HAL
open science

De l'hyperbolique au globalement hyperbolique

Thierry Barbot

To cite this version:

Thierry Barbot. De l'hyperbolique au globalement hyperbolique. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2005. tel-00011278

HAL Id: tel-00011278

https://theses.hal.science/tel-00011278

Submitted on 2 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Unviversité Claude Bernard (Lyon I)

Habilitation à diriger des recherches

De l'hyperbolique au globalement hyperbolique

Thierry BARBOT

Je tiens à remercier Yves Benoist, François Labourie et Shigenori Matsumoto d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce long mémoire. Je l'apprécie d'autant plus que la lecture de leurs propres travaux a toujours été pour moi des plus bénéfique, a profondément modelé ma vision mathématique, et été source de véritable plaisir mathématique.

Je remercie aussi vivement et chaleureusement Etienne Ghys, qui m'a tant apporté par ses qualités autant humaines que scientifiques. Il a veillé à l'éclosion de ma vie mathématique, et j'ai toujours bénéficié depuis de longues années de ses précieux conseils. Quelques mots ne suffisent pas à exprimer la profondeur de ma gratitude.

Voilà aussi plusieurs années que je collabore avec Abdelghani Zeghib, complicité partagée avec François Béguin. Ghani est plus qu'un partenaire, et c'est une chance d'entretenir cette collaboration avec un des meilleurs experts internationaux de la géométrie Lorentzienne. C'est aussi une chance inestimable de bénéficier de la compétence, sagacité et efficacité de François. J'apprécie ce riche et stimulant partenariat avec bonheur, que j'espère n'être qu'à ses débuts.

C'est aussi un honneur et un plaisir de compter dans mon Jury la présence de Jean-Marc Schlenker. Son expertise et compétence sont des plus estimables, et je suis heureux de voir nos domaines d'intérêts devenir aussi proches.

Je me réjouis aussi de la présence de Claude Roger dans ce Jury et l'en remercie.

Voilà de longues années que je vis et travaille au sein de l'UMPA de l'École Normale Supérieure de Lyon, entrecoupées de quelques intermèdes à l'étranger. C'est une chance inestimable de bénéficier d'un tel entourage, alliant compétence et qualité des rapports humains. Un grand merci à Damien Gaboriau, Bruno Sevennec, Jean-Claude Sikorav, Emmanuel Giroux, Denis Serre, Albert Fathi, ainsi qu'aux "nouveaux" venus Nalini Anantharamam, Cédric Villani, Alice Guionnet, Yann Ollivier, Vincent Beffara, Jean-Yves Welschinger. Tous contribuent à faire du laboratoire un lieu vivant, convivial et stimulant.

D'autres nous sont parti, ne restant au laboratoire que le temps d'une thèse, mais je garde les meilleurs souvenirs de beaucoup d'entre eux : notamment Sorin Dumitrescu, Bertrand Deroin, Andres Navas, Viktor Kleptsyn, qui m'ont impressioné autant par leur qualité scientifique qu'humaine. Je pense aussi à Charles Frances, autre précieux acolyte qui partage avec François, Ghani et moi les joies de l'Univers d'Einstein et de ses arcanes.

Commençons par une définition :

Un cryptarithme est un petit casse-tête arithmétique. Dans une opération, les chiffres ont été remplacés par des lettres (le plus souvent, de sorte que cela forme un mot qui ait un sens). Le but du cryptarithme est de retrouver la transformation. Les règles suivantes sont en général respectées :

– un chiffre donné est toujours remplacé par la même lettre.

– une lettre donnée représentera toujours le même chiffre.

– un nombre ne commencera jamais par 0.

Un cryptarithme est parfait s'il n'admet qu'une seule solution. Ce n'est malheureusement pas le cas pour le suivant qui admet autant de solutions que ce mémoire admet de parties...

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{T} & \mathbf{H} & \mathbf{E} & \mathbf{S} & \mathbf{E} & \mathbf{S} \\ + & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{T} & \mathbf{H} & \mathbf{S} \\ \mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} \\ \mathbf{B} & \mathbf{E} & \mathbf{A} & \mathbf{U} & \mathbf{T} & \mathbf{E} \end{array}$$

Table des matières

3

5

Introduction 9
Description du contenu du mémoire 11
Ce que ce texte ne contient pas 12
Liste des publications personnelles 13

partie 1. Flots d'Anosov 15

Chapitre 1. Une première prise de contact 17
1.1. Définitions 18
1.2. Propriétés fondamentales 19
1.3. Feuilletages de codimension 1 et 1-variétés non-Hausdorff 25

Chapitre 2. Exemples 39
2.1. Suspensions 39
2.2. Flot géodésique 45
2.3. Chirurgies 51
2.4. Chirurgie de Goodman le long d'un anneau 57
2.5. Exemple de Bonatti-Langevin 61

Chapitre 3. Flots sur les variétés fibrées 63
3.1. Flots d'Anosov transversalements lorentziens 63
3.2. Le flot est alignable 64
3.3. Fibrés en tores 66
3.4. Fibrés en cercles 67

Chapitre 4. Flots sur les variétés graphées, et morceaux fibrés 71
4.1. Tores en position optimale 71
4.2. Plongements de fibrés en cercles 73
4.3. Flots d'Anosov alignables sur les variétés graphées 75
4.4. Flots d'Anosov non-alignables sur les variétés graphées 76

Chapitre 5. Une véritable prise de contact 79
5.1. Chirurgie de Foulon 79
5.2. Flots d'Anosov TCP et plans affines topologiques 80

Chapitre 6. Compléments, questions ouvertes 85
6.1. Régularité des feuilletages 85
6.2. Sections de Birkhoff 88

6.3. Flots d'Anosov PL 89
6.4. Découpage de flots d'Anosov 90

partie 2. (G, X)-Structures 93

Chapitre 7. Préambule 95
7.1. Définitions 95
7.2. Déformations de (G, X)-structures 97
7.3. Représentations Anosov 98
7.4. Exemples 100
7.5. Deux lemmes utiles 109

Chapitre 8. Variétés affines radiales 111
8.1. Premières remarques 111
8.2. Une disgression : le cas des variétés de Seifert affines 113
8.3. Orbites périodiques du flot radial 114
8.4. Surfaces plongées géodésiques 116
8.5. Variétés affines radiales convexes 116
8.6. La classification des 3-variétés affines radiales 117

Chapitre 9. Variétés drapeaux 119
9.1. Définitions, notations 119
9.2. Une nouvelle représentation (G, Y)-Anosov 120
9.3. Variétés drapeaux Anosov 123

Chapitre 10. Flots transversalement projectifs sur les fibrés de Seifert 135
10.1. "Introduction" 135
10.2. Commentaires 138

partie 3. Géométrie Lorentzienne en courbure constante 141

Chapitre 11. Généralités 143
11.1. Variétés lorentziennes 143
11.2. Notions de causalité 145
11.3. Variétés lorentziennes globalement hyperboliques 151
11.4. Variétés lorentziennes à courbure constante 154
11.5. Variétés lorentziennes conformément plates 160

Chapitre 12. Variété globalement hyperbolique à courbure constante 165
12.1. "Introduction" 165
12.2. Commentaires 168

Chapitre 13. Feuilletages et temps CMC 171
13.1. Note 171
13.2. Présentation de la preuve du théorème en courbure négative 173
13.3. Courbure constante nulle, dimensions supérieures. 175
13.4. Précisions 176

Bibliographie 177

Introduction

Ce long mémoire est constitué de trois parties. Il serait malencontreux de penser ces parties indépendantes les unes des autres. Il s'agit plutôt des points de fixations entre lesquels le sujet véritable est étiré, mon ambition première étant de mettre en évidence les veines jugulaires qui irriguent le tissu commun.

La première partie traite des flots d'Anosov, essentiellement en dimension 3. Leurs propriétés ergodiques, bien que riches et intéressantes, et qui, selon toute vraisemblance, constituaient le premier centre d'intérêt de V.V. Anosov ([**6**]), n'y sont pas discutées. Comme il est un peu plus développé dans l'introduction de cette première partie, le sujet d'étude ici est avant tout l'aspect topologique, reliant la dynamique du flot avec la topologie ambiante. Ceci s'insère dans une tradition qu'on peut remonter jusqu'à M. Morse, J. Hadamard et H. Poincaré. Comme auteurs ayant travaillé sur ce genre de questions, sous l'impulsion de S. Smale ([**179**]), citons en premier lieu J. Franks ([**87**]), A. Verjovsky ([**189**]), J.F. Plante, suivis des travaux de J. Christy, D. Fried, ainsi que ceux de E. Ghys, poursuivis par les miens, en parallèle avec ceux de M. Brunella, S. Fenley et V.V. Solodov. Signalons aussi des contributions ponctuelles importantes par W. Thurston, S. Goodman, M. Handel. Cette problématique est cousine de celle apparaissant dans les travaux de L. Mosher, D. Gabai, prolongée récemment dans le contexte plus large des feuilletages de codimension 1 par D. Calegari, M. Brittenham, S. Fenley, R. Roberts.

La deuxième partie traite des (G, X)-structures. Un groupe G étant fixé, agissant de manière analytique sur un espace géométrique modèle X, quelles sont les variétés admettant un atlas dont les cartes prennent leurs valeurs dans X, les changements de cartes s'exprimant par restriction à des ouverts de X d'éléments de G ? Et, sur une variété donnée, comment peut-on cataloguer tous les atlas de ce type ? Il s'agit-là d'un thème riche, qui a droit de cité dans tous les registres de la géométrie ; de manière plus appropriée, disons que le langage des (G, X)-structures est utile pour exprimer - et résoudre - certains types de question liant géométrie et topologie. Dans la § 7.4, je passe en revue certains de ces domaines, et en dresse un historique sommaire : géométrie riemannienne en courbure constante, géométrie affine plate, géométrie projective réelle et complexe, et d'autres. En sus de C. Ehresmann, fondateur de la notion, je ne citerai ici comme auteurs principaux auxquels se référer que Y. Carrière, D. Fried, W. Goldman, S. Matsumoto. C'est la lecture de leurs travaux qui auront au premier chef nourri ma propre contribution ; mais je ne saurai bien sûr omettre de citer ceux de W. Thurston, qui aura joué un rôle éminent dans la diffusion de cette notion, en lui accordant un rôle de premier plan dans le domaine de la topologie de dimension 3.

Le troisième et dernier pilier de ce mémoire s'érige dans le domaine de la géométrie lorentzienne. Il trouve d'une part ses fondations dans les nombreux travaux sur les variétés lorentziennes compactes à courbure constante : citons, sans

prétendre à l'exhaustivité, Y. Carrière, D. Fried, W. Goldman, M. Hirsch, B. Klingler, R. Kulkarni, etc... Relevons aussi les travaux autour des *espaces de Margulis* issues d'une question de J. Milnor, et auxquels ont contribué, outre G. Margulis, V. Charrette, T. Drumm, W. Goldman, et F. Labourie.

Mais cette troisième partie trouve aussi ses bases dans les multiples travaux effectués sous le patronnage de la Relativité Générale, qui, dans leurs expressions les plus mathématiques, se rattachent le plus souvent à la théorie des équations aux dérivées partielles, ainsi qu'à la géométrie différentielles *à la Cartan.* Citons, parmi bien d'autres, Y. Choquet-Bruhat, R. Geroch, S. Hawking, R. Penrose. Cette approche a aussi donné lieu au développement dans le contexte lorentzien de méthodes classiques en géométrie lorentzienne, comme par exemple l'étude de l'équation de Jacobi, étude des points conjugués, analogue des théorèmes de comparaison de Topogonov, où apparaissent des subtilités propres ła géométrie lorentzienne (nous conseillons sur ces aspects le livre de Beem - Ehrlich [**33**]).

De ce terreau fertile a émergée en particulier la notion d'hyperbolicité globale, liée au concept de causalité das un espace-temps.

Dans la communauté mathématique, le premier à véritablement concilier ces deux traditions est G. Mess, dans le remarquable preprint [**148**] - du reste, largement diffusé au sein de la communauté physique (voir par exemple [**53**]), ainsi que son étudiant K. Scannell ([**173**]). Cette approche connait actuellement un développement, au sein duquel j'ai le sentiment de jouer un certain rôle, à coté d'acteurs tels L. Andersson, R. Benedetti, F. Bonsante, G. Galloway, M. Guediri, A. Zeghib.

Dans cette description succinte des diverses parties de ce mémoire, j'ai malicieusement pris soin de ne pas laisser paraître de manière trop évidente leurs éléments communs. Ceux-ci existent pourtant bel et bien. Ainsi, au centre des méthodes et idées développées dans mes travaux transparait la nature transversalement lorentzienne des flots d'Anosov en dimension 3 : de manière générale, en cette dimension, un flot est tangent à deux feuilletages de codimension 1 transverses l'un à l'autre si et seulement si il est transversalement lorentzien conforme, et il est transversalement lorentzien si et seulement si il préserve une forme volume. Cette optique apparait chez A. Avez ([**11**]), E. Ghys ([**104**]). Elle n'est pas seulement anecdotique : elle apparait clairement dans les preuves classiques de certaines propriétés fondamentales des flots d'Anosov (voir remarques 2.12, 2.18), ainsi que dans les définitions de flots d'Anosov Désarguiens (§ 2.2.4, théorème 3.2) et quasi-fuchsiens (remarque 2.22). Voir aussi le commentaire sur la preuve du Théorème de Ghys 6.3. Dans ce registre d'idées, mettons en avant la caractérisation lorentzienne de la propriété Anosov (lemme 1.4).

L'interface entre systèmes d'Anosov et (G, X)-structures se manifeste à travers la notion de *représentations* (G, Y)*-Anosov* mise en forme récemment par F. Labourie (voir § 7.3) : cette notion illustre parfaitement comment la stabilité structurelle des systèmes Anosov peut se transférer dans le contexte géométrique, permettant de garder trace après déformations de certains objets de nature dynamique utiles pour recomposer la géométrie déformée. J'ai donc mis en vedette cette approche dans ce mémoire : dans le cadre des structures projectives complexes (§ 7.4.3, l'approche classique par D. Sullivan ([**183**]) est du reste de même nature et provient elle aussi de la stabilité structurelle), des structures projectives réelles (remarque 7.16), et,

surtout, celui des variétés drapeaux (chapitre 9), contexte dans lequel je peux revendiquer un apport personnel. Les liens entre les deux premières parties se révèlent également dans la liste des flots transversalement projectifs sur les fibrés de Seifert, où les flots d'Anosov Désarguiens et leurs flots horocycliques associés accaparent les premiers rôles (chapitre 10).

Quant aux liens entre les deux dernières parties, ils consistent tout simplement dans le fait que mes contributions en géométries lorentziennes interviennent dans le contexte où la courbure ambiante est constante, ce qui signifie immédiatement que les variétés lorentziennes sont des (G, X)-variétés où X est l'espace de Mikowski, l'espace de Sitter ou l'espace anti-de Sitter, et G le groupe d'isométrie correspondant.

Description du contenu du mémoire

J'ai accordé un soin particulier aux définitions et notions élémentaires. D'une part, même si elles disposent d'une diffusion assez large, il est plus rare de les voir réunies dans un même texte, et il m'a semblé préférable de ne pas préjuger que le lecteur soit déjà familier avec chacune d'entre elles. D'autres part, celà m'a permis de développer ce faisant quelques commentaires personnels.

La première partie traite des flots d'Anosov, essentiellement en dimension 3. Dans le premier chapitre, j'en donne la définition, et met en place les éléments essentiels de mon étude : les divers espaces d'orbites, ainsi que le contenu de mon article [**19**], où sont décrits les dynamiques d'homéomorphismes de 1-variétés non-séparées.

Au second chapitre, je passe en revue tous les procédés connus pour construire des exemples de flots d'Anosov de dimension 3, notamment les procédés chirurgicaux. J'en ai profité pour inclure la rédaction pointilleuse et exigeante de la preuve d'un Théorème de chirurgie de S. Goodman (proposition 2.30).

Au troisième chapitre, je présente et démontre un Théorème de J. Plante, caractérisant les suspensions comme étant, à équivalence topologique près, les seuls flots d'Anosov supportés par un fibré sur le cercle. J'y aborde aussi un Théorème de Ghys, qui stipule que tout flot d'Anosov sur un fibré en cercles est, à revêtements finis et équivalence topologique près, un flot géodésique. J'en décris une preuve alternative, extraite de mon article [**18**].

Le chapitre suivant est consacré à mes travaux sur les flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen. Il débute d'abord par un compte-rendu de mon article [**17**], qui permet, sous certaines conditions, de mettre en bonne position par rapport à un flot d'Anosov donné les tores incompressibles apparaissant dans la décomposition de Jaco-Shalen de la variété ambiante. Je décris ensuite le contenu de [**18**], dont le Théorème principal s'énonce de la manière suivante : *Tout flot d'Anosov sur une variété graphée principale qui n'admet pas d'orbite périodique librement homotope aux fibres régulières d'un morceau fibré est topologiquement équivalent à un exemple de Handel-Thurston généralisé.* J'y signale aussi un Théorème inédit (Théorème 4.14) - certes, sans véritablement de preuve rédigée, mais qui m'a semblé utile d'inclure sous la forme, disons, de conjecture. Je termine cette section par un aperçu sur mon article [**20**], et les questions non-résolues ayant trait aux flots d'Anosov sur les variétés graphées.

Au chapitre 5 je considère les flots d'Anosov préservant une forme de contact. J'y actualise surtout le contenu de mon article [**23**], qui généralise cette notion de

flots d'Anosov-contact, établit un lien distrayant entre ces flots et les plans affines axiomatiques, et surtout montre que ces flots sont *alignables* (corollaire 5.15).

Au chapitre 6 j'essaie de dresser un panorama de l'état actuel, à mon sens, du problème de la classification des flots d'Anosov en dimension 3. S'y trouve aussi une proposition inédite (proposition 6.6) qui me semble trouver sa place naturelle dans le cadre de ce mémoire.

La deuxième partie, dédiée aux (G, X)-structures, commence avec le chapitre 7. Y sont mis en place les définitions, avec une insistance particulière sur la notion de représentations (G, Y)-Anosov. Dans un long paragraphe "exemples", je recense quelques résultats en géométrie affine ou projective, complexe ou réelle, qui ont nourri mes propres contributions.

Au chapitre 8 je décris mes travaux sur les variétés affines radiales fermées de dimension 3 ([**22, 21**]), qui en se complétant avec ceux de S. Choi, et en collaboration avec ce dernier (quoi qu'en retiennent les AMS review) ont mené à la classification complète de ces variétés affines ([**68**]).

Le contenu du chapitre 9 est pour l'essentiel inédit, et devrait être dans un proche avenir l'objet d'une publication. Il généralise le contenu de mon article [**24**] à la lumière de la notion de représentation (G, Y)-Anosov. Je remercie ici F. Labourie qui m'a fait prendre conscience de la pertinence de cette notion dans ce contexte des variétés drapeaux.

Au chapitre 10, j'expose le contenu de [**25**], essentiellement en en reproduisant et commentant l'introduction. Il s'agit de la classification des flots transversalement projectifs réels sur les variétés de Seifert qui satisfont la "propriété de relèvement des chemins", dans l'esprit des travaux antérieurs de S. Matsumoto ([**146**]).

Le chapitre 11 initie la partie "lorentzienne" de ce mémoire. Je m'y applique à introduire les définitions et tous le corpus d'idées liées à la notion de causalité, visant à motiver le concept d'hyperbolicité globale. On peut rattacher en partie ce chapitre avec mon article de survey [**28**] avec A. Zeghib.

Au chapitre 12 je présente la "classification" des variétés lorentziennes plates Cauchy-compactes (c'est-à-dire, globalement hyperbolique et admettant une surface de Cauchy compacte) effectuées dans [**26**]. Je la termine en commentant ce qui est su et ce qui est ignoré à propos des problèmes analogues en courbure contante non nulle.

Au dernier chapitre je reproduis une version remaniée de mon article commun avec F. Béguin et A. Zeghib ([**27, 29**]), où nous établissons l'existence sur toute variété à courbure constante négative et Cauchy-compacte d'une fonction temps, dont les fibres sont des surfaces à courbure *moyenne* constante.

Ce que ce texte ne contient pas

Quand j'ai initié la rédaction de ce mémoire, j'avais en tête l'idée d'inclure d'autres sujets, notamment la description des "Trous Noirs BTZ" (selon les initiales des auteurs, [**12, 13**]). En m'initiant à la géométrie de ces variétés localement anti-de Sitter, L. Freidel m'a permis de remodeler profondément mes centres d'intérêt et d'inspiration. Je souhaitais également présenter le *flot de Moncrieff,* flot hamiltonien (non-autonome) sur le fibré cotangent de l'espace de Teichmüller, dont l'espace des orbites est en correspondance bi-univoque avec celui des variétés lorentziennes Cauchy-compactes à courbure constante prescrite, parfaite illustration

de la communion entre systèmes dynamiques, géométrie lorentzienne et structures géométriques.

Mais la longueur déjà respectable de ce mémoire, et les limites temporelles, m'ont dissuadé d'entreprendre d'aborder ces aspects, bien qu'ils eussent illustré l'objet actuel de mon travail.

Liste des publications personnelles

(1) T. Barbot, *Caractérisation des flots d'Anosov par leurs feuilletages faibles,* Ergod. Th. & Dyn. Syst., **15** (1995), 247–270.

(2) T. Barbot, *Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'Anosov,* Comment. Math. Helv., **70** (1995), 113–160.

(3) T. Barbot, *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **46** (1996), 1451–11517.

(4) T. Barbot, *Actions de groupes sur les* 1*-variétés non séparées et feuilletages de codimension un,* Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. VII, no 4 (1998), 559–597.

(5) T. Barbot, *Generalizations of the Bonatti-Langevin example of Anosov flows and their classification up to topological equivalence,* Comm. Anal. geom., **6** (1998), 747–798.

(6) T. Barbot, *Radiant affine* 3*-manifolds,* "The Proceedings of the Conference on Geometric Structures on Manifolds" (Séoul), Lecture Notes Series GARC, **46** (1999), 37–53.

(7) T. Barbot, *Variétés affines radiales de dimension* 3*,* Bull. Soc. Math. France, **128** (2000), 347–389.

(8) T. Barbot, *Plane affine geometry and Anosov flows,* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., **34** (2001), 871–889.

(9) T. Barbot, *Flag structures on Seifert manifolds,* Geom. Topol., **5** (2001), 227–266.

(10) T. Barbot, *Feuilletages transversalement projectifs sur les variétés de Seifert,* Ann. Inst. Fourier, **53** (2003), 1551–1613.

(11) T. Barbot, *Globally hyperbolic flat spacetimes,* J. Geom. Phys., **53** (2005), 123–165, math.GT/0402257

(12) T. Barbot, F. Béguin, A. Zeghib, *Feuilletages des espaces temps globalement hyperboliques par des hypersurfaces à courbure moyenne constante,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **336** (3) (2003), 245–250.

(13) T. Barbot, A. Zeghib, *Group actions on Lorentz spaces, a survey,* in "50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity", ed. P.T. Chrusciel, H. Friedrich, Birkhäuser Verlag, 2004.

(14) T. Barbot, F. Béguin, A. Zeghib, *Foliations of locally* AdS_3 *globally hyperbolic manifolds by constant mean curvature surfaces,* à paraître à Geom. Dedicata, math.MG/0412111.

(15) T. Barbot, *Three-dimensional Anosov flag manifolds,* math.RT/0505500.

Première partie

Flots d'Anosov

.

Le cryptarithme dynamique suivant est, de plus, parfait : il n'admet qu'une seule solution.

$$
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{B} & \mathbf{O} & \mathbf{U} & \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{R} \\
+ & \mathbf{P} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{N} & \mathbf{T} \\
\mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} & \mathbf{-} \\
\mathbf{O} & \mathbf{R} & \mathbf{B} & \mathbf{I} & \mathbf{T} & \mathbf{E}
\end{array}
$$

CHAPITRE 1

Une première prise de contact

Le prototype de flot d'Anosov est le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative. Un des véritables pionniers sur ces questions est J. Hadamard. Citons [**118**], dont l'introduction convient parfaitement à notre propos :

> *"Dans un mémoire précédent, nous avons appliqué les considérations élémentaires de maximum et de minimum à l'étude des géodésiques réelles sur des surfaces quelconques et considéré, en particulier, un cas où les énoncés prennent une forme particulièrement simple : celui des surfaces à courbure partout positive. Je me propose actuellement de traiter (...) le cas où la courbure est partout négative. Dans ce nouveau cas, il est possible d'arriver à des résultats beaucoup plus complets que dans le premier et d'établir une discussion générale des géodésiques." (...) "Une seule théorie exige d'être approfondie d'une façon spéciale pour servir de base au travail actuel : c'est l'Analysis situs*[1]*, laquelle, ainsi qu'on devait s'y attendre après la lecture des travaux de M. Poincaré, joue un rôle essentiel dans tout ce qui va suivre."*

Dans ce mémoire, J. Hadamard établit quelques propriétés fondamentales de ces flots géodésiques, dont l'existence et unicité des géodésiques fermées simples dans une classe d'homotopie libre donnée, la transitivité et symétrie de la notion de géodésiques asymptotes.

Puis, Morse entreprit une étude plus fine et plus systématique des flots géodésiques des surfaces à courbure négative, et surtout, a essentiellement démontré que ces flots sont topologiquement équivalents entre eux, et qu'en outre, tout flot géodésique, d'une métrique à courbure négative ou non, est semi-conjugué à ceux des métriques à courbure négative ([**154, 155**]). Ce principe prend toute sa force et sa plénitude dans les travaux de M. Gromov ([**114**]) qui a dégagé la notion de groupe hyperbolique et défini pour chacun d'entre eux "un flot géodésique" à la dynamique élaborée qui se retrouve dans tout flot géodésique sur une variété compacte dont le groupe fondamental est isomorphe au groupe donné.

Il s'avère que le rôle privilégié des flots géodésiques en courbure négative est dû avant tout à leur caractère *Anosov*, tel que défini par V.V. Anosov sous la terminologie de "U-flow" ([**6**]). V.V. Anosov avait comme préoccupation première l'étude des propriétés ergodiques de ces flots, préoccupation qui restera en marge de ce mémoire. Nous nous emploierons plutôt à voir comment le phénomène décrit par Morse dépasse le cadre des flots géodésiques et s'étend aux flots d'Anosov : quelles

[1] L'analysis situs étant ce qu'on appelle en langage moderne la topologie.

restrictions la topologie d'une variété, voire seulement la nature de son groupe fondamental, impose-t'elle à la dynamique des flots qu'elle supporte ?

1.1. Définitions

DÉFINITION 1.1. *Un flot d'Anosov sur une variété M munie d'une métrique $\|$ est un flot Φ^t non singulier dont la différentielle préserve une décomposition $TM = \Delta \oplus E^{ss} \oplus E^{uu}$ du fibré tangent vérifiant les propriétés suivantes :*

- *La direction Δ est tangente aux trajectoires du flot.*
- *La direction E^{ss} est contractée exponentiellement dans le futur, i.e., il existe des constantes positives a, b telles que, pour tout vecteur tangent v basé en un point x de M et appartenant à E^{ss}, et pour tout temps t positif :*

$$\|D_x\Phi^t(v)\| \leq be^{-at}\|v\|$$

- *La direction E^{uu} est contractée exponentiellement dans le passé, i.e., il existe des constantes positives a, b telles que, pour tout vecteur tangent v basé en un point x de M et appartenant à E^{uu}, et pour tout temps t négatif :*

$$\|D_x\Phi^t(v)\| \leq be^{at}\|v\|$$

REMARQUE 1.2. Nous considérerons aussi épisodiquement la notion de *difféomorphisme d'Anosov.* Ce sont les difféomorphismes vérifiant les mêmes conditions que les flots d'Anosov, mais où bien sûr il n'y a pas de direction Δ tangente au flot : la somme des directions stable et instable est dans ce cas tout le fibré tangent.

Nous ne nous intéresserons pour l'essentiel aux flots d'Anosov qu'à *équivalence topologique près* :

DÉFINITION 1.3. *Une équivalence topologique entre deux flots (M, Φ^t) et (N, Ψ^t) est un homéomorphisme $f : M \to N$ envoyant chaque orbite de Φ^t sur une orbite de Ψ^t en respectant l'orientation des orbites. En d'autres termes, si $y = \Phi^t(x)$ avec t positif, alors $f(y) = \Psi^s(f(x))$ avec s positif.*

Ainsi, notre intérêt se porte davantage sur le feuilletage (orienté) Φ que sur le flot Φ^t lui-même. Ces définitions requièrent d'ores et déjà des commentaires additionnels :

- *Compacité :* Formellement, la définition peut être produite même lorsque la variété M n'est pas compacte - pour peu qu'une métrique y soit sélectionnée. Mais ce point de vue est peu fertile, qu'on en juge : un simple flot de translations sur un espace affine est Anosov si on équipe l'espace d'une métrique *ad hoc.* Il est préférable de se cantonner comme nous le ferons dès maintenant au cas où M est compacte.
- *Métriques adaptées :* Dans la définition, nous n'avons pas précisé la nature de la métrique. Il est confortable et suffisant de la considérer comme étant riemanienne, lisse. À vrai dire, elle n'est pas intimement liée au flot : la variété ambiante étant compacte, les différentes métriques définissent la même structure Lipschitz, et le flot est Anosov pour toutes les métriques dès qu'il l'est pour l'une d'entre elles ; seules changent les constantes a et b. La véritable raison d'être de la métrique est d'apporter un élément de contrôle sur l'action de la différentielle du flot. Une métrique riemannienne seulement continue, voire de Finsler, est tout à fait apte à jouer ce rôle. Cependant, il peut être utile de

noter qu'il existe toujours des métriques - dites *adaptées,* ou *de Liapounov* - pour lesquelles les constantes C valent 1 : il suffit de moyenner une métrique quelconque le long des orbites sur un temps suffisamment long pour que la contribution des $\|D_x\Phi^t v\|$ exponentiellement petits soit prépondérante.

– *Régularité de la décomposition :* La décomposition $TM = \Delta \oplus E^{ss} \oplus E^{uu}$ est toujours continue, mais il n'est pas nécessaire de la requérir dans la définition : cette continuité est en fait un corollaire des propriétés de contraction et dilatation exponentielles. Ceci est particulièrement agréable, facilitant grandement la vérification qu'un flot donné est bien Anosov. La continuité obtenue est même à vrai dire Hölder. Cependant, cette décomposition reste en général peu régulière. Comme nous le verrons plus tard, la supposer lisse est extrêmement restrictif, et certaines conjectures, toujours ouvertes dans le cas général, sont démontrées lorsque cette décomposition est supposée Lipschitz ([**178**]). Le lecteur peut se reporter à [**123**] pour une discussion de ce phénomène.

– *Régularité :* Le flot lui-même est le plus souvent supposé lisse (c'est-à-dire de classe C^∞). Mais celà n'est aucunement nécessaire, et la propriété essentielle - à savoir la *stabilité structurelle,* voir plus loin - reste vraie lorsque le flot lui-même est seulement C^1 (voir début de § 1.2.4). Là encore, cette basse régularité facilite la construction d'exemples. Le point important pour nous est que nous sommes avant tout intéressés à l'étude des flots d'Anosov à équivalence topologique près. Ainsi, grâce à la stabilité structurelle des flots d'Anosov (et grâce à la densité des champs de vecteurs lisses), nous ne perdons aucun degré de généralité en supposant le flot lisse.

Il est utile de relever qu'on peut aussi définir, dans le contexte de la dimension 3, une notion de flot d'Anosov *topologique*, où le flot n'est plus que (Lipschitz) continu (Définition 1.16). La plupart des résultats que nous présenterons ici sont valables pour les flots d'Anosov topologiques. De même, certaines constructions classiques - par exemple [**92**] (voir § 2.4.1)- ne produisent *stricto sensu* que des flots d'Anosov topologiques, et l'imprécision sur ce point dans la littérature peut produire quelques confusions, dans la mesure où il est toujours ignoré si tout flot d'Anosov topologique est topologiquement équivalent à un flot d'Anosov lisse.

Dans le même registre d'idée, toujours en dimension 3, nous mettons en avant la notion de *flot d'Anosov PL* (voir Définition 6.10). Ces flots ne sont pas C^1, mais sont transversalement affines par morceaux. C'est dans cette catégorie que la chirugie de Fried semble trouver sa place naturelle (voir remarque 2.32). Il s'avère que tous les flots d'Anosov topologiquement transitifs (i.e., admettant une orbite dense) sont (topologiquement équivalents à) des flots d'Anosov PL.

1.2. Propriétés fondamentales

1.2.1. Caractérisation des flots d'Anosov par champs de cônes. Soit (M, Φ^t) un flot sur une variété de dimension 3 engendré par un champ de vecteurs X de classe C^∞. Dans ce qui suit, une métrique lorentzienne est un champ continu de formes quadratiques non-dégenérées de signature $(-,+,+)$.

LEMME 1.4. *Le flot Φ^t est d'Anosov si et seulement si la condition suivante est vérifiée : Il existe deux métriques lorentziennes Q^+ et Q^- sur M, deux constantes a et b positives, et un réel positif T tels que :*

(1) *les cônes $C^+ = \{Q^+ < 0\}$ et $C^- = \{Q^- < 0\}$ sont disjoints,*

(2) *Q^+ et Q^- valent une constante c positive sur le champ de vecteurs X,*

(3) *pour tout temps t positif, l'image par $D_x\Phi^t$ (resp. $D_x\Phi^{-t}$) de l'adhérence du cône $C^+(x)$ (resp. de $C^-(x)$)) privée de l'origine est contenue dans le cône $C^+(\Phi^t(x))$ (resp. dans $C^-(\Phi^{-t}(x))$),*

(4) *pour tout vecteur tangent v au-dessus d'un point x de M, et pour tout temps t plus grand que T, si $Q^+(v)$ est strictement négatif, on a alors l'inégalité $Q^+(D_x\Phi^t v) < ae^{bt}Q^+(v)$; de manière analogue, si $Q^-(v) < 0$ alors $Q^-(D_x\Phi^{-t}v) < ae^{bt}Q^-(v)$.*

Preuve Si Φ^t est Anosov : on fixe une métrique sur M adaptée au flot. Soient H^{ss} et H^{uu} deux champs de vecteurs unitaires pour cette métrique, le premier appartenant à la direction stable E^{ss}, le second à la direction instable E^{uu}. Tout vecteur tangent se décompose sous la forme $v = xX + yH^{ss} + zH^{uu}$. Il suffit de prendre $Q^+(x,y,z) = cx^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$, $Q^-(x,y,z) = cx^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2$

Inversement, supposons l'existence de $Q^\pm$, et de a, b, c, T. Le champ de cônes $C^\pm$ induit un champ d'ellipses $E^\pm$ dans PTM, le projectifié de TM. Notons Φ^t_* l'action induite par Φ^t sur les champs d'ellipses dans PTM, i.e. $(\Phi^t_*E)(x) = PD_{\Phi^{-t}(x)}\Phi^t(E(\Phi^{-t}(x)))$. On note $E^+_t = \Phi^t_*E^+$, et $E^-_t = \Phi^{-t}_*E^-$. Par hypothèse, les ellipses $E^\pm_t$ décroissent (au sens de l'inclusion) lorsque t croît, et chaque ellipse $E^+_t(x)$ est disjointe de $E^-_t(x)$. De plus, l'adhérence de $E^\pm_t(x)$ est contenue à l'intérieur de $E^\pm(x)$. Munissons chaque $E^\pm(x)$ de la métrique de Hilbert : la différentielle de Φ^t induit une transformation de $E^+(x)$ dans $E^+(\Phi^t(x))$ qui contracte la métrique de Hilbert. Comme M est compact, ce facteur de contraction peut être choisi uniforme. Donc, le diamètre (au sens de Hilbert) des $E^+_t(x)$, vue dans $E^+(x)$, tend exponentiellement vers 0. Il s'en suit que l'intersection entre tous les E^+_t est réduite à un point $\Delta^+(x)$. On en déduit également que l'intersection entre les E^-_t se réduit à un singleton $\Delta^-(x)$. Les directions $\Delta^+(x)$ et $\Delta^-(x)$ sont différentes, car les adhérences de $E^+_T(x)$ et de $E^-_T(x)$ sont disjointes, et aucune de ces directions n'est celle de X car $Q^+(X) = Q^-(X) = c$. Par construction, Δ^+ et Δ^- sont des champs de droites Φ^t-invariants.

Enfin, on peut sélectionner une métrique continue sur M pour laquelle la sphère unité dans T_xM rencontre $\Delta^\pm(x)$ en deux points pour lesquels $Q^\pm$ vaut 1. L'hypothèse 1 sur $Q^\pm$ implique alors que les vecteurs appartenant à la direction Δ^+ sont dilatés exponentiellement dans le futur, et que ceux appartenant à Δ^- le sont dans le passé. ∎

REMARQUE 1.5. Les métriques lorentziennes $Q^\pm$ ne sont pas nécessairement continues ! De manière plus précise, leur existence entraîne le caractère Anosov du flot, quand bien même elles ne seraient pas continues. À l'inverse, si elles existent, i.e., si le flot est Anosov, il existe alors des métriques lorentziennes vérifiant les mêmes propriétés, mais qui sont en outre aussi lisses que le flot.

1.2.2. Feuilletages invariants. Le premier élément fondamental des flots d'Anosov est l'unique intégrabilité des diverses directions invariantes, en dépit de

leurs basses régularités (cf. [**131**], aussi [**124**], Théorème 17.4.3 - il suffit que le flot soit de classe C^1).

DÉFINITION 1.6. *L'unique feuilletage tangent à la direction E^{ss} (respectivement E^{uu}) est appelé* feuilletage fort stable *(respectivement* feuilletage fort instable*). Ces deux feuilletages sont notés respectivement $\mathcal{F}^{ss}$ (respectivement $\mathcal{F}^{uu}$).*

Chaque feuille de ces feuilletages est difféomorphe à un espace vectoriel $\mathbb{R}^k$. En effet, dans le cas par exemple du feuilletage fort stable, en poussant par le flot dans les temps positifs, on amène toute zone compacte de la feuille dans une carte arbitrairement petite. Ainsi, la feuille elle même est une union croissante de boules euclidiennes ; l'affirmation en découle par un Théorème de Brown et Stallings (cf. [**48, 182**]).

Il convient cependant de bien mémoriser que les feuilletages forts sont bien des invariants de *conjugaison* topologique (i.e. équivalence topologique préservant le paramètrage), mais ne sont en aucun cas des invariants d'équivalence topologique : une équivalence topologique entre deux flots d'Anosov n'envoie pas en général feuilletages forts sur feuilletages forts. Il apparaît même à ce niveau un phénomène de rigidité, réminiscence (affaiblie) de la caractérisation des métriques riemanniennes à courbure négative sur les surfaces à caractéristique d'Euler négative par leur spectre des longueurs : en dimension 3, une équivalence topologique entre les flots géodésiques de surfaces riemanniennes à courbure constante négative préservant les horocycles (i.e. les feuilletages forts) est nécessairement une conjugaison topologique. Voir [**1**] pour des résultats de ce type.

Ces feuilletages sont en général de basse régularité, tout au plus de classe Hölder (bien que chaque feuille individuellement soit aussi différentiable que le flot lui-même). Il existe d'autres feuilletages naturels associés au flot d'Anosov bénéficiant de propriétés de régularité plus satisfaisantes :

DÉFINITION 1.7. *L'unique feuilletage tangent à la direction $E^{ss} \oplus \Delta$ (respectivement $E^{uu} \oplus \Delta$) est appelé* feuilletage faible stable *(respectivement* feuilletage faible instable*). Ces deux feuilletages sont notés respectivement $\mathcal{F}^s$ (respectivement $\mathcal{F}^u$).*

Lorsque le flot est suffisamment lisse, un feuilletage faible est de classe C^1 s'il est de codimension 1 ([**130, 131**]). De manière plus précise, un feuilletage faible stable ou instable de codimension 1 est au moins de classe C^1, avec logarithme de la dérivée Hölder continue[2]. Cette confortable propriété est en particulier valable en dimension 3, qui sera le cas d'étude essentiel de ce mémoire. Indiquons aussi au passage qu'en dimension 3, les feuilletages forts acquièrent eux aussi une meilleure régularité : ils sont (grand) Zygmund ([**82**]).

De plus, les feuilletages faibles se comportent mieux vis-à-vis des équivalences topologiques que les feuilletages forts : toute équivalence topologique envoie feuilletage faible sur feuilletage faible.

Chaque feuille des feuilletages faibles est en fait le saturé par le flot d'une feuille du feuilletage fort correspondant. Il en découle aisément qu'elle est difféomorphe[3] à $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{R}^{k+1}$, selon qu'elle contienne ou non une orbite périodique du flot.

[2]Lorsque le flot préserve le volume, les dérivées sont de régularité (grand) Zygmund. ce qui implique un module de continuité $O(t\log t)$ (voir [**133**]).

[3]Nous n'accorderons dans ce mémoire qu'une attention limitée au cas non-orientable, puisqu'il se ramène aisément au cas orientable au prix modique d'un revêtement fini.

Notons en outre que pour chaque feuille cylindrique - i.e. difféomorphe à $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^1$ - son holonomie est décrite par l'application de premier retour du flot le long de l'unique orbite périodique contenue dans la feuille. Ainsi, cette holonomie est non-triviale, elle est même exponentiellement contractante ou dilatante. Lorsque le feuilletage est de codimension 1, cette holonomie est de classe C^1, avec dérivée Hölder continue. Elle est alors C^1-linéarisable.

Par ailleurs, toujours lorsqu'un des feuilletages faibles est de codimension 1, disons, le feuilletage faible stable, la simple existence de ces feuilletages a des implications profondes non-triviales. Ainsi, l'observation ci-dessus sur l'holonomie des feuilles cylindriques montre que chaque orbite périodique est librement homotope à un lacet transverse à $\mathcal{F}^s$. D'après un célèbre théorème de A. Haefliger, un feuilletage de codimension 1 admettant un lacet transverse homotopiquement trivial admet alors un cycle évanouissant, ce qui implique l'existence d'un lacet dans une feuille d'holonomie triviale d'un coté, et non-trivial de l'autre. Ceci contredisant la description précédente de l'holonomie des feuilles de $\mathcal{F}^s$, nous obtenons *in fine* qu'aucune orbite périodique du flot d'Anosov n'est homotopiquement triviale. Nous verrons à la section 1.3 d'autres conséquences de l'existence de ces feuilletages.

1.2.3. Lemme de pistage. Ce lemme ne nous sera pas vraiment utile, mais son prestige au sein de la communauté ne permet guère de le passer sous silence.

Définition 1.8. *Soient T, ϵ deux nombres réels positifs. Une (T, ϵ)-orbite d'un flot Φ^t sur une variété (métrique) M est la donnée d'une suite biinfinie de points $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ et d'une suite biinfinie $\ldots, T_{-1}, T_0, T_1, \ldots$ de nombres réels tous plus grands que T telles que chaque x_{i+1} soit à distance inférieure à ϵ de $\Phi^{T_i}(x_i)$.*

Une telle pseudo-orbite c doit être pensée comme une courbe paramétrée $c : \mathbb{R} \mapsto M$ discontinue : pour tout temps t positif, si t s'écrit sous la forme $T_0 + T_1 + \ldots + T_i + r$ avec $0 \leq r < T_{i+1} - T_i$, nous convenons $c(t) = \Phi^r(x_i)$, une convention analogue évidente s'appliquant aux t négatifs.

Définition 1.9. *Soit α un nombre positif. Une (T, ϵ)-orbite c est α-pistée par l'orbite de x si pour tout temps t la distance entre $c(t)$ et $\Phi^t(x)$ est inférieure à α.*

Théorème 1.10 (Lemme de pistage). *Pour tout flot d'Anosov Φ^t, il existe des nombres positifs T, ϵ, α tels que toute (T, ϵ)-orbite de Φ^t est α-pistée par un point de M. De plus, deux points de M α-pistant une même (T, ϵ)-orbite sont nécessairement sur la même orbite de Φ^t .*

1.2.4. Stabilité structurelle. La notion de stabilité structurelle fait intervenir la topologie de l'espace des flots sur la variété M. Précisons ici cette topologie : en toute généralité, un champ de vecteurs engendrant un flot de classe C^r peut n'être lui-même que de classe C^{r-1}, mais, d'après le Théorème de Hart ([**121**]), un tel flot est toujours C^r-conjugué à un flot de classe C^r, qui soit en outre engendré par un champ de vecteurs de classe C^r. Toute C^r conjugaison préserve bien sûr la propriété Anosov, on ne perd donc aucune généralité, lorsqu'on considère les flots d'Anosov de classe C^1, en supposant que les champ de vecteurs qui les engendrent sont de classe C^1. Nous appelons ici *espace des flots* sur M comme étant l'espace des flots engendrés par un champ de vecteurs de classe C^1, muni de la topologie C^1.

Définition 1.11. *Un flot Φ^t est structurellement stable s'il admet un voisinage dans l'espace des flots dont les éléments sont tous topologiquement équivalents à Φ^t.*

THÉORÈME 1.12 (Stabilité structurelle des flots d'Anosov). *Les flots d'Anosov sont structurellement stables.*

Ce théorème se démontre assez aisément à partir du lemme de pistage. Mais il peut également se démontrer d'une manière un peu plus conceptuelle (et plutôt instructive selon notre point de vue) comme un théorème de point fixe dans un espace fonctionnel adapté (voir [**156**]).

Dans le Théorème de stabilité structurelle des flots d'Anosov, s'il est nécessaire de considérer la topologie C^1, c'est pour assurer que les perturbations du flot sont toujours Anosov. Le lemme de pistage permet de se restreindre à la topologie C^0 pour peu que l'hypothèse Anosov soit imposée aux approximations :

PROPOSITION 1.13. *Tout flot d'Anosov Φ^t admet un C^0-voisinage U dans l'espace des flots tel que tout élément de U qui est aussi un flot d'Anosov est topologiquement équivalent à Φ^t.*

En effet, le lemme de pistage permet de démontrer que le flot Φ^t est semi-conjugué à toute C^0-approximation Ψ^s, au sens où il existe une application continue $f : M \to M$ envoyant orbites orientées de Ψ^s sur orbites orientées de Φ^t. Par ailleurs, si Ψ^s est supposée Anosov, une orbite de Φ^t ne peut être pistée que par une seule orbite de Ψ^s. Ceci assure l'"injectivité transverse de f", et, *in fine,* que f peut-être choisie injective.

La notion de stabilité structurelle est intimement liée à celle de flot d'Anosov. Il s'avère que les flots structurellement stables sont précisément les flots Axiom A ([**166, 125, 126**]) : ce sont les flots pour lesquels le fibré tangent restreint au-dessus de l'ensemble des points non-errants du flot admet une décomposition $\Delta \oplus E^{ss} \oplus E^{uu}$ vérifiant les propriétés de contraction et dilatations exponentielles sous l'action de la différentielle du flot explicitées à la définition 1.1, et vérifiant en outre que les variétés stables et instables sont transverses. Plutôt que d'expliciter cette définition (puisqu'en somme nous ne faisons ici qu'essayer de motiver l'étude des flots d'Anosov), indiquons sobrement qu'elle implique que tout flot structurellement stable sans point singulier et admettant une orbite dense est un flot d'Anosov.

Il est donc légitime de considérer la propriété d'Anosov comme étant la quintessence de la stabilité structurelle.

1.2.5. Partition de Markov. Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une variété fermée de dimension 3. Nous appelons *boîte feuilletée* un plongement $\varphi_i : [-1,+1]^3 \to U_i \subset M$ vérifiant les proriétés suivantes :

– pour tout x_i fixé, et pour y_i, t_i variant dans $[-1,+1]$, les $\varphi_i(x_i, y_i, t_i)$ appartiennent tous à une même feuille de $\mathcal{F}^s$,

– pour tout y_i fixé, et pour x_i, t_i variant dans $[-1,+1]$, les $\varphi_i(x_i, y_i, t_i)$ appartiennent tous à une même feuille de $\mathcal{F}^u$,

Une *partition de Markov* est une collection de boîtes feuilletées telles que :

– les U_i sont d'intérieurs deux-à-deux disjoints,

– l'union des U_i est M tout entier,

– si U_i et U_j sont deux boîtes feuilletées consécutives, i.e., si l'intersection entre $\varphi_i([-1,+1]^2 \times \{1\})$ et $\varphi_j([-1,+1] \times \{-1\})$ est non-vide, il existe alors deux sous-intervalles fermés I_i et J_j de $[-1,+1]$ de sorte que cette intersection est formée des points $\varphi_i((x_i, y_i, 1) = \varphi_j((x_j, y_j, -1)$ avec $y_i \in I_i$ et $x_j \in J_j$, les x_i et y_j pouvant prendre toute valeur dans $[-1,+1]$.

THÉORÈME 1.14 (Ratner [**165**]). *Tout flot d'Anosov de dimension* 3 *admet une partition de Markov.*

REMARQUE 1.15. Bien sûr, la notion de partition de Markov peut-être définie de manière analogue pour tout feuilletage intersection $\mathcal{F}^s \cap \mathcal{F}^u$ entre feuilletages transverses de codimension 1, sans qu'il soit nécessaire que ce feuilletage intersection soit Anosov.

1.2.6. Flots d'Anosov topologiques. Nous pouvons affaiblir la définition des flots d'Anosov, en particulier, leur régularité, sans perdre l'essentiel de leurs propriétés. C'est ce que nous proposons en introduisant la notion de flot d'Anosov topologique : soit M une variété fermée de dimension 3, et Φ^t un flot continu sur M tel que :

– Φ^t admet une orbite dense,

– les orbites de Φ^t sont les feuilles du feuilletage intersection de deux feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ de codimension 1 transversalement Lipschitz,

– il existe une partition de Markov (U_i) pour le bifeuilletage $(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u)$.

DÉFINITION 1.16. *Le flot Φ^t est un flot d'Anosov topologique (transitif) s'il existe une constante positive a telle que :*

(1) *chaque feuille de $\mathcal{F}^{s,u}$ est homéomorphe à un plan où à un cylindre,*

(2) *pour chacun des feuilletages, l'union des feuilles cyclindriques est dense,*

(3) *si U_i et U_i sont deux boîtes feuilletées successives, l'application de traversée de boîtes $[-1,1] \times I_i \to J_j \times [-1,+1]$ qui à (x_i, y_i) associe le point (x_j, y_j) tel que $\varphi_i(x_i, y_i, 1) = \varphi_j(x_j, y_j, -1)$ est de la forme $(x_i, y_i) \mapsto (f_{ji}(x_i), g_{ji}(y_i))$ où les applications f_{ji} et g_{ji}^{-1} sont contractantes, de facteur Lipschitz* $\exp(-a)$.

Les hypothèses (1) et (2) sont sans doute superflues, au sens où elles découlent probablement des autres hypothèses, mais nous ne l'avons pas vérifié et préférons prudemment les imposer.

Il doit être clair pour le lecteur que tout flot d'Anosov au sens usuel topologiquement transitif est un flot d'Anosov topologique. À l'inverse :

PROPOSITION 1.17. *Un flot d'Anosov topologique dont les deux feuilletages faibles $\mathcal{F}^{s,u}$ sont de classe C^1 est différentiablement équivalent à un flot d'Anosov au sens usuel.*

Preuve On définit dans chaque boîte feuilletée U_i les métriques lorentziennes $Q_i^+ = c(dt)^2 + (dy)^2 - \exp(\alpha t)(dx)^2$ et $Q_i^- = c(dt)^2 + (dx)^2 - \exp(-\alpha t)(dy)^2$. Elles induisent sur M des métriques lorentziennes (discontinues) - en les points appartenant à plusieurs boîtes feuilletées, il suffit de fixer un choix parmi les divers possibles. Si c est choisi suffisamment petit, et $\alpha < a/2$, le lemme 1.4 s'applique. ∎

Cependant, nous ignorons toujours la réponse à la question suivante : *tout flot d'Anosov topologique est-il topologiquement équivalent à un flot d'Anosov au sens usuel (lisse) ?* En méditant sur cette question, le lecteur appréhendera la nature des interrogations qui accompagnent notre travail.

La définition proposée ici est sans doute perfectible, il est par exemple probable qu'on puisse se passer de la notion de partition de Markov. Si nous avons ici introduit la notion de flot d'Anosov topologique, c'est avant tout pour mettre en

avant que la plupart des résultats évoqués dans ce mémoire, bien qu'énoncés dans le cadre des flots d'Anosov différentiables, restent valides pour les flots d'Anosov topologiques[4] (à l'exception notable de la remarque 1.43, ainsi que, bien sûr, ceux faisant intervenir les feuilletages forts). Il nous semble que cette observation donne un éclairage sur les méthodes employées pour leurs démonstrations, qui sont avant tout de nature topologique.

1.3. Feuilletages de codimension 1 et 1-variétés non-Hausdorff

Nous avons auparavant évoqué le cas particulièrement agréable où l'un des feuilletages faibles est de codimension 1, notamment en esquissant la preuve du fait que dans cette situation, les orbites périodiques du flot sont homotopiquement non-triviales. Nous allons dans cette section explorer plus avant ce cas de figure.

1.3.1. De l'hypothèse "codimension 1". Par économie d'écriture, nous appelons flot d'Anosov de codimension 1 tout flot d'Anosov dont un des feuilletages faibles est de codimension 1. Nous convenons également, lorsque celà n'est pas spécifié, que le feuilletage faible de codimension 1 est le feuilletage faible stable. Cette convention est du reste inutile en dimension 3, où les deux feuilletages sont de codimension 1.

Il semble opportun de signaler avant toute chose que le cas "codimension 1" est essentiellement le seul qui permette d'obtenir des résultats généraux sur les flots d'Anosov dans l'optique topologique. Qu'on en juge : on ignore[5] toujours par exemple si la sphère de dimension 5 admet ou non un flot d'Anosov, alors que le problème analogue en dimension inférieure est assez facilement résolu par la négative, cette solution étant obtenue grâce au fait qu'en ces basses dimensions, un des feuilletages faibles est nécessairement de codimension 1.

Remarque 1.18. Nous défendons ici l'intérêt de l'hypothèse "codimension 1", mais nous nous devons de signaler les remarquables résultats récents [**168**], [**76**], [**77**], eux-même faisant suite naturelle à [**38**], [**39**], [**136**]. Ces travaux ne sont applicables que si les deux feuilletages faibles sont de codimension au moins 2. Ces travaux classifient les flots d'Anosov transversalement *quasi-conformes* qui en outre vérifient une forte propriétés de régularité de la décomposition du fibré tangent. Ces notables avancées sont ainsi en esprit bien différentes du sujet du présent mémoire.

1.3.2. Premières remarques de A. Verjovsky. La proposition suivante apparaît dans la thèse d'A. Verjovsky, qui a véritablement introduit le corpus d'idées intervenant dans les travaux ultérieurs[6].

Proposition 1.19 ([**189**]). *Soit Φ^t un flot d'Anosov de codimension 1 sur une variété M de dimension n. Alors :*

(1) *Les orbites périodiques de Φ^t sont homotopiquement non-triviales,*

[4]Par exemple, le lemme de pistage reste vrai, et la stabilité structurelle persiste au sens C^0 : deux flots d'Anosov topologiques suffisamment C^0-proches sont toujours topologiquement équivalents.

[5]Ce résultat est cependant annoncé par exemple dans [**163**], où en réalité il est étendu aux flots dits *expansifs*. Mais cette annonce n'est malheureusement pas encore accompagnée de texte écrit consultable.

[6]Il faut cependant prendre en compte que certains arguments apparaissent déjà dans [**87**] dans le contexte des difféomorphismes d'Anosov.

(2) *Les relevés dans le revêtement universel de M des feuilles de $\mathcal{F}^s$ sont difféomorphes à $\mathbb{R}^{n-1}$,*

(3) *Le revêtement universel de M est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Nous avons déjà évoqué la preuve du point (1) ; le point (2) s'en déduit aisément. Quant au point (3), il en découle par un remarquable théorème de C.A. Palmeira ([**162**]) selon lequel $\mathbb{R}^n$ est la seule variété de dimension n simplement connexe admettant un feuilletage par feuilles difféomorphes à $\mathbb{R}^{n-1}$. Comme le travail de Palmeira est postérieur à la thèse de Verjovsky, dans celle-ci le point (3) est démontré d'une autre manière ... malheureusement erronée, par effet de cascade.

Nous profitons de l'occasion pour présenter un des principaux résultats de la thèse de Verjovsky :

THÉORÈME 1.20. *Tout flot d'Anosov de codimension* 1 *sur une variété de dimension supérieure ou égale à* 4 *est topologiquement transitif, i.e., admet une orbite dense.*

J'ai personnellement reproduit la preuve de ce théorème dans ma propre thèse, qui est en vérité la même que Verjovsky, mais en améliorant quelque peu son exposition. Cette réécriture était motivée par la nécessité de clarifier la démonstration, une ambigüité naissant du fait que Verjovsky pensait produire également une démonstration différente spécifique à la dimension 3, mais malheureusement erronée, comme l'établit clairement le contre-exemple de Franks-Williams ([**88**]). Pour soulever un coin du voile, tout en préservant un soupçon de mystère, signalons que le théorème n'est valable qu'à partir de $n = 4$ parce que la sphère de dimension $n - 3$ est connexe, sauf justement pour $n = 3$.

Cette preuve est reproduite dans [**145**], section 3, ou encore, dans [**190**], section 4.

1.3.3. Espaces de feuilles. Ma première contribution personnelle dans le sujet consiste à une étude systématique des divers *espaces de feuilles* associés à un flot d'Anosov. À véritablement parler, cette idée apparaissait déjà dans le travail [**102**] de E. Ghys qui sera discuté plus loin, l'exploration de cette notion était aussi à l'époque entreprise de manière indépendante par S. Fenley ([**78**]).

Typiquement (mais pas toujours), chaque flot d'Anosov admet des orbites denses, et chacune de ses feuilles faibles - et même fortes - est dense dans M. Celà signifie que les espaces quotients obtenus en identifiant les points de M sur une même orbite de Φ^t , ou sur une même feuille forte, sont d'aspect topologique pour le moins déconcertant. Mais après relèvement des données dans le revêtement universel, cette approche se révèle fertile et intéressante :

DÉFINITION 1.21. *Pour toute variété M, on dénote par $p : \widetilde{M} \to M$ son revêtement universel de M. Les divers feuilletages $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$, $\mathcal{F}^{ss}$ et $\mathcal{F}^{uu}$ associés à un flot d'Anosov Φ^t se relèvent en des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, $\widetilde{\mathcal{F}}^{ss}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ de $\widetilde{M}$, dits* feuilletages relevés. *Le flot lui-même se relève sur $\widetilde{M}$ en un flot $\widetilde{\Phi}^t$ dit* flot relevé.

DÉFINITION 1.22. *On appelle espace des feuilles d'un feuilletage donné comme étant l'espace quotient topologique de la relation d'équivalence "être sur la même feuille". Les espaces des feuilles des feuilletages $\widetilde{\Phi}^t$, $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ et $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ sont dénotés respectivement Q^Φ, $\mathcal{L}^s$ et $\mathcal{L}^u$. Les projections canoniques sont notées respectivement $\pi^\Phi : \widetilde{M} \to Q^\Phi$, $\pi^s : \widetilde{M} \to \mathcal{L}^s$, $\pi^u : \widetilde{M} \to \mathcal{L}^u$.*

Ces espaces de feuilles sont naturellement munis d'une dynamique : le groupe fondamental de M, que nous dénoterons systématiquement par Γ, agit naturellement sur $\widetilde{M}$ en préservant les feuilletages relevés. Son action sur $\widetilde{M}$ passe donc aux quotients, définissant des actions sur Q^Φ, $\mathcal{L}^s$ et $\mathcal{L}^u$. Les diverses propriétés de Φ^t s'interprètent aisément en termes associés à la dynamique de Γ sur chaque espace de feuilles. Par exemple, chaque point x de $\mathcal{L}^s$ est une feuille $\widetilde{F}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, qui se projette dans M en une feuille F de $\mathcal{F}^s$. Comme $\widetilde{F}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$, la feuille F est incompressible dans M ; en d'autres termes, le Γ-stabilisateur de x est isomorphe au groupe fondamental de F. Des considérations de cet ordre permettent de vérifier chacune des propriétés suivantes :

Proposition 1.23. *Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov de codimension 1.*
- *Le Γ-stabilisateur d'un point de Q^Φ, de $\mathcal{L}^s$ ou de $\mathcal{L}^u$ est soit trivial, soit cyclique.*
- *Si γ est un élément de Γ fixant un point θ de Q^Φ, θ est un point fixe hyperbolique de γ.*
- *Si γ est un élément de Γ fixant un élément x de $\mathcal{L}^s$ ou $\mathcal{L}^u$, x est un point fixe attractif ou répulsif de γ.*

Il est clair que si Φ^t est topologiquement transitif, celà signifie que l'union des points de Q^Φ à stabilisateur non trivial est dense. Il est aussi utile de traduire dans ces espaces de feuilles les importants résultats de [**87**] :

Proposition 1.24. *Dans $\mathcal{L}^s$ (respectivement $\mathcal{L}^u$), l'union des éléments à Γ-stabilisateur non-trivial est dense.*

Il est relativement aisé d'observer comme dans [**189**] la proposition suivante :

Proposition 1.25. *Pour un flot d'Anosov de codimension 1 chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ rencontre chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ en au plus un point. De même, chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^{ss}$ rencontre chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ en au plus un point.*

Observons que cette proposition n'affirme pas que chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ en exactement un point ! Cette proposition permet alors de démontrer le fait suivant :

Proposition 1.26. *Pour un flot d'Anosov de codimension 1, l'espace des feuilles $\mathcal{L}^s$ est une 1-variété connexe et simplement connexe.*

Précisons que dans l'énoncé précédent par 1-variété nous entendons comme il est usuel un espace topologique séparable tel que chaque point admet un voisinage homéomorphe à un intervalle de $\mathbb{R}$. Mais nous n'imposons pas, contrairement à la coutume, l'axiome de séparation au sens de Hausdorff : ainsi, il se peut qu'il y ait des paires de points tels que tout voisinage ouvert de l'un rencontre tout voisinage de l'autre. Tout élément d'une telle paire est dit *point non séparé.*

Les notions de revêtement et de simple connexité gardent leur sens pour de telles variétés. Relevons au passage qu'un 1-variété connexe est simplement connexe si et seulement si tout point la disconnecte, i.e., le complémentaire de tout point est l'union de deux ouverts disjoints.

Définition 1.27. *Un flot d'Anosov (éventuellement topologique) de codimension* 1 *dont l'espace des feuilles* $\mathcal{L}^s$ *est séparé au sens de Hausdorff, et donc homéomorphe à* $\mathbb{R}$*, est dit* alignable[7].

Remarque 1.28. Observons que tout flot d'Anosov alignable est topologiquement transitif, i.e., admet une orbite dense. Ceci s'obtient assez aisément en montrant que chaque feuilletage faible est minimal. Voir Théorème 2.5 de [**16**] pour une preuve.

1.3.4. Des 1-variétés non-séparées en général. La notion de 1-variété doit être manipulée avec précaution, des erreurs pouvant facilement être commises à leur sujet en raison des habitudes acquises en topologie où l'hypothèse de séparation au sens de Hausdorff est plus ou moins explicitement admise. L'abandon de cette hypothèse, ainsi que sa pertinence, apparaît déjà dans [**117**], ainsi que dans [**102**]. Mais notre article [**19**] est le premier qui entreprend une étude systématique des homéomorphismes d'une 1-variété simplement connexe. Une version légèrement affaiblie du résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème 1.29. *Une variété analytique compacte dont le groupe fondamental est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de* $SL(k, \mathbb{Z})$ *avec* $k \geq 3$ *n'admet aucun feuilletage analytique de codimension* 1.

Le lecteur averti aura relevé la profonde analogie de ce théorème avec le résultat de J.P. Serre établissant la propriété (FA) des sous-groupes d'indice finis de $\mathrm{SL}(k, \mathbb{Z})$ (toujours pour $k \geq 3$), c'est-à-dire le fait que toute action d'un tel groupe sur un arbre simplicial admet un point fixe global. Il y a effectivement beaucoup de similitudes entre ces deux résultats : en effet, une 1-variété simplement connexe est d'un certain point de vue très semblable à un arbre simplicial, et la preuve du Théorème 1.29 consiste à montrer que, sous les hypothèses énoncées, l'action du groupe fondamental de la variété sur l'espace des feuilles admet un point fixe global, puis d'établir l'impossibilité d'un tel point fixe global. Cependant, cette analogie n'est que partielle, et des difficultés techniques considérables apparaissent dans le contexte des 1-variétés qui n'ont pas de contreparties dans le contexte des arbres simpliciaux, ni même dans le contexte des arbres réels ([**72**]). Une comparaison plus pertinente est celle avec [**195**], où D. Witte montre que les réseaux arithmétiques de $\mathbb{Q}$-rang supérieurs à 2 ne peuvent agir que trivialement sur la droite réelle.

Quoiqu'il en soit, l'ingrédient essentiel de [**19**] qui nous intéresse ici est la description dynamique des homéomorphismes d'une 1-variété simplement connexe. Cette description utilise de manière cruciale une certaine pseudo-distance $d(x, y)$ apparaissant naturellement sur toute 1-variété connexe et simplement connexe. En quelques mots, la pseudo-distance $d(x, y)$ entre deux points x et y d'une 1-variété $\mathcal{L}$ est un entier qui est le nombre minimum de *points non séparés* contenus dans un chemin reliant x à y. Lorsque $\mathcal{L}$ est un espace de feuilles, $d(x, y)$ peut aussi être défini comme étant le nombre minimum de points de tangence avec le feuilletage d'un chemin reliant dans la variété un point de la feuille x à un point de la feuille y.

[7]Nous introduisons cette terminologie dans ce mémoire, celle utilisée dans [**102**], [**16**] (flot d'Anosov *produit*) étant ici réservée pour les besoins du Théorème 1.47). Les flots d'Anosov alignables sont unanimement qualifiés $\mathbb{R}$-*covered Anosov flows* en anglais.

Formulons aussi pour les nécessités de l'énoncé à suivre le fait évident que toute 1-variété simplement connexe est bien sûr orientable, ce qui permet de distinguer dans le groupe des homéomorphismes le sous-groupe d'indice deux formé des homéomorphismes qui préservent l'orientation.

THÉORÈME 1.30. *Soit γ un homéomorphisme d'une 1-variété simplement connexe $\mathcal{L}$ préservant l'orientation. Notons $\Omega(\gamma)$ l'ensemble des points de $\mathcal{L}$ tels que la pseudo-distance $d(x, \gamma x)$ est paire. Cet ensemble est non-vide. De plus, un des trois cas suivants se produit :*

(1) *γ admet un point fixe dans $\mathcal{L}$. Dans ce cas, $\Omega(\gamma)$ est une 1-variété connexe simplement connexe, et tous les points non séparés de $\Omega(\gamma)$ sont des points fixes de γ. De plus, pour tous x dans $\Omega(\gamma)$, l'une des suites $(\gamma^n x)$ ou $(\gamma^{-n} x)$ pour n positif converge vers un point fixe de γ.*

(2) *γ n'admet pas de points fixes, mais admet au moins un point* presque fixe, *i.e., il existe un point x tel que x et γx sont non séparés. Dans ce cas, $\Omega(\gamma)$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, et γ y agit par translation.*

(3) *γ n'admet aucun point presque fixe. Dans ce cas, $\Omega(\gamma)$ est soit homéomorphe à $\mathbb{R}$, soit une union "d'intervalles" $[x_i, y_i]$ telle que chaque y_i est non séparé de x_{i+1}. De plus, il existe un entier positif k tel que γ envoie chaque $[x_i, y_i]$ sur $[x_{i+k}, y_{i+k}]$.*

En guise d'illustration des potentialités de ce Théorème, nous reproduisons ici une preuve (partielle) alternative d'une version affaiblie du Théorème principal de la thèse de W. Thurston :

THÉORÈME 1.31. *Soit Σ une surface de caractéristique d'Euler $\chi(\Sigma)$ négative, et $p : M \to \Sigma$ un fibré en cercles de classe d'Euler e. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^2 de codimension 1 sur M n'admettant aucune feuille homéomorphe au tore ou à la bouteille de Klein. Alors, la valeur absolue de e est inférieure à $\chi(\Sigma)$.*

Nous avertissons le lecteur que l'esquisse de preuve ci-dessous, ayant surtout pour raison d'être d'illustrer le Théorème 1.29, requiert une certaine familiarité avec la théorie classique des feuilletages de codimension 1.

Esquisse de preuve Notons Γ le groupe fondamental de M, $\widetilde{M}$ son revêtement universel, $\widetilde{\mathcal{F}}$ le relevé de $\mathcal{F}$ dans $\widetilde{M}$ et $\mathcal{L}$ l'espace des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$. On note aussi $\pi : \widetilde{M} \to \mathcal{L}$ la projection canonique. La projection p induit un isomorphisme p_* entre Γ et le groupe fondamental $\bar{\Gamma}$ de Σ. Le noyau de p_* est un sous-groupe cyclique Z distingué de Σ - c'est en fait le pseudo-centre de Γ. Quitte à prendre un revêtement fini, on peut supposer que Σ, M et $\mathcal{F}$ sont tous orientables. Dans ce cas, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont toutes orientables, et Z est précisément le centre de Γ. Notons δ un générateur de Γ.

On remarque que comme $\mathcal{F}$ n'admet pas de feuille torique, il découle du Théorème de A. Haefliger évoqué ci-dessus complété par le Théorème de Novikov (voir [**109**]) que $\mathcal{F}$ n'a pas de cycles évanouissants. Il s'en suit que les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont des plans, et que $\mathcal{L}$ est une 1-variété connexe et simplement connexe.

On note $\Omega_k = \Omega(\delta^k)$ le domaine de $\mathcal{L}$ produit par le Théorème 1.30. Remarquons que Ω_k est préservé par l'action de Γ.

Étape 1 *: aucun élément non trivial de Z n'admet un point fixe dans $\mathcal{L}$.* Supposons *a contrario* qu'un élément δ^k de Z fixe un point de $\mathcal{L}$. Alors, $U_k = \pi^{-1}(\Omega_k)$ est un ouvert connexe et simplement connexe Γ-invariant. D'une part, étant saturé

par $\widetilde{\mathcal{F}}$, U_k est feuilleté par plans. D'après le Théorème de Palmeira, U_k est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^3$. Son quotient par Γ est donc un $K(\Gamma, 1)$, tout comme M. Ce quotient est donc compact. Étant aussi naturellement un ouvert de M, il s'en suit que ce quotient est M tout entier, i.e., que U_k est $\mathcal{L}$ tout entier.

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des points fixes de δ^k. L'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $\Omega_k = \mathcal{L}$ est l'ensemble des points presque fixes de δ. Comme les points non-séparés de Ω sont tous points fixes de δ^k, on en déduit que $\mathcal{P}$ est un fermé. Il est aussi Γ-invariant : il correspond donc à un fermé P de M saturé par le feuilletage. Le groupe fondamental de chaque feuille de $\mathcal{F}$ dans P est isomorphe à un sous-groupe de Γ qui en outre contient δ^k : c'est donc le groupe fondamental d'une surface à centre non-trivial. La feuille est donc un anneau ou un tore. Le deuxième cas est exclu par hypothèse : les feuilles dans P sont donc toutes des anneaux, de groupe fondamental cyclique. En particulier, elles ne sont pas compactes ; si P n'est pas M tout entier, il contient donc un minimal exceptionnel $\mathcal{M}$. Or, d'après un Théorème de Sacksdeter, il existe dans P une feuille dont l'holonomie admet une dérivée de norme strictement plus grande que 1. En d'autres termes, $\pi(\mathcal{M})$ contient un point x qui est un point fixe hyperbolique de δ^k. Ceci implique que x est isolé dans $\pi(\mathcal{M})$, et aboutit à une contradiction puisque $\mathcal{M}$ est exceptionnel.

