



**HAL**  
open science

# Problèmes mathématiques et numériques issus de l'imagerie par résonance magnétique nucléaire

Patrice Boissoles

► **To cite this version:**

Patrice Boissoles. Problèmes mathématiques et numériques issus de l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT: . tel-00011378

**HAL Id: tel-00011378**

**<https://theses.hal.science/tel-00011378>**

Submitted on 13 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre de la thèse : 3186

# THÈSE

*Présentée*

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

*pour obtenir*

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

*par*

**Patrice BOISSOLES**

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

*Problèmes mathématiques et numériques issus de  
l'imagerie par résonance magnétique nucléaire.*

*Sous la direction de Gabriel Caloz.*

Version du 15 novembre 2005



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Partie 1 : L'antenne cage d'oiseau</b>	<b>9</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>11</b>
1.1 Principe de la RMN . . . . .	11
1.2 Cadre d'étude . . . . .	12
<b>2 Modélisation de type circuit</b>	<b>15</b>
2.1 Notations . . . . .	15
2.2 Mise en équation . . . . .	17
2.3 Calcul des inductances mutuelles . . . . .	23
<b>3 Étude du circuit</b>	<b>29</b>
3.1 Reformulation du système linéaire . . . . .	29
3.2 Phénomène de résonance . . . . .	34
3.3 Calcul des fréquences de résonance . . . . .	39
3.4 Quelques propriétés des pulsations et des courants . . . . .	40
3.4.1 Bilan . . . . .	40
3.4.2 Étude des valeurs propres de $L$ . . . . .	42
<b>4 Étude du champ magnétique radiofréquence</b>	<b>47</b>
4.1 Formule générale . . . . .	47
4.2 Méthode numérique . . . . .	51
4.3 Rotation . . . . .	60
4.4 Trajectoires dans le plan $y = 0$ . . . . .	66
4.5 Trajectoires dans le plan $x = 0$ . . . . .	71
4.6 Symétrie . . . . .	75
4.7 Orthogonalité . . . . .	78
4.8 Homogénéité . . . . .	80
4.9 Comportement le long de l'axe . . . . .	86
4.10 Cas de la pulsation caractéristique $\omega_0$ . . . . .	92
4.11 Cas de la pulsation caractéristique $\omega_{CR}$ . . . . .	100
<b>5 Étude du régime transitoire</b>	<b>109</b>
5.1 Reformulation du système . . . . .	109
5.2 Résolution des systèmes différentiels . . . . .	114

5.3	Validation sur les données expérimentales . . . . .	118
5.3.1	Validation des hypothèses du chapitre 5 . . . . .	118
5.3.2	Validation de l'approximation harmonique . . . . .	120
<b>Conclusion de la partie 1</b>		<b>123</b>
<b>Partie 2 : Le système de Maxwell</b>		<b>125</b>
<b>6</b>	<b>Introduction du problème</b>	<b>127</b>
6.1	Espaces fonctionnels . . . . .	127
6.2	Rappels sur les opérateurs monotones . . . . .	132
6.3	Modélisation mathématique . . . . .	134
6.4	Problème évolutif : existence, unicité et stabilité . . . . .	136
6.4.1	Énoncé du résultat . . . . .	137
6.4.2	Première partie . . . . .	138
6.4.3	Deuxième partie . . . . .	141
6.4.4	Troisième partie . . . . .	142
6.4.5	Quatrième partie . . . . .	142
6.4.6	Résultat de stabilité . . . . .	144
6.4.7	Retour au problème initial . . . . .	144
6.5	Le problème en régime transitoire . . . . .	146
<b>7</b>	<b>Étude du problème harmonique</b>	<b>153</b>
7.1	Formulation variationnelle . . . . .	153
7.2	Régularisation . . . . .	155
7.3	Existence d'une solution . . . . .	158
7.4	Unicité . . . . .	162
7.4.1	Résultats préliminaires . . . . .	162
7.4.2	Absence de valeurs singulières de $\omega$ . . . . .	168
<b>8</b>	<b>Étude en axisymétrie</b>	<b>173</b>
8.1	Préliminaires . . . . .	173
8.2	Série de Fourier . . . . .	177
8.3	Coefficients de Fourier de la solution . . . . .	184
<b>9</b>	<b>Résolution du problème axisymétrique</b>	<b>191</b>
9.1	Retour sur les hypothèses du chapitre 6 . . . . .	191
9.2	Coefficients de Fourier de $\check{h}$ . . . . .	193
9.2.1	Coordonnées axisymétriques . . . . .	193
9.2.2	Propriété . . . . .	195
9.3	Illustrations numériques des propriétés de $\check{h}$ . . . . .	197
9.3.1	Vue tridimensionnelle . . . . .	197
9.3.2	Vue en axisymétrie . . . . .	198
9.3.3	Coefficients de Fourier . . . . .	199
9.4	Résolutions des problèmes axisymétriques . . . . .	203
9.4.1	Antenne dans le vide . . . . .	204
9.4.2	Antenne dans un milieu conducteur . . . . .	205

---

9.4.3 Cas réaliste . . . . .	211
<b>Conclusion de la partie 2</b>	<b>215</b>
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>217</b>
<b>Annexes</b>	<b>219</b>
<b>A Rappels sur les matrices circulantes</b>	<b>221</b>
A.1 Matrices de Fourier . . . . .	221
A.2 Matrices circulantes . . . . .	222
<b>B Rappels sur les intégrales elliptiques</b>	<b>229</b>
B.1 Définitions . . . . .	229
B.2 Intégrale elliptique complète du premier type . . . . .	231
B.3 Intégrale elliptique complète du deuxième type . . . . .	241
B.4 Intégrales elliptiques incomplètes . . . . .	248
<b>C Code de calcul du champ radiofréquence</b>	<b>259</b>
<b>D Mélina : une bibliothèque d'éléments finis</b>	<b>263</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>269</b>



# Introduction

## Origine du problème - motivation

L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) est une technique d'imagerie médicale développée dans les années 70. Elle permet d'obtenir, de façon non-invasive, une succession d'images de haute qualité du corps humain. En particulier, l'IRM permet de visualiser des tissus mous tels que le cerveau ou la moelle osseuse et offre un bon contraste entre les différents tissus. Un autre avantage de l'IRM est la possibilité de faire une coupe dans toutes les directions de l'espace.

Outre la radiographie classique, l'IRM est utilisée pour aider et guider les chirurgiens lors d'interventions : on parle alors d'IRM interventionnelle (voir [45], [59], [62], [66]). Il peut s'agir de guider :

- le dépôt de médicament à l'endroit voulu ([70]),
- le traitement de tumeur par hyperthermie ([73]),
- la dilatation d'artère bouchée,
- l'activation de gène remède en thérapie génique ([10], [70]).

L'IRM continue de connaître un développement technique important avec l'utilisation de champs magnétiques de plus en plus intenses ([30], [56]) et d'appareils d'IRM ouverts permettant l'accès au patient en IRM interventionnelle ([59]). Ce rapide développement technique explique que de nombreuses questions restent non résolues dans le domaine de l'IRM. La modélisation mathématique et le calcul scientifique sont deux outils permettant de répondre à divers problèmes tels que le codage et le décodage d'images, les artefacts ou l'étude des propriétés des antennes émettrices et réceptrices. Dans ce travail, nous nous sommes concentrés sur la problématique liée aux antennes. En particulier, les techniques développées et les résultats obtenus s'appliquent aux problèmes d'échauffement ainsi qu'aux problèmes d'artefacts de champs radiofréquence.

Le fonctionnement de l'IRM repose sur l'utilisation de champs magnétiques et plus particulièrement sur le phénomène de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) dont le principe est expliqué dans les préliminaires de la partie 1 (voir page 11 pour une rapide présentation et une bibliographie détaillée).

À l'heure où nombre de patients sont porteurs d'implants métalliques (80% selon l'enquête [18] menée en 1999 auprès de sites IRM français), plusieurs études sur les risques liés aux examens d'IRM en présence d'objets métalliques ont été réalisées ([22], [39], [55]). Une partie importante de ces études concerne le phénomène d'échauffement des objets métalliques et les brûlures pouvant en résulter ([34], [39]).

Il ressort trois idées de ces études :

- parmi les trois types de champs magnétiques utilisés en IRM, seul le champ radiofréquence créé par une antenne appelée antenne émettrice est en mesure de provoquer une hausse de température importante ([15], [39]),
- les implants métalliques de petites tailles tels que les clips ou les broches chauffent peu lors d’examens d’IRM ([49], [77], [78], [79]),
- les objets métalliques longs tels que les cathéters (tuyaux métalliques souples utilisés en IRM interventionnelle) et les câbles des appareils de monitoring semblent les seuls capables de provoquer des hausses de températures importantes. Des augmentations de plus de  $30^\circ$  ([11]) et de plus de  $60^\circ$  ([39]) ont pu être mises en évidence avec des cathéters ainsi qu’une hausse de  $25^\circ$  avec un neurostimulateur ([76]).

Malgré les risques liés à la présence d’objets métalliques lors d’examen d’IRM, les études concernant ce sujet sont récentes puisqu’elles datent des années 2000 ([2], [4], [6], [7], [8], [9], [23], [42], [83]). En particulier, il y a très peu d’études mettant en équation le phénomène d’échauffement ([5], [11]) et aucune du point de vue mathématique.

L’objectif de cette thèse est de combler cette lacune et d’aborder l’étude mathématique du phénomène d’échauffement pouvant apparaître lors d’examen d’IRM. En accord avec les différentes études menées précédemment, on s’est intéressé uniquement au champ radiofréquence dans ce manuscrit :

- la première partie de cette thèse est donc consacrée à l’étude du champ magnétique radiofréquence,
- la deuxième partie concerne le calcul du champ magnétique total en présence d’un objet métallique.

Une fois le champ radiofréquence bien connu, on sera en mesure de mettre en évidence les phénomènes de résonance responsables de l’élévation de température.

Le souci constant de mettre en œuvre les méthodes de calculs et de comparer les résultats numériques avec les résultats d’expériences nous a conduit à procéder à de nombreux développements.

Pour avoir une étude très précise au niveau de l’antenne, nous nous sommes limités à l’étude de l’antenne émettrice dite “cage d’oiseau” (voir la figure 1). Depuis leur apparition en 1985, celles-ci sont largement utilisées en raison de la grande homogénéité du champ radiofréquence qu’elles génèrent. D’autre part, nous avons connaissance de mesures expérimentales précises pour de telles antennes.

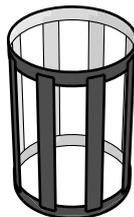


FIG. 1 – Antenne cage d’oiseau

Relevons qu’il existe bien sûr d’autres types d’antennes telles que les antennes Helm-

holtz ou de surface (voir [67] et [74]) ayant des formes et donc des propriétés et une utilisation différentes.

## Étude de l'antenne cage d'oiseau

Le but de la première partie du travail est d'étudier l'antenne cage d'oiseau, c'est-à-dire de déterminer le champ magnétique qu'elle produit ainsi que les caractéristiques de celui-ci.

Pour cela, deux approches sont possibles :

- soit la résolution du problème de Maxwell en espace-temps à l'aide des différences finies dans le domaine temporel (FDTD, voir [63]),
- soit une représentation de type circuit électrique de l'antenne couplée aux équations de Maxwell.

La première méthode nécessite le maillage de toute l'antenne (en particulier des brins métalliques la composant) et conduit à des calculs longs et délicats : nécessité d'adapter le maillage structuré aux différentes échelles du problème. De plus, contrairement à la seconde méthode, elle ne permet pas de bien mettre en évidence le fonctionnement de l'antenne cage d'oiseau. En effet, l'utilisation en IRM de cette antenne repose sur un phénomène de résonance que la résolution en espace-temps des équations de Maxwell ne permet pas de faire ressortir. Nous avons choisi d'utiliser dans ce manuscrit la seconde approche afin de faire une étude précise des modes de résonance et du champ magnétique engendré. De plus, le fait de ne pas mailler l'antenne permet l'utilisation d'un maillage axisymétrique et donc de se ramener à la résolution d'un problème bidimensionnel, ce que ne permet pas l'approche FDTD.

La première partie est divisée en cinq chapitres dont voici une rapide présentation.

Le premier chapitre explique le principe de la RMN, phénomène à la base de l'IRM.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation sous forme d'un circuit électrique équivalent de l'antenne cage d'oiseau : chaque brin métallique de l'antenne est représenté par un circuit RLC. Il s'agit d'une représentation intermédiaire entre les modèles initiaux ([53], [80], [81]) et des modèles plus complexes comme dans [40] qui nous permet de bien faire ressortir le fonctionnement de l'antenne cage d'oiseau.

L'interaction existante entre deux brins de l'antenne est alors traduite par l'inductance mutuelle entre les bobines de ces deux brins. Cette inductance s'exprime sous la forme d'une double intégrale volumique grâce à la formule de Neumann (voir la formule (2.3) page 17) :

$$(1) \quad M_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi I_1 I_2} \int_{\mathcal{V}_1} \int_{\mathcal{V}_2} \frac{\vec{J}_1(r) \cdot \vec{J}_2(r')}{|r - r'|} dv dv',$$

où  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont deux brins métalliques possédant les densités de courant  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$ . Les méthodes utilisées dans la littérature pour approcher l'intégrale (1) dépendent de la position relative des bobines et sont basées sur les formules d'approximation

filiaire de [51]. Nous présentons dans la section 2.3 une méthode générale de calcul permettant de réduire la formule de Neumann à une intégrale double linéique. La comparaison avec des valeurs réelles montrent une erreur de l'ordre de 2% pour les termes prépondérants (voir le tableau 2.2).

Le troisième chapitre a pour objet l'étude du circuit électrique modélisant l'antenne cage d'oiseau. En particulier, nous montrons qu'une antenne à  $N$  branches possède  $N + 1$  pulsations de résonances notées  $\omega_{CR}, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ . Celles-ci peuvent être exprimées de façon explicite en fonction des caractéristiques de l'antenne :

$$(2) \quad \omega_{CR} = \sqrt{\frac{1}{C^a \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L}_{1,k}^a)}},$$

et

$$(3) \quad \forall 0 \leq k \leq N - 1, \omega_k = \sqrt{\frac{2}{\lambda_k^L} \left( \frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2k\pi}{N} \right) \right] \right)},$$

où  $\lambda_k^L$  désigne la  $k$ -ième valeur propre d'une matrice circulante  $L$  dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des inductances mutuelles et  $C^a$  et  $C^b$  sont des capacités insérées dans l'antenne pour régler la fréquence du champ émis.

Les pulsations  $\omega_{CR}$  et  $\omega_0$  correspondent à des configurations pour lesquelles il n'y a pas de courant circulant dans les branches : l'antenne se comporte comme deux anneaux circulaires parallèles parcourus par du courant (voir la section 3.4.1).

Comme dans le deuxième chapitre, les résultats numériques obtenus pour les pulsations de résonance sont comparés avec des valeurs réelles : l'erreur obtenue est de l'ordre de 1% (voir les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3).

La partie innovante de ce chapitre est la section 3.4.2 consacrée à l'étude des valeurs propres de la matrice  $L$ . En effet, d'après l'expression (3), les valeurs  $\lambda_k^L$  doivent être strictement positives. Compte tenu de l'expression complexe des inductances mutuelles, une démonstration théorique complète s'est avérée impossible et nous avons eu recours à des tests numériques pour "justifier" ce résultat de positivité.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du champ radiofréquence produit par l'antenne cage d'oiseau.

Tout d'abord, nous déterminons une expression explicite de ce champ en fonction des caractéristiques de l'antenne à l'aide de la formule de Biot-Savart (4.2) (voir l'expression (4.9)). À l'aide des intégrales elliptiques du premier et deuxième type, nous donnons une formulation plus compacte du champ radiofréquence. Celle-ci va faciliter son étude mathématique et elle est à la base d'une méthode de calcul rapide et performante présentée dans la section 4.2.

Le reste du chapitre est une analyse mathématique et numérique des différentes propriétés du champ radiofréquence. En particulier nous mettons en évidence dans les sections 4.3, 4.7 et 4.8 les propriétés de rotation, d'orthogonalité et d'homogénéité attendues par les expériences. Nous montrons aussi pourquoi, parmi toutes les pulsations de résonance, seule la première est intéressante pour l'IRM. Nous terminons ce

chapitre par l'étude des propriétés des champs magnétiques associées aux pulsations particulières  $\omega_0$  et  $\omega_{CR}$ .

Pour conclure cette première partie, nous justifions, dans le cinquième chapitre, l'approximation régime harmonique utilisée dans les chapitres précédents. Pour cela, nous établissons l'expression de la durée du régime transitoire en fonction des caractéristiques de l'antenne. Nous vérifions alors que celui-ci est négligeable dans les configurations utilisées lors des examens d'IRM.

L'annexe A présente quelques rappels sur les matrices circulantes. En particulier, nous montrons que les matrices circulantes sont simultanément diagonalisables et nous donnons une expression de leur valeurs propres en fonction de leurs coefficients. Ces résultats sont à la base de l'expression (3) des pulsations de résonance et de la résolution du système différentiel du chapitre 5.

L'annexe B est consacrée à l'étude de la méthode de calcul des intégrales elliptiques de premier et deuxième type présentée dans [1]. Cet algorithme est basé sur la moyenne arithmético-géométrique et la relation de Landen. Une des contributions de ce travail est de donner une version précise de la relation de Landen. En effet, dans [1], la relation de Landen est énoncée sous la forme

$$\tan(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = \kappa' \tan \varphi_n,$$

et l'angle  $\varphi_{n+1}$  est donc défini à un multiple de  $2\pi$  près. Nous donnons dans la proposition B.4.1 (voir page 248) l'expression exacte de  $\varphi_{n+1}$  en fonction  $\varphi_n$ , ce qui permet la mise en œuvre de l'algorithme. De plus, nous procédons à une étude de convergence et mettons en évidence numériquement la convergence quadratique de la méthode.

Dans l'annexe C, une version commentée du programme MATLAB ayant permis le calcul du champ radiofréquence est présentée. En particulier, il nous a permis de dessiner la cartographie du champ à l'intérieur de l'antenne.

## Étude théorique et numérique du système de Maxwell

Le but de la deuxième partie du travail est d'étudier le système de Maxwell dont le champ électromagnétique total est solution. Le champ magnétique radiofréquence calculé dans la première partie sert de terme source et nous nous sommes concentrés sur la détermination du champ magnétique total. Le champ électrique peut en être déduit par la résolution de l'équation :

$$(4) \quad -\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} + \text{rot } H = \sigma E.$$

La deuxième partie de ce travail est divisée en quatre chapitres dont voici une rapide présentation.

Le chapitre 6 est consacré à l'étude du problème temporel dont les champs électriques et magnétiques totaux sont solutions. Pour cela, nous désignons par  $\Omega$  un cylindre de  $\mathbb{R}^3$  contenu à l'intérieur de l'antenne cage d'oiseau et "proche" de

celle-ci et nous supposons que le champ magnétique total est peu perturbé sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  par la présence de l'objet métallique. Le problème que nous sommes amenés à résoudre s'écrit donc sous la forme :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial(\varepsilon(x)E)}{\partial t} + \text{rot } H & = \sigma(x)E, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 H)}{\partial t} + \text{rot } E & = 0, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \text{div}(\mu_0 H) & = 0, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \cdot \text{rot } H & = 0, \quad \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ n \times H & = n \times \check{H}, \quad \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ E(0, \cdot) & = E_0, \quad \text{dans } \Omega, \\ H(0, \cdot) & = H_0, \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

où  $\check{H}$ ,  $E_0$  et  $H_0$  sont des données du problème. Après avoir montré le caractère bien posé du problème (5), nous étudions l'erreur commise en approchant la solution du problème temporel par la solution du problème harmonique

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left[ \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot } h \right] + i\omega\mu_0 h = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ h \times n = \check{h} \times n, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où  $\check{H} = \Re(\check{h}e^{-i\omega t})$ .

Le chapitre 7 est consacré à l'étude du problème (6). Comme la forme sesquilinéaire associée n'est pas coercive, nous avons étudié séparément les résultats d'existence et d'unicité.

Afin de montrer l'existence d'une solution, nous utilisons la théorie de Fredholm. Pour cela l'espace  $\mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$  naturellement associé à (6) ne convient pas car l'inclusion  $\mathbb{H}(\text{rot}; \Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$  n'est pas compacte. Nous avons donc travaillé avec la forme régularisée de (6) :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \left[ \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot } h \right] - \mu_0 \text{grad} [s \text{div}(\mu_0 h)] + i\omega\mu_0 h = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ h \times n = \check{h} \times n, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où  $s$  est une fonction supposée connue de partie imaginaire strictement négative.

La partie unicité est basée sur un résultat de prolongement unique pour le système de Maxwell énoncé dans [84] et l'existence d'une région dans laquelle la conductivité électrique est strictement positive.

Bien que le champ source  $\check{h}$  ne soit pas axisymétrique, nous montrons dans le chapitre 8 que le problème tridimensionnel (7) peut être ramené à une suite de problèmes bidimensionnels axisymétriques. Pour cela, nous utilisons la décomposition en série de Fourier du champ magnétique  $\check{h}$  et le caractère axisymétrique du domaine  $\Omega$ . Nous rappelons tout d'abord que la régularité du champ  $\check{h}$  se transmet à ses coefficients de Fourier et qu'elle impose des conditions aux limites sur l'axe

$r = 0$ . Ensuite, nous montrons que le problème (7) est équivalent à une série infinie de problèmes indépendants, chacun étant bien posé et associé à un unique coefficient de Fourier.

Le chapitre 9 est consacré à la résolution numérique des problèmes axisymétriques énoncés dans le chapitre précédent.

Tout d'abord, nous vérifions que les hypothèses faites dans les chapitres 6, 7 et 8 pour démontrer les différents résultats théoriques sont justifiées dans le cadre de nos expérimentations.

La section 9.2 est consacrée à l'étude des coefficients de Fourier du champ  $\check{h}$ . Nous montrons en particulier que tous les coefficients d'indices  $n \notin 1 + N\mathbb{Z}$  où  $N$  désigne le nombre de branches de l'antenne sont nuls. Ce résultat est illustré numériquement dans la section 9.3 consacrée aux aspects numériques relatifs au champ source  $\check{h}$ . Nous y montrons aussi qu'il suffit de considérer 7 coefficients de Fourier pour approcher le champ  $\check{h}$  avec une erreur de l'ordre de  $10^{-5}$ .

La section 9.4 est consacrée à la résolution numérique des problèmes axisymétriques à l'aide de la librairie de calculs éléments finis MÉLINA (voir [68]). Nous montrons notamment que si l'antenne est vide et que la pulsation  $\omega$  n'est pas trop élevée, le champ  $h$  solution de (7) peut être assimilé au champ  $\check{h}$ . Lorsque l'antenne est supposée remplie d'un diélectrique de conductivité électrique  $\sigma = \sigma_0$  constante, nous avons pu mettre en évidence le phénomène d'épaisseur de peau et vérifier que le champ électrique associé à la solution  $h$  de (7) est conforme aux attentes. Enfin, nous terminons ce chapitre par la simulation d'un cas réaliste où  $\Omega$  est composé d'un cylindre métallique entouré d'air.

L'annexe D présente la manière dont nous avons exploité la librairie de calculs éléments finis MÉLINA pour réaliser les calculs du chapitre 9 : nous y présentons la méthodologie ainsi que l'idée générale de l'algorithme développé et les principales difficultés rencontrées.

Mentionnons aussi que tous les dessins réalisés pour ce document ont été effectués à l'aide de l'ensemble de macros FIG4TEX (voir [61]).



**Partie 1 :**  
**L'antenne cage d'oiseau**



# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Principe de la RMN

Afin d'introduire précisément le cadre de travail, on va brièvement expliquer dans ce chapitre le principe de la Résonance Magnétique Nucléaire (RMN). Le principe décrit ici est la détection du signal RMN par la méthode de Bloch et Purcell car il s'agit de celui utilisé dans les appareils d'IRM actuels. On pourra consulter [36] pour avoir un aperçu des autres méthodes de détection du signal RMN existantes. Pour plus de détails concernant le principe de la RMN, on pourra se référer aux travaux de modélisation mathématique suivants : [12], [13] et aux ouvrages médicaux suivants : [19], [37], [38], [50], [82].

Les noyaux qui possèdent un nombre impair de nucléons se comportent comme des aimants dans un champ magnétique. Pour traduire ce phénomène, on dit que ces noyaux possèdent un moment cinétique intrinsèque appelé spin. À ce spin est associé un moment magnétique appelé moment magnétique nucléaire. En raison de sa grande abondance dans le corps humain (celui-ci contient environ 75% d'eau), le noyau généralement utilisé lors des applications en IRM est celui d'hydrogène.

En l'absence de champ magnétique extérieur, le spin d'un noyau d'hydrogène est orienté de façon aléatoire.

Sous l'influence d'un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0$ , le spin du noyau d'hydrogène effectue un mouvement de rotation autour de la direction du vecteur  $\vec{B}_0$  : on dit que le spin effectue un mouvement de précession. La fréquence de rotation, appelée fréquence de Larmor, est caractéristique du noyau étudié et proportionnelle à l'intensité du champ  $\vec{B}_0$  :

$$\nu = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$$

où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique de l'espèce considérée (par exemple le rapport gyromagnétique de l'hydrogène vaut  $42,58 \times 10^6$  hertz par tesla).

La mécanique quantique montre que le spin peut occuper deux états : soit il a le même sens que  $\vec{B}_0$  (on parle alors de spin parallèle), soit il a un sens opposé (on parle alors de spin anti-parallèle). La probabilité pour un noyau d'hydrogène d'avoir un spin parallèle est légèrement supérieure à celle d'avoir un spin anti-parallèle.

Pour décrire le comportement d'un groupe d'atomes d'hydrogène, on utilise le moment magnétique macroscopique, aussi appelé vecteur aimantation, qui est la somme de tous les moments magnétiques des protons.

En l'absence de champ magnétique extérieur, les moments magnétiques nucléaires étant orientés de façon aléatoire, le moment magnétique macroscopique résultant est nul.

Sous l'effet d'un champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0$ , le vecteur aimantation  $\vec{M}$  effectue lui-aussi un mouvement de précession autour de  $\vec{B}_0$ . Comme il y a plus de spins parallèles qu'anti-parallèle, le vecteur  $\vec{M}$  est orienté dans le sens de  $\vec{B}_0$ .

Comme le nombre de spins parallèles n'est que très légèrement supérieur à celui des anti-parallèles, l'aimantation produite par cet état d'équilibre est trop faible pour être mesurée directement. On va donc perturber cet état d'équilibre et exploiter le phénomène de résonance : une faible perturbation accordée à la fréquence propre du système oscillant va réussir à entretenir voire à amplifier les mouvements vibratoires de ce système. Pour cela, une antenne dite antenne émettrice génère un champ radiofréquence noté  $\vec{B}_1$  perpendiculaire au champ  $\vec{B}_0$  et effectuant un mouvement de rotation à la fréquence de Larmor des noyaux d'hydrogène. Une fois l'émission du champ radiofréquence finie, les protons retournent à l'équilibre en émettant à leur tour un signal radiofréquence à la fréquence de Larmor. Celui-ci est capté par des antennes dites antennes réceptrices. C'est ce signal qui, une fois numérisé, traité puis analysé permet d'obtenir les propriétés physiques et chimiques de l'échantillon étudié.

La qualité des résultats obtenus lors de la RMN est donc en partie liée à la qualité d'émission et de réception des antennes. Pour avoir une bonne qualité, le champ émis doit être aussi homogène que possible dans la région étudiée et effectuer un mouvement de rotation à une fréquence la plus proche possible de la fréquence de Larmor afin d'exciter uniformément les noyaux voulus. De plus, les antennes réceptrices doivent avoir un rapport signal sur bruit élevé. Pour cela, il faut rendre la résistance de ces antennes la plus faible possible. C'est pourquoi les antennes sont composées de matériaux ayant une bonne conductivité tels que le cuivre ou l'or.

## 1.2 Cadre d'étude

Le phénomène d'échauffement des objets métalliques lors des examens d'IRM est dû à l'apparition de courants induits à la surface de ceux-ci créés par des champs électromagnétiques dépendant du temps. Comme le champ  $\vec{B}_0$  est statique, il ne peut pas être la source de courants induits. Il reste alors le champ radiofréquence et les gradients de champs. Ces derniers sont utilisés pour sélectionner la coupe visualisée et sont donc fixes pour une image donnée. Ils varient durant le temps de l'examen car on fait plusieurs coupes mais les courants induits qu'ils génèrent sont négligeables devant ceux produits par le champ radiofréquence. On a donc choisi de centrer notre étude sur le champ radiofréquence.

Comme expliqué dans l'introduction, l'antenne que l'on va étudier est une antenne émettrice dite "cage d'oiseau". Elle est constituée de deux anneaux métalliques reliés entre eux par un nombre pair de branches équiréparties. Ces dernières ainsi que les arcs de cercle reliant deux branches entre elles sont coupés en leur milieu afin d'insérer des capacités variables permettant de régler la fréquence du champ radiofréquence produit, voir figure 2 :

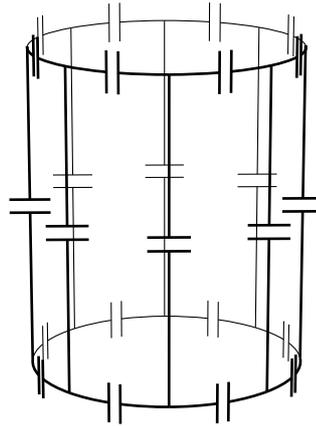


FIG. 2 – L'antenne cage d'oiseau

Le but de cette première partie est de déterminer et d'étudier le champ radiofréquence généré par l'antenne cage d'oiseau. Pour cela, on va utiliser la loi de Biot-Savart (voir la formule (4.2) page 48) : celle-ci exprime le champ magnétique créé par un fil métallique en fonction du courant qui le traverse et de ses caractéristiques géométriques.

La difficulté avec l'antenne cage d'oiseau vient du fait que le courant circulant réellement dans les brins n'est pas celui délivré par la source de tension. En effet, le champ magnétique créé par une branche génère des courants induits dans les autres branches. Afin de prendre en compte ces interactions, on va utiliser une représentation sous la forme d'un circuit électrique équivalent de l'antenne cage d'oiseau.



## Chapitre 2

# Modélisation de type circuit

L'objectif de ce chapitre est double : déterminer un système d'équations vérifié par les courants d'une part et développer une méthode de calcul des interactions entre les brins métalliques d'autre part.

### 2.1 Notations

Dans la plupart des études concernant la modélisation de type circuit équivalent, les différents brins métalliques composant l'antenne sont représentés par des bobines (voir [31], [47], [53] et [64]). L'interaction existant entre deux brins métalliques est alors donnée par l'interaction existant entre les deux bobines les représentant. Celle-ci s'exprime à l'aide d'un coefficient proportionnel aux courants circulant dans les bobines appelé inductance mutuelle. Son expression est donnée par la formule de Neumann (2.3) page 17.

Afin d'aller plus loin dans la modélisation des brins métalliques, on va les représenter non pas par une bobine, mais par une bobine et une résistance en série. La résistance permet de modéliser l'opposition des brins métalliques au passage d'un courant électrique. Elle s'exprime en ohm ( $\Omega$ ) et a pour expression :

$$(2.1) \quad R = \varrho \frac{L}{S} \text{ où } \begin{cases} L \text{ est la longueur du brin exprimée en m,} \\ S \text{ est la section du brin exprimée en m}^2, \\ \varrho \text{ est la résistivité électrique du brin exprimée en } \Omega\text{m.} \end{cases}$$

À titre d'exemple, la résistivité du cuivre à 25°C est de  $1,712 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ .

Comme mentionné dans l'introduction, on aurait pu aller plus loin dans la modélisation et utiliser une représentation comme celle de [40]. Cependant, cette dernière complique inutilement les calculs dans le sens où elle n'apporte pas plus de renseignements que notre modélisation concernant le phénomène de résonance, ce qui est un objectif prioritaire.

Les tensions des sources d'alimentation étant sinusoïdales de pulsation  $\omega$ , c'est-à-dire de la forme  $e = e_m \cos(-\omega t + \varphi)$ , on va travailler avec les tensions complexes associées :

$$(2.2) \quad e = \Re (E e^{-i\omega t}),$$

avec  $E \in \mathbb{C}$  et  $\omega \neq 0$ . Par abus de langage, on désignera par  $E$  et non  $e$  la tension source où  $e$  et  $E$  sont liées par la relation (2.2).

Les notations utilisées dans ce document sont les suivantes :

- $N$  désigne le nombre de branches de l'antenne ; c'est un entier naturel pair,
- $L_{n,k}^b$  désigne l'inductance mutuelle entre les bobines situées sur les branches  $n$  et  $k$  ( $L_{n,n}^b$  désigne l'inductance propre de la bobine située sur la branche  $n$ ),
- $L_{n,k}^a$  désigne l'inductance mutuelle entre les bobines situées sur le même anneau terminal en position  $n$  et  $k$  ( $L_{n,n}^a$  désigne l'inductance propre de la bobine située sur un anneau terminal à la position  $n$ ),
- $\overline{L_{n,k}^a}$  désigne l'inductance mutuelle entre les bobines situées en position  $n$  et  $k$  sur des anneaux terminaux distincts,
- $C^a$  désigne la capacité située sur les anneaux terminaux,
- $C^b$  désigne la capacité située sur les branches,
- $R^a$  désigne la résistance d'un arc d'anneau terminal,
- $R^b$  désigne la résistance d'une branche,
- $V_n$  désigne la tension délivrée dans l'arc  $n$  de l'anneau terminal du haut,
- $W_n$  désigne la tension délivrée dans l'arc  $n$  de l'anneau terminal du bas,
- $E_n$  désigne la tension délivrée dans la branche  $n$ .

Dans toute la suite, les différents indices seront exprimés modulo  $N$ .

Compte tenu des notations précédentes, le circuit équivalent à l'antenne cage d'oiseau de la figure 2 page 13 est le suivant :

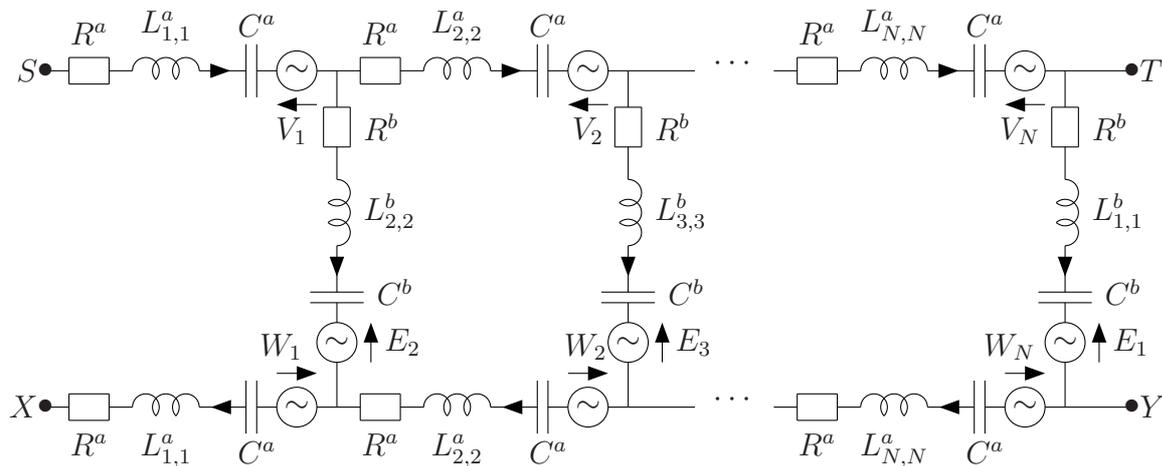


FIG. 3 – Le circuit étudié

Les extrémités  $S$  et  $T$  (respectivement  $X$  et  $Y$ ) sont reliées entre elles afin de former une boucle fermée composée de la répétition de  $N$  mailles identiques. En particulier,  $E_{N+1} = E_1$  et  $L_{N+1,N+1}^b = L_{1,1}^b$ , ce qui est cohérent avec l'expression modulo  $N$  des indices.

## 2.2 Mise en équation

On va maintenant établir les équations régissant le circuit de la figure 3 afin de déterminer les courants circulant dans le circuit. En particulier, on va mettre en évidence le phénomène de résonance apparaissant dans l'antenne. Les tensions sources étant sinusoïdales en temps de pulsation  $\omega$ , on recherche des courants de la forme  $\Re(Ie^{-i\omega t})$ . Ce cadre est justifié au chapitre 5 (voir page 109).

On note  $I_1, \dots, I_N$  les courants circulant dans l'anneau terminal du haut et  $J_1, \dots, J_N$  ceux circulant dans celui du bas. Les courants circulant dans les branches sont notés  $I_1^b, \dots, I_N^b$ . On a donc  $3N$  inconnues : les courants  $I_1, \dots, I_N, J_1, \dots, J_N, I_1^b, \dots, I_N^b$  ; la pulsation  $\omega$  étant considérée comme un paramètre. La figure 4 ci-dessous permet de visualiser les différents courants circulant dans les mailles  $n-1, n$  et  $n+1$ .

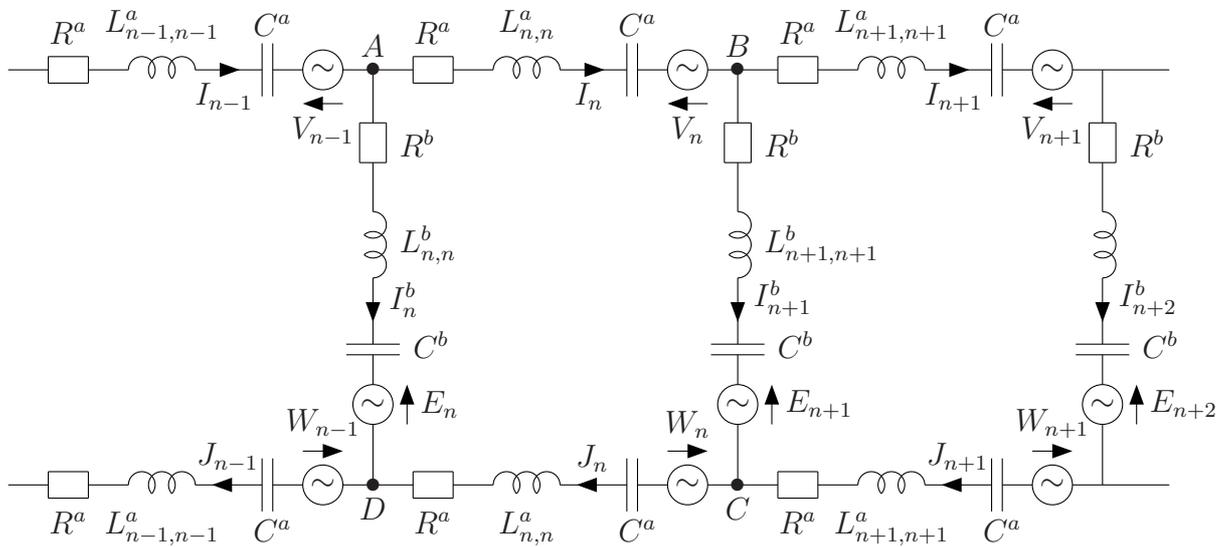


FIG. 4 – Les mailles  $n-1, n$  et  $n+1$

On suppose que les branches de l'antenne sont toutes identiques (même matériau et mêmes dimensions) ainsi que les arcs d'anneaux. On suppose de plus connues les valeurs des capacités  $C^a$  et  $C^b$  ainsi que celles des tensions source et les dimensions de l'antenne (longueur des branches, diamètre, ...). On déduit de ces données les résistances électriques des brins métalliques grâce à la formule (2.1) ainsi que les inductances mutuelles grâce à la formule de Neumann suivante (voir [51]).

### Formule de Neumann :

Soient  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  deux brins métalliques possédant les densités de courant  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$ . On note respectivement  $I_1$  et  $I_2$  les courants circulant dans  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$ .

L'inductance mutuelle entre  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  est donnée par :

$$(2.3) \quad M_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi I_1 I_2} \int_{\mathcal{V}_1} \int_{\mathcal{V}_2} \frac{\vec{J}_1(r) \cdot \vec{J}_2(r')}{|r - r'|} dv dv',$$

où  $dv$  et  $dv'$  sont les volumes infinitésimaux centrés respectivement en  $r$  et  $r'$ .

Par la formule (2.3), on remarque aisément que l'inductance mutuelle entre deux brins orthogonaux est nulle et que l'inductance mutuelle ne dépend que de la position relative des bobines et des dimensions des brins métalliques associés. Comme les branches se déduisent les unes des autres par rotation et que les caractéristiques des branches sont identiques, on a :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \forall 1 \leq n, k \leq N, L_{n,k}^b = L_{k,n}^b, \\ \forall 1 \leq n, k, j \leq N, L_{n,k}^b = L_{n+j,k+j}^b, \\ \forall 1 \leq n, k \leq N, L_{n,n+k}^b = L_{n,n-k}^b. \end{cases}$$

Les trois formules précédentes sont également vraies pour  $L_{n,k}^a$  et  $\overline{L_{n,k}^a}$ .

Par conséquent, en faisant  $n = k$  dans (2.4), on obtient que les valeurs des différentes inductances propres sur les branches sont toutes identiques ainsi que celles sur les anneaux terminaux. Autrement dit,

$$\begin{cases} \forall 1 \leq n, k \leq N, L_{n,n}^b = L_{k,k}^b, \\ \forall 1 \leq n, k \leq N, L_{n,n}^a = L_{k,k}^a. \end{cases}$$

Maintenant que l'on a introduit les différentes notations et hypothèses de travail, on va établir les équations satisfaites par les différentes inconnues.

Tout d'abord, on va réduire le nombre d'inconnues grâce à la loi des nœuds de Kirchhoff. En l'appliquant aux nœuds situés aux extrémités des branches, on obtient les relations suivantes :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \forall 1 \leq n \leq N, I_n^b = I_{n-1} - I_n, \\ \forall 1 \leq n \leq N, I_n^b = J_{n-1} - J_n. \end{cases}$$

À partir de la relation  $I_n - I_{n-1} = J_n - J_{n-1}$ , on déduit par récurrence les égalités suivantes :

$$(2.6) \quad \forall 1 \leq n \leq N, J_n = J_1 - I_1 + I_n.$$

On a donc réduit le nombre d'inconnues à  $N + 1$ , à savoir  $I_1, \dots, I_N, J_1$ , grâce à la loi des nœuds de Kirchhoff (on rappelle que  $\omega$  est un paramètre dans cette étude).

Afin de déterminer les équations satisfaites par ces  $N + 2$  inconnues, on va utiliser la loi des mailles de Kirchhoff.

La tension aux bornes de la bobine  $L_{n,n}^a$  située sur le segment  $[AB]$  est la somme des tensions produites par son inductance propre et les inductances mutuelles des autres bobines. Comme on l'a expliqué au niveau de la formule de Neumann (voir (2.3)), les branches et les anneaux étant orthogonaux, il n'y a pas d'inductance mutuelle entre les bobines des branches et celles des anneaux. Les inductances mutuelles proviennent donc des autres bobines situées sur le même anneau et de celles situées sur l'anneau terminal du bas.

Compte tenu du signe de la pulsation  $\omega$ , la tension produite par l'inductance propre sur l'élément d'anneau  $n$  est :

$$U_1 = -i\omega L_{n,n}^a I_n.$$

La tension produite par les inductances mutuelles avec les bobines du même anneau vaut :

$$U_2 = -i\omega \sum_{k \neq n} L_{n,k}^a I_k.$$

Compte tenu de l'orientation choisie pour les courants, la tension produite aux bornes de  $L_{n,n}^a$  par les bobines de l'anneau du bas s'écrit :

$$U_3 = i\omega \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a} J_k.$$

La tension aux bornes de  $L_{n,n}^a$  est donc :

$$U_1 + U_2 + U_3 = -i\omega \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a I_k - \overline{L_{n,k}^a} J_k).$$

On détermine de même la tension aux bornes de chaque bobine.

Par ailleurs, la tension aux bornes d'une capacité  $C$  traversée par un courant  $I$  est donnée par :  $-\frac{1}{i\omega C} I$ .

La loi des mailles de Kirchhoff dans la maille  $n$  de sommets  $BADC$  (voir figure 4) conduit donc à la relation suivante :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & -i\omega \sum_{k=1}^N L_{n,k}^a I_k + i\omega \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a} J_k + R^a I_n - \frac{1}{i\omega C^a} I_n - V_n \\ & - \left[ -i\omega \sum_{k=1}^N L_{n,k}^b I_k^b + R^b I_n^b - \frac{1}{i\omega C^b} I_n^b + E_n \right] \\ & - i\omega \sum_{k=1}^N L_{n,k}^a J_k + i\omega \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a} I_k + R^a J_n - \frac{1}{i\omega C^a} J_n - W_n \\ & - i\omega \sum_{k=1}^N L_{n+1,k}^b I_k^b + R^b I_{n+1}^b - \frac{1}{i\omega C^b} I_{n+1}^b + E_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

La loi des mailles de Kirchhoff dans les anneaux terminaux du haut et du bas conduit respectivement à :

$$(2.8) \quad \sum_{n=1}^N \left[ -i\omega \sum_{k=1}^N L_{n,k}^a I_k + i\omega \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a} J_k + R^a I_n - \frac{1}{i\omega C^a} I_n - V_n \right] = 0$$

et

$$(2.9) \quad \sum_{n=1}^N \left[ -i\omega \sum_{k=1}^N L_{n,k}^a J_k + i\omega \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a} I_k + R^a J_n - \frac{1}{i\omega C^a} J_n - W_n \right] = 0.$$

Grâce à la loi des mailles, on a obtenu un système de  $N + 2$  équations (2.7) - (2.9).

D'autre part, on vérifie que l'équation (2.9) découle de (2.7) et (2.8). En effet, si on reporte l'équation (2.7) dans (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^N \left[ -i\omega \sum_{k=1}^N L_{n,k}^a J_k + i\omega \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a} I_k + R^a J_n - \frac{1}{i\omega} \frac{J_n}{C^a} - W_n \right] \\
& - i\omega \sum_{n=1}^N \left( \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b) I_k^b \right) + \left( R^b - \frac{1}{i\omega C^b} \right) \sum_{n=1}^N (I_n^b - I_{n+1}^b) \\
& + \sum_{n=1}^N (E_n - E_{n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Comme tous les indices sont exprimés modulo  $N$ , les trois dernières sommes de l'équation ci-dessus sont nulles et on retrouve l'équation (2.9) obtenue pour l'anneau terminal du bas.

On a donc obtenu, grâce à la loi des mailles,  $N + 1$  équations pour les inconnues  $I_1, \dots, I_N, J_1, \dots, J_N, I_1^b, \dots, I_N^b$  et le paramètre  $\omega$  auxquelles s'ajoutent les relations (2.5) et (2.6). On vérifiera dans la section 3.2 que ces  $N + 1$  équations sont indépendantes.

On va maintenant substituer les inconnues  $I_1, \dots, I_N$  et  $J_1$  aux différentes inconnues  $J_2, \dots, J_N$  et  $I_1^b, \dots, I_N^b$ . Pour cela, on reporte les relations (2.5) et (2.6) dans les équations (2.7) et (2.8).

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad \forall 1 \leq n \leq N, \quad & -2i\omega \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) I_k + 2 \left[ R^a - \frac{1}{i\omega} \frac{1}{C^a} \right] I_n - (V_n + W_n) \\
& + \left[ -i\omega \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) + R^a - \frac{1}{i\omega C^a} \right] (J_1 - I_1) \\
& - i\omega \sum_{k=1}^N (L_{n+1,k}^b - L_{n,k}^b) (I_{k-1} - I_k) \\
& + \left[ R^b - \frac{1}{i\omega} \frac{1}{C^b} \right] (2I_n - I_{n-1} - I_{n+1}) - (E_n - E_{n+1}) = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad & -i\omega \sum_{n=1}^N \left( \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) \right) I_k + i\omega \left[ \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a} \right] (J_1 - I_1) \\
& + \left( R^a - \frac{1}{i\omega C^a} \right) \sum_{n=1}^N I_n - \sum_{n=1}^N V_n = 0.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N (L_{n+1,k}^b - L_{n,k}^b) I_{k-1} &= (L_{n+1,1}^b - L_{n,1}^b) I_0 + \sum_{k=2}^N (L_{n+1,k}^b - L_{n,k}^b) I_{k-1} \\
&= (L_{n+1,N+1}^b - L_{n,N+1}^b) I_N + \sum_{k=1}^{N-1} (L_{n+1,k+1}^b - L_{n,k+1}^b) I_k \\
&= \sum_{k=1}^N (L_{n+1,k+1}^b - L_{n,k+1}^b) I_k,
\end{aligned}$$

l'équation (2.10) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad \forall 1 \leq n \leq N, \quad & -2i\omega \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) I_k + 2 \left[ R^a + R^b - \frac{1}{i\omega} \left( \frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b} \right) \right] I_n \\
& - \left( R^b - \frac{1}{i\omega C^b} \right) (I_{n-1} + I_{n+1}) \\
& + \left[ -i\omega \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) + R^a - \frac{1}{i\omega C^a} \right] (J_1 - I_1) \\
& - i\omega \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b) I_k \\
& = (E_n - E_{n+1}) + (V_n + W_n).
\end{aligned}$$

En multipliant le système (2.11), (2.12) par  $i\omega$ , le système satisfait par les inconnues  $I_1, \dots, I_N, J_1$  s'écrit finalement :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\forall 1 \leq n \leq N, \\
\omega^2 \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] I_k \\
+ 2i\omega(R^a + R^b)I_n + \left(-i\omega R^b + \frac{1}{C^b}\right) (I_{n-1} + I_{n+1}) \\
- 2 \left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b}\right) I_n + \left[\omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a}\right] (J_1 - I_1) \\
= -i\omega(E_{n+1} - E_n) + i\omega(V_n + W_n), \\
\omega^2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) I_k - \omega^2 \left[\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \overline{L_{n,k}^a}\right] (J_1 - I_1) \\
- \left(-i\omega R^a + \frac{1}{C^a}\right) \sum_{n=1}^N I_n \\
= i\omega \sum_{n=1}^N V_n.
\end{array} \right.$$

Pour écrire le système (2.13) sous forme matricielle, on introduit les matrices carrées d'ordre  $N$  suivantes :

– la matrice  $L$  relative aux inductances (mutuelles et propres) est définie par :

$$\forall 1 \leq n, k \leq N, L_{n,k} = L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}),$$

– la matrice  $C$  relative aux capacités est définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b}\right) & -\frac{1}{C^b} & 0 & \cdots & -\frac{1}{C^b} \\ -\frac{1}{C^b} & 2\left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b}\right) & -\frac{1}{C^b} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{C^b} & 2\left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b}\right) & -\frac{1}{C^b} \\ -\frac{1}{C^b} & \cdots & 0 & -\frac{1}{C^b} & 2\left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b}\right) \end{pmatrix},$$

– celle relative aux résistances,  $R$ , est définie par :

$$R = \begin{pmatrix} 2(R^a + R^b) & -R^b & 0 & \cdots & -R^b \\ -R^b & 2(R^a + R^b) & -R^b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -R^b & 2(R^a + R^b) & -R^b \\ -R^b & \cdots & 0 & -R^b & 2(R^a + R^b) \end{pmatrix}.$$

Les  $N$  premières équations de (2.13) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} & \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \\ \vdots \\ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{N,k}^a - \overline{L_{N,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \end{pmatrix} (J_1 - I_1) \\ & = -i\omega \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} V_1 + W_1 \\ \vdots \\ V_N + W_N \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or, en utilisant les relations (2.4) vérifiées par les inductances mutuelles et la congruence modulo  $N$  des indices, on obtient :

$$(2.14) \quad \forall 1 \leq n \leq N, \sum_{k=1}^N L_{n,k}^a = \sum_{k=1}^N L_{k,n}^a = \sum_{k=1}^N L_{1,k}^a.$$

Grâce à la relation (2.14), le système (2.13) vérifié par  $I_1, \dots, I_N, J_1$  et le paramètre  $\omega$  s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(2.15) \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} \\ + \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \begin{pmatrix} J_1 - I_1 \\ \vdots \\ J_1 - I_1 \\ J_1 - I_1 \end{pmatrix} \\ = -i\omega \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} V_1 + W_1 \\ \vdots \\ V_N + W_N \end{pmatrix}, \\ N\omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) I_k - N\omega^2 \left[ \sum_{k=1}^N \overline{L_{1,k}^a} \right] (J_1 - I_1) - \left( -i\omega R^a + \frac{1}{C^a} \right) \sum_{n=1}^N I_n \\ = i\omega \sum_{n=1}^N V_n. \end{array} \right.$$

## 2.3 Calcul des inductances mutuelles

Afin de mener à bien l'étude du circuit électrique équivalent, on va avoir besoin de calculer les valeurs des inductances mutuelles  $L_{n,k}^b$ ,  $L_{n,k}^a$  et  $\overline{L_{n,k}^a}$ . Le but de cette section est de décrire la méthode employée pour évaluer la double intégrale volumique de la formule de Neumann (2.3).

Contrairement à [47] et [64], cette méthode est générale et permet de calculer aussi bien les différentes inductances relatives aux branches que celles relatives aux anneaux. Pour tester la validité de notre méthode, nous l'avons comparée avec les valeurs de [64] : les résultats obtenus sont rassemblés dans les tableaux 2.1 et 2.2 et montrent un très bon accord avec les valeurs mesurées.

Dans toute la suite, suivant [47] et [64], on supposera que les différents brins de l'antenne sont des plaques métalliques assemblées comme sur la figure 13 : les branches sont soudées à la moitié des anneaux terminaux. De plus, en première approximation, on supposera que les différents brins sont d'épaisseur négligeable (dans [47], les brins ont une épaisseur de  $35 \mu\text{m}$  pour une largeur de 1 cm).

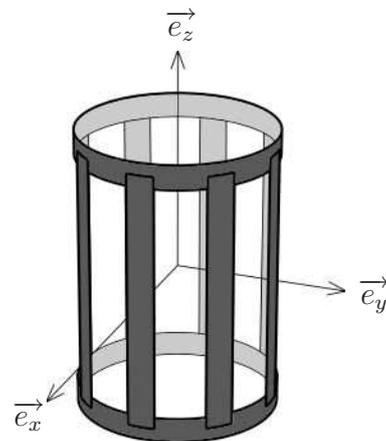


FIG. 13 – Configuration

Tout d'abord, on va expliquer la méthode de calcul de la formule de Neumann dans le cas des inductances  $L_{n,k}^b$ ,  $1 \leq n, k \leq N$ .

Comme les brins sont d'épaisseur négligeable, la double intégrale volumique de (2.3) est réduite à la double intégrale surfacique suivante :

$$(2.16) \quad L_{1,k}^b = \frac{\mu_0}{4\pi I_1 I_2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{\vec{J}_1(r) \cdot \vec{J}_2(r')}{|r - r'|} ds ds',$$

où  $ds$  et  $ds'$  sont les surfaces infinitésimales centrées en  $r$  et  $r'$ .

On suppose que les courants sont uniformément répartis dans les branches et on note  $w_b$  la largeur des branches.

Les expressions des vecteurs densité de courant sont alors :

$$\vec{J}_1(r) = \frac{I_1}{w_b} \vec{e}_z \text{ et } \vec{J}_2(r) = \frac{I_2}{w_b} \vec{e}_z.$$

On en déduit :

$$\frac{\vec{J}_1(r) \cdot \vec{J}_2(r')}{I_1 I_2} = \frac{1}{w_b^2}.$$

Les branches étant soudées aux anneaux, elles sont arrondies et les surfaces infinitésimales  $ds$  et  $ds'$  sont données par :

$$ds = R d\theta dz \text{ et } ds' = R d\theta' dz',$$

où  $R$  désigne le rayon de l'antenne.

Enfin, la distance  $|r - r'|$  entre deux points vaut :

$$|r - r'| = \sqrt{(R \cos \theta - R \cos \theta')^2 + (R \sin \theta - R \sin \theta')^2 + (z - z')^2}.$$

En reportant dans (2.16), on obtient :

$$(2.17) \quad L_{n,k}^b = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi w_b^2} \int_0^h \int_{\theta_n}^{\theta_n + w_b/R} \int_0^h \int_{\theta_k}^{\theta_k + w_b/R} \frac{d\theta d\theta' dz dz'}{\sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + (z - z')^2}}$$

où  $\theta_k = \frac{2(k-1)\pi}{N}$  et  $h$  désigne la longueur des branches de l'antenne.

Par intégrations successives en  $z$  puis  $z'$ , l'expression précédente se réduit à la double intégrale suivante :

$$(2.18) \quad L_{n,k}^b = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi w_b^2} \int_{\theta_n}^{\theta_n + w_b/R} \int_{\theta_k}^{\theta_k + w_b/R} \left[ 2\sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta'))} \right. \\ \left. - 2\sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + h^2} - h \ln \left( -h + \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + h^2} \right) \right. \\ \left. + h \ln \left( h + \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + h^2} \right) \right] d\theta d\theta'.$$

On va maintenant calculer les inductances mutuelles entre les arcs d'anneaux. Dans ce qui suit,  $L_{n,k}^{a,\bar{a}}$  est une expression générique pour désigner  $L_{n,k}^a$  et  $\overline{L_{n,k}^a}$ .

Par une méthode similaire à celle utilisée ci-dessus, la double intégrale surfacique (2.16) s'écrit maintenant :

$$(2.19) \quad L_{n,k}^{a,\bar{a}} = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi I_1 I_2} \int_0^{w_a} \int_{2(n-1)\pi/N}^{2n\pi/N} \int_Z^{Z+w_a} \int_{2(k-1)\pi/N}^{2k\pi/N} \frac{\vec{J}_1(r) \cdot \vec{J}_2(r') dz d\theta d\theta' dz'}{\sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + (z - z')^2}}$$

où  $w_a$  désigne la largeur des anneaux circulaires,  $Z = 0$  pour les inductances  $L_{n,k}^a$  et  $Z = L - w_a$  pour les inductances  $\overline{L_{n,k}^a}$ .

Contrairement au cas précédent les vecteurs densité de courant ne sont plus parallèles et le produit scalaire  $\vec{J}_1(r) \cdot \vec{J}_2(r')$  devient :

$$\frac{\vec{J}_1(r) \cdot \vec{J}_2(r')}{I_1 I_2} = \frac{\cos(\theta - \theta')}{w_b^2}.$$

En intégrant successivement (2.19) en  $z$  et  $z'$ , on obtient :

$$(2.20) \quad L_{n,k}^{a,\bar{a}} = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi w_a^2} \int_{2(n-1)\pi/N}^{2n\pi/N} \int_{2(k-1)\pi/N}^{2k\pi/N} \cos(\theta - \theta') \left[ 2\sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + Z^2} \right. \\ \left. - \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + (Z + w_a)^2} - \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + (Z - w_a)^2} \right. \\ \left. - 2Z \ln \left( Z + \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + Z^2} \right) \right. \\ \left. + (Z + w_a) \ln \left( Z + w_a + \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + (Z + w_a)^2} \right) \right. \\ \left. + (Z - w_a) \ln \left( Z - w_a + \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta - \theta')) + (Z - w_a)^2} \right) \right] d\theta d\theta'.$$

Il reste maintenant à évaluer les intégrales (2.18) et (2.20). Pour cela, on a utilisé une formule de Gauss exacte pour les polynômes de degré au plus sept. En effet, la méthode de quadrature de Gauss n'utilise pas les extrémités des intervalles d'intégration et permet donc d'éviter la singularité  $\theta = \theta' = 2\pi/N$  lorsque  $Z = 0$ , c'est-à-dire lors du calcul de  $L_{1,2}^a$ . De plus, afin d'éviter les singularités  $\theta = \theta'$  lorsque  $Z = 0$ , les subdivisions associées à  $\theta$  et  $\theta'$  sont décalées : si  $\beta$  est le nombre de subdivisions associées à la première intégrale en  $\theta$ ,  $\gamma = \beta + 1$  sera celui de la seconde. Afin d'avoir une seule méthode pour le calcul des trois inductances mutuelles (2.18), (2.20) avec  $Z = 0$  et (2.20) avec  $Z = L - w_a$ , on a pris la même méthode de quadrature pour le calcul de l'intégrale double (2.18).

Pour estimer l'erreur commise lors du calcul des intégrales de Neumann, on a appliqué la méthode décrite précédemment pour déterminer l'inductance propre d'une plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable. En effet, si on note  $w$  sa largeur et  $l$  sa longueur, on peut intégrer explicitement l'intégrale quadruple issue de la

formule de Neumann et obtenir une expression analytique de l'inductance propre  $M$  de la plaque rectangulaire (voir [60]) :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi w^2} \left[ \frac{(x-x')(z-z')}{2} ((x-x') \ln[(z-z') + \varrho] + (z-z') \ln[(x-x') + \varrho]) - \frac{(x-x')(z-z')[(x-x') + (z-z')]}{4} - \frac{\varrho^3}{6} \right] \Big|_{x'=-w/2}^{w/2} \Big|_{z'=-l/2}^{l/2} \Big|_{x=-w/2}^{w/2} \Big|_{z=-l/2}^{l/2}$$

où  $\varrho = \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}$ .

Pour réaliser les calculs, on a pris comme valeurs  $l = 12$  cm,  $w = 1$  cm. Le graphique de la figure 15 représente l'erreur relative en pourcent entre la valeur exacte et la méthode de Gauss pour  $\beta$  variant de 10 à 100.

On vérifie que l'inductance propre est très bien approchée dès que  $\beta \geq 70$ . Pour tous les calculs qui suivent on a donc pris  $\beta = 100$ .

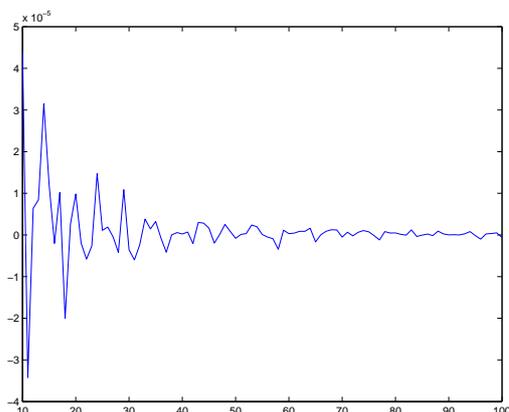


FIG. 14 – Courbe d'erreur

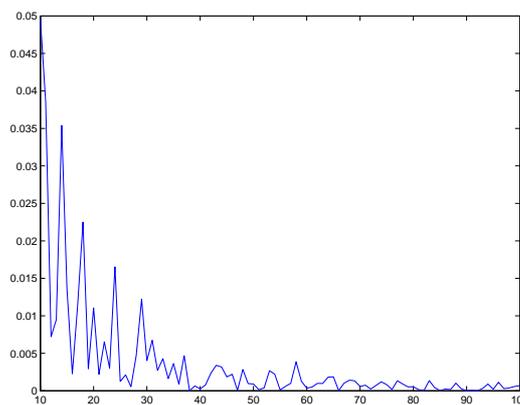


FIG. 15 – Erreur relative

Outre le fait de diminuer sensiblement le temps de calcul en réduisant la double intégrale volumique de la formule de Neumann à une intégrale double, la méthode décrite ci-dessus présente l'avantage de ne pas utiliser les formules approchées de [51], qui ne sont plus satisfaisantes lorsque le rapport longueur sur largeur n'est plus négligeable et de ne pas approcher les anneaux par leur corde. En effet, si on identifie l'arc compris entre les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  à sa corde et que l'on utilise la formule approchée de [51], l'erreur commise est de l'ordre de 10%.

Afin de tester notre méthode de calcul dans des cas réels, on a comparé les résultats obtenus dans les configurations étudiées dans [64].

Les caractéristiques de l'antenne étudiée sont :

$$(2.21) \quad \begin{cases} L = 12,8 \text{ cm}, R = 4,45 \text{ cm}, N = 16, \\ w_a = 1 \text{ cm}, w_b = 0,635 \text{ cm}. \end{cases}$$

On a regroupé dans le tableau 2.1 les résultats obtenus pour le calcul des inductances mutuelles, ceux obtenus par [64] ainsi que les valeurs mesurées dans le cas de l'antenne passe-bas et de l'antenne passe-haut (voir la remarque 3.4.6 pour la

terminologie utilisée). Pour faire les calculs, suivant la configuration géométrique de la figure 13 on a tout d'abord choisi  $h = L - w_a$ . Dans un second temps, on a utilisé  $L - 2w_a$  et on peut remarquer que les résultats sont alors meilleurs. Ceci peut s'expliquer par la mauvaise approximation au niveau des soudures entre les branches et les anneaux. Si  $h = L - w_a$ , on calcule deux fois l'inductance des soudures alors que l'épaisseur des deux plaques superposées reste négligeable. Il est donc plus réaliste d'identifier l'anneau avec les soudures à l'anneau seul et de prendre  $h = L - 2w_a$ .

Inductance	Mesurées (passe-bas, nH)	Mesurées (passe-haut, nH)	$L - w_a$ (nH)	$L - 2w_a$ (nH)	[64] (nH)
$L_{1,1}$	117	115	124,802	114,847	122
$L_{1,2}$	-36,4	-34,9	-39,286	-35,641	-38,1
$L_{1,3}$	-5,3	-5,3	-5,847	-5,218	-6,1
$L_{1,4}$	-2,3	-2,3	-2,354	-2,085	-2,3
$L_{1,5}$	-1,4	-1,3	-1,394	-1,238	-1,4
$L_{1,6}$	-0,9	-0,8	-1,013	-0,908	-1,0
$L_{1,7}$	-0,9	-0,8	-0,836	-0,758	-0,8
$L_{1,8}$	-0,7	-0,8	-0,730	-0,689	-0,8
$L_{1,9}$	-0,8	-0,8	-0,754	-0,669	-0,7

TAB. 2.1 – Antenne (2.21) : inductances mutuelles

Dans le tableau 2.2 on a indiqué les pourcentages d'erreur entre les valeurs calculées et les valeurs mesurées dans le cas du filtre passe-bas.

Inductance	Mesurées (passe-bas) (nH)	$L - w_a$ (%)	$L - 2w_a$ (%)	[64] (%)
$L_{1,1}$	117	6,668	1,840	4,273
$L_{1,2}$	-36,4	7,930	2,084	4,670
$L_{1,3}$	-5,3	10,321	1,551	15,094
$L_{1,4}$	-2,3	2,366	9,363	0,0
$L_{1,5}$	-1,4	0,424	11,536	0,0
$L_{1,6}$	-0,9	12,515	-0,950	11,111
$L_{1,7}$	-0,9	7,126	15,783	11,111
$L_{1,8}$	-0,7	7,739	1,565	14,286
$L_{1,9}$	-0,8	8,737	16,395	12,500

TAB. 2.2 – Antenne (2.21) : erreur relative

On voit sur le tableau 2.1 que, pour aller plus loin dans la modélisation de l'antenne cage d'oiseau et de ses inductances mutuelles, il faudrait rajouter des inductances au niveau des capacités afin de différencier les cas passe-bas et passe-haut. De plus, pour pouvoir comparer les résultats avec des antennes cages d'oiseau utilisées en IRM, il faudrait prendre en compte l'écran de protection placé tout autour

de l'antenne. Suivant [47], [60] et [64], cela revient à considérer des brins virtuels et calculer les inductances mutuelles en tenant compte de ceux-ci. On peut alors appliquer le même principe de calcul que précédemment afin d'obtenir une bonne approximation des inductances mutuelles en présence d'un écran protecteur.

## Chapitre 3

### Étude du circuit

Le chapitre 3 est consacré à la résolution du système linéaire (2.15) vérifié par les intensités des courants circulant dans l'antenne (pour la signification des notations, voir page 16). On va notamment montrer l'existence de pulsations de résonance et étudier quelques propriétés de ces pulsations ainsi que des courants associés.

#### 3.1 Reformulation du système linéaire

Afin de résoudre le système (2.15), on va le réécrire sous une forme différente afin d'obtenir une équation ne faisant apparaître comme inconnue que le terme  $J_1 - I_1$ .

Par sommation des  $N$  premières lignes du système (2.15) et soustraction à cette somme de deux fois la dernière ligne, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \omega^2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] I_k \\
& + N \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] (J_1 - I_1) \\
& - 2N \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) I_k + 2N \omega^2 \left[ \sum_{k=1}^N \overline{L_{1,k}^a} \right] (J_1 - I_1) \\
& = 2 \left[ -i\omega(R^a + R^b) + \left( \frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b} \right) \right] \sum_{n=1}^N I_n - \left( -i\omega R^b + \frac{1}{C^b} \right) \sum_{n=1}^N (I_{n-1} + I_{n+1}) \\
& - 2 \left( -i\omega R^a + \frac{1}{C^a} \right) \sum_{n=1}^N I_n - i\omega \sum_{n=1}^N (E_{n+1} - E_n) + i\omega \sum_{n=1}^N (V_n + W_n - 2V_n).
\end{aligned}$$

Après simplification des expressions, l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad & \omega^2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b] I_k \\
& + N \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] (J_1 - I_1) = i\omega \sum_{n=1}^N (W_n - V_n).
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & \sum_{n,k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b] I_k \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^b - L_{n,k+1}^b) - \sum_{n=1}^N (L_{n+1,k}^b - L_{n+1,k+1}^b) \right] I_k \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

En reportant dans (3.1), on obtient finalement :

$$(3.3) \quad \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] (J_1 - I_1) = -\frac{i\omega}{N} \sum_{n=1}^N (V_n - W_n).$$

Le système (2.15) est donc équivalent au système (3.4) suivant :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} \\
 & + \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \begin{pmatrix} J_1 - I_1 \\ \vdots \\ J_1 - I_1 \\ J_1 - I_1 \end{pmatrix} \\
 & = -i\omega \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} V_1 + W_1 \\ \vdots \\ V_N + W_N \end{pmatrix}, \\
 & \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] (J_1 - I_1) = -\frac{i\omega}{N} \sum_{n=1}^N (V_n - W_n).
 \end{aligned} \right.$$

Dans le système (3.4), les variables  $\omega, I_1, \dots, I_N, J_1$  sont considérées comme inconnues tandis que  $L, C, R, E_1, \dots, E_N, V_1, \dots, V_N$  et  $W_1, \dots, W_N$  sont des quantités que l'on sait caractériser. En liaison avec les applications physiques, on a choisi de ne considérer que les deux cas suivants :

- $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n,$
- $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n.$

Ces cas recouvrent les phénomènes décrits dans la littérature (voir page 40).

► **Premier cas :**  $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n.$

Dans ce cas, la dernière équation du système (3.4) s'écrit :

$$\left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] (J_1 - I_1) = 0.$$

Comme les inductances mutuelles, les capacités, les résistances et la pulsation sont réelles,

$$\Im \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] = \omega R^a \neq 0.$$

On a alors nécessairement  $J_1 = I_1$ .

Dans le premier cas, le système (3.4) est donc équivalent à :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 L \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + i\omega R \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\ \\ J_1 = I_1, \\ \forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n. \end{array} \right. = -i\omega \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + 2i\omega \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix},$$

► **Deuxième cas** :  $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n$ .

Dans ce cas, la dernière équation du système (3.4) ne permet pas d'obtenir directement une expression reliant  $J_1$  aux courants  $I_1, \dots, I_N$  : on va devoir modifier l'écriture de (3.4) pour la faire apparaître.

Si l'on somme les  $N$  premières équations du système (3.4) (compte tenu des manipulations précédentes cela revient à sommer (2.8) et (2.9)), on obtient :

$$\begin{aligned} & \omega^2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] I_k \\ & + 2i\omega(R^a + R^b) \sum_{n=1}^N I_n + \left(-i\omega R^b + \frac{1}{C^b}\right) \sum_{n=1}^N (I_{n-1} + I_{n+1}) - 2 \left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b}\right) \sum_{n=1}^N I_n \\ & + \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (J_1 - I_1) = -i\omega \sum_{n=1}^N (E_{n+1} - E_n). \end{aligned}$$

Comme les indices sont invariants modulo  $N$ , l'équation précédente s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} & \omega^2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] I_k \\ & - 2 \left[ -i\omega R^a + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n + \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (J_1 - I_1) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés (2.4) et (2.14) des inductances mutuelles, la double somme de l'équation précédente se réduit à :

$$\begin{aligned}
& \omega^2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] I_k \\
&= 2\omega^2 \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) I_k \right] \\
(3.6) \quad &= 2\omega^2 \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) \right] I_k \\
&= 2\omega^2 \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{n=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \right] I_k \\
&= 2\omega^2 \left( \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \right) \left( \sum_{k=1}^N I_k \right).
\end{aligned}$$

En reportant dans l'expression précédente, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
& 2 \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n \\
& \quad + \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (J_1 - I_1) = 0.
\end{aligned}$$

D'où, en utilisant l'expression (2.6) :

$$\left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (I_n + J_n) = 0.$$

Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, le terme entre crochets est non nul et on en déduit :

$$\sum_{n=1}^N (I_n + J_n) = 0.$$

En réutilisant la relation (2.6), l'équation ci-dessus conduit finalement à l'expression suivante reliant  $J_1$  aux différents courants  $I_j$ ,  $1 \leq j \leq N$  :

$$J_1 = I_1 - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n.$$

Dans le deuxième cas, le système (3.4) est donc équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} \\ + \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \begin{pmatrix} J_1 - I_1 \\ \vdots \\ J_1 - I_1 \\ J_1 - I_1 \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix}, \\ -2 \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n = -2i\omega \sum_{n=1}^N V_n, \\ J_1 = I_1 - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n, \\ \forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire,

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \tilde{L} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + i\omega \tilde{R} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} - \tilde{C} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix}, \\ -2 \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) + i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n = 2i\omega \sum_{n=1}^N V_n, \\ J_1 = I_1 - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n, \\ \forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n, \end{array} \right.$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq j, k \leq N, \tilde{L}_{j,k} = L_{j,k} - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}), \\ \forall 1 \leq j, k \leq N, \tilde{R}_{j,k} = R_{j,k} - \frac{2R^a}{N}, \\ \forall 1 \leq j, k \leq N, \tilde{C}_{j,k} = C_{j,k} - \frac{2}{NC^a}. \end{array} \right.$$

Par construction (voir page 22), les matrices  $R$  et  $C$  sont circulantes. D'autre part, d'après les propriétés des inductances mutuelles (voir (2.14)), la matrice  $L$  est aussi une matrice circulante. Les matrices  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{R}$  et  $\tilde{C}$  sont donc elles aussi des matrices circulantes.

En conclusion, la résolution du système (3.4) conduit, dans les deux cas considérés, à la résolution d'une équation linéaire pour les inconnues  $I_1, \dots, I_N$ . L'inconnue  $\omega$  est considérée comme un paramètre et les différentes matrices qui interviennent sont

circulantes (voir (3.5) et (3.7)). Pour une étude des propriétés des matrices circulantes, on pourra se reporter à l'annexe A. La section suivante est consacrée à la résolution de cette équation linéaire.

## 3.2 Phénomène de résonance

Pour résoudre les systèmes d'équations linéaires (3.5) et (3.7) auxquels a conduit le système (3.4), on va utiliser la propriété que les matrices circulantes sont toutes diagonalisables dans une même base notée  $\mathcal{B} = (C_0, \dots, C_{N-1})$  (voir (A.4) pour plus de détails).

► **Premier cas :**  $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n$ . On résout le système (3.5).

Les valeurs propres des matrices circulantes  $L$ ,  $R$  et  $C$  sont respectivement données par (voir le théorème A.2.1) :

$$(3.8) \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, \bullet \lambda_k^L = \sum_{m=0}^{N-1} L_{1,m+1} \exp\left(\frac{2ikm\pi}{N}\right),$$

$$\bullet \lambda_k^R = 2(R^a + R^b) - R^b w^k - R^b w^{k(N-1)}$$

$$= 2\left(R^a + R^b \left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right]\right) > 0$$

et

$$\bullet \lambda_k^C = 2\left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b}\right) - \frac{1}{C^b} w^k - \frac{1}{C^b} w^{k(N-1)}$$

$$= 2\left(\frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b} \left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right]\right) \geq 0.$$

On décompose les différents vecteurs étudiés dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k C_k, \quad \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_N \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k C_k \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k C_k.$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix} C_k$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^E \beta_k C_k$$

avec

$$(3.9) \quad \lambda_k^E = 1 - w^k = -2i \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right).$$

La pulsation  $\omega$  étant non nulle, les courants  $I_1, \dots, I_N$  vérifient l'équation linéaire (3.5) si et seulement si :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \forall 0 \leq k \leq N-1, (\omega^2 \lambda_k^L - \lambda_k^C + i\omega \lambda_k^R) \alpha_k = -i\omega (\lambda_k^E \beta_k - 2\gamma_k) \\ & \iff \forall 0 \leq k \leq N-1, \left[ \lambda_k^R - i \left( \omega \lambda_k^L - \frac{\lambda_k^C}{\omega} \right) \right] \alpha_k = -\lambda_k^E \beta_k + 2\gamma_k. \end{aligned}$$

La pulsation  $\omega$  étant réelle et  $\lambda_k^R > 0$ , le coefficient devant  $\alpha_k$  est non nul et la relation (3.10) est équivalente à :

$$(3.11) \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, \alpha_k(\omega) = \frac{-\lambda_k^E \beta_k + 2\gamma_k}{\lambda_k^R - i \left( \omega \lambda_k^L - \frac{\lambda_k^C}{\omega} \right)}.$$

D'où :

$$(3.12) \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, |\alpha_k(\omega)|^2 = \frac{|-\lambda_k^E \beta_k + 2\gamma_k|^2}{(\lambda_k^R)^2 + \left( \omega \lambda_k^L - \frac{\lambda_k^C}{\omega} \right)^2}.$$

Afin de poursuivre l'étude du phénomène de résonance, on va admettre pour l'instant le résultat suivant concernant les valeurs propres de la matrice  $L$  :

$$(3.13) \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, \lambda_k^L \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_k^L > 0.$$

Ce résultat sera étudié dans la section 3.4.2 suivante.

Comme les valeurs propres de la matrice  $L$  sont strictement positives, le dénominateur de (3.12) est minimal pour les pulsations  $\omega$  vérifiant  $\omega^2 = \omega_k^2$  où la pulsation  $\omega_k$  est définie par :

$$(3.14) \quad \omega_k = \sqrt{\frac{\lambda_k^C}{\lambda_k^L}} = \sqrt{\frac{2}{\lambda_k^L} \left( \frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2k\pi}{N} \right) \right] \right)}.$$

La figure 5 représente la variation du module de  $\alpha_k$  pour des coefficients  $\beta_k = 0$  et  $\gamma_k = 1$  en fonction de la pulsation  $\omega$  des sources de tension : pour tout  $k$ , on observe un pic pour  $\omega = \omega_k$ . On dit qu'il y a résonance à la pulsation  $\omega = \omega_k$ .

Les caractéristiques  $L, R, N, w_a$  et  $w_b$  de l'antenne sont données par (2.21). On a pris

$$C^a = 180 \text{ pF et } C^b = 0 \text{ pF.}$$

Les valeurs des  $2\pi\omega_k$  sont données dans le tableau (3.3).

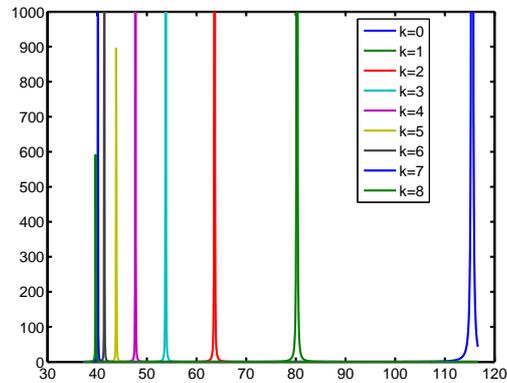


FIG. 5 – Variation de  $|\alpha_k|$  en fonction de  $\omega$

Pour observer le phénomène de résonance, il faut que le numérateur de (3.12) soit non nul et que le terme  $\lambda_k^R$  soit petit.

Concernant le numérateur, comme  $\lambda_0^E = 0$ , on doit avoir  $\gamma_0$  non nul lorsque  $k = 0$ . Cela signifie qu'il faut nécessairement alimenter les anneaux terminaux alors que ce n'est pas indispensable pour les autres pulsations  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ .

D'après l'expression de  $\lambda_k^R$  (voir (3.8)), son ordre de grandeur est donné par la résistance des brins métalliques de l'antenne. Or, on a mentionné dans l'introduction que les métaux utilisés sont choisis de façon à la minimiser (voir le chapitre 5 pour des valeurs numériques). On est donc dans les bonnes conditions pour observer un phénomène de résonance.

En conclusion, il existe deux types de pulsations dans le premier cas :

- soit la pulsation  $\omega$  vérifie la relation (3.14), et dans ce cas on observe un phénomène de résonance des tensions source,
- soit la pulsation  $\omega$  ne vérifie pas la relation (3.14), et alors les courants associés ne sont pas amplifiés.

► **Deuxième cas :**  $\forall 1 \leq n \leq N$ ,  $V_n = -W_n$ . On résout le système (3.7).

Les arguments et techniques employés dans ce cas sont similaires à ceux utilisés dans le premier cas.

Dans un premier temps, on va déterminer la pulsation de résonance associée à la composante  $\alpha_0$ .

En reprenant la définition des vecteurs  $C_k$ , on obtient :

$$\sum_{n=1}^N I_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k w^{kn} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \sum_{n=0}^{N-1} w^{kn} = N\alpha_0.$$

De même,  $\sum_{n=1}^N V_n = N\gamma_0$ .

