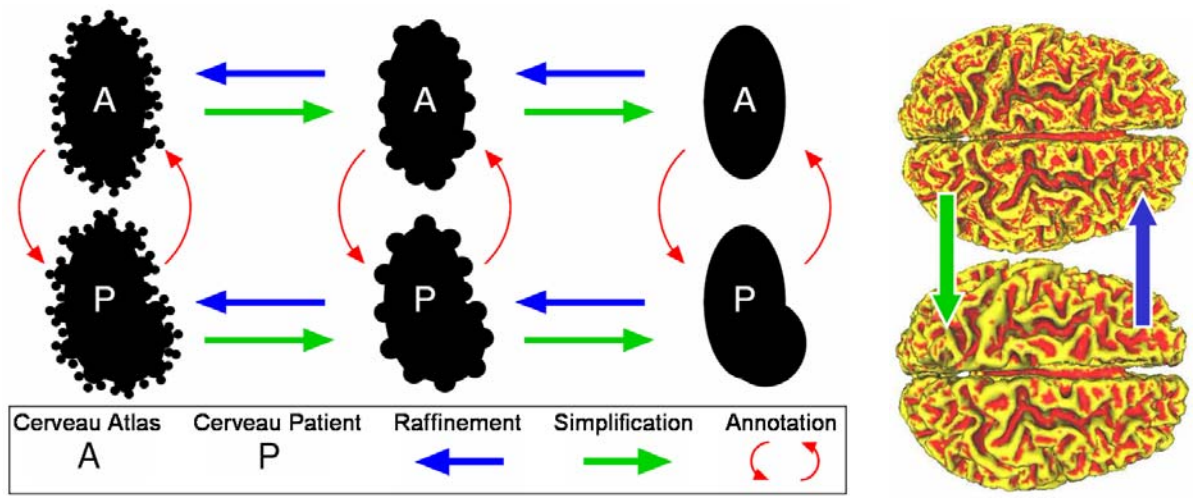
FIG. 6.6: Schéma général du procédé de transfert d'annotations d'un modèle de cortex humain représentant un *atlas* vers le modèle d'un *patient*.

160 images IRM par cerveau. Parce que les images IRM initiales sont souvent bruitées, les données sont lissées à l'aide d'un filtre Gaussien, qui élimine le bruit à haute fréquence. Ce filtre permet aussi d'augmenter la cohérence entre les images IRM en lissant l'aspect *marche d'escalier* parfois obtenu lors de l'extraction d'un maillage. Ensuite la surface du cortex est extraite des données volumiques par un algorithme classique de calcul d'isosurfaces tel le *marching cube* [LC87].

Le bruit restant dans les images IRM fait apparaître de nombreuses petites régions isolées de la surface principale. Parce que ces régions sont inutiles pour la segmentation du cortex, elles sont supprimées afin d'obtenir une seule surface fermée par modèle de cortex. Un algorithme de croissance de surface est utilisé pour détecter la plus grande surface fermée, correspondant au cortex. A cette étape un maillage triangulaire propre est créé permettant de manipuler efficacement ces surfaces.

Cependant la surface d'un cortex humain est hautement non-convexe avec de multiples sulci et gyri. Les gyri (*bosses à la surface*) souvent de grandes tailles sont déformés par une multitude de petits sulci (*plis*). Afin d'isoler les caractéristiques principales, une approche multirésolution a été mise en place sur la surface du cortex. Il est important lors de la segmentation de détecter les plis principaux et non toutes les variations de la surface. Si cette dernière était segmentée à haute résolution, la structure de comparaison serait trop complexe. Une technique pour préserver les plis principaux en éliminant les détails est de créer une représentation à basse résolution du modèle du cortex, obtenue par une simplification.

A partir du modèle original qui représente le cortex à haute résolution, le maillage triangulaire est simplifié itérativement. A certains niveaux de résolution, la surface est segmentée pour



(a) Approche multirésolution pour la segmentation

(b) Segmentation à différentes résolutions

FIG. 6.7: Schéma général de la représentation multirésolution utilisée pour la segmentation. Les modèles de l'atlas et du patient sont simplifiés. L'annotation des basses résolutions est utilisée comme contrainte pour l'annotation à haute résolution. Le déplacement dans la hiérarchie est réalisé grâce à la simplification et au raffinement continus du maillage.

extraire les principaux sulci et gyri. Cette approche fournit une hiérarchie de segmentations. La segmentation à basse résolution définit des contraintes pour des caractéristiques plus complexes détectées à haute résolution. L'illustration 6.7(a) résume ce procédé itératif et inversible. La figure 6.7(b) montre le résultat de deux segmentations de cortex à des niveaux de résolutions différents. L'illustration du haut montre la segmentation à haute résolution où les principaux gyri sont parsemés d'une multitude de sulci de petite taille. En bas, la même segmentation est effectuée sur le maillage à basse résolution menant à une segmentation plus simple où seuls les principaux sulci sont extraits.

Cette étape de l'algorithme est une utilisation directe de la simplification de surface abordée dans cette thèse. C'est pourquoi, la simplification par contraction d'arêtes a été utilisée, pour

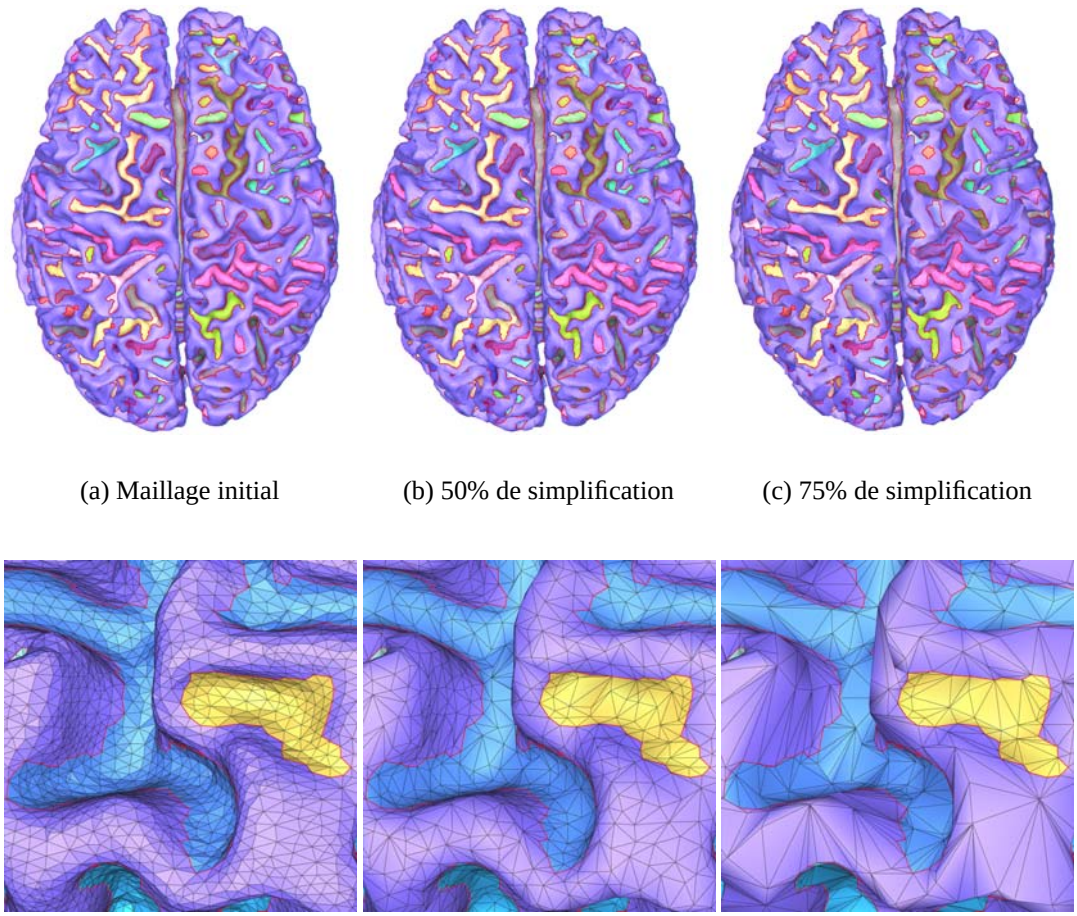
les mêmes raisons de performance et de contrôle des déformations expliquées dans le cadre du projet avec le CEA (paragraphe 3.5.4, page 57).

La préservation de la topologie est assurée par une série de tests simples au niveau de la surface. Dans ce projet, la simplification est utilisée comme un filtre sur la géométrie. A l'inverse du précédent projet sur des données issues de simulation, les géométries de cortex sont volontairement déformées. Pour cela, la contraction d'arêtes complète est utilisée en positionnant le sommet issu d'une contraction au milieu de l'arête. Afin de préserver une rapidité d'exécution, il a été choisi de ne pas optimiser la position du sommet le long de l'arête. L'ordre de priorité des contractions est basé sur la longueur des arêtes. En effet, les arêtes les plus courtes sur le maillage représentent des détails fins de la surface, comme des sulci de petite taille. L'objectif étant de filtrer ces caractéristiques, cette heuristique simple permet de contracter et de supprimer les cellules du maillage représentant ces sulci.

Les sulci peuvent être représentés comme des sous-structures surfaciques du maillage triangulaire du modèle d'un cortex, figure 6.8. Cependant, il est important de noter que dans les résultats présentés jusqu'ici dans ce projet, les techniques de préservation de la topologie des sous-structures ne sont pas utilisées. Ce choix s'explique par la volonté de lisser la surface, en prétraitement, par simplification et non d'en préserver ses détails. Par contre, dans un deuxième temps, après une première annotation, il peut être intéressant d'accentuer la simplification de la surface en préservant la topologie des sulci. Cette seconde simplification, après segmentation, peut être utilisée pour accélérer la visualisation ou optimiser la forme de la surface. La segmentation étant basée sur une estimation des courbures discrètes à la surface, il est important de travailler avec une surface propre. Par contre, il est important de préserver certaines caractéristiques lors de ce lissage, notamment en interdisant la fusion de deux sulci, proches, qui décrivent chacun une région différente du cortex. Les tests de préservation de la topologie présentés au chapitre 5 peuvent être utilisés à ces fins.

L'illustration 6.8 est le résultat d'une simplification avec préservation de la topologie de la surface et de ses caractéristiques. Cette simplification intervient après une étape de segmentation où les sulci principaux ont été marqués. Les arêtes de frontière entre un sulcus et un gyrus constituent les polylignes à préserver et les triangles des sulci sont les faces de sous-structures surfaciques. Les résultats montrent la préservation parfaite des sulci même après une forte simplification et surtout l'utilisation des tests topologiques certifie qu'aucun sulcus n'a été fusionné avec l'un de ses voisins.

Les étapes, suivant la représentation multirésolution, sont l'extraction des courbures, la segmentation et la comparaison de structures. Différentes solutions ont été proposées pour répondre au mieux au problème difficile de comparaison de surfaces complexes. Tout d'abord une approche par comparaison de graphes topologiques a été présentée et publiée dans un chapitre du livre *Scientific Visualization : The Visual Extraction of Knowledge from Data* [VLBHO05]. Cette approche est basée sur l'extraction des courbures discrètes à l'aide d'opérateurs locaux à un sommet. L'angle entre les triangles adjacents et la normale au sommet suffit à fournir une estimation de la courbure moyenne et de Gauss. A l'aide d'opérateurs booléens la surface est segmentée en quatre familles correspondant aux sulci, aux gyri et les zones minimales et



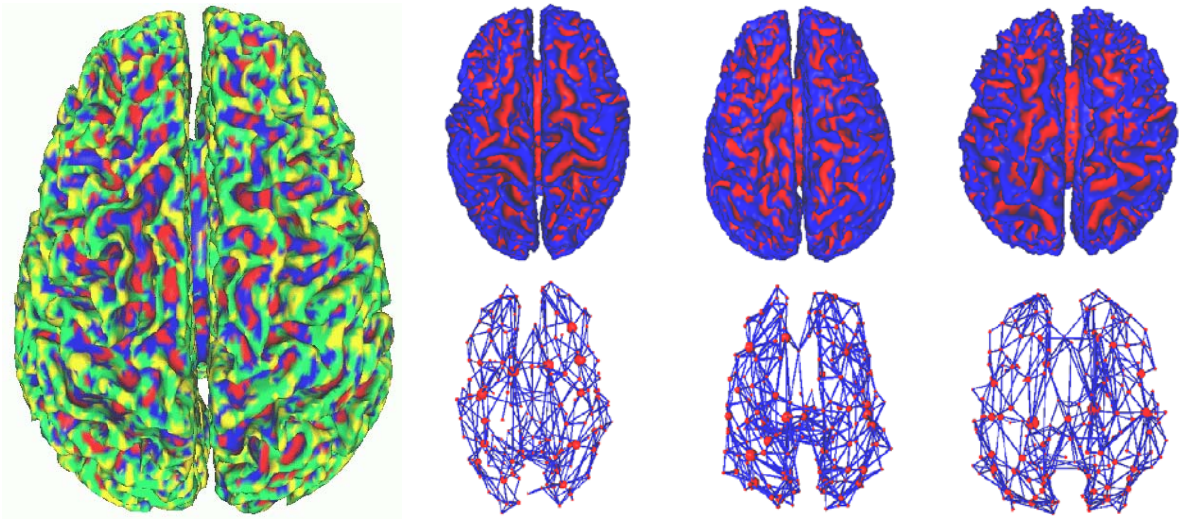
(a) Maillage initial (b) 50% de simplification (c) 75% de simplification

(d) Maillage initial (e) 50% de simplification (f) 75% de simplification

FIG. 6.8: Simplification d'une surface de cortex avec préservation de la topologie des sulci et de la surface. Les frontières des sulci forment des sous-structures linéiques et les triangles des sulci des sous-structures surfaciques. Les vues détaillées illustrent la préservation des frontières des sulci même après de fortes simplifications.

maximales de chacun d'entre eux, figure 6.9(a). Cette segmentation est ensuite utilisée pour la construction d'un graphe topologique décrivant la connectivité des sulci à la surface du cortex. Un nœud du graphe correspond à un sulci et les arcs entre les nœuds sont les relations de *voisinage* à la surface. La notion de voisinage étant choisie comme une distance le long de la surface entre les frontières des sulci, figure 6.9(b). La comparaison entre le modèle de l'atlas et du patient est effectuée à l'aide de ce graphe. Cependant à cause des données bruitées initiales des IRM, la correspondance entre deux nœuds reste délicate même en utilisant les relations de voisinage topologique.