Donc, P est M tout entier, i.e., $\mathcal{P}$ est $\mathcal{L}$ tout entier : δ^k agit trivialement sur $\mathcal{L}$. Le moyen le plus rapide de conclure est d'invoquer un Théorème de G. Hector, classifiant à conjugaison près les feuilletages dont toutes les feuilles sont des anneaux ([**128**]). Ce Théorème implique en particulier qu'un tel feuilletage ne peut exister que sur une variété fibrant en tores sur le cercle, ce qui n'est pas le cas ici et amène donc à une contradiction.

Étape 2 *: aucun élément de Z n'admet un point presque fixe dans $\mathcal{F}$.* Raisonnons à nouveau par l'absurde en supposant l'existence d'un entier k pour lequel δ^k admet un point presque fixe. D'après le Théorème 1.30 et la première étape, Ω_k est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Un argument similaire à celui de la première étape montre que Ω_k est $\mathcal{L}$ tout entier. On obtient tout de suite une contradiction car celà interdit à δ^k d'avoir des points presque fixes !

Étape 3 *: conclusion.* Toujours selon le Théorème 1.30, $\Omega = \Omega_1$ est soit homéomorphe à $\mathbb{R}$, soit une union "d'intervalles" $[x_i, y_i]$ telle que chaque y_i est non séparé de x_{i+1}. Dans le second cas, on obtient un morphisme $k : \Gamma \to \mathbb{Z}$ uniquement défini par la propriété suivante : pour tout γ dans Γ et pour tout entier i, $\gamma(x_i) = x_{k(\gamma)+i}$. Ceci suffit pour démontrer le Théorème 1.31 dans ce cas : en effet, la classe d'Euler e est telle que δ^e est un poduit de commutateurs d'éléments de Γ, et son image par k doit donc être nulle. Donc, $ek(\delta) = 0$, ce qui montre $e = 0$ puisque $k(\delta)$ est non nul[8].

Il ne reste que le cas où Ω est homéomorphe à $\mathbb{R}$: mais le même argument que celui utilisé dans les deux premières étapes assure qu'alors Ω est $\mathcal{L}$ tout entier. Puisque δ agit librement sur $\mathcal{L} \approx \mathbb{R}$, son action est conjuguée à celle de la translation $x \mapsto x+1$. En d'autres termes, l'action de Γ sur $\mathcal{F} \approx \mathbb{R}$ est un relevé d'une action de $\bar{\Gamma}$ sur le cercle. Le Théorème se déduit de l'inégalité de Milnor-Wood ([**149, 197**], nous conseillons aussi [**107**]). ∎

[8]Ce deuxième cas est de toute manière impossible : nous renvoyons à [**19**] pour ce complément de preuve.

Remarque 1.32. On voit que la preuve repose essentiellement sur le fait que δ commute avec tous les éléments de Γ. On en déduit sans peine que le Théorème s'étend au cas où Σ est une orbifold de caractéristique d'Euler négative et p est une fibration de Seifert. Voir [**19**] pour une preuve complète. Indiquons aussi que cette idée de preuve était dans la version preprint du travail de E. Ghys [**102**], mais a été retirée sur suggestion du referee.

On remarque aussi que le Théorème s'étend sans difficulté au cas où $\mathcal{F}$ est un feuilletage faible d'un flot d'Anosov bien qu'un tel feuilletage soit seulement de classe C^1, et non C^2. Dans le cas des flots d'Anosov, l'holonomie des feuilles est hyperbolique, ce qui permet de se passer du Théorème de Sacksdeter, et d'adapter le Théorème de Hector.

Remarque 1.33. À vrai dire, le Théorème de Thurston précise en outre qu'un tel feuilletage est toujours *isotope* à un feuilletage transverse à la fibration en cercles, et donc, à la suspension d'une représentation du groupe fondamental de Σ dans les difféomorphismes du cercle.

À partir de la version tronquée présentée ici, où nous établissons, modulo l'étape 3, que l'espace de feuilles associés est homéomorphe à $\mathbb{R}$, on peut presque déduire la version complète du Théorème de Thurston : on peut en fait montrer que le feuilletage est *conjugué* à un feuilletage suspension. Voir les arguments dans [**102**].

Remarque 1.34. Le Théorème 1.30 a été étendu par S. Fenley dans un cadre plus général pour les besoins de l'étude des difféomorphismes pseudo-anosov (cf. [**81**]).

1.3.5. Flots d'Anosov à équivalence topologique près *versus* actions de groupes discrets à conjugaison près. Le plus souvent en mathématiques, la preuve de l'existence d'un objet satisfaisant des propriétés prescrites utilisent de manière essentielle l'unicité de l'objet-solution recherché. En énonçant ce principe, nous avons à l'esprit par exemple les théorèmes de point fixe contractant, les méthodes usuelles de résolutions d'équations aux dérivées partielles, etc... Pour le problème qui nous intéresse ici au premier chef, à savoir l'équivalence topologique d'un flot donné à un flot modèle, l'objet recherché n'est pas unique, et est seulement défini modulo isotopie le long du flot. Ainsi, cette non-unicité amène dans les preuves un type particulier de difficulté. Il se trouve que cette difficulté se résoud de manière uniforme dans notre contexte en réduisant le problème de l'équivalence topologique entre flots à un problème de *conjugaison* topologique entre actions d'un même groupe.

Pour ce faire, nous montrons que l'action du groupe fondamental Γ sur l'espace des orbites Q^Φ suffit à caractériser le flot d'Anosov à équivalence topologique près. Avant d'énoncer la proposition exprimant avec clarté cette observation, commençons par établir les propriétés topologiques particulièrement agréables de l'espace des orbites Q^Φ et de la projection canonique $\pi : \widetilde{M} \to Q^\Phi$:

Proposition 1.35. *Pour tout flot d'Anosov Φ^t de codimension 1, l'espace des orbites Q^Φ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$, et l'application $\pi : \widetilde{M} \to Q^\Phi$ est une fibration $\mathbb{R}$-principale localement triviale.*

Idée de la preuve Cette proposition est démontrée dans [**16**], ainsi que dans [**78**] avec une preuve différente basée sur le lemme de pistage.

Le premier pas consiste à démontrer que Q^Φ est une variété de dimension $n-1$ (éventuellement non-séparée). Celà découle immédiatement du fait que pour

chaque orbite $\tilde{\theta}$ de $\widetilde{\Phi}^t$, il existe une petite transversale locale qui rencontre θ et qui ne rencontre chaque orbite de $\widetilde{\Phi}^t$ qu'en au plus un point. Or, comme nous il a été vu auparavant, il existe des petites transversales locales dont l'intersection avec chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, ainsi qu'avec chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, est connexe. On en déduit aisément l'assertion.

On démontre ensuite que Q^Φ est séparé au sens de Hausdorff. Soient $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ deux orbites distinctes de $\widetilde{\Phi}^t$, il s'agit de démontrer qu'il existe des ouverts U_1 et U_2 saturés par le flot contenant respectivement $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2$ et qui soient disjoints l'un de l'autre. Pour chaque i, soit F_i la feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ contenant $\tilde{\theta}_i$, et V_i le saturé de F_i par le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$. Ce sont des voisinages ouverts des $\tilde{\theta}_i$: s'ils sont disjoints, l'affirmation est démontrée. Sinon, il existe une feuille u de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ qui coupe F_i en un unique point x_i. Si x_1 et x_2 sont différents, il existe deux ouverts disjoints dans u qui contiennent respectivement x_1 et x_2. Les saturés par $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ de ces ouverts sont alors des voisinages disjoints de $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$: nous avons conclu également dans ce cas.

Reste le cas où x_1 et x_2 sont égaux, ce qui signifie que les $\tilde{\theta}_i$ sont dans une même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. En inversant les rôles des feuilletages stable et instable, on démontre aussi l'affirmation, sauf peut-être dans le cas où les $\tilde{\theta}_i$ sont en outre dans une même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. Mais comme chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ rencontre chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ en au plus un point, ceci signifie que $\tilde{\theta}_1$ et $\tilde{\theta}_2$ sont égaux, ce qui est exclu par hypothèse.

Étant séparé au sens de Hausdorff, Q^Φ est une $(n-1)$-variété au sens usuel. Elle admet un feuilletage par plans de codimension 1 : la projection par π de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Le Théorème de Palmeira implique donc que cette variété est difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.

Enfin, il est aisé de démontrer que la projection π est une fibration localement triviale, puisque les transversales locales produisent des sections locales de π. ∎

Dans la proposition suivante, Ψ^{-s} désigne le flot obtenu à partir de Ψ^s en inversant le sens de parcours des trajectoires.

Proposition 1.36. *Soient (M, Φ^t) et (N, Ψ^t) deux flots d'Anosov de codimension 1. Notons Γ, Γ' les groupes fondamentaux de M, N, et Q^Φ, Q^Ψ les espaces des orbites de Φ^t, Ψ^s (c'est-à-dire, les espaces de feuilles des flots relevés $\widetilde{\Phi}^t$, $\widetilde{\Psi}^s$). Alors, il existe une conjugaison topologique f entre (M, Φ^t) et $(N, \Psi^{\pm s})$ si et seulement si il existe un isomorphisme $f_* : \Gamma \to \Gamma'$ et un homéomorphisme $\bar{f} : Q^\Phi \to Q^\Psi$ qui soit équivariant, i.e., vérifiant :*

$$f(\gamma\theta) = f_*(\gamma) f(\theta)$$

De plus, si tel est le cas, f peut toujours être choisie de sorte qu'elle se relève en un homéomorphisme $\tilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ vérifiant :

$$\pi_\Phi \circ \tilde{f} = \bar{f} \circ \pi_\Psi$$

où $\pi_\Phi : \widetilde{M} \to Q^\Phi$ et $\pi_\Psi : \widetilde{N} \to Q^\Psi$ sont les applications quotients naturelles.

La proposition 1.36 réduit donc comme annoncé la preuve de l'existence de l'équivalence topologique f à celle de la conjugaison $\bar{f}$, ce dernier problème ne contenant plus l'indétermination "à isotopie près le long de Φ^t".

Idée de la preuve Une des implications est évidente. Pour démontrer l'autre, on suppose l'existence d'une paire $(f_*, \bar{f})$, et essayons d'obtenir une équivalence topologique. On choisit une transversale complète T quelconque (non connexe) de Φ^t dans M. Cette transversale se relève en une tranversale Γ-invariante $\widetilde{T}$ de $\widetilde{\Phi}^t$. Si

T est choisie convenablement, chaque composante connexe de $\widetilde{T}$ rencontre chaque orbite de $\widetilde{\Phi}^t$ en au plus un point, et toute orbite de $\widetilde{\Phi}^t$ rencontre un nombre fini non nul de composantes connexes de $\widetilde{T}$. Comme π_Ψ est une fibration (localement) triviale, pour chaque composante connexe $\widetilde{S}$ de $\widetilde{T}$, la restriction de $\bar{f} \circ \pi_\Phi$ peut se relever en une application $\tilde{f}_{\tilde{S}}$ à valeurs dans $\widetilde{N}$. Ses relèvements peuvent être opérés de manière f_* équivariante.

Pour chaque point $\tilde{x}$ de $\widetilde{M}$, il existe une composante connexe $\widetilde{S}$, un réel t et un point $\tilde{y}$ tels que $\tilde{x} = \widetilde{\Phi}^t(\tilde{y})$. On définit alors $\tilde{f}(\tilde{x})$ comme étant $\Psi^t(\tilde{f}_{\tilde{S}}(\tilde{y}))$. Bien sûr, cette définition n'est pas licite, car l'orbite de $\tilde{x}$ rencontre *a priori* plusieurs composantes connexes différentes de $\widetilde{T}$. Ce procédé associe donc plutôt à chaque $\tilde{x}$ un nombre fini de points de $\widetilde{N}$. Mais ces points $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_k$ appartiennent tous à la même orbite $\tilde{\theta}$ de $\widetilde{\Psi}^s$ (la même fibre de π_Ψ). En choisissant une partition de l'unité sur M, on se permet d'associer à chacun des $\tilde{z}_i$ un coefficient : on peut alors définir $\tilde{f}(\tilde{x})$ comme étant le barycentre dans $\tilde{\theta} \approx \mathbb{R}$ des z_i affectés de ces coefficients. On obtient de la sorte une application continue $\tilde{f}$ qui est équivariante et qui satisfait :

$$\bar{f} \circ \pi_\Phi = \pi_\Psi \circ \tilde{f}$$

Étant équivariante, cette application induit une application continue $f : M \to N$ envoyant orbites de Φ^t sur orbites de Ψ^t.

Le point est que cette application n'est pas nécessairement injective. Le défaut d'injectivité se produit le long des feuilles : on peut définir un cocycle $v : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(\Phi^t x) = \Psi^{v(t,x)} f(x)$$

Et f est injective si et seulement si, à x fixé, la fonction $v(x,t)$ est strictement croissante ou décroissante en t. Mais cette propriété peut être obtenue en modifiant les valeurs de f en poussant le long des orbites de Ψ^s. Cette modification adéquate peut être obtenue par un procédé de diffusion le long des trajectoires de Ψ^s. Nous ne ferons qu'indiquer succintement ici que ce procédé aboutit si on peut établir qu'il existe un temps t_0 tel que pour tout x, $v(x,t_0)$ est non nul, et que l'existence d'un tel temps t_0 s'obtient assez facilement grâce à la propriété Anosov. Voir [**16**] pour plus de détails.

Une fois corrigé ce défaut d'injectivité le long des feuilles, on obtient un homéomorphisme entre M et N. Cet homéomorphisme est une équivalence topologique entre Φ^t et Ψ^s si les $v(x,t_0)$ définis ci-dessus sont positifs. S'ils sont négatifs, l'homéomorphisme obtenu est une équivalence topologique entre Φ^t et Ψ^{-s}. ∎

Remarque 1.37. Cette idée de diffusion le long des feuilles est dûe, de manière indépendante, à E. Ghys (voir [**102**]) et M. Gromov ([**115**] ; il convient de signaler que le preprint dont cet article a émergé est bien antérieur à l'année de publication !)

Remarque 1.38. Dans [**16**], la propriété Anosov est utilisée de manière essentielle pour obtenir l'injectivité le long des feuilles, i.e., démontrer l'existence du temps t_0 pour lequel les $v(x,t_0)$ sont non-nuls. Dans [**147**], S. Matsumoto et T. Tsuboi étendent la proposition 1.36 dans un cadre beaucoup plus général. Ils pallient à l'absence de l'hypothèse Anosov en obtenant le fait suivant : *Soient* (M, Φ^t) *et* (N, Ψ^t) *deux flots sur des variétés compactes, dont les orbites sont à relèvement*

d'homotopie trivial[9]*. Alors, toute équivalence d'homotopie entre* (M, Φ^t) *et* (N, Ψ^s) *envoyant orbites sur orbites peut être transformée après diffusion le long des trajectoires en une équivalence topologique.* Leur preuve repose sur une utilisation judicieuse du Théorème de transversalité de Thom.

Remarque 1.39. Dans la proposition 1.36, une petite ambiguité demeure : l'homéomorphisme f obtenu est-il une équivalence topologique ou une "anti-équivalence" (i.e., renversant l'orientation des orbites) ?

Nous disposerons d'un critère élémentaire pour distinguer aisément ces deux cas de figure :

Lemme 1.40. *Dans la proposition 1.36, l'homéomorphisme* f *est une équivalence topologique si et seulement si il envoie le feuilletage stable de* Φ^t *sur feuilletage stable de* Φ^s*, et le feuilletage instable de* Φ^t *sur le feuilletage instable de* Ψ^s*.*

Si tel n'est pas le cas, alors il permute feuilletages stables et instables.

Ce critère évident se détecte aisément sur $\bar{f}$ grâce au concept suivant :

Définition 1.41. *Les projections dans* Q^Φ *de* $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ *et* $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ *sont des feuilletages par droites et hyperplans. Nous les notons* $\mathcal{G}^s$ *et* $\mathcal{G}^u$*. Les applications canoniques sont notées* $p^s : Q^\Phi \to \mathcal{L}^s$*,* $p^u : Q^\Phi \to \mathcal{L}^u$*.*

Corollaire 1.42. *Dans la proposition 1.36,* f *est une équivalence topologique si et seulement si* $\bar{f}$ *envoie le feuilletage* $\mathcal{G}^s(\Phi)$ *sur* $\mathcal{G}^s(\Psi)$*. Si tel n'est pas le cas, alors* $\bar{f}$ *envoie* $\mathcal{G}^s(\Phi)$ *sur* $\mathcal{G}^u(\Psi)$*, et* $\mathcal{G}^u(\Phi)$ *sur* $\mathcal{G}^s(\Psi)$*.*

Remarque 1.43. Lorsque M est de dimension 3, on peut en fait facilement obtenir un peu mieux : reconstruire à partir de la simple donnée $(Q^\Phi, \mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u, \Gamma)$ le flot d'Anosov lui-même (toujours à équivalence près), tout du moins, dans le cas guère restrictif (à revêtement fini près) où $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont transversalement orientés.

En effet : Q^Φ est de classe C^∞. Notons TQ^Φ son fibré tangent, et PTQ^Φ le projectifié de TQ^Φ. Pour tout θ dans Q^Φ, $PT_\theta Q^\Phi$ contient deux éléments particuliers : les directions tangentes à $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$. Le complémentaire de ces directions dans Q^Φ, $PT_\theta Q^\Phi \approx \mathbb{R}P^1$ est l'union de deux intervalles. Comme les feuilletages sont supposés transversalement orientés, on peut sélectionner de manière continue et Γ-équivariante un de ces intervalles pour chaque θ. Ceci définit un ouvert $U \subset PTQ^\Phi$ qui est préservé par (la différentielle de) l'action de Γ. Cet ouvert est clairement homéomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.44. *L'action de* Γ *sur* U *est libre et proprement discontinue.*

La preuve de cette proposition (non publiée) ne présente pas de difficultés véritables si ce n'est de déployer une logistique que nous préférons réserver à d'autres circonstances. Tout au plus indiquons nous au lecteur averti que la preuve que nous avons en tête fait intervenir une mesure borélienne invariante par le flot qui charge les ouverts : par exemple, la mesure de Margulis. Pour le lecteur un peu moins averti il suffit sans doute de se placer dans le cas particulier où Φ^t préserve une forme volume - i.e., celui où Γ préserve une forme volume sur Q^Φ. Cette forme volume, associée aux feuilletages $\mathcal{G}^s$ et $\mathcal{G}^u$ définit naturellement une métrique lorentzienne sur Q^Φ selon le (joli) procédé suivant décrit dans [**9, 11**] : la norme d'un vecteur

[9] Il suffit par exemple que pour chacun des flots l'union des orbites périodiques soit d'intérieur vide.

tangent v en un point θ est l'évaluation de la forme volume sur la paire (v^s, v^u), où $v = v^s + v^u$, et v^s, v^u sont tangents en θ aux feuilletages $\mathcal{G}^s$, $\mathcal{G}^u$. Alors, l'ouvert U n'est autre que (le projectifié de) l'espace des vecteurs tangents de normes lorentziennes, disons, négatives. Et il est facile de voir que le groupe des isométries d'une variété lorentzienne agit proprement sur l'espace des vecteurs de norme négative (hint : le stabilisateur d'un tel vecteur tangent est compact).

Le quotient $\Gamma\backslash U$ est donc une variété M'. Remarquons qu'elle a la même régularité que le flot. Remarquons aussi que les fibres de la fibration de U sur Q^Φ induisent un feuilletage Ψ de dimension 1 sur M'. On remarque même les feuilles de ce feuilletage admettent un paramétrage canonique : chaque fibre est un ouvert de la droite projective $PT_\theta Q^\Phi \approx \mathbb{R}P^1$, projectivement isomorphe à la demi-droite affine $]0, +\infty[$. On peut donc définir le "rapport" entre deux points de cette fibre, dont le logarithme définit une "distance" entre deux points de la fibre. Puisque la différentielle d'un élément de Γ préserve la structure projective de ces fibres, cette distance le long des fibres est Γ-invariante. Elle induit donc le paramétrage annoncé sur les feuilles de Ψ, et donc, un flot Ψ^s. Ce flot est seulement Hölder continu, mais le feuilletage de dimension 1 qu'il engendre est lisse.

Maintenant, par simple invocation de la proposition 1.36 et du corollaire 1.42 (où, plus véritablement, de la remarque 1.38), ce flot Ψ^s est topologiquement équivalent à Φ^t.

Cette remarque devrait convaincre le lecteur qu'on peut véritablement réduire notre sujet d'étude à celle de certains groupes de difféomorphismes du plan (quadrillé), vérifiant certaines propriétés qu'il est fastidieux d'expliciter.

1.3.6. Caractérisation par les feuilletages faibles. Dans ce paragraphe, nous ne nous intéressons qu'au cas tridimensionel, c'est-à-dire le cas où M est de dimension trois.

Au paragraphe précédent, nous avons vu comment le problème d'équivalence topologique entre flots d'Anosov se réduit à un problème bidimensionnel de conjugaison topologique entre actions de groupes sur le plan. Mais nous allons voir ici que, essentiellement, nous n'en sommes qu'à la moitié du chemin : le problème peut en fait se réduire à la dimension un.

Théorème 1.45 (Brunella [**49**]). *Deux flots d'Anosov en dimension* 3 *topologiquement transitifs sont topologiquement équivalents si et seulement si leurs feuilletages faibles stables sont conjugués.*

Remarque 1.46. Dans l'article [**147**], S. Matsumoto et T. Tsuboi s'intéressent au problème de la classification à conjugaison topologique près de bi-feuilletages, i.e., de paires $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ de feuilletages de codimension 1 transverses l'un par rapport à l'autre. Remarquons que les feuilletages faibles d'un flot d'Anosov forment le prototype même d'un tel bi-feuilletage. Ils y montrent qu'il existe des bi-feuilletages $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ tels que le feuilletage $\mathcal{F}_1$ et le feuilletage $\mathcal{F}_2$ soient respectivement conjugués aux feuilletages faibles stable et instable d'un flot d'Anosov (en l'occurence, le flot géodésique d'une surface, voir § 2.2), mais que ses conjugaisons ne peuvent pas être opérées de manière simultanée par un seul homéomorphisme. Celà montre le caractère essentiel de l'hypothèse Anosov dans l'énoncé du Théorème 1.45. Ces exemples de bi-feuilletages sont aussi particulièrement intéressants, car nous suspectons personnellement que les feuilletages intersections $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ sont les seuls feuilletages de dimension 1 transversalement conformément lorentzien plat sur un

fibré en cercles sur une surface de genre au moins 2. Mais, ce faisant, nous abordons un thème que nous souhaitons ne développer que plus tard.

Le Théorème 1.45 indique que les flots d'Anosov sont essentiellement caractérisés (à équivalence topologique près) par l'espace des feuilles faibles $\mathcal{L}^s$, c'est-à-dire, un objet unidimensionel. Mais la réduction à la dimension un que nous voulons présenter ici est de nature légèrement différente : elle est plus précise, au détriment de la généralité.

Tout d'abord, bien qu'une version plus générale peut vraisemblablement être élaborée dans le cas général, nous n'utiliserons ici ce principe que pour les flots d'Anosov *alignables*, c'est-à-dire, rappelons-le, pour lesquels un des espaces de feuilles, disons $\mathcal{L}^s$, est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Dans [**16**], nous montrons que l'autre espace de feuilles $\mathcal{L}^u$ est alors lui aussi homéomorphe à $\mathbb{R}$. On remarque ensuite que toute orbite de $\widetilde{\Phi}^t$ appartient à une et une seule feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$, ainsi qu'à une et une seule feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. On peut ainsi définir un plongement Γ-équivariant de Q^Φ dans le produit $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$, identifiant Q^Φ à un ouvert Q de $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$ (l'action de Γ sur $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$ étant bien sûr l'action diagonale). Le point essentiel est que cet ouvert peut être aisément décrit :

Théorème 1.47 ([**16**]). *Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov alignable sur une variété de dimension 3. Alors, l'espace des orbites Q^Φ s'identifie de manière Γ-équivariante à un ouvert de $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$ qui est :*

– *soit $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$ tout entier, le flot est dit alors* produit.

– *soit l'ouvert compris entre les graphes de deux homéomorphismes $\alpha, \beta : \mathcal{L}^s \to \mathcal{L}^u$.*

Dans le premier cas, le cas produit, nous verrons que le flot d'Anosov est alors topologiquement équivalent à la suspension d'un difféomorphisme linéaire (Anosov) du tore (voir la section 2.1 pour une définition - si nécessaire - et la proposition 2.9 pour une démonstration). Ce cas est donc parfaitement identifié et compris, et dans la suite, nous sous-entendrons souvent par flot d'Anosov alignable un flot d'Anosov alignable *non produit.*

Dans le cas non produit, nous obtenons deux homéomorphismes α, β, dont la simple existence a déjà des implications non-triviales et peut-être assez surprenantes :

Corollaire 1.48. *Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov alignable non-produit sur une variété de dimension 3. Alors :*

– *M est orientable,*

– *le flot Φ^t est topologiquement équivalent à son inverse, l'équivalence topologique étant homotope à l'identité,*

– *il n'existe aucune surface compacte sans bord immergée dans M de manière transverse à Φ^t .*

Ce corollaire s'établit assez facilement. Le point essentiel est que la paire $(\alpha^{-1} \circ p^u, \beta \circ p^s)$ définit un homéomorphisme Γ-équivariant de $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^u$ qui préserve $Q \approx Q^\Phi$ tout en échangeant les feuilletages verticaux-horizontaux. Il induit donc d'après la proposition 1.36 et le corollaire 1.42 une équivalence topologique entre le flot et son inverse, qui est de plus homotope à l'identité. Une surface immergée transverse à Φ^t induit une classe de cohomologie dans $H^1(M, \mathbb{Z})$ dont l'évaluation sur toute orbite de Φ^t - orientée par son sens de parcours - est positive ou nulle :

ceci est incompatible avec l'existence de l'équivalence topologique que nous venons d'exhiber. Enfin, cette équivalence topologique échange les deux feuilletages faibles entre eux : ils sont donc tous les deux simultanément transversalement orientables ou non-orientables. Comme le flot est orienté par son sens de parcours, la variété M est donc orientée[10].

Cette simple observation a donc déjà été fertile en retombées. Mais la remarque essentielle ici est que la simple donnée de $\mathcal{L}^s$, muni de l'action de Γ, et de l'homéomorphisme $\tau^s = \alpha^{-1} \circ \beta$ suffit pour recomposer de manière Γ-équivariante l'espace des orbites (Q^Φ, Γ) à conjugaison topologique près, et par suite, le flot d'Anosov lui-même à équivalence topologique près. En effet, l'ouvert Q, et par suite Q^Φ, s'identifie de manière équivariante à l'ouvert de $\mathcal{L}^s \times \mathcal{L}^s$ compris entre les graphes de l'application identité et de τ^s. On peut donc énoncer :

Proposition 1.49. *Deux flots d'Anosov alignables (M, Φ^t), (N, Ψ^s) en dimension 3 sont topologiquement équivalents si et seulement si il existe un homéomorphisme $f : \mathcal{L}^s(\Phi) \to \mathcal{L}^s(\Psi)$ équivariant pour les actions des groupes fondamentaux pour lequel $f \circ \tau^s_\Phi = \tau^s_\Psi \circ f$.*

Remarque 1.50. L'homéomorphisme τ^s agit sans point fixe sur $\mathcal{L}^s$ et il commute avec l'action de Γ : le quotient de $\mathcal{L}^s$ par l'action de τ^s est donc un cercle topologique $\mathcal{S}^s$ sur lequel agit le groupe Γ. On peut donc ainsi associer de manière naturel au flot d'Anosov alignable une action fidèle du groupe fondamental sur le cercle dont, à peu de choses près, la classe de conjugaison est un invariant complet d'équivalence topologique du flot. Le "peu de choses près" n'est pas anodin : en effet, une action donnée de Γ sur le cercle se relève de plusieurs manières différentes sur la droite $\mathbb{R}$, ces différents relevés étant différentiés par un élément de $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. On peut s'interroger s'il est vrai que parmi tous ces relevés, une seule peut correspondre à un flot d'Anosov alignable ?

Remarque 1.51. (**Régularité de** τ^s) L'homéomorphisme τ^s n'est en général qu'Hölder (cette remarque est faite tardivement dans [**23**]). Il est remarquable qu'il ne peut être C^1 que si le flot est (à revêtements finis près) topologiquement équivalent au flot géodésique d'une surface à courbure négative (proposition 6.6). La frontière entre le cas général hölder et le cas C^1 est même plus ténue : d'une part, toute action minimale (et continue) sur le cercle d'un groupe finiment engendré est topologiquement conjuguée à une action Lipschitz (cet énoncé surprenant provient de l'existence d'une mesure harmonique sur le cercle pour l'action du groupe ; il nous a été signalé par B. Deroin). Mais, par ailleurs, toujours sous l'hypothèse où le flot d'Anosov n'est pas à revêtement fini près un flot géodésique, il nous apparaît fort probable (sans que nous sachions le démontrer) que l'action de Γ sur le cercle $\mathcal{L}^s$ n'est *jamais* conjuguée à une action de classe C^1.

[10] S. Fenley a exploité cette remarque pour exhiber des variétés hyperboliques admettant des flots d'Anosov non alignables. C'est, à notre connaissance, le seul procédé permettant de montrer ce type de résultat.

CHAPITRE 2

Exemples

Nous ne produisons les exemples connus qu'assez tardivement, mais nous avons jugé préférable de regrouper leur présentation en un seul chapitre, afin de faciliter la vision synthétique. Excepté le cas facile des suspensions, nous ne décrivons ici que des flots d'Anosov en dimension 3.

2.1. Suspensions

L'exemple le plus simple de flot d'Anosov est véritablement celui des suspensions de difféomorphismes d'Anosov.

2.1.1. Des suspensions en général. Rappelons tout d'abord ce qu'est la suspension d'un difféomorphisme $f : S \to S$: sur le produit $S \times \mathbb{R}$, on considère l'action du groupe $\mathbb{Z}$ suivante :

$$n.(x,t) = (f^n(x), t-n)$$

Cette action est manifestement libre et propre : en effet, la projection sur la deuxième coordonnée t est équivariante lorsqu'on considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translations entières. Sur la variété quotient, que nous notons S_f, on dispose d'un flot naturel : celui induit par les translations en t :

$$\Phi_f^s[x,t] = [x, t+s]$$

Il est plus usuel de définir les suspensions d'une manière plus visuelle, en tant que résultat du recollement par f des deux composantes de bord de $S \times [0,1]$. Mais la présentation privilégiée ici a le grand avantage de rendre évident que Φ_f^s a la même régularité que f. Et que le champ de vecteurs sous-jacent est de classe C^{r-1} si f est de classe C^r.

Pour garder l'esprit qui anime ce mémoire, il est plus adéquat de définir les suspensions comme étant les flots topologiquement équivalents à un des Φ_f^s défini ci-dessus. Ceci revient à les définir comme étant :

- le passage au quotient des flots sur $S \times \mathbb{R}$ engendrés par les champs de vecteurs de la forme $u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}$ où $u(x,t)$ est 1-périodique en t,

- ou bien, les flots admettant une section totale S, i.e., les flots Φ^t sur une variété M qui sont transverses à une surface plongée S et pour lesquels il existe un $T > 0$ tel que pour tout point x de M il existe un temps t dans l'intervalle $]0,T[$ pour lequel $\Phi^t(x)$ appartient à S.

Nous nous contentons juste de préciser ici que dans la deuxième formulation, le f permettant de retrouver la première formulation est *l'application de premier retour,* i.e., l'application à un élément x de S associe le point $\Phi^{t(x)}(x)$, où $t(x)$ est le plus petit nombre (strictement) positif t pour lequel $\Phi^t(x)$ appartient à S.

2.1.2. Suspensions linéaires hyperboliques. Il est évident que Φ_f est Anosov dès que f est un difféomorphisme d'Anosov, c'est-à-dire, s'il existe une décomposition $TS = E^s \oplus E^u$ invariante par la différentielle de f, et telle que les vecteurs tangents dans E^s (respectivement dans E^u) sont contractés (respectivement dilatés) exponentiellement sous l'action des itérés positifs de la différentielle de f. Dans la "formulation qui anime l'esprit de ce mémoire", et qui donc sera celle qui dorénavant aura cours, une suspension est un flot d'Anosov dès que l'application de premier retour est un difféomorphisme d'Anosov.

Une fois mise au point cette définition des suspensions, nous pouvons définir notre premier exemple de flot d'Anosov :

Définition 2.1. *Soit A un élément inversible de $GL(n, \mathbf{Z})$. Nous appelons suspension linéaire de premier retour A (ou de monodromie A) la suspension du difféomorphisme du tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ induit par A.*

La proposition suivante est assez évidente :

Proposition 2.2. *Lorsque les valeurs propres de A sont toutes de module différent de 1, la suspension de monodromie A est un flot d'Anosov.*

Définition 2.3. *Un élément de $GL(n, \mathbf{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont de modules différents de 1 est dit* hyperbolique.

Remarque 2.4. On peut montrer que deux suspensions de difféomorphismes linéaires hyperboliques du tore sont topologiquement conjuguées si et seulement si leurs applications de premier retour sont conjuguées dans $GL(n, \mathbf{Z})$. Observons que le problème de conjugaison dans le groupe des matrices entières est un thème très riche, même en dimension 2, de nature arithmétique. Indiquons juste ici qu'il existe des éléments hyperboliques de $GL(2, \mathbf{Z})$ qui ne sont pas conjugués à leur inverse.

Signalons aussi que pour tout difféomorphisme Anosov f du tore, il existe un revêtement fini du tore sur lequel f se relève en un difféomorphisme conjugué à son inverse : En effet, pour tout élément A de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ et pour tout élément u de $\mathbb{Z}^2$, la restriction de A au réseau engendré par u et $A(u)$ s'exprime sous la forme d'une matrice compagnon, qui est bien conjuguée à son inverse.

2.1.3. Caractérisation des suspensions Anosov. Deux suspensions sont topologiquement équivalentes dès que leurs applications de premier retour sont conjuguées. Or, il s'avère que la classification des difféomorphismes d'Anosov est particulièrement simple ; en tout cas, bien plus aisée que la classification à équivalence topologique près des flots d'Anosov :

Théorème 2.5 (Franks [**87**], Newhouse [**159**]). *Tout difféomorphisme d'Anosov dont un des fibrés invariants E^s, E^u est de dimension 1 est (topologiquement conjugué à) un difféomorphisme linéaire hyperbolique du tore.*

Nous ne reproduisons pas ici la preuve complète de ce Théorème, mais le cas de la dimension 2 - qui est le seul intervenant pour les flots d'Anosov en dimension 3 - est suffisamment instructif :

Esquisse de la preuve de 2.5 en dimension 2. Tout d'abord, pour tout difféomorphisme d'Anosov, les fibrés E^s et E^u sont tangents à des feuilletages $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ de S dont les feuilles sont difféomorphes à des espaces affines $\mathbb{R}^k$. Lorsque S est de dimension 2, l'existence de ces feuilletages assure que la surface S est un tore. Chacun de ces feuilletages est un feuilletage par droites, ils sont donc l'un comme

l'autre topologiquement conjugué à la suspension d'un homéomorphisme du cercle à nombre de rotation irrationnel (Théorème de Sacksdeter sur les feuilletages sans holonomie). On ne peut appliquer ici le Théorème de Denjoy, puisque les feuilletages sont seulement C^1, mais comme les espaces de feuilles sont ici Hausdorff, on peut appliquer la remarque 1.28 : les feuilletages sont à feuilles denses, ce qui montre que les homéomorphismes du cercle ci-dessus sont topologiquement conjugués à des rotations. En particulier, ils préservent chacun une métrique euclidienne plate du cercle, ce qui montre que $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ admettent chacun une mesure transverse invariante. Comme ils sont transverses l'un par rapport à l'autre, leurs mesures transverses permettent de définir un atlas sur le tore M tel que :

– dans chaque carte, les plaques de $\mathcal{F}^s$ soient données par $\{x = Cte\}$, et celles de $\mathcal{F}^u$ par $\{y = Cte\}$,

– les changements de carte préservent dx et dy.

Dans cet atlas, les feuilletages sont définis par des formes fermées lisses ω^s, ω^u. De plus, comme les rotations du cercle sont uniquement ergodiques, les mesures transverses invariantes évoquées ci-dessus sont uniques à un facteur multiplicatif près, ce qui assure que les 1-formes fermées ω^s, ω^u sont uniques à facteurs multiplicatifs près. Comme le difféomorphisme d'Anosov préserve chacun des feuilletages, il envoie ω^s sur $\lambda^s\omega^s$, et ω^u sur $\lambda^u\omega^u$, où λ^s et λ^u sont des nombres réels positifs. Comme f est Anosov, il est clair que λ^s est strictement plus grand que 1, et que λ^u est strictement plus petit que 1.

Dans le revêtement universel $\widetilde{M}$, les relevés de $\omega^{s,u}$ sont des 1-formes exactes : il existe donc des fonctions $\varphi^{s,u} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ telles que :

– les fibres de $\varphi^{s,u}$ sont les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^{s,uu}$,

– pour tout élément γ du groupe fondamental Γ de M, il existe deux nombres réels $r^s(\gamma)$ et $r^u(\gamma)$ tels que :

$$\varphi^{s,u} \circ \gamma = \varphi^{s,u} + r^{s,u}(\gamma)$$

– il existe deux nombres r_0^s, r_0^u tels que :

$$\varphi^{s,u} \circ \widetilde{f} = \lambda^{s,u}\varphi^{s,u} + r_0^{s,u}$$

La paire (φ^s, φ^u) identifie donc $\widetilde{M}$ à $\mathbb{R}^2$, de sorte qu'après identification, Γ devient un groupe de translations, et $\widetilde{f}$ une transformation affine A. Remarquons que Γ s'identifie plus précisémment à un réseau de $\mathbb{R}^2$, et donc, après changement de base, à $\mathbb{Z}^2$. La partie linéaire de $\widetilde{f}$ s'identifie donc à un élément de $GL(2, \mathbb{Z})$, de valeurs propres $0 < \lambda^u < 1 < \lambda^s$: c'est donc une matrice hyperbolique. Le Théorème est démontré. ∎

Remarque 2.6. La remarque 2.4 se traduit pour les suspensions sous la forme suivante : *toute suspension Anosov est finiment revêtue par une suspension Anosov topologiquement équivalente à son propre inverse, mais ceci n'empêche pas qu'il existe des suspensions Anosov qui ne sont pas topologiquement équivalentes à leur propre inverse.*

Remarque 2.7. Les variétés ambientes de suspensions sont bien sûr des fibrés en tores sur le cercle, remarquons juste ici que comme la monodromie est hyperbolique, cette fibration sur le cercle est unique à isotopie près. Il s'en suit que sur un

tel fibré sur le cercle, et au vu de la remarque précédente, il n'existe que deux suspensions Anosov à équivalence topologique près, inverses l'une de l'autre. D'après la remarque précédente, il arrive même souvent qu'il n'existe sur ces fibrés sur le cercle qu'une seule classe de flot d'Anosov à équivalence topologique près.

2.1.4. De la nature algébrique des suspensions Anosov. Appelons Sol le groupe de Lie simplement connexe, connexe, résoluble mais non nilpotent, de dimension 3. Il s'agit du groupe linéaire formé des matrices réelles d'ordre 3 de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il contient comme sous-groupe à un paramètre g^t le groupe des matrices diagonales $\{x = y = 0\}$. Il admet aussi des réseaux cocompacts, et l'action à droite de g^t sur les quotients à gauche de Sol par ces réseaux induit un flot. Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer que ces flots sont tous des suspensions linéaires hyperboliques, et que toute suspension Anosov s'obtient de cette manière.

Cette construction s'étend en toute dimension, amenant à des exemples de difféomorphismes d'Anosov qui sont des *automorphismes hyperboliques d'inframilmanifolds* ([**188**]).

Remarque 2.8. Bien davantage est connu sur les difféomorphismes d'Anosov, sans même l'hypothèse codimension 1. Par exemple, *tout difféomorphisme d'Anosov sur le tore $\mathbb{T}^n$ est topologiquement conjugué à un difféomorphisme linéaire hyperbolique* ([**87**]). Il est conjecturé que tout difféomorphisme d'Anosov est un automorphisme hyperbolique d'infranilmanifold.

2.1.5. Structure produit des suspensions. Les feuilletages faibles stables et instables d'une suspension sont évidemment les saturés sous le flot des feuilletages invariants stables et instables de l'application de premier retour. Et il est tout aussi clair que l'espace des orbites du flot Q^Φ s'identifie au revêtement universel $\widetilde{S}$ de la section. De plus, le groupe fondamental Γ est le produit semi-direct du groupe fondamental Γ_S de la section par $\mathbb{Z}$, où l'action du générateur de $\mathbb{Z}$ sur Γ_S est celle de l'automorphisme du groupe fondamental de S induit par f. L'action de Γ sur $Q^\Phi \approx \widetilde{S}$ correspond donc engendrée par l'action de Γ_S sur $\widetilde{S}$ et les relevés de f à $\widetilde{S}$.

La preuve du Théorème 2.5 produite ci-dessus dans le cas bidimensionnel, montre donc clairement que les espaces des feuilles $\mathcal{L}^{s,u}$ associés à une suspension sont homéomorphes à $\mathbb{R}$. De manière plus précise, les projections $p^{s,u}$ s'identifient aux applications $\varphi^{s,u}$ définies lors de cette preuve. Ainsi, les suspensions Anosov sont alignables.

De plus, chaque fibre de φ^s rencontre chaque fibre de φ^u. Ceci montre que une des affirmations apparaissant dans l'énoncé du Théorème 1.47 : les suspensions Anosov sont produits. Montrons l'implication inverse :

Proposition 2.9. *Tout flot d'Anosov en dimension* 3 *alignable produit est une suspension.*

Preuve Lors de la preuve partielle du Théorème 2.5 ci-dessus, nous avons utilisé le fait que tout homéomorphisme du cercle n'admettant que des orbites denses

est topologiquement conjugué à une rotation d'angle irrationnelle. Ce fait est un corollaire du Théorème plus général suivant, dit Théorème de Hölder ([**129**]) :

Soit Γ un groupe d'homéomorphismes de $\mathbb{R}$ préservant l'orientation. On suppose qu'il agit librement sur $\mathbb{R}$, i.e., qu'aucun élément de Γ n'admet de point fixe dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe un homomorphisme injectif $r : \Gamma \to \mathbb{R}$, et une application continue croissante $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout γ dans Γ :

$$\varphi \circ \gamma = \varphi + r(\gamma)$$

De plus, si l'action de Γ sur $\mathbb{R}$ admet une orbite dense, alors elle est minimale, et φ est un homéomorphisme. En d'autres termes, l'action de Γ est dans ce cas conjuguée à une action par translations.

La preuve de la proposition 2.9 est elle entièrement basée sur le magnifique Théorème suivant, dû à V.V. Solodov ([**181**], voir [**16**] pour une preuve) :

Théorème 2.10 (Solodov). *Soit Γ un groupe d'homéomorphismes de $\mathbb{R}$ préservant l'orientation. On suppose que chaque élément de Γ différent de l'identité admet au plus un point fixe, et que s'il en admet un, ce point fixe est de type hyperbolique, i.e., attractif ou répulsif. Alors, il existe un morphisme injectif $\rho : \Gamma \to Aff(1, \mathbb{R})$, à valeurs dans le groupe des transformations affines de la droite réelle, et une application continue croissante $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout γ dans Γ :*

$$\varphi \circ \gamma = \rho(\gamma)(\varphi)$$

De plus, si l'action de Γ sur $\mathbb{R}$ admet une orbite dense, alors elle est minimale, et φ est un homéomorphisme. En d'autres termes, l'action de Γ est dans ce cas conjuguée à une action affine. ∎

Voyons comment démontrer la proposition 2.9 à partir du Théorème de Solodov : on remarque tout d'abord que le Théorème de Solodov s'applique aux actions de Γ sur chaque espace de feuille $\mathcal{L}^{s,u}$. En effet, si x est un point fixe dans, disons, $\mathcal{L}^s$ d'un élément γ de Γ, il correspond à une feuille cylindrique F^s de $\mathcal{F}^s$. L'holonomie de F^s est attractive ou répulsive (suivant le sens de parcours) : il s'en suit que x est un point fixe attractif ou répulsif de γ. De plus, la feuille $(p^s)^{-1}(x)$ de $\mathcal{G}^s$ correspondante contient un unique point fixe θ de γ. Soit g^u l'unique feuille de $\mathcal{G}^u$ contenant θ : elle est γ-invariante, et ne contient pas d'autres points fixes de γ que x (ceci parce que la γ-orbite de tout point de g^u s'accumule sur θ). Or, selon l'hypothèse produit, la restriction de p^s à g^u est surjective. Comme elle est γ-équivariante il s'ensuit que x est l'unique point fixe de γ dans $\mathcal{L}^s \approx \mathbb{R}$. Ceci montre comme voulu que l'action de Γ sur $\mathcal{L}^s$ vérifie les hypothèses du Théorème de Solodov. Il en est de même pour celle sur $\mathcal{L}^u$.

Remarquons que comme les actions de Γ sur $\mathcal{L}^{s,u}$ sont minimales, on obtient au bout du compte que ce sont, après conjugaison topologique, des actions affines. Ces structures affines invariantes sur les espaces de feuilles se recomposent en une structure affine sur Q^Φ qui est Γ-invariante. En fait, Q^Φ muni de cette structure affine est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, et l'action affine de Γ sur Q^Φ est décrite par un morphisme $\rho : \Gamma \to \mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$. De plus, pour chaque élément γ de Γ, la partie linéaire $\Lambda(\gamma)$ de $\rho(\gamma)$ est une matrice diagonale de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^{a(\gamma)} & 0 \\ 0 & e^{-b(\gamma)} \end{pmatrix}$$

Ceci définit deux morphismes $a, b : \Gamma \to \mathbb{R}$. Il doit être clair pour le lecteur que $a(\gamma)$ et $b(\gamma)$ ont toujours le même signe. Par exemple, le noyau de a, ainsi que celui de b, est l'ensemble des éléments de Γ qui ne fixe pas de point dans Q^Φ : a et b ont donc le même noyau, qui est aussi celui de Λ. Nous notons N ce noyau : c'est un sous-groupe distingué de Γ, et $\rho(N)$ est un groupe de translations sur $\mathbb{R}^2$.

D'après le lemme de pistage, il existe un temps T et un nombre réel positif ϵ tel que toute orbite partant d'un point x de M, et revenant au bout d'un temps supérieur à T dans le ϵ-voisinage de x, est pistée par une orbite périodique. Cette propriété, énoncée dans Q^Φ, signifie que tout élément θ de Q^Φ admet un voisinage U tel que si un élément non-trivial γ de Γ envoie θ dans U, alors $\Lambda(\gamma)$ est non-trivial. Ceci implique que l'action de N sur Q^Φ est libre et propre, et que $\rho(N)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$. C'est donc un groupe abélien sans torsion de rang k au plus deux.

Si N est le groupe trivial, alors Γ est abélien. On en déduit qu'il admet un point fixe global dans $Q^\Phi \approx \mathbb{R}^2$. Ceci implique que Γ est cyclique, et que Φ^t n'admet qu'une orbite périodique : absurde.

Le rang k est donc au moins 1 : s'il est exactement 1, N est contenu dans une droite de $\mathbb{R}^2$ qui est $\Lambda(\Gamma)$-invariante. Cette droite est donc $\{x = 0\}$ ou $\{y = 0\}$. Donc, une des deux fonctions coordonnées, disons la première, x, est $\rho(\Gamma)$-invariante. Composée avec π^Φ, elle définit une submersion surjective de $\widetilde{M}$ sur $\mathbb{R}$ qui est constante sur les orbites de Γ. Elle induit donc une submersion de M sur $\mathbb{R}$. Ceci contredit la compacité de M.

Donc, le rang k est 2, en d'autres termes, N est un réseau de $\mathbb{R}^2$. Il est de plus $\Lambda(\Gamma)$-invariant. Le seul élément que nous en retirons, et qui va nous suffire par conclure, est que ceci montre que le déterminant de $\Lambda(\gamma)$ vaut 1. Donc, pour tout γ, les coefficients diagonaux $a(\gamma)$ et $b(\gamma)$ sont égaux. Donc, *le morphisme ρ est à valeurs dans le groupe Sol.*

À la remarque 1.43, nous avons défini un certain ouvert U de PTQ^Φ. Nous remarquons que cet ouvert U s'identifie à une orbite ouverte de l'action de la différentielle de l'action affine de Sol sur $\mathbb{R}^2$. Cette action de Sol sur U est même simplement transitive. Alors, la Proposition 1.44 implique que $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de Sol. En appliquant le contenu de la remarque 1.43, on obtient même que $\rho(\Gamma)$ est un réseau de Sol. Pour conclure, il suffit de remarquer que sous l'identification $U \approx$ Sol provenant de l'application d'évaluation, le flot Ψ^s défini à la remarque 1.43 correspond au flot provenant de l'action à droite du sous-groupe g^t de Sol : le flot d'Anosov initial Φ^t est donc topologiquement équivalent au flot suspension défini par $\rho(\Gamma)$ à la section 2.1.4. ∎

Remarque 2.11. Le Théorème 2.9 reste valable pour les flots d'Anosov topologiques, bien que la partie finale de la preuve n'est pas valable dans ce contexte plus général, en raison de l'utilisation de la Remarque 1.43. Mais il n'est pas difficile d'aménager cette partie finale dans le cas des flots d'Anosov topologiques.

Remarque 2.12. Le groupe Sol est précisément le groupe des isométries de l'espace de Minkowski de dimension 2 préservant l'orientation ainsi que l'orientation chronologique. La preuve ci-dessus a essentiellement consisté à démontrer que le flot préserve une métrique lorentzienne plate.

2.2. Flot géodésique

2.2.1. Flots géodésiques en courbure variable. Soit Σ une variété compacte sans bord, munie d'une métrique riemannienne g de classe C^2. Notons $T^1\Sigma$ le fibré unitaire tangent à Σ. Le *flot géodésique de S* est le flot Φ_g^t sur $T^1\Sigma$ qui, au temps t, à un vecteur tangent v associe le vecteur unitaire tangent à η_v en $exp(tv)$, où η_v est la géodésique définie par v, et $exp(tv)$ le point de η_v à distance t dans η_v du point base de v.

La remarque fondamentale, établie par Anosov [**6**] - ce qui est à l'origine de la terminologie "flot d'Anosov" - est que *si M est à courbure négative, alors le flot géodésique Φ_g^t est d'Anosov.*

Ceci est techniquement délicat à établir, nous nous contenterons ici de décrire plus loin le cas de la courbure constante, et celà, lorsque Σ est de dimension 2 (et donc $M = T^1\Sigma$ de dimension 3).

Pour l'instant, nous voulons justifier un abus de langage courant : nous parlerons toujours *du* flot géodésique de la surface[1], alors que le flot dépend du choix d'une métrique. Ce péché (véniel) est complètement absout par le fait suivant : *les flots géodésiques de métriques riemanniennes à courbure négative sur une même surface Σ sont topologiquement équivalents, les équivalences topologiques pouvant de plus être choisies isotopes à l'identité.* Pour donner un sens à cette remarque, il faut d'abord observer que les divers flots géodésiques sont bien définis sur la même variété, ce qui peut-être n'est pas immédiatement évident puisque, pour simplifier, nous l'avons défini précédemment sur le fibré unitaire tangent à la surface, ce qui semble dépendre de la métrique. Pour contourner cette légère contrariété, il suffit de définir le flot géodésique sur le *projectifié positif de l'espace tangent à Σ :* c'est le fibré sur Σ, noté $P^+T\Sigma$, dont les fibres sont les espaces de rayons de chaque $T_x\Sigma$. Ce fibré ne dépend pas de la métrique choisie, et il est clair qu'on peut fort bien définir le flot géodésique sur ce fibré, en remplaçant "vecteur unitaire" par "direction tangente orientée".

Une fois mise en place une variété sur laquelle vivent les divers flots géodésiques, nous devons montrer notre affirmation d'unicité à équivalence topologique près des flots d'Anosov. Elle s'obtient à partir des deux remarques suivantes :

– **(Coordonnées isothermes)** *Toute classe de conforme de métrique sur Σ contient une et une seule métrique à courbure constante -1.* Ceci signifie que toute métrique g sur Σ est de la forme $e^{2f}g_0$ où g_0 est une métrique à courbure constante -1. De plus, sa courbure en tout point est alors $-e^{-2f}(\Delta_0(f)+1)$ où Δ_0 est l'opérateur laplacien de g_0. Il apparait donc que, dans une classe conforme donnée, les métriques à courbure négative forment un sous-espace connexe.

– **(Connexité de l'espace de Teichmüller)** *L'espace des métriques à courbure constante -1 sur Σ est connexe.* L'espace des métriques à courbure constante à isotopie près - l'espace de Teichmüller - est connexe. L'espace des métriques à courbure constante est donc lui-même connexe.

Ces deux remarques rassemblées montrent la connexité de l'espace des métriques riemanniennes de classe C^2 à courbure négative : en effet, elles mettent en évidence une fibration de cet espace à fibres connexes sur un espace connexe - l'espace de Teichmüller. Comme les flots géodésiques associés sont Anosov, la stabilité structurelle des flots d'Anosov implique donc le résultat annoncé.

[1]Notons aussi que parler du flot géodésique d'une surface riemannienne peut induire une confusion : le flot n'est pas défini sur la surface, mais sur son fibré unitaire tangent.

Remarque 2.13. Ce phénomène admet une extension encore plus générale : même s'il est grossièrement faux que tous les flots géodésiques de Σ soient Anosov, ils sont quand même tous semi-conjugués au flot géodésique Anosov, au sens où pour toute métrique g, et pour toute métrique g_0 à courbure constante -1, il existe une application continue $f : P^+T\Sigma \to P^+T\Sigma$ envoyant les orbites du flot géodésique Φ_g^t sur celles de $\Phi_{g_0}^t$. Ceci a été observé en premier, dans l'esprit, par Morse ([**154, 155**]). M. Gromov a étendu ce résultat de la manière suivante ([**114**]) : *à tout groupe hyperbolique (au sens de Gromov)(par exemple, le groupe fondamental d'une variété admettant une métrique à courbure négative), il associe un "flot" dont les orbites correspondent aux quasi-géodésiques du groupe, modulo une certaine relation d'équivalence.* Cette construction illustre de manière frappante le fait qu'en courbure négative - dans le cas Anosov aimerions nous pouvoir préciser - le flot géodésique est davantage une notion associée à la topologie, et non au choix d'une métrique comme il pourrait sembler au premier abord.

2.2.2. De la nature algébrique des flots géodésiques : le cas à courbure constante. Lorsque la courbure de la métrique est constante, la surface riemannienne Σ est isométrique au quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ (ici, de dimension 2, mais le lecteur s'avisera de lui-même que l'essentiel de nos observations restent valables en dimension supérieure) par un groupe fuchsien, i.e, un sous-groupe discret cocompact $\bar{\Gamma}$ de $G = \mathrm{SO}_0(1,2) \approx \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$, qui est le groupe des isométries de $\mathbb{H}^2$. Alors, le fibré unitaire tangent $T^1\Sigma$ s'identifie au quotient du fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$ par la différentielle de l'action de $\bar{\Gamma}$. Par ailleurs, la différentielle de l'action de G agit simplement transitivement sur $T^1\mathbb{H}^2$: ceci fournit, modulo le choix d'un vecteur unitaire tangent v_0, une identification entre $T^1\mathbb{H}^2$ et G, envoyant l'action différentielle de $\bar{\Gamma}$ sur l'action de $\bar{\Gamma}$ sur G par translation à gauche. On vérifie aisément que, si v_0 est choisi convenablement, cette identification envoie les orbites du flot géodésique sur $T^1\mathbb{H}^2$ sur les orbites de l'action à droite du sous-groupe de $G \approx \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ formé des (éléments représentés par les) matrices diagonales g^t de la forme :

$$g^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, tout comme les suspensions de difféomorphismes linéaires, les flots géodésiques en courbure constante sont des flots algébriques, au sens où ils sont définis par l'action à droite d'un sous-groupe à un paramètre sur un espace homogène quotient d'un groupe de Lie par un réseau.

Il est facile de vérifier avec cette présentation que ces flots géodésiques sont bien des flots d'Anosov : en effet, notons $h_\pm^t$ les sous-groupes à un paramètres unipotents triangulaires de G :

$$h_+^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h_-^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, l'action par conjugaison de g^t envoie h_+^s sur $h_+^{se^{2t}}$, et $h_-^{se^{-2t}}$. Ceci signifie que le flot définit par l'action à droite de g^t envoie chaque orbite (à droite) de h_+^s sur une autre orbite de h_+^s tout en contractant exponentiellement le paramétrage de ces orbites. Une autre propriété analogue de dilatation exponentielle des orbites (à droite) de h_-^+, on obtient que g^t définit bien un flot d'Anosov, dont les feuilles

stables fortes sont les orbites à droite de h^s_+, et dont les feuilles instables fortes sont les orbites à droite de h^s_-.

Remarquons qu'ici G n'est pas simplement connexe : il est homéomorphe à un tore solide $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$. Son revêtement universel est donc un revêtement cyclique $p : \widetilde{G} \to G$. Le groupe fondamental Γ de $\bar{\Gamma}\backslash G$ admet une extension centrale par $\mathbb{Z}$, et s'identifie à un réseau de $\widetilde{G}$.

Les initiés observeront que cette extension centrale est celle de classe d'Euler maximale $2g-2$, ce qui signifie que si δ désigne un générateur du centre Z de $\widetilde{G}$, l'intersection entre Γ et Z est engendrée par δ^{2g-2}. Un soupçon de bon sens suffit pour réaliser que cette condition est superflue, et que tout réseau cocompact Γ de $\widetilde{G}$ fait l'affaire, au sens où l'action à droite[2] de g^t définit encore un flot d'Anosov sur le quotient à gauche $\Gamma\backslash\widetilde{G}$:

Définition 2.14. *Un flot géodésique généralisé est un flot défini sur une variété $\Gamma\backslash\widetilde{G}$ par l'action à droite du sous-groupe à un paramètre g^t, où Γ est un réseau cocompact quelconque de $\widetilde{G}$.*

Au vu de tout ce qui précède, les flots géodésiques généralisés sont des flots d'Anosov, les feuilletages stables et instables étant définis comme ci-dessus par (les relevés de) $h^s_\pm$.

Remarque 2.15. Les feuilletages forts sont donc lisses, et même analytiques.

Remarque 2.16. Dans [**140**], il est montré que les réseaux cocompacts de $\widetilde{G}$ sont de niveau fini, ce qui signifie qu'ils intersectent nécessairement le centre Z. De manière plus précise, les variétés quotient $\Gamma\backslash\widetilde{G}$ sont toutes des variétés de Seifert, admettant des fibrations de Seifert sur des variétés orbifolds. Au lieu de définir toutes ces notions, il nous suffit ici d'indiquer que les variétés ainsi obtenues sont toutes finiment revêtues par des fibrés en cercles usuels sur de braves surfaces (ceci s'obtient par le lemme de Selberg : tout sous-groupe de type fini de G admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion). De plus, ces fibrés en cercles ne sont pas quelconques : chacun d'entre eux est un revêtement fini du fibré unitaire tangent de la surface sous-jacente (ceci parce que la projection dans G d'un réseau cocompact de $\widetilde{G}$ est un réseau cocompact de G).

Remarque 2.17. Une autre définition équivalente du groupe $\widetilde{G}$ est la suivante : notons $\widetilde{\mathbb{R}}P^1$ le revêtement universel de $\mathbb{R}P^1$, équippé de la structure projective réelle relevée de la structure projective réelle canonique de $\mathbb{R}P^1$. Alors, $\widetilde{G}$ est précisément le groupe de tous les automorphismes projectifs réels de $\widetilde{\mathbb{R}}P^1$. De plus, le centre Z est exactement le groupe de Galois du revêtement $\widetilde{\mathbb{R}}P^1 \to \mathbb{R}P^1$.

2.2.3. Espaces de feuilles. Rappelons le modèle de l'hyperboloïde de $\mathbb{H}^2$: on considère dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,2}$ - i.e., $\mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique $Q(x,y,z) = -z^2 + x^2 + y^2$ - une nappe $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire, une composante connexe) de l'hyperboloïde $\{Q = -1\}$. Alors, la restriction de Q à $\mathcal{H}$ est une métrique

[2]Ici, nous utilisons l'identification canonique entre les algèbres de Lie de G et de $\widetilde{G}$ que nous désignons simultanément par $\mathcal{G}$: nous désignons par g^t le sous-groupe à un paramètre de $\widetilde{G}$ défini par le même élément de $\mathcal{G}$ que le sous-groupe g^t de G - que le lecteur soit magnanime envers nos abus bénins de notation. On peut aussi définir le sous-groupe g^t de $\widetilde{G}$ comme étant l'unique sous-groupe dont la projection par p soit le sous-groupe g^t de G. Nous aurions pu abréger cette discussion en définissant g^t comme étant un sous-groupe de Cartan réel du groupe de Lie $\widetilde{G}$.

riemannienne, qui lui attribue la qualité de variété riemanienne homogène sous l'action de $G \approx \mathrm{SO}_0(1,2)$. Cette variété est de courbure constante négative, et sert donc de modèle pour l'espace hyperbolique.

Dans ce modèle, les géodésiques (orientées) sont les intersections entre $\mathcal{H}$ est les 2-plans (orientés) rencontrant $\{Q < 0\}$, c'est-à-dire, les orthogonaux de vecteurs de $\mathbb{R}^{1,2}$ de norme positive : ainsi, l'espace des géodésiques de l'espace hyperbolique $\mathcal{H}$ s'identifie à l'espace dS^2 des vecteurs de Q-norme $+1$. Cet espace, équippé de la restriction de Q, est une variété lorentzienne "à courbure sectionnelle constante positive"[3]. Il est homogène sous l'action de $\mathrm{SO}_0(1,2)$. Il est appelé *espace de Sitter*.

L'espace de Sitter, dans le modèle donné ici, peut aussi être décrit comme étant l'hyperboloïde à une nappe, qui est notoirement une surface biréglée : il admet deux feuilletages $\mathcal{R}^s$, $\mathcal{R}^u$ par des droites de $\mathbb{R}^{1,2}$, qui sont chacun invariant par $G \approx \mathrm{SO}_0(1,2)$. Ces feuilletages ne sont autres que les orbites sous l'action du sous-groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures et inférieures.

De plus, l'espace des feuilles de chacun s'identifie à la droite projectice $\mathbb{R}P^1$, l'identification étant équivariante pour les actions naturelles de $G \approx \mathrm{SO}_0(1,2) \approx \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Chaque point de dS^2 appartient à une et une seule feuille de $\mathcal{R}^s$, et à une et une seule feuille de $\mathcal{R}^u$. Enfin, chaque feuille de $\mathcal{R}^s$ rencontre toutes les feuilles de $\mathcal{R}^u$, *sauf une,* et chaque feuille de $\mathcal{R}^s$ rencontre toutes les feuilles de $\mathcal{R}^u$, sauf une.

En agençant convenablement ces diverses remarques les unes avec les autres, on obtient l'existence d'un homéomorphisme entre dS^2 et $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \setminus \Delta$, où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$. Cet homéomorphisme peut être choisi de sorte que :

– il soit équivariant pour l'action de G (celle sur $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ étant l'action diagonale de $G \approx \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$),

– il envoie le feuilletage $\mathcal{R}^s$ (respectivement $\mathcal{R}^u$) sur le feuilletage défini par projection $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \setminus \Delta \to \mathbb{R}P^1$ sur la première coordonnée (respectivement sur la deuxième coordonée).

– les points de $dS^2 \approx \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \setminus \Delta$ correspondant à des orbites du flot géodésique de $T^1\mathbb{H}^2$ dans une même feuille stable (respectivement, instable) sont ceux admettant la même première coordonnée (respectivement, deuxième coordonnée).

Nous voulons ici déterminer l'allure de l'espace des orbites du flot géodésique généralisé sur $\Gamma\backslash\widetilde{G}$ défini par le choix d'un réseau cocompact Γ. Le groupe $\widetilde{G}$ s' identifie au revêtement universel de $T^1\mathbb{H}^2 \approx T^1\mathcal{H}$. Il en découle que l'espace des orbites Q^Φ du flot géodésique est le revêtement universel $\widetilde{dS}^2$ de l'espace de Sitter, et l'action de Γ sur Q^Φ est décrite par son action naturelle sur $\widetilde{dS}^2$ en tant que sous-groupe de $\widetilde{G}$. L'identification $dS^2 \approx \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \setminus \Delta$ se "relève" en une identification entre $\widetilde{dS}^2 \approx Q^\Phi$ et l'ouvert de $\widetilde{\mathbb{R}}P^1 \times \widetilde{\mathbb{R}}P^1$ compris entre les graphes de l'identité et de δ (cf. remarque 2.17).

Il apparait ainsi que les espaces de feuilles $\mathcal{L}^{s,u}$ s'identifient chacun à $\widetilde{\mathbb{R}}P^1$, l'action de Γ sur ces espaces de feuilles devenant son action naturelle sur $\widetilde{\mathbb{R}}P^1$ en tant que sous-groupe de $\widetilde{G}$. Ainsi, les flots géodésiques sont alignables, et nous avons en quelque sorte vérifié la véracité du Théorème 1.47 dans ce cas, les homéomorphismes α et β étant, *via* les diverses identifications opérées ici, l'application identité et δ.

[3]Nous utilisons des guillemets, car la notion de courbure sectionnelle pour les variétés lorentziennes doit être manipulée avec attention.

Remarquons que ceci établit l'affirmation implicite faite lors de la remarque 1.51 selon laquelle l'homéomorphisme $\tau^s = \alpha^{-1} \circ \beta$ est lisse dans ce contexte.

Remarque 2.18. Nous constatons donc que, de même les suspensions Anosov sont transversalement modelées sur l'espace de Minkowski (cf. remarque 2.12), les flots géodésiques généralisés sont transversalement lorentziens, transversalement modelés sur l'espace de Sitter.

2.2.4. Flots d'Anosov Désarguiens. Nous nous intéressons au premier chef à l'étude des flots d'Anosov à équivalence topologique près, mais nous ouvrons dans ce paragraphe et le suivant une courte parenthèse. Nous y mettons en avant une famille particulière dans la classe des flots d'Anosov topologiquement équivalents à un flot géodésique généralisé. Une des propriétés remarquables de ceux qui nous intéressent ici est la régularité de la décomposition hyperbolique $TM = E^{ss} \oplus E^{uu} \oplus \Delta$.

Nous allons les définir en déformant la construction algébrique opérée au § 2.2.2. Tout d'abord, nous remarquons que les translations à gauche et à droite commutent les unes aux autres, et définissent une action de $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ sur $\widetilde{G}$. Considérons un réseau Γ cocompact de $\widetilde{G}$, et $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ un morphisme quelconque. Ceci permet de définir un morphisme $\rho_u : \Gamma \to \widetilde{G} \times \widetilde{G}$: celui qui à un élément γ de Γ associe la paire $(\gamma, g^{u(\gamma)})$.

On remarque que tous les éléments du groupe image $\rho_u(\Gamma)$ commutent avec chaque $\{id\} \times \{g^t\}$. On en déduit que si l'action de $\rho_u(\Gamma)$ sur $\widetilde{G}$ est libre et proprement discontinue, i.e., si l'espace quotient est une variété, l'action à droite de g^t passe au quotient et y définit un flot Φ^t .

À quelle condition l'action de $\rho_u(\Gamma)$ sur $\widetilde{\mathrm{AdS}}^2$ est-elle libre et propre ? La réponse à cette question est donnée dans [**170, 169**] : fixons le réseau Γ de $\widetilde{G}$. On note $\bar{\Gamma}$ sa projection dans $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Cette inclusion définit une norme simpliciale sur $H^1(\bar{\Gamma}, \mathbb{R})$: la *norme stable,* notée $\|_s$ et définie de la manière suivante (voir [**14, 170**]) : pour tout élément g de G, on note $t(g)$ le double du logarithme du rayon spectral de g - i.e., la norme de la plus grande valeur propre. Lorsque g appartient à $\bar{\Gamma}$, cette quantité $t(g)$ est la longueur de l'unique géodésique fermée simple représentant $g^{\pm}$. Pour tout élément $[\gamma]$ de $H_1(\bar{\Gamma}, \mathbb{Z})$, et pour tout entier n, on note $t_n([\gamma])$ la borne inférieure de $t(g)$, où g décrit l'ensemble de éléments de $\bar{\Gamma}$ qui représente la classe d'homologie $n[\gamma] = [\gamma^n]$. Alors, la suite $t_n([\gamma])/n$ converge, et sa limite est la norme stable de $[\gamma]$. La norme stable sur $H^1(\bar{\Gamma}, \mathbb{R})$ est le dual de la norme que nous venons de définir sur $H_1(\bar{\Gamma}, \mathbb{Z})$.

Le morphisme u induit un morphisme de $\bar{\Gamma}$ dans $\mathbb{R}$, i.e., un élément $\bar{u}$ de $H^1(\bar{\Gamma}, \mathbb{R})$. Alors (Théorème 3.4 de [**170**]) :

L'action de $\rho_u(\Gamma)$ est libre et propre si et seulement si la norme stable $\|\bar{u}\|_s$ est strictement plus petite que $1/2$.

Précisons que la condition $\|\bar{u}\|_s < 1/2$ est équivalente à l'existence d'un nombre réel $0 < C < 1$ tel que pour tout élément γ de $\bar{\Gamma}$ on ait l'inégalité $|\bar{u}(\gamma)| \leq Ct(\gamma)$.

L'action à droite de $h^s_{\pm}$ ne commute pas à $\rho_u(\Gamma)$, mais elle vérifie (les compositions devant être comprises dans $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$, et où h^s est une écriture abrégée pour (id, h^s)) :

$$\rho_u(\gamma)h^s_+ = h^{s\exp(2u(\gamma))}_+ \quad \rho_u(\gamma)h^s_- = h^{s\exp(-2u(\gamma))}_-$$

Ainsi, leurs orbites sont elles préservées par l'action de $\rho_u(\Gamma)$, et définissent au quotients des feuilletages unidimensionnels, qui sont préservés par Φ^t . On remarque alors que la condition $\|\bar{u}\|_s < 1/2$ qui équivaut à la propreté de l'action de ρ_u, assure également que les vecteurs tangents à ces feuilletages unidimensionnels sont exponentiellement contractés (pour l'un) ou dilatés (pour l'autre) par Φ^t. En d'autres termes, Φ^t est un flot d'Anosov dont les feuilles fortes stables et instables sont les projections dans $\rho_u(\Gamma)\backslash\widetilde{G}$ des orbites de $h^s_\pm$.

Les flots d'Anosov ainsi obtenus sont appelés flots d'Anosov Désarguiens, pour une raison qui sera expliquée au §5.2 (remarque 5.18).

Remarque 2.19. Ces flots ont été définis pour la première fois par E. Ghys dans [**103**] dans le cas où le morphisme u est très proche de zéro, ([**103**] étant antérieur à [**169**]). Ils y sont dénommés *flots exotiques.* Remarquons qu'il ne s'agit que d'une simple reparamétrisation de flots géodésiques généralisés.

2.2.5. Flots d'Anosov quasi-fuchsiens. Les flots d'Anosov que nous allons décrire ici, définis pour la première fois dans [**104**], sont encore topologiquement équivalents à des flots géodésiques généralisés, mais cette équivalence, contrairement au cas des flots Désarguiens, n'est pas différentiable en général.

Ces flots se construisent à partir de la donnée de deux réseaux cocompacts $\widetilde{G} = \widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$ dont les actions sur $\mathbb{R}$ sont topologiquement conjuguées. Nous préférons adopter le point de vue suivant : la donnée consiste en une paire de morphismes injectifs $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ d'un groupe Γ vers $\widetilde{G}$, dont les images sont des réseaux cocompacts, et d'un homéomorphismes $f : \widetilde{\mathbb{R}}P^1 \to \widetilde{\mathbb{R}}P^1$ tels que :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad f \circ \rho_1(\gamma) = \rho_2(\gamma) \circ f$$

Remarque 2.20. Une fois fixées les représentations fidèles ρ_1, ρ_2, l'homéomorphisme f est unique. Par ailleurs, si on remplace dans ce qui précède le groupe $\widetilde{G}$ par $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$, l'existence de f est automatique : deux représentations fuchsiennes cocompactes d'un même groupe sont toujours topologiquement conjuguées.