En reportant ces deux relations dans la deuxième relation du système (3.7), on a :

$$(3.15) \quad \begin{aligned} & -2N \left[ \omega^2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) - i\omega R^a - \frac{1}{C^a} \right] \alpha_0(\omega) = 2i\omega N\gamma_0 \\ \iff & \left[ R^a - i \left( \omega \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) - \frac{1}{\omega C^a} \right) \right] \alpha_0(\omega) = \gamma_0. \end{aligned}$$

Comme dans le cas précédent, on va donc avoir un phénomène de résonance de la composante  $\alpha_0$  aux pulsations  $\omega$  vérifiant  $\omega^2 = \omega_{CR}^2$  où  $\omega_{CR}$  est définie par :

$$(3.16) \quad \omega_{CR} = \sqrt{\frac{1}{C^a \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a})}}.$$

**Remarque 3.2.1 : retour sur  $\omega_0$** 

On peut remarquer que cette formule est très voisine de celle donnant  $\omega_0$ . En effet, en utilisant les expressions des valeurs propres des matrices  $L$  et  $C$ , on montre que :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C^a \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a})}}$$

Dans toute la suite, on retrouvera que les champs magnétiques oscillants aux pulsations  $\omega_{CR}$  et  $\omega_0$  ont des propriétés communes que ne possèdent pas les autres champs magnétiques. Ainsi, pour observer la résonance à la pulsation  $\omega_{CR}$ , il faut, comme pour  $\omega_0$ , alimenter les anneaux terminaux alors que les sources de tensions sur les branches n'ont pas d'influence.

On va maintenant déterminer les pulsations de résonance associées aux composantes  $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ .

En utilisant la première équation du système (3.7), on obtient :

$$(3.17) \quad \forall 0 \leq k \leq N-1, (\omega^2 \lambda_k^{\tilde{L}} + i\omega \lambda_k^{\tilde{R}} - \lambda_k^{\tilde{C}}) \alpha_k = -i\omega \lambda_k^E \beta_k.$$

Comme la somme des racines de l'unité est nulle et que le coefficient retranché aux matrices tildées est la somme de leurs lignes, les valeurs propres des matrices  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{R}$  et  $\tilde{C}$  sont données par :

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, \begin{cases} \lambda_k^{\tilde{L}} = (1 - \delta_{0,k}) \lambda_k^L, \\ \lambda_k^{\tilde{R}} = (1 - \delta_{0,k}) \lambda_k^R, \\ \lambda_k^{\tilde{C}} = (1 - \delta_{0,k}) \lambda_k^C. \end{cases}$$

Comme  $\lambda_0^E = 0$ , la relation (3.17) est équivalente à :

$$(3.18) \quad \forall 1 \leq k \leq N-1, (\omega^2 \lambda_k^L + i\omega \lambda_k^R - \lambda_k^C) \alpha_k = -i\omega \lambda_k^E \beta_k.$$

On retrouve alors la relation (3.10) et donc les pulsations de résonance  $\omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ .

Réciproquement, on vérifie que tout vecteur dont les composantes dans la base  $\mathcal{B}$  vérifient les relations (3.15) et (3.18) est solution du système (3.7).

**Remarque 3.2.2 : généralisation**

On aurait pu faire l'étude précédente dans les cas plus généraux  $\sum_{n=1}^N (V_n - W_n) = 0$

$$\text{et } \sum_{n=1}^N (V_n + W_n) = 0.$$

En conclusion, on peut dire qu'il existe, pour les deux cas considérés,  $N$  pulsations de résonance permettant d'amplifier les composantes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$  des tensions

d'entrée. Parmi ces  $2N$  pulsations,  $N - 1$  sont communes (il s'agit de  $\omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ ) et les deux autres sont spécifiques à chaque cas :  $\omega_0$  dans le premier cas et  $\omega_{CR}$  dans le deuxième.

Ce phénomène de résonance permet de produire des intensités relativement élevées dans l'antenne sans avoir à fournir de tensions d'entrée élevées ; il est utilisé lors des applications RMN. Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux champs magnétiques produits par l'antenne pour des tensions d'entrée oscillant à ces pulsations de résonance.

De plus, le phénomène de résonance associée à la pulsation  $\omega_{CR}$  (respectivement  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ ) ne faisant intervenir que la composante suivant  $C_0$  (respectivement  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ ) des sources de tension, on supposera par la suite que celles-ci sont proportionnelles à  $C_0$  (respectivement  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ ). Les courants engendrés seront donc, eux-aussi, proportionnels à  $C_0$  (respectivement  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$ ). En particulier, pour  $\omega = \omega_{CR}$  et  $\omega = \omega_0$ , il n'y aura pas de courant à circuler dans les branches.

Les situations étudiées par la suite sont donc :

- $\omega = \omega_{CR}, E_1 = \dots = E_N = 0$  et  $V_1 = \dots = V_N = -W_1 = \dots = -W_N = \beta \in \mathbb{C}$ ,
- $\omega = \omega_0, E_1 = \dots = E_N = 0$  et  $V_1 = \dots = V_N = W_1 = \dots = W_N = \beta \in \mathbb{C}$ ,
- $\omega = \omega_k, 1 \leq k \leq N - 1$ , les vecteurs  $(E_1, \dots, E_N)$  et  $(V_1, \dots, V_N) = (W_1, \dots, W_N)$  sont proportionnels aux vecteurs  $C_k$ .

### Remarque 3.2.3 : à propos des résistances

On déduit de la résolution précédente que la seule solution de l'équation homogène associée aux équations (3.5) et (3.7) est la solution nulle. Cela signifie qu'il n'y a pas de courants pouvant circuler dans l'antenne cage d'oiseau sans un apport d'énergie. Ceci est dû au fait que l'on a pris en compte les résistances électriques des brins métalliques et donc introduit des pertes d'énergie par effet Joule au niveau de celles-ci.

Si on ne prend pas en compte la résistance des brins métalliques, l'équation homogène à résoudre est un problème aux valeurs propres avec des matrices circulantes. Sa résolution (voir la proposition A.2.4 page 226) conduit aux pulsations de résonance  $\omega_k, k = 0, \dots, N - 1$  et à des courants associés proportionnels à  $C_k$ . Contrairement au cas avec résistance, il existe donc des solutions n'ayant pas besoin d'énergie pour exister.

L'absence de résistance amplifie le phénomène de résonance : en effet, dans ce cas, l'équation (3.10) s'écrit :

$$(3.19) \quad \forall 0 \leq k \leq N - 1, i \left( \omega \lambda_k^L - \frac{\lambda_k^C}{\omega} \right) \alpha_k(\omega) = -\lambda_k^E \beta_k + 2\gamma_k.$$

Donc, si  $\omega = \omega_k$ , on doit avoir  $-\lambda_k^E \beta_k + 2\gamma_k = 0$  alors que  $\alpha_k(\omega_k)$  est indéterminée. De plus, on a :

$$|\alpha_j| = \frac{|-\lambda_k^E \beta_k + 2\gamma_k|}{\left| \omega \lambda_k^L - \frac{\lambda_k^C}{\omega} \right|} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_k} +\infty.$$

Le "phénomène de résonance" est donc non borné et il faut imposer des conditions sur la tension source dans le cas sans résistance.

### 3.3 Calcul des fréquences de résonance

Cette section est la suite de la section 2.3 consacrée au calcul des inductances mutuelles. On va maintenant calculer les fréquences de résonance et comparer les valeurs obtenues avec celles de [47] et [64].

Dans [47], les caractéristiques de l'antenne considérée sont les suivantes :

$$(3.20) \quad \begin{cases} L = 12 \text{ cm}, R = 6,7 \text{ cm}, N = 8, \\ w_a = w_b = 1 \text{ cm}, \\ C^b = 2 \text{ nF}, C^a = 0 \text{ nF}. \end{cases}$$

On a regroupé dans le tableau 3.1 nos résultats obtenus pour le calcul des fréquences de résonance, ceux obtenus par [47] et [60], ainsi que les valeurs mesurées. Pour chaque fréquence, on a également indiqué le pourcentage d'erreur par rapport à celle mesurée. Comme dans la section 2.3, on a successivement utilisé  $h = L - w_a$  et  $h = L - 2w_a$  pour faire les calculs.

Mode	Mesurées (MHz)	$L - w_a$ (MHz)	Erreur (%)	$L - 2w_a$ (MHz)	Erreur (%)	[47] (MHz)	Erreur (%)	[60] (MHz)	Erreur (%)
1	8,081	7,901	2,226	8,095	0,178	8,259	2,203	9,290	14,961
2	12,075	11,734	2,819	12,187	0,928	12,044	0,257	12,383	2,551
3	13,875	13,955	3,030	14,036	1,161	13,695	1,297	13,718	1,131
4	14,475	13,455	3,588	14,574	0,686	14,174	2,079	14,475	2,501

TAB. 3.1 – Antenne (3.20) : fréquences

On a aussi calculé les fréquences de résonances associées dans le cas passe-haut et passe-bas de [64]. Les valeurs obtenues ainsi que les pourcentages d'erreur sont regroupés dans les tableaux 3.2 et 3.3. Pour le cas passe-bas, les valeurs des capacités sont :

$$(3.21) \quad C^a = 0 \text{ pF} \text{ et } C^b = 150 \text{ pF}.$$

Mode	Mesurées (MHz)	$L - w_a$ (MHz)	Erreur (%)	$L - 2w_a$ (MHz)	Erreur (%)	[64] (MHz)	Erreur (%)
0	0	0	0	0	0	0	0
1	24,1	23,584	2,139	24,248	0,614	23,7	1,660
2	37,4	36,318	2,892	37,724	0,868	36,5	2,406
3	45,9	44,432	3,198	46,303	0,878	44,7	2,614
4	51,9	50,083	3,501	52,262	0,698	50,5	2,698
5	56,1	54,087	3,588	56,478	0,674	54,6	2,674
6	58,8	56,797	3,406	59,328	0,898	57,5	2,211
7	60,4	58,376	3,350	60,988	0,973	59,2	1,987
8	61,0	58,896	3,449	61,533	0,874	59,7	2,131

TAB. 3.2 – Antenne (2.21) : fréquences dans le cas passe-bas

Pour le cas passe-haut, les valeurs des capacités sont :

$$(3.22) \quad C^a = 180 \text{ pF} \text{ et } C^b = 0 \text{ pF}.$$

Mode	Mesurées (MHz)	$L - w_a$ (MHz)	Erreur (%)	$L - 2w_a$ (MHz)	Erreur (%)	[64] (MHz)	Erreur (%)
0	114	115,487	1,305	115,487	1,305	116	1,754
1	79,1	78,034	1,347	80,230	1,428	78,3	1,011
2	63,2	61,261	3,069	63,632	0,684	61,5	2,690
3	53,5	51,624	3,506	53,798	0,557	51,9	2,991
4	47,7	45,719	4,153	47,709	0,018	46,1	3,354
5	44,0	41,989	4,569	43,846	0,351	42,4	3,636
6	41,6	39,683	4,607	41,451	0,351	40,2	3,365
7	40,3	38,420	4,665	40,139	0,400	39,0	3,226
8	39,9	38,017	4,719	39,720	0,452	38,6	3,258

TAB. 3.3 – Antenne (2.21) : fréquences dans le cas passe-haut

### 3.4 Quelques propriétés des pulsations et des courants

Pour finir ce chapitre, on étudie les propriétés des courants et des valeurs propres de la matrice  $L$ .

La section 3.4.1 passe en revue les différentes pulsations de résonance et détermine les courants associés à chacune d'elles.

Dans la section 3.4.2, on revient sur le résultat (3.13) admis lors de la résolution du système linéaire.

Enfin, on explique dans la remarque 3.4.6 l'appellation filtre passe-haut et filtre passe-bas rencontrée dans la littérature.

#### 3.4.1 Bilan

On a montré dans la section précédente qu'il existe, pour les configurations d'alimentation étudiées,  $N + 1$  pulsations de résonance (les fréquences sont obtenues en divisant par  $2\pi$ ) :

$$\omega_{CR}, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}.$$

D'après l'étude du problème aux valeurs propres, on peut séparer ces pulsations en trois groupes :

►  $\omega = \omega_{CR}$ .

Dans ce cas, on n'alimente que les anneaux terminaux et les sources de tension sont toutes les mêmes sur chaque arc d'un même anneau ainsi que d'un anneau à l'autre. Les courants résultant vérifient alors :

$$I_1 = \dots = I_N.$$

Autrement dit, le vecteur des intensités  $(I_1, \dots, I_N)$  est proportionnel au vecteur  $C_0 = (1, \dots, 1)$ .

Compte tenu de la relation liant  $J_1$  aux  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  (voir (3.7)), et de celle reliant les  $J_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  aux autres intensités (voir (2.6) page 18), on obtient :

$$J_1 = -I_1 = \dots = -I_N = J_2 = \dots = J_N.$$

D'après la relation donnant les courants circulant dans les branches (voir (2.5) page 18),  $I_1^b = \dots = I_N^b = 0$ .

Il n'y a donc pas de courant circulant dans les branches alors que les anneaux terminaux sont parcourus, compte tenu des orientations choisies, par un même courant.

►  $\omega = \omega_0$ .

Comme dans le cas précédent, on n'alimente que les anneaux terminaux. Les sources de tension sont toutes les mêmes sur chaque arc d'un même anneau mais de signes opposés d'un anneau à l'autre. Les courants obtenus vérifient :

$$I_1 = \dots = I_N.$$

Le vecteur des intensités  $(I_1, \dots, I_N)$  est donc, comme précédemment, proportionnel au vecteur  $C_0 = (1, \dots, 1)$ .

Compte tenu de la relation liant les  $J_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  aux autres intensités (voir (2.6) page 18) et du fait que  $J_1 = I_1$  (voir (3.5)), on obtient :

$$J_1 = I_1 = \dots = I_N = J_2 = \dots = J_N.$$

D'après la relation donnant les courants circulant dans les branches (voir (2.5) page 18),  $I_1^b = \dots = I_N^b = 0$ .

Il n'y a donc pas de courant circulant dans les branches alors que les anneaux terminaux sont parcourus, compte tenu des orientations choisies, par un courant de même intensité mais de sens opposé et non identique comme c'était le cas précédemment.

►  $\omega = \omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ .

D'après l'étude du circuit électrique, les sources de tension ainsi que les courants sont, à un coefficient multiplicatif près, des racines de l'unité. Plus précisément, le vecteur des intensités  $(I_1, \dots, I_N)$  est proportionnel au vecteur  $C_k$  (voir l'annexe A). Les tensions émises ainsi que les courants circulant dans deux branches consécutives sont déphasés d'un angle  $\frac{2k\pi}{N}$ . Par ailleurs, compte tenu de la relation liant les  $J_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  aux autres intensités (voir (2.6) page 18) et du fait que, dans les deux cas étudiés,  $J_1 = I_1$ , on obtient :

$$\forall 1 \leq j \leq N, I_j = J_j.$$

Autrement dit, compte tenu des orientations choisies, le courant circulant dans chaque arc d'anneau terminal du bas est l'opposé de celui circulant dans le même

arc de l'anneau terminal du haut.

Après ce récapitulatif des différentes pulsations de résonance, on va s'intéresser aux valeurs propres de la matrice  $L$ .

### 3.4.2 Étude des valeurs propres de $L$

Cette section est consacrée à l'étude du résultat énoncé en (3.13). Seule la partie du résultat rappelée dans la proposition 3.4.1 sera démontrée mathématiquement. En effet, le nombre de paramètres élevés et les expressions des valeurs propres rendent l'étude théorique du signe de celles-ci impossible. Leur positivité sera donc illustrée à l'aide de simulations numériques uniquement.

#### Proposition 3.4.1 : valeur propres de $L$

Soit  $L$  la matrice définie page 22.

Ses valeurs propres sont réelles et elles vérifient la relation de symétrie suivante :

$$\forall 1 \leq k \leq N - 1, \lambda_{N-k}^L = \lambda_k^L.$$

DÉMONSTRATION. Il est clair d'après la formule (3.8) que la première valeur propre  $\lambda_0^L$  est réelle.

D'après les propriétés (2.4) des inductances mutuelles, on a :

$$\forall 0 \leq j, k \leq N - 1, L_{j,k}^b = L_{j,-k+2j}^b = L_{j,N-k+2j}^b.$$

On en déduit que :

$$(3.23) \quad \forall 0 \leq m \leq N - 1, L_{1,m+1} = L_{1,N-(m+1)+2} = L_{1,N-m+1}.$$

En reportant dans l'expression des valeurs propres de  $L$  (voir page 34), on obtient :

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \forall 1 \leq k \leq N - 1, \lambda_{N-k}^L &= \sum_{m=0}^{N-1} L_{1,m+1} \exp\left(\frac{2i(N-k)m\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} L_{1,(N-m)+1} \exp\left(-\frac{2ikm\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} L_{1,(N-m)+1} \exp\left(\frac{2ik(N-m)\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{m=1}^N L_{1,m+1} \exp\left(\frac{2ikm\pi}{N}\right) \\ &= \lambda_k^L. \end{aligned}$$

Les inductances mutuelles étant réelles, les coefficients  $L_{1,m+1}$  le sont aussi et on a :

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \forall 1 \leq k \leq N - 1, \lambda_{N-k}^L &= \sum_{m=0}^{N-1} L_{1,m+1} \exp\left(\frac{2i(N-k)m\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} L_{1,m+1} \exp\left(-\frac{2ikm\pi}{N}\right) \\ &= \overline{\lambda_k^L}. \end{aligned}$$

En utilisant les résultats (3.24) et (3.25), on obtient finalement :

$$\forall 1 \leq k \leq N - 1, \lambda_k^L \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_{N-k}^L = \lambda_k^L.$$

■

On va maintenant étudier la deuxième partie de (3.13) concernant la stricte positivité des valeurs propres de la matrice  $L$ .

On fait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 3.4.2 :**

*La matrice  $L$  vérifie l'inégalité suivante :*

$$(3.26) \quad L_{1,1} > \sum_{m=2}^N |L_{1,m}|.$$

Alors, comme

$$\forall 0 \leq k \leq N - 1, \lambda_k^L = L_{1,1} + \sum_{m=2}^N L_{1,m} \cos\left(\frac{2k\pi(m-1)}{N}\right) \geq L_{1,1} - \sum_{m=2}^N |L_{1,m}|,$$

les valeurs propres de  $L$  sont strictement positives.

Dans toute cette étude on supposera que l'hypothèse 3.4.2 est vérifiée.

**Remarque 3.4.3 :**

*D'après les propriétés vérifiées par les inductances mutuelles, la matrice  $L$  est une matrice circulante. L'hypothèse 3.4.2 signifie donc que la matrice  $L$  est une matrice à diagonale strictement dominante.*

Comme l'expression des inductances mutuelles est compliquée (voir (2.3)), on ne va pas démontrer que l'hypothèse 3.4.2 est satisfaite mais la justifier à l'aide de simulations numériques basées sur des données utilisées dans la pratique.

Les vérifications numériques qui suivent ont été réalisées à partir de la méthode exposée dans la section 2.3 sur l'exemple (2.21). Comme les matrices obtenues sont circulantes et assez volumineuses, on n'a donné dans ce qui suit que la première ligne de chacune d'elle.

Les premières lignes des matrices d'inductance obtenues dans le cas de l'antenne de l'exemple (2.21) sont, en nH :

$$\begin{aligned} (L^a)_1 &= [6,7043, 2,0050, 0,6693, 0,2480, 0,0063, -0,1533, -0,2586, -0,3195, \\ &\quad -0,3395, -0,3195, -0,2586, -0,1533, 0,0063, 0,2480, 0,6693, 2,0050], \\ (\overline{L^a})_1 &= [0,2553, 0,2336, 0,1740, 0,0908, 0,0006, -0,0824, -0,1481, -0,1899, \\ &\quad -0,2043, -0,1899, -0,1481, -0,0824, 0,0006, 0,0908, 0,1740, 0,2336], \\ (L^b)_1 &= [87,4031, 36,4287, 24,6385, 19,0567, 15,8738, 13,9407, 12,7744, 12,1451, \\ &\quad 11,9459, 12,1451, 12,7744, 13,9407, 15,8738, 19,0567, 24,6385, 36,4287]. \end{aligned}$$

En combinant les trois matrices  $L^b$ ,  $L^a$  et  $\overline{L^a}$ , on obtient comme première ligne pour la matrice  $L$  :

$$(L)_1 = [114,8466, -35,6413, -5,2178, -2,0846, -1,2385, -0,9086, -0,7579, \\ -0,6890, -0,6688, -0,6890, -0,7579, -0,9086, -1,2385, -2,0846, \\ -5,2178, -35,6413].$$

On vérifie sur cette première ligne la relation de symétrie (3.23) des inductances mutuelles énoncée dans la démonstration de la proposition 3.4.1.

Mis à part le premier terme, tous les coefficients sont négatifs donc :

$$(3.27) \quad L_{1,1} - \sum_{m=2}^N |L_{1,m}| = \sum_{m=1}^N L_{1,m} = 2 \sum_{m=1}^N (L_{1,m}^a - \overline{L_{1,m}^a}).$$

Or, si on considère la différence  $L_1^a - \overline{L_1^a}$ , on constate que :

$$(3.28) \quad \sum_{m=1}^N (L_{1,m}^a - \overline{L_{1,m}^a}) = 10,5511 \times 10^{-9} > 0.$$

Donc, d'après la relation (3.27) et l'inégalité (3.28), l'hypothèse 3.4.2 est satisfaite sur cet exemple.

#### Remarque 3.4.4 : à propos de l'inégalité (3.28)

*Comme les bobines des différents anneaux sont identiques, et que la distance séparant la bobine de l'élément d'anneau du haut 1 et la bobine de l'élément d'anneau du bas  $m$  est plus grande que celle séparant la bobine de l'élément d'anneau du haut 1 et la bobine de l'élément d'anneau du haut  $m$ , il apparaît normal de supposer que l'inductance  $L_{1,m}^a$  est plus élevée en module que  $\overline{L_{1,m}^a}$ .*

*Par ailleurs, l'inductance propre de la bobine de l'élément d'anneau du haut 1 étant plus importante que l'inductance mutuelle entre les deux bobines des éléments d'anneaux du haut et du bas 1, on peut se convaincre que l'inégalité (3.28) est vraie dans tous les cas.*

Cette section a permis de montrer que la proposition 3.4.1 et l'hypothèse 3.4.2 assurent que les différentes pulsations de résonances introduites dans la section précédente (voir (3.14)) sont bien définies et que :

$$\forall 0 \leq k \leq N-1, \omega_{N-k} = \omega_k.$$

D'autre part, comme

$$(3.29) \quad \sum_{m=1}^N (L_{1,m}^a + \overline{L_{1,m}^a}) = 10,9671 \times 10^{-9} > 0,$$

la pulsation  $\omega_{CR}$  est elle aussi bien définie (voir (3.16)).

**Remarque 3.4.5 : formule d'inversion**

Dans ce qui précède, on a exprimé les pulsations de résonance de l'antenne en fonction des différentes inductances mutuelles. Afin de vérifier la justesse des valeurs des inductances mutuelles calculées à partir de la formule de Neumann (voir (2.3) page 17), on peut utiliser la formule d'inversion suivante (voir [64]) permettant d'exprimer les inductances mutuelles en fonction des pulsations de résonance que l'on peut mesurer expérimentalement :

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq p \leq N-1, L_{1,p+1} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^L \exp\left(-\frac{2ikp\pi}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{\omega_k^2} \left( \frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \right] \right) \exp\left(-\frac{2ikp\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

**Remarque 3.4.6 : terminologie**

Par analogie avec le filtre passif passe-bas (respectivement passe-haut) du premier ordre représenté sur la figure 9 (respectivement 10), l'antenne cage d'oiseau ne possédant des capacités que sur ses branches (respectivement ses anneaux) est appelée dans la littérature (voir [47], [53] et [64]) antenne passe-bas (respectivement passe-haut).

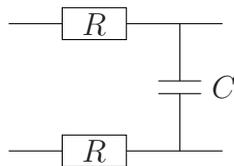


FIG. 9 – Filtre passe-bas

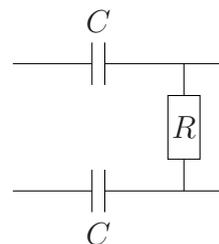


FIG. 10 – Filtre passe-haut

Cette appellation n'est plus valable lorsque l'on rajoute les bobines. En effet, le circuit obtenu à partir du filtre passe-bas reste un filtre passe-bas (voir la figure 11) tandis que le filtre passe-haut devient un filtre passe-bande (voir la figure 12).

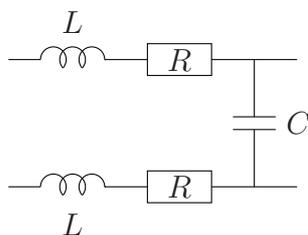


FIG. 11 – Filtre passe-bas

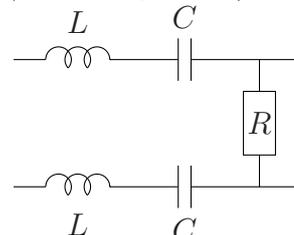


FIG. 12 – Filtre passe-bande



## Chapitre 4

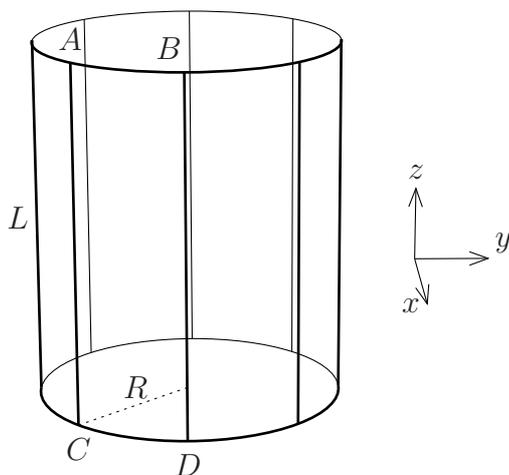
# Étude du champ magnétique radiofréquence

Le chapitre 4 est consacré à l'étude du champ magnétique produit par l'antenne cage d'oiseau pour les configurations décrites dans la section 3.4.1 (voir page 40). Ce champ est généralement appelé champ radiofréquence dans la littérature car sa pulsation se situe dans la gamme des ondes radio. Pour chaque configuration possible, le plan d'étude sera le même : après avoir déterminé l'expression mathématique du champ magnétique, on étudiera ses propriétés de symétrie, d'orthogonalité, d'homogénéité ainsi que sa décroissance à l'infini sur l'axe de l'antenne.

On va tout d'abord commencer par l'étude des champs magnétiques associés aux pulsations  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . Les cas  $\omega_0$  et  $\omega_{CR}$  seront traités dans les sections suivantes (voir les sections 4.10 page 92 et 4.11 page 100).

### 4.1 Formule générale

Les notations relatives à l'antenne sont les suivantes :



- $R$  désigne le rayon des anneaux terminaux,
- $L$  est la longueur des branches de l'antenne.

Les axes sont choisis de façon à ce que le centre de l'antenne ait pour coordonnées  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  et que l'anneau du haut ait une cote positive.

FIG. 16 – Notations

On oriente le repère de façon à ce que l'axe des  $x$  intersecte deux branches. Par convention, la première branche est celle dont la trace dans le plan  $xy$  est située

sur le demi-axe  $x > 0$ . On note  $\theta_j$  l'angle entre l'axe des  $x$  et la  $j$ -ième branche de l'antenne. Compte-tenu du choix de la première branche,  $\theta_1 = 0$  et, les autres branches étant équiréparties, l'angle  $\theta_j$  est donné par :

$$(4.1) \quad \forall 1 \leq j \leq N, \theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{N}.$$

Afin de déterminer l'expression du champ magnétique produit par les courants associés à la pulsation  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ , on va utiliser la loi de Biot-Savart rappelée ci-dessous.

### Loi de Biot-Savart :

Pour une orientation fixée du courant, le champ magnétique créé en un point  $M$  par un élément filiforme infinitésimal  $\vec{dl}$  centré en  $P$ , orienté suivant le sens du courant et parcouru par un courant d'intensité  $I$  est donné par :

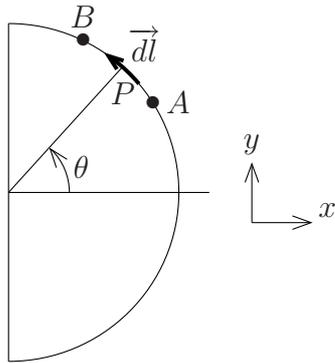
$$(4.2) \quad \vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \text{ où } \vec{r} = \overrightarrow{PM}.$$

### Remarque 4.1.1 : à propos de Biot-Savart

Concernant la validité de la loi de Biot-Savart et son rapport avec les équations de Maxwell, on pourra se référer à [17].

Dans tout la suite de cette étude, on supposera que le point de coordonnées  $(x, y, z)$  n'est pas situé sur un brin métallique. En effet, la loi de Biot-Savart n'est plus valide dans ce cas là car  $r = 0$ .

On va tout d'abord calculer le champ magnétique créé par le  $j$ -ième arc de cercle  $\widehat{AB}$  de l'anneau terminal du haut, c'est-à-dire celui compris entre les angles  $\theta_j$  et  $\theta_{j+1}$ . Pour cela, on introduit les quantités suivantes dans la formule (4.2) :



$$\begin{aligned} I &: I_j, \\ P &: (R \cos \theta, R \sin \theta, L/2), \\ M &: (x, y, z), \\ \vec{r} &: (x - R \cos \theta, y - R \sin \theta, z - L/2), \\ \vec{dl} &: (-R \sin \theta d\theta, R \cos \theta d\theta, 0). \end{aligned}$$

FIG. 17 – Arc de cercle

En reportant dans (4.2) et en intégrant, on obtient le champ magnétique créé au point  $M = (x, y, z)$  par le  $j$ -ième arc de cercle de l'anneau terminal du haut :

$$(4.3) \quad \vec{B}_{ah}^j = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} \times \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z - L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix}.$$

Comme les courants circulant dans l'anneau terminal du bas sont les opposés de ceux circulant dans l'anneau terminal du haut (voir page 41), le champ magnétique créé par le  $j$ -ième arc de cercle  $\widehat{CD}$  de l'anneau terminal du bas est obtenu en remplaçant  $I_j$  par  $-I_j$  et  $L/2$  par  $-L/2$ , soit :

$$(4.4) \quad \vec{B}_{ab}^j = -\frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \times \begin{pmatrix} (z + L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z + L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix}.$$

On va maintenant calculer le champ magnétique créé par la  $j$ -ième branche  $AC$ , c'est-à-dire celle située à l'angle  $\theta_j$ . Pour cela, on introduit les notations suivantes dans la formule (4.2) :

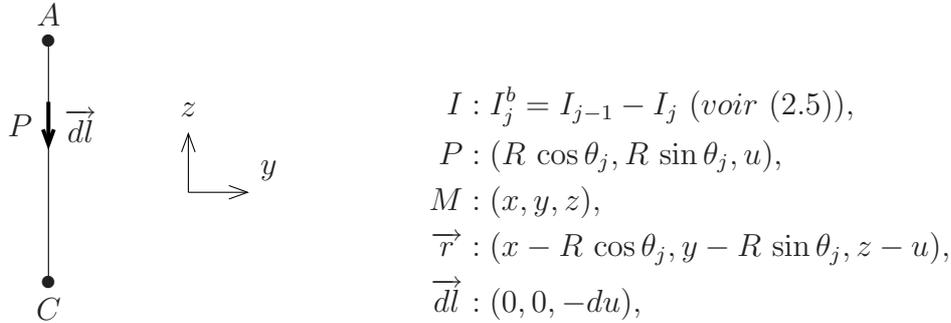


FIG. 18 – Branche

Le champ magnétique créé au point  $M = (x, y, z)$  par la  $j$ -ième branche est donc donné par la formule suivante que l'on peut intégrer explicitement :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \vec{B}_b^j &= \frac{\mu_0(I_{j-1} - I_j)}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{du}{[(x - R \cos \theta_j)^2 + (y - R \sin \theta_j)^2 + (z - u)^2]^{3/2}} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} y - R \sin \theta_j \\ -(x - R \cos \theta_j) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0(I_j - I_{j-1})}{4\pi} \frac{1}{(x - R \cos \theta_j)^2 + (y - R \sin \theta_j)^2} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} (y - R \sin \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ -(x - R \cos \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$(4.6) \quad a^2(\theta, Z) = (x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + (z - Z)^2.$$

Lorsque les tensions source oscillent à la pulsation  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ , le vecteur  $(I_1, \dots, I_N)$  des courants circulant dans l'anneau terminal du haut est proportionnel au vecteur  $C_k$  (voir page 41). On note  $\sqrt{N}I_0$  ce facteur de proportionnalité, de sorte que :

$$(4.7) \quad \forall 1 \leq j \leq N, I_j = I_0 \exp(ik\theta_j).$$

On déduit de l'expression (4.7) la relation suivante :

$$(4.8) \quad I_j - I_{j-1} = 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) I_j.$$

En reportant dans (4.5), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \vec{B}_b^j = & \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \frac{2i}{(x - R \cos \theta_j)^2 + (y - R \sin \theta_j)^2} \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \\ & \times \begin{pmatrix} (y - R \sin \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ -(x - R \cos \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le champ magnétique total créé au point  $M = (x, y, z)$  par l'antenne cage d'oiseau lorsqu'elle est parcouru par des courants de pulsation  $\omega_k$  est donc donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} & \vec{B}^k \\ & = \sum_{j=1}^N \vec{B}_{ah}^j + \vec{B}_{ab}^j + \vec{B}_b^j \\ & = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[a^2(\theta, L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z - L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. - \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[a^2(\theta, -L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z + L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z + L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \frac{1}{(x - R \cos \theta_j)^2 + (y - R \sin \theta_j)^2} \right. \\ & \quad \left. \times \begin{pmatrix} (y - R \sin \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ -(x - R \cos \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \exp(ik\theta_j) \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $\theta_j$  et  $a^2(\theta, Z)$  sont donnés par les formules (4.1) et (4.6).

Pour synthétiser l'écriture des expressions, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(x, y, z, Z, j) = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\sin \theta}{[a^2(\theta, Z)]^{3/2}} d\theta, \\ J_2(x, y, z, Z, j) = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\cos \theta}{[a^2(\theta, Z)]^{3/2}} d\theta, \\ J_3(x, y, z, Z, j) = \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{R}{[a^2(\theta, Z)]^{3/2}} d\theta. \end{array} \right.$$

On définit alors les sommes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_p(x, y, z, Z) = \sum_{j=1}^N J_p(x, y, z, Z, j) \exp(ik\theta_j), \quad p = 1, 2, 3, \\ S_1(x, y, z) = 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \sum_{j=1}^N \frac{(x - R \cos \theta_j)}{(x - R \cos \theta_j)^2 + (y - R \sin \theta_j)^2} \\ \quad \times \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \exp(ik\theta_j), \\ S_2(x, y, z) = 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \sum_{j=1}^N \frac{-(y - R \sin \theta_j)}{(x - R \cos \theta_j)^2 + (y - R \sin \theta_j)^2} \\ \quad \times \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \exp(ik\theta_j). \end{array} \right.$$

Par abus, on notera  $s_p(Z)$  au lieu de  $s_p(x, y, z, Z)$ , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Avec ces notations, le champ magnétique donné par la formule (4.9) s'écrit :

$$(4.10) \quad \vec{B}^k = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \begin{pmatrix} (z - L/2) R s_2(L/2) - (z + L/2) R s_2(-L/2) + S_2 \\ (z - L/2) R s_1(L/2) - (z + L/2) R s_1(-L/2) + S_1 \\ (-y s_1(L/2) - x s_2(L/2) + R s_3(L/2)) R \\ -(-y s_1(-L/2) - x s_2(-L/2) + R s_3(-L/2)) R \end{pmatrix}.$$

Le champ donné par la formule (4.10) n'est pas le champ réel. En effet, les courants électriques étant de la forme  $\Re(Ie^{-i\omega t})$ , le vrai champ magnétique est  $\Re(\vec{B}^k e^{-i\omega t})$ , soit :

$$(4.11) \quad \Re \left( \frac{\mu_0 I_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \begin{pmatrix} (z - L/2) R s_2(L/2) - (z + L/2) R s_2(-L/2) + S_2 \\ (z - L/2) R s_1(L/2) - (z + L/2) R s_1(-L/2) + S_1 \\ (-y s_1(L/2) - x s_2(L/2) + R s_3(L/2)) R \\ -(-y s_1(-L/2) - x s_2(-L/2) + R s_3(-L/2)) R \end{pmatrix} \right).$$

## 4.2 Méthode numérique

Afin d'avoir un algorithme de calcul adapté à la forme des intégrales apparaissant dans le champ magnétique, on va, suivant [32], écrire celles-ci en fonction des

intégrales elliptiques et utiliser des algorithmes spécifiques à ces intégrales (voir l'annexe B).

Les intégrales elliptiques ne vont intervenir que dans le calcul du champ magnétique produit par les arcs d'anneaux terminaux donc, dans un premier temps, on ne va regarder que les différentes composantes du champ magnétique créé par le  $j$ -ième arc de cercle  $\widehat{AB}$  de l'anneau terminal du haut, c'est-à-dire celui compris entre les angles  $\theta_j$  et  $\theta_{j+1}$ . On rappelle tout d'abord l'expression de celui-ci que l'on avait établie en (4.3) :

$$(4.12) \quad \vec{B}_{ah}^j = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[(x - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} \times \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \varphi d\varphi \\ (z - L/2) R \sin \varphi d\varphi \\ (-y \sin \varphi - x \cos \varphi + R) R d\varphi \end{pmatrix}.$$

Pour faire la décomposition en intégrales elliptiques, on va utiliser les coordonnées cylindriques. Pour cela, on pose les notations suivantes :

$$(4.13) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta = \begin{cases} -\arccos \frac{x}{r}, & \text{si } y < 0, \\ \arccos \frac{x}{r}, & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes du champ magnétique  $\vec{B}_{ah}^j$  au point  $(r, \theta, z)$  deviennent :

$$(4.14) \quad \vec{B}_{ah}^j(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[r^2 + R^2 + (z - L/2)^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)]^{3/2}} \times \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \varphi d\varphi \\ (z - L/2) R \sin \varphi d\varphi \\ (R - r \cos(\theta - \varphi)) R d\varphi \end{pmatrix}.$$

Afin d'écrire le dénominateur sous la forme  $1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi$  avec  $0 \leq \kappa \leq 1$ , on pose :

$$(4.15) \quad \begin{cases} \rho(r, z, Z) = \sqrt{(r + R)^2 + (z - Z)^2}, \\ \kappa(r, z, Z) = \frac{2\sqrt{rR}}{\rho(r, z, Z)}, \\ \Phi = \frac{\pi + \theta - \varphi}{2}. \end{cases}$$

Le champ magnétique devient alors :

$$(4.16) \quad \vec{B}_{ah}^j = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{-2R}{\rho^3 (1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \begin{pmatrix} (z - L/2) \cos(\theta - 2\Phi + \pi) d\Phi \\ (z - L/2) \sin(\theta - 2\Phi + \pi) d\Phi \\ (r + R - 2r \sin^2 \Phi) d\Phi \end{pmatrix}.$$

avec

$$(4.17) \quad \Phi_j = \frac{\pi + \theta - \theta_j}{2}.$$

On est maintenant en mesure de faire apparaître les intégrales elliptiques dans l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_{ah}^j$ .

On va tout d'abord s'intéresser à la composante suivant  $x$  du champ :

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad B_{ah,x}^j &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{2R(z - L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \cos(2\Phi - \theta) d\Phi \\
 &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \frac{2R(z - L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{\cos(2\Phi) \cos \theta + \sin(2\Phi) \sin \theta}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\
 &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \frac{2R(z - L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} [\sin \theta A(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1}) + \cos \theta B(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1})]
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases}
 A(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1}) = \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{\sin(2\Phi)}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi, \\
 B(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1}) = \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{\cos(2\Phi)}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi.
 \end{cases}$$

Dans toute la suite on supposera que l'hypothèse suivante est satisfaite.

#### Hypothèse 4.2.1 :

$\kappa \neq 1$ .

Ceci est justifié car le cas  $\kappa = 1$  correspond à un point  $P(x, y, z)$  situé sur les anneaux terminaux et l'on sait que l'approximation de Biot-Savart n'est plus valable dans ce cas. Lors de la mise en œuvre de l'algorithme, il faudra donc veiller à ce que le maillage n'ait pas d'arêtes sur les anneaux terminaux.

#### Proposition 4.2.2 : expression des intégrales $A$ et $B$

Soient  $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq \kappa < 1$ .

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad A(\kappa, \Phi_1, \Phi_2) &= \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{\sin(2\Phi)}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{\kappa^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} \right]_{\Phi_1}^{\Phi_2}, & \kappa \neq 0, \\ \left[ -\frac{\cos 2\Phi}{2} \right]_{\Phi_1}^{\Phi_2}, & \kappa = 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.20) \quad B(\kappa, \Phi_1, \Phi_2) &= \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{\cos(2\Phi)}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{\kappa^2} [F(\Phi, \kappa)]_{\Phi_1}^{\Phi_2} + \frac{(\kappa^2 - 2)}{\kappa^2} C(\kappa, \Phi_1, \Phi_2), & \kappa \neq 0, \\ [\sin \Phi \cos \Phi]_{\Phi_1}^{\Phi_2}, & \kappa = 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 (4.21) \quad C(\kappa, \Phi_1, \Phi_2) &= \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{1}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\
 &= \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1} \left[ \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} \right]_{\Phi_1}^{\Phi_2} - \frac{1}{\kappa^2 - 1} [E(\Phi, \kappa)]_{\Phi_1}^{\Phi_2},
 \end{aligned}$$

et  $F(\Phi, \kappa)$  et  $E(\Phi, \kappa)$  désignent les intégrales elliptiques du premier et du deuxième type définies en (B.2) et (B.4).

DÉMONSTRATION. Le calcul de l'expression de  $A(\kappa, \Phi_1, \Phi_2)$  est immédiat et laissé au lecteur ainsi que les cas particuliers  $A(0, \Phi_1, \Phi_2)$  et  $B(0, \Phi_1, \Phi_2)$ .

Pour obtenir (4.20) dans le cas  $\kappa \neq 0$ , on fait la manipulation suivante :

$$\begin{aligned}
 B(\kappa, \Phi_1, \Phi_2) &= \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{\cos(2\Phi)}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\
 &= \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{1 - 2 \sin^2 \Phi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\
 &= \frac{1}{\kappa^2} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{(2 - 2\kappa^2 \sin^2 \Phi) + (\kappa^2 - 2)}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\
 &= \frac{1}{\kappa^2} [2F(\Phi_2, \kappa) - 2F(\Phi_1, \kappa) + (\kappa^2 - 2)C(\kappa, \Phi_1, \Phi_2)].
 \end{aligned}$$

Pour  $C(\kappa, \Phi_1, \Phi_2)$ , on vérifie que :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\Phi} \left[ \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} \right] &= \frac{(1 - 2 \sin^2 \Phi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi} + \kappa^2 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} \\
 &= \frac{1 - 2 \sin^2 \Phi + \kappa^2 \sin^4 \Phi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on montre que :

$$\begin{aligned}
 \frac{\kappa^2 - 1}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi} &= \frac{\kappa^2 - 1 + (1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^2}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} \\
 &= \kappa^2 \frac{1 - 2 \sin^2 \Phi + \kappa^2 \sin^4 \Phi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

d'où, comme  $\kappa \neq 1$  :

$$\frac{1}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - 1} \frac{d}{d\Phi} \left[ \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} \right] - \frac{1}{\kappa^2 - 1} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}.$$

On en déduit (4.21) en intégrant entre  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ . ■

On obtient donc finalement :

$$(4.22) \quad B_{ah,x}^j = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \frac{2R(z - L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} [\mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_{j+1}) - \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j)]$$

avec

$$(4.23) \quad \mathcal{F}_x^a(\kappa, \Phi) = \begin{cases} \frac{2 \sin \theta}{\kappa^2 \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} + \frac{2 \cos \theta}{\kappa^2} F(\Phi, \kappa) \\ + \frac{(\kappa^2 - 2) \cos \theta}{\kappa^2 - 1} \left[ \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} - \frac{1}{\kappa^2} E(\Phi, \kappa) \right], & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \frac{1}{2} \sin(2\Phi - \theta), & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

La composante suivant  $x$  du champ magnétique total créé par l'anneau du haut au point  $(r, \theta, z)$  est donc :

$$\begin{aligned} B_{ah,x} &= \sum_{j=1}^N B_{ah,x}^j \exp(ik\theta_j) \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z - L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \sum_{j=1}^N [\mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_{j+1}) - \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j)] \exp(ik\theta_j) \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z - L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \left( \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_{N+1}) \exp(ik\theta_N) - \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^N \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) [\exp(ik\theta_{j-1}) - \exp(ik\theta_j)] \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z - L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \left( \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_{N+1}) \exp(ik\theta_N) - \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_1) \right. \\ &\quad \left. - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sum_{j=2}^N \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition B.1.2 et la relation

$$\Phi_{N+1} = \frac{\theta - \pi}{2} = \Phi_1 - \pi,$$

on obtient, pour  $\kappa \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_{N+1}) &= \frac{2 \sin \theta}{\kappa^2 \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(\Phi_1 - \pi)}} + \frac{2 \cos \theta}{\kappa^2} F(\Phi_1 - \pi, \kappa) \\ &\quad + \frac{(\kappa^2 - 2) \cos \theta}{\kappa^2 - 1} \left[ \frac{\sin(\Phi_1 - \pi) \cos(\Phi_1 - \pi)}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(\Phi_1 - \pi)}} - \frac{E(\Phi_1 - \pi, \kappa)}{\kappa^2} \right] \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\kappa^2 \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi_1}} + \frac{2 \cos \theta}{\kappa^2} (-2K(\kappa) + F(\Phi_1, \kappa)) \\ &\quad + \frac{(\kappa^2 - 2) \cos \theta}{\kappa^2 - 1} \left[ \frac{\sin \Phi_1 \cos \Phi_1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi_1}} - \frac{-2E(\kappa) + E(\Phi_1, \kappa)}{\kappa^2} \right] \\ &= \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_1) + \frac{2 \cos \theta}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas  $\kappa \neq 0$ , la composante suivant  $x$  du champ magnétique créé par l'anneau du haut s'écrit donc :

$$B_{ah,x}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I_0 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} \left( \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_1) [\exp(ik\theta_N) - 1] \right. \\ \left. + \frac{2 \cos \theta}{\kappa^2} \exp(ik\theta_N) \left[ \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right] \right. \\ \left. - 2i \sin \left( \frac{k\pi}{N} \right) \exp \left( -\frac{ik\pi}{N} \right) \sum_{j=2}^N \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right).$$

Lorsque  $\kappa = 0$ ,  $\mathcal{F}_x^a(0, \Phi_{N+1}) = \mathcal{F}_x^a(0, \Phi_1)$  donc la composante suivant  $x$  du champ magnétique créé par l'anneau du haut s'écrit :

$$B_{ah,x}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I_0 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} \left( \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_1) [\exp(ik\theta_N) - 1] \right. \\ \left. - 2i \sin \left( \frac{k\pi}{N} \right) \exp \left( -\frac{ik\pi}{N} \right) \sum_{j=2}^N \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right).$$

Afin d'alléger les écritures, on pose :

$$(4.24) \quad C_B = 2i \sin \left( \frac{k\pi}{N} \right) \exp \left( -\frac{ik\pi}{N} \right).$$

Alors,

$$C_B = \left[ \exp \left( \frac{ik\pi}{N} \right) - \exp \left( -\frac{ik\pi}{N} \right) \right] \exp \left( -\frac{ik\pi}{N} \right) \\ = 1 - \exp \left( -\frac{2ik\pi}{N} \right) \\ = 1 - \exp(ik\theta_N).$$

On obtient donc finalement l'expression suivante pour la composante suivant  $x$  du champ magnétique créé au point  $(r, \theta, z)$  par l'anneau terminal du haut :

$$(4.25) \quad B_{ah,x} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} \left( \frac{2 \cos \theta}{\kappa^2} (1 - C_B) \left[ \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right] \right. \\ \left. - C_B \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \frac{\mu_0 I_0 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} \left( - C_B \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_x^a(0, \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

On va maintenant s'intéresser à la composante suivant  $y$  du champ magnétique créé par le  $j$ -ième arc de cercle  $\widehat{AB}$  de l'anneau terminal du haut.

Comme pour la composante suivant  $x$ , on la décompose à l'aide des intégrales  $A$  et  $B$  de la proposition 4.2.2.

$$B_{ah,y}^j = \frac{\mu_0 I_j 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} [-\cos \theta A(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1}) + \sin \theta B(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1})].$$

On en déduit alors que  $B_{ah,y}^j$  se met sous la forme suivante :

$$(4.26) \quad B_{ah,y}^j = \frac{\mu_0 I_j 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} [\mathcal{F}_y^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_{j+1}) - \mathcal{F}_y^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j)]$$

avec

$$(4.27) \quad \mathcal{F}_y^a(\kappa, \Phi) = \begin{cases} -\frac{2 \cos \theta}{\kappa^2 \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} + \frac{2 \sin \theta}{\kappa^2} F(\Phi, \kappa) \\ + \frac{(\kappa^2 - 2) \sin \theta}{\kappa^2 - 1} \left[ \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} - \frac{1}{\kappa^2} E(\Phi, \kappa) \right], & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \frac{1}{2} \cos(2\Phi - \theta), & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

Finalement, on montre que la composante suivant  $y$  du champ magnétique créé au point  $(r, \theta, z)$  par l'anneau terminal du haut s'écrit sous la forme :

$$(4.28) \quad B_{ah,y} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} \left( \frac{2 \sin \theta}{\kappa^2} (1 - C_B) \left[ \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right] \right. \\ \left. - C_B \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_y^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \frac{\mu_0 I_0 2R(z - L/2)}{4\pi \rho^3(r, z, L/2)} \left( - C_B \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_y^a(0, \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

Il reste maintenant à étudier le champ magnétique créé par la composante suivant  $z$  de l'anneau terminal du haut.

En écrivant

$$\begin{aligned} B_{ah,z}^j &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{-2R(r + R - 2r \sin^2 \Phi)}{\rho^3(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \\ &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \left[ \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{-2R^2}{\rho^3(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi - \int_{\Phi_j}^{\Phi_{j+1}} \frac{2rR(1 - 2 \sin^2 \Phi)}{\rho^3(1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi)^{3/2}} d\Phi \right], \\ &= \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \frac{-2R}{\rho^3(r, z, L/2)} [RC(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1}) + rB(\kappa, \Phi_j, \Phi_{j+1})], \end{aligned}$$

on montre grâce à la proposition 4.2.2 que la composante suivant  $z$  du champ magnétique du champ magnétique créé par le  $j$ -ième arc de cercle  $\widehat{AB}$  de l'anneau

terminal du haut s'écrit :

$$(4.29) \quad B_{ah,z}^j = \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \frac{-2R}{\rho^3(r, z, L/2)} [\mathcal{F}_z^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_{j+1}) - \mathcal{F}_z^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j)]$$

avec

$$(4.30) \quad \mathcal{F}_z^a(\kappa, \Phi) = \begin{cases} \frac{\kappa^2(r+R) - 2r}{\kappa^2 - 1} \left( \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \Phi}} - \frac{1}{\kappa^2} E(\Phi, \kappa) \right) \\ \quad + \frac{2r}{\kappa^2} F(\Phi, \kappa), & \text{si } \kappa \neq 0, \\ R\Phi, & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

Finalement, on obtient l'expression suivante pour la composante suivant  $z$  du champ magnétique créé au point  $(r, \theta, z)$  par l'anneau terminal du haut :

$$(4.31) \quad B_{ah,z} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{-2R}{\rho^3(r, z, L/2)} \left( \frac{2(1 - C_B)}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2(r+R) - 2r}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2rK(\kappa) \right] \right. \\ \quad \left. - C_B \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_z^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{-2R}{\rho^3(r, z, L/2)} \left( - (1 - C_B) R\pi \right. \\ \quad \left. - C_B \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_z^a(0, \Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

L'expression pour le champ magnétique  $\vec{B}_{ab}$  créé au point  $(r, \theta, z)$  par l'anneau terminal du bas est obtenu à partir des expressions (4.25), (4.28) et (4.31) en remplaçant  $L/2$  par  $-L/2$  et  $I_0$  par  $-I_0$ .

Par homogénéité d'écriture, on écrit le champ magnétique créé par les branches verticales de l'antenne sous la forme :

$$(4.32) \quad \vec{B}_b = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} C_B \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \mathcal{F}_x^b(\theta_j) \\ \mathcal{F}_y^b(\theta_j) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(ik\theta_j)$$

avec

$$(4.33) \quad \mathcal{F}_x^b(\theta) = \frac{y - R \sin \theta}{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2} \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta, -L/2)}} \right)$$

et

$$(4.34) \quad \mathcal{F}_y^b(\theta) = \frac{-(x - R \cos \theta)}{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2} \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta, -L/2)}} \right).$$

En résumé, le champ magnétique créé au point  $(r, \theta, z)$  par l'antenne cage d'oiseau est calculé numériquement à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi}{\mu_0 I_0} \vec{B}^k \\
& = C_B \sum_{j=1}^N \left[ \begin{aligned} & \left( \mathcal{F}_x^b(\theta_j) + \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \right) \\ & \left( \mathcal{F}_y^b(\theta_j) + \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \mathcal{F}_y^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \right) \\ & \left( 0 + \frac{-2R}{\rho^3(r, z, L/2)} \mathcal{F}_z^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \right) \end{aligned} \right] \\
(4.35) \quad & - \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{2R(z+L/2)}{\rho^3(r, z, -L/2)} \mathcal{F}_x^a(\kappa(r, z, -L/2), \Phi_j) \right) \\ & \left( \frac{2R(z+L/2)}{\rho^3(r, z, -L/2)} \mathcal{F}_y^a(\kappa(r, z, -L/2), \Phi_j) \right) \\ & \left( \frac{-2R}{\rho^3(r, z, -L/2)} \mathcal{F}_z^a(\kappa(r, z, -L/2), \Phi_j) \right) \end{aligned} \right] \exp(ik\theta_j) \\
& + (1 - C_B) \left( \begin{aligned} & \left( \frac{2R(z-Z)}{\rho^3(r, z, Z)} \xi_x(\kappa(r, z, Z)) \right) \Big|_{Z=L/2} \\ & \left( \frac{2R(z-Z)}{\rho^3(r, z, Z)} \xi_y(\kappa(r, z, Z)) \right) \\ & \left( \frac{-2R}{\rho^3(r, z, Z)} \xi_z(\kappa(r, z, Z)) \right) \Big|_{Z=-L/2} \end{aligned} \right) \\
\text{avec} \quad & \left\{ \begin{aligned} \xi_x(r, z, Z) &= \begin{cases} \frac{2 \cos \theta}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right], & \text{si } \kappa \neq 0, \\ 0, & \text{si } \kappa = 0. \end{cases} \\ \xi_y(r, z, Z) &= \begin{cases} \frac{2 \sin \theta}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right], & \text{si } \kappa \neq 0, \\ 0, & \text{si } \kappa = 0. \end{cases} \\ \xi_z(r, z, Z) &= \begin{cases} \frac{2}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2(r+R) - 2r}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2rK(\kappa) \right], & \text{si } \kappa \neq 0, \\ R\pi, & \text{si } \kappa = 0. \end{cases} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Dans les neuf prochaines sections, on va étudier les propriétés du champ magnétique produit par l'antenne cage d'oiseau lorsque les tensions source oscillent aux pulsations  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ ,  $\omega_0$  et  $\omega_{CR}$ . On va se concentrer sur les propriétés attendues en imagerie. Des illustrations numériques viennent compléter et illustrer les différentes démonstrations. Les sections 4.3 - 4.9 sont consacrées aux pulsations  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N-1$ , tandis que les sections 4.10 et 4.11 sont consacrées respectivement aux pulsations  $\omega_0$  et  $\omega_{CR}$ .

Les différentes simulations numériques ont été réalisées à l'aide du logiciel MATLAB. Le coefficient  $\frac{\mu_0 I_0}{4\pi}$  de la formule (4.10) étant de l'ordre de  $10^{-7}$ , ce n'est pas cette formule qui a été programmée mais l'expression  $\frac{4\pi}{\mu_0 I_0} \vec{B}^k e^{-i\omega t}$  afin d'éviter une trop forte propagation des erreurs d'arrondi.

Dans toutes les simulations les dimensions de l'antenne sont celles de l'exemple (2.21), à savoir  $L = 12,8$  cm et  $R = 4,45$  cm. Sauf précision contraire, le nombre de branche est  $N = 16$  et le maillage est le pavé de  $\mathbb{R}^3$  entourant l'antenne défini par :

$$\{(x, y, z) \in \Omega \times S; \Omega = [-R - 0,1, R + 0,1]^2, S = [-L/2 - 0,1, L/2 + 0,1]\}.$$

### 4.3 Rotation

Cette section ainsi que les deux suivantes sont consacrées à la mise en évidence du mouvement de rotation du champ magnétique : on donne ici un résultat général tandis que dans les deux sections suivantes des résultats plus précis pour les plans  $x = 0$  et  $y = 0$  sont présentés.

#### Proposition 4.3.1 : mouvement de rotation

Soit  $A \in \mathbb{C}^3$  tel que les vecteurs  $\Re(A)$  et  $\Im(A)$  soient linéairement indépendants.

On note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\|\cdot\|_2$  la norme associée.

Alors, le point  $M(t) = \Re(A \exp(-i\omega t))$  décrit une ellipse centrée en l'origine dont le demi grand axe  $r_{max}$  et le demi petit axe  $r_{min}$  ont respectivement pour expression

$$r_{max} = \sqrt{a + \sqrt{b^2 + c^2}} \text{ et } r_{min} = \sqrt{a}.$$

$$\text{où } \begin{cases} a &= \frac{1}{2} (\|\Re(A)\|_2^2 + \|\Im(A)\|_2^2), \\ b &= \frac{1}{2} (\|\Re(A)\|_2^2 - \|\Im(A)\|_2^2), \\ c &= (\Re(A), \Im(A)). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Comme les vecteurs  $\Re(A)$  et  $\Im(A)$  sont linéairement indépendants, l'espace vectoriel qu'ils engendrent est un plan. Soit  $(\vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormale de celui-ci. On note  $(\alpha, \beta)$  (respectivement  $(\gamma, \delta)$ ) les coordonnées de  $\Re(A)$  (respectivement  $\Im(A)$ ) dans cette base. Avec ces notations, le vecteur  $\vec{OM}(t)$  s'écrit :

$$(4.36) \quad \vec{OM}(t) = [\alpha \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)] \vec{j} + [\beta \cos(\omega t) + \delta \sin(\omega t)] \vec{k}.$$

Comme les vecteurs  $\Re(A)$  et  $\Im(A)$  sont linéairement indépendants, ils sont en particulier non tous les deux colinéaires à  $\vec{j}$  ou  $\vec{k}$ . Donc  $\alpha^2 + \gamma^2 \neq 0$  et  $\beta^2 + \delta^2 \neq 0$  et l'on peut définir les angles  $\varphi \in [0, 2\pi[$  et  $\psi \in [0, 2\pi[$  à l'aide des relations

$$\begin{cases} \cos \varphi &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \cos \psi &= \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}, \\ \sin \psi &= \frac{\delta}{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}. \end{cases}$$

L'égalité (4.36) s'écrit maintenant

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \cos(\omega t - \varphi) \vec{j} + \sqrt{\beta^2 + \delta^2} \sin(\omega t + \psi) \vec{k}.$$

Afin de réduire le nombre de paramètres dans la relation précédente, on considère le point

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} M\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right) \\ &= \cos(\omega t) \vec{j} + \frac{\sqrt{\beta^2 + \delta^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \sin(\omega t + \varphi + \psi) \vec{k}. \end{aligned}$$

À une homothétie près, les trajectoires décrites par les points  $M(t)$  et  $P(t)$  sont identiques. Pour montrer la proposition 4.3.1, il suffit donc de prouver que celle décrite par le point  $P(t)$  est une ellipse centrée à l'origine.

$$\text{On pose } \Phi = \varphi + \psi \text{ et } C = \sqrt{\frac{\beta^2 + \delta^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}.$$

Les coordonnées  $(x(t), y(t))$  de  $P(t)$  dans la base  $(\vec{j}, \vec{k})$  s'écrivent alors

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\omega t), \\ y(t) = \sin(\omega t + \Phi). \end{cases}$$

Pour montrer que la trajectoire décrite par  $P(t)$  est une ellipse, on va déterminer l'équation quadratique vérifiée par  $x(t)$  et  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} y^2(t) &= C^2 [\sin(\omega t) \cos \Phi + \cos(\omega t) \sin \Phi]^2 \\ &= C^2 \cos^2 \Phi (1 - x^2(t)) + 2C^2 \cos \Phi \sin \Phi \sin(\omega t) \cos(\omega t) + C^2 \sin^2 \Phi x^2(t). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} x(t) y(t) &= C \sin(\omega t + \Phi) \cos(\omega t) \\ &= C \cos \Phi \cos(\omega t) \sin(\omega t) + C \sin \Phi x^2(t), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} y^2(t) &= C^2 \cos^2 \Phi (1 - x^2(t)) + 2C \sin \Phi [x(t) y(t) - C \sin \Phi x^2(t)] + C^2 \sin^2 \Phi x^2(t) \\ &= C^2 \cos^2 \Phi - C^2 x^2(t) + 2C \sin \Phi x(t) y(t). \end{aligned}$$

Autrement dit, les couples  $(x(t), y(t))$  sont solutions de l'équation quadratique

$$(4.37) \quad C^2 x^2(t) + y^2(t) - 2C \sin \Phi x(t) y(t) = C^2 \cos^2 \Phi.$$

La forme quadratique associée est

$$C^2 x^2(t) + y^2(t) - 2C \sin \Phi x(t) y(t) = \left( Q \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{avec } Q = \begin{pmatrix} C^2 & -C \sin \Phi \\ -C \sin \Phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice  $Q$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable : il existe une matrice orthogonale  $R$  telle que

$$Q = R \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} R^{-1}.$$

En posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

la relation (4.37) devient :

$$(4.38) \quad \lambda X^2(t) + \mu Y^2(t) = C^2 \cos^2 \Phi.$$

Quitte à multiplier la première colonne de  $R$  par  $(-1)$ , on peut supposer que  $\det(R) = 1$ , c'est-à-dire que  $R$  est une matrice de rotation. La trajectoire décrite par le couple  $(X(t), Y(t))$  est donc la même que celle décrite par le couple  $(x(t), y(t))$ .

Afin de déterminer de quelle conique (4.38) est l'équation, il faut connaître le signe des valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$ . Pour cela, on va montrer que la matrice  $Q$  est définie positive.

$$(4.39) \quad \begin{aligned} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= C^2 x^2 - 2C \sin \Phi xy + y^2 \\ &= C^2 x^2 + (y - C \sin \Phi x)^2 - C^2 \sin^2 \Phi x^2 \\ &= C^2 \cos^2 \Phi x^2 + (y - C \sin \Phi x)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

On va maintenant montrer que le terme  $C^2 \cos^2 \Phi$  est strictement positif.

Comme  $\beta\delta \neq 0$ ,  $C > 0$ .

Si  $\cos^2 \Phi = 0$ ,  $\sin(\omega t + \varphi + \psi) = \pm \cos(\omega t)$  et on obtient :

$$\overrightarrow{OP}(t) = \cos(\omega t) \vec{j} + \pm C \cos(\omega t) \vec{k}.$$

D'où

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left( \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} + \sqrt{\beta^2 + \delta^2} \right) \cos(\omega t - \varphi) (\vec{j} + \vec{k}).$$

En posant successivement  $t = 0$  et  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  dans la relation précédente, on en déduit que les vecteurs  $\Re e(A)$  et  $\Im m(A)$  sont colinéaires, ce qui est impossible. Donc  $\cos^2 \Phi \neq 0$  et le terme  $C^2 \cos^2 \Phi$  est strictement positif.

Associée à la relation (4.39), cette inégalité montre que la matrice  $Q$  est définie positive et donc que ses valeurs propres sont strictement positives. L'équation (4.38) s'écrit alors

$$(4.40) \quad \left( \frac{X(t)}{d} \right)^2 + \left( \frac{Y(t)}{e} \right)^2 = 1,$$

$$\text{avec } d = \frac{C |\cos \Phi|}{\sqrt{\lambda}} \text{ et } e = \frac{C |\cos \Phi|}{\sqrt{\mu}}.$$

La trajectoire associée à (4.40) est une ellipse centrée à l'origine. Comme la matrice

$R$  est une matrice de rotation, la trajectoire décrite par le point  $M(t)$  est aussi une ellipse centrée à l'origine.

Le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse décrite par le point  $M(t)$  sont respectivement  $\max \left\{ \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|_2 ; t \in \left[ 0, \frac{2\pi}{\omega} \right] \right\}$  et  $\min \left\{ \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|_2 ; t \in \left[ 0, \frac{2\pi}{\omega} \right] \right\}$ .

En utilisant la relation  $\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$ , on vérifie aisément que

$$(4.41) \quad \left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|_2^2 = a + b \cos(2\omega t) + c \sin(2\omega t)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les grandeurs définies dans la proposition 4.3.1.

Si  $b^2 + c^2 = 0$ ,  $\left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|_2^2 = a$  et l'équation décrite par  $M(t)$  est un cercle de rayon  $\sqrt{a}$  et le résultat de la proposition 4.3.1 est satisfait.

Sinon, on peut définir l'angle  $\theta \in [0; 2\pi[$  à l'aide des relations

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

On obtient alors :

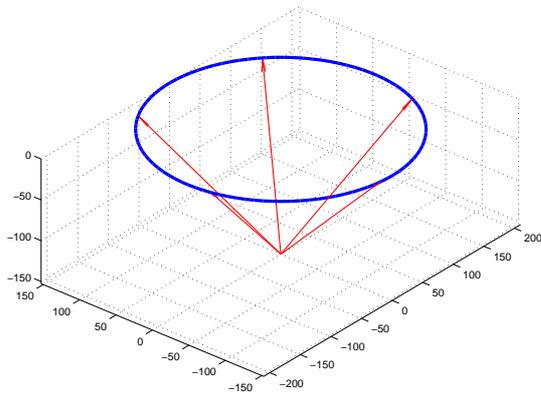
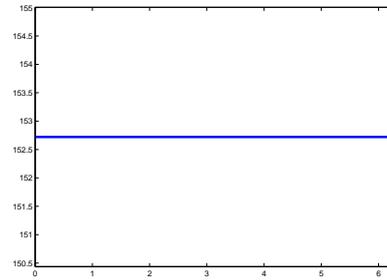
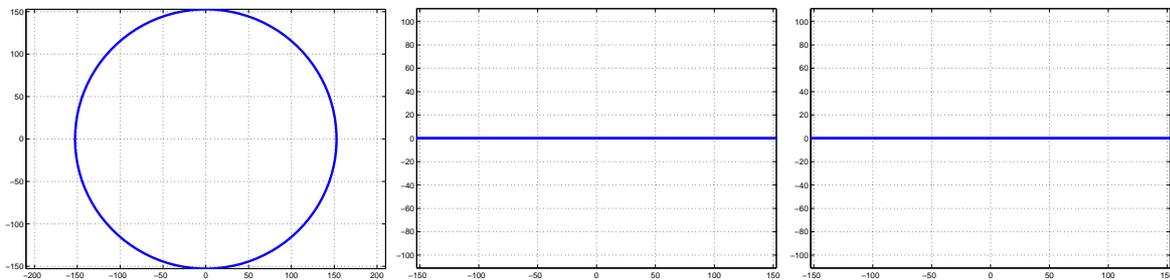
$$\left\| \overrightarrow{OM}(t) \right\|_2^2 = a + \sqrt{b^2 + c^2} \cos(2\omega t - \theta),$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition 4.3.1. ■

D'après la proposition 4.3.1, le champ magnétique réel  $\Re e \left[ \overrightarrow{B}^k \exp(-i\omega t) \right]$  a une trajectoire elliptique en tout point de l'espace pour lequel  $\Re e \left( \overrightarrow{B}^k \right)$  et  $\Im m \left( \overrightarrow{B}^k \right)$  sont non colinéaires. Le reste de cette section ainsi que les deux sections suivantes sont consacrées à l'illustration numérique de ce résultat. Plus précisément, on va étudier la déviation par rapport à la trajectoire circulaire en fonction de la position du point d'observation. Comme le champ magnétique utilisé pour les applications IRM correspond à la pulsation de résonance  $\omega_1$  (voir la section 4.8), on a pris  $k = 1$  pour réaliser les différentes simulations qui suivent.

Dans les figures qui suivent, on part du centre de l'antenne  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  et on se rapproche de l'antenne suivant l'axe des  $x$  : on considère successivement  $x = R/4$ ,  $x = R/2$ ,  $x = 3R/4$  et  $x = 9R/10$ . Pour chaque point étudié, on a représenté une vue en trois dimensions de la trajectoire du champ magnétique  $\Re e \left[ \overrightarrow{B}^1 \exp(-i\omega t) \right]$  ainsi que la norme  $L^2$  de celui-ci. Dans le premier cas correspondant au point  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , on a représenté en plus les projections de la trajectoire sur les plans  $xy$ ,  $xz$  et  $yz$ .

Les figures 19 et 20 montrent que le champ magnétique  $\Re e \left[ \overrightarrow{B}^1(0, 0, 0) \exp(-i\omega t) \right]$  décrit un cercle. D'après les projections de la figure 21, ce cercle est situé dans le plan  $xy$ . Autrement dit, il est dans un plan orthogonal à l'axe de l'antenne. ■

FIG. 19 – Vue 3D au point  $(0, 0, 0)$ FIG. 20 – Norme du champ au point  $(0, 0, 0)$ FIG. 21 – Projections de la trajectoire sur les plans  $xy$ ,  $xz$  et  $yz$ 

La propriété d'orthogonalité à l'axe de l'antenne est conservée lorsque l'on se déplace le long de l'axe des  $x$  : les projections sur les différents plans dans les autres cas sont des lignes horizontales comme au centre de l'antenne. Afin de ne pas surcharger le lecteur en images, on a choisi de ne représenter que les figures présentant des différences avec le premier cas étudié.

À première vue les trajectoires dans les trois premiers cas suivants sont encore des cercles. Cependant, si on observe les variations de la norme, on constate que ce sont en réalité des ellipses mais que la différence entre le petit axe et le grand axe sont minimales comme le montre le tableau 4.1.

Coordonnées	Grand axe	Petit axe	Écart relatif
$(0, 0, 0)$	152,7210	152,7210	0,0000 %
$(R/4, 0, 0)$	153,2308	153,0630	0,1095 %
$(R/2, 0, 0)$	154,3967	153,8768	0,3367 %
$(3R/4, 0, 0)$	157,8201	156,0395	1,1282 %
$(9R/10, 0, 0)$	225,4329	190,6530	15,4280 %

TAB. 4.1 – Variation du grand axe et du petit axe en fonction de  $x$ 

Par contre, on voit nettement dans le cas  $(0, 0, 9R/10)$  où l'écart relatif entre le grand axe et le petit axe est de l'ordre de 15 % que le cercle est devenu une ellipse.

En conclusion, la trajectoire initialement circulaire au centre de l'antenne se transforme en une ellipse allongée suivant l'axe des  $y$  tout en restant dans le plan orthogonal à l'axe de l'antenne.

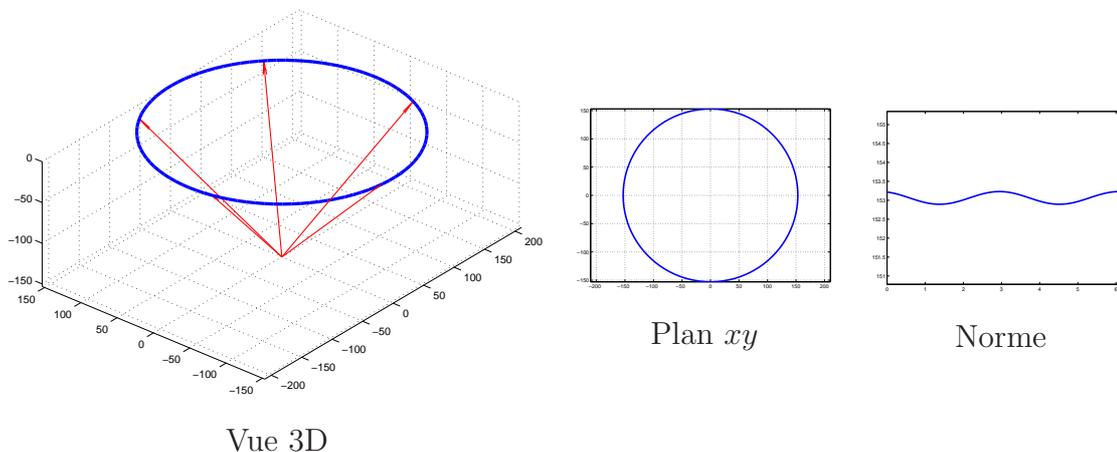


FIG. 22 – Figures pour  $(x, y, z) = (R/4, 0, 0)$

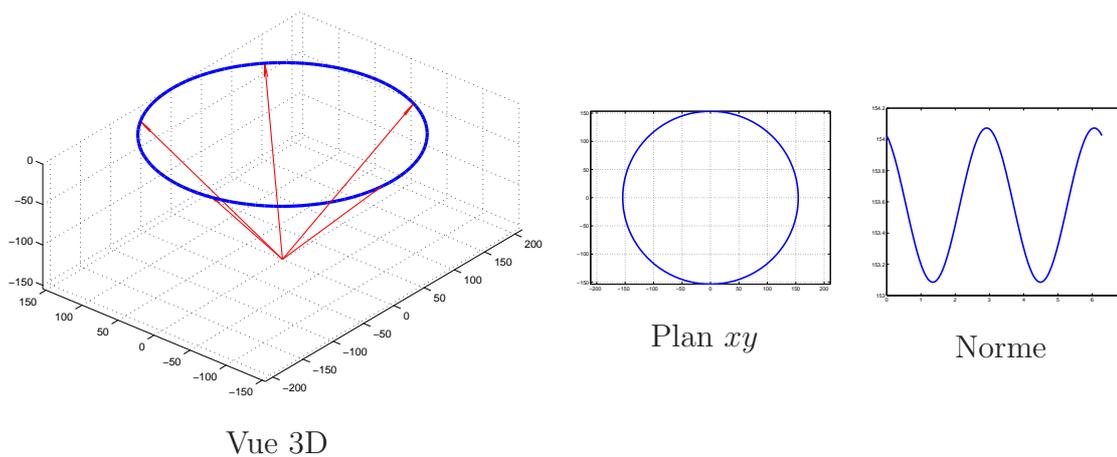


FIG. 23 – Figures pour  $(x, y, z) = (R/2, 0, 0)$

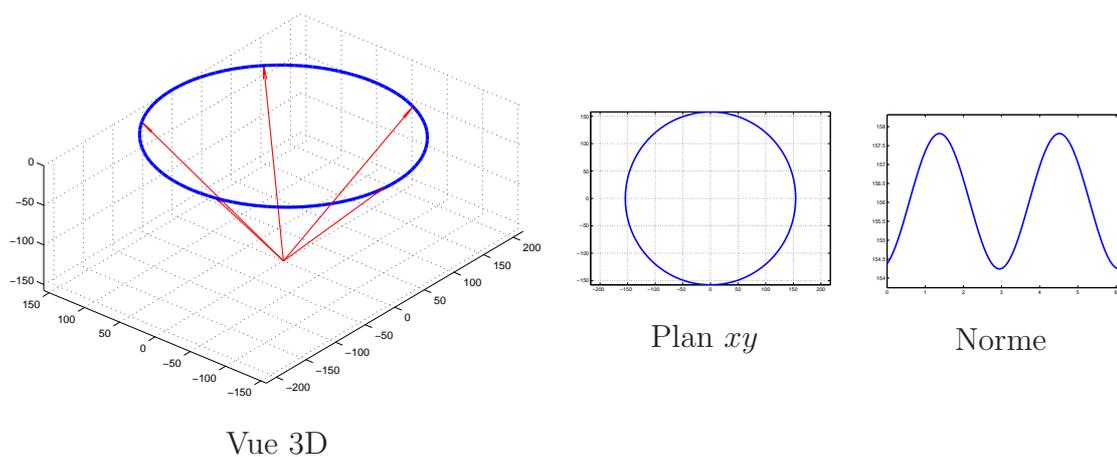


FIG. 24 – Figures pour  $(x, y, z) = (3R/4, 0, 0)$

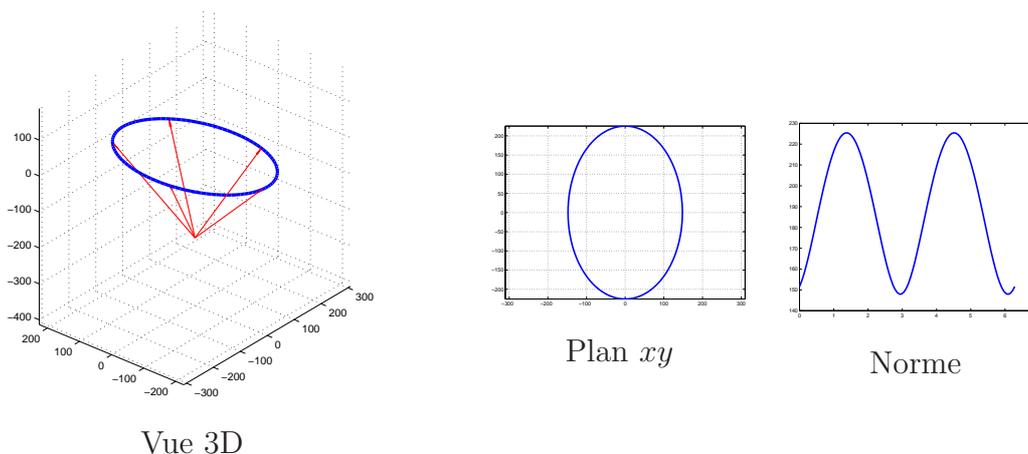


FIG. 25 – Figures pour  $(x, y, z) = (9R/10, 0, 0)$

## 4.4 Trajectoires dans le plan $y = 0$

Maintenant que l'on sait que le champ magnétique a un mouvement de rotation et que les caractéristiques de celui-ci sont gouvernées par la partie réelle et la partie imaginaire du champ  $\vec{B}^k$ , on va étudier plus précisément ce dernier dans le plan  $y = 0$ .

**Proposition 4.4.1 : étude de  $\vec{B}^k$  dans le plan  $y = 0$**

Il existe trois fonctions réelles  $K_x^k$ ,  $K_y^k$  et  $K_z^k$  telles que

$$(4.42) \quad \vec{B}^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t) = \begin{pmatrix} K_x^k(x, 0, z) \exp\left[-i\left(\omega_k t + \frac{k\pi}{N}\right)\right] \\ iK_y^k(x, 0, z) \exp\left[-i\left(\omega_k t + \frac{k\pi}{N}\right)\right] \\ K_z^k(x, 0, z) \exp\left[-i\left(\omega_k t + \frac{k\pi}{N}\right)\right] \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration est de réécrire les différentes sommes intervenant dans la formulation (4.10) afin de déterminer si celles-ci, ou plus exactement, celles-ci multipliées par le coefficient  $\exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right)$ , sont réelles ou imaginaires pures. Pour cela on scinde ces sommes en deux sommes faisant apparaître les mêmes intégrales.

On va tout d'abord commencer par la somme  $s_1$ .

Comme le dénominateur des intégrales  $J_1$  est de la forme  $\cos\theta + cste$ , on cherche un changement de variable laissant invariant le cosinus : on fait donc le changement de variable  $\alpha = -\theta$ .

