

# Stabilité de Systèmes Dynamiques Chaotiques et Variétés Singulières

Jean-Marc Ginoux

## ▶ To cite this version:

Jean-Marc Ginoux. Stabilité de Systèmes Dynamiques Chaotiques et Variétés Singulières. Physique [physics]. Université du Sud Toulon Var, 2005. Français. NNT: . tel-00011318

# HAL Id: tel-00011318 https://theses.hal.science/tel-00011318

Submitted on 7 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# STABILITÉ DES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES ET VARIÉTÉS SINGULIÈRES

Jean-Marc GINOUX

Le 7 janvier 2006

# Table des matières

In	Introduction		12			
1	Systèmes dynamiques lents-rapides			21		
	1.1	Systèr	ne dynamique	21		
	1.2	Systèr	ne dynamique autonome lent-rapide	22		
	1.3	Systèr	ne dynamique considéré comme autonome lent-rapide	25		
2	Nouvelle approche de la variété lente de systèmes dynamiques					
	2.1	Foncti	ions vectorielles cinématiques	26		
		2.1.1	Vecteur vitesse instantanée	27		
		2.1.2	Vecteur accélération instantanée	27		
		2.1.3	Le repère de Frénet	27		
	2.2	Propri	étés de la <i>courbe trajectoire</i>	30		
		2.2.1	Représentation paramétrique de la courbe trajectoire	30		
		2.2.2	Plan osculateur à la <i>courbe trajectoire</i>	30		
		2.2.3	Courbure de la <i>courbe trajectoire</i>	31		
		2.2.4	Torsion de la <i>courbe trajectoire</i>	32		
		2.2.5	Notions de stabilité	32		
		2.2.6	Variétés attractives-répulsives et stabilité	35		
	2.3	2.3 Domaines lents, rapides				
	2.4	Equat	ion analytique de la variété lente	37		
	2.5	Nouve	elle expression de la variété lente de (SDAL-R)	44		
		2.5.1	Approximation singulière de l'accélération	44		
	2.6	Equiv	alence entre les différentes expressions des variétés lentes	48		
		2.6.1	Approximation singulière et approximations successives .	48		
		2.6.2	Méthode du plan osculateur et approximation singulière .	49		
		2.6.3	Approximation du système linéaire tangent	49		
3	Etu	de géon	nétrique des systèmes dynamiques	53		
	3.1	Nouve	elles variétés de systèmes dynamiques	53		
		3.1.1	Variété " uniforme "	53		

	3.2	3.1.2 Traject 3.2.1 3.2.2 3.2.3	Variété " singulière "	55 56 56 56 56		
4	Etuc	de numé	érique des systèmes dynamiques	57		
	4.1	Portrai	t de phase	57		
	4.2	Points	fixes	58		
	4.3	Stabili	té des points fixes : théorème de Hurwitz	58		
	4.4	Valeur	numérique du paramètre de bifurcation de Hopf	59		
		4.4.1	Méthode numérique basée sur le théorème de Lyapunov .	59		
		4.4.2	Méthode numérique basée sur le théorème de Hurwitz	60		
	4.5	Caracte	éristion du chaos	60		
		4.5.1	Section et application de Poincaré	60		
		4.5.2	Diagramme de bifurcation	61		
		4.5.3	Mesure de la dimension des attracteurs "étranges"	62		
		4.5.4	Orbites de Sil'nikov	67		
5	App	Applications $\hat{a}$ des (SDAL-R) 6				
-	5.1	Le syst	tème de Van der Pol	68		
	5.2	Le mo	dèle de Chua	75		
6	Арр	lication	à un (SDACCL-R) : le modèle de Lorenz	81		
-		1		07		
7	App	lication	s a des (SDAL-R) de type predateur-proie	85		
	7.1	Les mo	bales de type predateur-proie	80		
	1.2		e de volterra-Gause : cas general	91		
		7.2.1	Points fixes	91		
		7.2.2	Matrice Jacobienne Fonctionnelle	92		
		7.2.5	Nature et stabilité des points fixes dans le plan ry	92		
		7.2.4	Fristence d'une hifurgetion de Honf dens le plan xy	92		
		7.2.5	Existence d'une offurcation de Hopf dans le plan $xy \dots$	94		
		7.2.0	Condition d'avistance de points fixes dans le premier octant	05		
		728	Nature et stabilité des points fixes dans le premier octant	95		
		7.2.0	Existence d'une hifurcation de Honf dans le premier octant	96		
	73	Modèl	e de Volterra-Gause pour $k - n - \frac{1}{2}$	97		
	1.5	731	Fauations dédimensionnées	97		
		7.3.2	Solutions bornées	97		
		7.3.3	Points fixes dans le plan xy	102		

		7.3.4	Condition d'existence de points fixes dans le plan $xy$ 1	102
		7.3.5	Matrice Jacobienne fonctionnelle	102
		7.3.6	Nature et stabilité des points fixes dans le plan xy 1	103
		7.3.7	Existence d'une bifurcation de Hopf dans le plan $xy$ 1	104
		7.3.8	Points fixes dans le premier octant	104
		7.3.9	Condition d'existence de points fixes dans le premier octant l	105
		7.3.10	Nature et stabilité de points fixes dans le premier octant 1	105
		7.3.11	Existence d'une bifurcation de Hopf dans le premier octant 1	106
		7.3.12	Valeur du paramètre de bifurcation de Hopf 1	107
		7.3.13	Portrait de phase	108
		7.3.14	Diagramme de bifurcation	109
		7.3.15	Section de Poincaré et application de Poincaré 1	110
		7.3.16	Algorithme de Wolf <i>et al.</i>	111
		7.3.17	Orbites de Sil'nikov	112
		7.3.18	Variété lente	112
		7.3.19	Déploiement de la variété singulière	116
	7.4	Le mod	lèle de Rosenzweig-MacArthur 1	117
	7.5	Le mod	lèle d'Hastings-Powell	122
		7.5.1	Equations dédimensionnées	122
		7.5.2	Nature et stabilité des points fixes 1	122
		7.5.3	Valeur du paramètre de bifurcation de Hopf 1	123
		7.5.4	Variété lente	124
	7.6	Similar	rité entre les différents modèles 1	127
		7.6.1	Volterra-Gause et Rosenzweig-MacArthur 1	127
		7.6.2	Volterra-Gause et Hastings-Powell	128
		7.6.3	Rosenzweig-MacArthur et Hastings-Powell 1	130
		7.6.4	Hastings-Powell et Rosenzweig-MacArthur	131
8	App	roximat	ion du système linéaire tangent	132
	8.1	Approx	kimation du système linéaire tangent	133
	8.2	Conditi	ion de colinéarité / coplanarité	134
		8.2.1	Variété lente d'un système dynamique de dimension deux 1	134
		8.2.2	Variété lente d'un système dynamique de dimension trois . 1	135
	8.3	Conditi	ion d'orthogonalité	136
		8.3.1	Variété lente d'un système dynamique de dimension deux 1	136
		8.3.2	Variété lente d'un système dynamique de dimension trois . 1	137
	8.4	Equiva	lence des deux conditions	138
	8.5	Algorit	hme de détermination de l'équation de la variété lente 1	140
	8.6	Approx	ximation du système linéaire tangent et du plan osculateur . 1	145

## Conclusion

## TABLE DES MATIÈRES

A	Note bibliographique	151
B	Nature des points singuliers en dimension trois	164
С	Tableau des programmes	167
Bi	Bibliographie	
Index		173

# **Table des figures**

5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 5.7	Variété lente et domaine stable du système de B. Van der Pol     70       Zoom de la partie stable du système de B. Van der Pol     71       Approximation singulière du système de B. Van der Pol     71       Isoclines du vecteur accélération du système de B. Van der Pol     72       Variété lente et variété uniforme du système de B. Van der Pol     72       Variété lente du modèle de L.O. Chua.     76       Enveloppe de la variété lente du modèle de L.O. Chua.     72
5.8	Approximation singulière du modèle de L.O. Chua
5.9	Variété uniforme du modèle de L.O. Chua
6.1 6.2	Variété lente du modèle de E.N. Lorenz.     83       Enveloppe de la variété lente du modèle de E.N. Lorenz.     84
7.1	Portrait de phase du modèle de Volterra-Gause
7.2	Diagramme de bifurcation du modèle de Volterra-Gause 109
7.3	Application de Poincaré du modèle de Volterra-Gause 110
7.4	Exposants de Lyapunov du modèle de Volterra-Gause 112
7.5	Orbite de Sil'nikov du modèle de Volterra-Gause
7.6	Variété lente du modèle de Volterra-Gause
7.7	Enveloppe de la variété lente du modèle de Volterra-Gause 114
7.8	Approximation singulière du modèle de Volterra-Gause 115
7.9	Déploiement de la variété singulière du modèle de Volterra-Gause 116
7.10	Variété lente du modèle de Rosenzweig-MacArthur
7.11	Approximation singulière du modèle de Rosenzweig-MacArthur . 119
7.12	Variété uniforme du modèle de Rosenzweig-MacArthur 120
7.13	Piège du modèle de Rosenzweig-MacArthur
7.14	Portrait de phase du modèle d'Hastings-Powell
7.15	Approximation singulière du modèle d'Hastings-Powell 126
7.16	Comparaison Volterra-Gause et Rosenzweig-MacArthur 127
7.17	Portrait de phase du modèle de Volterra-Gause
7.18	Variations des séries temporelles

7.19	Transition Rosenzweig-MacArthur vers Hastings-Powell		 13
7.20	Transition Hastings-Powell vers Rosenzweig-MacArthur		 13

# Liste des tableaux

7.1	Réponses fonctionnelles pour la croissance et décroissance naturelle	89
7.2	Réponses fonctionnelles pour la prédation	90
C.1	Tableau des programmes	167

à Valy...

# Remerciements

Ce mémoire est le fruit d'une multitude de rencontres. Des personnalités d'exception ont jalonné mon parcours, prodiguant l'impulsion nécessaire à la poursuite de mes études.

Parvenu au terme de ces travaux, je souhaite exprimer ma reconnaissance, ma plus profonde gratitude et mon indéfectible attachement à mes directeurs de thèse, MM. Bruno Rossetto et Jean-Louis Jamet, grâce auxquels j'ai pu conjuguer, tout au long de ces trois années de fructueuse et stimulante collaboration, les plaisirs de la recherche et de la complicité intellectuelle. J'espère avoir été digne de la confiance qu'ils ont bien voulu m'accorder. Je n'ai d'autre ambition que d'inscrire mes futurs travaux dans cette continuité.

Je voudrais adresser tous mes remerciements à M. Moulay Aziz-Alaoui, Professeur à l'Université du Havre, et M. Giorgio Israel, Professeur à l'Università della Sapienza pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je suis également très honoré de la présence dans ce jury de M. Leon O. Chua, Professeur à la Berkeley University et M. Hisham Abou-Kandil Directeur de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan.

Je tiens à remercier M. Yves Lucas Directeur du laboratoire P.R.O.T.E.E. qui a bien voulu m'accueillir au sein de son laboratoire.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à M. Michel Camail Directeur du Département de Génie Biologique ainsi qu'à toute l'équipe de l'E.B.M.A. : Dominique Jamet, Simone Richard, Gérard Bogé, Maîtres de Conférences à l'I.U.T., Claude Geneys, Docteur en Biologie, sans oublier Denise, Gisèle, Sylvie et Lydie, qui m'ont accueilli chaleureusement et m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions possibles. En outre, je voudrais témoigner de mon amitié sincère à M. Christian Gérini, Agrégé de Mathématiques, Docteur en Histoire des Sciences, qui a su m'apporter son aide et ses conseils avisés aux moments les plus opportuns.

Par ailleurs, l'élaboration de programmes numériques nécessaires à l'investigation de systèmes dynamiques chaotiques n'aurait pu être réalisée sans la contribution d'Eric Javoy, informaticien.

Je voudrais adresser tous mes remerciements à Arnaud De Vallouit, doctorant en Littérature française, pour son aide précieuse dans la traduction d'ouvrages italiens et ses conseils pour la rédaction de ce mémoire.

J'ai pu bénéficier du support logistique sans faille du service de reprographie de l'I.U.T. et notamment de l'aide de François Léone et Patricia Andronaco. Je tiens à leur manifester mon meilleur souvenir ainsi qu'à toutes les personnes du service de prêt entre bibliothèques (P.E.B.), et tout spécialement à Mesdemoiselles Anne Pajard et Cécile Férran pour la grande efficacité dont elles ont fait preuve.

Enfin, je voudrais rendre hommage à celle qui a su comprendre et partager les sacrifices qu'impliquent un tel investissement. Qu'elle reçoive ici l'expression de toute ma reconnaissance. J'adresse d'affectueuses pensées à mes parents, grandsparents et amis qui m'ont toujours soutenu dans la voie que j'ai choisie.

"Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue..."

H. Poincaré - Science et Méthode -

# Introduction

# 1 - Systèmes dynamiques et variétés lentes

Cette étude s'inscrit dans le cadre de la description théorique de la dynamique d'un système physique donné (mécanique, électronique, biologique, économique, ...) sous l'angle d'un modèle mathématique qui s'exprime en termes de variables d'état, permettant de définir l'état instantané du système, et d'équations d'évolution faisant passer ces variables d'un instant initial à un instant final. Suivant que ces instants sont séparés par une durée finie, ou au contraire, infinitésimale, les équations d'évolution sont des itérations d'applications (Collet *et al.* [1980]) ou des équations différentielles (Hirsch et al. [1974h]). Dans le premier cas, la terminologie consacrée est système dynamique à temps discret, dans le second, à temps continu. Ce mémoire concerne plus particulièrement les systèmes dynamiques autonomes à temps continu, i.e., les systèmes d'équations différentielles dans lesquelles le temps n'apparaît pas explicitement. Lorsque de tels systèmes font intervenir plusieurs échelles de temps caractéristiques, ce qui se traduit par la présence d'un ou plusieurs petits paramètres  $\varepsilon$ ,  $\xi$ , ... en facteur dans l'une ou plusieurs des composantes de leur champ de vecteurs vitesse, ils sont qualifiés de lents-rapides. Les systèmes dynamiques autonomes lents-rapides (notés (SDAL-R) dans ce mémoire) ont, dans un premier temps, été étudiés à l'aide de la théorie des perturbations singulières (Andronov et al. [1966]) qui a permis de mettre en évidence une dichotomie du mouvement en trajectoires lentes et rapides. Le qualificatif " singulier " fait référence au fait que lorsque l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro, le nombre de degrés de liberté du système change. Ses solutions convergent alors de façon exponentiellement rapide (Tihonov [1952]) vers l' $\varepsilon$ -voisinage de variétés lentes, i.e., de variétés sur lesquelles les composantes du champ de vecteurs vitesse sont des polynômes de degré zéro en  $\varepsilon$ . Le mouvement rapide détermine *l'attractivité* (resp. *la répulsivité*) de ces *variétés lentes*, qui, dans le cas où  $\varepsilon$  multiplie une seule composante de la vitesse, sont des courbes en dimension deux, des surfaces en dimension trois. Lorsque le jacobien fonctionnel du (SDAL-R) possède une valeur propre *rapide* dominante, i.e., négative et grande en module par rapport aux autres et pouvant être représentée par un polynôme de degré moins un

en  $\varepsilon$ , la variété lente est dite attractive. Une méthode d'analyse mathématique : approximation du système linéaire tangent, développée par Rossetto et al. [1998] a permis, d'une part de démontrer sous certaines conditions l'existence de ces va*riétés lentes* pour  $\varepsilon \neq 0$ , i.e., pour tout (SDAL-R), et en a fourni d'autre part les équations. Cette méthode a ensuite été étendue à des systèmes dynamiques autonomes considérés comme lents-rapides (notés (SDACCL-R) dans ce mémoire), i.e., à des systèmes dynamiques ne possédant pas de petits paramètres en facteur dans l'une ou plusieurs des composantes de leur champ de vecteurs vitesse, n'ayant par conséquent pas d'approximation singulière, mais dont la matrice jacobienne fonctionnelle possède au moins une valeur propre *rapide* dominante sur un large domaine de l'espace des phases. En outre, l'existence et la localisation de la variété lente d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) permettent une approche qualitative de la caractérisation géométrique d'un attracteur qui est d'une grande importance dans l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires et chaotiques. C'est la raison pour laquelle la détermination de l'équation analytique de la variété lente a fait l'objet d'une étude approfondie qui est au cœur de ce mémoire. Ainsi, une nouvelle méthode de détermination de l'équation analytique de la variété lente, basée sur l'application du formalisme de la Géométrie Différentielle à l'étude des systèmes dynamiques, est proposée.

# 2 - Géométrie différentielle et systèmes dynamiques

Du XVIII<sup>e</sup> siècle à nos jours les méthodes de résolution de systèmes d'équations différentielles, i.e., de *systèmes dynamiques*, n'ont cessé d'évoluer. Cependant, la non-intégrabilité de certains de ces systèmes a conduit à utiliser la *Géométrie Différentielle* dans le but d'étudier de manière géométrique le comportement de leurs solutions. Afin de situer l'approche présentée dans ce mémoire par rapport au développement de ces méthodes, un bref rappel historique est présenté ci-dessous<sup>1</sup>.

La *Géométrie Différentielle*, qui vise à étudier les propriétés locales et intrinsèques des courbes et des surfaces non-euclidiennes, tient son nom du fait qu'elle est née de la possibilité d'une *interprétation cinématique* qu'apporte le calcul infinitésimal à l'étude des courbes *planes* ou *gauches*. L'histoire des courbes *planes* est intimement liée à l'histoire et aux développements du calcul infinitésimal, et les premiers résultats obtenus au XVII<sup>e</sup> siècle sont directement issus de considérations géométriques et cinématiques. Les courbes dans l'espace à trois dimensions, i.e., les courbes *gauches* (dites à " double courbure ") ont été étudiées par A. Clairaut [1731]. Les notions d'arc et de rayon de courbure des courbes *planes* ainsi

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Pour une étude détaillée de l'histoire de la Géométrie Différentielle voir Struik ([1933a], [1933b])

que celle de plan osculateur ont été introduites par J. Bernoulli (1744). C'est dans un mémoire présenté en 1771 que G. Monge [1785], introduisit les notions fondamentales de rayon de courbure et de surface réglée développable engendrée par les tangentes à une courbe gauche. Les mots " angle de courbure " et " angle de torsion "furent utilisés pour la première fois par L.-L. de Vallée [1925] dans son Traité de géométrie descriptive qui contient la théorie des courbes dans l'espace et celle des surfaces. En 1826, L.-A. Cauchy [1892] définit la normale principale et donna des expressions de la courbure et de la torsion. Le terme "binormale " fut utilisé pour la première fois par A.-J.-C. Barré de Saint Venant [1845] dans son Mémoire sur les lignes courbes non-planes. Puis, F. Frénet [1852] et J.-A. Serret (1850) démontrèrent l'équivalent des formules qui portent leur nom. A partir de 1887, G. Darboux publia ses Leçons sur la théorie des surfaces [1887-96] dans lesquelles il exposa, entre autres, ses travaux sur la méthode du trièdre mobile et son étude des surfaces définies par des propriétés cinématiques et des surfaces minima. A la même époque, l'étude des fonctions définies par les équations différentielles connut un essor considérable. La méthode de résolution consistait alors à construire un développement en série autour des points " singuliers ". Cauchy, qui le premier établit l'existence et l'unicité des solutions, élabora vers 1830 une méthode qu'il avait dénommée " Calcul des limites ", afin de démontrer que, sous certaines hypothèses, la série convergeait vers une solution. Cependant, Cauchy avait exclu dans son analyse certains points " singuliers ", i.e., des points où le comportement des solutions, plus compliqué, était impossible à affronter par cette méthode. Toutefois, comme l'avaient montré d'abord C. Briot et J.-C. Bouquet et ensuite L. Fuchs, dans certains cas, aux voisinages de points singuliers dits "réguliers ", on pouvait encore représenter la fonction par des séries convergentes. Néanmoins, face à l'insuffisance de la méthode d'intégration par séries, Henri Poincaré [1881] se tourna vers une étude globale qui consistait à analyser de manière qualitative le comportement des solutions dans " toute l'étendue du plan ". Poincaré écrivit :

"Nos développements ne nous apprendraient pas, à moins d'un travail considérable, si par exemple la fonction va constamment croissant, ou si elle oscille entre certaines limites, si elle peut croître au-delà de toute limite ... En d'autres termes, si l'on considère que la fonction définit une courbe plane, on ne saurait pas quelle est la forme générale de cette courbe. " Dans une série de mémoires intitulés "Sur les courbes définies par une équation différentielle " ([1881], [1882], [1885], [1886]), il propose d'étudier, sans intégration préalable, les propriétés géométriques des *courbes trajectoires* solutions d'équations différentielles<sup>2</sup> et, en particulier, la nature et le comportement de leurs points " singuliers ".

## 3 - Nouvelle approche proposée dans cette étude

La méthode exposée dans ce mémoire consiste à appliquer le formalisme de la *Géométrie Différentielle* à l'étude des *courbes trajectoires* intégrales d'un système dynamique et, plus particulièrement, à utiliser la théorie des courbes et des surfaces à la détermination de l'équation des *variétés lentes* de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R). Ces variétés seront alors envisagées comme des courbes ou des surfaces " définies par des propriétés cinématiques ".

Ainsi, l'utilisation des notions de plan osculateur, de courbure et de torsion, permettra, d'une part, de déterminer directement l'équation analytique de la variété lente de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R) et de caractériser son attractivité, i.e., sa stabilité, d'autre part, d'apporter une interprétation cinématique à l'évolution des trajectoires sur ces variétés. De plus, cette méthode fournira également une approche *qualitative* de la caractérisation géométrique d'un attracteur grâce à la courbure et à la torsion et grâce à l'utilisation du champ de vecteurs accélération, dérivé du champ de vecteurs vitesse, qui engendre trois nouvelles variétés : l'approximation singulière de l'accélération, la variété uniforme, et la variété singulière. Il sera démontré que la première constitue l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de la variété lente associée à l'approximation singulière, tandis que la seconde correspond au lieu des points où la norme euclidienne du champ de vecteurs accélération tend vers un extremum local ou peut s'annuler. Ces deux variétés vont alors permettre d'établir des pièges à l'intérieur desquels les trajectoires lentes du système seront contraintes d'évoluer. La troisième, définie par l'intersection de la variété lente et d'une section quelconque de Poincaré située dans son voisinage, fournira une description de la structure de l'attracteur comme le déploiement de cette variété singulière dans l'espace des phases. Ces variétés, ainsi que le portrait de phase du système dynamique considéré, seront représentées au moyen de logiciels utilisant des algorithmes d'intégrations numériques.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> L'approche géométrique des équations différentielles de Poincaré en contraste avec les développements de l'analyse au dix-neuvième siècle a été étudiée par Gilain [1977g]

# 4 - Etude numérique des systèmes dynamiques

Les différents aspects d'une étude numérique sont ici rappelés dans le but de préciser les méthodes utilisées, leurs avantages et leurs limites. L'étude des systèmes dynamiques non-intégrables ainsi que le tracé des variétés lentes qui peuvent leur être associés a été considérablement facilitée par l'utilisation de logiciels comme : Mathematica<sup>®</sup>, MATLAB<sup>®</sup> ou MAPLE<sup>®</sup> qui emploient différents schémas d'intégration numérique comme : Adams-Bashforth-Moulton, Euler, BDF (implicit Backward Differentiation Formulas) ou Runge-Kutta selon le système dynamique considéré. Ces logiciels, qui possèdent chacun leur propre fonctionnalité dans les choix du schéma et du pas d'intégration numérique et, surtout dans celui de la spécification des erreurs systématiques (erreur maximale admissible, relative ou absolue), produisent en général le même résultat. On peut cependant en distinguer deux catégories : les logiciels de calcul numérique comme MATLAB<sup>®</sup> et les logiciels de calcul formel et symbolique comme Mathematica<sup>®</sup> ou MAPLE<sup>®</sup>. Dans ce mémoire, ces trois logiciels ont été utilisés en parallèle de manière comparative et complémentaire. De plus, l'adjonction et la conception de programmes compatibles avec chacun d'eux et disponibles à l'adresse suivante : http ://ginoux.univ-tln.fr ont permis de constituer un outil efficace d'investigation des systèmes dynamiques non-linéaires et chaotiques. Ces programmes permettent par exemple, de calculer la dimension fractale de l'attracteur, de tracer le diagramme de bifurcation, l'application de Poincaré et la variété lente. En ce qui concerne cette dernière, la méthode de l'approximation du système linéaire tangent, développée par Rossetto et al. [1998], fournissait l'équation de la variété lente à partir des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du système linéaire tangent. Son tracé nécessitait, d'une part, que l'on utilise un logiciel de calcul formel et, d'autre part, que les valeurs propres soient réelles sur le domaine considéré. Cette difficulté, qui a motivé une partie de la recherche consacrée à cette étude, a été levée grâce à la formalisation de cette méthode et à l'élaboration d'un algorithme mathématique rendant cette équation indépendante des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du système linéaire tangent. Ces résultats, présentés au chapitre 8, permettent d'obtenir plus directement et plus précisément le tracé de la variété lente de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R) avec n'importe quel type de logiciel. C'est cette nécessité de rendre l'équation de la variété lente indépendante des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du système linéaire tangent qui a conduit à l'élaboration de la nouvelle méthode de détermination proposée dans ce mémoire.

## **5** - Exemples et applications

La nouvelle approche proposée s'applique en automatique (stabilité), éléctronique (oscillateurs), physique (laser, météorologie), chimie (cinétique chimique), biologie (dynamique des populations), neurophysiologie (influx nerveux).

Les modèles de Van der Pol, de Chua et de Lorenz seront utilisés respectivement à titre d'exemples pour illustrer cette nouvelle méthode de détermination de l'équation de la variété lente de (SDAL-R) et de (SDACCL-R) qui sera ensuite appliquée à des modèles de type prédateur-proie empruntés à la "dynamique " des populations. Le terme "dynamique" est envisagé dans ce contexte sous une acception différente de celle qui est utilisée en Physique. En effet, si la "dynamique " est l'étude d'un corps en mouvement sous l'effet des forces qui lui sont appliquées, l'analyse de l'évolution d'une population consiste à suivre ses variations d'abondance dans le temps sans pouvoir les expliquer par des *forces*<sup>3</sup>. Ce qui revient essentiellement à modéliser cette " dynamique ", de sorte qu'elle soit en mesure de justifier les variations passées, et surtout de prévoir les futures. La modélisation mathématique en " dynamique " des populations a débuté à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle avec les travaux de Thomas R. Malthus [1798] qui introduisit le *paradigme* de la croissance exponentielle. Ce modèle qui conduisait à une croissance illimitée, donc irréaliste, des populations, fut ensuite modifié par Pierre-François Verhulst [1838] qui proposa de lui ajouter un terme de limitation. Le résultat, connu sous le nom de loi logistique, a été appliqué avec succès par Verhulst à la détermination de la population limite de la France et de la Belgique. De plus, son accord parfait avec les statistiques de Raymond Pearl et Lowell J. Reed [1920] sur la croissance de la population des Etats-Unis a également été constaté. Néanmoins, de multiples causes pouvant être à l'origine de profonds changements dans l'évolution, la principale difficulté de la modélisation en "dynamique " des populations est de parvenir à transcrire en termes mathématiques les facteurs responsables de ces variations d'abondance. Ces facteurs, appelés réponses fonctionnelles, peuvent, dans un premier temps, être envisagés en termes de croissance (natalité) et de décroissance (mortalité). Cependant, dès lors que l'on ne se limite plus à l'étude d'une population "idéale", i.e., vivant seule dans un milieu invariable avec lequel elle n'interagit pas, mais que l'on s'intéresse à la co-existence de plusieurs populations en interactions mutuelles ou avec le milieu extérieur, d'autres réponses fonctionnelles interviennent. C'est au début du XX<sup>e</sup> siècle, plus précisément en 1926, avec les travaux de Vito Volterra [1926v] que ces modèles prirent un immense essor. Un de ses nombreux ouvrages intitulé : "Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie" [1931v] est la pierre fondatrice de la modélisation en dynamique des populations et en donne les

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>D'après Frontier [2001] la terminologie exacte devrait être "cinétique" des populations.

premiers développements. C'est la raison pour laquelle une note bibliographique lui est consacrée à la fin de ce mémoire. Ainsi, considérant une population au sein de laquelle co-existent plusieurs espèces, Volterra élabore puis étudie les différentes formes d'interactions entre ces espèces. Le cas où elles " se disputent la même nourriture " est connu sous le nom de modèle de type compétition. Celui où l'une des espèces " dévore les autres " est connu sous le nom de modèle de type prédateur-proie. Le cas d'une entraide mutuelle entre espèces baptisé Allee effect a également été envisagé, Allee [1931a]. Le modèle est alors de type coopération. Tout au long du XX<sup>e</sup> siècle ces formes d'interactions, et surtout les réponses fonctionnelles qui leur correspondent, ont fait l'objet de nombreuses recherches visant à transcrire de manière mathématique le plus fidèlement possible le comportement observé. Plus particulièrement, la prédation a fait l'objet de toutes les attentions. La réponse fonctionnelle proposée par Volterra basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents, a été modifiée successivement par G.F. Gause [1935], V.S. Ivlev [1955i], C.S. Holling ([1959a], [1959b]), ... dans le but de rendre compte à la manière de la loi logistique, d'un niveau de saturation dans la prédation, i.e., d'une certaine satiété du prédateur vis à vis de sa proie. La croissance et la mortalité naturelles ont également été modifiées dans le même but en fonction des applications. L'étude d'un modèle de type *prédateur-proie* à trois espèces " dont la première se nourrit de la seconde, et celle-ci de la troisième ", qui avait été envisagée par Volterra [1931v], a conduit à l'élaboration des modèles de Rosenzweig-MacArthur [1963] et Hastings-Powell [1991] dont les solutions chaotiques prennent la forme d'attracteurs étranges. Ces modèles, qui sont des (SDAL-R) ou des (SDACCL-R), ont fait l'objet d'une analyse détaillée exposée dans ce mémoire. Ils ont permis d'aboutir à la conception d'un nouveau modèle de type *prédateur-proie* à trois espèces : le modèle Volterra-Gause (Ginoux *et al.* [2005]) dont l'étude a mis en évidence plusieurs bifurcations de Hopf [1942] et une cascade de doublement de période conduisant à un attracteur chaotique ayant la forme d'un escargot. L'élaboration de ce modèle, qui est également un (SDAL-R), constituait l'un des objectifs de cette étude. Il sera tout d'abord présenté dans ce mémoire, puis utilisé afin de mettre en application la nouvelle méthode de détermination de l'équation de la variété lente, et permettra ensuite d'illustrer le concept de déploiement.

# 6 - Plan du mémoire

Le premier chapitre situe le cadre d'étude de ce mémoire avec les définitions de système dynamique, système dynamique autonome lent-rapide (SDAL-R), système dynamique considéré comme lent-rapide (SDACCL-R).

Dans le second chapitre, les définitions de fonctions vectorielles cinématiques, de *courbure*, de *torsion*, ainsi que celles de repère de Frénet et de *plan osculateur* sont tout d'abord rappelées. Un nouveau critère permettant de caractériser l'attractivité d'une *variété* est alors présenté. De plus, les domaines *lents* et *rapides* dans lesquels les *courbes trajectoires*, intégrales de systèmes dynamiques, évoluent, sont définis par une relation mathématique permettant de les discriminer et de les représenter.

Une nouvelle méthode de détermination de l'équation analytique de la *variété lente* de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R) est ensuite proposée. Ainsi, il sera établi que l'équation du *plan osculateur* représente l'équation analytique de la *variété lente* de ces systèmes dynamiques, et que le signe de la *torsion* permet de statuer sur son attractivité, i.e., sa stabilité.

Puis, trois nouvelles variétés : l'approximation singulière de l'accélération, la variété uniforme et la variété singulière, introduites grâce à l'utilisation du champ de vecteurs accélération dérivé du champ de vecteurs vitesse, sont définies. Il sera démontré que la première constitue l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de la variété lente, que la seconde telle qu'elle est définie se situe dans le même voisinage. Enfin, la troisième fournira une description de la structure géométrique de l'attracteur grâce au concept de déploiement.

La stabilité des *courbes trajectoires*, intégrales de systèmes dynamiques est étudiée dans le chapitre trois grâce à une méthode de construction de *pièges*. En utilisant deux *variétés* dont l'attractivité sera définie au moyen du nouveau critère, il sera possible de construire des *pièges* à l'intérieur desquels les *trajectoires lentes* du système dynamique seront contraintes d'évoluer. Ces domaines de l'espace des phases constitueront des régions de stabilité pour les *courbes trajectoires*.

Le chapitre quatre consiste en une présentation non-exhaustive des outils et des méthodes numériques utilisés pour l'étude des systèmes dynamiques non-intégrables.

Le chapitre cinq a pour objectif d'illustrer la nouvelle méthode de détermination de l'équation analytique de la *variété lente* de (SDAL-R) en l'appliquant au modèle de B. Van der Pol puis à celui de L.O. Chua. Dans le chapitre six, cette nouvelle méthode est étendue à un (SDACCL-R) : le modèle d'E.N. Lorenz.

Le chapitre sept est consacré à des modèles de "dynamique " des populations de type *prédateur-proie* : Volterra-Gause, Rosenzweig-MacArthur, Hastings-Powell. Dans chaque cas, l'utilisation de programmes permettra de mettre en lumière certaines caractéristiques de ces systèmes dynamiques. De plus, le modèle Volterra-Gause de type *prédateur-proie* est ensuite utilisé pour illustrer le concept de *déploiement* d'une *variété singulière*, i.e., pour décrire la structure de l'attracteur.

La formalisation de la méthode d'analyse mathématique, *approximation du système linéaire tangent*, et un algorithme mathématique rendant l'équation de la *variété lente* indépendante des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du *système linéaire tangent* sont présentés dans le chapitre huit. Cet algorithme est également disponible à l'adresse suivante : http://ginoux.univ-tln.fr

La conclusion résume les principaux résultats de cette étude en les replaçant dans leur contexte et propose des perspectives.

Enfin, la note historique et bibliographique a pour but de mettre en lumière un des ouvrages de Vito Volterra dans lequel tous les aspects de la modélisation en "dynamique" des populations semblent avoir été envisagés.

# Chapitre 1

# Systèmes dynamiques lents-rapides

Ce premier chapitre a pour but de rappeler les définitions et les propriétés des (SDAL-R) et des (SDACCL-R)

## 1.1 Système dynamique

Dans tout ce qui suit nous considérons un système d'équations différentielles défini sur un compact E de  $\mathbb{R}$  par :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Im}\left(\vec{X}\right) \tag{1.1}$$

avec

$$\vec{X} = {}^{t} \left[ x_1, x_2, ..., x_n \right] \in E \subset \mathbb{R}^n$$

et

$$\overrightarrow{\Im}\left(\vec{X}\right) = {}^{t}\left[f_{1}\left(\vec{X}\right), f_{2}\left(\vec{X}\right), ..., f_{n}\left(\vec{X}\right)\right] \in E \subset \mathbb{R}^{n}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{\Im}(\overrightarrow{X})$  défini sur E un champ de vecteurs vitesse dont les composante  $f_i$ , supposées continues, de classe  $C^{\infty}$  sur E et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz (Cf. Coddington *et al.* [1955c]).

Ce système admet une courbe intégrale  $\vec{X}(t)$  tangente à  $\vec{\Im}$  en tout point et dont les valeurs définissent les *états* du *système dynamique* décrits par l'équation (1.1). Chaque composante du champ de vecteurs vitesse ne dépendant pas ici explicitement du temps, le système sera considéré comme *autonome*.

# 1.2 Système dynamique autonome lent-rapide

Un (SDAL-R) est un système dynamique défini sous les mêmes conditions que (1.1) mais comportant un petit paramètre réel  $\varepsilon$  multiplicatif dans l'une des composantes de son champ de vecteurs vitesse :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\mathfrak{S}}_{\varepsilon} \left( \vec{X} \right) \tag{1.2}$$

avec

$$\vec{X} = {}^{t} \left[ x_1, x_2, \dots, x_n \right] \in E \subset \mathbb{R}^n$$

et

$$\vec{\mathfrak{S}}_{\varepsilon}\left(\vec{X}\right) = {}^{t}\left[\varepsilon^{-1}f_{1}\left(\vec{X}\right), f_{2}\left(\vec{X}\right), ..., f_{n}\left(\vec{X}\right)\right] \in E \subset \mathbb{R}^{n}$$
$$0 < \varepsilon \ll 1$$

Démontrons que le système défini par (1.2) est un (SDAL-R), i.e., que son jacobien fonctionnel possède une valeur propre qualifiée de "lente" et une qualifiée de "rapide". Rappelons qu'une valeur propre est dite "rapide" si elle est grande.