On considère alors dans $\widetilde{\mathbb{R}}P^1 \times \widetilde{\mathbb{R}}P^1$ l'ouvert Q compris entre les graphes de f et $\delta \circ f$ (rappelons que δ est un générateur du groupe de Galois du revêtement universel de $\mathbb{R}P^1$). Cet ouvert est invariant par l'action de Γ sur $\widetilde{\mathbb{R}}P^1 \times \widetilde{\mathbb{R}}P^1$ définie par :

$$\gamma(x,y) = (\rho_1(\gamma)x, \rho_2(\gamma)y)$$

Cette action est conjuguée à l'action diagonale de $\rho_1(\Gamma)$ sur $\widetilde{\mathbb{R}}P^1 \times \widetilde{\mathbb{R}}P^1$: il suffit de prendre comme conjugaison l'application $(x,y) \mapsto (x, f^{-1}(y))$.

Soit U l'ouvert de PTQ défini par les directions tangentes à des vecteurs de la forme $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ avec $a, b > 0$.

Lemme 2.21. *L'action de Γ sur U est libre et proprement discontinue.*

Esquisse de preuve : Soient $(\gamma_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite d'éléments de Γ, et (x_n, y_n, p_n) une suite d'éléments de U convergeant vers un élément $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ de U. Il s'agit de montrer que la suite des $(x'_n, y'_n, p'_n) = \gamma_n(x_n, y_n, p_n)$ ne peut converger vers un point $(\bar{x}'_n, \bar{y}'_n, \bar{p}'_n)$. Supposons que ce ne soit pas le cas : d'une part, comme l'action sur Q est topologiquement conjuguée à l'action diagonale de $\rho_1(\Gamma)$ sur l'ouvert de $\widetilde{\mathbb{R}}P^1 \times \widetilde{\mathbb{R}}P^1$ compris entre les graphes de l'identité et de δ, on obtient aisément que

l'une des suites de dérivées $\rho_1(\gamma_n)'(x_n)$ et $\rho_2(\gamma_n)'(y_n)$ converge vers 0, et l'autre vers $+\infty$. D'autre part, les différentielles de γ en les (x_n, y_n) envoient les directions p_n - qui convergent vers $\bar{p}$ - sur les p'_n qui eux convergent vers $\bar{p}'$. Ces deux observations sont incompatibles, menant à la contradiction recherchée. ∎

On note $M(\rho)$ le quotient de U par cette action ; les fibres de la projection de U sur Q sont les feuilles d'un feulletage de dimension 1 que nous notons Φ_ρ qui est topologiquement équivalent au flot géodésique généralisé défini par ρ_1 (qui est lui-même topologiquement équivalent au flot géodésique généralisé défini par ρ_2). Pour une preuve du fait que tout paramètrage de ce feuilletage est un flot d'Anosov, nous renvoyons à [**104**], proposition 2.2.1.

Relevons que les feuilletages faibles de ces flots sont manifestement de classe C^∞. Et que la discussion suivant l'énoncé de la proposition 1.44, exploitant la structure projective de chaque fibre de $PTQ \to Q$, propose ici un paramètrage lisse canonique de Φ_ρ, que nous notons Φ^t_ρ, et convenons d'appeler *flot quasi-fuchsien.*

Remarque 2.22. Les flots quasi-fuchsiens sont donc transversalement modelés sur $(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}), \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1))$. Dans la terminologie que nous développerons dans la dernière partie de ce mémoire (§ 11.5.0.5), ils sont donc transversalement modelés sur l'Univers d'Einstein $\mathbf{Ein}_2$.

Remarque 2.23. Nous proposons ici un paramétrage canonique des flots quasi-fuchsiens, grâce à leur description en tant que quotients d'ouverts U de $PT\mathrm{Ein}_2$. On peut donc s'interroger sur le *spectre marqué des périodes* de ces flots, i.e., l'application qui à une orbite périodique associe sa période. Toute orbite périodique de Φ^t_ρ se relève en un point fixe dans Q d'un élément $\rho(\gamma) = (\rho_1(\gamma), \rho_2(\gamma))$ de $\rho(\Gamma)$. Il apparait donc que, si $\bar{\Gamma}$ dénote comme nous en avons pris l'habitude la projection de Γ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des classes de conjugaison dans $\bar{\Gamma}$, le spectre marqué est caractérisé (à une constante multiplicative près) par l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ qui à une classe de conjugaison $[\gamma]$ associe le nombre réel $t(\rho_1(\gamma)) + t(\rho_2(\gamma))$, où $l : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est l'application définie au § précédent.

2.3. Chirurgies

D'après P. Tomter ([**188**]), les seuls flots d'Anosov algébriques en dimension 3 sont les suspensions et les flots géodésiques de métriques à courbure constante. Ainsi, pour obtenir de nouveaux exemples de flots d'Anosov, mis à part la construction spécifique de Franks-Williams [**88**], et celle de Bonatti-Langevin que nous discutons plus loin, il n'existe pas de procédé relativement simple. De fait, le seul moyen connu pour obtenir de nouveaux flots d'Anosov *alignables* consiste à modifier des flots d'Anosov algébriques par *chirurgie.*

2.3.1. Exemples de Handel-Thurston. Dans [**119**], M. Handel et W. Thurston ont décrit la méthode suivante pour construire de nouveaux flots d'Anosov à partir du flot géodésique de n'importe quelle surface Σ (bien sûr, de genre plus grand que 1). On équipe tout d'abord Σ d'une métrique hyperbolique g (i.e., à courbure constante -1), et choisissons n'importe quelle géodésique fermée simple c de g. La préimage de c dans $M = T^1\Sigma$ est un tore, qui contient deux orbites périodiques θ_1, θ_2 du flot géodésique Φ^t_0 : elles correspondent aux vecteurs unitaire tangents à c, mais où c est parcourue dans les deux sens possibles.

Le complémentaire dans T de ses deux orbites périodiques est l'union de deux anneaux A_1, A_2 transverses à Φ_0^t. On peut aisément décrire les feuilletages induits sur A_1, A_2 par les feuilletages faibles stables $\mathcal{F}^{s,u}$: ce sont deux feuilletages g^s, g^u transverses l'un à l'autre, dont les feuilles ont deux bouts, un s'accumulant vers θ_1, l'autre vers θ_2, ces accumulations s'effectuant par spiralements. De plus, ces feuilletages de l'anneau ne sont pas des composantes de Reeb : il existe une courbe traversant l'anneau fermé transverse aux deux feuilletages : la restriction à l'anneau de n'importe quelle fibre de $T \to c$.

La chirurgie de Handel-Thurston consiste à découper la variété M le long du tore T, obtenant ainsi une variété (connexe ou non) M_T^* dont le bord contient deux copies T_1 et T_2 du tore T, puis à recoller T_1 à T_2 en modifiant *à la source* le recollement redonnant la variété initiale M par un difféomorphisme $f : T_1 \to T_1$ dont le support est contenu dans un des anneaux A_1, A_2. On obtient ainsi une nouvelle variété M_f, qui ne dépend à difféomorphisme près que de la classe d'isotopie de f - comme le support de f est contenue dans un des anneaux, disons A_1, cette classe d'isotopie est un twist de Dehn.

Comme Φ_0^t est transverse à A_1, il est clair que sa restriction à $M \setminus T$ se recolle en un flot Φ_f^t sur la variété recollée M_f. Il est beaucoup moins clair que Φ_f^t soit un flot d'Anosov ; celà l'est si peu que c'est faux si f est mal choisie : par exemple, pour se faire, il faut manifestement éviter que Φ_f admette un ouvert d'orbites périodiques, alors que celà se produit pour un choix C^0-dense de f.

M. Handel et W. Thurston donnent un choix explicite de fonction f, et vérifient directement que le flot obtenu est Anosov. À vrai dire, leur méthode ne s'applique pas pour tout choix du twist de Dehn, mais seulement à la moitié d'entre eux : ceux qui sont *positifs.* Pour définir cette notion de positivité, nous devons d'abord être plus précis dans la description de la chirurgie : nous choisissons tout d'abord véritablement la composante A_1 sur laquelle la chirurgie sera opérée. Cette composante, après découpage de M, admet une copie, que nous notons encore A_1, dans la composante T_1 du bord de M_T^*. Deux cas de figure se présente alors, selon que le flot est *rentrant* ou *sortant* de M_T^* en l'anneau A_1. Dans la suite, nous faisons la même convention que celle de [**119**] : *nous convenons que l'anneau A_1 choisi est celui correspondant au cas sortant.*

Par ailleurs, nous devons aussi affecter une orientation au tore T_1. L'orientation que nous fixons est la suivante : en tout point x de l'anneau A_1 passe une feuille de g^s et une feuille de g^u. Nous orientons ces deux feuilles dans leur sens de parcours de θ_1 vers θ_2, et convenons que si $v^{s,u}$ sont deux vecteurs tangents en x à $g^{s,u}$ dirigés dans les sens positifs des feuilles, alors (v^u, v^s) est une base positivement orientée. L'orientation de l'anneau ainsi définie semble dépendre des choix de θ_1, θ_2, mais il n'en est rien : si on échange les rôles de θ_1, θ_2, on obtient la même orientation de l'anneau[4].

On choisit ensuite une orientation quelconque de θ_1, ce qui permet de définir un élément particulier $[\theta_1]$ du premier groupe d'homologie $H_1(T_1, \mathbb{Z})$. On peut alors définir un autre élément $[h]$ de $H_1(T_1, \mathbb{R})$: c'est l'unique classe d'homologie représentée par les fibres de la projection $T \to c$ pour laquelle le produit d'intersection $[h].[\theta_1]$, dont le signe est défini par l'orientation choisie de T_1, est positif. Nous

[4]Par contre, l'orientation du tore ainsi définie dépend du choix de la composante A_1 de $T \setminus (\theta_1 \cup \theta_2)$: le procédé ci-dessus appliqué à A_2 et à A_1 donne des résultats opposés.

convenons alors qu'un twist de Dehn est positif s'il envoie la classe d'homologie $[h]$ sur $[h] + n[\theta_1]$, où n est positif.

Remarquons immédiatement que l'entier n défini ci-dessus ne dépend pas du choix de l'orientation de θ_1 : en effet, le choix opposé aboutit aux choix opposés de $[\theta_1]$, $[h]$, ce qui amène au même choix de n. En particulier, le signe de n ne dépend d'aucun choix.

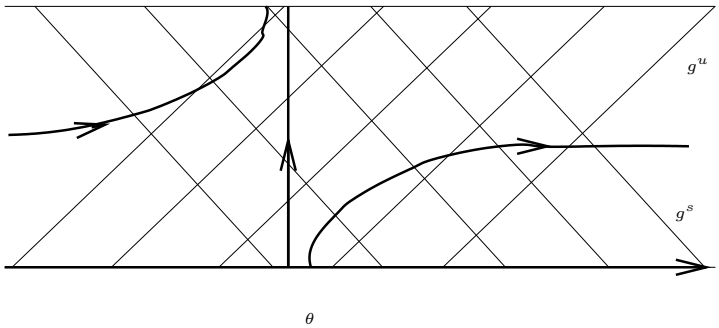


FIG. 1. Vue partielle de l'anneau, avec verticale orientée et son image par un twist de Dehn positif

Nous pouvons alors énoncer le résultat de [**119**] : *la méthode de Handel-Thurston n'aboutit clairement à un flot d'Anosov que lorsque l'entier n est de signe positif.*

REMARQUE 2.24. Cette convention de signe ne suffit pas pour caractériser les f menant à des flots d'Anosov, seulement leur classe d'isotopie. Nous suspectons que pour assurer l'obtention d'un flot d'Anosov, il suffit d'ajouter la contrainte supplémentaire suivante : que f dévie la verticale (voir par exemple [**124**] pour une définition de cette notion).

REMARQUE 2.25. La variété M_f ne dépend que de la classe d'isotopie du changement de recollement $f : T_1 \to T_1$. Nous avons observé que l'orientation de T dépend du choix de la composante A_1, ce qui laisse penser que l'autre choix de cette composante permet de contourner le problème de la positivité, et montrer que tous les twists de Dehn autour d'une des orbites périodiques θ_i contient un représentant f aboutissant à un flot d'Anosov. Mais il n'en est rien : une telle classe d'isotopie étant fixée, il est vrai que le choix de la composante A_i influe sur l'orientation du tore T. Mais dans ce cas, le flot devient *rentrant* dans M_T^* en A_1, ce qui modifie complètement les calculs, au point de les inverser. La manière la plus simple de s'en convaincre est la suivante : dans ce cas, on considère le flot inverse Φ^{-t}, ce qui ramène au cas étudié dans [**119**] où le flot est sortant. Mais alors, le feuilletage stable (respectivement instable) de Φ^t devient le feuilletage instable (respectivement stable) de Φ^{-t}. Ainsi, l'orientation de T définie par le flot d'Anosov Φ^{-t} est l'opposée de celle définie par Φ^t.

Ainsi, l'astuce qui consisterait à choisir l'autre anneau - de même que celle qui consisterai à inverser le flot - est inopérante : il est bel et bien vrai que cette condition de signe que nous avons longuement commentée, est importante, et la construction de Handel-Thurston ne s'applique qu'à la moitié des variétés obtenues par les opérations de "couper-coller" le long du tore T en dehors des orbites périodiques $\theta_{1,2}$.

Remarque 2.26. Ce procédé peut s'appliquer simultanément à plusieurs tores au dessus de géodésiques fermées simples, $c_1, c_2, \ldots, c_n$, pourvu que ces géodésiques c_i soient deux-à-deux disjointes. Toujours est-il que les variétés obtenues après de telles chirurgies ne sont pas quelconques : elles sont toutes obtenues par recollement le long de leur bord d'un nombre fini de fibrés en cercles. Ce type de variété a été étudié avec détail par Waldhausen ([**193, 194**]), qui les a appelées *variétés graphées* (parce qu'il associait à chacune de ces variétés un graphe étiqueté qui constituait un invariant topologique complet).

Remarque 2.27. On peut adopter le point de vue que les exemples de Handel-Thurston sont obtenus en recollant des morceaux de flots géodésiques (locaux) sur des surfaces à bord. On peut aussi remarquer qu'on peut appliquer le procédé de Handel-Thurston en partant non pas directement du flot géodésique d'une surface, mais d'un revêtement fini $\hat{\Phi}^t$ de ce flot : au dessus de chaque géodésique fermée simple de la surface, il existe toujours un tore T qui contient un nombre fini (pair) d'orbites périodiques de $\hat{\Phi}^t$ (mais peut-être maintenant en nombre supérieur à deux) et transverse au flot en dehors de ces orbites périodiques. On peut alors appliquer la méthode décrite ci-dessus en coupant le long de T puis en recollant à l'aide d'un twist de Dehn confiné dans un des anneaux transverses.

La question suivante nous apparait donc naturelle, bien que nous en ignorons encore la réponse : Soient (M_i, Φ_i) un nombre fini de variétés feuilletées, telles que chaque M_i soit un revêtement fini du fibré unitaire tangent à une surface à bord S_i, et Φ_i le relevé du feuilletage géodésique de S_i (i.e., le feuilletage de dimension 1 dont les feuilles sont les orbites du flot géodésique local). On apparie deux à deux les composantes de bords de l'union des M_i de sorte que, si une composante T de M_i est appariée à une composante T' de M_j (avec éventuellement $i = j$), alors il y a autant de feuilles compactes de Φ_i dans T que de feuilles compactes de Φ_j dans T'. On peut toujours recoller selon un tel appariement les divers morceaux M_i de sorte que les Φ_i se composent en un flot sur la variété recollée, mais, un tel appariement étant fixé, *peut-on toujours choisir le recollement de sorte que le flot obtenu soit d'Anosov ?*

Dans l'éventualité où une telle construction est possible, y compris dans le cas où les indices des revêtements $M_i \to T^1 S_i$ dépendent de i, on pourrait obtenir par ce procédé de nouveaux exemples de flots d'Anosov non topologiquement équivalents aux exemples de Handel-Thurston proprement dit. Nous appelons *exemple de Handel-Thurston généralisé* tout flot d'Anosov obtenu par cette méthode. En termes plus précis, un exemple de Handel-Thurston généralisé est un flot d'Anosov qui peut être découpé le long de tores incompressibles en des morceaux (M_i, Φ_i) qui sont des revêtements finis de flots géodésiques de surfaces à bord, les tores incompressibles étant transverses au flot en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques.

La question ci-dessus s'énonce alors sous la forme suivante : *tout exemple de Handel-Thurston généralisé est-il topologiquement équivalent à un exemple de Handel-Thurston ?*

2.3.2. Chirurgie de Dehn-Goodman. Quelques années plus tard, S. Goodman réalisa que l'idée de M. Handel et W. Thurston se généralisait à un contexte plus large ([**113**]) : un procédé analogue de chirurgie peut être opéré au voisinage de toute orbite périodique d'un flot d'Anosov Φ^t quelconque.

Ce procédé met en jeu, la *chirurgie de Dehn* des topologues, qui peut s'effectuer le long de toute courbe fermée simple *orientée* contenue dans une variété M fermée orientée de dimension 3. Cette chirurgie est paramétrée par les couples d'entiers p, q premiers entre eux. Une des manières de la décrire est la suivante : on considère un voisinage tubulaire régulier W de θ, dont le bord $T = \partial W$ est un tore. Ce tore admet, au signe près, une classe d'isotopie - dans T - particulière de courbe fermée simple (en abrégé, une cifs) : le *méridien.* Il s'agit de la seule cifs m, avec son opposée, dont les éléments sont des courbes fermées simples qui sont homotopiquement triviales dans W. On choisit une *longitude,* c'est-à-dire, une cifs l dont les éléments sont isotopes dans W à la courbe fermée simple θ. L'orientation de M induit une orientation de W, donc de son bord T, ce qui permet de sélectionner le "signe" du méridien m. Alors, toute cifs de T est caractérisée par un couple d'entiers (p, q) premiers entre eux, puisque dans le tore, classes d'isotopies et classes d'homologies se confondent : la cifs (p, q) sera la seule cifs dont les éléments sont homologues à $p[m] + q[l]$. Une telle cifs (p, q) étant fixée, on considère un feuilletage de T dont les feuilles sont toutes des courbes fermées simples éléments de la cifs (p, q). On peut alors définir la variété $M_{(p,q)}$ obtenue en recollant un tore solide W' à $M \setminus W$ de sorte que les feuilles du feuilletage par cercles ci-dessus soient identifiées à des méridiens de W'. On vérifie sans trop de difficultés que cette chirurgie est bien définie, et que la variété $M_{(p,q)}$ ne dépend d'aucun choix si ce n'est celui des entiers (p, q) et celui de la longitude l.

La chirurgie de Dehn-Goodman s'applique aux variétés munies d'un flot d'Anosov (M, Φ^t), au voisinage d'une orbite périodique. Elle se définit de la manière suivante : une telle orbite périodique θ étant fixée, il est facile d'exhiber, dans tout voisinage tubulaire de θ, un anneau A transverse au flot. De manière un peu plus précise, tout voisinage de θ contient un voisinage tubulaire W admettant un système de coordonnées (x, y, t) où t est un réel modulo $\mathbb{Z}$ et tel que la restriction de Φ à W est engendrée par le flot :

$$\Psi^s(x, y, t) = (\exp(sa)x, \exp(-sb)y, t + s) \qquad 0 < a, b$$

Ce système de coordonnées s'obtient en linéarisant les applications d'holonomie le long de θ des feuilletages faibles stables et instables. Ces feuilletages sont au moins de classe C^1, avec logarithme de la dérivée Hölder continue. Ils sont donc C^1 linéarisables : les coordonnées (x, y, t) sont C^1-continues, ce qui suffit pour la construction.

Pour tout réel ν et tout signe $\epsilon = \pm 1$, les équations $y = \nu x$, $\epsilon x > 0$ définissent un anneau transverse au flot, que nous notons $A_{\nu,\epsilon}$. On vérifie aisément que les traces $g^{s,u}$ de $\mathcal{F}^{s,u}$ sur chaque anneau $A_{\nu,\epsilon}$ vérifient les mêmes propriétés que leurs homologues définies sur l'anneau $A_1 \subset T$ de la section précédente.

La chirurgie de Dehn-Goodman consiste à couper la variété M le long d'un anneau $A_{\nu,\epsilon}$ de manière à obtenir une variété $M^*_{\nu,\epsilon}$ à bord et à coins dont le bord est l'union de deux copies A^+, A^- de $A_{\nu,\epsilon}$ et de bords communs : ce bord commun est l'union de deux courbes fermées simples isotopes à θ - ce sont les coins de $M^*_{\nu,\epsilon}$. On choisit les notations $A^\pm$ de sorte que la restriction Φ^* de Φ à $M^*_{\nu,\epsilon}$ soit sortante en A^+ et rentrante en A^-. Si $f_0 : A^- \to A^+$ désigne le recollement canonique qui aboutit à la variété M initiale, pour tout difféomorphisme $f : A^- \to A^-$ de support contenu à l'intérieur de A^-, on appelle M_f la variété obtenue en quotientant $M^*_{\nu,\epsilon}$

par la relation qui identifie $x \in A^-$ à $f_0 \circ f(x) \in A^+$. Le flot local $(\Phi^*)^t$ se recolle dans M_f en un flot Φ_f^t.

La classe d'isotopie de f est un twist de Dehn caractérisé par un entier n : c'est le nombre de tours, compté avec signe, qu'effectue autour de θ dans le sens du parcours du flot l'image par f d'une transversale $\tau = \{t = Cte\}$ de l'anneau $A^- \approx A$, orientée dans le sens des $|y| = |\nu x|$ croissants. Cet entier caractérise le type topologique de M_f. En fait, il existe sur $T = \partial W$ une longitude particulière : la classe d'isotopie de chaque lacet de T contenu dans la frontière de $\{x = 0\}$ (on peut aussi définir ces lacets comme étant l'intersection entre ∂W est la variété stable locale de θ). On choisit comme méridien (ce qui revient à choisir une orientation de W) le lacet $\{t = Cte\}$ parcouru dans le sens trigonométrique : c'est le sens où l'argument de $x + iy$ est croissant.

On vérifie sans peine qu'avec ce choix naturel de longitude et méridien, la variété M_f n'est autre que le résultat $M_{(1,\epsilon n)}$ d'une chirurgie de Dehn sur θ. En effet, en poussant le long du flot, on amène le support de f sur une anneau contenu dans T. La tranversale τ est envoyée dans un segment d'un méridien de T orienté dans le sens trigonométrique si ϵ vaut 1, dans le sens horaire si ϵ vaut -1. On étend ensuite f sur T tout entier par l'identité en dehors de cet anneau, et on constate que, du point de vue topologique, la chirurgie de Dehn-Goodman est celle qui rend homotopiquement triviale l'image par cet f étendu du méridien de T. Notre affirmation en découle.

Le point essentiel observé par S. Goodman est que les méthodes de M. Handel et W. Thurston s'appliquent ici pour l'essentiel, et permettent de trouver, pour chaque choix de ν, ϵ, il existe des applications de recollements f dans chaque classe d'isotopie vérifiant une certaine condition de positivité, pour laquelle le flot recollé Φ_f^t est Anosov. Cette condition de positivité est la même que celle décrite à la section précédente. Elle se traduit ici de la manière suivante : *l'entier n est négatif.*

Ainsi, en variant le choix de ϵ, i.e., de l'anneau transverse, la chirurgie de Dehn-Goodman permet de montrer l'existence d'un flot d'Anosov sur chaque variété $M_{(1,n)}$ *quelque soit le signe de n.*

De plus, cette chirurgie peut s'effectuer au voisinage de toute orbite périodique d'un flot d'Anosov. Cette grande marge de manoeuvre permet de s'échapper du cadre restreint des variétés graphées, ce que ne permettait pas la construction de Handel-Thurston. Elle permet notamment de construire des flots d'Anosov sur des variétés hyperboliques, qui peuvent de plus être des sphères d'homologie.

Remarque 2.28. À vrai dire, la chirurgie de Dehn-Goodman peut s'effectuer sur tout anneau transverse au flot contenu dans W. Mais, si on ne considère que les anneaux qui ne rencontrent chaque feuille de la restriction de Φ qu'en au plus un point, contenant une courbe fermée simple isotope dans W à l'orbite θ, et évitant les variétés stables et instables locales $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, on se ramène au cas étudié ici : en effet, un tel anneau est toujours isotope le long de Φ^t à un sous-anneau de $A_{\nu,\epsilon}$, avec $\nu = \pm 1$. Et, manifestement, si A et A' sont deux anneaux transverses qui isotopes le long du flot, à toute chirurgie de Dehn-Goodman appliquée sur A correspond naturellement une chirurgie sur A' de sorte que les flots d'Anosov issus de ces deux constructions sont topologiquement équivalents.

Une question naturelle est de savoir si les chirurgies de Dehn effectuées sur l'anneau $A_{\nu,\epsilon}$ dépendent seulement, à équivalence topologique près, de la classe d'isotopie f, i.e., de l'entier n ? La réponse à cette question est raisonnablement oui,

au vu de la stabilité structurelle. Mais nous ne pouvons envisager d'y donner une réponse plus rigoureuse et plus certaine sans définir un critère sur f (par exemple, dévier la diagonale ? cf. Remarque 2.24) assurant que le flot recollé est bien Anosov. Ce n'est qu'après un tel travail qu'il deviendrait possible de répondre positivement à cette question, en montrant par exemple la connexité de l'espace des fonctions de recollement satisfaisant ce critère.

Remarque 2.29. La chirurgie de Dehn-Goodman permet d'enlever la condition de positivité sur l'entier n qui apparaissait dans la construction de Handel-Thurston de flots d'Anosov sur les variétés graphées qu'ils considéraient. En effet, il suffit de prendre un anneau transverse adéquat au voisinage de θ_1 (ou θ_2). La condition de positivité n'apparaissait dans l'approche de Handel-Thurston que de manière artificielle. Elle signifiait en réalité que parmi les quatre anneaux transverses $A_{\nu,\epsilon}$ vivant autour de θ_1, seuls deux, admettant la même valeur de ϵ, sont isotopes le long du flot à un anneau contenu dans un tore vertical de $T^1\Sigma$.

2.4. Chirurgie de Goodman le long d'un anneau

D'une manière assez surprenante, il n'a été remarqué que tardivement (à notre connaissance, par P. Foulon) que le procédé décrit par S. Goodman ne requiert pas la proximité d'une orbite périodique, mais s'applique parfaitement à tout anneau transverse au flot d'Anosov initial, pour peu que les restrictions $g^{s,u}$ des feuilletages faibles $\mathcal{F}^{s,u}$ à cet anneau observent le même agencement que leurs homologues sur les anneaux $A_{\nu,\epsilon}$ ci-dessus. Ceci se ramène tout simplement à l'existence d'un lacet transverse aux deux feuilletages faibles (voir un plus loin). Dans ce cas de figure, la condition de positivité sur le twist de Dehn à effectuer ne peut plus être contournée et redevient une véritable contrainte.

Cette variante offre de nouvelles possibilités de chirurgies que ne permettent pas la description donnée précédemment (voir [**20**] pour plus de détails). Notamment, pour les suspensions, les fibres toriques contiennent une pléthore de tels anneaux transverses, qui ne contiennent pas de lacets isotopes à des orbites périodiques du flot (ceci est clair puisque les orbites périodiques des suspensions ont des nombres d'intersections non-nuls avec les fibres, et ne peuvent donc être isotopés dans les fibres). On peut alors montrer que toute suspension s'obtient par une suite de chirurgies de Dehn-Goodman étendue à partir de la suspension de monodromie :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un autre contexte où cette chirurgie de Dehn-Goodman étendue joue un rôle important est celui des BL-flots : voir § 2.5.

Soit (M, Φ^t) un flot d'Anosov. Supposons l'existence d'un lacet fermé plongé dans M qui soit transverse aux deux feuilletages faibles : il existe alors un anneau A plongé contenant le lacet, transverse au flot, et qu'on peut paramétrer de manière C^∞ par $\mathbb{S}^1 \times]-1, +1[$ de sorte que la trace des feuilletages faibles sur A soient C^1-proches des feuilletages engendrés par les champs de vecteurs $\partial_\theta + \lambda\partial_y$ et $\partial_\theta - \lambda\partial_y$ (où θ est le paramètre du cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}_{/\mathbb{Z}}$ et y est le paramètre de $]-1, +1[$, et λ un réel positif grand, disons plus grand que 2). Le germe d'un tel anneau au voisinage du lacet est unique à isotopie le long du flot près. On choisit les paramètres θ et y de sorte que la trace du feuilletage *instable* soit engendré par un champ de vecteurs proche de $\partial_\theta + \lambda\partial_y$. Il existe un réel positif ϵ de sorte que l'application

F de $\mathbb{S}^1\times]-1,+1[\times]-2\epsilon,+2\epsilon[$ dans M, qui à (θ,y,t) associe $\Phi^t((\theta,y))$ soit un plongement : notons U l'image de ce plongement.

Soit maintenant f une application lisse de $]-1,1[$ vers $[0,2\pi]$, strictement croissante, valant 0 sur $]-1,-\frac{1}{2}]$, et 2π sur $[\frac{1}{2},1[$. On définit l'application twist de $\mathbb{S}^1\times]-1,+1[\times]-2\epsilon,+2\epsilon[$ dans lui-même, que l'on note Ψ, qui à (θ,y,t) associe $(\theta+f(y),y,t)$. On opère alors M par chirurgie le long de A selon Ψ, ce qui signifie la chose suivante : on choisit à notre convenance un tore solide V dont le bord contient A. On prolonge la restriction de X à U en un champ de vecteurs Y défini au voisinage de ∂V et qui lui soit transverse. Les trajectoires en temps ϵ définissent un voisinage tubulaire W du tore contenant U. On peut convenir que V a été choisi de sorte que Y soit rentrant dans V. L'union de V et de W est un tore solide V_0 ; le complémentaire dans M du complémentaire de W dans V est une variété ouverte M^*. La variété M est obtenue en recollant M^* à V_0 le long de W par l'application identité.

Comme Ψ est l'identité lorsque y est plus grand que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, elle se prolonge par l'identité sur $W\setminus U$: on note Ψ ce prolongement. La chirurgie consiste à recoller M^* à V_0 le long de W (plus précisément, tout point de W vu dans M^* est identifié à son image par Ψ vue dans V_0). Il est alors clair qu'on obtient une nouvelle variété M_f lisse avec un champ de vecteurs X_f de classe C^∞ avatar de X, dont on note Φ^t_f le flot.

La proposition suivante admet pour corollaire la validité des constructions de Handel-Thurston et de Goodman :

Proposition 2.30. *Le flot Φ^t_f est d'Anosov.*

Preuve Nous allons utiliser le lemme 1.4 en exploitant la grande liberté dans le choix des métriques lorentziennes $Q^\pm$ associées à Φ^t. Nous les choisissons de sorte que sur U paramétré par F elles soient définis par :

- $Q^+ = -dy.d\theta + cdt^2$,
- $Q^- = dy.d\theta + cdt^2$.

Le point est que le réel positif c doit être choisi suffisament petit de sorte que le cône Q^+-négatif contient le fibré fort instable, et que le cône Q^--négatif contient le fibré fort stable. Ces métriques se prolongent sans souci sur tout M par partition de l'unité, de manière à satisfaire les conditions du lemme 1.4.

Il suffit maintenant de définir $Q^\pm_f$ sur M_f. Soit β une application croissante différentiable de $]-2\epsilon,2\epsilon[$ vers $[0,1]$, valant 0 sur $]-2\epsilon,-\epsilon]$, et 1 sur $[\epsilon,2\epsilon[$. Sur M^*, on prend $Q^\pm_1 = Q^\pm$ en dehors de U, et sur U, on pose :

- $Q^+_1 = -dy.d\theta - \beta(t)f'(y)dy^2 + cdt^2$;
- $Q^-_1 = dy.d\theta + \beta(t)f'(y)dy^2 + cdt^2$.

Remarquons que $Q^\pm_1$ sont partout non-dégénerées, de signature $(-,+,+)$, et qu'elles coincident avec $Q^\pm$ sur $\mid y \mid > \frac{1}{2}$, ainsi que sur $t < -\epsilon$, ce qui assure que les $Q^\pm_1$ définissent bien des métriques lorentziennes sur M^*. Elles vérifient manifestement les points 1 et 2 du lemme 1.4.

Maintenant, on observe que Ψ envoie $Q^\pm_1$ sur les métriques lorentziennes $Q^\pm_2$ qui coincide dans $W\subset V_0$ avec $Q^\pm$ en dehors de U, et qui sur $U\subset V_0$ sont données par :

- $Q^+_2 = -dy.d\theta + (1-\beta(t))f'(y)dy^2 + cdt^2$;
- $Q^-_2 = dy.d\theta - (1-\beta(t))f'(y)dy^2 + cdt^2$.

Vérifions pour Q_1^+ : un vecteur $u\partial_\theta + v\partial_y + w\partial_t$ basé en (θ, y, t) est envoyé par la différentielle de Ψ sur $(u + vf'(y))\partial_\theta + v\partial_y + w\partial_t$ basé en $(\theta + f(y), y, t)$. Or, sa valeur par Q_1^+ est $-uv - \beta(t)f'(y)v^2 + cw^2$, ce qui coincide bien avec $-v(u + vf'(y)) + (1 - \beta(y))f'(y)v^2 + cW^2$, qui est la Q_2^+-norme du vecteur image par la différentielle de Ψ.

Comme $Q_2^\pm$ coincide avec $Q^\pm$ sur $\mid y \mid > \frac{1}{2}$ et sur $t > \epsilon$, nous avons bien défini des métriques lorentziennes sur V_0. Par construction, les $Q_1^\pm$ se recollent aux $Q_2^\pm$ par Ψ : ils définissent les $Q_f^\pm$ recherchés.

Il est facile de voir que $Q_f^\pm$ vérifient les points 1 et 2 du lemme 1.4. Établissons le point 3 : considérons un vecteur v de Q_f^+-norme négative, tangent en un point x de M. Si x est dans M^*, alors v est de Q^+-norme négative, et ses itérés par le flot, tant qu'ils demeurent dans M^*, sont de $Q^+ = Q_f^+$-norme négative. Vient le moment où ces itérés pénètrent dans U (sinon, il n'y a rien à démontrer) : la $Q_f = Q_1^+$-norme est alors encore négative, et même davantage, puisqu'on enlève la quantité $\beta f' dy^2$. On remarque qu'àprès la traversée de U (i.e., application de Ψ), le passage de la Q^2-norme à la Q-norme s'effectue là encore en retranchant un terme positif : le terme $(1 - \beta)f' dy^2$. On voit donc que (Φ_f^t, Q_f^+) hérite de la propriété 3 de (Φ^t, Q^+), et même, l'amplifie. Cet argument montre aussi que la croissance exponentielle (en valeur absolue) des vecteurs de Q^+-norme négative poussés par le flot se produit encore pour Q_f^+, et même davantage puisque les passages dans U au niveau $\mid y \mid < \epsilon$ apportent une contribution en $f'(y)dy^2$. Ainsi, le réel positif T convenant à $(M, \Phi^t, Q^\pm)$ pour le point 4 du lemme 1.4 convient aussi à (M_f, Φ_f^t, Q_f^+).

Les arguments pour Q_f^- sont les mêmes ; il suffit d'inverser le flot. On peut donc appliquer le lemme 1.4. ∎

2.4.1. Chirurgie de Fried. Les grands défauts essentiels de la chirurgie de Dehn-Goodman sont :

– les choix apparaissant dans la construction, ce qui n'assure pas *a priori* l'unicité de son résultat à équivalence topologique près,

– le peu de contrôle sur les feuilletages faibles stable et instable, au sens où il n'est guère possible de véritablement comparer ces feuilletages avant et après chirurgie.

La chirurgie de Fried ([**92**]) a l'extrême avantage de ne pas connaitre ces imperfections. En revanche, elle n'aboutit *a priori* qu'à des flots d'Anosov topologiques.

Cette chirurgie se décrit de la manière suivante : on se donne encore initialement une orbite périodique θ d'un flot d'Anosov Φ^t sur une variété fermée M de dimension 3. On éclate la variété M le long du fibré normal de θ en une variété M^*. Cet éclatement s'exprime de la manière suivante : une fois donné un voisinage tubulaire régulier W de coordonnées (x, y, t) comme dans la section précédente, la variété M^* est obtenue en recollant à $M \setminus \theta$ un tore épaissi V^* de coordonnées (r, α, t) - où r est un nombre réel positif ou nul, et α, t des éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ - par le changement de carte suivant :

$$(r, \alpha, t) \mapsto (x = r\cos 2\pi\alpha, y = r\sin 2\pi\alpha, t)$$

En d'autres termes, il s'agit d'un passage aux coordonnées polaires dans chaque $\{t = Cte\}$.

La variété M^* est une variété à bord de classe C^1, dont le bord est un tore $\{r = 0\}$ muni d'un système de coordonnées (α, t). Le flot Φ^t est tangent dans W au champ de vecteurs engendrant Ψ^s, c'est-à-dire $\partial_t + ax\partial_x - by\partial_y$. Ce champ de vecteurs exprimé dans les coordonnées (r, α, t) se prolonge sur tout $\{r = 0\} = \partial V^*$ par le champ de vecteurs $\partial_t - \frac{a+b}{4\pi} \sin 2\pi\alpha\partial_\alpha$. Ceci définit donc un feuilletage Φ^* de classe C^1 sur M^*, qui coincide sur l'intérieur de M^* avec la restriction de Φ à $M \setminus \theta$.

La donnée initiale (M, Φ) s'obtient en identifiant dans (M^*, Φ^*) tous les cercles $\{r = 0, t = Cte\}$ à des points. La chirurgie de Fried consiste d'abord à choisir un feuilletage par cercles de ∂V^* transverse à Φ^* et dont chaque feuille rencontre chaque cercle $\{r = 0, \alpha = k\pi/2\}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ qu'en un et un seul point. Ces feuilletages sont caractérisés, à isotopie le long de Φ^* près, par un entier n : le nombre de tours qu'effectue les feuilles du feuilletage le long de la longitude $\{r = 0, \alpha = 0\}$ (avec un choix des orientations convenables affectant un signe à cet entier). Ensuite, on identifie chaque feuille de ce feuilletage à un point. L'espace quotient est alors naturellement une variété M_n, munie d'un feuilletage quotient Φ_n canonique : celui dont une feuille fermée consiste en les points issus du tore $\{r = 0\}$, et qui en dehors de cette feuille fermée, que nous notons θ_n, coincide avec la restriction de Φ à $M \setminus \theta$. On remarque aisément que ce feuilletage ne dépend à équivalence topologique près que de n, et non du feuilletage par cercles sélectionné.

Ainsi, Φ_n est bien défini à équivalence topologique près. Cependant, sa régularité est seulement Lipschitz, et on peut démontrer qu'il n'existe pas de structure C^1 sur M_n telle que :

– la restriction de cette structure C^1 à $M_n \setminus \theta_n$ est difféomorphe à $M \setminus \theta$,

– le feuilletage Φ_n est C^1 pour cette structure.

Par ailleurs, il est aisé de voir que les feuilletages $\mathcal{F}^{s,u}$ restreints à $M \setminus \theta \approx M_n \setminus \theta_n$ s'étendent à M_n en deux feuilletages $\mathcal{F}_n^{s,u}$: en effet, les variétés stables locales $\{x = 0\}$ de θ dans W s'envoient en deux anneaux plongés dans M_n qui contiennent dans leurs adhérences la feuille fermée θ_n. Les deux feuilles de la restriction de $\mathcal{F}^s$ à $M_n \setminus \theta_n$ contenant ces deux anneaux se raccordent le long de θ_n en une immersion de l'anneau, qu'on stipule être une feuille de $\mathcal{F}_n^s$. Ce procédé permet de définir de manière cohérente de feuilletage $\mathcal{F}_n^s$ sur tout M_n, et un procédé analogue permet de définir le feuilletage $\mathcal{F}_n^u$.

Ces deux feuilletages ne sont pas C^1, mais ils sont Lipschitz continus. Il est facile de vérifier que leur feuilletage intersection Φ_n est un flot d'Anosov topologique (cf. Définition 1.16). Comme nous l'avons énoncé dans le cadre général des flots d'Anosov topologiques, on peut se poser la question suivante :

Existe-t'il toujours une structure C^1 sur M_n pour lequel le feuilletage Φ_n est C^1 ?

J'ai personnellement souvent tenté de répondre à cette question, mais ces tentatives sont demeurées infructueuses, bien que la réponse affirmative soit souvent tacitement admise au sein de la communauté susceptible de s'intéresser à la question. J'émets pour ma part bien des réserves ; la proposition 6.6 impose pour le moins une attitude assez circonspecte.

Remarque 2.31. Une manière envisageable de répondre à cette question est de démontrer que la chirurgie de Fried et la chirurgie de Dehn-Goodman aboutissent à des flots topologiquement équivalents. Celà aurait l'avantage supplémentaire de répondre à la question posée à la remarque 2.28 - mais à vrai dire établir ce résultat

nous semble requérir de clarifier la construction de Dehn-Goodman. Nous invitons bien sûr chaleureusement tout lecteur à montrer ce fait de manière irréfutable.

Remarque 2.32. De toute manière, il apparait clairement que *la* structure naturelle à considérer pour la chirurgie de Fried soit la structure PL (Définition 6.10). En effet, les feuilletages faibles stable et instable après chirurgie admettent toujours une structure PL transverse invariante, qui coincide avec la structure PL initiale sauf pour les feuilles contenant l'orbite fermée θ_n. Nous laissons au lecteur la vérification de ce fait.

Il semble que la construction de Fried évacue de manière définitive les conditions de positivité sur la chirurgie à effectuer. Cependant, la situation n'est pas symétrique, et la condition de positivité se manifeste sous la forme suivante :

Théorème 2.33 (S. Fenley, [**78**]). *Si Φ^t est un flot d'Anosov (topologique) alignable, alors les flots d'Anosov topologiques obtenus à partir de Φ^t par chirurgies de Dehn positives sont tous alignables.*

2.5. Exemple de Bonatti-Langevin

Dans [**44**], C. Bonatti et R. Langevin ont construit un exemple de flot d'Anosov préservant le volume. Cet exemple est déjà remarquable de par sa simplicité. Ils l'avaient élaboré pour répondre (par la négative) à une question que je leur avais posée : est-il vrai que les seuls flots d'Anosov pouvant être transverse à un tore sont les suspensions ?

La variété ambiante de cet exemple est une variété graphée. Elle appartient à la famille des variétés orientables obtenues en recollant les deux composantes de bords d'une certaine variété N, qui peut être caractérisée comme étant la seule variété orientable fibrant en cercles sur le ruban de Möbius privé d'un disque ouvert : le bord de N consiste en deux tores T_1, T_2. La famille de variétés fermées orientées obtenues par recollement de ces deux tores est paramétrée par $GL(2,\mathbb{Z})$, une matrice A inversible 2×2 à coefficients entiers représentant une classe d'isotopie de difféomorphisme de recollement de T_2 sur T_1. Nous notons alors M_A la variété obtenue par ce procédé.

Sur la variété N, C. Bonatti et R. Langevin construisent un flot local Φ^t_* transverse à ∂N, rentrant dans la composante de bord T_1, et sortant dans l'autre composante de bord T_2. De plus, Φ^t_* admet une unique orbite périodique θ dans N, isotope aux fibres de N. Les autres orbites de Φ^t_* se scindent en trois types différents :

– celles qui vont d'un point de T_1 à un point de T_2,
– celles qui partent d'un point de T_1 et s'accumulent dans le futur vers θ,
– celles qui terminent sur un point de T_2, et s'accumulent dans le passé sur θ.

Dans [**44**], les auteurs choisissaient un recollement particulier de T_2 sur T_1, pour lequel le flot recollé est Anosov. Ce flot préserve le volume, ce qui implique en particulier une orbite dense. Cependant, il n'est pas alignable : ceci découle de l'existence du tore transverse (provenant du recollement des tores T_1 et T_2) que θ ne rencontre pas, et du Corollaire 1.48.

Dans [**20**], j'ai montré que bien d'autres choix conviennent : toutes les classes d'isotopie de recollement pour lesquelles la variété recollée ne fibre pas en cercles contiennent au moins un difféomorphisme pour lequel le recollement de Φ^t_* est Anosov : les flots ainsi obtenus sont appelés BL-flots.

On peut au passage relever que la méthode utilisée consiste à opérer des chirurgies sur l'exemple initial de Bonatti-Langevin, et de démontrer que ces chirurgies permettent effectivement d'atteindre toutes les variétés M_A qui ne fibrent pas en cercles. Ces chirurgies ne sont pas des chirurgies de Fried : les anneaux sur lesquels elles sont effectuées ne sont pas isotopes à des orbites périodiques du flot d'Anosov ! En d'autres termes, ce sont des chirurgies de Goodman étendues au sens de § 2.4.

De plus, sur toutes ses variétés ne fibrant pas en cercles, les BL-flots sont tous topologiquement équivalents les uns aux autres : dans une classe d'isotopie A donnée, il existe bien sûr plusieurs applications de recollement amenant à BL-flots, mais il s'avère que tous ces flots sont topologiquement équivalents entre eux.

Dans [**20**], nous montrons même mieux : *sur M_A, tout flot d'Anosov non-alignable est topologiquement équivalent à un BL-flot.* Ceci montre que chaque variété M_A admet au plus deux classes d'équivalence topologique de flots d'Anosov non-alignables : elles sont représentées par deux BL-flots, inverses l'un de l'autre.

Enfin, parmi ces variétés M_A, certaines admettent des flots d'Anosov alignables : nous montrons dans [**20**] que pour chacune d'entre elles, les flots d'Anosov alignables sont tous dans la même classe d'équivalence topologique, et que ces flots d'Anosov sont plus précisémment des exemples de Handel-Thurston. Mais en disant celà, nous anticipons sur le sujet des chapitres à venir...

Remarque 2.34. T. Noda a récemment étudié plus avant l'exemple de Bonatti-Langevin,, en exhibant par exemple une section de Birkhoff (voir § 6.2).

CHAPITRE 3

Flots sur les variétés fibrées

Ce chapitre est consacré au Théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une variété fermée de dimension 3. On suppose que le groupe fondamental Γ de M contient un sous-groupe abélien distingué non trivial A. Alors, M est alignable, et est topologiquement équivalent à une suspension ou à un flot géodésique généralisé.*

Ce Théorème recouvre essentiellement deux cas de figure distincts : celui où la variété M fibre sur le cercle (le flot est alors une suspension), et celui où M est une variété de Seifert (le flot est alors un flot géodésique généralisé). Dans le premier cas, la preuve est usuellement attribuée a J.F. Plante ([**164**]), faisant suite à des travaux de Verjovsky et de Armandariz, bien que la preuve dans [**164**] soit incomplète (voir la remarque 3.9). Dans le deuxième cas, la preuve est dûe à E. Ghys ([**102**]).

Nous traiterons ici ses deux cas dans deux sections différentes : § 3.3, qui est la cas où le groupe A n'est pas abélien cyclique, et § 3.4, cas où A est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Mais chacun de ses deux cas présentent la même similitude : la preuve consiste à démontrer que le flot d'Anosov est transversalement lorentzien - plus précisémment, est topologiquement équivalent à un flot qui admet une structure transverse lorentzienne lisse invariante. Nous commençons donc par une section commune, § 3.1, où nous vérifions qu'un tel flot d'Anosov transversalement lorentzien satisfait les conclusions du Théorème les conclusions du Théorème 3.1.

Dans la section suivante, nous montrons que tout flot d'Anosov vérifiant les hypothèses du Théorème 3.1 est alignable. Dans les deux dernières sections nous terminons la preuve du Théorème .

Ce faisant, nous ne reproduisons pas véritablement les preuves "historiques", mais notre présentation n'est en somme qu'un habillage lorentzien des preuves précédemment établies, et a le mérite pour nous d'illustrer avantageusement le lien entre les diverses notions apparaissant dans ce mémoire.

3.1. Flots d'Anosov transversalements lorentziens

Pour la définition de structure géométrique transverse, et toutes les notions associées, nous renvoyons le lecteur à la partie suivante (chapitre 7).

THÉORÈME 3.2. *Tout flot d'Anosov admettant une structure lorentzienne transverse de classe $C^{1,1}$ est différentiablement équivalent à une suspension ou à un flot d'Anosov Désarguien.*

Idée de la preuve La preuve que nous donnons ici est une version abrégée de celle donnée dans [**105**], article auquel nous renvoyons tout lecteur exigeant plus de détails.

On observe tout d'abord qu'un flot (M, Φ^t) satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.2 préserve une forme volume, puisqu'il préserve la forme volume transverse de la structure lorentzienne transverse. Il est donc en particulier topologiquement transitif, et admet une orbite dense. Or, la courbure scalaire (donc aussi sectionnelle) de la métrique lorentzienne transverse définit une fonction mesurable définie presque partout sur M et invariante par le flot : par ergodicité de ce dernier, elle est donc constante presque partout. Ceci implique que Φ^t est transversalement modelé sur l'espace de Minkowski, ou l'espace de Sitter (le cas anti-de Sitter se traite en inversant la métrique lorentzienne, qui devient alors la métrique de Sitter).

Cette métrique lorentzienne transverse induit une véritable métrique lorentzienne sur l'espace des orbites Q^Φ qui est Γ-invariante. Remarquons que les feuilletages isotropes de cette métrique sont $\mathcal{G}^s$, $\mathcal{G}^u$: en effet, les feuilletages isotropes induisent des feuilletages de codimension 1 sur M tangents à Φ^t, or, tout flot d'Anosov ne peut être tangent qu'à deux feuilletages de codimension : ses feuilletages faibles.

Nous affirmons que les feuilles de $\mathcal{G}^{s,u}$ sont des géodésiques lumières *complètes.* En effet : fixons une métrique riemannienne auxiliaire sur M, et un champ de plans P transverses à Φ^t. Par compacité de M, il existe un réel positif ϵ tel que tout vecteur tangent v à $P \cap T\mathcal{F}^s$ de norme (riemannienne) inférieure à ϵ se relève en un vecteur $\tilde{v}$ tangent à $\widetilde{M}$, tel que la projection $\pi(\tilde{v})$ est la dérivée en 0 d'une géodésique isotrope $c : [0,1] \to Q^\Phi$. Mais l'ensemble des vecteurs tangents v vérifiant cette propriété est invariant par la différentielle de Φ^t. Comme ces vecteurs sont dilatés exponentiellement par la différentielle de Φ^t pour les t négatifs, on obtient que le nombre ϵ est arbitrairement grand. Notre affirmation en découle.

Nous avons vu que la métrique lorentzienne sur Q^Φ est localement isométrique à X, où X est soit le plan de Minkowski, soit l'espace de Sitter : il existe donc une application développante $\mathcal{D} : Q^\Phi \to X$ et une application d'holonomie $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}_0(X)$. La complétude géodésique des feuilles de $\mathcal{G}^{s,u}$ assure que tout chemin de X contenu dans une géodésique lumière de X se relève dans Q^Φ par $\mathcal{D}$. Il en est donc de même pour tout chemin C^1 par morceaux dont les vecteurs tangents à droite et à gauche sont tous isotropes. Il s'en suit que l'homéomorphisme local $\mathcal{D}$ est un revêtement. Comme X est simplement connexe[1], $\mathcal{D}$ est en fait un homéomorphisme. En s'inspirant de la remarque 1.43, on obtient que Φ^t est topologiquement équivalent au feuilletage de $\rho(\Gamma)\backslash U$ (où U est le fibré des vecteurs de norme -1 de X) dont les feuilles sont projections des fibres de $U \to X$.

Au vu de la proposition 2.9 et de § 2.2.4, le Théorème s'en déduit. ∎

3.2. Le flot est alignable

Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une variété M dont le groupe fondamental Γ contient un sous-groupe abélien distingué A non-trivial. On peut supposer sans perte de généralité que tous les feuilletages sont orientables. Pour chaque élément a de A, on note $\Omega(a)$ l'ensemble défini par le Théorème 1.30. On remarque que $\Omega(a)$ est A-invariant puisque A est abélien.

Les deux lemmes suivants sont nécessaires puiqu'il n'est pas clair que le flot soit topologiquement transitif.

[1]Rappelons que pour nous, l'espace de Sitter est simplement connexe : nous considérons le revêtement universel de l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ défini au § 2.2.3.

LEMME 3.3. *Si Γ préserve un ouvert connexe simplement connexe de $\mathcal{L}^s$, cet ouvert est $\mathcal{L}^s$ tout entier.*

Preuve Soit Ω un tel ouvert Γ-invariant connexe et simplement connexe de $\mathcal{L}^s$. Alors, $(\pi^s)^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\widetilde{M}$ qui est Γ-invariant. D'après le Théorème de Palmeira, le quotient de cet ouvert est un $K(\Gamma, 1)$, donc compact. Le lemme s'en déduit. ∎

LEMME 3.4. *Soit U une union d'intervalles $[x_i, y_i]$ $i \in \mathbb{Z}$ tels que, pour tout i, y_i et x_{i+1} sont des points non séparés de $\mathcal{L}^s$. Alors, U ne peut être Γ-invariant.*

Preuve Soit E l'union des x_i et des y_i. Il est clair qu'un intervalle ouvert de $\mathcal{L}^s$ contient au plus un x_i et au plus un y_j : on en déduit que E est un fermé de $\mathcal{L}^s$. Il est dénombrable. Si U est Γ-invariant, il en de même pour E qui correspond donc à un fermé de M invariant par $\mathcal{F}^s$ et transversalement dénombrable. Ceci est absurde puisque $\mathcal{F}^s$ n'admet pas de feuille compacte. ∎

LEMME 3.5. *Tous les éléments de A agissent sur $\mathcal{L}^s$ en séparant les points.*

Preuve Supposons tout d'abord qu'un élément a de A admet un point presque fixe, mais ne fixe aucun point de $\mathcal{L}^s$. Alors, $\Omega(a)$ est un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}$, et c'est le seul ouvert a-invariant jouissant de cette propriété. Il est de plus A-invariant : c'est donc l'unique ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}$ qui soit A-invariant. Comme A est distingué dans Γ, ceci implique que $\Omega(a)$ est préservé par tous les éléments de Γ. D'après le lemme 3.3, $\Omega(a)$ est $\mathcal{L}^s$ tout entier. Ceci est absurde puisqu'on a supposé que a admet un point presque fixe.

Supposons maintenant que a admet un point fixe. Nous sommes alors dans le cas de figure (1) : $\Omega(a)$ est une 1-variété connexe et simplement connexe dont les points non-séparés sont tous des points fixes de a.

Considérons maintenant un autre élément b de A, et appliquons le Théorème 1.30 à la restriction de b à $\Omega(a)$:

Fait : b fixe un point de $\Omega(a)$.

Supposons que ce ne soit pas le cas : alors, soit b sépare les points de $\Omega(a)$, soit il admet un point presque-fixe, mais pas de point fixe dans $\Omega(a)$. Dans le deuxième cas de figure, $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ est le seul ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}$ qui soit A-invariant : on aboutit comme précédemment à une contradiction. Dans le premier cas de figure, $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ est soit un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}$ - auquel cas on obtient une absurdité comme auparavant - soit une union d'intervalles $[x_i, y_i]$ satisfaisant les critères du point (3) du Théorème 1.30. C'est le seul sous-ensemble A-invariant de $\mathcal{L}^s$ admettant une telle forme : il est donc Γ-invariant. Ceci est interdit par le lemme 3.4.

Le fait est donc démontré : $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ est un ouvert non-vide. De plus, s'il n'admet pas de point non-séparé, alors c'est l'unique ouvert A-invariant qui soit homéomorphe à $\mathbb{R}$, ce qui, une nouvelle fois est absurde. Donc, il admet au moins deux points non-séparés, qui sont nécessairement des points fixes communs de a et de b. Or, le stabilisateur d'un point de $\mathcal{L}^s$ est soit trivial, soit cyclique : on en déduit que *pour tout élément b de A, il existe deux entiers p et q tels que $a^p = b^q$.*

En résumé, nous avons démontré que tous les éléments de A admettent des points fixes, et que tout point fixe d'un élément de A est aussi point fixe d'une puissance non-triviale de a. Soit E l'ensemble des points de $\mathcal{L}^s$ qui sont fixes par au

moins un élément de A : il est clairement Γ-invariant. Nous affirmons que les points de E sont isolés. En effet : soit x un élément de E, i.e., un point fixe d'un élément b de A : c'est la projection d'un point fixe θ de b dans Q^Φ. Alors, la projection par p^s de la feuille de $\mathcal{G}^u$ contenant θ est un intervalle ouvert I de $\mathcal{L}^s$ qui contient x, et qui est le bassin d'attraction de x sous l'action de b (quitte à inverser b). On peut remplacer b par b^q, c'est-à-dire a^p. Alors, si y est un élément de $I \cap E$, il est fixé par une puissance non triviale de a^p : ceci n'est possible que si $x = y$.

Donc, si E est fermé dans $\mathcal{L}^s$, c'est un fermé discret, ce qui signifie que $\mathcal{F}^s$ admet une feuille compacte : contradiction. Donc, le bord topologique $\partial E = \bar{E} \setminus E$ est est un fermé Γ-invariant non-vide. Or, il n'est formé que de points non-séparés : comme $\mathcal{L}^s$ est séparable, ceci implique que ∂E est de cardinal dénombrable. Or, un fermé Γ invariant de $\mathcal{L}^s$ est soit $\mathcal{L}^s$ tout entier, soit un fermé discret, soit localement un Cantor. On obtient donc que ∂E est un fermé discret, ce qui, encore une fois, est impossible.

Ceci était la contradiction finale, montrant qu'aucun élément de A n'admet de point fixe ou presque-fixe dans $\mathcal{L}^s$. ∎

Proposition 3.6. *Le flot Φ^t est alignable.*

Preuve D'après le lemme 3.5, chaque $\Omega(a)$ est soit un ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}$, soit une union disjointe d'intervalles $[x_i, y_i]$ avec $x_{i+1} \approx y_i$. L'argument employé à multiples reprises auparavant montre qu'alors $\Omega(a)$ est Γ-invariant : la seule possibilité est qu'il soit homéomorphe à $\mathbb{R}$, et égal à $\mathcal{L}^s$ tout entier. ∎

Corollaire 3.7. *Il existe un morphisme injectif $T : A \to \mathbb{R}$ et un homéomorphisme $\varphi : \mathcal{L}^s \to \mathbb{R}$ tels que :*

$$\forall a \in A, \forall x \in \mathcal{L}^s, \quad f \circ a(x) = f(x) + T(a)$$

Preuve Au vu de la proposition 3.6 et du lemme 3.5, il s'agit d'une application directe du Théorème de Hölder (voir preuve de la proposition 2.9), couplée avec l'observation supplémentaire que si l'action de A sur $\mathcal{L}^s$ n'est pas minimale, alors A est cyclique, puisque sinon l'unique fermé A-invariant minimal devrait être Γ-invariant, ce qui contredirait la minimalité de Γ sur $\mathcal{L}^s$. Lorsque A est cyclique, il est facile de montrer le Corollaire. ∎

3.3. Fibrés en tores

Nous continuons la preuve du Théorème 3.1, mais nous supposons ici que A n'est pas un groupe abélien cyclique. Dans ce cas, $T(A)$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. Alors, vu dans la carte φ, chaque élément de Γ agit sur $\mathbb{R}$ selon un homéomorphisme γ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in A, \quad \gamma(x + T(a)) = \gamma x + T(\gamma_* a)$$

où γ_* est un automorphisme de A. Il s'en suit que γ agit sur $\mathbb{R}$ comme une transformation affine : chaque feuilletage faible est transversalement affine. Pour conclure, il suffit d'observer que celà est incompatible avec la structure de l'espace des orbites dans le cas alignable non-produit : en effet, dans ce cas, du fait de l'existence de l'homéomorphisme τ^s, tout élément de Γ ayant un point fixe dans $\mathcal{L}^s$

en admet une infinité. Le Théorème 3.1 découle donc dans ce cas de la proposition 2.9. ∎

Remarque 3.8. Nous avions déjà remarqué à la remarque 2.12 que la preuve de 2.9 consistait essentiellement à démontrer que Γ préserve une métrique lorentzienne plate sur Q^{Φ}.

Remarque 3.9. La preuve classique du Théorème 3.1 dans le cas où M fibre sur le cercle est dûe à J.F. Plante ([**164**]), bien que cette preuve soit incomplète puisqu'elle omet la preuve du fait essentiel que le flot est alignable : il convient de la compléter par, par exemple, [**144**].

La preuve de Plante reprend des travaux préliminaires de A. Verjovsky et Armandariz ([**189, 7**]). Elle diffère de manière non-négligeable de la preuve que nous avons présentée ici : pour conclure à partir de l'existence d'une structure affine transverse invariante à l'un des feuilletages faibles, J.F. Plante utilise un critère de Schwartzman détectant les suspensions comme étant les seuls flots d'Anosov pour lesquels il existe une classe de cohomologie dans $H^1(M, \mathbb{R})$ qui ne prend que des valeurs strictement positives sur les classes d'homologie représentée par des orbites périodiques du flot ([**91, 176**]).

Du reste, en utilisant ce critère, il est facile d'étendre la preuve ci-dessus en toute dimension, permettant de démontrer que *tout flot d'Anosov de codimension* 1 *sur une variété dont le groupe fondamental admet un sous-groupe abélien distingué non-cyclique est topologiquement équivalent à une suspension.*

Pour une exposition détaillée de ce qui vient d'être discuté, voir [**145**].

3.4. Fibrés en cercles

Il ne reste que le cas où le sous-groupe abélien A est cyclique... Mais c'est, en difficulté propre, le plus ardu ! En effet, sa preuve est intimement reliée à celle du Théorème suivant, dont la preuve est fort longue et élaborée, obtenue par la contribution successives de plusieurs auteurs, dont J. Nielsen, R. Tukia, H. Zieschang, D. Gabai, et A. Casson, D. Jungreis :

Définition 3.10 (**Groupes de convergence**). *Un groupe $\Gamma \subset$ Homéo$^+(\mathbb{S}^1)$ d'homéomorphisme du cercle préservant l'orientation est un groupe de convergence discret si son action diagonale sur l'ensemble des triplets de points distincts du cercle - i.e., les éléments (x, y, z) de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ avec $x \neq y$, $x \neq z$ et $y \neq z$ - est proprement discontinûe.*

Les exemple typiques de groupes de convergence sont les groupes Fuchsiens, c'est-à-dire, les sous-groupes discrets de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{R}P^1 \approx \mathbb{S}^1$. En effet, l'action diagonale de G sur l'ensemble des triplets de points distincts du cercle est simplement transitive.

Le point est que les groupes Fuchsiens sont essentiellement les seuls exemples :

Théorème 3.11 (**Les groupes de convergence sont Fuchsiens** [**95, 59**]). *Tout groupe de convergence est conjugué dans Homéo$^+(\mathbb{S}^1)$ à un groupe Fuchsien.*

La preuve du Théorème 3.1 repose donc de manière fondamentale sur la proposition suivante :

PROPOSITION 3.12. *Le groupe* Γ *en tant que groupe d'homéomorphisme du cercle* $\mathcal{S}^s = \mathcal{L}^s/\tau^s$ *est un groupe de convergence.*

Preuve Soit a un générateur de A. On constate que pour tout élément γ de Γ, l'application $b \mapsto \gamma b \gamma^{-1}$ est un automorphisme de $A \approx \mathbb{Z}$: donc, $\gamma a \gamma^{-1} = a^{\pm 1}$. En particulier, γ^2 commute avec a. Nous affirmons tout d'abord que l'action sur $\mathcal{L}^s$ d'une puissance non-triviale de τ^s coincide avec celle d'un générateur a de A. En effet, on observe aisément que si x est un point fixe attractif d'un élément γ de Γ, alors les points fixes attractifs de γ^2 dans $\mathcal{L}^s$ sont exactement les itérés de x sous τ^s. Ainsi, si a est un générateur de A, comme ax est un point fixe attractif de γ^2 (a et γ^2 commutent), il existe un entier $k(x)$ tel que $ax = (\tau^s)^{k(x)}$. Par densité des points fixes d'éléments de Γ, et par continuité de l'application k là où elle est définie, on obtient l'existence d'un entier k tel que $(\tau^s)^k = a$.

Dans la suite, nous supposons que cet entier k vaut 1 : la preuve dans le cas général ne nécessite qu'un arrangement mineur que nous laissons au lecteur.

Nous devons montrer que l'action de Γ sur l'ensemble X des triplets de points distincts de $\mathcal{S}^s = \mathcal{L}^s/A$ est proprement discontinûe. Il s'agit donc de démontrer que pour tout compact K de $\mathcal{S}^s$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments γ de Γ pour lesquels $\gamma K \cap K$ est non-vide.

Supposons que ce ne soit pas le cas : il existe un compact K, une suite $(\gamma_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ d'éléments de Γ, et une suite (x_n, y_n, z_n) d'éléments de K tels que tous les itérés $(\gamma_n x_n, \gamma_n y_n, \gamma_n z_n)$ appartiennent à K. Par compacité de K, quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que (x_n, y_n, z_n) et $(\gamma_n x_n, \gamma_n y_n, \gamma_n z_n)$ convergent vers des points $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ de $K \subset X$.

On munit le cercle $\mathcal{S}^s$ d'une orientation (dans les figures, il s'agit de l'orientation trigonométrique), c'est-à-dire, d'un ordre cyclique $\prec$. On peut supposer sans perte de généralité que : $x_n \prec y_n \prec z_n$).

L'union des orbites périodiques de Φ^t est dense dans M. Ceci signifie que l'union des points fixes d'éléments de Γ est dense dans Q^Φ. Or, au vu de § 1.3.6, Q^Φ/A s'identifie à l'ensemble $\mathcal{P}$ des paires de points distincts de $\mathcal{S}^s$: on en déduit que l'ensemble $\mathcal{P}_0$ des paires de points fixés par un élément de Γ est dense dans $\mathcal{P}$. On en déduit l'existence de 6 points distincts $x^\pm$, $y^\pm$, $z^\pm$ de $\mathcal{S}^s$ tels que (voir figure) :

– $x^- \prec \bar{x} \prec x^+ \prec y^- \prec \bar{y} \prec y^+ \prec z^- \prec \bar{z} \prec z^+ \prec x^-$,

– les trois paires (x^-, y^+), (x^+, z^-), (y^-, z^+) appartiennent à $\mathcal{P}_0$.

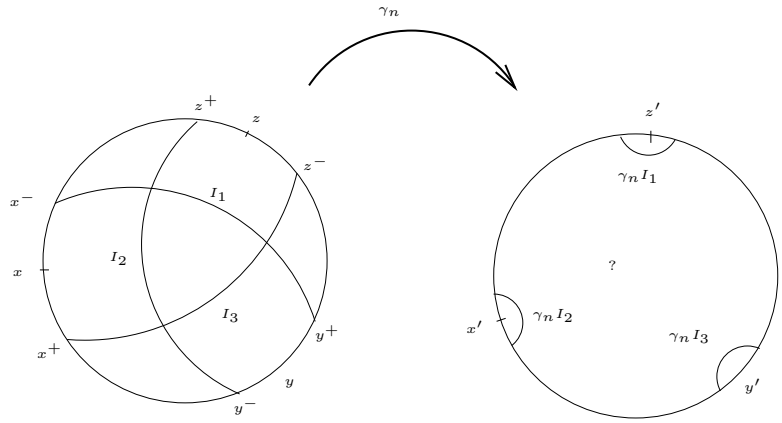
On note I_1, I_2, I_3 les intervalles $]x^-, y^+[$, $]y^-, z^+[$, $]z^-, x^+[$ (un intervalle $]x, y[$ étant l'ensemble des points z tels que $x \prec z \prec y$). Quitte à extraire des sous suites, on peut supposer que les suites $(\gamma_n x^\pm)_{(n\in\mathbb{N})}$, $(\gamma_n y^\pm)_{(n\in\mathbb{N})}$, et $(\gamma_n z^\pm)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergent.

Par ailleurs, les orbites périodiques de Φ^t sont compactes. Ceci implique *in fine* que l'orbite sous Γ de tout élément de $\mathcal{P}_0$ est un fermé discret de $\mathcal{P}$. On en déduit que les suites $(\gamma_n x^-)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(\gamma_n y^+)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergent vers le même point. Il en est de même pour les suites $(\gamma_n y^-)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(\gamma_n z^+)_{(n\in\mathbb{N})}$, ainsi que les suites $(\gamma_n z^-)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(\gamma_n x^+)_{(n\in\mathbb{N})}$.

Deux cas de figure peut se produire : la longueur des intervalles $\gamma_n I_1$ converge avec n soit vers 0, soit vers 1 (la longueur du cercle). Or, l'intervalle I_1 contient les points $\bar{x}$, $\bar{y}$: il contient donc les x_n, y_n pour n grand. Si sa longueur de ses γ_n-itérés tendait vers 0, on obtiendrait l'égalité $\bar{x}' = \bar{y}'$, ce qui est absurde puisque $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ appartient à X.

On en déduit que ce sont les γ_n-itérés de l'intervalle $]y^+, x^-[$ qui ont des longueurs tendant vers 0 avec n. Ceci signifie que les $\gamma_n]y^+, x^-[$ sont des intervalles de plus en plus petits, dont les extrémités s'accumulent vers $\bar{z}'$ (car $]y^+, x^-[$ contient $\bar{z}$).

On montre de la même manière que les intervalles $\gamma_n]z^+, y^-[$ sont de plus en plus petits, avec extrémités s'accumulant vers $\bar{x}'$, et que les intervalles $\gamma_n]x^+, z^-[$ sont de plus en plus petits, avec extrémités s'accumulant vers $\bar{y}'$. Or, ceci implique que pour n suffisamment grand, les trois intervalles $\gamma_n]y^+, x^-[$, $\gamma_n]z^+, y^-[$ et $\gamma_n]x^+, z^-[$ sont deux-à-deux disjoints. Ceci est absurde puisque $]y^+x^-[$, $]z^+, y^-[$ et $]x^+, z^-[$ s'intersectent deux-à-deux.



∎

Corollaire 3.13 (Fin de la preuve du Théorème 3.1). *Le flot Φ^t est transversalement de Sitter.*

Preuve En effet, d'après la proposition 3.12 et le Théorème 3.11, le cercle $\mathcal{S}^s$ s'identifie à $\mathbb{R}P^1$ de sorte que l'action de Γ soit celle d'un groupe Fuchsien. Ainsi, Q^Φ/A s'identifie à $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ privé de la diagonale, de sorte que l'action de Γ soit son action diagonale en tant que groupe Fuchsien. Au vu de la description de l'espace de Sitter de § 2.2.3, ceci signifie exactement que Φ^t est transversalement de Sitter. ∎

Remarque 3.14. Il serait intéressant d'éviter l'emploi du Théorème 3.11 qui semble disproportionné, ou, du moins, d'en simplifier la preuve dans le contexte des flots d'Anosov. Une piste, que m'a depuis longtemps suggéré E. Ghys, mais que je n'ai jamais su mener à son terme, consiste à essayer de définir un birrapport Γ-invariant sur le cercle $\mathcal{S}^s$ en utilisant une mesure Γ-invariante sur Q^Φ - un excellent candidat étant la mesure de Bowen-Margulis. Je transmets donc cet intéressant défi.

Remarquons aussi que la preuve de E. Ghys ([**102**]) est fondamentalement différente. Elle évite l'utilisation du Théorème 3.11, mais celà est possible car la variété est supposée d'entrée admettre une fibration en cercles - elle s'étend du reste sans difficulté majeure au cas des fibrations de Seifert.

CHAPITRE 4

Flots sur les variétés graphées, et morceaux fibrés

Nous en venons au sujet traité dans ma thèse ([**15, 18**]). Au vu des résultats du chapitre suivant, ainsi que l'étude des flots BL (§ 2.5) la topologie d'une variété impose de fortes contraintes sur les flots d'Anosov qu'elle peut supporter, parfois même au point de les déterminer à équivalence topologique près.