On obtient alors :

$$\forall 1 \leq j \leq N, J_1(x, 0, z, Z, j) = - \int_{-\theta_j}^{-\theta_{j+1}} \frac{-\sin\alpha}{[-2xR \cos\alpha + R^2 + x^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} d\alpha.$$

Or,

$$\forall 1 \leq j \leq N, -\theta_p = -\frac{2\pi}{N}(p-1) = \theta_{N-p+2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq j \leq N, J_1(x, 0, z, Z, j) &= \int_{\theta_{N-j+2}}^{\theta_{N-j+1}} \frac{\sin \alpha}{[-2xR \cos \alpha + R^2 + x^2 + (z-Z)^2]^{3/2}} d\alpha \\ &= -J_1(x, 0, z, Z, N-j+1). \end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de  $s_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} s_1(x, 0, z, Z) &= \sum_{j=1}^{N/2} J_1(x, 0, z, Z, j) [\exp(ik\theta_j) - \exp(ik\theta_{N-j+1})] \\ &= \sum_{j=1}^{N/2} J_1(x, 0, z, Z, j) \left[ \exp\left(\frac{2ik\pi}{N}(j-1)\right) - \exp\left(\frac{2ik\pi}{N}(N-j)\right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{N/2} J_1(x, 0, z, Z, j) \left[ \exp\left(\frac{2ik\pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\right) \right] \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \\ &= 2i \sum_{j=1}^{N/2} J_1(x, 0, z, Z, j) \sin\left[\frac{2k\pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

On montre de même que :

$$\begin{cases} s_2(x, 0, z, Z) = 2 \sum_{j=1}^{N/2} J_2(x, 0, z, Z, j) \cos\left[\frac{2k\pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right), \\ s_3(x, 0, z, Z) = 2 \sum_{j=1}^{N/2} J_3(x, 0, z, Z, j) \cos\left[\frac{2k\pi}{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right). \end{cases}$$

On procède de la même façon pour la somme  $S_1$  :

$$\begin{aligned} S_1(x, 0, z) &= 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \left[ \frac{-1}{x-R} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(0, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(0, -L/2)}} \right) \right. \\ &\quad + \sum_{j=2}^{N/2} \frac{-(x-R \cos \theta_j)}{-2xR \cos \theta_j + x^2 + R^2} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \exp(ik\theta_j) \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{-1}{x-R} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\pi, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\pi, -L/2)}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=N/2+2}^N \frac{-(x-R \cos \theta_j)}{-2xR \cos \theta_j + x^2 + R^2} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \exp(ik\theta_j) \right]. \end{aligned}$$

Comme  $\theta_{N+2-j} = -\theta_j$  pour  $1 \leq j \leq N$ , on obtient :

$$S_1(x, 0, z) = 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \left[ \frac{-1}{x-R} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(0, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(0, -L/2)}} \right) \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{-1}{x-R} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\pi, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\pi, -L/2)}} \right) \right. \\ \left. + 2 \sum_{j=2}^{N/2} \frac{-(x-R \cos \theta_j)}{-2xR \cos \theta_j + x^2 + R^2} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \cos(k\theta_j) \right].$$

On montre de même que :

$$S_2(x, 0, z) = -4 \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \sum_{j=2}^{N/2} \left[ \frac{-R \sin \theta_j}{-2xR \cos \theta_j + x^2 + R^2} \right. \\ \left. \times \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \sin(k\theta_j) \right].$$

On pose :

$$K_x^k = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left( 2R \sum_{j=1}^{N/2} [(z-L/2) J_2(x, 0, z, L/2, j) - (z+L/2) J_2(x, 0, z, -L/2, j)] \right. \\ \left. \times \cos\left[\frac{2k\pi}{N} \left(j - \frac{1}{2}\right)\right] \right. \\ \left. + 4 \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \sum_{j=2}^{N/2} \left[ \frac{R \sin \theta_j}{-2xR \cos \theta_j + x^2 + R^2} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \sin(k\theta_j) \right] \right). \\ K_y^k = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left( 2R \sum_{j=1}^{N/2} [(z-L/2) J_1(x, 0, z, L/2, j) - (z+L/2) J_1(x, 0, z, -L/2, j)] \right. \\ \left. \times \sin\left[\frac{2k\pi}{N} \left(j - \frac{1}{2}\right)\right] \right. \\ \left. + 2 \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \left[ \frac{-1}{x-R} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(0, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(0, -L/2)}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^k \frac{-1}{x-R} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\pi, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\pi, -L/2)}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{j=2}^{N/2} \frac{-(x-R \cos \theta_j)}{-2xR \cos \theta_j + x^2 + R^2} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \cos(k\theta_j) \right] \right).$$

$$K_z^k = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left( 2R \sum_{j=1}^{N/2} \left[ -x J_2(x, 0, z, L/2, j) + R J_3(x, 0, z, L/2, j) \right. \right. \\ \left. \left. + x J_2(x, 0, z, -L/2, j) - R J_3(x, 0, z, -L/2, j) \right] \cos \left[ \frac{2k\pi}{N} \left( j - \frac{1}{2} \right) \right] \right).$$

■

On déduit de la proposition 4.4.1 l'écriture suivante du champ magnétique.

$$(4.43) \quad \Re \left[ \vec{B}^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t) \right] = \begin{pmatrix} K_x^k(x, 0, z) \cos \left[ \omega_k t + \frac{k\pi}{N} \right] \\ K_y^k(x, 0, z) \sin \left[ \omega_k t + \frac{k\pi}{N} \right] \\ K_z^k(x, 0, z) \cos \left[ \omega_k t + \frac{k\pi}{N} \right] \end{pmatrix}.$$

Les équations décrivant le mouvement du champ magnétique dans les différents plans  $xy$ ,  $xz$  et  $yz$  s'écrivent alors

$$(4.44) \quad \begin{cases} \left( \frac{\Re [B_x^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_x^k(x, 0, z)} \right)^2 + \left( \frac{\Re [B_y^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_y^k(x, 0, z)} \right)^2 = 1, \\ \Re [B_x^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t)] = \frac{K_x^k(x, 0, z)}{K_z^k(x, 0, z)} \Re [B_z^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t)], \\ \left( \frac{\Re [B_y^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_y^k(x, 0, z)} \right)^2 + \left( \frac{\Re [B_z^k(x, 0, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_z^k(x, 0, z)} \right)^2 = 1. \end{cases}$$

La deuxième relation de (4.44) montre que, contrairement au cas  $(x, 0, 0)$  de la section précédente, l'ellipse décrite par le champ magnétique n'est plus orthogonal à l'axe de l'antenne. En effet, un observateur placé le long de l'axe de  $y$  verra une droite inclinée par rapport à l'axe des  $x$  et non l'axe des  $x$ . Plus précisément, les graphiques du milieu des figures montrent que la droite que voit l'observateur effectuer un mouvement de rotation autour de l'axe des  $y$  lorsque  $z$  varie de  $-L/2$  à  $L/2$ .

On vérifie sur les figures 26 - 29 que l'on retrouve les équations (4.44) : des ellipses dans les plans  $xy$  et  $yz$  et une droite dans le plan  $xz$ .

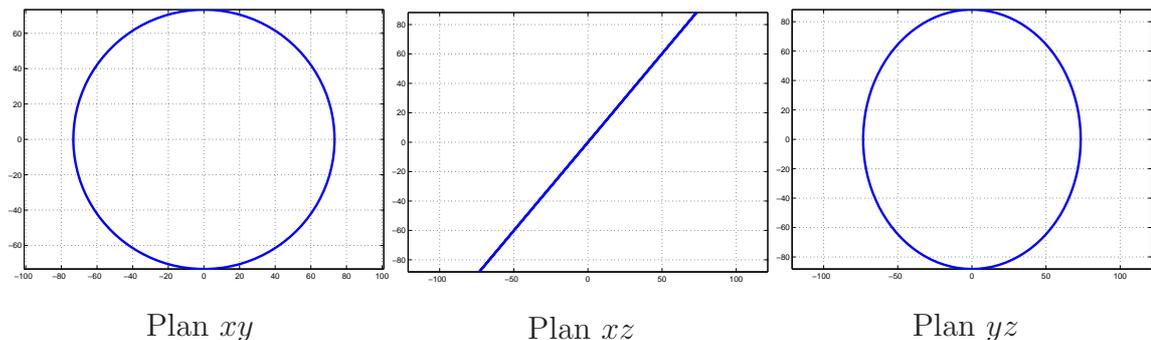
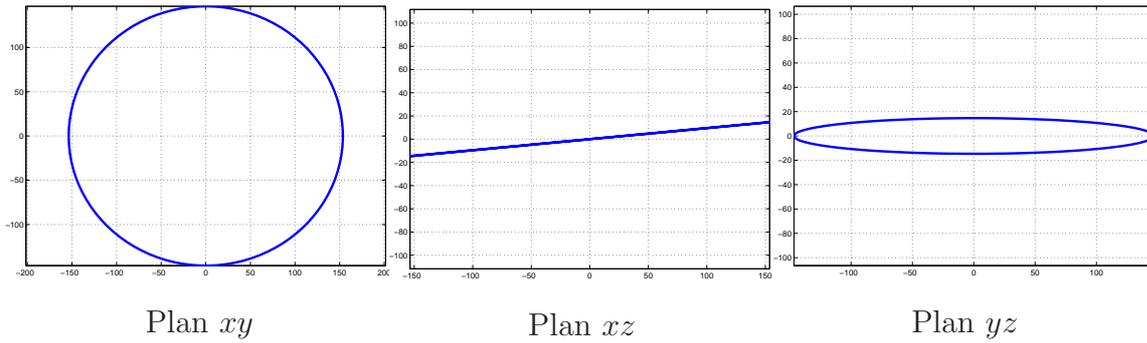
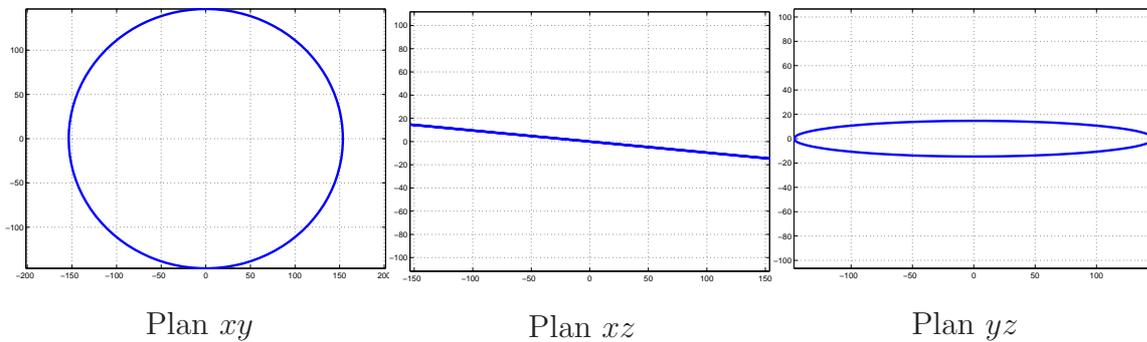
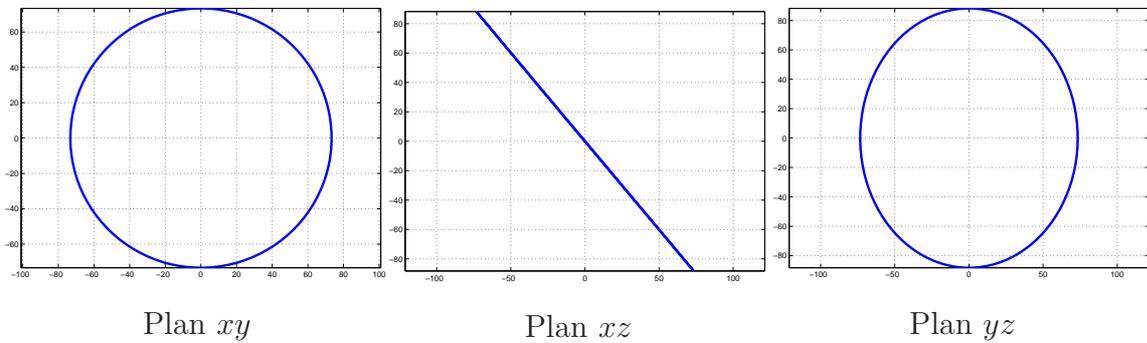


FIG. 26 – Projections sur les différents plans pour  $(R/2, 0, -L/2)$

FIG. 27 – Projections sur les différents plans pour  $(R/2, 0, -L/4)$ FIG. 28 – Projections sur les différents plans pour  $(R/2, 0, L/4)$ FIG. 29 – Projections sur les différents plans pour  $(R/2, 0, L/2)$ 

On remarque sur les graphiques précédents que la projection de la trajectoire dans le plan  $xy$  est quasiment circulaire : l'écart entre le grand axe et le petit axe est de 0,1386 % lorsque  $z = \pm L/2$  et de 4,5903 % lorsque  $z = \pm L/4$ .

**Remarque 4.4.2 :**

Comme  $\omega_{N-k} = \omega_k$ , que  $K_x^{N-k}(x, 0, z) = -K_x^k(x, 0, z)$ ,  $K_y^{N-k}(x, 0, z) = K_y^k(x, 0, z)$  et  $K_z^{N-k}(x, 0, z) = -K_z^k(x, 0, z)$ , on obtient :

$$(4.45) \quad \Re \left( \overrightarrow{B}^{N-k}(x, 0, z) e^{-i\omega_{N-k}t} \right) = \Re \left( \overrightarrow{B}^k(x, 0, z) e^{i\omega_k t} \right).$$

Les champs  $\overrightarrow{B}^k(x, 0, z)$  et  $\overrightarrow{B}^{N-k}(x, 0, z)$  décrivent donc la même trajectoire mais avec un sens de rotation opposé.

## 4.5 Trajectoires dans le plan $x = 0$

On va maintenant étudier les parties réelles et imaginaires du champ magnétique dans le plan  $x = 0$ . Les méthodes employées étant similaires à celles de l'étude dans le plan  $y = 0$ , seuls les développements qui diffèrent seront présentés.

**Proposition 4.5.1 : étude de  $\vec{B}^k$  dans le plan  $x = 0$**   
 Il existe trois fonctions réelles  $K_x^k$ ,  $K_y^k$  et  $K_z^k$  telles que

$$(4.46) \quad \vec{B}^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t) = i^k \begin{pmatrix} iK_x^k(0, y, z) \exp \left[ -i \left( \omega_k t + \frac{k\pi}{N} \right) \right] \\ K_y^k(0, y, z) \exp \left[ -i \left( \omega_k t + \frac{k\pi}{N} \right) \right] \\ K_z^k(0, y, z) \exp \left[ -i \left( \omega_k t + \frac{k\pi}{N} \right) \right] \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Cette fois-ci, contrairement à l'étude dans le plan  $y = 0$ , il va falloir faire un changement de variable laissant invariant le sinus. Deux cas de figures sont possibles :

- soit  $N \equiv 0[4]$  et on peut alors relier les intégrales  $J_1(0, y, z, Z, j)$  aux intégrales  $J_2(y, 0, z, Z, p)$  car l'antenne possède une branche sur l'axe des  $y$ ,
- soit  $N \equiv 2[4]$  et on va alors procéder comme lors de l'étude dans le plan  $y = 0$ .

► **Premier cas :  $N \equiv 0[4]$ .**

Afin relier les intégrales  $J_1$  et  $J_2$ , on va transformer le  $\sin \theta$  du dénominateur de  $J_1$  en un  $\cos \alpha$ . Pour cela, on effectue le changement de variable  $\alpha = \theta - \frac{\pi}{2}$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} J_1(0, y, z, Z, j) &= \int_{\theta_j - \pi/2}^{\theta_{j+1} - \pi/2} \frac{\cos \alpha}{[-2yR \cos \alpha + y^2 + R^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} d\alpha \\ &= J_2(y, 0, z, Z, j - 3N/4). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme  $\exp \left[ ik \left( \theta_j - \frac{\pi}{2} \right) \right] = (-i)^k \exp(ik\theta_j)$ , on en déduit

$$\begin{cases} s_1(0, y, z, Z) &= (-i)^k s_2(y, 0, z, Z), \\ s_2(0, y, z, Z) &= -(-i)^k s_1(y, 0, z, Z), \\ s_3(0, y, z, Z) &= (-i)^k s_3(y, 0, z, Z). \end{cases}$$

On obtient des résultats analogues pour  $S_1$  et  $S_2$  en faisant le changement d'indice de sommation  $p = j - N/4$ .

$$\text{On obtient alors (4.46) en posant } \begin{cases} K_x^k(0, y, z) &= (-1)^k \tilde{K}_y^k(y, 0, z), \\ K_y^k(0, y, z) &= -(-1)^k \tilde{K}_x^k(y, 0, z), \\ K_z^k(0, y, z) &= (-1)^k \tilde{K}_z^k(y, 0, z). \end{cases}$$

où  $\tilde{K}_x^k$ ,  $\tilde{K}_y^k$  et  $\tilde{K}_z^k$  sont les fonctions introduites dans la proposition 4.4.1.

► **Deuxième cas** :  $N \equiv 2[4]$ .

Afin de laisser invariant le sinus du dénominateur des intégrales  $J_1$ , on effectue le changement de variable  $\alpha = \pi - \theta$  dans  $J_1$  :

$$\forall 1 \leq j \leq N, J_1(0, y, z, Z, j) = \int_{\pi-\theta_{j+1}}^{\pi-\theta_j} \frac{\sin \alpha}{[-2yR \sin \alpha + R^2 + y^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} d\alpha.$$

Comme  $\pi - \theta_p = \theta_{N/2+2-p}$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq j \leq \left(\frac{N}{2} - 1\right), J_1(0, y, z, Z, j) &= J_1(0, y, z, Z, N/2 - j + 1), \\ \forall \left(\frac{N}{2} + 1\right) \leq j \leq \left(\frac{3N}{2} - 1\right), J_1(0, y, z, Z, j) &= J_1(0, y, z, Z, N/2 - j + 1). \end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de  $s_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} s_1(0, y, z, Z) &= \sum_{j=1}^{(N/2-1)/2} J_1(0, y, z, Z, j) [\exp(ik\theta_j) + \exp(ik\theta_{N/2-j+1})] \\ &+ \sum_{j=N/2+1}^{(3N/2-1)/2} J_1(0, y, z, Z, j) [\exp(ik\theta_j) + \exp(ik\theta_{N/2-j+1})] \\ &+ J_1(0, y, z, Z, (N/2 + 1)/2) \exp(ik\theta_{(N/2+1)/2}) \\ &+ J_1(0, y, z, Z, (3N/2 + 1)/2) \exp(ik\theta_{(3N/2+1)/2}). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &J_1(0, y, z, Z, j) [\exp(ik\theta_j) + \exp(ik\theta_{N/2-j+1})] \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \\ &= 2J_1(0, y, z, Z, j) \begin{cases} i \sin \left[ \frac{2ik\pi}{N} \left( j - \frac{1}{2} \right) \right], & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \cos \left[ \frac{2ik\pi}{N} \left( j - \frac{1}{2} \right) \right], & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme

$$\exp(ik\theta_{(N/2+1)/2}) \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) = i^k \text{ et } \exp(ik\theta_{(3N/2+1)/2}) \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) = (-i)^k,$$

on en déduit que  $s_1 \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \in \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$

On obtient un résultat analogue pour  $s_3$ .

En ce qui concerne  $J_2$ , comme  $N \equiv 2[4]$ , on a par symétrie :

$$\begin{aligned} J_2(0, y, z, Z, (N/2 + 1)/2) &= \int_{\pi/2-\pi/N}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{[-2yR \sin \theta + R^2 + y^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} d\theta \\ &- \int_{\pi/2-\pi/N}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{[-2yR \sin \theta + R^2 + y^2 + (z - Z)^2]^{3/2}} d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même,  $J_2(0, y, z, Z, (3N/2 + 1)/2) = 0$  et on obtient finalement :

$$s_2 \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \in \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

En ce qui concerne la somme  $S_1$ , on la décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} S_1 \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \\ = & \sum_{j=1}^{N/2+1} \frac{R \cos \theta_j}{-2yR \sin \theta_j + y^2 + R^2} \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \exp(ik\theta_j) \\ & + \sum_{j=N/2+2}^N \frac{R \cos \theta_j}{-2yR \sin \theta_j + y^2 + R^2} \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \exp(ik\theta_j). \end{aligned}$$

En redécomposant la première somme de l'égalité précédente (notée  $S_{1,1}$ ) en deux et en utilisant la relation  $\theta_{N/2+2-j} = \pi - \theta_j$ , on obtient :

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \sum_{j=1}^{(N/2+1)/2} \frac{R \cos \theta_j}{-2yR \sin \theta_j + y^2 + R^2} \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ & \quad \times (\exp(ik\theta_j) - \exp(ik\theta_{N/2+2-j})) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{(N/2+1)/2} \frac{R \cos \theta_j}{-2yR \sin \theta_j + y^2 + R^2} \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ & \quad \times \begin{cases} \cos\left[\frac{2k\pi}{N}(j-1)\right], & \text{si } k \text{ est impair,} \\ i \sin\left[\frac{2k\pi}{N}(j-1)\right], & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

On procède de même pour la deuxième somme  $S_{1,2}$  et on obtient finalement

$$S_1 \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \in \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

On montre de la même façon que  $S_2 \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) \in \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$

On déduit de ce qui précède (4.46) avec  $K_x^k(0, y, z)$ ,  $K_y^k(0, y, z)$ ,  $K_z^k(0, y, z) \in \mathbb{R}$ . ■

Comme dans la section précédente, on déduit de (4.46) les équations régissant le mouvement du champ magnétique dans les différents plans  $xy$ ,  $xz$  et  $yz$ .

$$(4.47) \quad \begin{cases} \left( \frac{\Re [B_x^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_x^k(0, y, z)} \right)^2 + \left( \frac{\Re [B_y^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_y^k(0, y, z)} \right)^2 = 1, \\ \left( \frac{\Re [B_x^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_x^k(0, y, z)} \right)^2 + \left( \frac{\Re [B_z^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t)]}{K_z^k(0, y, z)} \right)^2 = 1, \\ \Re [B_y^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t)] = \frac{K_y^k(0, y, z)}{K_z^k(0, y, z)} \Re [B_z^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t)]. \end{cases}$$

La troisième relation de (4.47) montre qu'un observateur placé le long de l'axe des  $x$  (et non des  $y$  comme dans le plan  $y = 0$ ) verra une droite inclinée par rapport à l'axe des  $y$ . Des graphiques correspondant à différentes valeurs de  $z$  montreraient, comme dans le plan  $y = 0$ , que la droite que voit l'observateur effectue un mouvement de rotation autour de l'axe des  $x$  lorsque  $z$  varie de  $-L/2$  à  $L/2$  en passant par l'axe des  $y$  pour  $z = 0$ .

Les graphiques de la figure 30 montrent les différentes projections de la trajectoire du champ magnétique  $\Re \left[ \vec{B}^k(0, y, z) \exp(-i\omega_k t) \right]$  au point  $(x, y, z) = (0, R/2, -L/2)$  dans le cas  $N = 16 \equiv 0[4]$ . D'après la démonstration qui précède, on s'attend à retrouver les trajectoires du cas  $y = 0$  en permutant  $B_x^k(0, y, z)$  (respectivement  $B_y^k(0, y, z)$ ) et  $B_y^k(y, 0, z)$  (respectivement  $B_x^k(y, 0, z)$ ). C'est effectivement bien ce que l'on peut observer : les graphiques sont obtenus à partir de ceux de la figure en échangeant les rôles de  $B_x^k$  et  $B_y^k$ , c'est-à-dire en permutant le premier graphique de  $\pi/2$  et en échangeant les deux derniers graphiques (voir la figure 26).

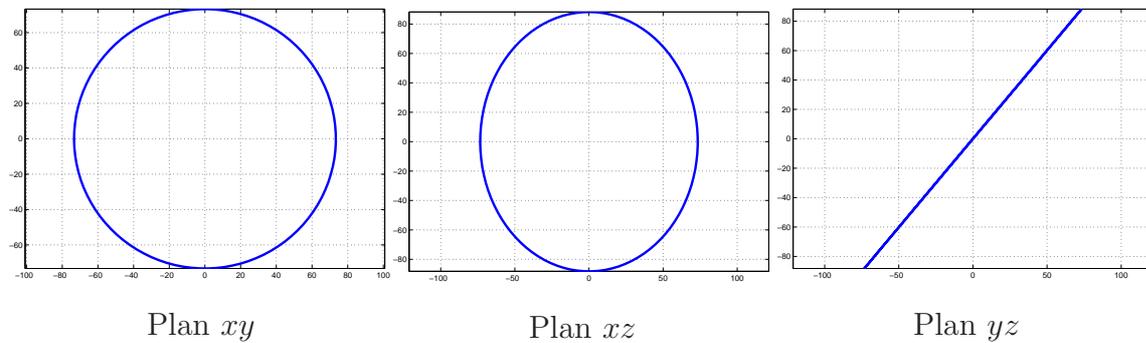


FIG. 30 – Projections sur les différents plans pour  $(0, R/2, -L/2)$

Sur les figures 31 et 32, on a fait les mêmes simulations que sur les figures 26 et 30 mais avec une antenne à  $N = 14$  branches. On retrouve bien les équations (4.44) sur la figure 31 et on constate que les différents graphiques obtenus pour  $N = 16$  et  $N = 14$  sont similaires. Les différents graphiques de la figure 32 illustrent bien les équations (4.47) et sont similaires à ceux obtenus pour le cas  $N = 16$ . Comme dans le cas  $N = 16$ , ils sont obtenus à partir de ceux de la figure 31 en échangeant les rôles de  $B_x^k$  et  $B_y^k$  bien que cela n'apparaisse pas lors de la démonstration.

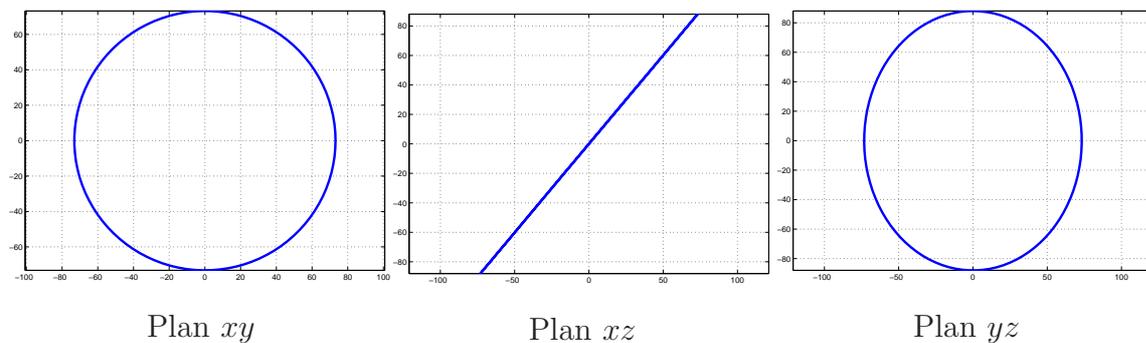
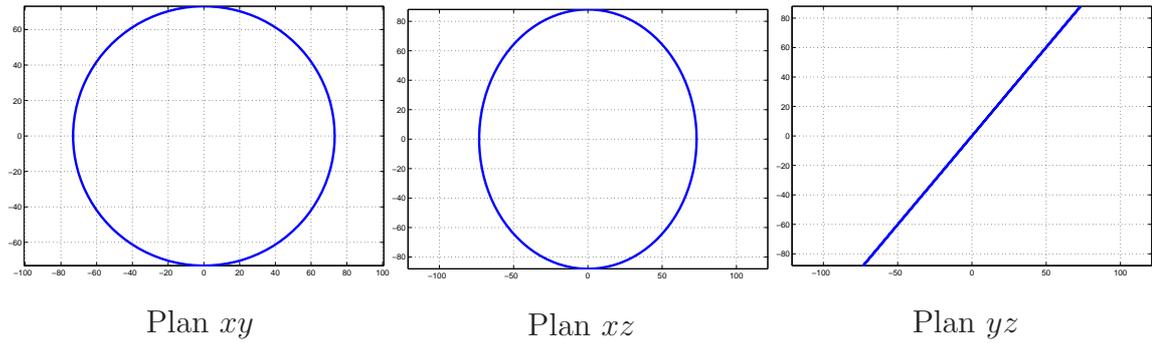


FIG. 31 – Projections sur les différents plans pour  $(R/2, 0, -L/2)$  et  $N = 14$

FIG. 32 – Projections sur les différents plans pour  $(0, R/2, -L/2)$  et  $N = 14$ **Remarque 4.5.2 :**

On montre (voir la proposition 4.9.1) que sur l'axe de l'antenne, c'est-à-dire pour  $x = y = 0$ ,  $K_z^1(0, 0, z) = 0$  et que  $K_x^1(0, 0, z) = K_y^1(0, 0, z)$ . Les trajectoires associées sont donc des cercles contenus dans le plan  $z = 0$ .

## 4.6 Symétrie

On va poursuivre cette étude des propriétés du champ  $\vec{B}^k$  en énonçant deux résultats de symétrie qui vont permettre de réduire le nombre de pulsations ainsi que de restreindre le maillage utilisé pour le calcul du champ.

**Proposition 4.6.1 : symétrie par rapport à  $k$** 

Les champs magnétiques  $\vec{B}^k$  sont reliés entre eux par la relation suivante :

$$(4.48) \quad \forall 1 \leq k \leq N - 1, \vec{B}^{N-k} = \overline{\vec{B}^k}.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $1 \leq k \leq N - 1$ .

D'après la formule (4.9), on a :

$$\begin{aligned} \vec{B}^{N-k} = & \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[a(\theta, L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z - L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[a(\theta, -L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z + L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z + L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right] \\ & + 2i \exp\left(-\frac{i(N-k)\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{(N-k)\pi}{N}\right) \frac{1}{(x - R \cos \theta_j)^2 + (y - R \sin \theta_j)^2} \\ & \times \left( \begin{array}{c} -(y - R \sin \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ (x - R \cos \theta_j) \left( \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, L/2)}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2(\theta_j, -L/2)}} \right) \\ 0 \end{array} \right) \exp(i(N-k)\theta_j). \end{aligned}$$

Comme

$$\exp\left(-\frac{i(N-k)\pi}{N}\right) = \exp(-i\pi) \exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right) = -\exp\left(\frac{ik\pi}{N}\right),$$

que

$$\exp(i(N-k)\theta_j) = \exp\left(i(N-k)\frac{2\pi(j-1)}{N}\right) = \exp(-ik\theta_j),$$

et que

$$\sin\left(\frac{(N-k)\pi}{N}\right) = \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{N}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right),$$

on obtient :

$$\vec{B}^{N-k} = \vec{B}^k.$$

■

Afin d'illustrer la proposition 4.6.1, on a représenté sur le premier graphique de la figure 33 les fonctions

$$\left| \begin{array}{l} [-L/2, L/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \max \left\{ \left| B_x^{N-k}(x, y, z) - \overline{B}_x^k(x, y, z) \right| ; (x, y) \in \Omega \right\} \end{array} \right.$$

où  $B_x^k$  désigne la composante suivant  $x$  du vecteur  $\vec{B}^k$ .

Les deuxième et troisième graphiques correspondent respectivement à la composante suivant  $y$  et à celle suivant  $z$ .

Comme  $N = 16$ , on a fait varier  $k$  de 1 à 8 dans les simulations.

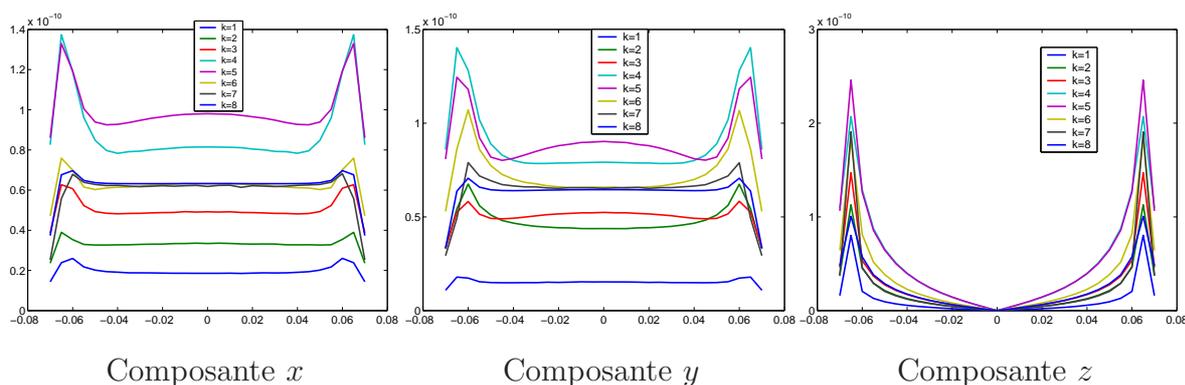


FIG. 33 – Illustration de  $\vec{B}^{N-k} = \vec{B}^k$

On observe sur la figure 33 une erreur maximale de l'ordre de  $10^{-10}$  pour  $z = \pm 0.064$ , c'est-à-dire au niveau des anneaux terminaux. Compte tenu des erreurs d'arrondi, cette simulation donne une belle illustration de la propriété 4.6.1.

Cette propriété des champs magnétiques justifie de ne faire varier  $k$  que de 1 à  $N/2$  et non de 1 à  $N$  par la suite.

**Remarque 4.6.2 :**

La proposition 4.6.1 est cohérente avec la relation (4.45). En effet, en prenant la partie réelle de (4.48) et en utilisant le fait que  $\omega_{N-k} = \omega_k$ , pour  $k = 1, \dots, N$ , on généralise (4.45) :

$$\Re \left( \overrightarrow{B^{N-k}} e^{-i\omega_{N-k}t} \right) = \Re \left( \overrightarrow{B^k} e^{i\omega_k t} \right).$$

On va maintenant énoncer un résultat permettant de ne considérer qu'une partie du pavé de discrétisation pour le calcul du champ.

**Proposition 4.6.3 : symétrie de  $\overrightarrow{B^k}$** 

Soit  $1 \leq k \leq N - 1$ .

Pour  $(x, y)$  donné, la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ z \longmapsto (B_x^k(x, y, z), B_y^k(x, y, z)) \end{array} \right.$$

est une fonction paire et la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto B_z^k(x, y, z) \end{array} \right.$$

est une fonction impaire.

DÉMONSTRATION. Soient  $1 \leq k \leq N - 1$  et  $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

On note  $z' = -z$ .

On a alors les relations suivantes :

$$z' - L/2 = -(z + L/2) \text{ et } z' + L/2 = -(z - L/2).$$

Afin de garder une écriture compacte, on rajoute la dépendance en  $z$  dans la fonction  $a(\theta, Z)$  définie lors du calcul du champ magnétique (voir (4.6)), c'est-à-dire :

$$a(\theta, z, Z)^2 = (x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + (z - Z)^2.$$

Avec cette notation, on obtient :

$$a(\theta, z', L/2)^2 = a(\theta, z, -L/2)^2 \text{ et } a(\theta, z', -L/2)^2 = a(\theta, z, L/2)^2.$$

Comme les termes  $(z - Z)$  et  $a(\theta, z, Z)$  apparaissent respectivement au numérateur et au dénominateur des composantes suivant  $x$  et  $y$  et que les deux intégrales ont des signes opposés, ces composantes sont paires. Par contre la composante suivant  $z$  n'a pas le terme  $(z - Z)$  au numérateur donc elle est impaire. ■

Afin d'illustrer numériquement la proposition 4.6.3, on a représenté, sur le premier graphique de la figure 34, les fonctions

$$\left| \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \max \{ |B_x^k(x, y, z) - B_x^k(x, y, -z)|; (x, y) \in \Omega \} \end{array} \right.$$

En accord avec la proposition 4.6.1, comme  $N = 16$ , on n'a représenté que les cas  $k = 1, \dots, 8$ . Les deux autres graphiques de la figure 34 correspondent aux autres

composantes.

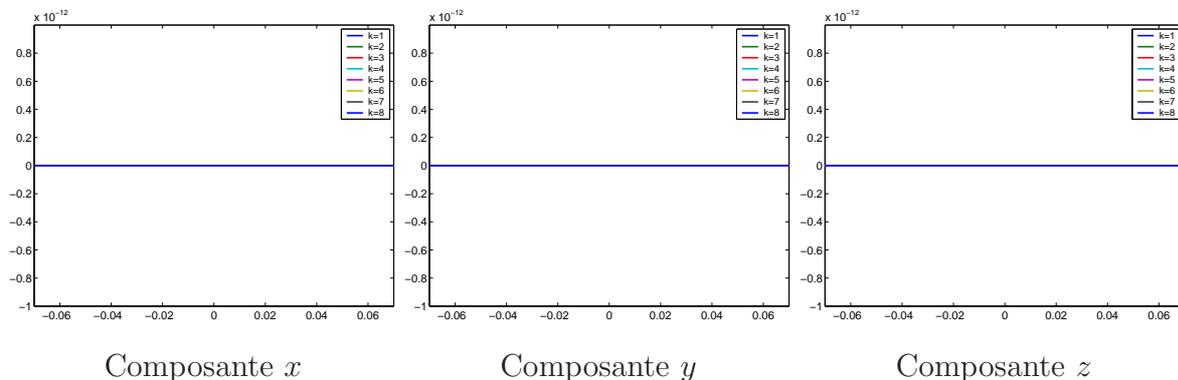


FIG. 34 – Illustration des symétries de  $\vec{B}^k$

On observe sur les différents graphiques de la figure 34 une erreur nulle : cette simulation est donc une belle illustration de la propriété 4.6.3.

Grâce aux deux résultats de symétrie des propositions 4.6.1 et 4.6.3, on va pouvoir restreindre les simulations aux cas  $k = 1, \dots, N/2$  et au maillage  $\Omega \times [0, L/2]$ .

## 4.7 Orthogonalité

Les propriétés de symétrie ci-dessus présentent un intérêt numérique évident puisqu’elles permettent de réduire de manière significative les calculs. Les propriétés que nous allons mettre en évidence maintenant correspondent aux propriétés recherchées pour un usage en IRM.

### Propriété 4.7.1 : orthogonalité du champ $\vec{B}^k$

Lorsque l’on est “proche” du centre de l’antenne, la composante suivant  $z$  du champ magnétique associé à la pulsation  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$  est “négligeable” et celui-ci est “orthogonal” à l’axe des  $z$ .

Comme tous les autres résultats énoncés sous forme de propriété et non de proposition, ce résultat ne sera pas démontré mais seulement illustré numériquement. Cependant, on peut vérifier facilement à partir des formules (4.9) et (4.6) qu’au centre de l’antenne le champ magnétique n’a pas de composante suivant  $z$ . Grâce à la continuité du champ magnétique on en déduit que celle-ci reste petite dans un voisinage du centre de l’antenne. Par contre, on ne connaît pas la taille de ce voisinage.

Afin d’illustrer la propriété 4.7.1, on a représenté, sur le premier graphique de la figure 35, la fonction

$$\left| \begin{array}{l} [0, L/2] \longrightarrow \\ z \longmapsto \end{array} \right. \max \left\{ \frac{\mathbb{R}}{|B_z^k(x, y, z)|}; (x, y) \in \Omega \right\}$$

pour les pulsations  $\omega_1, \dots, \omega_8$ .

Le pic que l'on observe pour  $z = 0,064 = L/2$  est dû à l'effet de l'anneau terminal du haut. Si l'on restreint les variations entre 0 et 0,25 (voir le deuxième graphique), on constate que seules les fonctions associées à  $k = 1$  et  $k = 2$  restent petites lorsque l'on s'écarte de  $z = 0$ . Sur  $[0, 0,032] = [0, L/4]$ , la fonction associée à  $k = 1$  reste inférieure à 0,25 : la composante suivant  $z$  du champ magnétique est donc négligeable par rapport à celle suivant  $x$ .

On retrouve des comportements similaires sur les deux autres graphiques où l'on a représenté la même fonction en remplaçant la composante suivant  $x$  par celle suivant  $y$ .

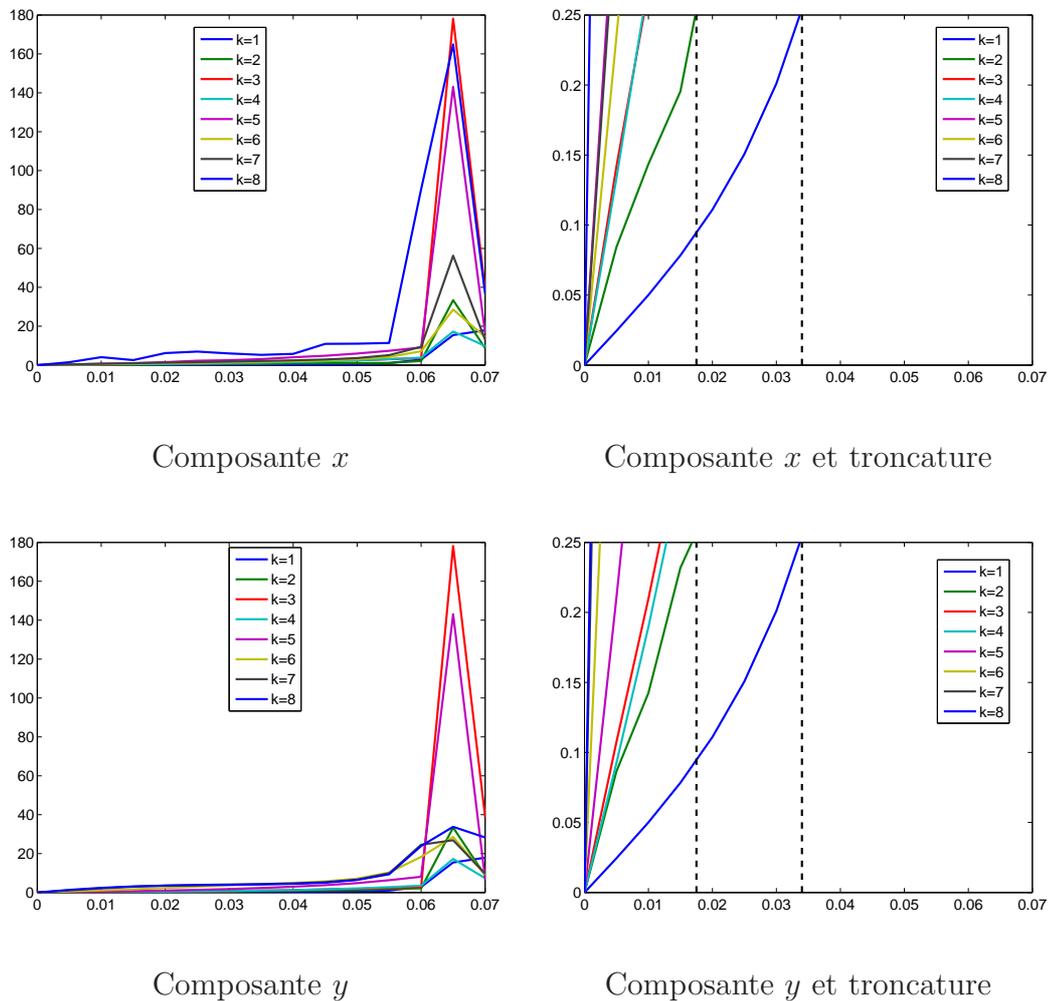


FIG. 35 – Module du rapport des composantes de  $\vec{B}^k$

On remarque encore sur les graphiques de la figure 35 que plus  $k$  est petit plus la composante suivant  $z$  du champ magnétique est faible par rapport à celle suivant  $x$  et  $y$ . On peut donc penser que la pulsation utilisée lors des applications est  $\omega_1$ . Ceci sera confirmée dans la section suivante par l'étude des propriétés d'homogénéité du champ magnétique associé (voir la section suivante).

**Remarque 4.7.2 :**

*La propriété d'orthogonalité n'est qu'une propriété de comparaison. Elle ne dit rien concernant l'ordre de grandeur de la composante suivant  $z$  du champ magnétique  $\vec{B}^k$ . Elle assure juste que cette dernière est négligeable par rapport aux autres, c'est-à-dire que le champ  $\vec{B}^k$  est orthogonal à l'axe des  $z$ . Cependant, comme le coefficient  $\frac{\mu_0}{4\pi}$  vaut  $10^{-7}$ , les composantes de  $\vec{B}^k$  sont négligeables devant le champ statique  $\vec{B}_0$  qui est de l'ordre du Tesla.*

Grâce à la propriété 4.7.1, on peut répondre par l'affirmative à l'une des attentes de l'imagerie médicale : le champ magnétique produit par l'antenne cage d'oiseau est orthogonal au champ magnétique statique et uniforme  $\vec{B}_0$  à condition d'orienter l'axe de l'antenne selon la direction de celui-ci.

## 4.8 Homogénéité

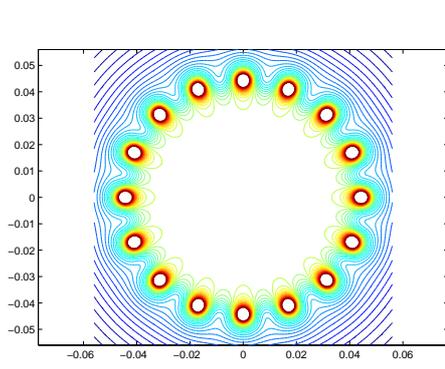
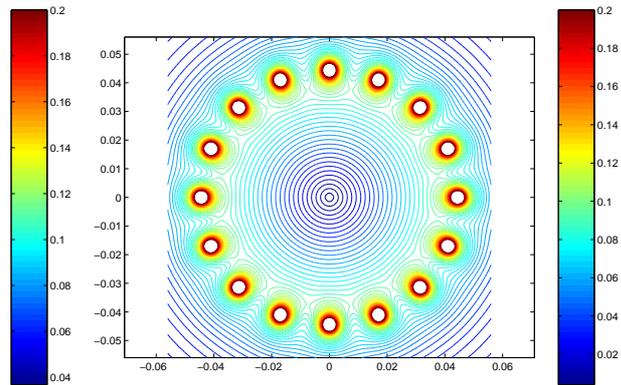
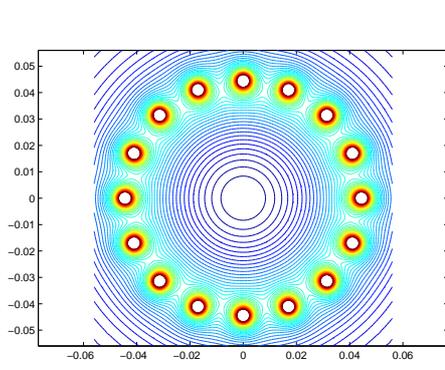
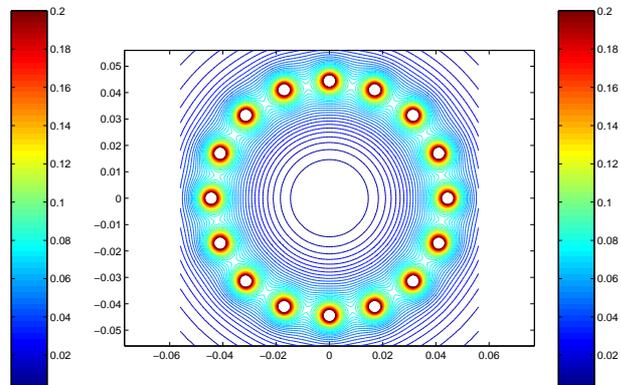
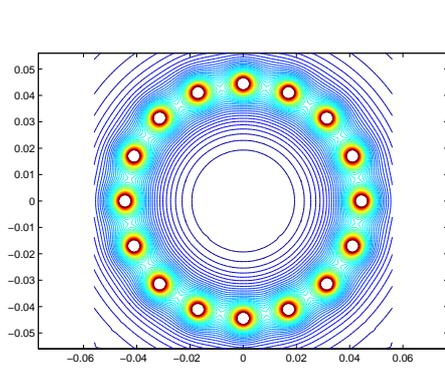
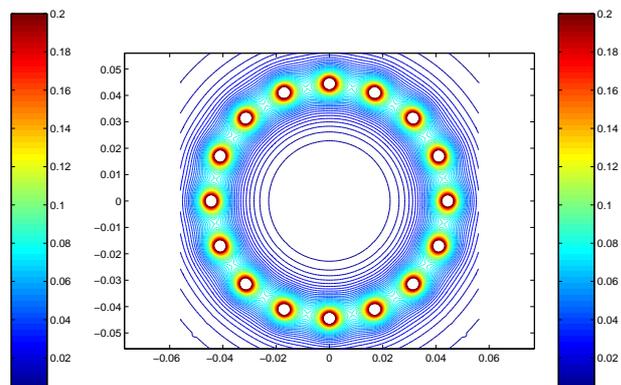
Après avoir étudié la direction du champ magnétique créé par l'antenne cage d'oiseau, on va maintenant s'intéresser à son homogénéité en fonction de la fréquence de résonance choisie et du nombre de branches de l'antenne.

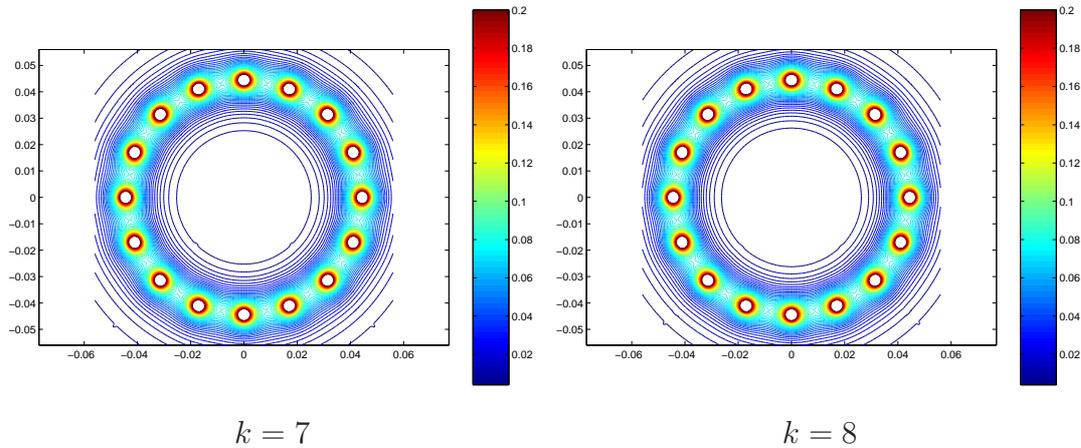
### Propriété 4.8.1 : homogénéité du champ magnétique à $N$ fixé

*Pour un nombre de branches  $N$  fixé, le champ magnétique  $\vec{B}^1$  associé à la pulsation  $\omega_1$  est homogène au centre de l'antenne. L'homogénéité du champ  $\vec{B}^k$  associé à la pulsation  $\omega_k$ ,  $k = 2, \dots, N - 1$ , s'améliore avec  $k$  mais reste inférieure à celle du champ  $\vec{B}^1$ .*

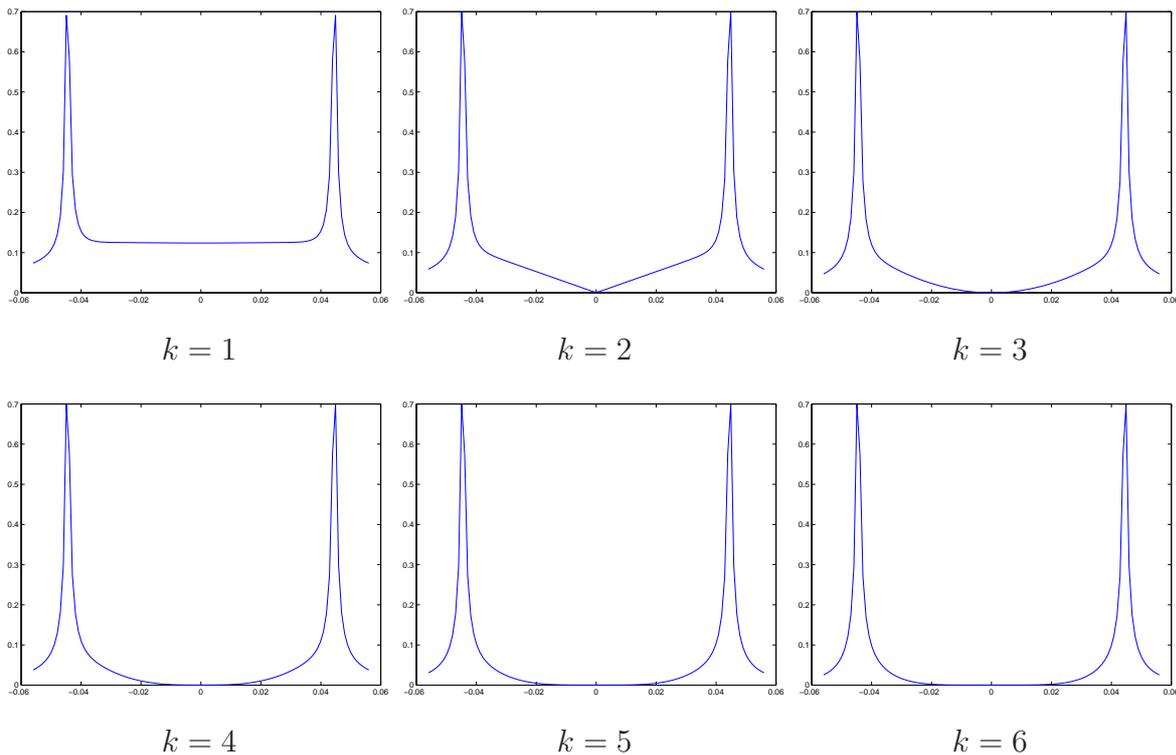
Cette propriété est illustrée par les figures 36, 37 et 38. Afin de pouvoir comparer entre eux les différents champs qui peuvent avoir des échelles de variation différentes, on n'a pas représenté la norme du champ  $\vec{B}^k$  mais son quotient par sa borne supérieure. On est ainsi ramené à l'étude de champ variant entre 0 et 1.

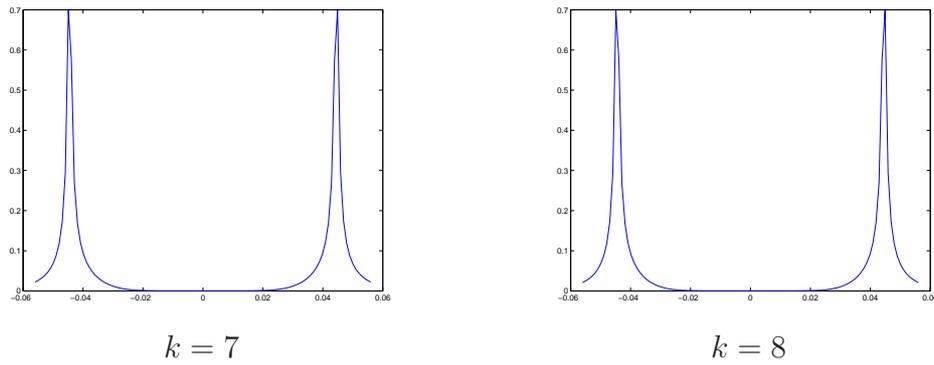
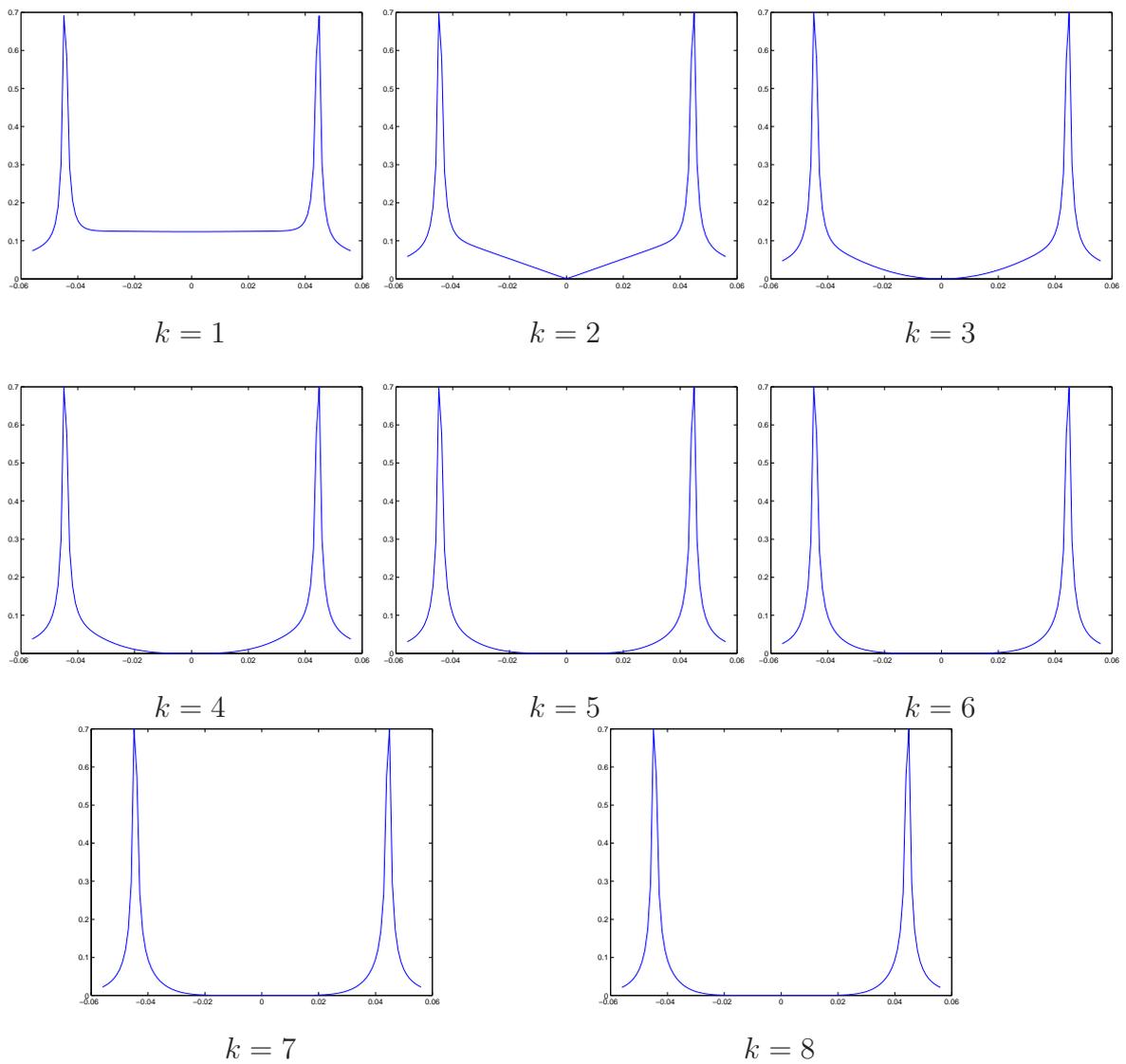
Sur la figure 36, on a représenté, pour chaque pulsation  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 8$ , 50 lignes de niveaux du module du champ magnétique équiréparties entre 0 et 0,2 dans le plan  $z = 0$ . On constate que seul l'intérieur de l'antenne correspondant à la pulsation  $\omega_1$  ne contient pas de cercle. Pour toutes les autres pulsations, le champ magnétique n'est donc pas homogène dans le plan  $z = 0$  mais seulement dans un cercle centré à l'origine et dont le rayon croît avec  $k$ .

 $k = 1$  $k = 2$  $k = 3$  $k = 4$  $k = 5$  $k = 6$

FIG. 36 – Lignes de niveaux pour  $N = 16$  et  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 

Le résultat d'homogénéité 4.8.1 est confirmé par l'étude de la variation de la norme de  $\vec{B}^k$  le long des axes des  $y$  et des  $x$  (voir les figures 37 et 38) : seules les courbes correspondant à  $\omega_1$  sont horizontales non nulles au centre de l'antenne. La présence de pic pour  $z = \pm 0,064 = \pm L/2$  dans les graphiques de la figure 38 est dû au fait que  $N = 16 \equiv 0[4]$ . En effet, compte tenu de l'orientation choisie pour le repère (voir page 47), il y a aussi des branches sur l'axe des  $y$ .



FIG. 37 – Variation le long de l'axe des  $y$  pour  $N = 16$  et différents  $k$ FIG. 38 – Variation le long de l'axe des  $x$  pour  $N = 16$  et différents  $k$ 

Les figures 37 et 38 confirment l'intérêt d'utiliser la pulsation  $\omega_1$  : c'est la seule pour laquelle le champ magnétique associé n'est pas nul au centre de l'antenne.

Les champs associés aux autres pulsations de résonance ne peuvent donc pas exciter les atomes d'hydrogène du patient (l'annulation des champs le long de l'axe est démontrée à la proposition 4.9.1).

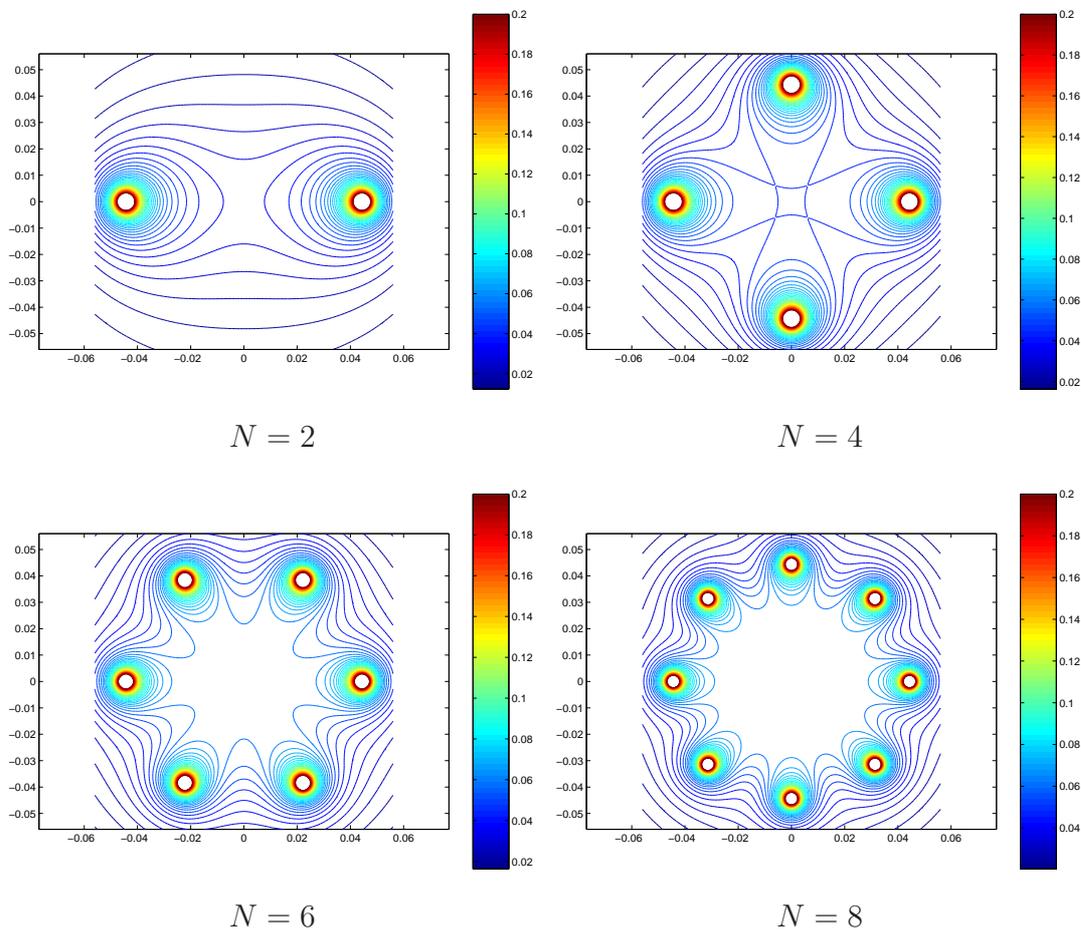
Afin d'améliorer l'homogénéité de l'antenne, on peut, pour une pulsation donnée, augmenter le nombre de branches de l'antenne. En effet, on a la propriété suivante.

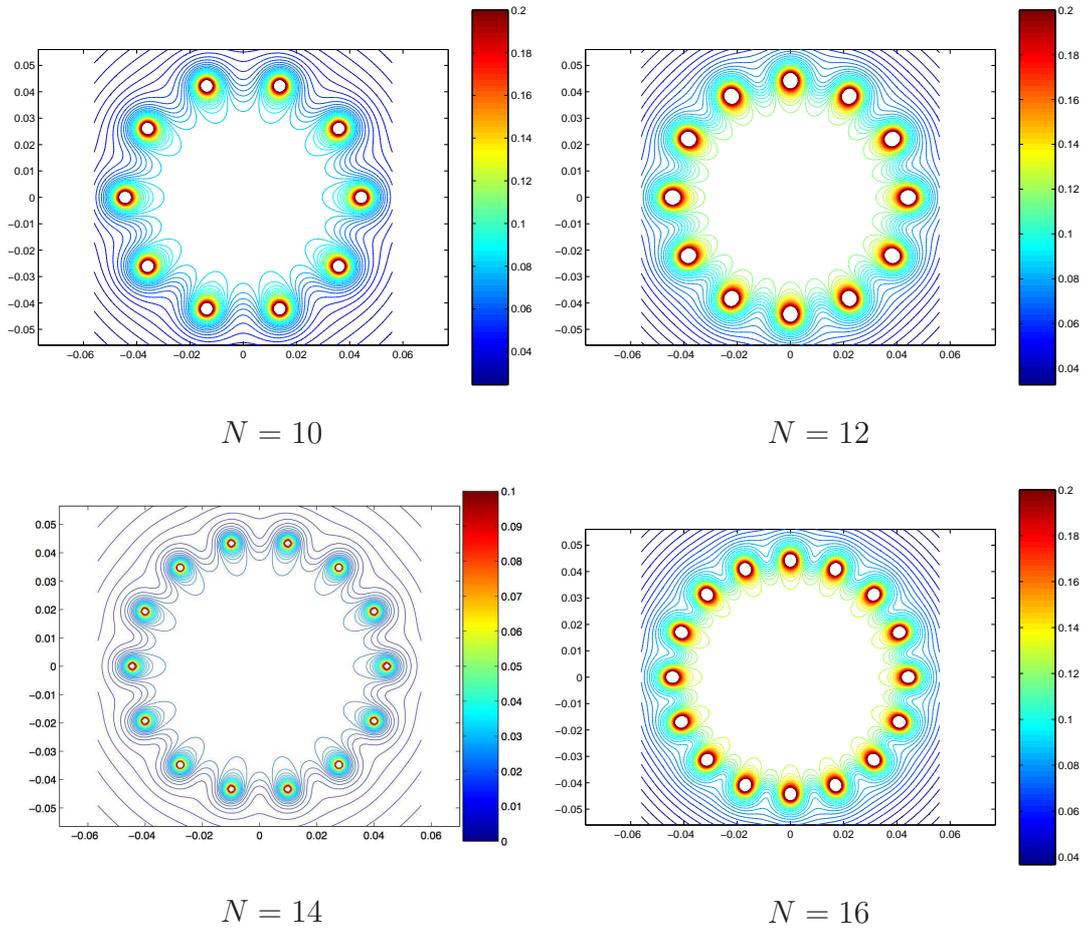
**Propriété 4.8.2 : homogénéité du champ magnétique pour  $k$  fixé**

*Pour une pulsation de résonance fixée, le champ magnétique produit par l'antenne cage d'oiseau est d'autant plus homogène que le nombre de branches est grand.*

Compte tenu de la propriété 4.8.1, pour illustrer numériquement cette propriété 4.8.2, on a choisi de fixer  $k = 1$ . Comme précédemment, afin de pouvoir comparer entre eux les différents champs qui peuvent avoir des échelles de variation différentes, on n'a pas représenté la norme du champ  $\vec{B}^1$  mais son quotient par sa borne supérieure : on est ainsi ramené à l'étude de champ variant entre 0 et 1.

On a représenté, sur la figure 39, 50 lignes de niveaux du module du champ magnétique associé à la pulsation  $\omega_1$  équiréparties entre 0 et  $0\pi 2$  dans le plan  $z = 0$  pour un nombre de branches variant entre 2 et 16. On constate que plus l'antenne possède de branches plus la partie centrale, dans laquelle le champ est homogène, est grande.



FIG. 39 – Lignes de niveaux pour  $k = 1$  et différents  $N$ 

La propriété 4.8.2 justifie l'utilisation d'un nombre élevé de brins dans les applications IRM.

**Remarque 4.8.3 : a propos du cas  $N = 14$**

*On a réalisé tous les calculs précédents à l'aide d'un unique maillage. Dans le cas  $N = 14$ , ce maillage est plus proche des branches que dans les autres cas. Comme le champ  $B^1$  est obtenu à partir de la loi de Biot-Savart, son module a un maximum plus élevé pour  $N = 14$  que pour les autres valeurs de  $N$ . Comme on normalise le module du champ avant de le tronquer, les lignes de niveaux sont plus concentrées autour des branches que dans les autres cas. Ceci explique que l'échelle des couleurs s'arrête à 0,1 au lieu de 0,2 pour  $N = 14$ .*

## 4.9 Comportement le long de l'axe

On va maintenant étudier la décroissance du champ magnétique le long de l'axe de l'antenne. On se place le long de l'axe de l'antenne afin de travailler avec des expressions plus simples.

### Proposition 4.9.1 : décroissance du champ magnétique

Soit  $k \in \{2, \dots, N-2\}$ .

Alors, le champ magnétique associé est nul le long de l'axe de l'antenne.

Si  $k \in \{1, N-1\}$ , le champ magnétique associé admet le développement limité suivant lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$  :

$$(4.49) \quad \begin{aligned} \vec{B}^k(0, 0, z) &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} N \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \text{sign}(z) \\ &\times \left[ \frac{RL}{z^3} + \left(\frac{RL^3}{2} - \frac{9R^3L}{2}\right) \frac{1}{z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right] \begin{pmatrix} \delta_{k,1} - \delta_{k,N-1} \\ i(\delta_{k,1} + \delta_{k,N-1}) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Le champ magnétique sur l'axe est obtenu en posant  $x = y = 0$  dans la formule (4.9) :

$$\begin{aligned} \vec{B}^k(0, 0, z) &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z - L/2) R \sin \theta d\theta \\ R^2 d\theta \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{1}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z + L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z + L/2) R \sin \theta d\theta \\ R^2 d\theta \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \frac{1}{R^2} \right. \\ &\quad \left. \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta_j \left( \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\ R \cos \theta_j \left( \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \exp(ik\theta_j). \end{aligned}$$

Après calcul des intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{B}^k(0, 0, z) = & \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \sum_{j=1}^N \left[ \left( \frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} - \frac{(z + L/2) R}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right) \right. \\ & \times \begin{pmatrix} \sin \theta_{j+1} - \sin \theta_j \\ \cos \theta_j - \cos \theta_{j+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \\ & \times \begin{pmatrix} \sin \theta_j \left( \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\ - \cos \theta_j \left( \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \left. + \frac{2\pi}{N} \left( \frac{R^2}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} - \frac{R^2}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \exp(ik\theta_j). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^N \cos \theta_j \exp(ik\theta_j) \\ = & \sum_{j=1}^N \left[ \exp\left(\frac{2i\pi(j-1)}{N}\right) + \exp\left(-\frac{2i\pi(j-1)}{N}\right) \right] \exp\left(\frac{2ik\pi(j-1)}{N}\right) \\ = & \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{2i\pi(k+1)(j-1)}{N}\right) + \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{2i\pi(k-1)(j-1)}{N}\right). \end{aligned}$$

On est donc ramené au calcul de deux sommes des  $N$  premiers termes d'une suite géométrique de raison respectivement  $\exp\left(\frac{2i\pi(k+1)}{N}\right)$  et  $\exp\left(\frac{2i\pi(k-1)}{N}\right)$ . Comme  $1 \leq k \leq N-1$ , ces raisons valent 1 si et seulement si  $k$  vaut respectivement  $N-1$  et 1. Dans ces cas, la somme correspondante vaut  $N$ . Dans les autres cas, la raison étant une racine  $N$ -ième de l'unité, la somme est nulle. D'où :

$$2 \sum_{j=1}^N \cos \theta_j \exp(ik\theta_j) = N(\delta_{k, N-1} + \delta_{k, 1}).$$

De même, on montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2i \sum_{j=1}^N \sin \theta_j \exp(ik\theta_j) = N(\delta_{k,N-1} - \delta_{k,1}), \\ 2 \sum_{j=1}^N \cos \theta_{j+1} \exp(ik\theta_j) = N(\delta_{k,N-1} + \delta_{k,1}) \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\right), \\ 2i \sum_{j=1}^N \sin \theta_{j+1} \exp(ik\theta_j) = N(\delta_{k,N-1} - \delta_{k,1}) \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\right), \\ \sum_{j=1}^N \exp(ik\theta_j) = N\delta_{k,0}. \end{array} \right.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{B}^k(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} & \left[ \left( \frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} - \frac{(z + L/2) R}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right) \right. \\ & \times \frac{N}{2i} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\right) \right] \begin{pmatrix} -(\delta_{k,N-1} - \delta_{k,1}) \\ i(\delta_{k,N-1} + \delta_{k,1}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \left( \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\ & \times N \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \begin{pmatrix} -(\delta_{k,N-1} - \delta_{k,1}) \\ i(\delta_{k,N-1} + \delta_{k,1}) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \left. + 2\pi \left( \frac{R^2}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} - \frac{R^2}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{k,0} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les égalités précédentes et le fait que

$$1 - \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\right) = 2i \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{B}^k(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} & \left[ \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \left( \frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} \right. \right. \\ & + \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{(z + L/2) R}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \\ & \left. \left. - \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \begin{pmatrix} N(\delta_{k,1} - \delta_{k,N-1}) \\ Ni(\delta_{k,1} + \delta_{k,N-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + 2\pi\delta_{k,0} \left( \frac{R^2}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} - \frac{R^2}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Comme  $k \geq 1$ , le dernier terme de l'expression précédente est nul et on obtient :

$$(4.50) \quad \begin{aligned} \vec{B}^k(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left[ N \exp\left(-\frac{ik\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{N}\right) \left( \frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} - \frac{(z + L/2) R}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \times \begin{pmatrix} \delta_{k,1} - \delta_{k,N-1} \\ i(\delta_{k,1} + \delta_{k,N-1}) \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

On déduit de la formule (4.50) que le champ magnétique est nul le long de l'axe de l'antenne si  $k \notin \{1, N - 1\}$ .

Pour achever la démonstration de la propriété 4.9.1 il reste donc à faire le développement limité dans le cas où  $k \in \{1, N - 1\}$ .

On a, pour  $|z| > L/2$  :

$$\begin{aligned} \frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} &= R \left( z - \frac{L}{2} \right) \left[ \left( z - \frac{L}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \left[ 1 + \left( \frac{R}{z - L/2} \right)^2 \right]^{-3/2} \\ &= \text{sign} \left( z - \frac{L}{2} \right) \frac{R}{(z - L/2)^2} \left[ 1 - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^2} + o\left(\frac{1}{z^3}\right) \right]. \end{aligned}$$

où

$$\text{sign}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{si } \zeta \geq 0, \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme on s'intéresse au comportement lorsque  $|z| > L/2$ ,

$$\text{sign} \left( z - \frac{L}{2} \right) = \text{sign}(z).$$

D'où :

$$\frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} = \frac{\text{sign}(z) R}{(z - L/2)^2} \left[ 1 - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^2} + o\left(\frac{1}{z^3}\right) \right].$$

De même, on obtient :

$$\frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} = \frac{\text{sign}(z)}{R} \left[ 1 - \frac{R^2}{2(z - L/2)^2} + \frac{3R^4}{8(z - L/2)^4} + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right].$$

En additionnant les deux termes précédents on aboutit à :

$$\begin{aligned} &\frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \\ &= \text{sign}(z) \left[ \frac{1}{R} + \frac{R}{2(z - L/2)^2} - \frac{9R^3}{8(z - L/2)^4} + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right]. \end{aligned}$$

En remplaçant  $L$  par  $-L$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{(z + L/2) R}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \\ &= \text{sign}(z) \left[ \frac{1}{R} + \frac{R}{2(z + L/2)^2} - \frac{9R^3}{8(z + L/2)^4} + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right) \\ & - \left( \frac{(z + L/2) R}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\ (4.51) \quad &= \text{sign}(z) \left( \frac{R}{2} \left[ \frac{1}{(z - L/2)^2} - \frac{1}{(z + L/2)^2} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{9R^3}{8} \left[ \frac{1}{(z - L/2)^4} - \frac{1}{(z + L/2)^4} \right] + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right). \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - L/2)^2} &= \frac{1}{z^2} \left[ 1 + \frac{L}{z} + \frac{3L^2}{4z^2} + \frac{L^3}{2z^3} + o\left(\frac{1}{z^3}\right) \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{L}{z^3} + \frac{3L^2}{4z^4} + \frac{L^3}{2z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant  $L$  par  $-L$ , on obtient :

$$\frac{1}{(z + L/2)^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{L}{z^3} + \frac{3L^2}{4z^4} - \frac{L^3}{2z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right).$$

D'où :

$$\frac{1}{(z - L/2)^2} - \frac{1}{(z + L/2)^2} = \frac{2L}{z^3} + \frac{L^3}{z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right).$$

De même,

$$\frac{1}{(z - L/2)^4} - \frac{1}{(z + L/2)^4} = \frac{4L}{z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right).$$

En reportant dans (4.51), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{(z - L/2) R}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z - L/2}{R\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right) \\ & - \left( \frac{(z + L/2) R}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z + L/2}{R\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} \right) \\ &= \text{sign}(z) \left( \frac{RL}{z^3} + \left[ \frac{RL^3}{2} - \frac{9R^3L}{2} \right] \frac{1}{z^5} + o\left(\frac{1}{z^5}\right) \right). \end{aligned}$$

D'où le résultat en reportant dans (4.50). ■

**Remarque 4.9.2 :**

On vient de démontrer que pour  $k \in \{2, \dots, N - 2\}$ ,

$$\overrightarrow{B}^{N-k}(0, 0, z) = (0, 0, 0) = \overrightarrow{B}^k(0, 0, z),$$

ce qui est cohérent relativement à la proposition 4.9.1. D'autre part, le développement associé à  $k = N - 1$  est bien le conjugué de celui obtenu pour  $k = 1$ .

Afin d'illustrer la propriété 4.9.1, on a tracé quatre graphiques : celui de la figure 40 correspond au cas  $\omega = \omega_2, \dots, \omega_8$  (et donc aussi aux cas  $\omega = \omega_9, \dots, \omega_{14}$  d'après la proposition 4.6.1) tandis que ceux des figures 41 et 42 correspondent aux cas  $\omega = \omega_1$  (et donc aussi aux cas  $\omega = \omega_{N-1}$  d'après la proposition 4.6.1). Sur chaque graphique on a fait varier  $z$  entre  $1,1 \times L/2$  et  $100L$ .

Sur la figure 40, on a représenté les fonctions  $z \mapsto \left| \overrightarrow{B}^k(0, 0, z) \right|$  pour  $k = 2, \dots, 8$ . On observe un pic de l'ordre de  $10^{-12}$  pour  $z = 0,064 = L/2$  dû à la singularité des intégrales pour  $z = L/2$ . Partout ailleurs les valeurs des différentes courbes sont inférieure à  $10^{-13}$  : la figure 40 est donc une bonne illustration de la proposition 4.9.1.

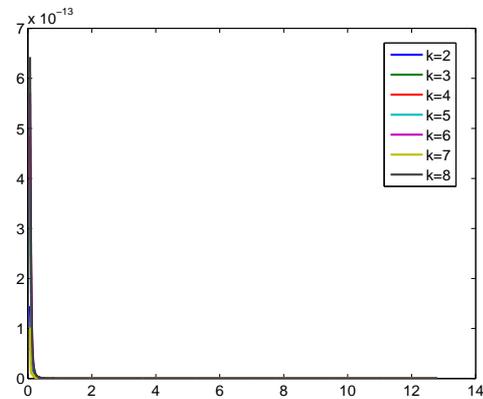


FIG. 40 – Champ le long de l'axe pour  $k \in \{2, \dots, 8\}$

Sur la figure 41, on a représenté la fonction  $z \mapsto |B_z^1(0, 0, z)|$ . Comme pour la figure 40, on constate que celle-ci est très proche du zéro machine. Cette courbe est donc, elle aussi, une bonne illustration de la propriété 4.9.1.

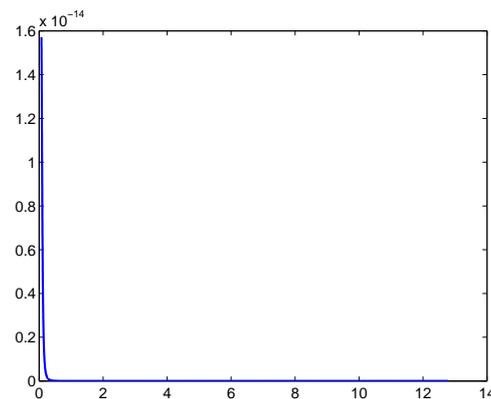


FIG. 41 – Composante suivant  $z$  pour  $k = 1$

Sur le premier graphique on a représenté par des ronds bleus  $\ln \left( \left| \overrightarrow{B}^1(0, 0, z) \right| \right)$  en fonction de  $\ln(z)$ . On a superposé à ce tracé la droite obtenue par régression linéaire à partir des points de cote  $z > 4L$ . La pente obtenue est  $-2,9917$ , valeur conforme au terme principal  $1/z^3$ . Afin de visualiser cette pente, on a aussi représenté sur ce

graphique un triangle rectangle dont les longueurs des côtés horizontaux et verticaux sont 0,5 et 1,5 respectivement.

Sur le deuxième graphique on a fait de même en remplaçant  $\vec{B}^1(0, 0, z)$  par la différence entre  $\vec{B}^1(0, 0, z)$  et le premier terme du développement limité. La pente obtenue est alors  $-5,0497$ , ce qui est de nouveau en accord avec la proposition 4.9.1. Sur ce graphique, la hauteur du côté vertical du triangle est 2,5.

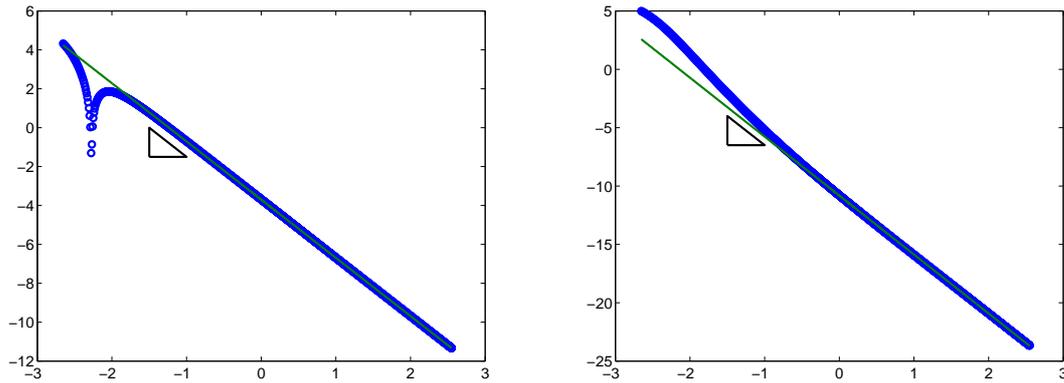


FIG. 42 – Champ le long de l'axe pour  $k = 1$

## 4.10 Cas de la pulsation caractéristique $\omega_0$

Après avoir donné l'expression du champ magnétique associé aux pulsations  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ , ainsi que quelques-unes de ses propriétés, on va maintenant s'intéresser au cas  $\omega = \omega_0$ . Le plan de l'étude va être le même que précédemment : on va d'abord donner l'expression du champ magnétique associé à cette pulsation puis énoncer des résultats de symétrie, d'orthogonalité et d'homogénéité. Pour finir, on décrira son comportement le long de l'axe de l'antenne.