*Démonstration*. Considérons tout d'abord un (SDAL-R) de dimension deux défini par :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\mathfrak{F}}_{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$
(1.3)

où les fonctions f et g qui sont supposées continues, de classe  $C^{\infty}$  sur E et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz (Cf. Coddington *et al.* [1955c]). Le jacobien fonctionnel du système différentiel défini par (1.3) s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$
(1.4)

La somme et le produit des valeurs propres déduites du polynôme caractéristique à partir du jacobien fonctionnel (1.4) s'écrivent :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = p \tag{1.5}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) = q \tag{1.6}$$

Supposons que les deux valeurs propres soient "rapides ", i.e.,

$$\lambda_1 = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$$
$$\lambda_2 = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$$

Ces deux valeurs propres ne peuvent être simultanément " rapides ". En effet, cette hypothèse, si elle satisfait l'équation (1.5) est en contradiction avec (1.6). Cette *réduction à l'impossible* permet de montrer que si l'une des deux valeurs propres est " rapide ", i.e., d'ordre  $O(\varepsilon^{-1})$ , l'autre est nécessairement " lente ", i.e., d'ordre  $O(\varepsilon^{0})$ . Ainsi, le système différentiel défini par (1.2) est bien un (SDAL-R). Explicitons les valeurs propres du jacobien fonctionnel (1.4) :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( p \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

avec

$$\Delta = p^2 - 4q$$

Soit :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}} \right)$$
(1.7)

Puisque le discriminant contient un petit paramètre  $\varepsilon \ll 1$ , on peut effectuer un développement limité de sa racine carrée :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \frac{4}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}} = \left|\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right| \sqrt{1 + \frac{\frac{4}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$
$$\sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \frac{4}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}} \approx \left|\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right| (1 + O(\varepsilon))$$

En remplaçant dans l'expression (1.7), on obtient à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ :

$$\lambda_{1} \approx \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} + O\left(\varepsilon\right)$$
$$\lambda_{2} \approx \frac{\partial g}{\partial u} + O\left(\varepsilon\right)$$

Ainsi, on démontre qu'à l'ordre le plus bas en  $\varepsilon$ , le jacobien fonctionnel du système dynamique défini par (1.4) possède une valeur propre " rapide "  $\lambda_1$  d'ordre  $O(\varepsilon^{-1})$  et une valeur propre " lente "  $\lambda_2$  d'ordre  $O(\varepsilon^0)$ . Ainsi, le système différentiel défini par (1.3) est bien un (SDAL-R).

Le même mode de raisonnement peut être conduit à l'ordre trois.

*Démonstration*. Considérons maintenant un (SDAL-R) de dimension trois défini par :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\mathfrak{S}}_{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix}$$
(1.8)

où les fonctions f, g et h qui sont supposées continues, de classe  $C^{\infty}$  sur E et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifient les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz (Cf. Coddington *et al.* [1955c]). Le jacobien fonctionnel du système différentiel défini par (1.8) s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$
(1.9)

La somme et les produits des valeurs propres déduites du polynôme caractéristique à partir du jacobien fonctionnel (1.9) s'écrivent :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = T$$
(1.10)

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = P =$$
$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = D = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

où T et D représentent la trace et le déterminant du jacobien fonctionnel J et P, le produit des valeurs propres prises deux à deux. En utilisant le même raisonnement que précédemment, on vérifie, à partir des équations (1.10) que les trois valeurs propres ne peuvent être simultanément "rapides". De même, deux valeurs propres ne peuvent être simultanément "rapides". Ceci permet de montrer que si l'une des trois valeurs propres est "rapide", i.e. d'ordre  $O(\varepsilon^{-1})$ , les deux autres sont nécessairement "lentes", i.e., d'ordre  $O(\varepsilon^0)$ . Ainsi, le système différentiel défini par (1.8) est bien un (SDAL-R). Il a été mis en évidence dans Rossetto *et al.* [1998] qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice jacobienne fonctionnelle de rang n possède une et une seule valeur propre " rapide " est qu'une et une seule de ses lignes ou de ses colonnes possède un facteur multiplicatif  $\varepsilon^{-1}$ . On peut donc étendre ce raisonnement à la dimension n et démontrer que le système différentiel défini par (1.2) est bien un (SDAL-R)

# **1.3** Système dynamique considéré comme autonome lent-rapide

Il a été constaté numériquement qu'un système dynamique défini sous les mêmes conditions que (1.1) ne comportant aucun petit paramètre multiplicatif dans l'une des composantes de son champ de vecteurs vitesse et n'ayant par conséquent pas d'*approximation singulière*, peut être considéré comme *lent-rapide* si sa matrice jacobienne fonctionnelle possède au moins une valeur propre grande et négative sur un large domaine de l'espace des phases. C'est le cas du modèle d'E.N. Lorenz [1963] qui sera étudié au chapitre 6. On peut néanmoins remarquer, sans perte de généralités, qu'il n'existe que peu de système dynamiques chaotiques qui ne soient *lents-rapides*. Une base théorique est apportée à cette constatation par la structuration de l'attracteur grâce à la notion de *variété singulière*.

# **Chapitre 2**

# Nouvelle approche de la variété lente de systèmes dynamiques

Les méthodes développées dans ce chapitre consistent à appliquer le formalisme de la *Mécanique du Point* et celui de la *Géométrie Différentielle* à l'étude d'un système dynamique. Le formalisme de la *Mécanique du Point* va fournir une interprétation du comportement des *courbes trajectoires*, intégrales d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R), durant les différentes phases de leurs mouvements en termes de variables *cinématiques* : vitesse et accélération. Ces variables vont permettre d'une part, de discriminer les domaines *lents* et *rapides* de l'espace des phases et d'autre part, d'introduire de nouvelles variétés utilisant l'accélération dont l'importance pour l'évolution de la dynamique de ces systèmes sera mise en évidence. L'utilisation des propriétés du formalisme de la *Géométrie Différentielle*, plus particulièrement celles de *plan osculateur*, de *courbure* et de *torsion*, va permettre de déterminer directement l'équation analytique de la *variété lente* de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R) et de caractériser son *attractivité*, i.e., sa stabilité.

## 2.1 Fonctions vectorielles cinématiques

Puisque cette approche consiste à utiliser le formalisme de la *Mécanique du Point*, il importe tout d'abord de rappeler les définitions des variables *cinématiques* nécessaires à son développement. Ainsi, on peut assimiler l'intégrale du système (1.1) ou (1.2) aux coordonnées, i.e., à la position d'un point M à l'instant t. Cette courbe intégrale définie par la fonction vectorielle  $\vec{X}(t)$  de la variable scalaire t représente la *trajectoire* du point M.

### 2.1.1 Vecteur vitesse instantanée

Puisque la fonction vectorielle  $\vec{X}(t)$  de la variable scalaire t représente la *trajectoire* du point M, la différentielle totale de  $\vec{X}(t)$  est la fonction vectorielle  $\vec{V}(t)$  de la variable scalaire t qui représente le vecteur vitesse instantanée du point M à l'instant t. On note :

$$\overrightarrow{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt} = \overline{\Im}\left(\overrightarrow{X}\right)$$
(2.1)

Le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  est tangent en tout point à la *trajectoire*.

### 2.1.2 Vecteur accélération instantanée

Puisque la fonction vectorielle  $\overrightarrow{V}(t)$  de la variable scalaire t représente le vecteur vitesse du point M, la différentielle totale de  $\overrightarrow{V}(t)$  est la fonction vectorielle  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  de la variable scalaire t qui représente le vecteur accélération instantanée du point M à l'instant t. On note :

$$\overrightarrow{\gamma}(t) = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$$
 (2.2)

Les composantes  $f_i$  du vecteur vitesse étant supposées continues, de classe  $C^{\infty}$  sur E et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , il est possible de calculer la différentielle totale du champ de vecteurs vitesse défini par (1.1) ou (1.2). En utilisant la dérivation des fonctions composées, une dérivée au sens de Fréchet apparaît :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\Im}}{d\vec{X}}\frac{d\vec{X}}{dt}$$
(2.3)

En remarquant que  $\frac{d\vec{s}}{d\vec{X}}$  représente la matrice jacobienne fonctionnelle J du système (1.1) ou (1.2), et tenant compte des équations (2.1) et (2.2), on obtient la relation suivante dont le rôle est très important :

$$\overrightarrow{\gamma} = JV$$
 (2.4)

### 2.1.3 Le repère de Frénet

En utilisant le repère de Frénet [1852], i.e., un repère mobile construit à partir de la *courbe trajectoire*  $\vec{X}(t)$  orienté dans la direction du mouvement du point courant M, on peut définir  $\vec{\tau}$  le vecteur unitaire tangent à la *courbe trajectoire* en M,  $\vec{\nu}$  le vecteur normal, i.e., la normale principale en M dirigée vers l'intérieur de la concavité de la courbe et  $\vec{\beta}$  le vecteur unitaire binormal à la *courbe trajectoire*  en M de sorte que le trièdre  $(\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta})$  soit direct. Puisque le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  est tangent en tout point M à la *courbe trajectoire*, on peut construire le vecteur unitaire tangent<sup>1</sup> ainsi :

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{V}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}$$
(2.5)

De la même manière, on peut construire le vecteur unitaire binormal :

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{\gamma}}{\left\| \vec{V} \wedge \vec{\gamma} \right\|}$$
(2.6)

et le vecteur unitaire :

$$\vec{\nu} = \vec{\beta} \wedge \vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{\tau}}}{\left\|\dot{\vec{\tau}}\right\|} = \frac{\vec{V}^{\perp}}{\left\|\vec{V}^{\perp}\right\|}$$
(2.7)

avec

$$\left\| \overrightarrow{V} \right\| = \left\| \overrightarrow{V}^{\perp} \right\| \tag{2.8}$$

où le vecteur  $\overrightarrow{V}^{\perp}$  représente le vecteur normal au vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  dirigé vers l'intérieur de la concavité de la *courbe trajectoire* et où le point "·" représente la dérivée par rapport au temps. Ainsi, les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  s'écrivent :

$$\gamma_{\tau} = \frac{\overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{V}}{\left\| \overrightarrow{V} \right\|}$$
(2.9)

$$\gamma_{\nu} = \frac{\left\| \overrightarrow{\gamma} \wedge \overrightarrow{V} \right\|}{\left\| \overrightarrow{V} \right\|}$$
(2.10)

En remarquant que la variation de la norme du vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  peut s'écrire :

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Dans tout ce mémoire la norme euclidinne est définie sur l'espace des phases par :  $\left\|\vec{X}(t)\right\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ 

$$\frac{d\left\|\overrightarrow{V}\right\|}{dt} = \frac{\overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{V}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|}$$
(2.11)

Et en comparant avec les équations (2.9) et (2.11) on déduit que

$$\frac{d\left\|\overrightarrow{V}\right\|}{dt} = \gamma_{\tau} \tag{2.12}$$

En tenant compte de l'équation (2.8) et en utilisant les définitions du produit scalaire et du produit vectoriel, les expressions, des composantes, tangentielle (2.9) et normale (2.10), du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  peuvent finalement s'écrire :

$$\gamma_{\tau} = \frac{\overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{V}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|} = \frac{d\left\|\overrightarrow{V}\right\|}{dt} = \left\|\overrightarrow{\gamma}\right\| Cos\left(\widehat{\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{V}}\right)$$
(2.13)

$$\gamma_{\nu} = \frac{\left\| \overrightarrow{\gamma} \wedge \overrightarrow{V} \right\|}{\left\| \overrightarrow{V} \right\|} = \left\| \overrightarrow{\gamma} \right\| \left| Sin\left( \widehat{\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{V}} \right) \right|$$
(2.14)

### **Remarque :**

En utilisant, l'identité de Lagrange :

$$\left\|\overrightarrow{\gamma}\wedge\overrightarrow{V}\right\|^{2}+\left(\overrightarrow{\gamma}\cdot\overrightarrow{V}\right)^{2}=\left\|\overrightarrow{\gamma}\right\|^{2}\cdot\left\|\overrightarrow{V}\right\|^{2}$$

on retrouve facilement la norme du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$ .

$$\begin{split} \|\overrightarrow{\gamma}\|^{2} &= \gamma_{\tau}^{2} + \gamma_{\nu}^{2} = \frac{\left\|\overrightarrow{\gamma} \wedge \overrightarrow{V}\right\|^{2}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|^{2}} + \frac{\left(\overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{V}\right)^{2}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|^{2}} = \frac{\left\|\overrightarrow{\gamma} \wedge \overrightarrow{V}\right\|^{2} + \left(\overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{V}\right)^{2}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|^{2}} \\ &= \frac{\left\|\overrightarrow{\gamma}\right\|^{2} \cdot \left\|\overrightarrow{V}\right\|^{2}}{\left\|\overrightarrow{V}\right\|^{2}} = \left\|\overrightarrow{\gamma}\right\|^{2} \end{split}$$

## 2.2 Propriétés de la courbe trajectoire

Dans cette approche l'utilisation du formalisme de la *Géométrie Différentielle* va permettre une étude des propriétés métriques de la *courbe trajectoire*, i.e., *courbure* et *torsion* dont les définitions sont rappelées dans ce paragraphe ainsi que celle de *plan osculateur*.

On trouvera par exemple dans Delachet [1964], Struik [1961] ou Kreyszig [1959k], une présentation des théorèmes (2.1) et (2.4) ainsi que leurs démonstrations.

### 2.2.1 Représentation paramétrique de la *courbe trajectoire*

La *courbe trajectoire*  $\vec{X}(t)$  intégrale du système dynamique défini par (1.1) ou par (1.2), est décrite par le mouvement d'un point courant M dont la position dépend d'un paramètre variable : le temps. Cette courbe peut également être définie par sa représentation paramétrique relativement à un repère :

$$x_1 = F_1(t), x_2 = F_2(t), ..., x_n = F_n(t)$$

où grâce aux hypothèses du paragraphe 1.1, les fonctions  $F_i$  sont continues, de classe  $C^{\infty}$  sur un compact E de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (à l'exception des frontières des domaines pour un système défini par morceaux).

### 2.2.2 Plan osculateur à la courbe trajectoire

**Théorème 2.1.** Si une courbe trajectoire  $\vec{X}(t)$  admet en M des vecteurs dérivées premières et secondes  $\vec{V}(t)$ , vitesse instantanée et,  $\vec{\gamma}(t)$  accélération instantanée, non nuls et non colinéaires, le plan formé par les vecteurs  $\vec{V}(t)$  et  $\vec{\gamma}(t)$  est appelé plan osculateur<sup>2</sup> à cette courbe trajectoire en M. L'équation de ce plan, passant par un point fixe I et ayant pour vecteurs directeurs les vecteurs  $\vec{V}(t)$ et  $\vec{\gamma}(t)$ , s'obtient en considérant que le vecteur  $\vec{IM}$  est coplanaire aux vecteurs  $\vec{V}(t)$  et  $\vec{\gamma}(t)$ . Cette condition de coplanarité peut s'écrire :

$$\forall M \in (P) \iff \exists (\mu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{IM} = \mu \overrightarrow{V} + \eta \overrightarrow{\gamma}$$
(2.15)

ou encore :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = 0 \tag{2.16}$$

 $<sup>^{2}</sup>$ du latin *osculare* = *caresser* 

#### **Remarque :**

Dans tout ce qui suit, on considérera que tout plan parallèle au plan osculateur lui est équivalent.

*Démonstration*. La formule de Taylor-Young permet alors d'écrire si M' est le point de paramètre  $\vec{X}(t+h)$  de la *courbe trajectoire* :

$$\vec{X}(t+h) = \vec{X}(t) + h\frac{d\vec{X}}{dt} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} + \dots$$
$$\vec{MM'} = h\vec{V} + \frac{1}{2}h^2\left(\vec{\gamma} + \vec{\zeta}\right)$$

avec  $\overrightarrow{\zeta}$  vecteur infiniment petit avec h. Le plan défini par M' et la tangente en M à la *courbe trajectoire*, i.e., la vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$ , contient donc le vecteur  $\overrightarrow{\gamma} + \overrightarrow{\zeta}$  qui tend vers le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  (non nul et non colinéaire à  $\overrightarrow{V}(t)$ ) lorsque M' tend vers M. On remarque que la notion de plan osculateur ne prend en compte que les deux premiers termes de ce développement et néglige les autres.

### 2.2.3 Courbure de la courbe trajectoire

Soit la *courbe trajectoire*  $\vec{X}(t)$  possédant en M un vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  et, un vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}(t)$ , la *courbure*, qui exprime le taux de variations de la tangente à la *courbe trajectoire*, est définie par :

$$\frac{1}{\Re} = \frac{\left\| \overrightarrow{\gamma} \wedge \overrightarrow{V} \right\|}{\left\| \overrightarrow{V} \right\|^3} = \frac{\gamma_{\nu}}{\left\| \overrightarrow{V} \right\|^2}$$
(2.17)

où R représente le rayon de courbure.

### **Remarque :**

Le lieu des points où la *courbure* est nulle représente le lieu des points d'inflexion analytique, i.e., le lieu des points où la composante normale  $\gamma_{\nu}$  de son vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  s'annule.

### 2.2.4 Torsion de la courbe trajectoire

Soit la *courbe trajectoire*  $\vec{X}(t)$  possédant en M un vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$ , un vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}(t)$  et, un vecteur sur-accélération instantanée  $\dot{\vec{\gamma}}$ , la *torsion*, qui exprime l'écart entre la *courbe trajectoire* et une courbe plane, est définie par :

$$\frac{1}{\Im} = -\frac{\dot{\vec{\gamma}} \cdot \left(\vec{\gamma} \wedge \vec{V}\right)}{\left\|\vec{\gamma} \wedge \vec{V}\right\|^2}$$
(2.18)

où 3 représente le rayon de torsion.

### **Remarque :**

Une *courbe trajectoire* dont la *torsion* est nulle est une courbe dont le *plan osculateur* est en tout point stationnaire. Dans ce cas, la *courbe trajectoire* est une courbe plane.

### 2.2.5 Notions de stabilité

La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires. C'est un concept qui a donné lieu à différentes terminologies qui vont être brièvement rappelées afin de préciser dans quelle acception le terme stabilité est utilisé dans ce mémoire.

Dans le cas d'un système dynamique défini sous les mêmes conditions que (1.2), c'est-à-dire comportant un petit paramètre réel  $\varepsilon$  multiplicatif dans l'une des composantes de son champ de vecteurs vitesse, et que l'on peut écrire :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \overrightarrow{\Im}_{\varepsilon} \left( \vec{X} \right) = \overrightarrow{\Im} \left( \vec{X}, \varepsilon \right)$$

avec  $\varepsilon \in D \subset \mathbb{R}^p$  et où  $\mathbb{R}^p$  représente l'*espace des paramètres*, on a la définition suivante :

### Définition 2.1. Stabilité structurelle

Un point  $\varepsilon \in D$  est dit structurellement stable s'il existe un voisinage W de  $\varepsilon$  tel que, pour tout  $\varepsilon' \in W$ , il existe un homéomorphisme qui applique les courbes trajectoires du système

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Im} \left( \vec{X}, \varepsilon^{\prime} \right)$$

sur celles du système (1.2) et qui préserve la direction du temps. On dit aussi que les deux systèmes sont topologiquement équivalents. Dans le cas contraire, on dit que  $\varepsilon$ <sup>,</sup> est un point de bifurcation.

Considérant maintenant le système dynamique défini sous les mêmes conditions que (1.1) et  $\vec{X}^* \in E \subset \mathbb{R}^n$  un *état* de ce système vérifiant l'équation (1.1) :

$$\frac{d\vec{X}^*}{dt} = \vec{\Im}\left(\vec{X}^*\right)$$

On peut définir en ce point d'équilibre deux types de stabilité (Arnold [1974a])

Définition 2.2. Stabilité uniforme au sens de Lyapunov

Un point fixe  $\vec{X}^* \in E \subset \mathbb{R}^n$  est uniformément stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ T > 0, \ \exists \ \delta > 0 \ / \ \left\| \vec{X} \left( 0 \right) - \vec{X}^* \right\| < \delta \ \Rightarrow \ \left\| \vec{X} \left( t \right) - \vec{X}^* \right\| < \varepsilon \ \forall \ t > T$$

Définition 2.3. Stabilité asymptotique

Un point fixe  $\vec{X}^* \in E \subset \mathbb{R}^n$  est asymptotiquement stable si de plus :

$$\exists 0 < \delta_0 < \delta \land \left\| \vec{X}(0) - \vec{X}^* \right\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \vec{X}(t) = \vec{X}^*$$

On peut étendre ces définitions de stabilité à des systèmes dynamiques possédant des solutions périodiques.

Une autre approche connue sous le nom de théorème de Lyapunov [1899] consiste à linéariser le système dynamique défini sous les mêmes conditions que (1.2) ou (1.2) au voisinage d'un point fixe. Ceci conduit au théorème suivant :

Théorème 2.2. Théorème de stabilité en première approximation

Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du système (1.1) ou (1.2) possèdent une partie réelle strictement négative, alors le point fixe de ce système est asymptotiquement stable. Si au moins unevaleur propre de la matrice jacobienne fonctionnelle du système (1.1) ou (1.2) possèdent une partie réelle strictement positive, le point fixe est instable.

En dimension deux, ce théorème a donné lieu a un *diagramme de stabilité* des points fixes. En dimension trois, c'est Henri Poincaré [1886], dans l'un de ses mémoires intitulé : " Sur les courbes définies par les équation différentielles ", qui a caractérisé la nature des points fixes.

"... les équations du second ordre ont quatre espèces de points singuliers : les cols, les noeuds, les foyers et les cols-foyers. Il serait facile d'étendre cette théorie à des équations d'ordre n. Remarquons seulement que, quand on fait croître n, le nombre des espèces de points singuliers croît très rapidement. Nous avons vu, en effet, qu'il était de 3 pour n = 1, de 4 pour n = 2; on verrait sans peine qu'il est de 8 pour n = 3 et de 10 pour n = 4."

En dimension trois, la matrice jacobienne fonctionnelle du système (1.1) ou (1.2) possède trois valeurs propres. Les deux premières valeurs propres réelles où complexes conjuguées déterminent la stabilité d'un point fixe (vis-à-vis de la dy-namique lente). L'attractivité d'un point fixe (vis-à-vis de la dynamique rapide) dépend du signe de la troisième valeur propre réelle.

On peut ainsi différencier quatre types génériques de points fixes :

- les points fixes stables attractifs,
- les points fixes stables répulsifs,
- les points fixes instables attractifs,
- les points fixes instables répulsifs.

Une illustration de la nature de ces points fixes est présentée en annexe B.

Dans ce mémoire, la notion de stabilité est intimement liée à l'existence d'une *variété attractive* vers laquelle les *courbes trajectoires* intégrales du système dynamique convergent. Ainsi, c'est la présence dans l'*espace des phases* d'une telle *variété* qui permet d'assurer leur stabilité.
#### 2.2.6 Variétés attractives-répulsives et stabilité

Le théorème suivant va jouer un rôle essentiel dans la construction des pièges présentée au chapitre 3 puisqu'il permet de statuer sur l'attractivité et par conséquent la stabilité de variétés.

**Théorème 2.3.** Soit  $\vec{X}(t)$  une courbe trajectoire possédant en M un vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  et soit ( $\mathcal{V}$ ) une variété (courbe en dimension deux, surface en dimension trois) définie par l'équation implicite  $\phi = 0$  dont le vecteur normal  $\vec{\eta} = \vec{\nabla}\phi$  est dirigé vers l'extérieur de la concavité de la courbure de cette variété. Si le produit scalaire entre le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  et le vecteur normal  $\vec{\eta} = \vec{\nabla}\phi$  est positif, la variété est attractive vis-à-vis de cette courbe trajectoire. S'il est nul, la courbe trajectoire est tangente à cette variété. S'il est positif, la variété est répulsive. Ce produit scalaire qui représente la différentielle totale de  $\phi$  constitue une nouvelle variété ( $\dot{\mathcal{V}}$ ) enveloppe de la variété ( $\mathcal{V}$ ).

*Démonstration*. Soit ( $\mathcal{V}$ ) une *variété* définie par l'équation implicite  $\phi(x, y, z) = 0$ . Le vecteur normal dirigé vers l'extérieur de la concavité de la *courbure* de cette *variété* s'écrit :

$$\overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$
(2.19)

Le vecteur vitesse instantanée de la *courbe trajectoire* est défini par (1.1) :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire entre ces deux vecteurs s'écrit :

$$\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$
(2.20)

En remarquant l'Eq. (2.20) représente la différentielle totale de  $\phi$ , la théorie des enveloppes permet d'affirmer que la nouvelle *variété* définie par cette différentielle totale constitue l'enveloppe de la *variété* ( $\mathcal{V}$ ) définie par l'équation  $\phi = 0$ .

**Théorème 2.4.** Le lieu des points où la torsion d'une courbe trajectoire s'annule constitue l'enveloppe de la variété définie par l'équation du plan osculateur, i.e., le lieu des points où celui-ci est stationnaire. Le signe de la torsion permet de caractériser l'attractivité de la variété définie par l'équation du plan osculateur vis-à-vis de la courbe trajectoire.

Démonstration. La variété définie par l'équation du plan osculateur s'obtient à partir de la condition  $(2.16): \overrightarrow{IM} \cdot (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}) = 0$  qui est équivalente à l'équation implicite :  $\phi = 0$ . La différentielle totale par rapport au temps de la condition (2.16) s'écrit :  $\overrightarrow{IM} \cdot (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}) = 0$ . Ou encore en tenant compte de la condition  $(2.16): \dot{\overrightarrow{\gamma}} \cdot (\overrightarrow{\gamma} \wedge \overrightarrow{V}) = 0$ . D'après (2.18), cette équation correspond à un facteur multiplicatif près à la *torsion*. De plus, puisqu'elle est équivalente à l'équation :  $\frac{d\phi}{dt} = 0$ , elle constitue l'enveloppe de la *variété* définie par l'équation du *plan osculateur* et représente le lieu des points où celui-ci est stationnaire.

# **2.3** Domaines lents, rapides

Dans le formalisme de la Mécanique du Point, l'étude du mouvement d'un point mobile M consiste à s'intéresser à la variation de la norme euclidienne de son vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$ , i.e., à la composante tangentielle  $\gamma_{\tau}$  de son vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$ . Cette variation dépend du signe du produit scalaire entre le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  et le vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}(t)$ , i.e., l'angle formé par ces deux vecteurs. Ainsi si,  $\vec{\gamma} \cdot \vec{V} > 0$ , la variation de la norme euclidienne du vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  est positive. Par conséquent, la norme euclidienne du vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$ augmente et le mouvement est accéléré, il est dans sa phase *rapide*. Si,  $\overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{V} = 0$ , la variation de la norme euclidienne du vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  est nulle. Par conséquent, la norme euclidienne du vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  est constante et le mouvement est uniforme, il est dans une phase de transition entre la phase *rapide* et la phase *lente*. De plus, le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  est perpendiculaire au vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}(t)$ . Enfin, si,  $\vec{\gamma} \cdot \vec{V} < 0$ , la variation de la norme euclidienne du vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  est négative. La norme euclidienne du vecteur vitesse instantanée V(t) diminue et le mouvement est alors décéléré, il est dans sa phase lente.

**Définition 2.4.** Le domaine de l'espace des phases dans lequel la composante tangentielle  $\gamma_{\tau}$  de son vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  est négative, i.e., le domaine dans lequel le système décélère, est appelé domaine lent.

Le domaine de l'espace des phases dans lequel la composante tangentielle  $\gamma_{\tau}$  de son vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  est positive, i.e., le domaine dans lequel le système accélère, est appelé domaine rapide.

#### **Remarque :**

Si le (SDAL-R) étudié possède seulement un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  dans l'une des composantes de son champ de vecteur vitesse, ces deux domaines sont complémentaires. Le lieu des points appartenant au domaine de l'espace des phases dans lequel la composante tangentielle  $\gamma_{\tau}$  de son vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  s'annule délimite la frontière entre les domaines *lents* et *rapides*. De plus, la *variété lente* des (SDAL-R) ou des (SDACCL-R) considérés doit nécessairement appartenir au domaine *lent*.

# 2.4 Equation analytique de la variété lente

Le formalisme de la *Mécanique du Point* a permis d'attribuer à la *courbe* trajectoire solution intégrale d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) un vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  tangent en tout point à cette trajectoire, et un vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  dont la direction varie en fonction de la nature du mouvement. Le formalisme de la *Géométrie Différentielle* permet d'affirmer que ces deux vecteurs définissent le *plan osculateur* dont l'équation va fournir une nouvelle condition de détermination de l'équation analytique de la *variété lente* d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R). De plus, les propriétés métriques de la *courbe trajectoire*, i.e., *courbure* et *torsion* vont permettre de caractériser son *attractivité*.

#### Proposition 2.1. Méthode du plan osculateur

L'équation du plan osculateur à la courbe trajectoire intégrale d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) passant par un point fixe de ce système représente l'équation analytique de la variété lente qui lui est associée.<sup>3</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>La méthode du plan osculateur dont la définition (cf. Th. 2.1) néglige les termes d'ordres supérieurs à deux satisfait à la condition de partie non-linéaire (cf. *supra*).

Soit  $I(x_0, y_0, z_0)$  l'un des points fixes d'un (SDACCL-R) défini par (1.1) ou d'un (SDAL-R) défini par (1.2) et représenté par le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  duquel est déduit le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$ . Le *plan osculateur* (P) passant par le point fixe  $I(x_0, y_0, z_0)$  et ayant pour vecteurs directeurs les vecteurs  $\overrightarrow{V}(t)$  et  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  est défini par la condition de coplanarité entre  $\overrightarrow{V}(t)$ ,  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  et  $\overrightarrow{IM}$  formé à partir du point fixe I et de n'importe quel point M(x, y, z) appartenant à ce plan (P). Cette condition de coplanarité peut s'écrire :

$$\forall M \in (P) \iff \exists (\mu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{IM} = \mu \overrightarrow{V} + \eta \overrightarrow{\gamma}$$
(2.21)

ou encore :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left( \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma} \right) = 0 \tag{2.22}$$

Dans Rossetto *et al.* [1998], il a été démontré que l'équation de la *variété lente* d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) pouvait être obtenue en utilisant la colinéarité entre le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  et le "vecteur propre lent "  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  associé à la "valeur propre lente "  $\lambda_2$  de la matrice jacobienne fonctionnelle du système linéaire tangent :

$$\exists \kappa \in \mathbb{R} / \overrightarrow{V} = \kappa \overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$$
(2.23)

Mais, puisque d'après l'équation (2.4) on a :

$$\overrightarrow{\gamma} = J\overrightarrow{V}$$

On obtient, en utilisant l'équation caractéristique :  $J\overrightarrow{Y_{\lambda_i}} = \lambda_i \overrightarrow{Y_{\lambda_i}}$  et l'équation (2.23)

$$\overrightarrow{\gamma} = \kappa J \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} = \kappa \lambda_2 \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} = \lambda_2 \overrightarrow{V}$$
(2.24)

Ceci démontre que le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  est colinéaire au vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$ . En remarquant que la condition de colinéarité (2.23) peut s'écrire :

$$\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} = \overrightarrow{0} \tag{2.25}$$

et en utilisant l'équation (2.24), on a :

$$\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0} \tag{2.26}$$

Ainsi, la méthode d'obtention de l'équation de la variété lente d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) de dimension deux (Rossetto et al. [1998]) utilisant la colinéarité entre le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  et le "vecteur propre lent"  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  est équivalente à la colinéarité entre le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  et le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$ . Bien que la Proposition 2.1 soit basée sur l'indépendance de ces vecteurs, cette condition n'est pas nécessaire en dimension deux puisque dans ce cas le plan osculateur est celui de la courbe trajectoire. On peut néanmoins utiliser la Proposition 2.1 pour déterminer l'équation de la variété lente d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) de dimension deux. En effet, tout vecteur du plan peut être considéré comme un vecteur de l'espace dont la troisième composante est nulle. Le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(\vec{t})$  peut alors s'écrire :

$$\overrightarrow{V}\left(\begin{array}{c}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\0\end{array}\right) = \overrightarrow{\mathfrak{S}}_{\varepsilon}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\varepsilon}f\left(x,y\right)\\g\left(x,y\right)\\0\end{array}\right)$$

D'après l'équation (2.2), le vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}(t)$  s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{IM}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{IM}\left(\begin{array}{c} x-x_0\\ y-y_0\\ z\end{array}\right)$$

La condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 prend la forme d'un déterminant :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| \begin{array}{c} x - x_0 & \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ y - y_0 & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ z & 0 & 0 \end{array} \right| = 0$$

En dimension deux, ce déterminant se réduit à :

$$z \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$
(2.27)

12

Cette équation correspond bien à la condition de colinéarité entre le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  et le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$ . De plus, d'après les Eqs. (2.23-2.24) ceci peut être interprété comme une condition d'annulation de la composante normale  $\gamma_{\nu}$  du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$ , i.e., comme une condition d'annulation de la *courbure*.

**Corollaire 2.1.** Le lieu des points où la courbure de la courbe trajectoire intégrale d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) de dimension deux s'annule, i.e., où la courbe trajectoire n'admet que des points d'inflexion, constitue une condition nécessaire et suffisante d'obtention de l'équation située dans l' $\varepsilon$ -voisinage de la variété lente.

#### **Remarque :**

En dimension deux, la condition de coplanarité (2.22) se transforme en une condition de colinéarité (2.27) qui transcrit la colinéarité entre les projections de chacun de ces vecteurs. Néanmoins, la résolution du système constitué par (2.27) conduit à "l'exacte " condition de colinéarité. De plus, dans le cas d'un (SDAL-R), la présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  dans l'une des composantes de son vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  implique que la composante normale  $\gamma_{\nu}$ du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}(t)$  soit négligeable devant la composante tangentielle  $\gamma_{\tau}$  puisqu'on peut montrer que leur rapport est de l'ordre de  $\varepsilon$ .

*Démonstration*. Considérons maintenant un (SDAL-R) ou un (SDACCL-R) de dimension trois .

En dimension trois, la proposition 2.1 peut être démontrée pour tout (SDAL-R) ou (SDACCL-R). Dans Rossetto *et al.* [1998], il a été établi que l'équation de la *variété lente* d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) pouvait être obtenue en utilisant la coplanarité entre le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  et les "vecteurs propres lents "  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$  associés aux " valeurs propres lentes "  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent :

$$\exists \ (\mu,\eta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \overrightarrow{V} = \mu \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} + \eta \overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$$
(2.28)

Mais, puisque d'après l'équation (2.4) on a :

$$\overrightarrow{\gamma} = J\overrightarrow{V}$$

On obtient, en utilisant l'équation caractéristique :  $J\overrightarrow{Y_{\lambda_i}} = \lambda_i \overrightarrow{Y_{\lambda_i}}$ 

$$\overrightarrow{\gamma} = \mu J \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} + \eta J \overrightarrow{Y_{\lambda_3}} = \mu \lambda_2 \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} + \eta \lambda_3 \overrightarrow{Y_{\lambda_3}} = \mu' \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} + \eta' \overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$$

Ceci démontre d'une part, que le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  est aussi coplanaire à ces "vecteurs propres lents " qui forment un hyperplan appelé "plan lent " mais d'autre part, qu'en dimension trois, les vecteurs vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  et accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  ne sont pas colinéaires (sauf cas non génériques). En remarquant que la condition de coplanarité (2.26) peut s'écrire :

$$\overrightarrow{V} \cdot \left( \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_3}} \right) = 0 \tag{2.29}$$

On peut alors montrer que les points fixes qui vérifient l'équation :  $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$  appartiennent à la variété lente. Ainsi, il a été démontré que les vecteurs vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  et accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  appartenaient à un hyperplan appelé " plan lent " contenant un point fixe. De plus, puisque dans le formalisme de la *Géométrie Différentielle* ces deux vecteurs définissent le *plan osculateur* à la *courbe trajectoire* passant par un point fixe, l'hyperplan appelé " plan lent " et le *plan osculateur* sont confondus. Par conséquent, son équation représente celle de la *variété lente*. La Proposition 2.1 fournit donc bien une détermination de l'équation de la *variété lente* d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) de dimension trois.

Dans le cas d'un (SDAL-R) le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  s'écrit :

$$\overrightarrow{V}\left(\begin{array}{c}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\\frac{dz}{dt}\end{array}\right) = \overrightarrow{\Im}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\varepsilon}f\left(x,y,z\right)\\g\left(x,y,z\right)\\h\left(x,y,z\right)\end{array}\right)$$

D'après l'équation (2.2), le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{IM}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{IM}\left(\begin{array}{c} x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{array}\right)$$

La condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 prend la forme d'un déterminant :

i.