Nous disposons d'une famille remarquable de flots d'Anosov sur les variétés graphées, et il est raisonnable de se demander si ce sont les seuls possibles : *tout flot d'Anosov sur une variété graphée est-il topologiquement équivalent à un exemple de Handel-Thurston ?*

Les exemples de Bonatti-Langevin montrent immédiatement que la réponse à cette question est négative. Cependant, la réponse devient quasiment positive dans le cas où le flot d'Anosov est supposé de plus alignable (Théorème 4.20). Mais cette hypothèse est assez rédhibitoire, puisqu'il est en général difficile de détecter si un flot d'Anosov donné est alignable ou non. Nous pallions ici à cet inconvénient en proposant un critère pratique décidant si un flot d'Anosov sur une variété graphée est alignable ou non (proposition 4.22).

En fait, le Théorème 4.20 n'est qu'un corollaire d'un Théorème plus général, qui montre *grosso modo* que tout plongement incompressible du produit du cercle par une surface à bord dans une variété admettant un flot d'Anosov alignable peut s'isotoper en un autre plongement tel que la restriction du flot à l'image de ce plongement est un revêtement fini d'un flot géodésique (Théorème 4.14).

Quoiqu'il en soit, tous ces résultats requièrent de montrer que tout tore incompressible plongé dans une variété munie d'un flot d'Anosov peut être isotopé en un tore en bonne position par rapport au flot. C'est l'objet de la section suivante.

4.1. Tores en position optimale

Dans tout ce paragraphe, on suppose que la variété M n'admet pas de plongement incompressible de la bouteille de Klein (voir remarque 4.10).

Soit T un tore plongé de manière incompressible dans une variété M supportant un flot d'Anosov Φ^t. L'hypothèse d'incompressibilité signifie que T se relève dans $\widetilde{M}$ en des plongements du plan, chacun préservé par un sous-groupe de Γ isomorphe à $\mathbb{Z}^2$: nous noterons $\widetilde{T}$ un de ces relevés, et H le sous-groupe de Γ préservant $\widetilde{T}$. Bien sûr, H s'interprète naturellement comme étant l'image dans Γ par l'application naturelle induite par l'inclusion de $T = H\backslash\widetilde{T}$ dans M.

Nous nous intéressons au problème d'isotoper T en un tore bien placé par rapport au flot. La situation la plus agréable est bien sûr lorsque le tore est transverse au flot.

PROPOSITION 4.1. *Si H contient deux éléments différents, l'un comme l'autre représenté par un lacet de T librement homotope dans M à un orbite périodique de Φ^t, alors T est isotope à un tore transverse à Φ^t.*

Cette proposition est démontrée dans [**17**]. On y démontre un peu plus ; par exemple, les restrictions au tore transverse des feuilletages faibles $\mathcal{F}^{s,u}$ sont sans composantes de Reeb.

De toute manière, selon le corollaire 1.48, lorsque le flot est alignable, il ne peut exister de tore transverse au flot.

DÉFINITION 4.2. *Le tore est* quasi-transverse *si :*

– il contient un nombre fini pair d'orbites périodiques $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2k}$ de Φ^t,

– les composantes connexes du complémentaire dans T de ces orbites périodiques sont des anneaux $A_1, A_2, \dots, A_{2k}$ transverses à Φ^t,

– le flot est alternativement entrant et sortant, i.e., les orientations transverses définies par l'orientation du flot sur deux anneaux A_i et A_{i+1} adjacents le long d'une orbite périodique sont opposées,

– les traces sur chaque anneau A_i des feuilletages faibles $\mathcal{F}^{s,u}$ sont des feuilletages sans feuille fermée.

Dans [**17**], j'ai aussi démontré :

PROPOSITION 4.3. *Tout tore transverse ou quasi-transverse à un flot d'Anosov est incompressible.*

L'exemple typique de tore quasi-transverse est celui apparaissant dans les flots géodésiques au dessus de chaque géodésique fermée simple de la surface : voir § 2.3.1. Le Théorème suivant montre que c'est le seul lorsque le flot est alignable :

THÉORÈME 4.4 (**Mise en position optimale** [**17**]). *Si Φ^t est alignable, tout tore incompressible est isotope à un tore quasi-transverse.*

Ce Théorème est utilement complété par les propositions suivantes, elles aussi démontrées dans mon article [**17**] :

PROPOSITION 4.5 (**Unicité à isotopie le long du flot près**). *Soient T, T' deux tores transverses ou quasi-transverses à un flot d'Anosov Φ^t. S'ils sont isotopes dans M, ils sont simultanément transverses ou quasi-transverses. De plus, ils sont alors isotopes le long du flot : il existe une application continue $u : T \to \mathbb{R}$ telle que l'application $x \mapsto \Phi^{u(x)}(x)$ soit un homéomorphisme de T sur T'. En particulier, dans le cas où T et T' sont quasi-transverses, ils contiennent les mêmes orbites périodiques.*

PROPOSITION 4.6. *Soient $T_1, T_2, \dots, T_k$ un nombre fini de tores plongés de manière incompressible dans M. On suppose que ces tores sont deux-à-deux disjoints, et que chacun d'entre eux est isotope à un tore transverse ou quasi-transverse au flot d'Anosov Φ^t. Alors, il existe une isotopie de M envoyant* simultanément *tous les tores T_i sur des tores transverses ou quasi-transverses.*

REMARQUE 4.7. Tous ces résultats sont de même nature que les travaux [**167**], [**185**] où apparaissent le problème d'isotoper des tores incompressibles en des tores transverses à des feuilletages de codimension 1. Cependant, leurs méthodes sont radicalement différentes de celle utilisée dans [**17**] : la démarche adoptée dans [**17**] consiste à mettre en évidence certains domaines H-invariants de Q^Φ qui sont des

projections de plongements H-invariants du plan dans $\widetilde{M}$. Les projections de ces plans dans M sont alors des immersions du tore qu'on montre pouvoir être rendues injectives, puis d'images isotopes au tore initial.

Remarque 4.8. Nous aurons besoin de considérer la restriction d'un flot d'Anosov au voisinage tubulaire d'un tore quasi-transverse. La proposition suivante est inédite :

Proposition 4.9. *Soient (M, Φ^t), (M', Ψ^s) deux flots d'Anosov. Soient T, T' deux tores quasi-transverses à respectivement Φ^t, Ψ^s. On suppose que le nombre d'orbites périodiques de Φ^t contenues dans T est égal au nombre d'orbites périodiques de Ψ^s contenues dans T'. Alors, il existe des voisinages tubulaires respectifs de T, T' sur lesquels Φ^t, Ψ^s se restreignent en des flots locaux topologiquement équivalents.*

Esquisse de preuve On commence par exhiber des équivalences topologiques dans des voisinages tubulaires des orbites périodiques, qu'on prolonge au voisinage tubulaire des anneaux complémentaires dans les tores des orbites périodiques : celà ne présente aucune difficulté puisque ces anneaux sont transverses aux flots. ∎

Remarque 4.10. Lorsque M admet un plongement incompressible de la bouteille de Klein, le Théorème 4.4 doit être corrigé de la manière suivante : le tore est soit isotope à un tore quasi-tranverse, soit au bord d'un voisinage tubulaire d'une bouteille de Klein quasi-transverse.

4.2. Plongements de fibrés en cercles

Dans cette section, nous supposons que le flot d'Anosov Φ^t est alignable.

Définition 4.11. *Un morceau fibré de M est un plongement incompressible $i : N \to M$, où N est une 3-variété compacte à bord fibrant en cercles sur une surface Σ. Par plongement incompressible, nous entendons ici qu'au niveau des groupes fondamentaux, l'application $i_* : \pi_1(N) \to \Gamma$ est injective.*

Pour tout morceau fibré, nous notons Z l'image $i_*(\pi_1(N)) \subset \Gamma$. Dans tout ce qui suit, on suppose que Σ n'est pas un anneau, ce qui revient à supposer que N n'est pas le voisinage tubulaire d'un tore ou d'une bouteille de Klein. C'est aussi équivalent à ce que Z contienne un sous-groupe libre non-abélien. Enfin, pour simplifier l'exposition, nous supposerons toujours que la fibration de N sur Σ soit à fibres orientables.

Si N est sans bord, alors M est lui-même un fibré en cercle, et le Théorème 3.1 identifie le flot : il s'agit d'un flot géodésique généralisé. Nous écartons donc ce cas de figure. Chaque composante de ∂N est alors un tore. Remarquons que deux composantes T, T' de ∂N peuvent être envoyées par i sur deux tores isotopes - c'est typiquement le cas de figure lorsque M est une variété graphée obtenue en recollant deux-à-deux les composantes de ∂N.

Définition 4.12. *Un morceau fibré $i : N \to M$ est en position optimale par rapport à un flot Φ^t si :*

– chaque composante de ∂N est envoyée par i sur un tore quasi-tranverse à Φ^t,

– si T et T' sont deux composantes de ∂N qui ont pour image par i deux tores isotopes dans M, alors $i(T) = i(T')$.

Grâce au Théorème 4.4 et les propositions 4.6, 4.5, tout morceau fibré peut être isotopé en un morceau fibré en position optimale ; de plus, cette position optimale est unique à isotopie le long du flot près.

L'exemple typique de morceau fibré en position optimale est celui provenant d'une sous-surface à bord géodésique plongée dans une surface fermée riemannienne : le plongement associé de $T^1\Sigma$ dans $T^1\Sigma_0$ est en position optimale par rapport au flot géodésique de Σ_0.

DÉFINITION 4.13. *Soit Σ une surface à bord géodésique plongée dans une surface riemannienne fermée Σ_0. Soit M_0 un revêtement fini de $P^+T\Sigma_0$, et Φ_0^t le relèvement dans M_0 du flot géodésique. Il existe alors un revêtement fini N de $P^+T\Sigma$ tel que le plongement de $P^+T\Sigma$ dans $P^+T\Sigma_0$ se relève en un plongement i de N dans M_0. Ce plongement est en position optimale par rapport à Φ_0^t. Nous appelons morceau fibré géodésique le flot local sur N obtenu en tirant en arrière la restriction de Φ_0^t à $i(N)$.*

Soit $\hat{p} : \widehat{M} = Z\backslash\widetilde{M} \to M$ le revêtement associé à Z. Alors, i se relève en un plongement incompressible $\hat{\imath} : N \to \widehat{M}$, qui cette fois envoie chaque paire de composantes différentes de ∂N sur deux tores quasi-transverses non-isotopes. On note $\widehat{N}$ l'image de $\hat{\imath}$: c'est une composante connexe de $\widehat{M} \setminus \partial\widehat{N}$.

On note $\widehat{\Phi}^t$, $\widehat{\mathcal{F}}^{s,u}$ les relevés dans $\widehat{M}$ de Φ^t, $\mathcal{F}^{s,u}$.

THÉORÈME 4.14. *La restriction de $\widehat{\Phi}^t$ à $\widehat{N}$ est un flot local topologiquement équivalent à un morceau fibré géodésique.*

Esquisse de preuve Le centre de Z est un sous-groupe cyclique engendré par un élément h. On applique les mêmes idées que celles apparaissant dans § 3.4 en les adaptant : on montre d'abord qu'il existe un fermé Z-invariant μ dans $\mathcal{L}^s$ sur lequel l'action de h coincide avec celle d'une puissance non-triviale de τ^s (ce fermé μ est localement un Cantor, il peut être défini comme étant l'adhérence de l'union des points fixes d'éléments de Z, voir [**18**]). En écrasant les composantes connexes du complémentaire dans $\mathcal{L}^s$ de μ, on obtient une 1-variété $\overline{\mathcal{L}}$ homéomorphe à $\mathbb{R}$ sur lequel Z agit minimalement, en commutant avec un homéomorphisme $\bar{\tau}$ provenant de τ^s, agissant librement sur $\overline{\mathcal{L}}$, et dont une puissance coincide avec h.

On montre alors comme dans § 3.4 que le groupe Z, en tant que sous-groupe de $\text{Homéo}^+(\overline{\mathcal{L}})$ est un groupe de convergence, et préserve donc une structure projective réelle. On en déduit[1] qu'il existe un homéomorphisme entre $\mathcal{L}^s$ et $\widetilde{\mathbb{R}}P^1$, et un morphisme $\rho : Z \to \widetilde{G} = \widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall\gamma \in Z, \quad f \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ f$$

Il faut remarquer que ρ est injectif, d'image discrète dans $\tilde{G}$. De plus, $\rho(h)$ appartient au centre de $\widetilde{G}$. Sa projection dans $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ correspond à une métrique hyperbolique sur Σ à bord géodésique. Soit k l'indice du groupe engendré par $\rho(h)$ dans le centre de $\widetilde{G}$: on doit comparer maintenant la restriction de $\widehat{\Phi}^t$ morceau $\widehat{N}$ au morceau feuilleté défini par $\rho(Z)$, c'est-à-dire, le revêtement à k feuillets le long des fibres du flot géodésique sur $T^1\Sigma$.

[1]Celà est un peu délicat : il faut démontrer que chaque composante connexe de $\mathcal{L}^s \setminus \mu$ est préservée par un élément non-trivial de Z, voir [**18**] pour une preuve de ce fait non trivial.

Ce n'est pas le lieu ici de développer la preuve de ce fait : nous nous contentons de signaler sobrement ici qu'elle s'obtient en adjoignant aux arguments de [**18**] la proposition 4.9. ∎

Remarque 4.15. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé implicitement que toutes les variétés considérées sont orientables. On peut bien sûr adapter les preuves et énoncés au cas non-orientable, nous avons préféré omettre d'expliciter ce cas de figure qui ne présente pas de réelle difficulté supplémentaire.

D'ailleurs, les résultats évoqués ici s'étendent également au cas plus général où N est un fibré de Seifert sur une orbifold Σ.

4.3. Flots d'Anosov alignables sur les variétés graphées

Précisons la notion de variété graphée, telle qu'elle est définie par Waldhausen ([**193, 194**]) :

Définition 4.16. *Une variété graphée est la donnée d'un paire $(M, \mathcal{T})$, où M est une variété de dimension 3 fermée et orientée, et $\mathcal{T} = T_1 \cup \ldots \cup T_n$ une union finie de tores plongés dans M deux-à-deux disjoints, tels que pour tout voisinage tubulaire régulier $U(\mathcal{T})$ de $\mathcal{T}$ dans M, chaque composante connexe N de $M \setminus U(\mathcal{T})$ est homéomorphe à un fibré en cercles sur une surface. Si de plus chaque composante N fibre en cercles sur une surface orientable, la variété M est dite* variété graphée à fibre orientée *(abréviation VGO).*

Par commodité, nous ne considérons que des variétés graphées à fibres orientées. Insistons que dans cette définition, une variété graphée n'est pas seulement une variété M, mais véritablement une paire $(M, \mathcal{T})$. Mais les abus de langages utilisés précédemment ne prêtent guère à conséquence en raison de la proposition 4.19.

Une VGO $(M, \mathcal{T})$ est dite *réduite* au sens de Waldhausen ([**194**]) si, pour toute composante T_i de $\mathcal{T}$, T_i est incompressible, sauf s'il borde dans M un tore solide N, et que la fibre de la composante connexe de $M \setminus U(\mathcal{T})$ adjacente à ce tore, autre que N, n'est pas homologue dans T_i au méridien de N.

Les variétés que nous étudions sont vouées à supporter des flots d'Anosov. Or, d'après [**194**], si $(M, \mathcal{T})$ est une VGO non réduite, nous sommes dans l'une des situations suivantes :

– M est homéomorphe au produit $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$,

– M est un fibré en tores sur le cercle à monodromie elliptique,

– $M \setminus U(\mathcal{T})$ admet au moins deux composantes, et une d'entre elles est le fibré trivial sur l'anneau,

– il existe deux composantes de $M \setminus U(\mathcal{T})$ dont les adhérences dans M rencontrent le même $U(T_i)$, et dont les fibres sont isotopes dans $U(T_i)$.

Si M supporte un flot d'Anosov , les deux premiers cas sont exclus, et dans les deux derniers cas, il existe une sous-partie $\mathcal{T}'$ telle que $(M, \mathcal{T}')$ est encore une VGO. En poursuivant ce processus, on arrive à une paire $(M, \mathcal{T}'')$ qui est une VGO réduite. On peut donc sans perte de généralité se restreindre au cas des VGO réduites.

On peut alors modifier la définition des VGO de la manière suivante :

Définition 4.17. *Une variété graphée réduite orientée (abréviation VGRO) $(M, \mathcal{T})$ est la donnée d'une 3-variété fermée orientée M et d'une union $\mathcal{T}$ de tores plongés dans M deux-à-deux disjoints tels que tout voisinage tubulaire régulier $U(\mathcal{T})$ décompose M en fibrés de Seifert à fibres orientables.*

En d'autres termes, on incorpore les composantes de $M \setminus U(\mathcal{T})$ homéomorphes au tore solide dans leurs composantes voisines, en enlevant des éléments de $\mathcal{T}$: les composantes fibrées ainsi dotées deviennent des fibrés de Seifert.

DÉFINITION 4.18. *Une VGRO $(M, \mathcal{T})$ est principale (abréviation VGPO) si M n'est pas homéomorphe à une des variétés suivantes :*
– un fibré en tores sur le cercle,
– un fibré de Seifert sur la sphère avec au plus 3 fibres singulières.

Ce sont les VGPO que Waldhausen a classifié à homéomorphismes près de la variété ambiente, en utilisant le fait fondamental suivant :

PROPOSITION 4.19. *Si $(M, \mathcal{T})$ et $(M, \mathcal{T}')$ sont deux VGPO, il existe alors une isotopie de M envoyant $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}'$.*

On peut donc omettre dans la définition des VGPO la donnée $\mathcal{T}$.

Les flots d'Anosov sur les VGRO non-principale sont classifiés par le Théorème 3.1. La classification des flots d'Anosov sur les VGO se ramène donc à la classification des flots d'Anosov sur les VGPO.

On obtient sans difficulté grâce au Théorème 4.14 le Théorème suivant :

THÉORÈME 4.20. *Tout flot d'Anosov alignable sur une VGPO est topologiquement équivalent à un exemple de Handel-Thurston généralisé.*

REMARQUE 4.21. Ce Théorème ne met pas un point final à la classification des flots d'Anosov alignables sur les variétés graphées : il faut pour celà répondre à la question posée à la remarque 2.27.

4.4. Flots d'Anosov non-alignables sur les variétés graphées

Le Théorème 4.20 n'est pas encore totalement satisfaisant, puisqu'il est loin d'être évident de vérifier qu'un flot d'Anosov donné est alignable ou non. C'est déjà un problème non-trivial pour les exemples de Handel-Thurston. Le Théorème de Fenley (Théorème 2.33) montre que les exemples de Handel-Thurston sont alignables que pour la moitié d'entre eux : ceux provenant de la construction même de Handel-Thurston, sans utiliser l'astuce de S. Goodman.

La proposition suivante apporte une réponse appropriée :

PROPOSITION 4.22 ([**18**]). *Soit $(M, \mathcal{T})$ une VGPO, et Φ^t un flot d'Anosov sur M. Alors, Φ^t n'est pas alignable si et seulement si il existe une composante N de $M \setminus U(\mathcal{T})$ qui soit un fibré de Seifert dont les fibres régulières sont isotopes à une orbite périodique de Φ^t.* ∎

COROLLAIRE 4.23. *Les exemples de Handel-Thurston généralisés sont alignables.*

Preuve Il suffit de montrer que les fibres régulières des composantes fibrées ne sont pas isotopes à des orbites périodiques du flot. Or, dans chacun des morceaux fibrés, il existe un tore plongé incompressible T au-dessus d'une géodésique fermée simple de la surface sous-jacente. Si les fibres de ce morceau sont isotopes à une orbite périodique du flot, on peut appliquer la proposition 4.1. On obtient une contradiction, car il est aisé de démontrer que les exemples de Handel-Thurston n'admettent pas de tore transverse. ∎

Remarque 4.24. Le corollaire 4.23 est loin d'être la seule retombée de la proposition 4.22. En fait, il est très raisonnable de le voir comme un premier pas vers une classification des flots d'Anosov non alignables sur les VGPO. Le travail sur les BL-flots ([**20**]) est un prototype du genre de résultat qui peut être obtenu dans cette direction. Nous pensons que l'énoncé général suivant doit être vrai, modulo peut-être une liste finie de contre-exemples :

Tout flot d'Anosov sur une VGPO est obtenu en recollant des morceaux de flots géodésiques avec des flots locaux de Morse-Smale sur des fibrés de Seifert.

Par flot local de Morse-Smale sur un fibré de Seifert N, nous entendons un flot local dont l'ensemble des points non-errants est une union finie d'orbites périodiques, qui de plus sont toutes isotopes à des fibres (singulières ou régulières) de N. Un tel flot vérifie les mêmes propriétés que le flot local Φ_* intervenant dans la définition de l'exemple de Bonatti-Langevin : les orbites vont soit d'un bord de N à un autre, d'un bord de N à une orbite périodique, ou d'une orbite périodique vers le bord de N.

Ajoutons pour corroborer cette vision qu'elle englobe la description des flots de Morse-Smale sur les variétés de dimension 3, selon laquelle seules les variétés graphées supportent de tels flots, et que ces flots correspondent à certaines décompositions en anses de la variété (voir [**10, 153**]).

CHAPITRE 5

Une véritable prise de contact

Rappelons qu'une forme de contact sur une 3-variété est une 1-forme α de classe C^1 partout non-intégrable, c'est-à-dire telle que le produit extérieur $\alpha \wedge d\alpha$ est une forme volume. Une *structure de contact* est une classe de forme de contact modulo multiplication par une fonction strictement positive.

A toute forme de contact est associé un *champ de Reeb :* c'est l'unique champ de vecteurs X tel que :

– $i_X \alpha = 1$,

– $i_X d\alpha = 0$.

Ces conditions impliquent que α est préservée par le flot engendré par X. Ce flot est appelé *flot de Reeb* de la forme de contact.

On peut aussi définir les flots de Reeb comme étant les flots préservant une forme de contact : si $\Phi^t_* \alpha = \alpha$, alors Φ^t est le flot de Reeb de $\frac{X}{\alpha(X)}$ où X est le champ de vecteurs engendrant Φ^t (il convient de remarquer que $\alpha(X)$ n'est pas nul car α est de contact).

Définition 5.1. *Un flot d'Anosov est dit de contact si c'est le flot de Reeb d'une forme de contact.*

L'exemple typique de flot d'Anosov de contact est le flot géodésique d'une variété à courbure strictement négative : c'est le flot de Reeb de la forme de Liouville (voir par exemple [**124**]).

On peut caractériser d'une autre manière les flots d'Anosov de contact :

Proposition 5.2. *Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une variété fermée de dimension 3, qui ne soit pas topologiquement conjugué à une suspension. Alors, Φ^t est de contact si et seulement si ses fibrés forts $E^{ss,uu}$ sont de classe C^1. Dans ce cas, la forme de contact dont il est le flot de Reeb est de classe C^∞.*

Preuve Théorème 2.3 de [**133**] ∎

5.1. Chirurgie de Foulon

Comme nous l'avons déjà signalé, les flots géodésiques en courbure négative sont des flots d'Anosov contact. Pour obtenir d'autres exemples, nous ne connaissons pas d'autre moyen qu'une opération chirugicale. Dans ce contexte, P. Foulon a démontré que la chirurgie de Dehn au sens étendu de § 2.4 peut être effectuée tout en préservant la propriété de préserver une structure de contact. Malheureusement, cette construction est toujours non-publiée :

Théorème 5.3 (P. Foulon [**83**]). *Soit Φ^t un flot d'Anosov de contact, et c un lacet transverse aux deux feuilletags faibles. Pour tout anneau transverse au flot dans un voisinage de c, on peut choisir un représentant du twist de Dehn*

positif de sorte que la chirurgie de Dehn-Goodman sur cet anneau effectuée par ce représentant aboutisse à un flot d'Anosov de contact.

Remarque 5.4. Ce théorème montre en particulier que les exemples de Handel-Thurston sont topologiquement équivalents à des flots d'Anosov de contact.

5.2. Flots d'Anosov TCP et plans affines topologiques

Considérons un flot Désarguien. Nous avons vu au § 2.2.4 que les feuilles des feuilletages forts stables et instables relevés dans le revêtement universel sont les orbites dans $\widetilde{G} = \widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$ de l'action à droite des sous-groupes à un paramètre de matrices unipotentes $h^s_\pm$. Leurs espaces de feuilles $\mathcal{L}^{ss,uu}$ sont donc les espaces homogènes $\widetilde{G}/h^s_\pm$, qui sont eux-même revêtements cycliques de $G/h^s_\pm$. Or, h^s_+ est le stabilisateur de $(1,0)$ pour l'action linéaire naturelle de $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$: on en déduit que $\mathcal{L}^{ss} \approx G/h^s_+$ s'identifie au quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par l'antipodie $(x,y) \mapsto (-x,-y)$. L'action naturelle du groupe fondamental Γ sur $\mathcal{L}^{ss}$, provenant de son action à gauche dur $\widetilde{G}$ en tant que réseau, devient sur le modèle $\mathbb{R}^2$ une action linéaire.

De plus, on vérifie sans peine que la projection dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$ est une droite affine complète de $\mathbb{R}^2$ évitant l'origine. Enfin, comme le flot $\widetilde{\Phi}^t$ échange les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}^{ss}$, il induit une action sur $\mathcal{L}^{ss}$, qui s'exprime dans le modèle $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ comme étant le flot radial $(x,y) \mapsto (e^t x, e^t y)$. En particulier, les projections des orbites de $\widetilde{\Phi}^t$ sont encore des droites affines, mais cette fois-ci incomplètes : ce sont des rayons du plan.

En résumé, l'espace de feuilles $\mathcal{L}^{ss}$ admet une structure affine canonique, qui s'identifie au revêtement universel (cyclique) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, où les (relevés de) droites affines s'interprètent par les objects dynamiquement associés au flot : le flot lui-même, ainsi que les feuilles du feuilletage fort instable. Pour des raisons d'économie d'écriture, nous notons $\widetilde{\mathbb{R}}^2$ le revêtement universel du plan privé de l'origine, pensé muni du relevé de la structure affine.

Dans [**23**], j'ai démontré que ce schéma s'étend à tous les flots d'Anosov de contact, et même, aux flots d'Anosov *topologiquement* de contact :

Définition 5.5. *Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une 3-variété fermée M. On choisit (par exemple à partir d'une métrique riemmanienne auxiliaire) un paramétrage continu des feuilletages forts stable et instable de sorte que les feuilles de $\mathcal{F}^{ss}$ (respectivement de $\mathcal{F}^{uu}$) soient les orbites d'un flot continu h^t_s (respectivement h^t_u). Le flot Φ^t est dit topolgiquement de contact s'il existe un réel positif ϵ tel que, pour tout quadruplet (t_1,t_2,t_3,t_4) de réels non-nuls et de valeurs absolues inférieurs à ϵ, il n'existe pas de point x de M pour lequel $h^{t_1}_s \circ h^{t_2}_u(x) = h^{t_3}_u \circ h^{t_4}_s(x)$.*

En termes moins précis mais plus parlant, un flot d'Anosov est topologiquement de contact s'il n'existe pas de petit rectangle, un rectangle étant un lacet fermé obtenu en parcourant alternativement des segments de feuilles fortes stables et instables. Il nous semble assez clair que les flots d'Anosov de contact sont topologiquement de contact.

Nous appelerons encore $\mathcal{L}^{ss,uu}$ les espaces de feuilles des feuilletages forts relevés $\widetilde{\mathcal{F}}^{ss,uu}$. Il existe une action naturelle du groupe fondamental Γ sur $\mathcal{L}^{ss,uu}$, et, comme nous l'avons remarqué auparavant, le flot $\widetilde{\Phi}^t$ se projette en un flot φ^t, qui de plus commute avec l'action de Γ.

Il est faux en général que ces espaces de feuilles admettent une structure affine modelée sur le plan affine qui soit Γ-invariante. Par contre, nous allons voir qu'elle admet une structure affine canonique au sens de la géométrie d'incidence. Rappelons une définition bien connue :

DÉFINITION 5.6. *Un plan affine (axiomatique) est la donnée d'un ensemble $\mathcal{P}$, dont les éléments sont appelés "points", d'un ensemble $\mathcal{D}$, dont les éléments sont appelés "droites", et d'une relation, dite d'incidence, reliant éléments de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$, vérifiant les axiomes suivants*[1] *:*

– par deux points distincts passent une et une seule droite,

– si d est une droite et x un point quelconque, il existe une et une seule droite passant par x et parallèle à d (deux droites étant dites parallèles si elles sont confondues ou n'admettent aucun point en commun),

– il existe trois points qui ne sont pas contenus dans une même droite.

Nous ne rappelerons pas comment on construit un plan affine axiomatique $\mathcal{A}_K$ à partir d'un corps K. Rappelons quand même le magnifique Théorème suivant :

THÉORÈME 5.7. *Un plan affine est un plan affine $\mathcal{A}_K$ si et seulement si le Théorème de Désargues y est valide. C'est un plan affine $\mathcal{A}_K$ où K est un corps commutatif si et seulement si le Théorème de Pappus y est valide.*

Nous parlerons ainsi de plans affines Désarguiens et Pappusiens. Il est sans doute utile de préciser la définition des plans affines Désarguiens, puisque nous l'évoquerons avec davantage de détails plus tard :

DÉFINITION 5.8. *Un plan affine est Désarguien si, pour tout triplet d, d', d'' de droites concourantes en un point, et pour tout choix de points x, y de points de d, de points x', y' de d', et de tout point x'', y'' de d'', les intersections $(xx') \cap (yy')$, $(xx'') \cap (yy'')$, $(x'x'') \cap (y'y'')$, si elles existent, sont alignées.*

Les plans affines que nous allons considérer sont de plus *topologiques,* au sens où les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ de droites et de points sont chacun muni d'une topologie de sorte que :

– l'application qui à deux points distincts associe leur droite commune est continue,

– l'application qui à deux droites non-parallèles associe leur point d'intersection est continue,

– l'ensemble des paires de droites parallèles est un fermé de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

En fait, nous ne rencontrerons que le cas où l'ensemble des points est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, et où chaque droite, en tant que sous-ensemble de $\mathcal{P}$, est l'image d'un plongement propre de $\mathbb{R}$. Les plans affines topologiques vérifiant ces hypothèses sont appelés $\mathbb{R}^2$-*plans affines* (voir chapitre 3 de [**171**]).

REMARQUE 5.9. Donnons nous deux droites d, d' concourantes dans un $\mathbb{R}^2$-plan affine. Les parallèles à d, d' permettent de définir un homéomorphisme entre $\mathcal{P}$ et $d \times d' \approx \mathbb{R}^2$. Choisissons une troisième droite passant par $d \cap d''$: elle peut être vue comme le graphe d'un homéomorphisme entre d et d', que nous utilisons pour identifier d à d'. Alors, toute autre droite non parallèle à d ou d' est le graphe d'un

[1]Dans cette suite d'axiomes, nous utilisons, pour économie d'écriture, les termes "droite passant par un point", "contenir", qui s'énoncent de manière non-ambigüe en terme de la relation d'incidence.

homéomorphisme de d. Le point que nous voulons signaler est que *si cet ensemble d'homéomorphismes de d est un groupe si et seulement si le plan affine est le plan affine $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ usuel.* En effet, c'est dans ce cas un groupe qui agit transitivement sur $d \approx \mathbb{R}$ en vérifiant toutes les hypothèses du Théorème de Solodov (Théorème 2.10), dont la conclusion justifie notre affirmation. Par ailleurs, le fait que ces homéomorphismes forment ou non un groupe s'exprime en terme de la relation d'incidence. Au vu du Théorème 5.7, ceci équivaut à satisfaire l'axiome de Désargues, ou celui de Pappus. Il serait intéressant de démontrer directement une de ces implications.

Mais nous ne sommes pas encore au point voulu : la notion de $\mathbb{R}^2$-plan affine n'est pas encore la bonne notion associée aux flots d'Anosov topologiquement de contact (mais presque !), il faut, comme dans le cas des flots Désarguiens, passer en quelque sorte au revêtement universel du complémentaire d'un point (mais voir quand même la remarque 5.17).

Définition 5.10. *Un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine est la donnée d'un espace topologique $\mathcal{P}$ de points, et d'un espace topologique $\mathcal{D}$ de* droites généralisées *contenant un ouvert $\mathcal{P}^*$ de* droites complètes, *dont le fermé complémentaire est noté $\mathcal{R}$, d'éléments appelés* rayons. *La donnée inclut aussi une relation d'incidence, induite par la relation d'appartenance usuelle, par incarnation de chaque élément de $\mathcal{D}$ comme sous-ensemble fermé de $\mathcal{P}$. On peut alors définir les notions de* région fondamentale *et de* parallélisme : *pour chaque droite complète d, la région fondamentale $R(d)$ est l'union dans $\mathcal{P}$ des rayons passant par un point de d, et deux droites complètes sont parallèles si elles définissent la même région fondamentale et qu'elles sont égales ou disjointes. Tous ces ingrédients doivent alors vérifier les axiomes suivants :*

(1) *par deux points distincts d'une région fondamentale passe une et une seule droite généralisée,*

(2) *si d est une droite complète et x un point de la région fondamentale $R(d)$, il existe une et une seule droite complète passant par x et parallèle à d,*

(3) *deux droites complètes rencontrant un même rayon sont soit parallèles, soit concourantes (i.e., leur intersection est non-vide),*

(4) *$\mathcal{P}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$,*

(5) *$\mathcal{R}$ est homéomorhe à $\mathbb{R}$, et les rayons sont les fibres d'une fibration triviale de $\mathcal{P} \approx \mathbb{R}^2$ sur $\mathcal{R} \approx \mathbb{R}$,*

(6) *toute droite complète est l'image d'un plongement propre de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P} \approx \mathbb{R}^2$,*

(7) *il existe une topologie sur $\mathcal{D}$ pour laquelle les inclusions de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{P}^*$ sont des homéomorphismes sur leurs images, et telle que l'application $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{D}$), qui à toute paire (x, x') (respectivement (d, d')) associe la droite complète contenant x, x' (respectivement l'intersection $d \cap d'$) est continue et ouverte (là où ces applications sont définies).*

Remarque 5.11. Soit $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ un $\mathbb{R}^2$-plan affine, et d_0 un élément de $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des droites parallèles à d_0, et $\mathcal{P}^*$ l'ensemble des droites non-parallèles à d_0. Alors, cette donnée vérifie tous les axiomes de $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine, avec la condition supplémentaire que toutes les régions fondamentales sont égales.

On peut montrer qu'inversement tout $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine dont toutes les régions fondamentales coincident s'obtiennent par ce procédé à partir d'un $\mathbb{R}^2$-plan affine avec une direction de droites parallèles distinguée. Donnons juste quelques indications sur la preuve : dans ce contexte, on utilise un procédé similaire à celui décrit à la remarque 5.9 : une fois choisis une direction de droites complètes parallèle (les "horizontales", les "verticales" étant les rayons) et une droite complète non comprise dans cette direction (le "graphe de l'identité"), on peut assimiler $\mathcal{P}^*$ à un ensemble d'homéomorphismes de $\mathbb{R}$. On montre alors que la topologie de $\mathcal{P}^*$ est celle induite par la topologie de la convergence simple sur l'espace des homéomorphismes de $\mathbb{R}$, puis qu'elle coincide avec celle induite par la convergence uniforme sur les compacts. On en déduit aisément le seul point à démontrer : l'ensemble des paires de droites généralisées parallèles est fermé.

Remarque 5.12. Le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{R}}^2$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est manifestement un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine. De manière plus générale, si $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ est un $\mathbb{R}^2$-plan affine et 0 un point distingué de $\mathcal{P}$, le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P} \setminus \{0\}$, le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{P}}^*$ de $\mathcal{D}$ privé des droites évitant 0, et le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{R}}$ de l'ensemble des rayons du $\mathbb{R}^2$-plan affine initial (i.e., les composantes connexes de $d \setminus \{0\}$ où d est un élément de $\mathcal{D}$ contenant 0), forment un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine.

Remarque 5.13. Comme notre notation le suggère, nous disposons d'une dualité : supposons que $(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ soit un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine vérifiant les axiomes additionnels suivants :

– (8) si deux droites complètes définissent la même région fondamentale, alors elles sont égales et confondues,

– (8*) si x et x' sont deux points tels que toute droite passant par x est parallèle à une droite passant par x', alors x et x' sont sur un même rayon.

Alors, $\mathcal{P}^*$ est l'ensemble des points d'un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine dont les rayons sont les familles de droites complètes parallèles, et les droites complètes les familles d'éléments de $\mathcal{P}^*$ contenant un point donné de $\mathcal{P}$. Une région fondamentale dans $\mathcal{P}^*$ associée à une droite (i.e., un point x de $\mathcal{P}$) est alors l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}^*$ parallèles à un droite passant par x. De plus, deux droites complètes x, y sont parallèles si elles sont sur un même rayon. On voit alors que dans la définition 5.10, l'axiome (3) est le dual de l'axiome (1), et l'axiome (2) est dual à la définition même de région fondamentale. Quant aux axiomes supplémentaires (8) et (8*), ils sont duaux l'un de l'autre. Les points délicats à démontrer sont ceux portant sur la topologie : les axiomes (4), (5), (6) et (7) (ce dernier étant déjà presque le dual de lui-même). Remarquons aussi que les axiomes supplémentaires (8) et (8*) excluent les exemples de la remarque 5.11.

Théorème 5.14 (**Theorem B de [23]**). *Soit Φ^t un flot d'Anosov topologiquement de contact. Alors, l'espace de feuilles $\mathcal{L}^{ss}$ est l'ensemble des points d'un $\mathbb{R}^2$-plan affine, dont les droites complètes sont les projections des relevés de feuilles fortes instables, et les rayons sont les orbites du flot φ^t.*

Bien sûr, l'énoncé analogue pour $\mathcal{L}^{uu}$ est tout aussi valide. À vrai dire, l'ensemble des droites complètes pour $\mathcal{L}^{ss}$ n'est autre que $\mathcal{L}^{uu}$: les deux $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-affines sont duaux l'un de l'autre au sens de la remarque 5.13.

Remarquons que, comme $\mathcal{L}^s$ s'identifie à l'espace des rayons $\mathcal{R}$, ce Théorème inclut le résultat suivant :

Corollaire 5.15. *Tout flot d'Anosov topologiquement de contact est alignable.*

V.V. Solodov a aussi naguère annoncé ce résultat pour les flots d'Anosov de contact, en suggérant une preuve de nature entièrement différente : elle consiste(rait) à montrer que pour un flot d'Anosov non-alignable, l'entropie topologique d'un flot dont les orbites sont les feuilles fortes stables est infinie, ce qui est impossible si le flot est C^1 ; par exemple, si le flot d'Anosov est de contact.

Remarque 5.16. Un flot d'Anosov topologiquement équivalent à une suspension ne peut être de contact (car il admet une section). Il est tout aussi vrai qu'il ne peut pas non plus être topologiquement de contact : la preuve en est cependant assez délicate (Proposition 5.1 de [**23**]).

Remarque 5.17. Il n'existe pas de flot d'Anosov topologiquement de contact pour lequel $\mathcal{L}^{ss}$ est un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine provenant d'un $\mathbb{R}^2$-affine comme expliqué à la remarque 5.11 (en effet, ces plans affines vérifient les axiomes additionels (8) et (8$*$)). De plus, on peut démontrer que $\mathcal{L}^{ss}$ est isomorphe à un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine défini en relevant un $\mathbb{R}^2$-plan affine troué (voir remarque 5.12) si et seulement le flot Φ^t est topologiquement équivalent à un flot géodésique généralisé. En corollaire, on obtient que tout flot géodésique d'une surface riemannienne à courbure strictement négative définit un $\mathbb{R}^2$-plan affine dont le groupe des collinéations contient un "grand" sous-groupe discret (Γ), ainsi qu'un sous-groupe à un paramètre. Ceci complète agréablement la liste des exemples de [**171**].

Remarque 5.18. Au vu du Théorème 5.7, il est naturel d'appeler Désarguien un flot d'Anosov pour lequel $\mathcal{L}^{ss}$ est isomorphe, en tant que $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine, au revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Or, il s'avère qu'il s'agit précisément des flots d'Anosov Désarguiens tels qu'ils sont définis au § 2.2.4. En effet, comme il est expliqué au §6 de [**23**], ceci découle de [**103**] - on peut même considérer que ce point de vue affine éclaire quelque peu [**103**].

Remarque 5.19. L'*espace drapeau* associé à un $\widetilde{\mathbb{R}}^2$-plan affine est l'espace des paires (x, d) pour lesquelles d est une droite complète contenant x. On l'équipe de la restriction de la topologie produit, et on le note X. Le groupe Γ agit naturellement sur X, et le flot φ^t se relève en un flot sur X, qu'on note encore φ^t, commutant avec l'action de Γ. On peut démontrer, de manière analogue à ce qui a été vu à la remarque 1.43, que l'action de Γ sur X est libre et proprement discontinue, et que le flot d'Anosov topologiquement de contact initial est topologiquement *conjugué* au flot induit sur $\Gamma\backslash X$ par φ^t.

Remarque 5.20. Margulis a exhibé pour tout flot d'Anosov topologiquement transitif une mesure feuilletée le long des feuilles instables faibles, invariante par holonomie le long des feuilles fortes stables ([**143**]), et multipliée par $\exp(at)$ par le flot, où a est une constante positive. Elle induit donc une mesure borélienne ν_M sur $\mathcal{L}^{ss}$ qui est Γ-invariante et multipliée par le flot φ^t. De plus, cette mesure est uniquement ergodique : à un facteur multiplicatif près, c'est l'unique mesure Γ-invariante.

CHAPITRE 6

Compléments, questions ouvertes

6.1. Régularité des feuilletages

Nous avons insisté lors de l'introduction sur la basse régularité des divers feuilletages associés à un flot d'Anosov : les feuilletages forts ne sont en général que Hölder continus, éventuellement C^1 dans le cas contact, et les feuilletages faibles, de classe $C^{1,\alpha}$ (de classe C^1, avec dérivée Hölder continue - le coefficient Hölder α dépendant du flot, cf. [**123**]). Nous allons passer ici en revue quelques résultats montrant que toute hypothèse de plus grande régularité impose au flot d'être topologiquement équivalent à une suspension ou à un flot géodésique généralisé, et exclut automatiquement la plupart des flots d'Anosov.

Nous souhaitons également souligner que ces résultats dépassent d'une certaine manière le cadre de [**38, 39, 76, 136**]), dans la mesure où ces travaux - présentant certes l'avantage de s'appliquer en toute dimension - présument l'existence d'une connexion ou d'un volume lisse invariant. De fait, en dimension 3, si les feuilletages faibles sont de classe $C^{1,1}$ et que le flot préserve une forme volume lisse, il préserve une métrique lorentzienne transverse de classe $C^{1,1}$. On peut alors appliquer le Théorème 3.2.

6.1.1. Feuilletages forts. Dans [**103**], E. Ghys démontre le Théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. *Soit Φ^t un flot d'Anosov de classe C^r $(r \geq 2)$ sur une variété fermée de dimension 3 dont les feuilletages forts stable et instable soient de classe C^s $(s \geq 2)$. Alors, Φ^t est topologiquement conjugué à une suspension d'un difféomorphisme linéaire du tore, ou à un flot d'Anosov Désarguien. De plus, la conjugaison topologique est de classe C^s.*

Esquisse de preuve :[1] Un tel flot, s'il n'est pas une suspension, est de contact (proposition 5.2). On peut alors considérer le $\mathbb{R}^2$-affine $\mathcal{L}^{ss}$ (Théorème 5.14). L'objet de la proposition 3.7 de [**103**] est précisément de démontrer que lorsque les feuilletages forts sont suffisamment différentiables, cette structure affine est localement projectivement isomorphe au plan affine usuel $\mathbb{R}^2$: en d'autres termes, tout point de $\mathcal{L}^{ss}$ admet un voisinage difféomorphe à $\mathbb{R}^2$ de sorte que les segments de droites généralisées locales sont envoyées sur des segments de droites usuelles. La preuve de ce fait s'appuie sur l'existence, sur chaque "droite locale", d'une forme de degré 5/2 qui est l'obstruction à la linéarisation locale de ces droites (voir [**8**], p. 52-63). On obtient l'annulation de cette obstruction dans notre contexte en raison de l'invariance par φ^t et de la minimalité de l'action de Γ.

Ceci fournit une (G, X)-structure sur M, où G est le groupe $PSL(3, \mathbb{R})$ agissant sur la variété drapeau $X = PT\mathbb{R}P^2$. Il s'agit alors de démontrer que l'application

[1] Où plutôt, panorama rapide de [**103**].

développante est injective, d'image les paires (x, d) où x décrit $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}P^2$ et d est une droite passant par x et évitant 0. Le groupe d'holonomie est alors un sous groupe de $GL(2, \mathbb{R})$, et il s'agit ensuite de démontrer que :

– le flot relevé $\widetilde{\Phi}^t$ est envoyé par l'application développante sur le flot radial,

– les éléments du groupe d'holonomie sont de la forme $\exp(u(\gamma))\rho(\gamma)$, où $\rho : \Gamma \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ sont des morphismes. C'est l'objet du Théorème 6.4 de [**103**].

La conclusion, i.e., le contrôle de la norme stable de $u \in H^1(M, \mathbb{Z})$, découle de [**170**]. ∎

6.1.2. Feuilletages faibles.

THÉORÈME 6.2 (**Théorème** 4.6 **de** [**105**]). *Soit Φ^t un flot d'Anosov de classe C^r $(r \geq 2)$ sur une variété fermée de dimension 3 dont les feuilletages faibles stable et instable soient de classe $C^{1,1}$. Alors, Φ^t est topologiquement équivalent à une suspension d'un différomorphisme linéaire du tore, ou à un flot d'Anosov quasi-fuchsien. De plus, l'équivalence topologique est de classe C^r.*

D'une part, ce Théorème permet de retrouver assez facilement rapidement le Théorème 6.1. D'autre part, le Théorème 6.2 repose pour l'essentiel sur le Théorème suivant :

THÉORÈME 6.3 (**Théorème** 4.1 **de** [**105**]). *Soit Φ^t un flot d'Anosov de classe C^r $(r \geq 2)$ sur une variété fermée de dimension 3. Si un des feuilletages faibles stable ou instable est de classe $C^{1,1}$, alors il est transversalement projectif.*

En effet, le Théorème 6.3 implique qu'un flot d'Anosov vérifiant les hypothèses du Théorème 6.2 est transversalement modelé sur l'univers d'Einstein Ein_2 (voir § 11.5). Pour être bref, signalons comme E. Ghys que la preuve des pages 238-242 de [**104**] peut s'adapter de manière à fournir le résultat. Indiquons aussi que nous avons démontré dans [**16**] que les flots d'Anosov transversalement projectifs sont topologiquement équivalents à des suspensions ou à des flots géodésiques généralisés, et que la preuve même dans [**16**] s'adapte assez clairement pour établir la différentiabilité de l'équivalence topologique annoncée dans la conclusion de 6.2.

REMARQUE 6.4. Les versions des Théorèmes 6.2 et 6.3 lorsque le flot est seulement supposé être un flot d'Anosov topologique sont elles aussi valides. Voir la discussion de la §5 de [**105**].

6.1.3. Régularité de l'action sur le cercle. Commençons par une remarque générale :

PROPOSITION 6.5. *Tout sous-groupe finimenent engendré de Homéo$^+(\mathbb{S}^1)$ agissant minimalement sur le cercle est topologiquement conjugué à un sous-groupe de Bilip$^+(\mathbb{S}^1)$.*

En présence d'un flot d'Anosov alignable non produit, cette proposition s'applique à l'action de Γ sur le cercle $\mathcal{S}^s$. Mais la proposition suivante montre qu'il semble difficile d'espérer une meilleure régularité de cette action :

PROPOSITION 6.6. *Soit Φ^t un flot d'Anosov alignable non-produit sur une variété fermée de dimension 3. L'action de τ^s sur $\mathcal{L}^s$ est de classe C^1 si et seulement si Φ^t est topologiquement équivalent à un flot géodésique généralisé.*

Preuve Soit Φ^t un flot d'Anosov vérifiant les hypothèses du Théorème. Lors de la remarque 1.43, nous avons vu que tout flot d'Anosov alignable non-produit est topologiquement équivalent à un flot C^0 défini par le procédé suivant :

– on considère l'ouvert Q de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ compris entre les graphes de l'identité et de τ,

– on considère l'ouvert U de PTQ formé des directions non-tangentes aux verticales $\{*\} \times \mathbb{R}$ ou aux horizontales $\mathbb{R} \times \{*\}$.

Comme l'action de Γ est C^1, elle induit une action continue sur U, qui est libre et proprement discontinue, dont on note M' l'espace quotient. De plus, les fibres de la projection de U sur Q admettent un paramètrage naturel Γ-invariant : sur le quotient M' nous obtenons donc un flot continu Ψ^s, topologiquement équivalent à Φ^t.

Le point est que l'application $(x, y) \mapsto (y, \tau(x))$ est un difféomorphisme $\mathcal{T}$ de Q, commutant avec l'action de Γ, et dont la différentielle préserve elle aussi le paramètrage des fibres de la projection de U sur Q : elle induit donc au quotient une *conjugaison* F entre le flot et son inverse :

$$F \circ \Psi^s = \Psi^{-s} \circ F$$

Ainsi, pour toute orbite périodique θ de Ψ^s, de période T, tous les $F^n(\theta)$ $(n \in \mathbb{Z})$ sont aussi des orbites périodiques de Ψ^s *de même période T !* L'équivalence topologique f entre Ψ^s et Φ^t ne préserve pas le paramétrage, mais la compacité de M implique qu'il existe un réel positif T' tel que l'image par f toute orbite périodique de Ψ^s de période T est de période au plus T'. Or, comme Φ^t est Anosov, *il n'existe qu'un nombre fini d'orbites périodiques de Φ^t de période inférieure à T'.* Donc, il existe un entier k tel que $F^k(\theta) = \theta$. Traduit dans Q, ceci signifie que pour tout point θ de Q fixé par un élément de Γ, il existe un élément γ_θ de Γ et un entier $k(\theta)$ tel que $\mathcal{T}^{k(\theta)}(\theta) = \gamma_\theta(\theta)$.

Notons maintenant de manière analogue à ce que nous avons fait lors de la preuve de la proposition 3.12 par $\mathcal{P}$ des paires de points distincts de $\mathcal{S}^s$, et par $\mathcal{P}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des projections de paires de points de $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fixés par un même élément de Γ. Nous savons d'une part que $\mathcal{P}_0$ est dense dans $\mathcal{P}$. Par ailleurs, nous affirmons que *l'orbite sous Γ de chaque élément de $\mathcal{P}_0$ est un fermé discret de $\mathcal{P}$.* En effet : soit $\theta = (x, y)$ un élément de Q fixé par un élément γ de Γ, et γ_n une suite d'éléments de Γ telle que la suite de $(x_n, y_n) = \gamma_n(x, y)$ se projette dans $\mathcal{P}$ en une suite convergeant vers un point de $\mathcal{P}$. Il existe donc une suite d'entiers k_n telle que la suite $\mathcal{T}^{k_n}(x_n, y_n)$ converge vers un point $(\bar{x}, \bar{y})$ de Q. Or, si T est la période de l'orbite périodique de Ψ^s correspondant à (x, y), toutes les orbites de Ψ^s correspondant aux $\mathcal{T}^{k_n}(x_n, y_n)$ sont aussi périodiques, de période T. Il s'ensuit clairement que $(\bar{x}, \bar{y})$ correspond à une orbite θ de Ψ^s dont chaque point est fixé par Ψ^T, i.e., de période divisant T : cette paire appartient donc à $\mathcal{P}_0$, ce qui montre déjà que $\mathcal{P}_0$ est fermé. De plus, comme Φ^t est un flot d'Anosov, l'orbite périodique θ est isolée parmi celles de périodes au plus T', la limite $(\bar{x}, \bar{y})$ est égale aux $\mathcal{T}^{k_n}(x_n, y_n)$ pour les n suffisamment grands. Ceci démontre comme voulu que $\mathcal{P}_0$ est un fermé discret.

On peut alors reproduire mot pour mot la preuve de la proposition 3.12, et démontrer que $\Gamma \subset \text{Homéo}^+(\mathcal{S}^s)$ est un groupe de convergence, et donc, conjugué à un groupe Fuchsien. On conclut comme au corollaire 3.13. ∎

Remarque 6.7. Les méthodes de chirurgie, notamment celle de Foulon, permettent de produire à profusion des flots satisfaisant les hypothèses de la proposition 6.6. Par ailleurs, il est connu que les variétés obtenues à partir par chirurgies de Dehn sont très souvent hyperboliques (voir [**186**], [**47**], [**112**]) : par exemple, le complémentaire d'un entrelacs admet souvent une métrique hyperbolique complète de volume fini : un exemple célèbre est le complémentaire du noeud de huit, qui est notoirement homéomorphe au complémentaire d'une orbite périodique de la suspension de la fameuse matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour de tels entrelacs, toutes les chirurgies, sauf un nombre fini, aboutissent à des variétés hyperboliques. Le groupe Γ est dans ces cas un réseau cocompact de $SO_0(1,3)$.

6.2. Sections de Birkhoff

Définition 6.8. *Une section de Birkhoff d'un flot d'Anosov Φ^t (sur une 3-variété fermée M) est une immersion $i : S \to M$ de classe C^1 d'une surface à bord de type fini S telle que :*

– l'image par i du bord de S est l'union d'un nombre fini d'orbites périodiques,

– la restriction de i à l'intérieur de S est un plongement injectif transverse au flot,

– il existe un temps $T > 0$ tel que, pour tout x de M, l'orbite positive de Φ^t pour les temps compris dans l'intervalle $[0, T]$ rencontre $i(S)$.

Il a été pour la première fois démontré par D. Fried ([**92**]) que tout flot d'Anosov topologiquement transitif admet une section de Birkhoff. Il est assez facile de démontrer que l'application de premier retour définit un homéomorphisme $f : S \to S$ dont la classe d'isotopie est pseudo-anosov ; en fait, cet homéomorphisme f est lui-même pseudo-anosov au sens suivant : il préserve deux feuilletages singuliers (qui sur l'intérieur de S coincident avec les traces des feuilletages faibles), et chacun de ces feuilletages singuliers admettent une mesure transverse invariante qui est multipliée sous l'action de f par une constante non nul. Cette constante est strictement plus grande que 1 pour un des feuilletages mesurés, et plus petite que 1 pour l'autre feuilletage mesuré (ces deux contantes multiplicatives sont en fait inverses l'une de l'autre).

Inversement, tout homéomorphisme d'Anosov sur une telle surface S définit (par suspension suivi d'un "plombage" (plumbing)) un flot *topologique*, bien défini modulo chirurgie de Dehn-Fried le long des orbites périodiques provenant des singularités de f. Les flots obtenus par ce procédé sont dit *pseudo-anosov.* En général, ce ne sont pas des flots d'Anosov topologiques : il faut pour celà qu'il vérifie une condition supplémentaire : pour chaque singularité x de f, le nombre de f-orbites de séparatrices stables issues de x soit égal exactement à deux.

Les flots pseudo-Anosov jouent un rôle crucial dans les développements récents de l'étude des feuilletages de codimension 1 en dimension 3 (voir par exemple [**52, 80**]). Insistons sur le fait qu'il s'agit de flots topologiques, et qu'une question importante consiste à savoir s'il est vrai que tout flot d'Anosov topologique est topologiquement équivalent à un flot d'Anosov lisse.

Une section de Birkhoff fournit des éléments intéressants sur la dynamique d'un flot d'Anosov. Mais cette approche a des limites : un flot d'Anosov donné admet une infinité de sections de Birkhoff, aussi, une question naturelle est :

Question : *Soient (S, f), (S', f') deux homéomorphismes pseudo-anosov. À quelle condition leurs suspensions sont-ils des flots d'Anosov topologiquement équivalents modulo chirurgie de Dehn-Fried ?*

Une manière un peu plus précise d'énoncer cette question est de demander s'il existe un algorithme, partant des données (S, f), (S', f'), et produisant comme résultat la réponse à la question.

Une autre question très intéressante, formulée par E. Ghys :

Question : *Tout flot d'Anosov topologiquement transitif admet-il une section de Birkhoff de genre* 1 *?*

Un bon candidat potentiel pour apporter une réponse négative à cette question est l'exemple de Bonatti-Langevin (T. Noda ([**160**]) obtient la description d'une section de Birkhoff de genre 0 pour l'exemple de Bonatti-Langevin, mais dont l'application de premier retour se relève en un difféomorphisme hyperbolique du tore par un revêtement branché).

Remarque 6.9. Les orbites sous le flot - si celui-ci est paramétré correctement - produit ce qu'on appelle une *décomposition en livre ouvert* de la variété : les pages sont les itérés de l'image par i de l'intérieur de S, et $i(\partial S)$ est la *reliure* de la décomposition. Cette notion joue un rôle important dans l'étude récente des structures de contact - notamment, la construction de structures de contact tendues ([**108**]). Il semble des plus intéressants de confronter ces travaux avec l'étude des flots d'Anosov de contact. Peut-être est-il envisageable d'en extraire une réponse affirmative à la question suivante :

Question : *Tout flot d'Anosov alignable est-il topologiquement équivalent à flot d'Anosov de contact ?*

6.3. Flots d'Anosov PL

Définition 6.10. *Un flot d'Anosov PL est un flot d'Anosov topologique dont les deux feuilletages stable et instable sont chacun transversalement affine par morceaux.*

Pour tout réel positif λ, un flot d'Anosov PL_λ tel que les dérivées à gauche et à droite des éléments du pseudo-groupes d'holonomie de $\mathcal{F}^{s,u}$ sont toutes des puissances de λ.

Il est clair que tout homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface préserve une structure affine par morceaux : les mesures transverses aux feuilletages singuliers stables et instables définissent un système de coordonnées adéquat. On en déduit que les flots d'Anosov topologiques associés, s'il en existe, sont des flots d'Anosov PL - et même, PL_λ (pour un certain λ ; notons que ce λ n'est pas unique pour un flot d'Anosov topologique donné ([**50**])).

Nous avons en fait déjà affimé que cette notion est particulièrement adaptée à la chirurgie de Fried (remarque 2.32). Indiquons, comme travaux reliés à ce point de vue, [**101**], [**122**], [**50**].

Enfin, nous ne résistons pas à l'envie de développer le point de vue suivant, d'essence lorentzienne, bien que nous ne sachions pas en extraire un résultat tangible :

Soit $i : S \to M$ une section de Birkhoff, et $\tilde{i} : \widetilde{S} \to \widetilde{M}$ un de ses relevés : on peut démontrer que l'image $\widetilde{S}$ de $\tilde{i}$ est Γ-invariante, et qu'elle rencontre toutes les orbites de $\widetilde{\Phi}^t$. La restriction de π^Φ à $\widetilde{S}$ est alors un revêtement ramifié Γ-équivariant au-dessus de Q^Φ, les points de ramifications - qui ont un indice infini de ramification - forment un fermé discret Λ de Q^Φ. Les mesures transverses aux feuilletages stables et instables de l'application pseudo-anosov f de premier retour sur la section de Birkhoff fournit un système de coordonnées locales sur le compactifié naturel de S (celui obtenu en écrasant chaque composante de bord en un point) qui en fait une surface munie d'une structure euclidienne plate avec singularités. Après relèvement dans $\widetilde{M}$ et projection par π^Φ, on obtient sur $Q^\Phi \setminus \Lambda$ une structure lorentzienne plate, dont l'holonomie autour de chaque point de Λ est conjuguée dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{1,1})$ à une isométrie lorentzienne diagonale de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix}$$

La contante λ apparaissant dans cette matrice est le facteur multiplicatif par lequel l'application de premier retour f multiplie la mesure transverse de son feuilletage stable. En d'autres termes, on obtient sur Q^Φ une métrique lorentzienne plate avec singularités Γ-invariante :

Tout flot d'Anosov topologique topologiquement transitif admet une structure transverse invariante lorentzienne plate avec singularités hyperboliques.

6.4. Découpage de flots d'Anosov

Nous avons vu que les flots d'Anosov sur les variétés graphées se prêtent à une étude approfondie, et quasiment exhaustive. Par ailleurs, toute 3-variété orientable supportant un flot d'Anosov est irréductible. Si elle admet un plongement incompressible d'une surface orientable, elle est dite *Haken*. Or, toute variété Haken admet une décomposition, unique à isotopie près, le long de tores incompressibles en sous-variétés à bord qui sont soit des fibrés de Seifert, soit atoroïdaux (tout tore incompressible est isotope à une composante torique du bord)(voir [**134**]). Notons qu'une variété qui n'est pas Haken est déjà atoroidale, ce qui montre que cette décomposition est en fait valable pour toute variété supportant un flot d'Anosov.

D'après le Théorème de géométrisation de Thurston, l'intérieur d'un morceau atoroidal d'une telle décomposition peut être muni d'une métrique hyperbolique complète, i.e., est homéomorphe au quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ par un groupe discret d'isométries[2].

Celà suggère d'entreprendre le découpage de tout flot d'Anosov le long de tores incompressibles. Si on se restreint au cas des flots d'Anosov alignables - ce que nous allons faire ici pour simplifier le propos - le Théorème 4.4 permet d'opérer ce découpage - et ce, de manière canonique en raison de la proposition 4.5. De plus, le Théorème 4.14 permet d'identifier la restriction du flot d'Anosov aux morceaux fibrés. Il ne reste donc qu'à comprendre les restrictions aux morceaux hyperboliques.

Mais essentiellement rien n'est connu sur ce sujet. S. R. Fenley a bien établi des résultats sur les flots d'Anosov sur les variétés hyperboliques, mais ces résultats sont de nature négative : par exemple, les orbites d'un flot d'Anosov alignable

[2]Il reste aussi le cas où la variété sans bord initiale elle-même est atoroidale, où le Théorème de géométrisation ne s'applique pas en général - mais il est déjà intéressant de poser les questions à suivre dans le cas où on suppose que la variété M est hyperbolique.

sur une variété hyperbolique ne peuvent être des (C, K)-quasi-géodésiques, avec des constantes (C, K)-uniformes - ce fait est du reste un corollaire immédiat de la description des flots d'Anosov alignables non-produits : chaque orbite périodique d'un tel flot est isotope à une infinité d'orbites périodiques, qui sont isolées les unes des autres : elles ne peuvent donc être toutes des (C, K)-quasi géodésiques.

On dispose d'une infinité d'exemples de flots d'Anosov alignables sur les variétés hyperboliques, qui sont même de contact - de fait, la plupart des chirurgies de Foulon opérées aux voisinages d'orbites périodiques produisent de tels flots - mais la dynamique de ces flots est difficilement reliable à la géométrie hyperbolique ambiante.

Remarquons aussi que le caractère semi-local des chirurgies permet aussi de construire aisément des flots d'Anosov alignables sur des variétés irréductibles mixtes, i.e., dont la décomposition le long de tores incompressibles contient au moins un morceau fibré, et au moins un morceau atoroidal.

Il est bien difficile d'imaginer comment il serait possible d'énoncer une description canonique des (restrictions de) flots d'Anosov alignables sur des variétés (complètes à bord) hyperboliques. Une question à laquelle il semble raisonnable d'apporter une réponse est :

Question : *Sur une variété hyperbolique données, le nombre de classes d'équivalence topologique de flots d'Anosov produits est-il fini ?*

Énonçons une autre question plus "technique", qui illustre bien le désarroi dans lequel on peut se trouver face à ce problème :

Question : *Soit N un morceau atoroidal dans une variété M supportant un flot d'Anosov Φ^t. On suppose que N est en position optimale, i.e., que les composantes de ∂N sont quasi-transverses à Φ^t. Les orbites périodiques de Φ^t isotopes à des lacets contenus dans N sont-elles toutes contenues dans N ?*

Deuxième partie

(G, X)-Structures

.

À nouveau, un cryptarithme non parfait, admettant plusieurs solutions.

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & \mathbf{A} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{I} & \mathbf{N} & \mathbf{E} \\
+ & \mathbf{A} & \mathbf{N} & \mathbf{O} & \mathbf{S} & \mathbf{O} & \mathbf{V} \\
\hline
 & \mathbf{F} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{I} & \mathbf{L} & \mathbf{E}
\end{array}
$$

CHAPITRE 7

Préambule

7.1. Définitions

Comme référence au contenu de cette section, nous aimons indiquer [**110**].

Soit G un groupe agissant continûment sur une variété X de manière analytique, i.e., de sorte que pour tout élément g de G non-trivial, l'ensemble des points fixes de g dans X est d'intérieur vide.

Définition 7.1. *Une (G, X)-structure sur une variété M est la donnée d'un atlas $(V_i, f_i)_{(i\in I)}$ sur M tel que :*

– chaque $f_i : V_i \to X$ est un homéomorphisme sur son image U_i,

– chaque changement de carte $g_{ij} = f_i \circ f_j^{-1} : U_{ij} = U_j \cap f_j(V_j \cap V_i) \to U_{ji} = U_i \cap f_i(V_i \cap V_j)$ est la restriction d'un élément de G.

Une (G, X)-variété est une variété équipée d'une (G, X)-structure.

Par exemple, pour $X = \mathbb{R}^n$ et $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, on obtient la notion de variété affine (plate) ; pour $X = \mathbb{R}^n$ et $G = O(n, \mathbb{R})$, celle de variété euclidienne, etc...

Définition 7.2. *Un (G, X)-morphisme entre deux (G, X)-variétés est une application dont les expressions dans les cartes définissant les (G, X)-structures sont des restrictions d'éléments de G. Un (G, X)-isomorphisme est un (G, X)-morphisme qui est un homéomorphisme. Deux (G, X)-structures sur une variété M sont dites égales si l'application identité est un (G, X)-isomorphisme. Elles sont dites équivalentes s'il existe un (G, X)-isomorphisme isotope à l'identité.*

Il est clair que tout (G, X)-morphisme est un homéomorphisme local.

Un exemple évident de (G, X)-variété est la variété X elle-même, où les $f_i : U_i \to V_i$ sont les restrictions de l'application identité. Si N est une (G, X)-variété, et $f : M \to N$ un homéomorphisme local, il existe une (G, X)-structure sur M, unique à (G, X)-isomorphisme près, de sorte que f soit un (G, X)-morphisme : le cas $N = X$ fournit donc une autre famille d'exemples.

Enfin, si Γ est un groupe de (G, X)-isomorphismes d'une (G, X)-variété M, qui de plus agit librement et proprement sur M, l'espace quotient $\Gamma\backslash M$ admet une (G, X)-structure, unique à équivalence près, de sorte que l'application de projection soit un (G, X)-morphisme.

Ces remarques ajoutées les unes aux autres aboutissent au fait suivant : si $p : \widetilde{M} \to M$ est un revêtement universel, de groupe de Galois Γ, $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to X$ un homéomorphisme local, et $\rho : \Gamma \to G$ un morphisme tel que :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \mathcal{D} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathcal{D}$$

il existe alors des (G, X)-structures sur M et $\widetilde{M}$, uniques à équivalence près, de sorte que p et $\mathcal{D}$ soient des (G, X)-morphismes.

Le point est que cette construction fournit tous les exemples possibles :

PROPOSITION 7.3. *Soit M une (G,X)-variété, $p : \widetilde{M} \to M$ le revêtement universel, et Γ le groupe fondamental de M. Il existe alors un homéomorphisme local $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to X$ - dit application développante - et une représentation $\rho : \Gamma \to G$ - dite représentation d'holonomie - de sorte que :*

– si $\widetilde{M}$ est équipé d'une (G,X)-structure pour laquelle l'application p est un (G,X)-morphisme, alors $\mathcal{D}$ est un (G,X)-morphisme,

– l'application $\mathcal{D}$ est équivariante :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad \mathcal{D} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathcal{D}$$

Remarquons que pour élément g de G, les (G,X)-structures définies par les paires $(\mathcal{D}, \rho)$ et $(g \circ \mathcal{D}, g\rho g^{-1})$ sont égales.

La notion de (G,X)-structure s'étend à celle de (G,X)-structure transverse à un feuilletage :

DÉFINITION 7.4. *Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. Une (G,X)-structure transverse à $\mathcal{F}$ est la donnée d'un recouvrement $(V_i)_{(i \in I)}$ de M et d'applications $f_i : V_i \to X$ tels que :*

– chaque f_i est une fibration triviale sur son image U_i dont les fibres sont les feuilles de la restriction de $\mathcal{F}$ à V_i,

– si U_{ij} désigne $U_j \cap f_j(V_j \cap V_i)$, il existe un élément g_{ij} de G dont la restriction à U_{ij} vérifie, là où elle est définie, l'équation :

$$f_i = g_{ij} \circ f_j$$

Lorsque nous ne voulons pas spécifier le feuilletage $\mathcal{F}$, nous parlons de (G,X)-*structure feuilletée.* On définit sans peine la notion de (G,X)-morphismes, équivalences, etc... L'analogue de la proposition 7.3 reste vraie dans ce contexte, sous la forme suivante :

PROPOSITION 7.5. *Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée, $p : \widetilde{M} \to M$ le revêtement universel, Γ le groupe fondamental de M, et $\widetilde{\mathcal{F}}$ le relêvement de $\mathcal{F}$ à $\widetilde{M}$. On considère une (G,X)-structure transverse à $\mathcal{F}$. Il existe alors une submersion $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to X$ - dite application développante - et une représentation $\rho : \Gamma \to G$ - dite représentation d'holonomie - de sorte que :*

– si $\widetilde{\mathcal{F}}$ est équipé de la (G,X)-structure transverse relevée (celle pour laquelle p est un (G,X)-morphisme) alors $\mathcal{D}$ est un (G,X)-morphisme,

– les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont les composantes connexes des fibres de $\mathcal{D}$,

– l'application $\mathcal{D}$ est équivariante : $\mathcal{D} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathcal{D}$

REMARQUE 7.6. Si G' est un groupe agissant de manière analytique sur une variété X', $\varphi : G' \to G$ un morphisme, et $f : X' \to X$ un homéomorphisme local qui est φ-équivariant, toute (G', X')-structure induit une (G,X)-structure canonique. Si de plus φ est un revêtement galoisien, toute (G,X)-structure induit une (G', X')-structure canonique. Cette remarque, appliquée dans le cas où X' est le revêtement universel de X et G' le groupe des homéomorphismes de X' relevés des éléments de G, montre qu'on ne perd aucune généralité à supposer que X est simplement connexe, et, lorsque G est un groupe de Lie, à le supposer simplement connexe.

7.2. Déformations de (G, X)-structures

Nous discutons ici un phénomène bien connu des spécialistes, observé par Ehresmann, souvent attribué à Thurston-Lock.

Dans tout ce qui suit, $(M, \mathcal{F})$ désigne une variété feuilletée muni d'une (G, X)-structure transverse. On note $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to X$ et $\rho : \Gamma \to G$ l'application développante et la représentation d'holonomie. La donnée de ρ produit déjà un objet géométrique important, construit de la manière suivante : sur $\widetilde{M} \times X$ on considère l'action diagonale de Γ. L'image de $(\tilde{p}, x)$ par γ est $(\gamma\tilde{p}, \gamma x)$. Comme l'action de Γ sur $\widetilde{M}$ est libre et proprement discontinûe, il en est de même pour celle sur $\widetilde{M} \times X$, on note E_ρ la variété quotient de cette action. La projection sur le premier facteur induit une application $\pi_\rho : E_\rho \to M$. Les fibres $\{x = Cte\}$ de la projection sur le deuxième facteur se projettent elles en les feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}_\rho$, transverse à π_ρ.

Définition 7.7. *Le triplet $(E_\rho, \pi_\rho, \mathcal{F}_\rho)$ est le fibré plat associé à la représentation ρ.*

Ce fibré est de fibres homéomorphes à X, de monodromie ρ.