Lorsque les tensions sources oscillent à la pulsation  $\omega_0$ , les courants circulant dans l'anneau terminal du haut sont tous égaux et opposés à ceux circulant dans celui du bas et il n'y a pas de courants à circuler dans les branches (voir page 41). On notera donc  $\vec{B}^{AR}$  le champ magnétique associé à la pulsation  $\omega_0$  et  $\vec{B}^{CR}$  celui associé à la pulsation  $\omega_{CR}$  :

- l'indice  $AR$  signifie anti-rotation,
- l'indice  $CR$  signifie co-rotation car les courants ne circulent que dans les anneaux terminaux et tournent dans le même sens (voir page 40).

## Formule

L'expression du champ magnétique au point  $M = (x, y, z)$  associé à la pulsation  $\omega_0$  s'obtient en posant  $k = 0$  dans la formule (4.9).

$$(4.52) \quad \begin{aligned} \vec{B}^{AR} &= \vec{B}_{ah}^{AR} + \vec{B}_{ab}^{AR} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{[a^2(\theta, L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z - L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \frac{1}{[a^2(\theta, -L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z + L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z + L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

avec  $a^2(\theta, Z) = (x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + (z - Z)^2$ .

## Symétrie

Comme dans le cas général, le champ  $\vec{B}^{AR}$  conserve les propriétés de symétrie de la proposition 4.6.3.

### Proposition 4.10.1 : symétrie de $\vec{B}^{AR}$

Pour  $(x, y)$  donné, la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ z \longmapsto (B_x^{AR}(x, y, z), B_y^{AR}(x, y, z)) \end{array} \right.$$

est une fonction paire et la fonction

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto B_z^{AR}(x, y, z) \end{array} \right.$$

est une fonction impaire.

DÉMONSTRATION. La démonstration a été faite dans le cas général (voir la proposition 4.6.3). ■

Afin d'illustrer numériquement la proposition 4.10.1, on a représenté les composantes de la fonction

$$\left| \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z \longmapsto \begin{pmatrix} \max \{ |B_x^{AR}(x, y, z) - B_x^{AR}(x, y, -z)|; (x, y) \in \Omega \} \\ \max \{ |B_y^{AR}(x, y, z) - B_y^{AR}(x, y, -z)|; (x, y) \in \Omega \} \\ \max \{ |B_z^{AR}(x, y, z) + B_z^{AR}(x, y, -z)|; (x, y) \in \Omega \} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

sur les différents graphiques de la figure 43.

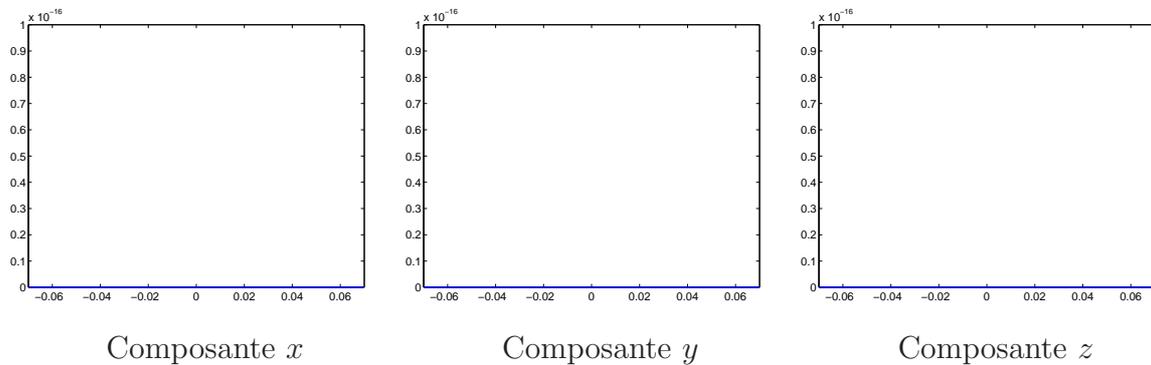


FIG. 43 – Illustration des symétries de  $\vec{B}^{AR}$

L'erreur observée sur les différents graphiques de la figure 43 est identiquement nulle : cette simulation est donc une bonne illustration de la proposition 4.10.1.

## Orthogonalité

### Propriété 4.10.2 : orthogonalité de $\vec{B}^{AR}$

Lorsque l'on est “proche” du centre de l'antenne, la composante suivant  $z$  du champ magnétique est “négligeable” et  $\vec{B}^{AR}$  est “orthogonal” à l'axe des  $z$ .

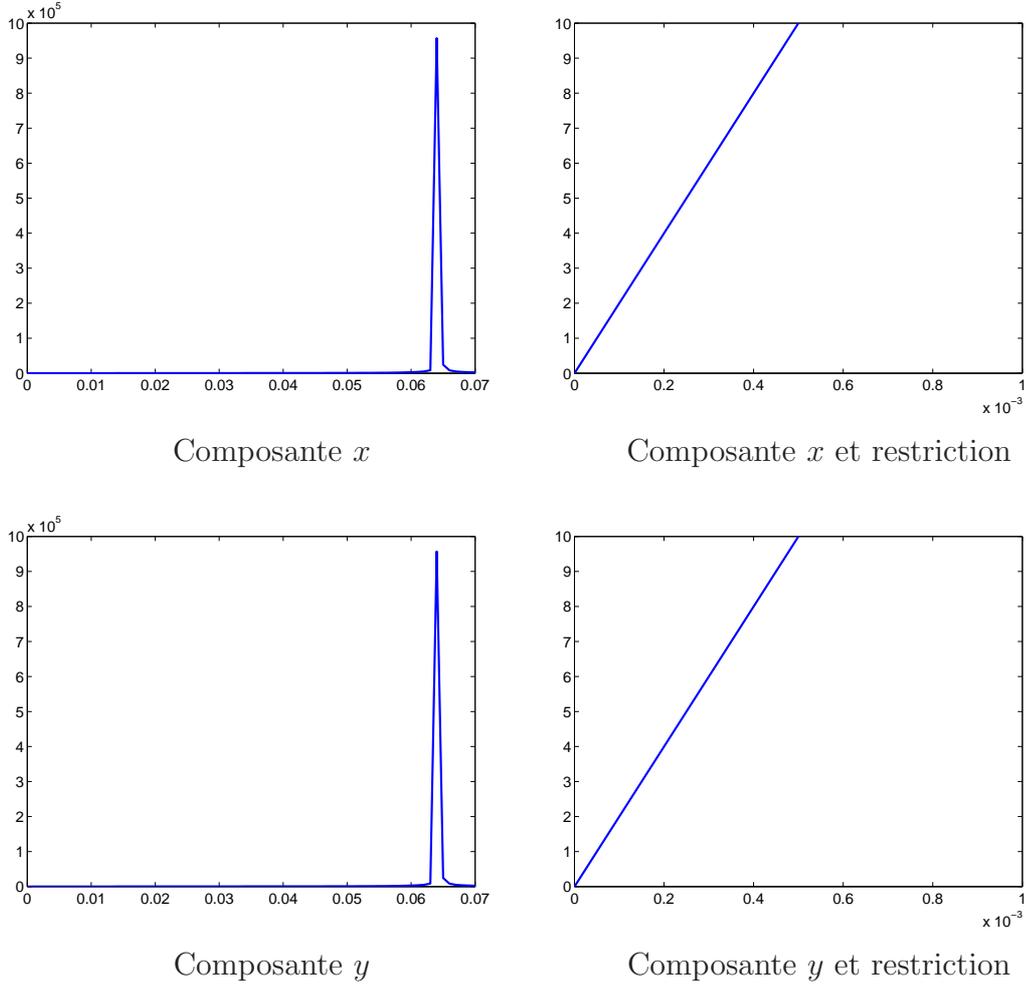
Contrairement au cas général  $k = 1, \dots, N - 1$ , aucun courant ne parcourt les branches dans le cas particulier de la pulsation  $\omega_0$ . Or, celui-ci engendrait un champ en tout point orthogonal à l'axe de l'antenne. On s'attend donc à ce que le domaine de validité de la propriété 4.10.2 soit restreint relativement au cas général.

Sur le premier graphique de la figure 44, on a représenté la fonction

$$\left| \begin{array}{l} [0; L/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \max \left\{ \frac{|B_z^{AR}(x, y, z)|}{|B_x^{AR}(x, y, z)|}; (x, y) \in \Omega \right\} \end{array} \right. .$$

Le pic observé pour  $z = 0,064 = L/2$  est beaucoup plus important que celui des graphiques de la figure 35. De plus, on constate sur le deuxième graphique que la composante suivant  $z$  devient très rapidement prépondérante par rapport à la composante suivant  $x$  (un demi millimètre suffit). Le champ  $\vec{B}^{AR}$  va donc rester beaucoup moins dans le plan  $xy$  que les champs étudiés précédemment.

Ceci est confirmé par les deux graphiques suivants où l'on a tracé la même fonction en remplaçant la composante suivant  $x$  par celle suivant  $y$ .

FIG. 44 – Rapport des modules des composantes de  $\vec{B}^{AR}$ 

## Homogénéité

Comme aucun courant ne circule dans les branches, le champ magnétique  $\vec{B}^{AR}$  ne dépend pas de  $N$  et son homogénéité n'augmentera pas avec le nombre de branches. Il est donc inutile de rechercher une propriété analogue à 4.8.2.

On va maintenant démontrer que le champ  $\vec{B}^{AR}$  n'est pas un champ homogène au voisinage de l'origine. Pour cela, on va tout d'abord prouver que les lignes de niveaux de  $\|\vec{B}^{AR}\|$  dans le plan  $z = 0$  sont des cercles, c'est-à-dire que  $\|\vec{B}^{AR}(x, y, 0)\|$  ne dépend que de  $x^2 + y^2$ .

**Proposition 4.10.3 :**

La norme  $\|\vec{B}^{AR}\|$  est une fonction de  $x^2 + y^2$  dans le plan  $z = 0$  :

$$(4.53) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|\vec{B}^{AR}(x, y, 0)\| \equiv f(r) = - \left| \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \right| LR \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta$$

avec

$$(4.54) \quad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ b^2(r, \beta) &= r^2 + R^2 + L^2/4 + 2rR \cos \beta. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$(4.55) \quad f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = \left| \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \right| \frac{3\pi LR^2}{[R^2 + L^2/4]^{5/2}}.$$

DÉMONSTRATION. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

D'après la formule (4.52), le champ magnétique dans le plan  $z = 0$  est donné par :

$$\vec{B}^{AR}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-d\theta}{[(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + L^2/4]^{3/2}} \begin{pmatrix} LR \cos \theta \\ LR \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Afin de faire apparaître des termes en  $x^2 + y^2$ , on va réécrire le dénominateur des intégrales sous la forme  $(x^2 + y^2 + R^2 + L^2/4 + \sqrt{x^2 + y^2} \cos \beta)^{3/2}$ .

Comme  $x^2 + y^2 \neq 0$ , il existe un unique angle  $\alpha(x, y) \in [0, 2\pi[$  tel que :

$$\begin{cases} \cos \alpha &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \alpha &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

En faisant le changement de variable  $\beta = \alpha(x, y) + \theta$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{[(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + L^2/4]^{3/2}} d\theta \\ &= \cos \alpha \left( \int_0^{2\pi} \frac{\sin \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \right) - \sin \alpha \left( \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{[(x - R \sin \theta)^2 + (y - R \cos \theta)^2 + L^2/4]^{3/2}} d\theta \\ &= \cos \alpha \left( \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \right) + \sin \alpha \left( \int_0^{2\pi} \frac{\sin \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \right) \end{aligned}$$

en utilisant les notations introduites en (4.54).

D'où :

$$\|\vec{B}^{AR}(x, y, 0)\|^2 = \left| \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \right|^2 (LR)^2 \left[ \left( \int_0^{2\pi} \frac{\sin \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \right)^2 + \left( \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \right)^2 \right].$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta = \frac{1}{rR} \left[ \frac{1}{\sqrt{b^2(r, \beta)}} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

on obtient finalement :

$$(4.56) \quad \forall (x, y) \neq (0, 0), \quad \left\| \vec{B}^{AR}(x, y, 0) \right\|^2 = \left| \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \right|^2 (LR)^2 \left( \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \right)^2.$$

Si  $(x, y) = (0, 0)$ , la composante suivant  $y$  du champ  $\vec{B}^{AR}$  devient :

$$\vec{B}_y^{AR}(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{-LR}{(R^2 + L^2/4)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0,$$

donc la formule (4.56) est aussi vraie pour  $(x, y) = (0, 0)$ .

On va maintenant montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \leq 0.$$

Comme les fonctions intégrées sont  $2\pi$ -périodiques, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta \left( \frac{1}{[r^2 + R^2 + L^2/4 + 2rR \cos \beta]^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[r^2 + R^2 + L^2/4 - 2rR \cos \beta]^{3/2}} \right) d\beta. \end{aligned}$$

Sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  le cosinus est positif donc les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} r^2 + R^2 + L^2/4 + 2rR \cos \beta &\geq r^2 + R^2 + L^2/4 - 2rR \cos \beta \\ &\geq r^2 + R^2 + L^2/4 - 2rR \\ &\geq (r - R)^2 + L^2/4 > 0. \end{aligned}$$

D'où la relation (4.53) en passant à la puissance  $3/2$  puis à l'inverse (ceci est possible car l'inégalité précédente montre que les deux termes sont strictement positifs) et en utilisant de nouveau la positivité du cosinus sur l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Comme  $\cos$  est de moyenne nulle sur  $[0, 2\pi]$ , on vérifie immédiatement à partir de (4.53) que  $f(0) = 0$ .

Pour démontrer la seconde égalité de (4.55), on va utiliser le théorème de dérivation sous intégrale. La fonction  $(r, \beta) \mapsto [b^2(r, \beta)]^{-3/2}$  est dérivable par rapport à  $r$  :

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} \right) \right| = 3 \left| \frac{r + R \cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} \right|.$$

D'après les inégalités précédentes,  $b^2(r, \beta) \geq L^2/4 > 0$  donc on a :

$$0 < \frac{1}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} \leq \frac{2^5}{L^5}.$$

Comme  $0 \leq r \leq r$ , on obtient :

$$0 \leq r + R \cos \beta \leq 2R.$$

Finalement on a montré :

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} \right) \right| \leq 3 \frac{2^6 R}{L^5} \in L^1(0, 2\pi).$$

On peut donc utiliser le théorème de dérivation sous intégrale pour calculer  $f'$  et on vérifie la seconde égalité de (4.55). ■

Pour illustrer (4.53), on a représenté sur la figure 45 une vue en trois dimensions du module du champ magnétique  $\vec{B}^{AR}$  dans le plan  $z = 0$ . On constate que la norme est une fonction radiale s'annulant à l'origine et à dérivée strictement positive à l'origine.

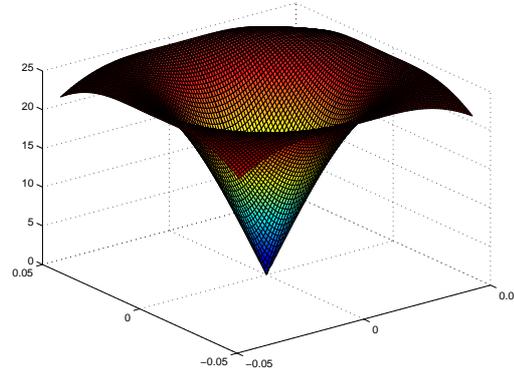


FIG. 45 – Vue 3D de la norme du champ magnétique  $\vec{B}^{AR}$  dans le plan  $z = 0$

## Comportement le long de l'axe

Pour conclure cette section consacrée à la pulsation  $\omega_0$ , on va étudier la décroissance de  $\vec{B}^{AR}$  le long de l'axe de l'antenne.

### Proposition 4.10.4 : décroissance du champ magnétique $\vec{B}^{AR}$

Le champ  $\vec{B}^{AR}$  admet le long de l'axe des  $z$  le développement limité suivant lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$  :

$$\vec{B}^{AR}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} 2\pi R^2 \text{sign}(z) \left[ \frac{3L}{z^4} + \left( \frac{5L^3}{2} - \frac{15R^2L}{2} \right) \frac{1}{z^6} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. En faisant  $x = y = 0$  dans la formule (4.52) et en utilisant le fait que le sinus et le cosinus sont de moyenne nulle sur  $[0, 2\pi]$ , on obtient :

$$\vec{B}^{AR}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} 2\pi R^2 \left( \frac{1}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On fait les développements limités des deux fractions de l'égalité précédente (voir la preuve de la proposition 4.9.1 pour plus de détails) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} &= \frac{1}{|z - L/2|^3} \left( 1 - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^2} + o\left(\frac{1}{z^3}\right) \right) \\ &= \text{sign}(z) \left( \frac{1}{(z - L/2)^3} - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right), \\ \frac{1}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} &= \text{sign}(z) \left( \frac{1}{(z + L/2)^3} - \frac{3R^2}{2(z + L/2)^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$(4.57) \quad \vec{B}^{AR}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} 2\pi R^2 \text{sign}(z) \left( \frac{1}{(z - L/2)^3} - \frac{1}{(z + L/2)^3} - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^5} + \frac{3R^2}{2(z + L/2)^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant les développements limités des termes intervenant dans (4.57) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - L/2)^3} - \frac{1}{(z + L/2)^3} &= \frac{3L}{z^4} + \frac{5L^3}{2z^6} + o\left(\frac{1}{z^6}\right), \\ \frac{1}{(z - L/2)^5} - \frac{1}{(z + L/2)^5} &= \frac{5L}{z^6} + o\left(\frac{1}{z^6}\right). \end{aligned}$$

En réinjectant dans (4.57) on obtient le résultat annoncé. ■

Afin d'illustrer la proposition 4.10.4, on a représenté sur les deux graphiques de la figure 46 respectivement les fonctions  $z \mapsto |B_x^{AR}(0, 0, z)|$  et  $z \mapsto |B_y^{AR}(0, 0, z)|$ . On vérifie que les fonctions sont identiquement nulles.

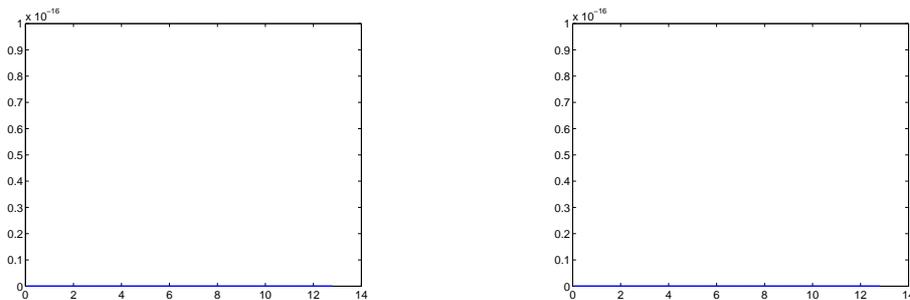


FIG. 46 – Composantes suivant  $x$  et  $y$  le long de l'axe pour  $\omega = \omega_0$

Sur le premier graphique de la figure 47, on a représenté par des ronds bleus  $\ln \left( \left| \overrightarrow{B}^{AR}(0, 0, z) \right| \right)$  en fonction de  $\ln(z)$ . On a superposé la droite obtenue par régression linéaire à partir des points de cote  $z > 4L$ . La pente obtenue est  $-4,0035$ , valeur conforme au terme principal  $1/z^4$ . Afin de visualiser cette pente, on a aussi représenté sur ce graphique un triangle rectangle dont les longueurs des côtés horizontaux et verticaux sont 0,5 et 2 respectivement.

Sur le deuxième graphique, on a fait la même chose en remplaçant  $\left| \overrightarrow{B}^{AR}(0, 0, z) \right|$  par le module de la différence entre  $\overrightarrow{B}^{AR}(0, 0, z)$  et le premier terme du développement limité. La pente obtenue est alors  $-5,9996$ , ce qui est de nouveau en accord avec la proposition 4.10.4. La hauteur du côté vertical du triangle est cette fois 3.

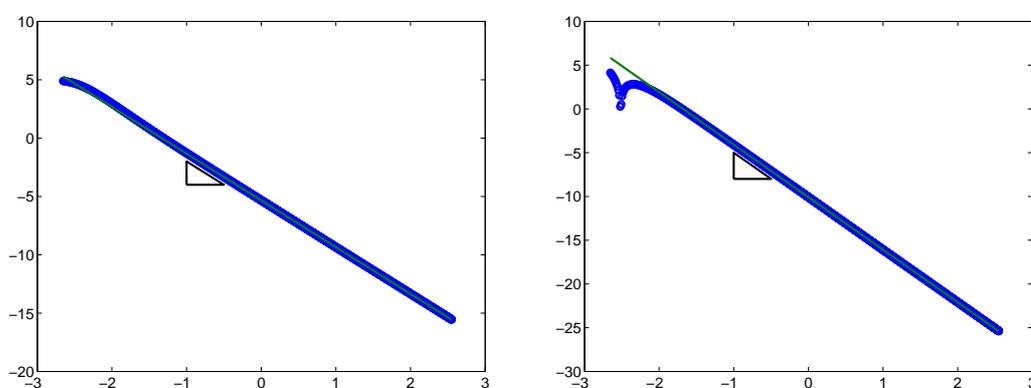


FIG. 47 – Champ sur l’axe pour  $\omega = \omega_0$

## 4.11 Cas de la pulsation caractéristique $\omega_{CR}$

Pour achever la partie consacrée à l’étude des propriétés des champs magnétiques produits par l’antenne cage d’oiseau, il reste à étudier le champ associé à la pulsation  $\omega_{CR}$ . Le plan de cette section est le même que celui de la section précédente : tout d’abord on va donner l’expression du champ magnétique associé puis des propriétés de symétrie, d’orthogonalité, d’homogénéité et enfin le comportement le long de l’axe de l’antenne.

### Formule

Comme dans le cas  $\omega = \omega_0$ , les courants  $I_1, \dots, I_N$  sont tous égaux et il n’y a pas de courants à circuler dans les branches (voir page 40). Par contre, contrairement au cas  $\omega_0$ , les courants  $J_1, \dots, J_N$  sont opposés aux courants  $I_1, \dots, I_N$ . Le champ magnétique correspondant à la pulsation  $\omega_{CR}$  est donc obtenu à partir de celui produit à la pulsation  $\omega_0$  (voir (4.52)) en changeant le signe des courants dans

l'anneau terminal du bas soit :

$$(4.58) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{B}^{CR} &= \overrightarrow{B}_{ah}^{AR} - \overrightarrow{B}_{ab}^{AR} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{[a^2(\theta, L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z - L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z - L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \frac{1}{[a^2(\theta, -L/2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} (z + L/2) R \cos \theta d\theta \\ (z + L/2) R \sin \theta d\theta \\ (-y \sin \theta - x \cos \theta + R) R d\theta \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

avec  $a^2(\theta, Z) = (x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + (z - Z)^2$ .

## Symétrie

### Proposition 4.11.1 : symétrie de $\overrightarrow{B}^{CR}$

Le champ  $\overrightarrow{B}^{CR}$  vérifie les propriétés de symétrie suivantes :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad & \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ z & \longmapsto (B_x^{CR}(x, y, z), B_y^{CR}(x, y, z)) \end{cases} \text{ est une fonction impaire,} \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad & \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto B_z^{CR}(x, y, z) \end{cases} \text{ est une fonction paire.} \end{aligned}$$

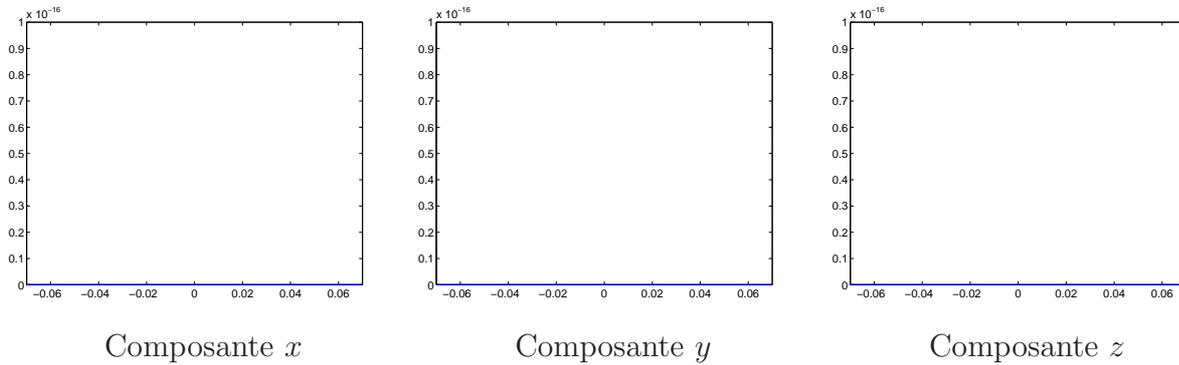
DÉMONSTRATION. La démonstration est similaire à celle de la propriété 4.6.3. Comme les courants dans les anneaux terminaux sont identiques, on fait la somme et non la différence des intégrales dans (4.58) et il faut inverser les résultats de parité et d'imparité par rapport à la proposition 4.10.1. ■

Lorsque  $\omega = \omega_{CR}$ , les anneaux terminaux sont parcourus par des courants égaux (voir page 40) alors qu'ils étaient opposés lorsque  $\omega = \omega_{AR}$ . Ceci explique pourquoi les symétries sont inversées par rapport à la proposition 4.10.1.

Afin d'illustrer numériquement la proposition 4.11.1, on a représenté, sur les différents graphiques de la figure 48, les composantes de la fonction

$$\left| \begin{array}{l} S \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z \longmapsto \left( \begin{array}{l} \max \{ |B_x^{CR}(x, y, z) + B_x^{CR}(x, y, -z)|; (x, y) \in \Omega \} \\ \max \{ |B_y^{CR}(x, y, z) + B_y^{CR}(x, y, -z)|; (x, y) \in \Omega \} \\ \max \{ |B_z^{CR}(x, y, z) - B_z^{CR}(x, y, -z)|; (x, y) \in \Omega \} \end{array} \right) \end{array} \right. .$$

L'erreur observée sur les différents graphiques de la figure 48 est identiquement nulle. Cette simulation est donc une bonne illustration de la proposition 4.11.1.

FIG. 48 – Illustration des symétries de  $\vec{B}^{CR}$ 

## Orthogonalité

Comme les courants vont dans le même sens dans les deux anneaux terminaux, la composante suivant  $z$  du champ magnétique ne s’annule pas au centre de l’antenne. Le champ  $\vec{B}^{CR}$  ne vérifie donc pas la propriété 4.7.1 mais la propriété suivante.

### Propriété 4.11.2 : non-orthogonalité de $\vec{B}^{CR}$

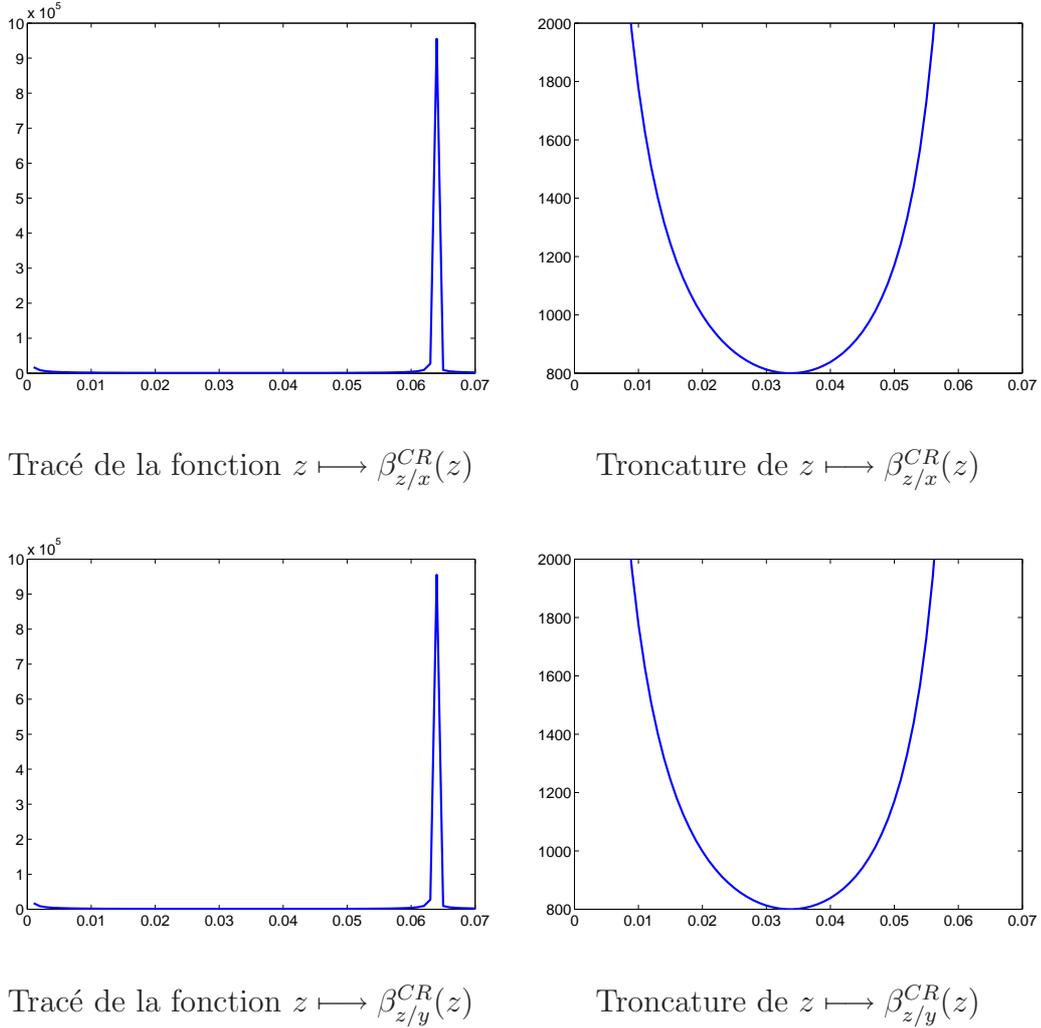
Lorsque l’on est “proche” du centre de l’antenne, la composante suivant  $z$  du champ magnétique est “non négligeable”. Le champ  $\vec{B}^{CR}$  n’est donc pas orthogonal à l’axe des  $z$ .

Sur le premier graphique de la figure 49, on a représenté la fonction

$$\left| \begin{array}{l} [0, L/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto \beta_{z/x}^{CR}(z) = \max \left\{ \left| \frac{B_z^{CR}(x, y, z)}{B_x^{CR}(x, y, z)} \right|; (x, y) \in \Omega \right\} \end{array} \right. .$$

Le premier graphique est similaire à celui du cas précédent : on observe un pic pour  $z = 0,064 = L/2$  dû à l’anneau terminal. Il n’y a pas de valeur pour  $z = 0$  car  $B_x^{CR}(x, y, 0) = 0$ . Cependant, on constate sur le deuxième graphique que, contrairement aux cas précédents, la composante suivant  $z$  est toujours prépondérante par rapport à celle suivant  $x$ .

Ceci est confirmé par les deux graphiques suivants où l’on a tracé la fonction  $\beta_{z/y}^{CR}$  : la composante suivant  $y$  est toujours négligeable par rapport à celle suivant  $z$ .

FIG. 49 – Rapport des modules des composantes de  $\vec{B}^{CR}$ 

## Homogénéité

Comme le champ  $\vec{B}^{AR}$ , le champ magnétique  $\vec{B}^{CR}$  ne dépend pas de  $N$ . Son homogénéité n'augmente donc pas avec le nombre de branches. Il est donc inutile de rechercher une propriété analogue à 4.8.2.

On va maintenant démontrer que le champ  $\vec{B}^{CR}$  n'est pas un champ homogène au voisinage de l'origine. Pour cela, comme pour le champ  $\vec{B}^{AR}$ , on va tout d'abord prouver que les lignes de niveaux de  $\|\vec{B}^{CR}\|$  dans le plan  $z = 0$  sont des cercles.

### Proposition 4.11.3 :

La norme  $\|\vec{B}^{CR}\|$  est une fonction de  $x^2 + y^2$  dans le plan  $z = 0$  :

$$(4.59) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|\vec{B}^{CR}(x, y, 0)\| \equiv f(r) = \left| \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \right| 2R \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \beta + R}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta$$

avec

$$(4.60) \quad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ b^2(r, \beta) &= r^2 + R^2 + L^2/4 + 2rR \cos \beta. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$(4.61) \quad \begin{cases} f(0) &= \left| \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \right| \frac{4\pi R^2}{[R^2 + L^2/4]^{3/2}}, \\ f'(0) &= 0, \\ f''(0) &= \frac{3\pi}{[R^2 + L^2/4]^{7/2}} \left( 3R^2 - \frac{L^2}{2} + R^3 + \frac{RL^2}{4} \right). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

D'après la formule (4.58), le champ magnétique associée à la pulsation  $\omega_{CR}$  au point  $(x, y, 0)$  a pour expression :

$$\vec{B}^{CR}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2(-y \sin \theta - x \cos \theta + R)R d\theta}{[(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + L^2/4]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que  $\|\vec{B}^{CR}\|$  ne dépend que de  $x^2 + y^2$ , on va utiliser la même méthode que dans le cas  $\omega = \omega_0$  : on va réécrire le dénominateur de l'intégrand sous la forme  $x^2 + y^2 + R^2 + L^2/4 + \sqrt{x^2 + y^2} \cos \beta$ .

Comme  $x^2 + y^2 \neq 0$ , il existe un unique angle  $\alpha(x, y) \in [0, 2\pi[$  tel que :

$$\begin{cases} \cos \alpha &= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \alpha &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

On a alors :

$$-y \sin \theta - x \cos \theta = \sqrt{x^2 + y^2} (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) = \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\alpha + \theta).$$

En faisant le changement de variable  $\beta = \alpha(x, y) + \theta$ , on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \vec{B}^{CR}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2R(r \cos \beta + R)}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les notations introduites en (4.60).

On vérifie que la formule précédente est vraie également dans le cas  $x = y = 0$ .

Comme  $0 \leq r \leq R$  à l'intérieur de l'antenne, le numérateur  $R + r \cos \beta$  est toujours positif et on obtient (4.59).

La première égalité de la relation (4.61) est immédiate à partir de (4.59) et laissée au lecteur.

Les deux autres égalités de (4.61) sont des conséquences du théorème de dérivation sous intégrale. On a prouvé dans la démonstration de la proposition 4.10.3 que la fonction  $g : r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}}$  est dérivable de dérivée

$$g'(r) = -3 \int_0^{2\pi} \frac{r + R \cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} d\beta.$$

Par ailleurs, la fonction

$$(r, \beta) \mapsto \frac{r \cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}}$$

est dérivable par rapport à  $r$  et sa dérivée vérifie :

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} \right) \right| \leq \left| \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} \right| + 3 \left| r \cos \beta \frac{r + R \cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} \right|.$$

En utilisant les inégalités

$$b^2(r, \beta) \geq L^2/4 > 0 \text{ (voir la proposition 4.10.3)}$$

et

$$0 \leq r + R \cos \beta \leq 2R,$$

on obtient :

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} \right) \right| \leq \frac{2^3}{L^3} + 6R^2 \frac{2^5}{L^5} \in L^1(0, 2\pi).$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous intégrale, la fonction

$$h : r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta$$

est dérivable de dérivée

$$h'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta}{[b^2(r, \beta)]^{3/2}} d\beta - 3 \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \beta (r + R \cos \beta)}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} d\beta.$$

Comme  $\cos$  est de moyenne nulle sur  $[0, 2\pi]$ ,  $h'(0) = 0$ .

D'où  $f'(0) = g'(0) + h'(0) = 0$ .

Toujours en utilisant le théorème de dérivation sous intégrale, on montre comme précédemment, que  $g'$  et  $h'$  sont dérivables et que leur dérivées sont :

$$\begin{aligned} g''(r) &= -3 \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} + 15 \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos^2 \beta}{[b^2(r, \beta)]^{7/2}} d\beta, \\ h''(r) &= -3 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta (r + R \cos \beta)}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} d\beta - 3 \int_0^{2\pi} \frac{2r \cos \beta + R \cos^2 \beta}{[b^2(r, \beta)]^{5/2}} d\beta \\ &\quad + 15 \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \beta (r + R \cos \beta)^2}{[b^2(r, \beta)]^{7/2}} d\beta. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 f''(0) &= g''(0) + h''(0) \\
 &= -\frac{6\pi}{[R^2 + L^2/4]^{5/2}} + \frac{15\pi R^2}{[R^2 + L^2/4]^{7/2}} - \frac{3\pi R}{[R^2 + L^2/4]^{5/2}} \\
 &= \frac{3\pi}{[R^2 + L^2/4]^{7/2}} \left( 3R^2 - \frac{L^2}{2} + R^3 + \frac{RL^2}{4} \right).
 \end{aligned}$$

■

Pour illustrer le résultat de la proposition 4.11.3, on a représenté sur la figure 50 une vue en trois dimensions du module du champ magnétique  $\vec{B}^{CR}$  dans le plan  $z = 0$ . Comme  $f'(0) = 0$ , la norme du champ  $\vec{B}^{CR}$  ne va pas faire une pointe mais un plateau au point  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Dans le cas de l'antenne (2.21),  $f''(0) < 0$  : la figure 50 est une bonne illustration de la proposition 4.11.3.

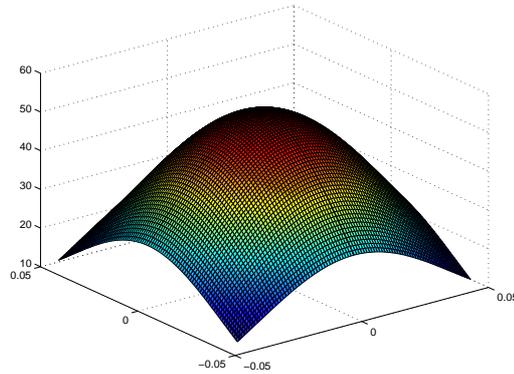


FIG. 50 – Vue 3D de la norme du champ magnétique  $\vec{B}^{CR}$  dans le plan  $z = 0$

## Comportement le long de l'axe

On va maintenant étudier la décroissance de  $\vec{B}^{CR}$  le long de l'axe de l'antenne.

### Proposition 4.11.4 : décroissance du champ magnétique $\vec{B}^{CR}$

Le champ  $\vec{B}^{CR}$  vérifie le développement limité suivant lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$  :

$$\vec{B}^{CR}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} 2\pi R^2 \text{sign}(z) \left[ \frac{2}{z^3} + 3(L^2 - R^2) \frac{1}{z^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. En faisant  $x = y = 0$  dans la formule (4.58) et en utilisant le fait que le sinus et le cosinus sont de moyenne nulle sur  $[0, 2\pi]$ , on obtient :

$$\vec{B}^{CR}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} 2\pi R^2 \left( \frac{1}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les développements limités des fractions obtenus lors de la démonstration de la proposition 4.10.4 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{[R^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} &= \frac{1}{|z - L/2|^3} \left( 1 - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^2} + o\left(\frac{1}{z^3}\right) \right) \\ &= \text{sign}(z) \left( \frac{1}{(z - L/2)^3} - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{[R^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} = \text{sign}(z) \left( \frac{1}{(z + L/2)^3} - \frac{3R^2}{2(z + L/2)^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right),$$

on obtient :

$$(4.62) \quad \begin{aligned} \vec{B}^{CR}(0, 0, z) &= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} 2\pi R^2 \text{sign}(z) \left( \frac{1}{(z - L/2)^3} + \frac{1}{(z + L/2)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3R^2}{2(z - L/2)^5} - \frac{3R^2}{2(z + L/2)^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right) \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On calcule maintenant les développements limités des termes intervenant dans (4.62) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - L/2)^3} + \frac{1}{(z + L/2)^3} &= \frac{2}{z^3} + \frac{3L^2}{z^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right), \\ \frac{1}{(z - L/2)^5} + \frac{1}{(z + L/2)^5} &= \frac{2}{z^5} + o\left(\frac{1}{z^6}\right). \end{aligned}$$

En réinjectant dans (4.62) on obtient le résultat annoncé. ■

Afin d'illustrer la propriété 4.11.4, on a représenté sur les deux graphiques de la figure 51 respectivement les fonctions  $z \mapsto |B_x^{CR}(0, 0, z)|$  et  $z \mapsto |B_y^{CR}(0, 0, z)|$ . On vérifie que les fonctions tracées sont identiquement nulles.

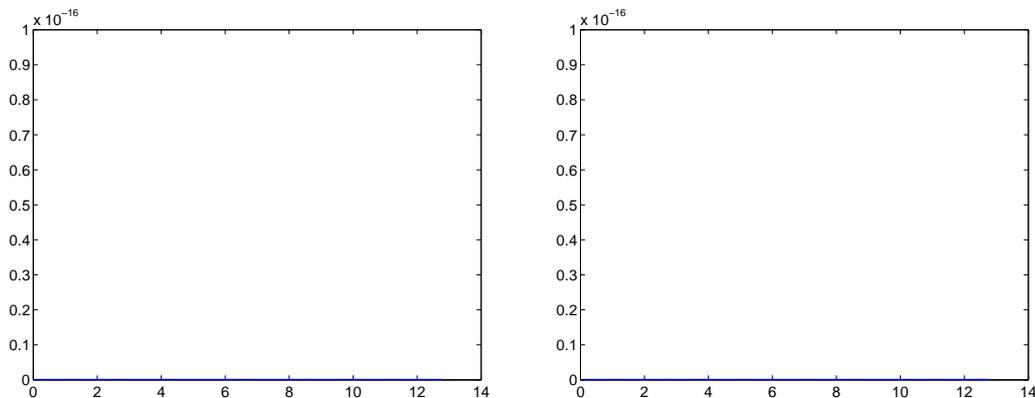


FIG. 51 – Composantes suivant  $x$  et  $y$  le long de l'axe pour  $\omega = \omega_{CR}$

Sur le premier graphique de la figure 52, on a représenté par des ronds bleus  $\ln \left( \left| \vec{B}^{CR}(0, 0, z) \right| \right)$  en fonction de  $\ln(z)$ . On a superposé la droite obtenue par régression

linéaire à partir des points de cote  $z > 4L$ . La pente obtenue est  $-3,0088$ , valeur conforme au terme principal  $1/z^3$ . Afin de visualiser cette pente, on a aussi représenté sur ce graphique un triangle rectangle dont les longueurs des côtés horizontaux et verticaux sont 0,5 et 1,5 respectivement.

Sur le dernier graphique, on a fait la même chose en remplaçant  $\left| \vec{B}^{CR}(0, 0, z) \right|$  par le module de la différence entre  $\vec{B}^{CR}(0, 0, z)$  et le premier terme du développement limité. La pente obtenue est alors  $-5,0014$ , ce qui est de nouveau en accord avec la proposition 4.11.4. La hauteur du côté vertical du triangle est cette fois 2,5.

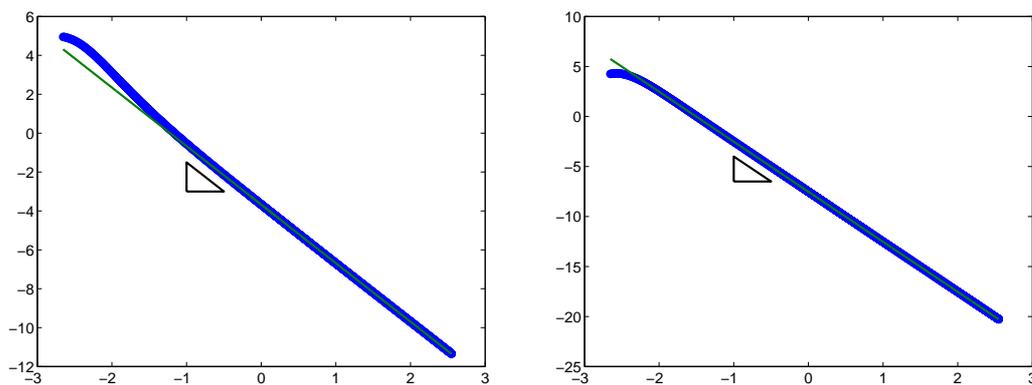


FIG. 52 – Champ sur l'axe pour  $\omega = \omega_{CR}$

## Chapitre 5

# Étude du régime transitoire

Afin de rendre plus complète la mise en équation du circuit électrique équivalent, on va généraliser la modélisation du chapitre 2 en supprimant l'hypothèse de régime harmonique faite au début du paragraphe 2.2. Ce travail va permettre de motiver notre hypothèse. Comme dans le cas sinusoïdal, nous procédons à une disjonction de cas liée aux courants imposés dans les branches et les anneaux. Dans un deuxième temps, on montre que la résolution des deux systèmes obtenus conduit aux mêmes pulsations de résonance que dans le cas sinusoïdal. On étudie alors la dépendance temporelle des solutions.

### 5.1 Reformulation du système

Supposer les courants non sinusoïdaux revient à remplacer  $-i\omega$  par  $d/dt$  dans les équations du circuit. Le système (3.4) vérifié par les courants  $I_1, \dots, I_N$  et  $J_1$  devient alors (pour la définition des matrices voir page 22) :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} 0 \\ L \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{c} 0 \\ R \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} + \left( \begin{array}{c} 0 \\ C \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{pmatrix} \\ + \left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \begin{pmatrix} J_1 - I_1 \\ \vdots \\ J_1 - I_1 \\ J_1 - I_1 \end{pmatrix} \\ = -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_1 + W_1 \\ \vdots \\ V_N + W_N \end{pmatrix}, \\ N \left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] (J_1 - I_1) = -\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N (V_n - W_n). \end{array} \right.$$

**Attention aux notations :** les quantités  $I_n, J_n, E_n, V_n$  et  $W_n$  représentent les courants et tensions réels et non les grandeurs complexes utilisées précédemment.

On considère les mêmes configurations d'alimentation que lors de l'étude en régime sinusoïdal, à savoir :

- $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n,$
- $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n.$

► **Premier cas :**  $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n.$

Dans ce cas, la dernière équation de (5.1) s'écrit :

$$\left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] (J_1 - I_1) = 0.$$

On pose :

- $y = J_1 - I_1,$
- $\tau_{CR} = \frac{1}{R^a} \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}).$

On vérifie d'après la formule (2.1) que le terme  $R^a$  est strictement positif.

En utilisant l'expression de  $\omega_{CR}$  introduite page 36 et les notations précédentes, l'équation différentielle vérifiée par  $y$  s'écrit :

$$(5.2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{\tau_{CR}} \frac{dy}{dt} + \omega_{CR}^2 y = 0.$$

Son discriminant est donné par :

$$\Delta_{CR} = \frac{1}{\tau_{CR}^2} - 4\omega_{CR}^2.$$

On se met dans la situation où

$$(5.3) \quad \tau_{CR} > 0,$$

hypothèse qui sera justifiée pour les situations expérimentales considérées ici dans la section 5.3.

Deux configurations sont possibles :

- soit il n'y a pas de capacités sur les anneaux. L'antenne considérée est alors de type passe-bas (voir la remarque 3.4.6),
- soit il y a des capacités sur les anneaux.

Dans la première configuration, il n'y a pas de terme constant dans l'équation différentielle (5.2) et ses solutions s'écrivent :

$$(5.4) \quad y(t) = Ae^{-t/\tau_{CR}} + B, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Dans la deuxième configuration, on se met dans la situation où

$$(5.5) \quad \Delta_{CR} < 0,$$

hypothèse qui sera justifiée pour les situations expérimentales considérées ici dans la section 5.3.

En posant

$$\omega_{CR}^a = \omega_{CR} \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_{CR}^2 \tau_{CR}^2}},$$

les solutions de (5.2) s'écrivent :

$$(5.6) \quad y(t) = e^{-t/2\tau_{CR}} (A \cos(\omega_{CR}^a t) + B \sin(\omega_{CR}^a t)) \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

Dans les deux configurations considérées, on suppose qu'initialement le circuit est au repos, c'est-à-dire  $y(0) = y'(0) = 0$ . Alors  $A = B = 0$  et la solution de l'équation différentielle (5.2) vérifiant cette condition initiale est la fonction nulle. Ceci revient à dire que  $J_1 = I_1$ . C'est aussi la relation à laquelle on avait abouti dans le cas de courants sinusoïdaux.

Le système (5.1) est alors équivalent à :

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} L \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + R \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\ \\ J_1 = I_1, \\ \forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n. \end{array} \right. = -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + 2 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix},$$

On retrouve le système (3.5) en remplaçant  $\frac{d}{dt}$  par  $-i\omega$ .

► **Deuxième cas** :  $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n$ .

En sommant les  $N$  premières équations du système (5.1) on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] \frac{d^2}{dt^2} I_k \\ & + 2(R^a + R^b) \sum_{n=1}^N \frac{d}{dt} I_n - \left( R^b \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^b} \right) \sum_{n=1}^N (I_{n-1} + I_{n+1}) + 2 \left( \frac{1}{C^a} + \frac{1}{C^b} \right) \sum_{n=1}^N I_n \\ & + \left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (J_1 - I_1) = -\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N (E_{n+1} - E_n). \end{aligned}$$

Comme les indices sont invariants modulo  $N$ , l'équation précédente s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] \frac{d^2}{dt^2} I_k \\ & + 2 \left[ R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n + \left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (J_1 - I_1) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés (2.4) et (2.14) des inductances mutuelles, la double somme de l'équation précédente se réduit à (voir la formule (3.6)) :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N [L_{n,k}^b - L_{n+1,k}^b - L_{n,k+1}^b + L_{n+1,k+1}^b + 2(L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a})] I_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \sum_{k=1}^N I_k. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} & 2 \left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n \\ & \quad + \left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (J_1 - I_1) = 0. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant l'expression (2.6) :

$$\left[ \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N (I_n + J_n) = 0.$$

De manière analogue au premier cas, on pose :

- $y = \sum_{n=1}^N (I_n + J_n),$
- $\tau_{AR} = \frac{1}{R^a} \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}).$

Avec ces notations et en utilisant l'expression de la pulsation  $\omega_0$  (voir page 35), l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme :

$$(5.8) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{\tau_{AR}} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0.$$

Son discriminant est donné par :

$$\Delta_{AR} = \frac{1}{\tau_{AR}^2} - 4\omega_{AR}^2.$$

Comme dans le premier cas, on se met dans la situation où

$$(5.9) \quad \tau_{AR} > 0,$$

hypothèse justifiée pour les situations expérimentales considérés dans la section 5.3.

De manière analogue au premier cas, on va faire une disjonction des cas suivant la présence ou non de capacités sur les anneaux.

S'il n'y a pas de capacités sur les anneaux, l'équation différentielle (5.8) n'a pas de terme constant et ses solutions s'écrivent :

$$y(t) = -A\tau_{AR}e^{-t/\tau_{CR}} + B, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Dans la deuxième configuration, on se met dans la situation où

$$(5.10) \quad \Delta_{AR} < 0,$$

hypothèse qui sera justifiée pour les situations expérimentales considérés ici dans la section 5.3.

En posant

$$\omega_{AR}^a = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_0^2 \tau_{AR}^2}},$$

les solutions de (5.2) s'écrivent :

$$y = e^{-t/2\tau_{AR}}(A \cos(\omega_0^a t) + B \sin(\omega_0^a t)) \text{ avec } A, B \in \mathbb{C}.$$

On suppose qu'initialement le circuit est au repos, c'est-à-dire  $y(0) = y'(0) = 0$ . Alors, comme dans le premier cas, la seule solution de l'équation différentielle (5.8) vérifiant cette condition initiale est la fonction nulle. Ceci revient à dire que :

$$J_1 = I_1 - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n.$$

C'est aussi la relation à laquelle on avait abouti dans le cas de courants sinusoïdaux. Le système (5.1) est donc équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} 0 \\ L \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \frac{d^2}{dt^2} \left( \begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ R \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \frac{d}{dt} \left( \begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ C \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} I_1 \\ \vdots \\ I_N \\ J_1 \end{array} \right) \\ + \left[ \sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a - \overline{L_{1,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \left( \begin{array}{c} J_1 - I_1 \\ \vdots \\ J_1 - I_1 \\ J_1 - I_1 \end{array} \right) = -\frac{d}{dt} \left( \begin{array}{c} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{array} \right), \\ 2 \left[ \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a + \overline{L_{n,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n = 2 \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N V_n, \\ J_1 = I_1 - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n, \\ \forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire,

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{L} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + \tilde{R} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + \tilde{C} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix}, \\ 2 \left[ \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a + \overline{L_{n,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] \sum_{n=1}^N I_n = 2 \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N V_n, \\ J_1 = I_1 - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N I_n, \\ \forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n, \end{array} \right.$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq j, k \leq N, \tilde{L}_{j,k} = L_{j,k} - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a - \overline{L_{n,k}^a}), \\ \forall 1 \leq j, k \leq N, \tilde{R}_{j,k} = R_{j,k} - \frac{2R^a}{N}, \\ \forall 1 \leq j, k \leq N, \tilde{C}_{j,k} = C_{j,k} - \frac{2}{NC^a}. \end{array} \right.$$

On retrouve le système (3.7) en remplaçant  $\frac{d}{dt}$  par  $-i\omega$ .

On vient de montrer que, quelque soit les courants délivrés par les sources de tensions, les deux configurations d'alimentation considérées conduisent aux mêmes systèmes différentiels.

## 5.2 Résolution des systèmes différentiels

Pour résoudre les systèmes différentiels (5.7) et (5.11), on va utiliser les propriétés des matrices circulantes comme cela a été fait pour les systèmes différentiels (3.5) et (3.7).

► **Premier cas :**  $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = W_n$ . On résout (5.7).

En utilisant le fait que les matrices apparaissant dans (5.7) sont indépendantes du temps et que les matrices circulantes sont simultanément diagonalisables par la matrice de Fourier (voir le théorème A.2.1 page 222), on peut réécrire l'équation

différentielle du système (5.7) sous la forme :

$$\begin{aligned}
& F^* \Lambda_L F \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + F^* \Lambda_R F \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + F^* \Lambda_C F \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\
&= -F^* F \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + 2F^* F \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \\
&\iff \\
&\Lambda_L F \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + \Lambda_R F \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} + \Lambda_C F \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \\
&= F \frac{d}{dt} \left[ - \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \right].
\end{aligned}$$

En posant :

$$(5.12) \quad \begin{pmatrix} \iota_1 \\ \vdots \\ \iota_N \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} = F \left[ - \begin{pmatrix} E_2 - E_1 \\ \vdots \\ E_1 - E_N \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \right],$$

le système différentiel précédent s'écrit :

$$(5.13) \quad \forall 0 \leq j \leq N-1, \lambda_j^L \frac{d^2 \iota_{j+1}}{dt^2} + \lambda_j^R \frac{d \iota_{j+1}}{dt} + \lambda_j^C \iota_{j+1} = \frac{ds_{j+1}}{dt}.$$

On a donc ramené le système différentiel linéaire (5.7) d'ordre 2 où les différentes équations étaient couplées entre elles à  $N$  équations différentielles linéaires d'ordre 2 découplées.

Si on pose  $\tau_j = \frac{\lambda_j^L}{\lambda_j^R}$ , les équations (5.13) s'écrivent :

$$(5.14) \quad \forall 0 \leq j \leq N-1, \frac{d^2 \iota_{j+1}}{dt^2} + \frac{1}{\tau_j} \frac{d \iota_{j+1}}{dt} + \omega_j^2 \iota_{j+1} = \frac{1}{\lambda_j^L} \frac{ds_{j+1}}{dt}$$

où les  $\omega_j$  sont les pulsations introduites dans la partie régime harmonique.

D'après la relation (3.8), les valeurs propres  $\lambda_j^R$  sont strictement positives. Comme précédemment, pour étudier (5.14), on se met dans la situation où

$$(5.15) \quad \tau_j > 0$$

et le discriminant

$$(5.16) \quad \Delta_j = \frac{1}{\tau_j^2} - 4\omega_j^2 < 0.$$

Les hypothèses (5.15) et (5.16) seront justifiées pour les situations expérimentales considérées dans la section 5.3.

On retrouve l'équation différentielle d'un circuit RLC classique avec :

$$\begin{cases} R = \lambda_j^R, \\ L = \lambda_j^L, \\ C = \frac{1}{\lambda_j^C}. \end{cases}$$

On sait alors que l'on va observer un phénomène de résonance pour  $\iota_{j+1}$  à la pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_j$ .

Les solutions du système homogène sont de la forme

$$(5.17) \quad y = e^{-t/2\tau_j} (A \cos(\omega_j^a t) + B \sin(\omega_j^a t)) \text{ avec } \begin{cases} A, B \in \mathbb{C}, \\ \omega_j^a = \omega_j \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_j^2 \tau_j^2}}. \end{cases}$$

On va maintenant chercher une solution particulière de l'équation différentielle (5.14). Comme les tensions sources sont supposées être sinusoïdales de pulsation  $\omega$ , le terme  $s_j$  est de la forme :

$$s_j(t) = S_j \cos(\omega t) + T_j \sin(\omega t).$$

D'où :

$$\frac{ds_j(t)}{dt} = \omega T_j \cos(\omega t) - \omega S_j \sin(\omega t).$$

On va donc chercher une solution particulière de la forme :

$$y(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t).$$

En reportant dans (5.14), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[ -C\omega^2 + \frac{D\omega}{\tau_j} + C\omega_j^2 \right] \cos(\omega t) + \left[ -D\omega^2 - \frac{C\omega}{\tau_j} + D\omega_j^2 \right] \sin(\omega t) \\ &= \frac{\omega T_j}{\lambda_j^L} \cos(\omega t) - \frac{\omega S_j}{\lambda_j^L} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

La pulsation  $\omega$  étant non nulle, la famille  $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$  est libre et l'équation précédente est équivalente au système :

$$(5.18) \quad M \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\lambda_j^L} \begin{pmatrix} T_j \\ -S_j \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} -(\omega^2 - \omega_j^2) & \frac{\omega}{\tau_j} \\ -\frac{\omega}{\tau_j} & -(\omega^2 - \omega_j^2) \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det(M) = (\omega^2 - \omega_j^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau_j^2}$  et que  $\omega$  est non nulle, la matrice  $M$  est inversible et il existe un unique couple  $(C, D)$  solution du système linéaire (5.18) :

$$(5.19) \quad \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\lambda_j^L \left( (\omega^2 - \omega_j^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau_j^2} \right)} \begin{pmatrix} -(\omega^2 - \omega_j^2) T_j + \frac{\omega}{\tau_j} S_j \\ \frac{\omega}{\tau_j} T_j + (\omega^2 - \omega_j^2) S_j \end{pmatrix}.$$

En conclusion, la solution de (5.14) avec condition initiale nulle est donnée par :

$$(5.20) \quad y(t) = e^{-t/2\tau_j} (A \cos(\omega_j^a t) + B \sin(\omega_j^a t)) + C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$$

où le couple  $(C, D)$  est défini par (5.19) et le couple  $(A, B)$  est défini par

$$(5.21) \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \\ -\frac{1}{\omega_j^a} \left( \frac{C}{2\tau_j} + D\omega \right) \end{pmatrix}.$$

On remarque que la solution est composée d'une partie oscillant à la pulsation  $\omega$  imposée et d'une partie tendant exponentiellement vers zéro. Le coefficient  $2\tau_j$  est le temps caractéristique que met le système pour avoir une solution générale "presque" oscillante. On discutera dans la section 5.3 des valeurs du temps caractéristique.

► **Deuxième cas :**  $\forall 1 \leq n \leq N, V_n = -W_n$ . On résout (5.11).

On reprend les notations introduites en (5.12). Alors, par définition de la matrice de Fourier, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N I_n &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} w^{(n-1)(k-1)} l_k \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} l_k \sum_{n=1}^N w^{(n-1)(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{N}{\sqrt{N}} l_k \delta_{0, n-1} \\ &= \sqrt{N} l_1. \end{aligned}$$

De même, si on note

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$\sum_{n=1}^N V_n = \sqrt{N} v_1.$$

La  $(N + 1)$ -ième équation différentielle du système (5.11) s'écrit donc :

$$(5.22) \quad \left[ \sum_{n=1}^N (L_{n,k}^a + \overline{L_{n,k}^a}) \frac{d^2}{dt^2} + R^a \frac{d}{dt} + \frac{1}{C^a} \right] l_1 = \frac{dv_1}{dt}.$$

En utilisant la même méthode que dans le premier cas, les  $N$  premières équations différentielles du système (5.11) conduisent à :

$$(5.23) \quad \forall 0 \leq j \leq N - 1, \lambda_j^{\tilde{L}} \frac{d^2 l_{j+1}}{dt^2} + \lambda_j^{\tilde{R}} \frac{dl_{j+1}}{dt} + \lambda_j^{\tilde{C}} l_{j+1} = \frac{ds_{j+1}}{dt},$$

avec

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} = -F \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 & -1 \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_N \end{pmatrix}.$$

On a déjà vu lors de la résolution dans le cas sinusoïdal que :

$$\forall 0 \leq j \leq N-1, \begin{cases} \lambda_j^{\tilde{L}} = (1 - \delta_{0,j})\lambda_j^L, \\ \lambda_j^{\tilde{R}} = (1 - \delta_{0,j})\lambda_j^R, \\ \lambda_j^{\tilde{C}} = (1 - \delta_{0,j})\lambda_j^C. \end{cases}$$

Sachant que le terme  $s_1$  s'écrit :

$$s_1 = \lambda_0^E e_1 = 0 \text{ (voir (3.9))},$$

l'équation (5.23) pour  $j = 0$  se réduit à  $0 = 0$ . Le système (5.23) devient donc :

$$(5.24) \quad \forall 1 \leq j \leq N-1, \lambda_j^L \frac{d^2 \iota_{j+1}}{dt^2} + \lambda_j^R \frac{d \iota_{j+1}}{dt} + \lambda_j^C \iota_{j+1} = \frac{ds_{j+1}}{dt}.$$

On retrouve l'équation (5.14) du cas précédent pour  $j = 1, \dots, N-1$  dont l'étude a déjà été faite.

L'étude de (5.22) est similaire : on a un phénomène de résonance à la pulsation  $\omega_{CR}$  pour le temps caractéristique  $2\tau_{CR}$ .

## 5.3 Validation sur les données expérimentales

Dans un premier temps, on va justifier les signes des temps caractéristiques et des discriminants des équations différentielles de la section précédente dans la cadre de l'antenne (2.21) en configuration passe-haut :

$$C^a = 180 \text{ pF et } C^b = 0 \text{ pF.}$$

### 5.3.1 Validation des hypothèses du chapitre 5

Pour calculer les résistances  $R^a$  et  $R^b$ , on a besoin de connaître l'épaisseur  $ep$  des brins métalliques :

$$(5.25) \quad ep = 35 \times 10^{-6} \text{ m.}$$

D'après la formule (2.1), la résistance en  $\Omega$  d'un brin métallique en cuivre vaut

$$(5.26) \quad R = 1,712 \times 10^{-8} \times \frac{L}{S}$$

où  $L$  est la longueur du brin en m et  $S$  sa section en  $\text{m}^2$ . Pour un arc d'anneau,

$$L = \frac{2\pi R}{N} \text{ et } S = ep \times w_a,$$

donc

$$\begin{aligned} R^a &= 1,712 \times 10^{-8} \frac{2\pi R}{N \times ep \times w_a} \\ &= \frac{1,712 \times 10^{-8} \times 2 \times \pi \times 4,45}{16 \times 35 \times 10^{-6} \times 1} \\ &= 8,5478 \times 10^{-4} \Omega. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R^b &= 1,712 \times 10^{-8} \frac{L}{ep \times w_a} \\ &= \frac{1,712 \times 10^{-8} \times (12,8 - 1)}{35 \times 10^{-6} \times 1} \\ &= 8,3193 \times 10^{-3} \Omega. \end{aligned}$$

Pour le calcul de  $\tau_{CR}$ , on utilise les valeurs des inductances mutuelles calculées dans la section 3.4.2 :

$$\sum_{k=1}^N (L_{1,k}^a + \overline{L_{1,k}^a}) = 10,967 \times 10^{-9} > 0.$$

D'où

$$\tau_{CR} = \frac{10,9671 \times 10^{-9}}{8,5478 \times 10^{-4}} = 1,283 \times 10^{-5} > 0$$

et l'hypothèse (5.3) est satisfaite.

Afin de valider l'hypothèse (5.5), on utilise la valeur de la pulsation  $\omega_{CR}$  calculée dans la section 3.3 :

$$\Delta_{CR} = \frac{1}{\tau_{CR}^2} - 4\omega_{CR}^2 = -2,0262 \times 10^{18} < 0.$$

L'hypothèse (5.5) est donc elle aussi satisfaite.

Comme dans le cas précédent, pour valider les hypothèses (5.9) et (5.10), on utilise (3.28) et la valeur de  $\omega_0$  calculée dans la section 3.3 :

$$\tau_{AR} = \frac{10,5511 \times 10^{-9}}{8,5478 \times 10^{-4}} = 1,234 \times 10^{-5} > 0$$

et

$$\Delta_{AR} = \frac{1}{\tau_{AR}^2} - 4\omega_0^2 = -2,106 \times 10^{18} < 0.$$

Les hypothèses (5.9) et (5.10) sont donc satisfaites.

On va maintenant valider les hypothèses (5.15) et (5.16) de la section précédente. Pour cela, on utilise les valeurs numériques des pulsations  $\omega_j$  et des coefficients de la matrice  $L$  calculées dans la section 3.3 ainsi que l'expression (3.8) des valeurs propres  $\lambda_j^L$  et  $\lambda_j^R$ .

Les valeurs trouvées pour les différents  $\tau_j$ ,  $j = 0, \dots, N - 1$ , sont, en secondes :

$$(5.27) \quad \tau_j = 10^{-4} \times [0,123, 0,147, 0,105, 0,081, 0,067, 0,059, 0,054, 0,052, 0,051, \\ 0,052, 0,054, 0,059, 0,067, 0,081, 0,105, 0,147].$$

On en déduit les valeurs des différents discriminants  $\Delta_j$ ,  $j = 1, \dots, N - 1$  :

$$\Delta_j = -10^{18} \times [2,106, 1,016, 0,639, 0,457, 0,359, 0,304, 0,271, 0,254, 0,249, \\ 0,254, 0,271, 0,304, 0,359, 0,457, 0,639, 1,016].$$

Les hypothèses (5.15) et (5.16) sont donc satisfaites.

### 5.3.2 Validation de l'approximation harmonique

Cette section est consacrée à la vérification numérique du phénomène de résonance mentionnée lors de la résolution de l'équation différentielle (5.14) ainsi que la validation de l'approximation harmonique du chapitre 2.

Pour les simulations suivantes, on suppose que les sources de tensions sont identiques et sinusoïdales de pulsation  $\omega_1$  :

$$\forall 1 \leq j \leq N, s_j(t) = \cos(\omega_j t) + \sin(\omega_j t).$$

Les temps d'émission du champ radiofréquence sont de l'ordre de quelques ms. Les valeurs obtenues en (5.27), qui sont de l'ordre du dixième de ms, sont donc réalistes.

Afin de savoir si il est raisonnable de négliger le régime transitoire lors des séquences d'IRM, il faut avoir une estimation plus précise de la durée d'émission du champ radiofréquence. Pour cela, on utilise la relation

$$T = \frac{\alpha}{2\pi\nu}$$

où  $T$  est la durée d'émission du champ radiofréquence et  $\nu$  est la fréquence de rotation des spins autour de ce champ.

Suivant [50], on adopte la convention

$$\nu = 10^{-6}\nu_0$$

où  $\nu_0$  est la fréquence du champ radiofréquence, autrement dit la fréquence de Larmor.

Pour l'approximation numérique, on se place dans le cas d'une séquence spin-écho dont l'angle  $\alpha$  vaut  $\frac{\pi}{2}$ . On obtient alors :

$$T = \frac{1}{4 \times 10^{-6}\omega_1} = 0,496 \text{ ms.}$$

Pour alimenter l'antenne cage d'oiseau, on a pris :

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega_1 t) + 2 \sin(2\omega_1 t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la section 5.2, on s'attend à obtenir la superposition d'un régime transitoire et d'un régime stationnaire ainsi qu'un phénomène de résonance pour  $\iota_2$ .

Sur la figure 53, on a représenté le régime transitoire associé à  $\iota_2$  sur  $[0, T]$ . Les deux courbes rouges correspondent aux fonctions  $\pm e^{-t/2\tau_1}$ . On constate que le régime transitoire est très rapidement négligeable. Ceci est confirmé par le rapport

$$\frac{T}{\tau_1} = 33,755.$$

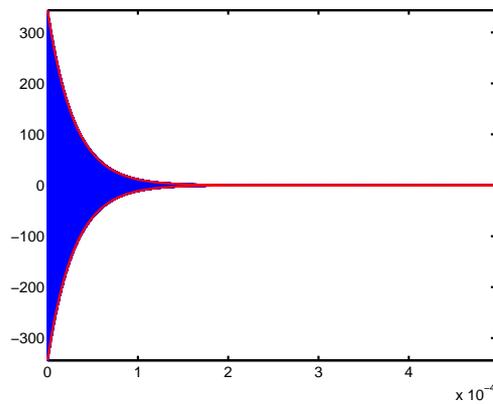


FIG. 53 – régime transitoire associé à  $\iota_2$  pendant  $[0, T]$

On obtient des courbes similaires pour les autres courants  $\iota_j$ ,  $1 \leq j \leq (N + 1)/2$ .

Afin de mettre en évidence le phénomène de résonance, on a tout d'abord représenté sur la figure 54 les différents courants  $\iota_j$ ,  $1 \leq j \leq (N + 1)/2$  sur  $[0, T]$  (voir (5.20)). On constate que très rapidement on ne voit plus que le régime permanent.

Sur la figure 55, on a représenté successivement le courant  $\iota_2$  et les autres courants. On constate que le courant  $\iota_2$  est prépondérant par rapport aux autres  $\iota_j$ ,  $1 \leq j \leq (N + 1)/2$ .

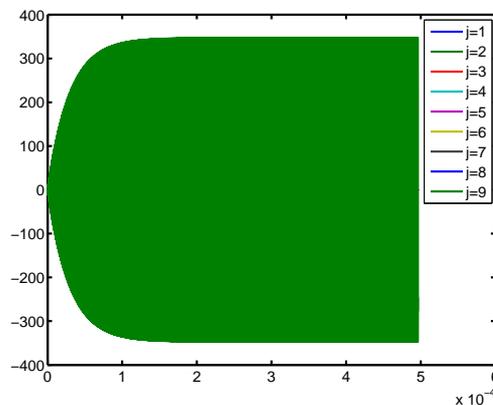
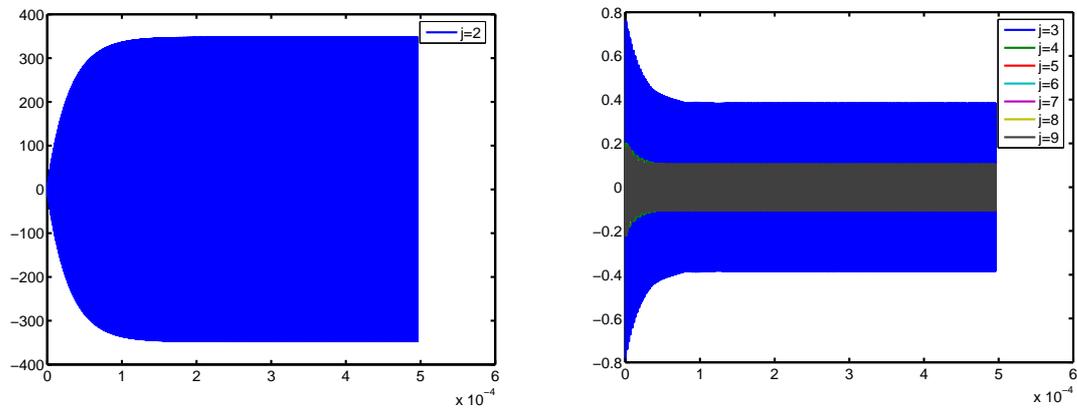


FIG. 54 – les différents courants  $\iota_j$



le courant  $i_2$

les courants  $i_j, j \neq 2$

FIG. 55 – représentation des courants  $i_j$

# Conclusion de la partie 1

## Chapitre 2

La modélisation sous forme d'un circuit électrique équivalent a permis d'écrire à l'aide d'un système linéaire les équations régissant l'évolution des courants et des tensions. Ce système est valable pour une configuration d'alimentation quelconque, aussi bien sur les anneaux que sur les branches. De plus, ce système reste valable pour des courants non supposés sinusoïdaux à condition de remplacer  $-i\omega$  par  $\frac{d}{dt}$ .

Les résultats numériques présentés dans la section 2.3 montrent que la méthode développée pour calculer les inductances mutuelles est performante.

## Chapitre 3

L'utilisation des matrices circulantes a permis de résoudre analytiquement, pour les deux configurations d'alimentation utilisées dans la pratique, le système linéaire établi dans le chapitre 2 : l'expression des courants circulant dans l'antenne est entièrement déterminée par la donnée des alimentations sources. De plus, cette étude a permis de mettre en évidence le phénomène de résonance pour les pulsations  $\omega = \omega_{CR}, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ , phénomène largement utilisé dans la pratique.

Conjuguée à la méthode de calcul des inductances mutuelles, l'expression des pulsations de résonance permet de calculer ces dernières en fonction des caractéristiques géométriques de l'antenne. Les résultats numériques montrent une bonne adéquation avec les mesures expérimentales.

Ce chapitre a aussi permis de valider numériquement l'hypothèse de stricte positivité des valeurs propres de la matrice  $L$ .

## Chapitre 4

Grâce à l'expression des courants circulant dans l'antenne établie au chapitre 3, le chapitre 4 a permis de déterminer l'expression du champ magnétique produit par l'antenne cage d'oiseau. À partir de cette expression, on a développé une méthode de calcul adaptée basée sur les intégrales elliptiques : on est maintenant en mesure de faire une cartographie du champ radiofréquence généré par l'antenne cage d'oiseau.

L'étude mathématique des propriétés du champ radiofréquence a permis de montrer que celui-ci a, en tout point, un mouvement de rotation au cours du temps. De plus, on constate que, parmi les  $N + 1$  champs associés aux  $N + 1$  pulsations de résonance, seul celui associé à la pulsation  $\omega_1$  est homogène non nul au centre de l'antenne. On conclut de cette étude que l'antenne cage d'oiseau produit un champ

homogène, orthogonal à l'axe de l'antenne et ayant un mouvement de rotation capable d'entraîner les spins à la résonance. Il suffit pour cela d'alimenter l'antenne avec des tensions sources oscillant à la pulsation  $\omega_1(N)$ . De plus, le champ  $\vec{B}^1$  est d'autant plus homogène que le nombre de branche  $N$  est grand. L'antenne cage d'oiseau répond donc aux attentes formulées dans les préliminaires.

## Chapitre 5

L'étude du circuit électrique équivalent sans supposer les courants sinusoïdaux montre que l'on aboutit aux mêmes systèmes d'équations que dans le chapitre 3. La résolution de ces équations différentielles a permis de mettre en évidence l'existence d'un régime transitoire et d'exprimer le temps caractéristique de celui-ci en fonction des valeurs propres des matrices  $L$  et  $R$ .

Les calculs numériques réalisés à partir des données expérimentales montrent que ce régime transitoire peut être négligé. De plus, comme dans le cas du régime harmonique, on a pu mettre en évidence le phénomène de résonance associé aux pulsations de résonance.

**Partie 2 :**

**Le système de Maxwell**



## Chapitre 6

# Introduction du problème : du temporel à l'harmonique

Ce chapitre est consacré à la mise en équation du problème électromagnétique suivant : déterminer les champs électromagnétiques dans un domaine borné  $\Omega$  sur le bord  $\partial\Omega$  duquel on suppose connu le champ magnétique.

Dans une première partie, sections 6.1 et 6.2, on présente les différents espaces et outils nécessaires à l'étude du problème électromagnétique.

Les sections 6.3 et 6.4 sont consacrées à la mise en équation et à la résolution du problème électromagnétique. Dans la sous-section 6.4.6, on va montrer que l'on peut ramener l'étude du problème électromagnétique à l'étude d'un problème harmonique.

### 6.1 Espaces fonctionnels

Dans un premier temps, on introduit les fonctions dépendant uniquement de  $x \in \mathbb{R}^3$ . Dans un second temps, on s'intéressera aux fonctions dépendant du temps et à valeurs dans des espaces de Hilbert.

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\Sigma$  lipschitzienne. Pour  $u, v \in \mathbb{C}^n$ , on désigne par  $u \cdot v$  le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{C}^n$  et  $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ .

#### Espaces $L^2(\mathcal{U})$ , $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ et $H^s(\mathcal{U})$

On note  $L^2(\mathcal{U})$  l'espace des fonctions complexes de carré intégrable :

$$L^2(\mathcal{U}) = \left\{ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}; \int_{\mathcal{U}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire et de la norme usuels.

Dans toute la suite du document, on note par des lettres *double barre* les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. Ainsi,

$$\mathbb{L}^2(\mathcal{U}) = \left\{ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}^3; \int_{\mathcal{U}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Lorsque les fonctions sont à valeurs réelles, on note  $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{U})$  l'espace des fonctions réelles de carré intégrable :

$$L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) = \left\{ f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} ; \int_{\mathcal{U}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

On note  $\mathcal{D}(\mathcal{U})$  l'espace des fonctions infiniment différentiables dont le support est compact et inclus dans  $\mathcal{U}$ .

On introduit aussi les espaces suivants :

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{U}}) = \{ \varphi|_{\mathcal{U}} ; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \},$$

et  $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$  le dual de l'espace  $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ , c'est-à-dire l'espace des distributions.

On désigne par  $H^s(\mathcal{U})$  les espaces de Sobolev standard pour  $s \in \mathbb{N}$ .

### Espaces $\mathbb{H}(\text{rot} ; \mathcal{U})$ , $\mathbb{H}(\text{div} ; \mathcal{U})$ et leurs espaces de traces

On note  $\mathbb{H}(\text{rot} ; \mathcal{U})$  l'espace des fonctions de carré intégrable à rotationnel de carré intégrable :

$$\mathbb{H}(\text{rot} ; \mathcal{U}) = \{ u \in \mathbb{L}^2(\mathcal{U}) ; \text{rot } u \in \mathbb{L}^2(\mathcal{U}) \}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{H}(\text{rot} ; \mathcal{U})}^2 = \|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{U})}^2 + \|\text{rot } u\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{U})}^2,$$

l'espace  $\mathbb{H}(\text{rot} ; \mathcal{U})$  est un espace de Hilbert.

On note  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\text{rot} ; \mathcal{U})$  l'espace des fonctions réelles de carré intégrable à rotationnel de carré intégrable :

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\text{rot} ; \mathcal{U}) = \{ u \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) ; \text{rot } u \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) \}.$$

Pour donner un sens aux formules de Green

$$(6.1) \quad \forall u, v \in (\mathcal{D}(\overline{\mathcal{U}}))^3, \int_{\mathcal{U}} \text{rot } u \cdot v \, dx = \int_{\mathcal{U}} u \cdot \text{rot } v \, dx + \int_{\Sigma} (n \times u) \cdot v \, d\sigma,$$

et

$$(6.2) \quad \forall (u, v) \in (\mathcal{D}(\overline{\mathcal{U}}))^3 \times \mathcal{D}(\overline{\mathcal{U}}), \int_{\mathcal{U}} (\text{div } u) v \, dx = - \int_{\mathcal{U}} u \cdot \text{grad } \bar{v} \, dx + \int_{\Sigma} (n \cdot \bar{u}) v \, d\sigma,$$

dans les espaces  $\mathbb{H}(\text{rot} ; \mathcal{U})$ ,  $\mathbb{H}(\text{div} ; \mathcal{U})$  et  $\mathbb{H}^1(\mathcal{U})$ , il est nécessaire de définir la notion de trace pour de telles fonctions. On donne ci-dessous les éléments essentiels pour comprendre l'extension des formules de Green aux espaces  $\mathbb{H}(\text{rot} ; \mathcal{U})$ ,  $\mathbb{H}(\text{div} ; \mathcal{U})$  et  $\mathbb{H}^1(\mathcal{U})$ . Pour plus de détails relatifs à ces prolongements, on pourra consulter [24], [25], [26], [27], [29], [65] et [72].

On introduit les espaces de trace suivants :

$$\mathbb{H}^{1/2}(\Sigma) = \{ u|_{\Sigma} ; u \in \mathbb{H}^1(\mathcal{U}) \}$$

et

$$\mathbb{T}\mathbb{H}^{1/2}(\Sigma) = \{u \in \mathbb{H}^{1/2}(\Sigma); u \cdot n = 0 \text{ sur } \Sigma\}$$

munis de leurs normes standard. En prenant comme espace pivot  $\mathbb{L}^2(\Sigma)$ , on définit leurs espaces duaux respectifs  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma)$  et  $\mathbb{T}\mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma)$ .

On introduit l'espace

$$\mathbb{L}_t^2(\Sigma) = \{u \in \mathbb{L}^2(\Sigma); n \cdot u = 0 \text{ sur } \Sigma\}.$$

On définit les trois applications traces suivantes :

$$\gamma_T : \begin{cases} (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^3 & \longrightarrow \mathbb{L}_t^2(\Sigma) \\ u & \longmapsto n \cdot u, \end{cases}$$

$$\pi_\tau : \begin{cases} (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^3 & \longrightarrow \mathbb{L}_t^2(\Sigma) \\ u & \longmapsto u - \gamma_T(u)n = n \times (u \times n)|_\Sigma, \end{cases}$$

et

$$\gamma_\tau : \begin{cases} (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^3 & \longrightarrow \mathbb{L}_t^2(\Sigma) \\ u & \longmapsto n \times u|_\Sigma. \end{cases}$$

On considère les opérateurs divergence surfacique et rotationnel tangentiel définis par :

$$\operatorname{div}_\Sigma(u) = \operatorname{div}(\tilde{u})|_\Sigma,$$

et

$$\operatorname{rot}_\Sigma(u) = \operatorname{rot}(\tilde{u} \cdot \tilde{n})|_\Sigma,$$

où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{n}$  sont respectivement des prolongements de  $u$  et de la normale  $n$  définis dans un voisinage de  $\Sigma$ .