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ y - y_0 & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ z - z_0 & \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

En dimension trois, ce déterminant s'écrit :

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} + (y - y_0) \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$
 (2.30)

Cette équation pourrait être vérifiée à condition que le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  soit colinéaire au vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$ . Mais, il a été démontré que, sauf cas non-génériques, ce ne peut être le cas en dimension trois. Aussi, dans le cas de (SDACCL-R), l'équation de la variété lente ne peut être fournie que par la condition de coplanarité (2.21) ou (2.22). Cependant, d'après Darboux [1887-96], les trois déterminants présents dans l'équation (2.30) représentent, à un facteur multiplicatif près, les cosinus des angles d'Euler que forment les axes du trièdre mobile avec ceux du trièdre de référence. Et, dans le cas d'un (SDAL-R), la présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  dans l'une des composantes de son vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  permet de montrer qu'un de ces trois déterminants est négligeable par rapport aux deux autres sur un large domaine de l'espace des phases. Ceci peut être interprété de deux manières. La première confirme que dans le cas d'un (SDAL-R), les courbes trajectoires lentes évoluent dans un espace bi-dimensionnel puisque l'un des trois cosinus des angles d'Euler est nul. La seconde, qui corrobore la première, assure que si le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}(t)$  ne peut être colinéaire au vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  en dimension trois, il est néanmoins possible de prouver que certaines projections de ces vecteurs sont colinéaires. En effet, en dimension trois, la condition de colinéarité entre deux vecteurs, conduit à la résolution d'un système composé de trois déterminants qui fournissent trois équations dont deux sont linéairement dépendantes. La résolution du système réduit aux deux équations linéairement indépendantes démontre que certaines projections des vecteurs vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$  et accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  sont colinéaires. Ainsi, dans le cas d'un (SDAL-R) de dimension trois, une condition de "colinéarité des projections " des vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}(t)$  et accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  pourra se substituer à la condition de coplanarité (2.21) ou (2.22). 

#### Proposition 2.2. Attractivité du plan osculateur

Le lieu des points où la torsion s'annule i.e., où le plan osculateur est stationnaire, constitue l'enveloppe des courbes ou des surfaces définissant les variétés lentes de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R) de dimension deux ou trois. Le domaine dans lequel la torsion est positive représente la région de l'espace des phases dans lequel la variété lente est attractive. Celui où la torsion est négative représente la région de l'espace des phases dans lequel la variété lente est répulsive.

*Démonstration*. Dans le Théorème 2.1, l'équation analytique de la variété lente a été définie par :

$$\forall M \in (P) \iff \exists (\mu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{IM} = \mu \overrightarrow{V} + \eta \overrightarrow{\gamma}$$
(2.31)

Cette équation vectorielle qui prend la forme scalaire suivante :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left( \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma} \right) = 0 \tag{2.32}$$

permet de définir une courbe en dimension deux (une surface en dimension trois) qui peut être représentée par l'équation implicite :

$$\phi\left(\vec{X}\right) = 0 \tag{2.33}$$

En prenant la différentielle totale de l'équation (2.31), on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{IM}}{dt} = \mu \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} + \eta \frac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{V} = \mu \overrightarrow{\gamma} + \eta \dot{\overrightarrow{\gamma}}$$

qui peut encore s'écrire :

$$\dot{\vec{\gamma}} \cdot \left( \overrightarrow{\gamma} \wedge \overrightarrow{V} \right) = 0$$

Cette équation correspond, à un facteur près, à la torsion.

Or, d'après les théorèmes (2.3) et (2.4) la différentielle totale de l'équation (2.33) qui peut s'écrire :

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla}\phi = 0 \tag{2.34}$$

représente *l'attractivité* de la *variété lente* et constitue son enveloppe. Mais, puisque les Eqs. (2.32) et (2.33) sont équivalentes, la différentielle totale de l'équation (2.31), qui correspond à un facteur près à la *torsion*, constitue l'enveloppe de la *variété lente*.

# 2.5 Nouvelle expression de la variété lente de (SDAL-R)

#### 2.5.1 Approximation singulière de l'accélération

La théorie des perturbations singulières (Andronov [1966]) a permis de fournir l'approximation d'ordre zéro en  $\varepsilon$  de l'équation de la variété lente associée à un (SDAL-R) comportant un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  en facteur dans l'une des composantes de son champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$ , i.e., l'approximation singulière. Dans cette section, il sera démontré que l'approximation singulière associée au champ de vecteurs accélération  $\overrightarrow{\gamma}$  constitue l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$ de l'équation de la variété lente associée à un (SDAL-R) comportant un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  en facteur dans l'une des composantes de son champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$ .

#### Proposition 2.3. Approximation singulière de l'accélération

L'équation de la variété associée à l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\overline{\gamma}$  d'un (SDAL-R) constitue l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$ de l'équation de la variété lente.

Démonstration. Considérons tout d'abord un (SDAL-R) de dimension deux :

En dimension deux, la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 se transforme en une condition de colinéarité (2.27) entre le vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}$  et le vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$ . En posant :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$
 et  $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = g$ 

l'équation de la variété lente d'un (SDAL-R) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\dot{x}^2 - g\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\dot{x} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right)g^2 = 0$$
(2.35)

Cette équation quadratique en  $\dot{x}$  possède le discriminant suivant :

$$\Delta = g^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 4 \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y}\right) g^2 = 0$$

Le développement en série de Taylor de sa racine carrée jusqu'à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\sqrt{\Delta} \approx \frac{1}{\varepsilon} \left| g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right| \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \left[ 2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right] + O\left(\varepsilon^2\right) \right\}$$

Tenant compte de ce qui précède, la solution de l'équation (2.35) s'écrit :

$$\dot{x} \approx -g \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} + O\left(\varepsilon\right)$$
(2.36)

Cette équation représente l'approximation d'ordre deux en  $\varepsilon$  de l'équation de la *variété lente* associée à l'approximation singulière. D'après l'équation (2.2), le vecteur accélération instantanée  $\overline{\gamma}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

L'approximation singulière de l'accélération fournit l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

En posant :  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$  et  $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = g$ , on obtient :

$$\dot{x} = -g \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \tag{2.37}$$

En comparant cette expression avec l'équation (2.36) qui constitue l'approximation d'ordre deux en  $\varepsilon$  de l'équation de la *variété lente*, on déduit de l'équation (2.37) qu'elle représente l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de l'équation de la *variété lente*.

Démonstration. Considérons maintenant un (SDAL-R) de dimension trois :

En dimension trois, la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 a conduit à l'équation (2.30) :

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} + (y - y_0) \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

Afin de simplifier, remplaçons les trois déterminants par :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix}$$

L'équation (2.30) va alors s'écrire :

$$(x - x_0)\Delta_1 + (y - y_0)\Delta_2 + (z - z_0)\Delta_3 = 0$$
(2.38)

En posant :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g, \frac{dz}{dt} = \dot{z} = h$$

et, en divisant l'équation (2.38) par  $(z - z_0)$ , on obtient :

$$(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) + \frac{1}{(z - z_0)} \left[ (x - x_0) \,\Delta_1 + (y - y_0) \,\Delta_2 \right] = 0 \tag{2.39}$$

le premier terme de l'équation (2.39) s'écrit :

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\dot{x}^2 - g\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\frac{h}{g}\right)\dot{x} - \frac{g^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right)$$
(2.40)

Pour des raisons d'homogénéité posons :

$$g^{2}G = \frac{1}{(z - z_{0})} \left[ (x - x_{0}) \Delta_{1} + (y - y_{0}) \Delta_{2} \right]$$

L'équation (2.39) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\dot{x}^2 - g\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\frac{h}{g}\right)\dot{x} - \frac{g^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right) + g^2G = 0 \quad (2.41)$$

Cette équation qui est quadratique en  $\dot{x}$  possède le discriminant suivant :

$$\Delta = g^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} - \left( \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{h}{g} \right) \right]^2 + 4g^2 \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{h}{g} \right) - G \right]$$

Le développement en série de Taylor de sa racine carrée jusqu'à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\sqrt{\Delta} \approx \frac{1}{\varepsilon} \left| g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right| \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \left[ 2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{h}{g}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \right] + O\left(\varepsilon^2\right) \right\}$$

Tenant compte de ce qui précède, la solution de l'équation (2.41) s'écrit :

$$\dot{x} \approx -g \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} + O\left(\varepsilon\right)$$
(2.42)

Cette équation représente l'approximation d'ordre deux en  $\varepsilon$  de l'équation de la *variété lente* associée à l'approximation singulière. D'après l'équation (2.4), le vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

L'approximation singulière de l'accélération fournit l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

En posant :  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ,  $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = g$  et  $\frac{dz}{dt} = \dot{z} = h$ , on obtient :

$$\dot{x} = -g \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{h}{g}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}$$
(2.43)

En comparant cette expression avec l'équation (2.43) qui constitue l'approximation d'ordre deux en  $\varepsilon$  de l'équation de la *variété lente*, on déduit de l'équation (2.42) qu'elle représente l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de l'équation de la *variété lente*.

# 2.6 Equivalence entre les différentes expressions des variétés lentes

L'étude d'un (SDAL-R) a fait l'objet de nombreux travaux que l'on peut rappeler de manière chronologique afin d'établir une équivalence entre les différentes expressions de l'équation de la *variété lente* qu'ils proposent.

La théorie des perturbations singulières Andronov [1966] a permis de fournir l'approximation d'ordre zéro en  $\varepsilon$ , i.e., l'approximation singulière de l'équation de la variété lente associée à un (SDAL-R) comportant un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  en facteur dans l'une des composantes de son champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$ .

La *méthode des approximations successives* (Rossetto [1986]) a produit des approximations d'ordres supérieurs de l'équation de la *variété lente* associée à un (SDAL-R).

L'approximation du système linéaire tangent (Rossetto et al. [1998]) exprimait l'équation de la variété lente associée à un (SDAL-R) à partir des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle de son système linéaire tangent.

La *méthode du plan osculateur* présentée dans ce mémoire fournit l'expression de l'équation de la *variété lente* associée à un (SDAL-R) à partir de trois variables *cinématiques* : position, vitesse et accélération.

L'approximation singulière de l'accélération également présentée dans ce mémoire a permis de fournir l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de l'équation de la variété lente associée à un (SDAL-R).

#### 2.6.1 Approximation singulière et approximations successives

La méthode des *approximations successives* consiste à rechercher une variété sur laquelle la vitesse est lente, i.e., où  $\dot{x}$  est d'ordre  $O(\varepsilon^0)$ . Dans ce cas  $f_1(\vec{X})$ est au moins d'ordre  $O(\varepsilon^1)$ . La première itération s'effectue en écrivant que la différentielle totale de  $f_1(\vec{X})$  est égale à zéro. On obtient alors l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de l'équation de la variété lente définie par l'approximation singulière Andronov [1966] d'ordre zéro en  $\varepsilon$ . Puisque la dérivée par rapport au temps de  $f_1(\vec{X})$ , i.e., de  $\dot{x}$  est égale à  $\ddot{x}$ , on retrouve l'approximation singulière de l'accélération. Et on démontre ainsi l'identité de ces deux méthodes pour la première itération. La seconde s'obtient en dérivant par rapport au temps l'équation obtenue avec la première. En identifiant le résultat avec  $\ddot{x} = 0$ , i.e., avec l'approximation singulière de la sur-accélération, on obtient l'approximation d'ordre deux en  $\varepsilon$ de l'équation de la variété lente définie par l'approximation d'ordre deux en  $\varepsilon$ de l'équation de la variété lente définie par l'approximation singulière. Andronov [1966] d'ordre zéro en  $\varepsilon$ , et on démontre l'identité de ces deux méthodes pour la seconde itération. En utilisant un raisonnement par récurrence on peut alors démontrer à l'ordre n, correspondant à celui de la dérivation, l'identité de ces deux méthodes.

#### 2.6.2 Méthode du plan osculateur et approximation singulière

Dans le paragraphe précédent (2.5.) il a été démontré que l'équation de la variété associée à l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  d'un (SDAL-R) constituait l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de l'équation de la variété lente obtenue par la méthode du plan osculateur. De la même manière il est possible d'établir que l'équation de la variété associée à l'approximation singulière du vecteur sur-accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  d'un (SDAL-R) représente l'approximation d'ordre deux en  $\varepsilon$  de l'équation de la variété lente obtenue par la méthode du plan osculateur. Comme précédemment, on peut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence, que l'ordre de l'approximation augmente avec l'ordre de la dérivation, et que l'on peut " approcher " l'équation de la variété lente obtenue par la méthode du plan osculateur par celle de l'approximation singulière de l'accélération, c'est-à-dire, celle des approximations successives (Rossetto [1986]).

### 2.6.3 Approximation du système linéaire tangent et méthode du plan osculateur

On étudie maintenant l'équivalence entre la *méthode du plan osculateur* développée dans ce mémoire, et celle de l'*approximation du système linéaire tangent* (Rossetto *et al.* [1998]). Au préalable, il est important de remarquer que ces deux méthodes s'appuient sur le développement limité du champ de vecteurs vitesse  $\vec{V}$  constituant le (SDAL-R). Mais si la première est basée sur un développement limité temporel, pour la seconde il s'agit d'un développement limité spatial. En effet, la méthode de l'*approximation du système linéaire tangent* utilise le principe de linéarisation qui consiste en un développement limité de Taylor au voisinage d'un point  $\vec{X}_0$  de E du membre de droite des équations formant le (SDAL-R) défini par (1.2).

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Im}_{\varepsilon} \left( \vec{X} \right)$$

En supposant que le jacobien fonctionnel J, évalué en ce point très proche de  $\vec{X}$ , possède une valeur propre " rapide ", et que les termes non-linéaires sont négligeables devant les termes linéaires, i.e., vérifient une *condition de partie non-linéaire* (Ramdani [1999]), on a :

$$\vec{\mathfrak{S}}\left(\vec{X}\right) = \vec{\mathfrak{S}}\left(\vec{X}_{0}\right) + \left(\vec{X} - \vec{X}_{0}\right) \left.\frac{d\vec{\mathfrak{S}}\left(\vec{X}\right)}{d\vec{X}}\right|_{\vec{X}_{0}} + O\left(\left(\vec{X} - \vec{X}_{0}\right)^{2}\right) \quad (2.44)$$

où le premier membre de ce développement  $\vec{\Im} \left( \vec{X}_0 \right) = \frac{d\vec{X}_0}{dt}$  représente la vitesse au point  $\vec{X}_0$  et le second la matrice jacobienne fonctionnelle évaluée en ce même point. En posant :

$$\delta \vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_0 \quad \text{et} \quad \frac{d \vec{\Im} \left( \vec{X} \right)}{d \vec{X}} \bigg|_{\vec{X}_0} = J \left( \vec{X}_0 \right)$$

le (SDAL-R) peut être " approximé " par le *système linéaire tangent* défini par :

$$\frac{d\delta\vec{X}}{dt} = J\left(\vec{X}_0\right)\delta\vec{X}$$
(2.45)

L'approximation du système linéaire tangent consiste à considérer qu'au voisinage de la variété lente et pendant des durées infinitésimales  $\delta t = t - t_0$ , l'intégrale  $\delta \vec{X}(t)$  du système linéaire tangent (2.45) se comporte comme le champ de vecteurs vitesse  $\vec{V}(t)$  du (SDAL-R) défini par (1.2).

$$\frac{\delta \vec{X}}{\delta t}(t) \xrightarrow[\delta t \to 0]{} \vec{V}(t)$$
(2.46)

L'équation de la *variété lente* du *système linéaire tangent* (2.45) obtenue par la *méthode du plan osculateur* donne d'après la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 :

$$\delta \vec{X} \cdot \left( \delta \dot{\vec{X}} \wedge \delta \vec{\vec{X}} \right) = 0$$

qui peut encore s'écrire en divisant par  $\delta t^3$  :

$$\frac{\delta \vec{X}}{\delta t} \cdot \left( \frac{\delta \vec{X}}{\delta t} \wedge \frac{\delta \vec{X}}{\delta t} \right) = 0$$
(2.47)

De plus, si l'on suppose que  $\left[\frac{d}{dt}, \delta t\right] = 0$ , en divisant l'expression (2.45) par  $\delta t$ , on retrouve lorsque  $\delta t \to 0$ , l'équation (2.4) :  $\overrightarrow{\gamma} = J\overrightarrow{V}$ .

Ainsi, on démontre que lorsque  $\delta t \rightarrow 0$  :

$$\frac{\delta \vec{X}}{\delta t} \to \vec{V}, \quad \frac{\delta \dot{\vec{X}}}{\delta t} \to \vec{\gamma}, \quad \frac{\delta \ddot{\vec{X}}}{\delta t} \to \dot{\vec{\gamma}}$$

L'expression (2.47) s'écrit alors :

$$\overrightarrow{V} \cdot \left( \overrightarrow{\gamma} \wedge \dot{\overrightarrow{\gamma}} \right) = 0 \tag{2.48}$$

Or, d'après la Proposition 2.2 cette équation représente le lieu des points où la *torsion* s'annule i.e., où le *plan osculateur* est stationnaire et constitue l'enveloppe des courbes ou des surfaces définissant les *variétés lentes* de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R) de dimension deux ou trois. Ceci démontre que lorsque  $\delta t \rightarrow 0$ , le (SDAL-R) et le *système linéaire tangent* (2.45) ont le même plan osculateur et que, par conséquent, leur *variétés lentes* se confondent.

La *méthode du plan osculateur*, quant à elle, utilise le développement limité de la fonction vectorielle  $\vec{X}(t)$  de la variable scalaire t:

$$\vec{X}(t+\delta t) = \vec{X}(t) + \frac{d\vec{X}(t)}{dt}\delta t + \frac{d^{2}\vec{X}(t)}{dt^{2}}\frac{\delta t^{2}}{2!} + O\left(\delta t^{3}\right)$$
(2.49)

L'expression (2.49) peut encore s'écrire, compte tenu des définitions énoncées au paragraphe 2.1. :

$$\vec{X}(t+\delta t) - \vec{X}(t) = \vec{V}(t)\,\delta t + \vec{\gamma}(t)\,\frac{\delta t^2}{2!} + O\left(\delta t^3\right)$$

Soit en posant :  $\vec{X}(t) = \vec{X}_0$  et  $\vec{X}(t + \delta t) - \vec{X}(t) = \vec{X}(t + \delta t) - \vec{X}_0 = \delta \vec{X}$ , on a :

$$\delta \vec{X} = \vec{V}(t)\,\delta t + \vec{\gamma}(t)\,\frac{\delta t^2}{2!} + O\left(\delta t^3\right) \tag{2.50}$$

où l'on retrouve l'expression du plan osculateur. De plus, si l'on suppose que  $\left[\frac{d}{dt}, \delta t\right] = 0$ , en dérivant par rapport au temps l'expression (2.50), on obtient lorsque  $\delta t \to 0$ :

$$\frac{d\vec{X}}{dt}\left(t+\delta t\right) - \frac{d\vec{X}}{dt}\left(t\right) = \frac{d\vec{V}}{dt}\left(t\right)\delta t + \frac{d\vec{\gamma}}{dt}\left(t\right)\frac{\delta t^{2}}{2!} + O\left(\delta t^{3}\right)$$
(2.51)

c'est-à-dire :

$$\delta \dot{\vec{X}} = \overrightarrow{\gamma}(t) \,\delta t + \frac{d \overrightarrow{\gamma}}{dt}(t) \,\frac{\delta t^2}{2!} + O\left(\delta t^3\right) \tag{2.52}$$

Or, d'après (2.4),  $\overrightarrow{\gamma} = J \overrightarrow{V}$ , d'où l'on obtient :

$$\delta \dot{\vec{X}} = J \vec{V} \delta t + \frac{d \vec{\gamma}}{dt} (t) \frac{\delta t^2}{2!} + O\left(\delta t^3\right)$$
(2.53)

Lorsque  $\delta t \to 0$ , le membre de droite de cette équation se réduit à :  $J\vec{V}\delta t$ . De plus, d'après (2.50),  $\delta \vec{X} \approx \vec{V}\delta t$ . Ainsi l'équation (2.53) s'écrit :

$$\delta \vec{X} \approx J \delta \vec{X} \tag{2.54}$$

Soit finalement,

$$\frac{d\delta \vec{X}}{dt} \approx J\delta \vec{X}$$

On retrouve bien l'expression (2.45), i.e., l'*approximation du système linéaire tangent*. Les deux méthodes sont par conséquent équivalentes.

#### **Remarque :** Justification des méthodes employées

Ce travail a pour objectif la détermination de la *variété lente* de tout système dynamique là où elle existe, i.e., là où la condition de partie non-linéaire est vérifiée. La méthode consiste à construire cette variété lente à partir d'une succession de plans tangents, les plans osculateurs. Or, la démonstration précédente conclut à l'équivalence entre la méthode du plan osculateur et celle de l'*approximation du système linéaire tangent*, mais elle permet également d'affirmer que la *variété lente* est localement tangente au plan osculateur.

# **Chapitre 3**

# Etude géométrique des systèmes dynamiques

Ce chapitre a pour but d'introduire deux nouvelles variétés : la variété uniforme et la variété singulière. La première associée à la variété lente ou bien à l'approximation singulière de l'accélération va permettre de réaliser des pièges pour les courbes trajectoires, intégrales de (SDAL-R). La seconde proposera une description géométrique de la structure de l'attracteur généré par un système dynamique.

## 3.1 Nouvelles variétés de systèmes dynamiques

#### 3.1.1 Variété " uniforme "

On peut démontrer, dans le cas d'un (SDAL-R), qu'à cause de la présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  dans l'une des composantes de son vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}(t)$ , le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  présente de grandes variations dans le voisinage de la *variété lente*. Dans le paragraphe 2, le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}(t)$  avait été décomposé dans la base de Frénet [1852] en deux composantes : normale et tangentielle. Ce vecteur va maintenant être décomposé en deux parties : une partie linéaire et une non-linéaire. Préalablement, il est important de préciser que la partie linéaire (resp. non-linéaire) du vecteur accélération n'est pas obtenue par simple dérivation par rapport au temps de la partie linéaire (resp. non-linéaire) du vecteur vitesse instantanée. Le système défini au paragraphe 2 par les équations (1.1) et (1.2) peut s'écrire :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Im} \left( \vec{X} \right) = J_0 \vec{X} + \vec{V}_{NL} \left( \vec{X} \right)$$

avec

$$\vec{X} = {}^{t} \left[ x_1, x_2, \dots, x_n \right] \in E \subset \mathbb{R}^n$$

où  $J_0$  représente la matrice jacobienne fonctionnelle du système (1.1) où (1.2) et  $\overrightarrow{V}_{NL}$  le reste des termes non-linéaires que contient le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{\Im}$  défini dans E. En utilisant les équations (2.1) et (2.2), on peut redéfinir le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}$  comme :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Im} \left( \vec{X} \right) = J_0 \vec{X} + \vec{V}_{NL} \left( \vec{X} \right)$$
(3.1)

et le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  :

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = J_0 \frac{d\overrightarrow{X}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{V}_{NL}}{dt} = J_0 \overrightarrow{V} + \frac{d\overrightarrow{V}_{NL}}{dt}$$

En injectant l'expression (3.1) dans cette dernière, on obtient :

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = J_1 \vec{X} + \overrightarrow{\gamma}_{NL} \left( \vec{X} \right)$$

avec

$$J_1 \vec{X} = J_0^2 \vec{X} = \vec{\gamma}_L$$

et

$$\overrightarrow{\gamma}_{NL} = J_0 \overrightarrow{V}_{NL} + \frac{d \overrightarrow{V}_{NL}}{dt}$$

Ainsi, le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  peut être décomposé en deux parties : linéaires et non-linéaires :

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma}_L + \overrightarrow{\gamma}_{NL} \tag{3.2}$$

#### Proposition 3.1. Variété uniforme

Le lieu des points, où la partie linéaire  $\overrightarrow{\gamma}_L$  du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  est colinéaire à sa partie non-linéaire  $\overrightarrow{\gamma}_{NL}$ , définit une variété que nous appelons " uniforme ", sur laquelle la norme Euclidienne du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  tend vers un extremum local et peut s'annuler.

*Démonstration.* Ces deux vecteurs et leur somme (3.2) forment un triangle. La norme Euclidienne de ce vecteur somme peut être déterminée en utilisant la loi des cosinus :

$$\left\|\overrightarrow{\gamma}\right\|^{2} = \left\|\overrightarrow{\gamma}_{L}\right\|^{2} + \left\|\overrightarrow{\gamma}_{NL}\right\|^{2} - 2\left\|\overrightarrow{\gamma}_{L}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{\gamma}_{NL}\right\| \cos\left(\theta\right)$$

avec

$$\theta = \pi - (\overrightarrow{\gamma}_L, \overrightarrow{\gamma}_{NL})$$

Si  $Cos(\theta) = -1$ , i.e.,  $\theta = \pi$ , alors  $(\overrightarrow{\gamma}_L, \overrightarrow{\gamma}_{NL}) = 0$ , et  $\|\overrightarrow{\gamma}\|^2$  est maximum. Dans ce cas  $\overrightarrow{\gamma}_L$  est colinéaire à  $\overrightarrow{\gamma}_{NL}$  et ces vecteurs ont la même direction.

Si  $Cos(\theta) = +1$ , i.e.,  $\theta = 0$ , alors  $(\overrightarrow{\gamma}_L, \overrightarrow{\gamma}_{NL}) = \pi$ , et  $\|\overrightarrow{\gamma}\|^2$  est minimum. Dans ce cas  $\overrightarrow{\gamma}_L$  est colinéaire à  $\overrightarrow{\gamma}_{NL}$  et ces vecteurs ont des directions opposées.

De plus, quand  $\overrightarrow{\gamma}_L$  et  $\overrightarrow{\gamma}_{NL}$  sont exactement anti-colinéaires,  $\|\overrightarrow{\gamma}\|$  est nul. C'est la raison pour laquelle cette variété a été appelée " uniforme " en accord avec les définitions de la *Mécanique*. Cette nouvelle condition de colinéarité entre les parties linéaire et non-linéaire du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  génère également trois déterminants fournissant trois équations dont deux sont linéairement indépendantes. De la même manière que précédemment, la résolution du système réduit à ces deux équations linéairement indépendantes ne transcrit pas exactement la colinéarité entre ces parties mais montre que certaines projections de ces vecteurs linéaire et non-linéaire sont colinéaires. On peut démontrer que la présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  dans les parties linéaires et nonlinéaires du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  assure que de telles projections existent pour un (SDAL-R).

#### 3.1.2 Variété "singulière "

#### Proposition 3.2. Variété singulière

La variété singulière est définie par l'intersection de la variété lente d'équation  $\phi = 0$  et d'une section quelconque de Poincaré ( $\Sigma$ ) réalisée dans son voisinage. Ainsi, elle représente le lieu des points vérifiant :

$$\phi \cap \Sigma = 0 \tag{3.3}$$

Cette variété uni-dimensionnelle est une sous-variété de la variété lente. Le lieu des points obtenus par intégration dans un temps donné de conditions initiales prises sur cette variété constituent une sous-variété appartenant également à l'attracteur généré par le système dynamique. L'ensemble de ces variétés correspondant à différents points d'intégration permet de reconstituer l'attracteur par redéploiement de ces variétés singulières.

# 3.2 Trajectoires piégées

#### 3.2.1 Introduction

Précédemment deux variétés associées à des (SDAL-R) ou des (SDACCL-R) ont été définies : la *variété lente* et la *variété uniforme*. Ces variétés, délimitant chacune une région de l'espace des phases, vont permettre de définir un domaine, dans lequel les *trajectoires* de l'attracteur considéré seront contraintes d'évoluer, i.e., un domaine dans lequel les trajectoires seront " piégées ".

#### **3.2.2** Construction du piège

A partir des systèmes définis par les équations (1.1) ou (1.2), on obtient trois variétés :  $(\mathcal{V}_{as})$ ,  $(\mathcal{V}_{vl})$  et  $(\mathcal{V}_{vu})$ , i.e., la variété associée à l'approximation singulière du vecteur acccélération instantanée  $\vec{\gamma}$ , la variété lente obtenue par la méthode du plan osculateur, la variété uniforme associée à la condition de colinéarité entre la partie linéaire  $\vec{\gamma}_L$  du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  et sa partie non-linéaire  $\vec{\gamma}_{NL}$ . En utilisant la méthode présentée au paragraphe 2.2.6, il est possible de situer la position des trajectoires de l'attracteur vis-à-vis de chacune de ces variétés. En choisissant deux variétés pour lesquelles les trajectoires sont respectivement au-dessus de l'une et en dessous de l'autre, on peut délimiter une région de l'espace des phases dans laquelle les trajectoires de l'attracteur sont contraintes d'évoluer, i.e. un domaine dans lequel elles sont " piégées ".

#### 3.2.3 Piège et stabilité

Le concept de piège qui est intimement lié à l'attractivité des variétés va permettre de définir, dans l'espace des phases, des domaines de stabilité.

En effet, les domaines de l'espace des phases compris entre deux variétés, l'une attractive, l'autre répulsive, dans lesquels les *courbes trajectoires* sont " piégées " constituent des régions de stabilté pour l'attracteur et lui impose une certaine structure géométrique liée à celle de ces variétés. Ainsi, la présence de telles variétés, i.e., de tels piéges, dans l'espace des phases, contraint les *courbes trajectoires* à " visiter " ces régions de stabilté. La structure géométrique de l'attracteur subordonnèe à celle de ces régions pourra alors être décrite au moyen du concept de déploiement, i.e., à partir de la *variété singulière*.

# **Chapitre 4**

# Etude numérique des systèmes dynamiques

A l'heure actuelle, force est de constater que l'aspect numérique revêt une part de plus en plus importante dans l'étude des systèmes dynamiques. Et, même s'il ne constitue pas une fin en soi, il représente un formidable outil d'investigation et de recherche. Ce chapitre a pour but de présenter les différents programmes utilisés ou élaborés afin de mettre en évidence certains comportements caractéristiques de systèmes dynamiques non-linéaires et chaotiques.

# 4.1 Portrait de phase

Les portraits de phase présentés dans le paragraphe suivant ont été réalisés avec l'aide de Mathematica<sup>®</sup> en employant un schéma d'intégration numérique de type Runge-Kutta explicite (méthode adaptative à pas variables d'ordres 2(1) à 9(8) sur une durée d'environ 10 000 itérations avec un pas temporel de 0.0001 et après élimination des transitoires (7500). L'utilisation en parallèle de deux autres logiciels : MATLAB<sup>®</sup> et MAPLE<sup>®</sup> paramétrés avec d'autres schémas d'intégrations numériques et d'autres pas temporels a permis de confirmer le portrait de phase obtenu avec le premier. De plus, une étude basée sur la nature des points fixes a également permis de retrouver le comportement des *courbes trajectoires* formant l'attracteur. Enfin, il est important de souligner l'intérêt des " portraits de phases animés " dans l'étude des (SDAL-R) et des (SDACCL-R).

Cette fonctionnalité particulière, propre à MATLAB<sup>®</sup> et MAPLE<sup>®</sup>, a été élaborée pour Mathematica<sup>®</sup> par Phillip Kent (p.kent@ic.ac.uk) de l'Imperial College of Science Technology and Medicine of London et mise à disposition à l'adresse : http://metric.ma.ic.ac.uk/articles/talum/

# 4.2 **Points fixes**

L'expression littérale (resp. numérique) des coordonnées des points fixes en fonction des paramètres du système dynamique a été calculée avec Mathematica<sup>®</sup> ou MAPLE<sup>®</sup>. Le nombre de chiffres significatifs correspondaient dans chaque à la précision maximum (WorkingPrecision) de chaque logiciel.

## 4.3 Stabilité des points fixes : théorème de Hurwitz

La stabilité d'un point fixe est généralement étudiée à l'aide du théorème de Lyapunov [1899] qui stipule que, si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du système, évaluées en ce point sont strictement négatives, le point fixe est stable. Une autre approche proposée par Hurwitz [1893] consiste à exprimer le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle sous la forme :  $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n = 0$  où les coefficients  $a_i$  sont fonction des coordonnées du point fixe et des paramètres du système dynamique considéré. Les racines de ce polynôme ont des parties réelles négatives si  $a_0$  et tous les déterminants suivants :

$$D_{1} = a_{1}, D_{2} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} \\ a_{3} & a_{2} \end{vmatrix}, \dots, D_{n} = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{0} & \dots & 0 \\ a_{3} & a_{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{n} \end{vmatrix}$$
(4.1)

ı.

sont positifs.

On peut démontrer en dimensions deux, trois puis n que la "positivité " stricte de ces déterminants conduit à la "négativité " stricte des parties réelles des valeurs propres du polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle. Par conséquent, les critères de stabilité de Lyapunov et Hurwitz sont strictement équivalents. Cependant, le théorème d'Hurwitz va s'avérer très utile dans le calcul de la valeur du paramètre de bifurcation de Hopf présenté ci-dessous.

# 4.4 Valeur numérique du paramètre de bifurcation de Hopf

Tout d'abord, rappelons les conditions d'obtention d'une bifurcation de Hopf [1942]. En effet, supposons que le système dynamique défini par

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Im} \left( \vec{X}, \nu \right) \tag{4.2}$$

avec

$$\vec{X} = {}^{t} \left[ x_1, x_2, ..., x_n \right] \in E \subset \mathbb{R}^n$$

et  $\nu$  un paramètre réel, ait un point fixe  $\vec{X} = \vec{X}^*(\nu)$  et que sa matrice jacobienne possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ :  $\lambda_{1,2} = \alpha(\nu) \pm i\omega(\nu)$  telles que :

- pour une certaine valeur d'un paramètre  $\nu = \nu_C$ ,

$$\alpha(\nu_C) = 0$$
 et  $\frac{d\alpha(\nu)}{d\nu}\Big|_{\nu=\nu_C} \neq 0$ 

- les n-2 autres valeurs propres évaluées en  $\nu$  aient leur partie réelle strictement négative.

Si ces hypothèses sont satisfaites alors  $(\vec{X}^*(\nu_C), \nu_C)$  est un point de bifurcation (de Hopf) de l'état d'équilibre  $\vec{X}^*(\nu_C)$  vers un cycle limite.

#### 4.4.1 Méthode numérique basée sur le théorème de Lyapunov

La technique utilisée dans ce mémoire consiste, après avoir identifié le paramètre susceptible de produire cette bifurcation, i.e., ne laissant pas invariant l'un des points fixes, et pouvant par conséquent annuler la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle calculée en ce point, à exprimer les coordonnées de ce point fixe en fonction de ce paramètre, et à calculer les valeurs propres de la matrice Jacobienne en ce point. Chaque valeur propre peut alors être représentée comme une fonction du paramètre de bifurcation choisi. En déterminant numériquement l'une des valeurs qui annule cette fonction, il est possible de calculer avec une grande précision la valeur du paramètre de bifurcation qui annule la partie réelle de chacune des valeurs propres. Cette technique a fait l'objet de l'élaboration d'un programme Mathematica<sup>®</sup> disponible à l'adresse suivante : http ://ginoux.univ-tln.fr

#### 4.4.2 Méthode numérique basée sur le théorème de Hurwitz

Une autre approche consiste à exprimer le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle en fonction des coefficients  $a_i$  qui sont des fonctions des coordonnées du point fixe et du paramètre de bifurcation choisi. La "positivité " du premier déterminant  $D_0$  conduit à une inégalité en  $\nu : \nu > \nu_C$  qui fournit la valeur du paramètre de bifurcation. Cette technique a également fait l'objet de l'élaboration d'un programme Mathematica<sup>®</sup> disponible à l'adresse suivante : http://ginoux.univ-tln.fr

### 4.5 Caractéristion du chaos

#### 4.5.1 Section et application de Poincaré

Considérons un système dynamique de dimension n défini sous les mêmes conditions que (1.1) et présentant dans une région de l'espace un comportement asymptotique intéressant à la limite  $t \to \infty$ , i.e., un attracteur ("étrange" ou non). Soit  $\vec{X}(t) \equiv \phi_t(\vec{X})$  la *courbe trajectoire* intégrale de ce système et de période  $T: \phi_{t+T}(\vec{X}) \equiv \phi_T(\vec{X})$ . On appelle *section de Poincaré*, une hypersurface  $\Sigma$  de dimension n - 1 transverse au champ de vecteurs dans toute la région concernée. Soit  $\vec{X}_0$  le point (unique) où le flot  $\phi_t$  intersecte  $\Sigma$  et soit  $\vec{X}$  un point du voisinage  $V \subseteq \Sigma$  de  $\vec{X}_0$ , *l'application de Poincaré* ou *application de premier retour* P: $V \to \Sigma$  est définie par :

$$P\left(\vec{X}\right) = \phi_{\tau}\left(\vec{X}\right) \tag{4.3}$$

où  $\tau = \tau (\vec{X})$  est le temps mis par la *courbe trajectoire* avec point initial  $\vec{X}$  pour retourner à  $\Sigma$  pour la première fois. Il est important de remarquer que le temps  $\tau$  dépend de  $\vec{X}$  et n'est généralement pas égal à la période de la *courbe trajectoire* périodique. Cependant,  $\tau \to T$  lorsque  $\vec{X} \to \vec{X}_0$ . Ainsi, de cette façon le système dynamique de dimension n à temps continu est converti en un système en dimension n-1 à temps discret, le numéro de l'intersection figurant le temps. La section de Poincaré apporte une indication très utile sur la nature d'un flot tridimensionnel. En effet, les points de cette section peuvent être, soit répartis sur une courbe unique de forme plus ou moins complexe, soit répartis sur une " surface ". Dans ce dernier cas, on peut conclure avec certitude que le flot est apériodique. Soit  $\vec{X} = {}^t [x, y, z]$  la *courbe trajectoire* d'un système dynamique de dimension d = 3, en prenant  $x_k = x(t_k)$  comme la valeur de la  $k^{ième}$  intersection de la trajectoire avec la section de Poincaré, on peut construire l'application de Poincaré de la courbe trajectoire d'un flot tridimension de la section de Poincaré, on peut construire l'application de Poincaré de la courbe trajectoire d'un système dynamique de dimension de la trajectoire avec la section de Poincaré, on peut construire l'application de Poincaré de la courbe trajectoire d'un système dynamique de dimension de la trajectoire avec la section de Poincaré, on peut construire l'application de Poincaré de la trajectoire d'un système dynamique de la trajectoire d'un système dynamique de la trajectoire d'un système dynamique de la trajectoire avec la section de Poincaré, on peut construire l'application de Poincaré de la trajectoire d'un système dynamique de la tra

caré comme la fonction reliant  $x_{k+1}$  à  $x_k$ . E.N. Lorenz lui-même avait tracé une telle application en portant la valeur d'un maximum de z, soit  $z_{k+1}$  en fonction du maximum précédent  $z_k$ . Ces valeurs  $z_{max}$  sont les coordonnées z des points de la section de Poincaré faite suivant la surface d'intersection : xy - bz = 0 (soit  $\dot{z} = 0$ dans la troisième équation du modèle de Lorenz (6.1) présenté au paragraphe 6.). La pente de la courbe donnant  $z_{k+1} = f(z_k)$  qu'il avait obtenu et dont l'allure est celle d'un accent circonflexe était partout supérieure à l'unité en valeur absolue. Ce qui indique qu'indépendamment du déterminisme inhérent à l'existence d'une relation bien définie entre  $z_{k+1}$  et  $z_k$ , l'écart entre deux trajectoires voisines distantes de  $\delta z$  est multiplié par la pente locale de la courbe. Cette amplification indéfinie des écarts interdit la prédictibilité à long terme. Ainsi, quelle que soit la valeur initiale  $z_0$  dans l'intervalle considéré, le comportement sera chaotique.