Si ρ est la représentation d'holonomie d'une (G, X)-structure d'application développante $\mathcal{D}$, l'application de $\widetilde{M}$ dans $\widetilde{M} \times X$ qui à $\tilde{p}$ associe $(\tilde{p}, \mathcal{D}(\tilde{p}))$ passe au quotient en une section s de la fibration π_ρ. Cette section s est de plus transverse au feuilletage $\mathcal{F}_\rho$. Inversement :

Lemme 7.8. *Un morphisme $\rho : \Gamma \to X$ est la représentation d'holonomie d'une (G, X)-structure transverse à un feuilletage $\mathcal{F}$ de M si et seulement si le fibré π_ρ admet une section transverse au feuilletage $\mathcal{F}_\rho$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est autre que le tiré en arrière $s^*\mathcal{F}_\rho$.*

De plus, si $s_i \quad (i \in I)$ est une famille continue de sections de π_ρ toutes transverses à $\mathcal{F}_\rho$, les (G, X)-structures feuilletées qu'elles définissent sont toutes équivalentes entre elles.

Soit $\mathrm{Rep}(\Gamma, G)$ l'espace des représentations de Γ dans G. On suppose ici pour simplifier la discussion que M est compacte : Γ est alors finiment engendré ; on note $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ un système générateur de Γ. On suppose aussi désormais que G est un groupe topologique - supposons même que ce soit un groupe de Lie. Alors, $\mathrm{Rep}(\Gamma, G)$ s'identifie à un sous-variété algébrique de G^k (le plongement consiste à envoyer ρ sur le k-uplet des images par ρ des k générateurs) : on l'équipe de la topologie induite. Le point est que si s est une section pour un fibré plat E_ρ, pour tout ρ' de $\mathrm{Rep}(\Gamma, G)$ suffisament proche de ρ, il existe un isomorphisme de fibré entre E_ρ et $E_{\rho'}$ qui envoie le feuilletage $\mathcal{F}_{\rho'}$ sur un feuilletage proche de $\mathcal{F}_\rho$, et donc transverse à s. Grâce à la discussion précédente, on obtient donc :

Lemme 7.9. *Les représentations d'holonomie forment un ouvert de Rep(Γ, G).*

Nous n'allons pas discuter de topologie sur l'espace des (G, X)-structures feuilletées à équivalence près, indiquons simplement qu'elle peut-être munie d'une structure de variété algébrique de sorte que sur un ouvert Zariski elle soit modelée sur la variété algébrique $\mathrm{Rep}(\Gamma, G)_{//G}$, i.e., le quotient *algébrique* de l'action de G sur $\mathrm{Rep}(\Gamma, G)$ par conjugaisons. Préciser cette terminologie n'est pas utile pour notre propos.

7.3. Représentations Anosov

La notion de représentation Anosov a été dégagée et systématisée par F. Labourie ([**142**]). Comme nous le verrons, elle s'avère des plus pertinentes pour étudier certaines (G, X)-structures. Elle introduit dans le contexte géométrique les remarquables propriétés des systèmes Anosov, dont, au premier chef, leur stabilité structurelle.

Soit Φ^t un flot d'Anosov sur une variété fermée M, on utilise les notations $\widetilde{M}$, Γ, etc... , en cours dans la partie précédente. Nous considérons également un groupe de Lie G agissant sur une variété Y. Pour toute représentation $\rho : \Gamma \to G$, le flot Φ^t se relève de manière unique en un flot 'horizontal' $\widehat{\Phi}^t$ sur le fibré plat E_ρ : ce flot est le passage au quotient du flot sur $\widetilde{M} \times Y$ dont le temps t envoie $(\tilde{p}, y)$ sur $(\widetilde{\Phi}^t(\tilde{p}), y)$.

On suppose que le fibré tangent TY se décompose en la somme de deux fibrés G-invariants $TY = E^+ \oplus E^-$, et que ces deux fibrés sont intégrables, i.e., tangents à des feuilletages $\mathcal{G}^\pm$ de Y. Ces feuilletages induisent sur E_ρ deux feuilletages $\widehat{\mathcal{G}}^\pm$ qui sont $\widehat{\Phi}^t$-invariants, dont les feuilles sont saturées par le feuilletage horizontal $\mathcal{F}_\rho$. De plus, les fibrés $E^\pm$ induisant des sous-fibrés $\widehat{E}^\pm$ de TE_ρ, tangents aux fibres de π_ρ. Ces fibrés sont chacun préservés par la différentielle de $\widehat{\Phi}^t$. De plus, ils sont chacun intégrable, définissant des feuilletages $\widehat{\mathcal{F}}^\pm$.

Définition 7.10. *Une structure (G, Y)-Anosov sur (M, Φ^t) est la donnée d'une représentation ρ et d'une section continue s de π_ρ, telle que l'image S de s soit un fermé $\widehat{\Phi}^t$-invariant, qui soit en outre un fermé hyperbolique de $\widehat{\Phi}^t$ au sens suivant : la différentielle de $\widehat{\Phi}^t$ en chaque point de S contracte exponentiellement dans le futur les vecteurs tangents à $\widehat{E}^+$, et dilate exponentiellement dans le futur les vecteurs tangents à $\widehat{E}^-$.*

La représentation ρ est alors dite (G, Y)-Anosov.

La section s intervenant dans cette définition n'est que continue, dans les exemples que nous verrons, elle est souvent tout au plus Hölder continue. La propriété de stabilité structurelle des flots d'Anosov implique que les représentations (G, Y)-Anosov forment un ouvert de $\mathrm{Rep}(\Gamma, G)$ (voir proposition 2.1 de [**142**]).

En général, une structure (G, Y)-Anosov ne définit absolument pas une (G, Y)-structure tranverse à Φ^t : la section s n'est pas en général transverse au feuilletage horizontal $\mathcal{F}_\rho$, et il faut considérer que les fibres Y sont de dimension beaucoup plus grande que M.

La section s d'une structure (G, Y)-Anosov se relève en une application continue $f : \widetilde{M} \to Y$ telle que :

– f est équivariante : $f \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ f$,

– f est invariante par le flot relevé : $f \circ \widetilde{\Phi}^t = f$.

Elle induit donc une application continue $\bar{f} : Q^\Phi \to Y$ qui est Γ-équivariante.

Par ailleurs, soient p, p' deux points de M sur une même feuille locale stable forte, i.e, tels que les itérés $\Phi^t(p)$ et $\Phi^t(p')$ soient à distance inférieure à ϵ pour tous les temps positifs. La propriété de dilatation exponentielle le long des feuilles de $\widehat{\mathcal{F}}^-$ implique que $s(p)$ et $s(p')$ doivent appartenir à même feuille de $\widehat{\mathcal{G}}^+$. Ceci implique que deux points de $\widetilde{M}$ appartenant à une même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ sont envoyés par f dans une même feuille de $\mathcal{G}^+$. On note $X^\pm$ les espaces de feuilles des feuilletages $\mathcal{G}^\pm$: l'application f induit une application continue $f^s : \mathcal{L}^s \to X^+$

qui est Γ-équivariante. De manière similaire, on obtient une application continue Γ-équivariante $f^u : \mathcal{L}^u \to X^-$. Dans les exemples que nous allons considérer, les espace de feuilles $X^\pm$ seront des espaces topologiques traditionnels- à vrai dire, des espaces géométriques de fréquentation recommandable. Le flot Φ^t sera un flot géodésique d'une surface fermée : les espaces de feuilles $\mathcal{L}^{s,u}$ sont alors des copies de la droite $\widetilde{\mathbb{R}}P^1$. Ceci rendra fertile en retombées la simple existence des applications $f^{s,u}$...

Dans [**142**], §3.1, F. Labourie fournit une recette générale permettant de construire de nombreuses structures (G, Y)-Anosov au dessus de flots géodésiques, ou plutôt, de leurs revêtements doubles : soit H le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, et notons $\widetilde{H}$ le revêtement universel de H. Soit $\bar{\Gamma}$ un réseau cocompact de H, et Γ sa préimage par la projection $p : \widetilde{H} \to H$. On note $A = \{a^t\}$ le sous-groupe à un paramètre des matrices diagonales, et $h^s_\pm$ les sous-groupes à un paramètre de matrices unipotentes :

$$a^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad h^s_+ = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h^s_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

L'action à droite de a^t sur $M = \bar{\Gamma}\backslash H$ est un flot d'Anosov Φ^t qui est un revêtement double du flot géodésique d'une surface (cf. § 2.2.2).

Soit ρ_0 un morphisme non-trivial de H dans un groupe de Lie semi-simple G. Par simplicité de H, le noyau de ρ_0 est un sous-groupe fini de H. Soit Z la composante neutre du centralisateur dans G de $\rho_0(A)$. La variété Y à considérer est le quotient $G_{/Z}$; on notera p_Z la projection canonique de G sur Y. L'action adjointe de A sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G se diagonalise : on note $\mathcal{P}^+$ la somme des directions propres de $ad(a^t)$ associées aux valeurs propres positives ou nulles, et $\mathcal{P}^-$ la somme des directions propres associées aux valeurs propres négatives ou nulles. Ce sont deux sous-algèbres de Lie, dont la somme est $\mathcal{G}$ tout entier, et dont l'intersection est l'algèbre de Lie de Z. On note $P^\pm$ les sous-groupes (paraboliques) d'algèbres de Lie $\mathcal{P}^\pm$. On note $X^\pm$ les espaces quotients $G_{/P^\pm}$. On a alors une projection canonique de $Y = G_{/Z}$ dans $X^+ \times X^-$, qui est injective (mais non surjective en général). Ce plongement met en évidence deux feuilletages transverses $\mathcal{G}^\pm$ sur Y, dont les espaces de feuilles sont $X^\pm$. Les directions tangentes à ces feuilletages sont des sous-fibrés $E^\pm$.

Remarquons que tous les espaces ainsi définis sont homogènes sous l'action à gauche de G, et que les diverses applications définies entre eux sont équivariantes pour ces actions de G.

Proposition 7.11 ([**142**], proposition 3.1). *La restriction de ρ_0 à $\bar{\Gamma}$ composée à la projection de Γ sur $\bar{\Gamma}$, et la section $s : M \to E_{\rho_0}$ quotient de $h \mapsto (\rho_0(h), p_Z(\rho_0(h))$ définit une structure (G, Y)-Anosov sur $(M = \bar{\Gamma}\backslash H, \Phi^t)$.*

Remarque 7.12. Dans ces exemples, la représentation Anosov $\rho_0 : \Gamma \to G$ transite à travers un morphisme de $\bar{\Gamma}$ dans G, son noyau contient donc un sous-groupe d'indice au plus 2 du centre de Γ ; notons par δ un générateur du noyau de la restriction de ρ_0 au centre de Γ. Ceci implique que les applications $f^{s,u}$ transitent à travers des applications $\bar{f}^{s,u} : \overline{\mathcal{L}}^{s,u} \to \mathcal{P}^\pm$, où $\overline{\mathcal{L}}^{s,u}$ est le cercle topologique quotient de $\mathcal{L}^{s,u}$ par l'action de δ. Notons que ce cercle topologique est un revêtement double de la droite projective $\mathbb{R}P^1$, et que l'action de $\bar{\Gamma}$ sur ce cercle est le relevé de son action projective usuelle en tant que sous groupe de H.

Remarque 7.13. Les images par $f^{s,u}$ d'un point fixe attractif (resp. répulsif) d'un élément γ de Γ est un point fixe attractif (resp. répulsif) de $\rho(\Gamma)$ dans $X^{\pm}$ (voir proposition 3.2 de [**142**]). Il arrive souvent que la représentation Anosov soit proximale, au sens où l'action sur chaque $X^{\pm}$ de chaque $\rho(\gamma)$ admet au plus un point fixe. Dans ce cas, les images de f^s et de f^u se confondent et sont égales à l'adhérence de l'union des points fixes attractifs d'éléments de $\rho(\Gamma)$ (voir proposition 9.5).

7.4. Exemples

La géométrie, et l'algèbre produisent multitude de (G, X)-variétés naturelles. Mais savoir si une variété fermée donnée admet une (G, X)-structure, et classifier les (G, X)-structures sur cette variété sont des questions extrêmement difficiles qui restent sans réponse sauf dans quelques cas particuliers. Se pose d'abord une question de nature algébrique : trouver les représentations du groupe fondamental Γ dans le groupe G. Il faut ensuite reconnaitre parmi ces représentations celles qui sont groupes d'holonomies de (G, X)-structures. Enfin, il existe souvent plusieurs (G, X)-structures sur une même variété non-isomorphes entre elles mais admettant la même représentation d'holonomie. Il convient de prendre conscience que l'application développante est souvent "sauvage" : il serait erroné de penser que toute (G, X)-structure est *complète,* i.e., que l'application développante est un homéomorphisme entre $\widetilde{M}$ et X. Il serait tout aussi ingénu de s'imaginer que l'application développante est toujours un homéomorphisme sur son image, où un revêtement sur son image.

Comme complément de cette section plutôt introductive, indiquons [**36**], [**55**], [**110**], [**184**]. Dans tout ce qui suit, nous supposons que les (G, X)-variétés considérées sont fermées.

7.4.1. Variétés riemanniennes localement homogènes. Il s'agit du cas où le groupe G préserve une métrique riemannienne sur X. Nous supposons ici que cette action est transitive pour simplifier l'exposition, mais ceci n'est pas nécessaire pour l'essentiel que nous allons dire ici, tout au plus est-il fortement recommandé de supposer que la métrique riemannienne sur X est (géodésiquement) complète : tel sera donc le cas ici. Beaucoup de ce que nous allons dire reste du reste valable si la métrique G-invariante sur X n'est pas riemannienne ; à vrai dire, le point essentiel est que l'action de G sur X soit propre.

La métrique sur X donne lieu à une métrique sur $\widetilde{M}$ et M, de sorte que $\mathcal{D}$ et p soient des isométries (locales). La compacité de M assure sa complétude, ainsi que celle de son revêtement universel. On en déduit aisément que l'application développante est un revêtement sur X ; puisque ce dernier peut-être supposé simplement connexe (voir remarque 7.6), toute (G, X)-variété est isomorphe au quotient de X par un sous-groupe discret sans torsion de G (l'hypothèse "discret" implique que l'action de $\rho(\Gamma)$ est proprement discontinue, l'hypothèse "sans torsion" assure elle que cette action est libre).

Tout celà facilite grandement la compréhension des (G, X)-structures riemanniennes, mais leur classification reste un problème fort respectable. Lorsque X est la sphère ronde $\mathbb{S}^n$, la classification se 'réduit' à celle des sous-groupes finis de $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$: problème délicat, mais qui sort du cadre "à revêtements finis près" que nous nous sommes fixé.

Le cas où X est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa métrique plate canonique est entièrement résolu par le Théorème de Bieberbach :

Théorème : *Toute variété riemannienne compacte localement euclidienne est isométrique à un quotient fini d'un tore plat $\mathbb{R}^n/H$, où $H \approx \mathbb{Z}^n$ est un réseau cocompact du groupe de Lie abélien libre $\mathbb{R}^n$.*

Enfin, le cas où X est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ correspond précisément à l'étude des réseaux cocompacts de $\mathrm{SO}_0(1, n-1)$...

7.4.2. Variétés affines. Un des principaux pionniers des questions de ce type, J.P. Benzécri, a démontré que le tore est la seule surface fermée orientable pouvant admettre une structure affine - i.e., une $(\mathrm{Aff}(2,\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$-structure (voir [**40**]). C'est d'ailleurs en prenant connaissance de ce résultat que J. Milnor eut l'idée de ce qu'on appelle aujourd'hui l'inégalité de Milnor-Wood (voir [**149, 150, 197**]). Ce n'est que bien plus tard que les structures affines sur le tore furent systématiquement classifiées par T. Nagano et K. Yagi ([**157**] ; nous suggérons aussi le texte (en français) bien plus agréable et accessible [**36**]).

En dimensions supérieures, une telle classification devient très vite plus ardue. Indiquons tout de suite que les $(\mathrm{Aff}(3,\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$ ne sont pas classifiées. Il y a cependant quelques pistes pour répondre à des questions partielles :

– *Holonomie nilpotente :* si on suppose que le groupe d'holonomie $\rho(\Gamma)$ est nilpotent, il préserve plusieurs objets géométriques sur $X = \mathbb{R}^n$ (directions, drapeaux, ...) qui se rapatrient sur la variété fermée M, fournissant ainsi de puissants leviers pour l'étude des structures affines sur M. Indiquons [**90**], [**180**], [**34**] (ainsi que [**36**]). Ce type d'idées permettent de traiter le cas où le groupe d'holonomie est résoluble, ce qui est assuré par exemple lorsque le groupe fondamental Γ est déjà résoluble (voir par exemple [**73**]). Signalons aussi bien sûr la fameuse :

Conjecture de Auslander : *Toute variété affine complète fermée est de groupe fondamental polycyclique (en particulier, résoluble).*

– *Variétés unimodulaires :* Au lieu de restreindre la forme du groupe Γ ou $\rho(\Gamma)$ - ce qui est du reste assez radical et exclut bon nombre d'exemples intéressants - on peut étudier le cas où G est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$. Nous verrons bientôt par exemple le cas des *variétés affines radiales,* i.e., le cas $(G, X) = (\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$. Un cas remarquable est le cas des variétés lorentziennes plates (i.e. $(G, X) = (\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{1,n-1}), \mathbb{R}^{1,n-1})$) que nous discuterons aussi plus loin. La cas sans doute le plus intriguant est celui des *variétés affines unimodulaires,* i.e., le cas où le groupe G est le groupe des transfomations affines de $X = \mathbb{R}^n$ de déterminant 1. Il y a alors une conjecture fameuse dans ce contexte :

Conjecture de Markus : *Une variété affine fermée est complète si et seulement si elle est unimodulaire.*

7.4.3. Variétés conformément plates. Une variété conformément plate est une variété munie d'une métrique riemannienne g telle que tout point admet un voisinage sur lequel la métrique g s'écrit sous la forme $g = \exp(\sigma)g_0$ où g_0 est une métrique riemanienne plate (à courbure nulle). En dimension 2[1], le Théorème des coordonnées isothermes de Gauss assure que toute métrique riemanienne sur une surface est conformément plate. Dans ce cas, la donnée d'une structure conformément plate est équivalente à celle d'une structure de surface de Riemann - i.e., d'un atlas à valeurs dans $\mathbb{C}$, de changements de cartes holomorphes. *Il ne s'agit pas d'une*

[1]Nous négligeons le cas de la dimension 1, et encore plus le cas de la dimension 0...

(G, X)-*structure,* car rien ne garantit que les divers changements de cartes définis sur des ouverts de $\mathbb{C}$ s'étendent sur un ouvert commun X, ces extensions engendrant un groupe G.

Par contre, en dimensions supérieures, le Théorème de Liouville assure que toute application entre des ouverts de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ préservant la classe conforme de la métrique plate est la restriction d'une homographie : elle s'étend en une *transformation de Möbius de la sphère conforme.* La notion de variété conformément plate se confond donc à partir de la dimension 3 avec celle de (G, X)-variété avec $X = \mathbb{S}^n$, G étant le groupe des transformations de Möbius de la sphère.

Plutôt que de développer ici cette notion en toute dimension, concentrons-nous sur le cas de la dimension 2 : dans ce cas, X est la sphère conforme $\mathbb{C}P^1$, et $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Une (G, X)-structure est alors aussi appelée *structure projective complexe.* Toute surface (orientable) Σ admet une telle (G, X)-structure. À vrai dire, la donnée d'une structure projective complexe sur une surface à équivalence près équivaut à celle d'une différentielle quadratique holomorphe sur une surface de Riemann homéomorphe à Σ (voir par exemple §3.1 de [**104**]). Cette remarque assez élémentaire permet d'obtenir d'intéressant résultats - comme par exemple le fait que l'espace des déformations de structures projectives complexes est de dimension réelle $12g - 12$ (lorsque Σ est de genre $g \geq 2$). Mais elle reste insatisfaisante par le fait qu'elle ne décrit que très peu la géométrie en jeu : quelle est l'application développante ? Le groupe d'holonomie ?

Sur la sphère $\mathbb{S}^2$, il n'y a qu'une structure projective complexe à équivalence près (car le groupe Γ est alors trivial, et l'application développante est un homéomorphisme, comme tout homéomorphisme local de la sphère dans elle-même). Sur le tore $\mathbb{T}^2$, toute structure projective complexe est soit complète (i.e., quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau cocompact du groupe de Lie réel $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$), soit s'obtient de la manière suivante : le tore étant identifié du point de vue topologique au quotient de $\mathbb{R}^2$ par le réseau cocompact $\mathbb{Z}^2$, on prend comme application développante la composition d'une identification $\mathbb{R}$-linéaire F entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ avec l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}P^1$: le groupe d'holonomie est alors $\exp(\Lambda)$, où Λ est le réseau cocompact de $\mathbb{C}$ image de $\mathbb{Z}^2$ par F.

Le cas le plus intéressant est celui où le genre g de Σ est plus grand que 2. L'exemple canonique de structure projective complexe sur Σ est celui des *structures projectives fuchsiennes,* c'est-à-dire, celles provenant du quotient par groupe Fuchsien (sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$) de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ identifié à l'hémisphère $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ de $\mathbb{C}P^1 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pour ces structures projectives complexes, l'application développante est un homéomorphisme sur son image (l'hémisphère), et la représentation d'holonomie, que nous notons ρ_0, est la composition de l'inclusion de Γ dans $\bar{H} = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ suivie de celle de $\bar{H}$ dans $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Or, d'après la proposition 7.11, cette représentation est (G, Y)-Anosov, où Y est l'espace homogène $G_{/Z}$, où Z est le centralisateur du groupe des matrices diagonales de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, c'est-à-dire le groupe des matrices diagonales de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Cet espace homogène Y s'identifie de manière G-équivariante avec l'espace des paires de points distincts de $X = \mathbb{C}P^1$ muni de l'action diagonale de G. Dans cet exemple de représentation Anosov, les espaces drapeaux $X^{\pm}$ sont chacun G-isomorphe à l'espace projectif X, les projections $X \to X^{\pm}$ étant tout simplement les projections sur le premier et second facteur.

Maintenant, on observe que toute représentation ρ proche de ρ_0 est d'une part la représentation d'holonomie d'une structure projective complexe (lemme 7.9), et que d'autre part, elle reste (G, Y)-Anosov. L'existence des applications $\bar{f}^{s,u}$ (remarque 7.12) montre alors l'existence d'une application continue $f : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ qui est Γ-équivariante, l'action sur $\mathbb{R}P^1$ étant celle en tant que sous-groupe de $\bar{H}$, et celle sur $\mathbb{C}P^1$ étant celle définie par ρ. De telles sous-groupes discrets de G préservant une courbe fermée simple de $\mathbb{C}P^1$ sont dits *quasi-fuchsiens.* Il est du reste possible de montrer que les représentations (G, Y)-Anosov sont précisément les représentations quasi-fuchsiennes. Nous avons voulu ici illustrer comment la notion de représentation Anosov permet de montrer assez rapidement l'existence des représentations quasi-fuchsiennes, sans l'emploi du Théorème d'Ahlfors-Bers (observons au passage que la preuve dans [**183**] utilise dans son essence la notion de flot d'Anosov elle-aussi).

Toujours est-il que la courbe fermée simple $\rho(\Gamma)$-invariante délimite dans $\mathbb{C}P^1$ deux ouverts simplement connexes $U^{\pm}$ qui sont $\rho(\Gamma)$-invariants. Pour peu qu'on soit familier avec la notion d'ensemble limite pour un groupe Kleinien, on déduit de la remarque 7.13 que l'ensemble limite de $\rho(\Gamma)$ est précisément la courbe fermée $\rho(\Gamma)$-invariante, et que l'union des ouverts $U^{\pm}$ est le domaine de discontinuité de $\rho(\Gamma)$.

De là, on obtient que les quotients $\rho(\Gamma)\backslash U^{\pm}$ sont bien des surfaces projectives complexes, et que les structures projectives complexes proches des structures projectives fuchsiennes sont de cette forme, dite *quasi-fuchsienne.*

Mais il est complètement faux que toute structure projective complexe soit quasi-fuchsienne, ceci n'est vrai qu'au voisinage des fuchsiennes. En général, l'application développante n'est pas injective, ni un revêtement sur son image, et le groupe d'holonomie peut être non-discret, voire même dense dans G : en fait, pour qu'une représentation ρ soit la représentation d'holonomie d'une structure projective complexe, il faut et il suffit qu'elle puisse se releve en une représentation à valeurs dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (la nécessité découle de la remarque 7.6), et qu'elle soit irréductible (voir [**96**]). Notons aussi que l'holonomie ne caractérise pas la structure projective complexe : une telle structure peut fort bien admettre une holonomie fuchsienne sans être elle-même fuchsienne.

Malgré toutes ces pathologies, on peut se forger une image assez satisfaisante des structures projectives complexes sur les surfaces par la notion de plissage : elles s'obtiennent toutes par plissages le long de laminations géodésiques mesurées de structures projectives fuchsiennes (voir par exemple [**174**], [**139**]).

7.4.4. Variétés projectives réelles. Nous allons discuter ici le cas $(G, X) = (PGL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}P^n)$, i.e., le cas des variétés projectives réelles. Restreignons-nous tout de suite au cas $n = 2$. Au vu de la remarque 7.6, une telle structure équivaut à une (G, X)-structure, avec X étant le revêtement double de $\mathbb{R}P^2$, i.e., la sphère $\mathbb{S}^2$ des rayons de $\mathbb{R}^3$, et G étant le groupe $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ (c'est le fait que 3 soit impair qui assure que $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ sont isomorphes).

Réglons tout de suite de manière sommaire le cas de la sphère : elle n'admet qu'une seule structure projective réelle à équivalence près.

La description des surfaces projectives réelles utilise comme pièces essentielles certaines structures projectives sur l'anneau fermé, construites de la manière suivante : notons $g_{\alpha,\beta}$ $(1 < \beta < \alpha)$ les éléments suivants de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$:

$$g_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce type d'élément admet un point fixe attractif de coordonnées projectives $x_1 = [1; 0; 0]$, un point fixe répulsif $x_3 = [0; 0; 1]$, et un point fixe de type selle $x_0 = [0; 1; 0]$. Notons d_{12}, d_{13} et d_{23} les droites projectives passant par deux de ces points, d_{ij} étant celle qui contient x_i et x_j. Le complémentaire dans $\mathbb{R}P^2$ de l'union de ces trois droites admet quatre composantes connexes, que nous appelons $g_{\alpha,\beta}$-triangles. Soit U un de ces $g_{\alpha,\beta}$-triangle. Pour chaque paire d'indices i, j, l'intersection entre la droite d_{ij} et l'adhérence de U est un segment d'extrémités x_i, x_j : notons a_{ij} ce segment privé de ces deux extrémités, on l'appelle arête de U. On adjoint alors au triangle U l'arête a_{13} et, au choix, l'arête a_{12} ou a_{23}. Le quotient de cette union par $g_{\alpha,\beta}$ est alors un anneau fermé, canoniquement muni d'une structure projective réelle, d'holonomie engendrée par $g_{\alpha,\beta}$, que nous appelons anneau $g_{\alpha,\beta}$-élémentaire.

On remarque que ces anneaux peuvent être aisément recollés en chaînes, formant des colliers d'anneaux élémentaires. On peut du reste aisément montrer que toute structure projective de l'anneau fermé d'holonomie engendrée par $g_{\alpha,\beta}$ s'obtient par ce procédé. On peut aussi manifestement recoller projectivement les deux cercles de bord d'un tel collier formé d'un nombre pair d'anneaux élémentaires à l'aide d'une transformation projective commutant avec $g_{\alpha,\beta}$ (i.e., diagonale), obtenant ainsi un tore muni d'une structure projective réelle. Du reste, Goldman a montré que toute structure projective sur le tore, qui ne provient pas d'une structure affine (voir remarque 7.6) sur le tore - et donc décrite par Nagano-Yagi -, s'obtient par un procédé de ce type (mais en partant éventuellement d'une transformation projective non conjuguée à $g_{\alpha,\beta}$, mais toujours proximale, et préservant une droite projective contenant le point fixe attractif)(pour plus de détails, voir [**36**]).

Pour les surfaces de plus grand genre, l'exemple canonique est fourni par les structures projectives *convexes :* ce sont celles pour lesquelles l'application développante est un homéomorphisme sur son image, l'image étant un ouvert strictement convexe Ω de $\mathbb{R}P^2$. La surface projective réelle est alors le quotient de Ω par le groupe d'holonomie $\rho(\Gamma)$. On remarque que ce quotient est licite dès que $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$: en effet, tout ouvert strictement convexe Ω admet une métrique (finslérienne) complète invariante par le groupe des transformations projectives qui le préservent : la métrique de Hilbert. Ainsi, l'action de $\rho(\Gamma)$ sur Ω est proprement discontinue.

L'exemple standart de structure projective convexe est celui des structures *coniques,* i.e., le cas où Ω est l'intérieur d'une ellipse : à conjugaison près, Ω est la projection radiale du cône Ω_0 des éléments de norme négative pour la forme quadratique $x^2 + y^2 - z^2$. C'est le modèle de Klein de l'espace hyperbolique, et le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}) \approx \mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ qui préserve Ω_0 s'identifie canoniquement à $\mathrm{SO}_0(1, 2) \approx \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Ainsi, pour tout groupe fuchsien cocompact Γ, le quotient $\Gamma\backslash\Omega_0$ est canoniquement muni d'une structure projective réelle. Les structures projectives coniques sont précisément celles obtenues par ce procédé.

Il s'avère que toute structure projective réelle proche d'une structure projective conique est convexe (voir remarque 7.16). De plus, les structures projectives réelles convexes forment un vaste domaine : S. Choi et W. Goldman ont montré que les représentations de Γ dans $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ qui préservent un ouvert strictement convexe

forment une composante connexe entière de $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ - celle dite *de Hitchin* (voir [**66**] ; signalons aussi que $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ a exactement trois composantes connexes : celle de Hitchin, celle contenant la représentation triviale, et enfin celle qui consiste en les représentations qui ne peuvent se relever dans le revêtement double de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$: cette dernière ne peut donc pas contenir la représentation d'holonomie d'une structure projective réelle). Les structures projectives convexes forment donc elles aussi une composante connexe entière de l'espace des structures projectives réelles.

Les géodésiques de la métrique de Hilbert sur Ω sont exactement les intersections entre Ω et les droites projectives. Tout élément de $\rho(\Gamma)$ est diagonalisable : il est conjugué à un des $g_{\alpha,\beta}$ définis précédemment. En particulier, il admet un point fixe attractif, et un point fixe répulsif, qui sont tous les deux dans $\partial\Omega$ (le point fixe de type selle est lui en dehors de Ω). Le segment de droite dans Ω reliant ces deux points fixes se projette dans la surface en une géodésique fermée simple. On peut couper alors la surface le long de telles géodésiques fermées simples : on obtient des surfaces projectives réelles à bord géodésique. Aussi, après découpage, au lieu de séparer les morceaux, on peut insérer un nombre pair d'anneaux $g_{\alpha,\beta}$-élémentaires. Dans sa thèse ([**61**]), S. Choi a répondu à une question de Goldman et Thurston ([**184**]) en montrant que ce procédé permet d'obtenir toutes les structures projectives réelles (travail publié dans [**63, 64, 65**], voir aussi le survey plus accessible [**67**]) :

Théorème 7.14. *Pour toute surface projective réelle de genre plus grand que* 1*, il existe une collection de géodésiques fermées simples* $C_1, C_2, \ldots C_k$*, unique, telle que que chaque composante connexe du complémentaire dans la surface soit :*
– *un anneau élémentaire, ou*
– *l'intérieur d'une surface projective convexe à bord géodésique.*

Remarque 7.15. Les premiers travaux sur les surfaces projectives réelles convexes sont dûs à Kuiper, Benzécri ([**138, 40**]). Le premier exemple d'une telle structure pour lequel le convexe Ω est de bord non-lisse est celui de Kac-Vinberg ([**135**]).

Remarque 7.16. La preuve du fait que parmi les structures projectives réelles, celles qui sont (strictement) convexes forment un ouvert se fait en deux étapes : d'abord montrer que les représentations (fidèles) de groupes de surfaces préservant un ouvert strictement convexes forment un ouvert de $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}))$, puis en déduire l'affirmation sur les structures projectives elle-mêmes.

La deuxième étape est assez simple : puisque ρ préserve un ouvert strictement convexe, qu'il est injectif, et qu'il préserve la métrique de Hilbert, le quotient $\rho(\Gamma)\backslash\Omega(\rho)$ est une surface projective réelle convexe sur la surface, de représentation d'holonomie ρ. Ceci fournit une section continue de l'application qui à une structure projective réelle (à équivalence près) associe sa représentation d'holonomie. Or cette application est un homéomorphisme local : notre affirmation en découle.

La première étape est la véritable difficulté. Sa preuve historique est celle de J.L. Koszul ([**137**]), exprimée dans le langage des cônes convexes invariants divisibles (voir [**24**] pour un petit commentaire sur cet aspect).

Mais nous tenons à signaler brièvement que ce résultat peut aussi s'obtenir à travers la notion de représentations Anosov : les représentations injectives d'un réseau Γ de $H = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ qui préservent un ouvert strictement convexes de $\mathbb{R}P^2$ sont (G, Y)-Anosov, où Y est l'espace des triplets de points non-alignés de $\mathbb{S}^2$. Ceci

découle de la proposition 7.11 pour celles qui sont sont coniques, i.e., d'images contenues dans (un conjugué de) $\mathrm{SO}_0(1,2) \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$. Pour le cas général, cette affirmation s'obtient grâce au caractère Anosov du flot géodésique de la métrique de Hilbert ; de manière un peu moins expéditive, on peut la déduire aisément du Theorem 4.2 de [**142**] : dans la terminologie de cet article, les représentations considérées ici sont *fuchsiennes.* Pour montrer la stabilité des représentations préservant des ouverts strictement convexes, on peut exploiter le travail [**142**] en observant que les représentations (G,Y)-Anosov pour lesquelles la courbe limite est une courbe de Frénet forment manifestement un ouvert[2].

Remarque 7.17. Les représentations ci-dessus ne sont pas les seules représentations (G,Y)-Anosov : nous en verrons d'autres au chapitre 9 ; les courbes limites de ces représentations ne seront pas des courbes de Frénet.

7.4.5. Variétés drapeaux. Il s'agit des (G,X)-variétés fermées, où X est l'espace des drapeaux du plan projectif, i.e., le projectifié du fibré tangent du plan projectif, et G le groupe $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, agissant sur X selon la différentielle de son action sur le plan projectif. On peut aussi définir l'espace des drapeaux comme étant l'ensemble des couples (x,d) où x est un point du plan projectif, et d une droite projective de $\mathbb{R}P^2$ contenant x. Le groupe G est lui $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, qui agit bien sûr naturellement sur X. Du reste, X est l'espace homogène quotient à droite de G par le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.

Il y a du reste une autre description de X, plus adaptée à certaines manipulations : notons V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, V^* son dual (l'espace des formes linéaires de V), et $P(V)$, $P(V^*)$ les espaces projectifs associés. L'action de G sur V induit une action adjointe sur V^*, qui peut s'exprimer de la manière suivante : l'identification de V à $\mathbb{R}^3$ équipe l'espace vectoriel V d'une base canonique (e_1,e_2,e_3), et l'espace vectoriel dual V^* de la base canonique duale (e_1^*,e_2^*,e_3^*). Si l'action de $g \in G$ sur V est décrite par une matrice A, son action sur V^* équipé de la base canonique duale s'exprime par l'inverse de la transposée de A, que nous notons A^*. Ici, nous identifierons $G = SL(V)$ à $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, ainsi, un élément g de G est pensé comme une matrice 3×3, et nous désignerons son action sur un élément $[\alpha]$ de $P(V^*)$ par $g^*[\alpha] = [g^*\alpha]$.

On peut alors identifier X avec le sous-ensemble fermé $\mathcal{X}$ de $P(V)\times P(V^*)$ formé des paires $([x],[\alpha])$ telles que $\alpha(x)=0$. Cette identification est de plus G-équivariante, lorsque l'action de G sur $\mathcal{X}$ considérée est $g.([x],[\alpha]) = ([gx],[g^*\alpha])$.

Si nous avons introduit ici la notion de variété drapeau - i.e., de $(G,\mathcal{X})$-variété, c'est surtout pour les besoins de § 7.4.6.5. En guise d'exemples, contentons nous d'observer ici que le projectifié du fibré tangent à une surface projective réelle admet canoniquement une structure de variété drapeau. Observons aussi qu'à toute variété drapeau correspond une autre variété drapeau, dite *duale*, qui lui est difféomorphe, mais n'est pas $(G,\mathcal{X})$-isomorphe : c'est celle obtenue en composant l'application développante avec l'application "flip" de $\mathcal{X}$, qui envoie $([x],[\alpha])$ sur $([x'],[\alpha'])$, où x' (respectivement α') est un vecteur de V (resp. V^*) qui admet comme coordonnées dans la base canonique les coordonnées de α (resp. x) dans la base canonique de V^* (resp. de V). Si $\rho:\Gamma\to G$ est la représentation d'holonomie, celle de la variété drapeau duale est l'application ρ^*, qui envoie γ sur $\rho(\gamma)^*$.

[2]Dans cette référence, F. Labourie n'explicite pas clairement qu'il démontre essentiellement ce fait ; il invoque plutôt [**66**], lui-même utilisant [**137**].

Nous verrons au chapitre 9 d'autres exemples de variété drapeaux - il est vrai, toujours sur la même variété topologique...

7.4.6. Flots réguliers. Nous voulons juste aborder le cas des (G, X)-structures feuilletées, ne serait-ce que dans le cas des flots non singuliers (M, Φ^t) en dimension 3 admettant une (G, X)-structures transverses. Il est assez pertinent de considérer ces problèmes comme étant une extension de l'étude des (G, X)-structures sur des surfaces.

7.4.6.1. *Fibrations en cercles.* Soit M un fibré de Seifert sur une 2-orbifold fermée Σ (le lecteur non familier avec cette notion peut se cantonner au cas où M fibre en cercles sur une surface fermée Σ). Les fibres de la fibration sont les orbites d'un flot régulier Φ^t, et il est clair que la donnée d'une (G, X)-structure transverse à ce flot équivaut à la donnée d'une (G, X)-structure sur l'orbifold Σ (la définition de cette dernière notion ne présentant pas de difficulté, une fois assimilée celle d'orbifold, nous évitons donc de développer de manière superflue la discussion sur ces notions). Nous appelons (G, X)-*fibrations* ce type de (G, X)-structure transverse.

Rappelons aussi qu'en dimension 3, les orbites d'un flot sont les fibres d'une fibration de Seifert si et seulement si elles sont toutes compactes ([**75**]).

7.4.6.2. *Suspensions.* Si Φ^t est la suspension d'un difféomorphisme $f : S \to S$, la donnée d'une (G, X)-structure transverse à Φ^t équivaut à la donnée d'une (G, X)-structure sur S pour laquelle f est un (G, X)-isomorphisme. Nous appelons ce type de (G, X)-structures transverses des (G, X)-*suspensions.*

Il est clair que les (G, X)-fibrations sont exactement les (G, X)-suspensions de difféomorphismes d'ordre fini.

7.4.6.3. *Flots transversalement riemanniens.* Il s'agit du cas où G préserve une métrique riemannienne sur X. En vérité, on entend usuellement par flot transversalement riemannien un flot régulier dont la différentielle préserve une métrique riemannienne sur le fibré TM/E, où E est la direction du flot. Ces objets géométriques ne sont pas toujours des structures (G, X)-feuilletées, ils n'en sont pas moins totalement identifiés en dimension 3 (voir [**54**]).

7.4.6.4. *Flots transversalement affines.* Il s'agit du cas $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$. Les exemples principaux sont, outre les (G, X)-suspensions de transformations affines de tores affines, les flots horocycliques de suspensions Anosov, ou encore, les flots horocycliques de flots d'Anosov Désarguiens (§ 2.2.4, § 5.2).

Il est remarquable que les flots horocycliques de suspensions Anosov admettent *trois* structures affines transverses non-isomorphes : voir exemples 1.4 **5**, 1.5 **2**, et 1.6 de [**146**].

Dans [**146**], S. Matsumoto démontrent plusieurs résultats : il classifie les flots transversalement affines *complets,* i.e., pour lesquels l'application développante $\mathcal{D}$ est une fibration (localement) triviale sur $\mathbb{R}^2$. Se dégage également la notion de flots transversalement affines satisfaisant la propriété HLP (abréviation de "Homotopy Lifting Property") :

Définition 7.18. *Un flot Φ^t transversalement affine est HLP si l'espace des orbites Q^Φ de son relevé au revêtement universel est Hausdorff.*

Remarque 7.19. S. Matsumoto donne une autre définition de la propriété HLP, pour des flots réguliers généraux, non nécessairement transversalement affines. Mais la définition que nous proposons ici est plus simple à définir, et coïncide

avec celle de [**146**] dans le contexte des flots transversalement affines - et même, transversalement projectifs.

S. Matsumoto a classifié les flots HLP transversalement *special* affines, i.e., admettant une (G, X)-structure affine transverse, où X est le plan affine, et G le groupe des transformations affines de déterminant 1.

Supposer d'un flot transversalement affine qu'il est HLP est une hypothèse exigeante et très restrictive - bon nombre de flots transversalement affines ne vérifient pas cette propriété. Cependant, il est difficile de décrire les flots qui ne la satisfont pas. Quoiqu'il en soit, le principal tour de force de [**146**] consiste à démontrer que les (G, X)-flots, avec $X = \mathbb{R}^2$ et $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ (i.e., G est le groupe des transformations affines de déterminant 1 et fixant l'origine du plan), sont justement HLP. Il obtient donc la classification de ces flots.

Dans tous ces théorèmes de classification, les flots transversalement affines sont montrés être un des exemples introduits ci-dessus. Échappent à cette tentative de domestication beaucoup de flots, et notamment une famille d'exemples introduites par W. Goldman, et pour cette raison, appelés flots de Goldman. Nous y reviendrons avec détails au chapitre 9.

Indiquons aussi les *flots de Hopf :* soit A une transformation linéaire contractante de $\mathbb{R}^2$ (i.e., de valeurs propres toutes de module strictement inférieur à 1. Elle agit librement et proprement discontinûment sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$; le quotient de cette action est naturellement une 3-variété affine radiale, dite *variété de Hopf.* Soit Δ une direction propre de A, associée à une valeur propre réelle - il en existe au moins une. Les droites affines de $\mathbf{R}^3$ de direction Δ définissent un feuilletage de $\mathbb{R}^3$, dont les feuilles sont des droites affines complètes, sauf deux qui sont le complémentaire de l'origine 0 dans Δ, vue comme droite affine contenant 0. Ce feuilletage est A-invariant, il induit donc un feuilletage sur le quotient par A, qui admet une ou deux feuilles compactes (selon le signe de la valeur propre), et toutes les autres feuilles s'accumulent dans le passé et le futur sur cette ou ces feuilles fermées. Ce feuilletage est manifestement transversalement affine, transversalement modelé sur l'espace affine (et même vectoriel) $\mathbb{R}^3/\Delta \approx \mathbb{R}^2$. Notons qu'il n'est pas HLP.

7.4.6.5. *Flots transversalement projectifs.* Les flots réguliers transversalement affines sont déjà méconnus pour la plupart, et cette ignorance s'aggrave bien sûr lorsqu'on étend notre intérêt au flots transversalement projectifs, i.e., munis d'une $(\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{R}P^2)$-structure transverse ! Outre les suspensions de transformations projectives de surfaces projectives réelles, et les flots transversalement affines (remarque 7.6), nous diposons d'autres familles d'exemples :

- *flot radial des variétés affines radiales :* soit M une variété affine radiale, i.e., une $(\mathrm{GL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$-variété. Le flot radial $\Phi_0^t(u) = e^t u$ d'une part est transversalement projectif, puisque d'espace des orbites $S(\mathbb{R}^3)$, et d'autre part commute à chaque élément du groupe d'holonomie. Il induit donc un flot Φ^t sur M, dit *flot radial*, qui est bien sûr transversalement projectif, puisque l'action du groupe d'holonomie sur l'espace des orbites de Φ_0^t est projective.

- *feuilletage tautologique des variétés drapeaux :* soit M une variété drapeau. Les fibres des projections de $\mathcal{X}$ sur $P(V)$ et $P(V^*)$ sont les feuilles de deux feuilletages G-invariants, en particulier, préservés par le groupe d'holonomie de M. Leurs tirés en arrière par l'application développantes sont donc des feuilletages de $\widetilde{M}$ préservés par les automorphismes de revêtement. Ils induisent donc deux feuilletages sur M, dits *tautologiques.* Celui correspondant à la projection sur $P(V)$ est

dit *premier feuilletage tautologique ;* celui correspondant à la projection sur $P(V^*)$ est appelé *second feuilletage tautologique.* Ces deux feuilletages sont manifestement transversalement projectifs.

Nous avons déjà remarqué un procédé canonique pour construire une structure de variété drapeau sur le projectifié positif d'une surface projective réelle Σ. Pour ce type de variété drapeau, le premier feuilletage tautologique est celui dont les feuilles sont les fibres de la projection sur Σ, c'est donc une $(\mathrm{SL}(3,\mathbb{R}), \mathbb{R}P^2)$-fibration. Le deuxième feuilletage tautologique est plus intéressant : nous l'appelons *feuilletage géodésique.* Dans le cas où Σ est une surface projective conique, les feuilles du feuilletage géodésique sont effectivement les orbites du flot géodésique usuel - celà reste vrai dans le cas des surfaces projectives réelles convexes : les feuilles du feuilletages géodésiques sont les orbites du flot géodésique de la métrique de Hilbert.

Comme dernière observation sur le feuilletage géodésique d'une surface projective réelle, indiquons qu'il est HLP si et seulement si la surface projective est convexe.

Au chapitre 10, nous reviendrons plus longuement sur les flots transversalement projectifs.

7.5. Deux lemmes utiles

L'étude des (G, X)-structures nécessitent la manipulation d'homéomorphismes locaux - les applications développantes. L'expérience montre l'extrême utilité des deux lemmes suivants (pour les preuves, voir [**22**]).

Dans ce qui suit, $f : M \to X$ désigne un homéomorphisme local entre deux variétés :

Définition 7.20. *Une assiette de f est un ouvert de M sur lequel f est injective.*

Lemme 7.21 (Lemme des assiettes emboîtées). *Soient U et V deux assiettes de f. On suppose que l'intersection entre U et non vide, que U est connexe, et que l'image par f de V contient celle de U. Alors, V contient U.* ∎

Lemme 7.22 (Lemme de fermeture des assiettes). *Soit U une assiette de f telle que son image $f(U)$ est localement connexe dans X. Alors, la restriction de f à l'adhérence de U est injective.* ∎

CHAPITRE 8

Variétés affines radiales

Les variétés affines radiales sont vraiment les premières (G, X)-variétés qui ont attiré mon intérêt, le cheval de Troie étant le flot radial de ces variétés, permettant d'employer mes compétences acquises lors du travail de thèse. Mes travaux ont été eux-même alimentés par les lectures de [**58**] et [**94**] (non publié).

J.P. Benzécri ([**40**]) avait montré comment construire une famille de structure affine radiale sur $\Sigma \times \mathbb{R}$ à partir de structures projectives réelles sur une variété Σ. Les variétés affines radiales obtenues par ce procédé, et leurs quotients finis, sont appelés *exemples de Benzécri* (voir § 8.1.2). Y. Carrière avait conjecturé qu'en dimension 3, ces exemples, ainsi que leurs généralisations naturelles - qu'ici nous préférons appeler *suspensions affines généralisées* - étaient les seuls possibles ([**56**]). Cette conjecture a finalement été démontrée par S. Choi et moi-même - si des contrariétés éditoriales n'accréditent à [**68**] qu'un seul auteur, à savoir S. Choi, les remerciements écrits par ce dernier dans [**68**] ne laissent aucun doute sur la génèse de la preuve. Cette preuve résulte finalement d'un heureux concours de circonstance, nos travaux respectifs s'ayant révelés parfaitement complémentaires.

C'est l'histoire de cette preuve que je vais essayer de reconstituer ici - sans trop donner de détails sur les preuves, car elles sont longues et délicates, et les systèmes Anosov, principales vedettes de ce mémoire, n'y jouent aucun rôle majeur. Ainsi, nous n'allons considérer que des variétés affines radiales de dimension 3. Nous notons comme d'habitude $\mathcal{D} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^3$ l'application développante, et $\rho : \Gamma \to G$ la représentation d'holonomie, avec $G = GL(3, \mathbb{R})$.

8.1. Premières remarques

8.1.1. Flot radial. À la fin du chapitre précédent, j'ai déjà observé que les variétés affines radiales sont naturellement munies d'un flot remarquable Φ^t transversalement projectif, le flot radial, obtenu en tirant en arrière par l'application développante le flot radial Φ_0^t de $\mathbb{R}^3$. Comme nous en avons pris l'habitude, nous relevons ce flot sur $\widetilde{M}$ en un flot $\widetilde{\Phi}^t$.

Proposition 8.1. *Le flot Φ^t est sans singularité.*

Preuve Ce fait est bien connu (voir par exemple [**157**]), mais puisque nous allons donner peu de preuves, autant donner celle-ci qui est facile. Supposons la proposition fausse : il existe alors un élément $\tilde{x}_0$ dont l'image par $\mathcal{D}$ est l'origine 0 de $\mathbb{R}^3$. Soit U_0 une petite assiette de $\mathcal{D}$ contenant $\tilde{x}_0$, et U le saturé de U par $\widetilde{\Phi}^t$. Il est clair que U est encore une assiette de $\mathcal{D}$, d'image le saturé par $\widetilde{\Phi}^t$ d'un voisinage de l'origine, i.e., $\mathbb{R}^3$ tout entier. D'après le lemme de fermeture des assiettes (lemme 7.22), U est fermé : c'est donc $\widetilde{M}$ tout entier. On en déduit que $\mathcal{D}$ est un homéomorphisme, et en particulier, que $\tilde{x}_0$ est l'unique préimage par $\mathcal{D}$ de 0 : il est

donc fixé par tous les éléments de Γ. Or, l'action de Γ sur $\widetilde{M}$ est libre : Γ est donc trivial. Ceci est absurde puisque M est compacte. ∎

Nous notons Q^Φ l'espace des orbites de ce flot relevé. L'application développante induit un homéomorphisme local Γ-équivariant $\overline{\mathcal{D}}$ entre Q^Φ et $\mathbb{S}^2$.

PROPOSITION 8.2. *Le flot radial est HLP, i.e., l'espace des orbites Q^Φ est une variété Hausdorff.*

Preuve D'après la proposition précédente, l'application développante prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, par ailleurs, l'action du flot Φ_0^t sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est propre et errante (*i.e.,* par chaque point passe un disque ouvert plongé transverse au flot et qui ne rencontre chaque orbite de Φ_0^t qu'en au plus un point), il s'en suit que Φ^t vérifie les mêmes propriétés. La proposition s'en déduit. ∎

COROLLAIRE 8.3. *L'espace des orbites Q^Φ est homéomorphe au plan ou à la sphère. Dans le second cas, M est affinement isomorphe à une variété de Hopf affine, i.e., le quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par un automorphisme linéaire contractant.*

Preuve De la preuve du lemme précédent, on obtient aussi aisément que la projection de $\widetilde{M}$ sur Q^Φ est une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{R}$. La suite exacte d'homotopie de cette fibration montre que Q^Φ est simplement connexe : il est donc homéomorphe au plan ou à la sphère. Dans le deuxième cas, l'application développante induit un homéomorphisme local entre $Q^\Phi \approx \mathbb{S}^2$ et l'espace des orbites de Φ_0^t restreint à $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, c'est à dire la sphère $\mathbb{S}^2$. Or, tout homéomorphisme local de la sphère dans elle-même est un homéomorphisme. On en déduit que $\mathcal{D}$ est un homéomorphisme entre $\widetilde{M}$ et $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Le corollaire s'en déduit. ∎

8.1.2. Exemples de Benzécri. Soit Σ une surface munie d'une structure projective réelle : nous disposons de cartes $f_i : V_i \to U_i \subset \mathbb{S}^2$ et des éléments $\bar{g}_{ij}$ de $P^+GL(3,\mathbb{R})$ représentant les changements de cartes. On peut supposer, quitte á décomposer les ouverts V_i, que chaque U_i est affine, au sens où il existe un grand cercle de $\mathbb{S}^2$ ne le rencontrant pas. Alors, l'intérieur de l'union des rayons de $\mathbb{R}^3$ rencontrant U_i est un cône ouvert W_i. Lorsque $V_i \cap V_j$ est non-vide, on choisit un représentant g_{ij} dans $GL(3,\mathbb{R})$ de $\bar{g}_{ij}$. Soit d_{ij} le déterminant de g_{ij} : nous pouvons choisir librement sa valeur absolue, mais son signe est imposé. Si l'intersection $V_i \cap V_j \cap V_k$ est non-vide, nous avons la relation de cocycle $\bar{g}_{ij} \circ \bar{g}_{jk} \circ \bar{g}_{ki} = id$. Le produit $g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki}$ est donc une homothétie de déterminant positif $d_{ij}d_{jk}d_{ki}$. On en déduit qu'il est possible de choisir les divers g_{ij} de sorte que les $g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki}$ soient triviaux lorsque $U_i \cap U_j \cap U_k$ est non-vide : il suffit par exemple de choisir tous les d_{ij} de norme $+1$.

Un tel choix étant effectué, sur l'union disjointe des W_i on identifie x à $g_{ij}(x)$ à chaque fois que celà est possible. On obtient ainsi une variété $\overline{W}$ de dimension 3, munie d'une structure affine radiale, qui fibre en droites au-dessus de Σ ; les fibres de cette fibration sont précisément les orbites du flot radial. Ce fibré admet une section S, et il est facile de voir que pour tout temps T positif, et pour tout entier n suffisament grand, l'image de S par le temps nT du flot radial est disjointe de S. On en déduit que le temps T du flot radial agit librement et proprement sur $\overline{W}$: le quotient de cette action est une variété affine radiale homéomorphe à $\Sigma \times \mathbb{S}^1$. Les variétés affines radiales construites par ce procédé sont appelées *exemples de Benzécri.*

Soit $\overline{\varphi}$ un automorphisme projectif de Σ. Pour certains choix des d_{ij} - i.e., des g_{ij} -, il est possible de relever $\overline{\varphi}$ en un automorphisme affine φ de $\overline{W}$. Dans ce cas, au lieu de quotienter par le temps T du flot radial, on peut quotienter par le temps T (suffisament grand) du flot radial composé à φ. On obtient là encore une variété affine radiale fermée de dimension 3, appelée *suspension affine généralisée.* La variété est alors homéomorphe à un fibré en surfaces sur le cercle, de monodromie $\overline{\varphi}$. Le flot radial est alors topologiquement équivalent à la suspension de φ.

Ces constructions s'étendent aisément au cas où Σ est une orbifold projective réelle (voir §3.1 de [**22**]). Toujours selon §3.1 de [**22**] :

PROPOSITION 8.4. *Une variété affine radiale fermée de dimension* 3 *est un exemple de Benzécri si et seulement si toutes les orbites du flot radial sont périodiques.* ∎

PROPOSITION 8.5. *Une variété affine radiale fermée de dimension* 3 *est une suspension affine généralisée si et seulement si le flot radial admet une section totale.* ∎

COROLLAIRE 8.6. *Soit M une variété affine radiale fermée de dimension* 3. *On suppose que le groupe d'holonomie préserve un* 2*-plan disjoint de l'image de l'application développante. Alors, M est une suspension affine généralisée.*

Preuve Notons α une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit le 2-plan $\rho(\Gamma)$-invariant P, et dont la restriction à l'image de l'application développante soit strictement positive. La 1-forme sur $\mathbb{R}^3 \setminus P$ qui à tout point x associe $\frac{1}{\alpha(x)}\alpha$ est $\rho(\Gamma)$-invariante. Son tiré en arrière par $\mathcal{D}$ est donc une 1-forme fermée Γ-invariante, qui induit une 1-forme fermée ω sur M. Cette 1-forme ω ne prend que des valeurs strictement positives sur le champ de vecteurs engendrant Φ^t. Par l'argument de Tischler, on peut l'approximer par une 1-forme du type $q^*(d\theta)$ où q est une fibration de M sur le cercle, et où $d\theta$ est la forme volume canonique sur le cercle. Si l'approximation est suffisament bonne, les fibres de q sont transverses aux orbites du flot radial. On conclut grâce au Théorème 8.5. ∎

Il s'avère que tout automorphisme projectif d'une surface projective réelle fermée de genre plus grand que 1 est d'ordre fini ; les suspensions affines généralisées qui ne sont pas des exemples de Benzécri sont donc des variétés de Hopf ou construites à partir d'automorphismes projectifs d'un tore ou d'une bouteille de Klein projectif réel.

8.2. Une disgression : le cas des variétés de Seifert affines

Deux travaux auront attiré mon attention sur le sujet. Il s'agit, dans l'ordre chronologique, de [**58**] et de [**94**]. Ces deux textes étudient les structures affines (non nécessairement radiales) sur une 3-variété fermée M fibrant en cercles sur une surface Σ de genre plus grand que 1 - étude qu'on peut étendre sans difficulté au cas des fibrés de seifert au dessus d'orbifolds de caractéristique d'Euler négative. Dans le premier article [**58**], il est montré qu'une telle structure affine ne saurait être unimodulaire, i.e., la partie linéaire du groupe d'holonomie ne peut être contenu dans $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ (en corollaire, les variétés de Brieskorn, qui sont des variétés de seifert de ce type qui ont en outre un premier nombre de betti nul ne peuvent admettre de

structure affine). Dans le preprint [**94**], D. Fried montre que l'holonomie des fibres est nécessairement une homothétie. Ceci lui permet de donner une nouvelle preuve du résultat principal de [**58**], mais son résultat est plus précis. Relevons au passage que ceci montre que si l'holonomie des fibres est non-triviale, alors la structure affine considérée est en fait radiale, puisque le groupe d'holonomie commute avec le flot radial de $\mathbb{R}^3$. Indiquons aussi que nous ignorons toujours s'il est possible qu'une variété fibrée en cercle comme ci-dessus admette une structure affine pour laquelle l'holonomie des fibres est triviale.

Bien sûr, notre intérêt ici est avant tout l'étude des structures affines radiales, cadre dans lequel le résultat de [**58**] est évident (en effet, une variété fermée ne peut être à la fois radiale et unimodulaire, puisque le flot radial multiplie la forme volume, et que la variété, étant compacte, est de volume fini). Le résultat de Fried est lui non-trivial dans notre contexte.

Quoiqu'il en soit, le point sur lequel nous souhaitons attirer l'attention ici est un type d'argument, que je me suis approprié par la suite dans mes travaux, notamment dans ceux portant sur les flots transversalement projectifs, que je présenterai un peu plus loin : prenons par exemple le cas de [**58**] : les auteurs montrent dans un premier temps que sous leurs hypothèses, l'holonomie des fibres est nécessairement une translation non-triviale le long d'un vecteur v. Le groupe d'holonomie tout entier commute aux translations le long de vecteurs multiples de v. Ceci fournit un flot tranversalement affine sur M. Il n'est pas difficile, en raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus pour le flot radial, que ce flot, relevé dans $\widetilde{M}$, admet un espace des orbites homéomorphe à $\mathbb{R}^3$, canoniquement munie d'une structure affine unimodulaire. L'élément du groupe fondamental de M représenté par les fibres agit affinement sur ce plan affine. Il est facile de voir que cette action n'est pas triviale. En effet, toutes les orbites du flot sont sinon périodiques, ce qui *in fine* implique l'existence d'une structure affine sur la surface Σ : ceci est interdit par le Théorème de Benzécri. Cette action n'étant pas triviale, on observe qu'elle doit alors être libre et proprement discontinue. Le quotient de cette action est un anneau muni d'une structure affine unimodulaire, sur laquelle agit le groupe fondamental de Σ, de manière affine unimodulaire. Y. Carrière, F. Dal'bo et G. Meigniez montre alors qu'une telle action affine sur l'anneau doit admettre un point fixe global, ce qui aboutit à une contradiction.

Ce type d'argument m'a permis de démontrer que toute structure affine radiale sur un fibré de Seifert comme ci-dessus est nécessairement un exemple de Benzécri. Ce théorème a fait l'objet d'une prépublication, mais rendue obsolète par la classification complète des variétés affines radiales fermées de dimension 3. On peut en trouver une trace dans [**21**] (Theorem C). Il aura eu le mérite de me permettre d'exercer mes premières armes sur le sujet, et est aussi à la base de mon travail sur les flots transversalement projectifs.

8.3. Orbites périodiques du flot radial

Un des lemmes fondamentaux qui permet de mener à bien l'étude des variétés affines radiales de dimension 3 est le suivant :

Théorème 8.7 (Théorème C de [**22**]). *Soit M une variété fermée de dimension 3 munie d'une structure affine radiale. Si le flot radial de M admet des orbites périodiques qui ne sont pas de type selle, alors M est une suspension affine généralisée.*

Esquisse de preuve : Toute orbite périodique θ_0 de Φ^t correspond à un point x_0 de Q^Φ fixé par un élément γ_0 de Γ. Le Théorème énonce que si la variété n'est pas une suspension affine généralisée, alors $\rho(\gamma_0)$ est nécessairement proximale - i.e., admet 3 valeurs propres réelles de valeurs propres 2 à 2 distinctes, et que $\overline{\mathcal{D}}(x_0)$ est le point de $\mathbb{S}^2$ correspondant à la direction propre associée à la valeur propre intermédiaire.

La preuve que nous fournissons dans [**22**] est une preuve cas par cas, selon la classe de conjugaison de $\rho(\gamma_0)$, et la nature du point fixe $\bar{x}_0 = \overline{\mathcal{D}}(x_0)$. Nous n'allons évoquer ici que deux cas particuliers qui, si ce ne sont pas les plus difficiles, illustrent les arguments mis en jeu

–*Premier cas : $\rho(\gamma_0)$ est une homothétie de $\mathbb{R}^3$:* Dans ce cas, l'action de $\rho(\gamma_0)$ sur $\mathbb{S}^2$ est triviale. Soit x un point fixe dans Q^Φ de γ_0, et U une assiette de $\overline{\mathcal{D}}$ contenant x. Alors, U et $\gamma_0 U$ sont deux assiettes ayant la même image par $\overline{\mathcal{D}}$ et contenant x. D'après le lemme des assiettes emboitées, elles sont donc égales. On en déduit que tous les points de U sont points fixes de γ_0. L'ensemble des points fixes de γ_0, qui est bien sûr fermé, est donc également ouvert : c'est donc Q^Φ tout entier d'après la connexité de ce dernier. Toutes les orbites du flot radial sont donc périodiques, ce qui d'après la proposition 8.4 implique que la variété affine radiale est un exemple de Benzécri.

–*Deuxième cas : $\bar{x}_0$ est un point fixe attractif ou répulsif de $\rho(\gamma_0)$:* Quitte à inverser γ_0, on peut supposer que x_0 est un point fixe répulsif de γ_0. Soit V_0 le bassin de répulsion de $\bar{x}_0$ pour $\rho(\gamma_0)$: c'est un plan affine. Soit U_0 une assiette de $\overline{\mathcal{D}}$ contenant x_0, contenue dans le bassin de répulsion de x_0. L'union des γ_0-itérés de U_0 est elle aussi une assiette de $\overline{\mathcal{D}}$: on peut donc supposer que U_0 est le bassin de répulsion tout entier. Son image par $\overline{\mathcal{D}}$ est le plan affine V_0 tout entier. Par ailleurs, l'ouvert $W = p(\pi^{-1}(U_0))$ s'interprète comme étant le saturé par Φ^t d'un petit disque transverse à θ_0. L'ouvert W est homéomorphe à un tore solide ouvert. On en déduit que les itérés γU_0 $(\gamma \in \Gamma)$ sont deux-à-deux disjoints ou confondus, et $\gamma U_0 = U_0$ si et seulement si γ est une puissance de γ_0. Considérons un point de l'adhérence de W dans M. Soit x la projection dans Q^Φ d'un relevé dans $\widetilde{M}$ de ce point : il existe une suite de points x_n dans U_0, et une suite d'éléments γ_n dans Γ tels que les $\gamma_n x_n$ convergent vers x. Soit U une assiette convexe de $\overline{\mathcal{D}}$ contenant x : à partir d'un certain rang, les $U_n = \gamma_n U_0$ rencontrent tous U. Notons d_n la frontière de U_n. D'après le lemme des assiettes emboitées, comme $\overline{\mathcal{D}}(U)$ est convexe et que $\overline{\mathcal{D}}(U_n)$ est un plan affine, $d_n \cap U_n$ est connexe et l'intersection entre U et U_n est une des deux composantes connexes de $U \setminus d_n$ (dans le cas où d_n ne rencontre pas U, U est entièrement contenu dans U_n). Comme les $U \cap U_n$ sont deux-à-deux disjoints ou confondus, on en déduit que l'union de leurs adhérences est fermée dans U. Donc, x appartient à l'adhérence d'un des U_n. En d'autres termes, l'adhérence de W dans M est $p(\pi^{-1}(\bar{U}_0))$, où $\bar{U}_0$ est l'adhérence de U_0. On en déduit que ∂W est $p(\pi^{-1}(\partial U_0))$, et est donc une sous-variété plongée de M de dimension deux. Cette surface est compacte et affinement tangente au flot radial : c'est donc une union finie de tores et de bouteilles de Klein (cf. section "notations"). Soit T une ses composantes connexes, et $\widetilde{T}$ un relevé de T contenu dans $\pi^{-1}(\partial U_0)$. $\overline{\mathcal{D}}(\widetilde{T})$ est contenu dans la droite projective ∂V_0. Donc, $\rho(\pi_1(T))$ contient un sous-groupe d'indice deux qui préserve V_0. On en déduit que $\pi_1(T)$ contient un sous-groupe d'indice deux qui préserve U_0. Donc, T n'est pas plongé de manière incompressible. Il s'en suit que la trace $\pi(\widetilde{T})$ n'est pas une droite immergée dans Q^Φ, mais une courbe fermée simple.

Devant être contenue dans ∂U_0, cette courbe doit être ∂U_0 tout entier. L'adhérence de W dans M est donc un tore solide. D'après le lemme de fermeture des assiettes, la restriction de $\overline{\mathcal{D}}^s$ à l'adhérence de U_0 est un homéomorphisme sur son image, qui est une hémisphère fermée de S^2. On peut élargir légèrement cette assiette en une autre assiette de $\overline{\mathcal{D}}^s$ contenant strictement l'adhérence de U_0. Soit U_1 l'union des γ_0-itérés d'une telle assiette : c'est aussi une assiette, et l'image par $\overline{\mathcal{D}}^s$ de U_1 est la sphère privée d'un point y_1^s (l'opposé de y_0^s). D'après le lemme de fermeture des assiettes, la frontière de U_1 est soit vide, soit réduite à un singleton (une préimage de y_1^s). D'après le corollaire 8.3, le second cas ne se produit que si M est une variété de Hopf affine. Dans le premier cas, par connexité de Q^Φ, U_1 est Q^Φ tout entier. L'image de $\overline{\mathcal{D}}^s$ est donc le complémentaire de y_1^s dans S^2. Donc, $\rho^s(\Gamma)$ fixe y_1^s et y_0^s. On en déduit que Γ fixe x_0, et est donc cyclique (il est le groupe engendré par γ_0). Or, $\widetilde{M}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ puisqu'il fibre en $\mathbb{R}$ sur le plan : comme M est compacte, il est absurde que son groupe fondamental soit cyclique. Le deuxième cas est donc impossible.

8.4. Surfaces plongées géodésiques

Ma contribution décisive dans la classification des variétés affines radiales en dimension 3 a été d'élucider complètement le cas où il existe un plongement géodésique d'une surface fermée S dans la variété. On ne perd guère de généralité en ne considérant que le cas où S est orientable : d'après le Théorème de Benzécri, cette surface est nécessairement un tore - du reste, celà découle de manière plus élémentaire de l'existence du flot radial qui doit être tangent à S, induisant un flot sans singularité.

THÉORÈME 8.8 (Théorème B de [**22**]). *Soit M une variété fermée de dimension 3 munie d'une structure affine radiale. Si M contient une surface plongée plate et tangente au flot radial, alors M est une suspension affine généralisée.*

Donnons un résumé succint de la preuve de ce théorème : notons T le tore plat tangent à Φ^t. Notons H l'image dans $\pi_1(M)$ du groupe fondamental de T. Notons l l'image de son relevé $\widetilde{T}$ dans $\widetilde{M}$ par π^Φ. Comme T est plat, l est une géodésique du plan localement affine Q^Φ : c'est donc, du point de vue topologique, l'image d'un plongement de la droite ou du cercle. Dans le deuxième cas, l est le bord d'un disque D de Q^Φ, qu'on montre être une assiette de $\overline{\mathcal{D}}$. Par ailleurs, H est alors un groupe cyclique qui préserve D : il admet donc un point fixe dans l'adhérence de D, et on obtient par confrontation avec le Théorème 8.7 que M est un exemple de Benzécri.

On peut donc supposer que l est une droite fermée plongée, et H est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. L'étape clé consiste à montrer que *l'action de $H \approx \mathbb{Z}^2$ sur Q^Φ s'étend en une action affine de $\mathbb{R}^2$*. Les orbites de cette action sont alors soit des segments géodésiques, soit des "triangles ouverts" : on en déduit que la variété M est soit feuilletées par des tores, soit obtenue en recollant certaines structures affines radiales sur le produit du tore par l'intervalle, ce qui amène à la preuve du théorème.

8.5. Variétés affines radiales convexes

Une variété affine radiale est dite *convexe* si l'image de son application développante est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$ - c'est alors un cône puisqu'elle est saturée par le flot radial et ne contient pas l'origine. Nous notons Ω cette image.

Pour tout cône convexe Ω, on note $T(\Omega)$ l'ensemble des vecteurs v de $\mathbb{R}^3$ tels que la translation de vecteur v envoie Ω dans lui-même. Lorsque $T(\Omega)$ est réduit à $\{0\}$, le cône convexe est dit saillant (voir [**191**], ces cônes sont dits *hyperboliques* dans [**137**]). Ici, Ω est l'image de l'application développante d'une variété affine radiale, ce cône est alors préservé par le groupe d'holonomie $\rho(\Gamma)$; il en est de même pour $T(\Omega)$.

PROPOSITION 8.9 (Théorème D de [**22**]). *Toute variété affine radiale fermée de dimension* 3 *convexe est une suspension affine généralisée.*

Preuve Lorsque Ω est saillant, il observe la remarquable propriété suivante : *il existe sur Ω une métrique riemannienne analytique préservée par tous ses automorphismes affines* (voir [**191**], [**192**]). Cette métrique est en particulier préservée par le flot radial : son tiré en arrière est une métrique préservée par Φ^t. On conclut facilement grâce à la classification des flots isométriques en dimension 3 ([**54**]).

Si Ω n'est pas saillant, $T(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension au moins 1. D'après la proposition 8.1, il est disjoint de Ω, il est donc de dimension au plus 2.

S'il est de dimension 2, on conclut grâce au corollaire 8.6. Sinon, $T(\Omega)$ est une droite de $\mathbb{R}^3$. Les hyperplans d'appui à Ω contiennent tout $T(\Omega)$, tout en étant tangents au flot radial. On en déduit que Ω est soit un demi-espace, soit un quart d'espace (*i.e.,* une composante connexe de $\mathbb{R}^3$ privé de deux hyperplans se rencontrant transversalement selon la droite $T(\Omega)$). Chaque plan bordant Ω est un plan invariant par (un sous-groupe d'indice 2 de) $\rho(\Gamma)$ auquel on peut appliquer le corollaire 8.6. ∎

8.6. La classification des 3-variétés affines radiales

La conjecture de Y. Carrière a été validée :

THÉORÈME 8.10 ([**68**]). *Toute variété affine radiale fermée de dimension* 3 *est une suspension affine généralisée.*

Pendant que je développais les travaux évoqués ci-dessus, S. Choi, dans le prolongement des idées de sa thèse ([**61**]) que nous avons présentés auparavant (découpage des surfaces projectives réelles en anneaux et surfaces projectives réelles convexes à bord géodésique, Théorème 7.14), montrait que toute variété affine radiale compacte de dimension 3 peut-être découpée le long de tores plats tangents au flot radial en variétés affines radiales compactes convexes. Nos travaux se complètaient alors de manière idéale : si M est une variété affine radiale de dimension 3 fermée, elle est soit convexe - donc une suspension affine généralisée selon la proposition 8.9, soit contient un tore plat tangent au flot radial, auquel on peut appliquer le Théorème 8.8.