Alors, on peut prolonger par continuité l'application  $\gamma_\tau$  en une application encore notée  $\gamma_\tau : \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Sigma)$  continue surjective où

$$\mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Sigma) = \left\{ u \in \mathbb{T}\mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma); \operatorname{div}_\Sigma(u) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma) \right\}.$$

On peut aussi prolonger par continuité l'application  $\pi_\tau$  en une application encore notée  $\pi_\tau : \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Sigma)$  continue surjective où

$$\mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Sigma) = \left\{ u \in \mathbb{T}\mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma); \operatorname{rot}_\Sigma(u) \in \mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma) \right\}.$$

On définit un produit de dualité entre les espaces  $\mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Sigma)$  et  $\mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Sigma)$  à l'aide de l'espace pivot  $\mathbb{L}_t^2(\Sigma)$  noté

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Sigma), \mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Sigma)}.$$

On peut alors écrire :

$$\forall u, v \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \mathcal{U}), \int_{\mathcal{U}} \operatorname{rot} u \cdot v \, dx = \int_{\mathcal{U}} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx + \langle \gamma_\tau(u), \pi_\tau(v) \rangle_{\mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Sigma), \mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Sigma)}.$$

On peut prolonger par continuité l'application  $\gamma_T$  en une application encore notée  $\gamma_T : \mathbb{H}(\text{div}; \mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma)$  continue. Alors, on a :

$$\forall (u, \varphi) \in \mathbb{H}(\text{div}; \mathcal{U}) \times H^1(\mathcal{U}),$$

$$\int_{\mathcal{U}} (\text{div } u) \varphi \, dx = - \int_{\mathcal{U}} u \cdot \text{grad } \bar{\varphi} \, dx + \langle \gamma_T(u), \varphi \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Sigma), H^{1/2}(\Sigma)}.$$

Par abus de notation, on continuera de noter à l'aide d'intégrales de surface les produits de dualités dans les formules de Green.

On désigne par  $\mathbb{H}_0(\text{rot}; \mathcal{U})$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\mathcal{U})$  dans  $\mathbb{H}(\text{rot}; \mathcal{U})$ . On montre, voir [48], que :

$$\mathbb{H}_0(\text{rot}; \mathcal{U}) = \{u \in \mathbb{H}(\text{rot}; \mathcal{U}); u \times n = 0 \text{ sur } \Sigma\}.$$

On munit aussi cet espace de la norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}(\text{rot}; \mathcal{U})}$ .

Pour une fonction  $\xi$  donnée, on note  $\mathbb{H}(\text{div}, \xi; \mathcal{U})$  l'espace

$$\mathbb{H}(\text{div}, \xi; \mathcal{U}) = \{u \in \mathbb{L}^2(\mathcal{U}); \text{div}(\xi u) \in L^2(\mathcal{U})\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{H}(\text{div}, \xi; \mathcal{U})}^2 = \|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{U})}^2 + \|\text{div}(\xi u)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2,$$

cet espace est un espace de Hilbert.

On définit aussi l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathbb{H}(\text{rot}, \text{div}, \xi; \mathcal{U}) = \{u \in \mathbb{L}^2(\mathcal{U}); u \in \mathbb{H}(\text{rot}; \mathcal{U}) \text{ et } u \in \mathbb{H}(\text{div}, \xi; \mathcal{U})\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{H}(\text{rot}, \text{div}, \xi; \mathcal{U})}^2 = \|u\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{U})}^2 + \|\text{rot } u\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{U})}^2 + \|\text{div}(\xi u)\|_{L^2(\mathcal{U})}^2.$$

### Espace $L^p(0, T; H)$ , $p \in [1, +\infty]$

On va maintenant s'intéresser aux fonctions dépendant du temps et à valeurs dans un espace de Hilbert. Pour plus de détails, on peut se référer aux ouvrages [41], [44] et [52].

Dans le reste de cette section, on suppose donné un réel  $T > 0$  et un espace de Hilbert séparable  $H$  de norme  $\|\cdot\|_H$ .

Pour  $p \in [1, +\infty[$ , on définit

$$L^p(0, T; H) = \left\{ f : [0, T] \longrightarrow H \text{ mesurable ; } \int_0^T \|f(t)\|_H^p \, dt < +\infty \right\}$$

et

$$\|f\|_{L^p(0, T; H)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_H^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Muni de cette norme,  $L^p(0, T; H)$  est un espace de Banach.

On définit de manière similaire l'espace  $L^\infty(0, T; H)$  :

$$L^\infty(0, T; H) = \left\{ f : [0, T] \longrightarrow H \text{ mesurable ; } \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} (\|f(t)\|_H) < +\infty \right\}.$$

On munit cet espace de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; H)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} (\|f(t)\|_H).$$

Alors  $L^\infty(0, T; H)$  est un espace de Banach et on a :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(0, T; H)} &= \inf \{ C > 0 ; p.p. t \in [0, T], \|f(t)\|_H \leq C \} \\ &= \left\| \|f(t)\|_H \right\|_{L^\infty(0, T)}. \end{aligned}$$

Les différents espaces  $L^p(0, T; H)$  vérifient les relations d'inclusion suivantes (voir [41] p.12).

**Proposition 6.1.1 : quelques propriétés des espaces  $L^p(0, T; H)$**

*Si  $H_1$  s'injecte continuellement dans  $H_2$ ,  $L^p(0, T; H_1)$  s'injecte continuellement dans  $L^p(0, T; H_2)$ .*

*Si  $T < +\infty$ ,  $L^p(0, T; H)$  s'injecte continuellement dans  $L^q(0, T; H)$  pour  $p \geq q$ .*

On note  $L^p_{loc}(0, T; H)$  l'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $\chi_{[t_1, t_2]} f \in L^p(0, T; H)$  pour tout  $0 < t_1 < t_2 < T$ .

### Espace $\mathcal{C}^0([0, T]; H)$

L'espace

$$\mathcal{C}^0([0, T]; H) = \left\{ f : [0, T] \longrightarrow H \text{ continue ; } \left| \begin{array}{l} [0, T] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|f(t)\|_H \end{array} \right. \text{ est continue} \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; H)} = \max_{[0, T]} (\|f(t)\|_H).$$

On définit par récurrence les espaces suivants :

$$\forall m \text{ entier } \geq 1, \mathcal{C}^m([0, T]; H) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, T]; H) ; \frac{df}{dt} \in \mathcal{C}^{m-1}([0, T]; H) \right\}.$$

### Espace $W^{1,p}(0, T; H)$

Pour  $p \in [1, +\infty]$ , on définit l'espace

$$W^{1,p}(0, T; H) = \left\{ u \in L^p(0, T; H) ; \frac{du}{dt} \in L^p(0, T; H) \right\},$$

ainsi que la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(0,T;H)} = \|f\|_{L^p(0,T;H)} + \left\| \frac{df}{dt} \right\|_{L^p(0,T;H)}.$$

Muni de cette norme,  $W^{1,p}(0, T; H)$  est un espace de Banach et l'inclusion

$$W^{1,p}(0, T; H) \subset \mathcal{C}^0([0, T]; H)$$

est continue pour tout  $p \in [1, +\infty]$ .

Si  $H = L^2(\mathcal{U})$ , on a le résultat suivant.

**Proposition 6.1.2 : caractérisation de  $W^{1,p}(0, T; L^2(\mathcal{U}))$**

Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $u \in W^{1,p}(0, T; L^2(\mathcal{U}))$ ,

(ii)  $u \in L^1_{loc}([0, T] \times \mathcal{U})$  vérifie :  $\int_0^T \left( \int_{\mathcal{U}} |u(t, x)|^2 dx \right)^{p/2} dt < +\infty$

et  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1_{loc}([0, T] \times \mathcal{U})$  vérifie :  $\int_0^T \left( \int_{\mathcal{U}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^2 dx \right)^{p/2} dt < +\infty$ .

Dans ce cas, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,  $u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot)$  presque partout sur  $\mathcal{U}$ .

DÉMONSTRATION. Voir [41] p.56. ■

## 6.2 Rappels sur les opérateurs monotones

On va maintenant rappeler quelques résultats et définitions relatifs aux opérateurs monotones que l'on utilisera par la suite. Pour plus de détails, on peut se référer aux ouvrages suivants : [20], [21], [52], [71], [75].

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ .

Un **opérateur linéaire**  $A$  de  $H$  est une application linéaire

$$A : D(A) \longrightarrow H$$

où  $D(A)$  est un sous-espace vectoriel de  $H$  appelé le **domaine** de  $A$ .

On appelle **graphe** de  $A$  le sous-espace vectoriel de  $H \times H$  défini par :

$$G(A) = \{(u, f) \in H \times H; u \in D(A) \text{ et } f = Au\}.$$

On dit que  $A$  est un **opérateur fermé** si  $G(A)$  est fermé dans  $H \times H$ .

On dit qu'un opérateur linéaire  $A$  est un **opérateur monotone** si :

$$\forall u \in D(A), (Au, u) \geq 0.$$

On dit que  $A$  est un opérateur **maximal monotone** s'il vérifie de plus :

$$(6.3) \quad \exists \lambda_0 > 0 \text{ tel que, } \forall f \in H, \exists u \in D(A), u + \lambda_0 Au = f.$$

**Proposition 6.2.1 : propriétés des opérateurs maximaux monotones**

Soit  $A$  un opérateur linéaire maximal monotone sur un espace de Hilbert  $H$ .

Alors,  $D(A)$  est dense dans  $H$  et  $A$  est fermé.

De plus, pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $f \in H$ , il existe une unique solution  $u = J_\lambda f$  à l'équation

$$\begin{cases} u + \lambda Au = f, \\ u \in D(A). \end{cases}$$

**Proposition 6.2.2 : perturbation d'un opérateur maximal monotone**

Soient  $A$  un opérateur linéaire maximal monotone sur un espace de Hilbert  $H$  et  $F$  un opérateur monotone lipschitzien tel que  $D(A) \subset D(F)$ .

Alors, l'opérateur  $A + F$  de domaine  $D(A)$  est maximal monotone.

Soit  $A$  un opérateur linéaire sur  $H$ . Son **adjoint**  $A^* : D(A^*) \subset H' \longrightarrow H'$  est caractérisé par la relation

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*), \langle v, Au \rangle_{H',H} = \langle A^*v, u \rangle_{H',H}.$$

Dans la suite, on fera l'identification  $H' = H$ .

La proposition suivante permet de caractériser les opérateurs maximaux monotones parmi les opérateurs monotones à l'aide de l'opérateur adjoint.

**Proposition 6.2.3 : caractérisation des opérateurs linéaires maximaux monotones**

Soit  $A$  un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert  $H$  et  $A^*$  son adjoint.

Alors,  $A$  est un opérateur maximal monotone si et seulement si  $A$  est fermé,  $D(A)$  est dense dans  $H$ ,  $A$  et  $A^*$  sont monotones.

**Théorème 6.2.4 : théorème de Hille-Yosida**

Soient  $A$  un opérateur linéaire maximal monotone dans un espace de Hilbert  $H$ ,  $u_0 \in D(A)$  et  $T > 0$ .

Alors, il existe un unique  $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; H) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; D(A))$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, & \text{dans } [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], \|u(t)\| \leq \|u_0\|, \\ \forall t \in [0, T], \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \|Au_0\|. \end{cases}$$

Soit  $f \in W^{1,1}(0, T; H)$ .

Alors, il existe un unique  $u \in \mathcal{C}^1([0, T]; H) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; D(A))$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f, & \text{dans } [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Cette solution est donnée par :

$$u(t) = S_A(t)u_0 + \int_0^t S_A(t-s)f(s) ds$$

où  $S_A$  est le semi-groupe continu de contraction engendré par  $A$ .

De plus, on a les inégalités suivantes :

$$(6.4) \quad \begin{cases} \forall 0 \leq s \leq t \leq T, & \|u(t)\| \leq \|u(s)\| + \int_s^t \|f(y)\| dy, \\ \forall t \in [0, T], & \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| \leq \|f(0) - Au_0\| + \int_0^t \|f'(s)\| ds. \end{cases}$$

### 6.3 Modélisation mathématique

On rappelle quelques notations utilisées dans la partie 1 pour décrire les phénomènes électromagnétiques :

- $\Omega$  représente le domaine de l'espace dans lequel on travaille,
- $e$  et  $h$  désignent respectivement le champ électrique et le champ magnétique dans le domaine  $\Omega$ ,
- $\check{h}$  est le champ magnétique supposé connu sur le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . On suppose qu'il est calculé à partir de la formule de Biot-Savart,
- $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\varrho$  sont respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique, la conductivité électrique et la densité de charge. Ce sont des données qui peuvent, a priori, dépendre du matériau,
- $n$  est le vecteur normal unitaire extérieur au domaine considéré.

Dans tout ce document, on fait les hypothèses suivantes :

#### Hypothèse 6.3.1 : régularité de $\Omega$

Le domaine  $\Omega$  est un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$  lipschitzienne.

#### Hypothèse 6.3.2 : régularité du champ $\check{h}$

Le champ  $\check{h}$  admet un prolongement, encore noté  $\check{h}$ , dans  $\mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega))$  qui vérifie :

$$(6.5) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \check{h} = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div} \check{h} = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega. \end{cases}$$

De plus, il existe  $\check{e} \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2)$  tel que

$$(6.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\varepsilon\check{e})}{\partial t} \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)), \\ \frac{\partial(\mu\check{h})}{\partial t} + \operatorname{rot} \check{e} = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega. \end{cases}$$

#### Hypothèse 6.3.3 : contrôle de $\varepsilon$ et $\mu$

La fonction  $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est constante par morceaux. De plus, il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$(6.7) \quad \forall x \in \Omega, \varepsilon(x) \geq \alpha > 0.$$

La fonction  $\mu$  est constante égale à  $\mu_0 > 0$  où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide.

**Hypothèse 6.3.4 : contrôle de  $\sigma$** 

La fonction  $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  est constante par morceaux, positive ou nulle.

Les champs électromagnétiques sont régis par les équations de Maxwell ; on se place dans la situation suivante :

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \operatorname{rot} h = \sigma(x)e, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \operatorname{rot} e = 0, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div}(\mu_0 h) = 0, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega. \end{array} \right.$$

Sur le bord  $\partial\Omega$  de l'ouvert  $\Omega$ , on suppose le champ magnétique connu :

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} n \cdot \operatorname{rot} h = 0, \quad \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ n \times h = n \times \check{h}, \quad \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où  $\check{h}$  représente le champ émis par l'antenne étudiée dans la partie 1. La forme particulière de la condition initiale est motivée par les formulations variationnelles du chapitre 7.

On se donne aussi une condition initiale pour  $e$  et  $h$  :

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} e(0, \cdot) = e_0, \quad \text{dans } \Omega, \\ h(0, \cdot) = h_0, \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

En regroupant (6.8), (6.9) et (6.10), on obtient finalement le système suivant :

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \operatorname{rot} h = \sigma(x)e, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \operatorname{rot} e = 0, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div}(\mu_0 h) = 0, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \cdot \operatorname{rot} h = 0, \quad \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ n \times h = n \times \check{h}, \quad \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ e(0, \cdot) = e_0, \quad \text{dans } \Omega, \\ h(0, \cdot) = h_0, \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Si on rajoute à ce système, l'hypothèse de conservation de la charge

$$(6.12) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\sigma(x)e) = 0, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega,$$

et la condition initiale,

$$\operatorname{div}(\varepsilon(x)e_0) = \varrho(0, \cdot), \quad \text{dans } \Omega,$$

alors

$$(6.13) \quad \operatorname{div}(\varepsilon(x)e) = \varrho, \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

### Quelques commentaires sur les hypothèses (6.3.1 - 6.3.4) :

Les hypothèses (6.3.1) et (6.3.2) seront validées dans le cadre de notre étude au chapitre 9 (voir 9.1).

Les différents résultats énoncés dans ce chapitre restent valables si les fonctions  $\varepsilon$  et  $\mu$  satisfont l'hypothèse plus générale suivante.

#### Hypothèse 6.3.5 : contrôle de $\varepsilon$ et $\mu$

Il existe  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que

$$\begin{cases} a \text{ Id} \leq \varepsilon(x) \leq b \text{ Id}, & p.p. x \in \Omega, \\ a \text{ Id} \leq \mu(x) \leq b \text{ Id}, & p.p. x \in \Omega, \end{cases}$$

ces inégalités signifiant :

$$\begin{cases} p.p. x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, a |\xi|^2 \leq \varepsilon(x) \xi \cdot \xi \leq b |\xi|^2, \\ p.p. x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, a |\xi|^2 \leq \mu(x) \xi \cdot \xi \leq b |\xi|^2. \end{cases}$$

De plus, les démonstrations qui suivent sont inchangées si la conductivité  $\sigma$  dépend de la température  $\theta$  et satisfait l'hypothèse suivante.

#### Hypothèse 6.3.6 : contrôle de $\sigma$

Il existe  $c \geq 0$  et  $d > 0$  tels que  $c \text{ Id} \leq \sigma(x, \theta(t, x)) \leq d \text{ Id}$ ,  $p.p. (t, x) \in [0, T] \times \Omega$ .

Les hypothèses (6.3.5) et (6.3.6) constituent une idéalisation de la réalité : les fonctions  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont en fait continues dans  $\bar{\Omega}$ , constantes à l'intérieur des différents matériaux constituant  $\Omega$  et variant rapidement d'une valeur à l'autre au voisinage des interfaces. Un résultat de dépendance continue de la solution de (6.11) en les constantes diélectriques et les perméabilités magnétiques tel que celui énoncé dans [43] (voir le théorème 4.2 page 345) permet de montrer que le problème avec les fonctions constantes par morceaux peut être vu comme un problème limite du problème réel (voir l'application 4.1 de [43] page 349).

## 6.4 Analyse du problème évolutif : existence, unicité et stabilité

Afin de montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour le système (6.11), on va d'abord montrer l'existence et l'unicité d'une solution du système avec conditions aux limites homogènes suivant :

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \text{rot } h & = j_1^d(t, x) + \sigma(x)e, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \text{rot } e & = j_2^d(t, x), & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \text{div}(\mu_0 h) & = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \cdot \text{rot } h & = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ n \times h & = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ e(0, \cdot) & = e_0, & \text{dans } \Omega, \\ h(0, \cdot) & = h_0, & \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

avec le second membre  $j^d = (j_1^d, j_2^d)^T$  donné.

### 6.4.1 Énoncé du résultat

On considère les deux espaces suivants :

$$\mathbb{H}(\Omega) = (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2 \text{ muni du produit scalaire :}$$

$$\left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega} \varepsilon(x) u(x) \cdot u'(x) + \mu_0 v(x) \cdot v'(x) dx,$$

et

$$\mathbb{E}(\Omega) = \left\{ q = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(\Omega) ; q \in (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\text{rot} ; \Omega))^2 \text{ et } n \times h = 0 \text{ sur } ]0, T[ \times \partial\Omega \right\}.$$

Comme  $\varepsilon$  est une fonction bornée strictement positive et que  $\mu_0 > 0$ , les normes des espaces  $\mathbb{H}(\Omega)$  et  $(\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2$  sont équivalentes.

**Théorème 6.4.1 : le système (6.14) admet une unique solution**

*Soit  $j^d \in W^{1,1}(0, T; (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2)$  tel que  $\text{div}(j_2^d) = 0$  dans  $]0, T[ \times \Omega$ .*

*Soient  $\begin{pmatrix} e_0 \\ h_0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\text{rot} ; \Omega))^2$  tels que*

$$\text{div}(\mu_0 h_0) = 0, \text{ dans } \Omega.$$

*On suppose que les hypothèses 6.3.1, 6.3.3 et 6.3.4 sont satisfaites.*

*Alors, il existe une unique solution*

$$(e, h)^T \in \mathcal{C}^1([0, T]; (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\text{rot} ; \Omega))^2)$$

*au problème 6.14.*

*On suppose de plus que  $\varrho \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{-1}(\Omega))$  satisfait les relations suivantes :*

$$(6.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(j_1^d + \sigma(x)e) = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \text{div}(\varepsilon(x)e_0) = \varrho(0, \cdot), & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

*Alors, la solution  $(e, h)^T$  de (6.14) satisfait aussi :*

$$\text{div}(\varepsilon(x)e) = \varrho, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

Pour démontrer le théorème 6.4.1, suivant [43] et [75], on va utiliser la théorie des opérateurs maximaux monotones dans les espaces de Hilbert. La preuve comprend quatre étapes :

- Tout d'abord, on montre que l'opérateur associé au système

$$\begin{cases} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \text{rot } h = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \text{rot } e = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \times h = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

est maximal monotone.

- Ensuite, on rajoute la perturbation  $\sigma(x)e$  et on montre que l'opérateur associé au système

$$\begin{cases} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \operatorname{rot} h = \sigma(x)e, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \operatorname{rot} e = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \times h = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

est lui aussi maximal monotone.

- On en déduit alors l'existence et l'unicité d'une solution au problème

$$\begin{cases} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \operatorname{rot} h = j_1^d(t, x) + \sigma(x)e, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \operatorname{rot} e = j_2^d(t, x), & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \times h = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ e(0, \cdot) = e_0, & \text{dans } \Omega, \\ h(0, \cdot) = h_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

- Enfin, on rajoute les conditions

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu_0 h) = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \cdot \operatorname{rot} h = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ \operatorname{div}(\varepsilon(x)e) = \varrho, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega. \end{cases}$$

### 6.4.2 Première partie

Afin de mettre en évidence un opérateur monotone, on change le signe de la première équation. Le système étudié est donc le suivant :

$$(6.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial e}{\partial t} - \varepsilon^{-1}(x) \operatorname{rot} h = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \mu_0^{-1} \operatorname{rot} e = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \times h = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit  $A : D(A) \subset \mathbb{H}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}(\Omega)$  l'opérateur défini par :

$$(6.17) \quad A \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_x^{-1} \operatorname{rot} h \\ \mu_0^{-1} \operatorname{rot} e \end{pmatrix} \text{ et } D(A) = \mathbb{E}(\Omega).$$

Alors le système (6.16) s'écrit sous la forme :

$$\frac{dq}{dt} + Aq = 0 \text{ avec } q = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix}.$$

**Proposition 6.4.2 :**

*L'opérateur  $A$  défini par (6.17) est un opérateur linéaire maximal monotone.*

DÉMONSTRATION. L'opérateur  $A$  étant linéaire, on va utiliser la proposition 6.2.3 pour montrer que c'est un opérateur maximal monotone.

**1)  $A$  est monotone.**

Soit  $q = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \in D(A)$ .

On a :

$$\begin{aligned} (Aq, q)_{\mathbb{H}} &= - \int_{\Omega} \varepsilon(x) (\varepsilon^{-1}(x) \operatorname{rot} h) \cdot e \, dx + \int_{\Omega} \mu_0 (\mu_0^{-1} \operatorname{rot} e) \cdot h \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{rot} h) \cdot e \, dx + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} e) \cdot h \, dx. \end{aligned}$$

Par définition de  $D(A)$ ,  $e$  et  $h$  sont dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$  donc, d'après la formule de Green (6.1), on obtient :

$$(Aq, q)_{\mathbb{H}} = - \int_{\partial\Omega} (n \times h) \cdot e \, d\sigma = 0.$$

**2)  $A$  est fermé.**

Soit  $(q_n)_n = \begin{pmatrix} e_n \\ h_n \end{pmatrix}_n$  une suite de  $D(A)$  telle que :

$$\begin{cases} q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} q = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} & \text{dans } \mathbb{H}(\Omega), \\ Aq_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} & \text{dans } \mathbb{H}(\Omega). \end{cases}$$

On va montrer que  $q \in D(A)$  et que  $Aq = f$ .

Comme  $(Aq_n)_n$  converge vers  $f$  dans  $\mathbb{H}(\Omega)$ ,  $(\operatorname{rot} h_n)_n$  converge vers  $-\varepsilon f_1$  dans  $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega)$  donc dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Par ailleurs,  $(h_n)_n$  convergeant vers  $h$  dans  $\mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ , on en déduit que  $\operatorname{rot} h$  existe et que c'est la limite de  $(\operatorname{rot} h_n)_n$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Par unicité de la limite,  $\operatorname{rot} h = -\varepsilon f_1 \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$  et donc  $h \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$ .

De même,  $\operatorname{rot}(e) = \mu f_2$  et  $e \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$ .

On en déduit que  $(e_n)_n$  et  $(h_n)_n$  convergent respectivement vers  $e$  et  $h$  dans  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$ .

Par continuité de l'application trace  $\gamma_{\tau} : \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega) \longrightarrow \mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$ ,  $n \times h = 0$ . Ceci montre que  $q \in D(A)$ .

De plus, comme  $-\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} h = f_1$  et  $\mu^{-1} \operatorname{rot} e = f_2$ , on a  $Aq = f$ .

**3)  $D(A)$  est dense.**

Comme les normes des espaces  $\mathbb{H}(\Omega)$  et  $(\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2$  sont équivalentes, on déduit de la densité de  $(\mathcal{D}(\Omega))^6 \subset D(A)$  dans  $(\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2$  la densité de  $D(A)$  dans  $\mathbb{H}(\Omega)$ .

**4)  $A^*$  est monotone.**

On va maintenant étudier l'opérateur adjoint de  $A$  noté  $A^*$ .

On va tout d'abord montrer que  $D(A^*) \subset \mathbb{W} = \{q \in \mathbb{H}(\Omega); q \in (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2\}$ .

Pour cela, on se donne  $q^* = (e^*, h^*)^T \in D(A^*)$  et  $u \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$ . On pose  $q = (u, 0)^T$ . On vérifie facilement que  $q \in D(A)$  et on a :

$$\begin{aligned} (Aq, q^*)_{\mathbb{H}} &= \int_{\Omega} \mu_0 \mu_0^{-1} (\operatorname{rot} u) \cdot h^* dx \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{rot}(u) \cdot h^* dx \\ &= (q, A^* q^*)_{\mathbb{H}} \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon(x) u \cdot (A^* q^*)_1 dx. \end{aligned}$$

L'égalité précédente est valable pour toute fonction test  $u \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$  donc  $\operatorname{rot}(h^*)$  existe et vaut  $\varepsilon(A^* q^*)_1$ . Comme  $A^* q^* \in \mathbb{H}(\Omega)$ ,  $h^* \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$ .

De même, en utilisant  $q = (0, u)^T$ , on montre que  $\operatorname{rot}(e^*) = -\mu(A^* q^*)_2$  et donc que  $e^* \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$ .

Soient  $(q, q^*) \in D(A) \times D(A^*)$ . On sait par ce qui précède que  $q^* \in (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2$ , donc on peut utiliser la formule de Green (6.1) :

$$\begin{aligned} (Aq, q^*)_{\mathbb{H}} &= - \int_{\Omega} (\operatorname{rot} h) \cdot e^* dx + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} e) \cdot h^* dx \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{rot} e^*) \cdot h dx - \int_{\partial\Omega} (n \times h) \cdot e^* d\sigma + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} h^*) \cdot e dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (n \times h^*) \cdot e d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{rot} e^*) \cdot h dx + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} h^*) \cdot e dx + \int_{\partial\Omega} (n \times h^*) \cdot e d\sigma \\ &= (q, A^* q^*)_{\mathbb{H}} \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon(x) e \cdot (A^* q^*)_1 dx + \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot (A^* q^*)_2 dx. \end{aligned}$$

Sachant que

$$A^* q^* = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}(x) \operatorname{rot}(h^*) \\ -\mu_0^{-1} \operatorname{rot}(e^*) \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$(6.18) \quad \forall e \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega), \int_{\partial\Omega} (n \times h^*) \cdot e d\sigma.$$

Pour étudier cette intégrale de bord, on revient à la définition de produit de dualité entre  $\mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$  et son dual  $\mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Par linéarité, on étend (6.18) aux fonctions à valeurs complexes :

$$(6.19) \quad \forall e \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega), \langle \gamma_{\tau}(h^*), \pi_{\tau}(e) \rangle_{\mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\partial\Omega), \mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)} = 0.$$

Soit  $u_S \in \mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)$ .

Comme  $\pi_{\tau}$  est surjective, il existe  $u \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  telle que  $\pi_{\tau}(u) = u_S$ .

On obtient d'après (6.19) :

$$\langle \gamma_{\tau}(h^*), \pi_{\tau}(u) \rangle_{\mathbb{H}_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\partial\Omega), \mathbb{H}_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\forall u_S \in \mathbb{H}_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega), \langle \gamma_\tau(h^*), u_S \rangle_{\mathbb{H}_{\text{div}}^{-1/2}(\partial\Omega), \mathbb{H}_{\text{rot}}^{-1/2}(\partial\Omega)} = 0.$$

Donc  $n \times h^* = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

On vient donc de montrer que :

$$D(A^*) \subset \mathbb{E}(\Omega).$$

Réciproquement, soit  $q^* \in \mathbb{E}(\Omega)$ .

On peut refaire tous les calculs ci-dessus et on trouve que :

$$(Aq, q^*)_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega} -\text{rot}(e^*) \cdot h + \text{rot}(h^*) \cdot e \, dx.$$

D'où  $D(A^*) = \mathbb{E}(\Omega)$ .

Il reste maintenant à montrer que  $A^*$  est monotone.

Comme  $A^* = -A$ , on a :

$$\forall q^* \in D(A^*), (A^*q^*, q^*)_{\mathbb{H}} = -(Aq^*, q^*)_{\mathbb{H}} = 0.$$

Donc  $A^*$  est monotone. ■

### 6.4.3 Deuxième partie

**Proposition 6.4.3 :**

L'opérateur  $B : D(B) \subset \mathbb{H}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}(\Omega)$  défini par

$$(6.20) \quad D(B) = \mathbb{E}(\Omega) \text{ et } B \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1}(x) \text{rot } h + \varepsilon^{-1}(x) \sigma(x) e \\ \mu_0^{-1} \text{rot } e \end{pmatrix}$$

est un opérateur linéaire maximal monotone.

DÉMONSTRATION. L'opérateur défini par (6.20) se décompose sous la forme  $A + F$  avec  $F$  l'opérateur

$$F : \begin{cases} \mathbb{H}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{H}(\Omega) \\ \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}(x) \sigma(x) e \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

L'opérateur  $F$  est lipschitzien et monotone d'après l'hypothèse (6.3.4) :

$$\forall q \in \mathbb{H}(\Omega), (Fq, q)_{\mathbb{H}} = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1}(x) \sigma(x) e \cdot e \, dx \geq 0.$$

On déduit alors de la proposition 6.2.2 que l'opérateur  $B$  est maximal monotone. ■

### 6.4.4 Troisième partie

Soient  $j^d = (j_1^d, j_2^d)^T \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{H}(\Omega))$  et  $q_0 = (e_0, h_0)^T \in \mathbb{E}(\Omega)$ . D'après la proposition 6.4.3 et le théorème 6.2.4, il existe une unique solution

$$q = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{H}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{E}(\Omega))$$

au système :

$$(6.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \operatorname{rot} h & = j_1^d(t, x) + \sigma(x)e, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \operatorname{rot} e & = j_2^d(t, x), & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ n \times h & = 0, & \text{sur } ]0, T[ \times \partial\Omega, \\ e(0, \cdot) & = e_0, & \text{dans } \Omega, \\ h(0, \cdot) & = h_0, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Comme les espaces  $\mathbb{H}(\Omega)$  et  $(\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2$  sont équivalents, on déduit de ci-dessus que, pour tout  $j^d = (j_1^d, j_2^d)^T \in W^{1,1}(0, T; (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2)$  et tout  $q_0 = (e_0, h_0)^T \in (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2$ , il existe une unique solution

$$q = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1([0, T]; (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2)$$

au système (6.21).

### 6.4.5 Quatrième partie

On va maintenant achever la démonstration du théorème 6.4.1. On a les hypothèses suivantes :

$$(6.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(j_2^d) = 0, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \operatorname{div}(\mu_0 h_0) = 0, \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Alors, on vérifie que la solution  $q$  du problème (6.21) satisfait en plus :

$$\operatorname{div}(\mu_0 h) = 0, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

En effet, si on prend la divergence au sens des distributions de la deuxième équation du système (6.21), on obtient :

$$\frac{\partial(\operatorname{div}(\mu_0 h))}{\partial t} = \operatorname{div}(j_2^d), \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

Comme  $\operatorname{div}(j_2^d) = 0$  et  $\operatorname{div}(\mu_0 h_0) = 0$ , on en déduit que :

$$\operatorname{div}(\mu_0 h) = 0, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

On va maintenant montrer que

$$n \cdot \operatorname{rot} h = 0, \text{ sur } ]0, T[ \times \partial\Omega.$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

En utilisant (6.1) avec  $u = h$ ,  $v = \text{grad } \varphi$  et le fait que  $\text{rot}(\text{grad}) = 0$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \text{rot } h \cdot \text{grad } \varphi = \int_{\partial\Omega} (n \times h) \cdot \text{grad } \varphi \, d\sigma.$$

Par ailleurs, en utilisant (6.2) avec  $u = \text{rot } h$ ,  $v = \varphi$  et le fait que  $\text{div}(\text{rot}) = 0$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \text{rot } h \cdot \text{grad } \varphi = \int_{\partial\Omega} (n \cdot \text{rot } h) \varphi \, d\sigma.$$

D'où :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\partial\Omega} (n \cdot \text{rot } h) \varphi \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} (n \times h) \cdot \text{grad } \varphi \, d\sigma = 0,$$

c'est-à-dire,  $n \cdot \text{rot } h = 0$  sur  $]0, T[ \times \partial\Omega$ .

Il reste maintenant à démontrer la deuxième partie du théorème 6.4.1. Pour cela, on sait que  $\varrho \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{-1}(\Omega))$  et qu'elle satisfait (6.15) et

$$\text{div}(\varepsilon(x)e_0) = \varrho(0, \cdot), \text{ dans } \Omega.$$

La divergence au sens des distributions de la première équation de (6.21) conduit à :

$$-\frac{\partial(\text{div}(\varepsilon(x)e))}{\partial t} = \text{div } J,$$

avec  $J = j_1^d + \sigma e$ .

Comme la densité de charge  $\varrho$  satisfait (6.15), les grandeurs  $\varrho$  et  $\text{div}(\varepsilon(x)e)$  sont solutions de la même équation.

Par hypothèse,  $j_1^d \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega))$ . D'après la troisième partie de la démonstration,  $e \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega))$ . Comme la fonction  $\sigma$  est indépendante du temps et bornée, on obtient finalement

$$\sigma e \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)) \subset W^{1,1}(0, T; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)).$$

On en déduit

$$J \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{L}_{\mathbb{R}}^2(\Omega)) \text{ et } \text{div } J \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{-1}(\Omega)).$$

Comme l'opérateur nul est linéaire maximal monotone sur  $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{-1}(\Omega)$ , pour  $\varrho_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{-1}(\Omega)$  donné, il existe une unique solution  $\varrho \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$  à l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div } J = 0, & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \varrho(0, \cdot) = \varrho_0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

D'après l'unicité de la solution,  $\text{div}(\varepsilon(x)e) = \varrho$  dans  $]0, T[ \times \Omega$ .

### 6.4.6 Résultat de stabilité

**Théorème 6.4.4 : le système (6.14) est stable**

Soient  $j^d, J^d \in W^{1,1}(0, T; (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2)$  tels que  $\operatorname{div}(j_2^d) = \operatorname{div}(J_2^d) = 0$  dans  $]0, T[ \times \Omega$ .

Soient  $u_0, v_0 \in (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2$  tels que

$$\begin{cases} n \times u_{0,2} = n \times v_{0,2} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \operatorname{div}(\mu_0 u_{2,0}) = \operatorname{div}(\mu_0 v_{2,0}) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On suppose que les hypothèses 6.3.1, 6.3.3 et 6.3.4 sont satisfaites.

Soient  $u$  et  $v$  les solutions du problème 6.14 respectivement associées à  $j^d, u_0$  et  $J^d, v_0$ .

Alors, on a l'inégalité suivante :

$$(6.23) \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \|u(t) - v(t)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \|u(s) - v(s)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \int_s^t \|j^d(y) - J^d(y)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} dy.$$

En particulier,

$$(6.24) \quad \|u - v\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; \mathbb{H}(\Omega))} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \|j^d - J^d\|_{L^1(0, T; \mathbb{H}(\Omega))}.$$

De plus, on a :

$$(6.25) \quad \forall t \in [0, T], \quad \left\| \frac{d(u - v)}{dt}(t) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \|j^d(0, \cdot) - J^d(0, \cdot) - (Au_0 - Av_0)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{d(j^d - J^d)}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} ds.$$

DÉMONSTRATION. Par linéarité du problème (6.14),  $u - v$  est la solution de (6.14) associée aux données  $j^d - J^d$  et  $u_0 - v_0$ .

Les inégalités (6.23) et (6.25) sont des conséquences de l'inégalité (6.4) du théorème 6.2.4 et (6.24) se déduit de (6.23).  $\blacksquare$

### 6.4.7 Retour au problème initial

**Théorème 6.4.5 : existence et unicité du problème (6.11)**

Soient  $\check{h}$  satisfaisant l'hypothèse 6.3.2 et  $\begin{pmatrix} e_0 \\ h_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$  tels que

$$(6.26) \quad \begin{cases} n \times h_0 = n \times \check{h}(0, \cdot), & \text{sur } \partial\Omega, \\ \operatorname{div}(\mu_0 h_0) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On suppose que les hypothèses 6.3.1, 6.3.3 et 6.3.4 sont satisfaites.

Alors, il existe une unique solution

$$\begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1([0, T]; (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2)$$

au problème (6.11).

De plus, on a les inégalités

$$(6.27) \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \left\| \begin{pmatrix} e(t) - \check{e}(t) \\ h(t) - \check{h}(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} e(s) - \check{e}(s) \\ h(s) - \check{h}(s) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \int_s^t \left\| \frac{d\check{e}}{dt}(y) + \varepsilon^{-1} \sigma \check{e}(y) \right\|_{\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega)} dy.$$

et

$$\forall t \in [0, T], \quad \left\| \begin{pmatrix} \frac{d(e - \check{e})}{dt}(t) \\ \frac{d(h - \check{h})}{dt}(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{d(\varepsilon \check{e})}{dt}(0) + \sigma \check{e}(0) + \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} h_0 - \varepsilon^{-1} \sigma e_0 \\ -\mu^{-1} \operatorname{rot} e_0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{d^2 \check{e}}{dt^2}(s) + \varepsilon^{-1} \sigma \frac{d\check{e}}{dt}(s) \right\|_{\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega)} ds,$$

où  $\check{e}$  est une fonction satisfaisant (6.6).

Si de plus  $\varrho \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{-1}(\Omega))$  et satisfait les relations (6.12) et

$$\operatorname{div}(\varepsilon(x) e_0) = \varrho(0, \cdot), \text{ dans } \Omega,$$

alors

$$\operatorname{div}(\varepsilon(x) e) = \varrho, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\check{e}$  une fonction introduite à l'hypothèse 6.6. On pose  $j^d = \left( \frac{\partial(\varepsilon(x)\check{e})}{\partial t} + \sigma(x)\check{e}, 0 \right)^T$  et

$$(6.28) \quad \begin{cases} \tilde{e}_0 &= e_0 - \check{e}(0, \cdot), \\ \tilde{h}_0 &= h_0 - \check{h}(0, \cdot). \end{cases}$$

D'après (6.26), les données  $\tilde{e}_0$  et  $\tilde{h}_0$  satisfont les hypothèses du théorème 6.4.1 et

$$j^d \in W^{1,1}(0, T, (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2) \text{ avec } \operatorname{div}(j_2^d) = 0, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

Le théorème 6.4.1 assure l'existence d'une solution

$$\begin{pmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1([0, T]; (\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\Omega))^2) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega))^2)$$

au problème (6.14) pour les données ci-dessus.

Alors le couple  $(e, h)^T = (\tilde{e} + \check{e}, \tilde{h} + \check{h})^T$  est une solution de (6.11).

En effet,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t} + \operatorname{rot} h & = & j_1^d - \sigma(x)\tilde{e} - \frac{\partial(\varepsilon(x)\check{e})}{\partial t} = \sigma(x)e, \\ -\frac{\partial(\mu_0 h)}{\partial t} + \operatorname{rot} e & = & j_2^d = 0, \\ \operatorname{div}(\mu_0 h) & = & \operatorname{div}(\mu_0 \tilde{h}) + \operatorname{div}(\mu_0 \check{h}) = 0, \\ n \cdot \operatorname{rot} h & = & n \cdot \operatorname{rot} \tilde{h} + n \cdot \operatorname{rot} \check{h} = 0, \\ n \times h & = & n \times \tilde{h} + n \times \check{h} = n \times \check{h}, \\ e(0, \cdot) & = & \tilde{e}(0, \cdot) + \check{e}(0, \cdot) = e_0, \\ h(0, \cdot) & = & \tilde{h}(0, \cdot) + \check{h}(0, \cdot) = h_0. \end{array} \right.$$

Enfin, la régularité des fonctions  $\tilde{e}$  et  $\tilde{h}$  est conservée par les fonctions  $e$  et  $h$ .

Réciproquement, si  $(e, h)^T$  est un couple de solution de (6.11), les calculs précédents montrent que  $(\tilde{e}, \tilde{h})^T = (e - \check{e}, h - \check{h})^T$  est solution de (6.14). L'unicité du théorème 6.4.1 assure l'unicité d'une solution au problème (6.14).

Les deux inégalités sont des conséquences immédiates des inégalités (6.24) et (6.25) et de l'expression de  $j^d$ .

On pose

$$\tilde{\varrho} = \varrho - \operatorname{div}(\varepsilon(x)\check{e}).$$

Alors,  $\tilde{\varrho} \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{-1}(\Omega))$  satisfait l'hypothèse (6.15) du théorème 6.4.1. On obtient alors :

$$\operatorname{div}(\varepsilon(x)\tilde{e}) = \tilde{\varrho}, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{div}(\varepsilon(x)e) = \varrho, \text{ dans } ]0, T[ \times \Omega.$$

■

## 6.5 Le problème en régime transitoire

### Présentation

Dans cette section, on se donne un champ magnétique  $\check{h}$  calculé à partir de la formule de Biot-Savart et des conditions initiales  $(e_{tot,0}, h_{tot,0})^T$ . On suppose que le champ magnétique  $\check{h}$  se décompose sous la forme

$$\check{h} = \check{h}_1 + \check{h}_2 \text{ avec } \begin{cases} \check{h}_1(t, x) & = e^{-t/\tau} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) G(x), A, B \in \mathbb{R}, \\ \check{h}_2(t, x) & = \Re(H_2(x) e^{-i\omega t}), \end{cases}$$

et que les hypothèses du théorème 6.4.5 sont satisfaites. On note  $(e_{tot}, h_{tot})^T$  la solution de (6.11) associée à la donnée  $\check{h}$  et aux conditions initiales  $(e_{tot,0}, h_{tot,0})^T$ .

Par ailleurs, on suppose que le système

$$(6.29) \quad \begin{cases} i\omega\varepsilon E + \operatorname{rot} H &= \sigma E, & \text{dans } \Omega, \\ -i\omega\mu H + \operatorname{rot} E &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ n \times H &= n \times H_2, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une unique solution  $(E, H) \in (\mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega))^2$  avec  $\operatorname{div} H = 0$  dans  $\Omega$ .

Le but de cette section est de montrer que le couple

$$(6.30) \quad \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(E(x)e^{-i\omega t}) \\ \Re(H(x)e^{-i\omega t}) \end{pmatrix}$$

est une bonne approximation du couple  $(e_{tot}, h_{tot})^T$  pour  $t$  grand. Pour cela, on va établir une majoration de la norme  $\|(e_{tot} - e, h_{tot} - h)^T\|_{\mathbb{H}(\Omega)}$ .

### Cadre de travail

Dans cette section on suppose que les hypothèses 6.3.1, 6.3.3 et 6.3.4 sont satisfaites et que  $e_{tot,0} = h_{tot,0} = 0$ .

On suppose aussi que  $G \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\operatorname{rot}; \Omega)$  et  $H_2 \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  avec  $\operatorname{div} H_2 = 0$  dans  $\Omega$  et  $\Re(H_2) \neq 0$  et qu'il existe  $E_2 \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  telle que  $\operatorname{rot} E_2 = i\omega\mu_0 H_2$ . On suppose enfin que

$$(6.31) \quad \check{h}(0, \cdot) = \frac{\partial \check{h}}{\partial t}(0, \cdot) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

et que  $\check{h}_1$  et  $\check{h}_2$  satisfont l'hypothèse 6.3.2.

### Remarque 6.5.1 : retour sur les hypothèses de la partie Présentation

Comme  $\check{h} = \check{h}_1 + \check{h}_2$ , on déduit de ci-dessus par linéarité que  $\check{h}$  satisfait également l'hypothèse 6.3.2. De plus, on vérifie aisément que  $(e_{tot,0}, h_{tot,0})^T$  satisfait les hypothèses du théorème 6.4.5.

### Majoration

On suppose donnée une condition initiale  $(e_{2,0}, h_{2,0})^T$  vérifiant les hypothèses du théorème 6.4.5. On verra par la suite comment choisir cette condition initiale de façon appropriée. On note alors  $(e_2, h_2)^T$  la solution de (6.11) associée à la donnée  $\check{h}_2$  et la condition initiale  $(e_{2,0}, h_{2,0})^T$ .

On pose  $(e_{1,0}, h_{1,0})^T = -(e_{2,0}, h_{2,0})^T$  et on suppose que  $(e_{1,0}, h_{1,0})^T$  satisfait les hypothèses du théorème 6.4.5. On note  $(e_1, h_1)^T$  la solution de (6.11) associée à la donnée  $\check{h}_1$  et la condition initiale  $(e_{1,0}, h_{1,0})^T$ .

Par hypothèse  $(e_{tot,0}, h_{tot,0})^T = (e_{1,0}, h_{1,0})^T + (e_{2,0}, h_{2,0})^T$ . On déduit alors de la linéarité et de l'unicité de (6.11) que  $(e_{tot}, h_{tot})^T = (e_1, h_1)^T + (e_2, h_2)^T$  et donc que :

$$\left\| \begin{pmatrix} e_{tot} - e \\ h_{tot} - h \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} = \left\| \begin{pmatrix} e_1 + (e_2 - e) \\ h_1 + (h_2 - h) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} e_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \left\| \begin{pmatrix} e_2 - e \\ h_2 - h \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)}.$$

On va tout d'abord montrer que la condition initiale  $(e_{2,0}, h_{2,0})^T$  peut être choisie de façon à annuler la seconde norme du terme de droite dans l'inégalité précédente.

Pour cela, on pose  $(e_{2,0}, h_{2,0})^T = (\Re(E(x)), \Re(H(x)))^T$  où  $(E, H)$  est la solution de (6.29). Par hypothèse,  $(e_{2,0}, h_{2,0})^T \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}(\text{rot}; \Omega)$  satisfait

$$\begin{cases} n \times h_{2,0} &= n \times \Re(H) &= n \times \Re(H_2) &= n \times \check{h}_2(0, \cdot), & \text{sur } \partial\Omega, \\ \text{div}(\mu_0 h_{2,0}) &= \text{div}(\mu_0 \Re(H)) &= \Re(\text{div}(\mu_0 H)) &= 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Les hypothèses du théorème 6.4.5 sont donc vérifiées et il existe une solution unique  $(e_2, h_2)^T$  de (6.11) associée à  $\check{h}_2$  et  $(e_{2,0}, h_{2,0})^T$ . On vérifie aisément que le couple  $(e, h)^T$  est aussi solution de (6.11) avec les mêmes conditions initiales. D'après l'unicité des solutions de (6.11),  $(e_2, h_2)^T = (e, h)^T$ .

On en déduit l'inégalité suivante :

$$(6.32) \quad \left\| \begin{pmatrix} e_{tot} - e \\ h_{tot} - h \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} e_1 \\ h_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)}.$$

**Remarque 6.5.2 : retour sur l'existence de  $(e_1, h_1)^T$**

Comme  $\check{h}_1 = -\check{h}_2$ , que  $(e_{1,0}, h_{1,0})^T = -(e_{2,0}, h_{2,0})^T$  et que  $(e_{2,0}, h_{2,0})^T$  satisfait les hypothèses du théorème 6.4.5, le couple  $(e_{1,0}, h_{1,0})^T$  satisfait aussi les hypothèses du théorème 6.4.5. Il existe donc une unique solution  $(e_1, h_1)^T$  solution de 6.4.5 associée à la condition  $\check{h}_1$  et à la condition initiale  $(e_{1,0}, h_{1,0})^T$ .

Il reste à majorer le terme de droite de (6.32). Pour cela, on va utiliser l'inégalité (6.27) en décomposant (6.32) de la façon suivante :

$$(6.33) \quad \left\| \begin{pmatrix} e_{tot} - e \\ h_{tot} - h \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} e_1 - \check{e}_1 \\ h_1 - \check{h}_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \left\| \begin{pmatrix} \check{e}_1 \\ \check{h}_1 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)}.$$

Cette technique n'a pas permis de montrer que  $\|(e_{tot} - e, h_{tot} - h)^T\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , la raison principale étant que

$$\int_0^t e^{-u/\tau} du = \tau (1 - e^{-t/\tau}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \tau \neq 0.$$

Cependant, on a montré que  $\|(e_{tot} - e, h_{tot} - h)^T\|_{\mathbb{H}(\Omega)}$  est borné par une constante indépendante du temps et déterminée par les conditions initiales  $(E_2, H_2)^T$  et la solution  $(E, H)^T$  de (6.29).

Pour commencer, on va exprimer  $\check{e}_1$  en fonction de  $E_2$ . D'après (6.31),

$$(6.34) \quad G(x) = -\frac{1}{A} \Re(H_2(x)) \text{ et } \left( -\frac{1}{\tau} A + B\omega \right) G(x) = -\omega \Im(H_2(x)).$$

On pose

$$F = \frac{1}{A\omega} \Im(E_2),$$

et

$$\check{e}_1 = e^{-t/\tau} \left[ \left( -\frac{A}{\tau} + B\omega \right) \cos(\omega t) + \left( -\frac{B}{\tau} - A\omega \right) \sin(\omega t) \right] F(x).$$

On vérifie aisément que  $\check{e}_1$  est une fonction de 6.3.2 associée à  $\check{h}_1$ .

Comme  $\Re(H_2) \neq 0$ , il existe  $x_0 \in \Omega$  tel que  $\Re(H_2(x_0)) \neq 0$  et on pose

$$\beta = \frac{\Im(H_2(x_0))}{\Re(H_2(x_0))}.$$

La définition de  $\beta$  est indépendante du choix de  $x_0$ . En effet, d'après (6.34),

$$BG(x) = -\Im(H_2(x)) - \frac{1}{\tau\omega}\Re(H_2(x)).$$

Comme  $\Re(H_2) \neq 0$  et que  $AG(x) = -\Re(H_2(x))$ , le coefficient  $A$  est non nul et on obtient :

$$\frac{B}{A}AG(x) = -\frac{B}{A}\Re(H_2(x)) = -\Im(H_2(x)) - \frac{1}{\tau\omega}\Re(H_2(x)).$$

Autrement dit,

$$\left(\frac{B}{A} - \frac{1}{\tau\omega}\right)\Re(H_2(x)) = \Im(H_2(x)),$$

et  $\beta = \left(\frac{B}{A} - \frac{1}{\tau\omega}\right)$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{A}{\tau} + B\omega\right)F(x) &= \left(-\frac{A}{\tau} + B\omega\right)\frac{1}{A\omega}\Im(E_2(x)) \\ &= \left(\frac{B}{A} - \frac{1}{\tau\omega}\right)\Im(E_2(x)) \\ &= \beta\Im(E_2(x)). \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{B}{\tau} - A\omega\right)F(x) &= -\frac{1}{\tau\omega}(B\omega + \tau\omega^2A)F(x) \\ &= -\frac{1}{\tau\omega}\left(B\omega - \frac{A}{\tau}\right)F(x) - \left(\frac{1}{\tau^2\omega} + \omega\right)AF(x) \\ &= -\left(\frac{\beta}{\tau\omega} + \frac{1}{\tau^2\omega^2} + 1\right)\Im(E_2(x)). \end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de  $\check{e}_1$ , on obtient :

$$(6.35) \quad \check{e}_1(t, x) = e^{-t/\tau} \left[ \beta \cos(\omega t) - \left( \frac{\beta}{\tau\omega} + \frac{1}{\tau^2\omega^2} + 1 \right) \sin(\omega t) \right] \Im(E_2(x)).$$

Dans la suite, on suppose que  $\tau$  et  $\omega$  sont respectivement les grandeurs  $\tau_1$  et  $\omega_1$  calculés dans la partie 1. En particulier, ceci implique que

$$(6.36) \quad \begin{cases} \tau\omega \geq 10^3, \\ \tau \simeq 1,47 \times 10^{-5}, \end{cases}$$

où la notation  $a \simeq b$  signifie que  $a$  et  $b$  sont du même ordre de grandeur. L'usage de cette notation permet de ne pas alourdir les calculs dans la suite du développement.

On déduit des valeurs ci-dessus que

$$(6.37) \quad \check{e}_1(t, x) \simeq e^{-t/\tau} [\beta \cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \mathfrak{S}(E_2(x)).$$

On revient maintenant à l'inégalité (6.33). Pour  $t \geq 5\tau$ ,

$$\|\check{e}_1(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \simeq (1 + \beta)e^{-t/\tau} \|\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \simeq 0,$$

et

$$\|\check{h}_1(t, \cdot)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq e^{-t/\tau} \left( \|\mathfrak{R}(H_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \|\mathfrak{S}(H_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \frac{1}{\tau\omega} \|\mathfrak{R}(H_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \right) \simeq 0,$$

donc

$$(6.38) \quad \forall t \geq 5\tau, \left\| \begin{pmatrix} e_{tot} - e \\ h_{tot} - h \end{pmatrix} (t) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} e_1 - \check{e}_1 \\ h_1 - \check{h}_1 \end{pmatrix} (t) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)}.$$

Pour majorer le terme de droite de (6.38), on va utiliser l'inégalité (6.27) :

$$(6.39) \quad \forall 0 \leq t \leq T, \left\| \begin{pmatrix} e_1(t) - \check{e}_1(t) \\ h_1(t) - \check{h}_1(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} e_1(0) - \check{e}_1(0) \\ h_1(0) - \check{h}_1(0) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{d\check{e}_1}{dt}(y) + \varepsilon^{-1} \sigma \check{e}_1(y) \right\|_{\mathbb{L}_R(\Omega)} dy.$$

Comme  $(e_{1,0}, h_{1,0})^T = -(e_{2,0}, h_{2,0})^T$ , on déduit de (6.37) l'approximation suivante pour le premier terme de droite de (6.39) :

$$(6.40) \quad \left\| \begin{pmatrix} e_1(0) - \check{e}_1(0) \\ h_1(0) - \check{h}_1(0) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \simeq \left\| \begin{pmatrix} \mathfrak{R}(E) + \beta \mathfrak{S}(E_2) \\ \mathfrak{R}(H - H_2) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)}.$$

En dérivant (6.37) et en utilisant (6.36), on obtient :

$$\frac{\partial(\varepsilon(x)\check{e}_1)}{\partial t}(t, x) \simeq e^{-t/\tau} [\cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)] \varepsilon \omega \mathfrak{S}(E_2(x)),$$

et

$$\sigma(x)\check{e}_1(t, x) \simeq e^{-t/\tau} [\beta \cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \sigma \mathfrak{S}(E_2(x)).$$

On déduit des deux expressions précédentes, l'approximation :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\| \frac{\partial(\varepsilon(x)\check{e}_1)}{\partial t}(s, x) + \sigma(x)\check{e}_1(s, x) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} ds \\ & \simeq \int_0^t e^{-s/\tau} \left[ \|(\varepsilon\omega + \beta\sigma)\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \|(\beta\varepsilon\omega - \sigma)\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \right] ds. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^t e^{-s/\tau} ds = \tau(1 - e^{-t/\tau}) \simeq \tau \text{ dès que } t \geq 5\tau,$$

on a, pour  $t \geq 5\tau$ ,

$$(6.41) \quad \int_0^t \left\| \frac{\partial(\varepsilon(x)\check{e}_1)}{\partial t}(s, x) + \sigma(x)\check{e}_1(s, x) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} ds \\ \simeq \tau \left[ \|(\varepsilon\omega + \beta\sigma)\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \|(\beta\varepsilon\omega - \sigma)\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \right] ds.$$

Afin de comparer les normes  $\|\varepsilon\omega\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)}$  et  $\|\beta\sigma\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)}$ , on suppose que  $\mathfrak{S}(H_2)$  est répartie de façon homogène dans  $\Omega$ . On suppose aussi que  $\Omega$  est constitué d'air, de tissus humains ( $\Omega_h$ ), d'un cathéter métallique ( $\Omega_m$ ) et que

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dans l'air,} \\ \sigma_h(x) \leq 1, & \text{dans } \Omega_h, \\ \sigma_m = 10^7, & \text{dans } \Omega_m. \end{cases}$$

On suppose que la mesure du cathéter est 100 fois plus petite que celle de  $\Omega$  et que les tissus humains occupent la majeure partie de  $\Omega$ . Alors, on obtient :

$$\|\beta\sigma\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \simeq \|\beta\sigma_h\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega_h)} + \|\beta\sigma_m\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega_m)} \\ \simeq (1 + \beta\sigma_m \times 10^{-2}) \|\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}}.$$

En reportant dans (6.41), on a :

$$(6.42) \quad \int_0^t \left\| \frac{\partial(\varepsilon(x)\check{e}_1)}{\partial t}(s, x) + \sigma(x)\check{e}_1(s, x) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} ds \\ \simeq \tau\beta(1 + \sigma_m \times 10^{-2}) \|\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \\ \simeq \|\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)}.$$

Donc, pour  $t \geq 5\tau$ ,

$$(6.43) \quad \left\| \begin{pmatrix} e_{tot} - e \\ h_{tot} - h \end{pmatrix} (t) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \leq \left\| \begin{pmatrix} e_1 - \check{e}_1 \\ h_1 - \check{h}_1 \end{pmatrix} (t) \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} \\ \leq \left\| \begin{pmatrix} \mathfrak{R}(E) + \beta\mathfrak{S}(E_2) \\ \mathfrak{R}(H - H_2) \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{H}(\Omega)} + \|\mathfrak{S}(E_2)\|_{\mathbb{H}(\Omega)}.$$

## Discussion

L'inégalité (6.43) montre que l'erreur  $\|(e_{tot} - e, h_{tot} - h)^T\|_{\mathbb{H}(\Omega)}$  reste bornée par une constante dépendant uniquement de la condition aux limites  $H_2$  et de la solution  $(E, H)^T$  de (6.29). Il est donc raisonnable d'approcher le couple  $(e_{tot}, h_{tot})^T$  par le couple  $(e, h)^T$ .

En éliminant l'inconnue  $E$  de (6.29), on obtient

$$(6.44) \quad \begin{cases} \text{rot} \left( \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot} H \right) + i\omega\mu H = 0, & \text{dans } \Omega, \\ n \times H = n \times H_2, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si  $H$  est une solution de (6.44), on pose

$$E = \frac{1}{\sigma - i\varepsilon\omega} \text{rot } H.$$

Alors, le couple  $(E, H)^T$  est une solution de (6.29). D'après l'unicité de (6.29), on en déduit que le système (6.44) permet de construire une bonne approximation de la solution de (6.11).

## Chapitre 7

# Étude du problème harmonique

Le chapitre 7 est consacré à l'étude du problème (6.44) établi dans le chapitre précédent. Les différentes hypothèses concernant le domaine d'étude ainsi que les fonctions  $\varepsilon$  et  $\sigma$  sont présentées dans la section 6.3 du chapitre 6. Dans tout ce chapitre,  $\check{h}$  désigne une fonction dans  $\mathbb{H}(\text{rot}, \text{div}; \Omega)$  à divergence et rotationnel nuls. Pour étudier le problème (6.44), on introduit un nouveau problème équivalent, le problème régularisé (7.7). Pour ce dernier, on démontre un résultat d'existence et d'unicité.

### 7.1 Formulation variationnelle

L'objet du présent chapitre est l'étude du problème :  
Trouver le champ  $h$  satisfaisant au système

$$(7.1) \quad \begin{cases} \text{rot} \left[ \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot} h \right] + i\omega\mu_0 h = 0, & \text{dans } \Omega, \\ h \times n = \check{h} \times n, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ici, les fonctions vectorielles  $h$  et  $\check{h}$  sont à valeurs complexes; le système (7.1) est issu de (6.44). À (7.1) on associe les deux problèmes suivants.

#### Problème I :

Trouver  $h \in \mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$  tel que

$$(7.2) \quad \begin{cases} \forall h' \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega), \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot} h \cdot \text{rot} h' dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' dx = 0, \\ h \times n = \check{h} \times n, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

#### Problème II :

Trouver  $h \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$  tel que

$$(7.3) \quad \forall h' \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega), \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot} h \cdot \text{rot} h' dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot h' dx.$$

Le problème (7.2) n'est autre que la formulation variationnelle de (7.1).

**Remarque 7.1.1 : à propos de la condition aux limites pour  $h$** 

Pour écrire la formulation variationnelle (7.2) il faut pouvoir annuler l'intégrale

$$\int_{\partial\Omega} (n \times \operatorname{rot} h) \cdot h' \, d\sigma.$$

Il est donc nécessaire que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

$$n \times \operatorname{rot} h = 0, \text{ sur } \partial\Omega \text{ ou } n \times h' = 0, \text{ sur } \partial\Omega.$$

On a privilégié la seconde condition aux limites dans le cadre de notre étude. Cependant, tous les résultats énoncés dans cette partie restent valables en utilisant la première condition aux limites (à ce sujet voir [54]).

La proposition suivante assure que les deux formulations variationnelles (7.2) et (7.3) sont équivalentes.

**Proposition 7.1.2 : équivalence des problèmes I et II**

Les problèmes (7.2) et (7.3) sont équivalents.

Précisément,  $h$  est une solution de (7.2) si et seulement si  $\tilde{h} = h - \check{h}$  est une solution de (7.3).

DÉMONSTRATION. Soit  $h$  une solution du problème (7.2). On pose  $\tilde{h} = h - \check{h}$ . Comme  $h$  et  $\check{h}$  sont dans  $\mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$ ,  $\tilde{h}$  l'est aussi. De plus,

$$\tilde{h} \times n = h \times n - \check{h} \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

D'où  $\tilde{h} \in \mathbb{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ .

D'autre part, soit  $h'$  une fonction test de  $\mathbb{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ .

Alors, en remplaçant  $\tilde{h}$  par son expression, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} \tilde{h} \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \tilde{h} \cdot h' \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\operatorname{rot} h - \operatorname{rot} \check{h}) \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 (h - \check{h}) \cdot h' \, dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' \, dx - i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot h' \, dx. \end{aligned}$$

Comme  $h$  est solution de (7.2), on en déduit que :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} \tilde{h} \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \tilde{h} \cdot h' \, dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot h' \, dx.$$

La fonction  $\tilde{h}$  est donc solution du problème (7.3).

La démonstration de l'autre implication se fait de la même manière en considérant la fonction  $h = \tilde{h} + \check{h}$  où  $\tilde{h}$  est une solution du problème (7.3) et  $\operatorname{rot} \check{h} = 0$ . ■

**Corollaire 7.1.3 :**

Le problème (7.2) admet une solution unique si et seulement si le problème (7.3) admet une solution unique.

DÉMONSTRATION. La démonstration est une conséquence immédiate de la proposition 7.1.2. ■

On conclut cette section par un résultat de régularité concernant les solutions de (7.2) et (7.3).

**Proposition 7.1.4 : régularité des solutions de (7.2) et (7.3)**

Soit  $h$  une solution de (7.3).

Alors  $\frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega) \cap \mathbb{H}(\operatorname{div}, i\varepsilon\omega - \sigma; \Omega)$  et  $h \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega)$ .

De plus, la fonction  $h$  est à divergence nulle dans  $\Omega$ .

On a un résultat similaire pour les solutions de (7.2).

DÉMONSTRATION. Soit  $h$  une solution de (7.3).

On pose  $e = \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h$ .

Comme  $h \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  et que la fonction  $\frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma}$  est bornée,  $e$  appartient à  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ .

Soit  $\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$ .

En utilisant  $\varphi$  comme fonction test dans (7.3), on obtient :

$$\int_{\Omega} e \cdot \operatorname{rot} \varphi \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot \varphi \, dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot \varphi \, dx.$$

Sachant que  $\varphi$  est à support compact dans  $\Omega$ ,  $n \times \varphi = 0$  sur  $\partial\Omega$  et on a :

$$\int_{\Omega} e \cdot \operatorname{rot} \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} e \cdot (n \times \varphi) \, d\sigma = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 (h + \check{h}) \cdot \varphi \, dx.$$

D'où  $\operatorname{rot} e$  existe et vaut  $-i\omega\mu_0 (h + \check{h}) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ .

Comme  $\operatorname{rot} h$  est à divergence nulle dans  $\Omega$ , le terme  $\frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h$  est bien dans  $\mathbb{H}(\operatorname{div}, i\varepsilon\omega - \sigma; \Omega)$ .

Comme  $\operatorname{rot} e$  et  $\check{h}$  sont à divergence nulle dans  $\Omega$  et que

$$\check{h} + h = \frac{i}{\mu_0\omega} \operatorname{rot} e,$$

la fonction  $h$  appartient à  $\mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega)$  et  $\operatorname{div} h$  est nulle dans  $\Omega$ .

La démonstration dans le cas du problème (7.2) est une conséquence du corollaire 7.1.3 et du problème (7.3). ■

## 7.2 Régularisation

Afin d'étudier le problème (7.3), on va utiliser la théorie de Fredholm. Comme l'inclusion  $\mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$  n'est pas compacte, on va montrer que (7.3) est équivalent à un problème formulé avec un nouvel espace inclus compactement dans l'espace  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ .

Au lieu de l'équation

$$(7.4) \quad \operatorname{rot} \left[ \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \right] + i\omega\mu_0 h = 0 \text{ dans } \Omega,$$

on considère maintenant l'équation régularisée

$$(7.5) \quad \operatorname{rot} \left[ \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \right] - \mu_0 \operatorname{grad} [s \operatorname{div} (\mu_0 h)] + i\omega\mu_0 h = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où  $s$  est une fonction supposée connue (si  $s \equiv 0$ , on retrouve l'équation (7.4)).

On suppose que  $s$  vérifie l'hypothèse suivante.

### Hypothèse 7.2.1 : régularité de $s$

La fonction  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est soit la fonction nulle, soit une fonction constante par morceaux de partie imaginaire strictement négative.

On considère les espaces de Fréchet suivants

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_s(\Omega) &= \begin{cases} \{h \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}, \operatorname{div}; \Omega); \operatorname{div} h = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \quad h \times n = \check{h} \times n \text{ sur } \partial\Omega\}, \text{ si } s \equiv 0, \\ \{h \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}, \operatorname{div}; \Omega); h \times n = \check{h} \times n \text{ sur } \partial\Omega\}, \text{ si } s \neq 0, \end{cases} \\ \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) &= \begin{cases} \{h \in \mathbb{H}_0(\operatorname{rot}, \operatorname{div}; \Omega); \operatorname{div} h = 0 \text{ dans } \Omega\}, \text{ si } s \equiv 0, \\ \{h \in \mathbb{H}_0(\operatorname{rot}, \operatorname{div}; \Omega)\}, \text{ si } s \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

### Problème I régularisé :

Trouver  $h \in \mathcal{H}_s(\Omega)$  tel que

$$(7.7) \quad \forall h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + \int_{\Omega} s \operatorname{div} (\mu_0 h) \overline{\operatorname{div} (\mu_0 h')} \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' \, dx = 0.$$

### Problème II régularisé :

Trouver  $h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$  tel que

$$(7.8) \quad \forall h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + \int_{\Omega} s \operatorname{div} (\mu_0 h) \overline{\operatorname{div} (\mu_0 h')} \, dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' \, dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot h' \, dx.$$

### Remarque 7.2.2 : à propos des problèmes régularisés

Les problèmes régularisés (7.7) et (7.8) ne peuvent pas être interprétés au sens des distributions si  $\mu$  est une fonction non régulière (par exemple, constante par morceaux). En effet, dans ce cas là,  $(\mathcal{D}(\Omega))^3$  n'est pas contenu dans  $\mathbb{H}(\operatorname{rot}, \operatorname{div}; \mu; \Omega)$ . Pour voir comment adapter les formulations des problèmes régularisés dans le cas où  $\mu$  est une fonction non régulière, on pourra consulter [54].

### Corollaire 7.2.3 : équivalence des problèmes (7.7) et (7.8)

Les problèmes (7.7) et (7.8) sont équivalents.

DÉMONSTRATION. La démonstration est similaire à celle de la proposition 7.1.2 et du corollaire 7.1.3. ■

Avant de démontrer l'équivalence entre le problème II et son régularisé dans le cas d'une fonction  $s$  quelconque, on va étudier le cas  $s \equiv 0$ . Dans ce cas là, les problèmes 7.3 et 7.8 ne diffèrent que par le choix des espaces fonctionnels. Pour montrer l'équivalence des problèmes, on a besoin du lemme de décomposition des fonctions de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  énoncé dans [54] (voir le lemme B.6 page 1628).

**Lemme 7.2.4 : lemme de décomposition**

Soient  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , de frontière lipschitzienne se composant de deux parties disjointes  $F_0$  et  $F_1$ , l'une d'entre elles étant éventuellement vide et  $\xi \in L^\infty(\mathcal{O})$  vérifiant  $\Re(\xi) \geq \alpha_0 > 0$ .

Alors, toute fonction  $V \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$  se décompose selon

$$V = \text{grad } \varphi + V'$$

avec

$$\begin{cases} \varphi \in H^1(\mathcal{O}) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } F_0, \\ V' \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}), \text{div}(\xi V') = 0 \text{ dans } \mathcal{O} \text{ et } \xi V' \cdot n = 0 \text{ sur } F_1. \end{cases}$$

On aura alors de plus

$$\text{rot } V' = \text{rot } V, \text{ dans } \mathcal{O} \text{ et } \text{grad } \varphi \times n = 0, \text{ sur } F_0.$$

**Proposition 7.2.5 : équivalence des problèmes (7.3) et (7.8)**

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $h \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$  est une solution du problème (7.3),
- (ii)  $h \in \mathcal{H}_{0,0}(\Omega)$  est une solution du problème (7.8).

DÉMONSTRATION. On suppose que (i) est vérifié.

D'après la proposition 7.1.4,  $h$  vérifie  $\text{div } h = 0$  dans  $\Omega$ , c'est-à-dire  $h \in \mathcal{H}_{0,0}(\Omega)$ .

Comme  $\mathcal{H}_{0,0}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$  et que  $\text{div } h \equiv 0$ ,  $h$  satisfait (7.8).

On suppose maintenant que (ii) est vérifié.

Alors  $h$  est bien dans  $\mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$ .

Soit  $h' \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$  une fonction test. D'après le lemme 7.2.4 ( $F_0 = \partial\Omega$ ,  $F_1 = \emptyset$  et  $\xi = \mu_0$ ), il existe  $\varphi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  et  $h'' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  vérifiant  $\text{div}(\mu_0 h'') = 0$  dans  $\Omega$  telles que :

$$h' = \text{grad } \varphi + h''.$$

De plus,  $\text{rot } h' = \text{rot } h''$  et  $(\text{grad } \varphi) \times n = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Comme  $\text{rot } h'' = \text{rot } h' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ ,  $h'' \in \mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$ . De plus,

$$h'' \times n = h' \times n - (\text{grad } \varphi) \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

donc  $h'' \in \mathbb{H}_0(\text{rot}; \Omega)$ . Comme  $\text{div}(\mu_0 h'') = 0$ , on obtient finalement  $h'' \in \mathcal{H}_{0,0}(\Omega)$ .

La relation (7.8) est supposée satisfaite pour  $h''$  et  $s \equiv 0$  donc on a :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot } h \cdot \text{rot } h'' dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h'' dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot h'' dx.$$

En remplaçant  $h''$  par son expression on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot (h' - \operatorname{grad} \varphi) dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot (h' - \operatorname{grad} \varphi) dx.$$

Par intégration par parties, on vérifie que :

$$\int_{\Omega} \mu_0 h \cdot \operatorname{grad} \bar{\varphi} dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mu_0 h) \bar{\varphi} dx + \int_{\partial\Omega} (n \cdot \mu_0 \bar{h}) \varphi d\gamma.$$

Comme  $\operatorname{div} h = 0$  dans  $\Omega$  et que  $\varphi$  s'annule sur  $\partial\Omega$ , le membre de droite de l'équation précédente est nul et

$$\int_{\Omega} \mu_0 h \cdot \operatorname{grad} \bar{\varphi} dx = 0.$$

Pour les mêmes raisons, on a

$$\int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot \operatorname{grad} \bar{\varphi} dx = 0.$$

D'où :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot h' dx$$

et (i) est vérifié. ■

**Proposition 7.2.6 :**

Si  $s \equiv 0$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $h \in \mathbb{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  est une solution du problème (7.2),
- (ii)  $h \in \mathcal{H}_0(\Omega)$  est une solution du problème (7.7).

DÉMONSTRATION. La démonstration de l'équivalence des assertions (i) et (ii) est similaire à celle de la proposition 7.2.5. ■

### 7.3 Existence d'une solution

Soit  $a$  la forme sesquilinéaire associée au problème (7.3) :

$$\forall (h, h') \in (\mathbb{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega))^2, \quad a(h, h') = \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' dx.$$

Afin de conserver l'intégrale avec le terme constant lors du passage à la partie réelle, on considère  $\Re(ia)$  et non  $\Re(a)$  :

$$\forall h \in \mathbb{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega), \quad \Re(ia(h, h)) = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon\omega}{\sigma^2 + \omega^2\varepsilon^2} |\operatorname{rot} h|^2 dx - \omega\mu_0 \|h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2.$$

Les signes devant les intégrales contenant le rotationnel et le terme constant sont opposés donc le signe de  $\Re(ia(h, h))$  est indéterminé et on ne peut donc pas utiliser le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème (7.3).

Pour montrer que le problème (7.8) est bien posé on va étudier séparément l'existence et l'unicité. Afin de démontrer l'existence de solution, on va montrer dans cette section que le problème (7.8) peut s'écrire sous la forme d'une équation de Fredholm. La question de l'unicité sera abordée dans la section suivante.

Pour une fonction  $s$  donnée, on appelle **valeurs singulières** de  $\omega$  les valeurs non nulles de  $\omega$  pour lesquelles le problème homogène associé à (7.8) :

$$(7.9) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \text{ tel que :} \\ & \forall h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \int_{\Omega} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + \int_{\Omega} s \operatorname{div}(\mu_0 h) \overline{\operatorname{div}(\mu_0 h')} \, dx \\ & \quad + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' \, dx = 0. \end{aligned}$$

admet une solution non nulle. Avant d'en faire une étude plus approfondie, on va démontrer le théorème d'existence suivant.

**Théorème 7.3.1 : existence d'une solution au problème (7.8)**

Pour toute valeur non singulière de  $\omega$ , le problème (7.8) admet une solution unique.

De plus,  $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{0,0}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \\ \tilde{h} & \longmapsto & h \end{array} \right.$  est continue.

DÉMONSTRATION.

- Réécriture de (7.8).

Pour démontrer le théorème, on va réécrire le problème (7.8) sous la forme

$$(\mathbb{J} - \omega^2 \mathbb{K})h = \mathbb{L}$$

où  $\mathbb{J}$  est un automorphisme de  $\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$ ,  $\mathbb{K}$  un opérateur compact de  $\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$  et  $\mathbb{L}$  un vecteur de  $\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$ .

Pour  $h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$ , on définit l'application  $l_{\mathbb{J},h}$  par :

$$l_{\mathbb{J},h} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h' & \longmapsto & \int_{\Omega} \frac{i\omega}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' \, dx + i\omega \int_{\Omega} s \operatorname{div}(\mu_0 h) \overline{\operatorname{div}(\mu_0 h')} \, dx \\ & & + \omega^2 \mu_0 \int_{\Omega} h \cdot h' \, dx. \end{array} \right.$$

L'application  $l_{\mathbb{J},h}$  est une forme anti-linéaire et continue donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur  $\mathbb{J}h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$  tel que :

$$(7.10) \quad \forall h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \langle \mathbb{J}h, h' \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}} = l_{\mathbb{J},h}(h')$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}}$  représente le produit scalaire dans  $\mathcal{H}_{s,0}$  :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}} = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu_0 u) \overline{\operatorname{div}(\mu_0 v)} \, dx.$$

On définit alors l'opérateur  $\mathbb{J}$  de la façon suivante :

$$\mathbb{J} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \\ h & \longmapsto & \mathbb{J}h, \text{ l'unique solution du problème (7.10).} \end{array} \right.$$

Comme l'équation (7.10) est linéaire, l'opérateur  $\mathbb{J}$  l'est aussi.

De même, on définit l'opérateur  $\mathbb{K}$  par :

$$\mathbb{K} : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \\ h \longmapsto \mathbb{K}h, \text{ l'unique solution du problème :} \\ \forall h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \langle \mathbb{K}h, h' \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}} = 2\mu_0 \int_{\Omega} h \cdot h' dx. \end{array} \right.$$

Comme  $\mathbb{J}$ , l'opérateur  $\mathbb{K}$  est linéaire.

Le vecteur  $\mathbb{L}$  est défini comme étant l'unique solution du problème :

$$\forall h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \langle \mathbb{L}, h' \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}} = \omega^2 \mu_0 \int_{\Omega} \check{h} \cdot h' dx.$$

Le problème (7.8) s'écrit alors :

$$\text{Trouver } h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \text{ solution de } (\mathbb{J} - \omega^2 \mathbb{K})h = \mathbb{L}.$$

- $\mathbb{J}$  est un automorphisme.

La forme sesquilinéaire associée à  $\mathbb{J}$  est :

$$a_{\mathbb{J}}(h, h') = \langle \mathbb{J}h, h' \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}}.$$

On a :

$$\forall (h, h') \in (\mathcal{H}_{s,0}(\Omega))^2,$$

$$\begin{aligned} |a_{\mathbb{J}}(h, h')| &\leq \left| \int_{\Omega} \frac{i\omega}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot } h \cdot \text{rot } h' dx \right| + \left| \omega^2 \mu_0 \int_{\Omega} h \cdot h' dx \right| \\ &\quad + \left| \omega \int_{\Omega} s \text{div}(\mu_0 h) \overline{\text{div}(\mu_0 h')} dx \right| \\ &\leq C_1 \|\text{rot } h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\text{rot } h'\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + C_2 \|h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|h'\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\ &\quad + C_3 \|\text{div } h\|_{L^2(\Omega)} \|\text{div } h'\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_4 \|h\|_{\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)} \|h'\|_{\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc  $a_{\mathbb{J}}$  est continue.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \Re(a_{\mathbb{J}}(h, h)) &= \int_{\Omega} \frac{\varepsilon\omega^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2\omega^2} \text{rot } h \cdot \text{rot } h dx + \omega^2 \mu_0 \int_{\Omega} h \cdot h dx \\ &\quad - \omega \int_{\Omega} \Im(s) \text{div}(\mu_0 h) \overline{\text{div}(\mu_0 h)} dx \\ &\geq \alpha^{-1} \|\text{rot } h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \omega^2 \alpha \|h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \omega \int_{\Omega} \Im(s) \text{div}(\mu_0 h) \overline{\text{div}(\mu_0 h)} dx, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est la constante introduite dans l'hypothèse 6.3.3.

Si  $s \equiv 0$ ,  $h$  est à divergence nulle donc :

$$\forall C > 0, \int_{\Omega} \Im(s) \text{div}(\mu_0 h) \overline{\text{div}(\mu_0 h)} dx \geq C \|\text{div } h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Sinon, d'après l'hypothèse 7.2.1, il existe  $C > 0$  tel que :

$$\forall x \in \Omega, \Im(s(x)) \leq -C.$$

D'où :

$$\int_{\Omega} \Im(s) \operatorname{div}(\mu_0 h) \overline{\operatorname{div}(\mu_0 h)} dx \geq C \mu_0^2 \|\operatorname{div} h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En conclusion, pour tout  $s$  satisfaisant l'hypothèse 7.2.1, on a :

$$\forall h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \Re(a_{\mathbb{J}}(h, h)) \geq C \|h\|_{\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)}^2 \text{ avec } C > 0.$$

Donc  $a_{\mathbb{J}}$  est une forme sesquilinéaire coercive.

D'après le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que, pour  $h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$  donné, l'équation

$$\text{Trouver } h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \text{ tel que } \mathbb{J}h = h'$$

admet une unique solution, c'est-à-dire  $\mathbb{J}$  est un automorphisme.

- $\mathbb{K}$  est compact.

On a :

$$\begin{aligned} \forall (h, h') \in (\mathcal{H}_{s,0}(\Omega))^2, |\langle \mathbb{K}h, h' \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}}| &\leq 2\mu_0 \left| \int_{\Omega} h \cdot h' dx \right| \\ &\leq 2\mu_0 \|h\|_{L^2(\Omega)} \|h'\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur  $\tilde{\mathbb{K}}$  défini par :

$$\tilde{\mathbb{K}} : \begin{cases} \mathbb{L}^2(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \\ h &\longmapsto \tilde{\mathbb{K}}h, \text{ l'unique solution du problème :} \\ &\forall h' \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega), \langle \tilde{\mathbb{K}}h, h' \rangle_{\mathcal{H}_{s,0}} = 2\mu_0 \int_{\Omega} h \cdot h' dx. \end{cases}$$

est continu.