Afin d'améliorer la calibration entre deux modèles de cortex, une approche basée sur des nuages de points et une analyse en composantes principales a été proposée. Ces travaux ont été acceptés pour publication dans les actes du congrès *Visualization and Data Analysis, SPIE*



(a) Segmentation d'une surface de cortex

(b) Surfaces segmentées et graphes topologiques associés

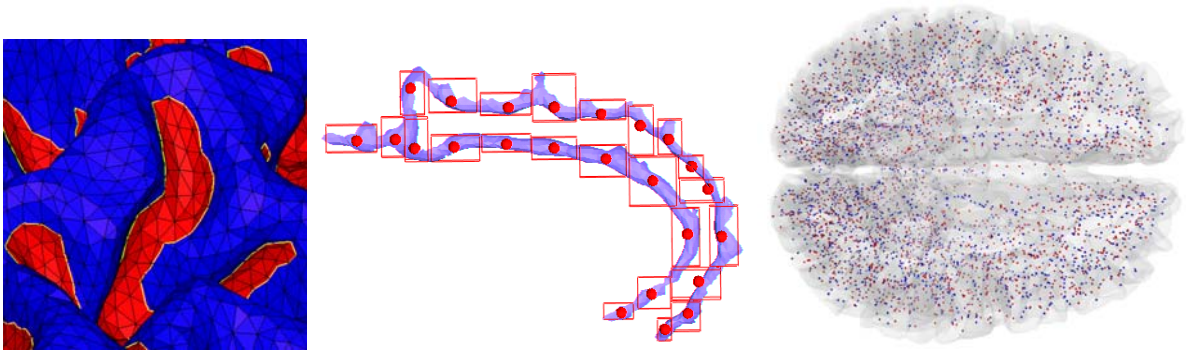
FIG. 6.9: (a) La surface du cortex est segmentée par quatre familles. Les zones vertes correspondent aux gyri, les jaunes aux maxima sur les gyri, les bleues aux sulci et les rouges aux minima sur les sulci. (b) Surfaces segmentées et leurs graphes associés. Les nœuds du graphe correspondent aux sulci et les arcs aux relations de voisinage à la surface.

2006 [VWL+06]. L'estimation des courbures a été améliorée en utilisant non plus des opérateurs booléens, mais par une approximation continue pour chaque sommet de la surface. Ainsi, à l'aide d'un seuil, calibré pour l'extraction de certaines caractéristiques, les frontières entre sulci et gyri sont obtenues de façon lisse et plus précise, figure 6.10(a).

Le tenseur des courbures a un minimum local le long d'une arête et un maximum local à travers l'arête [CSM03]. En intégrant les contributions de toutes les arêtes à l'intérieur d'un domaine centré en un sommet, le tenseur de courbures est obtenu pour un sommet spécifique. Les deux plus grandes valeurs propres de ce tenseur correspondent à une estimation des courbures principales de ce sommet.

Les segments de surface, correspondant aux sulci et obtenus par le partitionnement à l'aide des courbures, sont convertis en un nuage de points. Cette étape est réalisée en regroupant les triangles d'un même segment en un certain nombre de sommets représentatifs du nuage de points, figure 6.10(b). Une fois ce nuage de points construit, un procédé d'association itératif est utilisé pour établir des correspondances entre les sommets du nuage de points de l'atlas et ceux du nuage de points du patient. Après cette association de points entre sulci des deux ensembles, un système de vote est mis en place pour déterminer la correspondance entre les régions des deux modèles.

Le procédé d'association de deux nuages de points utilise plusieurs méthodes de calibration et de déformation. Le nuage de points du patient va être projeté et déformé dans l'espace



(a) Frontières lisses des sulci

(b) Extraction des points représentatifs d'un sulcus

(c) Nuages de points de deux cerveaux superposés

FIG. 6.10: (a) A l'aide de l'opérateur continu d'estimation de courbures, les frontières des sulci sont lisses. (b) Extraction des points représentant un sulcus pour constituer le nuage de points. (c) Deux nuages de points superposés dans le même espace. Les points bleus correspondent aux points de l'atlas et les rouges aux points du patient. L'algorithme d'association peut débuter.

de l'atlas en utilisant successivement des méthodes du domaine de la biologie ou de la vision (analyse en composantes principales, méthode de Horn ...), figure 6.10(c). Le système de vote détermine, à l'aide d'heuristiques, l'association des régions à partir des sommets non associés dans chaque ensemble et leurs distances par rapport aux sommets déjà associés. L'utilisation de ces méthodes éloignées de la simplification de maillages sont détaillées dans [VWL+06].

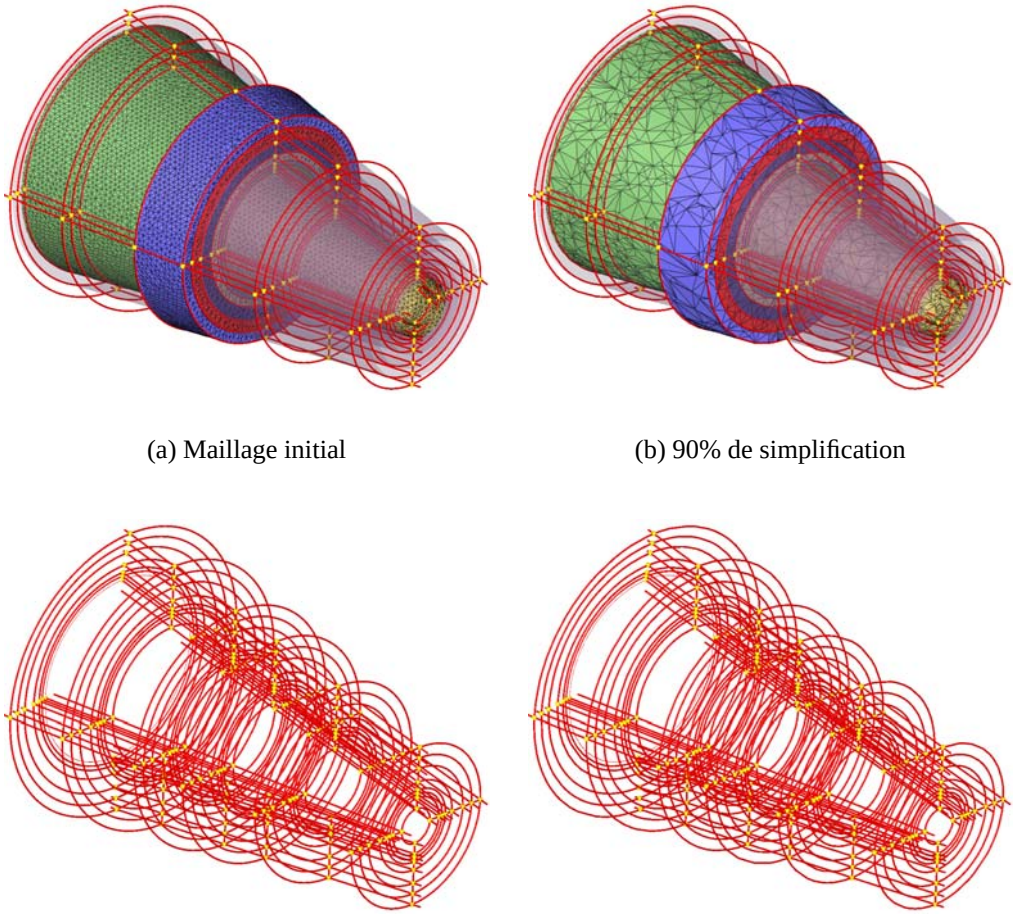
6.4 Simplification volumique

Cette section présente les résultats de l'algorithme de simplification volumique, avec la préservation de la topologie, appliqué au domaine de la simulation en électromagnétisme. Les couches minces des matériaux et les structures linéiques présentes dans les modèles de ce domaine, forment des caractéristiques fines, comme expliquées dans les chapitres précédents. Les résultats présentés illustrent la robustesse des critères topologiques mis en place, notamment pour répondre à un problème précis au CESTA.

La simplification des maillages effectuée dans cette section correspond au prétraitement de la visualisation multirésolution présenté au paragraphe 6.6. La séquence de contractions ainsi obtenues va être utilisée directement pour construire les différents niveaux de résolution. Il est donc primordial de préserver la topologie de ces modèles pour obtenir une visualisation multirésolution cohérente.

Bien que différents modèles soient utilisés selon les types de simulations, ils ont tous les caractéristiques communes des données en électromagnétisme. Le premier exemple montre une section d'un cône composé de nombreuses couches minces. Cet ensemble a déjà été utilisé pour

la figure 5.22. Les résultats de la figure 6.11 montrent une simplification d'un cône constitué



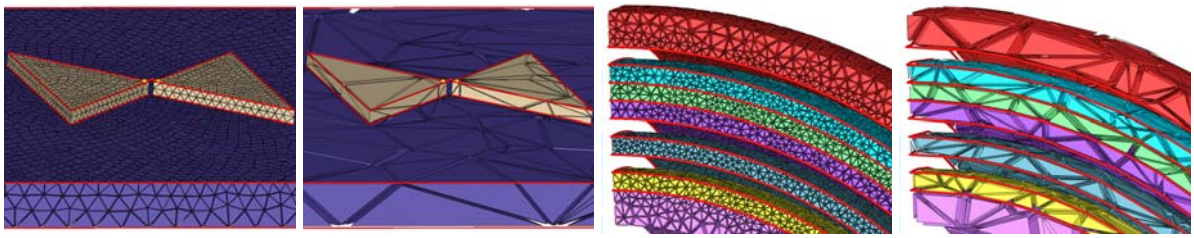
(a) Maillage initial (b) 90% de simplification

(c) Maillage initial (d) 90% de simplification

FIG. 6.11: Simplification volumique d'un cône. Certains matériaux sont représentés par leurs interfaces colorées, les autres utilisent des surfaces semi-transparentes. Après 90% de simplification les sous-structures des ensembles sont préservées.

d'une vingtaine de matériaux et de $1,2$ million de tétraèdres. Les structures linéiques, en rouge, correspondent à des structures issues de la géométrie. Certaines couches de matériaux sont représentées avec les arêtes des triangles de bords apparentes. D'autres n'ont que leur interface représentée par une surface semi-transparente. Cette visualisation permet de mettre en évidence le haut taux de simplification des sous-structures.

Le second exemple reprend l'ensemble de données de la figure 5.18 page 111. Cet ensemble de petite taille est significatif puisque l'élément linéique central est une structure fine à préserver impérativement. Les matériaux englobent cet élément par un empilement de couches horizontales. L'une d'entre elles contient en plus une structure en *papillon* caractéristique de cette simulation, figure 6.12(a). La géométrie rectiligne des structures autorise un taux élevé de décimation (98%) sans modification de la topologie de l'élément linéique. Toutes les arêtes



(a) Maillage initial (b) 98% de simplification (c) Maillage initial (d) 98% de simplification

FIG. 6.12: Résultats de simplification volumique. Toutes les arêtes vérifiant les critères choisis ont été contractées.

vérifiant les critères ont été contractées. Les critères choisis pour cette simplification sont la préservation de la topologie du maillage tétraédrique et de ses sous-structures, l'inversion de tétraèdres, la déviation de polylignes ($1/1000$) et la déviation des interfaces ($1/100$).

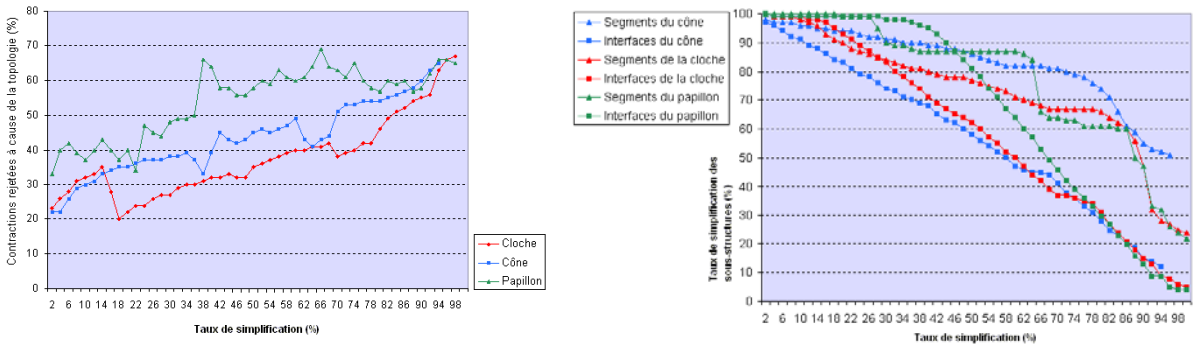
Le troisième exemple correspond à une géométrie de quart de cloche posé sur un plateau plus épais. L'ensemble est de taille importante puisque $3,2$ millions de tétraèdres sont répartis en une dizaine de couches minces. Les illustrations 6.12(c) et 6.12(d) montrent la partie supérieure constituée de nombreuses couches de matériaux. Certaines couches ne sont pas apparentes pour accentuer l'aspect volumique. La topologie des polylignes et des interfaces est relativement simple. Par contre cet ensemble de taille importante permet de tester les critères topologiques sur des interfaces finement maillées. Les critères de simplification choisis sont les mêmes que ceux de l'exemple précédent.

Les critères topologiques ont un rôle plus important en volumique que dans le cas surfacique. Le graphique 6.13(a) montre qu'une arête sur deux est refusée à la contraction à cause de ce critère. Pour une décimation importante (supérieure à 90%) près de deux arêtes sur trois sont rejetées. Cette importance justifie l'emploi de critères topologiques en plus des critères géométriques pour conserver correctement les caractéristiques de ces maillages utilisés en électromagnétisme.

Le graphique 6.13(b) met en évidence la simplification de toutes les sous-structures du maillage. Bien que la topologie des sous-structures soit complexe, surtout dans le cas des polylignes du cône, la simplification avec préservation de la topologie, est tout de même effectuée. Les vues détaillées des polylignes des figures 6.11(c) et 6.11(d) ne permettent pas d'estimer le taux de simplification appliqué puisque la ressemblance est importante. Par contre, le graphique 6.13(b) montre que le taux de simplification de ces sous-structures atteint 60%.

6.5 Simplification de données résultats

La visualisation comme étape du post-traitement, souhaitée par les utilisateurs, intègre bien évidemment les résultats des codes de simulations. Ces données sont caractérisées, en élec-



(a) Importance du critère topologique

(b) Taux de simplification des sous-structures

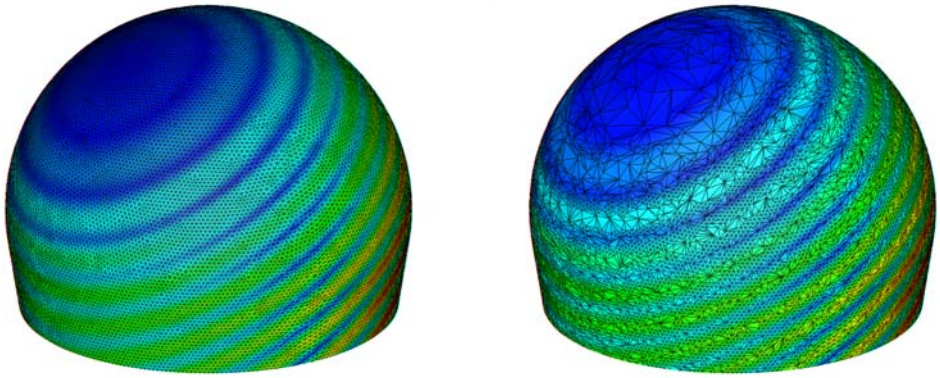
FIG. 6.13: (a) Deux arêtes sur trois sont rejetées à cause du critère topologique pour des forts taux de simplification. (b) La simplification affecte toutes les sous-structures, avec moins de 5% des interfaces restantes pour des taux de simplification proche de 90%.

tromagnétisme, par des champs scalaires et vectoriels, paragraphe 3.4.4, page 52. Les algorithmes de simplification avec préservation de la topologie sont indépendants de ces données par contre l'application finale les intègre. Il est intéressant d'observer que la préservation de la topologie des sous-structures permet de minimiser l'erreur sur les données, même avec un sous-échantillonage des sommets. En effet, en imposant la conservation des couches de matériaux, les données attachées aux sommets ou aux cellules sont maintenues dans un certain espace.