Pour la petite histoire, je ne cacherai pas que j'ai eu la primeur de la preuve de ce Théorème, puisque j'ai pris connaissance des travaux de S. Choi avant que lui-même ne prenne connaissance des miens.

CHAPITRE 9

Variétés drapeaux

Dans ce chapitre, je présente le contenu de l'article [**24**], tout en améliorant les résultats. La rédaction de ce chapitre a mené à la prépublication [**30**].

9.1. Définitions, notations

Rappelons les définitions introduites au § 7.4.5 :

– on note V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique naturelle (e_1, e_2, e_3), et V^* son dual, muni de la base canonique (e_1^*, e_2^*, e_3^*). On note $\langle v \mid v^* \rangle$ l'évaluation d'un élément v^* de V^* sur un élément v de V.

– $P(V)$ et $P(V^*)$ désignent les projectifiés de V et V^* ; nous désignerons par $[v]$ les éléments de $P(V)$, en sous-entendant que $[v]$ est représenté par l'élément non-nul v de V. On considérera aussi les projectifiés positifs $S(V)$, $S(V^*)$, c'est-à-dire les quotients de V, V^* privés de leurs origines par les relations d'équivalence qui identifie deux vecteurs si l'un est un multiple de l'autre par un scalaire positif. On désignera encore par $[v]$ et $[v^*]$ leurs éléments, sans craindre de confusion avec la ceux de $P(V)$, $P(V^*)$.

– l'espace des drapeaux, noté ici X, désigne l'ensemble des paires $([v], [v^*])$ d'éléments de $P(V) \times P(V^*)$ vérifiant $\langle v \mid v^* \rangle = 0$. On considérera aussi l'espace des drapeaux orientés $\widehat{\mathcal{X}}$ formé des éléments "orthogonaux" de $S(V) \times S(V^*)$.

– on note G le groupe $\mathrm{SL}(V) \approx \mathrm{PGL}(V)$ et $\widehat{G}$ son revêtement double $P^+\mathrm{GL}(V)$. Le premier agit naturellement sur V, admet une action duale sur V^* (exprimée par l'inverse de la transposition des matrices), et donc aussi sur $\mathcal{X}$, $\widehat{\mathcal{X}}$. Le second agit naturellement sur $\widehat{\mathcal{X}}$.

Remarque 9.1. Chaque élément de $P(V^*)$ définit une droite projective de $P(V)$ (la projection de son noyau dans $P(V)$). Dualement, chaque élément de $P(V^*)$ correspond à une droite projective de $P(V)$. Nous pouvons donc considérer - et nous ne nous en priverons pas - que $P(V)$ est l'ensemble des droites projectives de $P(V^*)$, et que $P(V^*)$ est l'ensemble des droites projectives de $P(V)$. Pour garder quelque contrôle de la situation, nous introduisons la notation suivante : si K est un sous-espace vectoriel de V, (resp. de V^*), nous notons $K^\perp$ son orthogonal, i.e., l'ensemble des éléments de V^* (resp. de V) qui s'annulent sur K tout entier. Par extension, si $[v]$ est un élément de $P(V)$, $[u^\perp]$ sera la droite projective de $P(V^*)$ correspondant à $[v]$.

Nous nous intéressons ici aux *variétés drapeaux* fermées, munies d'une $(G, \mathcal{X})$-structure avec $(G, \mathcal{X})$ comme ci-dessus. La remarque 7.6 met en évidence qu'une variété drapeau correspond aussi de manière univoque à une $(\widehat{G}, \widehat{\mathcal{X}})$-structure, ainsi qu'à une $(G, \widehat{\mathcal{X}})$-structure. L'intérêt capital de cette remarque pour nous est qu'elle

implique la suivante : *Le morphisme d'holonomie* $\rho : \Gamma \to G$ *d'une variété drapeau peut toujours se relever en un morphisme de* Γ *dans* $\widehat{G}$.

Comme nous l'avons observé à § 7.4.6.5, toute variété drapeau est équipée de deux feuilletages tautologiques, provenant des projections naturelles de $\mathcal{X}$ sur $P(V)$ et sur $P(V^*)$: celui provenant de la première projection est noté Φ_1 et appelé premier feuilletage tautologique, quant à l'autre, il est noté Φ_2 et appelé second feuilletage tautologique. Chacun de ses feuilletages est transversalement projectif, et c'est l'étude générale des feuilletages transversalement projectifs qui m'aura amené à m'intéresser aux variétés drapeaux.

Nous ne connaissons que peu d'exemples de variétés drapeaux fermées, et tous ces exemples vivent (à revêtements finis près) sur les fibrés unitaires tangents de surface. Nous avons déjà observé précédemment que le projectifié du fibré tangent à une surface projective réelle admet une structure de variété drapeau canonique, nous n'y reviendrons pas ici.

Nous allons dans la suite exhiber et étudier une autre famille d'exemples, que nous appellerons *variétés drapeaux Anosov.*

9.2. Une nouvelle représentation (G, Y)-Anosov

À la remarque 7.16, nous avons brièvement signalé que les représentations d'un groupe de surfaces dans $\mathrm{SL}(V)$ appartenant à la composante de Hitchin sont des représentations (G, Y)-Anosov, où Y est l'espace des triplets de points non-alignés de $P(V)$.

Nous allons voir ici que ce ne sont pas les seules : il y a d'autres représentations (G, Y)-Anosov de groupes de surfaces, pour le même Y, qui ne sont pas dans la composante de Hitchin.

Ces représentations sont obtenues en partant d'un plongement particulier de $H = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ dans G : celui dont l'image dans G stabilise un point de $P(V) \times P(V^*) \setminus \mathcal{X}$. Nous choisissons ici pour jouer ce rôle l'élément (e_2, e_2^*). Ainsi, le plongement ρ_0 de H dans $G = \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ que nous considérons ici est celui qui envoie un élément

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sur l'élément

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

de G.

On note $A = \{a^t\}$ le sous-groupe de H formé des matrices diagonales, et $h_\pm^s$ les sous-groupes à un paramètre de matrices unipotentes :

$$a^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad h_+^s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h_-^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

On note P^+ (respectivement P^-) le sous-groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) dont les coefficients sur la diagonale sont strictement positifs. On note $X^\pm$ les variétés quotients $G/P^\pm$: elles s'identifient l'une comme l'autre à l'espace des drapeaux X.

On note Z la composante neutre du centralisateur dans G de $\rho_0(A)$. De manière moins pédante, Z est le groupe des matrices diagonales. La variété quotient $G_{/Z}$ s'identifie à l'espace Y des triplets de points $([u], [v], [w])$ de $P(V)$ non-alignés. De manière un peu plus précise, *via* cette identification, la projection de G sur $G_{/Z}$ est l'application qui envoie g sur $([ge_1], [ge_2], [ge_3])$.

On remarque que $\rho_0(a^t)$ appartient à Z, et que chaque $\rho_0(h^s_\pm)$ appartient à $P^\pm$. L'action adjointe de $\rho_0(a^t)$ sur l'algèbre de Lie $sl(V)$ de G est diagonalisable, et notre choix de ρ_0 est tel que la somme des directions propres associées aux valeurs propres positives (resp. négatives) de $ad(a^t)$ est l'algèbre de Lie $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$) de P^+ (resp. P^-). Leur intersection est l'algèbre de Lie de Z.

La proposition 7.11 appliquée ici montre alors que *si $\bar{\Gamma}$ est un sous-groupe discret cocompact de H, la restriction de ρ_0 à $\bar{\Gamma}$ est (G, Y)-Anosov.*

Remarque 9.2. Tout réseau cocompact de H contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion, nous pouvons donc nous restreindre aux réseaux cocompacts sans torsion. Soit $\bar{\Gamma}$ un tel réseau : sa projection dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est injective, d'image un réseau cocompact sans torsion. Il est donc isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre supérieur.

Observons qu'à l'inverse, toute représentation fidèle d'un groupe de surface $\bar{\Gamma}$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ se relève en une représentation du même groupe dans H : ceci provient du fait que la classe d'Euler de l'action associée sur le cercle $\mathbb{R}P^1$ est paire. En fait, elle se relève de deux manières, qui diffèrent l'une de l'autre par composition par $\pm Id$.

Il convient de détailler quelque peu la description dans ce contexte des projections de $Y = G_{/Z}$ sur $X^\pm \approx X$: l'image de $([u], [v], [w])$ dans $X^+ \approx X$ est le couple $([u], [(uv)^*])$, où $(uv)^*$ désigne un élément de V^* qui s'annule sur u et v. De manière analogue, l'image de $([u], [v], [w])$ dans $X^- \approx X$ est le couple $([w], [(vw)^*])$, où $(vw)^*$ désigne bien sûr une forme linéaire s'annulant sur v et w. Ainsi, les fibres de chacune de ces projections sont de dimension 2, canoniquement identifiable à $P(V)$ privé d'une droite projective (trace du noyau de $(uv)^*$, $(vw)^*$ respectivement). Elles sont munies d'une structure affine canonique. On identifie aussi aisément l'image du plongement de Y dans $X^+ \times X^- \approx X \times X$ commenté au § 7.3 : il s'agit des paires $(([u], [u^*]), ([v], [v^*]))$ vérifiant :

- $\langle u \mid u^* \rangle = 0$,
- $\langle v \mid v^* \rangle = 0$,
- $\langle u \mid v^* \rangle \neq 0$,
- $\langle v \mid u^* \rangle \neq 0$.

En d'autres termes, $[u]$ (respectivement $[v]$) doit appartenir à la droite projective $[u^*]$ (resp. $[v^*]$) puisqu'il est question d'éléments de $\mathcal{X}$, mais il ne doit pas appartenir à la droite projective $[v^*]$ (respectivement $[u^*]$).

Enfin, selon la remarque 7.12, puisque ρ_0 est (G, Y)-Anosov, il existe deux applications Γ-équivariantes $\bar{f}^{s,u} : \overline{\mathcal{L}} \to X$ (où $\overline{\mathcal{L}}$ est le revêtement double de la droite projective $\mathbb{R}P^1$), provenant d'une application Γ-équivariante $f : H \to Y$. Ici, l'application f est l'application qui envoie h sur $([\rho_0(h)e_1], [e_2], [\rho_0(h)e_3])$ (car $\rho_0(e_2) = e_2$). L'application f^s envoie donc h sur $([\rho_0(h)e_1], [\rho_0(h)e_3^*])$, et f^u envoie h sur $([\rho_0(h)e_3], [\rho_0(h)e_1^*])$. Ces deux applications ont la même image Λ, qui est l'ensemble des paires $([u], [u^*])$, où $[u]$ appartient à la droite projective $[e_2^*]$ (ne pas oublier qu'un élément de $P(V^*)$ s'interprète comme étant une droite projective

de $P(V)$), et où $[u^*]$ est une droite projective contenant e_2 (en d'autres termes, appartient à la droite projective $[e_2]$ de $P(V^*)$).

Comme elles sont amenées à jouer un rôle important dans la suite, nous noterons L_0 la droite projective $[e_2^*]$ de $P(V)$, et L_0^* la droite projective $[e_2]$ de $P(V^*)$. On peut donc reformuler ce qui vient d'être dit sous la forme suivante : Λ *est la courbe formée des paires* $([u],[u^*])$ *de* $\mathcal{X}$ *où* $[u]$ *appartient à* L_0 *et* $[u^*]$ *à* L_0^*. Observons au passage que pour tout élément $[u]$ de L_0 il n'existe qu'un seul élément $[u^*]$ de L_0^* contenant $[u]$: la droite projective contenant $[u]$ et $[e_2]$.

La remarque 7.13 s'applique ici : Λ *est l'adhérence de l'ensemble des points fixes attractifs de* $\rho_0(\bar{\Gamma})$ *dans* X.

Observons enfin que *l'image de* f *est l'ensemble des triplets* $([u],[e_2],[w])$ *de* $P(V)$ *avec* $[u]$ *et* $[w]$ *étant deux points distincts de* L_0.

Nous voulons maintenant attirer l'attention sur les orbites de $\rho_0(H)$ dans X : il y a une orbite de dimension 1 : la courbe Λ_0. Il y a aussi deux orbites de dimension 2 :

– celle formée des paires $([u],[u^*])$ avec $[u]$ dans L_0 et $[u^*]$ hors de L_0^* ; nous la notons A_0,

– celle formée des paires $([u],[u^*])$ avec $[u]$ hors de L_0 et $[u^*]$ dans L_0^* ; nous la notons A_0^*.

Il y a une orbite ouverte, que nous notons Ω_0 : celle formée des paires $([u],[u^*])$, avec $[u] \notin L_0$, $[u^*] \notin L_0^*$.

Observons que les adhérences T_0, T_0^* de A_0, A_0^* sont des tores, dont l'intersection est précisément Λ_0, et que Ω_0 est le complémentaire dans X de leur union.

L'action de $\rho_0(H)$ sur Ω_0 est simplement transitive : Ω_0 s'identifie donc à H, et la variété M, quotient à gauche de H par $\bar{\Gamma}$ s'identifie donc à celui de Ω_0 par $\rho_0(\bar{\Gamma})$: celà définit canoniquement une structure de variété drapeaux sur M.

Définition 9.3. *Nous appelons variété drapeau Anosov canonique les variétés drapeaux obtenues par la construction précédente.*

Remarquons que les feuilletages tautologiques de ces variétés drapeaux sont précisément les feuilletages stable et instable forts du flot géodésique de $\bar{\Gamma}\backslash H$ (obtenu par action à droite de a^t). Le flot géodésique lui-même provient du flot sur Ω_0 défini par le sous-groupe à un paramètre suivant[1] de $SL(V)$:

$$\varphi^t = \begin{pmatrix} e^{t/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t/3} \end{pmatrix}$$

On obtient donc ainsi une autre description des flots géodésiques en courbure constante négative - mais le lecteur s'avisera de lui-même qu'il s'agit-là de celle déjà évoquée à la remarque 5.19.

On observe en particulier que les anneaux $\rho_0(\bar{\Gamma})$-invariants A_0, A_0^* s'identifient de manière équivariante aux espaces de feuilles stable et instable forts de ce flot d'Anosov (cf. § 5.2).

Remarque 9.4. La dynamique sur X dépend du choix du réseau cocompact $\bar{\Gamma}$ dans H. En fait, les flots géodésiques étant tous topologiquement équivalents entre

[1] Le facteur 1/3 provient du fait que ce flot vit en réalité sur PGL(V) : multipliez tous les coefficients par l'inverse du coefficient diagonal intermédiaire pour obtenir une expression plus élégante...

eux, les diverses actions sur Λ_0 et Ω_0 associées au choix de ce réseau (en conservant bien sûr le type d'isomorphisme de ce réseau en tant que groupe) sont topologiquement équivalente entre elles. Cependant, par rigidité des feuilletages forts ([**1**]), *deux réseaux induisant des actions sur les anneaux A_0 et A_0^* topologiquement conjuguées sont nécessairement conjugués dans H.* Ce sont donc ces anneau qui recèlent la subtilité de la dynamique de l'action.

9.3. Variétés drapeaux Anosov

Les variétés drapeau Anosov canoniques forment les prototypes de variétés drapeaux Anosov, les autres s'en obtenant, d'une certaine manière, par déformation. Nous allons en donner plus loin une définition sans équivoque (définition 9.32) ; contentons nous pour l'instant de les penser comme étant les petites déformations de variétés drapeaux Anosov canoniques pour lesquelles la représentation d'holonomie est toujours (G, Y)-Anosov.

9.3.1. Existence des déformations. Nous considérons des représentations d'un groupe de surface $\bar{\Gamma}$ dans G. Comme nous l'avons signalé plus haut, Hitchin a démontré que l'espace de ces représentations admet 3 composantes connexes, dont celle dite de Hitchin, qui est précisément celle formée des représentations divisant un ouvert convexe saillant. Les deux autres sont :

– la composante formée des représentations qui ne se relèvent pas dans le revêtement double $P^+\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$: elle ne nous intéresse pas ici car elle ne recèle aucune représentation d'holonomie de variété drapeaux,

– celle contenant la représentation triviale : elle contient donc les représentations d'holonomie des variétés drapeau Anosov canoniques. Nous l'appelons la *composante triviale.*

La dimension de la composante de Hitchin - qui doit être comprise à conjugaison près dans G - est $16g - 16$, où g est le genre de la surface dont $\bar{\Gamma}$ est le groupe fondamental. Alors que la dimension de l'espace des représentations dans H modulo conjugaison dans H est notoirement $6g-6$: ceci montre que la composante de Hitchin ne se résume pas aux représentations à valeurs dans un conjugué de $\mathrm{SO}_0(1, 2) \subset G$.

La composante triviale est elle aussi de dimension $16g-16$, mais l'essentiel pour nous est qu'elle ne se réduise pas aux représentations de variétés drapeaux canoniques. C'est évident puisque nous savons qu'elle contient aussi la représentation triviale ! Mais nous le savons grâce à la puissante logistique fournie par Hitchin, on peut s'en convaincre de manière beaucoup plus élémentaire, et voir qu'il existe proche des représentations canoniques ρ_0 des représentations fortement irréductibles, i.e., telles que l'image ne contient aucun sous-groupe d'indice fini fixant un point où une droite projective de $P(V)$ (Proposition 3.11 de [**24**], par exemple).

9.3.2. Propriétés générales des représentations (G, Y)-Anosov. Soit donc $\rho : \bar{\Gamma} \to G$ une représentation (G, Y)-Anosov, avec $G = \mathrm{SL}(V)$, et Y l'espace des triplets de points non-alignés de $P(V)$. Il existe alors une application $\bar{\Gamma}$-équivariante $f : H \to Y$, induisant des applications $\bar{f}^{s,u} : \overline{\mathcal{L}}^{s,u} \to X$ elles aussi $\bar{\Gamma}$-équivariantes. Dans tout ce qui suit, nous supposons que $\bar{\Gamma}$ est sans torsion, ce qui est toujours le cas à indice fini près.

PROPOSITION 9.5. *La représentation ρ est fidèle ; tous les éléments de son image sont loxodromiques, i.e., des éléments de $SL(V)$ admetant 3 valeurs propres réelles de valeurs absolues deux-à-deux différentes.*

Preuve Ceci découle immédiatement du fait que tout élément non-trivial de $\bar{\Gamma}$ admet un point fixe attractif dans $\overline{\mathcal{L}}^s$ dont l'image par $\bar{f}^s$ est un point fixe attractif de $\rho(\bar{\Gamma})$ (cf. remarque 7.13), et que les éléments loxodromiques de G sont précisément ceux admettant un point fixe attractif dans X. ∎

COROLLAIRE 9.6. *Les images de $\bar{f}^{s,u}$ sont confondues, la courbe image Λ dans X est l'adhérence de l'union des points fixes attractifs d'éléments de $\rho(\bar{\Gamma})$.* ∎

COROLLAIRE 9.7. *L'image de ρ est un sous-groupe discret de G.*

Preuve Soit G_0 la composante neutre de l'adhérence de $\rho(\bar{\Gamma})$ dans G. C'est un sous-groupe de Lie. D'après la proposition 9.5, aucun élément de G_0 ne peut admettre un valeur propre non-réelle, car cette propriété est une propriété ouverte dans G. On en déduit que la partie semi-simple de G_0 - disons pour être plus correct, aucun facteur de Levi de G_0 - ne contient d'élément elliptique, ce qui implique que ce facteur semi-simple est trivial. Ceci montre que G_0 est son propre radical, i.e., qu'il est résoluble. L'image réciproque par ρ de $\bar{\Gamma} \cap G_0$ est alors un sous-groupe résoluble distingué de $\bar{\Gamma}$. Comme $\bar{\Gamma}$ est un groupe de surfaces de genre supérieur, ce sous-groupe est le groupe trivial. ∎

Nous allons maintenant obtenir quelques propriétés générales de la courbe Λ, et plus précisément, des applications $\bar{f}^{s,u} : \overline{\mathcal{L}}^{s,u} \to X \subset P(V) \times P(V^*)$ elles-mêmes. Tout d'abord, on observe que chacune d'entre elle transite en fait par une application de $\mathcal{S}^{s,u}$ dans X, où $\mathcal{S}^s$ (respectivement $\mathcal{S}^u$) est l'espace des feuilles stables (respectivement instables) du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent au disque de Poincaré (rappelons que $\overline{\mathcal{L}}^{s,u}$ sont des revêtements doubles de $\mathcal{S}^{s,u}$). Les cercles $\mathcal{S}^{s,u}$ s'identifient l'un comme l'autre à la droite projective $\mathbb{R}P^1$. Nous noterons encore $\bar{f}^{s,u}$ les applications de $\mathcal{S}^{s,u} \approx \mathbb{R}P^1$ dans X ainsi obtenues.

Comme nous l'avons vu lors du premier chapitre de ce mémoire les espaces de feuilles $\mathcal{S}^{s,u}$ sont canoniquement identifiables : pour toute feuille stable $s \in \mathcal{S}^s$, l'ensemble des feuilles instables qu'elle rencontre est le complémentaire dans $\mathcal{S}^u$ d'une feuille instable $\alpha(s)$.

LEMME 9.8. *L'application $\bar{f}^s$ est la composition $\bar{f}^u \circ \alpha$.*

Preuve Soit s un élément de $\mathcal{S}^s$; il est clair que l'image de $\mathcal{S}^u \setminus \{\alpha(s)\}$ est le complémentaire de $\bar{f}^u(\alpha(s))$ dans Λ. On observe par ailleurs que $\bar{f}^s(s)$ ne peut appartenir à cette image : en effet, s'il existe u dans $\mathcal{S}^u \setminus \{\alpha(s)\}$ dont l'image par $\bar{f}^u$ vaut $\bar{f}^s(s)$, l'image de $(s,u) \in Q^\Phi$ par $\bar{f}$ serait un élément de $X \times X$ de la forme (x,x), ce qui est impossible puisqu'il doit appartenir à l'image du plongement canonique de Y dans $X \times X$ - en particulier, dans le complémentaire de la diagonale.

Cet argument peut paraitre embrouillé et obscur au lecteur n'ayant pas encore assimilé de manière satisfaisante les objets géométriques en jeu. Disons donc en résumé que le lemme s'obtient du fait que pour toute paire (s,u) dans $Q^\Phi \subset \mathcal{S}^s \times \mathcal{S}^u$, les drapeaux $\bar{f}^s(s)$ et $\bar{f}^u(u)$ doivent pouvoir se relever en un élément de Y. ∎

Nous notons $\eta^{s,u}$, $\eta^{s,u}_*$ les compositions de $\bar{f}^{s,u}$ avec les projections de X sur $P(V)$ et $P(V^*)$.

LEMME 9.9. *Les applications* $\eta^{s,u} : \mathcal{S}^{s,u} \to P(V)$, *et les applications* $\eta_*^{s,u} : \mathcal{S}^{s,u} \to P(V^*)$ *sont injectives.*

Preuve Nous ne considérons que le cas de l'application η_*^s, les autres se traitent de la même manière. Soient s, s' deux éléments de $\mathcal{S}^s$ admettant la même image par η^s. Supposons que s et s' soient distincts ; le couple (s, u), avec $u = \alpha(s')$, représente alors une orbite du flot géodésique du disque de Poincaré, dont l'image par $\bar{f}$ doit appartenir à $Y \subset X \times X$. Or, d'après le lemme 9.8, cette image est l'élément $(\bar{f}^s(s), \bar{f}^s(s'))$ de $X \times X$. Rappelons que, comme tout élément de X, $\bar{f}^s(s)$ est une paire $([u], [u^*])$, et $\bar{f}^s(s')$ est une paire $([v], [v^*])$, vérifiant $\langle u \mid u^* \rangle = \langle v \mid v^* \rangle = 0$. Mais, par hypothèse, les projections $[u]$ et $[v]$ de $\bar{f}^s(s)$ et de $\bar{f}^s(s')$ sont égales. En particulier, nous avons $\langle u \mid v^* \rangle = 0$ (ainsi que $\langle v \mid u^* \rangle = 0$). Ceci contredit la description du plongement de Y dans $X \times X$. ∎

Nous notons L l'image de η^s (qui est aussi celle de η^u) et L^* celle de η_*^s (qui est aussi celle de η_*^u). D'après ce qui précède, ce sont l'une comme l'autre des courbes fermées simples.

LEMME 9.10. *La courbe limite* Λ *est l'ensemble des paires* $([v], [v^*])$ *où* $[v]$ *appartient à* L, *et* $[v^*]$ *à* L^*.

Preuve Un des sens est clair. À l'inverse, soit $([v], [v^*])$ un élément de X pour lequel $[v]$ et $[v^*]$ appartiennent respectivement à L, L^*. Soit s l'élément de $\mathcal{S}^s$ dont l'image par η^s soit $[v]$, et u l'élément de $\mathcal{S}^u$ dont l'image par η^u soit $[v^*]$.

Supposons que u ne soit pas égal à $\alpha(s)$. Alors, la paire (s, u) appartient à Q^Φ, ce qui montre que $(\bar{f}^s(s), \bar{f}^u(u))$ appartient à l'ouvert Y de $X \times X$. Or, nous avons choisi s et u de sorte que leurs images respectives par $\bar{f}^s$, $\bar{f}^u$ soient de la forme $([v], [w^*])$ et $([w], [v^*])$. Ceci contredit la description du plongement de Y dans $X \times X$, puisque $\langle v \mid v^* \rangle$ est ici nul.

Donc, u est égal à $\alpha(s)$. Son image par $\bar{f}^u$ est, d'après le lemme 9.8, le point $\bar{f}^s(s)$. Sa projection sur $P(V)$ est donc $\eta^s(s) = [v]$. Comme nous l'avons choisi de sorte que sa projection sur $P(V^*)$ soit $[v^*]$, on obtient que $\bar{f}^u(u)$ vaut $([v], [v^*])$, ce qui montre bien que $([v], [v^*])$ appartient à Λ. ∎

En combinant ce lemme avec le lemme 9.9, on obtient :

COROLLAIRE 9.11. *Toutes les droites projectives de* $P(V)$ *appartenant à* L^* *rencontrent* L *en un et un seul point.* ∎

L'énoncé dual, où les rôles de L et de L^* sont échangés, est bien sûr tout aussi vrai. Il s'en suit que le lemme ci-dessus peut être complété par :

COROLLAIRE 9.12. *Pour tout point* $[u]$ *de* L, *il existe une et une seule droite projective de* $P(V)$ *appartenant à* L^* *et contenant* $[u]$. ∎

COROLLAIRE 9.13. *La courbe* L *(respectivement* L^**) est l'adhérence des points fixes attractifs dans* $P(V)$ *(resp.* $P(V^*)$*) d'éléments de* $\rho(\bar{\Gamma})$ *(resp.* $\rho^*(\bar{\Gamma})$*).* ∎

REMARQUE 9.14. Bien entendu, les courbes fractales L, L^* dans le cas où ρ est la restriction de ρ_0 à $\bar{\Gamma} \subset H$ sont les droites projectives L_0, L_0^*.

Notons qu'on peut étendre la définition des tores T_0, T_0^* et de l'ouvert Ω_0 dans le cas général : on définit T (respectivement T^*) comme étant le tore topologique formé des drapeaux $([u], [u^*])$ avec $[u]$ appartenant à L (respectivement $[u^*]$ appartenant

à L^*), et Ω est défini comme étant le complémentaire dans X de l'union $T \cup T^*$. Là encore, Λ est l'intersection $T \cap T^*$, et le complémentaire de Λ dans chacun de ces tores définit deux anneaux $\rho(\bar{\gamma})$-invariants A et A^*.

Remarque 9.15. Remarquons que l'étude ci-dessus est valable pour toute représentation (G, Y)-Anosov ρ, pas nécessairement celles proches de la représentation ρ_0 introduite au § précédent. En particulier, elle s'applique aux représentations de groupes de surfaces dans la composante de Hitchin (voir remarque 7.16). Dans ce contexte, la courbe fermée simple est le bord de l'ouvert convexe $\rho(\bar{\Gamma})$-invariant, et L^* est le bord du convexe dual - c'est aussi l'ensemble des droites projectives tangentes à L. L'ouvert Ω admet dans ce cas trois composantes connexes :

– une composante qui est l'ensemble des drapeaux $([v], [v^*])$ où $[v]$ est dans l'ouvert convexe $\rho(\bar{\Gamma})$-invariant de $P(V)$: cette composante s'identifie au projectifié de l'espace tangent à l'ouvert convexe invariant,

– une composante qui est l'ensemble des drapeaux $([v], [v^*])$ où $[v^*]$ est dans l'ouvert convexe $\rho^*(\bar{\Gamma})$-invariant C de $P(V^*)$: cette composante s'identifie au projectifié de l'espace tangent à l'ouvert convexe invariant dual C^*,

– enfin, une composante qui est l'ensemble des drapeaux $([v], [v^*])$ où $[v]$ et $[v^*]$ sont dans les complémentaires dans $P(V)$, $P(V^*)$ des adhérences des convexes invariants C et C^*.

La troisième composante est d'une certaine manière de nature lorentzienne. En effet, lorsque les convexes C et C^* sont des ellipses - et donc ρ à valeurs dans $\mathrm{SO}(1, 2)$ - elle s'identifie canoniquement à l'espace des directions de type temps de l'espace de Sitter.

9.3.3. Déformations à courbe limite Λ constante. Une première déformation possible consiste à déformer la représentation $\rho_0 : \bar{\Gamma} \to G$ le long de φ^t selon un morphisme $u : \bar{\Gamma} \to \mathbb{R}$. Plus précisémment, notons $\rho_u : \bar{\Gamma} \to G$ définie par :

$$\rho_u(\gamma) = \varphi^{u(\gamma)} \circ \rho_0(\gamma)$$

Rappelons que l'inclusion $\bar{\Gamma} \subset H$ définit une norme - la norme stable - sur $H^1(\bar{\Gamma}, \mathbb{Z})$ (cf. § 2.2.4) :

Théorème 9.16. *L'action de $\rho_u(\bar{\Gamma})$ sur Ω_0 est libre et proprement discontinue si et seulement si la norme stable de u est strictement inférieure à $1/2$.*

Preuve Ceci est une reformulation du § 2.2.4 et en particulier, du Théorème 3.4 de [**170**]. C'est aussi un cas particulier du Théorème 9.24 ci-dessous - mais, à vrai dire, en démontrant ce Théorème, nous admettrons le Théorème 9.16. ∎

Nous notons $M(\rho_u)$ le quotient de Ω_0 par $\rho_u(\bar{\Gamma})$. C'est une variété drapeau. Le flot φ^t commute encore à l'action de $\rho_u(\bar{\Gamma})$ sur Ω_0, et induit un flot sur la variété $M(\rho_u)$. Il est immédiat de voir que ce flot est précisémment (un revêtement double d') un flot d'Anosov Désarguien, dont les feuilletages forts sont les feuilletages tautologiques de la variété drapeaux.

Là encore, cette description recoupe celle opérée à la remarque 5.19, et les anneaux $\rho_0(\bar{\Gamma})$-invariants A_0, A_0^* s'identifient de manière équivariante aux espaces de feuilles stable et instable forts de ce flot d'Anosov (cf. § 5.2).

Théorème 9.17. *La représentation ρ_u est (G, Y)-Anosov si et seulement si la norme stable de u est strictement inférieure à $1/2$.*

Remarque 9.18. Dans ce cas, la courbe limite invariante dans X est bien sûr Λ_0.

Preuve Montrer que la représentation est (G, Y)-Anosov dès que la norme stable est strictement inférieure à $1/2$ ne pose pas de sérieux problème : comme nous l'avons vu, l'application $f : H \to Y$ qui exprime le caractère Anosov de ρ_0 est l'application qui envoie h sur $([\rho_0(h)e_1], [e_2], [\rho_0(h)e_3])$. Or, φ^t agit trivialement sur $[e_2]$ et sur la droite projective $[e_2^*]$ qui contient tous les $[\rho_0(h)e_1]$ et $[\rho_0(h)e_3]$. Cette même application f est donc toujours équivariante pour l'action au but définie par ρ_u. Il n'y a donc qu'à vérifier que cette application induit bien un fermé hyperbolique invariant dans le Y-fibré plat au dessus de M tant que la norme stable de u est inférieure à $1/2$, ce qui ne pose pas de difficulté, nous le laissons au lecteur.

Supposons maintenant que ρ_u soit (G, Y)-Anosov : la courbe invariante Λ doit être l'adhérence de l'ensemble des points fixes attractifs de $\rho_u(\bar{\Gamma})$, elle contient donc en particulier l'adhérence des points fixes attractifs de $\rho_u([\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}])$ (sous-groupe des commutateurs). Or, l'image de $[\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}]$ par ρ_u est égale à son image par ρ_0, et les points fixes dans $\mathbb{R}P^1$ de commutateurs de $\bar{\Gamma}$ sont denses dans $\mathbb{R}P^1$: on en déduit que Λ est nécessairement Λ_0.

Or, il est facile de voir que si la norme stable de u est strictement plus grande que $1/2$, il existe un élément de $\bar{\Gamma}$ dont l'image par ρ_u est un élément proximal qui admet comme point fixe attractif dans $P(V)$ le point $[e_2]$. En particulier, le point fixe attractif de cet élément du groupe d'holonomie n'appartient pas à Λ, ce qui est absurde. Donc, la norme stable de u est inférieure à $1/2$, et comme la propriété d'être (G, Y)-Anosov est une propriété ouverte, cette norme stable doit nécessairement être strictement inférieure à $1/2$. ∎

9.3.4. Déformations à L_0 constante. Dans [**24**], j'ai étudié certaines déformations de ρ_u (avec u de norme stable inférieure à $1/2$), celles pour lesquelles, pour parler vite, L_0^* ne change pas. De manière plus précise, j'ai étudié les représentations $\rho : \bar{\Gamma} \to G$ de la forme suivante :

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{u(\gamma)/3}a(\gamma) & 0 & e^{u(\gamma)/3}b(\gamma) \\ \mu(\gamma) & e^{-2u(\gamma)/3} & \nu(\gamma) \\ e^{u(\gamma)/3}c(\gamma) & 0 & e^{u(\gamma)/3}d(\gamma) \end{pmatrix}$$

où :

– l'application $\rho_\lambda : \gamma \mapsto \begin{pmatrix} a(\gamma) & b(\gamma) \\ c(\gamma) & d(\gamma) \end{pmatrix}$ est un morphisme à valeur dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$,

– l'application $u : \bar{\Gamma} \to \mathbb{R}$ est un morphisme de norme stable (relativement à ρ_λ) strictement inférieure à $1/2$.

On observe que sous ces hypothèses, le point $[e_2]$ est fixé par tous les éléments du groupe, et plus précisément, est un point fixe de type selle de $\rho(\gamma)$ pour tout γ non-trivial. C'est d'ailleurs une manière équivalente de définir ces représentations (voir la section 2 de [**170**]). J'ai appelé dans [**24**] ces actions *actions hyperboliques.*

Un des résultats principaux est :

Théorème 9.19 (Théorème A de [**24**]). *L'action de $\rho(\Gamma)$ sur $P(V)$ préserve une courbe fermée simple continue L. Cette courbe n'est pas Lipschitz continue, sauf si c'est une droite projective.*

C'est en m'attaquant à la rédaction de ce mémoire que j'ai réalisé que ce résultat se retrouve aisément (du moins, l'existence de L) grâce à la notion de représentations (G, Y)-Anosov. En effet :

LEMME 9.20. *Les représentations hyperboliques comme définies ci-dessus sont (G, Y)-Anosov.*

Preuve Si les applications μ et ν sont nulles, ceci découle du Théorème 9.17. On observe ensuite qu'en conjuguant au but la représentation par φ^t avec t suffisamment grand, on peut rendre la représentation aussi proche que l'on veut d'une représentation du même type, avec le même ρ_λ et le même morphisme u, mais pour laquelle μ et ν sont identiquement nulles. On conclut grâce à la stabilité des représentations (G, Y)-Anosov. ∎

On obtient donc sans effort (une fois avoir longuement disserté sur les représentations Anosov !) l'existence de la courbe invariante L. Bien sûr, la courbe L^* de $P(V^*)$ est tout simplement la droite projective invariante $[e_2]$. On définit bien sûr aussi l'ouvert Ω de X, formé, rappelons-le, des drapeaux $([v], [v^*])$ avec $[v] \notin L$ et $[v^*] \notin [e_2]$.

THÉORÈME 9.21. *L'action de $\rho(\bar{\Gamma})$ sur Ω est libre et proprement discontinue.*

Preuve Il s'agit de la Proposition 4.19 de [**24**]. C'est aussi un cas particulier du Théorème 9.24 plus loin. ∎

Dans [**24**], nous avons attribué à la variété drapeau quotient de cette action le nom de Goldman (*Goldman flag manifold*) pour une raison que nous indiquerons au § 9.3.6.

REMARQUE 9.22. Dans [**24**], la preuve que nous avons donné du Théorème 9.21 inclut une preuve complète du Théorème 9.16, et donc également du Théorème 3.4 de [**170**].

REMARQUE 9.23. On peut considérer des représentations semblables aux représentations hyperboliques, définies elles-aussi par des morphismes ρ_λ et u, mais sans imposer *a priori* de condition sur u. Mais il est facile de voir alors que ce type de représentation n'est (G, Y)-Anosov que justement dans le cas où la norme stable de u est strictement inférieure à $1/2$.

9.3.5. Propreté de l'action des représentations (G, Y)-Anosov.

THÉORÈME 9.24. *Soit $\rho : \bar{\Gamma} \to G$ une représentation (G, Y)-Anosov. Soit Ω l'ouvert de X associé. Alors, l'action de $\bar{\Gamma}$ sur Ω définie par ρ est libre et proprement discontinue.*

Preuve Les $\rho(\gamma)$ sont loxodromiques ; leurs points fixes dans X sont de la forme $([u], [u^*])$ où soit $[u]$ appartient à L, soit $[u^*]$ appartient à L^*. Aucun d'entre eux n'appartient donc à Ω.

Montrons que l'action est proprement discontinue. Comme $\rho(\bar{\Gamma})$ est discret, il s'agit de démontrer qu'il n'existe pas de suite d'éléments γ_n de $\bar{\Gamma}$, ainsi qu'une suite de points $([u_n], [u_n^*])$ de Ω vérifiant les propriétés suivantes :

(1) La suite γ_n s'échappe de tout compact de $\bar{\Gamma}$,

(2) les $([u_n], [u_n^*])$ convergent vers un point $([\bar{u}], [\bar{u}^*])$ de X,

(3) les images $\rho(\gamma_n)([u_n],[u_n^*]) = ([v_n],[v_n^*])$ convergent vers un point $([\bar{v}],[\bar{v}^*])$ de X,

On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une telle donnée. On note $g_n = \rho(\gamma_n)$.

On munit V de la norme euclidienne poour laquelle $([e_1],[e_2],[e_3])$ est une base orthonormale. Cette norme induit sur G une norme, la norme d'opérateurs, que l'on note $\|$. On note aussi $\mathcal{A}$ la sphère unité de cette norme.

Considérons les décompositions de Cartan de g_n, g_n^* (rappelons que g^* désigne l'inverse de la transposée de g et exprime l'action duale de g sur V^*) :

$$g_n = k_n \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & \nu_n \end{pmatrix} l_n^{-1}$$

$$g_n^* = k_n \begin{pmatrix} \lambda_n^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_n^{-1} \end{pmatrix} l_n^{-1}$$

où k_n, l_n sont des isométries de la métrique euclidienne, et $\lambda_n \geq \mu_n \geq \nu_n$, avec $\lambda_n\mu_n\nu_n = 1$.

Notons $\bar{g}_n$, $\bar{g}_n^*$ les quotients de g_n, g_n^* par leurs normes : ce sont des éléments de $\mathcal{A}$, dont la compacité assure (à extraction d'une sous-suite près) l'existence de limites $\bar{g}$, $\bar{g}^*$ dans $\mathcal{A}$. Notons I l'image de $\bar{g}$, I_* celle de $\bar{g}^*$, K le noyau de $\bar{g}$ et K_* celui de $\bar{g}^*$. On notera $[I]$, $[K]$, $[I_*]$ et $[K_*]$ leurs projections dans $P(V)$, $P(V^*)$. Enfin, on note $I^\perp, K^\perp \subset V^*$ et $K_*^\perp, I_*^\perp \subset V$ les sous-espaces vectoriels duaux, et $[I^\perp]$, $[K^\perp]$, ... les projections dans les espaces projectifs.

Comme les g_n sont de déterminant 1, le point (1) ci-dessus implique que les normes $\|g_n\|$ et $\|g_n^*\|$ tendent vers $+\infty$. On en déduit, si $\bar{g}^t$ désigne la matrice transposée de $\bar{g}$, les égalités suivantes :

$$\bar{g}^t \circ \bar{g}^* = 0 = \bar{g}^* \circ \bar{g}^t$$

Donc :

$$I_* \subset I^\perp, \qquad K^\perp \subset K_*$$

Comme les actions de g_n et de $\bar{g}_n$ sur $P(V)$ coincident, ainsi que celles de g_n^* et de $\bar{g}_n^*$ sur $P(V^*)$, nous avons :

Lemme 9.25. *Les applications $\bar{g}_n$ convergent uniformément sur les compacts de $P(V) \setminus [K]$ vers la restriction de $\bar{g}$. De même, les applications $\bar{g}_n$ convergent uniformément sur les compacts de $P(V^*) \setminus [K_*]$ vers la restriction de $\bar{g}^*$.* ∎

Remarque 9.26. L'image de la restriction de $\bar{g}$ à $P(V) \setminus [K]$ est $[I]$; celle de la restriction de $\bar{g}^*$ à $P(V^*) \setminus [K_*]$ est $[I_*]$.

En fait, comme la norme de g_n tend vers $+\infty$, on obtient que, si $\bar{k}$ et $\bar{l}$ désigne les limites de $\bar{k}_n$, $\bar{l}_n$, les matrices $\bar{g}$ et $\bar{g}^*$ sont de la forme :

$$\bar{g} = \bar{k} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{l}^{-1}$$

$$\bar{g}^* = \bar{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}' & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix} \bar{l}^{-1}$$

où $\bar{\lambda}$, $\bar{\nu}$ sont des réels strictement positifs, et $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}'$ sont des réels positifs ou nuls.

LEMME 9.27. *Les réels $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}'$ sont tous les deux nuls.*

Preuve Supposons que l'un d'entre eux est non-nul, disons $\bar{\mu}$. Alors, K est tout simplement la droite engendrée par $\bar{l}(e_3)$. L'inclusion $K^\perp \subset K_*$ montre alors que K_* est de dimension 2. Il s'ensuit que I_* est de dimension 1. Les inclusions sont donc des égalités :

$$I_* = I^\perp, \qquad K^\perp = K_*$$

Fait 1 *: $[K]$ appartient à la courbe invariante L.* Sinon, la courbe g_n-invariante L est contenue dans $P(V) \setminus [K]$, ce qui, au vu du lemme 9.25, implique qu'elle soit égale à la droite projective $[I]$. Donc, $[K]$ n'appartient pas à $[I]$. Considérons un petit disque ouvert D contenant $[K]$, mais d'adhérence disjointe de $[I]$. En appliquant à nouveau le lemme 9.25, on obtient que l'union des itérés $g_n D$ de ce disque recouvre tout $P(V)\setminus[I]$. Un de ces itérés contient donc l'adhérence de D, ce qui montre que D contient le point fixe attractif de g_n^{-1}. Comme D est arbitrairement petit, on obtient que $[K]$ est limite de points fixes attractifs d'éléments du groupe d'holonomie : d'après le corollaire 9.13, il appartient à L. Contradiction.

Fait 1′ *: le point $[I_*]$ appartient à L^*.* Démonstration complètement analogue : considérer la suite inverse $(g_n^*)^{-1}$ pour montrer que si $[I^*]$ n'est pas dans L^*, alors L^* est la droite projective $[K_*]$, puis en déduire une contradiction montrant que $[I_*]$ est la limite des points fixes attractifs de g_n^*.

Fait 2 *: La courbe L est une droite projective contenant $[K]$.* En effet, d'après le Fait 1′, la droite $[I]$ est un élément de L^*. D'après le corollaire 9.11, elle rencontre L en un et un seul point $[p]$. Par ailleurs, les fibres de l'application $\bar{g}$ sur $P(V)\setminus[K]$ sont des droites projectives contenant $[K]$, privée de ce point. Le lemme 9.25 implique que $L \setminus [K]$ est contenu dans une de ces fibres, ce qui montre le Fait 2.

Fait 2′ *: la courbe L^* est une droite projective contenant $[I_*]$* La preuve est encore analogue, seul mérite un commentaire la description de la dynamique de $(g_n^*)^{-1} = g_n^t$ sur $P(V^*)$ nécessaire pour reproduire l'argument : noter que $(g_n^*)^{-1}$ est la matrice :

$$l_n \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & \nu_n \end{pmatrix} k_n^{-1}$$

On divise ces matrices par leurs normes ; la limite pour $n \mapsto +\infty$ est alors :

$$\bar{g}^t = \bar{l} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{k}^{-1}$$

Comme $\bar{\mu} \neq 0$, on obtient là encore que les fibres de $\bar{g}^t$ sur $P(V^*) \setminus [I^*]$ sont des droites projectives privées de $[I^*]$. On peut donc reproduire la preuve du Fait 2.

Conclusion. Les courbes $\rho(\bar{\Gamma})$-invariantes sont donc des droites projectives, ce qui montre que le groupe d'holonomie préserve une droite projective L, et un point $[p_0] = (L^*)^\perp$. Observons que d'après le corollaire 9.12, le point $[p_0]$ n'appartient pas à L. Ceci signifie que, dans une base convenable de V les éléments du groupe d'holonomie s'écrivent sous la forme :

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{u(\gamma)/3}a(\gamma) & 0 & e^{u(\gamma)/3}b(\gamma) \\ 0 & e^{-2u(\gamma)/3} & 0 \\ e^{u(\gamma)/3}c(\gamma) & 0 & e^{u(\gamma)/3}d(\gamma) \end{pmatrix}$$

avec :

– l'application $\rho_\lambda : \gamma \mapsto \begin{pmatrix} a(\gamma) & b(\gamma) \\ c(\gamma) & d(\gamma) \end{pmatrix}$ est un morphisme à valeur dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$,

– l'application $u : \bar{\Gamma} \to \mathbb{R}$ est un morphisme.

Dans cette "base convenable" (e'_1, e'_2, e'_3), la courbe L est la projection du plan engendré par e'_1 et e'_3, et le point $[p_0]$ est $[e'_2]$. Il est facile de montrer[2] que, comme tous les éléments de $\rho(\bar{\Gamma})$ ont leurs points fixes attractifs dans L, *la norme stable (relativement à ρ_λ) de u est strictement inférieure à* $1/2$.

D'après le Théorème 9.16, on sait que l'action de $\bar{\rho}(\Gamma)$ est libre et proprement discontinue - mais, du point de vue strictement logique, nous sommes ici en train de démontrer le lemme 9.27, ce qui, dans ce contexte, est un résultat intermédiaire dans [**170**] : en effet, si $l(\gamma)$ désigne comme dans [**170**] le logarithme du rayon spectral de la matrice diagonale apparaissant dans la décomposition de Cartan de γ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, les logarithmes des coefficients λ_n, μ_n et ν_n sont, modulo une constante additive commune, les quantités $u(\gamma_n) + l(\gamma_n)$, $u(\gamma_n)$ et $u(\gamma_n) - l(\gamma_n)$. Or, dans la preuve du Théorème 3.4 de [**170**], il est montré que les quantités $l(\gamma_n) - |u(\gamma_n)|$ tendent vers $+\infty$, ce qui montre précisément la nullité de $\bar{\mu}$. ∎

Poursuivons la preuve du Théorème 9.24, maintenant que nous avons démontré le lemme 9.27. Nous savons alors que $[K]$ est une droite projective de $P(V)$, que $[I]$ est un point de $P(V)$. De manière analogue, $[K_*]$ est une droite projective de $P(V^*)$, tandis que $[I_*]$ est un point de $P(V^*)$.

Lemme 9.28. *Les points $[I]$ et $[I_*]$ appartiennent respectivement à L et L^*.*

Preuve Supposons que $[I]$ n'appartient pas à L. Alors, d'après le lemme 9.25, et par invariance de L, on obtient que L est contenu dans la droite projective $[K]$, et lui est donc égal. En raisonnant exactement de la même manière que lors de la preuve du Fait 1 du lemme 9.27, on obtient que $[I]$ est la limite des points fixes attractifs des $\rho(\bar{\Gamma})$, ce qui aboutit ici aussi à une contradiction.

L'appartenance de $[I_*]$ à L^* se démontre de la même manière. ∎

Lemme 9.29. *Les points $[K^\perp]$ et $[K_*^\perp]$ appartiennent respectivement à L^*, L.*

Preuve Il y a une symétrie du problème que nous n'avons pas encore utilisée, et c'est le moment de le faire : on peut échanger les rôles de $([\bar{u}], [\bar{u}^*])$ et $([\bar{v}], [\bar{v}^*])$, et inverser les γ_n. Ceci revient à considérer les inverses de g_n et de g_n^* ; notons h_n et h_n^* ces inverses (dans le but d'alléger les notations). Nous avons :

[2] C'est l'argument principal de la preuve du Théorème 9.17.

$$h_n = l_n \begin{pmatrix} \lambda_n^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_n^{-1} \end{pmatrix} k_n^{-1}$$

$$h_n^* = l_n \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_n & 0 \\ 0 & 0 & \nu_n \end{pmatrix} k_n^{-1}$$

On obtient ainsi que l'image de la limite dans $\mathcal{A}$ des $\bar{h}_n$ (c'est-à-dire des h_n divisés par leur norme) est :

$$\bar{h} = \bar{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix} \bar{k}^{-1}$$

L'image de $\bar{h}$ est donc engendrée par $\bar{l}e_3$. Or, au vu de son expression, le noyau K_* de $\bar{g}^*$ est le plan engendré par $\bar{l}(e_1^*)$ et $\bar{l}(e_2^*)$. Donc, $K_*^\perp$ est la droite engendrée par $\bar{l}e_3$, ce qui montre que $K_*^\perp$ *est l'image de* $\bar{h}$. Comme le lemme 9.28 s'applique à $\bar{h}$, on obtient comme voulu que $[K_*^\perp]$ appartient à L.

L'appartenance de $[K^\perp]$ à L^* s'obtient en appliquant le lemme 9.28 à $\bar{h}^*$. ∎

Nous sommes enfin en mesure de conclure. Comme $[\bar{v}]$ n'appartient pas à L (car $([\bar{v}], [\bar{v}^*])$ appartient à Ω), et n'est donc pas égal à $[I]$, le lemme 9.25 implique que $[\bar{u}]$ appartient à $[K]$. De même, $[\bar{u}^*]$ doit appartenir à $[K_*]$.

Faisons le bilan :

– la droite projective $[K_*]$ de $P(V^*)$ contient les points $[\bar{u}^*]$ et $[K^\perp]$ (car $K^\perp \subset K_*$),

– la droite projective $[\bar{u}^\perp]$ de $P(V^*)$ contient elle aussi $[\bar{u}^*]$ (car $\langle \bar{u} \mid \bar{u}^* \rangle = 0$) et $[K^\perp]$ (puisque nous venons de montrer que $[\bar{u}]$ appartient à $[K]$).

Or, comme $[\bar{u}^*]$ n'appartient pas à L^*, le lemme 9.29 montre qu'il n'est pas égal à $[K^\perp]$. Comme deux droites projectives de $P(V^*)$ ayant deux points distincts en commun sont égales, on en déduit que $[K_*]$ et $[\bar{u}^\perp]$ sont égales. En d'autres termes, $[\bar{u}]$ est égal à $[K_*^\perp]$, et appartient donc à L d'après le lemme 9.29. Contradiction. ∎

Remarque 9.30. Le Théorème 9.24 est valable pour toutes les représentations (G, Y)-Anosov de groupes de surfaces, y compris ceux apparteanant à la composante de Hitchin, c'est-à-dire, préservant un ouvert convexe C. On retrouve alors un résultat bien connu de propreté de l'action sur le projectifié du fibré tangent à C, mais aussi sur le "fibré des directions de type temps" au-dessus du ruban de Möbius $P(V) \setminus \overline{C}$ (voir remarque 9.15, comparer aussi avec la remarque 1.43 et la proposition 1.44).

On peut légitimement s'interroger sur les générations possibles du Théorème 9.24 pour des représentations (G, Y)-Anosov pour d'autres couples (G, Y) ? Il s'étend en effet par exemple de manière évidente dans le cas des représentations quasi-fuchsiennes, i.e., du couple $(G, Y) = (\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}), \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \setminus \mathrm{diag})$.

Remarque 9.31. Dans le remarquable article [**175**], R. Schwarz étudie des actions particulières de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sur la variété drapeau X, et exhibe pour ces actions des objets L, L^* aux propriétés complètement similaires à celles que nous

venons d'établir[3] : comparer nos corollaires 9.11, 9.12 avec le Theorem 3.3 de [**175**], ainsi que notre Théorème 9.24 avec le Theorem 4.2 de [**175**]. On est ainsi tenté de considérer ces représentations comme étant elles aussi (G, Y)-Anosov. Du reste, elles sont elles aussi des déformations de la représentation obtenue en composant $\rho_0 : H \to G$ avec l'inclusion de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Mais il y a une différence de taille : $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ n'est pas un réseau cocompact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$! Ceci suggère qu'il est sans doute possible et pertinent d'étendre la notion de représentations (G, Y)-Anosov en général à des réseaux de H qui ne soient pas nécessairement uniformes.

Il semble aussi pertinent de citer la dernière phrase écrite par M. Kapovich dans l'AMS review consacrée à [**175**] : *One wonders if both*[4] *constructions are part of a more general machine for geometric construction of group actions on symmetric spaces.*

Définition 9.32. *Soit $\rho : \bar{\Gamma} \to G$ une représentation (G, Y)-Anosov (pour le couple $(G, Y) = (SL(V), P(V) \times P(V) \times P(V) \setminus \{alignés\})$). On appelle variété drapeau Anosov le quotient par $\rho(\bar{\Gamma})$ de l'ouvert Ω associé.*

9.3.6. Étude des feuilletages tautologiques. A titre personnel, je me suis intéressé aux variétés drapeaux dans le but de répondre à une interrogation attribuée à Goldman sous la forme suivante : est-il vrai que les flots de dimension 1 transversalement affines obtenus par déformations de flots horocycliques (voir lemme 7.9, § 5.2, § 7.4.6.4). J'ai répondu à cette question dans [**24**] sous la forme suivante :

Théorème 9.33 (Théorèmes A et C de [**24**]). *Le deuxième feuilletage tautologique d'une variété drapeau de Goldman (i.e., une variété drapeau Anosov pour laquelle la courbe invariante L est une droite projective, voir § 9.3.4) est topologiquement conjugué au feuilletage horocyclique d'un flot d'Anosov Désarguien. Son premier feuilletage tautologique est un flot transversalement affine qui n'est pas minimal (i.e., il existe une orbite qui n'est pas dense), sauf si la deuxième courbe invariante L^* est elle aussi une droite projective ; c'est alors un feuilletage horocyclique d'un flot d'Anosov Désarguien.* ∎

Le deuxième feuilletage tautologique d'une telle variété est donc en particulier uniquement ergodique, n'admet pas de feuille fermée, etc.... Notons que l'équivalence topologique avec un feuilletage horocyclique n'est en général que Hölder ; si elle est Lipschitz, c'est que les deux courbes L et L^* sont des droites projectives (Theorem A de [**24**]). J'ignore complètement si le premier feuilletage tautologique d'une variété drapeau de Goldman peut admettre une feuille fermée, si son entropie est positive, etc...

Bien sûr, les question analogues se posent sur les variétés drapeau Anosov qui ne sont pas de Goldman. Par exemple :

Question : *Est-ce que tout feuilletage tautologique d'une variété drapeau Anosov est topologiquement équivalent à un feuilletage tautologique d'une variété drapeau de Goldman ?*

---

[3] Il y a une différence mineure : l'action sur X étudiée dans [**175**] est une action par *polarités,* c'est-à-dire qu'elle contient des transformations projectives composées avec le flip $([v], [v_*]) \mapsto ([v_*^\perp], [v^\perp])$.

[4] Le terme "both" faisant référence à des travaux de W. Thurston sur des espaces de polyèdres.

Il y a d'autres questions intéressantes, par exemple :

Question : *Soient* (L_1, L_1^*) *et* (L_2, L_2^*) *deux paires de courbes limites invariantes associées à deux représentations* (G, Y)*-Anosov différentes. Existe-t'il toujours une représentation* (G, Y)*-Anosov pour lesquelles les courbes limites invariantes soient* (L_1, L_2^*) *?*

Pour finir, j'aimerai indiquer ici sans preuve (par manque de temps) un fait remarquable qui montre que la dynamique sur les anneaux A et A^* est extrémenent sensible à la représentation :

THÉORÈME 9.34. *L'action de* $\rho(\bar{\Gamma})$ *sur l'anneau ouvert* A *préserve une courbe invariante si et seulement si la courbe limite* L *est une droite projective (la courbe invariante sur* A *est alors l'ensemble des* $([u], [u^*])$ *où* $[u]$ *parcourt* L*, et où* $[u^*]$ *est un élément fixe de* $P(V^*)$ *correspondant justement à la droite projective* L*).* ∎

Indiquons que ce Théorème se montre essentiellement avec les arguments employés au lemme 4.17 de [**24**]. Tout celà suggère une autre question :

Question : *Soient* ρ_1*,* ρ_2 *deux représentations* (G, Y)*-Anosov d'un même groupe de surface* $\bar{\Gamma}$*. Soient* A_1*,* A_1^* *et* A_2*,* A_2^* *les paires d'anneaux ouverts invariants. On suppose que l'action de* $\bar{\Gamma}$ *sur* A_1 *via* ρ_1 *est topologiquement conjuguée à celle sur* A_2 *via* ρ_2*, et que l'analogue pour les actions sur les anneaux duaux* A_1^**,* A_2^* *soit vrai lui aussi. Ceci implique-t'il que les représentations* ρ_1 *et* ρ_2 *sont conjuguées dans* $G = SL(V)$ *?*

CHAPITRE 10

Flots transversalement projectifs sur les fibrés de Seifert

Dans ce chapitre, je présente mon article [**25**]. Je reproduis l'introduction de cet article, qui convient particulièrement pour ce mémoire, dans la première section, suivie d'une section de commentaires.

10.1. "Introduction"

"Nous nous intéressons aux feuilletages de dimension 1 sur les variétés fermées de dimension 3, munis d'une $(PGL(3,\mathbf{R}),\mathbf{R}P^2)$-structure transverse. Rappelons que ceci signifie qu'on peut munir toutes les sections locales du feuilletage considéré d'une structure projective réelle, de sorte que l'application d'holonomie le long du feuilletage entre deux telles sections s'exprime dans les coordonnées projectives des sections comme étant la restriction d'une transformation projective. Dans ce sujet, les feuilletages-vedettes sont manifestement :

- les suspensions de transformations projectives d'une surface projective réelle,
- les fibrations projectives : ce sont les feuilletages dont les feuilles sont les fibres d'une fibration de Seifert au-dessus d'une orbifold munie d'une structure projective réelle,
- les feuilletages sous-tendus par les flots géodésiques des surfaces riemanniennes à courbure négative constante,
- les feuilletages horocycliques associés aux feuilletages géodésiques ci-dessus.

Remarquons que tous ces exemples (à part les suspensions) vivent sur des variétés de Seifert dont les groupes fondamentaux, dans les deux derniers cas, ne sont pas résolubles. La structure projective transverse pour les deux derniers exemples n'est sans doute pas évidente. Nous en rappelons la construction à la section 2 ; nous y montrons même que ce sont des cas particuliers au sein de deux familles remarquables, que nous appelons ici *feuilletages géodésiques convexes*, et *feuilletages horocycliques projectifs.*

Le cas des suspensions est aujourd'hui bien compris, les structures projectives réelles sur les surfaces fermées étant classifiées (cf. [**67**]). Par contre, nous sommes encore loin de prétendre à une complète compréhension de tous les feuilletages transversalement projectifs en dimension 3. Gardons cependant notre optimisme en observant que l'analogue de ce programme a été atteint dans les cas des feuilletages transversalement riemanniens ([**54**]), des feuilletages transversalement holomorphes ([**51, 106**]), ou encore des feuilletages munis d'une $(SL(2,\mathbf{R}),\mathbf{R}^2)$-structure ([**146**]).

Dans [**146**], S. Matsumoto classifie également les feuilletages de dimension 1 munis d'une structure transverse affine unimodulaire satisfaisant la *propriété de relèvement des chemins* ("Homotopy Lifting property" dans [**146**]). Cette hypothèse signifie que l'espace des feuilles du relevé du feuilletage dans le revêtement

universel de la variété ambiante est séparé au sens de Hausdorff. Elle n'est pas satisfaite par tous les feuilletages transversalement projectifs (considérer par exemple le feuilletage induit par le famille des droites verticales de $\mathbf{R}^3$ dans la variété de Hopf quotient de $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ par une homothétie). Elle est cependant vérifiée par tous les exemples évoqués ci-dessus. Le but de cet article est de montrer le fait inverse lorsqu'on se restreint aux variétés de Seifert :

Théorème Principal *Soit M une variété de Seifert dont l'orbifold sous-jacente est de caractéristique d'Euler négative. Soit Φ un feuilletage sur M, muni d'une $(PGL(3,\mathbf{R}), \mathbf{R}P^2)$-structure transverse, et satisfaisant la propriété de relèvement des chemins. Alors, à revêtements finis près, Φ est conjugué à une fibration projective, à un feuilletage géodésique convexe, ou à un feuilletage horocyclique projectif, la conjugaison respectant les structures projectives transverses.*

Supposer que la caractéristique d'Euler de l'orbifold sous-jacente est strictement négative n'est pas dramatique. Ceci revient à supposer que le groupe fondamental de la variété ambiante n'est pas (virtuellement) résoluble. Les techniques permettant de comprendre les flots transversalement projectifs satisfaisant la propriété de relèvement des chemins dans le cas où le groupe fondamental est résoluble sont aujourd'hui devenues folkloriques (voir par exemple [**34**], [**73**], [**22**]), même si ce programme n'a pas aujourd'hui été mené à son terme. Dans cet article, nous introduisons des méthodes nouvelles.

Notons aussi que la conclusion du Théorème Principal peut aussi s'énoncer de la manière suivante : tout feuilletage vérifiant les hypothèses du théorème est soit une fibration projective, soit le feuilletage radial d'une structure affine radiale sur la variété ambiante M (cf. [**22**]), soit un feuilletage tautologique d'une structure de variété drapeau sur M (cf. [**22**], ou la section 2.2 à suivre). C'est sous cette forme qu'il est susceptible d'être généralisé à tous les feuilletages transversalement projectifs sur les variétés fermées de dimension 3, y compris peut-être ceux qui ne satisfont pas la propriété de relèvement des chemins. Pour que cet énoncé soit correct, il faut cependant adjoindre une autre famille importante de feuilletages transversalement affines, les *feuilletages de Hopf.* Nous entendons par là tout feuilletage finiment revêtu par le résultat du quotient de $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ par une transformation affine contractante A, le feuilletage en question étant le passage au quotient du feuilletage par droites parallèles à une direction propre de A. Observons que les feuilletages provenant de structures affines radiales ou de structures drapeaux sur la variété ambiante, ou qui sont des feuilletages de Hopf forment un ouvert de l'espace des feuilletages transversalement projectifs : cette observation provient du théorème de réalisabilité essentiellement unique de toute déformation du morphisme d'holonomie (cf. [**110**]). Ce fait renforce la vraisemblance de l'énoncé général que nous suggérons. De manière plus précise, si cet énoncé s'avère erroné, ceci signifie l'existence de feuilletages transversalement projectifs radicalement nouveaux dont nous ne soupçonnons pas encore l'existence. Indiquons aussi que d'après la classification des variétés affines radiales ([**68**]), les feuilletages radiaux sont précisément les suspensions d'automorphismes projectifs de surfaces fermées.

Nous décrivons maintenant l'organisation de cet article : la section 2 décrit les feuilletages modèles, i.e. les fibrations projectives, les feuilletages géodésiques convexes et les feuilletages horocycliques projectifs. À la section 3, nous introduisons les notations, et établissons quelques résultats techniques qui seront utilisés par la suite. Nous nous donnons d'ores et déjà un feuilletage transversalement projectif

(M, Φ) satisfaisant les hypothèses du Théorème Principal, le reste de l'article visant à montrer qu'il en vérifie les conclusions. Nous appelons Q_Φ l'espace des feuilles du relevé de Φ dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. Par hypothèse, Q_Φ est Hausdorff ; on en déduit aisément qu'il est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$. L'action de Γ, groupe fondamental de M, i.e. groupe des automorphismes de revêtement de $\widetilde{M}$, passe au quotient en une action du même groupe sur Q_Φ. La structure projective transverse à Φ induit une structure projective Γ-invariante sur Q_Φ. Dans cette même section, nous montrons que Φ est isomorphe à un des feuilletages modèles dès que l'action de Γ sur Q_Φ est projectivement conjuguée à l'action analogue construite à partir d'un des feuilletages modèles (Proposition 3.5). L'énoncé du Théorème Principal étant à revêtements finis près, on peut supposer que Φ est orientable et transversalement orientable, ou encore que M soit une variété de Seifert sans fibre singulière, i.e. un fibré en cercles. On note h un des deux éléments de Γ qui engendrent le centre de Γ, i.e. représentés par un lacet homotope au fibres du fibré en cercles M.

À la section 4, nous montrons qu'à indice fini près, l'action par holonomie de h sur le plan projectif est triviale (Corollaire 4.3). Ce résultat est analogue au résultat principal de [**94**] dans notre contexte, mais la preuve est de nature entièrement différente. Elle utilise notamment la notion de feuilletages en cylindres (cf. [**128**]).

À partir de la section 5, nous supposons que Φ *n'est pas une fibration projective.* Nous y montrons que le noyau du morphisme d'holonomie est engendré par h. (Proposition 5.1). On y montre également que le quotient de l'action de ce noyau sur Q_Φ est un anneau, que nous notons A_Φ. L'action de Γ passe donc au quotient en une action d'un groupe de surface $\bar{\Gamma}$ sur A_Φ. L'idée de considérer un tel anneau quotient, dans un autre contexte, apparait déjà dans [**94**] et dans [**58**]. Ces deux articles ont fortement influencés le présent travail.

À la section 6, nous montrons que le groupe d'holonomie contient un élément loxodromique, i.e. un élément de $PGL(3, \mathbf{R}) \approx SL(3, \mathbf{R})$ dont les trois valeurs propres sont réelles et de valeurs absolues deux-à-deux différentes. Cette preuve est essentiellement fondée sur un théorème de Y. Benoist selon lequel il suffit de montrer que l'adhérence Zariski du groupe d'holonomie contient un tel élément loxodromique. Nous notons γ_0 un élément de Γ d'holonomie loxodromique.

L'étape suivante consiste à comprendre la dynamique sur l'anneau A_Φ de l'élément loxodromique γ_0. C'est l'objet de la section 7. Une manière simple de construire une grande variété d'anneaux projectifs munis d'une transformation projective d'holonomie $\rho(\gamma_0)$ est la suivante : l'action sur le plan projectif de $\rho(\gamma_0)$ admet trois points fixes, un de type attractif, un autre de type répulsif, le dernier étant de type selle. Les droites projectives passant par deux de ces points fixes sont elles-aussi globalement $\rho(\gamma_0)$-invariantes ; elles sont au nombre de trois. Elles découpent le plan projectif en quatre triangles $\rho(\gamma_0)$-invariants (on suppose ici que les valeurs propres de $\rho(\gamma_0)$ ont toutes le même signe). Nous considérons ces triangles comme les pièces d'un puzzle, pièces munies chacune d'une dynamique (la restriction de $\rho(\gamma_0)$ au triangle). On peut recoller ces $\rho(\gamma_0)$-triangles le long de leurs bords, en convenant de ne recoller deux tels triangles que le long des arêtes correspondant à une arête commune aux deux triangles dans $\mathbf{R}P^2$. Partant d'un triangle T_1, on lui adjoint un triangle T_2 (il y a trois possibilités). Par la suite, lorsqu'on a construit une chaîne $T_1, \ldots, T_i$, on ajoute un triangle T_{i+1} en prenant soin de ne pas le recoller le long de l'arête commune à T_i et T_{i-1} : on a pour celà deux choix

possibles. À certains moments, on peut recoller le triangle T_n au triangle initial T_1 le long d'une arête qui ne correspond pas à l'arête commune à T_1 et T_2, ni à l'arête commune à T_n et T_{n-1}. On obtient ainsi une guirlande de n triangles naturellement munie d'une transformation projective d'holonomie $\rho(\gamma_0)$. Si une des arêtes de recollement d'un triangle T_i correspond à une arête joignant le point fixe attractif au point fixe répulsif, nous sommes tenus de garder le triangle T_i complet (cf. lemme 7.14). Par contre, si ce n'est pas le cas, on peut tronquer le triangle et ne garder qu'un secteur $\rho(\gamma_0)$-invariant bordé dans T_i par les deux arêtes de recollement et une orbite du flot dont $\rho(\gamma_0)$ est le temps 1. Convenons d'appeler dans cette introduction *guirlande de $\rho(\gamma_0)$-secteurs* un anneau (sans bord) union d'un nombre fini de $\rho(\gamma_0)$-triangles dont certains peuvent être tronqués. Dans la figure 1, nous avons dessiné une guirlande de 12 secteurs, et, pour visualiser la dynamique, nous avons représenté dans chaque secteur deux orbites du flot dont $\rho(\gamma_0)$ est le temps 1. Le triangle apparaissant au centre ne provient que de la projection de la guirlande sur la page : il n'appartient pas à la guirlande.

La proposition 7.1 peut s'énoncer sous la forme suivante : *il existe un entier k non-nul et un sous-anneau essentiel $A(\gamma_0)$ qui est γ_0-invariant et qui est une $\rho(\gamma_0^k)$-guirlande.* Il est à noter que cet anneau $A(\gamma_0)$ n'est pas $\bar{\Gamma}$-invariant, bien au contraire : c'est en étudiant les intersections de cet anneau avec ses $\bar{\Gamma}$-itérés que l'on parvient à l'identifier de manière plus fine, et par là même, à obtenir la preuve du Théorème Principal. C'est ce programme qui est mis en œuvre dans les sections suivantes.

Dans la section 8, nous montrons que si le groupe d'holonomie, ou un de ses sous-groupes d'indice fini, préserve un point ou une droite projective de $\mathbf{R}P^2$, alors la guirlande $A(\gamma_0)$ est obtenue en recollant systématiquement des secteurs le long d'arêtes qui admettent toutes comme extrémité un représentant du γ_0-point fixe de type selle. Il s'en suit que (M, Φ) est revêtement fini d'un feuilletage horocyclique projectif (Proposition 8.5). À la section 9, nous traitons le cas fortement irréductible, i.e. celui où justement aucun sous-groupe du groupe d'holonomie ne préserve un point ou une droite. On y montre que, dans la guirlande $A(\gamma_0)$, tout paquet de trois arêtes de recollement successives contient une et une seule arête reliant le point fixe répulsif au point fixe attractif. On en déduit que le groupe d'holonomie satisfait le critère de Y. Benoist assurant qu'il préserve un convexe saillant du plan projectif (Corollaire 9.7). On en déduit alors sans peine que (M, Φ) est un revêtement fini d'un feuilletage géodésique convexe, ce qui clôt la preuve du Théorème principal.