Le "package " Mathematica<sup>®</sup> élaboré par Phillip Kent (p.kent@ic.ac.uk) de l'Imperial College of Science Technology and Medicine of London et mis à disposition à l'adresse : http ://metric.ma.ic.ac.uk/articles/talum/ fournit *la section de Poincaré* d'un système dynamique et les valeurs qui lui correspondent. L'élaboration d'un programme Mathematica<sup>®</sup> disponible à l'adresse suivante : http ://ginoux.univ-tln.fr permet d'obtenir une représentation de l'*application de Poincaré*.

#### 4.5.2 Diagramme de bifurcation

"La représentation d'une propriété quelconque, mais caractéristique de la ou des solutions en fonction du *paramètre de bifurcation*, constitue un *diagramme de bifurcation*. "Bergé [1984]. Comme cela a été souligné par Glass et Mackey [1988], la construction d'un diagramme de bifurcation est un bon moyen pour mettre en lumière une signature du chaos. Le graphe représentant comment la valeur de  $z_{max}$  (par exemple) associée à chaque point d'un attracteur varie en fonction d'un des paramètres du modèle (le paramètre de bifurcation  $\nu$ , par exemple) permet de mettre en évidence deux types de comportements. Soit l'attracteur est représenté par un nombre fini de points visités successivement, ce qui va correspondre à un comportement périodique, soit par tout un ensemble de points répartis sur la verticale correspondant à la valeur du paramètre considéré, points visités de façon irrégulière, ce qui permettra de conclure à un attracteur chaotique. De plus, ce type de diagramme met également en évidence l'un des trois scénarii conduisant au chaos, à savoir, *la cascade de doublement de période*.

L'élaboration d'un programme Mathematica<sup>®</sup> disponible à l'adresse suivante : http ://ginoux.univ-tln.fr permet de tracer le diagramme de bifurcation d'un système dynamique.

#### 4.5.3 Mesure de la dimension des attracteurs " étranges "

Il a été établi qu'un système dynamique dissipatif peut devenir chaotique à partir d'une dimension de l'espace des phases supérieure ou égale à trois. Ce chaos – à petit nombre de degrés de libertés – est dû à la sensibilité aux conditions initiales (S.C.I.) des *courbes trajectoires* parcourant des attracteurs particuliers, appelés attracteurs " étranges "<sup>1</sup>. Les caractéristiques de ces attracteurs sont :

- les courbes trajectoires de phases sont attirées vers l'attracteur,
- deux courbes trajectoires voisines divergent sur l'attracteur (S.C.I.),
- la dimension d de l'attracteur est *fractale*.

La technique des " sections de Poincaré " permet de comprendre comment les courbes trajectoires d'un système chaotique peuvent, tout en restant confinées dans une région bornée de l'espace des phases, être imprédictibles. En examinant les intersections de l'attracteur avec des plans de section disposés successivement, on s'aperçoit que deux transformations géométriques complémentaires sont à l'œuvre. L'une, l'étirement, éloigne inexorablement les courbes trajectoires proches, expliquant ainsi la fameuse " sensibilité aux conditions initiales ": la moindre erreur est amplifiée de manière exponentielle au cours du temps. La seconde, le repliement, ramène l'une sur l'autre des trajectoires situées à des extrémités opposées de l'attracteur, maintenant la dynamique dans une région de volume fini. Ces mécanismes ne sont pas sans rappeler la recette de la pâte feuilletée, ce qui explique la structure fractale (infiniment feuilletée) des attracteurs "étranges". Selon B. Mandelbrot [1975], un ensemble est fractal si sa dimension de Hausdorff-Besicovitch n'est pas entière. Cependant, il existe d'autres dimensions non-entières ou *fractales* comme la dimension de Kolmogorov ou de capacité, la dimension de corrélation (Grassberger et al. [1983a], [1983b]), la dimension de Lyapunov, ... Toutes ces dimensions sont très proche les unes des autres et vont faire l'objet d'un rappel.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> La terminologie attracteurs "étranges "est due à David Ruelle, professeur de physique théorique à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques à Bures-sur-Yvette dans l'Essonne qui a introduit ce terme au début des années soixante-dix dans un article co-écrit avec Floris Takens et intitulé : "De la nature de la turbulence", [1971].

#### Dimension de Kolmogorov ou de capacité

Soit un ensemble de points (un segment de longueur L, par exemple) situés dans un espace à n dimensions. Cherchons à recouvrir cet ensemble par des (hyper) cubes de côtés  $\varepsilon$ . Soit  $N(\varepsilon)$  le nombre minimal de cubes nécessaires à cette opération. Par définition ([Dang-Vu *et al.*, 2000]), la dimension de Kolmogorov ou de capacité  $d_C$  est la limite si elle existe :

$$d_C = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Ln\left(N\left(\varepsilon\right)\right)}{Ln\left(1/\varepsilon\right)} \tag{4.4}$$

quand l'arête  $\varepsilon$  des hypercubes tend vers zéro. Par exemple, la dimension de Kolmogorov de l'ensemble triadique de Cantor obtenu est  $d_C \approx 0.6309$ . Celle du triangle de Sierpinski est  $d_C \approx 1.5849$ . La dimension de Kolmogorov est plus facile à déterminer que la dimension de Hausdorff-Besicovitch. Cependant, dans beaucoup de cas, d'après le théorème d'Hutchinson, elle est égale à la dimension de Kolmogorov.

La dimension fractale définie ci-dessus ne caractérise que la géométrie de l'attracteur. Or, les expériences font apparaître le besoin de rendre compte également de la dynamique sur l'attracteur, en particulier des aspects statistiques. En effet, dans un régime chaotique (correspondant à un attracteur " étrange ") les positions de deux points d'une même *courbe trajectoire* éloignés dans le temps sont sans corrélation entre elles (à cause de la S.C.I.), et ceci par définition d'un tel régime. En revanche, tous les points étant situés sur l'attracteur, il existe entre eux une certaine corrélation spatiale que l'on peut chercher à l'aide d'une fonction appropriée. On trouvera par exemple la définition de cette dimension de corrélation dans Manneville [1999] disponible à l'adresse suivante : http://www.ladhyx.polytechnique.fr/people/pops/

#### Exposants de Lyapunov et algorithme de Wolf, Swinney et Vastano

Considérons une application itérée à n dimensions :

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \text{ avec } x_k \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

$$(4.5)$$

Soient J(x) la matrice jacobienne de f,  $q_1(f^k(x))$ , ...,  $q_n(f^k(x))$ , les valeurs propres de  $J(f^k(x))$  ordonnées dans l'ordre décroissant suivant leur module. Alors les n exposants de Lyapunov d'une orbite  $\{f^k(x)\}, k = 0, 1, 2, ...$  sont définies par :

$$\lambda_{i} = \lim_{N \to \infty} \left( \frac{1}{N} Ln \left| q_{i} \left( f^{N} \left( x \right) \right) \right| \right), \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$(4.6)$$

La détermination numérique des exposants de Lyapunov a été rendue possible grâce à l'élaboration d'un algorithme conçu au milieu des années quatre-vingts par A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney et J.A. Vastano [1985w].

Considérant l'application (4.5) et k = 0, dans l'espace des phases une *n*-sphère. Lorsque  $k \to \infty$  la *n*-sphère évolue vers un *n*-ellipsoïde. Supposant que les axes aient été ordonnés du plus grand au plus petit. Le *i*-ème exposant de Lyapunov est défini en fonction du taux de croissance du *i*-ème axe principal  $v_i$  par la formule :

$$\lambda_{i} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} Ln \frac{\|v_{i}(N)\|}{\|v_{i}(0)\|}, \quad i = 1, 2, ..., n$$
(4.7)

Ce qui équivaut à dire que, dans l'itération (4.5), la longueur du premier axe principal croît comme  $e^{\lambda_1 k}$ , l'aire définie par les deux premiers axes principaux croît comme  $e^{(\lambda_1+\lambda_2)k}$ , le volume défini par les trois premiers axes principaux croît comme  $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)k}$  etc. Dans l'itération (4.5) les vecteurs  $v_i(k)$  se transforment d'après la formule :

$$v_i(k+1) = J(k)v_i(k), \quad i = 1, 2, ..., n$$
(4.8)

où J(k) est la matrice jacobienne de f au point  $x_k$ . La formule (4.7) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\lambda_{i} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} Ln \left( \frac{\|v_{i}(1)\|}{\|v_{i}(0)\|} \frac{\|v_{i}(2)\|}{\|v_{i}(1)\|} \dots \frac{\|v_{i}(N)\|}{\|v_{i}(N-1)\|} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

A k = 0, les vecteurs  $v_i$ , i = 1, 2, ..., n sont définis par :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, 0, 0, ..., 0) , \\ v_2 &= (0, 1, 0, 0, ..., 0) , \\ ... \\ v_n &= (0, 0, 0, 0, ..., 1) . \end{aligned}$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération, les vecteurs  $v_1(k)$ ,  $v_2(k)$ , ...,  $v_n(k)$  sont orthonormés par le procédé de Gram-Smidt. Dans la définition (4.7) des exposants de Lyapunov, on peut remplacer Ln par  $Log_2$ . Ce qui revient à remplacer, dans le raisonnement précédent,  $e^{\lambda_1 k}$ ,  $e^{(\lambda_1+\lambda_2)k}$ ,  $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)k}$ ... par  $2^{\lambda_1 k}$ ,  $2^{(\lambda_1+\lambda_2)k}$ ,  $2^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)k}$ ... Les deux définitions diffèrent alors d'un facteur  $Log_2$  qui est sans incidence sur le calcul de la dimension de Lyapunov tel qu'il va être défini maintenant.

Ainsi, les exposants de Lyapunov vont être déterminés à partir de l'algorithme développé par Wolf *et al.* [1985w]. Une version pour MATLAB<sup>®</sup> élaborée, à partir de cet algorithme, par Steve SIU (wksiu@ee.cityu.edu.hk) et intitulée LET,

Lyapunov Exponents Toolbox est mise à disposition à l'adresse :

http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange va permettre de calculer les exposants de Lyapunov d'un système dynamique. Une autre version similaire appelée MATDS, i.e., MATLAB-based program for Dynamical System investigation également élaborée pour MATLAB<sup>®</sup> par Vasiliy N. Govorukhin (vgov@math.rsu.ru) de la Faculty of Mechanics and Mathematics, Dept. of Computational mathematics, Rostov State University, est mise à disposition à l'adresse : http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/ corrobore ces résultats.

Cette estimation des exposants de Lyapunov fournit une caractérisation qualitative et quantitative du comportement dynamique par le biais de la convergence ou de la divergence exponentielle des *courbes trajectoires* voisines évoluant de l'espace des phases. En effet, un système ayant un exposant de Lyapunov positif est une signature non ambiguë d'un régime chaotique Bergé [1984]. D'autre part, en utilisant la conjecture de Kaplan-Yorke [1979], il est alors possible d'évaluer la dimension fractale de l'attracteur " étrange " considéré.

#### Dimension de Lyapunov et conjecture de Kaplan-Yorke

J. Kaplan et J. A. Yorke [1979] ont conjecturé que la dimension fractale d'un attracteur " étrange " pouvait être approximée à partir du spectre des exposants de Lyapunov. Une telle dimension a été appelée la dimension de Kaplan-Yorke (ou de Lyapunov), et il a été démontré que cette dimension est proche des dimensions définies dans les paragraphes précédents.

Un système dynamique de dimension n, comporte n exposants de Lyapunov. La somme de ces exposants mesure le taux de croissance d'éléments de volumes infinitésimaux n-dimensionnels :

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \tag{4.9}$$

Pour un système conservatif (Hamiltonien), cette quantité est nulle d'après le théorème de Liouville. Pour un système dissipatif, cette quantité est négative et il existe un attracteur vers lequel des conditions initiales, prises dans le bassin d'attraction, sont attirées. Si le système est chaotique, au moins un des exposants de Lyapunov doit être positif, et un attracteur " étrange " existe dans ce cas. En suivant la convention qui consiste à ordonner les exposants de Lyapunov par ordre décroissant du plus grand (positif) vers le plus petit (négatif), on conclut que  $\lambda_1$  doit être positif pour un système chaotique. Les systèmes possédant plus d'un exposant de Lyapunov positif sont appelés " hyperchaotiques ". Si l'on considère  $S_p$  la somme de 1 à p des exposants où p < n, alors il est évident que pour un attracteur " étrange ", il existe un entier p = j pour lequel cette somme est

positive et un entier j + 1 pour lequel elle est négative. L'entier j est défini par les conditions :

$$S_{j} = \sum_{i=1}^{j} \lambda_{i} \ge 0 \text{ et } S_{j+1} = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_{i} < 0$$
(4.10)

L'attracteur " étrange " doit alors avoir une dimension *fractale* comprise entre j et j + 1.

La conjecture de Kaplan-Yorke est obtenue par interpolation linéaire entre les dimensions j et j + 1 des éléments de volume qui sont respectivement dilatés et contractés, cette " dimension " fractionnaire caractérise donc une certaine invariance en mesure sur l'espace des phases. La dimension de Kaplan-Yorke est définie par :

$$d_{KY} = j - \frac{S_j}{\lambda_{j+1}} = j - \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{\lambda_{j+1}}$$
(4.11)

Puisque  $S_j$  est positive et que  $\lambda_{j+1}$  est négative, il s'ensuit que  $d_{KY} > j$ . L'évaluation numérique de  $d_{KY}$  peut parfois devenir problématique, comme par exemple dans le cas d'un attracteur ayant la forme d'un tore bidimensionnel. Dans ce cas, les deux premiers exposants de Lyapunov sont très petits, et l'erreur numérique peut conduire à des valeurs comprises n'importe où entre un et deux. Ces erreurs peuvent être réduites en utilisant une interpolation polynomiale plutôt qu'une interpolation linéaire. C'est ce que proposent Konstantinos E. Chlouverakis et J. C. Sprott dans un article récemment publié (Chlouverakis *et al.* [2004c]) et disponible à l'adresse : http ://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper289.htm

#### Dimension de Lyapunov et " conjecture " de Chlouverakis et Sprott

A titre d'exemple, Chlouverakis *et al.* [2004c] étudient un système dynamique de dimension trois et proposent d'ajuster  $S_j$  par une parabole. Le résultat obtenu est :

$$d_{KY} = \frac{\lambda_2 + 3\lambda_3 + \sqrt{9\lambda_2^2 + 6\lambda_2\lambda_3 - 8\lambda_1\lambda_3 + 8\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3^2}}{2(\lambda_3 - \lambda_2)}$$
(4.12)

Si le système contient des équations différentielles ordinaires (E.D.O.) et possède un comportement chaotique, alors  $\lambda_2$  doit être nul, et l'expression (4.12) prend la forme :

$$d_{KY} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 8\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}$$
(4.13)

Pour le modèle d'E.N. Lorenz [1963] dont les exposants de Lyapunov sont (0.906, 0, -14.572) (calculés en base 2) la formule de Kaplan-Yorke (4.11) fournissait pour la dimension *fractale* de l'attracteur la valeur 2.062. La "conjecture " proposée par Chlouverakis [2004c] donne en utilisant la formule (4.13) la valeur 2.112 qui est légèrement supérieure à celle de Kaplan-Yorke. D'après Chlouverakis [2004c], la conjecture de Kaplan-Yorke est une bonne approximation pour un attracteur " étrange " dont la dimension *fractale* est proche d'un entier, mais la modification quadratique proposée fournit une différence significative lorsque la dimension est proche d'un demi-entier impair.

Ces outils analytiques et numériques d'investigation vont permettre une étude détaillée de systèmes dynamiques non-linéaires et chaotiques.

#### 4.5.4 Orbites de Sil'nikov

La présence d'une orbite de Sil'nikov [1965] garantit l'existence du chaos dans un modèle tri-dimensionnel.

#### Théorème 4.1. Sil'nikov

Soit  $\bar{X}$  le point d'équilibre d'un système d'équations différentielles d'ordre trois. Supposons qu'au point  $\bar{X}$ :

- la matrice jacobienne du système linéarisé ait une valeur propre  $\lambda_3$  positive (resp. négative) et une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$  avec  $\alpha < 0$  (resp.  $\alpha > 0$ ) et  $|\lambda_3| > |\alpha|$
- *il* y ait une orbite homocline  $\Gamma$  en  $\bar{X}$ , *i.e.*,  $\lim_{t \to +\infty} \Gamma = \bar{X}$ .

Alors au voisinage de  $\overline{X}$  toute section de Poincaré transverse à  $\Gamma$  possède une structure de fer à cheval de Smale.

# **Chapitre 5**

# Applications à des (SDAL-R)

# 5.1 Le système de Van der Pol

L'oscillateur de B. Van der Pol [1926vdp] est un système du second ordre avec frottements non-linéaires qui peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \alpha (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

La forme particulière du frottement (qui peut être réalisé par un circuit électrique) a pour effet de faire décroître l'amplitude des grandes oscillations et de faire croître celle des petites. Il existe différentes manières d'écrire l'équation précédente comme un système du premier ordre. L'une d'entre elles est :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \alpha \left( x + y - \frac{x^3}{3} \right) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{x}{\alpha} \end{cases}$$

Lorsque  $\alpha$  devient très grand, x devient une variable " rapide " et y la variable " lente ". Dans le but d'analyser la limite  $\alpha \to \infty$ , on introduit un petit paramètre  $\varepsilon = 1/\alpha^2$  et un " temps lent "  $t' = t/\alpha = \sqrt{\varepsilon t}$ . Ainsi, le système peut s'écrire :

$$\overrightarrow{V}\left(\begin{array}{c}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\end{array}\right) = \overrightarrow{\Im}_{\varepsilon}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\varepsilon}f\left(x,y\right)\\g\left(x,y\right)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}x+y-\frac{x^{3}}{3}\\-x\end{array}\right)$$
(5.1)

avec  $\varepsilon$  un paramètre réel positif

$$\varepsilon = 0.05$$

où les fonctions f et g sont indéfiniment dérivables par rapport à tout  $x_i$  et t, i.e., des fonctions de classe  $C^{\infty}$  dans un compact E inclus dans  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . De plus, la présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  dans l'une des composantes de son vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  assure que le système (5.1) est un (SDAL-R). On peut donc appliquer la *méthode du plan osculateur* décrite au paragraphe 2.4. Le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \end{pmatrix} = \frac{d\overrightarrow{\Im}}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x^2 \frac{dx}{dt}\right) \\ -\frac{dx}{dt} \end{pmatrix}$$
(5.2)

La Proposition 2.1 conduit à :

$$\gamma_{\nu} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{\gamma} / / \overrightarrow{V} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| \begin{array}{c} \frac{d^2 x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} & \frac{dy}{dt} \end{array} \right| = 0$$

On obtient l'équation implicite suivante :

$$\frac{1}{9\varepsilon^2} \left[ 9y^2 + \left(9x + 3x^3\right)y + 6x^4 - 2x^6 + 9x^2\varepsilon \right] = 0$$
 (5.3)

Puisque cette équation est quadratique en y, on peut la résoudre dans le but de représenter y en fonction de x.

$$y_{1,2} = -\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2} \pm \frac{x}{2}\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 - 4\varepsilon}$$
(5.4)

Sur la Fig. 5.1 est tracée l'équation de la variété lente (5.4) du système de B. Van der Pol avec  $\varepsilon = 0.05$ en utilisant la Proposition 2.1, i.e., la condition de colinéarité entre le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}$  et le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$ , i.e., le lieu des points d'inflexion où la composante normale  $\gamma_{\nu}$  de son vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  s'annule. De plus, la définition 1 permet de délimiter le domaine de l'espace des phases dans lequel, le produit scalaire entre le vecteur vitesse instantanée  $\overrightarrow{V}$  et le vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$ , i.e., où la composante tangentielle  $\gamma_{\tau}$  de son vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$ est négative. On peut ainsi distinguer graphiquement le domaine *lent* du domaine *rapide* (en bleu), i.e., le domaine de stabilité des *trajectoires*.



FIG. 5.1 – Variété lente (en bleue) et domaine stable du système de B. Van der Pol (en blanc).
La partie bleue de la Fig. 5.1 correspond au domaine dans lequel la variation de la norme du vecteur vitesse instantanée  $\vec{V}$ , i.e., la composante tangentielle du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$ , est positive. On peut remarquer que tant que la *trajectoire*, initialement à l'extérieur du domaine, pénètre à l'intérieur, elle quitte la *variété lente* pour rejoindre la *foliation rapide*.



FIG. 5.2 – Zoom de la partie stable du système de B. Van der Pol.

L'équation de la *variété lente* fournie par la Proposition 2.3 conduit à l'équation implicite suivante :

$$\frac{1}{3\varepsilon^2} \left[ 3x - 4x^3 + x^5 + (3 - 3x^2)y - 3x\varepsilon \right] = 0$$
 (5.5)

A partir de cette équation on peut représenter y en fonction de x :

$$y = \frac{x^5 - 4x^3 + 3x(1 - \varepsilon)}{3(-1 + x^2)}$$
(5.6)

En suivant la démarche de la démonstration de la Proposition 2.3, le développement en série de Taylor de la racine carrée du discriminant de l'Eq. (5.3) jusqu'à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  conduit à l'Eq. (5.6). Sur la Fig. 5.3 est tracée l'équation de la *variété lente* (5.6) du système de B. Van der Pol avec  $\varepsilon = 0.05$  utilisant la Proposition 2.3, i.e., l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\overrightarrow{\gamma}$  en magenta. La courbe en bleue représente l'équation de la *variété lente* (5.4) fournie par la Proposition 2.1.



FIG. 5.3 – Approximation singulière du vecteur accélération instantanée du système de B. Van der Pol (en magenta).

Dans le but d'illustrer le principe de cette approche *cinématique*, on présente dans la Fig. 5.4 les isoclines de l'accélération pour différentes valeurs : 0.5, 0.2, 0.1, 0.05.



FIG. 5.4 – Isoclines du vecteur accélération du système de B. Van der Pol.

On peut remarquer sur la Fig. 5.4 la grande variabilité de la direction du vecteur accélération dans le voisinage de la *variété lente*. Les isoclines du vecteur accélération qui tendent vers la *variété lente* définie par la Proposition 2.1 sont représentées.

La variété uniforme définie au paragraphe 2.5.2. permet de construire un piège dans lequel les *trajectoires* sont confinées. Le vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  est décomposé en deux parties, linéaire et non-linéaire :

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma}_L \left( \begin{array}{c} \frac{x}{\varepsilon^2} + \frac{y}{\varepsilon^2} - \frac{x}{\varepsilon} \\ -\frac{x}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon} \end{array} \right) + \overrightarrow{\gamma}_{NL} \left( \begin{array}{c} -\frac{4x^3}{3\varepsilon^2} + \frac{x^5}{3\varepsilon^2} - \frac{x^2y}{\varepsilon^2} \\ \frac{x^3}{3\varepsilon} \end{array} \right)$$

L'équation de la variété uniforme fournie par la Proposition 3.1 conduit à :

$$\overrightarrow{\gamma}_L / / \overrightarrow{\gamma}_{NL} \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| \begin{array}{cc} \frac{d^2 x_L}{dt^2} & \frac{d^2 x_{NL}}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_L}{dt^2} & \frac{d^2 y_{NL}}{dt^2} \end{array} \right| = 0$$

On obtient l'équation implicite suivante :

$$\frac{1}{3\varepsilon^2} \left[ 3y^2 + \left( 6x - x^3 \right) y - x^4 + x^2 \left( 3 + \varepsilon \right) \right] = 0$$
 (5.7)

qui est représentée en vert sur la Fig. 5.5.



FIG. 5.5 – Variété lente (en bleue) et variété uniforme (en vert) du système de B. Van der Pol.

En utilisant la méthode développée au paragraphe 3.2., il est possible de construire un piège pour les *trajectoires lentes* du système de B. Van der Pol. A partir des Eqs. (5.3) et (5.7) on peut démontrer que la première est au-dessus de l'attracteur tandis que la seconde est en dessous.

# 5.2 Le modèle de Chua

L'oscillateur de Chua [1986c] est un oscillateur de relaxation à caractéristique non-linéaire cubique élaboré à partir d'un circuit formé d'un oscillateur harmonique dont le fonctionnement est basé sur un transistor à effet de champ, couplé à un oscillateur de relaxation composé d'une diode tunnel. La modélisation du circuit fait intervenir une capacité qui va empêcher les chutes de tensions trop brusques et permettre de décrire les mouvements rapides de cet oscillateur par les équations suivantes qui constituent un système lent-rapide.

$$\vec{V} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\Im}_{\varepsilon} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \left( z - \frac{44}{3} x^3 - \frac{41}{2} x^2 - \mu x \right) \\ -z \\ -0.7x + y + 0.24z \end{pmatrix}$$
(5.8)

avec  $\varepsilon$  et  $\mu$  des paramètres réels :  $\varepsilon=0.05$  et  $\mu=2$ 

et où les fonctions f, g et h sont indéfiniment dérivables par rapport à tout  $x_i$ , et t, i.e., sont des fonctions de classe  $C^{\infty}$  dans un compact E inclus dans  $\mathbb{R}^3$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . De plus, la présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\varepsilon$  dans l'une des composantes de son vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  assure que le système (5.8) est un (SDAL-R). On peut donc appliquer la *méthode du plan osculateur* décrite dans le paragraphe 2.4. En dimension trois, la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 prend la forme d'un déterminant :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ y - y_0 & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ z - z_0 & \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

En se plaçant sur n'importe lequel des points fixes du modèle de Chua on obtient l'équation de la *variété lente*. En choisissant par exemple le point O(0,0,0)on obtient :

$$\begin{array}{l} 0.49x^3 + 1.68x^2y - 11548.9x^3y - 134146x^4y - 252560x^5y - 120462x^6y \\ + 1582.6xy^2 + 49298.4x^2y^2 + 383204x^3y^2 + 601333x^4y^2 + 258133x^5y^2 \\ + 20y^3 - 56.168x^2z - 574x^3z - 410.667x^4z - 176.816xyz + 11831.616x^2yz \\ + 96075.6x^3yz + 144320x^4yz + 61952x^5yz - 795.2y^2z - 16400xy^2z \\ - 17600x^2y^2z + 1624.6xz^2 + 49298.4x^2z^2 + 383204x^3z^2 + 601333x^4z^2 \\ + 258133x^5z^2 + 108yz^2 - 3936xyz^2 - 4224x^2yz^2 - 800z^3 - 16400xz^3 \\ - 17600x^2z^3 = 0 \end{array}$$

En utilisant Mathematica<sup>®</sup> on peut représenter sur la Fig. 5.6 le portrait de phase du modèle de Chua et la *variété lente* qui lui est associée.



FIG. 5.6 – Variété lente du modèle de L.O. Chua.

La Proposition 2.2 fournit l'équation de la surface représentant le lieu des points où la torsion s'annule, i.e., le lieu des points où le *plan osculateur* est stationnaire et où la *variété lente* est attractive. Ainsi, l'enveloppe de la *variété lente* du modèle de Chua est représentée sur la Fig. 5.7 :



FIG. 5.7 – Enveloppe de la variété lente du modèle de L.O. Chua.

On déduit de cette figure que le lieu des points où la torsion est négative correspond aux parties attractives de la *variété lente*.

L'équation de la *variété lente* fournie par la Proposition 2.3 conduit à l'équation implicite suivante :

$$\frac{1}{6\varepsilon^2}(5043x^3 + 9020x^4 + 3872x^5 - 246xz - 264x^2z - 4.2x\varepsilon) + 6y\varepsilon + 1.44z\varepsilon + 369x^2\mu + 352x^3\mu - 6z\mu + 6x\mu^2) = 0$$

qui est représentée sur la Fig. 5.8.



FIG. 5.8 – Approximation singulière du vecteur accélération instantanée du modèle de L.O. Chua.

On remarque sur cette figure que l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  constitue une assez bonne approximation de la *variété lente* associée au modèle de L.O. Chua.

En dimension trois, la Proposition 3.1 génère trois déterminants fournissant trois équations dont deux sont linéairement indépendantes.

$$\Delta_{1}' = \begin{vmatrix} \ddot{x}_{L} & \ddot{x}_{NL} \\ \ddot{y}_{L} & \ddot{y}_{NL} \end{vmatrix} = 0; \\ \Delta_{2}' = \begin{vmatrix} \ddot{x}_{L} & \ddot{x}_{NL} \\ \ddot{z}_{L} & \ddot{z}_{NL} \end{vmatrix} = 0; \\ \Delta_{3}' = \begin{vmatrix} \ddot{y}_{L} & \ddot{y}_{NL} \\ \ddot{z}_{L} & \ddot{z}_{NL} \end{vmatrix} = 0$$

La résolution de la première équation du système formé par les déterminants

 $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  est quadratique en y et permet de représenter  $y_1$  et  $y_2$  en fonction de x et z. Ces deux solutions correspondent respectivement aux parties gauche et droite de la variété uniforme de l'attracteur du modèle de L.O. Chua. En injectant chacune de ces solutions dans l'équation formée par le second déterminant  $\Delta_2$ , on obtient l'équation de la partie droite (resp. gauche) de la variété uniforme qui est représentée sur la Fig. 5.9.

En utilisant la méthode développée au paragraphe 3.2., il est possible de construire un piège pour les *trajectoires lentes* du modèle de L.O. Chua. A partir des équations des variétés *lente* et *uniforme* on peut démontrer que la première est audessus de l'attracteur tandis que la seconde est en dessous.



FIG. 5.9 – Variété uniforme du modèle de L.O. Chua.

# **Chapitre 6**

# Application à un (SDACCL-R) : le modèle de Lorenz

A l'origine le modèle établi par Edward Lorenz [1963] avait pour but d'analyser le comportement imprédictible du temps au sens météorologique du terme. Après avoir développé des équations aux dérivées partielles non-linéaires à partir des équations de Navier-Stokes et de l'équation thermique en utilisant des transformées de Fourier, Lorenz les a tronquées pour ne retenir que trois modes. Bien que ce modèle ne possède pas de petit paramètre multiplicatif dans l'une des composantes de son vecteur vitesse instantanée  $\overline{V}$  et par conséquent pas d'approximation singulière, il peut être considéré comme un (SDAL-R) dans le sens défini au paragraphe 1.3. puisqu'il a été numériquement vérifié (Rossetto et al. [1998]) que sa matrice jacobienne fonctionnelle possède, pour certaines valeurs de paramètres, une valeur propre grande et négative sur un large domaine de l'espace des phases. Aussi, la méthode du plan osculateur développée au paragraphe 2.4. peut encore être utilisée pour déterminer l'équation de la variété lente qui lui est associée. La forme la plus répandue du modèle de Lorenz est la suivante :

$$\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\\frac{dz}{dt}\end{pmatrix} = \overrightarrow{\Im}\begin{pmatrix}f(x,y,z)\\g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma(y-x)\\-xz+rx-y\\xy-\beta z\end{pmatrix}$$
(6.1)

avec  $\sigma$ , r, et  $\beta$  sont des paramètres :  $\sigma = 10$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$ , r = 28 et où les fonctions f, g et h sont indéfiniment dérivables par rapport à tout  $x_i$ , et t, i.e., sont des fonctions de classe  $C^{\infty}$  dans un compact E inclus dans  $\mathbb{R}^3$  et à valeurs dans R. De plus, l'absence d'un petit paramètre multiplicatif dans l'une des composantes de son vecteur vitesse  $\vec{V}$  implique que pour ce (SDACCL-R) il n'existe pas d'approximation singulière associée au vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$ , ni de variété uniforme. On peut néanmoins appliquer la méthode décrite dans le paragraphe 2.4. pour déterminer, grâce à la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1, l'équation de la *variété lente* associée à ce système. Le modèle de Lorenz (6.1) possède trois points fixes : l'origine O(0,0,0), les points  $I(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$  et  $J(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ . En appliquant la condition de coplanarité (2.22) en chacun de ces points on obtient l'équation de la *variété lente*. Au point I, cette condition prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x - 6\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} y - 6\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} + (z - 27) \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

Laquelle peut être écrite en remplaçant par les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération instantanées  $\overrightarrow{V}$  et  $\overrightarrow{\gamma}$ :

$$\begin{split} &1837080x^2-57456\sqrt{2}x^3+7056x^4+590490xy+7524\sqrt{2}x^2y-834x^3y\\ -656100y^2-7524\sqrt{2}xy^2+2214x^2y^2-54\sqrt{2}x^3y^2+9x^4y^2+5940\sqrt{2}y^3\\ +1050xy^3-900y^4+84480\sqrt{2}xz-200810x^2z+3564\sqrt{2}x^3z-504x^4z\\ -52080\sqrt{2}yz-52020xyz+90\sqrt{2}x^2yz-15x^3yz+50600y^2z-90x^2y^2z\\ -3024\sqrt{2}xz^2+7404x^2z^2-54\sqrt{2}x^3z^2+9x^4z^2+1440\sqrt{2}yz^2+1050xyz^2\\ -900y^2z^2-90x^2z^3=0 \end{split}$$

Au point J, on obtient :

$$\left(x+6\sqrt{2}\right) \left| \begin{array}{c} \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right| + \left(y+6\sqrt{2}\right) \left| \begin{array}{c} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} & \frac{dz}{dt} \end{array} \right| + \left(z-27\right) \left| \begin{array}{c} \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{array} \right| = 0$$

De même, en remplaçant par les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération instantanées  $\overrightarrow{V}$  et  $\overrightarrow{\gamma}$ :

 $\begin{aligned} &1837080x^2 + 57456\sqrt{2}x^3 + 7056x^4 + 590490xy - 7524\sqrt{2}x^2y - 834x^3y \\ &-656100y^2 + 7524\sqrt{2}xy^2 + 2214x^2y^2 + 54\sqrt{2}x^3y^2 + 9x^4y^2 - 5940\sqrt{2}y^3 \\ &+1050xy^3 - 900y^4 - 84480\sqrt{2}xz - 200810x^2z - 3564\sqrt{2}x^3z - 504x^4z \\ &+52080\sqrt{2}yz - 52020xyz - 90\sqrt{2}x^2yz - 15x^3yz + 50600y^2z - 90x^2y^2z \\ &+3024\sqrt{2}xz^2 + 7404x^2z^2 + 54\sqrt{2}x^3z^2 + 9x^4z^2 - 1440\sqrt{2}yz^2 + 1050xyz^2 \\ &-900y^2z^2 - 90x^2z^3 = 0 \end{aligned}$ 

Ces deux équations correspondant chacune à une partie de la *variété lente* sont représentées sur la Fig. 6.1.



FIG. 6.1 – Variété lente du modèle de E.N. Lorenz.

La Proposition 2.2 fournit l'équation de la surface représentant le lieu des points où la torsion s'annule, i.e., le lieu des points où le *plan osculateur* est stationnaire et où la *variété lente* est attractive. Ainsi, l'enveloppe de la *variété lente* du modèle de Lorenz est représentée sur la Fig. 6.2 :



FIG. 6.2 – Enveloppe de la variété lente du modèle de E.N. Lorenz.

On déduit de cette figure que le lieu des points où la torsion est négative correspond aux parties attractives de la *variété lente*.