L'approximation des données aux sommets simplifiés peut bien évidemment faire l'objet d'un traitement approfondi tant en terme de calcul que de recherche amont. En effet ce problème reste ouvert et aucune solution optimale n'existe. La présente thèse traite des problèmes topologiques de la géométrie et supporte le transfert de données. Par contre, les travaux de recherche n'ont pas été orientés vers une solution optimale de l'approximation des données qui fait l'objet de travaux futurs.

Cependant, le cadre théorique et algorithmique permet d'intégrer simplement le transfert de données entre les résolutions. La mesure d'erreur de contraction peut être choisie afin de minimiser la déviation des données attachées aux sommets. Les données scalaires peuvent donc déterminer d'une part l'ordre des contractions d'arêtes et d'autre part le rejet de certaines arêtes introduisant une importante variation du champ.

Les résultats d'une simplification volumique contrôlée par un champ scalaire défini aux sommets sont présentés sur la figure 6.14. Ces données sont issues d'un code en électromagnétisme du CESTA. L'ordre des contractions est effectué de façon à minimiser les variations du champ malgré le sous-échantillonnage, c'est-à-dire sans approximer les données attachées aux sommets. Après 75% de simplification l'aspect *zébré* de la frontière de ce volume est préservé. Les résultats sont présentés avec les triangles de bords apparents pour montrer l'influence du champ sur la géométrie. La contrainte forte de sous-échantillonnage influe sur la forme des tétraèdres et des triangles obtenus après simplification. Ce choix est volontaire notamment pour

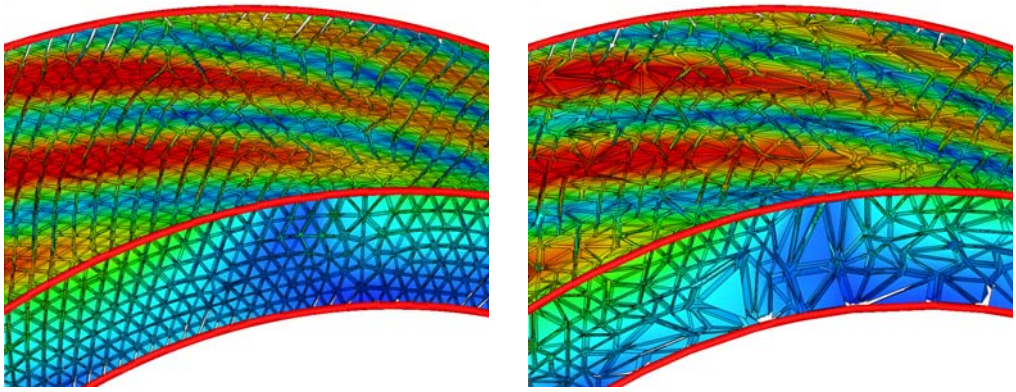


(a) Données initiales (b) 75% de simplification

FIG. 6.14: Simplification volumique minimisant la déviation d'un champ scalaire défini par sommet. Malgré le sous-échantillonnage (aucune approximation) des sommets, les caractéristiques *zébrées* des données sont préservées.

répondre à la demande des utilisateurs qui souhaitent avoir accès à l'information originale du champ en tout point du modèle même à basse résolution.

La figure 6.15 illustre la préservation des tétraèdres porteurs d'une variation du champ entre ses sommets. Les zones *bleues* entre les variations sont simplifiées alors que les tétraèdres au bord des zones *rouges* ne le sont pas. Cette illustration montre une tranche d'un matériau plongée dans un ensemble volumique. C'est pourquoi les bords correspondent à des interfaces. Les arêtes vives de ces bords sont à l'intersection de plusieurs interfaces et donc définissent des polylignes modélisées par les tubes *rouges*.



(a) Données initiales (b) 75% de simplification

FIG. 6.15: Simplification d'une couche de matériau porteur d'un champ scalaire ayant une forte variation en surface. Après simplification les zones intérieures et entre ces variations sont plus simplifiées que les autres.

L'outil de simplification et de visualisation réalisé dans le cadre de ce projet intègre une série de diagnostics permettant de quantifier précisément l'erreur introduite sur les données lors de la simplification. Les isosurfaces utilisées pour détecter des motifs dans la réponse d'un champ électromagnétique sur un objet sont analysées avant et après simplification. Le logiciel METRO [PCS98] a été utilisé au sein du projet pour quantifier rigoureusement les distances entre les surfaces (interfaces et isosurfaces) présentes dans les maillages volumiques. L'illustration 6.16 montre une isosurface extraite d'un champ scalaire dans une zone à forte variation.

(a) Isosurface extraite des données initiales

(b) Erreur sur l'isosurface extraite des données initiales

(c) Erreur sur l'isosurface extraite des données simplifiées à 75%

FIG. 6.16: Exemple d'extraction d'une isosurface sur des données initiales et simplifiées. Des outils de mesure de distances entre surfaces, tel METRO, permettent de quantifier les erreurs commises sur les données.

Deux isosurfaces ont été extraites, l'une sur les données initiales et l'autre sur les données simplifiées. Les distances asymétriques maximales, moyennes et RMS sont calculées d'une surface vers une autre ainsi que la distance symétrique de Hausdorff. Par exemple, la distance de Hausdorff est de $0,0652$ entre les isosurfaces extraites des données initiales et simplifiées à 75% (figure 6.16(c)), alors que cette même distance vaut $0,0203$ entre les isosurfaces extraites des données initiales et simplifiées à 50%. Si un saut est observé dans cette valeur entre deux résolutions alors un seuil du critère géométrique est atteint (par exemple comme au début des contractions d'arêtes se trouvant à la frontière des zones où le champ varie).

Ces distances sont ensuite projetées sur les isosurfaces, figure 6.16(b) et 6.16(c) pour mettre en évidence les artefacts de la simplification. Cette visualisation renseigne l'utilisateur, sur la qualité de la résolution avec laquelle il travaille. Si un phénomène inattendu apparaît dans des zones marquées par une couleur froide (bleue) alors il est probable que ce phénomène ne soit pas un défaut de la visualisation mais bien une caractéristique des données. A l'inverse, des motifs particuliers dans des zones marquées par des couleurs plus chaudes doivent être analysés

avec une résolution plus fine. Le retour à un niveau supérieur de la hiérarchie est possible grâce à la visualisation multirésolution présentée ci-après.

6.6 Visualisation multirésolution

6.6.1 Les modèles multirésolution

Les maillages multirésolution constituent une solution efficace pour construire plusieurs représentations d'un modèle géométrique à différentes résolutions. La précision d'un maillage, autrement dit son niveau de détails, est directement liée à la densité des cellules qui le composent, appelée *résolution*. Un maillage multirésolution est composé d'une part d'une collection de parties d'un maillage décrivant un sous-ensemble du domaine avec une précision variable et d'autre part, d'une série de relations qui permettent de sélectionner un sous-ensemble de ces collections qui combinées, décrivent entièrement le maillage.

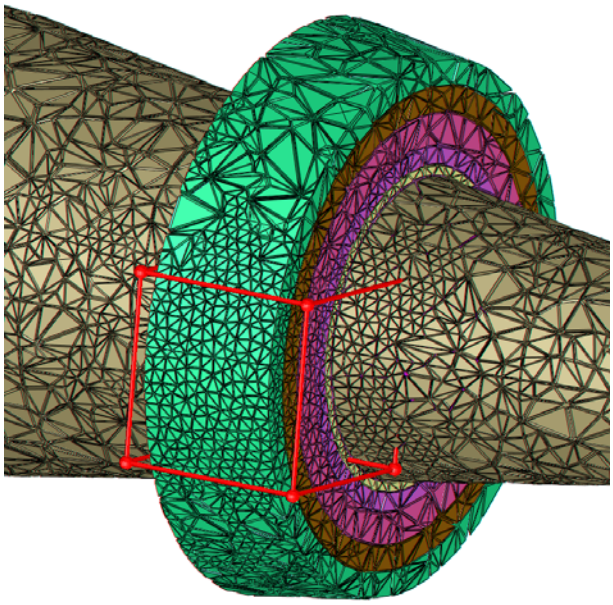


FIG. 6.17: Visualisation multirésolution. La résolution la plus fine, correspondant au maillage initial, est présentée uniquement dans un volume d'intérêt (boîte rouge). Le reste du maillage est à basse résolution.

L'exploitation de résultats portés par un maillage ne nécessite pas toujours la représentation de l'ensemble du domaine à haute résolution. Il est parfois suffisant de manipuler un maillage à basse résolution avec, localement, une description complète du domaine. Ce choix permet de réduire considérablement le coût de traitement de la géométrie et l'espace mémoire nécessaire. Un exemple de visualisation multirésolution, utilisant les données du CESTA, est présenté sur la figure 6.17.

La construction d'une représentation adaptative est basée sur la simplification d'un maillage pour créer les niveaux de résolutions. Cette étape de décimation est une étape coûteuse surtout

lorsque des critères de précision géométriques et topologiques sont intégrés. Avec une approche multirésolution, toutes les étapes coûteuses de simplification des données sont effectuées une seule fois en prétraitement, en construisant une structure qui peut être interrogée efficacement à l'exécution. Cette structure permet d'extraire à temps interactif une série continue de résolutions du maillage satisfaisant les besoins d'un utilisateur, figure 6.18.

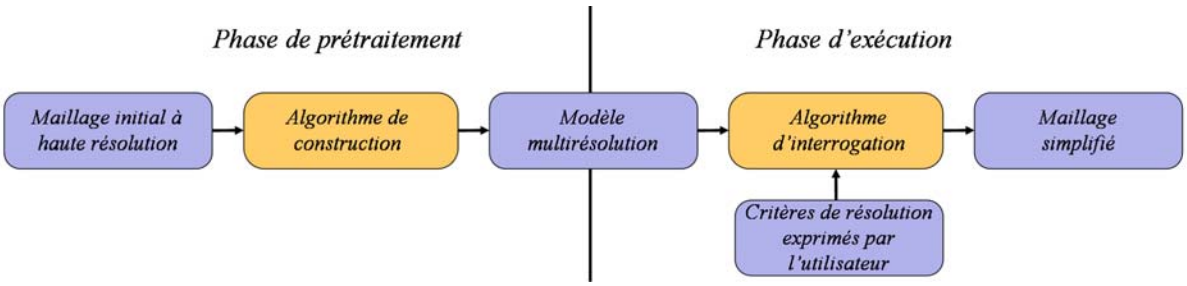


FIG. 6.18: Phases de construction et d'utilisation d'un modèle multirésolution. Les cellules bleues correspondent à des données et les cellules orange à des algorithmes.

6.6.2 Structures de données des modèles multirésolution

La structure de données utilisée pour implémenter un maillage multirésolution est fondamentale. Elle doit être négligeable par rapport au volume de données du maillage initial et supporter des algorithmes efficaces de raffinements sélectifs (extractions de maillages recouvrant entièrement le domaine à résolutions variables). De nombreux modèles multirésolution ont été proposés [Mag99], cependant la plupart d'entre eux sont spécifiques à une application (modélisation de terrains, réalité virtuelle, visualisation ...) et à une opération d'extraction (dépendant du point de vue, volume d'intérêt ...). De plus les structures de données sont, en principe, dédiées à un type de maillage (grille régulière, réseau triangulé, maillage triangulaire non structuré ...).

Depuis une dizaine d'années, les modèles proposés sont basés sur une description formelle de l'approche multirésolution de [FPM97]. Ces modèles organisent les modifications au sein d'une structure de dépendance maintenant un ordre partiel. Il existe deux groupes majoritaires de solutions à savoir *les graphes directs acycliques* et *les forêts d'arbres binaires*. D'autres modèles existent mais sont peu utilisés. Pour plus d'informations sur les structures de données d'une représentation multirésolution, le lecteur peut se référer à [Mag99, FM02, FKE04].

Les graphes directs acycliques (DAG) sont utilisés pour stocker explicitement les dépendances entre les modifications. Chaque nœud du DAG représente une contraction d'arête c_e, ses fils représentent les contractions dépendant de c_e et ses parents les contractions nécessaires à c_e. Les liens entre les modifications sont dédoublés (relation symétrique) rendant cette technique relativement coûteuse en espace de stockage. Plusieurs optimisations ont été proposées à partir de ces solutions pour réduire l'espace de la structure [FPM97, GTLH98]. Dans [KG98], les liens vers toutes les modifications dont dépend une certaine modification sont stockés dans

une seule boucle, réduisant ainsi l'espace de stockage. Cette technique a été implémentée dans [FMP00].

Les forêts d'arbres binaires sont des structures plus compactes utilisées pour stocker une hiérarchie de sommets. Les fils de chaque sommet w sont les points extrémités u et v de l'arête qui se contracte en w. La description d'une modification nécessite cependant plus d'information que les relations d'antécédent et de successeurs dans l'arbre. Cette information supplémentaire est stockée aux nœuds de l'arbre représentant aussi un sommet du maillage. De nombreuses méthodes se différencient par leur façon de stocker cette information supplémentaire [Hop97, MMS97, LE97]. En adoptant une forêt d'arbres binaires et une énumération particulière des sommets qui permet de trouver toutes les dépendances entre les modifications, [ESV99] fournit une solution efficace de codage, pour des maillages 2D. Cette solution a été étendue au cas 3D notamment dans [CFM+00].

6.6.3 Structure de données des maillages tétraédriques non structurés

La suite de cette étude s'intéresse uniquement aux structures de données spécifiques aux maillages tétraédriques non-structurés puisque ce sont les données manipulées dans ce projet au CEA. Bien qu'il existe un grand nombre de modèles de maillages multirésolution, peu d'entre eux sont utilisables pour des tétraèdres. [PH97] et [SG98] utilisent une représentation appelée *modèles progressifs* pour décrire des maillages non structurés. La résolution du maillage la plus basse, est stockée avec une séquence linéaire de modifications, qui peuvent être appliquées à ce maillage afin de le raffiner de façon progressive. Ces méthodes supportent l'extraction d'un maillage uniquement aux résolutions obtenues en tronquant cette séquence linéaire en certains points. L'approche proposée par [CFM+94] utilise une représentation multiniveaux, qui code une pyramide de résolutions d'un maillage. Cependant cette technique n'autorise que l'extraction de maillages à résolutions uniformes.