Comme l'injection  $i : \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^2(\Omega)$  est compacte (voir le corollaire B.5 p.1626 de [54] avec  $\xi \equiv 1$ ), on en déduit que  $\mathbb{K}$  est un opérateur compact.

- Existence d'une solution

Résoudre (7.8) revient à résoudre le problème :

$$\text{Trouver } h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \text{ solution de } (\mathbb{J} - \omega^2 \mathbb{K})h = \mathbb{L},$$

c'est-à-dire le problème :

$$\text{Trouver } h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega) \text{ solution de } (\omega^{-2} id - \mathbb{J}^{-1}\mathbb{K})h = \omega^{-2} \mathbb{J}^{-1}\mathbb{L}.$$

Comme  $\mathbb{K}$  est un opérateur compact et que  $\mathbb{J}^{-1}$  est continu, l'opérateur  $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}$  est compact. L'équation  $(\omega^{-2} id - \mathbb{J}^{-1}\mathbb{K})h = 0$  admet une solution non nulle si et seulement si  $\omega^{-2}$  est une valeur propre de  $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\omega$  est une valeur singulière. D'après l'alternative de Fredholm, on en déduit qu'il existe une unique solution à (7.8) et que la solution dépend continument du second membre :

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)} &\leq C \|\mathbb{J}^{-1}\mathbb{L}\|_{\mathcal{H}_{s,0}(\Omega)} \\ &\leq C \|\check{h}\|_{\mathcal{H}_{s,0}}. \end{aligned}$$

■

## 7.4 Unicité

Dans cette section on va établir un résultat d'unicité concernant (7.8), c'est-à-dire montrer l'absence de valeurs singulières de  $\omega$ . Tout d'abord, on va démontrer qu'elles sont au plus en quantité dénombrable. Ensuite, on énoncera deux résultats nécessaires pour montrer l'unicité : le premier concerne la régularité des solutions de (7.8) tandis que le second assure l'unicité du prolongement pour le système de Maxwell. Enfin, on terminera cette section par un théorème d'unicité pour (7.8).

On a montré dans le chapitre 6 que la solution  $h$  du problème (7.2) permet de construire un couple  $(e, h)^T$  solution du problème (6.29). Ce dernier admet une unique solution donc on pourrait penser qu'il est inutile de montrer l'existence du problème (7.8), qui est "équivalent" au problème (7.2). Cependant, la condition initiale associée au couple  $(e, h)^T$  dépend de  $h$  donc, deux solutions  $h_1$  et  $h_2$  de (7.8) conduisent à deux conditions initiales et donc à deux problèmes (7.2) différents. L'unicité de (7.8) n'est donc pas une simple conséquence de celle de (7.2).

### 7.4.1 Résultats préliminaires

La proposition suivante relie les valeurs singulières aux valeurs propres de l'opérateur  $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}$  introduit lors de la démonstration du théorème (7.3.1).

**Proposition 7.4.1 : nombre dénombrable de valeurs singulières**

*Les valeurs singulières de  $\omega$  sont les racines carrées des inverses des valeurs propres réelles de l'opérateur  $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}$ .*

DÉMONSTRATION.

- Soit  $\omega$  une valeur singulière.

Soit  $h \neq 0$  une solution du problème (7.9).

D'après la démonstration du théorème 7.3.1,  $h$  satisfait l'équation suivante :

$$(\omega^{-2} id - \mathbb{J}^{-1}\mathbb{K})h = 0.$$

D'où  $h$  est un vecteur propre de  $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}$  associé à la valeur propre réelle  $\omega^{-2}$ .

- Réciproquement, soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}$ .

Soit  $h \neq 0$  un vecteur propre associé.

Si  $\lambda = 0$ , alors  $\mathbb{K}h = 0$ . Par définition de l'opérateur  $\mathbb{K}$ , on en déduit alors que  $h \equiv 0$ . Donc  $\lambda \neq 0$  et il existe  $\omega \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda = \omega^{-2}$ .

Par définition de  $\lambda$ , le champ  $h$  est une solution non identiquement nulle de (7.9) :  $\omega$  est donc une valeur singulière. ■

Comme l'opérateur  $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}$  est compact, il admet au plus un nombre dénombrable de valeurs propres. Il existe donc au plus un nombre dénombrable de valeurs singulières de  $\omega$ .

La proposition suivante assure que les solutions de (7.8) sont régulières lorsque les coefficients  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $s$  sont constants.

**Proposition 7.4.2 :**

*Si  $h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$  satisfait (7.8), alors  $h$  est indéfiniment différentiable dans les régions*

où les coefficients  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  et  $s$  sont constants. De plus, dans ces régions,  $h$  est solution au sens fort de

$$(7.11) \quad \operatorname{rot} \left[ \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \operatorname{rot} h \right] - \mu_0 \operatorname{grad} [s \operatorname{div} (\mu_0 h)] + i\omega\mu_0 h = -i\omega\mu_0 \check{h} \text{ dans } \Omega.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un résultat classique de régularité intérieure pour les équations elliptiques (voir [46]). ■

Pour conclure cette partie, on va énoncer un résultat de prolongement unique pour le système de Maxwell du premier ordre basé sur un résultat de [84]. On complète le corollaire 2 de [84] sur l'indépendance du rayon de la boule dans laquelle s'annulent les champs  $a$  et  $b$ .

**Théorème 7.4.3 :**

On note  $\mathbf{B}$  la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^3$ .

Soient  $\omega > 0$  et  $a$  et  $b$  deux fonctions de  $\mathbb{H}^1(\mathbf{B}, \mathbb{C})$  solutions dans  $\mathbf{B}$  du système de Maxwell suivant :

$$(7.12) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} a = i\omega b, \\ \operatorname{rot} b = -i\omega a. \end{cases}$$

On suppose de plus que les champs  $a$  et  $b$  vérifient :

$$(7.13) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, r^{-n}(|a| + |b|) \in \mathbb{L}^2(\mathbf{B}).$$

Alors les fonctions  $a$  et  $b$  s'annulent dans une boule de rayon  $R_2$  centrée à l'origine où  $0 < R_2 < 1$  est indépendant de  $a$  et de  $b$ .

La démonstration de ce théorème utilise le résultat suivant (voir la démonstration du théorème 2 de [84]).

**Théorème 7.4.4 :**

Soient  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} \setminus \{0\}$  et  $\alpha \in L^\infty(\mathbf{B})$  une fonction réelle telle que  $\partial_r \alpha \in L_{loc}^\infty(\mathbf{B}_0)$  et :

$$(7.14) \quad \exists 0 < \lambda \leq 1, \exists k_1 > 0, \forall x \in \mathbf{B}_0, |\alpha(x) - 1| + |x| |\partial_r \alpha(x)| \leq k_1 |x|^\lambda.$$

Alors, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \lambda/2$ , il existe une constante  $c_1(k_1) > 0$  et un rayon  $0 < R_1(\varepsilon, k_1) < 1$  tels que :

$$n\varepsilon^2 \int_{\mathbf{B}} r^{\varepsilon-2-n} \exp(nr^\varepsilon) |a|^2 dx \leq c_1 \left[ \int_{\mathbf{B}} r^{-n} \exp(nr^\varepsilon) (|\operatorname{rot} a|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div}(\alpha a)|^2) dx \right. \\ \left. + \int_{R_1 < |x| < 1} r^{-n} \exp(nr^\varepsilon) \left( n^2 r^{-2} |a|^2 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial a}{\partial x_j} \right|^2 \right) dx \right]$$

pour tout réel  $n \geq 1$  et tout champ de vecteur  $a \in \mathbb{H}_0^1(\mathbf{B})$  vérifiant :

$$(7.15) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbf{B}} r^{-n} (|a|^2 + |\operatorname{rot} a|^2 + |\operatorname{div}(\alpha a)|^2) dx < +\infty.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 7.4.3. On note  $a_1$  et  $a_2$  les parties réelles et imaginaires de  $a$ .

En appliquant le théorème 7.4.4 avec  $\alpha \equiv 1$ ,  $\lambda = k_1 = 1$  et  $\varepsilon = 1/2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \exists c_1 = c_1(k_1) \text{ et } 0 < R_1 = R_1(\varepsilon, k_1) < 1 \text{ tels que :} \\ & \forall v \in H_0^1(\mathbf{B}, \mathbb{R}^3) \text{ vérifiant (7.15), on a, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ & n\varepsilon^2 \int_{\mathbf{B}} r^{\varepsilon-2-n} e^{nr^\varepsilon} |v|^2 dx \leq c_1 \left[ \int_{\mathbf{B}} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} v|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} v|^2) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{R_1 < |x| < 1} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} \left( n^2 r^{-2} |v|^2 + \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 \right) dx \right] \end{aligned}$$

Soit  $\beta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  telle que :

$$\begin{cases} \beta \equiv 1, & \text{si } |x| \leq 1/2, \\ \beta \equiv 0, & \text{si } |x| \geq 3/4. \end{cases}$$

Alors  $\chi = 1 - \beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  et vérifie :

$$\begin{cases} \chi \equiv 0, & \text{si } |x| \leq 1/2, \\ \chi \equiv 1, & \text{si } |x| \geq 3/4. \end{cases}$$

On note  $\chi_j(x) = \chi(jx)$  pour  $j \in \mathbb{N}^*$ . On vérifie que

$$\chi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} \chi_j \equiv 0, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2j}, \\ \chi_j \equiv 1, & \text{si } |x| \geq \frac{3}{4j}. \end{cases}$$

On en déduit que  $f_j = \beta \chi_j a_1$  converge vers  $\beta a_1$ , *p.p.*  $x \in \mathbf{B}$ . On vérifie facilement que  $f_j \in \mathbb{H}_0^1(\mathbf{B}, \mathbb{R})$  et qu'elle satisfait :

$$(7.16) \quad \exists C = C(\beta), \begin{cases} |\operatorname{rot} f_j|^2 \leq C (|a_1|^2 + |\operatorname{rot} a_1|^2), \\ |\operatorname{div} f_j|^2 \leq C (|a_1|^2 + |\operatorname{div} a_1|^2). \end{cases}$$

Comme  $a$  et  $b$  vérifient (7.12) et (7.13),  $f_j$  satisfait (7.15) et on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$(7.17) \quad n\varepsilon^2 \int_{\mathbf{B}} r^{\varepsilon-2-n} e^{nr^\varepsilon} |f_j|^2 dx \leq c_1 \left[ \int_{\mathbf{B}} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} f_j|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} f_j|^2) dx \right. \\ \left. + \int_{R_1 < |x| < 1} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} \left( n^2 r^{-2} |f_j|^2 + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx \right].$$

Soit  $\varrho_1 > 0$  tel que  $\varrho_1 \leq \min(1/2, R_1)$ . Alors,

$$(7.18) \quad \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{\varepsilon-2-n} e^{nr^\varepsilon} |f_j|^2 dx \leq \int_{\mathbf{B}} r^{\varepsilon-2-n} e^{nr^\varepsilon} |f_j|^2 dx.$$

Comme  $\varrho_1 \leq 1/2$ , donc  $f_j = \chi_j a_1 \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} a_1$ . D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient alors :

$$\int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{\varepsilon-2-n} e^{nr^\varepsilon} |f_j|^2 dx \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{\varepsilon-2-n} e^{nr^\varepsilon} |a_1|^2 dx.$$

On va maintenant s'intéresser aux termes du membre de droite dans (7.17). On va tout d'abord établir une majoration du second terme à l'aide des inégalités (7.16).

$$\begin{aligned} & \int_{R_1 < |x| < 1} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} \left( n^2 r^{-2} |f_j|^2 + \sum_{k=1}^3 |\partial_k f_j|^2 \right) dx \\ & \leq C(\beta) \int_{R_1 < |x| < 1} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} \left( n^2 r^{-2} |a_1|^2 + |a_1|^2 + \sum_{k=1}^3 |\partial_k a_1|^2 \right) dx \\ (7.19) \quad & \leq 2C(\beta) \int_{R_1 < |x| < 1} n^2 e^{nr^\varepsilon} r^{-n-2} \left( |a_1|^2 + \sum_{k=1}^3 |\partial_k a_1|^2 \right) dx \\ & \leq 2C(\beta) e^{3n} R_1^{-n-2} \int_{R_1 < |x| < 1} \left( |a_1|^2 + \sum_{k=1}^3 |\partial_k a_1|^2 \right) dx \\ & \leq 2C(\beta) e^{3n} R_1^{-n-2} \|a_1\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2 \\ & \leq 2C(\beta) e^{3n} R_1^{-2} \varrho_1^{-n} \|a_1\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2. \end{aligned}$$

Concernant le premier terme du membre de droite de l'inégalité (7.17), on commence par diviser l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{B}} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} f_j|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} f_j|^2) dx \\ & = \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} f_j|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} f_j|^2) dx + \int_{\varrho_1 < |x| < 1} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} f_j|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} f_j|^2) dx. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que la deuxième intégrale satisfait :

$$\begin{aligned} & \int_{\varrho_1 < |x| < 1} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} f_j|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} f_j|^2) dx \\ (7.20) \quad & \leq \int_{\varrho_1 < |x| < 1} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|a_1|^2 + |\operatorname{rot} a_1|^2 + r^{-2\varepsilon} |a_1|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} a_1|^2) dx \\ & \leq C(\beta) e^{3n} \varrho_1^{-n-2\varepsilon} \|a_1\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale on utilise 7.16 et le fait que  $r^{-2\varepsilon} > 1$  dans  $\mathbf{B}_{\varrho_1}$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} f_j|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} f_j|^2) dx \\ & \leq C(\beta) \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|a_1|^2 + |\operatorname{rot} a_1|^2 + r^{-2\varepsilon} |a_1|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} a_1|^2) dx \\ & \leq C(\beta) \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} (2|a_1|^2 + |\operatorname{rot} a_1|^2 + |\operatorname{div} a_1|^2) dx. \end{aligned}$$

Les champs  $a$  et  $b$  vérifient (7.12) donc :

$$|\operatorname{rot} a_1|^2 + |\operatorname{div} a_1|^2 \leq (|\operatorname{rot} a_1| + |\operatorname{div} a_1|)^2 \leq \omega^2(|a| + |b|)^2.$$

Comme  $|a_1| \leq |a| \leq |a| + |b|$ , si on note  $u = |a| + |b|$ , on obtient finalement :

$$(7.21) \quad \begin{aligned} & \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n} e^{nr^\varepsilon} (|\operatorname{rot} f_j|^2 + r^{-2\varepsilon} |\operatorname{div} f_j|^2) dx \\ & \leq C(\beta)(2 + \omega^2) \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} u^2 dx. \end{aligned}$$

En injectant (7.18), (7.19), (7.20) et (7.21) dans (7.17), on trouve :

$$\begin{aligned} & n\varepsilon^2 \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2+\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} |a_1|^2 dx \\ & \leq c_1 \left[ (2 + \omega^2) \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} u^2 dx + C(\beta, R_1)(\varrho_1^{-n} + \varrho_1^{-n-2\varepsilon}) e^{3n} \|u\|_{H^1(\mathbf{B})}^2 \right]. \end{aligned}$$

Il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que,  $\forall n \geq N$ ,  $n\varepsilon^2 \geq 4C_1(k_1)(2 + \omega^2)$ .

Pour  $r \leq 1$ ,  $r^{-n-2\varepsilon} = r^{-n-1} \leq r^{-n-1-1/2} = r^{-n-2+\varepsilon}$  donc on obtient finalement :

$$(7.22) \quad \begin{aligned} & \forall n \geq N, 4 \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2+\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} |a_1|^2 dx \\ & \leq \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2+\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} u^2 dx + 2C(\beta, R_1) \varrho_1^{-n-2+\varepsilon} e^{3n} \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2. \end{aligned}$$

On montre de même des résultats similaires pour  $a_2$ ,  $\Re(b)$  et  $\Im(b)$ .

Comme  $|a_1|^2 + |a_2|^2 + |\Re(b)|^2 + |\Im(b)|^2 = |a|^2 + |b|^2 \geq \frac{1}{2}|u|^2$ , en additionnant ces quatre inégalités on obtient :

$$\begin{aligned} & \forall n \geq N, 2 \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2+\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} u^2 dx \\ & \leq \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2+\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} u^2 dx + 2C(\beta, R_1) \varrho_1^{-n-2+\varepsilon} e^{3n} \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$(7.23) \quad \begin{aligned} & \forall n \geq N, \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} r^{-n-2+\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} u^2 dx \leq 2C(\beta, R_1) \varrho_1^{-n-2+\varepsilon} e^{3n} \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2 \\ & \forall n \geq N, \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} \left(\frac{r}{\varrho_1}\right)^{-n-2+\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} e^{-3n} u^2 dx \leq 2C(\beta, R_1) \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2 \\ & \forall n \geq N, \int_{\mathbf{B}_{\varrho_1}} \left(\frac{\varrho_1}{r}\right)^{2-\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} e^{n[\ln(\varrho_1/r)-3]} u^2 dx \leq 2C(\beta, R_1) \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2. \end{aligned}$$

On pose  $R_2 = \varrho_1 e^{-4}$ .

Pour  $r \leq R_2$ ,  $\ln(\varrho_1/r) \geq 4$  donc, en utilisant (7.23), on obtient :

$$(7.24) \quad \forall n \geq N, \int_{\mathbf{B}_{R_2}} \left(\frac{\varrho_1}{r}\right)^{2-\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} e^{n[\ln(\varrho_1/r)-3]} u^2 dx \leq 2C(\beta, R_1) \|u\|_{\mathbb{H}^1(\mathbf{B})}^2$$

avec

$$(7.25) \quad p.p. 0 < r < R_2, \left(\frac{\varrho_1}{r}\right)^{2-\varepsilon} e^{nr^\varepsilon} e^{n[\ln(\varrho_1/r)-3]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

On déduit de (7.24) et (7.25) que  $u$ , et donc  $a$  et  $b$ , s'annulent sur  $\mathbf{B}_{R_2}$  où  $R_2$  est indépendant de  $a$  et  $b$ . ■

**Corollaire 7.4.5 :**

On note  $\mathbf{B}$  la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^3$ .

Soient  $\omega > 0$  et  $a$  et  $b$  deux fonctions de  $\mathbb{H}^1(\mathbf{B}, \mathbb{C})$  solutions dans  $\mathbf{B}$  du système de Maxwell suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} a = i\omega b, \\ \operatorname{rot} b = -i\omega a. \end{cases}$$

On suppose de plus que les champs  $a$  et  $b$  s'annulent dans une boule  $B_\varrho \subset \mathbf{B}$  où  $\varrho > 0$ . Alors les fonctions  $a$  et  $b$  s'annulent dans  $\mathbf{B}$ .

DÉMONSTRATION. Comme les champs  $a$  et  $b$  sont nuls dans  $B_\varrho$ , ils vérifient la propriété (7.13) et on peut appliquer le théorème 7.4.3 : il existe  $R_2 > 0$  tel que les champs  $a$  et  $b$  s'annulent dans  $B_{R_2}$ .

Soient  $P$  le centre de  $\mathbf{B}$  et  $Q$  un point du cercle unité. On note  $M_0$  le point du segment  $[PQ]$  tel que  $|PM_0| = R_2/2$ . Comme les champs  $a$  et  $b$  sont nuls dans  $B_{R_2}$ , ils sont nuls dans la boule  $B(M_0, R_2)$  de centre  $M_0$  et de rayon  $R_2/2$ . Quitte à faire une translation et une dilatation on peut appliquer le théorème 7.4.3 et on en déduit qu'il existe  $R_3 = R_2(1 - R_2/2)$  tels que les champs  $a$  et  $b$  soient nuls dans  $B(M_0, R_3)$ . En faisant parcourir le cercle unité au point  $B$  on obtient que  $a$  et  $b$  sont nuls dans  $B_{R_4}$  où

$$R_4 = \frac{1}{2}R_2 + R_3 = \frac{3}{2}R_2 - \frac{1}{2}R_2^2.$$

En itérant ce procédé on va montrer que  $a$  et  $b$  sont nuls dans tout  $\mathbf{B}$ .

Pour cela on considère la suite  $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \varrho_{n+1} = \frac{3}{2}\varrho_n - \frac{1}{2}\varrho_n^2, \\ \varrho_0 = R_2. \end{cases}$$

En utilisant la méthode expliquée ci-dessus on montre que si  $a$  et  $b$  sont nuls dans  $B_{\varrho_n}$ , alors ils sont nuls dans  $B_{\varrho_{n+1}}$ . Il suffit donc de montrer que la suite  $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite vaut 1. Pour cela, on étudie les fonctions suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x. \end{cases}$$

On vérifie aisément que  $f$  est continue, que  $f([0, 1]) = [0, 1]$  et que  $g$  est positive sur  $[0, 1]$ . La suite  $(\varrho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc bornée et croissante. Elle admet alors une limite  $l$  qui est un point fixe de  $f$ . Les seuls points fixes de  $f$  sont 0 et 1 donc, comme  $l \geq \varrho_0 \geq R_2 > 0$ ,  $l = 1$  et le corollaire 7.4.5 est démontré. ■

**Remarque 7.4.6 : extension du corollaire 7.4.5**

Quitte à faire une dilatation et une translation, le corollaire 7.4.5 est vrai pour toute boule de  $\mathbb{R}^3$ .

En appliquant plusieurs fois ce résultat, on montre qu'il est encore vrai en remplaçant  $\mathbf{B}$  par un ouvert  $\mathcal{O}$  connexe.

**7.4.2 Absence de valeurs singulières de  $\omega$** 

Dans toute la suite on suppose que  $\Omega$  peut être décomposé, comme sur la figure 56, en un ensemble d'ouverts disjoints non vides  $\{\Omega_j \mid j = 0, \dots, J\}$  :

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^J \overset{\circ}{\overline{\Omega_j}}$$

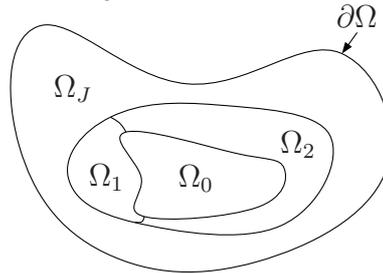


FIG. 56 – Décomposition de  $\Omega$

En plus des hypothèses 6.3.3, 6.3.4 et 7.2.1, on suppose que, dans chaque sous-domaine  $\Omega_j$ , les coefficients  $\varepsilon$  et  $\sigma$  satisfont les deux conditions suivantes :

- (i) leurs restrictions à  $\Omega_j$  sont des constantes,
- (ii) il existe un ouvert, noté  $\Omega_0$  tel que la restriction à  $\Omega_0$  de  $\sigma$  soit strictement positive.

On peut maintenant démontrer le résultat d'unicité suivant.

**Théorème 7.4.7 : unicité de (7.8)**

On suppose que les coefficients  $\varepsilon$  et  $\sigma$  satisfont les hypothèses (i) et (ii).

Alors, il est possible de construire une fonction  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant l'hypothèse 7.2.1 telle que, si  $h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$  est une solution de (7.8) avec  $h = 0$ , alors  $h$  est l'application nulle.

**DÉMONSTRATION.** On définit  $s$  par sa restriction à chaque  $\Omega_j$  en fonction de celle de  $\sigma$  de la manière suivante :

- cas 1 :  $\sigma$  est strictement positive sur tout  $\Omega$ . Alors  $s$  est la fonction nulle,
- cas 2 : il existe  $\Omega_i$  tel que  $\sigma$  soit nulle sur  $\Omega_i$ . Alors la restriction à  $\Omega_j$  de  $s$  est une constante complexe dont la partie réelle est non nulle et la partie imaginaire est strictement négative.

La fonction  $s$  ainsi construite satisfait bien l'hypothèse 7.2.1.

Dans un premier temps, on va s'intéresser uniquement au sous-domaine  $\Omega_0$ . À l'aide de la proposition 7.4.2, on va montrer que  $h$  s'annule dans  $\Omega_0$ . Ensuite, grâce au corollaire 7.4.5, on en déduira que  $h$  s'annule, de proche en proche, dans tout  $\Omega$ .

### 1. Étude dans $\Omega_0$ .

Dans  $\Omega_0$  les coefficients  $\varepsilon$ ,  $\mu_0$ ,  $\sigma$  et  $s$  sont constants donc, d'après la proposition 7.4.2, le champ  $h$  satisfait :

$$(7.26) \quad \text{rot}(\text{rot } h) - (i\varepsilon\omega - \sigma)\mu_0^2 s \text{grad}(\text{div } h) + i\omega\mu_0(i\varepsilon\omega - \sigma)h = 0.$$

On va tout d'abord montrer que  $\text{div } h = 0$  dans  $\Omega_0$ .

Si on est dans le cas 1,  $h$  est à divergence nulle dans tout  $\Omega$ . En particulier,  $h$  est à divergence nulle dans  $\Omega_0$ .

On suppose maintenant que le cas 1 n'est pas vérifié. En posant  $\varphi = \text{div } h$  et en prenant la divergence de (7.26), on obtient :

$$-\mu_0^2(i\varepsilon\omega - \sigma)s\Delta\varphi = -i\omega\mu_0(i\varepsilon\omega - \sigma)\varphi,$$

c'est-à-dire

$$-\Delta\varphi = -\frac{i\omega}{\mu_0 s}\varphi.$$

Comme les valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta$  sont réelles et que

$$\Im\left(-\frac{i\omega}{\mu_0 s}\right) = -\frac{\omega}{\mu_0 |s|^2} \Re(s) \neq 0,$$

le terme  $-\frac{i\omega}{\mu_0 s}$  n'est pas une valeur propre de  $-\Delta$  et  $\varphi$  s'annule dans  $\Omega_0$ .

Comme  $h$  est à divergence nulle dans  $\Omega_0$ , on peut remplacer  $s$  dans (7.26) par n'importe quelle valeur. En particulier, pour  $s^{-1} = (i\varepsilon\omega - \sigma)\mu_0^2$ , on retrouve l'équation d'Helmholtz :

$$-\Delta h - (\mu_0\varepsilon\omega^2 + i\sigma\omega\mu_0)h = 0.$$

La restriction à  $\Omega_0$  de  $\sigma$  étant strictement positive, on déduit de l'équation de Helmholtz précédente que le champ magnétique  $h$  est nul dans  $\Omega_0$ .

### 2. Les autres sous-domaines $\Omega_j$ .

On va maintenant prouver que si  $h \in \mathcal{H}_{s,0}(\Omega)$  s'annule dans un sous-domaine  $\Omega_j$  adjacent à  $\Omega_j$ , alors  $h$  s'annule aussi dans  $\Omega_j$ . Le résultat du théorème en découlera car on sait que  $h$  s'annule dans  $\Omega_0$  et que  $\Omega$  est connexe.

Si la restriction à  $\Omega_j$  de  $\sigma$  est strictement positive, on est ramené au cas  $\Omega_0$  pour lequel on a montré que  $h$  s'annule.

On suppose donc que  $\sigma$  est nulle dans  $\Omega_j$ .

L'idée est de se ramener au corollaire 7.4.5. Pour cela, on considère le domaine  $\tilde{\Omega}_j = \Omega_j \cup B$  où  $B$  est une boule aussi petite que l'on veut centrée en un point de  $\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_j'$ . On prolonge par continuité les constantes  $\varepsilon|_{\Omega_j}$  et  $s|_{\Omega_j}$  à  $\tilde{\Omega}_j$  et on note  $\tilde{\varepsilon}$  et  $\tilde{s}$  ces prolongements. Ceux-ci sont alors des constantes et le champ  $h$  reste solution

de (7.11) dans  $\tilde{\Omega}_j$  au sens des distributions :

$$\begin{aligned} \forall h' \in \left( \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j) \right)^3, \\ \int_{\tilde{\Omega}_j} \frac{1}{i\tilde{\varepsilon}\omega} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' + \tilde{s} \operatorname{div}(\mu_0 h) \overline{\operatorname{div}(\mu_0 h')} + i\omega\mu_0 h \cdot h' dx \\ = \int_{\Omega_j} \frac{1}{i\varepsilon|\Omega_j|\omega} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' + s_{|\Omega_j|} \operatorname{div}(\mu_0 h) \overline{\operatorname{div}(\mu_0 h')} + i\omega\mu_0 h \cdot h' dx \\ + \int_{\tilde{\Omega}_j \setminus \Omega_j} \frac{1}{i\varepsilon|\Omega_j|\omega} \operatorname{rot} h \cdot \operatorname{rot} h' + s_{|\Omega_j|} \operatorname{div}(\mu_0 h) \overline{\operatorname{div}(\mu_0 h')} + i\omega\mu_0 h \cdot h' dx. \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $\Omega_j$  est nulle car  $h$  est solution de (7.11) avec  $\check{h} \equiv 0$  dans  $\Omega_j$  au sens des distributions. L'intégrale sur  $\tilde{\Omega}_j \setminus \Omega_j$  est nulle car  $h$  s'annule dans  $\tilde{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ .

Pour pouvoir appliquer le corollaire 7.4.5, il faut montrer que  $h$  est solution de (7.3). Pour cela, on va montrer que  $\operatorname{div}(\mu_0 h) = 0$  dans  $\tilde{\Omega}_j$ .

On pose  $\varphi = s \operatorname{div}(\mu_0 h) \in L^2(\tilde{\Omega}_j)$ . En prenant la divergence de (7.11), on obtient :

$$-\operatorname{div}(\mu_0 \operatorname{grad} \varphi) + i\omega\tilde{s}^{-1}\varphi = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_j,$$

équation qui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$-\Delta\varphi = -i\frac{\omega}{\mu_0\tilde{s}}\varphi \text{ dans } \tilde{\Omega}_j.$$

Or  $\Im\left(-i\frac{\omega}{\mu_0\tilde{s}}\right) = -\frac{\omega}{\mu_0|\tilde{s}|^2}\Re(\tilde{s}) \neq 0$  donc  $-i\frac{\omega}{\mu_0\tilde{s}}$  n'est pas une valeur propre de  $-\Delta$  et  $\varphi$  s'annule dans tout  $\tilde{\Omega}_j$ .

D'où  $h$  est solution au sens des distributions de l'équation de Maxwell classique :

$$(7.27) \quad \operatorname{rot} \left[ \frac{1}{i\tilde{\varepsilon}\omega} \operatorname{rot} h \right] + i\omega\mu_0 h = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_j.$$

Si on pose  $e = -\frac{1}{i\tilde{\varepsilon}\omega} \operatorname{rot} h$ , on retrouve le système de Maxwell du premier ordre :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} e = i\omega\mu_0 h, \\ \operatorname{rot} h = -i\omega\tilde{\varepsilon} e. \end{cases}$$

D'après la proposition 7.1.4, les champs  $e$  et  $h$  sont dans  $\mathbb{H}(\operatorname{rot}, \operatorname{div}; \tilde{\Omega}_j)$  donc, d'après le corollaire 2.10 de [48], ces champs sont aussi dans  $\mathbb{H}_{loc}^1(\tilde{\Omega}_j)$ . Afin de pouvoir appliquer le corollaire 7.4.5, on "normalise" le système précédent en posant :

$$\begin{cases} a = \sqrt{\tilde{\varepsilon}} e \left( \frac{x}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu_0}} \right), \\ b = \sqrt{\mu_0} h \left( \frac{x}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu_0}} \right). \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\overline{\mathcal{O}} \subset \tilde{\Omega}_j$  et  $\mathcal{O} \cap B \neq \emptyset$ .

Si on note  $\tilde{\mathcal{O}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 ; \frac{x}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}} \mu_0} \in \mathcal{O} \right\}$ , les champs  $a$  et  $b$  vérifient :

$$a, b \in \mathbb{H}^1(\tilde{\mathcal{O}}) \text{ et } \begin{cases} \text{rot } a = i\omega b, \\ \text{rot } b = -i\omega a. \end{cases}$$

On peut donc appliquer le corollaire 7.4.5 (voir la remarque 7.4.6) et on en déduit que  $h$  s'annule dans  $\mathcal{O}$ . Ceci est valable pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\overline{\mathcal{O}} \subset \tilde{\Omega}_j$  et  $\mathcal{O} \cap B \neq \emptyset$ , donc  $a$  et  $b$  sont nuls dans tout  $\tilde{\Omega}_j$ , et en particulier dans  $\Omega_j$ . ■

On a donc démontré les résultats suivants.

**Corollaire 7.4.8 : existence et unicité des problèmes régularisés**

*Soient  $\varepsilon$  et  $\sigma$  deux fonctions vérifiant l'hypothèse 6.3.3 ainsi que les conditions (i) et (ii).*

*Alors il existe une fonction  $s : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$  telle que les problèmes (7.7) et (7.8) admettent une solution unique.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 7.4.7, il est possible de construire une fonction  $s$  telle qu'il n'existe pas de valeurs singulières de  $\omega$ . Alors, d'après le théorème 7.3.1, il existe une solution unique au problème (7.8). En utilisant le corollaire 7.2.3, on en déduit qu'il existe une solution unique au problème(7.7). ■

**Corollaire 7.4.9 : existence et unicité des problèmes initiaux**

*Soient  $\varepsilon$  et  $\sigma$  deux fonctions vérifiant l'hypothèse 6.3.3 ainsi que les conditions (i) et (ii).*

*Alors les problèmes (7.2) et (7.3) admettent une solution unique.*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 7.4.8, il existe une fonction  $s$  telle que les problèmes (7.7) et (7.8) admettent une solution unique. Pour démontrer que cette solution est aussi solution des problèmes (7.2) et (7.3), il faut montrer qu'elle est à divergence nulle. Pour cela, on procède comme dans la démonstration du théorème 7.4.7.

L'unicité des problèmes (7.2) et (7.3) est une conséquence de celle des problèmes (7.7) et (7.8) et de la proposition 7.1.4. ■



## Chapitre 8

# Étude en axisymétrie

L'objectif de ce chapitre est de transformer le problème initial (7.8) posé en dimension trois en une série de problèmes bidimensionnels. Pour cela, on va utiliser l'axisymétrie du domaine  $\Omega$ . Comme le second membre du problème n'est pas axisymétrique, on va le décomposer en série de Fourier et obtenir un problème pour chaque coefficient de Fourier.

### 8.1 Préliminaires

Le but de cette section est d'écrire en coordonnées cylindriques le problème (7.8), à savoir : trouver  $h \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \text{div}; \Omega)$  tel que

$$(8.1) \quad \forall h' \in \mathbb{H}_0(\text{rot}, \text{div}; \Omega), \int_{\Omega} \frac{1}{i\epsilon\omega - \sigma} \text{rot } h \cdot \text{rot } h' dx + \int_{\Omega} s \text{div}(\mu_0 h) \overline{\text{div}(\mu_0 h')} dx + i\omega \int_{\Omega} \mu_0 h \cdot h' dx = -i\omega \int_{\Omega} \mu_0 \check{h} \cdot h' dx.$$

Pour décrire un point générique de  $\mathbb{R}^3$ , on utilisera soit ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , soit ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times ]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$  où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta = \begin{cases} -\arccos \frac{x}{r}, & \text{si } y < 0, \\ \arccos \frac{x}{r}, & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

À chaque système de coordonnées on associe un repère orthonormé :  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  pour les coordonnées cartésiennes et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  pour les cylindriques. Ainsi, on associera à la fonction  $\tilde{u}$  définie par

$$\tilde{u}(x, y, z) = u_x(x, y, z)\vec{e}_x + u_y(x, y, z)\vec{e}_y + u_z(x, y, z)\vec{e}_z$$

la fonction

$$u(r, \theta, z) = u_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + u_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + u_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

où

$$(8.2) \quad \begin{cases} u_r &= \cos \theta \tilde{u}_x(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + \sin \theta \tilde{u}_y(r \cos \theta, r \sin \theta, z), \\ u_\theta &= -\sin \theta \tilde{u}_x(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + \cos \theta \tilde{u}_y(r \cos \theta, r \sin \theta, z), \\ u_z &= \tilde{u}_z(r \cos \theta, r \sin \theta, z). \end{cases}$$

On note  $\widehat{\mathcal{O}}$  l'ouvert  $\mathcal{O}$  écrit en coordonnées cylindriques et on introduit les espaces suivants :

$$(8.3) \quad \mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}}) = \left\{ \varphi : \widehat{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ } 2\pi\text{-périodique en } \theta; \int_{\widehat{\mathcal{O}}} |\varphi(r, \theta, z)|^2 r dr d\theta dz < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(8.4) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}}), (\varphi, \psi)_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})} = \int_{\widehat{\mathcal{O}}} \varphi \cdot \psi r dr d\theta dz.$$

On note  $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}$  la norme associée au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}$  et

$$(8.5) \quad \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\mathcal{O}}) = \left\{ \varphi \in \mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}}); \frac{\partial \varphi_r}{\partial r}, \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial r}, \frac{\partial \varphi_z}{\partial r}, \frac{\partial \varphi_r}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \varphi_\theta, \right. \\ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \varphi_r, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_z}{\partial \theta} \in \mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}}) \right\},$$

muni de la norme

$$(8.6) \quad \|u\|_{\mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\mathcal{O}})}^2 = \|u\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}^2 \\ + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}^2.$$

Les espaces  $(\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}}), \|\cdot\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})})$  et  $(\mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\mathcal{O}}), \|\cdot\|_{\mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\mathcal{O}})})$  sont des espaces de Hilbert.

La proposition suivante fait le lien entre les espaces de fonctions en coordonnées cartésiennes et ceux en coordonnées cylindriques.

**Proposition 8.1.1 : correspondance coordonnées cartésiennes / cylindriques**

Soient  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{u} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}^3$  et  $u$  la fonction associée à  $\tilde{u}$  par la relation (8.2).

Alors,  $\tilde{u} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$  si et seulement si  $u \in \mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})$  et on a :

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} = \|u\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})}.$$

De plus,  $\tilde{u} \in \mathbb{H}^1(\mathcal{O})$  si et seulement si  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\mathcal{O}})$  et on a :

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbb{H}^1(\mathcal{O})} = \|u\|_{\mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\mathcal{O}})}.$$

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre  $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$  et  $\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\mathcal{O}})$  ne présente pas de difficultés.

Pour  $\tilde{u} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}^3$  donnée, on introduit la fonction  $u^{int}$  définie par :

$$u^{int}(r, \theta, z) = \tilde{u}_x(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \vec{e}_x + \tilde{u}_y(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \vec{e}_y + \tilde{u}_z(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \vec{e}_z.$$

D'après les identités classiques,

$$\frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u_t^{int}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u_t^{int}}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial u_t^{int}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u_t^{int}}{\partial \theta},$$

où  $t = x, y$  ou  $z$ . On obtient donc :

$$\int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial z} \right|^2 dx dy dz = \int_{\hat{\mathcal{O}}} \left| \frac{\partial u_t^{int}}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_t^{int}}{\partial \theta} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_t^{int}}{\partial z} \right|^2 r dr d\theta dz.$$

En utilisant la formule de changement de base

$$\begin{cases} u_x^{int} = \cos \theta u_r - \sin \theta u_\theta, \\ u_y^{int} = \sin \theta u_r + \cos \theta u_\theta, \end{cases}$$

on aboutit finalement à :

$$\int_{\hat{\mathcal{O}}} \left| \frac{\partial u_x^{int}}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_y^{int}}{\partial r} \right|^2 r dr d\theta dz = \int_{\hat{\mathcal{O}}} \left| \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right|^2 r dr d\theta dz$$

et

$$\int_{\hat{\mathcal{O}}} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_x^{int}}{\partial \theta} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_y^{int}}{\partial \theta} \right|^2 r dr d\theta dz = \int_{\hat{\mathcal{O}}} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right|^2 r dr d\theta dz.$$

On déduit des résultats précédents l'égalité des normes  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^1(\mathcal{O})}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}_{1/2}^1(\hat{\mathcal{O}})}$  et donc l'équivalence entre les espaces  $\mathbb{H}^1(\mathcal{O})$  et  $\mathbb{H}_{1/2}^1(\hat{\mathcal{O}})$ . ■

Lorsque l'ouvert  $\hat{\mathcal{O}}$  de  $\mathbb{R}^3$  est axisymétrique, c'est-à-dire qu'il est engendré par la rotation d'un domaine  $\mathcal{O}^*$  autour de l'axe des  $z$ , on introduit les notations suivantes :

$$L_{1/2}^2(\mathcal{O}^*) = \{ \varphi : \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathbb{C}; r^{1/2} \varphi(r, z) \in L^2(\mathcal{O}^*) \}$$

où

$$L^2(\mathcal{O}^*) = \left\{ \varphi : \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathbb{C}; \int_{\Omega^*} |\varphi(r, z)|^2 dr dz < +\infty \right\}.$$

Dans la suite, on suppose que  $\Omega$  satisfait l'hypothèse d'axisymétrie et de régularité suivante.

### Hypothèse 8.1.2 : axisymétrie de $\hat{\Omega}$

L'ouvert  $\hat{\Omega}$  est soit convexe, soit de frontière de classe  $\mathcal{C}^{1,1}$ .

L'ouvert  $\hat{\Omega}$  est engendré par la rotation d'un domaine  $\Omega^*$  autour de l'axe des  $z$ .

Alors, le vecteur normal extérieur sur la frontière  $\partial \hat{\Omega}$  ne possède pas de composante suivant  $\theta$  et la condition

$$h \times n = 0, \quad \text{sur } \partial \hat{\Omega}$$

est équivalente à :

$$\begin{cases} h_r n_z - h_z n_r = 0, & \text{sur } \partial \hat{\Omega}, \\ h_\theta = 0, & \text{sur } \partial \hat{\Omega}. \end{cases}$$

D'après la régularité de l'hypothèse 8.1.2, l'équivalent en axisymétrique de l'espace  $\mathbb{H}_0(\text{rot}, \text{div}; \Omega)$  est donc (voir [3]) :

$$\mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\widehat{\Omega}) = \{\varphi \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega}); \varphi_r n_z - \varphi_z n_r = \varphi_\theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

En coordonnées cylindriques les opérateurs rot et div s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{rot}_{r,\theta,z}\varphi = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi_\theta}{\partial z}, \frac{\partial\varphi_r}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_r}{\partial\theta} \right), \\ \text{div}_{r,\theta,z}\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi_z}{\partial z}, \end{cases}$$

donc le problème (8.1) s'écrit en coordonnées cylindriques :

Trouver  $h \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\widehat{\Omega})$  tel que :

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \forall h' \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\widehat{\Omega}), \\ \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z} h \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz + \int_{\widehat{\Omega}} s \text{div}_{r,\theta,z}(\mu_0 h) \overline{\text{div}_{r,\theta,z}(\mu_0 h')} r dr d\theta dz \\ + i\omega \int_{\widehat{\Omega}} \mu_0 h \cdot h' r dr d\theta dz = -i\omega \int_{\widehat{\Omega}} \mu_0 \check{h} \cdot h' r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

### Théorème 8.1.3 :

On suppose que les hypothèses du corollaire 7.4.8 sont satisfaites.

Alors, le problème (8.7) admet une solution unique  $h \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\widehat{\Omega})$ .

DÉMONSTRATION. Comme le problème (8.1) admet une unique solution (voir le chapitre précédent), il en est de même pour (8.7).  $\blacksquare$

On vérifie facilement que si le second membre  $\check{h}$  est indépendant de  $\theta$ , la solution  $h$  de (8.7) l'est aussi et on est alors ramené à la résolution d'un problème bidimensionnel.

En effet, soit  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . On pose  $\varphi(r, \theta, z) = h(r, \theta + \theta_0, z)$  où  $h$  est la solution de (8.7). Soit  $h' \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$  une fonction test.

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z}\varphi \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z} h(r, \theta + \theta_0, z) \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z} h \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h'(r, \theta - \theta_0, z) r dr d\theta dz \end{aligned}$$

car les fonctions  $h$  et  $h'$  sont  $2\pi$ -périodiques en  $\theta$ .

La fonction  $\tilde{h}(r, \theta, z) = h'(r, \theta - \theta_0, z)$  appartient aussi à  $\mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$  donc, d'après (8.7), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z}\varphi \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz + \int_{\widehat{\Omega}} s \text{div}_{r,\theta,z}(\mu_0 \varphi) \overline{\text{div}_{r,\theta,z}(\mu_0 h')} r dr d\theta dz \\ & + i\omega \int_{\widehat{\Omega}} \mu_0 \varphi \cdot h' r dr d\theta dz = -i\omega \int_{\widehat{\Omega}} \mu_0 \check{h} \cdot \tilde{h} r dr d\theta dz = -i\omega \int_{\widehat{\Omega}} \mu_0 \check{h} \cdot h' r dr d\theta dz \end{aligned}$$

car la fonction  $\check{h}$  est indépendante de  $\theta$ .

Par unicité de la solution de (8.7),  $\varphi \equiv h$  et la fonction  $h$  est elle aussi indépendante de  $\theta$ .

## 8.2 Série de Fourier

Dans la situation que l'on souhaite étudier, la source  $\check{h}$  dépend de  $\theta$  donc, a priori, la solution  $h$  aussi et on ne peut pas travailler dans le plan  $(r, z)$  uniquement. Pour se ramener à l'étude d'un problème bidimensionnel, on va introduire la série de Fourier des fonctions de  $L^2_{1/2}(\widehat{\Omega})$ .

### Proposition 8.2.1 : décomposition en série de Fourier

Soit  $u \in \left(L^2_{1/2}(\widehat{\Omega})\right)^d$ ,  $d = 1, 2$  ou  $3$ .

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on appelle  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $u$  la fonction  $u_n$  définie par :

$$(8.8) \quad u_n(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \theta, z) e^{-in\theta} d\theta.$$

Alors, les coefficients  $u_n$  appartiennent à  $\left(L^2_{1/2}(\Omega^*)\right)^d$  et ils vérifient :

$$(8.9) \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| u - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} u_n e^{in\theta} \right\|_{(L^2_{1/2}(\widehat{\Omega}))^d}^2 = 0$$

et

$$(8.10) \quad \|u\|_{(L^2_{1/2}(\widehat{\Omega}))^d}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|u_n\|_{(L^2_{1/2}(\Omega^*))^d}^2.$$

DÉMONSTRATION. Soient  $u \in (L^2_{1/2}(\widehat{\Omega}))^d$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ses coefficients de Fourier.

Dans la démonstration,  $t$  est une lettre générique désignant  $r, \theta$  ou  $z$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |u_{n,t}|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |u_t(r, \theta, z)|^2 d\theta.$$

D'où, d'après le théorème de Fubini :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \|u_{n,t}\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 \leq \|u_t\|_{L^2_{1/2}(\Omega)}^2 < +\infty,$$

et les coefficients de Fourier de  $u$  appartiennent à  $\left(L^2_{1/2}(\Omega^*)\right)^d$ .

On en déduit que, pour presque tout  $(r, z) \in \Omega^*$ ,  $u_t(r, \cdot, z) \in L^2(-\pi, \pi)$ . Comme la

famille  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  est un système orthonormal de  $L^2(-\pi, \pi)$ , on déduit de la définition des coefficients de Fourier les égalités suivantes pour  $(r, z) \in \Omega^*$  :

$$(8.11) \quad \inf_{v \in \mathcal{P}_N} \|u_t(r, \cdot, z) - v\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \left\| u_t(r, \cdot, z) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} u_{n,t} e^{in\theta} \right\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 \\ = \|u_t(r, \cdot, z)\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 - \sum_{|n| \leq N} |u_{n,t}|^2,$$

où  $\mathcal{P}_N$  désigne l'espace vectoriel engendré par la famille  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}\right)_{|n| \leq N}$  :

$$\mathcal{P}_N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} a_n e^{in\theta}; a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Les polynômes trigonométriques sont denses dans  $L^2(-\pi, \pi)$  donc,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \inf_{v \in \mathcal{P}_N} \|u_t(r, \cdot, z) - v\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 \right) = 0,$$

et l'égalité (8.11) conduit à

$$(8.12) \quad p.p.(r, z) \in \Omega^*, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left| u_t(r, \theta, z) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} u_{n,t}(r, z) e^{in\theta} \right|^2 d\theta}_{=I_N} \right) = 0$$

et

$$(8.13) \quad p.p.(r, z) \in \Omega^*, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |u_t(r, \theta, z)|^2 d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n,t}(r, z)|^2.$$

D'après la définition de  $\mathcal{P}_N$  et (8.11), la suite  $(I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  d'intégrales définies par (8.12) est décroissante. D'où :

$$p.p.(r, z) \in \Omega^*, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad r I_N \leq r I_0 = C \int_{-\pi}^{\pi} |u_t(r, \theta, z)|^2 d\theta \in L^1(\Omega^*).$$

De plus la suite  $(r I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge  $p.p.(r, z) \in \Omega^*$  vers la fonction nulle donc on obtient (8.9) en appliquant le théorème de Lebesgue.

En multipliant (8.13) par  $r$  et en intégrant sur  $\Omega^*$ , on obtient (8.10) en utilisant les théorèmes de Fubini et de Fatou.  $\blacksquare$

On va maintenant exprimer les coefficients de Fourier des dérivées de  $u$  en fonction de ceux de  $u$  pour  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

**Lemme 8.2.2 :**

Soit  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

Les coefficients de Fourier des dérivées de  $u$  sont les dérivées des coefficients de Fourier de  $u$  :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ p.p. } (r, z) \in \Omega^*, \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)_n = \frac{\partial u_n}{\partial \beta} \text{ pour } \beta = r, z \text{ et } \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)_n = inu_n.$$

DÉMONSTRATION. Soient  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$  et  $v \in \mathcal{D}(\Omega^*)$ .

Dans la suite de la démonstration,  $t$  désignera  $r, \theta$  ou  $z$  et  $\beta$  désignera  $r$  ou  $z$ .

Comme  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ ,  $u_t \in L_{1/2}^2(\widehat{\Omega})$  et  $r^{1/2} u_t \in L^2(\widehat{\Omega})$ . Comme  $v$  est une fonction à support compact contenu dans  $\Omega^*$ ,  $r^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial \beta} \in L^2(\widehat{\Omega})$  et la fonction  $u_{n,t} \frac{\partial v}{\partial \beta} \in L^2(\widehat{\Omega})$ .

En utilisant le théorème de Fubini on obtient donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \int_{\Omega^*} u_{n,t}(r, z) \frac{\partial v}{\partial \beta}(r, z) dr dz &= \int_{\Omega^*} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u_t(r, \theta, z) e^{-in\theta} d\theta \right) \frac{\partial v}{\partial \beta}(r, z) dr dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{\Omega^*} u_t(r, \theta, z) \frac{\partial v}{\partial \beta}(r, z) dr dz \right) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

On intègre par parties en exploitant le fait que  $v$  est une fonction à support compact puis on utilise une nouvelle fois le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \int_{\Omega^*} u_{n,t}(r, z) \frac{\partial v}{\partial \beta}(r, z) dr dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{\Omega^*} u_t(r, \theta, z) \frac{\partial v}{\partial \beta}(r, z) dr dz \right) e^{-in\theta} d\theta \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{\Omega^*} \frac{\partial u_t}{\partial \beta}(r, \theta, z) v(r, z) dr dz \right) e^{-in\theta} d\theta \\ &= - \int_{\Omega^*} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u_t}{\partial \beta}(r, \theta, z) e^{-in\theta} d\theta \right) v(r, z) dr dz \\ &= -\sqrt{2\pi} \int_{\Omega^*} \left( \frac{\partial u_t}{\partial \beta} \right)_n(r, z) v(r, z) dr dz. \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ p.p. } (r, z) \in \Omega^*, \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)_n = \frac{\partial u_n}{\partial \beta} \text{ pour } \beta = r, z.$$

On va maintenant étudier les coefficients de Fourier de  $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ . Comme  $u_t$  est une fonction  $2\pi$ -périodique en  $\theta$ , on obtient, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \left( \frac{\partial u_t}{\partial \theta} \right)_n(r, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial u_t}{\partial \theta}(r, \theta, z) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( [u_t(r, \theta, z) e^{-in\theta}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -inu_t(r, \theta, z) e^{-in\theta} d\theta \right) \\ &= inu_{n,t}(r, z). \end{aligned}$$

■

À l'aide de la proposition 8.2.1 et du lemme 8.2.2, on va déterminer la régularité des coefficients de Fourier de  $u$  lorsque  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

À partir de maintenant, on va adopter la notation suivante :

$$(8.14) \quad \text{pour } \beta = \{\beta_1, \beta_2\} \in \mathbb{N}^2, \quad D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial r^{\beta_1} \partial z^{\beta_2}} \text{ où } |\beta| = \beta_1 + \beta_2.$$

On introduit les deux espaces suivants :

$$\mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*) = \{w \in \mathbb{L}_{1/2}^2(\Omega^*); r^{1/2} D^\beta w \in \mathbb{L}^2(\Omega^*), |\beta| = 1\},$$

et

$$X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*) = \{w \in L_{1/2}^2(\Omega^*); r^{-1/2} w \in L^2(\Omega^*), r^{1/2} D^\beta w \in L^2(\Omega^*), |\beta| = 1\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)}^2 = \|u\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{\mathbb{L}_{1/2}^2(\Omega^*)}^2,$$

l'espace  $\mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$  est un espace de Hilbert (voir [69]).

**Proposition 8.2.3 :**

Soit  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

Alors ses coefficients de Fourier vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u_n \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*).$$

Plus précisément,

$$\begin{cases} u_{0,r}, u_{0,\theta} \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*), \\ u_{\pm 1,r} \pm i u_{\pm 1,\theta}, u_{\pm 1,z} \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*), \\ \forall |n| \geq 2, \quad u_{n,r} + i n u_{n,\theta}, i n u_{n,r} - u_{n,\theta}, u_{n,z} \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*). \end{cases}$$

De plus, on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})}^2 &= \|u_0\|_{\mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{1}{r} u_{0,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{1}{r} u_{0,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left[ \|u_n\|_{\mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{i n}{r} u_{n,r} - \frac{1}{r} u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{i n}{r} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + n^2 \left\| \frac{1}{r} u_{n,z} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 \right]. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

Par définition de  $\mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ ,  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}$  et  $\frac{\partial u}{\partial z}$  appartiennent à  $\mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\Omega})$ .

On déduit alors de la proposition 8.2.1 et du lemme 8.2.2 que les coefficients de Fourier de  $u$  vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad u_n, \frac{\partial u_n}{\partial r}, \frac{\partial u_n}{\partial z} \in \mathbb{L}_{1/2}^2(\Omega^*).$$

D'où :

$$(8.15) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, u_n \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*).$$

De plus, comme  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ , les fonctions  $\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta$ ,  $\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r$  et  $\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$  sont dans  $L_{1/2}^2(\widehat{\Omega})$  et on a :

$$(8.16) \quad \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta \right)_n = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)_n - \frac{1}{r} u_{n,\theta} = \frac{in}{r} u_{n,r} - \frac{1}{r} u_{n,\theta} \in L_{1/2}^2(\Omega^*),$$

$$(8.17) \quad \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right)_n = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)_n + \frac{1}{r} u_{n,r} = \frac{in}{r} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \in L_{1/2}^2(\Omega^*),$$

$$(8.18) \quad \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)_n = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)_n = \frac{in}{r} u_{n,z} \in L_{1/2}^2(\Omega^*).$$

On déduit de la relation (8.15) et des équations (8.16) et (8.17) que les coefficients  $u_{0,r}$  et  $u_{0,\theta}$  sont dans  $X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$ .

Pour  $|n| = 1$  les équations (8.16) et (8.17) sont équivalentes et montrent que

$$r^{-1/2} (u_{\pm 1,r} \pm i u_{\pm 1,\theta}) \in L^2(\Omega^*).$$

De même, on déduit de (8.18) que  $r^{-1/2} u_{\pm 1,z} \in L^2(\Omega^*)$ . En ajoutant (8.15), on obtient :

$$u_{\pm 1,r} \pm i u_{\pm 1,\theta}, u_{\pm 1,z} \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*).$$

On déduit de même des égalités (8.16), (8.17) et (8.18) que, pour  $|n| \geq 2$ ,

$$u_{n,r} + i n u_{n,\theta}, i n u_{n,r} - u_{n,\theta}, u_{n,z} \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*).$$

L'égalité des normes est une conséquence immédiate de (8.6), (8.10) et des égalités (8.16), (8.17) et (8.18). ■

#### Corollaire 8.2.4 :

Soit  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

Alors, pour  $t = r$  ou  $\theta$ , on a :

$$\sum_{|n| \geq 2} n^2 \left\| \frac{1}{r} u_{n,t} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 < +\infty.$$

On en déduit que :

$$\forall |n| \geq 2, u_{n,r}, u_{n,\theta} \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

Alors, d'après la proposition 8.2.3,

$$\frac{in}{r}u_{n,r} - \frac{1}{r}u_{n,\theta} \in L_{1/2}^2(\Omega^*) \text{ et } \frac{in}{r}u_{n,\theta} + \frac{1}{r}u_{n,r} \in L_{1/2}^2(\Omega^*).$$

On réécrit ces deux fonctions de la manière suivante :

$$\left\| \frac{in}{r}u_{n,r} - \frac{1}{r}u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 = n^2 \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} + \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2$$

et

$$\left\| \frac{in}{r}u_{n,\theta} + \frac{1}{r}u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 = \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} + n^2 \left( \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right) \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2.$$

Les racines du trinôme  $7X^2 - 32X + 16$  étant 4 et  $4/7$ , on vérifie que :

$$\forall |n| \geq 2, n^2 \leq \frac{16}{9} \left( |n| - \frac{1}{|n|} \right)^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{9n^2}{16} \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 &\leq \left( |n| - \frac{1}{|n|} \right)^2 \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 \\ &\leq \left\| \left( |n| - \frac{1}{|n|} \right) \frac{1}{r}u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 \\ &\leq \left\| \frac{|n|}{r}u_{n,r} - \frac{1}{|n|r}u_{n,r} + |n|\frac{i}{nr}u_{n,\theta} - |n|\frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 \\ &\leq \left\| |n| \left( \frac{1}{r}u_{n,r} + \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right) - \frac{1}{|n|} \left( \frac{1}{r}u_{n,r} + n^2 \left( \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right) \right) \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2. \end{aligned}$$

Or, pour  $a, b \in \mathbb{C}$ ,

$$|a - b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab| \leq 2(|a|^2 + |b|^2),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{9n^2}{32} \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 &\leq n^2 \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} + \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \frac{1}{n^2} \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} + n^2 \left( \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right) \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 \\ &\leq n^2 \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} + \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{1}{r}u_{n,r} + n^2 \left( \frac{i}{nr}u_{n,\theta} \right) \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 \\ &\leq \left\| \frac{in}{r}u_{n,r} - \frac{1}{r}u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{in}{r}u_{n,\theta} + \frac{1}{r}u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2. \end{aligned}$$

D'après la proposition 8.2.3,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left\| \frac{in}{r}u_{n,r} - \frac{1}{r}u_{n,\theta} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 + \left\| \frac{in}{r}u_{n,\theta} + \frac{1}{r}u_{n,r} \right\|_{L_{1/2}^2(\Omega^*)}^2 \leq \|u\|_{H_{1/2}^1(\Omega)}^2 < +\infty.$$

D'où,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 \left\| \frac{1}{r} u_{n,r} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (n^2 - 1) \frac{i}{nr} u_{n,\theta} &= n^2 \frac{i}{nr} u_{n,\theta} - \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} - \frac{1}{r} u_{n,r} \\ &= \left( n^2 \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right) - \left( \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (n^2 - 1)^2 \left\| \frac{i}{nr} u_{n,\theta} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 &= \left\| (n^2 - 1) \frac{i}{nr} u_{n,\theta} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 \\ &= \left\| \left( n^2 \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right) - \left( \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right) \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 \\ &\leq 2 \left\| \left( n^2 \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right) \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 + 2 \left\| \left( \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right) \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2. \end{aligned}$$

Comme  $(n^2 - 1)^2 - \frac{n^4}{2}$  est positif pour  $|n| \geq 2$  (les racines du trinôme associé sont  $2 - \sqrt{2}$  et  $2 + \sqrt{2}$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \geq 2} n^4 \left\| \frac{i}{nr} u_{n,\theta} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 &\leq 2 \sum_{|n| \geq 2} (n^2 - 1)^2 \left\| \frac{i}{nr} u_{n,\theta} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 \\ &= 4 \sum_{|n| \geq 2} \left[ \left\| \left( n^2 \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right) \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 + \left\| \left( \frac{i}{nr} u_{n,\theta} + \frac{1}{r} u_{n,r} \right) \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 \right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{|n| \geq 2} n^2 \left\| \frac{i}{r} u_{n,\theta} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 < +\infty.$$

Soient  $|n| \geq 2$  et  $t = r$  ou  $\theta$ . D'après la proposition 8.2.3,  $u_n \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$ . Pour montrer que  $u_{n,t} \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$ , il reste donc à montrer que  $r^{-1/2} u_{n,t} \in L^2(\Omega^*)$ . Comme,

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \geq 2} n^2 \left\| \frac{1}{r} u_{n,t} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)}^2 &< +\infty, \\ \|r^{-1/2} u_{n,t}\|_{L^2(\Omega^*)} &= \left\| \frac{1}{r} u_{n,t} \right\|_{L^2_{1/2}(\Omega^*)} < +\infty, \end{aligned}$$

et le résultat est démontré. ■

Afin de déterminer les conditions sur l'axe vérifiées par les coefficients de Fourier on aura besoin de la proposition suivante (voir [69] page 423) :

**Proposition 8.2.5 :**

Soient  $V(\Omega^*)$  l'ensemble des restrictions à  $\Omega^*$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2,+})$  et  $\Gamma_0 = \partial\Omega^* \cap \{r = 0\}$  où

$$\mathbb{R}^{d,+} = \{x \in \mathbb{R}^2; r > 0\}.$$

L'application  $\gamma : \begin{cases} V(\Omega^*) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2,+}) \\ u & \longmapsto & u(0, z) \end{cases}$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$  dans  $L^2(\Gamma_0)$ .

Cette application est encore notée  $\gamma$  et vérifie en outre,

$$\forall u \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*), \quad \gamma u = 0 \text{ dans } L^2(\Gamma_0).$$

**Corollaire 8.2.6 :**

Soit  $u \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ .

Alors les coefficients de Fourier de  $u$  vérifient les conditions aux limites suivantes :

$$(8.19) \quad \begin{cases} u_{0,r} = u_{0,\theta} = 0, \Gamma_0 \\ u_{\pm 1,r} \pm i u_{\pm 1,\theta} = u_{\pm 1,z} = 0, \Gamma_0 \\ \forall |n| \geq 2, \quad u_{n,r} = u_{n,\theta} = u_{n,z} = 0, \Gamma_0 \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Immédiat d'après ce qui précède. ■

### 8.3 Coefficients de Fourier de la solution

La solution  $h$  du problème (8.7) peut être représentée par sa série de Fourier dont les différents coefficients  $h_n$  définis par la relation (8.8) sont solutions d'une infinité de problèmes bidimensionnels. Afin de simplifier l'écriture, on introduit les deux opérateurs suivants :

$$(8.20) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \text{rot}_{r,z}^n \varphi = \left( \frac{in}{r} \varphi_z - \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial z}, \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi_\theta)}{\partial r} - \frac{in}{r} \varphi_r \right), \\ \text{div}_{r,z}^n \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\varphi_r)}{\partial r} + \frac{in}{r} \varphi_\theta + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}. \end{cases}$$

**Proposition 8.3.1 :**

Soient  $h, h' \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$  et  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(h'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  leurs coefficients de Fourier.

Alors les intégrales du problème (8.7) s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z} h \cdot \overline{\text{rot}_{r,\theta,z} h'} r dr d\theta dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \overline{\text{rot}_{r,z}^n h'_n} r dr dz, \\ \int_{\widehat{\Omega}} s \text{div}_{r,\theta,z} h \cdot \overline{\text{div}_{r,\theta,z} h'} r dr d\theta dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^n h_n \cdot \overline{\text{div}_{r,z}^n h'_n} r dr dz, \\ \int_{\widehat{\Omega}} \mu_0 h \cdot h' r dr d\theta dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} \mu_0 h_n \cdot h'_n r dr dz. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soient  $h, h' \in \mathbb{H}_{1/2}^1(\widehat{\Omega})$ . Alors  $\text{rot}_{r,\theta,z}h \in \mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\Omega})$  et on déduit alors de la proposition 8.2.1 le résultat de convergence suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n e^{in\theta} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \text{rot}_{r,\theta,z}h \text{ dans } \mathbb{L}_{1/2}^2(\widehat{\Omega}).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le caractère borné de  $\frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma}$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \left[ \sum_{|n| \leq N} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n e^{in\theta} \right] \cdot \text{rot}_{r,\theta,z}h' r dr d\theta dz \\ & \quad \downarrow N \rightarrow +\infty \\ & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z}h \cdot \text{rot}_{r,\theta,z}h' r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

Pour  $N$  fixé, la somme est finie donc on peut permuter la somme et l'intégrale.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n e^{in\theta} \cdot \text{rot}_{r,\theta,z}h' r dr d\theta dz \\ & \quad \downarrow N \rightarrow +\infty \\ & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z}h \cdot \text{rot}_{r,\theta,z}h' r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

Soient  $N \in \mathbb{Z}$  et  $-N \leq n \leq N$  fixés. Par le même raisonnement que précédemment, on montre que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|m| \leq M} \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n e^{in\theta} \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z}h')_m e^{im\theta} r dr d\theta dz \\ & \quad \downarrow M \rightarrow +\infty \\ & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n e^{in\theta} \cdot \text{rot}_{r,\theta,z}h' r dr d\theta dz. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n e^{in\theta} \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z}h')_m e^{im\theta} r dr d\theta dz \\ &= \int_{\Omega^*} \int_0^{2\pi} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n e^{in\theta} \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z}h')_m e^{im\theta} r dr d\theta dz \\ &= \left( \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z}h')_m r dr dz \right) \left( \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \right) \\ &= 2\pi \delta_{n,m} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z}h)_n \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z}h')_m r dr dz. \end{aligned}$$

D'où, pour  $M \geq N$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{|m| \leq M} \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n e^{in\theta} \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z} h')_m e^{im\theta} r dr d\theta dz \\ &= 2\pi \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z} h')_n r dr dz. \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n e^{in\theta} \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left( \sum_{|n| \leq M} \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n e^{in\theta} \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z} h')_m e^{im\theta} r dr d\theta dz \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z} h')_n r dr dz \\ &= 2\pi \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n \cdot (\text{rot}_{r,\theta,z} h')_n r dr dz. \end{aligned}$$

En utilisant les notations (8.20), l'égalité précédente s'écrit :

$$\int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n e^{in\theta} \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz = \sqrt{2\pi} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h'_n r dr dz.$$

On a finalement montré que :

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z} h \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{|n| \leq N} \int_{\widehat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} (\text{rot}_{r,\theta,z} h)_n e^{in\theta} \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{|n| \leq N} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h'_n r dr dz \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h'_n r dr dz. \end{aligned}$$

Les deux autres égalités de la proposition 8.3.1 se démontrent à l'aide d'un raisonnement similaire.  $\blacksquare$

On introduit les quatre espaces suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 = \{\varphi \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*); \varphi_r, \varphi_\theta \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*) \text{ et } \varphi_r n_z - \varphi_z n_r = \varphi_\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \\ \mathcal{E}_1 = \{\varphi \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*); \varphi_r + i\varphi_\theta, \varphi_z \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*) \text{ et } \varphi_r n_z - \varphi_z n_r = \varphi_\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \\ \mathcal{E}_{-1} = \{\varphi \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*); \varphi_r - i\varphi_\theta, \varphi_z \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*) \text{ et } \varphi_r n_z - \varphi_z n_r = \varphi_\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \\ \mathcal{E}_2 = \{\varphi \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*); \varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*) \text{ et } \varphi_r n_z - \varphi_z n_r = \varphi_\theta = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}, \end{cases}$$

où  $\Gamma_1$  est le complémentaire dans  $\partial\Omega^*$  de  $\Gamma_0 = \partial\Omega^* \cap \{r = 0\}$ .

**Théorème 8.3.2 :**

Soient  $h \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$  la solution de (8.7) et  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ses coefficients de Fourier. Alors les coefficients  $h_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sont solutions des problèmes bidimensionnels suivants :

$$(8.21) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } h_0 \in \mathcal{E}_0 \text{ tel que : } \forall h' \in \mathcal{E}_0, \\ & \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^0 h_0 \cdot \text{rot}_{r,z}^0 h' r dr dz + \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^0(\mu_0 h_0) \overline{\text{div}_{r,z}^0(\mu_0 h')} r dr dz \\ & \quad + i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 h_0 \cdot h' r dr dz = -i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 \check{h}_0 \cdot h' r dr dz, \end{aligned}$$

$$(8.22) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } h_1 \in \mathcal{E}_1 \text{ tel que : } \forall h' \in \mathcal{E}_1, \\ & \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^1 h_1 \cdot \text{rot}_{r,z}^1 h' r dr dz + \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^1(\mu_0 h_1) \overline{\text{div}_{r,z}^1(\mu_0 h')} r dr dz \\ & \quad + i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 h_1 \cdot h' r dr dz = -i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 \check{h}_1 \cdot h' r dr dz, \end{aligned}$$

$$(8.23) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } h_{-1} \in \mathcal{E}_{-1} \text{ tel que : } \forall h' \in \mathcal{E}_{-1}, \\ & \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^{-1} h_{-1} \cdot \text{rot}_{r,z}^{-1} h' r dr dz + \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^{-1}(\mu_0 h_{-1}) \overline{\text{div}_{r,z}^{-1}(\mu_0 h')} r dr dz \\ & \quad + i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 h_{-1} \cdot h' r dr dz = -i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 \check{h}_{-1} \cdot h' r dr dz, \end{aligned}$$

$$(8.24) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } h_n \in \mathcal{E}_2, |n| \geq 2, \text{ tel que : } \forall h' \in \mathcal{E}_2, \\ & \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h' r dr dz + \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^n(\mu_0 h_n) \overline{\text{div}_{r,z}^n(\mu_0 h')} r dr dz \\ & \quad + i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 h_n \cdot h' r dr dz = -i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 \check{h}_n \cdot h' r dr dz. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soient  $h \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$  la solution de (8.7) et  $n \in \mathbb{Z}$ .

On pose  $p = n$  si  $|n| \geq 1$  et  $p = 2$  si  $|n| \leq 2$ .

Soient  $v \in \mathcal{E}_p$  et  $h'(r, \theta, z) = v(r, z)e^{in\theta}$ .

Afin de déterminer le problème satisfait par le mode  $h_n$ , on va montrer que  $h'$  peut être une fonction test de (8.7), c'est-à-dire que  $h' \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$ .

Comme  $v$  satisfait

$$v_r n_z - v_z n_r = v_\theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega^*$$

et que  $h'$  est axisymétrique, la fonction  $h'$  satisfait bien la condition aux limites

$$h_r n_z - h_z n_r = h_\theta = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Par définition de  $\mathcal{E}_p$ ,  $v \in \mathbb{W}_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$  donc les différentes composantes de  $h'$  ainsi que leurs dérivées partielles par rapport à  $r$  et  $z$  sont dans  $L_{1/2}^2(\Omega)$ . Il reste donc à montrer les inclusions suivantes :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial h'_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} h'_\theta, \frac{1}{r} \frac{\partial h'_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} h'_r, \frac{1}{r} \frac{\partial h'_z}{\partial \theta} \in L_{1/2}^2(\Omega).$$

$$-n = 0.$$

Comme  $v \in \mathcal{E}_0$ ,  $v_r, v_\theta \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$ , c'est-à-dire  $r^{-1}v_r, r^{-1}v_\theta \in L_{1/2}^2(\Omega^*)$ .

Or,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial h'_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} h'_\theta = -\frac{1}{r} v_\theta \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial h'_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} h'_r = \frac{1}{r} v_r,$$

donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial h'_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} h'_\theta, \frac{1}{r} \frac{\partial h'_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} h'_r \in L_{1/2}^2(\Omega).$$

Comme  $h'$  est indépendante de  $\theta$ ,  $\frac{1}{r} \frac{\partial h'_z}{\partial \theta} \equiv 0 \in L_{1/2}^2(\Omega)$ .

-  $n = 1$ .

Comme  $v \in \mathcal{E}_1$ ,  $v_r + iv_\theta, v_z \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$ .

On vérifie alors aisément que  $\frac{1}{r} \frac{\partial h'_z}{\partial \theta} = \frac{i}{r} v_z(r, z) e^{i\theta} \in L_{1/2}^2(\Omega)$ .

Par définition de  $h'$ ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial h'_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} h'_\theta = i \left( \frac{1}{r} v_r + \frac{i}{r} v_\theta \right) e^{i\theta} \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial h'_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} h'_r = \left( \frac{1}{r} v_r + \frac{i}{r} v_\theta \right) e^{i\theta},$$

donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial h'_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} h'_\theta, \frac{1}{r} \frac{\partial h'_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} h'_r \in L_{1/2}^2(\Omega).$$

-  $n = -1$ .

La preuve est similaire au cas  $n = 1$ .

-  $|n| \geq 2$ .

Par définition de l'espace  $\mathcal{E}_2$ ,  $v_r, v_\theta$  et  $v_z \in X_{1/2}^{1,2}(\Omega^*)$  donc on vérifie aisément que  $h' \in \left( H_{1/2}^{1,2}(\Omega) \right)^3$ .

Maintenant que l'on a montré que  $h' \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on va l'utiliser comme fonction test dans (8.7). En exploitant la décomposition en série de Fourier de  $h$  et  $h'$  et la proposition 8.3.1, on obtient :

$$(8.25) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^m h_m \cdot \text{rot}_{r,z}^m h'_m r dr dz + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^m h_m \overline{\text{div}_{r,z}^m h'_m} r dr dz \\ + i\omega \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} \mu_0 h_m \cdot h'_m r dr dz = -i\omega \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} \mu_0 \check{h}_m \cdot h'_m r dr dz.$$

Or,

$$h'_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, z) e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v(r, z) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ = \sqrt{2\pi} \delta_{n,m} v(r, z)$$

où  $\delta_{n,m}$  est le symbole de Kronecker. En reportant l'expression précédente dans (8.25), on obtient :

$$(8.26) \quad \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n v r dr dz + \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^n h_n \overline{\text{div}_{r,z}^n v} r dr dz \\ + i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 h_n \cdot v r dr dz = -i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 \check{h}_n \cdot v r dr dz.$$

D'après les propositions 8.2.3 et 8.2.4 le mode  $h_n$  appartient bien à  $\mathcal{E}_p$  et le théorème 8.3.2 est donc démontré. ■

Le théorème suivant assure que les problèmes (8.21 - 8.24) sont bien posés.

**Théorème 8.3.3 :**

*Les différents problèmes (8.21 - 8.24) admettent une unique solution.*

*De plus, si  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  désignent les différentes solutions, il existe un unique  $h \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$  dont les coefficients de Fourier sont les  $h_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , et cette fonction est solution du problème (8.7).*

DÉMONSTRATION. D'après les théorèmes 8.1.3 et 8.3.2, il existe une solution au problème (8.7) et les coefficients de Fourier de cette solution sont eux-mêmes solutions des problèmes (8.21 - 8.24). Ceci démontre l'existence d'une solution pour ces différents problèmes.

Comme les problèmes (8.21 - 8.24) sont linéaires, pour montrer l'unicité il suffit de montrer que la seule solution du problème sans second membre est la fonction nulle.

Soit  $n_0 \in \mathbb{Z}$  et  $v_{n_0} \in \mathcal{E}_p$  solution du problème :

$$\begin{aligned} \forall h' \in \mathcal{E}_p, \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^{n_0} h_{n_0} \cdot \text{rot}_{r,z}^{n_0} h' r dr dz + \int_{\Omega^*} s \text{div}_{r,z}^{n_0} (\mu_0 h_{n_0}) \overline{\text{div}_{r,z}^{n_0} (\mu_0 h')} r dr dz \\ + i\omega \int_{\Omega^*} \mu_0 h_{n_0} \cdot h'_{n_0} r dr dz = 0 \end{aligned}$$

où  $p = n_0$  si  $|n_0| \geq 1$  et  $p = 2$  si  $|n_0| \leq 2$ .

Pour montrer que  $v$  est la fonction nulle, on va montrer que la fonction  $h(r, \theta, z) = v_{n_0}(r, z)e^{in_0\theta}$  est solution du problème (8.7) et exploiter le résultat d'unicité le concernant.

Comme dans la démonstration du théorème 8.3.2, on montre que  $h(r, \theta, z) \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$  et que ses coefficients de Fourier sont donnés par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, h_n = \sqrt{2\pi} \delta_{n,n_0} v_{n_0}.$$

Soit  $h' \in \mathbb{H}_{1/2}^{1,0}(\Omega)$ .

D'après la proposition 8.3.1, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,\theta,z} h \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} h' r dr d\theta dz &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h'_n r dr dz \\ &= 2\pi \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^{n_0} h_{n_0} \cdot \text{rot}_{r,z}^{n_0} h'_{n_0} r dr dz \\ &= (2\pi)^{3/2} \int_{\Omega^*} \frac{1}{i\varepsilon\omega - \sigma} \text{rot}_{r,z}^{n_0} v_{n_0} \cdot \text{rot}_{r,z}^{n_0} h'_{n_0} r dr dz. \end{aligned}$$



## Chapitre 9

# Résolution numérique du problème axisymétrique

Ce chapitre est consacré aux simulations numériques liées aux problèmes (8.21) - (8.24). Les simulations qui suivent ont été réalisées à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis mélima (voir [68]). Une présentation de cette bibliothèque et des programmes est faite dans l'Annexe D.

### 9.1 Retour sur les hypothèses du chapitre 6

Avant de montrer les simulations numériques, on va revenir dans cette section sur les différentes hypothèses effectuées dans les sections 6.3 et 6.5 du chapitre 6.

#### Hypothèses de la section 6.3

Lors des simulations numériques, le domaine  $\Omega$  considéré est un cylindre inclus dans l'antenne ayant pour axe de symétrie l'axe des  $z$  et dont le rayon  $R = 4$  cm est proche de celui de l'antenne (4,45 cm). La longueur du cylindre est fixée à 28 cm pour une antenne de 12,8 cm de long. L'hypothèse 6.3.1 est donc bien adaptée à notre étude.

Dans les applications numériques, on a pris comme champ source

$$\check{h} = \Re \left( \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{B^1} e^{-i\omega_1 t} \right),$$

le champ magnétique produit par l'antenne cage d'oiseau à vide associé à la pulsation de résonance  $\omega_1$ . Ce dernier est obtenu à partir de la formule de Biot-Savart. Comme la densité de courant de l'antenne cage d'oiseau est régulière ( $\mathbb{L}^{6/5}(\mathbb{R}^3)$  suffit d'après [17]) et à divergence nulle, le champ  $\overrightarrow{B^1}$  obtenu à l'aide de la loi de Biot-Savart satisfait :

$$\begin{cases} \overrightarrow{B^1} \in \mathbb{H}(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \cap \mathbb{H}(\text{div}; \mathbb{R}^3), \\ \text{div}(\overrightarrow{B^1}) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \exists a \in \mathbb{H}_{loc}(\text{rot}; \mathbb{R}^3), \text{ rot } a = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{B^1}. \end{cases}$$

La partie de l'hypothèse 6.3.2 concernant la régularité du champ  $\check{h}$  est donc justifiée. Il reste à montrer l'existence d'une fonction  $\check{e}$  satisfaisant (6.6). Pour cela, on pose

$$E = i\omega\mu_0 a \text{ et } \check{e}(t, x) = \Re(Ee^{-i\omega t}).$$

Comme  $\Omega$  est borné et que  $a \in \mathbb{H}_{loc}(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$ ,  $E \in \mathbb{H}(\text{rot}; \Omega)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \text{rot } \check{e} &= \Re(\text{rot } E) \cos(\omega t) + \Im(\text{rot } E) \sin(\omega t) \\ &= \Re(i\omega \overrightarrow{B^1}) \cos(\omega t) + \Im(i\omega \overrightarrow{B^1}) \sin(\omega t) \\ &= -\Re\left(\frac{\partial(\overrightarrow{B^1} e^{-i\omega t})}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{\partial(\mu_0 \check{h})}{\partial t}. \end{aligned}$$

Le champ  $E$  ne dépendant pas du temps,  $\check{e}$  vérifie bien les conditions de régularité de l'hypothèse 6.3.2 ainsi que la relation (6.6).

Les hypothèses concernant les fonctions  $\varepsilon$  et  $\sigma$  ont déjà été justifiées à la fin de la section 6.3. Concernant l'hypothèse sur  $\mu$ , il faut noter que les variations de la fonction  $\mu$  sont très faibles pour les milieux qui nous intéressent (par exemple,  $\mu = 0,999991 \times \mu_0$  pour le cuivre). Il est donc légitime de supposer la fonction  $\mu$  constante. Par ailleurs, les différents résultats des chapitres 6, 7 et 8 restent valables en supposant  $\mu$  constante par morceaux à condition de prendre pour  $\check{h}$  un relèvement à divergence et rotationnel nuls de la condition aux limites  $\check{h}$  sur  $\partial\Omega$ .

### Hypothèses de la section 6.5

Les champs  $\check{h}_1$  et  $\check{h}_2$  de la section 6.5 sont respectivement les champs magnétiques obtenus par la formule de Biot-Savart à partir de la partie transitoire et stationnaire du courant circulant dans les brins de l'antenne (voir le chapitre 5 pour plus de détails). Par le même raisonnement que précédemment, on montre que ces deux champs satisfont l'hypothèse 6.3.2 ainsi que l'existence du champ électrique  $E_2$  tel que  $\text{rot } E_2 = i\omega\mu_0 H_2$ .

D'après la formule (5.17), la pulsation du champ  $\check{h}_1$  est  $\omega_1^a$  et non  $\omega_1$ . Cependant, en utilisant les valeurs (6.36) obtenues au chapitre 5, on obtient :

$$\omega_1^a = 0,999\,999\,909 \times \omega_1.$$

Il est donc cohérent de prendre  $\omega_1^a = \omega_1$ .