# **Chapitre 7**

# **Applications à des (SDAL-R) de type prédateur-proie**

# 7.1 Les modèles de type prédateur-proie

Si le premier regard scientifique sur la dynamique des populations semble être celui de Leonardo Fibonacci [2004f], dit Léonard de Pise, dont la célèbre suite de nombres est proposée dans le Liber abaci(1202) comme réponse à un problème de multiplication de population, les fondements modernes de la dynamique des populations datent clairement de Thomas Robert Malthus [1798]. Considérant une population<sup>1</sup> "idéale " constituée d'une seule *espèce animale* homogène, i.e., dont il néglige les variations d'âge, de taille et de périodicité éventuelle pour la natalité ou la mortalité et qui vit seule dans un milieu invariable ou qui coexiste avec d'autres espèces sans influence directe ou indirecte, il fonde en 1798, avec son célèbre énoncé " Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio ", le paradigme de la croissance exponentielle. Celui-ci consiste à supposer que l'accroissement du nombre N d'individus de cette population, pendant un court intervalle de temps, est proportionnel à N. Ce qui se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN\left(t\right)}{dt} = rN\left(t\right) \tag{7.1}$$

où r est un facteur constant de proportionnalité qui représente le *coefficient* d'accroissement ou taux de croissance. En intégrant l'équation (7.1) on obtient la loi de croissance exponentielle ou loi de croissance malthusienne. Cette loi qui ne tient pas compte des limites que le milieu impose à la croissance et qui est en

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> D'après Frontier [2001], on désigne par population l'ensemble des individus d'une même espèce vivant sur un même territoire et pouvant se reproduire entre eux.

désaccord avec les faits influença profondément les travaux de Charles Darwin [1859] sur la sélection naturelle. En effet, Darwin (1859) fonda l'idée de " survie du plus apte " sur l'impossibilité d'une croissance indéfinie des populations. Il illustra cette impossibilité par une superbe parabole figurant la descendance d'un couple d'éléphants qui, dans des conditions optimales, couvrirait la surface de la Terre en quelques siècles<sup>2</sup>. Cependant, on constate, lors d'expériences de laboratoire que les prévisions de la *loi malthusienne* restent correctes sur de petits effectifs, tandis qu'il y a divergence pour des valeurs élevées de la population. On est donc amené à conclure que la *loi exponentielle* reste valable tant que la densité de la population ne sature pas le *milieu*. C'est à partir de ces considérations que le biologiste belge Pierre-François Verhulst propose en 1838 un modèle tenant compte de la limitation imposée par l'effectif croissant de la population.

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \frac{r}{K}N^{2}(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$
(7.2)

Où le second terme trouve son origine dans une interprétation " mécaniste " du phénomène : on admet que la croissance est limitée par une sorte de " frottement " intérieur à la population, i.e., à ressources égales, plus le nombre d'individu est élevé, plus il est difficile de se nourrir donc de croître. Le facteur *K* appelé *carrying capacity* en anglais correspond à la *capacité* du *milieu* à supporter la croissance de la population et représente la *population limite* au-delà de laquelle elle ne peut plus croître. Cette loi, à laquelle Verhulst donne le nom de *logistique*, est radicalement différente de celle de Malthus en ce sens qu'elle impose une valeur limite à la population. Elle a, comme on l'a vu précédemment dans le paragraphe d'introduction, été appliquée avec succès à beaucoup de situations réelles comme par exemple dans les expériences conduites par le biologiste russe G.F. Gause [1935] sur la croissance d'un protozoaire, *Paramecium caudatum*. Indépendamment de ces deux archétypes d'autres modèles de croissance ont été développés. On peut citer par exemple le modèle de B. Gompertz [1832] destiné à évaluer la vitesse de croissance d'une tumeur.

Dans la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, l'étude de la dynamique de plusieurs espèces en interaction connut un essor considérable. C'est à cette époque appelée "l'âge d'or de l'écologie théorique<sup>3</sup> " que furent développés les premiers modèles basés sur des comportements de type compétition et des relations prédateur-proie. La paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions a fait l'objet d'une querelle de priorité entre Alfred J. Lotka [1925] et Vito Volterra qui sera décrite dans la note bibliographique. Les travaux de G. Israel [1991i] ont ainsi

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> On trouve également un exemple de cette impossibilité dans le film de V.A. Kostitzin et J. Painlevé intitulé : "Images Mathématiques de la Lutte pour la Vie", 1937, Médiatèque du Palais de la découverte, Paris.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Voir F.M. Scudo et al. [1978], "The Golden Age of Theoretical Ecology : 1923-1940"

permis d'établir que c'est à V. Volterra que revient le mérite de l'élaboration du premier modèle de type prédateur-proie appliqué à une situation biologique. En effet, l'intérêt de Volterra pour les problèmes d'équilibre entre les espèces animales dans les écosystèmes fut suscité par son beau-fils, le zoologiste Umberto d'Ancona qui s'occupait depuis quelques années de statistiques portant sur la pêche dans le nord de la mer Adriatique. Ces données concernaient le pourcentage de poissons prédateurs (Sélaciens) péchés dans trois ports italiens : Trieste, Fiume et Venise pendant la période 1905-1923. Elles prouvaient que pendant la période 1915-1920, où la pêche était moins intense à cause de la guerre, il y avait eu un accroissement relatif de la classe des Sélaciens. Selon l'hypothèse de D'Ancona, la pêche perturbait l'équilibre naturel entre les espèces. Elle favorisait une augmentation relative des espèces " proies ", c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent seulement de plancton, et une diminution des espèces "prédatrices ", c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent d'autres poissons. La diminution de la pêche due à la première guerre mondiale avait donc rétabli, au moins en partie, l'équilibre naturel. D'Ancona s'adressa à Volterra en lui demandant de trouver une démonstration mathématique de son hypothèse. La réponse de Volterra publiée en 1926 prit la forme du célèbre modèle prédateur-proie, présenté ci-dessous, et dont l'élaboration sera décrite dans la note bibliographique. Dans le premier chapitre de ses "Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie" [1931v] il étudie la coexistence de " deux espèces dont l'une dévore l'autre ". Considérant deux espèces, la première, la proie x(t), aurait, si elle était seule, une croissance mal*thusienne*. La seconde, le prédateur y(t), se nourrit exclusivement de la première et, en l'absence de proie, "s'épuiserait progressivement et disparaîtrait". La mise en équation de la fonction représentant la prédation est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborées par Volterra [1931v]. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces, et que le nombre de ces rencontres soit proportionnel au nombre des individus qui la compose. Le coefficient de proportionnalité étant égal à la probabilité de rencontre. La seconde consiste à supposer qu'il existe " un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres", i.e., que la prédation de la proie est *équivalente* à la croissance du prédateur. De plus, Volterra [1931v] considère comme immédiat cet accroissement. Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)\\ \frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$
(7.3)

où a représente le *taux de croissance* de la proie en l'absence de prédateur, b le taux de prédation du prédateur sur la proie, c le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie et d le *taux de croissance* du prédateur du fait de sa prédation.

A partir de ce modèle, Volterra [1931v] pu établir trois lois suivantes :

Loi du cycle périodique : "*Les fluctuations de deux espèces sont périodiques*. Pour un certain couple de valeurs des nombres d'individus, l'état de l'association biologique est stationnaire et l'équilibre est *stable*".

Loi de conservation des moyennes : "*Les moyennes* pendant une période des nombres des individus des deux espèces sont indépendantes des conditions initiales, et égales au nombres qui correspondent à l'état stationnaire".

Loi de perturbation des moyennes : " Si l'on détruit les deux espèces uniformément et proportionnellement aux nombres de leurs individus (assez peu pour que les fluctuations subsistent), la moyenne du nombre des individus de l'espèce dévorée croît et celle de l'espèce dévorante diminue. "

Le phénomène observé par D'Ancona est ainsi expliqué : l'accroissement du nombre de prédateurs et la diminution du nombre de proies résultaient de la disparition de la pêche, qui, avant la guerre, avait modifié l'équilibre naturel de cette " association biologique ". En pêchant moins, on favorise les espèces plus voraces aux dépens des autres.

Ce modèle déterministe qui constitue l'archétype du réseau trophique a pour but de transcrire différents types de comportements animaux par des fonctions mathématiques. Deux types de comportements y sont représentés : ceux liés à la croissance et ceux liés à la décroissance. La natalité et la prédation sont liées à la croissance alors que la mortalité naturelle et la mortalité par prédation correspondent à une décroissance du nombre d'individus. Chacun de ces comportements possède une forme mathématique, appelée réponse fonctionnelle. Depuis le milieu des années vingt, ces réponses fonctionnelles ont fait l'objet de nombreuses recherches et développements visant à rendre plus réaliste la représentation du comportement animal par une fonction mathématique. La croissance naturelle, i.e., par *natalité* de la proie représentée par une réponse fonctionnelle de type Malthus [1798] a, comme on l'a vu précédemment, été modifiée par Verhulst [1838] afin de rendre compte d'une certaine limitation. La décroissance par mortalité naturelle a, dans un premier temps, été envisagée de manière symétrique à celle de la croissance naturelle, c'est-à-dire en remplaçant dans les équations (7.1) et (7.2) le taux de croissance r par un taux de mortalité naturelle m = -r. Il est important de souligner que cette réponse fonctionnelle, appelée parfois relation de fermeture, a dans un deuxième temps fait l'objet d'études particulières visant à transcrire le comportement spécifique de certaines espèces, le cannibalisme par exemple.

Toutes ces *réponses fonctionnelles* sont résumées dans le tableau présenté cidessous.

	croissance naturelle	mortalité naturelle		
Malthus	$rx\left(t ight)$	-mx(t)		
Verhulst	$rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)$	$-mx\left(t ight)\left(1+rac{x\left(t ight)}{K} ight)$		

TAB. 7.1 – Réponses fonctionnelles pour la croissance et décroissance naturelle

La réponse fonctionnelle choisie par Volterra [1931v] pour décrire la prédation était proportionnelle au produit du nombre d'individus de chaque espèce : bx(t)y(t). Quelques années plus tard, le zoologiste russe G.F. Gause [1935] qui fut l'un des premiers à faire des "vérifications expérimentales de la théorie mathématique de la lutte pour la vie ", proposa, pour décrire la prédation, un autre type de réponse fonctionnelle visant à transcrire une certaine satiété du prédateur vis-à-vis de ses proies :  $x^{g}(t) y(t)$  avec  $0 < q \leq 1$ . A la fin des années cinquante, l'entomologiste C.S. Holling ([1959a], [1959b]), élabora à partir de la célèbre "équation du disque", deux nouvelles réponses fonctionnelles pour la prédation visant également à transcrire une certaine satiété du prédateur vis-à-vis de ses proies : la fonction de Holling type II et la fonction de Holling type III. Cette formulation suppose que le prédateur divise son temps en deux sortes d'activités : la recherche de sa proie, et sa capture, qui comprend le temps mis pour la chasser, la tuer, la dévorer et la digérer. La fonction de Holling type II (cyrthoïde) est une réponse fonctionnelle dans laquelle le taux "d'attaque "du prédateur augmente lorsque le nombre de proies est faible puis devient constant lorsque le prédateur atteint la satiété. En d'autres termes, le prédateur cause une mortalité maximum à de faibles densités de proies. Ainsi, les réponses fonctionnelles cyrthoïdes sont typiques des prédateurs spécialisés dans l'attaque d'une ou quelques proies. Dans ce cas la mortalité des proies décroît avec leur densité. La fonction de Holling type II est représentée par :

$$\frac{B\alpha x(t) y(t)}{1 + B\beta x(t)}$$
(7.4)

où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent respectivement le temps de recherche et de capture de la proie et *B* le taux de prédation par unité de temps.

La fonction de Holling type *III (sigmoïde)* est une *réponse fonctionnelle* dans laquelle le taux "d'attaque " du prédateur augmente tout d'abord lorsque le nombre de proies est faible puis ralentit lorsque le prédateur atteint la *satiété*. En d'autres

termes, le prédateur augmente son activité de recherche lorsque la densité des proies augmente. Ainsi, les *réponses fonctionnelles sigmoïdes* sont typiques des prédateurs généralistes qui passent d'une espèce de proie à une autre et qui concentrent leur activité dans des régions où les ressources sont en abondance. Dans ce cas, la mortalité des proies augmente dans un premier temps avec leur densité, puis décroît. La fonction de Holling type *III* est représentée par :

$$\frac{B\alpha x^{2}(t) y(t)}{1 + B\beta x^{2}(t)}$$
(7.5)

où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent respectivement le temps de recherche et de capture de la proie et *B* le taux de prédation par unité de temps. Mathématiquement, il a été démontré (Real [1977r]) que cette formulation est équivalente à celle développée en 1913 par L. Michaelis et M. Menten pour décrire la cinétique de réactions enzymatiques. Toutes ces *réponses fonctionnelles* sont résumées dans le tableau présenté ci-dessous.

Volterra	Gause	Holling type II	Holling type III
$bx\left(t\right)y\left(t\right)$	$x^{g}(t) y(t)$ avec $0 < g \leq 1$	$\frac{B\alpha x(t)y(t)}{1+B\beta x(t)}$	$\frac{B\alpha x^2(t)y(t)}{1+B\beta x^2(t)}$

#### TAB. 7.2 – Réponses fonctionnelles pour la prédation

L'hypothèse des équivalents [1931v] implique que la prédation intervienne à la fois dans la croissance et la décroissance puisque la mortalité des proies par prédation est équivalente à un accroissement immédiat des prédateurs.

#### **Remarque :**

Ce modèle idéal et simplifié qui est devenu dans l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires une sorte de paradigme a généralement fait l'objet de critiques lui reprochant son manque de réalisme. Cependant, on verra dans la note bibliographique présentée en annexe que dans l'ouvrage de Volterra intitulé : *Leçons sur la Théorie mathématique de la Lutte pour la Vie* [1931v], il avait déjà envisagé tous les aspects du problème : influence du *milieu* ou pollution, hétérogénéité des individus ou classes d'âges, diffusion ou *migration* et même la *saisonnalité*.

## 7.2 Modèle de Volterra-Gause : cas général

On considère le modèle ainsi élaboré pour trois espèces interagissant dans un mode prédateur-proie.

$$\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\\frac{dz}{dt}\end{pmatrix} = \overrightarrow{\Im}\begin{pmatrix}F(x,y,z)\\G(x,y,z)\\H(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\left(1-\frac{\lambda}{a}x\right)x - bx^{k}y\\dx^{k}y - cy - ey^{p}z\\(fy^{p} - g)z\end{pmatrix}$$
(7.6)

où les fonctions F, G et H sont indéfiniment dérivables par rapport à tout  $x_i$ , et t, i.e., sont des fonctions de classe  $C^{\infty}$  dans un compact E inclus dans  $\mathbb{R}^3_{+*}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Ce modèle comprend une réponse fonctionnelle logistique de type Verhulst [1838] pour la proie (x), et une réponse fonctionnelle de type Gause [1935] pour le prédateur (y) et pour le super-prédateur (z). Le paramètre a représente le taux de croissance maximum d'une proie en l'absence de prédateur et  $a/\lambda$  la " population limite ".

Le taux de prédation du prédateur représenté par une réponse fonctionnelle de type Gause [1935] s'écrit :  $x^k$ . Celui du super-prédateur est représenté par une réponse fonctionnelle du même type qui s'écrit :  $y^p$ .

Le paramètre b est le taux maximum de prédation.

Le paramètre c est le taux de mortalité naturelle du prédateur

Le paramètre d est le taux maximum de croissance du prédateur en l'absence de super-prédateur. Les paramètres e, f et g sont respectivement similaires à b, det à c excepté que dans ce cas, le prédateur y est la proie du super-prédateur z.

### 7.2.1 Points fixes

La structure non algébrique du polynôme formant le membre de droite des équations (7.6) rend impossible la détermination des coordonnées des points fixes par la méthode classique des isoclines. Cependant, ce modèle possède deux points fixes triviaux : O(0,0,0),  $K(a/\lambda,0,0)$ . Ceci permet de chercher des points fixes dans le plan xy, en fixant z = 0.

L'analyse des isoclines du système (7.6) fournit le point I de coordonnées

$$I\left(\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}, \frac{d}{bc}\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}\left[a - \lambda\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}\right], 0\right)$$

### 7.2.2 Condition d'existence de points fixes dans le plan xy

Les points fixes possèdent une signification biologique s'ils sont positifs ou nuls. Ceci génère la condition suivante :

$$a - \lambda \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}} > 0 \implies d \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{k} - c > 0$$
 (7.7)

### 7.2.3 Matrice Jacobienne Fonctionnelle

$$\Im(x, y, z) = \begin{pmatrix} a - bkx^{k-1}y - 2x\lambda & -bx^k & 0\\ dkx^{k-1}y & -c + dx^k - epy^{p-1}z & -ey^p\\ 0 & fpy^{p-1}z & -g + fy^p \end{pmatrix}$$

En utilisant la notation de Freedman [1977f], posons :

$$\Im\left(x, y, z\right) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$
(7.8)

### 7.2.4 Nature et stabilité des points fixes dans le plan xy

Le point O(0,0,0), ayant pour valeurs propres  $\{a, -c, -g\}$ , est instable (a > 0), attractif suivant y'y et z'z et répulsif suivant x'x. Le point  $K(a/\lambda, 0, 0)$ , ayant pour valeurs propres  $\{-a, -g, -c + d(a/\lambda)^k\}$ , est instable  $(-c + d(a/\lambda)^k > 0, d$ 'après (7.7)), attractif suivant x'x et z'z et répulsif suivant :

$$y = -\frac{a - c + d\left(\frac{a}{\lambda}\right)^k}{b\left(\frac{a}{\lambda}\right)^k} x = -\kappa x$$

puisque d'après (7.7) :  $-c + d\left(\frac{a}{\lambda}\right)^k > 0$  et donc  $\kappa > 0$ .

La méthode décrite par Freedman et Waltman [1977f] peut être utilisée pour étudier la stabilité du point

$$I\left(\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}, \frac{d}{bc}\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}\left[a - \lambda\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}\right], 0\right)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle peut se factoriser sous la forme :

$$(m_{33} - \sigma) \left(\sigma^2 - m_{11}\sigma - m_{12}m_{21}\right) = 0; m_{13} = m_{31} = m_{32} = m_{22} = 0$$

et fournit les trois valeurs propres :  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ 

$$\sigma_1 = m_{33} = -g + f y^p \tag{7.9}$$

Le signe de la première de ces trois valeurs propres ne peut être déterminé à l'aide d'aucune condition. Il est par conséquent impossible de tirer une conclusion concernant la stabilité. Cependant, une bifurcation de Hopf peut se produire dans le plan xy si, et seulement si, cette valeur propre est négative. Pour les deux autres valeurs propres, la résolution du polynôme de degré deux fournit une pair de valeurs propres  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ 

$$\sigma_{2,3} = \frac{m_{11} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{m_{11} \pm \sqrt{m_{11}^2 + 4m_{12}m_{21}}}{2} \tag{7.10}$$

Si on suppose que  $\Delta < 0,$  alors les deux valeurs propres sont complexes conjuguées.

Pour qu'une bifurcation de Hopf se produise il faut que la partie réelle de ces valeurs propres soit positive et s'annule pour certaines valeurs de paramètres. Choisissons  $\lambda$  ce paramètre et calculons la partie réelle de ces valeurs propres.

$$2Re\left[\sigma_{2}\right] = m_{11} = a - bkx^{-1+k}y - 2x\lambda = \left[\left(1-k\right)\frac{bc}{d}y - \lambda x^{2}\right]\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme  $a - \lambda x^2 = bx^k y$  et  $x^k = c/d$ 

 $Re\left[\sigma_{2}\right] > 0$  si et seulement si  $(1 - k) ybc/d - \lambda x^{2} \ge 0$ , fournit une condition pour y

$$y \geqslant \frac{d}{bc} \frac{\lambda}{1-k} x^2$$

en remplaçant x et y par les coordonnées du point I

$$\lambda \leqslant a \left(\frac{1-k}{2-k}\right) \left(\frac{c}{d}\right)^{-\frac{1}{k}} \tag{7.11}$$

On peut démontrer que quels que soient les paramètres du modèle, le discriminant  $\Delta$  est toujours négatif. Ainsi, le point I est toujours un foyer stable ou instable.

### 7.2.5 Existence d'une bifurcation de Hopf dans le plan xy

A condition que  $\lambda$  reste inférieur à cette valeur (7.11) et que la première valeur propre (7.9) soit négative, i.e., que la direction propre associée soit attractive et que le flot soit dirigé vers le bassin d'attraction du point *I*, un cycle limite existe dans le plan *xy* et une bifurcation de Hopf peut s'y produire. Le point

$$I\left(\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}, \frac{d}{bc}\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}\left[a - \lambda\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}\right], 0\right)$$

est instable, et se comporte dans le plan xy comme un foyer attractif.

### 7.2.6 Points fixes dans le premier octant

On s'intéresse maintenant à l'existence de points fixes dans le premier octant avec une signification biologique, i.e., pour z > 0. La structure non-algébrique du membre de droite de l'équation (7.6) empêche toute détermination analytique d'une solution. Néanmoins, en exprimant ce polynôme comme une fonction de xil est possible de préciser le nombre de points fixes et l'intervalle dans lequel ils sont contenus. Ce polynôme non-algébrique possède seulement deux solutions. Soient  $x_{1,2} = \alpha$  ces deux solutions. Elles appartiennent à l'intervalle suivant :

$$x_1 < x^* < \frac{a}{\lambda} \left( \frac{1-k}{2-k} \right) < x_2 < \frac{a}{\lambda}$$
(7.12)

D'après la troisième équation de (7.6), la seconde coordonnée y peut s'exprimer ainsi :

$$(fy^p - g) z = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si l'on pose :

$$\beta = y = \left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{1}{p}}$$

A partir de la seconde équation de (7.6), la troisième coordonnée z peut s'exprimer en fonction de x:

$$-cy + dx^{k}y - ey^{p}z = 0 \Rightarrow z = \frac{f\beta}{eg} (dx^{k} - c)$$

# 7.2.7 Condition d'existence de points fixes dans le premier octant

A partir de cette troisième coordonnée, une autre condition d'existence biologique des points fixes peut être déterminée :

$$dx^{k} - c > 0 \implies x > \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}$$
(7.13)

Le point fixe J peut donc être défini par ses coordonnées et par une condition d'existence biologique.

$$J\left(\alpha,\beta,\frac{f\beta}{eg}\left(dx^{k}-c\right)\right)$$

avec

$$x > \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{7.14}$$

Une bifurcation de Hopf peut se produire en dehors du plan xy s'il n'est pas possible qu'elle ne se produise dans le plan xy. Ceci peut se traduire par une condition déduite de l'inégalité (7.12) :

$$\lambda \ge a \left(\frac{1-k}{2-k}\right) \left(\frac{c}{d}\right)^{-\frac{1}{k}} \implies \frac{a}{\lambda} \left(\frac{1-k}{2-k}\right) \le \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}}$$
(7.15)

En combinant les inégalités (7.12) et (7.14), on obtient :

$$x_1 < x* < \frac{a}{\lambda} \left(\frac{1-k}{2-k}\right) < \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}} < x_2 < \frac{a}{\lambda}$$
(7.16)

### 7.2.8 Nature et stabilité des points fixes dans le premier octant

La méthode décrite par Freedman and Waltman [1977f] peut encore être utilisée pour étudier la stabilité du point

$$J\left(\alpha,\beta,\frac{f\beta}{eg}\left(dx^{k}-c\right)\right)$$

D'après cette méthode, si  $m_{11} > 0$  alors le point J est instable. Si  $m_{11} < 0$  et  $m_{22} \leq 0$ , alors le point J est stable. De plus, si  $m_{11} < 0$ , alors le point J est asymptotiquement stable. La trace et le déterminant de la matrice Jacobienne fonctionnelle évaluées au point J donnent :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = Tr\left[\Im\right] = m_{11} + m_{22} = a\left(1 - k\right) - \lambda x\left(2 - k\right) + (1 - p)\left(-c + dx^k\right)$$

$$\sigma_{1}\sigma_{2}\sigma_{3} = Det [\Im] = m_{11}m_{23}m_{32}$$
  
=  $[a (1-k) - \lambda x (2-k)] [egpy^{p-1}z]$   
=  $[a (1-k) - \lambda x (2-k)] (-c + dx^{k}) gp$ 

## 7.2.9 Existence d'une bifurcation de Hopf dans le premier octant

A partir de la condition d'existence biologique d'un point fixe J (CEPF 3D), on peut conclure que : si  $x_1$  est la solution de la première isocline, alors le point Jne peut exister puisque conformément à la condition (7.16),  $x_1 < (c/d)^{\frac{1}{k}}$  et ainsi  $z_1 < 0$ . Une bifurcation de Hopf peut se produire au point I dans le plan xy si la première valeur propre (7.9) est négative. Dans ce cas, la direction propre associée est attractive et le flot est dirigé vers le bassin d'attraction du point I. Ce qui est en accord avec la condition (7.11) qui implique que :

$$x_1 < \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}} < x* < \frac{a}{\lambda} \left(\frac{1-k}{2-k}\right)$$

Si  $x_2$  est la solution de la première isocline, alors le point J existe puisque conformément à la condition (7.16),

$$x_1 < x * < \frac{a}{\lambda} \left(\frac{1-k}{2-k}\right) < \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{k}} < x_2 < \frac{a}{\lambda}$$

Dans ce cas les points I et J coexistent et il est nécessaire de déterminer la stabilité du point J même si la première valeur propre (7.9) est positive. En conséquence la direction propre associée est répulsive et le flot est dirigé vers le bassin d'attraction du point J.

Néanmoins dans ce cas précis :  $m_{11} = a (1 - k) - \lambda x_2 (2 - k) < 0$ . Ceci implique que le déterminant soit négatif et que le signe de la trace soit indéterminé parce que l'on a affaire à une différence. Si l'on suppose que le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle possède deux valeurs propres complexes conjuguées, la trace et le déterminant vont s'écrire :

$$\sigma_1 + 2Re [\sigma_2] = Tr [\Im]$$
$$\sigma_1 |\sigma_2|^2 = Det [\Im] < 0$$

On peut déduire de cette expression que la première valeur propre est négative. Ainsi, la direction propre associée est attractive et le flot est dirigé vers le bassin d'attraction du point J. De plus, l'indétermination du signe de la trace est compatible avec le fait que le signe de la partie réelle des valeurs propres puisse changer. Dans ce cas, l'occurrence d'une bifurcation de Hopf en dehors du plan xy peut être envisagée.

# **7.3** Modèle de Volterra-Gause pour $k = p = \frac{1}{2}$

### 7.3.1 Equations dédimensionnées

L'expression des équations dans une forme adimensionnée permet de réduire le nombre de paramètres du modèle. Posons :

Ceci génère un modèle dédimensionné à quatre paramètres au lieu de huit. En réalité, puisque l'on a posé k = p = 1/2, le modèle obtenu contient six paramètres au lieu de huit.

$$\vec{V} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\Im}_{\xi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} F(x, y, z) \\ G(x, y, z) \\ \varepsilon H(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} \left( x(1-x) - x^{\frac{1}{2}}y \right) \\ -\delta_1 y + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{1}{2}}z \\ \varepsilon z \left( y^{\frac{1}{2}} - \delta_2 \right) \end{pmatrix}$$
(7.17)

### 7.3.2 Solutions bornées

A partir des travaux de V. Volterra [1931v] et ceux de H.I. Freedman [1985f], il est possible de démontrer que les solutions du modèle de Volterra-Gause sont bornées. Si V. Volterra [1931v] utilise la *méthode des approximations successives*, H.I. Freedman [1985f] établit que les solutions d'un modèle de type prédateurproies sont bornées à partir du *théorème de comparaison standard* dont la démonstration effectuée par Hale [1969] est rappelée ici.

### Théorème 7.1. Théorème de comparaison standard

Soit  $\phi$  une fonction absolument continue satisfaisant l'inégalité différentielle suivante :

$$\frac{d\phi\left(t\right)}{dt} + k_{1}\phi\left(t\right) \leqslant k_{2}, \ t \ge 0,$$

 $o\dot{u}$   $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $k_1 \neq 0$ . Alors, pour tout  $t \ge T \ge 0$ ,

$$\phi(t) \leq \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{k_2}{k_1} - \phi(T)\right) e^{-k_1(t-T)}$$

.

*Démonstration*. Multiplions chaque membre de l'inégalité par  $e^{k_1 t}$ , on obtient :

$$\left(\frac{d\phi\left(t\right)}{dt}+k_{1}\phi\left(t\right)\right)e^{k_{1}t}\leqslant k_{2}e^{k_{1}t}$$

Alors

$$\left(\frac{d\phi\left(t\right)}{dt}+k_{1}\phi\left(t\right)-k_{2}\right)e^{k_{1}t}\leqslant0$$

qui est équivalent à :

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\phi\left(t\right)-\frac{k_{2}}{k_{1}}\right)e^{k_{1}t}\right]\leqslant0$$

Ainsi la fonction

$$\left(\phi\left(t\right)-\frac{k_{2}}{k_{1}}\right)e^{k_{1}t}$$

possède une différentielle négative, et par conséquent décroissante pour  $t \ge 0$ . Donc, pour tout  $t \ge T \ge 0$ ,

$$\left(\phi\left(t\right) - \frac{k_2}{k_1}\right)e^{k_1t} \leqslant \left(\phi\left(T\right) - \frac{k_2}{k_1}\right)e^{k_1T}$$

et,

$$\phi(t) \leq \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{k_2}{k_1} - \phi(T)\right) e^{-k_1(t-T)}$$

Pour T = 0, cette inégalité s'écrit :

$$\phi(t) \leq \frac{k_2}{k_1} \left(1 - e^{-k_1 t}\right) + \phi(0) e^{-k_1 t}$$

Ainsi, la démonstration proposée est directement déduite de ces travaux. En utilisant la notation de Freedman [1985f], le modèle de Volterra-Gause (7.17) peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( x \left( \frac{1-x}{\xi} \right) - yx^{\frac{1}{2}} \right) \\ y \left( -\delta_1 + x^{\frac{1}{2}} \right) - zy^{\frac{1}{2}} \\ z \left( -\varepsilon\delta_2 + \varepsilon y^{\frac{1}{2}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xg \left( x \right) - yp_1 \left( x \right) \\ y \left( -s_2 + c_2p_1 \left( x \right) \right) - zp_2 \left( y \right) \\ z \left( -s_3 + c_3p_2 \left( y \right) \right) \end{pmatrix}$$

Les réponses fonctionnelles constituant ce modèle sont supposées lipschitziennes mais doivent également vérifier les conditions suivantes :

$$g:[0,\infty) \to \mathbb{R}; g \in C^1[0,\infty); g(0) > 0; g'(x) < 0; \exists K > 0 / g(K) = 0$$

C'est bien le cas de la fonction g(x) qui vérifie ces conditions avec K = 1.

$$p_i: [0,\infty) \to [0,\infty); p_i \in C^1[0,\infty]; p_i(0) = 0; p'_i(x) > 0$$

Les fonctions  $p_i$  qui ne sont pas lipschitziennes en 0 vérifient ces conditions. Les coefficients  $s_i$  et  $c_i$  sont supposés positifs et tels que :

$$s_i = \delta_i$$
 et  $\begin{cases} c_2 = \xi \\ c_3 = \varepsilon \end{cases}$ 

# Théorème 7.2. Ensemble invariant

L'ensemble

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ : 0 < x \le 1, \ 0 < x + \frac{y}{\xi} \le K + \frac{M}{\delta_1}, \ 0 < x + \frac{y}{\xi} + \frac{z}{\varepsilon} \le K + \frac{M}{\delta_1} + \frac{M}{\delta_2} \right\}$$

où  $\mathbb{R}^{3}_{+}$  est un cône non négatif dans  $\mathbb{R}^{3}$  et  $M = \max \{ xg(x) : x \in [0, K[], satisfait \}$ 

(i) A est positivement invariant, et (ii) pour toute condition initiale  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3_+$ ,  $(x(t), y(t), z(t)) \xrightarrow[t \to \infty]{} A$  *Démonstration.* (i) Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in A$ , démontrons que  $(x(t), y(t), z(t)) \in A$  pour tout  $t \ge 0$ 

*Step 1* :

$$x(t) \leq K$$
 pour tout  $t \geq 0$ .

Ceci est une conséquence du théorème de comparaison standard (Cf. Hale [1969]).

*Step 2* :

$$0 < x + \frac{y}{\xi} \leqslant K + \frac{M}{\delta_1}$$
, pour tout  $t \ge 0$ .

On a :

$$\dot{x} + \frac{\dot{y}}{\xi} \leqslant -\delta_1\left(x + \frac{y}{\xi}\right) + \delta_1 x + xg\left(x\right) \text{ avec } x \leqslant 1 \text{ et } xg\left(x\right) \leqslant \frac{1}{4}, \text{ i.e., } M = \frac{1}{4}$$

D'où,

$$\dot{x} + \frac{\dot{y}}{\xi} \leqslant -\delta_1 \left( x + \frac{y}{\xi} \right) + \delta_1 + \frac{1}{4}$$

qui peut encore s'écrire :

$$\dot{x} + \frac{\dot{y}}{\xi} + \delta_1 \left( x + \frac{y}{\xi} \right) \leqslant \delta_1 + \frac{1}{4}$$

En utilisant le théorème de comparaison standard (Cf. Hale [1969]), on obtient :

$$\begin{aligned} x + \frac{y}{\xi} &\leqslant \left[1 + \frac{1}{4\delta_1}\right] - \left[\left(1 + \frac{1}{4\delta_1}\right) - \left(x_0 + \frac{y_0}{\xi}\right)\right] e^{-\delta_1 t} \\ &\Rightarrow x + \frac{y}{\xi} \leqslant 1 + \frac{1}{4\delta_1} \text{ pour tout } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

De la même manière, on peut démontrer que

$$0 < x + \frac{y}{\xi} + \frac{z}{\varepsilon} \leqslant K + \frac{M}{\delta_1} + \frac{M}{\delta_2}$$

(*ii*) Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3_+$ , démontrons que  $(x(t), y(t), z(t)) \xrightarrow[t \to \infty]{} A$ 

*Step 1* :

$$\lim_{t \to \infty} \sup \left[ x\left( t \right) \right] \leqslant 1$$

puisque la solution du problème aux valeurs initiales  $\dot{x} = xg(x)$ ,  $x(0) = x_0 \ge 0$  satisfait  $\lim_{t\to\infty} \sup[x(t)] \le 1$  d'après le théorème de comparaison standard (Cf. Hale [1969]).

*Step 2* :

$$\lim_{t \to \infty} \sup \left[ x\left(t\right) + \frac{y\left(t\right)}{\xi} \right] \leqslant 1 + \frac{1}{4\delta_1}$$

Soit  $\alpha > 0$  donné. Alors il existe  $T_1 > 0$  tel que  $x \le 1 + \frac{\alpha}{2}$  pour tout  $t \ge T_1$ . Comme dans le cas du Step 2 de (i) on a pour tout  $t \ge T_1$ :

$$x + \frac{y}{\xi} \leqslant \left[1 + \frac{1}{4\delta_1} + \frac{\alpha}{2}\right] - \left[\left(1 + \frac{1}{4\delta_1} + \frac{\alpha}{2}\right) - e^{\delta_1 T_1}\left(x\left(T_1\right) + \frac{y\left(T_1\right)}{\xi}\right)\right]e^{-\delta_1 t}$$

Soit  $T_2 \ge T_1$  tel que

$$\left| \left( 1 + \frac{1}{4\delta_1} + \frac{\alpha}{2} \right) - e^{\delta_1 T_1} \left( x \left( T_1 \right) + \frac{y \left( T_1 \right)}{\xi} \right) \right| e^{-\delta_1 t} \leqslant \frac{\alpha}{2} \text{ pour tout } t \geqslant T_2.$$

Alors,

$$x + \frac{y}{\xi} \leq 1 + \frac{1}{4\delta_1} + \alpha$$
 pour tout  $t \ge T_2$ .

Ainsi,

$$\lim_{t \to \infty} \sup \left[ x\left(t\right) + \frac{y\left(t\right)}{\xi} \right] \leqslant 1 + \frac{1}{4\delta_1}$$

On peut démontrer de même que

$$\lim_{t \to \infty} \sup \left[ x\left(t\right) + \frac{y\left(t\right)}{\xi} + \frac{z\left(t\right)}{\varepsilon} \right] \leqslant 1 + \frac{1}{4\delta_1} + \frac{1}{4\delta_2}$$

Les solutions du modèle de Volterra-Gause sont donc bornées.