Ce texte doit beaucoup à de nombreuses discussions avec D. Gaboriau. Je l'en remercie chaleureusement. Je remercie aussi A. Zeghib pour son oreille attentive et ses précieuses remarques. Maintes idées présentes dans ce texte ont été inspirées par [**94**] et [**58**].”

10.2. Commentaires

10.2.1. Feuilletages modèles. Comme il est dit dans l'introduction ci-dessus, le Théorème principal de [**24**] établit que les seuls feuilletages transversalement HLP sur des fibrés de Seifert d'orbifold sous-jacente de caractéristique d'Euler négative sont :

– les fibrations projectives : il s'agit des (G, X)-fibrations définies au §7.4.6.1, pour $(G, X) = (\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{R}P^2)$.

– les feuilletages géodésiques convexes,
– les feuilletages horocycliques projectifs.

Les deux derniers types de feuilletage modèle sont, par définition, des feuilletages tautologiques de variétés drapeaux (cf. § 7.4.6.5). Comme nous l'avons déjà signalé au § 7.4.6.5, nous appelons ici feuilletage géodésique le deuxième feuilletage géodésique de la structure drapeau naturelle sur le projectifié du fibré tangent à ue surface projective réelle, par *feuilletage géodésique convexe,* nous entendons le cas où la surface projective réelle est *convexe* au sens de § 7.4.4. On peut remarquer que, du point de vue topologique, ces flots sont tous (à revêtements finis près) topologiquement équivalents à des flots géodésiques.

Par feuilletage horocyclique projectif, nous entendons le deuxième feuilletage tautologique d'une variété drapeau de Goldman (cf. § 9.3.6). D'après le Théorème 9.33, ces flots sont topologiquements équivalents aux flots horocycliques de flots d'Anosov Désarguiens.

Ainsi, en particulier, le premier feuilletage tautologique d'une variété drapeau de Goldman n'est pas HLP, et pour toute variété drapeau Anosov qui n'est pas de Goldman (ni son dual), aucun des feuilletages tautologiques n'est HLP.

10.2.2. Méthodes. Dans la description de la preuve du Théorème principal de [**25**] ci-dessus, nous retrouvons donc les arguments mis en avant au chapitre 8, notamment, au § 8.2. De fait, les versions préliminaires de [**25**] portaient sur les structures affines radiales sur les fibrés de Seifert (dont les flots radiaux vérifient toutes les hypothèses du Théorème Principal), et consistaient à exclure les "anneaux projectifs" espaces d'orbites de flots tautologiques de variétés drapeaux. C'est du reste de l'étude de ces contre-exemples que mon travail [**24**] sur les variétés drapeaux ont émergé.

Troisième partie

Géométrie Lorentzienne en courbure constante

.

Il m'a été difficile de trouver le cryptarithme adéquat pour cette ultime partie : il a fallu pour se faire requérir la langue portugaise. Il est à nouveau non parfait, admettant deux solutions.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & \mathbf{E} & \mathbf{S} & \mathbf{P} & \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{O} \\
+ & & & \mathbf{T} & \mathbf{E} & \mathbf{M} & \mathbf{P} & \mathbf{O} \\
\hline
 & & \mathbf{T} & \mathbf{E} & \mathbf{N} & \mathbf{S} & \mathbf{O} & \mathbf{R}
\end{array}
$$

CHAPITRE 11

Généralités

11.1. Variétés lorentziennes

Une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel de dimension n est non dégénérée, de signature $(-,+,+,\ldots,+)$, si, dans une base convenable, la forme quadratique associée s'exprime sous la forme :

$$q_{1,n-1}(x_1,\ldots,x_n) = -x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ équippé de la forme $q_{1,n-1}$ ci-dessus est appelé espace de Minkowski. Nous le notons $\mathbb{R}^{1,n-1}$.

Une variété lorentzienne est une variété M munie d'une métrique lorentzienne (de classe C^r), c'est-à-dire, d'un 2-tenseur covariant (de classe C^r) symétrique qui se restreint à chaque fibre du fibré tangent en une forme bilinéaire symmétrique non-dégénérée de signature $(-,+,+,\ldots,+)$. Nous noterons $\langle v \mid w\rangle$ son évaluation sur deux vecteurs v, w tangents à M en un même point, nous l'appelons *produit scalaire entre v et w.* Lorsque M est de dimension n, insistant sur le caractère lorentzien, et rejoignant la terminologie en cours chez les physiciens, nous parlons de variété lorentzienne de dimension $(n-1,1)$. Nous emploierons aussi le terme espace-temps, bien que dans l'esprit celui-ci devrait être réservé aux solutions de l'équation d'Einstein[1].

11.1.1. Type des vecteurs tangents. Une métrique lorentzienne affecte à chaque vecteur tangent une quantité réelle, que nous appelons sa "norme" (attention ; cette terminologie transposée telle quelle dans le contexte riemanien aboutit au carré de la norme usuelle).

Définition 11.1. *Un vecteur de norme (strictement) négative est dit* de type temps. *Un vecteur de norme (strictement) positive est dit* de type espace. *Un vecteur non-nul de norme nulle est dit* de type lumière. *Enfin, un vecteur de type temps ou lumière est dit* de type causal.

Définition 11.2. *Une courbe de classe C^1 est dite de type temps (respectivement spatiale, lumière, causale) si tous ses vecteurs tangents sont de type temps (respectivement espace, lumière ou causal).*

Définition 11.3. *Le* temps propre *d'une courbe causale $c : [a,b] \to M$ dans une variété lorentzienne est l'intégrale sur $[a,b]$ de la racine carrée de l'opposé de la norme du vecteur tangent $c'(t)$.*

[1]Mais, somme toute, toute variété lorentzienne est solution de l'équation, d'Einstein, si le tenseur d'énergie-impulsion n'est pas spécifié.

On peut remarquer que, comme la longueur d'une courbe calculée selon une métrique riemannienne ambiante, le temps propre d'une courbe causale ne dépend pas de son paramétrage.

Nous verrons plus loin que la notion de courbe causale s'étend à des courbes qui ne sont pas C^1, ni-même C^1 par morceaux, mais seulement Lipschitz (voir définition 11.10).

11.1.2. Orientations. Nous supposerons toujours que les variétés considérées sont orientées, situation à laquelle on peut toujours se ramener par un revêtement double sans incidence sur les énoncés que nous considérerons. Ceci étant, intervient sur toute variété lorentzienne une autre notion d'orientabilité :

DÉFINITION 11.4. *Une orientation chronologique d'une variété lorentzienne est un champ de vecteurs continu partout de type temps. Si un tel champ de vecteurs existe, la variété lorentzienne est chronologiquement orientée.*

En vérité, au-dessus d'une variété lorentzienne M de dimension $(n-1,1)$, le fibré des directions de type temps est un sous-fibré de PTM dont les fibres sont homéomorphes à la boule ouverte de dimension $n-1$: il admet dont toujours une section continue. Ceci implique d'une part qu'une variété M ne peut admettre une métrique lorentzienne que si sa caractéristique d'Euler est nulle - et un instant de réflexion, ainsi que l'existence d'une métrique riemannienne sur toute variété montre que cette condition suffit. D'autre part, ceci implique que toute variété lorentzienne admet un revêtement double qui est chronologiquement orienté : il suffit de prendre le revêtement des orientations du fibré en droite associé à la section choisie précédemment. Là encore, on ne perdra aucune généralité en se restreignant aux variétés lorentziennes chronologiquement orientées.

Soit η un champ de vecteurs continu de type temps.

DÉFINITION 11.5. *Un vecteur tangent v à M en un point x de M de type causal est η-orienté vers le futur si le produit scalaire $\langle v \mid \eta(x)\rangle$ est négatif. Si ce produit scalaire est positif, v est dit η-orienté vers le passé.*

Remarquons que si η' est un autre champ de vecteurs de type temps, le produit scalaire $\langle \eta \mid \eta'\rangle$ est partout non-nul. Lorsqu'il est négatif, les vecteurs η-orientés vers le futur sont exactement les vecteurs η'-orientés vers le futur : on dit que η et η' définissent la même orientation chronologique. Une variété lorentzienne chronologiquement orientable n'admet donc que deux orientations chronologiques, opposées l'une à l'autre.

Une fois fixée une orientation chronologique :

DÉFINITION 11.6. *Une courbe causale $c : [a,b] \to M$ de classe C^1 est dite orientée vers le futur (resp. vers le passé) si tous ses vecteurs tangents sont orientés vers le futur (resp. vers le passé).*

Remarquons que toute courbe causale est chronologiquement orientée, soit vers le futur, soit vers le passé. On peut ainsi distinguer parmi les deux extrémités d'une courbe causale celle qui est *future* de celle qui est *passée.*

11.1.3. Métriques lorentziennes versus métriques riemanniennes. Une propriété importante satisfaite par les métriques riemaniennes qui s'applique encore aux métriques lorentziennes est l'existence et l'unicité d'une connection compatible,

dite de Levi-Civita : c'est la seule connection sans torsion pour laquelle le transport parallèle associé préserve la norme des vecteurs. On peut donc considérer la courbure de cette connection, qui est appelée la courbure de la variété lorentzienne. On peut aussi définir les géodésiques de la métrique (ce sont celles de la connection de Levi-Civita), ainsi que l'application exponentielle, qui est un difféomorphisme local bien défini au voisinage de la section nulle. Mais il serait erroné de penser que, comme dans le cas riemannien, les géodésiques de la connection sont les courbes paramétrées qui minimisent localement l'énergie, i.e., l'intégrale de la norme des vecteurs tangents.

Cependant un énoncé similaire reste vrai lorsqu'on se restreint aux courbes de type temps : une géodésique de type temps entre deux points proches est, parmi toutes les courbes causales reliant ces deux points, celle qui *maximise* la valeur absolue du temps propre. Ce fait est classiquement divulgué sous la forme du *paradoxe des jumeaux de Langevin :* un voyageur, quittant son frère jumeau, et qui subit des accélérations avant de rejoindre son frère dans un même point de l'espace-temps, sera au moment de la rencontre plus vieux que son frère si celui-ci s'est contenté de suivre sans effort une géodésique de l'espace-temps.

Bien évidemment, comme dans le cas riemannien, cette caractérisation des géodésiques n'est plus vraie lorsque les points reliés sont éloignés : il y a encore une notion de points conjugués. Voir [**33**], [**74**], [**161**] pour plus de détails.

Une différence de taille entre le cas riemannien et le cas lorentzien est le fait que le Théorème de Hopf-Rinow n'est pas valable dans le cas lorentzien : une variété lorentzienne compacte peut fort bien ne pas être géodésiquement complète - c'est-à-dire, l'application exponentielle peut ne pas être définie sur tout le fibré tangent. Une autre "pathologie" de la géométrie riemannienne est que le groupe des isométries d'une variété lorentzienne peut fort bien ne pas agir proprement sur la variété.

Ces deux observations forment les obstacles essentiels qui empêchent d'étendre au cas lorentzien maintes propriétés des variétés riemanniennes. Un bon moyen de contourner ces obstacles, notamment en courbure constante[2], est de mettre en jeu la notion de *causalité.*

11.2. Notions de causalité

11.2.1. De l'origine et du destin. Dans une variété lorentzienne, on peut considérer plusieurs notions de futur : par exemple, à toute partie A, on peut associer l'ouvert formé des points extrémités futures de courbes de type temps orientées vers le futur issues d'un point de A. Mais la seule notion que nous considérerons ici est la notion suivante, usuellement appelée *futur causal,* que nous appelons ici sobrement *futur :*

Définition 11.7. *Soit M une variété munie d'une métrique lorentzienne. Le futur $F(A)$ d'une partie A de M est l'ensemble des points extrémités futures de courbes causales orientées vers le futur issues de points de A (en excluant les courbes triviales réduites à un seul point). Le futur* élargi *est l'union de A et de $F(A)$.*

On définit de manière complètement similaire le *passé* $P(A)$; c'est le futur de A pour l'orientation chronologique opposée. On peut aussi définir la notion de futur est de passé relatif à un ouvert :

[2]Ce sera l'objet principal de [**31**].

DÉFINITION 11.8. *Soit U un ouvert d'une variété riemannienne (M, g), et A une partie de M. Le futur (resp. passé) de A relatif à U est le futur (resp. passé) de $A \cap U$ pour la restriction de g à U.*

Il doit être clair qu'en général le passé de A relatif à U n'est pas l'intersection entre U et le passé de A dans M !

DÉFINITION 11.9. *Un ensemble A est* futur-convexe *(resp.* passé-convexe*) s'il est égal à son propre futur (resp. passé).*

On pourrait poursuivre bien loin ce genre de considérations, menant à la notion de "point idéal" introduite par Geroch, Krokenheimer et Penrose (voir [**100**], [**120**]), mais ce faisant nous sorterions de notre propos.

11.2.2. Courbes causales topologiques. Nous allons étendre comme promis précédemment la notion de courbe causale :

DÉFINITION 11.10. *L'image d'une application continue $c : [a, b] \to M$ est une courbe causale (topologique) orientée vers le futur si pour tout temps t_0 et tout voisinage ouvert U de $c(t_0)$, il existe un voisinage $I =]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ tel que pour tout t dans I on a :*
- *si $t \leq t_0$: $c(t)$ est dans le passé de $c(t_0)$ relatif à U,*
- *si $t \geq t_0$: $c(t)$ est dans le futur de $c(t_0)$ relatif à U,*

Il n'est pas difficile de montrer qu'une telle courbe causale est toujours Lipschitz (après reparamérisation éventuelle). En effet, il suffit de le montrer dans l'espace de Minkowski, puis de voir que si l'ouvert U est suffisament petit, il se plonge (non isométriquement !) dans Minkowski de sorte que toute courbe causale (topologique) dans U se plonge dans Minkowski en une courbe causale.

DÉFINITION 11.11. *Une courbe causale c est inextensible si toute courbe causale la contenant est égale à c elle-même.*

En adaptant l'argument ci-dessus, on montre sans difficulté :

PROPOSITION 11.12. *Toute courbe causale est contenue dans une courbe causale inextensible.* ∎

REMARQUE 11.13. La proposition serait fausse si on était restée dans la catégorie C^1 par morceaux. Elle s'obtient du fait que toute application Lipschitz sur un ouvert d'un espace métrique s'étend de manière Lipschitz sur l'adhérence. Voir [**33**] pour plus de détails.

11.2.3. Hypersurfaces spatiales.

DÉFINITION 11.14. *Une hypersurface immergée dans une variété lorentzienne est dite de type espace, ou encore spatiale, si les vecteurs dans l'image de la différentielle de l'immersion sont de type espace.*

11.2.3.1. *Seconde forme fondamentale et courbure moyenne.* Soit Σ une hypersurface spatiale plongée dans la variété lorentzienne chronologiquement orientée, et n le champ de vecteur normal à Σ. Notons ∇ la connection de M, et $\overline{\nabla}$ la connection de la restriction de la métrique à Σ. Comme dans le cas riemannien, si X et Y sont deux champs de vecteurs tangents à Σ, la dérivée covariante $\overline{\nabla}_X Y$ est la projection orthogonale de $\nabla_X Y$ sur $T\Sigma$. On peut donc écrire $\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \mathrm{II}(X, Y)n$: le

facteur $\mathrm{II}(X,Y) = -\langle \nabla_X Y \mid n\rangle = \langle \nabla_X n \mid Y\rangle$ est un tenseur symmétrique appelé deuxième forme fondamentale. L'opérateur S_x de T_xM dans lui-même défini par $\langle S_x X \mid Y\rangle = \mathrm{II}(X,Y)$ est appelé *shape operator,* sa trace est la *courbure moyenne en x.*

11.2.3.2. *Voisinages tubulaires.* Notons exp l'application exponentielle de ∇. L'application de $\Sigma\times]-a,a[$ dans M qui à (x,t) associe $\exp_x(tn)$ est bien définie pour a petit[3], c'est même un difféomorphisme sur son image, quitte à diminuer davantage a. De plus, d'après le lemme de Gauss, les courbes $t \mapsto \exp_x(tn)$ sont orthogonales aux hypersurfaces $x \mapsto \exp_x(tn)$. Il existe donc un voisinage ouvert $U \approx \Sigma\times]-a,a[$ de Σ dans lequel la métrique lorentzienne s'écrit sous la forme :

$$g_t - dt^2$$

où g_t est une famille à un paramètre de métriques riemanniennes sur Σ. Le futur élargi de $\Sigma \approx \{t=0\}$ dans U est $\{t \geq 0\}$, son passé élargi est $\{t \leq 0\}$.

11.2.3.3. *Le Principe du Maximum.*

Lemme 11.15. *Soit Σ' une hypersurface spatiale dans U contenue dans le futur élargi $\{t \geq 0\}$ de Σ. On suppose que Σ' contient un point x de Σ : elle est donc tangente à Σ en x. Alors, la forme fondamentale II' de Σ' en x* minore *celle de Σ en x_0, i.e., pour tout X dans $T_x\Sigma \approx T_x\Sigma' \subset T_xM$, on a :*

$$II'(X,X) \leq II(X,X)$$

En particulier, la courbure moyenne de Σ' en x est plus petite que celle de Σ en x.

Remarque 11.16. Ce lemme met en évidence l'importance des conventions de signe ! Pour faciliter la lecture, nous indiquons un cas particulier : dans l'espace de Minkowski, les courbes de niveaux $\{q_{1,n-1} = -t^2\}$ sont de courbure moyenne constante $-1/t$: la convention de signe que nous avons adopté implique donc que ces courbures sont en particulier négatives, et croissent donc de $-\infty$ vers 0 quand t va de 0 vers $+\infty$. En poussant verticalement par exemple $\{q_{1,n-1} = -1/4\}$ jusqu'à ce qu'elle devienne contenue dans le futur $\{q_{1,n-1} \leq -1\}$ et tangente à $\{q_{1,n-1} = -1\}$ en $(1,0,\ldots,0)$, on se convainc que les inégalités dans le lemme 11.15 sont dans le bon sens.

11.2.3.4. *L'équation d'Einstein posée comme problème de Cauchy.* La Relativité Générale énonce qu' une variété lorentzienne représente un espace-temps sans matière (mais avec constante cosmologique Λ) si elle vérifie l'équation d'Einstein :

$$\mathrm{Ric} - \frac{R}{2} = \Lambda g$$

où g est la métrique Lorentzienne, Ric sa courbure de Ricci, et R sa courbure scalaire (la trace de Ric).

Pour son étude, il est classique d'essayer de la résoudre sous la forme d'un problème de Cauchy, au voisinage d'une hypersurface spatiale Σ. Nous avons décrit précédemment comment toute métrique lorentzienne peut s'écrire au voisinage d'une hypersurface spatiale dans un ouvert $U \approx \Sigma\times]-a,a[$, avec la donnée d'une famille à un paramètre de métriques riemanniennes g_t sur Σ. C'est sous une forme

[3]Nous avons surtout en tête le cas où Σ est compacte, nous laissons au lecteur le soin d'adapter cette discussion lorsque ce n'est pas le cas.

similaire que l'équation d'Einstein est traditionnellement étudiée (mais il n'est pas supposé en général que le champ de vecteurs $\partial/\partial t$ soit de norme -1 et orthogonal à $\Sigma \times \{t\}$, on doit introduire d'autres données : la norme $-\sigma^2$ de $\partial/\partial t$, appelée *fonction de retard,* et sa projection sur Σ, appelé le *champ de vecteur décalage*).

Toujours est-il que résoudre l'équation d'Einstein sous sa forme de Cauchy se formule de la manière suivante : *Si la métrique g_0 sur $\Sigma \times \{0\}$ (la première forme fondamentale), ainsi que sa deuxième forme fondamentale II_0 sont spécifiées, existe-t'il une solution de l'équation d'Einstein sur $\Sigma \times]-1,1[$ réalisant ces données - dites de Cauchy ?*

Un premier élément est que toute donnée de Cauchy ne donne pas une solution : il faut qu'elle satisfasse certaines équations, dites *des contraintes* - ce sont les équations de Gauss-Codazzi et Codazzi-Mainardi. Quand les équations des contraintes sont satisfaites, et une fois choisi un système de coordonnées locales sur Σ, la question se formule sous la forme d'une EDP particulièrement âpre à résoudre ; une des raisons de cette difficulté provient de l'infinité de l'espace des dimensions, puisque tout difféomorphisme de Σ envoie solution sur solution. Pour résoudre l'équation, on enlève cette indétermination en imposant une condition supplémentaire : c'est ce que les physiciens appellent *fixer la jauge.*

La première preuve de l'existence locale d'une solution (lisse) pour toute donnée de Cauchy (lisse), lorsque Σ est compacte sans bord, est dûe à Fourés-Bruhat ([**84**]), elle a été obtenue en "fixant la jauge" de la manière suivante : on impose aux coordonnées locales d'être harmoniques pour la métrique-solution (ce qui du reste empêche de supposer $\partial/\partial t$ soit orthogonal aux hypersurfaces $\{t = Cte\}$ et impose l'introduction du champ de vecteurs de décalage).

Une autre manière bien connue de "fixer la jauge" consiste à imposer aux hypersurfaces $\Sigma \times \{t\}$ d'être à courbure moyenne constante. Nous aurons plus loin l'occasion de commenter davantage cette méthode.

11.2.4. Exclusion des paradoxes temporels. Commençons par introduire une notion naturelle, utile pour condenser les définitions à venir :

Définition 11.17. *Un ensemble A est* acausal *s'il est disjoint de son passé et de son futur.*

Ue variété lorentzienne M est *simplement causale* si toute partie de M réduite à un point est acausale. En d'autres termes, M est simplement causale si elle n'admet pas de courbe causale fermée simple. Requérir cette condition pour une variété lorentzienne est une hypothèse minimale si on souhaite exclure des paradoxes temporels. Nous pourrions certes considérer une hypothèse encore plus faible, excluant seulement les courbes fermée simple de type temps ; mais notre propos ici n'est pas de cataloguer toutes les hypothèses imaginables - nous renvoyons plutôt pour celà aux chapitres 3, 4 et 5 de [**33**] assez fournis en termes de définitions, d'exemples et contre-exemples -, mais de présenter les plus pertinentes pour la suite de ce mémoire, notamment :

Définition 11.18. *Un domaine U de M est* causalement convexe *si toute courbe causale reliant deux points de U est contenue dans U.*

Définition 11.19. *Une variété lorentzienne M est* fortement causale *si tout point de M admet un voisinage ouvert convexement causal.*

Nous évoquerons aussi une autre hypothèse de causalité, un peu plus restrictive que l'hypothèse de causalité forte :

DÉFINITION 11.20. *Une variété lorentzienne* (M, g) *est* stablement causale *s'il existe une autre métrique lorentzienne* g' *sur* M *telle que :*
– g' *est simplement causale,*
– *les vecteurs de type causal pour* g *sont tous de type temps pour* g'.

11.2.5. Hypersurfaces spatiales topologiques. De même que la notion de courbe causale s'étend dans le cadre Lipschitz, on peut généraliser le concept d'hypersurface spatiale :

DÉFINITION 11.21. *Une hypersurface topologique* Σ *dans* (M, g) *est dite* spatiale, *ou* de type espace, *si pour tout point* x *de* Σ *il existe un voisinage* U *dans* M *tel que* $U \cap S$ *est acausale - en d'autres termes, il n'existe pas dans* U *de courbe causale reliant deux points distincts de* Σ.

Toujours en approximant localement par une métrique plate, on vérifie aisément que toute hypersurface spatiale est localement le graphe d'une application Lipschitz.

REMARQUE 11.22. On peut modifier cette définition : une hypersurface topologique est un fermé admettant un voisinage dans lequel il est acausal et *"sans bord"* (edgeless) (voir chapitre 6 de [**127**]). Mais il n'y a pas lieu de développer ici davantage ce point.

11.2.6. Fonctions temps. Il est remarquable que les variétés lorentziennes stablement causales soient caractérisées par l'existence d'une fonction temps :

DÉFINITION 11.23. *Une fonction temps sur une variété lorentzienne* M *est une application continue* $t : M \to \mathbb{R}$ *dont la restriction à toute courbe causale est strictement croissante.*

Remarquons que les fibres d'une telle application sont toujours des hypersurfaces (topologiques) de type espace.

THÉORÈME 11.24 ([**33**]). *Une variété lorentzienne est stablement causale si et seulement si elle admet une fonction temps.*

Ajoutons que si la métrique est lisse, la fonction temps peut alors être choisie lisse ([**43**]) : son gradiant est alors un champ de vecteurs de type temps.

REMARQUE 11.25. Un corollaire immédiat de ce théorème est qu'une variété lorentzienne compacte ne peut être stablement causale. En rétrécissant les cônes lumières, on en déduit qu'une variété lorentzienne compacte n'est jamais simplement causale : elle admet toujours une courbe fermée simple de type temps. Mais il ne faut pas en retenir l'impression, éventuellement nourrie de l'analogie avec le cas riemannien, qu'une variété lorentzienne compacte admet nécessairement une géodésique de type temps ou lumière périodique : pour un contre-exemple, voir [**97**]. Pour une discussion et des résultats récents autour de cette question, voir [**116**].

En général, la fonction temps n'est pas unique, loin s'en faut ! Mais l'unicité peut s'obtenir si on impose une condition supplémentaire à la fonction - mais ceci a un coût : en imposant une telle condition, on restreint la classe des variétés stablement causales à laquelle elle s'applique. Nous allons considérer ici deux exemples de telles conditions, qu'on trouve fréquemment dans la litérature.

11.2.6.1. *Temps cosmologique.* Sur une variété lorentzienne donnée, on considère la fonction τ_{co} qui à un point x associe la borne supérieure des courbes causales qui admettent x comme extrémité future ; on l'appelle *temps cosmologique* de x. Le lieu Ω où cette fonction prend des valeurs finies peut-être vide (penser à l'espace de Minkowski !), mais, en général, il est passé-convexe.

Ce temps est étudié avec détail dans [**4**]. Dans cet article, il est montré que même lorsque Ω est M tout entier, la fonction τ_{co} peut être discontinue (exemple 4.1 de [**4**]), ou encore, que M peut ne pas être simplement causale (exemple 4.2 de *id ibitem).* En imposant deux conditions à cette fonction, on obtient la notion intéressante d'*espace-temps régulier :* ce sont les variétés lorentziennes pour lesquelles τ_{co} est *régulière,* i.e., prend partout une valeur finie, et converge vers 0 le long de toute courbe causale inextensible orientée vers le passé. On a alors le Théorème suivant (voir aussi la remarque 11.29) :

THÉORÈME 11.26 ([**4**]). *Si la fonction temps cosmologique est régulière, elle est semi-convexe. Elle est en particulier Lipschitz et deux fois dérivable presque partout. De plus, pour tout point x de M, il existe une géodésique $c :]0, \tau_{co}(x)]$ de type temps inextensible orientée vers le futur de sorte que :*

– *$c(\tau_{co}(x)) = x$,*

– *pour tout t, la valeur de τ_{co} en $c(t)$ est t.* ∎

11.2.6.2. *Temps CMC.* La trace de la seconde forme fondamentale (c'est-à-dire, la trace du "shape operator") est appelé courbure moyenne de Σ. Si cette courbure moyenne ne dépend pas de x, Σ est dit à courbure moyenne constante (abbréviation CMC).

DÉFINITION 11.27. *Une fonction temps $\tau_0 : M \to \mathbb{R}$ est CMC si elle est de classe C^2, et si pour tout t dans $\mathbb{R}$, la fibre $\tau_0^{-1}(t)$ est de courbure moyenne constante t.*

Supposons de plus que les fibres $\tau_0^{-1}(t)$ soient toutes compactes. On obtient alors :

–*Analyticité :* Le temps CMC est très régulier, autant que la métrique lorentzienne, et est même analytique lorsque la métrique l'est (voir [**29**]).

– *Unicité :* Un temps CMC, si il existe, est unique : en effet, si τ_1 est une autre fonction temps CMC, sa restriction à chaque $\tau_0^{-1}(t)$ admet un minimum a et un maximum b. Or, d'après le lemme 11.15, comme $\tau_0^{-1}(t)$ est contenu dans le futur de $\tau_1^{-1}(a)$, on obtient l'inégalité $t \leq a$. De manière similaire, on obtient $b \leq t$. Comme $a \leq b$, ceci n'est possible que si $a = t = b$. Donc, τ_1 est constant sur $\tau_0^{-1}(t)$, et sa valeur est de plus t puisque par définition, c'est la courbure moyenne de $\tau_1^{-1}(t) = \tau_0^{-1}(t)$.

–*Espaces AdS :* Nous verrons plus loin une famille importante de variétés lorentziennes, qui est l'objet primordial de mon étude : les variétés AdS globalement hyperboliques Cauchy-compactes. Nous ne voulons pas les définir de manière prématurée ; si nous les évoquons ici, c'est pour souligner le fait important suivant : alors qu'elles ne sont pas régulières (au sens au leur fonction temps cosmologique n'est pas régulière au sens de [**4**]), nous verrons que ces variétés lorentziennes admettent un temps CMC.

–*L'équation d'Einstein :* J'ai auparavant signalé qu'une manière bien connue de fixer la jauge pour résoudre l'équation d'Einstein vue comme un problème

d'évolution de métriques riemanniennes sur des hypersurfaces spatiales, consiste à imposer aux hypersurfaces d'être à courbure moyenne contante. Il est remarquable que l'équation d'Einstein se simplifie considérablement lorsque cette hypothèse est imposée. Cette intimité entre équation d'Einstein et feuilletages CMC conforte à mes yeux la pertinence de la notion de temps CMC.

11.3. Variétés lorentziennes globalement hyperboliques

Nous en venons à l'ultime hypothèse de causalité :

DÉFINITION 11.28. *Une variété lorentzienne est globalement hyperbolique si elle admet une fonction temps* de Cauchy, *i.e., une fonction temps* $t : M \to \mathbb{R}$ *dont la restriction à toute courbe causale inextensible est surjective.*

Ceci implique clairement que t est une fibration localement triviale sur $\mathbb{R}$, et donc, qu'une variété globalement hyperbolique est homéomorphe au produit $\Sigma \times \mathbb{R}$, la fonction temps correspondant à la projection sur le deuxième facteur (en particulier, les fibres de t sont connexes - nous avons bien sûr toujours supposé que M est connexe !).

REMARQUE 11.29. Un espace-temps régulier, i.e., pour lequel le temps cosmologique est régulier est globalement hyperbolique (cf. proposition 2.2 de [**4**]). Mais même dans ce cas, τ_{co} n'est pas toujours un temps de Cauchy !

De cette définition, il apparait clairement que :

PROPOSITION 11.30. *Le revêtement universel d'une variété globalement hyperbolique est lui aussi globalement hyperbolique.*

Preuve Soit M une variété lorentzienne globalement hyperbolique, et $t : M \to \mathbb{R}$ un temps de Cauchy. Elle se relève au revêtement universel en une application $\tilde{t} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$. Toute courbe causale inextensible $\tilde{c}$ dans $\widetilde{M}$ se projette dans M en une courbe causale c. Toute extension de c se relèverait en une extension de $\tilde{c}$: la courbe causale c est donc inextensible. La surjectivité de la restriction de $\tilde{c}$ découle immédiatement de celle de la restriction de t à c. ∎

L'inconvénient majeur de cette définition est qu'elle semble difficile à vérifier sur une variété lorentzienne donnée. Nous allons voir d'autres définitions équivalentes plus aisées à vérifier :

11.3.1. Développement de Cauchy.

DÉFINITION 11.31. *Soit A une partie de (M, g). Le développement de Cauchy futur (resp. passé) de A, noté $D^+(A)$ (resp. $D^-(A)$), est l'ensemble des points x de M dans le futur (resp. passé) de A tels que toute courbe causale inextensible issue de x et orientée vers le passé (resp. futur) rencontre A.*

L'union de A, de $D^+(A)$ et de $D^-(A)$, est appelé développement de Cauchy de A, *il est noté $D(A)$.*

DÉFINITION 11.32. *Une hypersurface de Cauchy de M est une sous-variété plongée connexe de codimension* 1 *de type espace, acausale dans M tout entier, et dont le développement de Cauchy $D(\Sigma)$ est M tout entier.*

Il est clair que toute fibre d'une fonction temps de Cauchy est une hypersurface de Cauchy. L'inverse est moins évident mais vrai (voir [**127**] par exemple pour une preuve) :

THÉORÈME 11.33. *Une variété lorentzienne est globalement hyperbolique si et seulement si elle admet une hypersurface de Cauchy.* ∎

11.3.2. Compacité des passé-futur communs.

THÉORÈME 11.34 (Geroch [**99**]). *Une variété lorentzienne M est globalement hyperbolique si et seulement si elle est fortement causale, et vérifie la propriété suivante : pour tout point x de M, et tout point y du futur $F(x)$ de x, l'union de $\{x, y\}$ et de l'intersection $P(y) \cap F(x)$ est compacte.* ∎

REMARQUE 11.35. Ce dernier théorème peut être considéré comme étant une généralisation du Théorème classique de Hopf-Rinow. En effet : soit $(\Sigma, \bar{g})$ une variété Riemannienne. On considère la variété $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ munie de la métrique lorentzienne $g - dt^2$. La compacité dans M des $(P(y) \cap F(x)) \cup \{x, y\}$ équivaut à la compacité des boules ("fermées") de $(\Sigma, \bar{g})$. Le théorème de Geroch assure alors que la projection sur le deuxième facteur restreinte à toute géodésique lumière de M est surjective, or, les géodésiques lumières sont les courbes $t \mapsto (c(t), t)$ où c est une géodésique de Σ. Ainsi, si les boules fermées de Σ sont compactes, $(\Sigma, \bar{g})$ est géodésiquement complète.

Je remercie J.C. Sikorav pour m'avoir communiqué cette observation. Voir aussi le Théorème 3.68 de [**33**].

11.3.3. Différentiabilité. Dans tous les énoncés précédents, les objets considérés (fonction temps, hypersurface spatiale) sont pensés topologiques. Mais il s'avère qu'ils peuvent tous être lissés :

THÉORÈME 11.36. *Toute variété lorentzienne globalement hyperbolique C^r admet une fonction temps de Cauchy C^r.*

Nous renvoyons à [**41, 42**] pour une preuve, et au survey [**43**] pour un compte-rendu des erreurs qui émaillent la littérature sur ce point.

11.3.4. Sur les solutions de l'équation d'Einstein. Les solutions de l'équation d'Einstein obtenues en résolvant le problème d'évolution associé à partir d'une donnée de Cauchy (Σ, II) sont toutes globalement hyperboliques, Σ s'y réalisant comme une hypersurface de Cauchy. Ceci du reste explique la terminologie "hypersurface de Cauchy".

11.3.5. Variétés lorentziennes globalement hyperboliques maximales. Sur l'ensemble des (classes à isométrie près de) variétés lorentziennes globalement hyperboliques, il existe une relation d'ordre $\prec$ définie par : $(M, g) \prec (M', g')$ s'il existe un *Cauchy-plongement* de (M, g) dans (M, g'), i.e., une isométrie $f : M \to N$ telle que l'image par f de toute hypersurface de Cauchy de M est une hypersurface de Cauchy de N. Les éléments maximaux pour cet ordre sont appelés ... maximaux.

Cet ordre $\prec$ est manifestement inductif. Une simple application du lemme de Zorn permet de montrer que toute variété globalement hyperbolique admet un Cauchy-plongement dans une variété globalement hyperbolique maximale - mais celle-ci n'est pas en général unique à isométrie près !

Cependant, lorsqu'on se restreint à certaines classes de variétés lorentziennes, on peut obtenir cette unicité de l'extension maximale. Le procédé typique consiste à se restreindre à une classe de variétés lorentziennes globalement hyperboliques pour lesquelles la métrique sur toute la variété est déterminée par sa restriction au

voisinage d'une de ses hypersurfaces de Cauchy. Par exemple, on peut se restreindre aux variétés lorentziennes analytiques. Ou encore, aux variétés lorentziennes satisfaisant l'équation d'Einstein (dans le vide, avec constante cosmologique, ou même, avec une forme particulière du tenseur d'impulsion-énergie spécifiée) : de manière plus précise, on peut se restreindre à une classe de variétés lorentziennes solutions d'une équation portant sur la métrique et ses tenseurs dérivés qui soit *Cauchy-rigide,* i.e., stable par isométries, et telle que le problème de Cauchy associé au voisinage d'une hypersurface spatiale admet la propriété d'existence et unicité à isométrie près des solutions (pour plus de précision, voir [**69**]).

THÉORÈME 11.37 (Choquet-Bruhat, Geroch [**69**]). *Soit* (P) *une classe de variété lorentzienne Cauchy-rigide. Toute variété globalement hyperbolique dans la classe* (P) *admet un Cauchy-plongement dans une variété globalement hyperbolique maximale dans la classe (P). De plus, cette extension est maximale, au sens où les variétés globalement hyperboliques maximales dans la classe* (P)*, dans lesquelles* (M, g) *admet un Cauchy-plongement, sont toutes isométriques entre elles.*

En d'autre termes, plus concis mais imprécis, toute variété globalement hyperbolique admet une unique extension maximale.

REMARQUE 11.38. La formulation concise ci-dessus peut amener des confusions. Qu'on en juge : l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^{1,n-1}, q_{1,n-1})$ est globalement hyperbolique maximal. Mais il en est de même pour le cône futur $\{q_0 < 0, x_1 > 0\}$, qui admet comme fonction temps de Cauchy $\log(-q_{1,n-1})$. Or, ce cône futur se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^{1,n-1}$?! Le point est que ce plongement n'est pas un Cauchy-plongement.

REMARQUE 11.39. Une classe importante de variétés lorentzienne Cauchy-rigide, qui nous intéresse ici au premier chef, est celle des variétés à courbure sectionnelle constante.

11.3.6. Variétés globalement hyperboliques Cauchy-compactes. Imposer à une variété lorentzienne d'être compacte l'oblige à admettre des courbes causales fermées simples, difficile convivence qui interdit toute hypothèse de causalité (voir remarque 11.25). Pourtant, il est bien confortable pour un mathématicien de disposer, sous une forme ou une autre, d'une hypothèse quelconque de compacité. La bonne notion qui permet de maintenir l'équilibre entre les notions de causalité et de compacité est :

DÉFINITION 11.40. *Une variété lorentzienne est* Cauchy-compacte *si elle admet une hypersurface de Cauchy compacte sans bord.*

Les variétés lorentziennes Cauchy-compactes jouissent de nombreuses propriétés agréables. Notamment :

PROPOSITION 11.41. *Dans une variété lorentzienne Cauchy-compacte, toute hypersurface spatiale compacte (connexe) plongée est une hypersurface de Cauchy.*

Preuve Fixons une trivialisation $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, la projection sur le deuxième facteur étant un temps de Cauchy. Appelons π la projection sur le premier facteur Σ. Soit S une hypersurface plongée compacte de type espace. On remarque que la restriction f de π à S est un homéomorphisme local ; par compacité de S (et connexité de Σ), f est surjective ; la compacité de Σ montre que f est un revêtement d'indice fini.

Par ailleurs, t ordonne les fibres de f, et il est clair que pour tout chemin c dans Σ, le relèvement le long de c induit un isomorphisme entre les fibres au-dessus des extrémités de c qui préserve cet ordre. On en déduit que le revêtement est trivial.

Ainsi, S est le graphe d'une application $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$. Le complémentaire de S dans M admet deux composantes connexes : $\{t > \phi(x)\}$ et $\{t < \phi(x)\}$. Or, par compacité de Σ, ϕ est bornée : il existe deux temps a_-, a_+ tels que, pour tout x, $a_- < \phi(x) < a_+$. Toute courbe causale inextensible intersecte $t^{-1}(a_\pm)$ en des points $x_\pm$; comme elle relie $x_- \in \{t < \phi(x)\}$ à $x_+ \in \{t > \phi(x)\}$, elle doit intersecter le graphe S de ϕ. ∎

Un examen plus minutieux de la preuve ci-dessus montre qu'on a au passage démontré :

Corollaire 11.42. *Dans une variété lorentzienne Cauchy-compacte, les hypersurfaces de Cauchy sont homéomorphes les unes aux autres.* ∎

Corollaire 11.43. *Une variété lorentzienne globalement hyperbolique est Cauchy-compacte si et seulement elle admet une hypersurface spatiale immergée compacte.* ∎

Remarque 11.44. Nous considérerons aussi les variétés lorentziennes *Cauchy-complètes.* Ce sont celles qui admettent des hypersurfaces de Cauchy pour lesquelles la métrique riemannienne induite par la métrique lorentzienne ambiante est complète (n'oublions pas que dans le contexte riemannien, toutes les notions de complétudes se confondent). Bien sûr, toute variété Cauchy-compacte est Cauchy-complète. Mais les analogues des propositions et corollaires ci-dessus sont faux : il n'est pas vrai en général que dans toute variété lorentzienne Cauchy-complète, toutes les hypersurfaces de Cauchy sont complètes ! J'ignore s'il existe des variétés lorentziennes Cauchy-complètes pour lesquelles tout temps de Cauchy admet une fibre non complète...

11.4. Variétés lorentziennes à courbure constante

Mes contributions en géométrie lorentzienne sont toutes dans le contexte à courbure (sectionnelle) constante, qui du point de vue de la Relativité Générale est une violente restriction. - surtout d'un point de vue d'un EDPiste qui perd alors presque tout intéret (quoique...). Cependant, les trous noirs BTZ ([**12, 13**]) introduits par les physiciens sont justement à courbure constante ; et, d'une manière plus général, du fait de l'annulation du tenseur de Weyl en cette dimension, toute métrique lorentzienne solution de l'équation d'Einstein dans le vide en dimension $2+1$ est justement à courbure sectionnelle constante.

Comme en géométrie riemannienne, les variétés lorentziennes à courbure constante k sont localement isométriques entre elles. En d'autres termes, ce sont des (G_k^n, X_k^n)-variétés, où G_k^n est le groupe des isométries[4] de la variété lorentzienne à courbure constante k "universelle" (simplement connexe) de dimension $(n-1,1)$ X_k^n.

[4]Rappelons que pour nous toutes les variétés lorentziennes sont orientées et chronologiquement orientées, et que nous ne considérons que les isométries préservant ces deux orientations.

Introduisons les conventions utiles suivantes :

– On note $q_{p,q}$ la forme quadratique $-x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2$ sur $\mathbb{R}^{p+q}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^{p+q}$ équippé de cette forme quadratique est noté $\mathbb{R}^{p,q}$. Dans tout ce qui suit, on suppose $p, q \geq 1$.

– On note $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$ le lieu des points de $\mathbb{R}^{p,q}$ où $q_{p,q}$ vaut ± 1. On le pense muni de la métrique pseudo-riemannienne obtenue par restriction de $q_{p,q}$ aux hyperplans tangents. Cette métrique est de signature $(p-1, q)$ pour $\mathcal{H}^{-}_{p,q}$, et de signature $(p, q-1)$ pour $\mathcal{H}^{+}_{p,q}$. Par transitivité de l'action de $O(p, q)$ sur les 2-plans tangents à $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$, ces variétés pseudo-riemanniennes sont toutes à courbure sectionnelle constante.

– On fixe l'orientation canonique de son choix sur $\mathbb{R}^{p,q}$, ceci induit (avec le champ de vecteur radial qui est partout normal à $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$) une orientation sur $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$.

– Les sous-espaces totalement géodésiques de dimension k de $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$ sont les intersections entre $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$ et certains sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{p,q}$ de dimension $k+1$. Les isométries de $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$ sont les restrictions des isométries de $\mathbb{R}^{p,q}$: le groupe des isométries est donc $O(p, q)$.

– Les couples (p, q) amenant à des métriques lorentziennes sont $(1, q)$ et $(2, q)$. Notons que les variétés lorentziennes associées $\mathcal{H}^{+}_{1,q}$ et $\mathcal{H}^{-}_{2,q}$ sont connexes (mais pas toujours simplement connexes).

– **Modèles de Klein.** On note $\mathbf{H}^{\pm}_{p,q}$ la projection radiale de $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$ dans l'espace projectif $P(\mathbb{R}^{p,q})$. Pour $\mathcal{H}^{+}_{1,q}$ et $\mathcal{H}^{-}_{2,q}$, cette projection n'est pas injective : c'est un revêtement double. On munit $\mathbf{H}^{\pm}_{p,q}$ de la métrique quotient ; les sous-espaces totalement géodésiques sont les intersections entre $\mathbf{H}^{\pm}_{p,q}$ et les sous-espaces projectifs.

Le fait que la projection sur le modèle de Klein ne soit pas injective présente parfois des désagréments. Pour les ignorer, on peut préférer la projection radiale $\overline{\mathbf{H}}_{p,q}$ de $\mathcal{H}^{\pm}_{p,q}$ sur la sphère unité $\mathbf{S}^n$ d'une métrique euclidienne auxiliaire (disons, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$). On l'appelle le modèle de Klein dédoublé. On doit penser la sphère $\mathbf{S}^n$ comme étant une variété projective réelle, revêtement double de $\mathbb{R}P^n$.

– **Dualité.** Le $q_{p,q}$-orthogonal d'un point de $\mathcal{H}^{+}_{p,q}$ induit par intersection une hypersurface de $\mathcal{H}^{-}_{p,q}$ totalement géodésique.

11.4.1. Le cas plat : l'espace de Minkowski. X_0^n est l'espace de Mikowski $\mathbb{R}^{1,n-1}$, le groupe G_0^n est le produit semi-direct du groupe de translations $\mathbb{R}^n$ par la composante neutre $\mathrm{SO}_0(1, n-1)$ de $\mathrm{O}(1, n-1)$ dans laquelle elle est d'indice 4. La connection de Levi-Civita est la connection plate usuelle ; les géodésiques sont en particulier les droites affines.

On choisira usuellement l'orientation chronologique définie par $\partial/\partial x_1$ (rappelons que la forme quadratique choisie est $-x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$). La coordonnée x_1 définit alors un temps de Cauchy : l'espace de Minkowski est donc globalement hyperbolique - et même Cauchy-complet.

11.4.2. Courbure positive : l'espace de Sitter. *L'espace de Sitter de dimension* $(n-1, 1)$ est $\mathrm{dS}_n = \mathcal{H}^{+}_{1,n}$, qui est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Lorsque $n \geq 3$, dS_n est simplement connexe et est donc le modèle universel X_1^n. Le groupe G_1^n est donc $\mathrm{SO}_0(1, n)$. Nous ne commenterons pas ici outre mesure le cas $n = 2$; nous laissons au lecteur le soin d'adapter à ce cas les commentaires à suivre.

La restriction de la coordonnée x_1 à dS_n induit un temps de Cauchy (et incidemment, une orientation chronologique), ce qui montre que dS_n est globalement hyperbolique. L'antipodie $x \mapsto -x$ renverse cette orientation chronologique : on en déduit que le groupe G_1^n est la composante neutre $\mathrm{SO}_0(1, n)$ de $\mathrm{O}(1, n)$. Le modèle

de Klein $\mathbf{dS}_n$ est le complémentaire dans $\mathbb{R}P^n$ d'une boule fermée : cette boule est l'adhérence du modèle de Klein de l'espace hyperbolique. Le grand inconvénient du modèle de Klein est qu'il ne soit pas chronologiquement orientable, nous lui préférons donc le modèle de Klein dédoublé $\overline{\mathbf{dS}}_n$, qui peut être décrit comme étant le complémentaire dans $\mathbf{S}^n$ de l'adhérence de deux copies opposées $\mathbf{B}_n^{\pm}$ du modèle de Klein de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$. Le bord dans $\mathbf{S}^n$ de $\overline{\mathbf{dS}}_n$ est l'union de deux sphères ∂dS_n^+, ∂dS_n^-, la première, dite future, "atteinte" par les courbes causales orientées vers le futur, la seconde, dite "passée", atteinte par les courbes causales orientées vers le passé.

Les géodésiques de $\overline{\mathbf{dS}}_n$ sont les intersections avec les droites projectives de $\mathbf{S}^n$. Une géodésique est de type espace si la droite projective correspondante est entièrement contenue dans $\overline{\mathbf{dS}}_n$: la géodésique et la droite projective sont alors confondues. Une géodésique est de type temps si la droite projective associée rencontre chacune des deux copies dans $\mathbf{S}^n$ du modèle de Klein de l'espace hyperbolique. Dans ce cas, l'intersection de cette droite projective avec $\mathbf{B}^+$ définit une géodésique de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$: ceci établit une bijection canonique entre les géodésiques de $\mathbb{H}^n$ et les géodésiques de type temps de dS_n.

Enfin, une géodésique de $\overline{\mathbf{dS}}_n$ est de type lumière si la droite projective correspondante est tangente à ∂dS_n^+ et ∂dS_n^-. On en déduit une description agréable du futur d'un point x de $\overline{\mathbf{dS}}_n$: plaçons nous dans une carte affine de $\mathbf{S}^n$ contenant à la fois $\mathbf{B}_n^+$ et x ; dessinons le cône C issu de x tangent à ∂dS_n^+. La composante connexe, dans la carte affine, de l'intérieur de ce cône privé de $\mathbf{B}_n^+$, et dont l'adhérence contient x, est le futur de x. On peut aussi choisir une carte affine contenant $\mathbf{B}^+$, mais pas x : x définit alors une direction de droites dans cette carte affine ; l'union des droites dans cette direction tangentes à ∂dS_n^+ est le bord d'un cylindre qui contient $\mathbf{B}^+$. Le complémentaire dans ce cylindre de l'adhérence de $\mathbf{B}^+$ admet deux composantes connexes ; l'une est le futur de x, l'autre le futur de $-x$. Cette deuxième composante connexe est aussi l'image par l'antipodie du passé de x.

Le lieu de tangence entre C et ∂dS_n^+ est une sous-sphère, qui borde deux hémisphères dans ∂dS_n^+. L'une seulement peut être atteinte par les géodésiques de type temps issues de x : on la note $C^+(x)$. Le lieu de tangence entre C et ∂dS_n^+ est aussi le bord d'un hyperplan totalement géodésique de $\mathbf{B}_n^+ \approx \mathbb{H}^n = \mathcal{H}_{1,n}^-$: ceci est un avatar de la dualité évoquée plus tôt.

Remarque 11.45. (**Dualité avec l'espace hyperbolique**) Décrivons plus avant cette dualité entre l'espace de Sitter et l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n = \mathcal{H}_{1,n}^-$. Elle signifie que $\overline{\mathbf{dS}}_n$ peut être vu comme étant l'espace des copies totalement géodésiques orientées de $\mathbb{H}^{n-1}$ dans $\mathbb{H}^n$. De manière similaire, $\mathbb{H}^n$ peut être pensé comme étant l'espace des sphères rondes orientées plongées de manière totalement géodésique dans dS_n.

Considérons une hypersurface spatiale Σ de classe C^1 plongée dans $\overline{\mathbf{dS}}_n$. Nous la voyons comme l'image d'une application $u : \Sigma \to \mathcal{H}_{1,n}^+$. Son application de Gauss (l'application qui à x associe la normale dans $T_{u(x)}\mathrm{dS}_n$ de $T_{u(x)}\Sigma$ orientée vers le futur) peut être vue comme une application $u^* : \Sigma \to \mathcal{H}_{1,n}^- \approx \mathbb{H}^n$. L'hypersurface Σ est dite strictement convexe si sa deuxième forme fondamentale est définie positive. Alternativement, la stricte convexité signifie que $\langle \partial_x u^* \mid \partial_x u \rangle$ est strictement positive pour tout champ de vecteurs ∂_x sur Σ. On remarque alors que si Σ est strictement convexe, l'application u^* est un homéomorphime local, et que son image

est elle-même strictement convexe dans $\mathbb{H}^n$. On obtient ainsi une dualité entre les immersions strictement convexes d'hypersurfaces spatiales dans $\mathbb{H}^n$ et dS_n.

11.4.3. Courbure négative : l'espace anti-de Sitter. Nous appelons *espace anti-de Sitter* AdS_n la variété lorentzienne $\mathcal{H}^-_{2,n-1}$. Elle est difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$; on peut même légitimement énoncer qu'elle est difféomorphe à $\mathbb{H}^{n-1}$, puisque chaque fibre de la restriction de la fonction coordonnée x_1 à $\mathcal{H}^-_{2,n-1}$ est une copie isométrique et totalement géodésique de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$.

Le champ de vecteurs $x_2\partial/\partial x_1 - x_1\partial/\partial x_2$ induit un champ de Killing sur $\mathcal{H}^-_{2,n-1}$ partout de type temps, il définit une orientation chronologique sur AdS_n : c'est celle que nous choisissons. Le groupe des isométries de AdS_n qui préserve l'orientation est $SO(2, n-1)$. Comprendre quel est le sous-groupe $\bar{G}$ des isométries préservant l'orientation ainsi que l'orientation chronologique est un peu plus subtil : en effet, l'antipodie $x \mapsto -x$ préserve l'orientation chronologique, il n'appartient donc pas à $\bar{G}$ que s'il renverse l'orientation usuelle, i.e., que lorsque n est pair. Quoi qu'il en soit, il s'avère que $\bar{G}$ est toujours la composante neutre $SO_0(2, n-1)$ de $SO(2, n-1)$ (ce dernier admettant toujours deux composantes connexes).

Le groupe des isométries dans le modèle de Klein $\mathbf{AdS}_n = \mathbf{H}^-_{2,n-1}$ est $\mathrm{PO}_0(2, n-1)$, il est isomorphe à $SO_0(2, n-1)$ si n est pair, sinon, c'est un quotient d'indice 2 de $SO_0(2, n-1)$. N'oublions pas que $\mathbf{AdS}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}P^n$: pour comprendre sa géométrie, il est utile de considérer son intersection avec certains domaines affines $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}P^n$. Nous privilégions les ouverts affines $\mathbb{R}P^n \setminus P$, où $P \approx \mathbb{R}P^{n-1}$ est un sous-espace projectif obtenu par passage au quotient du $q_{2,n-1}$-orthogonal d'un vecteur de $\mathbb{R}^{2,n-1}$ de $q_{2,n-1}$-norme négative (par exemple, $\{x_1 = 0\}$) ; nous appelons *adaptée* une telle carte affine ; l'intersection entre une carte affine adaptée et $\mathbf{AdS}_n$ est appelée *domaine affine de* $\mathbf{AdS}_n$. Remarquons qu'une carte affine $U = \mathbb{R}P^n \setminus P$ est adaptée si et seulement si $P \cap \mathbf{AdS}_n$ est une copie isométrique et totalement géodésique du (modèle de Klein de) l'espace hyperbolique. Dans une telle carte affine, le domaine affine $U \cap \mathbf{AdS}_n$ est l'intérieur d'un hyperboloïde à une nappe. Par exemple, si U est le domaine $\{x_1 \neq 0\}$, $U \cap \mathbf{AdS}_n$ est le lieu défini par l'inégalité :

$$x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1 + x_2^2$$

En résumé, pour se représenter $\mathbf{AdS}_n$, nous recommondons d'imaginer l'intérieur d'un hyperboloïde à une nappe, auquel on adjoint une copie du modèle de Klein de l'espace hyperbolique de dimension juste inférieure.

Les géodésiques de $\mathbf{AdS}_n$ sont les intersections avec des droites projectives de $\mathbb{R}P^n$: si la droite projective est entièrement contenue dans $\mathbf{AdS}_n$, elle est de type temps ; si elle est tangente au bord $\partial\mathbf{AdS}_n$ dans $\mathbb{R}P^n$, elle est de type lumière ; sinon, elle rencontre $\partial\mathbf{AdS}_n$ en deux points distincts : la géodésique associée est alors de type espace.

Il ne faut pas perdre de vue que $\mathbf{AdS}_n$ n'est pas simplement connexe ; l'espace universel X^n_{-1} est donc le revêtement universel $\widetilde{AdS}_n$, qui est difféomorphe à $\mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}$. On note $\Delta \approx \mathbb{Z}$ le groupe de Galois de ce revêtement, et δ un générateur de Δ : c'est une isométrie de la métrique lorentzienne relevée. On convient de le choisir de sorte que pour tout élément $\tilde{x}$ de $\widetilde{AdS}_n$, $\delta(\tilde{x})$ est dans le futur de $\tilde{x}$. Le groupe G^n_{-1} admet une extension centrale (non scindée) :

$$0 \to \Delta \to G^n_{-1} \to \mathrm{PO}_0(2, n-1) \to 0$$

Remarquons que $\widetilde{AdS}_n$ est aussi le revêtement universel de $\overline{\mathbf{AdS}}_n \approx \mathrm{AdS}_n$. Lorsque n est pair, il existe un relêvement de l'antipodie dont le carré est δ : nous l'appelons σ. Lorsque n est impair, δ lui-même est un relevé de l'antipodie $x \mapsto -x$; c'est lui que nous appelons σ. Les géodésiques de $\widetilde{AdS}_n$ sont bien sûr les relevés des géodésiques de $\mathbf{AdS}_n$. Remarquons :

Pour tout point $\tilde{x}$ de $\widetilde{AdS}_n$, toutes les géodésiques de type temps orientées vers le futur et issues de $\tilde{x}$ contiennent $\sigma(\tilde{x})$. De manière plus précise, l'intersection commune à toutes ces géodésiques est l'union des $\sigma^i(\tilde{x})$ $(i \geq 0)$, et l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ sur les i coincïde avec l'ordre induit par le temps propre le long des géodésiques de type temps.

On peut donc qualifier $\sigma(\tilde{x})$ de *premier point conjugué de $\tilde{x}$ dans le futur.*

Notons aussi que les domaines affines de $\mathbf{AdS}_n$ définis ci-dessus sont simplement connexes ; ils se relèvent donc en des domaines de $\mathbf{AdS}_n$ que nous appelons encore *domaines affines* de $\widetilde{AdS}_n$. Pour obtenir une vision géométrique de $\widetilde{AdS}_n$, il suffit de se le représenter comme un empilement de tels domaines affines, chacun isométrique à un domaine affine de $\mathbf{AdS}_n$, et chacun image par σ du précédent, en remarquant aussi qu'entre deux telles copies successives doit être intercalée une copie du modèle de Klein de l'espace hyperbolique.

11.4.3.1. *Causalité dans l'espace anti-de Sitter.* L'espace AdS_n lui-même se comporte bien mal du point de vue causal : toutes ses géodésiques de type temps sont périodiques, et le futur (ou le passé) de tout point est AdS_n tout entier.

Cet inconvénient disparait lorsqu'on passe au revêtement universel $\widetilde{AdS}_n$, qui est stablement causal - il admet une fonction temps, qui est le relêment de l'application de $\mathcal{H}^-_{2,n-1}$ dans $\mathbb{R}P^1$ qui envoie $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sur $[x_1 : x_2]$. Mais il faut observer que $\widetilde{AdS}_n$ n'est pas globalement hyperbolique ! Le moyen le plus rapide d'en prendre conscience est le suivant : l'intersection entre le futur d'un point $\tilde{x}$ et le passé de $\sigma(\tilde{x})$ contient tous les rayons géodésiques lumières orientés vers le futur issus de $\tilde{x}$; or, ces rayons géodésiques sortent de tout compact de $\widetilde{AdS}_n$ puisqu'ils s'accumulent chacun sur un point de $\partial\widetilde{AdS}_n$. Au vu du Théorème de Geroch (Théorème 11.34), ceci montre bien que $\widetilde{AdS}_n$ n'est pas globalement hyperbolique.

Observons encore si U est un domaine affine de $\widetilde{AdS}_n$, deux points de U sont causalement reliés dans $\widetilde{AdS}_n$ si et seulement si ils le sont dans U. Ceci permet de se représenter aisément la causalité dans un tel domaine affine : deux points dans U sont chronologiquement reliés si la droite projective de $\mathbb{R}P^n$ contenant les projections dans $\mathbf{AdS}_n$ de ces deux points est entièrement contenue dans $\mathbf{AdS}_n$; lorsque cette droite est tangente à $\partial\mathbf{AdS}_n$, les points sont causalement reliés, ils sont même sur une même géodésique lumière.

Du reste, on peut se faire une image du futur d'un point $\tilde{x}$ de $\widetilde{AdS}_n$: prenons un domaine affine U pour lequel $\tilde{x}$ est de coordonnées nulles, le domaine lui-même étant l'intérieur de l'hyperboloïde $x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1 + x_2^2$. Le futur de $\tilde{x}$ dans U est alors l'ensemble $\{x_3^2 + \ldots x_n^2 \leq x_2^2, x_2 > 0\}$, c'est l'intérieur d'un cône ; son futur dans $\widetilde{AdS}_n$ est l'union de cet ouvert avec l'union des adhérences des $\sigma^i(U)$ $(i > 0)$. Le passé de $\tilde{x}$ admet une description analogue.

Remarque 11.46. Il est coutumier d'identifier l'espace de Sitter dS_2 et l'espace anti-de Sitter AdS_2 - après tout, on passe de l'un à l'autre simplement en multipliant la métrique lorentzienne par -1, ce qui met en évidence que tout espace localement dS_2 est automatiquement localement AdS_2. Mais, ce faisant, on

bouleverse les aspects liés à la causalité, qui, le lecteur l'aura compris, sont primordiaux à mes yeux. Cette identification est à proscrire dès que la causalité est en jeu ; il est frappant que dS_2 - ainsi que son revêtement universel - e st globalement hyperbolique, contrairement au revêtement universel de AdS_2.

11.4.3.2. *Auto-dualité.* Le $q_{2,n-1}$-orthogonal d'un point x de $\mathcal{H}^-_{2,n-1}$ intersecte $\mathcal{H}^-_{2,n-1}$ selon un sous-espace de type espace totalement géodésique, isométrique à l'espace hyperbolique. On peut donc considérer que AdS_n, $\mathbf{AdS}_n$ et $\widetilde{AdS}_n$ sont tous identifiables à l'espace de leurs sous-espaces totalement géodésiques. Si on adapte dans ce contexte la discussion de la remarque 11.45, on obtient que toute hypersurface spatiale de, disons, $\widetilde{AdS}_n$, qui est strictement convexe, est duale à une hypersurface spatiale de $\widetilde{AdS}_n$ strictement *concave.*

On peut aussi observer que le dual Σ d'un point x de $\mathbf{AdS}_n$ est l'unique hypersurface totalement géodésique qui est orthogonale à toutes le géodésiques de type temps issues de x. On peut aussi finaliser cette dualité dans AdS_n de sorte que pour toute hypersurface (complète) totalement géodésique Σ de $\widetilde{AdS}_n$, le développement de Cauchy de Σ est l'intersection entre le futur du dual $\tilde{x}$ de Σ et du passé de $\sigma(\tilde{x})$.

11.4.4. Un lemme remarquable. Nous souhaitons mettre en avant un lemme particulièrement élégant, très simple mais crucial dans l'étude des variétés globalement hyperboliques à courbure constante. On peut en trouver une version dans le remarquable preprint [**148**] de G. Mess, mais l'argument sous-jacent semble en fait être bien connu par la communauté des relativistes, depuis une époque antérieure à ce preprint. J'ai essayé de dégager l'énoncé le plus général, sans nuire à sa sobriété.

Ce lemme s'énonce dans toute variété lorentzienne munie d'un champ de vecteurs Killing X partout de type temps (en particulier, sans singularités). Le flot Φ^t qu'il engendre est transversalement riemannien. Supposons que toutes les orbites de Φ^t sont toutes errantes (en particulier, non périodiques) ; comme Φ^t est transversalement riemannien, on en déduit aisément que l'espace des orbites Q^Φ de Φ^t est une variété, canoniquement munie d'une métrique riemannienne g_0 : si $\pi : M \to Q^\Phi$ est la projection canonique, (le carré de) la norme $g_0(\bar{v})$ d'un vecteur tangent $\bar{v}$ à Q^Φ en θ est définie comme étant la norme dans M d'un vecteur v orthogonal à l'orbite θ tel que $d\pi(v) = \bar{v}$: comme X est Killing, cette norme ne dépend pas du choix de v. On remarque aussi que π est une fibration localement triviale $\mathbb{R}$-principale.

Lemme 11.47. *Soit $f : \Sigma \to M$ une immersion isométrique d'une variété riemannienne complète de dimension $n-1$ (M étant de dimension n). Alors, la composition $\pi \circ f : \Sigma \to Q^\Phi$ est un revêtement.*

Preuve Soit v un vecteur tangent à M en x. La norme $\mid v \mid^2$ est égal à $\mid aX(x) \mid^2 + g_0(d_x\pi(v))$, où $aX(x)$ est la projection orthogonale de v sur la direction engendrée par $X(x)$. Comme X est partout de norme négative, la différentielle de $\pi \circ f$ augmente la norme. On en déduit aisément, grâce à la complétude de Σ, que tout chemin de Q^Φ se relève par $\pi \circ f$. ∎

Corollaire 11.48. *Si Q^Φ est simplement connexe, f est un plongement, dont l'image est le graphe d'une section de π.* ∎

Un cas particulièrement adapté est celui où X est *statique,* i.e., lorsqu'il existe une hypersurface plongée complète Σ_0 partout orthogonale à X. D'après ce qui

précède, Σ_0 s'identifie à Q^Φ, cette identification, par orthogonalité entre X et Σ_0, envoyant la métrique induite sur g_0. Alors, en poussant par Φ^t, on obtient une identification entre M et le produit $\Sigma_0 \times \mathbb{R}$, X devenant le champ de vecteurs $\partial/\partial t$, et la métrique lorentzienne en un point (x,t) s'écrivant sous la forme :

$$g_0(x) - a(x)dt^2$$

La fonction $a : \Sigma_0 \to]0,+\infty[$ est l'opposé de la norme de X. Appelons g_1 la métrique $\frac{1}{a}g_0$ sur $\Sigma_0 \approx Q^\Phi$. Nous pouvons énoncer le corollaire 11.48 sous la forme :

Corollaire 11.49. *Lorsque X est statique, les hypersurfaces spatiales immergées complètes sont les graphes d'application 1-contractantes $s : (\Sigma_0, g_1) \to \mathbb{R}$.* ∎

Dans le cas de Minkowski, on obtient ainsi que les hypersurfaces spatiales immergées complètes sont les graphes d'application 1-contractantes du plan euclidien $(x_2, \ldots, x_n)$ dans la droite de coordonnées x_1.

Dans le cas anti-de Sitter, on dispose du champ de Killing $X = x_2\partial/\partial x_1 - x_1\partial/\partial x_2$ (c'est celui que nous avons choisi pour définir l'orientation chronologique) ; l'espace des orbites (Q^Φ, g_0) est dans ce cas isométrique à l'espace hyperbolique. On peut alors appliquer le corollaire 11.48.

Dans le cas de Sitter, il n'existe pas de champs de Killing partout de type temps, ce qui interdit l'emploi du lemme 11.47. De fait, il existe des immersions isométriques complètes non-injectives d'hypersurfaces spatiales dans dS_n.

11.5. Variétés lorentziennes conformément plates

Pour toute cette section, nous indiquons comme réfèrence la thèse de C. Frances [**85**], ou encore l'article [**86**].

11.5.0.1. *Variétés lorentziennes conformes.* Une classe conforme lorentzienne est une classe d'équivalence sur l'ensemble des métriques lorentziennes pour la relation qui identifie deux métriques g et g' si l'une est un multiple scalaire de l'autre : $g' = e^f g$ pour $f : M \to \mathbb{R}$. Ceci signifie aussi que les vecteurs de type espace (temps ou lumière) de g sont aussi ceux de g'. Ou encore, que g et g' ont les mêmes cônes isotropes (et la même orientation chronologique). Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, nous abrégerons l'écriture en omettant l'adjectif "lorentzienne" après "classe conforme".

Avant toute chose, remarquons que les notions de courbes causales, hypersurfaces spatiales, futur, passé, orientation chronologique, etc... sont à proprement parler des propriétés de la classe conforme, et non seulement de la métrique lorentzienne. Nous exploiterons plus loin cette simple remarque pour affiner davantage la description des hypersurfaces spatiales complètes de AdS_n ébauchée au § précédent (lemme 11.48).

Signalons aussi un fait remarquable (voir par exemple le Théorème 1.3 de [**85**]) : *Deux métriques conformément équivalentes ont les mêmes géodésiques lumières (non paramétrées).* Ceci est bien sûr complètement faux pour les géodésiques de type temps ou espace.

Comme nous l'avons maintes fois évoqué dans la première partie de ce mémoire, une métrique lorentzienne[5] en dimension 2 équivaut à la donnée de deux feuilletages

[5]Insistons sur le fait que nous supposons toujours les variétés lorentziennes orientées et chronologiquement orientées

orientés (les feuilletages isotropes, i.e., tangents aux directions lumières) et d'une forme volume (la forme volume de la métrique elle-même). Ainsi, par exemple, tout flot d'Anosov préservant le volume est transversalement lorentzien. La donnée de la classe conforme revient à oublier la forme volume : une classe conforme lorentzienne sur une surface équivaut à la donnée de deux feuilletages orientés transverses l'un à l'autre.

11.5.0.2. *Variétés conformément plates : l'Univers d'Einstein.* Une classe conforme sur M est dite *plate* (ou une métrique est dite *conformément plate*) si tout point admet un voisinage U dans lequel la classe conforme restreinte peut être représentée par une métrique lorentzienne plate (c'est-à-dire, isométrique à un ouvert de Minkowski).

Au vu de ce qui précède, en dimension $1+1$, toute classe conforme est plate. Mais, à partir de la dimension $(1, n-1)$ avec $n \geq 3$, ceci n'est plus vrai. Mais nous disposons alors d'un remarquable théorème, extension au cas lorentzien du célèbre théorème de Liouville.

Pour énoncer ce théorème, nous devons tout d'abord introduire l'espace conformément plat universel : *l'Univers d'Einstein.*

Considérons à nouveau la forme quadratique $q_{2,n}$, mais intéressons-nous cette fois-ci à son lieu d'annulation : nous le notons $\mathcal{C}$. La restriction de $q_{2,n}$ à $\mathcal{C}$ est dégenérée : elle ne définit pas une métrique pseudo-riemannienne sur $\mathcal{C}$; son radical est non-trivial, de dimension 1. Cependant, pour tout $x \neq 0$ de $\mathcal{C}$, $q_{2,n}$ induit une métrique lorentzienne g_x sur E_x, le quotient de l'espace tangent à $\mathcal{C}$ en x, c'est à-dire $x^\perp$, par le radical. Notons $\mathbf{Ein}_n$ la projection radiale de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}P^{n+1}$: c'est un fermé de dimension n, que nous affirmons admettre une classe conforme canonique. En effet, la différentielle $d\pi$ de la projection radiale identifie l'espace vectoriel E_x avec l'espace tangent $T_{\pi(x)}\mathbf{Ein}_n$. Si $y = \lambda x$ définit le même point $\pi(x) = \pi(y)$ de $\mathbf{Ein}_n$, la projection $d_y\pi$ envoie la forme quadratique g_y sur la forme quadratique image $(\pi)_*(g_x)$ multipliée par le facteur λ^2. Le choix de x au-dessus de $\pi(x)$ change donc cette forme quadratique mais à un facteur scalaire près : la classe conforme est donc bien définie. L'Univers d'Einstein est $\mathbf{Ein}_n$, pensé muni de cette classe conforme. On peut aussi considérer son revêtement double $\overline{\mathbf{Ein}}_n$, obtenu en projettant radialement $\mathcal{C}$ sur la sphère $\mathbf{S}^n$.

On remarque que choisir sur un ouvert U de $\overline{\mathbf{Ein}}_n$ une métrique dans la classe conforme restreinte à U équivaut à choisir une section $s : U \to \mathcal{C}$ de π restreint à $\pi^{-1}(U)$. Ainsi, si on prend comme section s_0 celle qui prend ses valeurs dans la sphère euclidienne $\{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 2\}$, on obtient que $\overline{\mathbf{Ein}}_n$ est conformément équivalent au produit $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, muni de la métrique $ds_0^2 - d\theta^2$, où ds_0^2 est la métrique ronde usuelle de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, et $d\theta^2$ la métrique euclidienne usuelle de $\mathbb{S}^1$. Le revêtement universel $\widetilde{Ein}_n$ est donc $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ équippé de la classe conforme de la métrique $ds_0^2 - dt^2$ (l'automorphisme du revêtement $\widetilde{Ein}_n \to \overline{Ein}_n$ étant la translation par 2π sur le facteur t). Ceci est du reste la raison de la terminologie "Univers d'Einstein", car le premier modèle cosmologique considéré par Einstein est précisémment ce produit, pour $n = 3$.