Multi-Tesselation Basée sur le modèle formel de [FPM97], l'approche [FMP00], appelée *Multi-Tesselation (MT)*, propose un modèle multirésolution indépendant de la dimension du complexe et de la stratégie de construction du modèle (simplification par contraction d'arêtes, suppression de cellules ...). La structure de données de cette approche utilise un DAG pour organiser les modifications et code les tétraèdres par des indices de sommets. L'utilisation de ces structures lourdes rend cette approche relativement coûteuse en espace mémoire puisque l'ensemble des données est environ $1,8$ fois plus volumineux que le maillage de référence indexé et avec la connectivité des cellules.

Full-Edge Multi-Tesselation Dans [CFM+04], un modèle multirésolution de maillages tétraédriques, appelé *Full-Edge Multi-Tesselation*, a été proposé. Cette approche est dédiée (et optimisée) pour des modifications effectuées par contractions d'arêtes complètes. Les relations de dépendance entre les modifications sont codées dans un arbre dépendant du point de façon similaire à [ESV99]. L'information supplémentaire stockée dans les nœuds de l'arbre est utile

pour repositionner les simplexes autour d'un sommet éclaté (en cas de *vertex split*). Elle comprend un décalage sur la position des sommets et les valeurs du champ au sommet issues de cet éclatement. Un masque est aussi stocké permettant de reconstruire l'organisation des tétraèdres autour des deux sommets de façon performante. Ce masque de bits est créé lors de la contraction en *photographiant* la position des tétraèdres au voisinage des sommets et utilisé par la suite, en accès direct, pour la reconstruction. L'espace de stockage nécessaire à cette structure n'est seulement que d'environ $0,15$ fois le coût de stockage du maillage de référence indexé avec la connectivité des cellules.

Half-edge Multi-Tesselation Afin d'éviter d'utiliser la contraction d'arêtes complète et pour utiliser la simplicité de la demi-contraction [ED02] a proposé une méthode utilisant la demi-contraction d'arêtes. Un DAG implémenté selon la technique [KG98] est utilisé pour organiser les modifications. Les décalages stockés par nœud, du cas précédent, sont remplacés par la position et la valeur exacte du champ au sommet issu de la contraction. La sauvegarde de la topologie avant contraction est facilitée par l'aspect asymétrique de la demi-contraction puisqu'un seul étoilé d'un sommet est modifié. Un parcours en largeur est effectué dans le voisinage d'influence de la modification et mémorisé dans une séquence de bits. Le coût de stockage de cette structure est d'environ $0,25$ fois le coût de stockage du maillage de référence indexé avec la connectivité des cellules. Les auteurs de [ED02] ont aussi proposé une implémentation minimisant l'espace mémoire de cette méthode en utilisant une autre structure de stockage des dépendances (utilisation d'un arbre au lieu du DAG).

6.6.4 Intégration d'un modèle multirésolution existant

L'exploitation des méthodes de simplification volumique proposées dans cette thèse a été réalisée en intégrant ces algorithmes à des librairies existantes de visualisation multirésolution. L'intégration de ce code de simplification issu de recherches amont, dans une solution logicielle efficace a été déterminante. En effet, des efforts importants de recherche ont été portés sur la préservation de la topologie puisque ce point n'avait pas été traité par les méthodes existantes. Par contre, les méthodes existantes de modèles multirésolution couvrent en grande partie les besoins de ce projet. En utilisant une librairie existante d'exploitation de la multirésolution, le gain de temps a été considérable pour l'intégration des critères topologiques de simplification dans le cadre de la visualisation.

A part en réimplémentant une méthode proposée dans un article, peu de modèles multirésolution sont disponibles librement. L'une d'entre elles, la librairie MT [FMP00] permet à partir d'une séquence de modifications sur un maillage de construire et d'exploiter une représentation multirésolution de ce maillage. Cette librairie a été intégrée à un outil de visualisation permettant de valider l'approche choisie.

6.6.5 La librairie MT [FMP00]

Le terme Multi-Tesselation (MT) désigne un maillage de base à faible résolution et un ensemble de modifications qui peuvent être appliquées à ce maillage pour le raffiner localement.

Une MT stocke un ordre partiel des modifications à l'aide de la relation de dépendance suivante : une modification u^+ dépend d'une autre modification u_p^+ si u^+ élimine des cellules qui ont été introduites par u_p^+. C'est-à-dire que u^+ ne peut avoir lieu qu'après la réalisation de u_p^+. Les relations de dépendance directes sont représentées dans un DAG. Les nœuds du graphe sont les modifications et les arcs sont les relations de dépendance. Un arc (U,V) entre deux nœuds existe lorsque la modification V dépend de U, autrement dit qu'un sous-ensemble non vide de cellules introduites par U sont supprimées par V.

Soient u^+ une modification de raffinement et u^- son opération inverse de simplification. Au sein de MT ces deux opérations seront représentées par un seul nœud du DAG. Un sous-ensemble S de nœuds d'une MT est *consistant*, si pour chaque nœud $u \in S$ tous les nœuds u_p tels que u_p^+ précède u^+ dans l'ordre partiel sont aussi dans S. Les modifications d'un sous-ensemble consistant peuvent être appliquées au maillage simplifié dans n'importe quel ordre total qui étend l'ordre partiel. Le maillage ainsi obtenu représente une résolution intermédiaire de la hiérarchie. Ainsi le DAG fournit tous les chemins possibles pour obtenir des séquences de modifications valides consistantes avec l'ordre partiel. Cette séquence de modifications appliquée à un maillage, construit un maillage résultat ayant une résolution différente.

Etant donné un filtre de résolution exprimé par l'utilisateur, une MT peut automatiquement fournir un maillage de coût minimum qui satisfait ces critères de résolution. Dans la librairie MT deux critères sont implémentés. Un *critère statique* génère un maillage à partir du plus petit nombre de nœuds consistants, suffisant pour satisfaire le critère de résolution. Cet algorithme parcourt, de haut en bas le DAG et ajoute progressivement les nœuds pour raffiner le maillage tant que la résolution n'est pas atteinte. Un *critère dynamique* mémorise l'ensemble des nœuds N consistants de l'extraction précédente. Lors d'une nouvelle extraction, le maillage résultat est celui correspondant à un ensemble consistant N' de distance minimale à N. La distance est le nombre de nœuds qu'il est nécessaire d'ajouter et de supprimer de N pour obtenir N'. Si la nouvelle requête est proche de la précédente alors le coût d'extraction est particulièrement bas.

En plus de ce filtre de résolution, deux critères de localisation sont implémentés. Ces critères permettent de restreindre localement l'utilisation du filtre de résolution à des sous-parties de l'objet ayant un intérêt particulier. Un *critère global* génère un maillage recouvrant le maillage initial où seules les cellules dans la région d'intérêt ont été traitées par le filtre de résolution. Les cellules à l'extérieur de la zone d'intérêt ont une résolution arbitraire. Ce critère nécessite un parcours entier du DAG. Un *critère local* extrait seulement les cellules à l'intérieur de la zone d'intérêt satisfaisant les conditions de résolution. Seule une sous-partie du maillage est reconstruite impliquant une plus grande rapidité d'exécution puisque moins de nœuds du DAG sont parcourus.

6.6.6 Instanciation d'une MT pour les besoins du projet

La librairie MT fournit des méthodes de construction d'une MT qui permettent de prendre en compte un ensemble de caractéristiques propres à une application. Dans le cadre de l'exploitation des données issues de certains logiciels de simulation du CESTA, les données sont de

types différents. En plus de la géométrie, les matériaux définis par tétraèdre, un champ scalaire défini par sommet et les sous-structures surfaciques et linéiques sont transmises à la structure hiérarchique de MT.

Comme expliqué au paragraphe précédent, le DAG d'une MT est construit à partir d'une séquence de modifications. L'algorithme de simplification volumique avec préservation de la topologie des sous-structures, détaillé au chapitre précédent, génère une telle séquence de modifications correspondant à une série de contractions d'arêtes. L'avantage d'utiliser MT est de pouvoir fournir une séquence de modifications propre à un opérateur (ici la contraction d'arêtes) et définie dans une autre application. Grâce à cette modularité, les tests topologiques propres aux données possédant des sous-structures et implémentés pour ce projet, sont directement intégrés dans le cycle de construction du modèle multirésolution.

MT permet de définir plusieurs attributs scalaires ou vectoriels par maille ou sommet, représentant ici les matériaux, les sous-structures et des données résultats. Le pseudo code suivant définit un maillage multirésolution adapté aux besoins du présent projet permettant de visualiser des données issues d'un code en électromagnétisme.

```
// Définition d'un attribut
class WithVertexScalarFieldClass ;

// Définition de la classe conteneur de l'attribut
class WithVertexScalarFieldTableClass : public WithVertexScalarFieldClass {
  ...
  // table des données
  MT_FloatTable my_scalar;
  ...
}

// Définition de la structure MT possédant toutes les caractéristiques réquises
class MyMTforSimulationData : public MT_MultiTesselationClass,
                              public WithTileErrorTableClass,
                              public WithTileMaterialTableClass,
                              public WithTileSubStructureTableClass,
                              public WithVertexScalarFieldTableClass ;
```

Une interface est créée pour chaque attribut qui définit les fonctions permettant d'accéder aux caractéristiques (classes abstraites `WithYYYClass` où `YYY` désigne un attribut). Il faut ensuite décider si l'attribut d'une classe est calculé à chaque modification ou une seule fois. Puis, chaque interface est implémentée en attribuant le type correct de chaque attribut (par exemple `MT_FloatTableClass` pour les données résultats). Cette implémentation fournit une classe `WithYYYTableClass` qui stocke l'ensemble des valeurs d'une caractéristique au format approprié. Enfin la classe d'une MT possédant toutes les caractéristiques est définie en héritant des classes `WithYYYTableClass` stockant chaque attribut.

6.6.7 Construction d'une MT pour les besoins du projet

Après avoir défini et instancié la classe `MyMTforSimulationData`, le maillage et la séquence de contractions associée sont utilisés pour remplir les champs de la MT. Une initialisation de la structure MT est nécessaire, notamment en indiquant le début de mémorisation d'un historique de modifications pour chaque classe d'attribut. Ensuite, la structure MT initiale est construite en parcourant tous les tétraèdres du maillage initial et en utilisant les méthodes d'insertion `MT_UseVertex` et `MT_MakeTile`. Un cellule de la MT est appelée une `Tile`.

Pour chaque sommet et cellule du maillage initial, les attributs correspondant sont initialisés (et donc insérés dans la structure) en utilisant les méthodes du type `MakeTileMaterial` par exemple.

Ensuite la séquence de contractions déjà calculée par l'algorithme de simplification volumique avec préservation de la topologie est parcourue. Un élément de cette séquence correspond à une demi-contraction d'arête du maillage. Ainsi pour chaque contraction seules les cellules adjacentes au sommet supprimé sont effacées de la MT (par la méthode `MT_KillTile`). Il est important de noter que cette construction est propre à l'utilisation de la demi-contraction d'arête puisque la contraction complète nécessiterait la suppression des cellules adjacentes aux deux sommets de l'arête.

Les erreurs sur le maillage causées par la contraction sont calculées et la demi-contraction de l'arête au sein du maillage est effectuée modifiant la connectivité de ce dernier. Les tétraèdres du maillage modifiés dans l'étoilé du sommet correspondent à de nouvelles `Tiles` au sein de la structure MT. Elles sont ajoutées ainsi que leurs attributs par l'appel des méthodes `MT_MakeTile` et `MakeTileYYY`. Les sommets de ces nouvelles `Tiles` existent déjà puisque les données sont volontairement sous-échantillonnées (propriété de la demi-contraction) et donc seul un appel à la méthode `MT_UseVertex` est nécessaire.

Enfin, comme le veut la structure MT, toutes les `Tiles` du maillage final sont supprimées. La mémorisation des historiques est arrêtée. Avec cet ensemble d'opérations enregistrées dans la structure, le DAG peut alors être construit par l'appel de la fonction `MT_Convert`. A la suite de quoi, le maillage de base (le plus simplifié), le DAG et tous les attributs sont sauvegardés dans des fichiers correspondants.

6.6.8 Intégration des composants logiciels

Cette section décrit l'intégration logicielle des différents composants de l'outil de visualisation multirésolution développé dans le cadre de ce projet de thèse. Les composants et leurs relations sont schématisés sur la figure 6.19 L'exploitation visuelle des données s'effectue en deux étapes. Premièrement, lors de l'étape de *prétraitement*, l'algorithme de simplification volumique charge le maillage et les données (communication par fichiers) attachées à celui-ci. L'exécution de la simplification génère une séquence de modifications sur le maillage initial. Cet algorithme utilise quatre modules paramétrables par l'utilisateur implémentant :

- des critères d'erreur sur la topologie (préservation de la topologie des sous-structures ...)

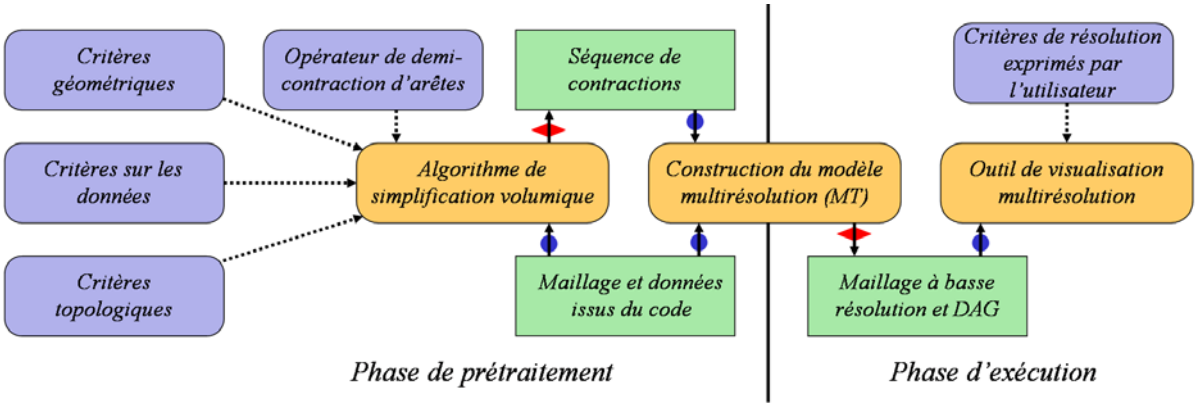


FIG. 6.19: Schéma d'intégration des composants intervenant dans la visualisation multirésolution. Les cellules bleues correspondent à des paramètres renseignés par l'utilisateur et communiqués (flèches pointillées) au sein d'un module. Les cellules orange correspondent aux modules indépendants lisant (flèches à cercle) et écrivant (flèches à losange) des fichiers de données et d'échanges (cellules rectangulaires vertes).