# 

### 7.3.3 Points fixes dans le plan xy

Les deux points fixes précédemment identifiés sont retrouvés : O(0,0,0), K(1,0,0)

De plus, le fait de fixer les paramètres k et p permet de résoudre la première isocline par simple changement de variable. Cependant, la méthode développée cidessus reste valable et la connaissance exacte des solutions de cette équation n'est pas nécessaire pour déterminer la stabilité des points fixes. Il est ainsi possible de chercher des points fixes dans le plan xy en posant z = 0 pour k = p = 1/2. Ceci fournit les coordonnées du point I:

$$I\left(\delta_1^2,\delta_1\left(1-\delta_1^2\right),0\right)$$

### 7.3.4 Condition d'existence de points fixes dans le plan xy

Les points fixes possèdent une signification biologique s'ils sont positifs ou nuls. Ceci génère la condition suivante :

$$1 - \delta_1^2 > 0 \implies \delta_1 < 1 \tag{7.18}$$

### 7.3.5 Matrice Jacobienne fonctionnelle

$$\Im(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} \left( 1 - 2x - \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{x}} \right) & -\frac{1}{\xi} \sqrt{x} & 0\\ \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{x}} & \sqrt{x} - \frac{1}{2} \frac{z}{\sqrt{y}} - \delta_1 & -\sqrt{y}\\ 0 & \frac{1}{2} \varepsilon \frac{z}{\sqrt{y}} & \varepsilon \left(\sqrt{y} - \delta_2\right) \end{pmatrix}$$
(7.19)

### 7.3.6 Nature et stabilité des points fixes dans le plan xy

Le point fixe O(0,0,0) ayant pour valeurs propres  $\{1/\xi, -\delta_1, -\varepsilon \delta_2\}$ , est instable  $(1/\xi > 0)$ , et les directions propres associées aux valeurs propres  $-\delta_1, -\varepsilon \delta_2$ sont attractives suivant y'y et z'z et celle associée à la valeur propre  $1/\xi$  est répulsive suivant x'x. Le point K(1,0,0) ayant les valeurs propres  $\{-1/\xi, 1-\delta_1, -\varepsilon \delta_2\}$ , est instable  $(1 - \delta_1 > 0, d'après (7.7))$ , et les directions propres associées aux valeurs propres  $-1/\xi, -\varepsilon \delta_2$  sont attractives suivant y'y et z'z et répulsives suivant la direction de la droite définie par :

$$y = -[\xi (1 - \delta_1) + 1]x$$

La méthode décrite par Freedman et Waltman [1977f] peut encore être utilisée pour étudier la stabilité du point

$$I\left(\delta_{1}^{2},\delta_{1}\left(1-\delta_{1}^{2}\right),0\right)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle peut se factoriser sous la forme :

$$(m_{33} - \sigma) \left( \sigma^2 - m_{11}\sigma - m_{12}m_{21} \right) = 0 \quad ; \quad m_{13} = m_{31} = m_{32} = m_{22} = 0$$

et fournit les trois valeurs propres :  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ 

$$\sigma_1 = m_{33} = \varepsilon \left[ \delta_1^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \delta_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \delta_2 \right]$$
(7.20)

Pour la première valeur propre, la condition d'existence du point fixe dans le premier octant (CEPF 3D) permet de définir le signe de la valeur propre et, par conséquent, de conclure quant à sa stabilité. Pour les deux autres valeurs propres, la résolution du polynôme de degré deux fournit une paire de valeurs propres  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ 

$$\sigma_{2,3} = \frac{m_{11} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{m_{11} \pm \sqrt{m_{11}^2 + 4m_{12}m_{21}}}{2} \tag{7.21}$$

Si on suppose que  $\Delta < 0$ , alors les deux valeurs propres sont complexes conjuguées.

Pour qu'une bifurcation de Hopf se produise il faut que la partie réelle de ces valeurs propres soit positive ou nulle pour certaines valeurs de paramètres. Choisissons  $\delta_1$  ce paramètre et calculons la partie réelle de ces valeurs propres.

$$2Re\left[\sigma_{2}\right] = m_{11} = \frac{1}{\xi} \left(1 - 3\delta_{1}^{2}\right) \ge 0 \implies \delta_{1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$
(7.22)

Pour qu'une bifurcation de Hopf se produise dans le plan xy, la première valeur propre (7.20) doit être négative de sorte que la direction propre associée soit attractive, et que le flot soit dirigé vers le bassin d'attraction du point I. En exprimant cette valeur propre comme une fonction de  $\delta_1$ , on peut démontrer qu'elle est négative si

$$\delta_2 \geqslant \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \tag{7.23}$$

Cette condition exclut l'existence du point fixe J dans le premier octant.

### 7.3.7 Existence d'une bifurcation de Hopf dans le plan xy

Si les conditions (7.22) et (7.23) sont satisfaites, un cycle limite existe dans le plan xy et une bifurcation de Hopf peut se produire dans ce plan. Le point J de dimension trois ne peut exister et le point  $I(\delta_1^2, \delta_1(1 - \delta_1^2), 0)$  est alors instable. Il se comporte comme un foyer attractif dans le plan xy.

### 7.3.8 Points fixes dans le premier octant

On s'intéresse maintenant à l'existence de points fixes dans le premier octant avec une signification biologique, i.e., pour z > 0. On peut préciser le nombre de solutions du polynôme non-algébrique de la première équation (7.17) et l'intervalle dans lequel elles sont contenues. Posons de nouveau  $x_{1,2} = \alpha$  les deux solutions possibles. Elles appartiennent à l'intervalle suivant :

$$0 < x_1 < x^* < \frac{1}{3} < x_2 < 1$$

Une étude Mathématique de la première isocline comme une fonction de x génère la condition suivante d'existence de points fixes dans le premier octant (CEPF 3D) :

$$\delta_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}} \tag{7.24}$$

A partir de la troisième équation de (7.17), la seconde coordonnée y peut s'exprimer ainsi :

$$\varepsilon \left( y^{\frac{1}{2}} - \delta_2 \right) = 0 \Rightarrow y = \delta_2^2$$

A partir de la seconde équation de (7.17), la troisième coordonnée z s'exprime en fonction de x :

$$-\delta_1 y + x^{\frac{1}{2}} y - y^{\frac{1}{2}} z = 0 \implies z = \delta_2 \left( x^{\frac{1}{2}} - \delta_1 \right)$$

## 7.3.9 Condition d'existence de points fixes dans le premier octant

De la troisième coordonnée, on peut déduire une autre condition d'existence biologique de points fixes :

$$x^{\frac{1}{2}} - \delta_1 > 0 \implies x > \delta_1^2 \tag{7.25}$$

Le point fixe J peut ainsi être défini par ses coordonnées en dimension trois et sa condition d'existence biologique.

 $J\left(\alpha,\delta_2^2,\delta_2\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\delta_1\right)\right)$ 

$$x > \delta_1^2 \tag{7.26}$$

Si une bifurcation de Hopf se produit en dehors du plan xy, elle ne peut être possible dans le plan xy. Ceci se traduit par une condition déduite de l'inégalité (7.22) :

$$\delta_1 > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

où

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3}$$

En combinant les inégalités (7.25) et (7.26), on obtient :

$$x_1 < x^* < \frac{1}{3} < \delta_1 < x_2 < 1 \tag{7.27}$$

### 7.3.10 Nature et stabilité de points fixes dans le premier octant

La méthode de Freedman et Waltman [1977f] peut être utilisée pour étudier la stabilité du point

$$J\left(\alpha,\delta_2^2,\delta_2\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\delta_1\right)\right)$$

D'après cette méthode, si  $m_{11} > 0$  alors le point J est instable. Si  $m_{11} < 0$  et  $m_{22} \leq 0$ , alors le point J est stable. De plus, si  $m_{11} < 0$ , alors le point J est asymptotiquement stable. La trace et le déterminant de la matrice Jacobienne fonctionnelle évalués au point J donnent :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = Tr\left[\Im\right] = m_{11} + m_{22} = \frac{1}{2\xi} \left(1 - 3x\right) + \frac{1}{2} \left(x^{\frac{1}{2}} - \delta_1\right)$$
$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = Det\left[\Im\right] = m_{11} m_{23} m_{32} = \frac{\varepsilon}{2\xi} \left(1 - 3x\right) z$$

### 7.3.11 Existence d'une bifurcation de Hopf dans le premier octant

A partir de la condition d'existence biologique d'un point fixe J (CEPF 3D), on peut conclure que : si  $x_1$  est la solution de la première isocline, alors le point J ne peut exister puisque conformément à la condition (7.27),  $x_1 < \delta_1$  et ainsi  $z_1 < 0$ . Une bifurcation de Hopf peut se produire au point I dans le plan xysi la première valeur propre (7.20) est négative. Dans ce cas, la direction propre associée est attractive et le flot est dirigé vers le bassin d'attraction du point I. Ce qui est en accord avec la condition (7.22) qui implique que :

$$x_1 < \delta_1 < x * < \frac{1}{3}$$

Si  $x_2$  est la solution de la première isocline, alors le point J existe puisque conformément à la condition (7.27),

$$x_1 < x * < \frac{1}{3} < \delta_1 < x_2 < 1$$

Dans ce cas, les points I et J coexistent et il est nécessaire de déterminer la stabilité du point J même si la première valeur propre (7.20) est positive. En conséquence, la direction propre associée est répulsive et le flot est dirigé vers le bassin d'attraction du point J. Néanmoins dans ce cas précis : 1-3x < 0. Ceci implique que le déterminant soit négatif et que le signe de la trace soit indéterminé parce que l'on a affaire à une différence. Si l'on suppose que le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle possède deux valeurs propres complexes conjuguées, la trace et le déterminant vont s'écrire :

$$\sigma_1 + 2Re[\sigma_2] = Tr[\Im]$$
$$\sigma_1 |\sigma_2|^2 = Det[\Im] < 0$$
On peut déduire de cette expression que la première valeur propre est négative. Ainsi, la direction propre associée est attractive et le flot est dirigé vers le bassin d'attraction du point J. De plus, l'indétermination du signe de la trace est compatible avec le fait que le signe de la partie réelle des valeurs propres puisse changer. Dans ce cas, l'occurrence d'une bifurcation de Hopf en dehors du plan xy peut être envisagée.

#### 7.3.12 Valeur du paramètre de bifurcation de Hopf

La première étape consiste à identifier le paramètre susceptible de produire cette bifurcation.

Les paramètres  $\xi$  et  $\varepsilon$  ne sont pas de bons candidats dans la mesure où ils laissent invariants les points fixes et ne peuvent par conséquent pas annuler la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle calculée en ces points. Il semble judicieux de choisir un paramètre de couplage entre les deux équations prédateur-proie et super-prédateur-prédateur.

Les paramètres  $\delta_1$  et  $\delta_2$  peuvent ainsi être considérés. Le paramètre  $\delta_1$  présente l'avantage de laisser invariant les coordonnées x et y des points fixes et de modifier la topologie de l'attracteur en lui conférant l'allure du ruban de Moebius du modèle de Rosenzweig-MacArthur ou celle de la tasse de thé inversée du modèle d'Hastings-Powell pour certaines valeurs qui seront fournies ci-dessous. Numériquement, la valeur du paramètre de bifurcation sélectionné peut être calculé avec une grande précision. La technique utilisée qui consiste à exprimer les coordonnées des points fixes en fonction de ce paramètre et à évaluer les valeurs propres de la matrice Jacobienne en ce point a été présentée au paragraphe 4. La valeur pour laquelle leurs parties réelles s'annulent correspond au paramètre de bifurcation. En fixant dans le modèle (7.17) les paramètres suivants  $\xi = 0.866$ ,  $\varepsilon = 1.428$ ,  $\delta_2 = 0.376$ , et en choisissant  $\delta_1$  comme paramètre de bifurcation on obtient la valeur :

$$\delta_1 = 0.747413$$

#### **Remarque :**

Le théorème de Routh et Hurwitz peut aussi être utilisé pour déterminer la valeur du paramètre  $\delta_1$  pour lequel la bifurcation de Hopf se produit. En simplifiant l'équation caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle, on obtient un polynôme de la forme :  $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 = 0$ . D'après le théorème de Routh et Hurwitz toutes les racines de ce polynôme sont de parties réelles négatives si les déterminants  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont tous positifs. La positivité du premier déterminant  $D_1$  fournit une condition pour  $\delta_1$  correspondant à la valeur précédemment obtenue.

# 7.3.13 Portrait de phase



FIG. 7.1 – Portrait de phase du modèle (7.17). Cet attracteur chaotique a la forme d'une coquille d'escargot. Les valeurs des paramètres sont :  $\xi = 0.866$ ,  $\varepsilon = 1.428$ ,  $\delta_1 = 0.577$ ,  $\delta_2 = 0.376$ .

Malgré son apparence familière, cet attracteur se comporte d'une manière complexe. Partant de n'importe quelle condition initiale prise dans le premier octant, le flot se dirige vers le point K qui est attractif suivant la direction propre x'x. Suivant ensuite la direction propre répulsive  $y = -[\xi (1 - \delta_1) + 1] x$  du point K, le flot atteint le bassin d'attraction du point I (qui se comporte comme un foyer attractif dans le plan xy) et tourne autour de ce point. Cependant, comme ce point possède une direction propre répulsive, le flot quitte le plan xy et se dirige vers le bassin d'attraction du point J qui possède une direction attractive. Mais, comme le point J se comporte comme un foyer répulsif, le flot tourne autour de ce point en s'éloignant dans la direction du point K qui possède une direction propre attractive suivant z'z. Le flot est alors " réinjecté " par ce " point-selle ".

# 7.3.14 Diagramme de bifurcation

Comme cela a été souligné par Glass et Mackey [1988], la construction d'un diagramme de bifurcation est un bon moyen pour mettre en lumière une signature du chaos.

La Fig. 7.2 présente le diagramme de bifurcation du modèle (7.17) dédimensionné et met en évidence une cascade de doublement de période induite par le paramètre  $\delta_1$ .



FIG. 7.2 – Diagramme de bifurcation du modèle (7.17) pour le paramètre  $\delta_1$ ;  $z_{\rm max} = f(\delta_1)$ 

Cette figure a fait l'objet de l'élaboration d'un programme Mathematica<sup>®</sup> présenté au paragraphe 4 et disponible à l'adresse suivante : http ://ginoux.univ-tln.fr

# 7.3.15 Section de Poincaré et application de Poincaré

La section de Poincaré correspond ici au plan d'équation z = 1/2, i.e., au plan divisant la coquille de l'escargot en deux parties. Elle consiste en un ensemble de valeurs de x et de y.

En prenant x(n) comme la valeur de la  $n^{i eme}$  intersection de la trajectoire avec la section de Poincaré, on peut construire l'application de Poincaré comme la fonction reliant x(n+1) à x(n). Sur la Fig. 7.3, on constate que la pente de l'application de Poincaré multimodale est très élevée, ce qui est une caractéristique typique du chaos.



FIG. 7.3 – Application de Poincaré du modèle (7.17) pour les mêmes paramètres.

La section de Poincaré, et les valeurs qui lui correspondent, a été obtenue grâce à un programme Mathematica<sup>®</sup> présenté au paragraphe 4.

# 7.3.16 Algorithme de Wolf et al.

Un autre moyen permettant de mettre en évidence le caractère chaotique d'un attracteur est l'algorithme développé par Wolf *et al.* [1985w]. Il consiste à estimer les exposants de Lyapunov qui fournissent une caractérisation qualitative et quantitative du comportement dynamique par le biais de la convergence ou de la divergence exponentielle de *trajectoires* voisines évoluant dans l'espace des phases. En effet, un système ayant un exposant de Lyapunov positif est une signature non ambiguë d'un régime chaotique, Bergé [1984]. D'autre part, en utilisant la conjecture de Kaplan-Yorke, il est alors possible d'évaluer la dimension fractale de l'*attracteur étrange* considéré.



FIG. 7.4 – Exposants de Lyapunov du modèle (7.17) pour les mêmes paramètres.

Sur la Fig. 7.4 on constate que les valeurs estimées des trois exposants de Lyapunov sont : (+0.035, 0.000, -0.628). Ceci confirme d'une part le caractère chaotique de l'attracteur et permet d'autre part, grâce à la conjecture de Kaplan-Yorke [1979] d'évaluer sa dimension fractale :  $d_{KY} = 2.06$ . Ce calcul, ainsi que la figure qui en résulte, ont été réalisés grâce au programme présenté au paragraphe 4.

### 7.3.17 Orbites de Sil'nikov

Une orbite homocline a été observée au voisinage du point  $J\left(\alpha, \delta_2^2, \delta_2\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - \delta_1\right)\right)$ pour les valeurs des paramètres suivantes :  $\xi = 0.866$ ,  $\varepsilon = 1.428$ ,  $\delta_1 = 0.577$ ,  $\delta_2 = 0.376$ . En effet, pour ces valeurs, le point fixe  $J\left(0.84, 0.56, 0.51\right)$  vérifie les conditions du théorème 4.1 de Sil'nikov. La matrice jacobienne du système linéarisé possède en ce point les valeurs propres suivantes :  $\lambda_3 = -0.83$ ,  $\lambda_{1,2} = 0.28 \pm i0.37$ . Ainsi,  $\lambda_3 = -0.83 < 0$ ,  $\alpha = 0.28 > 0$  et  $|\lambda_3| > |\alpha|$ , i.e., |0.83| > |0.28|. L'orbite homocline de Sil'nikov observée est représentée sur la Fig. 7.5 Elle garantit la chaoticité de cet attracteur.



FIG. 7.5 – Orbite de Sil'nikov du modèle (7.17) pour les mêmes paramètres.

# 7.3.18 Variété lente

La présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\xi$  dans l'une des composantes de son vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  assure que le système (7.17) est un (SDAL-R). On peut

donc appliquer la *méthode du plan osculateur* décrite dans le paragraphe 2.4. En dimension trois, la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 prend la forme d'un déterminant :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ y - y_0 & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ z - z_0 & \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

En se plaçant sur n'importe lequel des points fixes du modèle de Volterra-Gause on obtient l'équation de la *variété lente*. En choisissant par exemple le point  $J\left(\alpha, \delta_2^2, \delta_2\left(\alpha^{\frac{1}{2}} - \delta_1\right)\right)$  et en utilisant Mathematica<sup>®</sup> on peut représenter sur la Fig. 7.6 le portrait de phase du modèle de Volterra-Gause et la *variété lente* qui lui est associée.



FIG. 7.6 - Variété lente du modèle de Volterra-Gause.

La Proposition 2.2 fournit l'équation de la surface représentant le lieu des points où la torsion s'annule, i.e., le lieu des points où le *plan osculateur* est stationnaire et où la *variété lente* est attractive. Ainsi, l'enveloppe de la *variété lente* du modèle de Volterra-Gause est représentée sur la Fig. 7.7 :



FIG. 7.7 – Enveloppe de la variété lente du modèle de Volterra-Gause.

On déduit de cette figure que le lieu des points où la torsion est négative correspond aux parties attractives de la *variété lente*.

L'équation de la *variété lente* fournie par la Proposition 2.3 conduit à l'équation implicite suivante :

$$1.33x - 4x^2 + 2.67x^3 - 0.33x^{0.5}y - 0.28xy + 0.83x^{1.5}y + 0.04167y^2 + 0.144x^{0.5}y^{0.5}z = 0$$

qui est représentée sur la Fig. 7.8.



FIG. 7.8 – Approximation singulière du vecteur accélération instantanée du modèle de Volterra-Gause.

On remarque sur cette figure que l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  constitue une assez bonne approximation de la *variété lente* associée au modèle de Volterra-Gause.

# 7.3.19 Déploiement de la variété singulière

On considére les points d'intersection de la variété lente d'équation  $\phi = 0$  et d'une section quelconque de Poincaré ( $\Sigma$ ) réalisée dans son voisinage. Alors en joignant ces points, une "ligne ", ou plus généralement, une " courbe " se forme. En utilisant l'intégration numérique cette " courbe " (resp. " ligne ") se déploie dans l'espace des phases et son déploiement reconstitue la forme de l'attracteur. Le résultat est représenté sur la Fig. 7.9.



FIG. 7.9 – Déploiement de la variété singulière  $(S_1, S_2)$  du modèle de Volterra-Gause

# 7.4 Le modèle de Rosenzweig-MacArthur

Ce modèle élaboré au début des années soixantes par M. L. Rosenzweig et R.H. MacArthur [1963], à partir des équations de V. Volterra [1926v] transcrit l'évolution de trois espèces : x, y et z interagissant dans un mode prédateur-proie. Il est composé d'une croissance logistique de type Verhulst [1838] de la proie x, d'un prédateur y, d'un super-prédateur z dont la prédation est limitée par une réponse fonctionnelle de Holling ([1959a], [1959b]) type 2.

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \vec{\Im} \begin{pmatrix} F(x, y, z) \\ G(x, y, z) \\ H(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\xi} \left(1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x}\right) \\ y \left(\frac{x}{\beta_1 + x} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y}\right) \\ \varepsilon z \left(\frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2\right) \end{pmatrix}$$
(7.28)

où  $\xi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\beta_i$  et  $\delta_i$  sont des paramètres réels :  $\xi = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ,  $\beta_1 = 0.3$ ,  $\beta_2 = 0.1$ ,  $\delta_1 = 0.1$ ,  $\delta_2 = 0.62$  et, où les fonctions F, G et H sont indéfiniment dérivables par rapport à tout  $x_i$ , et t, i.e., sont des fonctions de classe  $C^{\infty}$  dans un compact E inclus dans  $\mathbb{R}^3$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Les équations (7.28) sont dédimensionnées, les remarques et les détails concernant les changements de variables et les paramètres peuvent être obtenues dans B. Deng [2001d]. De plus, la présence d'un petit paramètre multiplicatif  $\xi$  dans l'une des composantes de son vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  assure que le système (7.28) est un (SDAL-R). On peut donc appliquer la *méthode du plan osculateur* décrite dans le paragraphe 2.4. En dimension trois, la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1 prend la forme d'un déterminant :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ y - y_0 & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ z - z_0 & \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

En se plaçant sur n'importe lequel des points fixes du modèle de Rosenzweig-MacArthur on obtient l'équation de la *variété lente*. En choisissant par exemple le point O(0,0,0) on peut, en utilisant Mathematica<sup>®</sup>, représenter sur la Fig. 7.10 le portrait de phase du modèle de Rosenzweig-MacArthur et la *variété lente* qui lui est associée.



FIG. 7.10 - Variété lente du modèle de Rosenzweig-MacArthur

L'équation de la *variété lente* fournie par la Proposition 2.3 conduit à une équation implicite correspondant à l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  du modèle de M. L. Rosenzweig et R. H. MacArthur qui est représenté sur la Fig. 7.11



FIG. 7.11 – Approximation singulière du vecteur accélération instantanée du modèle de M. L. Rosenzweig et R. H. MacArthur.

On remarque sur la Fig. 7.11 que l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  constitue une assez bonne approximation de la *variété lente* associée au modèle de M. L. Rosenzweig et R. H. MacArthur. En dimension trois, la Proposition 3.1 génère trois déterminants fournissant trois équations dont deux sont linéairement indépendantes.

$$\dot{\Delta_1} = \begin{vmatrix} \ddot{x}_L & \ddot{x}_{NL} \\ \ddot{y}_L & \ddot{y}_{NL} \end{vmatrix} = 0; \\ \dot{\Delta_2} = \begin{vmatrix} \ddot{x}_L & \ddot{x}_{NL} \\ \ddot{z}_L & \ddot{z}_{NL} \end{vmatrix} = 0; \\ \dot{\Delta_3} = \begin{vmatrix} \ddot{y}_L & \ddot{y}_{NL} \\ \ddot{z}_L & \ddot{z}_{NL} \end{vmatrix} = 0$$

La résolution de la première équation du système formé par les déterminants

 $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  est quadratique en y et permet de représenter  $y_1$  et  $y_2$  en fonction de x et z. Ces deux solutions correspondent respectivement aux parties gauche et droite de la variété uniforme de l'attracteur du modèle de de M. L. Rosenzweig et R. H. MacArthur. En injectant chacune de ces solutions dans l'équation formée par le second déterminant $\Delta_2$ ', on obtient l'équation de la variété uniforme qui est représentée sur la Fig. 7.12.



FIG. 7.12 - Variété uniforme du modèle de M. L. Rosenzweig et R. H. MacArthur.

En utilisant la méthode développée au paragraphe 3.2., il est possible de construire un piège pour les *trajectoires lentes* du modèle de Rosenzweig-MacArthur. A partir des équations des variétés *lente* et *uniforme* on peut démontrer que la première est au-dessus de l'attracteur tandis que la seconde est en dessous. (Cf. Fig. 7.13).



FIG. 7.13 – Piège du modèle de M. L. Rosenzweig et R. H. MacArthur.

# 7.5 Le modèle d'Hastings-Powell

En changeant les variables du modèle de Rosenzweig-MacArthur, on obtient le modèle d'A. Hastings et T. Powell [1991].

$$\overrightarrow{V}\left(\begin{array}{c}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\\frac{dz}{dt}\end{array}\right) = \overrightarrow{\Im}\left(\begin{array}{c}F\left(x,y,z\right)\\G\left(x,y,z\right)\\H\left(x,y,z\right)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}a\left(1-\frac{\lambda}{a}x\right)x - \frac{bxy}{H_{1}+x}\right)\\y\left(\frac{dx}{H_{1}+x} - c\right) - \frac{eyz}{H_{2}+y}\\z\left(\frac{fy}{H_{2}+y} - g\right)\end{array}\right)$$

# 7.5.1 Equations dédimensionnées

Avec les changements de paramètres suivants,

$$t \to \frac{1}{a}t, \ x \to \frac{a}{\lambda}x, \ y \to \frac{a}{\lambda}\frac{d}{b}y, \ z \to \frac{fba^2}{de\lambda}z$$

on obtient :

$$\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\\frac{dz}{dt}\end{pmatrix} = \overrightarrow{\Im}\begin{pmatrix}F(x,y,z)\\G(x,y,z)\\H(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(1-x) - \frac{a_1xy}{1+\beta_1x}\\y\left(\frac{a_1x}{1+\beta_1x} - \delta_1\right) - \frac{a_2yz}{1+\beta_2y}\\z\left(\frac{a_2y}{1+\beta_2y} - \delta_2\right)\end{pmatrix}$$
(7.29)

avec

$$a_1 = \frac{d}{\lambda H_1}, \ \beta_1 = \frac{a}{\lambda H_1}, \ a_2 = \frac{bf}{d\lambda H_2}, \ \beta_2 = \frac{ad}{b\lambda H_2}, \ \delta_1 = \frac{c}{a}, \ \delta_2 = \frac{g}{a}$$

En choisissant un ensemble de paramètres "biologiquement raisonnables ", le modèle (7.29) devient un système singulièrement perturbé à deux échelles de temps.

# 7.5.2 Nature et stabilité des points fixes

L'échelle de temps naturel d'interaction entre le prédateur y et le super-prédateur z, (i.e., d'interaction au plus haut niveau trophique), est substantiellement plus longue que celle intervenant entre la proie x et le prédateur y. En d'autres termes  $\delta_1$  est plus grand que  $\delta_2$ .

Où les paramètres suivants :  $\xi = 1$ ,  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\delta_1 = 0.4$ ,  $\delta_2 = 0.01$ ,  $\varepsilon = 1$ , sont réels et, où les fonctions F, G et H sont indéfiniment dérivables par rapport à tout  $x_i$ , et t, i.e., sont des fonctions de classe  $C^{\infty}$  dans un compact E inclus dans  $\mathbb{R}^3$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Les équations (7.29) sont ainsi dédimensionnées, des remarques et des détails concernant les changements de variables et les paramètres ont été faites dans Hastings *et al.* [1991]. On obtient avec ces paramètres les quatre points d'équilibre (i.e., ayant une réalité biologique), et les valeurs propres qui leur sont associées, suivants :

$$O(0,0,0) \rightarrow \{1,-0.4,-0.01\},\$$

 $I(0.105, 0.235, 0) \rightarrow \{0.006, 0.054 + 0.5186i, 0.05473 - 0.5186i\},\$ 

$$J (0.819, 0.125, 9.808) \rightarrow \{-0.611, 0.0386 + 0.0748i, 0.0386 - 0.0748i\},\$$

$$K(1,0,0) \rightarrow \{-1, 0.85, -0.01\}.$$

Aussi, d'après le critère de Lyapunov, tous ces points sont instables. L'expression littérale de ces points fixes met en évidence leur dépendance avec les paramètres considérés. Ce résultat va être utilisé ci-dessous dans le calcul du paramètre de la bifurcation de Hopf.

#### 7.5.3 Valeur du paramètre de bifurcation de Hopf

La première étape consiste à identifier le paramètre susceptible de produire cette bifurcation.

Les paramètres  $\xi$  et  $\varepsilon$  ne sont pas de bons candidats dans la mesure où ils laissent invariants les points fixes et ne peuvent par conséquent pas annuler la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle calculée en ces points. Il semble judicieux de choisir un paramètre de couplage entre les deux équations prédateur-proie et super-prédateur-prédateur.

Les paramètres  $\delta_1$  et  $\delta_2$  peuvent ainsi être considérés. Le paramètre  $\delta_1$  présente l'avantage de laisser invariant les coordonnées x et y des points fixes et de modifier la topologie de l'attracteur en lui conférant l'allure du ruban de Moebius du modèle de Rosenzweig-MacArthur pour une certaine valeur qui sera fournie ci-dessous. Ainsi en fixant dans le modèle (5.6) les six paramètres excepté  $\delta_1$ , on peut utiliser la méthode décrite au paragraphe 4. et dont le programme est disponible à l'adresse suivante : http://ginoux.univ-tln.fr pour calculer la valeur du paramètre de bifurcation de Hopf sélectionné avec une grande précision. On obtient :

$$\delta_1 = 0.7402$$

De plus, en choisissant le paramètre  $\beta_1$  comme paramètre de bifurcation et en procédant comme décrit ci-dessus, il est possible de calculer la valeur de ce paramètre avec une grande précision. L'annulation de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle évaluées au point I en fonction du paramètre  $\beta_1$  génère la valeur  $\beta_1 = 2.11379$ .

### 7.5.4 Variété lente

De plus, l'absence d'un petit paramètre multiplicatif dans l'une des composantes de son vecteur vitesse  $\vec{V}$  implique que pour ce (SDACCL-R) il n'existe pas d'approximation singulière associée au vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$ , ni de variété uniforme. On peut néanmoins appliquer la méthode décrite dans le paragraphe 2.4. pour déterminer, grâce à la condition de coplanarité (2.22) de la Proposition 2.1, l'équation de la variété lente associée à ce système. En appliquant la condition de coplanarité (2.22) en chacun au point J on obtient l'équation de la variété lente. En utilisant Mathematica<sup>®</sup> on peut représenter sur la Fig. 7.14 le portrait de phase du modèle d'Hastings-Powell et la variété lente qui lui est associée.



FIG. 7.14 – Portrait de phase du modèle d'Hastings et Powell avec les mêmes paramètres.

On remarque sur la Fig. 7.14 que, contre toute attente, certaines *trajectoires* de cet attracteur en forme de tasse de thé inversée s'appuient sur une surface lente.

L'équation de la *variété lente* fournie par la Proposition 2.3 conduit à une équation implicite correspondant à l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  du modèle de A. Hastings et T. Powell qui est représenté sur la Fig. 7.15.



FIG. 7.15 – Approximation singulière du vecteur accélération instantanée du modèle d'A. Hastings et T. Powell.

On remarque sur cette figure que l'approximation singulière du vecteur accélération instantanée  $\vec{\gamma}$  constitue une assez bonne approximation de la *variété lente* associée au modèle d'A. Hastings et T. Powell.

# 7.6 Similarité entre les différents modèles

# 7.6.1 Volterra-Gause et Rosenzweig-MacArthur

Le portrait de phase du modèle de Volterra-Gause décrit au paragraphe 6.5. ressemble à celui de Rosenzweig-MacArthur pour certaines valeurs de paramètres. En réalité ces deux modèles présentent des comportements dynamiques similaires (Cf. Fig. 7.16). En dessous du seuil de bifurcation, on retrouve la forme de l'attracteur du modèle de Rosenzweig-MacArthur.



FIG. 7.16 – Comparaison du modèle de Volterra-Gause (pour  $\xi = 0.964$ ,  $\varepsilon = 1.1$ ,  $\delta_1 = 0.518$ ,  $\delta_2 = 0.415$ ) et du modèle de Rosenzweig-MacArthur (pour  $\xi = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.3$ ,  $\beta_1 = 0.3$ ,  $\beta_2 = 0.1$ ,  $\delta_1 = 0.1$ ,  $\delta_2 = 0.62$ ).

# 7.6.2 Volterra-Gause et Hastings-Powell

La similarité entre le modèle de Volterra-Gause et celui d'Hastings-Powell avec son attracteur en forme de tasse de thé inversée est très frappante. La figure suivante montre l'attracteur de Volterra-Gause prenant la forme de la tasse de thé pour certaines valeurs de paramètres ainsi que les comportements de chaque composante x, y et z en fonction du temps.



FIG. 7.17 – Portrait de phase du modèle de Volterra-Gause (pour  $\xi = 0.07$ ,  $\varepsilon = 0.85$ ,  $\delta_1 = 0.5$ ,  $\delta_2 = 0.42$ ).



FIG. 7.18 – Comparaison des variations des séries temporelles des modèles de Volterra-Gause (pour  $\xi = 0.07$ ,  $\varepsilon = 0.85$ ,  $\delta_1 = 0.5$ ,  $\delta_2 = 0.42$ ) et d'Hastings-Powell (pour  $\xi = 1$ ,  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 2$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta_1 = 0.4$ ,  $\delta_2 = 0.01$ )

# 7.6.3 Rosenzweig-MacArthur et Hastings-Powell

Le paramètre de bifurcation  $\delta_1$  choisi au paragraphe 6.3.11. modifie la topologie de l'attracteur du modèle de Rosenzweig-MacArthur en lui conférant la forme de la tasse de thé inversée de celui d'Hastings-Powell. On peut ainsi fixer tous les paramètres, excepté  $\delta_1$  auquel on attribue la valeur 0.3. Cette valeur conserve le cycle limite qui se déforme jusqu'à ressembler à l'attracteur d'Hastings-Powell.



FIG. 7.19 – Transition du modèle de Rosenzweig-MacArthur vers celui d'Hastings-Powell.

# 7.6.4 Hastings-Powell et Rosenzweig-MacArthur

L'attracteur du modèle d'Hastings-Powell peut également se transformer en celui de Rosenzweig-MacArthur. La variation du paramètre  $\delta_1$  modifie la topologie de l'attracteur en lui conférant la forme du ruban de Moebius de l'attracteur de Rosenzweig-MacArthur.

On peut ainsi fixer tous les paramètres, excepté  $\delta_1$  auquel on attribue la valeur 0.1. Cette valeur conserve le cycle limite qui se déforme jusqu'à ressembler à l'attracteur de Rosenzweig-MacArthur.



FIG. 7.20 – Transition du modèle d'Hastings-Powell vers celui de Rosenzweig-MacArthur.

# **Chapitre 8**

# Approximation du système linéaire tangent

Ce chapitre a pour but, d'une part, de formaliser la méthode de l'*approximation du système linéaire tangent* (Rossetto *et al.* [1998]) et, d'autre part, de fournir un algorithme permettant une détermination directe de l'équation de la variété lente d'un système dynamique.

Une approche classique de la détermination de l'équation de la variété lente d'un (SDAL-R) connue son le nom d'approximation singulière a été élaboréé par A.A. Andronov [1966]. Une autre méthode développée par Rossetto et al. (Rossetto et al. [1998]), qui s'étend aux systèmes dynamiques définis au paragraphe 1.3., consiste à exploiter la présence d'une valeur propre "rapide" (grande et négative) dans le jacobien fonctionnel d'un (SDAL-R) ou d'un (SDCCAL-R). En effet, en se plaçant dans le cadre d'application du théorème de Tihonov [1952] on considère qu'au voisinage de la variété lente la valeur propre "rapide " est évanescente. Après avoir vérifié que le système dynamique se conforme à la condition de partie non-linéaire (Ramdani [1999]), qui implique que l'influence de la partie non-linéaire du développement de Taylor des membres de droite d'un (SDAL-R) ou d'un (SDCCAL-R) est occultée par la dynamique rapide de la partie linéaire, on applique la méthode de l'approximation du système linéaire tangent (Rossetto et al. [1998]) qui consiste à projeter le champ de vecteurs vitesse  $\vec{V}$  dans la base des vecteurs propres associés aux valeurs propres du jacobien fonctionnel du système dynamique. Cette méthode fournit deux conditions pour établir l'équation de la variété lente d'un système dynamique, conditions qui vont être présentées et formalisées dans les paragraphes suivants et dont l'équivalence va être établie. Dans ce but, chacun des paragraphes sera divisé en deux afin de considérer des systèmes dynamiques de dimension deux puis trois.

# 8.1 Approximation du système linéaire tangent

La méthode développée par Rossetto *et al.* [1998] consiste à supposer qu'au voisinage de la *variété lente* le (SDAL-R) ou le (SDACCL-R) défini par l'équation (1.2) :

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Im}\left(\vec{X}\right)$$

se comporte comme le *système linéaire tangent* qui lui est associé. Ce système noté (SDAL-R)<sub>T</sub> ou (SDACCL-R)<sub>T</sub> est défini par l'équation 2.45 :

$$\frac{d\delta\vec{X}}{dt} = J\left(\vec{X}_0\right)\delta\vec{X}$$

Il admet pour intégrale :

$$\delta \vec{X}(t) = e^{J(t-t_0)} \delta \vec{X}(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i e^{\lambda_i (t-t_0)} \overrightarrow{Y_{\lambda_i}}$$
(8.1)

où J représente la matrice jacobienne fonctionnelle,  $\lambda_i$  ses valeurs propres et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_i}}$  les vecteurs propres qui leur sont associés et n le nombre de degrés de liberté du système.