Les différentes simulations du chapitre 4 montre que le champ  $H_2 = \mu_0^{-1} \overrightarrow{B^1}$  est de partie réelle non nulle au centre de l'antenne, ce qui justifie l'hypothèse  $\Re(H_2) \neq 0$ .

En accord avec le chapitre 5, on suppose qu'initialement il n'y a pas de courant à parcourir l'antenne. Il est donc normal de prendre des conditions initiales nulles pour  $\check{h}$  ainsi que pour  $(e_{tot}, h_{tot})^T$ .

Il reste maintenant à expliquer l'hypothèse concernant la décomposition du domaine  $\Omega$  en trois : de l'air, des tissus humains ( $\Omega_h$ ) et un cathéter métallique ( $\Omega_m$ ). Pour obtenir de bons résultats en IRM, il est nécessaire de remplir au maximum

l'antenne utilisée. Ainsi, il est raisonnable de supposer que  $\Omega_h$  représente la majorité du domaine  $\Omega$ . Par ailleurs, les diamètres des cathéters varient entre 0,4 et 0,8 mm. Ils sont donc au moins dix fois plus petits que le diamètre de l'antenne que l'on considère et la mesure de  $\Omega_m$  cent fois plus petite que celle de  $\Omega$ .

## 9.2 Coefficients de Fourier de $\check{h}$

### 9.2.1 Coordonnées axisymétriques

Afin de résoudre numériquement les problèmes (8.21 - 8.24), il est nécessaire de déterminer les composantes cylindriques du champ  $\vec{B}^k$  donné par la formule (4.35).

Compte tenu des relations (4.25) et (4.28), la composante suivant  $r$  de la contribution des anneaux du haut dans le champ  $\vec{B}^k$  s'écrit :

$$B_{ah,r} = B_{ah,x} \cos \theta + B_{ah,y} \sin \theta$$

$$B_{ah,r} = \begin{cases} \left( \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r,z,L/2)} \left( \frac{2(1-C_B)}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2-2}{\kappa^2-1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right] \right. \right. \\ \quad \left. \left. - C_B \sum_{j=1}^N [\mathcal{F}_x^a(\kappa(r,z,L/2), \Phi_j) \cos \theta \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \mathcal{F}_y^a(\kappa(r,z,L/2), \Phi_j) \sin \theta] \exp(ik\theta_j) \right) \right), \text{ si } \kappa \neq 0, \\ \left( \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r,z,L/2)} \left( - C_B \sum_{j=1}^N [\mathcal{F}_x^a(0, \Phi_j) \cos \theta \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \mathcal{F}_y^a(0, \Phi_j) \sin \theta] \exp(ik\theta_j) \right) \right), \text{ si } \kappa = 0. \end{cases}$$

Or, d'après (4.23) et (4.27),

$$(9.1) \quad \begin{aligned} & \mathcal{F}_r^a(\kappa, \Phi) \\ &= \mathcal{F}_x^a(\kappa, \Phi) \cos \theta + \mathcal{F}_y^a(\kappa, \Phi) \sin \theta \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\kappa^2} F(\Phi, \kappa) + \frac{(\kappa^2-2)}{\kappa^2-1} \left[ \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \Phi}} - \frac{1}{\kappa^2} E(\Phi, \kappa) \right], \text{ si } \kappa \neq 0, \\ \frac{1}{2} \sin(2\Phi), \text{ si } \kappa = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$(9.2) \quad B_{ah,r} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r,z,L/2)} \left( \frac{2(1-C_B)}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2-2}{\kappa^2-1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right] \right. \\ \left. - C_B \sum_{j=1}^N \left[ \frac{2}{\kappa^2} F(\Phi_j, \kappa) + \frac{(\kappa^2-2)}{\kappa^2-1} \left( \frac{\sin \Phi_j \cos \Phi_j}{\sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \Phi_j}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{\kappa^2} E(\Phi_j, \kappa) \right) \right] \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa \neq 0, \\ \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r,z,L/2)} \left( -\frac{C_B}{2} \sum_{j=1}^N \sin(2\Phi_j) \exp(ik\theta_j) \right), & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

De même, on montre que la composante suivant  $\theta$  de la contribution des anneaux du haut dans le champ  $\vec{B}^k$  s'écrit :

$$(9.3) \quad B_{ah,\theta} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r,z,L/2)} C_B \sum_{j=1}^N \mathcal{F}_\theta^a(\kappa(r,z,L/2), \Phi_j) \exp(ik\theta_j),$$

avec

$$(9.4) \quad \mathcal{F}_\theta^a(\kappa, \Phi) = \begin{cases} \frac{2}{\kappa^2 \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \Phi}}, & \text{si } \kappa \neq 0, \\ -\frac{1}{2} \cos(2\Phi), & \text{si } \kappa = 0. \end{cases}$$

La composante suivant  $z$  de la contribution des anneaux du haut dans le champ  $\vec{B}^k$  donnée par (4.31).

L'expression des coordonnées cylindriques du champ magnétique  $\vec{B}_{ab}$  créé au point  $(r, \theta, z)$  par l'anneau terminal du bas est obtenu à partir des expressions (9.2), (9.3) et (4.31) en remplaçant  $L/2$  par  $-L/2$  et  $I_0$  par  $-I_0$ .

Le champ magnétique créé par les branches verticales de l'antenne s'écrit sous la forme :

$$(9.5) \quad \vec{B}_b = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} C_B \sum_{j=1}^N \begin{pmatrix} \mathcal{F}_r^b(\theta_j) \\ \mathcal{F}_\theta^b(\theta_j) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(ik\theta_j)$$

avec

$$(9.6) \quad \mathcal{F}_r^b(\theta_j) = \frac{R \sin(\theta - \theta_j)}{r^2 - 2rR \cos(\theta - \theta_j) + R^2} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta, -L/2)}} \right)$$

et

$$(9.7) \quad \mathcal{F}_\theta^b(\theta_j) = \frac{-r + R \cos(\theta - \theta_j)}{r^2 - 2rR \cos(\theta - \theta_j) + R^2} \left( \frac{z-L/2}{\sqrt{a^2(\theta, L/2)}} - \frac{z+L/2}{\sqrt{a^2(\theta, -L/2)}} \right).$$

En résumé, les composantes cylindriques du champ magnétique créé au point  $(r, \theta, z)$  par l'antenne cage d'oiseau s'obtiennent à l'aide de la formule suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi}{\mu_0 I_0} \vec{B}^k \\
(9.8) \quad & = C_B \sum_{j=1}^N \left[ \begin{aligned} & \left( \begin{aligned} & \mathcal{F}_r^b(\theta_j) + \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \mathcal{F}_r^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \\ & \mathcal{F}_\theta^b(\theta_j) + \frac{2R(z-L/2)}{\rho^3(r, z, L/2)} \mathcal{F}_\theta^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \\ & 0 + \frac{-2R}{\rho^3(r, z, L/2)} \mathcal{F}_z^a(\kappa(r, z, L/2), \Phi_j) \end{aligned} \right) \\ & - \left( \begin{aligned} & \frac{2R(z+L/2)}{\rho^3(r, z, -L/2)} \mathcal{F}_r^a(\kappa(r, z, -L/2), \Phi_j) \\ & \frac{2R(z+L/2)}{\rho^3(r, z, -L/2)} \mathcal{F}_\theta^a(\kappa(r, z, -L/2), \Phi_j) \\ & \frac{-2R}{\rho^3(r, z, -L/2)} \mathcal{F}_z^a(\kappa(r, z, -L/2), \Phi_j) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \exp(ik\theta_j) \\
& + (1 - C_B) \left( \begin{aligned} & \left( \begin{aligned} & \frac{2R(z-Z)}{\rho^3(r, z, Z)} \xi_r(\kappa(r, z, Z)) \\ & 0 \\ & \frac{-2R}{\rho^3(r, z, Z)} \xi_z(\kappa(r, z, Z)) \end{aligned} \right) \Big|_{Z=-L/2}^{Z=L/2} \end{aligned} \right) \\
\text{avec} \quad & \left\{ \begin{aligned} \xi_r(r, z, Z) &= \begin{cases} \frac{2}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2 - 2}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2K(\kappa) \right], & \text{si } \kappa \neq 0, \\ 0, & \text{si } \kappa = 0. \end{cases} \\ \xi_z(r, z, Z) &= \begin{cases} \frac{2}{\kappa^2} \left[ \frac{\kappa^2(r+R) - 2r}{\kappa^2 - 1} E(\kappa) - 2rK(\kappa) \right], & \text{si } \kappa \neq 0, \\ R\pi, & \text{si } \kappa = 0. \end{cases} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

## 9.2.2 Propriété

### Proposition 9.2.1 :

Soient  $v \in L^2_{1/2}(\hat{\Omega})$ ,  $N > 0$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

Alors, les coefficients de Fourier de la fonction

$$(9.9) \quad f : (r, \theta, z) \mapsto \sum_{j=1}^N v \left( \theta - \frac{2\pi j}{N} \right) \exp \left( \frac{2ik\pi j}{N} \right),$$

satisfont :

$$f_n(r, z) = \begin{cases} N \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\right) v_n(r, z), & \text{si } n \in k + N\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Par définition,

$$f_n(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{2ik\pi(j-1)}{N}\right) \int_{-\pi}^{\pi} v\left(\theta - \frac{2\pi j}{N}\right) e^{-in\theta} d\theta.$$

On note  $I_j$  l'intégrale précédente. Grâce au changement de variable  $u = \theta - 2\pi j/N$ , on montre que :

$$I_j = \exp\left(-\frac{2i\pi j n}{N}\right) \int_{-\pi - \frac{2\pi j}{N}}^{\pi - \frac{2\pi j}{N}} v(u) e^{-inu} du = \exp\left(-\frac{2i\pi j n}{N}\right) \sqrt{2\pi} v_n(r, z).$$

D'où

$$\begin{aligned} f_n(r, z) &= \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{2ik\pi(j-1)}{N}\right) \exp\left(-\frac{2i\pi j n}{N}\right) v_n(r, z) \\ &= \exp\left(-\frac{2ik\pi}{N}\right) \left[ \sum_{j=1}^N \exp\left(\frac{2i\pi(k-n)j}{N}\right) \right] v_n(r, z). \end{aligned}$$

Le terme entre crochet est la somme des  $N$  premiers termes d'une suite géométrique de raison

$$q = \left(\frac{2i\pi(k-n)}{N}\right).$$

La raison  $q$  vaut 1 si et seulement si  $n \in k + N\mathbb{Z}$ . Dans ce cas, le terme entre crochet vaut  $N$ . Sinon, la raison  $q$  est une racine  $q$ -ième de l'unité et le terme entre crochet s'annule. On retrouve donc le résultat de la proposition 9.2.1. ■

**Corollaire 9.2.2** *Le champ magnétique  $\vec{B}^k$  satisfait :*

$$(9.10) \quad \forall n \notin k + N\mathbb{Z}, \quad B_n^k \equiv 0.$$

De plus, si on note

$$B_{[J]}^k(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|j| \leq J} B_j^k(r, z) e^{ij\theta},$$

il existe  $C > 0$  tel que :

$$(9.11) \quad \|B^k - B_{[J]}^k\|_{L^2(\Omega^*)} \leq \frac{C}{J} \|B^k\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}.$$

DÉMONSTRATION. Comme  $\Phi_j$  est une fonction de  $\theta - \theta_j$  (voir (4.17)), on déduit de l'expression (9.8) que le champ  $\vec{B}^k$  s'écrit sous la forme (9.9). On déduit alors de la proposition 9.2.1 l'égalité (9.10).

L'inégalité (9.11) est une conséquence immédiate de la proposition II.3.3. page 37 de [14]. ■

### 9.3 Illustrations numériques des propriétés de $\check{h}$

Comme mentionné en introduction, les différentes illustrations numériques de cette section ont été réalisées à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis mélina (voir [68]). Les différents calculs ont été effectués sur le ordinateur suivant :

$$(9.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle : Power Mac G5,} \\ \text{Processeur : PowerPC 970 (2.2),} \\ \text{Nombres de processeurs : 2,} \\ \text{Vitesse de chaque processeur : 2 GHz,} \\ \text{Mémoire : 1,5 Go.} \end{array} \right.$$

#### 9.3.1 Vue tridimensionnelle

À l'aide du logiciel `Modulef`, on a réalisé un maillage à l'aide de tétraèdres du cylindre  $\Omega$  (voir la figure 57). Le maillage est composé de 137 424 éléments et les calculs ont été effectués à l'aide d'une interpolation  $\mathbb{P}_1$ .

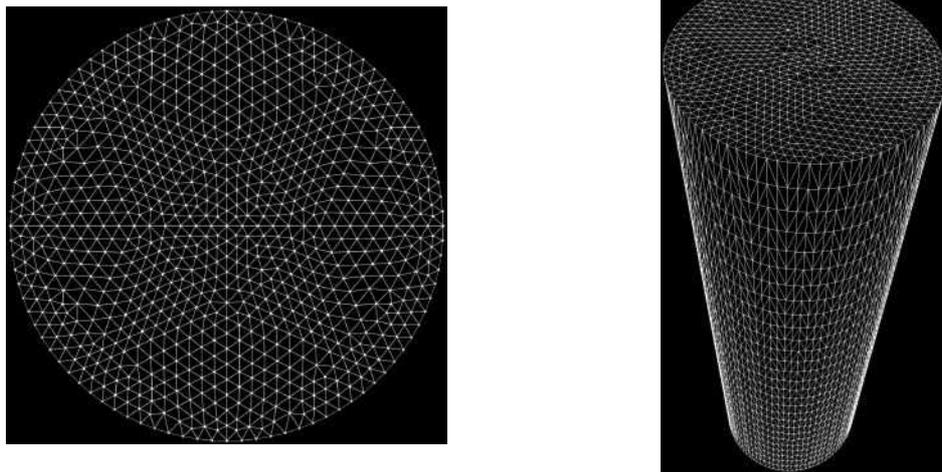


FIG. 57 – base et vue en élévation du maillage de  $\Omega$

On peut voir sur les figures 58, 59 et 60 le module du champ  $\check{h}$  ainsi que ses lignes de niveaux dans différentes configurations. On retrouve sur la figure 58 la forme de l'antenne cage d'oiseau (les graduations sont  $1.0000E+00$ ,  $5.0000E+00$ ,  $1.0000E+01$ ,  $1.5000E+01$  et  $2.0000E+01$ ).

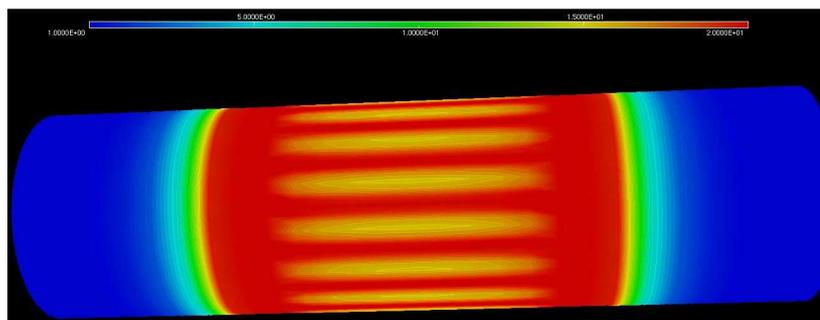


FIG. 58 – vue tridimensionnelle du module champ  $\check{h}$

On a aussi effectué une coupe dans le sens de la longueur du cylindre (voir la figure 59) et une section du cylindre  $\Omega$  en son milieu (voir la figure 60). Sur chacune des deux figures on constate qu'il n'y a pas de lignes de niveaux au centre de l'antenne, ce qui est en accord avec les résultats du chapitre 4.

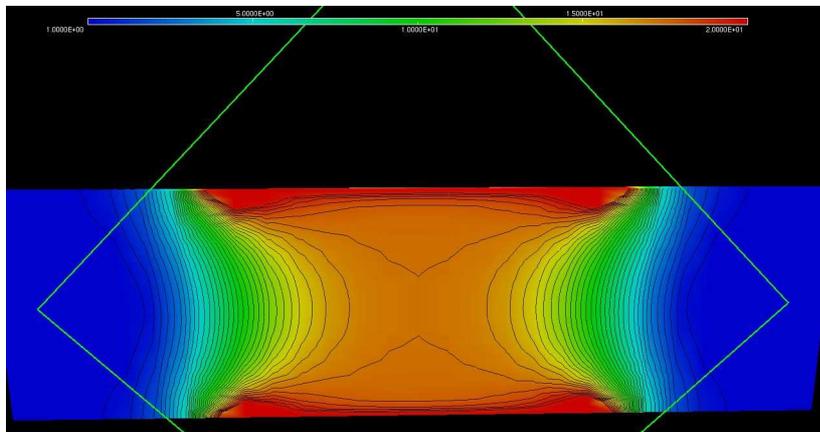


FIG. 59 – lignes de niveaux de  $\check{h}$  dans le plan  $x = 0$

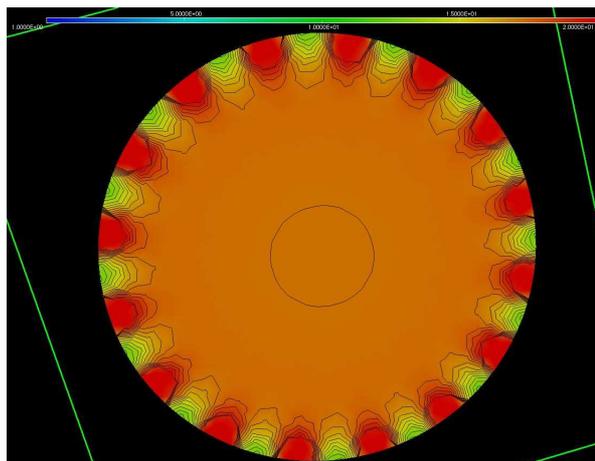


FIG. 60 – lignes de niveaux de  $\check{h}$  dans la plan  $z = 0$

### 9.3.2 Vue en axisymétrie

Pour les calculs en axisymétrie, on a maillé le rectangle  $\Omega^*$  à l'aide d'un maillage raffiné au voisinage de  $z = \pm L/2$  (voir la figure 61).

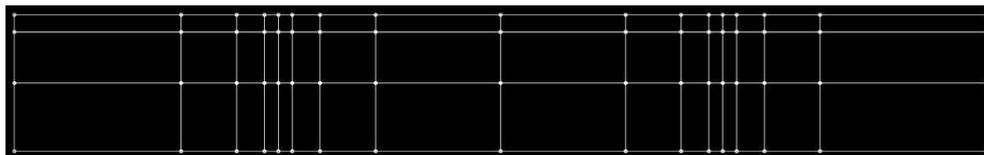


FIG. 61 – maillage structuré de  $\Omega^*$

Ce maillage est composé de 48 quadrangles et a pour abscisse  $z$  et ordonnée  $r$ . Sauf mention du contraire, les calculs en configuration axisymétrique ont été réalisés à

l'aide d'une interpolation  $\mathbb{Q}_{10}$ , c'est-à-dire chaque composante des différentes fonctions inconnues des problèmes (8.21) - (8.24) est approchée par un polynôme de degré 10 sur chaque quadrangle (voir [33]). Pour tirer profit d'une approximation de degré si élevée, tous les calculs qui suivent ont été réalisés en double précision.

On a représenté sur les figures 62 et 63 une vue en élévation des lignes de niveaux du module du champ  $\check{h}$  dans  $\Omega^*$  pour deux valeurs de l'angle  $\theta$  : 0 et  $\pi/N$ . Sur le premier graphique on peut voir en rouge la branche contenue dans le plan  $\theta = 0$ . Sur la figure 62, on note l'absence de branche dans le plan correspondant à  $\theta = \pi/N$ . Afin de pouvoir les comparer, les deux graphiques sont tracés avec la même échelle. Pour pouvoir bien observer l'influence de l'antenne, on a supposé dans les deux cas ci-dessous que le rayon de l'antenne est de 4,1 cm et non 4,45 cm.

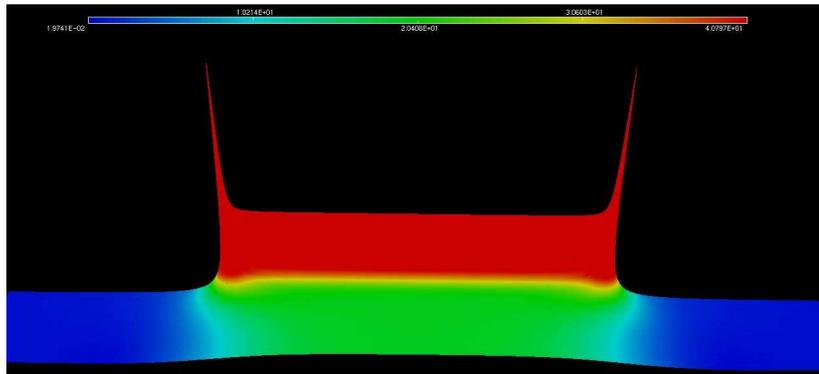


FIG. 62 – module de  $\check{h}$  dans le plan  $\theta = 0$

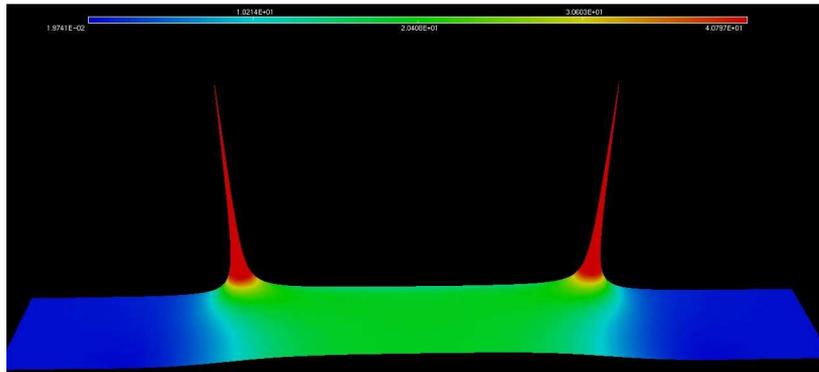


FIG. 63 – module de  $\check{h}$  dans le plan  $\theta = \pi/N$

Comme le champ  $\check{h}$  présente plus de variations dans un plan contenant une branche de l'antenne, il est raisonnable de penser que si on sait bien l'approcher dans un tel plan, on sera capable de bien l'approcher dans tous les plans. C'est pourquoi, sauf mention du contraire, toutes les simulations ont été réalisées dans le plan  $\theta = 0$ .

### 9.3.3 Coefficients de Fourier

La figure 64 illustre la proposition 9.2.2 : on y a représenté le logarithme décimal des normes  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  des coefficients de Fourier  $\check{h}_n$  pour  $-15 \leq n \leq 17$ . On constate

que seuls les coefficients  $-15$ ,  $1$  et  $17$  sont non nuls, ce qui constitue une bonne illustration du corollaire 9.2.2.

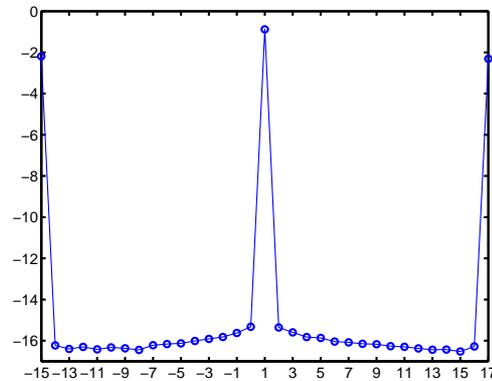


FIG. 64  $-\log_{10} \left( \left\| \check{h}_n \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)} \right)$  pour  $-15 \leq n \leq 17$

On a représenté sur la figure 65 le logarithme décimal des normes  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  des coefficients de Fourier  $\check{h}_{1+nN}$  pour  $10 \leq n \leq 10$ . On constate que la norme des coefficients décroît avec  $n$ . De plus, on remarque que les coefficients pour  $1 \leq n \leq 10$  et  $-10 \leq n \leq -1$  sont alignés. Les pentes sont respectivement  $-0,05$  et  $0,05$ . Autrement dit, la décroissance des coefficients est de l'ordre de  $0,89^n \simeq (9/10)^n$ .

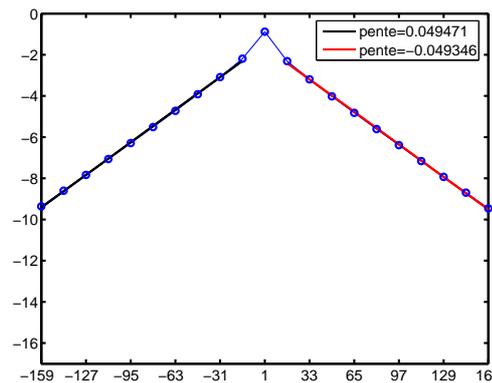


FIG. 65  $-\log_{10} \left( \left\| \check{h}_{1+nN} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)} \right)$  pour  $-10 \leq n \leq 10$

La figure 66 illustre la vitesse de convergence de la série de Fourier de  $\check{h}$  vers  $\check{h}$ . Pour cela, on a représenté le logarithme décimal de la norme  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de la différence entre  $\check{h}$  et sa série de Fourier en fonction du nombre de coefficients. On remarque que les différents points sont alignés sur une droite de pente  $-0,903$ . Autrement dit,

la vitesse de convergence de la série de Fourier est de l'ordre de  $0,125^n \simeq 1/8^n$ .

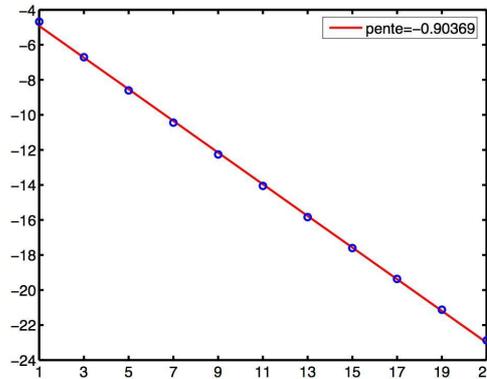


FIG. 66  $-\log \left( \left\| \check{h} - \check{h}_{[1+nN]} \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)} \right)$  pour  $1 \leq n \leq 10$

On a représenté sur la figure 67 le logarithme décimal des normes  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de la divergence des coefficients de Fourier  $\check{h}_{1+nN}$  pour  $10 \leq n \leq 10$ . On constate que tous les points sont inférieurs à  $-5$  : cela constitue une bonne illustration de la propriété  $\text{div}(\check{h}) \equiv 0$ .

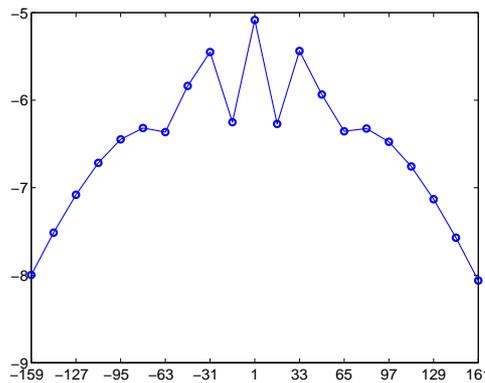


FIG. 67  $-\log_{10} \left( \left\| \text{div}(\check{h}_{1+nN}) \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)} \right)$  pour  $-10 \leq n \leq 10$

On a représenté sur la figure 68 le logarithme décimal des normes  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  du rotationnel des coefficients de Fourier  $\check{h}_{1+nN}$  pour  $10 \leq n \leq 10$ . Comme précédemment, tous les points sont inférieurs à  $-5$  : cela constitue une bonne illustration de la propriété  $\text{rot}(\check{h}) \equiv 0$ . On constate que les courbes des figures 67 et 68 sont très

similaires.

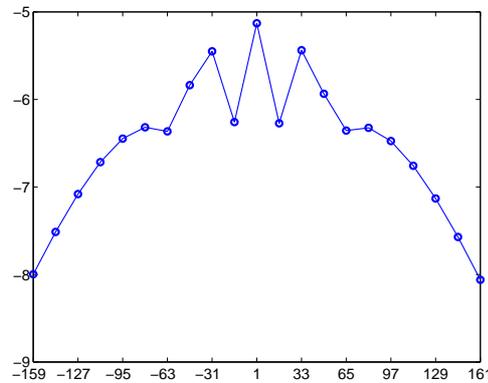


FIG. 68 –  $-\log_{10} \left( \left\| \text{rot}(\check{h}_{1+nN}) \right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)} \right)$  pour  $-10 \leq n \leq 10$

Pour conclure, on va montrer des vues en élévation correspondant au coefficient de Fourier d'indice 1. La figure 69 représente la norme  $l^2$  du coefficient  $\check{h}_1$ . On constate que la vue en élévation ressemble fortement à celles du champ  $\check{h}$  des figures 62 et 63.

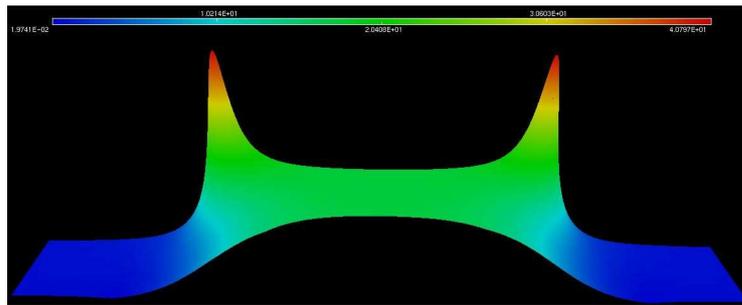


FIG. 69 – norme  $l^2$  du coefficient de Fourier  $\check{h}_1$

Pour confirmer cette impression, on a représenté sur la figure 70 la norme  $l^2$  de la différence  $\check{h} - \check{h}_1 e^{i\theta}$  avec les mêmes échelles que sur la figure 69.

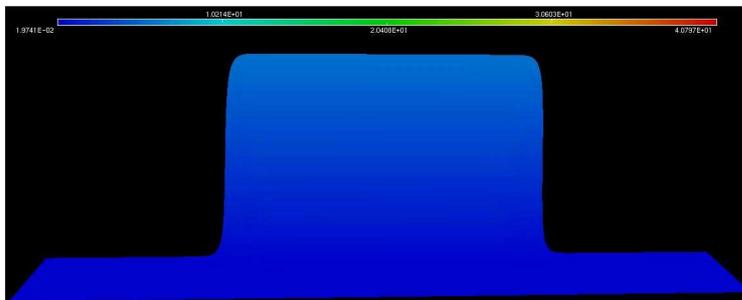


FIG. 70 – norme  $l^2$  de la différence  $\check{h} - \check{h}_1$

Sur la figure 71, on a pris une échelle adaptée à la différence  $\check{h} - \check{h}_1$ . On vérifie que le support de la différence est concentré en haut et au centre du maillage, c'est-à-dire au voisinage de la branche de l'antenne. On peut donc dire que l'essentiel de

l'information de  $\check{h}$  est portée par le coefficient de Fourier d'indice 1.

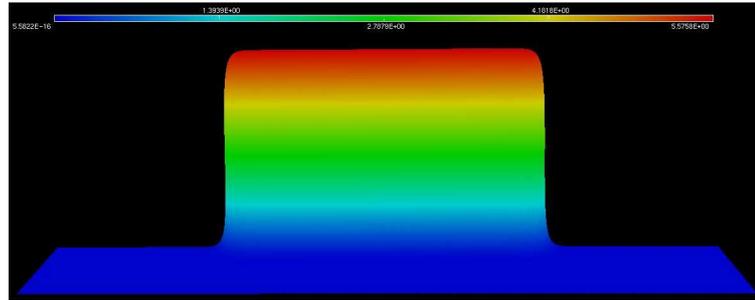


FIG. 71 – norme  $l^2$  de la différence  $\check{h} - \check{h}_1$

On a représenté sur les figures 72 et 73 respectivement la norme  $l^2$  de la divergence et du rotationnel du coefficient  $\check{h}_1$ . On constate que les deux supports sont concentrés dans la partie raffinée du maillage qui correspond aux voisinages de l'antenne. Ces deux figures constituent donc une bonne illustration des hypothèses  $\text{div}(\check{h}) \equiv 0$  et  $\text{rot}(\check{h}) \equiv 0$ .

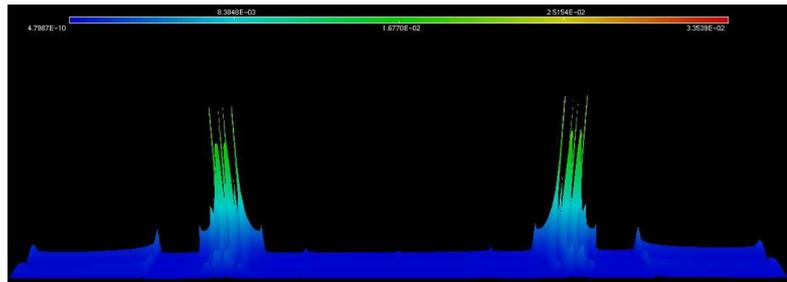


FIG. 72 – norme  $l^2$  de  $\text{div}(\check{h}_1)$

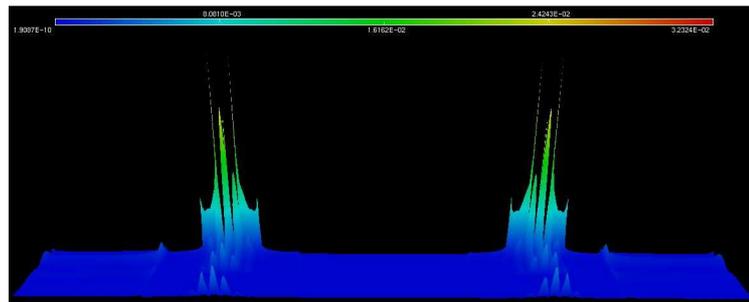


FIG. 73 – norme  $l^2$  de  $\text{rot}(\check{h}_1)$

## 9.4 Résolutions des problèmes axisymétriques

Après avoir présenté des simulations numériques relatives au champ source  $\check{h}$ , on va maintenant s'intéresser à la résolution des problèmes axisymétriques (8.21 - 8.24). Comme précisé dans la section précédente, les simulations présentées sont, sauf mention du contraire, réalisées à partir du maillage de la figure 61, avec une interpolation  $\mathbb{Q}_{10}$ , dans le plan  $\theta = 0$  et pour le coefficient de Fourier d'indice 1, c'est-à-dire le problème (8.22). Après des simulations dans les cas d'écoles  $\sigma \equiv 0$  et  $\sigma \equiv \sigma_0 > 0$ , on s'intéressera dans la section 9.4.3 à un cas réaliste.

### 9.4.1 Antenne dans le vide

Dans les problèmes axisymétriques, le terme  $\frac{\partial(\varepsilon(x)e)}{\partial t}$ , correspondant aux courants de déplacements n'est pas négligé, contrairement à la formule de Biot-Savart. Le champ magnétique total n'est donc pas le champ magnétique produit par l'antenne à vide mais une perturbation de celui-ci. On rappelle que la solution du problème (8.22) est la différence  $h_1 = h_{tot,1} - \check{h}_1$  où  $h_{tot,1}$  est le coefficient de Fourier d'indice 1 du champ magnétique total et non le champ magnétique lui-même.

Dans un premier temps, on a fixé  $s$  et on a fait varier la pulsation  $\omega$  de 0 à  $10^{12}$ . On fixe  $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$  dans toutes les simulations qui suivent et on pose

$$s = \frac{S}{\mu_0^2(i\varepsilon_0\omega)},$$

où  $S$  est une constante réelle donnée. Ainsi, si  $S = 1$ , la somme des termes contenant le rotationnel et la divergence correspond au laplacien.

Afin de pouvoir traiter le cas  $\omega = 0$ , on n'a pas résolu le problème (8.22), mais le problème suivant :

$$(9.13) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } h_1 \in \mathcal{E}_1 \text{ tel que : } \forall h' \in \mathcal{E}_1, \\ & \int_{\Omega^*} \text{rot}_{r,z}^1 h_1 \cdot \text{rot}_{r,z}^1 h' r dr dz + \int_{\Omega^*} S \text{div}_{r,z}^1 h_1 \overline{\text{div}_{r,z}^1 h'} r dr dz \\ & \quad - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\Omega^*} h_1 \cdot h' r dr dz = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\Omega^*} \check{h}_1 \cdot h' r dr dz. \end{aligned}$$

Les valeurs des normes  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de  $h_1$ , de sa divergence et de son rotationnel dans le cas  $S = 1$  sont regroupés dans le tableau 9.1.

$\omega$	$\ h_1\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$	$\ \text{div}(h_1)\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \text{rot}(h_1)\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$
0	0,000000	0,000000	0,000000
$10^2$	$0,712733 \times 10^{-17}$	$0,101683 \times 10^{-22}$	$0,352201 \times 10^{-15}$
$10^4$	$0,712733 \times 10^{-13}$	$0,101683 \times 10^{-18}$	$0,352201 \times 10^{-11}$
$10^6$	$0,712733 \times 10^{-09}$	$0,101683 \times 10^{-14}$	$0,352201 \times 10^{-07}$
$10^8$	$0,712767 \times 10^{-05}$	$0,101683 \times 10^{-10}$	$0,352217 \times 10^{-03}$
$10^{10}$	0,137962	$0,102104 \times 10^{-06}$	6,66654
$10^{12}$	0,198073	67,1046	215,716

TAB. 9.1 – norme  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de  $h_1$ ,  $\text{div} h_1$  et  $\text{rot} h_1$  pour différents  $\omega$

On constate tout d'abord que, mis à part le cas  $\omega = 10^{12}$ , toutes les solutions sont bien à divergence nulle. De plus, pour le cas  $\omega = 0$  où il n'y a pas de courants de déplacement, on trouve bien  $h_1 \equiv 0$ , c'est-à-dire  $h_{tot,1} \equiv \check{h}_1$ . Pour  $\omega = 10^2, 10^4$  et  $10^6$ , les chiffres significatifs de  $\|h_1\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$  sont identiques car le coefficient  $\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$  est négligeable devant 1 et les intégrales avec le rotationnel et la divergence sont prépondérantes dans le problème (9.13). À partir de  $\omega = 10^8$ , le coefficient  $\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$  devient du même ordre de grandeur puis prépondérant, ce qui explique les variations de la norme  $\|h_1\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$ . Dans le cas  $\omega = 10^{12}$ , le champ  $h_1$  devient très oscillant car le coefficient

$$-\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = -\frac{10^8}{9} \simeq -10^7$$

est prépondérant et de signe opposé au coefficient devant l'intégrand avec les rotationnels.

Dans un second temps, on a fixé  $\omega = 10^8$ , c'est-à-dire la première valeur pour laquelle la perturbation  $h_1$  devient non négligeable, et on a fait varier  $S$ . Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 9.2.

$S$	$\ h_1\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{div}(h_1)\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{rot}(h_1)\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$
$10^{-2}$	$0,712\,767 \times 10^{-05}$	$0,534164 \times 10^{-10}$	$0,352217 \times 10^{-03}$
$10^0$	$0,712\,767 \times 10^{-05}$	$0,101683 \times 10^{-10}$	$0,352217 \times 10^{-03}$
$10^2$	$0,712\,767 \times 10^{-05}$	$0,157061 \times 10^{-11}$	$0,352217 \times 10^{-03}$

TAB. 9.2 – norme  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de  $h_1$ ,  $\operatorname{div} h_1$  et  $\operatorname{rot} h_1$  pour différents  $S$

Les résultats du tableau 9.2 montrent que le problème (9.13) est bien indépendant de la valeur de  $S$  et constitue donc une bonne illustration de la théorie développée dans le chapitre 7.

### 9.4.2 Antenne dans un milieu conducteur

On va maintenant s'intéresser au cas où l'antenne est plongée dans un milieu ambiant de conductivité électrique  $\sigma \equiv \sigma_0 > 0$ . Dans ce cas-là, l'hypothèse  $h_1 \times n = \check{h}_1 \times n$  sur  $\Gamma_1$  n'a plus de sens physique. Cependant ce cas est intéressant car il va permettre de mettre en évidence le phénomène d'effet de peau et de valider le code de calcul lorsque  $\sigma$  est non nul.

La profondeur de pénétration des champs électrique et magnétiques, aussi appelée épaisseur de peau, est donnée par l'expression

$$(9.14) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}.$$

Dans toutes les expériences qui suivent,  $\omega$  est constant égal à  $10^8$ . On a regroupé dans le tableau 9.3 les valeurs de  $\delta$  (en cm) pour différentes valeurs de  $\sigma_0$ .

$\sigma_0$	1	10	40	$10^2$	$10^3$	$10^4$
$\delta$	12,616	3,989	1,994	1,261	0,399	0,126

TAB. 9.3 – valeurs de  $\delta$  pour différents  $\sigma_0$

Pour  $\sigma_0 \geq 10$ ,  $\delta$  est supérieur ou égal au rayon de l'antenne donc on a choisi de faire des simulations pour  $\sigma_0 \in \{40, 10^2, 10^3, 10^4\}$ . Par analogie avec la section précédente, dans toutes les simulations qui suivent,

$$s = \frac{S}{\mu_0^2(i\varepsilon_0\omega - \sigma_0)},$$

où  $S$  est une constante réelle donnée et on a résolu le problème suivant :

$$(9.15) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } h_1 \in \mathcal{E}_1 \text{ tel que : } \forall h' \in \mathcal{E}_1, \\ & \int_{\Omega^*} \operatorname{rot}_{r,z}^1 h_1 \cdot \operatorname{rot}_{r,z}^1 h' r dr dz + \int_{\Omega^*} S \operatorname{div}_{r,z}^1 h_1 \overline{\operatorname{div}_{r,z}^1 h'} r dr dz \\ & - (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + i\omega \mu_0 \sigma_0) \int_{\Omega^*} h_1 \cdot h' r dr dz = (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + i\omega \mu_0 \sigma_0) \int_{\Omega^*} \check{h}_1 \cdot h' r dr dz. \end{aligned}$$

Comme dans la section précédente, pour de grandes valeurs de  $\sigma$ , il va falloir prendre  $S > 1$  pour obtenir une divergence petite. Dans un premier temps, on a fixé  $S$  à 1 et on a fait varier  $\sigma$ . Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 9.4.

$\sigma_0$	$\ h_1\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{div}(h_1)\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{rot}(h_1)\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$
40	0,138	$0,466 \times 10^{-06}$	7,434
$10^2$	0,157	$0,125 \times 10^{-05}$	9,842
$10^3$	0,177	$0,212 \times 10^{-04}$	19,377
$10^4$	0,183	$0,617 \times 10^{-03}$	35,396

TAB. 9.4 – norme  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de  $h_1$ ,  $\operatorname{div} h_1$  et  $\operatorname{rot} h_1$  pour différents  $\sigma$

**Remarque 9.4.1 :**

Combinés à  $\|\check{h}_1\|_{L^2(\Omega^*)} = 0,186$ , les résultats du tableau 9.4 suggèrent les conjectures suivantes :

$$\begin{cases} h_1 \xrightarrow[\sigma_0 \rightarrow +\infty]{} \check{h}_1 \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega^*), \\ \|\operatorname{rot}(h_1)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega^*)} \text{ se comporte comme } C\sigma_0^{1/4}. \end{cases}$$

Même si la divergence n'est pas aussi petite que dans le cas  $\sigma \equiv 0$ , les résultats du tableau 9.4 sont satisfaisants car la norme de la divergence est nettement inférieure à celle du rotationnel. Pour obtenir des normes de l'ordre de  $10^{-6}$ , il suffit de prendre des valeurs plus grandes pour  $S$ , comme le montre les tableaux 9.5 et 9.6.

$S$	$\ h_1\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{div}(h_1)\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{rot}(h_1)\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$
$10^0$	0,157	$0,125 \times 10^{-05}$	9,842
$10^2$	0,157	$0,261 \times 10^{-06}$	9,842
$10^4$	0,157	$0,408 \times 10^{-08}$	9,842
$10^6$	0,157	$0,444 \times 10^{-10}$	9,842

TAB. 9.5 – norme  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de  $h_1$ ,  $\operatorname{div} h_1$  et  $\operatorname{rot} h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^2$

$S$	$\ h_1\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{div}(h_1)\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \operatorname{rot}(h_1)\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$
$10^0$	0,177	$0,212 \times 10^{-04}$	19,377
$10^4$	0,177	$0,220 \times 10^{-06}$	19,377
$10^6$	0,177	$0,267 \times 10^{-08}$	19,377
$10^8$	0,177	$0,302 \times 10^{-10}$	19,377

TAB. 9.6 – norme  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de  $h_1$ ,  $\operatorname{div} h_1$  et  $\operatorname{rot} h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^3$

On n'a pas indiqué ici les résultats dans le cas  $\sigma_0 = 10^4$ , mais on observe le même phénomène. Comme précédemment, on peut dire que le problème axisymétrique (8.22) est indépendant de  $S$  et que la solution  $h_1$  est à divergence nulle pour tout  $S \geq S_0(\sigma_0)$ . Afin de vérifier que les solutions obtenues pour deux valeurs de  $S$  distinctes sont similaires et non deux applications différentes ayant la même norme,

on a représenté sur les figures 74, 75 et 76, la solution  $h_1$  associée aux données  $\sigma_0 = 10^2$  et  $S = 10^2, 10^4$  et  $10^6$  (les trois figures ont la même échelle).

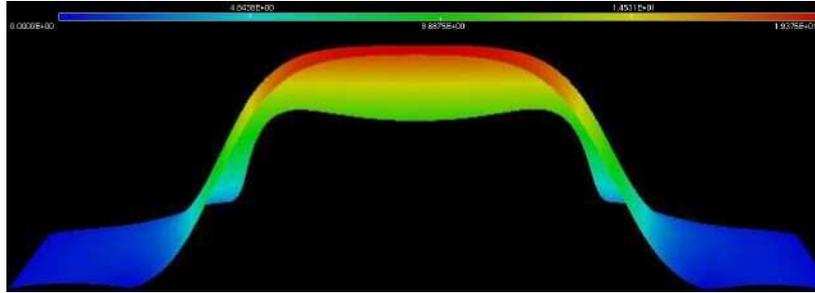


FIG. 74 – norme  $l^2$  de  $h_1$  pour  $S = 10^2$

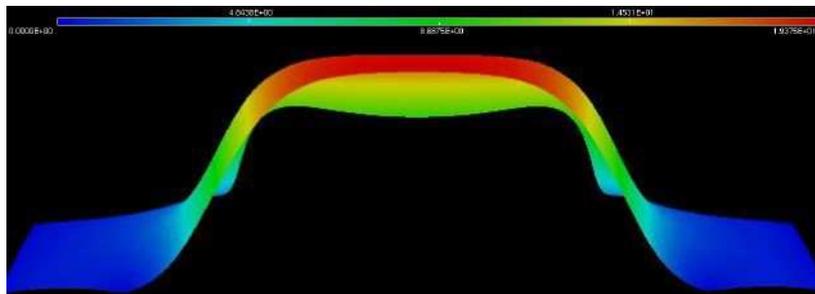


FIG. 75 – norme  $l^2$  de  $h_1$  pour  $S = 10^4$

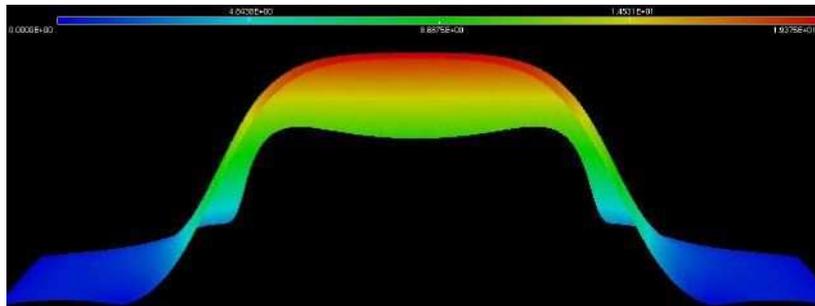


FIG. 76 – norme  $l^2$  de  $h_1$  pour  $S = 10^6$

On va maintenant s'attacher à mettre en évidence le phénomène d'effet de peau pour les champs magnétiques et électriques. Dans le cas du champ magnétique, c'est le coefficient de Fourier d'indice 1 du champ total,  $h_{tot,1}$ , et non la solution  $h_1 = h_{tot,1} - \check{h}_1$  du problème (8.22) qu'il faut considérer. On a représenté sur les figures 77, 78, 79 et 80 la norme  $l^2$  de  $h_{tot,1}$  pour  $\sigma_0$  valant respectivement 40,  $10^2$ ,  $10^3$  et  $10^4$  en gardant les mêmes échelles. On a représenté aussi le maillage d'interpolation utilisé par MEDIT pour faire la représentation afin d'avoir une idée de la pénétration du champ magnétique. Il faut noter que l'interpolation utilisée pour faire les calculs est une interpolation  $\mathbb{Q}_{10}$  aux abscisses de Gauss-Lobatto donc le quadrillage n'est pas uniforme dans la direction des  $r$ . Pour fixer les idées, les traits horizontaux au centre correspondent à  $r = 2$  cm et la subdivision en haut à

$r = 3,5$  cm.

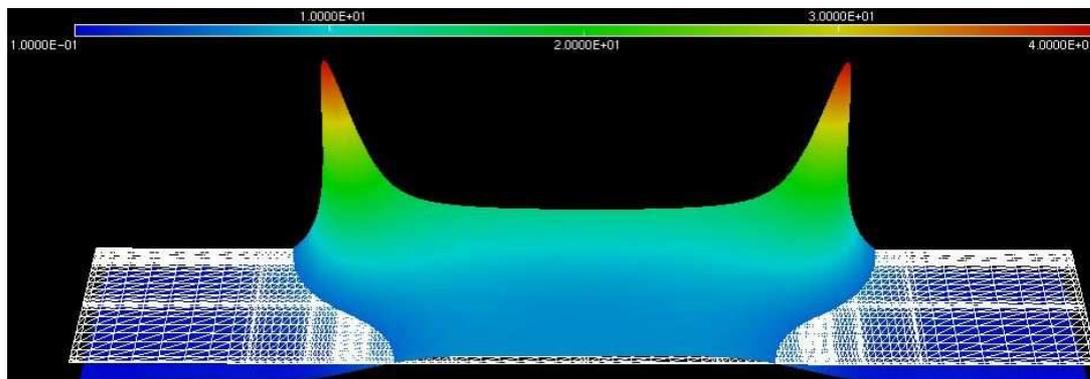


FIG. 77 – norme  $l^2$  de  $h_{tot,1}$  pour  $\sigma_0 = 40$

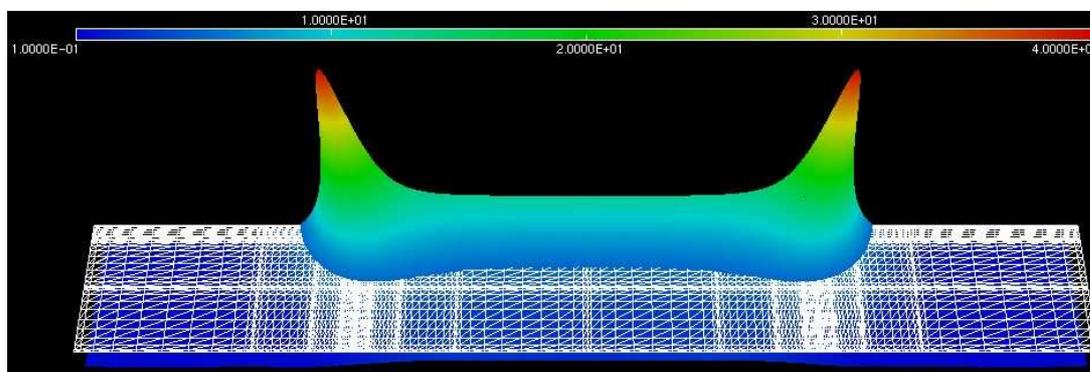


FIG. 78 – norme  $l^2$  de  $h_{tot,1}$  pour  $\sigma_0 = 10^2$

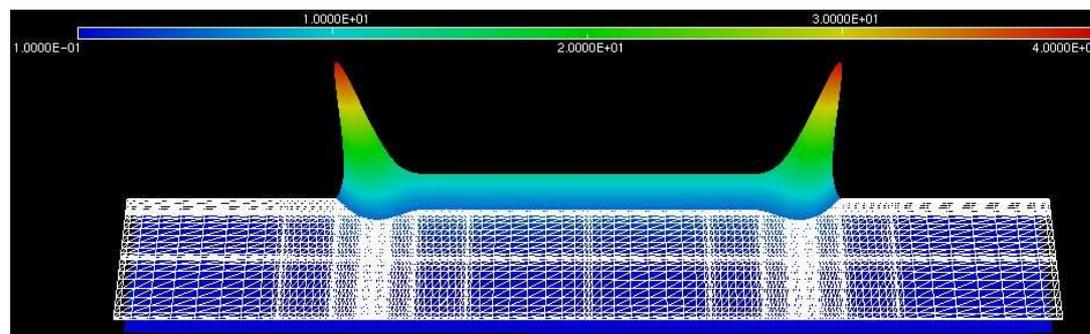


FIG. 79 – norme  $l^2$  de  $h_{tot,1}$  pour  $\sigma_0 = 10^3$

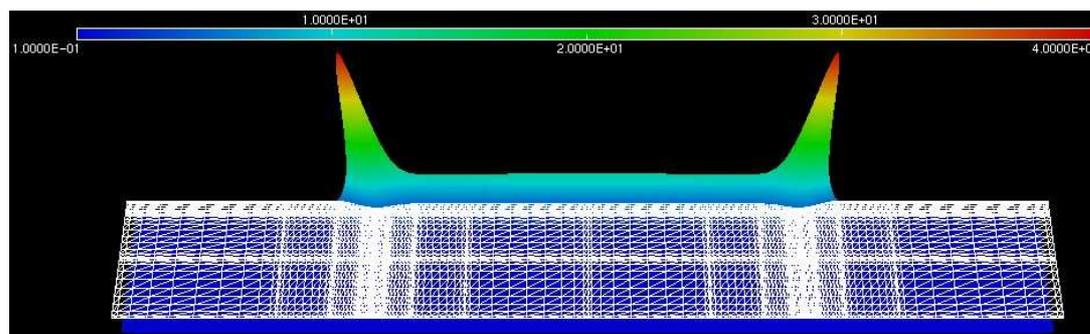


FIG. 80 – norme  $l^2$  de  $h_{tot,1}$  pour  $\sigma_0 = 10^4$

Les quatre figures précédentes constituent une bonne illustration du phénomène d'effet de peau pour le champ magnétique. De plus, on retrouve à peu près les valeurs de  $\delta$  du tableau 9.3.

Pour montrer l'effet de peau du champ électrique, on utilise la relation

$$e = \frac{1}{i\varepsilon_0\omega - \sigma_0} \text{rot } h.$$

Ainsi, on a représenté sur les figures 81, 82, 83 et 84 la norme  $l^2$  de

$$\text{rot}_{r,z}^1 h_1 = \text{rot}_{r,z}^1 h_{tot,1},$$

pour  $\sigma_0$  valant respectivement 40,  $10^2$ ,  $10^3$  et  $10^4$  en gardant les mêmes échelles.

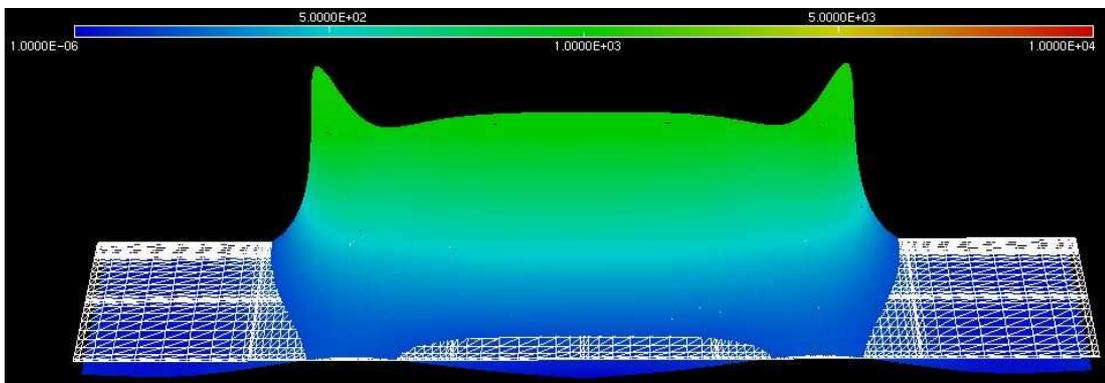


FIG. 81 – norme  $l^2$  de  $\text{rot}_{r,z}^1 h_1$  pour  $\sigma_0 = 40$

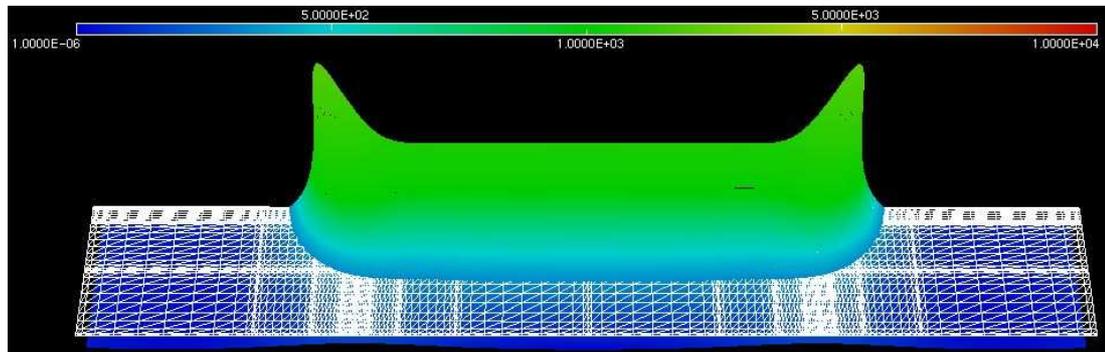


FIG. 82 – norme  $l^2$  de  $\text{rot}_{r,z}^1 h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^2$

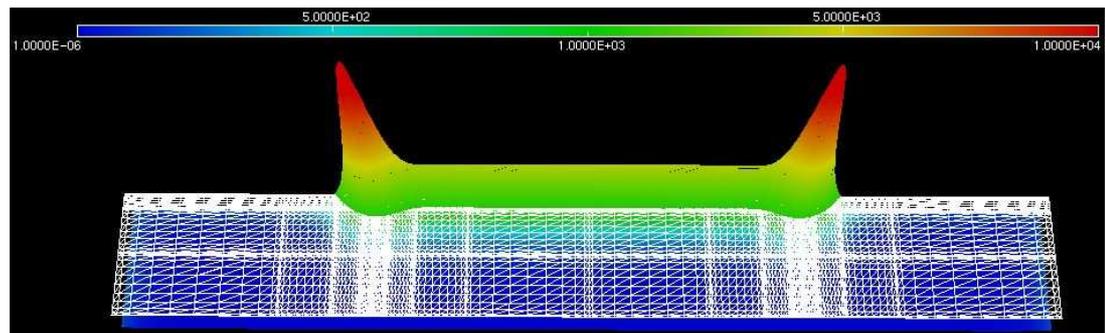


FIG. 83 – norme  $l^2$  de  $\text{rot}_{r,z}^1 h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^3$

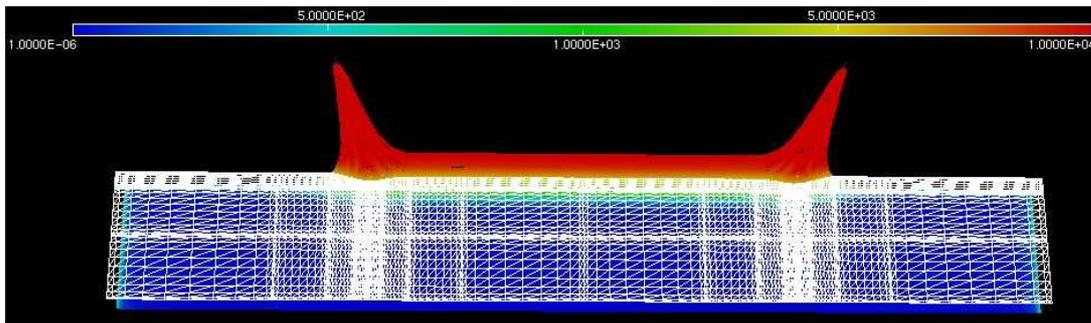


FIG. 84 – norme  $l^2$  de  $\text{rot}_{r,z}^1 h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^4$

Les quatre figures précédentes constituent une bonne illustration du phénomène d'effet de peau pour le champ électrique. De plus, on retrouve à peu près les valeurs de  $\delta$  du tableau 9.3.

Pour conclure cette section consacré au milieu ambiant conducteur, on va s'intéresser aux composantes du champ électrique dans le cas  $\sigma_0 = 10^2$ . Pour cela, on a représenté leurs modules respectifs sur les figures 85, 86 et 87.

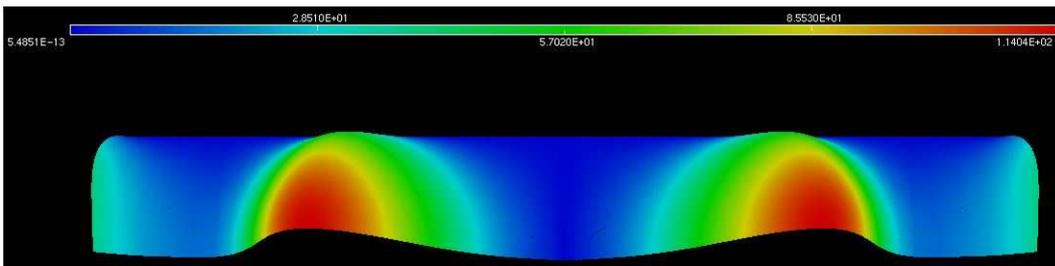


FIG. 85 – module de la composante suivant  $r$  de  $\text{rot}_{r,z}^1 h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^2$

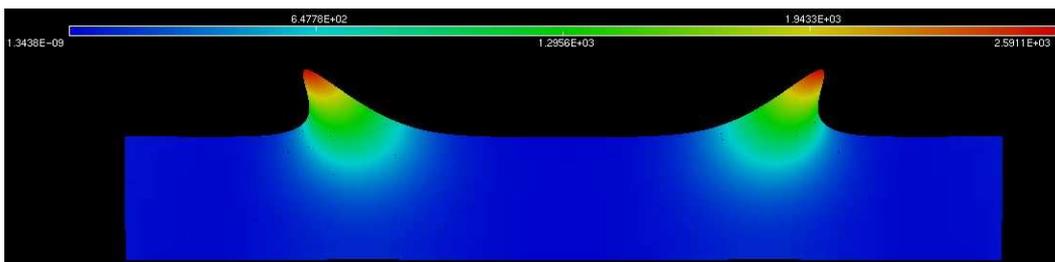


FIG. 86 – module de la composante suivant  $\theta$  de  $\text{rot}_{r,z}^1 h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^2$

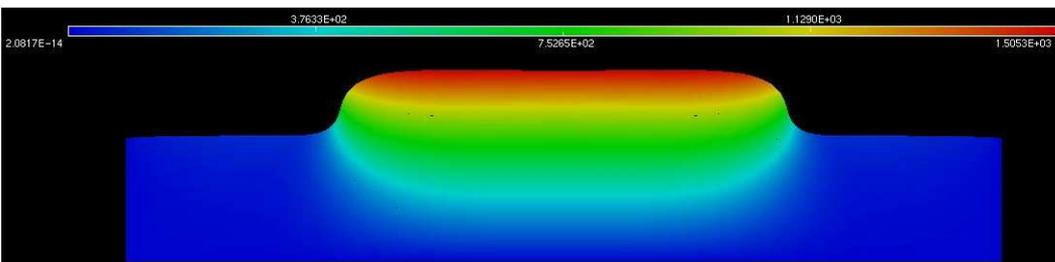


FIG. 87 – module de la composante suivant  $z$  de  $\text{rot}_{r,z}^1 h_1$  pour  $\sigma_0 = 10^2$

On voit bien sur la figure 86 l'influence des anneaux qui créent un courant, et donc un champ électrique, dans la direction  $\theta$ . De même, la figure 87 met en évidence

l'influence des branches qui crée un courant, et donc un champ électrique, dans la direction  $z$ . Ce dernier point est confirmé par la figure qui représente le module de la composante suivant  $z$  du champ électrique dans le plan  $\theta = \pi/N$ . Contrairement à la figure 87, on ne voit plus un pic du module en haut au voisinage de l'antenne.

### 9.4.3 Cas réaliste

Dans cette dernière section, on va considérer un cas plus réaliste : on suppose que le domaine  $\Omega^*$  se compose d'un rectangle intérieur  $\Omega_m^*$  entouré d'air. Le domaine  $\Omega_m^*$  représente un conducteur dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_m &= \varepsilon_0, \\ \mu_m &= \mu_0, \\ \sigma_m &= 10^4. \end{cases}$$

Ce modèle constitue une première approche d'un examen IRM d'un implant métallique.

Pour le domaine  $\Omega_m^*$ , on a choisi un rectangle de largeur 5 mm et de longueur 7,2 cm centrée en  $z = 0$ . On a conservé le même maillage que dans les simulations précédentes : le domaine  $\Omega_2^*$  est déterminé à l'aide de la fonction  $\sigma$  dans MÉLINA.

On a représenté sur la figure 88 la norme  $l^2$  du coefficient de Fourier d'indices 1 de la solution du problème (8.22) pour  $\omega = 10^8$ . Pour la fonction  $s$ , d'après les simulations précédentes, on a pris

$$s = \frac{100(1 + \sigma)}{i\varepsilon\omega - \sigma}$$

afin d'avoir un coefficient plus important dans la partie avec le métal que dans l'air.

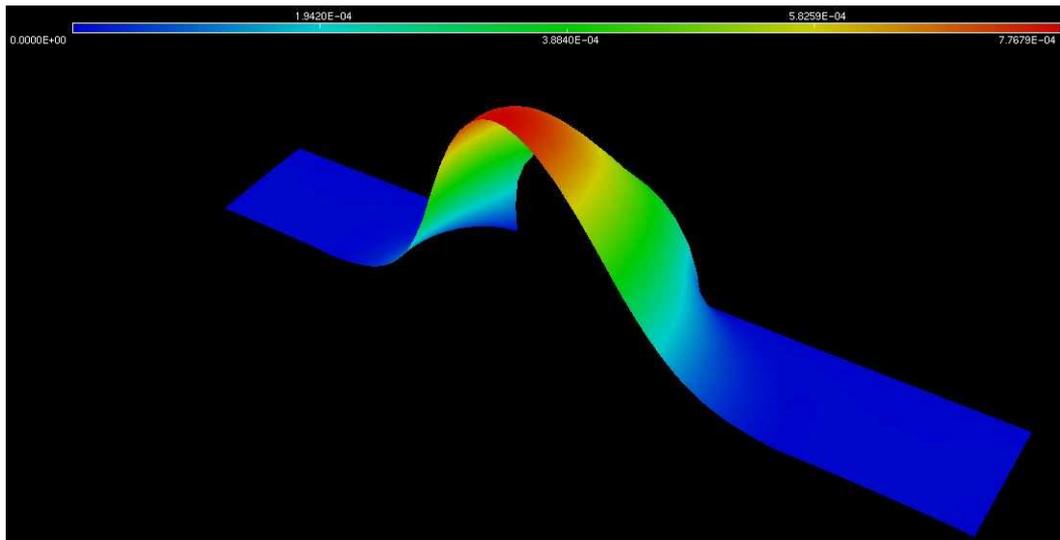


FIG. 88 – norme  $l^2$  de  $h_1$  pour  $\omega = 10^8$

On constate que le coefficient de Fourier  $\check{h}_1$  est de norme de l'ordre de  $10^{-4}$  sur le bord  $\Gamma_1$  de  $\Omega^*$ . Autrement dit,  $\check{h}_1$  est peu perturbé par la présence du métal et l'hypothèse  $h_1 \times n = 0$  sur  $\Gamma_1$  est satisfaite.

Afin de vérifier la nullité de la divergence de la solution, on a représenté son module sur la figure 89 et indiqué sa norme  $L^2(\Omega^*)$  dans le tableau 9.7.

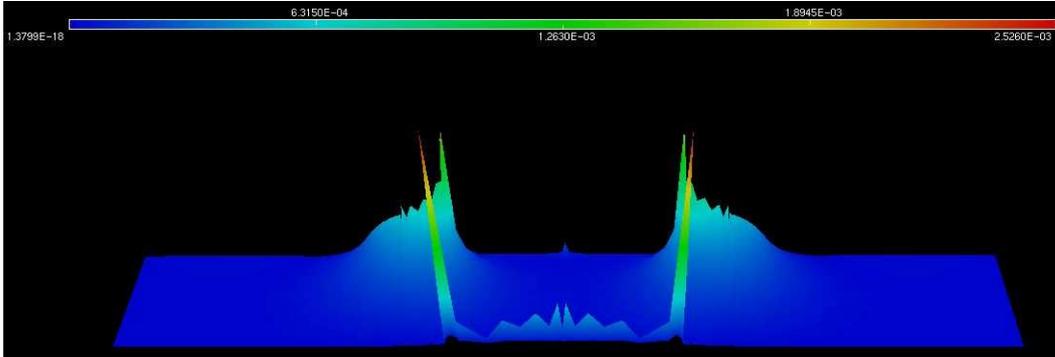


FIG. 89 – module de  $\text{div } h_1$  pour  $\omega = 10^8$

$\ h_1\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$	$\ \text{div}(h_1)\ _{L^2(\Omega^*)}$	$\ \text{rot}(h_1)\ _{\mathbb{L}^2(\Omega^*)}$
$0,385 \times 10^{-05}$	$0,278 \times 10^{-05}$	$0,233 \times 10^{-03}$

TAB. 9.7 – norme  $\mathbb{L}^2(\Omega^*)$  de  $h_1$ ,  $\text{div } h_1$  et  $\text{rot } h_1$  pour  $\omega = 10^8$

On vérifie sur la figure 89 et le tableau 9.7 que la norme est bien petite. Par contre, contrairement aux cas  $\sigma \equiv 0$  et  $\sigma \equiv \sigma_0 > 0$ , on observe l'apparition de phénomènes numériques le long de la frontière du métal sur l'axe. On observe aussi ce phénomène sur  $\text{rot } h_1$  (voir la figure 90).

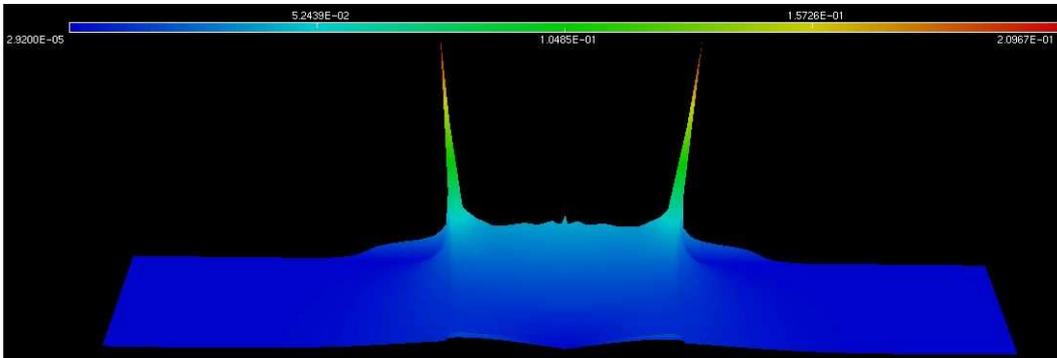


FIG. 90 – norme  $l^2$  de  $\text{rot } h_1$  pour  $\omega = 10^8$

Pour conclure ce chapitre, on revient sur le choix de la fonction  $s$  pour les simulations numériques lorsque  $\sigma$  est variable. Différents calculs ont montré qu'une fonction  $s$  de la forme

$$s = \frac{S}{i\varepsilon\omega - \sigma},$$

choix inspiré des exemples dans le cas  $\sigma$  constant, n'est pas un choix pertinent. En effet, les phénomènes numériques observés le long de l'axe dans ce cas sont beaucoup plus importants. De plus, la solution  $h_1$  n'est alors plus négligeable sur le bord  $\Gamma_1$ .

Par ailleurs, si on garde le choix de  $s$  effectué pour  $\omega = 10^8$  et que l'on pose  $\omega = 10^9$  ou  $10^{10}$ , on constate que le champ  $h_1$  devient non négligeable sur le bord et que sa divergence croît avec  $\omega$ . Il est donc aussi nécessaire de prendre en compte la valeur de  $\omega$  dans le choix de  $s$ .

---

Les simulations dans le cas réaliste montrent bien la difficulté de résoudre un problème lorsque de nombreux paramètres entrent en jeu. La méthode de résolution des problèmes axisymétriques est validée. Une étude plus approfondie concernant le choix des paramètres est actuellement en cours.



## Conclusion de la partie 2

### Chapitre 6

À l'aide de la théorie des opérateurs monotones dans un espace de Hilbert, on a montré que le problème étudié est bien posé : il admet une solution unique dans  $(\mathbb{H}(\text{rot}; \Omega))^2$ . De plus, on a pu établir une estimation de l'erreur commise en approchant cette solution par la solution du problème harmonique associé. Une analyse complémentaire s'avère nécessaire afin d'affiner cette majoration et d'obtenir un résultat de convergence vers zéro pour des temps longs.

### Chapitre 7

En régularisant l'équation harmonique en  $h$  et en utilisant la théorie de Fredholm, on a pu montrer que le problème harmonique admet une solution unique. De plus, celle-ci est à divergence nulle.

### Chapitre 8

Le chapitre 8 a permis de montrer que le problème harmonique tridimensionnel est équivalent à une série de problèmes bidimensionnels découplés en utilisant l'axi-symétrie du domaine. On a aussi montré que chaque problème bidimensionnel est bien posé.

### Chapitre 9

On montre tout d'abord que les différentes hypothèses nécessaires à l'étude menée dans les chapitres précédents sont justifiées.

On a aussi déterminé l'expression des coefficients de Fourier du champ radiofréquence. On a notamment montré que seuls ceux d'indice  $n = 1 + kN$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  sont non nuls.

La dernière partie du chapitre 9 est consacrée aux simulations numériques. Celles-ci confortent l'étude théorique des coefficients de Fourier : on a pu vérifier que les coefficients d'indice  $n \neq 1 + kN$  sont nuls et que ceux d'indice  $n = 1 + kN$  sont à divergence et à rotationnel nuls. De plus, l'étude de la convergence de la série de Fourier a montré que le problème tridimensionnel du chapitre 7 est approché avec une erreur de l'ordre de  $10^{-6}$  en résolvant 9 problèmes bidimensionnels.

Les simulations lorsque l'antenne est placée dans le vide ou dans un milieu conducteur confirment les résultats théoriques obtenus dans les chapitres 7 et 8. Ils permettent aussi de mettre en évidence le phénomène d'épaisseur de peau lorsque la

conductivité du milieu augmente ainsi que l'influence des anneaux et des branches sur le champ électrique.

Enfin, les simulations dans le cas plus réaliste constitué d'un implant métallique entouré d'air montrent que les champs électriques et magnétiques ne sont pas perturbés au voisinage du bord  $\Gamma_1$  par la présence du métal, ce qui valide la condition aux limites  $h_{tot} \times n = \check{h} \times n$  sur  $\Gamma_1$ . On est maintenant en mesure de mener une étude en fonction des différents paramètres afin de retrouver les phénomènes de résonance des champs électriques et magnétiques observés dans la littérature. Par ailleurs, une étude théorique et numérique supplémentaire s'avère nécessaire pour comprendre les phénomènes numériques observés sur la divergence et le rotationnel le long de la frontière de l'implant.

## Conclusion générale et perspectives

L'étude du fonctionnement de l'antenne cage d'oiseau et du champ magnétique radiofréquence généré, menée dans la première partie de ce travail, constitue une base mathématique de référence pour l'étude des antennes dans le domaine de l'IRM.

À l'aide des techniques développées, on est en mesure d'étudier l'homogénéité du champ radiofréquence pour d'autres types d'antennes.

Des modifications mineures du code de calcul peuvent servir à la conception de nouvelles antennes IRM en réalisant la cartographie de leur champ radiofréquence.

Concernant la deuxième partie de ce travail, on est maintenant en possession de tous les éléments pour réaliser un code de calcul de l'évolution de la température de l'objet métallique : l'étape suivante consiste à relier le code axisymétrique développé à un code résolvant l'équation de la chaleur.

Afin de ne pas avoir à mailler l'implant métallique qui est de faible largeur, une étude théorique et numérique du problème obtenu en remplaçant le métal par la condition aux limites du conducteur parfait semble intéressante. Concernant la partie numérique, l'essentiel du code est déjà écrit ; il reste à ajouter la condition conducteur parfait sur la frontière du métal. La partie théorique nécessite l'utilisation de nouvelles techniques liées au développement asymptotique. Cependant, il est raisonnable de penser que les différents termes du développement asymptotique vont être solutions de problèmes similaires à celui étudié dans ce travail. Les résultats d'existence et d'unicité pourront donc être réutilisés, diminuant ainsi l'investissement théorique nécessaire.

L'étude théorique du problème thermique est quant à elle plus délicate. En effet, le terme source de l'équation de la chaleur est constitué des pertes par effet Joule qui est peu régulier. L'existence et l'unicité d'une solution au problème thermique nécessite donc une étude théorique supplémentaire.



# Annexes



## Annexe A

# Rappels sur les matrices circulantes

Dans ce chapitre, on va énoncer quelques résultats concernant les matrices circulantes. On trouve une étude plus complète des matrices circulantes dans [35].

### A.1 Matrices de Fourier

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1 et  $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Soient  $j$  et  $k$  deux entiers naturels. La somme des puissances de  $w^{(j-k)}$  vérifie l'égalité suivante :

$$(A.1) \quad \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} w^{r(j-k)} = \delta_{j,k}$$

où  $\delta_{j,k}$  désigne le symbole de Kronecker, défini par :  $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

La matrice de Fourier de rang  $n$ ,  $F$ , est définie par :

$$(A.2) \quad F = \frac{1}{\sqrt{n}} (\bar{w}^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j, k \leq n}.$$

On note  $F^*$  la matrice transposée conjuguée de  $F$  :

$$(A.3) \quad F^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

et

$$(A.4) \quad \mathcal{B} = (C_0, \dots, C_{n-1})$$

la famille composée des  $n$  vecteurs colonnes de  $F^*$ .

On a les résultats suivants concernant les puissances de  $F$  et  $F^*$  :

**Théorème A.1.1 : puissances de la matrice de Fourier**

$F$  est une matrice unitaire.

De plus, on a les égalités suivantes :

$$F^2 = (F^*)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^4 = (F^*)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Les différentes égalités s'obtiennent en utilisant la relation (A.1). Les calculs ne présentent aucune difficulté et sont laissés au lecteur. ■

**Remarque A.1.2** Tous les résultats énoncés sont encore vrais si on prend  $w^k$  avec  $2 \leq k \leq n-1$  au lieu de  $w$  dans la définition de la matrice de Fourier.

## A.2 Matrices circulantes

On appelle matrice circulante d'ordre  $n$  une matrice de la forme suivante :

$$(A.5) \quad M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont  $n$  nombres complexes.

On lui associe le polynôme  $p_M$  défini par :

$$p_M(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}.$$

Les matrices circulantes sont les matrices diagonalisables par  $F$ . En effet, on a le résultat suivant :

**Théorème A.2.1 : diagonalisation des matrices circulantes**

Les matrices circulantes d'ordre  $n$  sont les matrices de la forme :

$$(A.6) \quad M = F^* \Lambda_M F \text{ où } \Lambda_M = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$$

où  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  sont  $n$  nombres complexes.

Plus précisément,

- si  $M$  est une matrice circulante, les valeurs propres de  $M$  sont les  $\lambda_j = p_M(w^j)$  pour  $j = 0, \dots, n-1$  et les colonnes de  $F^*$  sont des vecteurs propres associés.
- si la matrice  $M$  est donnée par la formule (A.6), alors ses coefficients  $a_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  de l'égalité (A.5) sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} F \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION.

► Soient  $M$  une matrice circulante d'ordre  $n$  et  $f$  l'application linéaire associée dans la base canonique.

Comme  $F^*$  est inversible,  $\mathcal{B}$ , la famille composée des  $n$  vecteurs colonnes de  $F^*$ , est une base de  $\mathbb{C}^n$ . On va montrer que  $\Lambda_M$  est la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq j \leq n-1, MC_j &= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w^j \\ \vdots \\ w^{j(n-1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} a_0 + a_1 w^j + \cdots + a_{n-1} w^{j(n-1)} \\ w^j [a_0 + a_1 w^j + \cdots + a_{n-1} w^{j(n-1)}] \\ \vdots \\ w^{j(n-1)} [a_0 + a_1 w^j + \cdots + a_{n-1} w^{j(n-1)}] \end{pmatrix} \\ &= p_M(w^j) C_j. \end{aligned}$$

Les  $p_M(w^j)$  sont donc des valeurs propres de  $M$  et les  $C_j$  sont des vecteurs propres associés. Comme  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ , il n'existe pas d'autres valeurs propres de  $M$ . En effet, soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$  et  $K$  un vecteur propre non nul associé. On décompose le vecteur  $K$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$K = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j C_j.$$

Comme  $MK = \lambda K$ , on obtient :

$$\forall 0 \leq j \leq n-1, \alpha_j (\lambda - \lambda_j) = 0.$$

Le vecteur  $K$  étant non nul, il existe  $j$  tel que  $\alpha_j \neq 0$ . D'où :

$$\exists 0 \leq j \leq n-1, \lambda = \lambda_j.$$

Dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $f$  a donc pour matrice  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$  avec  $\lambda_j = p_M(w^j)$  pour  $j = 0, \dots, n-1$ . D'après la formule de changement de base,  $\Lambda = (F^*)^{-1} M F^*$ . Comme  $F^*$  est unitaire, on obtient :  $M = F^* \Lambda F$ .