- des critères d'erreur sur la géométrie (déviation des interfaces, forme des tétraèdres ...)
- des critères d'erreur sur les données (seuil de l'approximation, sous-échantillonnage ...)
- un opérateur de simplification (demi-contraction, contraction complète ...).

Cette séquence est sauvegardée dans un fichier de taille négligeable par rapport au maillage puisqu'il ne contient qu'une énumération de contractions (deux entiers par arêtes codant les sommets à contracter).

Le module de création du modèle multirésolution (implémenté à l'aide de la librairie MT) charge ce fichier et le maillage initial. Avec les méthodes fournies par la librairie, une représentation multirésolution des données est créée. Il est important d'insister sur le fait qu'à travers les différentes résolutions du modèle, la topologie du maillage et de ses sous-structures est préservée puisque la représentation utilise le résultat de la simplification avec préservation de la topologie. Les fichiers générés par ce module, stockant le maillage le plus simplifié et le DAG, sont ensuite communiqués au module de visualisation multirésolution.

L'étape de prétraitement est ainsi terminée laissant place à la phase d'exécution. En utilisant uniquement les données issues du module de hiérarchisation, l'outil de visualisation est indépendant de la chaîne précédente. Ce module intègre des critères sur la résolution du maillage exprimés par l'utilisateur. Ces critères sont souvent imposés par la capacité graphique de sa station d'exploitation ou par le réseau de communication qu'il utilise.

L'illustration 6.20 montre une photo d'écran du module de visualisation compilé pour un environnement WINDOWS. Les trois modules sont implémentés en C et C++ et les fichiers d'échanges sont dans des formats binaires propres à chacun des modules. Seule l'étape de visualisation lors de la phase d'exécution utilise une librairie graphique (OPENGL). La modularité et l'utilisation de langages portables permettent de distribuer les deux phases sur des architectures variées (UNIX, LINUX, WINDOWS, OSF1 ...). Les machines de calcul de la phase de prétraitement possèdent une importante puissance de calcul mais sont dépourvues d'environ-

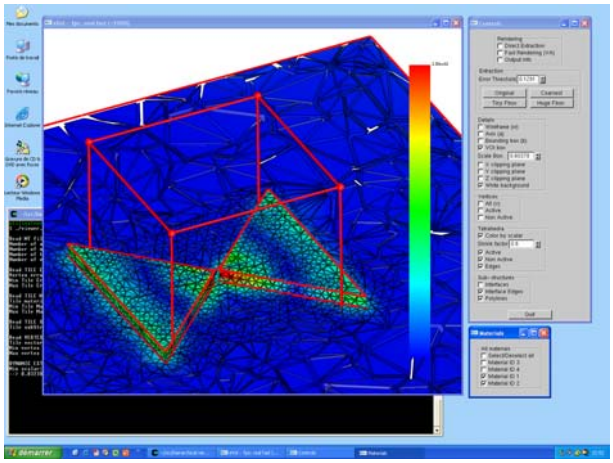


FIG. 6.20: Module de visualisation volumique multirésolution de données issues de simulation.

nement graphique. A l'inverse, les machines locales d'exploitation sont en principe dotées de processeurs graphiques plus ou moins performants mais disposent d'une puissance de calcul réduite. L'architecture du logiciel de validation de la méthode proposée est donc bien en accord avec les ressources disponibles dans le cadre de ce projet de thèse (chapitre 3).

6.6.9 Limitations et évolutions des modules de visualisation

Le choix de communication par fichiers entre les modules correspond à un choix de conception. En effet, il peut être envisageable (et même souhaitable) de disposer d'un outil *tout-en-un* qui intègrerait les différentes étapes. Cependant ce travail d'ingénierie dépasse le cadre de travail de la présente thèse et constitue le travail futur. De même le chargement de fichiers volumineux peut être un problème sur des machines à capacité mémoire limitée. C'est pourquoi d'autres techniques d'implémentation et de communication ont été discutées et proposées (par exemple la technique de `memory mapping` qui consiste à utiliser un espace disque comme mémoire principale). Dans ce cas les pointeurs vers les structures, traditionnellement stockées en mémoire, sont remplacés par des pointeurs de fichiers. Le traitement est ensuite identique. Cependant la séparation complète des modules a l'avantage d'accentuer l'indépendance des différentes tâches et les goulots d'étranglement qui peuvent apparaître dans l'implémentation d'un des algorithmes.

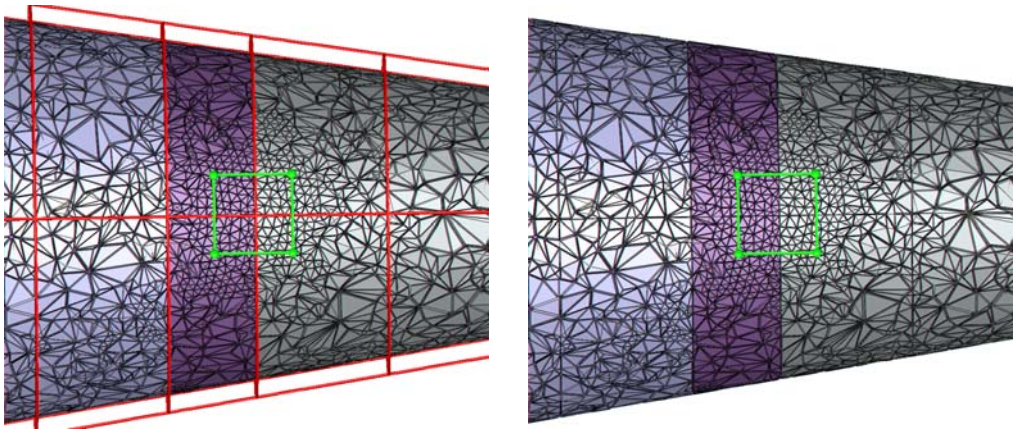
L'utilisation de la librairie MT a permis de mettre en place rapidement un prototype de visualisation multirésolution totalement paramétrable et spécifique aux besoins du projet. Cette librairie est extrêmement efficace dans un cadre théorique puisqu'elle a été conçue de façon généraliste pour accepter un grand nombre de données, de traitements et de dimensions différentes. Par contre, sans remettre en question le travail des auteurs, cette librairie ne constitue pas une solution complète dans le cadre d'un logiciel utilisé en production. La structure générée pour des millions de contractions au sein d'un ensemble volumique de grande dimension est très importante. Notamment le DAG obtenu est une structure lourde qui n'autorise pas un parcours à temps interactif sur des machines de capacité standard (celle dont dispose un ingénieur

dans son bureau).

Il a été montré au paragraphe 6.6.3 que des structures plus récentes et optimisées pour des maillages tétraédriques et des demi-contractions d'arêtes fournissent des temps de parcours bien inférieurs. Ayant conscience de ces limitations, le prototype proposé doit être jugé en conséquence. En effet, l'axe de recherche de cette thèse a été orienté vers des problèmes jusqu'alors non résolus de préservation de la topologie. Il y a encore un travail important à fournir sur les structures de données notamment en implémentant des méthodes plus efficaces proposées récemment comme [ED02]. Par contre, lorsque une résolution fine dans un certain volume d'intérêt et grossier à l'extérieur a été extraite, la solution logicielle proposée permet de naviguer à temps interactif dans des ensembles de grandes dimensions.

6.6.10 Visualisation multirésolution

Les résultats présentés dans cette section ont été générés par le module de visualisation présenté précédemment. Ce module implémente une structure MT utilisée cette fois pour l'exploitation. L'utilisateur dispose d'un volume d'intérêt[5] (VOI), modélisé par un cube, qui évolue dans l'espace de l'objet. Les extractions montrées sur les illustrations ont été obtenues par un extracteur statique global (paragraphe 6.6.5) depuis la structure MT. Les figures 6.21 et 6.22 montrent des sections d'un maillage à résolutions variables, composé de plusieurs matériaux



(a) Résolution variable avec les polylignes

(b) Résolution variable sans les polylignes

FIG. 6.21: Détail du bord de trois matériaux possédant des polylignes. Ces structures linéiques imposent des contraintes topologiques et géométriques visibles à tous les niveaux de résolution.

et de plusieurs polylignes. La résolution présentée dans le VOI correspond à la résolution la plus fine autrement dit au maillage initial. Par contre à l'extérieur, la résolution la plus basse est utilisée. La figure 6.21 détaille l'influence des polylignes et des interfaces sur l'ensemble

[5] *Volume of interest* en anglais, par extension à la notion bidimensionnelle d'une région d'intérêt (*Region of interest* ou *ROI*)

des résolutions. Puisque des contraintes fortes de préservation de la topologie et de la géométrie ont été définies sur les polylignes, les arêtes faisant intervenir des sommets de polylignes sont contractées vers des sommets polylignes. Ainsi, les tétraèdres de toutes les résolutions sont *alignés* avec ces caractéristiques, particulièrement visibles sur la figure 6.21(b).

Les résultats de la figure 6.22 montrent la préservation de polylignes complexes dans une

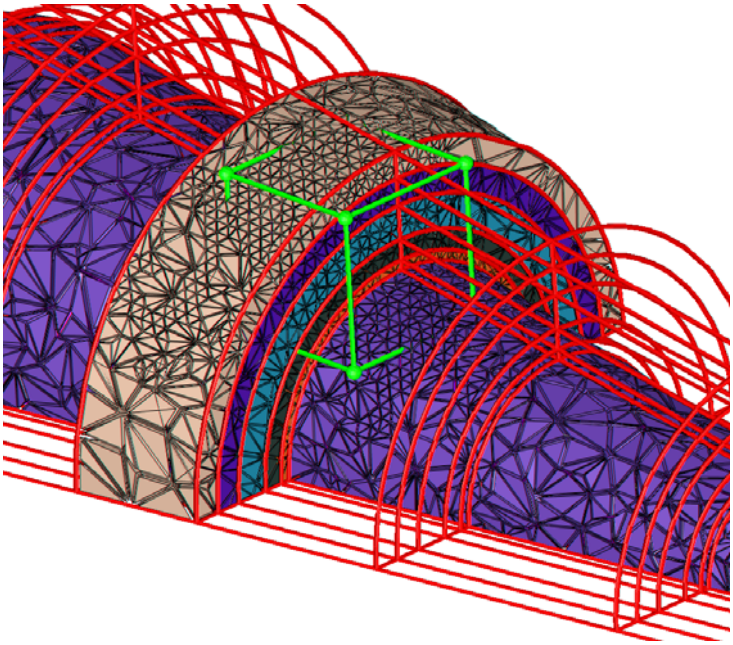
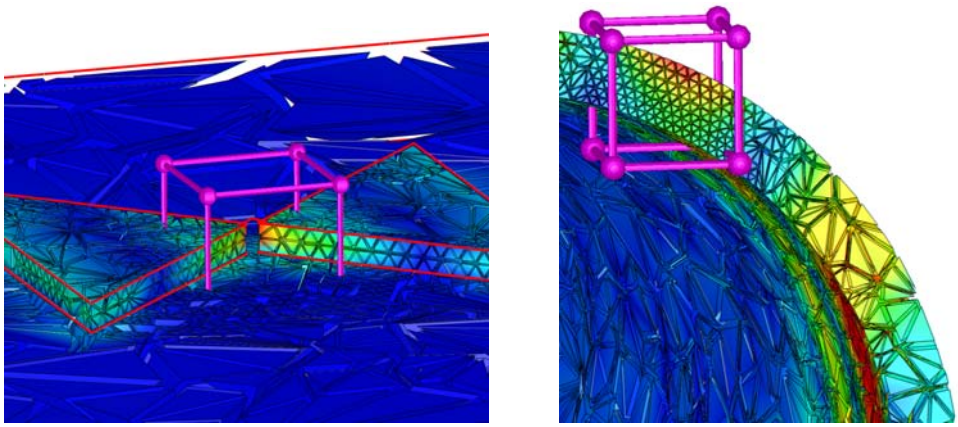


FIG. 6.22: Visualisation multirésolution d'un maillage et de ses sous-structures linéiques. Ces dernières, définies par des arêtes de tétraèdres, sont aussi présentées à différents niveaux de résolution. Grâce aux critères topologiques et géométriques utilisés la déformation de ces sous-structures est quasiment imperceptible.

visualisation à résolution variable. Les arêtes des tétraèdres portant les polylignes à basse résolution conservent la forme de ces structures et évoluent de façon continue (et non perceptible sur les polylignes présentées) vers le VOI à haute résolution. La multirésolution ne détériore en rien les sous-structures des modèles avec l'approche proposée. Cette figure illustre le résultat principal de la thèse en visualisation multirésolution construite à partir d'une séquence de contractions préservant la topologie des polylignes et des surfaces imbriquées.

La structure multirésolution du module de visualisation est identique à celle utilisée dans la phase de construction. L'intégration des données dans la phase de visualisation est donc implicite. L'illustration 6.23 est un résultat d'un code de simulation en électromagnétisme sur les données déjà présentées en forme de papillon. Les tétraèdres rétrécis sont colorés selon la norme d'un champ électromagnétique attribuée par sommet. L'utilisateur s'intéresse ici à l'élément linéique de petite taille au centre du maillage et donc positionne le VOI autour de celui-ci. Il est important de souligner que cette sous-structure linéique et les tétraèdres de son voisinage porteurs d'une forte intensité du champ, sont décrits précisément. Au-delà de la précision visuelle, l'utilisation des critères topologiques lors de la simplification certifie la préservation de la to-



(a) Etude d'un élément linéique à haute résolution

(b) Etude d'une varaiation locale du champ à travers une couche mince d'un matériau.

FIG. 6.23: Visualisation multirésolution de données résultats. Des caractéristiques fines linéiques et présentes dans le champ porté par le maillage sont étudiées en positionnant la résolution la plus fine autour de ces caractéristiques. Le reste du volume est à basse résolution pour maintenir une manipulation à temps interactif.

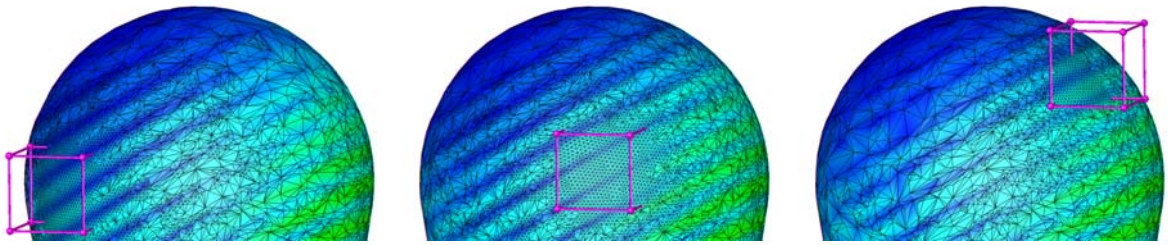
pologie des éléments visualisés, même à cette étape indépendante de la phase de hiérarchisation.

La figure 6.23(b) montre l'étude d'une caractéristique volumique du champ à l'intérieur d'une des couches de matériau. Cette variation d'intensité de la norme du champ est étudiée à la résolution la plus fine. Le reste de cette couche mince de matériau est simplifié. Puisque la topologie des frontières de cette couche (ses interfaces) est préservée, la résolution la plus basse de cette couche est assurément bien formée (sans trou par exemple).