L'approximation du système linéaire tangent consiste à considérer qu'au voisinage de la variété lente et pendant des durées infinitésimales  $\delta t = t - t_0$ , l'intégrale  $\delta \vec{X}(t)$  (8.1) du (SDAL-R)<sub>T</sub> ou du (SDACCL-R)<sub>T</sub> se comporte comme le champ de vecteurs vitesse  $\vec{V}(t)$  du (SDAL-R) ou du (SDACCL-R) :

$$\frac{\delta \vec{X}}{\delta t}\left(t\right) \xrightarrow[\delta t \to 0]{} \vec{V}\left(t\right) \tag{8.2}$$

Ainsi, tenant compte de (8.1) et de (8.2), on obtient l'*approximation du système linéaire tangent* :

$$\overrightarrow{V}(t) \xrightarrow[\delta t \to 0]{} \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Y_{\lambda_i}}$$

qui permet de projeter le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}(t)$  du (SDAL-R) ou du (SDACCL-R) sur la bases des vecteurs propres  $\overrightarrow{Y_{\lambda_i}}$  du (SDAL-R)<sub>T</sub> ou du (SDACCL-R)<sub>T</sub>.

# 8.2 Condition de colinéarité / coplanarité

#### 8.2.1 Variété lente d'un système dynamique de dimension deux

Considérons le système dynamique défini sous les mêmes conditions que (1.3). Les vecteurs propres associés aux valeurs propres du jacobien fonctionnel (1.4) du système linéaire tangent s'écrivent :

$$\overrightarrow{Y_{\lambda_i}} \left(\begin{array}{c} \lambda_i - \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{array}\right)$$
(8.3)

avec

i =1, 2

On peut alors projeter le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  sur la base formée par les vecteurs propres :

$$\overrightarrow{V} = \alpha \overrightarrow{Y_{\lambda_1}} + \beta \overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  représentent des coefficients qui dépendent explicitement des coordonnées d'espace et implicitement du temps et, où  $\overrightarrow{Y_{\lambda_1}}$  représente le vecteur propre rapide et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  le vecteur propre lent. L'existence d'un mode propre évanescent au voisinage de la variété lente implique conformément au théorème de Tihonov [1952] :  $\alpha \ll 1$ . On en déduit :

**Proposition 8.1.** Une condition nécessaire et suffisante d'obtention de l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension deux est que son champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  soit colinéaire au vecteur propre lent  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  associé à la valeur propre lente  $\lambda_2$  du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent. Soit :

$$\overrightarrow{V} \approx \beta \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \tag{8.4}$$

En utilisant cette condition de colinéarité, l'équation constituant l'approximation d'ordre 1 en  $\varepsilon$  de la variété lente d'un système dynamique de dimension deux s'écrit :

$$\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} = \overrightarrow{0} \iff \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\lambda_2 - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0 \qquad (8.5)$$

#### 8.2.2 Variété lente d'un système dynamique de dimension trois

Considérons le système dynamique (1.8). Les vecteurs propres associés aux valeurs propres du jacobien fonctionnel (1.9) du système linéaire tangent s'écrivent :

$$\overrightarrow{Y_{\lambda_i}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial z} \left( \lambda_i - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \left( \lambda_i - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + \left( \lambda_i - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \lambda_i - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \end{pmatrix}$$
(8.6)

avec

i =1, 2, 3

On peut alors projeter le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  sur la base formée par les vecteurs propres :

$$\overrightarrow{V} = \alpha \overrightarrow{Y_{\lambda_1}} + \beta \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} + \delta \overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\delta$  représentent des coefficients qui dépendent explicitement des coordonnées d'espace et implicitement du temps et, où  $\overrightarrow{Y_{\lambda_1}}$  représente le vecteur propre rapide et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$ ,  $\overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$  les vecteurs propres lents. L'existence d'un mode propre évanescent au voisinage de la variété lente implique conformément au théorème de Tihonov [1952] :  $\alpha \ll 1$ . On en déduit :

**Proposition 8.2.** Une condition nécessaire et suffisante d'obtention de l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension trois est que son champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  soit coplanaire aux vecteurs propres lents  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$ associés aux valeurs propres lentes  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent. Soit :

$$\overrightarrow{V} \approx \beta \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} + \delta \overrightarrow{Y_{\lambda_3}} \tag{8.7}$$

En utilisant cette condition de coplanarité, l'équation constituant l'approximation d'ordre 1 en  $\varepsilon$  de la variété lente d'un système dynamique de dimension trois s'écrit :

$$\det\left(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}, \overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right) = 0 \iff \overrightarrow{V}. \left(\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}} \land \overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right) = 0$$
(8.8)

# 8.3 Condition d'orthogonalité

#### 8.3.1 Variété lente d'un système dynamique de dimension deux

Considérons le transposé du système dynamique (1.3). Les vecteurs propres associés aux valeurs propres du jacobien fonctionnel transposé du système linéaire tangent s'écrivent :

$$t \overrightarrow{Y_{\lambda_i}} \begin{pmatrix} \lambda_i - \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$
(8.9)

avec

i =1, 2

 ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}$  représente le vecteur propre rapide à gauche associée à la valeur propre dominante, i.e., à la valeur propre la plus grande en valeur absolue et  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}$  le vecteur propre lent à gauche.

Mais puisque le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  est perpendiculaire au champ de vecteurs vitesse  ${}^t\overrightarrow{V}$ , on en déduit :

**Proposition 8.3.** Une condition nécessaire et suffisante d'obtention de l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension deux est que son champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  soit perpendiculaire au vecteur propre rapide à gauche  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}$  associé à la valeur propre rapide  $\lambda_{1}$  du jacobien fonctionnel transposé du système linéaire tangent.

Soit :

$$\overrightarrow{V} \perp^t \overrightarrow{Y_{\lambda_1}} \tag{8.10}$$

En utilisant cette condition d'orthogonalité, l'équation constituant l'approximation d'ordre 1 en  $\varepsilon$  de la variété lente d'un système dynamique de dimension deux s'écrit :

$$\overrightarrow{V} \cdot {}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}} = 0 \iff \left(\lambda_{1} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$$
(8.11)

# 8.3.2 Variété lente d'un système dynamique de dimension trois

Considérons le système dynamique (1.8). Les vecteurs propres associés aux valeurs propres du jacobien fonctionnel (1.9) du système linéaire tangent s'écrivent :

$${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{i}}}\left(\begin{array}{c}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\left(\lambda_{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\\\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\left(\lambda_{i}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}+\left(\lambda_{i}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\lambda_{i}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\end{array}\right)$$
(8.12)

avec

 ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}$  représente le vecteur propre rapide à gauche associée à la valeur propre dominante, i.e., à la valeur propre la plus grande en valeur absolue et  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}$ ,  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}$ les vecteurs propres lents à gauche. Mais puisque le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$ est perpendiculaire au champ de vecteurs vitesse  ${}^{t}\overrightarrow{V}$ , on en déduit :

**Proposition 8.4.** Une condition nécessaire et suffisante d'obtention de l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension trois est que son champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  soit orthogonal au vecteur propre rapide transposé à gauche  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}$  associé à la valeurs propre rapide  $\lambda_{1}$  du jacobien fonctionnel transposé du système linéaire tangent. Soit :

$$\overrightarrow{V} \perp^t \overrightarrow{Y_{\lambda_1}} \tag{8.13}$$

En utilisant cette condition de coplanarité, l'équation constituant l'approximation d'ordre 1 en  $\varepsilon$  de la variété lente d'un système dynamique de dimension trois s'écrit :

$$\overrightarrow{V} \perp^{t} \overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}} \iff \overrightarrow{V} \cdot^{t} \overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}} = 0$$
(8.14)

# 8.4 Equivalence des deux conditions

**Proposition 8.5.** Les conditions de colinéarité / coplanarité et d'orthogonalité nécessaires et suffisantes à l'obtention de la variété lente d'un système dynamique sont équivalentes.

Démonstration. Démontrons tout d'abord cette proposition en dimension deux.

En dimension deux, l'équation de la variété lente peut être obtenue en considérant que le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  est :

- soit colinéaire au vecteur propre lent  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$ 

- soit perpendiculaire au vecteur propre rapide à gauche  ${}^t \overrightarrow{Y_{\lambda_1}}$ 

Pour qu'il y ait équivalence, il faut que le vecteur propre rapide transposé à gauche  $\overrightarrow{tY_{\lambda_1}}$  soit orthogonal au vecteur propre lent  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$ . Les coordonnées de ces vecteurs propres définies au paragraphe précédent permettent d'écrire leur produit scalaire :

$${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\cdot\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}} = \lambda_{1}\lambda_{2} - \frac{\partial g}{\partial y}\left(\lambda_{1} + \lambda_{2}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{2} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

En utilisant la trace (1.5) et le déterminant (1.6) du jacobien fonctionnel (1.4), on a :

$${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\cdot\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{2} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

soit

$${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\cdot\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}=0$$

D'où :

$${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}} \bot \overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}$$
(8.15)

Ainsi, les conditions de colinéarité et d'orthogonalité sont parfaitement équivalentes.  $\hfill\square$ 

Démonstration. Démontrons maintenant cette proposition en dimension trois.

En dimension trois, l'équation de la variété lente peut être obtenue en considérant que le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  est :

- soit coplanaire aux vecteurs propres lents  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$ 

- soit perpendiculaire au vecteur propre rapide à gauche  ${}^{t}Y_{\lambda_{1}}$ 

Pour qu'il y ait équivalence, il faut que le vecteur propre rapide transposé à gauche  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}$  soit orthogonal au plan contenant par les vecteurs propres lents  $\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}$  et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}$ . On appellera " plan lent " le plan constitué de ces deux vecteurs propres lents.

En utilisant les coordonnées des vecteurs propres, la somme et les produits (1.10) des valeurs propres et également le carré de la somme et des produits définies aux paragraphes précédents, on démontre l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_3}} = {}^t \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \tag{8.16}$$

Ainsi, les conditions de coplanarité et d'orthogonalité sont parfaitement équivalentes.

#### **Remarque :**

En dimension trois, des études numériques ont montré des différences significatives dans le tracé de la variété lente suivant que l'on utilisait l'une ou l'autre de deux conditions de coplanarité (8.8) ou d'orthogonalité (8.14). Ces différences proviennent du fait que chacune de ces deux conditions emploie un ou deux vecteurs propres dont les coordonnées s'expriment en fonction des valeurs propres du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent, valeurs propres qui peuvent être complexes ou réelles suivant leur localisation dans l'espace des phases. Ainsi, selon la nature des valeurs propres la simulation numérique de l'équation de la variété lente peut s'avérer difficile voire impossible. Aussi, pour résoudre ce problème, il est nécessaire de rendre l'équation de la variété lente indépendante des valeurs propres. Ceci constitue l'un des objectifs de ce mémoire et va être développé dans le paragraphe suivant.

# 8.5 Algorithme de détermination de l'équation de la variété lente

**Théorème 8.1.** Les équations de la variété lente d'un système dynamique obtenues par les conditions de colinéarité / coplanarité et d'orthogonalité sont équivalentes.

Démonstration. Démontrons tout d'abord ce théorème en dimension deux.

Pour démontrer l'équivalence des équations de la variété lente obtenues par chacune des conditions, il faut les expliciter indépendamment des valeurs propres. Pour ce faire multiplions chacune des équations (8.5) puis (8.11) par son équation " conjuguée ", i.e., une équation dans laquelle on remplace la valeur propre  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ) par la valeur propre  $\lambda_2$  (resp.  $\lambda_1$ ). Remarquons que l'équation " conjuguée " de l'équation (8.11) correspond à la condition de colinéarité entre le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  et le vecteur propre  $\overrightarrow{Y_{\lambda_1}}$ . Le produit de l'équation (8.5) par son équation " conjuguée " s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right)=0$$
(8.17)

soit en utilisant la trace (1.5) et le déterminant (1.6) du jacobien fonctionnel (1.4):

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left[ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) \left(\frac{dx}{dt}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right) - \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] = 0$$

De même, le produit de l'équation (8.11) par son équation " conjuguée " qui correspond à la condition d'orthogonalité entre le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  et le vecteur propre  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}$  s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{V}\cdot^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\cdot^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right) = 0 \tag{8.18}$$

soit en utilisant la trace (1.5) et le déterminant (1.6) du jacobien fonctionnel (1.4):

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) - \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = 0$$

Les deux équations (8.17) et (8.18) sont égales à condition que :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \neq 0$$
 et  $\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq 0$ 

Ces deux dernières conditions sont de part la définition du système différentiel (1.3) vérifiées car si elles ne l'étaient pas les deux équations différentielles qui le constituent seraient totalement découplées et il ne s'agirait plus alors d'un système. Ainsi, les équations obtenues par les conditions de colinéarité et d'orthogonalité sont équivalentes.

$$\left(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad\left(\overrightarrow{V}\cdot^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\cdot^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right)=0\quad(8.19)$$

Les équations (8.17) et (8.18) fournissent l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension deux indépendamment des valeurs propres du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent. Afin de les expliciter, on adopte les notations suivantes pour :

- le champ de vecteurs vitesse (1.3)

$$\overrightarrow{V}\left(\begin{array}{c} \dot{x}\\ \dot{y}\end{array}\right)$$

- le jacobien fonctionnel (1.4)

$$J = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$$

- les coordonnées des vecteurs propres (8.3)

$$\overrightarrow{Y_{\lambda_i}} \left(\begin{array}{c} \lambda_i - d \\ c \end{array}\right)$$
$$i = 1, 2$$

Les équations (8.17) et (8.18) fournissant l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension deux indépendante des valeurs propres du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent s'écrivent :

$$c\dot{x}^2 - (a-d)\,\dot{x}\dot{y} - b\dot{y}^2 = 0$$
 (8.20)

Démonstration. Démontrons maintenant ce théorème en dimension trois.

Pour démontrer l'équivalence des équations de la variété lente obtenues avec chacune des conditions, on applique la même démarche que celle exposée dans le paragraphe précédent, i.e., on cherche à expliciter les équations de la variété lente indépendamment des valeurs propres. En dimension trois, chacune des équations (8.8) puis (8.14) doit être multipliée par deux équations " conjuguées " obtenues par permutations circulaires des valeurs propres. Remarquons que la première des équations " conjuguées " de l'équation (8.8) correspond à la condition de coplanarité entre le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  et les vecteurs propres  $\overrightarrow{Y_{\lambda_1}}$  et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$ , la seconde, à la condition de coplanarité entre le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  et les vecteurs propres  $\overrightarrow{Y_{\lambda_1}}$  et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$ .

Le produit de l'équation (8.8) par ses équations " conjuguées " s'écrit :

$$[\overrightarrow{V}.\left(\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right)]\cdot[\overrightarrow{V}.\left(\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right)]\cdot[\overrightarrow{V}.\left(\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right)]=0$$
(8.21)

De même, le produit de l'équation (8.14) par ses équations " conjuguées " qui correspondent à la condition d'orthogonalité entre le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  et le vecteur propre  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}$  et, à la condition d'orthogonalité entre le vecteur vitesse  $\overrightarrow{V}$  et le vecteur propre  ${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}$  s'écrit :

$$\left(\overrightarrow{V}\cdot^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\cdot^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\cdot^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right)=0$$
(8.22)

En utilisant l'équation (8.16) et toutes les permutations circulaires qui en découlent on démontre que les équations (8.21) et (8.22) sont égales. Ainsi, les équations obtenues par les conditions de coplanarité et d'orthogonalité sont équivalentes.

$$[\overrightarrow{V}.\left(\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right)]\cdot[\overrightarrow{V}.\left(\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right)]\cdot[\overrightarrow{V}.\left(\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\wedge\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right)]=0$$

$$\Leftrightarrow \qquad (8.23)$$

 $\left(\overrightarrow{V}\cdot{}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\cdot{}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{V}\cdot{}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}\right)=0$ 

Les équations (8.21) et (8.22) fournissent l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension trois indépendamment des valeurs propres du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent. Afin de les expliciter, on adopte les notations suivantes pour :
- le champ de vecteurs vitesse (1.8)

$$\overrightarrow{V}\left(\begin{array}{c} \dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z} \end{array}\right)$$

- le jacobien fonctionnel (1.9)

$$J = \left(\begin{array}{rrr} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right)$$

- les coordonnées des vecteurs propres lents (8.6)

$$\overrightarrow{Y_{\lambda_i}} \begin{pmatrix} bf + c(\lambda_i - e) \\ cd + f(\lambda_i - a) \\ -bd + (\lambda_i - a)(\lambda_i - e) \end{pmatrix}$$
  
i = 2, 3

- les coordonnées du vecteur propre rapide à gauche (8.12)

$${}^{t}\overrightarrow{Y_{\lambda_{1}}}\left(\begin{array}{c}hd+g\left(\lambda_{1}-e\right)\\bg+h\left(\lambda_{1}-a\right)\\-bd+\left(\lambda_{1}-a\right)\left(\lambda_{1}-e\right)\end{array}\right)$$

A partir de la condition de coplanarité (8.8) en remplaçant les vecteurs propres par leurs coordonnées (8.6) et les valeurs propres  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  grâce à (1.10), on obtient l'équation suivante :

$$A_1 \dot{x} - B_1 \dot{y} + C \dot{z} = 0 \tag{8.24}$$

avec

$$A_{1} = f\lambda_{1}^{2} - (ef + if + cd)\lambda_{1} + efi + cdi - cfg - f^{2}h$$
  

$$B_{1} = c\lambda_{1}^{2} - (ac + ic + bf)\lambda_{1} + aci + bfi - c^{2}g - cfh$$
  

$$C = bf^{2} - c^{2}d + cf(a - e)$$
  
(8.25)

Cette équation est absolument identique à celle que l'on aurait obtenu par la condition d'orthogonalité (8.14) à un facteur multiplicatif près.

Multiplions l'équation (8.8) par ses équations " conjuguées " en  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ , i.e., par  $(A_2\dot{x} - B_2\dot{y} + C\dot{z})$  et par  $(A_3\dot{x} - B_3\dot{y} + C\dot{z})$ .

Les coefficients  $A_i$ ,  $B_i$  sont obtenus en remplaçant dans les équations (8.25) la valeur propre  $\lambda_1$  par la valeur propre  $\lambda_2$  puis par la valeur propre  $\lambda_3$  respectivement pour i = 2, 3. On obtient :

$$(A_1\dot{x} - B_1\dot{y} + C\dot{z})(A_2\dot{x} - B_2\dot{y} + C\dot{z})(A_3\dot{x} - B_3\dot{y} + C\dot{z}) = 0$$

Soit,

$$\begin{aligned} A_1 A_2 A_3 \dot{x}^3 &- B_1 B_2 B_3 \dot{y}^3 + C^3 \dot{z}^3 - C^2 \left(B_1 + B_2 + B_3\right) \dot{y} \dot{z}^2 \\ &+ C \left(B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3\right) \dot{y}^2 \dot{z} + C \left(A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3\right) \dot{x}^2 \dot{z} \\ &+ C^2 \left(A_1 + A_2 + A_3\right) \dot{x} \dot{z}^2 - \left(A_2 A_3 B_1 + A_1 A_3 B_2 + A_1 A_2 B_3\right) \dot{x}^2 \dot{y} \\ &+ \left(A_3 B_1 B_2 + A_2 B_1 B_3 + A_1 B_2 B_3\right) \dot{x} \dot{y}^2 \\ &- C \left(A_2 B_1 + A_3 B_1 + A_1 B_2 + A_3 B_2 + A_1 B_3 + A_2 B_3\right) \dot{x} \dot{y} \dot{z} = 0 \end{aligned}$$
(8.26)

En développant cette expression on obtient un polynôme comportant des termes pouvant se factoriser sous la forme de la somme et des produits (1.10) des valeurs propres, et également du carré de la somme et des produits des valeurs propres qui sont directement reliés aux éléments de la matrice jacobienne fonctionnelle (1.9). L'algorithme proposé est le résultat d'une démonstration qui établit une relation entre les coefficients de ce polynôme et les éléments qui composent la matrice jacobienne fonctionnelle (1.9).

$$A_1 A_2 A_3 = -C^2 \left( -fg^2 + d^2h + dg \left( -e + i \right) \right)$$
$$-B_1 B_2 B_3 = -C^2 \left( -b^2g + ch^2 + bh \left( a - i \right) \right)$$

$$- (A_2A_3B_1 + A_1A_3B_2 + A_1A_2B_3) = -C^2 (bdg + aeg - e^2g + cg^2 - 2adh - 2fgh + deh - agi + egi + dhi)$$

$$B_1 B_2 A_3 + B_1 B_3 A_2 + B_2 B_3 A_1 = \\ -C^2 \left( -abg + 2beg + a^2h - fh^2 - bdh - aeh + 2cgh - bgi - ahi + ehi \right)$$

$$\begin{array}{l} A_{1}A_{2} + A_{1}A_{3} + A_{2}A_{3} = \\ -C\left(-bd^{2} + ade - cdg + 2afg + 2dfh - efg - adi - dei - fgi + di^{2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A_1+A_2+A_3=\\ -\left(acd+cde-a^2f-2bdf+aef+cfg+f^2h-2cdi+afi-efi\right)\end{array}$$

$$B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3 = -C (b^2d - abe - 2bcg - 2ceh + ach + bfh + abi + bei + chi - bi^2)$$

$$B_1 + B_2 + B_3 = 2bcd - ace + ce^2 - abf - bef - c^2g - cfh + aci - cei + 2bfi$$

$$A_1B_2 + A_2B_1 + A_1B_3 + A_2B_3 + A_3B_1 + A_3B_2 = C(abd - a^2e - bde) + ae^2 - acg + 3bfg - 3cdh + efh + a^2i - e^2i + cgi - fhi - ai^2 + ei^2)$$

L'expression (8.26) représente l'équation de la variété lente d'un système dynamique de dimension trois indépendamment des valeurs propres du jacobien fonctionnel du système linéaire tangent.

## 8.6 Approximation du système linéaire tangent et méthode du plan osculateur

D'après la proposition 2.1, la *méthode du plan osculateur* présentée dans ce mémoire au paragraphe 2.4 consiste à déterminer l'équation de la variété lente d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) en utilisant celle du *plan osculateur* qui est fournie par la condition de coplanarité (2.22) :

$$\overrightarrow{IM}\cdot\left(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{\gamma}\right)=0$$

D'après les propositions 8.1 et 8.2, l'*approximation du système linéaire tangent* rappelée précédemment consiste à déterminer l'équation de la variété lente d'un (SDAL-R) ou d'un (SDACCL-R) en utilisant une condition de colinéarité / coplanarité (8.4 - 8.7) ou d'orthogonalité (8.10 - 8.13)

La démonstration proposée dans ce paragraphe complète et synthétise celle présentée au paragraphe 2.6.3

**Proposition 8.6.** L'équation de la variété lente de (SDAL-R) ou de (SDACCL-R) fournie par la méthode du plan osculateur et celle fournie par l'approximation du système linéaire tangent sont équivalentes.

*Démonstration*. En se plaçant dans la base des vecteurs propres  $\{\overrightarrow{Y_{\lambda_1}}, \overrightarrow{Y_{\lambda_2}}\}$  et dans le cadre d'application du théorème de Tihonov [1952], on a d'après la proposition 8.1 l'équation (8.4) :

$$\overrightarrow{V} \approx \beta \overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$$

Or, d'après (2.4) on a :

$$\overrightarrow{\gamma} = \beta \lambda_2 \overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$$

En utilisant ces équations calculons le produit vectoriel  $\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{\gamma}$  :

$$\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma} = \beta \lambda_2 \left( \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \right) \tag{8.27}$$

L'équation du plan osculateur (2.22) va donc s'écrire en posant  $\overrightarrow{IM} = \delta \vec{X}$ :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = \beta \lambda_2 \delta \vec{X} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_2}}\right)$$
(8.28)

En divisant cette équation (8.28) par  $\delta t$  et en utilisant la seconde hypothèse (8.2), l'équation du plan osculateur (2.22) va donc finalement s'écrire :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left( \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma} \right) = \beta \lambda_2 \overrightarrow{V} \cdot \left( \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \right) = 0$$

Cette équation qui transcrit la coplanarité de trois vecteurs dont deux sont identiques est naturellement toujours vérifiée. Cependant, on remarque que dans les conditions d'application de la proposition 8.1, i.e., lorsque le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  est colinéaire au vecteur propre lent  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  associé à la valeur propre lente  $\lambda_2$  elle est également vérifiée.

*Démonstration.* En se plaçant dans la base des vecteurs propres  $\{\overrightarrow{Y_{\lambda_1}}, \overrightarrow{Y_{\lambda_2}}, \overrightarrow{Y_{\lambda_3}}\}$  et dans le cadre d'application du théorème de Tihonov [1952], on a d'après la proposition 8.2 l'équation (8.7) :

$$\overrightarrow{V}\approx\beta\overrightarrow{Y_{\lambda_{2}}}+\delta\overrightarrow{Y_{\lambda_{3}}}$$

Or, d'après (2.4) on a :

$$\overrightarrow{\gamma} = \beta \lambda_2 \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} + \delta \lambda_3 \overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$$

En utilisant ces équations calculons le produit vectoriel  $\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}$  :

$$\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma} = \beta \delta \left( \lambda_3 - \lambda_2 \right) \left( \overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_3}} \right)$$
(8.29)

L'équation du plan osculateur (2.22) va donc s'écrire en posant  $\overrightarrow{IM} = \delta \vec{X}$ :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = \beta \delta \left(\lambda_3 - \lambda_2\right) \delta \vec{X} \cdot \left(\overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_3}}\right)$$
(8.30)

En divisant cette équation (8.29) par  $\delta t$  et en utilisant la seconde hypothèse (8.2), l'équation du plan osculateur (2.22) va donc finalement s'écrire :

$$\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\right) = \beta \delta \left(\lambda_3 - \lambda_2\right) \overrightarrow{V} \cdot \left(\overrightarrow{Y_{\lambda_2}} \wedge \overrightarrow{Y_{\lambda_3}}\right) = 0$$

Cette équation est vérifiée dans les conditions de la proposition 8.2, i.e., lorsque le champ de vecteurs vitesse  $\overrightarrow{V}$  est coplanaire aux vecteurs propres lents  $\overrightarrow{Y_{\lambda_2}}$  et  $\overrightarrow{Y_{\lambda_3}}$  associés aux valeurs propres lentes  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ .

г		

## Conclusion

Dans ce mémoire, l'application de certains aspects du formalisme de la Mécanique du Point et de la Géométrie Différentielle à l'étude des systèmes dynamiques autonomes lents-rapides ou pouvant être considérés comme tels, a conduit d'une part à une détermination directe de l'équation de la variété lente et, d'autre part à une interprétation géométrique et cinématique de l'évolution des courbes trajectoires, intégrales de ces systèmes dynamiques, au voisinage de cette variété, et à l'étude de leur stabilité.

L'utilisation du formalisme de la *Mécanique du Point* a permis, grâce à l'emploi des vecteurs, vitesse et accélération instantanées attachés à un point courant de la *trajectoire*, de discriminer le domaine lent du domaine rapide et de situer la position de la *variété lente* à l'intérieur de l'espace des phases.

Certaines notions de *Géométrie Différentielle*, comme la *courbure*, la *torsion* et le *plan osculateur*, ont fourni une équation analytique de la *variété lente* indépendante des *vecteurs propres* lents du *système linéaire tangent*, donc définie sur un plus grand domaine de l'espace des phases.

Différentes méthodes comme par exemple, la *théorie des perturbations singulières*, la *méthode des approximations successives* ou l'*approximation du système linéaire tangent* avaient été élaborées afin de déterminer l'équation de la variété *lente*.

Dans le cas d'un (SDAL-R), la *théorie des perturbations singulières* permettait d'obtenir une approximation d'ordre zéro en  $\varepsilon$  de l'équation de la variété lente : l'*approximation singulière*. Le vecteur accélération instantanée fournit l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  de cette variété : l'*approximation singulière de l'accélération*. La méthode de l'*approximation du système linéaire tangent* fournissait l'équation de la *variété lente* en fonction des *vecteurs propres lents* de la matrice jacobienne fonctionnelle associée à ce système. Mais son tracé nécessitait, d'une part, l'utilisation d'un logiciel de calcul formel et, d'autre part, que les valeurs propres et par conséquent les vecteurs propres soient réels sur le domaine considéré.

Cette difficulté a été levée grâce à l'élaboration d'un algorithme mathématique rendant cette équation réelle et indépendante des vecteurs propres du *système li-néaire tangent*. De plus l'équivalence entre ces différentes méthodes de détermination de l'équation de la *variété lente* a été établie.

Le rôle de la variété lente dans l'étude des systèmes dynamique apparaît donc comme primordial puisqu'elle structure l'attracteur de par sa position dans l'espace des phases, sa géométrie, et son attractivité. La Géométrie Différentielle a ainsi permis de définir ses propriétés métriques : courbure et torsion. La variété lente a alors pu être envisagée comme le lieu des points où la courbure des courbes trajectoires, intégrales du système dynamique, est minimum (en dimension deux ce minimum devient égal à zéro). Le signe de la torsion a permis de différencier la partie attractive de la partie répulsive de la variété lente. La présence dans l'espace des phases d'une variété lente attractive qui contraint les courbes trajectoires, intégrales du système dynamique, à visiter son voisinage, permet de statuer sur leur stabilité.

Le caractère *attractif* de cette *variété* a été précisé grâce à l'élaboration de " pièges " réalisés à partir de nouvelles *variétés* introduites dans ce mémoire : l'*approximation singulière* de l'*accélération* et la *variété uniforme* qui constituent des domaines de l'espace des phases dans lesquels les *courbes trajectoires*, intégrales de ces systèmes dynamiques, sont contraintes d'évoluer.

Puisque les *courbes trajectoires*, intégrales du système dynamique " s'appuient " sur la *variété lente*, celle-ci définit donc une partie de la structure géométrique de l'attracteur dont une description a été proposée par l'intermédiaire de la *variété singulière*. L'attracteur est ainsi considéré comme le déploiement dans l'espace des phases de cette *variété singulière*.

Cette nouvelle approche basée sur certains aspects du formalisme de la *Méca-nique du Point* et de la *Géométrie Différentielle* s'est accompagnée de l'élaboration et du développement de programmes numériques destinés à faciliter l'étude des systèmes dynamiques. Son application à des modèles de référence comme celui de B. Van der Pol, de L.O. Chua ou d'E.N. Lorenz a permis d'obtenir plus directement et avec précision l'équation analytique de leur *variété lente*. De plus, une étude détaillée des modèles de type *prédateur-proie* comme celui de Rosenzweig-MacArthur ou d'Hastings-Powell, qui sont des (SDAL-R) ou des (SDACCL-R), a conduit d'une part à la détermination de leur *variété lente* et d'autre part à la conception d'un nouveau modèle de type *prédateur-proie* à trois espèces : le modèle Volterra-Gause dont l'attracteur chaotique à la forme d'un escargot (chaotic snail shell).

La présence d'une *variété lente attractive*, lieu des points de l'espace des phases où la *courbure* des *courbes trajectoires*, intégrales du système dynamique est minimum a permis, d'une part de restaurer, pour une famille de trajectoire, une partie du déterminisme perdu du fait de la sensibilité aux conditions initiales de chacune d'entre elles, i.e., du chaos et, d'autre part, de statuer sur la stabilité du flot lent dans le voisinage de cette *variété*.

Ce travail concerne plus particulièrement les systèmes dynamiques possédant un petit paramètre multiplicatif dans l'une des composantes de leur vecteur vitesse. Un des développements possibles consiste à étudier des modèles comportant deux petits paramètres multiplicatifs et susceptibles par conséquent d'engendrer une *variété lente* de co-dimension deux.

De plus, d'autres notions de *Mécanique du Point* et de *Géométrie Différentielle* pourront être utilisées pour caractériser la stabilité et la structure des attracteurs de systèmes dynamiques sensibles aux conditions initiales, i.e., " chaotiques ".

## Annexe A

## Note bibliographique

Cette note bibliographique réalisée à partir des nombreuses recherches que le Professeur Giorgio Israel ([1991i], [1993i], [1996i], [2002i]) a consacré à l'étude des travaux de Vito Volterra à pour but de souligner leur importance dans le domaine de la modélisation mathématique où il apparaît comme un précurseur.

La production scientifique de V. Volterra (1860-1940), dont une grande partie est reproduite dans les cinq épais volumes de son *Opere Matematiche*, *Memorie e note* publié au milieu des années cinquante par l'*Accademia Nazionale dei Lincei*<sup>1</sup>, est impressionnante tant par le nombre que par la diversité des domaines abordés : Mathématiques, Physique ou Biologique. Pour en donner une idée plus précise, on peut, selon G. Israel, la diviser en sept périodes correspondant à des orientations et des intérêts apparemment différents mais dont le caractère unitaire va conférer à l'ensemble une certaine cohérence.

#### 1 - Période 1881-1885

Celui que l'on surnommera plus tard : "Signor Scienza Italiana " avait commencé à s'intéresser aux Mathématiques à l'âge de onze ans en étudiant la géométrie de Legendre. Deux ans plus tard, c'est avec le problème des trois corps qu'il se passionna pour la Physique. Et en 1882, il obtînt son doctorat en Physique. Sa thèse en hydrodynamique incluait des résultats de Stokes, découvert plus tard mais indépendamment par Volterra. Durant cette période on dénombre une vingtaine d'articles de Physique - Mathématique concernant :

- le calcul intégral et l'analyse complexe (réf : 3 & 4)
- l'hydrodynamique (réf : 6)
- la théorie du potentiel électrochimique (réf : 7, 8 & 9)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Une partie de la bibliographie de ces ouvrages est reproduite à la fin de ce chapitre. Les publications citées dans cette note s'y réfèrent

- la théorie de l'élasticité (réf : 10 & 12)

- l'électrostatique (réf : 11)

#### 2 - Période 1885-1889

A partir de 1885, ses travaux portent un intérêt croissant pour la *théorie des équations différentielles ordinaires* (réf : 13, 15, 16 & 20). En 1887, il conçut l'idée d'une *théorie des fonctions* qui dépendent d'un ensemble continue de valeurs d'une autre fonction (réf : 17).

La même année, à partir de ses précédents travaux sur la théorie de l'élasticité, du magnétisme, ..., il imagine le concept de *fonctions de lignes* (réf : 18) qui constitue les prémisses de ce qu'Hadamard introduira plus tard sous le nom d'*analyse fonctionnelle* et qui remplacera la terminologie originale de Volterra. Ce concept s'inscrit dans un cadre beaucoup plus vaste auquel Volterra avait donné le nom de *mécanique héréditaire*.

"On rencontre, *en physique*, dans l'étude de l'élasticité, du magnétisme, de l'électricité, bien des phénomènes de retard, traînage ou hystérésis. On peut dire que dans le monde inorganique, il existe aussi une mémoire du passé, comme la mémoire du fil de torsion dont la déformation actuelle dépend des états antérieurs. Pour marquer la distinction entre de tels phénomènes et ceux de la mécanique classique, (...), où, avec la plus grande exactitude, les conditions initiales (fonctions et vitesses) déterminent l'avenir, M. Picard a qualifié d'*héréditaire* la physique des premiers phénomènes ".

Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie – V. Volterra –

#### 3 - Période 1890-1900

Durant cette période Volterra publia plus de quarante mémoires concernant :

- la mécanique rationnelle (réf : 30, 34, 46)

- l'électrodynamique (réf : 31, 33, 35)

les équations différentielles (réf : 50) et des équations intégrales (réf : 43, 60, 61, 62, 65, 68) connues aujourd'hui sous le nom d'équation intégrale de Volterra ou noyau de Volterra.

En 1891, par exemple, il montra au moyen de son calcul fonctionnel que la théorie d'Hamilton et de Jacobi pour l'intégration des équations différentielles de la dynamique pouvait être étendue à d'autres problèmes de Physique mathématique (réf : 28).

#### 4 - Période 1900-1908

C'est durant cette période que se situent les premiers travaux de Volterra dans le domaine des sciences sociales et biologiques (réf : 86, 106, 107, 108). Parallèlement, il poursuit ses recherches en élasticité (réf : 95, 99) et en *analyse fonctionnelle* (réf : 103).

#### 5 - Période 1909-1914

C'est à cette époque que Volterra élabore la *mécanique héréditaire* et formule la notion d'*équations intégro-différentielles* (réf : 118, 121, 122, 127, 128, 130,144, 149, 146, 153) fondement mathématique de ce champ de phénomènes. Il produisit également de nombreux articles sur la *théorie des fonctions permutables* (réf : 135, 136, 137, 162). Il expose ses travaux lors de conférences comme ses *Leçons sur les fonctions de lignes* (réf : 150) professées en Sorbonne en 1912.

#### 6 - Période 1915-1925

Cette période est davantage marquée par des discours, commémorations et conférences comme celle *Sur l'enseignement de la Physique et de quelques points d'analyse*, prononcée à Strasbourg le 24 septembre 1920. Ses travaux portent alors sur une application des mathématiques à des fins militaires (réf : 165) et sur les fonctions analytiques (réf : 167).

#### 7 - Période 1925-1940

L'opportunité de mettre en oeuvre les méthodes Mathématiques qu'il avait développé fut suscité, on l'a vu précédemment par son beau-fils, Umberto D'Ancona (1896-1964). Il en résultat la célèbre publication de 1926 : *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* à l'origine d'une querelle de priorité entre Alfred J. Lotka et Vito Volterra (réf : 211).

Cet article abondamment cité porte en lui un paradoxe. En effet, il est à la fois à l'origine de la renommée de Volterra dans un domaine qui allait devenir plus tard la *Biologie Mathématique*, et produit dans le même temps un éclairage réducteur puisqu'il semble constituer pour beaucoup l'unique étude qu'il ait pu réaliser dans ce domaine.