Pour vérifier que $\mathbf{Ein}_n$ (et donc aussi $\overline{\mathbf{Ein}}_n$, $\widetilde{Ein}_n$) est conformément plat au voisinage de tout point $\bar{x}_0 = \pi(x_0)$, on prend n'importe quel élément e_0 de $\mathcal{C}$ qui ne soit pas orthogonal à x_0. On considère alors la section $s : \mathbf{Ein}_n \setminus \pi(e_0^\perp) \to \mathcal{C}$ qui prend ses valeurs dans l'intersection entre $\mathcal{C}$ et l'hyperplan $\{y / \langle y \mid e_0 \rangle = 1\}$. On voit alors que cette section définit une métrique au voisinage de $\bar{x}_0$ localement

isométrique à celle de Minkowski ; de manière plus précise, pour tout élément e_0 de $\mathcal{C}$, l'ouvert $\mathbf{Ein}_n \setminus \pi(e_0^\perp)$ est conformément équivalent à $\mathbb{R}^{1,n-1}$ tout entier.

11.5.0.3. *Le Théorème de Liouville.* L'Univers d'Einstein est donc conformément plat. Bien sûr, le groupe des transformations conformes de Ein_n qui préserve l'orientation et l'orientation chronologique contient $G = \mathrm{SO}_0(2,n)$. Le théorème de Liouville promis auparavant s'énonce de la manière suivante (pour une preuve, nous renvoyons à [**85**]) :

THÉORÈME 11.50 (**Liouville lorentzien**). *Soit $n \geq 3$. Toute application conforme $f : U \to V$ entre deux ouverts de Ein_n, qui préserve les orientations, se prolonge de manière unique en un élément de G ; en particulier, en une transformation conforme de Ein_n tout entier dans lui-même.*

Soit M une variété lorentzienne conforme plate de dimension $n \geq 3$. Tout point de M admet un voisinage qui se plonge conformément dans Ein_n. Le théorème de Liouville montre que ce plongement est unique modulo composition à droite d'un élément de G. Il implique aussi que l'action de G sur Ein_n est analytique. Il s'en suit que *la donnée d'une métrique lorentzienne conforme plate sur M équivaut à la donnée d'une (G, Ein_n)-structure sur M.*

L'étude des (G, Ein_n)-variétés en est encore en ses balbutiements, il n'y a pour l'instant guère que la thèse de C. Frances ([**85**]) (et les publications qui en ont découlées, notamment [**86**]) à laquelle on puisse se réferer. Un des résultats principaux de [**85**] est la "classification" des (G, Ein_n)-structures sur $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ - cette classification serait fastidieuse à énoncer, déjà, elle n'est pas complètement formulée dans [**85**], non par impuissance de l'auteur, mais bien à cause du foisonnement des possibilités. Voilà qui tranche de manière frappante avec le monde riemannien : il n'y a guère qu'une seule structure conforme riemannienne sur la sphère $\mathbb{S}^n$!

11.5.0.4. *Platitude conforme des espaces de Sitter et anti-de Sitter.* Les espaces lorentziens à courbure constante sont conformément plats, et doivent donc pouvoir se représenter[6] dans $\widetilde{Ein}_n$. Nous l'avons déjà vu pour l'espace de Minkowski, qui se plonge dans $\mathbf{Ein}_n$.

Pour montrer que l'espace de Sitter se plonge dans $\mathbf{Ein}_n$, il suffit de reprendre la méthode utilisée pour l'espace de Minkowski, mais en utilisant cette fois-ci un vecteur e_0 de norme -1 (par exemple $e_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$). On aboutit alors à un plongement conforme de l'espace de Sitter dS_n dans $\mathbf{Ein}_n$; l'image de ce plongement étant le complémentaire d'une sphère conformément plate. En corollaire, on obtient aussi une identification conforme de dS_n avec le produit $\mathbb{S}^{n-1} \times]-\pi, +\pi[$, muni de la métrique $ds_0^2 - dt^2$, particulièrement utile pour décrire les hypersurfaces spatiales : *toute hypersurface spatiale de dS_n est localement le graphe d'une application* 1-*contractante de la sphère ronde $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $]-\pi, +\pi[$*. Ce n'est pas un hasard si le diamètre de la sphère est 2π.

Enfin, si l'on prend comme vecteur e_0 un vecteur de norme $+1$, on obtient au bout du compte un plongement conforme de $\widetilde{AdS}_n$ dans $\widetilde{Ein}_n$, dont l'image est conformément isométrique au produit $\mathbb{S}^{n-1}_+ \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{S}^{n-1}_+$ est une hémisphère de $\mathbb{S}^{n-1}$. Là encore, on obtient un corollaire sur les hypersurfaces spatiales dans $\widetilde{AdS}_n$, qui, combiné avec le corollaire 11.48, implique : *toute hypersurface spatiale complète*

[6]Nous ne disons pas "plonger" puisqu'il se pourrait *a priori* qu'ils ne puissent pas se plonger. Mais nous allons voir que cette précaution oratoire est superflue.

de $\widetilde{AdS}_n$ est localement le graphe d'une application 1*-contractante de l'hémisphère ronde $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$.*

En particulier, comme le diamètre d'une hémisphère est 2π, on en déduit qu'une hypersurface est toujours contenue dans un domaine affine de $\widetilde{AdS}_n$.

De plus, le bord de $\mathbf{AdS}_n$ dans $\mathbf{Ein}_n$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{Ein}_{n-1}$ (en effet : ce bord est la projection radiale de l'intersection entre $\mathcal{C}$ et $e_0^\perp$, or, la restriction de $q_{2,n}$ à $e_0^\perp$, lorsque e_0 est de norme $+1$, est de signature $(2, n-1)$). Comme toute application 1-contractante de l'hémisphère dans $\mathbb{R}$ s'étend de manière unique en une application 1-Lipschitz de l'hémisphère fermée dans $\mathbb{R}$, on obtient que *toute hypersurface spatiale complète plongée dans $\widetilde{AdS}_n$ se prolonge par une hypersurface achronale de $\partial AdS_n \approx \widetilde{Ein}_{n-1}$.*

11.5.0.5. *Compléments sur AdS_3.* Le cas $n = 3$ est particulièrement remarquable : sur l'espace vectoriel des matrices 2×2, la fonction $-\det$ (opposé du déterminant) est une forme quadratique de signature $(2, 2)$. L'espace anti-de Sitter de dimension 3 $\mathcal{H}^-_{2,2}$ s'identifie donc au groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, muni de sa forme de Killing. Le groupe des isométries contient manifestement $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, quotienté par le sous-groupe engendré par $(-id, -id)$, où le premier facteur agit sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ par translation à gauche, et le deuxième par translation à droite. Ayant la bonne dimension, et étant connexe, on voit ainsi (ou, peut-être, on interprète ainsi) l'identification $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \approx PO_0(2, 2)$, ces deux groupes sétant l'un comme l'autre le groupe des isométries de $\mathbf{AdS}_3$ préservant toutes les orientations.

Cette identification en établit une autre : celle de $\partial\mathbf{AdS}_3 = \mathbf{Ein}_2$ avec $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$, l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1$ étant tout simplement celle provenant de chaque facteur sur chaque facteur. On justifie ainsi la formulation de la remarque 2.22.

Pour plus de détails, voir [**148, 29**]. Remarquons que la classification des champs de Killing de $\overline{\mathbf{AdS}}_3$ dans [**13**] peut être radicalement simplifiée : il est inutile de considérer les invariants de Casimir pour reconnaitre les paires de classes de conjugaison d'isométries du disque de Poincaré...

11.5.0.6. *Variétés conformes globalement hyperboliques maximales.* Nous l'avons déjà remarqué : les diverses notions de causalité ont pour objet non pas les métriques lorentziennes, mais véritablement leurs classes conformes. Ceci vaut pour les notions d'hypersurfaces de Cauchy et d'hyperbolicité globale. Il est alors légitime de s'interroger sur la validité de l'analogue du Théorème de Choquet-Bruhat-Geroch (Théorème 11.37) dans le contexte des variétés conformément plates. Le Théorème suivant, dont nous réservons une démonstration à d'autres circonstances, répond positivement à cette question :

THÉORÈME 11.51. *Toute variété conformément plate est globalement hyperbolique admet un Cauchy-plongement dans une variété conformément plate globalement hyperbolique maximale. Cette variété globalement hyperbolique maximale est unique à transformation conforme près.* ∎

Remarquons que l'Univers d'Einstein universel $\widetilde{Ein}_n$ est globalement hyperbolique maximal. Il est du reste facile de montrer que, pour $n \geq 3$, il s'agit de la seule variété de dimension n conformément plate Cauchy compacte maximale admettant une hypersurface de Cauchy simplement connexe. Or, l'espace de Sitter, qui, en tant que variété lorentzienne à courbure constante, est Cauchy-compact maximal, admet un Cauchy-plongement non surjectif dans l'Univers d'Einstein ; et, de manière plus

générale, on peut raisonnablement penser que tout ouvert globalement hyperbolique de $\widetilde{Ein}_n$ admettant une hypersurface de Cauchy difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ (il y en a beaucoup !) admet dans sa classe conforme une métrique lorentzienne globalement hyperbolique maximale.

Ainsi, la classification des variétés lorentziennes conformes Cauchy-compactes maximales semble beaucoup plus abordable que celle des variétés lorentziennes Cauchy-compactes maximales elles-même. Néanmoins, j'ignore encore la réponse à la question suivante -mais que je suspecte fortement être positive - ce doute tempérant la portée de la remarque précédente :

Question : *Soit* (M, g) *une variété lorentzienne Cauchy-compacte maximale à courbure constante négative ou nulle. La variété conforme* $(M, [g])$ *est-elle maximale en tant que variété Cauchy-compacte conformément plate ?*

CHAPITRE 12

Variété globalement hyperbolique à courbure constante

Je reproduis dans ce chapitre l'introduction de l'article [**26**], puis fournit des compléments et commentaires dans § 12.2. Les renvois à d'autres sections dans cette introduction ne sont pas des renvois aux chapitres du présent mémoire, mais à des parties de l'article [**26**].

12.1. "Introduction"

Results concerning flat lorentzian manifolds is the mathematical litterature are mostly devoted to the case of *closed* manifolds (i.e. compact without boundary). And as a byproduct of this activity, the structure of closed flat manifolds has been elucidated in a quite satisfying way : see for example [**28**] for a quick survey on this problem.

But the non-compact case remains essentially open and non considered, with the notable exception of the works related to Margulis spacetimes emerging from a question by Milnor concerning the (non)solvability of discrete groups acting on Minkowski space (see also [**28**]).

On the other hand, there is an important and natural notion in lorentzian geometry : the *global hyperbolicity*. This notion is central in physics, in the area of classical General Relativity. And it is incompatible with compactness : a globally hyperbolic lorentzian manifold is never compact. Because of this physical background, besides the notational convenience it provides, we call (flat) lorentzian manifolds (flat) spacetimes.

A globally hyperbolic (abbrevation GH) spacetime is a spacetime M admitting a Cauchy hypersurface, i.e. a hypersurface S which :

- is spacelike (i.e., the lorentzian metric restricts on S as a riemannian metric),
- disconnects M,
- intersects every unextendible nonspacelike curve (i.e., for which every tangent vector has nonpositive norm) (see §2.4 for a more complete definition).

(M, S) is a *maximal* GH spacetime (abbrevation MGH) if the only GH spacetime containing M and for which S is still a Cauchy hypersurface, is M itself. A fundamental theorem by Choquet-Bruhat-Geroch ([**69**]) states than every GH pair (M, S) can be extended in a unique way to a maximal GH spacetime N in which S is still a Cauchy hypersurface.

It is quite surprising that the classification of flat MGH spacetimes, which is the central topic here, has not been previously systematically undertaken. Such a classification has its physical interest, and even more, a mathematical one. It appears as a general extension of Bieberbach's theory to the lorentzian context.

Actually, such a classification is not possible without some additional requirement : we will only consider here Cauchy-complete GH spacetimes, i.e., GH spacetimes admitting a Cauchy hypersurface on which the lorentzian ambient metric restricts as a *complete* riemannian metric. Among Cauchy-complete GH spacetimes, we distinguish the important subfamily of Cauchy-compact ones, for which the Cauchy hypersurface is closed. Cauchy-complete GH spacetimes which cannot be isometrically embedded in any bigger Cauchy-complete GH spacetimes, with no additional restriction on Cauchy surfaces, is *absolutely maximal* (abbrevation : AMGH spacetimes).

The most obvious examples of Cauchy-complete MGH spacetimes are simply quotients of Minkowski itself by discrete groups of spacelike translations. We call these examples *translation spacetimes.*

Next, there is another natural family that we call *Misner spacetimes* (see §3.2) : there are quotients of the future in Minkowski of a spacelike $(n-2)$-subspace P by an abelian discrete group whose elements all admit as linear part a boost (or loxodromic element, maybe trivial) acting trivially in P, and translation part in P.

There is also the family of *unipotent spacetimes,* described in §3.3 : let's briefly mention here that each of these spacetimes is the quotient of domain Ω in Minkowski delimited by one or two parallel degenerate hyperplanes by an abelian discrete group of unipotent isometries of Minkowski.

Finally, and maybe the most interesting one, we have the family of what we call here *Cauchy-hyperbolic spacetimes.* In this family of examples, the linear part $L : \Gamma \to SO_0(1, n-1)$ of the holonomy morphism will be injective, with image a discrete subgroup of $SO(1, n-1)$ without torsion. Therefore, we consider $\Gamma \approx L(\Gamma)$ directly as a discrete subgroup of $SO(1, n-1)$. We moreover assume Γ nonelementary, meaning that the orbits of its action on $\overline{\mathbb{H}}^{n-1}$ are all infinite.

We first consider the case where Γ is a cocompact lattice of $SO_0(1, n-1)$. Let Ω^+ be the connected component of $\{Q < 0\}$ geodesically complete in the future, and Ω^- the other connected component : Ω^- is geodesically complete in the past. The action of Γ on $\Omega^\pm$ is free and properly discontinuous : we denote by $M^\pm(\Gamma)$ the quotient manifold. Every level set $\{Q = -t^2\} \cap \Omega^\pm$ is Γ-invariant ; it induces in $M^\pm(\Gamma)$ a hypersurface with induced metric of constant sectional curvature $-\frac{1}{t^2}$. Recall that $\{Q = -1\}$ is the usual representant of the hyperbolic space, therefore, the flat lorentzian metric on $M^\pm(\Gamma)$ admits the warped product form $-dt^2 + t^2 g_0$, where g_0 is the hyperbolic metric on $\Gamma\backslash\mathbb{H}^{n-1}$. We call these examples *radiant standart spacetimes.* Observe that $M^+(\Gamma)$ (resp. $M^-(\Gamma)$) is geodesically complete in the future (resp. in the past), and that there is a time reversing isometry between them.

In [**148**] or [**2**], it is shown that any representation of a Γ in $\mathrm{Isom}(\mathbf{M}^n)$ admitting as linear part an embedding onto a cocompact lattice of $SO(1, n-1)$ preserves some future complete - and also a past complete - convex domain of Minkowski, in such a manner that the quotients of these domains by $\rho(\Gamma)$ are Cauchy-compact AMGH spacetimes . These spacetimes are called by G. Mess and L. Andersson *standart spacetimes.*

When the linear part Γ is still a nonelementary discrete subgroup, but not cocompact in $SO(1, n-1)$, the question is slightly more delicate. In §4, we extend the family of standart spacetimes to a more general one : the family of Cauchy-hyperbolic spacetimes (definition 4.18). Briefly speaking, they are still quotients

of semicomplete convex domains of Minkowski by discrete groups of isometries admitting as linear part a discrete subgroup. But, even in the radiant case, i.e. when $\rho(\Gamma)$ preserves a point in Minkowski, let's say, the origin, the associated Cauchy-hyperbolic spacetime is not always the quotient $\rho(\Gamma)\backslash\Omega^{\pm}$ as above, but most oftenly some bigger spacetime.

As a last comment on these examples, in §4.4.2 we prove that when Γ is a *convex cocompact Kleinian group*, then any discrete subgroup of $\mathrm{Isom}(\mathbf{M}^n)$ admitting Γ as linear part preserves a semicomplete domain of Minkowski, i.e. is the holonomy group of some Cauchy-hyperbolic spacetime. This claim is not as trivial as it may appear at first glance : in proposition 4.22, we exhibit a (nonuniform) lattice Γ in $SO_0(1,2))$ such that, a representation $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbf{M}^n)$ for which $L \circ \rho$ is the identity morphism can preserve a semicomplete convex domain if and only if it is radiant, i.e. preserves a point in Minkowski. This fuchsian group Γ is nothing but the group associated to the 3-punctured conformal sphere.

Convex cocompact Kleinian groups form an important family including cocompact Kleinian groups or Schottky groups, which are essentially the only examples appearing in the physical litterature, except geometrically finite Kleinian groups (convex cocompact Kleinian groups can be defined as geometrically finite Kleinian groups without parabolic elements). The correct way to extend this result to geometrically finite Kleinian groups is an interesting question, even in the $2+1$-dimensional case.

Before stating the classification's Theorems, let's indicate a natural way to produce GH spacetimes from other ones : given a flat GH spacetime M, a flat euclidian manifold N, and a representation $r : \pi_1(M) \to Isom(N)$, the total space B of the suspension bundle over M with fiber N and monodromy r is naturally equipped with a flat lorentzian metric which is still globally hyperbolic. The resulting spacetime B from this construction, which is defined with more details in §5.2, is called the twisted product of M by N with monodromy r. The case where N is an euclidean linear space and the representation r admits a global fixed point in N is particularly pleasant : we say then that B is a linear twisted product over M.

We now express the main theorem of this paper, essentially stating that the examples above provide the complete list of flat Cauchy-complete MGH spacetimes. In the following statement, a *tame embedding* is an isometric embedding inducing an isomorphism between fundamental groups.

Théorème 12.1. *Up to finite coverings and linear twisted products, every Cauchy-complete globally hyperbolic flat spacetime can be tamely embedded in an absolutely maximal globally hyperbolic spacetime which is a translation spacetime, a Misner spacetime, a unipotent spacetime, or the twisted product of a Cauchy-hyperbolic flat GH spacetime by an euclidean torus.*

The Cauchy-compact case deserves its own statement :

Théorème 12.2. *Up to finite coverings, every maximal Cauchy-compact globally hyperbolic flat spacetime is isometric to a translation spacetime, a Misner spacetime, or the twisted product of a standart spacetime (Cauchy-compact Cauchy-hyperbolic GH spacetime) by an euclidean torus.*

The proofs of these theorems are written here in a quite intricate way, since it involves particular subcases to consider separately. Hence, we collect along the text

all the elements of the proof, and then indicate in §11 the way to reconstruct from these intermediate results the complete proofs of the theorems.

Theorem 12.1 actually is not a full classification theorem : indeed, in a given MGH spacetime we can embed many different MGH spacetimes - consider for example the Minkowski space itself! But, such a complete classification of Cauchy-complete GH spacetimes is not only unrealistic, it is furthermore useless when we adopt the point of view that the object of study here is the holonomy group Γ. In other words, our essential procedure is to associate to suitable discrete subgroups of $\mathrm{Isom}(\mathbf{M}^n)$ some invariant domains of Minkowski (regular convex domains) on which the dynamical behaviour of the group preserves some causality properties.

As a corollary of theorem 12.2, we obtain that closed Cauchy hypersurfaces of globally hyperbolic flat spacetimes are homeomorphic to finite quotients of products of tori with hyperbolic manifolds. This generalizes [**172**] in any dimension, without the superfluous 3-dimensional topological arguments used in [**172**].

There are other works related to the present work : in [**173**], K. Scannell classified Cauchy-compact maximal globally hyperbolic spacetimes with constant sectionnal curvature $+1$: the topological type of the Cauchy hypersurface S being fixed, there is a $1-1$ correspondance between MGH spacetimes and riemannian flat conformal structures on S. Maximal globally hyperbolic Cauchy-compact spacetimes with constant curvature -1 of dimension $2+1$ are classified in [**148**]. We should mention that results in [**172**], [**148**] are not stated in the terminology of GH spacetimes, but our presentation follows immediately from their works.

In [**2**], L. Andersson classified flat Cauchy-compact MGH spacetimes, but with the initial hypothesis that Cauchy hypersurfaces have hyperbolic type. He proves also that these spacetimes all admit foliations by constant mean curvature hypersurfaces (abbreviation, CMC foliation), which is unique in a given spacetime. Thanks to theorem 12.2, we can extend this result to the elementary case. It is done in §12.

The present paper includes also a generalization to any dimension of the characterization of "spacelike regions" for isometries of Minkowski made in [**60**] ("spacelike regions" of [**60**] are called here achronal domains).

12.2. Commentaires

Comme il est indiqué dans cette introduction, l'article [**26**] contient donc une classification complète des variétés lorentziennes plates Cauchy-compactes maximales. J'estime, à la lumière de la remarque 11.35, et au vu des ingrédients communs dans la preuve (dans l'esprit de [**57**]), que cette classification est, dans une certaine mesure, une continuation naturelle du Théorème de Bieberbach bien connu, selon lequel toute variété euclidienne fermée est finiment revêtue par un tore plat.

Cet article contient aussi une partie construction d'exemples qui revêt son propre intérêt. Y apparait de manière capitale l'espace des hyperplans affines dégénérés de l'espace de Minkowski, que nous appelons *bord de Penrose* (car il s'agit de la partie régulière du bord de Penrose considéré dans plusieurs travaux en physique ; nous ne souhaitons pas nous étendre sur ce point). Le bord de Penrose en notre sens est difféomorphe au produit $\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{R}$ de la sphère conforme avec une droite dégénérée (en aucun cas il ne faut assimiler le bord de Penrose avec $\widetilde{Ein}_{n-1}$!).

De manière succinte, indiquons que si Γ est un groupe discret d'isométries de l'espace de Minkowski, qui de plus est *non-élémentaire* (au sens où sa partie linéaire est un sous-groupe de $\mathrm{SO}_0(1,n-1)$ qui ne fixe pas un ensemble fini de

$\mathbb{H}^{n-1} \cup \partial\mathbb{H}^{n-1}$), alors montrer l'existence d'une variété plate Cauchy-compacte admettant comme groupe d'holonomie Γ équivaut à montrer que l'action de Γ sur le bord de Penrose préserve un compact. Lorsqu'un tel compact invariant existe, il contient un unique fermé Γ-invariant minimal $\mathcal{M}$ qui est une sphère topologique, graphe d'une application de $\mathbb{S}^{n-2}$ dans $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont des hyperplans dégénérés qui s'interprètent comme étant les hyperplans supports de deux domaines convexes ouverts $\Omega^{\pm}$ de Minkowski : les variétés lorentziennes plates Cauchy-compactes maximales d'holonomie Γ sont les quotients $\Gamma\backslash\Omega^{\pm}$: il y en a deux, l'une géodésiquement complète dans le futur, l'autre dans le passé.

Il s'avère que les représentations $\Gamma \to G = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{1,n-1})$ satisfaisant cette hypothèse sont (G, Y)-Anosov, où Y est l'espace des paires de points du bord de Penrose qui ne sont pas sur une même droite dégénérée. J'ai pris conscience de ce fait postérieurement à la rédaction de [**26**], mais il me semble utile de le rapporter ici, puisqu'il s'agit d'une illustration parmi d'autres des liens unissant les diverses parties de ce mémoire. Allié à la stabilité structurelle, il permet de donner une nouvelle preuve (ou plutôt, une nouvelle formulation de celle de Mess) de l'obtention de variétés Cauchy-compactes par déformations de représentations de réseaux cocompacts de $\mathrm{SO}_0(1, n-1)$.

Du reste, l'analogue de cette remarque dans le contexte anti-de Sitter reste valable selon toute vraisemblance. C'est le moment d'indiquer que la classification des variétés Cauchy-compactes localement anti-de Sitter a été effectuée *en dimension* 3 par G. Mess dans le preprint pionnier [**148**] (on peut aussi conseiller la lecture de [**29**]) ; mais l'extension à toute dimension de cette classification reste une question autant ouverte que captivante.

La classification des variétés Cauchy-compactes localement de Sitter a obtenue une réponse des plus satisfaisante dans la la thèse de K. Scannell ([**173**]) : si Σ est une variété fermée de dimension $n-1$, il y a une correspondance bijective entre les métriques lorentziennes localement de Sitter Cauchy-compactes maximales sur $\Sigma \times \mathbb{R}$ qui sont géodésiquement complètes dans le futur, et les $(\mathrm{SO}_0(1, n-2), \mathbb{S}^{n-1})$-structures sur Σ. Ces variétés sont toutes régulières, au sens où leur fonction temps cosmologique est régulière, *sauf celles qui sont elliptiques ou paraboliques,* i.e., les quotients finis de de Sitter, ainsi que celles dont la structure conforme correspondante sur Σ est quotient conforme de $\mathbb{R}^{n-1}$ euclidien.

Ajoutons un commentaire sur les *espaces unipotents* évoqués dans l'"introduction" : la première occurence que j'en ai détecté dans la littérature, en dimension $3+1$, est [**93**], sous un aspect légèrement différent, puisque dans cet article D. Fried s'intéresse surtout au quotient de Minkowski tout entier par le groupe abélien Γ d'isométries unipotentes ; dans [**26**], bien qu'ignorant encore ces exemples de Fried, je montre qu'ils ne sont pas globalement hyperboliques, mais contiennent (une infinité) des ouverts globalement hyperboliques (mais non Cauchy-compacts !). Une description plus détaillée des propriétés causales de ces espaces de Fried reste à faire.

Indiquons aussi la thèse récente de F. Bonsante étudiant, entre autre, la fonction temps cosmologique des variétés plates Cauchy-compactes : elles sont régulières, sauf celles qui sont quotients de Minkowski tout entier (voir [**45, 46**]).

Enfin, il est fait allusion dans l'"introduction" de l'existence et unicité de feuilletages CMC sur les variétés plates Cauchy-compactes : cet aspect est l'objet du chapitre suivant (voir Théorème 13.4).

CHAPITRE 13

Feuilletages et temps CMC

Je produis ici une version remaniée de la Note au CRAS [**27**], que j'ai publiée conjointement avec F. Béguin, et A. Zeghib. Cette Note présente les résultats de l'article [**29**].

13.1. Note

Soit (M, g) une variété lorentzienne (non compacte), satisfaisant l'équation d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique Λ :

$$\mathrm{Ricci}(g) = \Lambda g.$$

Les métriques à courbure sectionnelle constante sont des exemples de telles variétés lorentziennes, dans ce cas, la courbure sectionnelle est $n\Lambda$, où n est la dimension de M. Nous ne considérons aussi que le cas où Λ est négative ou nulle.

Cette introduction a pour but de présenter des notions classiques, qui ont l'avantage de mettre en perspective les résultats annoncés ici à l'attention du lecteur non familier avec le sujet. Le lecteur averti est invité à passer à l'énoncé du théorème 13.2.

Notre convention est celle en usage en relativité générale : la métrique lorentzienne g est de signature $(-, +, \ldots, +)$. Une courbe de classe C^1 dans (M, g) est de *type temps* ou *temporelle,* si ses vecteurs tangents sont de g-norme négative. Une hypersurface immergée est *spatiale* si g s'y restreint en une métrique riemannienne.

La méthode classique pour traiter la résolution de l'équation d'Einstein consiste à se placer dans un voisinage tubulaire d'une hypersurface spatiale plongée Σ, et de ne garder comme données que la métrique riemannienne $\bar{g}$ sur Σ obtenue par restriction de g, et la seconde forme fondamentale $\mathbb{II}$. La question devient alors : *à quelle condition une métrique riemannienne* $(\Sigma, \bar{g})$ *se réalise-t-elle par un plongement isométrique dans une variété lorentzienne d'Einstein, de seconde forme fondamentale* $\mathbb{II}$ *?*

Nous ne cherchons pas à développer d'une manière complète cette question, renvoyant à l'excellent texte [**3**]. Indiquons quelques points :
- toute donnée $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$ n'admet pas de solution ; pour ce faire, elle doit satisfaire une certaine équation, dite *équation des contraintes.*
- les solutions recherchées sont les espaces temps (M, g) pour lesquelles $(\Sigma, \bar{g})$ se réalise en tant qu'*hypersurface de Cauchy,* c'est-à-dire, d'hypersurface rencontrée par toute courbe de type temps inextensible. Ces espaces temps sont dits *développements de Cauchy de* $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$. Un d'entre eux est dit *maximal* si tout plongement isométrique de (M, g) dans un développement de Cauchy de $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$ est un difféomorphisme. Cette restriction aux développements de Cauchy ne fait perdre aucune généralité du point de vue local. Les espaces temps développements de Cauchy d'une hypersurface plongée sont dits *globalement hyperboliques,* en abrégé, espace

temps GH. Ils sont tous difféomorphes à un produit $\Sigma\times\mathbb{R}$, où chaque tranche $\Sigma\times\{*\}$ est une hypersurface de Cauchy. De plus, ces espaces temps sont *chronologiquement orientés,* c'est-à-dire, il existe un champ de vecteurs de norme partout négative, ce qui assigne à chaque courbe temporelle une orientation future ou passée, et permet de définir le futur et le passé de toute partie de (M, g).
- le problème ainsi posé est encore mal adapté aux techniques classiques. Un obstacle majeur est la dimension infinie de l'espace des solutions, car l'équation d'Einstein est invariante par le groupe des difféomorphismes de la variété ambiente. Pour lever cet obstacle, on réduit l'espace des solutions en imposant des contraintes supplémentaires. Deux méthodes classiques réalisent ce programme. La première méthode consiste à fixer des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ (telles que la surface $\Sigma \times \{0\}$ correspond à $(x_n = 0)$), et d'imposer que ces coordonnées soient harmoniques pour la métrique solution recherchée (ce qui ne fait perdre aucune généralité au problème). L'équation d'Einstein devient alors une EDP hyperbolique quasi-linéaire que les techniques classiques permettent de résoudre. Cette idée est au fondement de la preuve du :

THÉORÈME 13.1. *(Choquet-Bruhat, Geroch* [**69**]*) — Toute donnée* $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$ *satisfaisant l'équation des contraintes admet un développement de Cauchy maximal, unique à isométries près.*

Ce théorème focalise l'intérêt sur les espaces temps globalement hyperboliques. Signalons la fameuse Conjecture de Censure Cosmique (version forte), stipulant que les développements de Cauchy maximaux sont aussi maximaux en tant qu'espaces temps d'Einstein pour une famille générique de données de Cauchy $(\Sigma, \bar{g}, \mathbb{II})$. Nous utilisons la notation abrégée GHM pour les espaces temps GH maximaux (au sens où ils sont développements de Cauchy maximaux de leurs hypersurfaces de Cauchy). L'autre méthode de résolution de l'équation d'Einstein consiste à se restreindre aux solutions sur $\Sigma \times \mathbb{R}$ pour lesquelles chaque "tranche" spatiale $\Sigma \times \{*\}$ est à courbure moyenne constante (CMC en abréviation). L'équation se simplifie là aussi de manière remarquable. L'aspect désagréable de cette approche est de supposer l'existence d'une hypersurface CMC.

Nous nous intéressons ici aux espaces temps à courbure constante (qui satisfont en particulier l'équation d'Einstein). Rappelons que les espace temps de dimension $2+1$ qui satisfont l'équation d'Einstein sont tous à courbure constante (ces espaces temps bénéficient d'un intérêt particulier, offrant un cadre simplifié pour l'étude des problèmes de gravité quantique). Les espaces lorentziens modèles de courbure constante nulle, positive et négative sont respectivement l'espace de Minkowski , l'espace de Sitter (noté dS_n), l'espace anti-de Sitter (noté AdS_n).

G. Mess a classifié les espaces Cauchy-compacts (i.e., admettant une hypersurface de Cauchy compacte) maximaux de dimension $2+1$ en courbures constantes nulle et négative, chacun de ces espaces correspondant à la donnée de deux points dans l'espace de Teichmüller de la surface de Cauchy ([**148**], les espaces GHM y sont appelés domaines de dépendance). La surface de Cauchy ne peut jamais être de genre 0 (i.e., une sphère), mais, contrairement à ce qu'affirme (et croit démontrer) Mess, elle peut fort bien être de genre 1, même lorsque la courbure ambiante est négative. Les questions traitées dans cette note dans le cas particulier où le genre est 1 s'étudient de manière différente, mais plus facile sur bien des aspects. Nous préférons ne pas commenter ici ce cas, et supposons dorénavant que le genre de la surface de Cauchy est plus grand que 2.

Dans [**148**], G. Mess évoque la question, déjà d'actualité dans la communauté physique, de l'existence de feuilletages CMC dans les espaces temps GHM de courbure constante. C'est précisément l'objet de cette note :

THÉORÈME 13.2. *Toute variété lorentzienne Cauchy-compacte maximale de dimension* $2+1$ *à courbure constante négative ou nulle admet une unique fonction* τ *à valeurs réelles dont chaque fibre* $\tau^{-1}(k)$ *est une surface de Cauchy à courbure moyenne constante* k*. De plus,* τ *est strictement croissante le long des courbes temporelles orientées vers le futur.*

Nous traitons à la section 2 le cas le plus délicat ; celui de la courbure négative. Nous discutons celui de la courbure nulle, ainsi que le cas de la dimension supérieure, à la section 13.3 Signalons ici que L. Andersson a montré le théorème 13.2 dans le cas où la variété considérée est de courbure nulle, de dimension quelconque, sous l'hypothèse que les hypersurfaces de Cauchy admettent une métrique hyperbolique ([**2**]). La preuve d'Andersson est analogue à la notre en son esprit.

Le théorème 13.2 nous semble intéressant à plusieurs titres :
- il est toujours intéressant d'exhiber un objet géométrique (ici un feuilletage CMC) caractéristique puisque unique. Le théorème implique en fait l'unicité des surfaces spatiales compactes de courbure moyenne constante donnée k. En effet, les hypersurfaces CMC dans les variétés lorentziennes vérifient un "Principe du Maximum". Dans notre cas, si Σ est une telle surface dans (M, g), ce "Principe du maximum" assure les inégalités $k \geq Max\{\tau(x)/x \in \Sigma\}$ et $k \leq Min\{\tau(x)/x \in \Sigma\}$.
- la notion d'hypersurface CMC est naturellement liée à l'équation d'Einstein, comme en témoigne son intervention dans la résolution de l'équation d'Einstein,
- il est remarquable que ces feuilletages CMC, considérés comme famille de surfaces riemanniennes paramétrées par leur courbure moyenne, induisent, lorsqu'on ne retient des métriques que leurs classes conformes, des chemins paramétrés dans l'espace de Teichmüller qui sont les projections des orbites d'un flot Hamiltonien non-autonome sur le cotangent de l'espace de Teichmüller, dit flot de Moncrief (voir [**151**], [**5**]). Le théorème 13.2 permet de compléter ces travaux, qui supposaient l'existence d'une hypersurface CMC, permettant d'identifier dorénavant de manière complète la classe des espaces Cauchy-compacts maximaux de topologie $\Sigma \times \mathbb{R}$ de courbure constante négative ou nulle avec l'espace des orbites des flots de Moncrief (un flot pour chaque signe de la courbure).

13.2. Présentation de la preuve du théorème en courbure négative

Soit M une variété Cauchy-compacte maximale localement anti de Sitter de dimension $2+1$.

Première étape : passage d'une surface CMC à un feuilletage CMC : D'après [**5**, corollary 7], l'existence d'un feuilletage CMC dont les feuilles sont les fibres d'une fonction temps $t : M \to \mathbb{R}$ se réduit à l'existence d'une seule surface de type espace qui soit CMC. Signalons ici que la preuve dans [**5**] utilise la réduction de Moncrief à un flot hamiltonien sur le cotangent de Teichmüller évoquée ci-dessus ; elle est basée sur une majoration de l'énergie de Dirichlet des tranches spatiales CMC.

Signalons aussi à l'occasion que ce théorème est valable pour les espaces temps de dimension $2+1$ à courbure constante de tout signe, et non pas uniquement en courbure négative.

Deuxième étape : Existence d'une surface CMC par la méthode des barrières : Une méthode générale et classique pour trouver des hypersurfaces CMC est d'exhiber des "barrières" infranchissables par le flot de la courbure moyenne, et contraignant ses orbites à converger vers une solution CMC. Une référence adéquate pour notre cadre est [**98**], dont nous présentons ici une version partielle et simplifiée du théorème principal (Theorem 6.1) :

THÉORÈME 13.3. *Soit (M, g) une variété lorentzienne Cauchy-compacte. Soient Σ_-, Σ_+ deux hypersurfaces plongées spatiales disjointes, Σ_- étant dans le passé de Σ_+. Soit k_- (resp. k_+) la borne supérieure (resp. inférieure) de la fonction courbure moyenne sur Σ_- (resp. Σ_+). Alors, pour toute valeur réelle k vérifiant $k_- < k < k_+$, il existe une hypersurface spatiale plongée de courbure moyenne constante k, contenue dans le futur de Σ_- et le passé de Σ_+.*

Ce théorème mérite des commentaires additionnels. Il est bien connu que les hypersurfaces spatiales plongées et compactes dans un espace temps GH sont des hypersurfaces de Cauchy, isotopes les unes aux autres Ainsi, sous les hypothèse du théorème, l'intersection entre le futur de Σ_- et le passé de Σ_+ est difféomorphe à $\Sigma_- \times [0, 1]$, chaque $\{*\} \times [0, 1]$ étant une courbe temporelle. Toute hypersurface spatiale plongée dans ce domaine est alors le graphe d'une application de Σ_- dans $[0, 1]$. Le signe de la courbure moyenne (trace de la seconde forme fondamentale) utilise le choix d'une orientation transverse, i.e., chronologique.

C. Gerhardt montre aussi ([**98**, Theorem 7.5]) un théorème d'existence de feuilletage CMC sous l'hypothèse de la condition d'énergie forte (satisfaite dans notre cadre) qui suggère une idée de preuve alternative pour la première étape, valable en toute dimension, évitant le recours au flot de Moncrief sur le cotangent de Teichmüller.

Troisième étape : Existence de barrières. C'est dans cette étape que se situe notre contribution essentielle, et où intervient la description géométrique apportée par G. Mess. L'espace anti-de Sitter AdS_n se définit comme suit : si Q désigne la forme quadratique $-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$, alors AdS_n est la nappe $(Q = -1)$ munie de la métrique lorentzienne induite par Q. Le modèle de Klein $\mathbf{AdS}_n$ de anti-de Sitter est la projection de AdS_n dans $\mathbb{R}P^n$. Dans ce modèle, les géodésiques de la métrique sont les intersections avec les droites projectives. Le bord de $\mathbf{AdS}_n$ dans $\mathbb{R}P^n$ est une quadrique. En dimension $n = 3$, cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe. Il découle de la classification de G. Mess que tout espace temps Cauchy-compact maximal à courbure constante -1 est isométrique au quotient d'un ouvert *convexe* Ω de $\mathbf{AdS}_3$ par un sous-groupe discret Γ de $SO_0(2, 2)$. De plus, l'adhérence de Γ rencontre l'hyperboloïde $\partial\mathbf{AdS}_3$ en une courbe de Jordan Λ, topologiquement transverse aux deux réglages de l'hyperboloïde. De plus, l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ de Λ dans $\mathbb{R}P^3$ est d'intérieur contenu dans $\mathbf{AdS}_3$, et l'adhérence de $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ dans $\mathbf{AdS}_3$ est entièrement contenue dans Ω ; sa frontière dans Ω est l'union de deux disques topologiques Γ-invariants $\widetilde{\Sigma}_-, \widetilde{\Sigma}_+$ (en convenant que $\widetilde{\Sigma}_+$ est dans le futur de $\widetilde{\Sigma}_-$, une orientation chronologique de Ω ayant été préalablement fixée). Les disques "plissés" $\widetilde{\Sigma}_-, \widetilde{\Sigma}_+$ sont respectivement convexe et concave (la nuance entre convexe et concave n'ayant de sens qu'après sélection d'une orientation chronologique) de type espace (au sens où les hyperplans d'appui à $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ en des points de $\widetilde{\Sigma}_\pm$ ont pour intersection avec $\mathbf{AdS}_3$ des hyperplans totalement géodésiques de type espace). En particulier, les disques plissés $\widetilde{\Sigma}_-, \widetilde{\Sigma}_+$

sont des surfaces spatiales à courbure moyenne (définie au sens des distributions) respectivement négative et positive.

Le quotient de $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ par Γ se plonge isométriquement dans la variété globalement hyperbolique $\Gamma\backslash\Omega$ en un domaine U bordé par les hypersurfaces topologiques Σ_-, Σ_+ quotients des disques plissés $\widetilde{\Sigma}_-, \widetilde{\Sigma}_+$. Ces hypersurfaces sont les précandidats naturels pour le rôle de barrières nécessaire pour l'utilisation du théorème 13.3 ; il y a cependant deux obstacles :
- en général, ces hypersurfaces topologiques ne sont pas lisses,
- ces hypersurfaces sont respectivement convexe et concave, mais ne sont jamais *strictement* convexe et concave (elles ont systématiquement des zones totalement géodésiques).

Nous levons le premier obstacle en montrant que les hypersurfaces $\Sigma_\pm$ sont C^0-approximables par des hypersurfaces lisses spatiales $\Sigma_\pm^\infty$ respectivement convexe et concave. Le deuxième est levé par le fait que pour les $\epsilon > 0$ suffisamment petits, les points à distance chronologique ϵ dans le futur (resp. le passé) de Σ_+^∞ (resp. Σ_-^∞) forment une hypersurface de seconde forme fondamentale définie positive (resp. définie négative). Ce sont les barrières permettant l'application du théorème 13.3.

13.3. Courbure constante nulle, dimensions supérieures.

La preuve du théorème 13.2 lorsque l'espace temps est de courbure nulle, suit dans ses grandes lignes la preuve présentée ci-dessus, mais utilise de manière cruciale le fait que, pour tout espace temps Cauchy-compact maximal plat (M, g), il existe une famille à un paramètre (U_t, g_t) d'espaces temps plats GH compacts à bord, continue pour la topologie C^∞, telle que :
- chaque (U_t, g_t) $(t \neq 0)$ se plonge isométriquement en une sous-variété de (M, g) bordé par des hypersurfaces de Cauchy,
- (U_0, g_0) se plonge isométriquement dans un espace temps Cauchy-compact maximal qui est quotient du cône futur de l'origine dans Minkowski par un sous-groupe de $SO(1, 2)$.

Le cône futur admet une fonction temps CMC évidente : la forme quadratique lorentzienne elle-même. Les fibres de cette fonction temps dans U_0 induisent par proximité des surfaces spatiales dans M_t de courbure moyenne controlable, fournissant des barrières vérifiant les hypothèses de 13.3. Cet argument est inopérant dans le cas des espaces temps de courbure non nulle. Cependant, il assure que la propriété d'admettre une hypersurface CMC est ouverte parmi les espaces temps considérés ici.

Pour passer à la dimension supérieure, deux difficultés techniques sont à relever :
1.- L'existence d'une hypersurface CMC en dimension supérieure n'assure plus *a priori* l'existence d'un feuilletage CMC, l'article [**5**] n'étant appliquable qu'en dimension $2 + 1$;
2.- On doit montrer formellement que toute hypersurface spatiale concave ou convexe est C^0 approximable par une hypersurface spatiale lisse concave ou convexe.

Lorsque la courbure est nulle, la classification de [**148**] des Cauchy-compacts maximaux s'étend lorsque les hypersurfaces de Cauchy sont homéomorphes à des variétés hyperboliques (voir [**2**]). Le point 2 peut alors être contourné exactement comme en dimension $2 + 1$, et le point 1 est pallié par des arguments alternatifs. Un argument possible est celui utilisé dans [**2**] en recourant au flot de Gauss, qui aboutit à l'analogue du théorème 13.2 en courbure nulle et dimension quelconque.

En courbure négative, il faudrait d'abord étendre la classification de [**148**]. La résolution du point 2 assurerait l'existence de barrières auxquelles appliquer le théorème 13.3, menant à l'existence d'hypersurfaces CMC de courbure moyenne proche de 0. Nous n'avons aucune idée pour résoudre le point 1 dans ce contexte.

13.4. Précisions

13.4.1. Le cas courbure nulle. En courbure 0, c'est-à-dire, pour les variétés Cauchy-compactes localement isométriques à l'espace de Minkowski, la classification faite dans mon article [**26**] - postérieur à [**27**] - permet d'étendre le Théorème 13.2 de la manière suivante (étant entendu qu'un *feuilletage CMC* est une feuilletage de codimension dont chaque feuille est de type espace et compacte, de courbure moyenne constante, mais non nécessairement fibres d'un temps CMC) :

THÉORÈME 13.4 (Théorème 12.1 de [**26**]). *Toute variété plate Cauchy-compacte admet un feuilletage CMC, qui est unique à isométries près. Les fibres de ce feuilletage sont les fibres d'une fonction temps CMC, sauf si la variété est finiment revêtue par un espace-temps de translation (i.e., le quotient de l'espace de Minkowski* $\mathbb{R}^{1,n-1}$ *par un groupe* Γ *de translations de type espace de rang* $n-1$*). Dans ce cas, toute hypersurface fermée spatiale de courbure moyenne constante est totalement géodésique, quotient par* Γ *d'un hyperplan affine de type espace de Minkowski.* ∎

13.4.2. Le cas de Sitter $\mathbf{dS}_3$. L'existence de feuilletages et temps CMC est traitée dans mon survey avec A. Zeghib :

THÉORÈME 13.5 (Théorème 5.4 de [**28**]). *Toute variété localement de Sitter Cauchy-compacte maximale admet un feuilletage CMC. Elles admettent aussi un temps CMC, sauf les elliptiques et les paraboliques.* ∎

Pour la définition de variétés de Sitter elliptiques ou paraboliques, voir § 12.2. La preuve de ce Théorème utilise la dualité entre l'espace de Sitter et l'espace hyperbolique évoquée à la remarque 11.45, ainsi que l'existence sur tout bout hyperbolique d'un feuilletage par feuilles à courbure *scalaire* constante ([**141**]).

Bibliographie

[1] R. Abe, *Geometric approach to rigidity of horocycles,* Tokyo J. Math., **18** (1995), 271–283.

[2] L. Andersson, *Constant mean curvature foliations in flat spacetimes,* Comm. Anal. Geom, **10**, (2002), no. 5, 1125–1150.

[3] L. Andersson, *The Global Existence Problem in General Relativity,* in "50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity", ed. P.T. Chrusciel, H. Friedrich, Birkhäuser Verlag, 2004.

[4] L. Andersson, G.J. Galloway, R. Howards, *The cosmological time function,* Class. Quantum Grav., **15** (1998), 309–322.

[5] L. Andersson, V. Moncrief, A. J. Tromba, *On the global evolution problem in* $2+1$ *gravity,* J. Geom. Phys., **23** (1997), no. 3-4, 191–205.

[6] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature,* Proc. Steklov Inst. Math. AMS Translations (1969).

[7] P. Armandariz, *Codimension one Anosov flows on manifolds with solvable fundamental group,* Thèse Univ. Ispapalapa, Mexico.

[8] V.V. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires,* Mir, Moscou (1980).

[9] V.V. Arnold, A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique,* Gauthiers-Villars (1967).

[10] D. Asimov, *Round handles and non-singular Morese-Smale flows,* Ann. Math., **102** (1975), 41–54.

[11] A. Avez, *Anosov diffeomorphisms,* Proc. Inter. Symp. topological dynamics, Benjamin (1968), 17–51.

[12] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Black hole in three-dimensional spacetime,* Phys. Rev. Lett., **69** no 13 (1992), 1849–1851.

[13] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Geometry of the* $2+1$ *black hole,* Phys. Rev. D (3), **48** no 4 (1993), 1506–1525.

[14] V. Bangert, *Minimal geodesics,* Ergod. Th. & Dyn. Syst., **10** (1989), 263–286.

[15] T. Barbot, *Géométrie transverse des flots d'Anosov,* Thèse de Doctorat de l'Université Claude Bernard (1992).

[16] T. Barbot, *Caractérisation des flots d'Anosov par leurs feuilletages faibles,* Ergod. Th. & Dyn. Syst., **15** (1995), 247–270.

[17] T. Barbot, *Mise en position optimale de tores par rapport à un flot d'Anosov,* Comment. Math. Helv., **70** (1995), 113–160.

[18] T. Barbot, *Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **46** (1996), 1451–11517.

[19] T. Barbot, *Actions de groupes sur les* 1*-variétés non séparées et feuilletages de codimension un,* Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. VII, no 4 (1998), 559–597.

[20] T. Barbot, *Generalizations of the Bonatti-Langevin example of Anosov flows and their classification up to topological equivalence,* Comm. Anal. geom., **6** (1998), 747–798.

[21] T. Barbot, *Radiant affine* 3*-manifolds,* "The Proceedings of the Conference on Geometric Structures on Manifolds" (Séoul), Lecture Notes Series GARC, **46** (1999), 37–53.

[22] T. Barbot, *Variétés affines radiales de dimension* 3, Bull. Soc. Math. France, **128** (2000), 347–389.

[23] T. Barbot, *Plane affine geometry and Anosov flows,* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., **34** (2001), 871–889.

[24] T. Barbot, *Flag structures on Seifert manifolds,* Geom. Topol., **5** (2001), 227–266.

[25] T. Barbot, *Feuilletages transversalement projectifs sur les variétés de Seifert,* Ann. Inst. Fourier, **53** (2003), 1551–1613.

[26] T. Barbot, *Globally hyperbolic flat spacetimes,* J. Geom. Phys., **53** (2005), 123–165, math.GT/0402257

[27] T. Barbot, F. Béguin, A. Zeghib, *Feuilletages des espaces temps globalement hyperboliques par des hypersurfaces à courbure moyenne constante,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **336** (3) (2003), 245–250.

[28] T. Barbot, A. Zeghib, *Group actions on Lorentz spaces, a survey,* in "50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity", ed. P.T. Chrusciel, H. Friedrich, Birkhäuser Verlag, 2004.

[29] T. Barbot, F. Béguin, A. Zeghib, *Foliations of locally AdS_3 globally hyperbolic manifolds by constant mean curvature surfaces,* accepté à Geom. Dedicata, math.MG/0412111.

[30] T. Barbot, *Three-dimensional Anosov flag manifolds,* preprint, math.RT/0505500.

[31] T. Barbot, *Causal properties of AdS-isometry groups I : Causal actions and limit sets,* preprint, math.GT/0509552.

[32] T. Barbot, *Causal properties of AdS-isometry groups I : BTZ multi black-holes,* preprint, math.GT/0510065.

[33] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, K.L. Easley, *Global Lorentzian geometry,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2nd ed., vol **202**, Marcel Dekker, New York, 1996.

[34] Y. Benoist, *Nilvariétés projectives,* Comment. Math. Helv., **69** (1994), 447–473.

[35] Y. Benoist, *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires,* Geom. Funct. Anal., **7** (1997), 1–47.

[36] Y. Benoist, *Tores affines,* in 'Crystallographic groupes and their generalizations' (Kortrijk, 1999), Contemp. Math., **262** (2000), 1–37.

[37] Y. Benoist, *Automorphismes des cônes convexes,* Invent. Math., **141** (2000), 149–193.

[38] Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie, *Flots d'Anosov à distributions de Liapounov différentiables. I.* Ann. Inst. Henri Poincaré, **53** (1990), 395–412.

[39] Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie, *Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables,* J. Amer. Math. Soc., **5** (1992), 33–74.

[40] J.P. Benzécri, *Sur les variétés localement affines et localement projectives,* Bull. Soc. Math. Fr., **88** (1960), 29–332.

[41] A.N. Bernal, M. Sanchez, *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting Theorem,* Comm. Math. Phys., **243** (2003), 461–470, gr-qc/0306108

[42] A.N. Bernal, M. Sanchez, *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes,* Commun. Math. Phys., **257** (2005), 43–50, gr-qc/0401112

[43] A.N. Bernal, M. Sanchez, *Smooth globally hyperbolic splittings and temporal functions,* Contribution to Proc. II Int. Meeting on Lorentzian Geometry, Murcia (Spain), November 12-14, 2003, gr-qc/0404084

[44] C. Bonatti, R. Langevin, *Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension,* Ergod. Th. & Dyn. Sys., **14** (1994), 633–643.

[45] F. Bonsante, *PhD Thesis,* Scuola Normale Superiore, Pisa (2005).

[46] F. Bonsante, *Flat space-times with compact hyperbolic Cauchy surfaces,* math.DG/0311019.

[47] S. Boyer, *Dehn surgery on knots,* Handbook of geometric topology, 165–218, Amsterdam (2002).

[48] M. Brown, *The monotone union of open n-cells is a open n-cell,* Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), 74–76.

[49] M. Brunella, *On the topological equivalence between Anosov flows on three-manifolds,* Comment. Math. Helv., **67** (1992), 459–470.

[50] M. Brunella, *On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows,* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **3** (1994), 335–344.

[51] M. Brunella, *On transversely holomorphic flows. I,* Invent. Math., **126** (1996), 265–279.

[52] D. Calegari, *The geometry of* $\mathbb{R}$*-covered foliations,* Geom. Topol., **4** (2000), 457–515.

[53] S. Carlip. *Quantum gravity in* $2+1$ *dimensions,* Cambridge Monographs on Math. Phys., Cambridge University Press, 1998.

[54] Y. Carrière, *Flots riemanniens,* "Structures transverses des feuilletages, Astérisque, **116** (1984), 31–52.

[55] Y. Carrière, *Un survol de la théorie des variétés affines,* Séminaire de Théorie Spectrale et géométrie de Chambéry-Grenoble, (1988), 9–22.

[56] Y. Carrière, *Questions ouvertes sur les variétés affines,* Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et de Topologie Différentielle, 1991-1992 (Montpellier), Univ. Montpellier II (1993), 69–72.

[57] Y. Carrière, F. Dal'bo, *Généralisations du premier théorème de Bieberbach sur les groupes cristallographiques,* Enseign. Math. (2), **35** (1989), 245–262.

[58] Y. Carrière, F. Dal'bo, G. Meigniez, *Inexistence de structures affines sur les fibrés de Seifert,* Math. Ann., **296** (1993), 743–753.

[59] A. Casson, D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert* 3*-manifolds,* Invent. Math., **118** (1994), no. 3, 441–456.

[60] V. Charette, T.A. Drumm, D. Brill, *Closed time-like curves in flat Lorentz space-times.* J. Geom. Phys. **46** (2003), no. 3-4, 394–408.

[61] S. Choi, *Real projective surfaces,* Thèse, Princeton University (1988).

[62] S. Choi, W.M. Goldman, *Convex real projective structures on closed surfaces are closed,* Proc. Am. Math. Soc., **118** (1993), 657–661.

[63] S. Choi, *Convex decompositions of real projective surfaces. I :* π*-annuli and convexity,* J. Diff. Geom., **40** (1994), 165–208.

[64] S. Choi, *Convex decompositions of real projective surfaces. II : Admissible decompositions,* J. Diff. Geom., **40** (1994), 239–283.

[65] S. Choi, *Convex decompositions of real projective surfaces. III : For closed and nonorientable surfaces,* J. Korean Math. Soc.,**33** (1996), 1139–1171.

[66] S. Choi, W.M. Goldman, *Convex real projective structures on closed surfaces are closed,* Proc. Amer. Math. Soc., **118** (1993), 657–661.

[67] S. Choi, W.M. Goldman, *The classification of real projective structures on compact surfaces,* Bull. Amer. Math. Soc., **34** (1997), 161–171.

[68] S. Choi (avec appendice par T. Barbot), *The decomposition and classification of radiant affine* 3*-manifolds,* Mem. Amer. Math. Soc., **154** (2001), no 730.

[69] Y. Choquet-Bruhat, R. Geroch, *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity,* Commun. Math. Phys., **14** (1969), 329–335

[70] Y. Choquet-Bruhat, *Non-strict and strict hyperbolic systems for the Einstein equations,* in Ancom and J. Vaillant, ed., Partial Differential Equations and Mathematical Physics, Dekker, 2003.

[71] J.P. Christy, *Anosov flows on three-manifolds,* Thèse, Princeton (1984).

[72] M. Culler, K. Vogtmann, *A group-theoretic criterion for property FA,* Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), 677–683.

[73] S. Dupont, *Solvariétés projectives de dimension trois,* Thèse Université Paris VII (1999).

[74] G. Ellis, S. W. Hawking. *The large scale structure of spacetime.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge university Press, 1973.

[75] D.B.A. Epstein, *Foliations with all leaves compact,* Ann. Inst. Fourier, **26** (1976), 265–282.

[76] Y. Fang, *Structures géométriques rigides et systèmes dynamiques hyperboliques,* Thèse Université Paris-Sud (2004).

[77] Y. Fang, *Smooth Rigidity of Uniformly Quasiconformal Anosov Flows,* Erg. Th. & Dyn. Syst., **24** (2004), 1937–1959.

[78] S.R. Fenley, *Anosov flows in* 3*-manifolds,* Ann. of Math. (2), **139** (1994), 79–115.

[79] S.R. Fenley, *The structure of branching in Anosov flows of* 3*-manifolds,* Comment. Math. Helv., **73** (2) (1998), 259–297.

[80] S.R. Fenley, *Foliations, topology and geometry of* 3*-manifolds :* $\mathbb{R}$*-covered foliations and transverse pseudo-Anosov flows,* Comm. Math. Helv., **77** (2002), 415–490.

[81] S.R. Fenley, *Pseudo-Anosov flows and incompressible tori,* Geom. Dedicata, **99** (2003), 61–102.

[82] P. Foulon, B. Hasselblatt, *Zygmund strong foliations,* Israel J. Math., **138** (2003), 157–169.

[83] P. Foulon, Communication personnelle.

[84] Y. Fourés-Bruhat, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équation aux dérivées partielles non linéaires,* Acta math., **88** (1952), 141–225.

[85] C. Frances, *Géométrie et dynamique lorentziennes conformes,* Thèse ENS Lyon (2002).

[86] C. Frances, *Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique,* Enseign. Math. (2), **49** (2003), 95–100.

[87] J. Franks, *Anosov diffeomorphisms,* Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., AMS, XIV (1970), 61–93.

[88] J. Franks, R. Williams, *Anomalous Anosov flows,*, Lect. Notes Math., Springer, **819** (1980).

[89] D. Fried, *Closed similarity manifolds,* Comm. Math. Helv., **55** (1980), 576–582.

[90] D. Fried, W. Goldman, M. Hirsch, *Affine manifolds with nilpotent holonomy,* Comm. Math. Helv., **56** (1981), 487–523.

[91] D. Fried, *The geometry of cross-sections to flows,* Topology (4), **21** (1982), 353–371.

[92] D. Fried, *Transitive Anosov flows and pseudo-anosov maps,* Topology, **22** (1983), 299–304.

[93] D. Fried, *Flat spacetimes,* J. Diff. Geom., **26** (1987), 385–396.

[94] D. Fried, *Affine* 3*-manifolds that fiber by circles,* preprint I.H.E.S. (1992).

[95] D. Gabai, *Convergence groups are Fuchsian groups,* Ann. of Math. (2), **136** (1992), no. 3, 447–510.

[96] D. Gallo, M. Kapovitch, A. Marden, *The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces,* Ann. math., **151** (2000), 625–704.

[97] G.J Galloway, *Compact Lorentz manifolds without closed non-spacelike geodesics,* Proc. Amer. Math. Soc., **98** (1986), 119–123.

[98] C. Gerhardt, *H-surfaces in Lorentzian manifolds,* Comm. Math. Phys., **89** (1983), no 4, 523–533.

[99] R. Geroch, *Domain of dependence,* J. Math. Phys., **11** (1970), 437–449.

[100] R.P. Geroch, E.H. Kronheimer, R. Penrose, *Ideal points in space-time,* Proc. Roy. Soc. Lond. A, **327** (1972), 545–567.

[101] E. Ghys, *Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-vey,* Ann. Instit. Fourier, **37** no 4 (1987), 59–76.

[102] E. Ghys, *Flots d'Anosov sur les* 3*-variétés fibrées en cercles,* Ergod. Th. & Dyn. Sys., **4** (1984), 209–247.

[103] E. Ghys, *Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **20** (1987), 251–270.

[104] E. Ghys, *Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsiens,* Ann. Inst. Fourier, **42** (1992), 209–247.

[105] E. Ghys, *Rigidité différentiable des groupes fuchsiens,* Publ. Math. I.H.E.S, **78** (1993), 163–185.

[106] E. Ghys, *On transversely holomorphic flows. II,* Invent. Math., **126** (1996), 281–286.

[107] E. Ghys, *Groups acting on the circle,* Ens. Math., **47** (2001), 329–407.

[108] E. Giroux, *Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures,* Proceed. of the Int. Cong. of Math., Vol II (Beijing, 2002), 405–414.

[109] C. Godbillon, *Feuilletages, études géométriques,* Progress in Math., Birkhäuser, **98** (1991).

[110] W.M. Goldman, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations,* in 'Geometry of group representations' (Boulder, CO 1987), Contemp. Math., **74** (1988), 169–198.

[111] W.M. Goldman, *Convex real projective structures on compact surfaces,* J. Diff. Geom., **31** (1990), 791–845.

[112] C. Gordon, *Dehn filling,* dans Low dimensional topology, New Stud. Adv. Math., **3** (2003), 41–59.

[113] S. Goodman, *Dehn Surgery on Anosov flows,* Lect. Notes Math., Springer, **1007** (1983).

[114] M. Gromov, *Hyperbolic groups,* Essays in group theory, 75–263, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8** Springer, New York (1987).

[115] M. Gromov, *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental groups,* Ens. Math., **46** (2) (2000), 391–402.

[116] M. Guediri, *On the existence of closed timelike geodesics in compact spacetimes,* Math. Z., **239** (2002), 277–291.

[117] A. Haefliger, G. Reeb, *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan,* Ens. Math., **3** (1957), 107–125.

[118] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques,* (1898), in *Œuvres complètes,* édition C.N.R.S, tome II (1968).

[119] M. Handel, W.P. Thurston, *Anosov flows on new* 3*-manifolds,* Inv. Math., **59** (1980), 95–103.

[120] S.G. Harris, *Boundaries on Spacetimes : an outline,* Contemp. Math., **359** (2004), 65–85.

[121] D.C. Hart, *On the smoothness of generators,* Topology, **22** (1983), 357–363.

[122] N. Hashigushi, *PL-representations of Anosov foliations,* Ann. Inst. Fourier, **42** (1992), 937–965.

[123] B. Hasselblatt, A. Wilkinson, *Prevalence of non-Lipschitz Anosov foliations,* Ergod. Th. & Dyn. Syst., **19** (1998), 643–656.

[124] B. Hasselblatt, A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54 (1995).

[125] S. Hayashi, *Connecting invariant manifolds and the solution of the* C^1 *stability and* Ω*-stability conjectures for flows",* Ann. of Math., **145**, (1997), 81–137.

[126] S. Hayashi, *Correction to : "Connecting invariant manifolds and the solution of the* C^1 *stability and* Ω*-stability conjectures for flows",* Ann. of Math., **150** (1999), 353–356.

[127] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time,* Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, London-New York (1973).

[128] G. Hector, *Feuilletages en cylindres,* Lect. Notes Math., Springer, **597** (1977), 252–70.

[129] G. Hector, U. Hirsch, *Geometry of foliations, Part B,* Aspects of Math. (1987).

[130] M. Hirsch, C. Pugh, *Stable manifolds and hyperbolic sets,* Proc. Symp. Pure Math., AMS, XIV (1970).

[131] M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds,* Lect. Notes Math., Springer, **583** (1980).

[132] N.J. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space,* Topology, **31** (1992), 449–473.

[133] S. Hurder, A. Katok, *Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **72** (1990), 5–61.

[134] W. Jaco, *Lectures on three-manifold topology,* Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1980), 156–158.

[135] V. Kac, E.B. Vinberg, *Quasi-homogeneous cones,* Mat. Zametki, **1** (1967), 347–354 ; traduction en anglais : Math. Notes, **1** (1967), 231–235.

[136] M. Kanai, *Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations,* Ergod. Th. & Dyn. Syst., **8** (1988), 215–239.

[137] J.L. Koszul, *Déformations des connexions localement plates,* Ann. Inst. Fourier, **18** (1968), 103–114.

[138] N. Kuiper, *On convex locally projective spaces,* Convegno Internazionale Geometria Differenziale (Italia, Settembre 1953), Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella, Rome (1954), 200–213.

[139] R. Kulkarni, U. Pinkall, *Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry,* Lect. Notes Math., **1209** (1986), 190–209.

[140] R. Kulkarni, F. Raymond, *Three-dimensional Lorentz space forms and Seifert fiber spaces,* J. Diff. Geom., **21** (1985), 231–268.

[141] F. Labourie, *Problème de Minkowski et surfaces à courbure constante dans les variétés hyperboliques,* Bull. Soc. Math. Fr., **119** (1991), 307–325.

[142] F. Labourie, *Anosov flows, Surface Groups and Curves in projective Space,* Preprint (2003).

[143] G.A. Margulis, *Certain measures that are connected with* **U***-flows on compact manifolds,* Funct. Anal. Appl., **4** (1970), 5–61.

[144] S. Matsumoto, *Codimension one foliations on solvable manifolds,* Comment. Math. Helv., **68** (1993), 633–652.

[145] S. Matsumoto, *Codimension one Anosov flows,* Lecture Notes Series GARC, **27** (1995).

[146] S. Matsumoto, *Affine flows on* 3*-manifolds,* Mem. Amer. Math. Soc., **162** (2003), no 771.

[147] S. Matsumoto, T. Tsuboi, *Transverse intersections of foliations in three-manifolds,* Monogr. Enseign. Math., **38** (2001).

[148] G. Mess, *Lorentz spacetimes of constant curvature,* Preprint IHES/M/90/28 (1990).

[149] J. Milnor, *On the existence of a connection with curvature zero,* Comment. Math. Helv., **32** (1958), 215–223.

[150] J. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds,* Adv. Math., **25** (1977), 178–187.

[151] V. Moncrief, *Reduction of the Einstein equation in* $2+1$ *dimensions to a Hamiltonian system over Teichmüller space,* J. Math. Phys. **30** (1989), 2907–2914.

[152] C.A. Morales, *Axiom A flows with a transverse torus,* Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2003), 735–745.

[153] J.W. Morgan, *Non-singular Morse-Smale flows on* 3*-dimensional manifolds,* Topology, **18** (1978), 41–53.

[154] M. Morse, *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature,* Trans. Amer. Math. Soc., **22** (1921), 84-100.

[155] M. Morse, *A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one,* Trans. Amer. Math. Soc., **26** (1924), 25–60.

[156] J. Moser, *On a theorem of Anosov,* J. Diff. Equat., **5** (1969), 411–440.

[157] T. Nagano, K. Yagi, *The affine structure on the real two torus,* Osaka Jour. Math., **11** (1974), 181–210.

[158] A. Navas, *Groupes de difféomorphismes du cercle,* Thèse ENS Lyon (2003).

[159] S.E. Newhouse, *On codimension one Anosov diffeomorphisms,* Amer. J. Math., **92** (1970), 761–770.

[160] T. Noda, communication personnelle.

[161] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry,* Academic Press, New York, 1983.

[162] C.F.B. Palmeira, *Open manifolds foliated by planes,* Ann. of Math., **107** (1978), 109–131.

[163] M. Paternain, *The principal loop-bundle and dynamical systems,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **329** (1999), 1081–1085.

[164] J.F. Plante, *Anosov flows, transversely affine foliations, and a conjecture of Verjovsky,* J. London Math. Soc. (2), **23** (1981), 359–362.

[165] M. Ratner, *Markov splittings for U-flows in three dimensional manifolds,* Mat. Zametki, **6** (1969), 693–704.

[166] R.C. Robinson, *Structural stability of* C^1*-flows,* Lect. Notes Math., **468** (1975), 262–277.

[167] R. Roussarie, *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **43** (1974), 101–141.

[168] V. Sadovskaya, *On uniformly quasiconformal Anosov systems,* Math. Res. Lett., in press.

[169] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension* 3*,* Thèse de Doctorat de l'École Normale Sup. de Lyon (1999).

[170] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension* 3 *possédant un champ de Killing non trivial,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **324** (1997), 525–530.

[171] H. Salzmann, D. Betten, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, M. Stroppel, *Compact projective planes,* De Gruyter Expositions in Mathematics, **21**, Walter de Gruyter, Berlin (1995).

[172] K. Scannell, *3-manifolds which are spacelike slices of flat spacetimes,* Classical Quantum Gravity **18** (2001), no. 9, 1691–1701.

[173] K. Scannell, *Flat conformal structures and the classification of de Sitter manifolds,* Comm. Anal. Geom. **7** (1999), no. 2, 325–345.

[174] K. Scannell, M. Wolf, *The grafting map of Teichmüller space,* J. Amer. Math. Soc., **15** (2002), 893–927.

[175] R. Schwartz, *Pappus's theorem and the modular group,* Publ. Math. I.H.E.S, **78** (1993), 187–206.

[176] S. Schwartzman, *Asymptotic cycles,* Ann. of Math., **66** (1957), 270–284.

[177] J.P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2*,* Astérisque, **46** (1977).

[178] S. Simić, *Codimension one Anosov flows and a conjecture of Verjovsky,* Ergod. Th. & Dyn. Syst., **17** (1997), 1221–1231.

[179] S. Smale, *Differentiable dynamical systems,* Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 747–817.

[180] J. Smillie, *Affine manifolds with diagonal holonomy,* preprint (1976)

[181] V.V. Solodov, *Topological topics in dynamical systems theory,* Russian Math. Surveys (4), **46** (1991), 107–134.

[182] J.R. Stallings, *The piecewise linear structure of Euclidean space,* Proc. Cambridge Philos. Soc., **58** (1962), 481–488.

[183] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II : structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups,* Acta Math., **155** (1985), 243–20.

[184] D. Sullivan, W.T. Thurston, *Manifolds with canonical coordinate charts : some examples,* l'Ens. Math., **29** (1983), 15–25.

[185] W.P. Thurston, *Foliations on* 3*-manifolds which are circle bundles,* Thesis, Berkeley (1972).

[186] W.P. Thurston, *The geometry and topology of* 3*-manifolds,* Lecture notes from Princeton University (1978-80).

[187] D. Tischler, *On fibering certain foliated manifolds over* $\mathbb{S}^1$*,* Topology, **9** (1970), 153–154.

[188] P. Tomter, *Anosov flows on infra-homogeneous spaces,* Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., AMS, XIV (1970), 299–327.

[189] A. Verjovsky, *Codimension one Anosov flows,* Bol. Soc. Mat. Mexicana, **19** (1974), 49–77.

[190] A. Verjovsky, *Sistemas de Anosov,* Monografías del Instituto de Matemática y Ciencas Afines (Lima), **9** (1999).

[191] J. Vey, *Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants,* Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa, **24** (1970), 15–25.

[192] E.B. Vinberg, *Homogeneous cones,* Trans. Moscow math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[193] F. Waldhausen, *Eine Klasse von* 3*-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, I,* Invent. Math., **3** (1967), 308–333.

[194] F. Waldhausen, *Eine Klasse von* 3*-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, II,* Invent. Math., **4** (1967), 87–117.

[195] D. Witte, *Arithmetic groups of higher* $\mathbb{Q}$*-rank cannot act on* 1*-manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc., **345** (1994), 577–594.

[196] J. Wolf, *Spaces of constant curvature,* New York, McGraw-Hill, 1967

[197] J. Wood, *Bundles with totally disconnected structure group,* Comment. Math. Helv., **46** (1971), 257–273.

[198] A. Zeghib, *On closed anti de Sitter spacetimes,* Math. Ann., **310** (1998) 695–716.

[199] A. Zeghib, *The identity component of the isometry group of a compact Lorentz manifold,* Duke Math. J., **92** (1998) 321–333.

[200] A. Zeghib, *Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part I : Foundations of Lorentz dynamics,* GAFA, **9** (1999) 775–822.

[201] A. Zeghib, *Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part II : Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups,* GAFA, **9** (1999) 823–854.