L'utilisateur modifie la visualisation, au sein du module, à l'aide de la position et de la taille du VOI. L'illustration 6.24 montre le déplacement de ce volume au sein d'une simulation sur une demi-sphère pour un même point de vue. Il est intéressant d'observer la propagation du maillage de la résolution la plus fine vers la plus grossière autour du VOI. L'étendue de cette propagation dépend du DAG et de la séquence de contractions. Avec cette transformation le nombre de primitives graphiques extraites reste sensiblement égal, surtout si le maillage de base est maillé de façon régulière.

Par contre, l'opération d'agrandissement du VOI modifie considérablement le nombre d'éléments à envoyer au processeur graphique. L'utilisation d'un trop grand VOI peut conduire à des temps de manipulation du modèle bien au-delà de l'interactivité. En réduisant ce volume, le maillage à basse résolution devient prépondérant et le nombre de primitives chute. L'illustration 6.25 montre différentes tailles de VOI et le maillage obtenu.

Le gain de performances au niveau de l'interactivité, grâce à la multirésolution, est quantifiable en décrivant le nombre d'éléments de chaque structure de la MT. La table 6.1 renseigne



(a) (b) (c)

FIG. 6.24: Déplacement du volume d'intérêt au sein d'un maillage volumique dans lequel la résolution est la plus fine. Le reste du maillage est à basse résolution. Le déplacement et la modification du maillage sont réalisés à temps interactif et de façon continue.

Maillage	Nombre de sommets	327.353
	Nombre de tétraèdres	1.556.547
DAG	Nombre d'arcs	1.471.507
	Nombre de nœuds	294.621
	Nombre de tiles	5.223.436
	Nombre de sommets	327.353

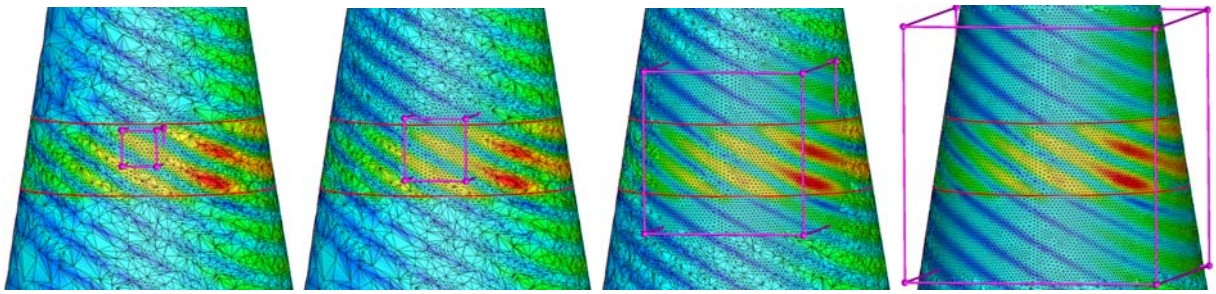
TAB. 6.1: Caractéristiques du maillage et du DAG de la figure 6.25.

les caractéristiques du maillage tétraédrique utilisé à la figure 6.25 et son DAG associé. Le nombre de tiles correspond au plus grand des ensembles puisqu'il représente tous les tétraèdres de tous les niveaux de la hiérarchie. Le nombre de sommets du maillage est bien en accord avec le nombre de sommets dans le DAG. Cette particularité importante prouve qu'un sous-échantillonnage des sommets initiaux est bien utilisé car aucun sommet n'est créé entre les résolutions. Lors de l'agrandissement du VOI, le nombre de tiles extraites du DAG et le nombre de triangles sont modifiés. Ce nombre de triangles correspond à la visualisation des modèles par des tétraèdres rétrécis. La table 6.2 montre cette évolution.

Le nombre de tiles actives correspond au nombre de tétraèdres présents dans le VOI. Ces

Figure	6.25(a)	6.25(b)	6.25(c)	6.25(d)
Nombre de tiles actives	1.256	11.090	88.993	231.442
Nombre de tiles non actives	164.385	180.803	196.411	205.557
Nombre total de tiles	165.641	191.893	285.404	436.999
Pourcentage de tet. initiaux	10,6%	12,3%	18,3%	28,1%
Nombre de triangles affichés	662.564	767.572	1.141.616	1.747.996

TAB. 6.2: Nombre d'éléments extraits de la MT pour différentes dimensions du volume d'intérêt de la figure 6.25.



(a) 10,6% des données initiales 662.564 triangles

(b) 12,3% des données initiales 767.572 triangles

(c) 18,3% des données initiales 1.141.616 triangles

(d) 28,1% des données initiales 1.747.996 triangles

FIG. 6.25: Agrandissement du volume d'intérêt modifiant considérablement le nombre de primitives graphiques affichées. Pour la vue restreinte de ces illustrations, ce nombre est multiplié par trois lors de l'agrandissement. Plus d'information est envoyée au processeur graphique, bien que cette quantité reste faible par rapport aux données initiales.

tétraèdres sont en fait un sous-ensemble des tétraèdres du maillage initial. Les tiles non actives correspondent aux tétraèdres dans le reste du volume. Ces derniers sont à basse résolution sauf autour du VOI où une résolution intermédiaire est présentée. Le nombre total de tiles correspond au nombre de tétraèdres pour ce niveau de résolution et le nombre de triangles pour afficher ce niveau est donné.

Le nombre de tiles actives augmente considérablement puisque le VOI englobe une région du modèle de plus en plus grande. Le nombre de tiles non actives évolue plus lentement. En effet, si une cassure nette était réalisée entre les hautes et les basses résolutions, alors ce nombre resterait constant. Ici, la variation correspond au nombre de tétraèdres nécessaires *pour faire le lien* entre la résolution fine du VOI et la résolution basse du reste du modèle.

Le taux de pourcentage de tétraèdres renseigne sur la quantité d'information effectivement transmise au processeur graphique. Il est important de noter que ces chiffres restent bas ce qui traduit une bonne optimisation du traitement. Les visualisations 6.25(a) et 6.25(b) correspondent à des représentations simplifiées à près de 90% autorisant une manipulation interactive. Le VOI est de taille réduite ce qui peut, dans certains cas, ne pas être suffisant pour étudier une caractéristique des données qui ne serait pas locale (par exemple les zones à forte intensité formant les *rayures* de la figure 6.25).

Dans ce cas, le VOI est augmenté au prix d'une plus faible interactivité. Cependant, il est très important de noter que même pour un VOI couvrant l'ensemble de la fenêtre de visualisation, le taux de simplification des données est important. C'est-à-dire que l'utilisateur visualise l'intégralité des données d'origine, celles visibles depuis son point de vue, bien que seul un quart de la géométrie est transmis au processeur graphique. Ce dernier a donc beaucoup moins de travail à effectuer pour éliminer les parties cachées et manipule un nombre de primitives bien inférieur. Ce gain de performance a l'avantage de ne pas dépendre des avancées matérielles des

processeurs graphiques. Le fait de traiter un nombre inférieur de primitives mènera toujours à de meilleures performances quelle que soit la machine d'exploitation.

6.7 Conclusion

Le vaste panel d'applications, utilisées pour valider l'approche multirésolution avec préservation de la topologie, a montré la robustesse et l'importance des techniques proposées, dans de nombreux domaines. Notamment, les algorithmes implémentés fournissent des solutions, utilisables dans un cadre industriel, pour visualiser des données complexes à temps interactif, comme celles obtenues par des codes de simulations du CEA/CESTA.

Que ce soit pour un usage local ou global, la visualisation multirésolution est une solution efficace pour exploiter des données, à temps interactif, sur des machines à capacités standard (celle dont dispose l'utilisateur dans son bureau). La simplification des données effectuée pour obtenir les différentes résolutions du modèle doit assurer la préservation des caractéristiques initiales.

C'est pourquoi les critères robustes de préservation de la topologie du maillage et de l'ensemble de ses sous-structures, développés dans cette thèse, sont fondamentaux pour certifier la pertinence de la visualisation exploitée par l'utilisateur.

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse ont été menés afin de proposer des solutions de visualisation haute performance de données complexes, issues de simulations numériques. Basée sur un cadre théorique robuste, l'approche par une visualisation multirésolution, préservant les caractéristiques topologiques des modèles, a permis le développement d'outils d'exploitation de résultats de grandes dimensions. Ces travaux se sont concentrés sur deux aspects distincts :

- ► résoudre des problèmes théoriques liés à la simplification de maillages surfaciques et volumiques, avec *préservation de la topologie* de sous-structures imbriquées,

- ► garantir la manipulation de données complexes, *à temps interactif*, sur des stations d'exploitation de faible coût, dans l'environnement industriel du CEA/CESTA.

7.1 Préservation de la topologie de sous-structures

L'utilisation d'une représentation multirésolution est basée sur la création d'une hiérarchie de maillages simplifiés (voir paragraphe 3.5.3 page 55). A partir du maillage initial, chaque résolution est obtenue en appliquant une série de transformations au maillage de la résolution précédente. La préservation de la topologie du maillage lors de ces transformations est fondamentale pour créer une représentation multirésolution continue. De plus, si le maillage possède des sous-structures de différentes dimensions (surfaciques et linéiques), définies au sein de sa géométrie, alors leur topologie doit aussi être préservée afin de maintenir la cohérence des résultats. En effet, un changement de topologie du volume ou des sous-structures conduirait à une mauvaise interprétation des résultats due à une erreur introduite lors de la visualisation. Une telle situation est inacceptable dans le domaine de la visualisation scientifique.

Dans le cadre de ce projet, les maillages triangulaires et tétraédriques, non-structurés, possèdent des sous-structures (voir paragraphe 3.4 page 48). Ces sous-structures proviennent soit de la géométrie initiale (interfaces entre matériaux ou polylignes définies explicitement), soit de l'intersection de sous-structures déjà existantes (arêtes aux intersections d'interfaces, sommets aux points de concours de polylignes, ...). Ces sous-structures sont représentées par des faces du maillage englobant. C'est-à-dire qu'un triangle d'une interface est défini comme une face d'un

tétraèdre et qu'un segment de polyligne est une arête d'un tétraèdre (voir paragraphes 5.2 page 84 et 5.6 page 97).

La simplification des maillages est réalisée par sous-échantillonnage, en contractant itérativement des arêtes du maillage (voir paragraphe 2.4 page 22). Plus précisément, des demi-contractions (contraction d'une arête par écrasement d'un de ses sommets sur l'autre sommet extrémité) sont utilisées afin de garantir l'utilisation des points d'origine même à basse résolution (aucun sommet d'une résolution intermédiaire n'est approximé). Les principaux résultats proposés dans cette thèse garantissent d'une part la préservation de la topologie des maillages triangulaires et tétraédriques, d'autre part *la préservation de la topologie de toutes les sous-structures imbriquées*. Le cadre théorique de la topologie algébrique fournit les outils mathématiques permettant de formaliser les transformations appliquées aux maillages.

Le domaine sous-jacent à un maillage est représenté par un espace topologique et sa discrétisation à un complexe simplicial. Les complexes simpliciaux peuvent être comparés à l'aide d'applications simpliciales construites à partir d'une association de sommets. Pour assurer que deux complexes simpliciaux sont homéomorphes, on cherche des subdivions isomorphes de ces complexes. La préservation de la topologie du maillage au cours de la simplification est garantie, en prouvant l'existence de telles subdivisions entre les complexes avant et après simplification. Ces notions sont détaillées au chapitre 4.

Ces résultats établis dans le cas des 2-complexes et des 3-complexes ne permettent pas de certifier la préservation de la topologie de sous-structures. C'est pourquoi, les travaux menés dans cette thèse étendent ces résultats au présent problème. L'idée proposée au chapitre 5 est d'étendre le complexe simplicial d'origine par un cône de simplexes entre un sommet fictif et l'ensemble des sous-structures surfaciques et linéiques. De ce fait, les sous-structures, dans le complexe étendu, seront représentées *implicitement* par des simplexes d'un ordre particulier (élévation de l'ordre) qui par conséquent seront traités par les résultats précédents. En réalisant une telle construction, les théorèmes de préservation de la topologie d'un complexe sont appliqués sur le complexe étendu, garantissant de ce fait la préservation de la topologie du maillage et de toutes ses sous-structures.

Ces techniques ont été appliquées sur des données provenant de divers domaines comme la simulation numérique, la CAO, la géologie ou encore le médical (chapitre 6). De plus, de nombreux cas tests ont été utilisés à travers ce projet pour valider l'approche proposée et montrer son efficacité (voir paragraphe 5.3 page 86). En effet, en s'appuyant sur des notions de topologie algébrique, les critères énoncés ont l'avantage d'être indépendants de la complexité géométrique du modèle. La robustesse et la généricité de ces tests topologiques, par rapport aux tests géométriques, sont obtenues par l'utilisation d'opérateurs combinatoires et locaux.

7.2 Visualisation multirésolution dans un cadre industriel

Le cadre industriel dans lequel s'est déroulée cette thèse, est celui de l'exploitation de résultats issus de simulations numériques du CEA/CESTA. La connaissance de l'environnement de

travail, c'est-à-dire des besoins en visualisation et des moyens disponibles a été déterminante pour mener à bien ce projet. En effet, il s'agissait de proposer une stratégie de visualisation de données issues de codes de simulations, plus particulièrement en électromagnétisme, utilisables par de nombreux utilisateurs. Les maillages volumiques utilisés ont la particularité de posséder des sous-structures fines de différentes dimensions et d'être composés de plusieurs dizaines de millions de mailles.

Pour des raisons liées à l'architecture du parc informatique, de sécurité de l'information et du nombre d'utilisateurs, la visualisation multirésolution a été proposée comme étant la stratégie la mieux adaptée. Cette étude est détaillée au chapitre 3. En effet, la visualisation multirésolution, répartie en deux étapes (hiérarchisation et exploitation) fournit un ensemble de représentations simplifiées des données avec la possibilité de raffiner localement ou globalement le maillage.

La hiérarchisation des données, avant l'exploitation, sur des machines à hautes performances (éventuellement distantes) correspond à l'implantation du parc informatique disponible à partir du CEA/CESTA. La visualisation d'une basse résolution suffit parfois pour obtenir les informations recherchées sur des données, ce qui permet de ne pas transférer toutes les données initiales sur le site d'exploitation. Enfin, étant donné le nombre d'utilisateurs manipulant des données de grandes dimensions, il est nécessaire de leur fournir une solution réalisable sur des machines à capacité graphique standard dont ils disposent dans leur bureau. L'approche multirésolution répond aussi à cette attente.

Les critères topologiques développés au cours de cette thèse ont permis la réalisation d'un prototype de visualisation multirésolution, détaillé au paragraphe 6.6 page 135. Cet outil permet de manipuler, à temps quasi-interactif, des données issues de simulation et composées de plusieurs millions de mailles. La hiérarchisation de ces données est réalisée par les algorithmes de simplification décrits précédemment. La construction des structures de données pour la multirésolution est réalisée par intégration d'une librairie autorisant la manipulation d'un ensemble de résolutions (voir paragraphe 6.6.5 page 138).