Pour appréhender ce paradoxe et cette querelle il est nécessaire de se pencher plus avant sur la personnalité de Volterra. Tout d'abord il est important de remarquer que toutes ses activités de recherche furent à l'origine de son idée de fonder l'*Uffizio delle Invenzioni e Ricerche* dont il fut président et transformé successivement en *Comitato di Ricerche* puis en *Consiglio Nazionale delle Riserche* en 1923. Déjà en 1897, il avait fondé la *Società Italiana di Fisica (SIF)* et en 1906, la *Società Italiana per il Progresso delle Scienze (SIPS)*. Ainsi, au début des années vingt, Volterra jouissait d'une certaine notoriété auprès de la communauté scientifique internationale. De plus, les excellents rapports qu'il entretenait avec le célèbre biologiste écossais D'Arcy W. Thompson (1860-1948) lui permirent d'écrire un résumé de son article dans la revue Nature (réf : 212). C'est cette publication qui attira l'attention d'Alfred J. Lotka (1880-1949) et qui est à l'origine de la querelle. Lotka n'était pas un savant au sens habituel du terme : il n'appartenait à aucune université, ni à aucune institution scientifique. Il était superviseur du bureau de statistique de la Metropolitan Life Insurance Company de New York. Néanmoins, son expérience dans le domaine de statistique des populations et ses connaissances étendues de la Biologie et de la Chimie montrent qu'il s'était intéressé, comme Volterra, à une quantité impressionnante de thèmes scientifiques. Dans son ouvrage, *Elements of Physical Biology* publié en 1925<sup>2</sup> il se proposait de décrire la coexistence d'une population animale avec son parasite, de toute évidence un problème de type "prédateur-proie". Son analyse ne se fondait pas sur l'analogie Mécanique, comme chez Volterra. La prédation était représentée par des hypothèses sur la croissance et la décroissance des populations, mais il aboutissait à un modèle identique à celui de Volterra. Cependant, le premier article publié par Volterra (réf : 211) ne se bornait pas à l'étude de cas particulier mais traitait le problème général d'une association biologique (biocénose) composé d'un nombre quelconque d'espèces se nourrissant l'une de l'autre ou se disputant la même nourriture. Même dans le cas de deux espèces, l'analyse de Volterra était beaucoup plus complète et plus détaillée que celle de Lotka. Mais il semble donc que dans ce cas particulier la priorité revienne à Lotka.

C'est précisément l'article paru dans *Nature* (réf : 212) qui est à l'origine du paradoxe énoncé plus haut. En comparant simplement le nombre de pages de ces deux articles : quatre-vingt-quatre pour le premier (réf : 211) et seulement deux pour le second (réf : 212), on comprend facilement que pour beaucoup l'étude de Volterra ait pu sembler limitée. En effet, la concision de ce résumé ne permettait pas les développements analytiques exposés dans le premier et transformait sans doute les résultats de Volterra en un vulgaire plagia de ceux de Lotka. De plus, même si la barrière de la langue a peut-être jouer un rôle déterminant lors de la publication originale de cet article en 1926, il en existait dès 1927 une traduction intégrale (réf : 231).

A partir de 1926, les publications de Volterra vont s'intensifier dans le domaine de la dynamique des populations (réf : 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222). Il poursuit également la mise en application de l'*analyse fonctionnelle* à sa *mécanique héréditaire* (réf : 228, 229, 240).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Le livre fut republié sous le titre *Elements of Mathematical Biology* 

C'est en 1931 que parait son ouvrage intitulé : *Leçons sur la Théorie mathématique de la Lutte pour la Vie* (réf : 242) et qui fait suite à un cycle de conférences exposées à l'Institut Henri Poincaré où Volterra avait été invité par E. Borel. Rédigé par Marcel Brelot ce livre contient l'intégralité du mémoire de Volterra sur les *fluctuations biologiques* (réf : 211) ainsi qu'*une partie concernant le cas où intervient l'hérédité*. Outre la réponse Mathématique apportée par Volterra à son beau-fils, tous les aspects de la *modélisation d'un écosystème* semblent y avoir été abordé.

En effet, dans cet ouvrage où Volterra (1931) posait les bases de la *dynamique des populations*, il envisageait déjà : l'influence du *milieu* ou la pollution, l'hété-rogénéité des individus ou classes d'âges :

"Dans tout ce qui précède nous avons toujours raisonné comme si l'évolution future d'un système biologique était complètement déterminée par la connaissance de son état actuel, ou si l'on veut comme si le passé n'avait pas d'influence. Mais rappelons-nous que, dans la mise en équation de l'évolution d'un système biologique par la *théorie des rencontres*, nous avons supposé que les rencontres, quand elles n'étaient pas indifférentes entre individus d'espèces distinctes, avaient un effet immédiat se traduisant par une variation instantanée du nombre d'individus ; et si cela est légitime pour l'espèce détruite, il n'en est plus de même pour celle qui profite de la rencontre ; et il est évident qu'au contraire, l'effet favorable de la rencontre ne peut se manifester qu'avec un certain retard. L'état d'un système biologique à un moment donné semble donc bien devoir dépendre des rencontres ayant eu lieu pendant une période plus ou moins longue précédant ce moment (...) il convient donc maintenant de tenir compte de l'influence du passé ".

"... on observera qu'il est plus approché de la réalité de supposer que les coefficients d'accroissement dépendent non seulement, pour chaque instant, des valeurs actuelles des grandeurs  $N_i$  (caractérisant l'espèce *i*), mais aussi des valeurs passées jusqu'à une époque plus ou moins reculée. Il ne faudra plus seulement les considérer comme des fonctions des  $N_i$ , mais comme des "fonctionnelles ", et cela nous conduira à des équations intégro-différentielles que nous rapprocherons de celles auxquelles on est conduit, dans la mécanique dite "héréditaire "".

Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie – V. Volterra –

Il y analysait également l'effet de la diffusion ou migration :

"Etudions ce qui se passe quand on apporte, en petits nombres, des individus des m premières espèces à un certain instant  $t_0$ ".

La saisonnalité faisait aussi l'objet d'une étude particulière :

"Certainement, il existe des circonstances ambiantes périodiques comme celles, par exemple qui dépendent de la succession des saisons, et qui produisent des oscillations *forcées* ou de caractère *externe*, dans le nombre des individus des diverses espèces. A côté de ces actions périodiques externes qui ont été plus spécialement étudiées du côté statistique, n'y en a-t-il pas d'autres de caractère *interne* avec des périodes *propres*, indépendantes des causes externes et qui se superposent à celles-ci?"

#### Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie – V. Volterra –

Parallèlement, il poursuivit ses recherches sur les équations intégrales et intégrodifférentielles (réf : 239) et s'intéressa à l'application du principe de moindre action en Biologie (réf : 261, 262).

A partir de 1936, Volterra s'interroge sur la validité de son modèle et sur la possibilité d'une vérification expérimentale. Les expériences du biologiste russe Georgii Frantsevich Gause (1910-1989) semblaient confirmer la première loi (réf : 263) lequel manifesta à Volterra son adhésion aux prévisions du modèle Mais la suite fut décevante car on ne parvenait pas à trouver de cas irréfutables d'un comportement cyclique dans les *écosystèmes prédateurs-proies*. De plus, à travers les voix des biologistes Karl Pearson (1857-1936) et Friedrich Simon Bodenheimer (1897-1959), les objections se multiplièrent jusqu'à remettre en question l'interprétation des statistiques de D'Ancona qui finissait lui-même par en admettre le bien-fondé. A l'heure actuelle, le seul exemple d'*écosystème prédateurs-proies* présentant une évolution cyclique est la célèbre statistique de l'Hudson's Bay Company portant sur les lièvres et les lynx au Canada.

D'après G. Israel [1991i], il est important alors de remarquer que contrairement au modèle de Van der Pol [1926vdp], " le modèle de Volterra n'est pas déduit d'une analogie mais d'une démarche plus classique qui consiste à partir de l'analyse d'un phénomène réel, faire certaines abstraction des aspects accessoires comme les frottements, déterminer les variables d'état, formuler une hypothèse mathématique concernant l'allure du phénomène. Pour le modèle de Volterra, le problème de la vérification expérimentale consiste à trouver des preuves empiriques vérifiant *directement* les lois déduites du modèle et non pas en justifier la validité d'une façon indirecte, c'est-à-dire à partir de l'efficacité de certaines de ses conséquences. C'est ainsi que, pour Volterra, la justification de l'hypothèse de D'Ancona sur les effets de la pêche ne suffisait pas à démontrer la validité empirique du modèle. C'est à cause de cette conviction qu'il chercha pendant tout le reste de sa vie une *démonstration empirique directe* de la validité de la première loi selon laquelle l'évolution des populations présente des oscillations périodiques." Ainsi, si Volterra a cherché à mettre à la disposition des *Sciences Biologiques* ses travaux de recherches Mathématiques il semble que ce soit toujours dans le but de décrire le plus fidèlement possible la réalité :

"... on verra se compliquer peu à peu les hypothèses de façon à se rapprocher davantage de la réalité ... "

Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie – V. Volterra –

#### Extraits de la bibliographie générale de Vito Volterra

3. *Sui i principi del calcolo integrale* (" Giornale di Matematiche ", vol. XIX, 1881, pp. 333—372). *Opere matematiche*, vol. I, nota III, pp. 16—48, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

4. Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa ("Annali di Matematica pura ed applicata", s. II, t. XI, 1882—83, pp. 1— 55). Opere matematiche, vol. I, nota IV, pp. 49—95, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

6. Sopra alcuni problemi di idrodinamica (" Il Nuovo Cimento ", s. III, t. XII, 1882<sub>2</sub>, pp. 65—96). Opere matematiche, vol. I, nota VI, pp. 100—123, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

7. Sulle apparenze elettrochimiche alla superficie di un cilindro (" Atti della R. Accademia di Torino ", vol. XVIII, 1882—83, pp. 147—168, ed " Il Nuovo Cimento ", s. III, t. XIII, 1883<sub>I</sub>, pp. 119—139). Opere matematiche, vol. I, nota VII, pp. 124—139, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

8. Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale (" Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze fisiche e matematiche ", vol. III, 1883, pp. 207—270). Opere matematiche, vol. I, nota VIII, pp. 140—174, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

9. Sulle figure elettrochimiche di A. Guébhard (" Atti della R. Accademia di Torino ", vol. XVIII, 1882—83, pp. 329—336). Opere matematiche, vol. I, nota IX, pp. 175—179, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

10. Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili (" Transunti della R. Accademia dei Lincei ", s. III, vol. VIII, 1883-84, pp. 214—218, 244—246). Opere matematiche, vol. I, nota X, pp. 180—187, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

11. Sopra un problema di elettrostatica (" Transunti della R. Accademia dei Lincei", s. III, vol. VIII, 1883—84, pp. 315—318, ed " Il Nuovo Cimento", s. III, t. XVI, 1882<sub>2</sub>, pp. 49—57). Opere matematiche, vol. I, nota XI, pp. 188—195, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

12. Sulla deformazione delie superficie flessibili ed inestendibili ("Rendiconti della R. Acca demi dei Lincei", s. IV, vol. I, 1884—85, pp. 274—278). Opere matematiche, vol. I, nota XII, pp. 196—200, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

13. Integrazione di alcune equazioni differenziali del seconda ordine (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", s. IV, vol. I, 1885, pp. 303—306). Opere matematiche, vol. I, nota XIII, pp. 201—204, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954— 1962

15. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari (" Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL ", s. III, vol. VI, 1887, pp. I—107). Opere matematiche, vol. I, nota XV, pp. 209—290, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

16. *Sulle equazioni differenziali lineari* (" Rendiconti dclla R. Accadcmia dci Lincei ", s. IV, vol. III, 1887, pp 393—396). *Opere matematiche*, vol. I, nota XVI, pp. 291—293, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

17. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", s. IV, vol. III<sub>2</sub>, I887<sub>2</sub>, pp. 97—105, 141—146, 153—158). Opere matematiche, vol. I, nota XVII, pp. 294—314, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

18. Sopra le funzioni dipendenti da linee (" Rendiconti della R. Accadcmia dci Lincei ", s. IV, vol. III<sub>2</sub>, 1887<sub>2</sub>, pp. 225—230, 274—281). Opere matematiche, vol. I, nota XVIII, pp. 315—328, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

20. Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari ("Rendiconti del Circolo Matematico d. Palermo", t. II, 1888, pp. 69—75). Opere matematiche, vol. I, nota XX, pp. 351—355, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

28. Sopra une estensione della teoria Jacobi—Hamilton del Calcolo delle variazioni (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", s. IV, vol. VI<sub>1</sub>, 1891<sub>I</sub>, pp. 127—138). Opere matematiche, vol. I, nota XXVIII, pp. 464—475, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

30\*. *Lezioni di Meccanica razionale* del prof. VITO VOLTERRA. Professore nella R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Pisa, per cura dello studente Ugo Moschini. Anno accademico 1889—90 (Autografia Bertini, un vol. litografato di pp. LXXVII—408, esemplare nella Biblioteca Braidense).

31\*. *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica* ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. IV, vol. VII<sub>1</sub>, 1891, pp. 177—188).

33. Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica (" Il Nuovo Cirnento", s. III, vol. XXIX, 1891, pp. 147—154). Opere matematiche, vol. I, nota XXXI, pp. 496—501, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

34\*. Lezioni di Meccanica Razionale del prof. VITO VOLTERRA. R. Università di Pisa, Anno accademico 1890—91, Pisa, Silvestrini, 1891. Un vol. litografato di pp. (12)—462. (Esemplare nella Biblioteca matematica dell'Università di Milano). Una successiva edizione, pure litografica, del 1893, è citata nelle Lezioni di Meccanica razionale di LEVI— CIVITA e AMALDI. Questi Autori attingono da essa il " teorema di VOLTERRA " sul moto impulsivo. Il teorema trovasi già neile litografie del 1891, pp. 333—336.

35. Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. IV, vol. VIII, 1891<sub>I</sub>, pp. 177—188). Opere matematiche, vol. I, nota XXXII, pp. 502—513, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

43. Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. V, vol. II<sub>I</sub>, 1° sem. 1893, pp. 549—558). Opere matematiche, vol. II, nota II, pp. 10—18, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

46\*. *Sinossi delle lezioni di Meccanica razionale* del prof. V. VOLTERRA fatte dallo studente L. NICOLIS, rivedute dal prof. PORTA. R. Università di Torino. 1893—94. Un vol. litografato di pp. 402, senza note tipografiche [esemplare presso il prof. Luigi Gabba].

50. Sopra un sistema di equazioni differenziali (" Atti della R. Accademia di Torino ", di vol. XXX, 1895, pp. 445—454). Opere matematiche, vol. II, nota VIII, pp. 122—128, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

60. Sulla inversione degli integrali definiti (" Atti della R. Accademia di Torino ", vol. XXXI, 1896, pp. 311—323, 400—408, 557—567, 693—708). Opere matematiche, vol. II, nota XVIII, pp. 216—254, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

61. Sulle inversioni degli integrali definiti (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. V, vol. V, 1896, pp. 177–185). Opere matematiche, vol. II, nota XIX, pp. 255–262, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954–1962

62. Sulla inversione degli integrali multipli (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", s. V, vol. V<sub>1</sub>, 1896<sub>1</sub>, pp. 289—300). Opere matematiche, vol. II, nota XX, pp. 263—275, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

65. Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti (" Annali di Matematica", s. II, vol. XXV, 1897, pp. 139—178). Opere matematiche, vol. II, nota XXII, pp. 279—313, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

68. Un teorema sugli integrali mulipli (" Atti della R. Accademia di Torino ", vol. XXXII, 1896—97, pp. 859—868). Opere matematiche, vol. II, nota XXV, pp. 329—335, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

86. Sui tentativi di applicazione delle Matematiche alle scienze biologiche e sociali. Discorso inaugurale (" Annuario della R. Università di Roma ", 1901—902, p. 3—28; " Giornale degli economisti ", s. II, vol. XXIII, 1901<sub>2</sub>, pp. 436—458). Opere matematiche, vol. III, nota III, pp. 14—29, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

95\*. Un teorema sulla teoria della elasticità ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. V, vol. XIV<sub>2</sub>, 1905, pp. 127–137).

99\*. Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici (Ibidem, pp. 641–654. Ved. anche vol. XIV<sub>2</sub>, 1905<sub>2</sub>, p. 342).

103. Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions (" Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ", t. CXLII, 1906<sub>1</sub>, pp. 691—695). Opere matematiche, vol. III, nota IX, pp. 59—62, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

106\*. *Les mathématiques dans les sciences biologiques et sociales*. Traduction par LUDOVIC ZORETTI (" La Révue du Mois ", Paris vol. I, 1906, pp. I—20). [Edizione francese del lavoro n. 86].

107\*. Sui teniativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali (" Archivio di Fisiologia ", Firenze, vol. III, 1906, pp. 175—191). [Nuova edizione dcl lavoro n. 86].

108. L'economia matematica e il nuovo manuale del prof. Pareto ("Giornale degli economisti", Roma, s. II, vol. XXXII, I906, pp. 296—301). Opere matematiche, vol. III, nota XI, pp. 142—145, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

118. *Sulle equazioni integro—differenziali* (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", s. V, vol. XVIII<sub>1</sub>, 1909, pp. 167—174). *Opere matematiche*, vol. III, nota XVII, pp. 269—275, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

121. Sulle equazioni integro—differenziali della teoria dell'elasticità (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei "), s. V, vol. XVIII<sub>I</sub>, 1909<sub>2</sub>, pp. 295—301). Opere matematiche, vol. III, nota XX, pp. 288—293, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

122. Equazioni integro—differenziali della elasticità nel caso della isotropia (" Rendiconti della R. Accademia dci Lincei ", s. V, vol. XVIII, , 1909<sub>2</sub>, pp. 577—586). Opere matematiche, vol. III, nota XXI, pp. 294—303, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

127. Soluzione delle equazioni integro—differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa (" Rendiconti della R. Accadernia dei Lincei ", s. V, vol. XIX<sub>I</sub>, 1910<sub>I</sub>, pp. 107—114). Opere matematiche, vol. III, nota XXII, pp. 304—310, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

128. Questioni generali sulle equazioni integrali e integro—differenziali (" Rendiconti della R. Accadernia dci Lincei", s. V, vol. XIX<sub>I</sub>, 1910<sub>I</sub>, pp. 169— 180). Opere matematiche, vol. III, nota XXIII, pp. 311—322, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

130. Osservazioni sulle equazioni integro—differenziali ed integrali ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. V, vol. XIX,, 1910<sub>I</sub>, pp. 361—363). Opere matematiche, vol. III, nota XXV, pp. 328—330, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962 135. *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* (" Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", s. V, vol. XX, 1911, pp. 296—304). *Opere matematiche*, vol. III, nota XXIX, pp. 364—372, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

136. Sopra le funzioni permutabili di 2<sup>a</sup> specie e le equazioni integrali ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. V, vol. XX, 1911, pp. 521—527). Opere matematiche, vol. III, nota XXX, pp. 373—379, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

137. Sopra una prorietà generale delle equazioni integrali ed integro—differenziali ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. V, vol. XX<sub>I</sub>, 1911, pp. 79—88). *Opere matematiche*, vol. III, nota XXXI, pp. 380—388, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

144. Sur les équations intégro—différentielles et leurs applications (" Acta Mathematica", t. XXXV, 1912, pp. 295—356). Opere matematiche, vol. III, nota XXXV, pp. 487—538, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

146. L'applicazione del Calcolo ai fenomeni di eredità ("La Revue du Mois", Paris, 1912). Leçons sur les fonctions de lignes (Paris, Gauthier—Villars, 1913, chap. XIV, pp. 207—225). Saggi scientifici (Bologna, Zanichelli (s. d.), [1920], pp. 189—218). Opere matematiche, vol. III, nota XXXVII, pp. 554—568, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

149\*. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro—differentielles. Leçons professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910, et publiées par M. TOMASSETTI, F.S. ZARLATTI. (Paris, Gauthier—Villars, 1913. Un vol. di pagg. VI—165 nella " Collection de monographies sur la théorie de fonctions ", publiées sous la direction de M. EMILE BOREL).

150\*. *Leçons sur les fonctions de lignes*, professées à la Sorbonne en 1912. Recueillies et rédigées par JOSEPH PÉRÈS. (Paris, Gauthier—Villars 1913. Un vol. di pp. VI—230, nella predetta collezione Borel. Precedette una edizione italiana : Lezioni sora le funzioni di linee. Roma, 1910).

153. *Sui fenomeni ereditarii* ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", s. V, vol. XXII<sub>2</sub>, 1913, pp. 529—539). *Opere matematiche*, vol. III, nota XL, pp. 597—606, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

162. *The theory of permutable functions*. Lectures delivered at Princeton University, October 1912 (Louis Clark Vanukem Foundation. Princeton University Press, 1915). *Opere matematiche*, vol. IV, nota V, pp. 43—72, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

165. *Metodi di calcolo degli elementi di tiro ber artiglieria aeronautica* (" Rendiconti dell'Istituto Centrale aeronautico", Roma, 1916). *Opere matematiche*, vol. IV, nota VIII, pp. 201—248, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

167. *The generalization of analytic functions* (" The Rice Institute Pamphlet ", vol. IV, 1917, pp. 53—101). *Opere matematiche*, vol. IV, nota IX, pp. 249—285, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

211\*. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in secie animali conviventi (" Memorie della R. Accademia dei Lincei ", s. VI, vol. II, 1926, pp. 31— 113).

212\*. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically (" Nature ", vol. CXVIII, 1926<sub>2</sub>, pp. 558—560). Sotto lo stesso titolo furono poi pubblicate due lettere, una del LOTKA e una del VOLTERRA (Ibidem, vol. CXIX, 1927, pp. 12—13).

231\*. Variation and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. Translated by Miss MARY EVELYN WELLS (" Journal du Conseil international l'exploration de la mer ", Copenhague, vol. III, n. I, 1928, pp. 3–51).

241. *Sulla meccanica ereditaria* ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", s. VI, vol. XI, 1930, pp. 619—625). *Opere matematiche*, vol. V, nota IX, pp. 203—208, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1954—1962

242\*. Leçons sur la théorie mathématique de la lutte tour la vie, redigées par MARCEL BRELOT Paris, Gauthier—Villars, 1931. Un vol. di pp. VI—214, fasc. VII della collezione "Cahiers scientifiques", publiés sous la direction de M. GASTON JULIA. [Le conferenze furono tenute all'Istituto Henri Poincaré nell'inverno 1929—30. La redazione contiene qualche contributo del BRELOT e del D'ANCONA. Una presentazione di quest'opera, fatta dal PICARD all'Accademia di Francia, leggasi nei "Comptes rendus", t. CXCI, 1930<sub>2</sub>, p. 1273].

## Annexe B

# Nature des points singuliers en dimension trois

Cas où les trois valeurs propres sont réelles

Noeud Instable Répulsif

Noeud Instable Répulsif

 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ 

 $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \ \lambda_3 < 0$ 

Noeud Instable Attractif

#### Noeud Stable Attractif

 $\lambda_1, \lambda_2 < 0, \ \lambda_3 > 0 \qquad \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \ \lambda_3 > 0$ 

Col Répulsif

Col Attractif

 $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \ \lambda_3 < 0$ 

 $\lambda_1 > 0, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ 

Foyer Stable / Instable Répulsif

Foyer Stable / Instable Attractif

 $\lambda_3 > 0$ 

 $\lambda_3 < 0$ 

## Annexe C

## Tableau des programmes

#### Tous ces programmes sont disponibles à l'adresse : http://ginoux.univ-tln.fr

Calcul du paramètre de bifurcation de Hopf	Hopfbif.nb	
Diagramme de bifurcation	Diagbif.nb	
Section de Poincaré	dynapack.nb	
Application de Poincaré	Poincamap.nb	
Exposants de Lyapunov	LET / MATDS	
Variété lente (Plan osculateur)	VLPlanos.nb	
Variété lente (Algorithme)	VLAlgo.nb	

TAB. C.1 – Tableau des programmes

### **Bibliographie**

- [1931a] Allee, W. C., Animal Aggregations. A study in General Sociology, University of Chicago Press, Chicago, (1931)
- [1966] Andronov, A. A., Khaikin, S. E. & Vitt, A. A., *Theory of oscillators*, Pergamon Press, Oxford, (1966)
- [1974a] Arnold, V., Équations différentielles ordinaires, Éditions Mir, Moscw, (1974)
- [1984] Bergé, P., Pomeau, Y. et Vidal C., L'ordre dans le chaos, Hermann, Paris, (1984)
- [1892] Cauchy, L.A., *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, Gauthier-Villars, Paris (1892)
- [2004c] Chlouverakis, K.E. & Sprott, J. C., "A Comparison of Correlation and Lyapunov Dimensions," Physica D, Vol. 200, "in press", (2004)
- [1986c] Chua, L. O., Komuro, M. & Matsumoto, T. "The double scroll family," IEEE Trans. on Circuits and Systems, 33, Vol.11, 1072-1097, (1986)
- [1731] Clairaut, A., *Recherches sur les courbes à double courbure*, Nyon, Didot, Quillau, Paris, (1731)
- [1955c] Coddington, E.A. & Levinson., N., Theory of Ordinary Differential Equations, Mac Graw Hill, New York, (1955)
- [1980] Collet, P. & Eckmann, J.P., *Iterated Maps on the Intervals as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston, (1980)
- [Dang-Vu et al., 2000] Dang-Vu, H. & Delcarte, C., Bifurcations & Chaos, Ellipses, Paris, (2000)

- [1887-96] Darboux, G., *Leçons sur la théorie des surfaces*, tomes I-IV, Gauthier-Villars, Paris, (1887-1896)
- [1859] Darwin, C., "The Origin of the Species," W. Clowes & Sons, London, (1859)
- [1964] Delachet, A., La Géométrie Différentielle, "Que sais-je", n°1104, P.U.F., Paris, (1964)
- [2001d] Deng, B., "Food chain chaos due to junction-fold point," Am. Inst. of Physics, 11 (3), 514-525, (2001)
- [2004f] Fibonacci, L., *Liber abaci*, reproduit dans, "A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation," Springer-Verlag, New-York, (2004)
- [1977f] Freedman, H.I. & Waltman, P., "Mathematical analysis of some three-species food-chain models," Mathematical Biosciences, 33, 257-276, (1977)
- [1985f] Freedman, H.I. & So, H.S., "Global stability and persistence of simple food chains," Mathematical Biosciences, 76, 69-86, (1985)
- [1852] Frénet, F., Sur les courbes à double courbure, Thèse Toulouse, 1847. Résumé dans J. de Math., 17, (1852)
- [2001] Frontier, S. & Pichod-Diale, D., *Ecosystèmes, structure, fonctionnement, évolution*, Dunod, Paris, (2001)
- [1935] Gause, G.F., The struggle for existence, Williams and Wilkins, Baltimore, (1935)
- [1977g] Gilain, C., La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l'histoire de l'Analyse, Thèse, Université de Paris I, (1977)
- [2005] Ginoux, J.M., Rossetto, B. & Jamet, J.L., "Chaos in a three-dimensional Volterra-Gause model of predator-prey type," Int. J. Bifurcation and Chaos, 5, Vol. 15, 1689-1708, (2005)
- [1988] Glass, L. & Mackey, M.M., From clocks to chaos, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, (1988)

- [1832] Gompertz, B., "On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies," Phil. Trans. Roy. Soc. London, 123, 513-585, (1832)
- [1983a] Grassberger, P. & Procaccia, I., "Measuring the Strangeness of Strange Attractors," Physica D, Vol. 9, 189-208, (1983)
- [1983b] Grassberger, P. & Procaccia, I., "Characterization of Strange Attractors," Phys. Rev. Let., 50, 346-349, (1983)
- [1969] Hale, J.K., Ordinary differential equations, Wiley-Inscience, New-York, (1969)
- [1991] Hastings, A. & Powell, T., "Chaos in a three-species food chain," Ecology, 72, 896-903, (1991)
- [1974h] Hirsch, M. W. & Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, (1974)
- [1959a] Holling, C. S., "The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European pine sawfly," Canadian Entomologist, 91, 293-320, (1959)
- [1959b] Holling, C. S., "Some characteristics of simple types of predation and parasitism," Canadian Entomologist, 91, 385-398, (1959)
- [1942] Hopf, E., "Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differential-systems," Bereich. Math. Phys. Kl. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, 94, 1-22, et Bereich. Math. Phys. Kl. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, 95(1), 3-22, (1942)
- [1893] Hurwitz, A., "Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt," Math. Ann., 41, 403-442, (1893)
- [1991i] Israel G., 'Volterra's Analytical Mechanics of Biological Associations', Arch. Int. Hist. Sci., 41, 57-104; 307-352, (1991)
- [1993i] Israel G., 'The Emergence of Biomathematics and the Case of Population Dynamics : A Revival of Mechanical Reductionism and Darwinism', *Sci. in Context*, 6, 469-509, (1993)

- [1996i] Israel, G., La Mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique, Seuil, Paris, (1996)
- [2002i] Israel, G., Millán Gasca, A., *The Biology of Numbers. The Correspondence of Vito Volterra on Mathematical Biology*, Basel, Birkhäuser, Boston, (2002)
- [1955i] Ivlev, V. S., Experimental ecology of the feeding of fishes, Yale University Press, New Haven, 1955 (English translation published in 1961)
- [1979] Kaplan, J. & Yorke, J. A., "Chaotic behavior of multidimensional difference equations, in functional differential equations and approximation of fixed points," Lecture Notes in Mathematics, 730, 204-227, (1979)
- [1959k] Kreyszig, E., Differential Geometry, Dover, New York, (1991)
- [1963] Lorenz, E. N., "Deterministic non-periodic flows," J. Atmos. Sc, 20, 130-141, (1963)
- [1925] Lotka, A., Elements of physical biology, Williams & Wilkins Co, Baltimore, (1925)
- [1899] Lyapunov, A.M., "The general problem of the stability of motion," Thèse, St Petersbourg, (1899), reproduite dans "Problème général de la stabilité de mouvement," Ann. Fac. Sci., Toulouse 9, 203-474, (1907), reproduit dans Ann. Math. Stud., N° 12, (1949)
- [1798] Malthus, T.R., *An Essay on the Principle of Population*, printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard, London (1798)
- [1975] Mandelbrot, B., *Les Objets Fractals : Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris, (1975)
- [1999] Manneville, P., *Systèmes dynamiques et chaos*, Cours de l'École Polytechnique, Palaiseau, (1999)
- [1785] Monge, G., Mémoire sur les développées, in mémoires de mathématiques et de physique présentés à l'académie royale des sciences par divers savants, tome 10, Paris (1785)

- [1920] Pearl, R. & Reed, L.J., "On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation," Proceedings of the National Academy of Science (U.S.A.), Vol. 6, 6, 275-288, (1920)
- [1881] Poincaré, H., "Sur les courbes définies par une équation différentielle," J. Math. Pures et Appl., Série III, 7, 375-422, (1881)
- [1882] Poincaré, H., "Sur les courbes définies par une équation différentielle," J. de Math Pures Appl., Série III, 8, 251-296, (1882)
- [1885] Poincaré, H., "Sur les courbes définies par une équation différentielle," J. Math. Pures et Appl., Série IV, 1, 167-244, (1885)
- [1886] Poincaré, H., "Sur les courbes définies par une équation différentielle," J. Math. Pures et Appl., Série IV, 2, 151-217, (1886)
- [1999] Ramdani, S., Variétés lentes de systèmes dynamiques chaotiques considérés comme len-rapides, Thèse, Université du Sud Toulon-Var, (1999)
- [1977r] Real, L., "The kinetics of functional response," Am. Nat., 111, 289-300, (1977)
- [1963] Rosenzweig, M.L. & Mac Arthur, R.H., "Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions," Am. Nat., 97, 209-223, (1963)
- [1971] Rosenzweig, M.L., "Paradox of enrichment : destabilisation of exploitation ecosystems in ecological time," Science, 171, 385-387, (1971)
- [1986] Rossetto, B., "Singular approximation of chaotic slow-fast dynamical systems," Lecture Notes in Physics, Vol. 278, 12-14, (1986)
- [1998] Rossetto, B., Lenzini, T., Ramdani, S. & Suchey, G., "Slow-fast autonomous dynamical systems," Int. J. Bifurcation and Chaos, 8, Vol. 11, 2135-2145, (1998)
- [1971] Ruelle, D, & Takens, F. "On the nature of turbulence," Communications of Mathematical Physics, 20, 167-192, (1971)
- [1845] Saint-Venant, A.J.C. Barré de, "Mémoire sur les sommes et différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la Mécanique," Journ. Ecole. Polyt., 18, cah. 30, (1845)

- [1978] Scudo, F.M. & Ziegler, J.R., *The Golden Age of Theoretical Ecology : 1923-1940*, Springer-Verlag, Berlin, (1978)
- [1851] Serret, J. A., "Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure," J. de Math., 16, 193-207, (1851)
- [1965] Sil'nikov, L. P., "A case of the existence of a denumerable set of perodic motion," Sov. Mat. Dokl., 6, 163-166, (1965)
- [1933a] Struik, D.J., "Outline of a history of differential geometry (I)", Isis, 19, 92-120, (1933)
- [1933b] Struik, D.J., "Outline of a history of differential geometry (II)", Isis, 20, 161-191, (1933)
- [1961] Struik, D.J., Lecture on Classical Differential Geometry, Dover, New York, (1988)
- [1952] Tihonov, A. N., "Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives," Mat. Sbornik N.S., 31, 575-586, (1952)
- [1925] Vallée, L.L., Traité de Géométrie descriptive, Paris (1925)
- [1926vdp] Van der Pol, B., "On 'Relaxation-Oscillations'," Phil. Mag., 7, Vol. 2, 978-992, (1926)
- [1838] Verhulst, P.F., "Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement," Corresp. Math. Phys., X, 113-121, (1838)
- [1926v] Volterra, V., "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi," Mem. Acad. Lincei III, 6, 31-113 (1926)
- [1931v] Volterra, V., *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris, (1931)
- [1985w] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A., "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," Physica D, Vol. 16, 285-317, (1985)

## Index

140, 144 application de Poincaré, 16, 60, 61, 110 approximation, 13, 15, 16, 19, 20, 25, 44, 45, 47-50, 52, 56, 67, 72, 78, 79, 81, 97, 115, 116, 119, 124, 126, 132–137, 145 attracteur, 13, 15, 16, 18, 20, 55-57, 61-63, 65-67, 74, 79, 107, 108, 111, 112, 116, 120, 121, 123, 126–128, 130, 131 bifurcation, 33, 59-61, 107, 123, 124, 127, 130 bifurcation de Hopf, 18, 58, 59, 93-97, 103-107.123 cascade de doublement, 18, 61, 109 chaos, 60-62, 67, 109, 110, 150 courbes trajectoires, 15, 19, 26, 42, 53, 57, 62,65 courbure, 14, 15, 19, 26, 30, 31, 35, 37, 40 cycle limite, 59, 104, 130 diagramme de bifurcation, 16, 61, 109 diagramme de stabilité, 34 dimension de Lyapunov, 62, 64-66 exposants de Lyapunov, 63-67, 111 homocline, 67, 112 modèle d'Hastings-Powell, 20, 107, 122, 124-variété, 12, 13, 15-20, 26, 35-45, 47-51, 126, 128-131 modèle de Chua, 17, 19, 75-80 modèle de Lorenz, 17, 20, 61, 67, 81-84 modèle de Rosenzweig-MacArthur, 18, 20, 107, 117–123, 127, 130, 131

algorithme, 15, 16, 20, 63, 64, 111, 132, modèle de Van der Pol, 17, 19, 68–72, 74 modèle de Volterra-Gause, 18, 20, 91, 97, 99, 102, 113–116, 127–129 modèle de Volterra-Gause, 150

orbite de Sil'nikov, 67, 112

- plan osculateur, 14, 15, 19, 26, 30, 32, 36-38, 41, 43, 48–51, 56, 69, 75, 81, 113, 117, 145-147
- points fixes, 38, 41, 57-59, 75, 82, 91, 92, 94, 95, 102–105, 107, 113, 117, 122, 123
- portrait de phase, 15, 57, 75, 108, 113, 117, 124, 125, 127, 128
- prédateur-proie, 17, 18, 20, 85-87, 91, 97, 107, 117, 123
- prédateur-proie, 150
- SDACCL-R, 13, 15-21, 26, 37-43, 51, 56, 57, 81, 124, 133, 145, 150
- SDAL-R, 21-26, 37-45, 48-51, 55-57, 68, 69, 75, 81, 85, 112, 117, 132, 133, 145
- section de Poincaré, 60, 61, 67, 110
- stabilité, 15, 19, 26, 32-35, 56, 58, 69, 92, 93, 95, 96, 102, 103, 105, 106, 122
- torsion, 14, 15, 19, 26, 30, 32, 36, 37, 43, 51, 77, 84, 114
- 53-56, 69-77, 79-84, 112-114, 116-121, 124, 126, 132-142, 145
- variété lente, 53, 148-150
- variété singulière, 53, 56, 149
- variété uniforme, 53