Cet outil, basé sur une hiérarchisation des données avant exploitation, implémente la visualisation à résolutions variables en autorisant l'utilisateur à déplacer un volume d'intérêt au sein du modèle. A l'intérieur de ce volume, les données d'origine sont présentées lui permettant d'exploiter pleinement les résultats de la simulation, alors que le reste du modèle est présenté à basse résolution. Le déplacement de ce volume d'intérêt et le changement de résolution sont dynamiques, locaux et progressifs. La manipulation interactive du modèle est préservée grâce au nombre restreint de primitives graphiques présentes dans les basses résolutions autour du volume d'intérêt (voir paragraphe 6.6.10 page 144). Cet outil n'étant qu'un prototype, il permet de valider le choix d'une stratégie par visualisation multirésolution dans un cadre industriel.

7.3 Perspectives

Bien qu'il existe une grande quantité de méthodes dans le domaine de la simplification de maillages, de nombreuses questions sont sans réponses. En effet, il n'existe pas de méthode de simplification indépendante du type géométrique du maillage permettant de préserver la topologie du modèle. Les techniques présentées dans cette thèse utilisent la notion de simplexe. Cette représentation mathématique correspond aux types de mailles les plus utilisés en visualisation (triangles et tétraèdres). Cependant d'autres familles de maillages existent et posent les problèmes suivants.

- Les simulations devenant de plus en plus complexes, nécessitent l'utilisation de maillages hybrides composés de différents types de mailles. Par exemple, des simulations sont effectuées sur un domaine discrétisé par des tétraèdres à l'intérieur du domaine et par des prismes pour les couches limites. Comment ces techniques de simplification avec préservation ou non de la topologie, peuvent être étendues pour traiter ce type mixte de cellules ? De façon similaire, comment définir l'opérateur de simplification sur des maillages hexaédriques largement utilisés dans les simulations thermomécaniques ?

- De façon plus générale, comment représenter une contraction d'arêtes ou un autre opérateur de simplification itérative, dans un complexe qui ne serait pas simplicial ? La théorie des complexes cellulaires a l'air la plus appropriée pour faciliter cette réflexion mais reste encore un problème théorique complexe.

Le prototype de visualisation développé dans le cadre de cette thèse est opérationnel, mais ne constitue pas une solution de visualisation à part entière utilisable par des dizaines d'utilisateurs au CEA/CESTA. De nombreux points restent à être améliorés dans le cadre de l'industrialisation de ce travail de recherche.

- La première contrainte réside dans les temps d'extraction d'une résolution. La librairie utilisée, réalise un important travail mais ne constitue pas une solution à part entière dans un logiciel en production. En effet, lorsque la structure du DAG (voir paragraphe 6.6.2 page 136) codant l'ensemble des hiérarchie devient trop importante, alors les temps d'extraction, même à basse résolution ne sont pas au niveau interactif. D'autres structures de données doivent être implémentées comme par exemple celle proposée dans [ED02].

- Cet outil, composé des modules de simplification, de hiérarchisation et de visualisation a été implémenté de façon autonome. Il peut être intéressant, dans le cadre d'un développement industriel, d'intégrer ce travail de hiérarchisation dans des librairies de visualisation existantes. Notamment, les outils disponibles librement et basés sur VTK constituent une évolution souhaitée.

- Le traitement des données et la visualisation sont réalisés en mémoire principale. Lorsque les maillages issus de simulations deviennent si conséquents que leur représentation simplifiée ne réside plus en mémoire principale, il pourrait être intéressant d'utiliser des techniques en mémoire externe (*out-of-core*).

Pour conclure, il est important de souligner l'importance d'une *visualisation pertinente* quelle que soit la complexité des données. L'objectif de la visualisation scientifique n'est pas de *tout montrer* mais plutôt d'exhiber les caractéristiques fondamentales, parfois indétectables lorsque les données sont affichées dans leur intégralité. Visualiser l'*inattendu* est un challenge de ce domaine.

Quelles que soient les techniques mises en œuvre, l'utilisateur aura toujours besoin d'outils performants et *intelligents* pour l'aider à comprendre et exploiter les données qu'il génère. En effet, les supercalculateurs continuent à fournir une quantité toujours plus grande d'information issue de simulations complexes. De même, les systèmes de visualisation scientifique évoluent rapidement, proposant des solutions hautes performances toujours plus réalistes. La seule chose qui n'évolue pas dans cette chaîne de production et qui pourtant a besoin de faire face à cette quantité croissante d'information, *c'est l'être humain*.

Annexe A

Publications relatives à ces travaux

[VWL+06] F. Vivodtzev, D. Wiley, L. Linsen, J. Jones, N. Amenta, B. Hamann and K.I. Joy. Automatic Feature-based Surface Mapping for Brain Cortices. In R.F Erbacher, J.C Roberts, M.T Groehn, K. Boerner, M.C Hao and P.C Wong editors, *Visualization and Data Analysis 2006*, Bellingham, Washington, 2006. SPIE - The International Society for Optical Engineering. to appear.

[VBL+05] F. Vivodtzev, G.-P. Bonneau and P. Le Texier. Topology Preserving Simplification of 2D Non-Manifold Meshes with Embedded Structures. *The Visual Computer*, 21(8), 2005, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany. Special issue Pacific Graphics 2005.

[VLH+05] F. Vivodtzev, L. Linsen, B. Hamann, K.I. Joy, B. Olshausen. Brain Mapping Using Topology Graphs Obtained by Surface Segmentation. In G.-P. Bonneau and T. Ertl and G. M. Nielson, editors, *Scientific Visualization : The Visual Extraction of Knowledge from Data*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2005. ISBN 3-540-26066-8.

[VLB+03] F. Vivodtzev, L. Linsen, G.-P. Bonneau, B. Hamann, K.I. Joy, B. Olshausen. Hierachical Isosurface Segmentation Based on Discrete Curvature. In G.-P. Bonneau, S. Hahmann, C. D. Hansen, editors, *Proceedings of VisSym '03, Eurographics-IEEE TVCG Symposium on Visualization, 2003*. New York, New York, 2003. Eurographics-IEEE TVCG, IEEE.

Bibliographie

[BEA+99] M. Bern, D. Eppstein, P. K. Agarwal, N. Amenta, P. Chew, T. Dey, D. P. Dobkin, H. Edelsbrunner, C. Grimm, L. J. Guibas, J. Harer, J. Hass, A. Hicks, C. K. Johnson, G. Lerman, D. Letscher, P. Plassmann, E. Sedgwick, J. Snoeyink, J. Weeks, C. Yap, and D. Zorin. Emerging challenges in computational topology. NSF Report, 1999. 60

[BMMKN02] B. Ben-Moshe, J. Mitchell, M. Katz, and Y. Nir. Visibility preserving terrain simplification : an experimental study. In *Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry (SCG-02)*, pages 303–311, New York, June 2002. ACM Press. 28

[CCM+00] P. Cignoni, D. Costanza, C. Montani, C. Rocchini, and R.Scopigno. Simplification of tetrahedral volume with accurate error evaluation. In Ertl et al. [EHV00], pages 85–92. 7, 31

[CCMS97] A. Ciampalini, P. Cignoni, C. Montani, and R. Scopigno. Multiresolution decimation based on global error. *The Visual Computer*, 13(5) :228–246, 1997. 23

[CDM04] B. Cutler, J. Dorsey, and L. McMillan. Simplification and improvement of tetrahedral models for simulation. In *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing (SGP-04)*, pages 93–102, New York, NY, USA, 2004. ACM Press. 34

[CFL+04] P. Cignoni, L. De Floriani, P. Lindstrom, V. Pascucci, J. Rossignac, and C. Silva. Multi-resolution modeling, visualization and streaming of volume meshes. In *Eurographics 2004, Tutorials 2 : Multi-resolution Modeling, Visualization and Streaming of Volume Meshes*. INRIA and the Eurographics Association, September 2004. 20, 28

[CFM+94] P. Cignoni, L. De Floriani, C. Montani, E. Puppo, and R. Scopigno. Multiresoultion modeling and visualization of volume data based on simplicial complexes. In *Proceedings of the ACM 1994 Symposium on Volume Visualization (VVS'94)*, pages 19–26. ACM Press, October 1994. 137

[CFM+00] P. Cignoni, L. De Floriani, P. Magillo, E. Puppo, , and R. Scopigno. Tan2-visualization of large irregular volume datasets. Technical Report DISI-TR-00-07, Department of Computer and Information Science, University of Genova, Italy, 2000. 137

[CFM+04] P. Cignoni, L. De Floriani, P. Magillo, E. Puppo, and R. Scopigno. Selective refinement queries for volume visualization of unstructured tetrahedral meshes.

IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 10(1) :29–45, 2004. 92, 137

[CL03] Y.-J. Chiang and X. Lu. Progressive simplification of tetrahedral meshes preserving all isosurface topologies. *Computer Graphics Forum*, 22(3) :493–504, 2003. 18

[CM02] P. Chopra and J. Meyer. Tetfusion : an algorithm for rapid tetrahedral mesh simplification. In R. Moorhead, M. Gross, and K. I. Joy, editors, *Proceedings of the IEEE Visualization 2002 Conference (VIS-02)*, pages 133–140, Boston, Massachusetts, October 2002. IEEE Computer Society. 25, 33

[CMPS97] P. Cignoni, C. Montani, E. Puppo, and R. Scopigno. Multiresolution representation and visualization of volume data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(4) :352–369, 1997. 31

[CMRS98] P. Cignoni, C. Montani, C. Rocchini, and R. Scopigno. Zeta : a resolution modeling system. *Graph. Models Image Processecing*, 60(5) :305–329, 1998. 28

[CMS98] P. Cignoni, C. Montani, and R. Scopigno. A comparison of mesh simplification algorithms. *Computers and Graphics*, 22(1) :37–54, 1998. 20

[CMSR98] P. Cignoni, C. Montani, R. Scopigno, and C. Rocchini. A general method for preserving attribute values on simplified meshes. In Erbert et al. [EHR98], pages 59–66. 27

[COM98] J. Cohen, M. Olano, and D. Manocha. Appearance-preserving simplification. *Computer Graphics*, 32(Annual Conference Series) :115–122, August 1998. 27

[CPD+96] A. Certain, J. Popovic, T. DeRose, T. Duchamp, D. Salesin, and W. Stuetzle. Interactive multiresolution surface viewing. *Computer Graphics*, 30(Annual Conference Series) :91–98, 1996. 21

[CSM03] D. Cohen-Steiner and J.-M. Morvan. Restricted delaunay triangulations and normal cycle. In *Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry (SCG-03)*, pages 312–321, New York, NY, USA, 2003. ACM Press. 128

[CVM+96] J. Cohen, A. Varshney, D. Manocha, G. Turk, H. Weber, P. Agarwal, F. Brooks, and W. Wright. Simplification envelopes. *Computer Graphics*, 30(Annual Conference Series) :119–128, 1996. 23

[DEG99] T. Dey, H. Edelsbrunner, and S. Guha. Computational topology. In B. Chazelle, J. Goodman, and R. Pollack, editors, *Advances in Discrete and Computational Geometry Computational Topology*, pages 109–143. Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 1999. 60

[DEGN98] T. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha, and D. Nekhayev. Topology preserving edge contraction. Technical Report RGI-Tech-98-018, Raindrop Geomagic Inc., Research Triangle Park, North Carolina, 1998. 31, 32, 33, 34, 37, 70, 77, 78

[DLW93] T. DeRose, M. Lounsbery, and J. Warren. Multiresolution analysis for surface of arbitrary topological type. Report 93-10-05, Department of Computer Science, University of Washington, Seattle, WA, 1993. 21

[DP73] D. H. Douglas and T. K. Peucker. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature. *The Canadian Cartographer*, 10(2) :112–122, December 1973. 28

[ED02] L. De Floriani E. Danovaro. Compact representations for multiresolution tetrahedral meshes. In *Proceedings 1st International Symposium on 3D data Processing Visualization Transmission*, pages 494–499. IEEE Computer Society, 2002. 138, 144, 154

[EDD+95] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Computer Graphics*, 29(Annual Conference Series) :173–182, November 1995. 21

[EHR98] D. Erbert, H. Hagen, and H. Rushmeier, editors. Research Triangle Park, NC, USA, October 1998. ACM Press. 160, 162, 163, 164, 165

[EHV00] T. Ertl, B. Hamann, and A. Varshney, editors. *Proceedings of the IEEE Visualization 2000 Conference (VIS-00)*, Salt Lake City, Utah, USA, October 2000. IEEE Computer Society. 159, 162

[EM99] C. Erikson and D. Manocha. GAPS : general and automatic polygonal simplification. In *Proceedings of the 1999 Symposium on Interactive 3D graphics (SI3D-99)*, pages 79–88, New York, NY, USA, 1999. ACM Press. 27

[ESV99] J. El-Sana and A. Varshney. Generalized view-dependent simplification. *Computer Graphics Forum*, 18(3) :83–94, 1999. 137

[FKE04] L. De Floriani, L. Kobbelt, and E.Puppo. A survey on data structures for level-of-detail models. In : Advances in Multiresolution for Geometric Modelling, Series in Mathematics and Visualization, N.Dodgson, M.Floater, M.Sabin (editors), Springer Verlag, 2004, pp. 49-74, 2004. 136

[FL79] R. Fowler and J. Little. Automatic extraction of irregular network digital terrain models. *Computer Graphics*, 13(2) :199–207, August 1979. 28

[FM02] L. De Floriani and P. Magillo. Multiresolution mesh representation : Models and data structures. In Multiresolution in Geometric Modeling, M.Floater and A.Iske and E.Quak (Editors), Springer-Verlag, 2002, pp. 363-418, 2002. 136

[FMP96] L. De Floriani, P. Marzano, and E. Puppo. Multiresolution models for topographic surface description. *The Visual Computer*, 12(7) :317–345, 1996. ISSN 0178-2789. 28

[FMP00] L. De Floriani, P. Magillo, and E. Puppo. *The MT (Multi-Tesselation) package*. DISI, University of Genova, Italy, http ://www.disi.unige.it/person/MagilloP/MT, January 2000. 5, 136, 137, 138

[FPM97] L. De Floriani, E. Puppo, and P. Magillo. A formal approach to multiresolution modeling. In W. Straßer, R. Klein, and R. Rau, editors, Theory and Practice of Geometric Modeling. SpringerVerlag, 1997., 1997. 136, 137

[Gar99] M. Garland. Multiresolution modeling : Survey and future opportunities, 1999. In Eurographics '99 – State of the Art Report (STAR). Eurographics Association, Aire-la-ville, Suisse, pages 111–131. 20

[GH97] M. Garland and P. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. *Computer Graphics*, 31(Annual Conference Series) :209–216, August 1997. 23, 27, 28, 33, 34

[GH98] M. Garland and P. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. In Erbert et al. [EHR98], pages 263–270. 27

[GP00] T. Gerstner and R. Pajarola. Topology preserving and controlled topology simplifying multiresolution isosurface extraction. In Ertl et al. [EHV00], pages 259–266. 18

[GTLH98] A. Gueziec, G. Taubin, F. Lazarus, and W. Horn. Simplicial maps for progressive transmission of polygonal surfaces. In *Proceedings of the 1998 symposium on Virtual reality modeling language (VRML'98)*, pages 25–31, New York, NY, USA, 1998. ACM Press. 136

[Gué96] A. Guéziec. Surface simplification inside a tolerance volume. Technical Report RC 20440, IBM Research, 1996. 26

[GVW99] A. Van Gelder, V. Verma, and J. Wilhelms. Volume decimation of irregular tetrahedral grids. In *Proceedings of the International Conference on Computer Graphics (CGI-99)*, page 222, Washington, DC, USA, 1999. IEEE Computer Society. 32

[GWH01] M. Garland, A. Willmott, and P. Heckbert. Hierarchical face clustering on polygonal surfaces. In Hughes and Sequin [HS01], pages 49–58. 21

[GZ05] M. Garland and Y. Zhou. Quadric-based simplification in any dimension. *ACM Transactions on Graphics*, 24(2) :to appear, 2005. 34

[Ham94] B. Hamann. A data reduction scheme for triangulated surfaces. *Computer-Aided Geometric Design*, 11 :197–214, 1994. 24

[HDD+93a] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Mesh optimization. *Computer Graphics*, 27(Annual Conference Series) :19–26, 1993. 24, 26, 34, 35

[HDD+93b] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Mesh optimization. Technical Report TR 93-01-01, Dept. of Computer Science and Engineering, University of Washington, January 1993. 35

[HG97] P. Heckbert and M. Garland. Survey of polygonal surface simplification algorithms. Technical report, Carnegie Mellon University, 1997. 20

[HG01] A. Hubeli and M. Gross. Multiresolution feature extraction for unstructured meshes. In T. Ertl, K. Joy, and A. Varshney, editors, *Proceedings of the IEEE Visualization 2001 Conference (VIS-01)*, pages 287–294, San Diego, CA, USA, October 2001. IEEE Computer Society. 28

[HH93] P. Hinker and C. Hansen. Geometric optimization. In G. Nielson and D. Bergeron, editors, *Proceedings of the IEEE Visualization 1993 Conference (VIS-93)*, pages 189–195, San Jose, CA, October 1993. IEEE Computer Society Press. 21

[HHVW96] T. He, L. Hong, A. Varshney, and S. Wang. Controlled topology simplification. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2(2) :171–184, June 1996. 22

[Hop96] H. Hoppe. Progressive meshes. *Computer Graphics*, 30(Annual Conference Series) :99–108, 1996. 7, 26, 29, 34, 35, 36, 90

[Hop97] H. Hoppe. View-dependent refinement of progressive meshes. *Computer Graphics*, 31(Annual Conference Series) :189–198, 1997. 137

[Hop98] H. Hoppe. Efficient implementation of progressive meshes. *Computers and Graphics*, 22(1) :27–36, 1998. 27

[HS01] J. Hughes and C. Sequin, editors. *Proceedings of the 2001 Symposium on Interactive 3D graphics (SI3D-01)*, New York, NY, USA, 2001. ACM Press. 162, 163

[KE00] M. Kraus and T. Ertl. Simplification of nonconvex tetrahedral meshes, 2000. 32, 34, 36

[KG98] R. Klein and S. Gumhold. Data compression of multiresolution surfaces. In D. Bartz, editor, *Visualization in Scientific Computing '98*, pages 13–24. Eurographics, Springer, April 1998. 136, 138

[KG03] Y. Kho and M. Garland. User-guided simplification. In *Proceedings of the 2003 Symposium on Interactive 3D graphics (SI3D-03)*, pages 123–126. ACM Press, 2003. 28

[KT96] A. Kalvin and R. Taylor. Superfaces : Poligonal mesh simplification with bounded error. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 16(3) :64–77, 1996. 21

[LC87] W. Lorensen and H. Cline. Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. In *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH-87)*, pages 163–169, New York, NY, USA, 1987. ACM Press. 22, 124

[LDW97] M. Lounsbery, T. DeRose, and J. Warren. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. *ACM Transactions on Graphics*, 16(1) :34–73, 1997. 21

[LE97] D. Luebke and C. Erikson. View-dependent simplification of arbitrary polygonal environments. In *Proceedings of the 24th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH-97)*, pages 199–208, New York, NY, USA, 1997. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. 137

[Lin00] P. Lindstrom. Out-of-core simplification of large polygonal models. In *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques (SIGGRAPH-00)*, pages 259–262, New York, NY, USA, 2000. ACM Press. 89, 90

[LT98] P. Lindstrom and G. Turk. Fast and memory efficient polygonal simplification. In Erbert et al. [EHR98], pages 279–286. 27, 90

[Lue01] David P. Luebke. A developer's survey of polygonal simplification algorithms. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 21(3) :24–35, /2001. 20

[LW01] G. Li and B. Watson. Semiautomatic simplification. In Hughes and Sequin [HS01], pages 43–48. 28

[LWC+02] D. Luebke, B. Watson, J. Cohen, M. Reddy, and A. Varshney. *Level of Detail for 3D Graphics*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2002. 20, 28, 90

[Mag99] P. Magillo. *Spatial Operations on Multiresolution Cell Complexes*. PhD thesis, Dipartimento di Informatica e Scienze dell'Informazione, University of Genova, Italy, 1999. 28, 136

[Mal89] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7) :674–693, July 1989. 20, 21

[MKT88] A. Witkin M. Kass and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision.*, 1(4) :321–331, 1988. 28

[MMC99] D. McKeown, J. McMahill, and D. Caldwell. The use of spatial context awareness in feature simplification. GeoComputation, CD-ROM (ISBN 0-9533477-1-0),Greenwich, UK, July 1999. 28

[MMS97] A. Maheshwari, P. Morin, and J. Sack. Progressive tins : algorithms and applications. In *Proceedings of the 5th ACM international workshop on Advances in geographic information systems (GIS-97)*, pages 24–29, New York, NY, USA, 1997. ACM Press. 137

[NE04] V. Natarajan and H. Edelsbrunner. Simplification of three-dimensional density maps. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10(5) :587–597, 2004. 33, 34, 37

[NT03] F. Nooruddin and G. Turk. Simplification and repair of polygonal models using volumetric techniques. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 9(2) :191–205, April 2003. 22

[PCS98] C. Rocchini P. Cignoni and R. Scopigno. Metro : measuring error on simplified surfaces. *Computer Graphics Forum*, 17(2) :167–174, June 1998. Available at http ://vcg.sf.net. 134

[PH97] J. Popovic and H. Hoppe. Progressive simplicial complexes. *Computer Graphics*, 31(Annual Conference Series) :217–224, 1997. 29, 34, 137

[PT04] N. Platis and T. Theoharis. Simplification of vector fields over tetrahedral meshes. In *Computer Graphics International (CGI-04)*, pages 174–181, Crete, Greece, June 2004. IEEE Computer Society. 34

[RB92] J. Rossignac and P. Borrel. Multi-resolution 3d approximation for rendering complex scenes. Technical Report RC 17697 (77951), IBM Research Report, Yorktown Heights, NY 10598, 1992. Also appeared in Geometric Modeling in Computer Graphics, edited by B. Falcidieno and T. L. Kunii, Springer-Verlag, 1993, pp. 455-465. 22

[RO96] K. Renze and J. Oliver. Generalized unstructured decimation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 16(6) :24–32, 1996. 28

[RR96] R. Ronfard and J. Rossignac. Full-range approximation of triangulated polyhedra. *Computer Graphics Forum*, 15(3) :67–76, August 1996. 26, 27, 29

[SG98] O. Staadt and M. Gross. Progressive tetrahedralizations. In Erbert et al. [EHR98], pages 397–402. 7, 29, 30, 32, 34, 35, 137

[SL96] M. Soucy and D. Laurendeau. Multiresolution surface modeling based on hierarchical triangulation. *Computer Vision and Image Understanding*, 63(1) :1–14, 1996. 23

[SS95] P. Schröder and W. Sweldens. Spherical wavelets : efficiently representing functions on the sphere. *Computer Graphics*, 29(Annual Conference Series) :161–172, November 1995. 21

[Sta01] O. Staadt. *Multiresolution Representation and Compression of Surfaces and Volumes*. PhD thesis, Department of Computer Science, ETH Zürich, 2001. 68

[SZL92] W. Schroeder, J. Zarge, and W. Lorensen. Decimation of triangle meshes. *Computer Graphics*, 26(2) :65–70, 1992. 7, 22, 34, 35, 89

[THJ99] I. Trotts, B. Hamann, and K. Joy. Simplification of tetrahedral meshes with error bounds. In *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, volume 5, pages 224–237, july-september 1999. 30

[THW98] I. Trotts, B. Hamann, and D. Wiley. Simplification of tetrahedral meshes. In Erbert et al. [EHR98], pages 287–296. 7, 25, 30, 31

[Tur92] G. Turk. Re-tiling polygonal surfaces. *Computer Graphics*, 26(2) :55–64, 1992. 21

[UBF+05] D. Uesu, L. Bavoil, S. Fleishman, J. Shepherd, and C. Silva. Simplication of unstructured tetrahedral meshes by point sampling. In *Proceedings of the 2005 International Workshop on Volume Graphics (VG-05)*, pages 157–165, 2005. 34, 90

[VCL+05] H. Vo, S. Callahan, P. Lindstrom, V. Pascucci, and C. Silva. Streaming simplification of tetrahedral meshes. Technical Report UCRL-CONF-208710, LLNL, April 2005. 34

[VLB+03] F. Vivodtzev, L. Linsen, G.-P. Bonneau, B. Hamann, K.I. Joy, and B. Olshausen. Hierachical isosurface segmentation based on discrete curvature. In Georges-Pierre Bonneau, Stefanie Hahmann, and Charles D. Hansen, editors, *Proceedings of VisSym '03, Eurographics-IEEE TVCG Symposium on Visualization, 2003*, New York, New York, 2003. Eurographics-IEEE TVCG, IEEE. 124

[VLBHO05] F. Vivodtzev, L. Linsen, K.I. Joy. B. Hamann, and B. Olshausen. Brain mapping using topology graphs obtained by surface segmentation. In G.-P. Bonneau, T. Ertl, and G. M. Nielson, editors, *Scientific Visualization : The Visual Extraction of Knowledge from Data*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2005. ISBN 3-540-26066-8. 126

[VWL+06] F. Vivodtzev, D. Wiley, L. Linsen, J. Jones, N. Amenta, B. Hamann, and K.I. Joy. Automatic feature-based surface mapping for brain cortices. In R.F Erbacher, J.C Roberts, M.T Groehn, K. Boerner, M.C Hao, and P.C Wong, editors, *Visualization and Data Analysis 2006,*, Bellingham, Washington, 2006. SPIE - The International Society for Optical Engineering. to appear. 128, 129

[VY90] G. Vegter and C. K. Yap. Computational complexity of combinatorial surfaces. In *Proceedings of the ACM Symposium on Computational Geometry (SoCG-90)*, pages 102–111, 1990. 60

[WHC04] Y. Wu, Y. He, and H. Cai. Qem-based mesh simplification with global geometry features preserved. In *Proceedings of the international conference on Computer graphics and interactive techniques in Australasia and Southe East Asia (GRAPHITE-04)*, pages 50–57, New York, NY, USA, 2004. ACM Press. 28

Hiérarchisation et visualisation multirésolution de résultats issus de codes de simulation

Mots clés : Visualisation, informatique graphique, multirésolution, simplification volumique, critères topologiques, couplage simulation-visualisation

Résumé : Les simulations numériques génèrent une quantité de résultats disproportionnée par rapport aux moyens d'exploitation, sans espoir d'atténuation à terme. Les maillages supportant ces simulations, sont composés de plusieurs dizaines de millions de cellules volumiques avec, plus spécifiquement, des sous-structures imbriquées de différentes dimensions (surfaciques et linéiques) et des couches minces de matériaux. En phase de post-traitement, un utilisateur devrait être capable de visualiser et de manipuler ces données, à temps interactif, sur sa propre machine d'exploitation. Cependant, les outils existants en visualisation scientifique ne permettent pas ou que partiellement d'atteindre les objectifs souhaités avec ce type de données (grand nombre de mailles, sous-structures, couches minces, ...).

Dans cette thèse, une approche par hiérarchisation des données est proposée afin de construire une représentation multirésolution autorisant la visualisation interactive d'une grande quantité d'information. L'étape de hiérarchisation est basée sur un algorithme de simplification de maillages, par contractions itératives d'arêtes, préservant à la fois la topologie du maillage et celle de toutes les sous-structures imbriquées. Les critères topologiques robustes introduits dans ces travaux, s'appuient sur des notions théoriques en topologie algébrique. L'étape de visualisation utilise la représentation multirésolution pour accélérer l'affichage des résultats. De façon progressive, inversible et locale, l'utilisateur modifie dynamiquement la résolution selon ses besoins et les ressources matérielles dont il dispose.

Cette thèse illustre la mise en œuvre de ces techniques de hiérarchisation et de visualisation dans de nombreux domaines d'applications notamment dans le cadre d'exploitation de résultats issus de simulations en électromagnétisme du CEA/CESTA.

Hierarchical organization and multiresolution visualization of data achieved from simulation codes

Keywords : Visualization, computer graphics, multiresolution, volumetric simplification, topological criteria, simulation-visualization coupling

Summary : Numerical simulations generate large amounts of data that is far greater than the available resources on a workstation and it is unlikely that future developments of resource technology will be able to keep up with the growing demand. The finite element meshes supporting these simulations are normally composed of several millions of volumetric cells having embedded sub-structures of varying dimensions (surfaces and linear features) such as thin material-boundary layers. Postprocessing this large data in order to reduce the required amount of data needed to represent it allows a user to visualize and manipulate the data interactively on a single workstation. However, existing tools in scientific visualization do not allow or only partially reach the interactive exploration goals for this type of data (i.e., large number of cells, sub-structures, thin layers ...).

The dissertation presents two main steps for interactively rendering large data ; a postprocessing and visualization step. The postprocessing step uses an approach having hierarchical organization of data in order to construct a multiresolution representation allowing subsequent interactive visualization. This step is based on a mesh simplification algorithm that uses iterative edge collapses while preserving both mesh topology and the topology of all embedded sub-structures. The robust topological criteria introduced in this work are derived from theoretical notions in algebraic topology. The visualization step uses the multiresolution representation produced in the first step to speed up rendering time of the data. In a progressive, invertible and local way, the method adapts dynamically to the required resolution, specified by the user, and the hardware resources available.

This dissertation illustrates the application of these techniques of hierarchical organization and visualization on data from various fields, particularly on data obtained from electromagnetic simulations by the CEA/CESTA.