► Réciproquement, soit  $M$  une matrice de la forme (A.6) :

$$M = F^* \Lambda F.$$

où  $\Lambda$  est la matrice diagonale composée de  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ .

On se donne  $n$  complexes  $a_0, \dots, a_{n-1}$  et on considère le polynôme associé :

$$(A.7) \quad p = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{C}[X].$$

On remarque que :

$$F^* \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} p(w^0) \\ \vdots \\ p(w^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,  $b_0, \dots, b_{n-1}$  étant  $n$  complexes donnés, trouver un polynôme  $p$  de  $\mathbb{C}[X]$  de degré inférieur à  $n - 1$  de la forme (A.7) est équivalent à résoudre

$$(A.8) \quad F^* \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme  $F^*$  est inversible d'inverse  $F$ , (A.8) admet une unique solution et les coefficients du polynôme  $p$  sont donnés par :

$$(A.9) \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} F \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit  $D$  la matrice circulante associée aux coefficients  $a_0, \dots, a_{n-1}$  définis par (A.9) avec  $b_j = \lambda_j$ . D'après la première partie de la démonstration, on a :

$$D = F^* \Lambda_D F = F^* \Lambda F = M.$$

La matrice  $M$  est donc une matrice circulante et ses coefficients vérifient la relation annoncée. ■

Du théorème sur la diagonalisation des matrices circulantes on déduit les propriétés suivantes concernant le produit des matrices circulantes :

**Proposition A.2.2 : produit des matrices circulantes**

*Toutes les matrices circulantes du même ordre commutent.*

*Le produit de deux matrices circulantes est une matrice circulante.*

*L'inverse, s'il existe, d'une matrice circulante est une matrice circulante.*

DÉMONSTRATION. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices circulantes d'ordre  $n$ .

► D'après le théorème (A.2.1), on a :

$$A = F^* \Lambda_A F \text{ et } B = F^* \Lambda_B F.$$

D'où,  $F^*$  étant unitaire :

$$\begin{aligned} AB &= (F^* \Lambda_A F)(F^* \Lambda_B F) \\ &= F^* \Lambda_A \Lambda_B F \\ &= F^* \Lambda_B \Lambda_A F \\ &= BA. \end{aligned}$$

► Comme  $AB = F^* \Lambda_B \Lambda_A F$  et que la matrice  $\Lambda_A \Lambda_B$  est diagonale, la matrice  $AB$  est elle aussi une matrice circulante (voir le théorème (A.2.1)).

► Par hypothèse,  $A$  est inversible. Alors  $\det(A) = \det(\Lambda_A) \neq 0$  et les valeurs propres  $\lambda_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$  de  $A$  sont toutes non nulles.

On pose  $L = \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda_0}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}} \right)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} A(F^* L F) &= F^* \Lambda_A L F \\ &= Id. \end{aligned}$$

où  $Id$  est la matrice identité de  $\mathbb{C}^n$ .

D'où  $A$  est inversible d'inverse  $A^{-1} = F^* L F$ . Comme  $L$  est une matrice diagonale,  $A^{-1}$  est une matrice circulante. ■

On déduit de la diagonalisation des matrices circulantes le résultat suivant :

**Proposition A.2.3 : résolution du problème aux valeurs propres**

*Soient  $A$  et  $B$  deux matrices circulantes d'ordre  $n$ .*

*Alors, le problème aux valeurs propres :*

$$(A.10) \quad \text{Trouver } (\lambda, K \neq 0) \text{ tel que } AK = \lambda BK$$

*est équivalent à trouver  $(\lambda, \alpha \neq 0)$  tel que :*

$$\text{diag}(\lambda_0^A - \lambda \lambda_0^B, \dots, \lambda_{n-1}^A - \lambda \lambda_{n-1}^B) \alpha = 0,$$

*$\alpha$  et  $K$  étant liés par la relation  $\alpha = FK$ .*

DÉMONSTRATION. Par ce qui précède on a :

$$A = F^* \Lambda_A F, \quad B = F^* \Lambda_B F,$$

$\Lambda_A$  et  $\Lambda_B$  étant des matrices diagonales.

Ainsi le problème aux valeurs propres (A.10) s'écrit de façon équivalente :

$$F^* \Lambda_A F K = F^* \Lambda_B F K$$

ou encore

$$F^* (\Lambda_A - \Lambda_B) F K = 0.$$

On décompose  $K$  dans la base  $\mathcal{B} = (C_0, \dots, C_{n-1})$  des vecteurs colonnes de  $F^*$  :

$$K = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k C_k.$$

Ainsi, en appliquant  $F$  à  $K$ , on obtient :

$$FK = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k FC_k = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc :

$$F^*(\Lambda_A - \Lambda_B) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice  $F^*$  étant inversible, le problème aux valeurs propres se réduit à trouver  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}^n$  non identiquement nul avec

$$\text{diag}(\lambda_0^A - \lambda \lambda_0^B, \dots, \lambda_{n-1}^A - \lambda \lambda_{n-1}^B) \alpha = 0.$$

■

La proposition suivante décrit précisément les solutions du problème (A.10) introduit dans A.2.3.

**Proposition A.2.4 : solutions du problème aux valeurs propres**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices circulantes d'ordre  $n$ .

On note  $\lambda_k^A$  (respectivement  $\lambda_k^B$ ) les valeurs propres de  $A$  (respectivement  $B$ ) et :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \{0 \leq k \leq n-1 \mid \lambda_k^A = \lambda_k^B = 0\}, \\ K_2 = \{0 \leq k \leq n-1 \mid \lambda_k^B \neq 0\}, \\ \text{pour } k \in K_2, J_k = \left\{ j \in K_2 \mid \frac{\lambda_j^A}{\lambda_j^B} = \frac{\lambda_k^A}{\lambda_k^B} \right\}. \end{array} \right.$$

Les couples  $(\lambda, K)$  solutions de l'équation  $AK = \lambda BK$  sont les éléments de :

$$E = [\mathbb{C} \times \text{Vect}(C_p)_{p \in K_1}] \cup \left[ \bigcup_{k \in K_2} \left\{ \frac{\lambda_k^A}{\lambda_k^B} \right\} \times \left( \text{Vect}(C_j)_{j \in J_k} \oplus \text{Vect}(C_p)_{p \in K_1} \right) \right].$$

où  $\text{Vect}(C_k)_{k \in J}$  est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $C_k$ ,  $k$  appartenant à l'ensemble d'indice  $J$  (par convention, on pose  $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$ ).

DÉMONSTRATION. Soit  $k \in K_2$ . Les ensembles  $J_k$  et  $K_1$  étant disjoints et les vecteurs colonnes de  $F^*$  formant une base de  $\mathbb{C}^n$ , les espaces  $\text{Vect}(C_j)_{j \in J_k}$  et  $\text{Vect}(C_p)_{p \in K_1}$  sont bien en somme directe et la définition de l'ensemble  $E$  a un sens.

► Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

On vérifie tout d'abord que les solutions triviales  $(\lambda, 0)$  sont bien dans  $E$ . En effet, comme, par convention,  $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$ , le vecteur nul appartient à  $\text{Vect}(C_j)_{j \in K_1}$  et  $(\lambda, 0)$  est bien un élément de  $E$ .

► Soit  $(\lambda, K)$  une solution de  $AK = \lambda BK$  avec  $K \neq 0$ .

On décompose  $K$  dans la base  $\mathcal{B} = (C_0, \dots, C_{n-1})$  des vecteurs colonnes de  $F^*$  :

$$\begin{aligned} K &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k C_k \\ &= \sum_{k \in K_1} \alpha_k C_k + \sum_{k \in K_2} \alpha_k C_k + \sum_{k \in K_3} \alpha_k C_k \end{aligned}$$

où  $K_3 = \{0 \leq k \leq n-1 \mid \lambda_k^B = 0 \text{ et } \lambda_k^A \neq 0\}$ .

On a :

$$\begin{cases} AK &= \sum_{k \in K_2} \alpha_k \lambda_k^A C_k + \sum_{k \in K_3} \alpha_k \lambda_k^A C_k, \\ BK &= \sum_{k \in K_2} \alpha_k \lambda_k^B C_k. \end{cases}$$

D'après l'unicité de la décomposition dans une base, on en déduit que :

$$\begin{cases} \forall k \in K_2, \alpha_k (\lambda_k^A - \lambda \lambda_k^B) = 0, \\ \forall k \in K_3, \alpha_k \lambda_k^A = 0. \end{cases}$$

Pour  $k \in K_3$ ,  $\lambda_k^A \neq 0$  donc  $\alpha_k = 0$ .

Deux cas sont alors possibles :

–  $\forall k \in K_2$ ,  $\alpha_k = 0$ .

Alors  $K \in \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)$  et  $(\lambda, K) \in \mathbb{C} \times \text{Vect}(C_k)_{k \in K_1} \subset E$ .

– Il existe  $k' \in K_2$  tel que  $\alpha_{k'} \neq 0$ .

Comme  $\alpha_{k'} (\lambda_{k'}^A - \lambda \lambda_{k'}^B) = 0$  et  $\lambda_{k'}^B \neq 0$ ,  $\lambda = \frac{\lambda_{k'}^A}{\lambda_{k'}^B}$ .

Par ailleurs, on a :

$$\forall k \in K_2 \setminus \{k'\}, \alpha_k (\lambda_k^A - \lambda \lambda_k^B) = 0.$$

Donc, si  $k \in K_2 \setminus J_{k'}$ ,  $\lambda_k^A - \lambda \lambda_k^B \neq 0$  et  $\alpha_k = 0$ . D'où :

$$K = \sum_{k \in K_1} \alpha_k C_k + \sum_{k \in J_{k'}} \alpha_k C_k.$$

Le couple  $(\lambda, K)$  appartient donc à  $\bigcup_{k \in K_2} \left( \frac{\lambda_k^A}{\lambda_k^B}, \text{Vect}(C_j)_{j \in J_k} \oplus \text{Vect}(C_p)_{p \in K_1} \right) \subset E$ .

On vient donc de montrer que les solutions  $(\lambda, K)$  de l'équation  $AK = \lambda BK$  appartiennent à  $E$ .

► Soit  $(\lambda, K)$  un élément de  $E$ .

Deux cas sont encore possibles :

–  $(\lambda, K) \in \mathbb{C} \times \text{Vect}(C_k)_{k \in K_1}$ .

Dans ce cas,  $AK = BK = 0$  et donc  $AK = \lambda BK$ .

–  $(\lambda, K) \notin \mathbb{C} \times \text{Vect}(C_k)_{k \in K_1}$ .

Alors, il existe  $k \in K_2$  tel que  $\lambda = \frac{\lambda_k^A}{\lambda_k^B}$  et  $K \in \text{Vect}(C_j)_{j \in J_k} \oplus \text{Vect}(C_p)_{p \in K_1}$ .

Le vecteur  $K$  s'écrit donc :

$$K = \sum_{j \in K_1} \alpha_j C_j + \sum_{j \in J_k} \alpha_j C_j.$$

D'où :

$$\begin{cases} AK &= \sum_{j \in J_k} \alpha_j \lambda_j^A C_j, \\ BK &= \sum_{j \in J_k} \alpha_j \lambda_j^B C_j. \end{cases}$$

Donc, par définition de l'ensemble  $J_k$ ,

$$\begin{aligned}\lambda BK &= \sum_{j \in J_k} \alpha_j \lambda \lambda_j^B C_j \\ &= \sum_{j \in J_k} \alpha_j \lambda_j^A C_j \\ &= AK.\end{aligned}$$

On a donc montré que si le couple  $(\lambda, K)$  appartient à  $E$ , alors il est solution de l'équation  $AK = \lambda BK$ .

En ajoutant le premier point, ceci montre que  $(\lambda, K)$  est solution de l'équation  $AK = \lambda BK$  si et seulement si  $(\lambda, K) \in E$ . ■

## Annexe B

# Rappels sur les intégrales elliptiques

Dans cette annexe, on va présenter un algorithme de calcul des intégrales elliptiques du premier et du deuxième type basé notamment sur la relation de Landen. Dans les références [1], [16] et [28], on retrouve les fondements théoriques de la méthode, notamment la relation de Landen. Toutefois, l'aboutissement à un code de calcul efficace a nécessité un important travail de mise au point.

### B.1 Définitions

Avant de présenter les algorithmes utilisés pour calculer les intégrales elliptiques, on va rappeler quelques définitions et notations.

#### Définition B.1.1 : intégrales elliptiques

Soient  $\varphi \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

On appelle *intégrale elliptique du premier type* l'intégrale suivante :

$$(B.1) \quad F(\varphi, \alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}}.$$

Si on pose  $\kappa = \sin \alpha$ , cette intégrale devient :

$$(B.2) \quad F(\varphi, \kappa) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}}.$$

Dans la suite on utilisera de façon équivalente l'une ou l'autre des deux formulations précédentes pour représenter l'intégrale elliptique du premier type.

On appelle *intégrale elliptique du deuxième type* l'intégrale suivante :

$$(B.3) \quad E(\varphi, \alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

Si on pose  $\kappa = \sin \alpha$ , cette intégrale s'écrit :

$$(B.4) \quad E(\varphi, \kappa) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

Dans la suite on utilisera de façon équivalente l'une ou l'autre des deux formulations précédentes pour représenter l'intégrale elliptique du deuxième type.

Lorsque  $\varphi$  vaut  $\frac{\pi}{2}$ , on dit que les intégrales elliptiques sont complètes et on note  $K(\alpha)$  et  $E(\alpha)$  leurs valeurs respectives :

$$(B.5) \quad K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}},$$

$$(B.6) \quad E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

Comme pour les intégrales incomplètes, on utilisera aussi le paramètre  $\kappa = \sin \alpha$  pour représenter ces intégrales :

$$(B.7) \quad K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}},$$

$$(B.8) \quad E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

Afin de se ramener à une amplitude  $\varphi$  comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , on va maintenant énoncer des propriétés de symétrie et de translation vérifiées par  $F$ .

**Proposition B.1.2 : premières propriétés des intégrales elliptiques**

Soient  $\varphi \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Les intégrales elliptiques du premier et du deuxième type vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} F(-\varphi, \alpha) = -F(\varphi, \alpha), \\ \forall s \in \mathbb{Z}, F(s\pi \pm \varphi, \alpha) = 2sK(\alpha) \pm F(\varphi, \alpha), \\ \\ E(-\varphi, \alpha) = -E(\varphi, \alpha), \\ \forall s \in \mathbb{Z}, E(s\pi \pm \varphi, \alpha) = 2sE(\alpha) \pm E(\varphi, \alpha). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les démonstrations étant similaires pour  $E$  et  $F$ , on ne va expliquer les égalités que pour  $F$ .

La première relation est obtenue par le changement de variable  $\theta \rightarrow -\theta$ .

Il ne reste plus alors, pour des raisons de symétrie, qu'à démontrer la deuxième égalité pour  $F(s\pi + \varphi)$ . Pour cela, on décompose l'intervalle  $[0; \varphi]$  en sous-intervalles de longueur  $\pi$  et on utilise la relation de Chasles. ■

Pour finir cette section, on va donner les valeurs des intégrales elliptiques dans les cas particuliers  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi/2$ .

**Proposition B.1.3 : quelques valeurs particulières des intégrales elliptiques**

Soit  $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + p\pi; p \in \mathbb{Z} \right\}$ .

$$\begin{cases} F(\varphi, 0) = \varphi, \\ F\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right) = \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right], \\ \\ E(\varphi, 0) = \varphi, \\ E\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right) = \sin \varphi. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Ces calculs ne présentent pas de difficultés et sont laissés au lecteur. ■

**Remarque B.1.4**

On peut définir les intégrales elliptiques pour un angle  $\alpha$  quelconque grâce aux relations suivantes :

$$\begin{cases} F(\varphi, -\alpha) = F(\varphi, \alpha), \\ \forall s \in \mathbb{Z}, F(\varphi, \alpha + s\pi) = F(\varphi, \alpha). \end{cases}$$

**Remarque B.1.5**

Les intégrales elliptiques du troisième type s'écrivent sous la forme suivante :

$$\Pi(\varphi, \alpha, n) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}}.$$

avec  $(\varphi, \alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ . Comme ce type d'intégrale n'apparaît pas dans le calcul du champ magnétique que l'on étudie, on ne va pas s'intéresser à cette intégrale.

## B.2 Intégrale elliptique complète du premier type

Dans cette section, on va établir un moyen de calcul efficace de l'intégrale elliptique complète du premier type. Pour cela, on introduit la notation suivante, généralisation de l'intégrale elliptique complète du premier type :

$$(B.9) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, T(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

Cette nouvelle intégrale vérifie les propriétés suivantes :

**Proposition B.2.1 : propriétés vérifiées par  $T$**

Soient  $a \geq b > 0$ .

On peut réécrire l'intégrale  $T(a, b)$  sous la forme suivante :

$$(B.10) \quad T(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}.$$

Les intégrales  $T$  et  $K$  sont liées par :

$$(B.11) \quad T(a, b) = \frac{2}{a\pi} K \left( \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right).$$

L'intégrale  $T$  vérifie les relations suivantes :

$$(B.12) \quad T(a, b) = \frac{1}{a} T \left( 1, \frac{b}{a} \right),$$

$$(B.13) \quad T(a, b) = T \left( \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right).$$

DÉMONSTRATION. Pour montrer l'écriture (B.10), on fait le changement de variable  $t = b \tan \theta$  afin de faire disparaître les cosinus et sinus du dénominateur. Comme  $\theta$  varie entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , ce changement de variable est bien licite et on a :

$$\begin{aligned} dt &= b(1 + \tan^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{b}{\cos \theta} \sqrt{1 + \tan^2 \theta} d\theta \\ &= \sqrt{b^2 + t^2} \frac{d\theta}{\cos \theta}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \theta}} \frac{d\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\cos^2 \theta$  par  $1 - \sin^2 \theta$  dans (B.9), on obtient (B.11).

La relation (B.12) est obtenue en factorisant par  $a$  le dénominateur de (B.9).

Afin d'obtenir la relation (B.13), on va faire apparaître les termes  $\frac{a+b}{2}$  et  $\sqrt{ab}$  dans (B.10). Pour cela, on fait le changement de variable suivant :

$$u = \frac{1}{2} \left( t - \frac{ab}{t} \right).$$

Comme

$$2u = t - \frac{ab}{t} = t \left( 1 - \frac{ab}{t^2} \right),$$

on a :

$$du = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{ab}{t^2} \right) dt = \left( 1 - \frac{u}{t} \right) dt.$$

En utilisant l'égalité  $(2ut)^2 = (t^2 - ab)^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} (a^2 + t^2)(b^2 + t^2) &= 4u^2 t^2 + 2abt^2 + (a^2 + b^2)t^2 \\ &= t^2 [4u^2 + (a+b)^2]. \end{aligned}$$

Finalement l'intégrand s'écrit :

$$\frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} = \frac{du}{1 - \frac{u}{t}} \frac{1}{\sqrt{t^2[4u^2 + (a + b)^2]}}.$$

Comme  $1 - \frac{u}{t} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab}{t^2}\right) \geq 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} &= \frac{du}{\sqrt{\left(1 - \frac{u}{t}\right)^2 t^2[4u^2 + (a + b)^2]}} \\ &= \frac{du}{\sqrt{(t - u)^2[4u^2 + (a + b)^2]}}. \end{aligned}$$

Or

$$t^2 - 2ut - ab = 0,$$

donc :

$$t - u = \pm \sqrt{u^2 + ab}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t^2)(b^2 + t^2)}} &= \frac{du}{\sqrt{(u^2 + ab)(4u^2 + (a + b)^2)}} \\ &= \frac{du}{2\sqrt{\left[u^2 + \left(\frac{a + b}{2}\right)\right] (u^2 + ab)}}. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{2\sqrt{\left[u^2 + \left(\frac{a + b}{2}\right)\right] (u^2 + ab)}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\left[u^2 + \left(\frac{a + b}{2}\right)\right] (u^2 + ab)}} \\ &= T\left(\frac{a + b}{2}, \sqrt{ab}\right). \end{aligned}$$

■

Afin d'exploiter la relation fondamentale (B.13), on pose les définitions suivantes.

**Définition B.2.2 : suites arithmético-géométriques.**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

On appelle suites arithmético-géométriques associées à  $a$  et  $b$  les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$(B.14) \quad \begin{cases} a_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \end{cases}$$

De plus, si  $a \leq 1$ , on définit la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$(B.15) \quad \begin{cases} c_0 = \sqrt{1 - b_0^2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}. \end{cases}$$

En utilisant ces définitions et la relation (B.13), on a immédiatement :

$$(B.16) \quad \forall n \in \mathbb{N}, T(a, b) = T(a_n, b_n).$$

**Proposition B.2.3 : moyenne arithmético-géométrique**

Pour  $a \geq b \geq 0$ , les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par les relations (B.14) sont bien définies dans  $\mathbb{R}$  et convergent vers la même limite, notée  $M(a, b)$  et appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ .

De plus ces suites ont les encadrements suivants :

$$(B.17) \quad \forall n \in \mathbb{N}, b_0 \leq b_n \leq M(a, b) \leq a_n \leq a_0$$

et satisfont le résultat de convergence :

$$(B.18) \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |a_n - M(a, b)| + |b_n - M(a, b)| \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n}.$$

Si  $a \leq 1$ , la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par (B.15) converge vers 0 et satisfait :

$$(B.19) \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq c_n \leq \frac{c_0}{2^n}.$$

De plus, les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont reliées par la relation suivante :

$$(B.20) \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = c_{n+1}^2.$$

DÉMONSTRATION. On montre tout d'abord que les deux suites sont bien définies dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour cela, on vérifie par récurrence que l'inégalité de départ  $a \geq b \geq 0$  est conservée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En effet, si on suppose que

$$(B.21) \quad a_n \geq b_n \geq 0,$$

les termes  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont bien définis et positifs. Leur différence vérifie :

$$\begin{aligned} 2c_{n+2} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \\ &= \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence montre donc que l'encadrement (B.21) est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bien définies.

De plus, comme  $a_n \geq b_n$ , on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n. \end{aligned}$$

Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc monotones et majorées, donc convergentes. On va maintenant montrer qu'elles ont la même limite.

Comme la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $-\sqrt{a_n b_n} = -b_{n+1} \leq -b_n$  et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2(a_{n+1} - b_{n+1}) = a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n \leq a_n - b_n.$$

En itérant l'inégalité précédente et en utilisant la relation

$$a_0 - b_0 \leq \frac{a_0 - b_0}{2^0},$$

on obtient :

$$(B.22) \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n \leq \frac{a_0 - b_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc adjacentes et convergent vers la même limite. Comme les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont respectivement décroissante et croissante, l'encadrement (B.17) est vérifié et l'inégalité précédente est équivalente à (B.18). Comme  $a \leq 1$ ,  $2c_1 \leq c_0$  et, en remplaçant  $c_{n+1}$  par son expression dans (B.22), on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} \leq \frac{c_0}{2^{n+1}}.$$

En utilisant  $c_0 \leq \frac{c_0}{2^0} = c_0$ , on obtient (B.19).

La relation (B.20) ne présente pas de difficultés et est laissée au lecteur. ■

Les estimations de convergence établies dans la proposition B.2.3 ne sont pas optimales comme on peut le constater sur les graphiques de la figure 91. Sur les trois premiers, on a représenté  $\ln(|a_n - M(a, b)|)$  (respectivement  $\ln(|b_n - M(a, b)|)$  et  $\ln(c_n)$ ) en fonction de  $n$ . De plus, on a tracé la droite de pente  $-\ln 2$  et passant par le premier point et celle obtenue par régression linéaire. On peut vérifier que

cette dernière décroît plus vite et donc que la convergence est plus rapide que  $1/2^n$ .

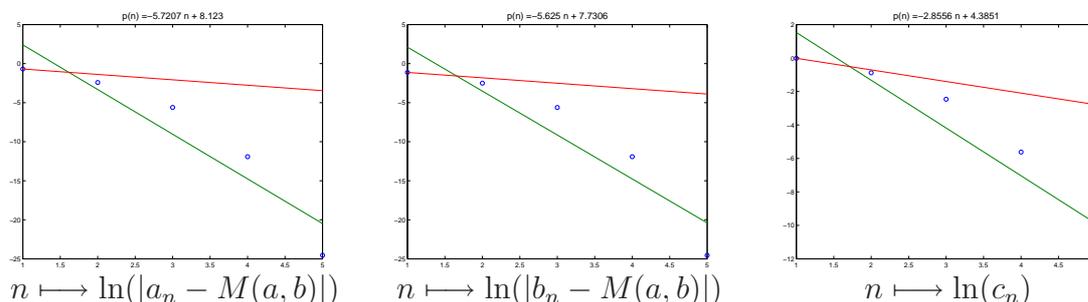


FIG. 91 – Convergence en  $\frac{1}{2^n}$  des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Sur les trois graphiques de la figure 92 suivante, on a représenté  $\ln(|a_{n+1} - M(a, b)|)$  (respectivement  $\ln(|b_{n+1} - M(a, b)|)$  et  $\ln(c_{n+1})$ ) en fonction de  $\ln(|a_n - M(a, b)|)$  (respectivement  $\ln(|b_n - M(a, b)|)$  et  $\ln(c_n)$ ) ainsi que la droite de pente 2 et celle obtenue par régression linéaire. On constate que la pente de cette dernière est voisine de 2 et donc que la convergence des différentes suites est presque quadratique.

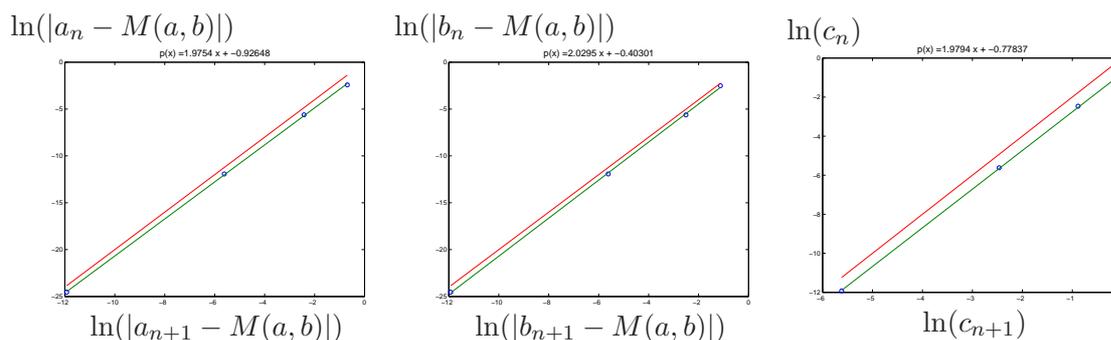


FIG. 92 – Convergence quadratique des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Grâce aux suites introduites dans la définition B.2.2, on peut obtenir un algorithme pour calculer l'intégrale elliptique complète du premier type :

#### Algorithme B.2.4 : algorithme pour $K$

Soit  $\kappa \in ]0; 1[$  et  $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$ .

On note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites arithmético-géométriques associées à  $a_0 = 1$  et  $b_0 = \kappa'$ .

Alors,  $\frac{\pi}{2a_n}$  est une approximation de  $K(\kappa)$ .

Avant de démontrer la convergence de l'algorithme B.2.4, on va établir deux relations entre  $T$ ,  $K$  et la moyenne arithmético-géométrique.

#### Proposition B.2.5 :

Soient  $a \geq b > 0$ . On note  $\kappa' = \frac{b}{a}$  et  $\kappa = \sqrt{1 - \kappa'^2}$ .

Les intégrales  $T$  et  $K$  sont reliées à la moyenne arithmético-géométrique  $M(a, b)$  par :

$$(B.23) \quad T(a, b) = \frac{1}{M(a, b)},$$

$$(B.24) \quad K(\kappa) = \frac{\pi}{2M(1, \kappa')}.$$

DÉMONSTRATION. D'après l'encadrement (B.17), la moyenne arithmético-géométrique  $M(a, b)$  est, comme  $b$ , strictement positive et on peut bien écrire

$$T(M(a, b), M(a, b)) = \frac{1}{M(a, b)}.$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta \geq b^2,$$

la fonction

$$\theta \longmapsto \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}}$$

est bornée indépendamment de  $n$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et on peut utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans (B.16) : on obtient (B.23).

Grâce à (B.11), (B.23) s'écrit :

$$\frac{2}{a\pi}K(\kappa) = T(a, b) = \frac{1}{M(a, b)}.$$

En utilisant (B.12), on obtient :

$$\frac{1}{M(a, b)} = T(a, b) = \frac{1}{a}T(1, \kappa') = \frac{1}{aM(1, \kappa')},$$

puis (B.24) en utilisant de nouveau (B.11). ■

**Proposition B.2.6 : convergence de l'algorithme pour  $K$**

Soit  $\kappa \in ]0; 1[$  et  $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$ .

Si on note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites arithmético-géométriques associées à  $a_0 = 1$  et  $b_0 = \kappa'$ , la suite  $\left(\frac{\pi}{2a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $\frac{1}{2^n}$  vers l'intégrale  $K(\kappa)$  :

$$\left|K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

DÉMONSTRATION. Le résultat de convergence est une conséquence de (B.18) :

$$\forall n \geq \mathbb{N}, \quad \left|K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n}\right| = \frac{\pi}{2} \frac{|a_n - M(1, \kappa')|}{a_n M(1, \kappa')} \leq \frac{\pi}{2\kappa'^2} |a_n - M(1, \kappa')| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Comme pour la suite arithmético-géométrique, les estimations théoriques obtenues ne sont pas optimales. On vérifie dans la pratique que la convergence est presque quadratique. Ceci est illustré par les deux graphiques de la figure 93 où on a représenté respectivement  $\ln \left|K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n}\right|$  en fonction de  $n$  et  $\ln \left|K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_{n+1}}\right|$  en

fonction de  $\ln \left| K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \right|$ . Sur chaque graphique on a aussi tracé la droite obtenue par régression linéaire ainsi qu'une droite de pente respectivement  $-\ln 2$  et  $2$ .

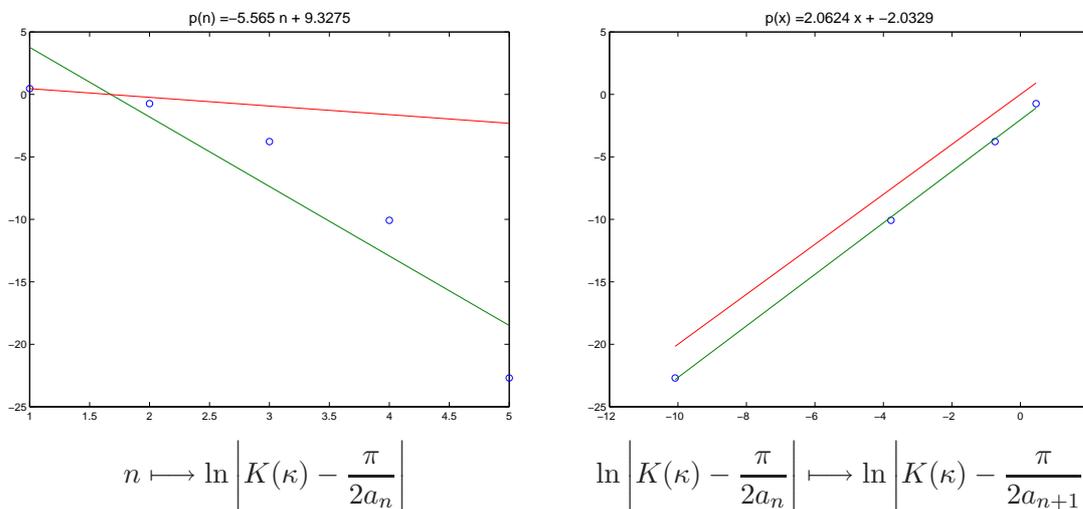


FIG. 93 – Convergence de  $\frac{\pi}{2a_n}$  vers  $K(\kappa)$

On a donc obtenu un algorithme performant pour calculer les intégrales elliptiques complètes du premier type.

On va maintenant énoncer une propriété de  $K$  très utile pour la suite.

**Proposition B.2.7 : propriété fondamentale de  $K$**

Soient  $\kappa$  et  $\tilde{\kappa}$  deux réels de  $]0; 1[$ .

On a les équivalences suivantes :

$$(B.25) \quad \tilde{\kappa} = \frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa} \iff \tilde{\kappa}' = \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \iff \kappa = \frac{1-\tilde{\kappa}'}{1+\tilde{\kappa}'}$$

où  $\tilde{\kappa}' = \sqrt{1-\tilde{\kappa}^2}$ .

De plus, l'intégrale complète  $K$  satisfait :

$$(B.26) \quad \begin{aligned} K(\tilde{\kappa}) &= \frac{2}{1+\tilde{\kappa}'} K(\kappa) \\ &= (1+\kappa) K(\kappa). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On suppose tout d'abord que  $\tilde{\kappa}$  est défini par :

$$\tilde{\kappa} = \frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} 1 - \tilde{\kappa}^2 &= \frac{(1+\kappa)^2 - 4\kappa}{(1+\kappa)^2} \\ &= \left( \frac{1-\kappa}{1+\kappa} \right)^2. \end{aligned}$$

Comme  $\kappa$  est compris entre 0 et 1, en prenant la racine carrée de l'équation précédente, on obtient :

$$\tilde{\kappa}' = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}.$$

D'où :

$$\frac{1 - \tilde{\kappa}'}{1 + \tilde{\kappa}'} = \frac{1 + \kappa - (1 - \kappa)}{1 + \kappa} \frac{1 + \kappa}{1 + \kappa + (1 - \kappa)} = \kappa.$$

Réciproquement, si  $\kappa$  est donné par

$$\kappa = \frac{1 - \tilde{\kappa}'}{1 + \tilde{\kappa}'},$$

on vérifie que

$$\tilde{\kappa}' = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}$$

et donc que

$$\tilde{\kappa}^2 = 1 - \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2} = \left( \frac{2\sqrt{\kappa}}{1 + \kappa} \right)^2.$$

En passant à la racine carrée on retrouve bien (B.25).

Pour simplifier l'écriture, on pose  $b = \tilde{\kappa}'$ .

En utilisant successivement (B.11), (B.13), (B.12) et (B.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} K(\sqrt{1 - b^2}) &= T(1, b) = T\left(\frac{1 + b}{2}, \sqrt{b}\right) = \frac{2}{1 + b} T\left(1, \frac{2\sqrt{b}}{1 + b}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{2}{1 + b} K\left(\sqrt{\left(\frac{1 - b}{1 + b}\right)^2}\right) \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{\kappa} = \sqrt{1 - b^2}$ , on en déduit :

$$K(\tilde{\kappa}) = \frac{2}{1 + \tilde{\kappa}'} K(\kappa)$$

On obtient la deuxième égalité de (B.26) en utilisant (B.25). ■

On va maintenant donner une nouvelle expression de  $K(\kappa)$  utile pour les prochains algorithmes.

**Proposition B.2.8 : nouvelle expression de  $K(\kappa)$**

Soit  $0 < \kappa < 1$ .

On considère la suite  $(\kappa'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$(B.27) \quad \begin{cases} \kappa'_0 = \sqrt{1 - \kappa^2}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \kappa'_{n+1} = \frac{2\sqrt{\kappa'_n}}{1 + \kappa'_n}. \end{cases}$$

Alors le produit  $\prod_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1 + \kappa'_n}$  converge et on a :

$$(B.28) \quad K(\kappa) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1 + \kappa'_n}.$$

DÉMONSTRATION. On vérifie facilement par récurrence que la suite  $(\kappa'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et vérifie les inégalités suivantes :

$$(B.29) \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 < \kappa'_n < 1.$$

En utilisant successivement (B.11), (B.13) et (B.12) , on obtient :

$$\begin{aligned} K(\kappa) &= \frac{\pi}{2} T(1, \kappa'_0) \\ &= \frac{\pi}{2} T\left(\frac{1 + \kappa'_0}{2}, \sqrt{\kappa'_0}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{2}{1 + \kappa'_0} T\left(1, \frac{2\sqrt{\kappa'_0}}{1 + \kappa'_0}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{2}{1 + \kappa'_0} T(1, \kappa'_1). \end{aligned}$$

En itérant, on obtient :

$$(B.30) \quad K(\kappa) = \frac{\pi}{2} T(1, \kappa'_N) \prod_{n=0}^{N-1} \frac{2}{1 + \kappa'_n}.$$

On note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites arithmético-géométriques associées aux valeurs initiales  $a_0 = 1$  et  $b_0 = \kappa'_0$ .

On vérifie par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{b_n}{a_n} = \kappa'_n.$$

On déduit de l'encadrement (B.17) les inégalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \kappa'_n = \frac{b_n}{a_n} \leq \frac{1}{a_n} M(a_n, b_n) = \frac{1}{a_n} M(a_0, b_0) \leq 1.$$

En utilisant (B.23) et (B.12) on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \kappa'_n \leq \frac{1}{a_n} M(a_n, b_n) = M(1, \kappa'_n) \leq 1.$$

On montre en utilisant l'encadrement (B.29) de  $\kappa'_n$  que

$$\frac{\kappa'_{n+1}}{\kappa'_n} \geq 1,$$

c'est-à-dire que la suite  $(\kappa'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Cette suite étant également majorée, elle est convergente. Une étude de fonction montre alors que cette limite est nécessairement 1. On en déduit que la suite  $(M(1, \kappa'_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite est 1. En passant à l'inverse, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T(1, \kappa'_n) = 1.$$

On déduit alors de (B.30) que  $\prod_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1 + \kappa'_n}$  converge et que sa limite est  $\frac{2}{\pi} K(\kappa)$ . ■

## B.3 Intégrale elliptique complète du deuxième type

On va maintenant donner un procédé de calcul des intégrales elliptiques complètes du deuxième type. Pour cela, on va établir une relation entre  $K(\kappa)$  et  $E(\kappa)$  en utilisant l'expression de  $\frac{dK}{d\kappa}$ .

Dans toute la suite, on note  $\dot{F}$  la dérivée  $\frac{dF}{d\kappa}$  d'une fonction  $F(\kappa)$  et  $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$  pour  $\kappa \in ]0; 1[$ .

### Proposition B.3.1 : première expression de $\dot{K}$

Les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième type vérifient la relation suivante :

$$(B.31) \quad \dot{K}(\kappa) = \frac{E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)}{\kappa(1 - \kappa^2)}.$$

DÉMONSTRATION. La technique de la démonstration consiste à faire un développement en série entière des termes  $\kappa(1 - \kappa^2)\dot{K}(\kappa)$  et  $E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)$  en utilisant celui des intégrales elliptiques  $E(\kappa)$  et  $K(\kappa)$ .

En utilisant le développement en série entière de  $(1 + x)^\alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} (-\kappa^2 \sin^2 \theta)^n \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{n! 2^n} \kappa^{2n} \sin^{2n} \theta \end{aligned}$$

où  $(2n-3)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)$ .

On intègre et on permute l'intégrale et la somme grâce à la convergence uniforme :

$$E(\kappa) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{n! 2^n} \kappa^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta d\theta.$$

On reconnaît les intégrales de Wallis :

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} \frac{\pi}{2}.$$

D'où :

$$E(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} \right)^2 \frac{\kappa^{2n}}{2n-1} \right].$$

De même, on montre que :

$$\begin{aligned} K(\kappa) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) (-1)^n}{n!} \kappa^{2n} I_{2n} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} \right)^2 \kappa^{2n} \right]. \end{aligned}$$

Si on note, pour  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \left( \frac{(2n-1)!!}{n! 2^n} \right)^2,$$

on a :

$$\kappa(1-\kappa^2)\dot{K}(\kappa) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2nu_n\kappa^{2n} - \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} 2nu_n\kappa^{2n+2}$$

et

$$E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left[ -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2n-1} \kappa^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \kappa^{2n} + \kappa^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \kappa^{2n+2} \right].$$

Montrer (B.31) revient donc à montrer :

$$(B.32) \quad \begin{cases} 2u_1 = -2u_1 + 1, \\ \forall n \geq 1, \quad 2(n+1)u_{n+1} - 2nu_n = -\frac{u_{n+1}}{2(n+1)-1} - u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Or,  $u_1 = \frac{1}{4}$  donc la première équation de (B.32) est vérifiée. D'autre part, pour vérifier la deuxième équation, on remarque, à partir des formules pour  $u_n$  que

$$u_{n+1} = \frac{(2n+1)^2}{(2(n+1))^2} u_n,$$

ce qui est exactement la seconde équation de (B.32). ■

On va maintenant donner une expression de  $\dot{K}(\kappa)$  qui ne fait intervenir que  $K$ .

### Proposition B.3.2 : deuxième expression de $\dot{K}$

*L'intégrale elliptique complète du premier type vérifie la relation suivante :*

$$(B.33) \quad \dot{K}(\kappa) = -\frac{1}{(1+\kappa)^2} K\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right) + \frac{1}{1+\kappa} \frac{1-\kappa}{\sqrt{\kappa}(1+\kappa)^2} \dot{K}\left(\frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}\right).$$

DÉMONSTRATION. L'égalité précédente est obtenue en dérivant la relation (B.26). ■

En utilisant les deux expressions de  $\dot{K}(\kappa)$ , on peut établir une relation entre les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième type.

### Proposition B.3.3 : première relation entre $E(\kappa)$ et $K(\kappa)$

*Les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième type vérifient la relation suivante :*

$$E(\kappa) = (1+\kappa')E\left(\frac{1-\kappa'}{1+\kappa'}\right) - \kappa'K(\kappa).$$

DÉMONSTRATION. Pour alléger l'écriture, on note

$$g(\kappa) = \frac{2\sqrt{\kappa}}{1+\kappa}.$$

On vérifie les propriétés suivantes sur  $g$  :

- $1 - g(\kappa)^2 = 1 - \frac{4\kappa}{(1 + \kappa)^2} = \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2}$ ,
- $g^{-1}(\kappa) = \frac{1 - \kappa'}{1 + \kappa'}$ ,
- $\dot{g}(\kappa) = \frac{1 - \kappa}{\sqrt{\kappa}(1 + \kappa)^2}$ ,
- $1 + g^{-1}(\kappa) = 1 + \frac{1 - \kappa'}{1 + \kappa'} = \frac{2}{1 + \kappa'}$ ,
- $g(\kappa') = \sqrt{1 - g^{-1}(\kappa)^2}$ .

En utilisant ces notations et  $\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$ , les relations (B.31) et (B.33) s'écrivent :

$$(B.34) \quad \begin{cases} \kappa\kappa'^2 \dot{K}(\kappa) = E(\kappa) - \kappa'^2 K(\kappa), \\ \dot{K}(\kappa) = -\frac{1}{1 + \kappa^2} K(g(\kappa)) + \frac{1}{1 + \kappa} \dot{g}(\kappa) \dot{K}(g(\kappa)). \end{cases}$$

On remplace  $\kappa$  par  $g(\kappa)$  dans la première équation de (B.34) pour obtenir successivement :

$$\begin{aligned} g(\kappa)(1 - g(\kappa)^2) \dot{K}(g(\kappa)) &= E(g(\kappa)) - (1 - g(\kappa)^2) K(g(\kappa)), \\ \frac{2\kappa(1 - \kappa)}{1 + \kappa} \frac{1 - \kappa}{\sqrt{\kappa}(1 + \kappa)^2} \dot{K}(g(\kappa)) &= E(g(\kappa)) - \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2} K(g(\kappa)), \\ \frac{2\kappa(1 - \kappa)}{1 + \kappa} \dot{g}(\kappa) \dot{K}(g(\kappa)) &= E(g(\kappa)) - \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2} K(g(\kappa)). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (B.26), la deuxième équation de (B.34) s'écrit :

$$(1 + \kappa) \dot{K}(\kappa) + K(\kappa) = \dot{g}(\kappa) \dot{K}(g(\kappa)).$$

En injectant cette égalité dans la relation précédente on obtient :

$$\frac{2\kappa(1 - \kappa)}{1 + \kappa} \left[ (1 + \kappa) \dot{K}(\kappa) + K(\kappa) \right] = E(g(\kappa)) - \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2} K(g(\kappa)).$$

On utilise de nouveau (B.34) pour faire disparaître le terme  $\dot{K}(\kappa)$  :

$$\begin{aligned} \frac{2\kappa(1 - \kappa)}{1 + \kappa} \left[ \frac{1 + \kappa}{\kappa\kappa'^2} E(\kappa) - \frac{1 + \kappa}{\kappa} K(\kappa) + K(\kappa) \right] &= E(g(\kappa)) - \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2} K(g(\kappa)), \\ \frac{2}{1 + \kappa} E(\kappa) - \frac{2(1 - \kappa)}{1 + \kappa} K(\kappa) &= E(g(\kappa)) - \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2} K(g(\kappa)), \\ \frac{2}{1 + \kappa} E(\kappa) - \frac{2(1 - \kappa)}{1 + \kappa} K(\kappa) &= E(g(\kappa)) - \frac{(1 - \kappa)^2}{(1 + \kappa)^2} K(\kappa). \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} E(g(\kappa)) &= \frac{2}{1 + \kappa} E(\kappa) - \frac{2(1 - \kappa)}{1 + \kappa} \left[ 1 - \frac{(1 - \kappa)}{2} \right] K(\kappa) \\ &= \frac{2}{1 + \kappa} E(\kappa) - \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa} K(\kappa). \end{aligned}$$

En substituant  $g^{-1}(\kappa)$  à  $\kappa$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} E(\kappa) &= \frac{2}{1+g^{-1}(\kappa)} E(g^{-1}(\kappa)) - \frac{1-g^{-1}(\kappa)^2}{1+g^{-1}(\kappa)} K(g^{-1}(\kappa)) \\ &= (1+\kappa') E(g^{-1}(\kappa)) - \kappa' K(\kappa). \end{aligned}$$

■

On va maintenant revenir aux suites arithmético-géométriques et donner un algorithme de calcul des intégrales elliptiques complètes de deuxième type :

**Algorithme B.3.4 : algorithme pour  $E$**

Soit  $0 < \kappa < 1$ .

Si on note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites arithmético-géométriques associées à  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \kappa'$  et  $c_0 = \kappa$ , on approche  $E(\kappa)$  par :

$$\frac{\pi}{2a_n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right]$$

**Proposition B.3.5 : justification et convergence de l'algorithme pour  $E$**

Soit  $0 < \kappa < 1$ .

On considère les suites arithmético-géométriques  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associées à  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \kappa'$  et  $c_0 = \kappa$ .

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} 2^n c_n^2$  est convergente et on a :

$$(B.35) \quad \frac{K(\kappa) - E(\kappa)}{K(\kappa)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n c_n^2.$$

De plus on a l'estimation de convergence suivante :

$$\left| E(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \right| = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2^n} \right).$$

DÉMONSTRATION. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\kappa_n = \frac{c_n}{a_n}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après la proposition B.3.3, on a :

$$E(\kappa_n) = (1 + \kappa'_n) E \left( \frac{1 - \kappa'_n}{1 + \kappa'_n} \right) - \kappa'_n K(\kappa_n).$$

Or

$$\kappa_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{1 - \kappa'_n}{1 + \kappa'_n},$$

donc

$$E(\kappa_n) = (1 + \kappa'_n) E(\kappa_{n+1}) - \kappa'_n K(\kappa_n).$$

Si on remplace  $\kappa_n$  par son expression en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ , on obtient :

$$(B.36) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right) E(\kappa_{n+1}) - E(\kappa_n) &= \frac{b_n}{a_n} K(\kappa_n), \\ (a_n + b_n)E(\kappa_{n+1}) - a_n E(\kappa_n) &= b_n K(\kappa_n), \\ 2a_{n+1}E(\kappa_{n+1}) - a_n E(\kappa_n) &= b_n K(\kappa_n). \end{aligned}$$

Or, on vérifie par récurrence que la suite  $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive et majorée par 1 et donc que :

$$\begin{aligned} K(\kappa_n) &= K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2}\right) \\ &= \frac{a_n \pi}{2} T(a_n, b_n) \\ &= \frac{a_n \pi}{2} T(a_0, b_0) \\ &= \frac{a_n \pi}{2} \frac{2}{a_0 \pi} K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2}\right) \\ &= a_n K(\kappa). \end{aligned}$$

D'où :

$$(B.37) \quad 2a_{n+1}E(\kappa_{n+1}) - a_n E(\kappa_n) = a_n b_n K(\kappa).$$

Or,

$$\begin{aligned} 2a_n b_n &= (a_n + b_n)^2 - a_n^2 - b_n^2 \\ &= 4a_{n+1}^2 - a_n^2 - b_n^2 \\ &= 2(2a_{n+1}^2 - a_n^2) + a_n^2 - b_n^2. \end{aligned}$$

On sait (voir (B.20)) que  $a_n^2 - b_n^2 = c_n^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc que :

$$a_n b_n = 2a_{n+1}^2 - a_n^2 + \frac{c_n^2}{2}.$$

En reportant dans (B.37), on obtient alors :

$$\begin{aligned} 2a_{n+1}E(\kappa_{n+1}) - a_n E(\kappa_n) &= \left(2a_{n+1}^2 - a_n^2 + \frac{c_n^2}{2}\right) K(\kappa), \\ 2a_{n+1} [E(\kappa_{n+1}) - a_{n+1}K(\kappa)] - a_n [E(\kappa_n) - a_n K(\kappa)] &= \frac{c_n^2}{2} K(\kappa), \\ 2^{n+1} a_{n+1} [E(\kappa_{n+1}) - a_{n+1}K(\kappa)] - 2^n a_n [E(\kappa_n) - a_n K(\kappa)] &= 2^{n-1} c_n^2 K(\kappa). \end{aligned}$$

En sommant et en utilisant (B.36), on obtient :

$$\begin{aligned}
2^{N+1}a_{N+1} [E(\kappa_{N+1}) - a_{N+1}K(\kappa)] - 2a_1 [E(\kappa_1) - a_1K(\kappa)] &= \left( \sum_{n=1}^N 2^{n-1}c_n^2 \right) K(\kappa), \\
2^{N+1}a_{N+1} [E(\kappa_{N+1}) - a_{N+1}K(\kappa)] - [E(\kappa) + \kappa'K(\kappa) - 2a_1^2K(\kappa)] &= \left( \sum_{n=1}^N 2^{n-1}c_n^2 \right) K(\kappa), \\
2^{N+1}a_{N+1} [E(\kappa_{N+1}) - a_{N+1}K(\kappa)] - E(\kappa) + \left( \frac{1 + \kappa'^2}{2} \right) K(\kappa) &= \left( \sum_{n=1}^N 2^{n-1}c_n^2 \right) K(\kappa).
\end{aligned}$$

D'après (B.19) on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq 2^{n-1}c_n^2 \leq 2^{n-1} \left( \frac{c_0}{2^n} \right)^2 = \frac{c_0^2}{2^{n+1}}.$$

La série de terme général  $2^{n-1}c_n^2$  converge donc et on peut passer à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} 2^{N+1}a_{N+1} [E(\kappa_{N+1}) - a_{N+1}K(\kappa)] - E(\kappa) = \left( -\frac{1 + \kappa'^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}c_n^2 \right) K(\kappa).$$

Si on pose  $\alpha_n = -2^n a_n [E(\kappa_n) - a_n K(\kappa)]$ , on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= -2^n a_n [E(\kappa_n) - K(\kappa_n)] \\
&= -2^n a_n \left[ \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa_n^2 \sin^2 \theta} d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa_n^2 \sin^2 \theta}} \right] \\
&= 2^n a_n \kappa_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - \kappa_n^2 \sin^2 \theta}} \\
&\leq 2^n a_n \kappa_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa_n^2 \sin^2 \theta}} \\
&\leq 2^n c_n^2 K(\kappa).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que :

$$0 \leq |\alpha_n| \leq 2^n c_n^2 K(\kappa) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a donc montré que :

$$\begin{aligned}
E(\kappa) &= \left( \frac{1 + \kappa'^2}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}c_n^2 \right) K(\kappa), \\
K(\kappa) - E(\kappa) &= \left( 1 - \frac{1 + \kappa'^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}c_n^2 \right) K(\kappa), \\
\text{(B.38)} \quad \frac{K(\kappa) - E(\kappa)}{K(\kappa)} &= \frac{\kappa^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}c_n^2, \\
\frac{K(\kappa) - E(\kappa)}{K(\kappa)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n c_n^2.
\end{aligned}$$

Grâce à (B.19), on en déduit la majoration suivante :

$$\left| \frac{K(\kappa) - E(\kappa)}{K(\kappa)} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right| = \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} 2^p c_p^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{c_0^2}{2^p} \leq \frac{c_0^2}{2^n}.$$

D'après (B.38),

$$E(\kappa) = K(\kappa) \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right].$$

On décide donc d'approcher  $E(\kappa)$  par l'expression obtenue en tronquant la série ci-dessus à l'ordre  $n$  et en utilisant l'algorithme B.2.4 pour approcher  $K$  :

$$\frac{\pi}{2a_n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right].$$

On vérifie à l'aide de la majoration précédente et de la proposition B.2.6 que :

$$\begin{aligned} & \left| E(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \right| \\ & \leq \left| \left( \frac{\pi}{2a_n} - K(\kappa) \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \right| + \left| E(\kappa) - K(\kappa) \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \right| \\ & \leq \frac{C}{2^n} \left| 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right| + K(\kappa) \left| \frac{K(\kappa) - E(\kappa)}{K(\kappa)} - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right| \\ & \leq \frac{C}{2^n}. \end{aligned}$$

■

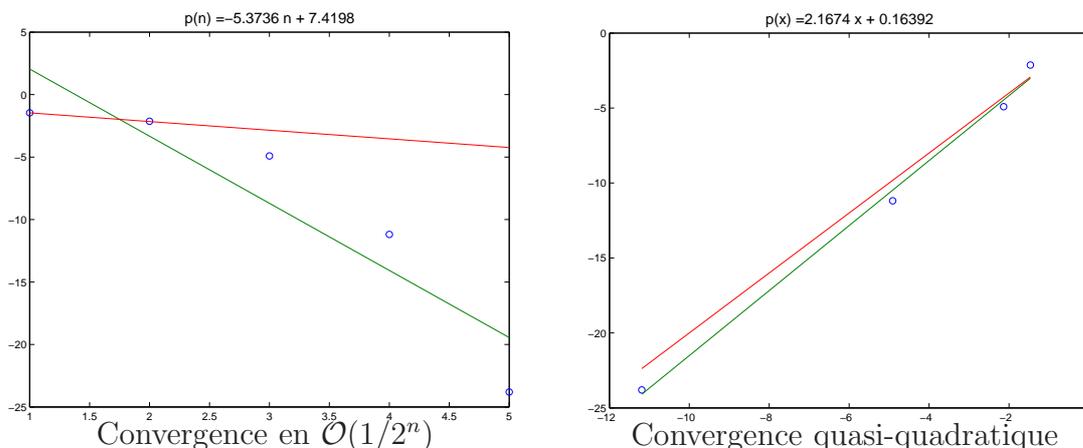
On a donc obtenu un moyen efficace de calculer  $E(\kappa)$  à partir des suites arithmético-géométriques.

Comme pour l'intégrale elliptique complète du premier type, les estimations théoriques obtenues ne sont pas optimales et on vérifie dans la pratique que la convergence est presque quadratique. Ceci est illustré par les deux graphiques de la figure 94

où l'on a représenté respectivement  $\ln \left| E(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \right|$  en fonction de

$n$  et  $\left| E(\kappa) - \frac{\pi}{2a_{n+1}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} 2^p c_p^2 \right] \right|$  en fonction de  $\left| E(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \right|$ .

Sur chaque graphique on a aussi tracé la droite obtenue par régression linéaire ainsi qu'une droite de pente respectivement  $-\ln 2$  et 2.

FIG. 94 – Convergence pour  $E(\kappa)$ 

## B.4 Intégrales elliptiques incomplètes

Pour calculer l'intégrale elliptique incomplète du premier type, on va utiliser la proposition B.1.3 et plus particulièrement la relation  $F(\varphi, 0) = \varphi$ . Pour un angle  $\alpha$  et une amplitude  $\varphi$  donnés, on va donc construire des suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $F(\varphi_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \beta_n F(\varphi_n, \alpha_n)$  et  $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . On approchera

alors  $F(\varphi, \alpha)$  par le produit  $\varphi_N \prod_{n=1}^N \beta_n$ .

Dans la proposition suivante, on va établir la relation de Landen qui va nous permettre de passer de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$ .

### Proposition B.4.1 : relation de Landen

Soient  $\varphi \in \mathbb{R} \setminus (\pi/2)\mathbb{Z}$  et  $\kappa \in ]0; 1[$ .

On pose :

$$(B.39) \quad \begin{cases} \tilde{\kappa} = \frac{1 - \kappa'}{1 + \kappa'}, \\ \tilde{\varphi} = \arctan(\kappa' \tan \varphi) + \varphi + \left[ \frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2} \right] \pi. \end{cases}$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

L'intégrale elliptique du premier type vérifie la relation suivante appelée relation de Landen descendante :

$$(B.40) \quad F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) = (1 + \kappa') F(\varphi, \kappa).$$

### Remarque B.4.2 : concernant les cas $\varphi \in (\pi/2)\mathbb{Z}$

La relation de Landen n'est pas satisfaite pour un angle  $\varphi \in \mathbb{Z}\pi/2$  donc les différents algorithmes qui suivent ne sont pas valables pour de telles amplitudes. Cependant, grâce à la proposition B.1.2, on peut relier les intégrales incomplètes pour des amplitudes  $\varphi \in \mathbb{Z}\pi/2$  aux intégrales complètes. Les algorithmes de la partie précédente permettent donc de calculer efficacement ces intégrales.

DÉMONSTRATION. On va d'abord démontrer la relation (B.40) pour  $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , puis sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  puis, par symétrie, sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$  et enfin, par translation, sur  $\mathbb{R} \setminus (\pi/2)\mathbb{Z}$ .

On suppose tout d'abord que  $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

On pose  $a = 1$  et  $b = \kappa'$ .

On peut alors réécrire  $F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa})$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) &= \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \tilde{\kappa}^2 \sin^2 \theta}} \\ &= (1 + \kappa') \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 + \kappa')^2 - (1 - \kappa')^2 \sin^2 \theta}} \\ &= a(1 + \kappa') \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\theta}{\sqrt{(a + b)^2 \cos^2 \theta + 4ab \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{a(1 + \kappa')}{2} \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Comme  $\kappa \in [0; 1]$ ,  $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  et que  $\tan$  est positive sur cet intervalle, la croissance de  $\arctan$  conduit à l'encadrement suivant :

$$0 \leq \varphi \leq \tilde{\varphi} \leq \arctan(\tan(\varphi)) + \varphi = 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Le changement de variable  $u = \frac{a + b}{2 \tan \theta}$  est donc licite et on obtient :

$$F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) = \frac{a(1 + \kappa')}{2} \int_{\frac{a+b}{2 \tan \tilde{\varphi}}}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\left[\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + u^2\right] (u^2 + ab)}}.$$

Par des calculs similaires, si on fait le changement de variable  $t = b \tan \theta$  puis  $u = \frac{1}{2} \left(t - \frac{ab}{t}\right)$ , on obtient :

$$F(\varphi, \kappa) = \frac{a}{2} \int_{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\tan \varphi} - b \tan \varphi\right)}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\left[\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + u^2\right] (u^2 + ab)}}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \tan(\tilde{\varphi}) &= \frac{\tan \left[ \arctan \left( \frac{b}{a} \tan \varphi \right) \right] + \tan \varphi}{1 - \tan \left[ \arctan \left( \frac{b}{a} \tan \varphi \right) \right] \tan \varphi} \\ &= \frac{(a + b) \tan \varphi}{(a - b) \tan^2 \varphi}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{a+b}{\tan \tilde{\varphi}} = \frac{a}{\tan \varphi} - b \tan \varphi,$$

et donc l'égalité

$$F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) = (1 + \kappa')F(\varphi, \kappa).$$

On suppose maintenant que  $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

On note  $a_1 = \frac{a+b}{2}$  et  $b_1 = \sqrt{ab}$  où  $a$  et  $b$  valent toujours respectivement 1 et  $\kappa'$ . Comme dans le cas précédent, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \tilde{\varphi} \leq 2\varphi \leq \pi.$$

On ne peut donc plus faire le changement de variable pour l'intégrale  $F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa})$  alors que celui concernant  $F(\varphi, \kappa)$  reste valable.

Pour remédier à ce problème, on décompose  $F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa})$  en deux :

$$F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) = \frac{a(1 + \kappa')}{2} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}} + \int_{\pi/2}^{\tilde{\varphi}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}} \right].$$

La première intégrale étant  $\frac{\pi}{2}T(a_1, b_1)$ , on a vu dans la proposition B.2.1 que l'on pouvait l'écrire sous la forme

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(b_1^2 + u^2)}}.$$

Dans la deuxième intégrale on fait, comme précédemment, le changement de variable  $u = \frac{a_1}{\tan \theta}$  et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) &= \frac{a(1 + \kappa')}{2} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(b_1^2 + u^2)}} - \int_0^{\frac{a_1}{\tan \tilde{\varphi}}} \frac{du}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(b_1^2 + u^2)}} \right] \\ &= \frac{a(1 + \kappa')}{2} \int_{\frac{a_1}{\tan \tilde{\varphi}}}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{(a_1^2 + u^2)(b_1^2 + u^2)}}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien l'égalité

$$F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) = (1 + \kappa')F(\varphi, \kappa).$$

On suppose maintenant que  $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ .

On note  $\psi = -\varphi$ .

D'après les parties précédentes, on a :

$$F(\tilde{\psi}, \tilde{\kappa}) = (1 + \kappa')F(\psi, \kappa)$$

où

$$\tilde{\psi} = \arctan(\kappa' \tan \psi) + \psi.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, \kappa) &= F(-\psi, \kappa) \\
 &= -F(\psi, \kappa) \\
 &= -\frac{1}{(1 + \kappa')} F(\tilde{\psi}, \tilde{\kappa}) \\
 &= \frac{1}{(1 + \kappa')} F(-\tilde{\psi}, \tilde{\kappa}).
 \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 -\tilde{\psi} &= -\arctan(\kappa' \tan \psi) - \psi \\
 &= \arctan(\kappa' \tan(-\psi)) + \varphi \\
 &= \arctan(\kappa' \tan \varphi) + \varphi \\
 &= \tilde{\varphi},
 \end{aligned}$$

on a bien :

$$F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) = (1 + \kappa')F(\varphi, \kappa).$$

Pour finir, on suppose que  $\varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ + p\pi$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

On note  $\psi = \varphi - p\pi \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

D'après les parties précédentes, on a :

$$F(\tilde{\psi}, \tilde{\kappa}) = (1 + \kappa')F(\psi, \kappa)$$

où

$$\tilde{\psi} = \arctan(\kappa' \tan \psi) + \psi.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, \kappa) &= F(\psi + p\pi, \kappa) \\
 &= 2pK(\kappa) + F(\psi, \kappa) \\
 &= 2pK(\kappa) + \frac{1}{1 + \kappa'} F(\tilde{\psi}, \tilde{\kappa}).
 \end{aligned}$$

Or on a montré (voir (B.26)) que  $K(\kappa) = \frac{2}{1 + \kappa'} K(\tilde{\kappa})$ , donc :

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, \kappa) &= \frac{1}{(1 + \kappa')} \left[ 4pK(\tilde{\kappa}) + F(\tilde{\psi}, \tilde{\kappa}) \right] \\
 &= \frac{1}{(1 + \kappa')} F(\tilde{\psi} + 2p\pi, \tilde{\kappa}).
 \end{aligned}$$

Comme,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi} + 2p\pi &= \arctan(\kappa' \tan \psi) + \psi + 2p\pi \\
 &= \arctan(\kappa' \tan(\varphi - p\pi)) + \varphi + p\pi \\
 &= \arctan(\kappa' \tan \varphi) + \varphi + p\pi \\
 &= \tilde{\varphi},
 \end{aligned}$$

on a donc :

$$F(\tilde{\varphi}, \tilde{\kappa}) = (1 + \kappa')F(\varphi, \kappa).$$

On vérifie facilement que  $p$  est la partie entière de  $\frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2}$  et donc que la proposition B.4.1 est vérifiée. ■

**Algorithme B.4.3 : algorithme pour  $F$**

Soient  $\varphi \in \mathbb{R}^+ \setminus (\pi/2)\mathbb{N}$  et  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ .

On considère les suites arithmético-géométriques  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \cos \alpha$  et  $c_0 = \sin \alpha$ .

On définit aussi la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n} \tan \varphi_n\right) + \varphi_n + \left[\frac{\varphi_n}{\pi} + \frac{1}{2}\right]\pi. \end{cases}$$

Alors, la suite  $\left(\frac{\varphi_n}{2^n a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $F(\varphi, \alpha)$ .

Avant de vérifier la convergence de l'algorithme B.4.3, on va énoncer un résultat intermédiaire donnant un encadrement de l'amplitude  $\tilde{\varphi}$  introduite dans la proposition B.4.1 en fonction de  $\varphi$ .

**Lemme B.4.4 : encadrement de  $\tilde{\varphi}$**

Soient  $\varphi \in \mathbb{R}^+ \setminus (\pi/2)\mathbb{N}$  et  $\kappa \in ]0; 1[$ .

Alors l'amplitude  $\tilde{\varphi}$  définie par (B.39) vérifie l'encadrement suivant :

$$(B.41) \quad \varphi \leq \tilde{\varphi} \leq 2\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

DÉMONSTRATION. On écrit  $\varphi$  sous la forme  $\varphi = \Psi + p\pi$  où  $\Psi \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

Dans un premier temps, on va démontrer (B.41) dans le cas  $\tan \Psi \geq 0$ . Comme  $0 \leq \kappa' \leq 1$  et que  $\arctan$  est une fonction croissante, on a :

$$0 \leq \arctan(\kappa' \tan \Psi) \leq \arctan(\tan \Psi) = \Psi.$$

D'où :

$$2\varphi - \Psi \leq \tilde{\varphi} = \arctan(\kappa' \tan \Psi) - \Psi + 2\varphi \leq 2\varphi \leq 2\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

On a donc bien la majoration attendue. Concernant la minoration, si  $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire si  $p = 0$ ,  $\varphi = \Psi$  et  $2\varphi - \Psi = \varphi$ . Si  $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ ,  $2\varphi - \Psi \geq 2\varphi - \frac{\pi}{2} \geq \varphi$ . On retrouve bien la minoration attendue dans tous les cas.

On va maintenant montrer l'encadrement (B.41) dans le cas  $\tan \Psi \leq 0$ . Cette fois, la croissance de  $\arctan$  conduit à :

$$2\varphi \leq \tilde{\varphi} = \arctan(\kappa' \tan \Psi) - \Psi + 2\varphi \leq 2\varphi - \Psi \leq 2\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Comme  $\varphi$  est positif,  $2\varphi$  est bien supérieur  $\varphi$  et on retrouve (B.41). ■

On est maintenant en mesure de montrer que l'algorithme B.4.3 converge bien vers l'intégrale elliptique du deuxième type.

**Proposition B.4.5 : justification et convergence de l'algorithme pour  $F$**

Soient  $\varphi \in \mathbb{R}^+ \setminus (\pi/2)\mathbb{N}$  et  $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

On considère les suites arithmético-géométriques  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \cos \alpha$  et  $c_0 = \sin \alpha$ .

On définit aussi la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n} \tan \varphi_n\right) + \varphi_n + \left[\frac{\varphi_n}{\pi} + \frac{1}{2}\right] \pi. \end{cases}$$

Alors, la suite  $\left(\frac{\varphi_n}{2^n a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $\frac{1}{2^n}$  vers  $F(\varphi, \alpha)$  :

$$\left|F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_n}{2^n a_n}\right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} \kappa_0 = c_0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \kappa_{n+1} = \frac{1 - \kappa'_n}{1 + \kappa'_n}. \end{cases}$$

On montre par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \kappa_n = \frac{c_n}{a_n} \text{ et } \kappa'_n = \frac{b_n}{a_n}.$$

La suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc définie par :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = \arctan(\kappa'_n \tan \varphi_n) + \varphi_n + \left[\frac{\varphi_n}{\pi} + \frac{1}{2}\right] \pi. \end{cases}$$

D'après la proposition B.4.1 on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F(\varphi_n, \kappa_n) = \frac{1}{1 + \kappa'_n} F(\varphi_{n+1}, \kappa_{n+1}).$$

En itérant on obtient :

$$\begin{aligned} (B.42) \quad F(\varphi, \alpha) &= \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{1 + \kappa'_n} F(\varphi_N, \kappa_N) \\ &= \frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N} \left( \prod_{n=0}^{N-1} \frac{2}{1 + \kappa'_n} \right). \end{aligned}$$

D'après la relation (B.28), le produit entre parenthèse converge vers  $\frac{2}{\pi}K(\kappa)$  donc on l'approche par  $\frac{1}{a_n}$ . Comme  $\kappa_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  et que  $F(\varphi, 0) = \varphi$ , on approche le terme  $\frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N}$  par  $\frac{\varphi_n}{2^n}$ . Il reste à vérifier que :

$$\left| F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Comme le produit converge dans (B.42), le terme  $\frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N}$  admet une limite que l'on note  $\Phi$  et on peut réécrire (B.42) de la manière suivante :

$$F(\varphi, \alpha) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N} \left( \prod_{n=0}^{N-1} \frac{2}{1 + \kappa'_n} \right) = \frac{2}{\pi} K(\kappa) \Phi.$$

On décompose alors le terme à majorer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \left| F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \right| \\ &= \left| \frac{2}{\pi} K(\kappa) \Phi - \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \right| \\ &= \left| \frac{2}{\pi} \left( K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \right) \Phi + \frac{1}{a_n} \left[ \Phi - \frac{\varphi_n}{2^n} \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{\pi} \left( K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \right) \Phi \right| + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{a_n} \left[ \frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N} - \frac{\varphi_n}{2^n} \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{2}{\pi} \left( K(\kappa) - \frac{\pi}{2a_n} \right) \Phi \right| + \frac{1}{a_n} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \left| \frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N} - \frac{\varphi_N}{2^N} \right| + \left| \frac{\varphi_N}{2^N} - \frac{\varphi_n}{2^n} \right| \right]. \end{aligned}$$

À l'aide d'un développement limité, on montre que :

$$\frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N} - \frac{\varphi_N}{2^N} = -\frac{1}{2^{N+1}} \left[ \varphi_N - \frac{\sin 2\varphi_N}{2} \right] \kappa_N^2 + o(\kappa_N^2).$$

D'après (B.19) et (B.41), on en déduit que :

$$\left| \frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N} - \frac{\varphi_N}{2^N} \right| = \mathcal{O}(\kappa_N^2) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^{2N}}\right).$$

En utilisant (B.41), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi_N}{2^N} - \frac{\varphi_n}{2^n} \right| &\leq \sum_{p=n}^{N-1} \left| \frac{\varphi_{p+1}}{2^{p+1}} - \frac{\varphi_p}{2^p} \right| \\ &\leq \sum_{p=n}^{N-1} \frac{\pi}{2^{p+1}} \\ &\leq \frac{C}{2^n}. \end{aligned}$$

En additionnant les deux résultats, on a :

$$\left| \Phi - \frac{\varphi_n}{2^n} \right| \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \left| \frac{F(\varphi_N, \kappa_N)}{2^N} - \frac{\varphi_N}{2^N} \right| + \left| \frac{\varphi_N}{2^N} - \frac{\varphi_n}{2^n} \right| \right] = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2^n} \right).$$

De même, on a :

$$|\Phi| = \left| \Phi - \frac{\varphi_n}{2^n} + \frac{\varphi_n}{2^n} \right| = \mathcal{O}(1).$$

Compte tenu du résultat de convergence de la proposition B.2.5, on a donc finalement montré que

$$\left| F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \right| = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2^n} \right).$$

■

Comme pour les intégrales elliptiques complètes, les estimations théoriques obtenues ne sont pas optimales et on vérifie dans la pratique que la convergence est presque quadratique. Ceci est illustré par les deux graphiques de la figure 95 où l'on a représenté respectivement

$$n \mapsto \ln \left| F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_n}{2a_n} \right|$$

et

$$\left| F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_{n+1}}{2a_{n+1}} \right| \text{ en fonction de } \left| F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_n}{2a_n} \right|.$$

Sur chaque graphique on a aussi tracé la droite obtenue par régression linéaire ainsi qu'une droite de pente respectivement  $-\ln 2$  et  $2$ .

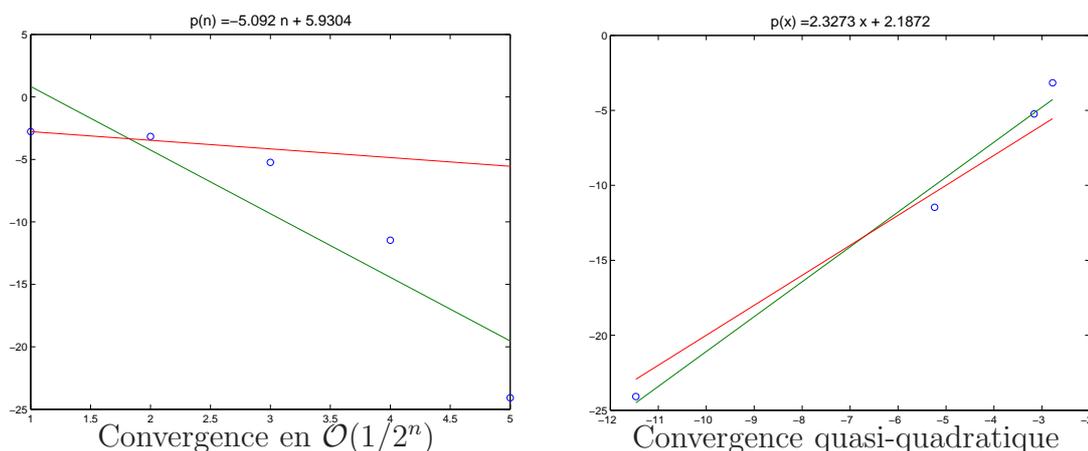


FIG. 95 – Convergence pour  $F(\varphi, \alpha)$

On va maintenant donner un algorithme de calcul de l'intégrale elliptique du deuxième type.

**Algorithme B.4.6 : algorithme pour  $E$**

Soient  $\varphi \in \mathbb{R}^+ \setminus (\pi/2)\mathbb{N}$  et  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ .

On considère les suites arithmético-géométriques  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies

par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \cos \alpha$  et  $c_0 = \sin \alpha$ .

On définit aussi la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = \arctan \left( \frac{b_n}{a_n} \tan \varphi_n \right) + \varphi_n + \left[ \frac{\varphi_n}{\pi} + \frac{1}{2} \right] \pi. \end{cases}$$

Alors, la suite  $\left( \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $E(\varphi, \alpha)$ .

Afin de montrer la convergence de l'algorithme B.4.6, on va utiliser la relation suivante (voir [1]) reliant les intégrales du premier et du deuxième type :

$$(B.43) \quad E(\varphi, \alpha) = \frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} F(\varphi, \alpha) + [c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin \varphi_2 + \dots]$$

où  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite introduite dans la proposition B.4.5.

**Proposition B.4.7 : convergence de l'algorithme pour  $E$**

Soient  $\varphi \in \mathbb{R}^+ \setminus (\pi/2)\mathbb{N}$  et  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ .

On considère les suites arithmético-géométriques  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \cos \alpha$  et  $c_0 = \sin \alpha$ .

On définit aussi la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = \arctan \left( \frac{b_n}{a_n} \tan \varphi_n \right) + \varphi_n + \left[ \frac{\varphi_n}{\pi} + \frac{1}{2} \right] \pi. \end{cases}$$

Alors, la suite  $\left( \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $\frac{1}{2^n}$  vers  $E(\varphi, \alpha)$  :

$$\left| E(\varphi, \alpha) - \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right| = \mathcal{O} \left( \frac{1}{2^n} \right).$$

DÉMONSTRATION. L'estimation de convergence est une simple conséquence des es-

timations précédentes et de la relation (B.43) :

$$\begin{aligned}
& \left| E - \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right| \\
&= \left| E - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \frac{\varphi_n}{2^n a_n} + \left[ \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - \left( 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right) \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right| \\
&\leq \left| E - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} F(\varphi, \alpha) - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right| + \left| \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \left( F(\varphi, \alpha) - \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \right) \right| \\
&\quad + \left| \left[ \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - \left( 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right) \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \right| \\
&\leq \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} c_p \sin \varphi_p \right| + \left| \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} \right| \frac{C}{2^n} + \left| \frac{\varphi_n}{2^n a_n} \right| \frac{C}{2^n} \\
&\leq \frac{C}{2^n}.
\end{aligned}$$

■

**Remarque B.4.8** Dans tous les algorithmes énoncés précédemment, on peut remplacer l'utilisation des suites arithmético-géométriques par celle de la suite d'angle  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \arccos \left( \frac{b_n}{a_n} \right).$$

On vérifie alors aisément que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, positive et qu'elle satisfait les relations suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \sin \alpha_n = \frac{c_n}{a_n}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, (1 + \sin \alpha_{n+1})(1 + \cos \alpha_n) = 2. \end{cases}$$

On retrouve alors les différentes formules énoncées dans [1]. En effet, on peut écrire (B.28) sous la forme :

$$K(\kappa) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \sin \alpha_n).$$

Par ailleurs, comme  $4a_n c_n = c_{n-1}^2$ , on montre que

$$(B.44) \quad c_n^2 = \frac{c_{n-1}^2}{4a_n} c_n = \frac{c_{n-1}^2}{4} \sin \alpha_n = \dots = \frac{1}{4^n} \sin^2 \alpha \sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n.$$

On peut donc écrire la relation (B.35) sous la forme :

$$E(\alpha) = K(\alpha) \left[ 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 + \frac{1}{2^2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \dots \right) \right].$$

De même, la relation (B.43) devient :

$$E(\varphi, \alpha) = \frac{E(\alpha)}{K(\alpha)} F(\varphi, \alpha) + \sin \alpha \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\sin \alpha_1} \sin \varphi_1 + \frac{1}{2^2} \sqrt{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} \sin \varphi_2 + \dots \right].$$

Comme pour l'intégrale elliptique du premier type, les estimations théoriques de la proposition B.4.7 ne sont pas optimales et on vérifie dans la pratique que la convergence est presque quadratique. Ceci est illustré par les deux graphiques de la figure 96 où l'on a représenté respectivement

$$n \longmapsto \ln \left| E(\varphi, \alpha) - \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right|$$

et

$$\ln \left| E(\varphi, \alpha) - \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} 2^p c_p^2 \right] \frac{\varphi_{n+1}}{2^{n+1} a_{n+1}} - \sum_{p=0}^{n+1} c_p \sin \varphi_p \right|$$

en fonction de

$$\ln \left| E(\varphi, \alpha) - \left[ 1 - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n 2^p c_p^2 \right] \frac{\varphi_n}{2^n a_n} - \sum_{p=0}^n c_p \sin \varphi_p \right|.$$

Sur chaque graphique on a aussi tracé la droite obtenue par régression linéaire ainsi qu'une droite de pente respectivement  $-\ln 2$  et  $2$ .

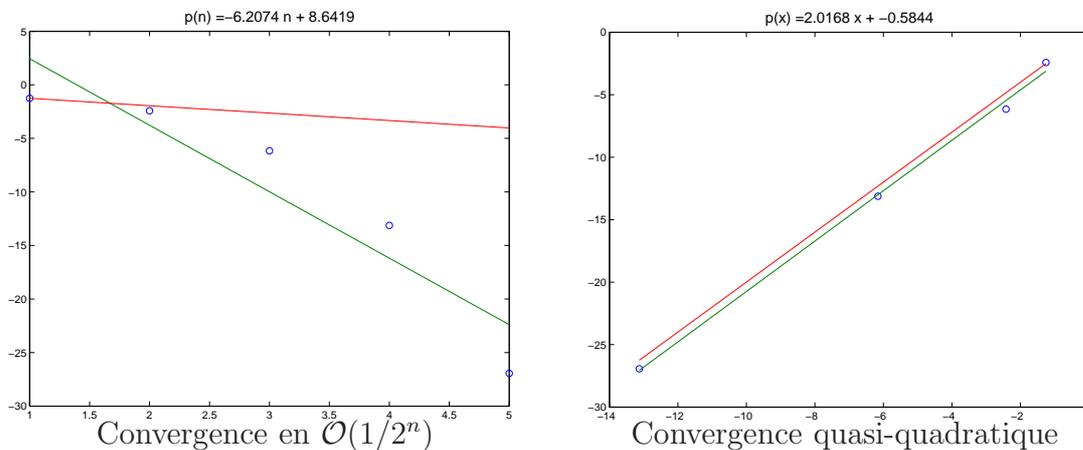


FIG. 96 – Convergence pour  $E(\varphi, \alpha)$

## Annexe C

# Code Matlab pour le calcul du champ radiofréquence

L'annexe C a pour objet la présentation d'une version commentée de la procédure Matlab permettant de calculer le champ radiofréquence donné par la formule (9.8). La procédure se compose des fonctions `antaxi.m` et `agm.m`.

La fonction `antaxi.m` permet le calcul des composantes cylindriques du champ magnétique associé à la  $k$ -ième pulsation de résonance au point de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les autres arguments d'entrée sont les dimensions de l'antenne : sa longueur  $L$ , son rayon  $R$  et son nombre  $N$  de branches. La fonction retourne un vecteur contenant les différentes composantes des champs magnétiques créés par les anneaux du haut, du bas ainsi que par les branches.

```
function fct=antaxi(r,the,z,L,R,N,k)

% Attention : code non valable pour kappa=1, c'est-à-dire sur les anneaux.
% Definition des constantes.

i=complex(0,1); % définition du nombre complexe i
CB=2*i*sin(k*pi/N)*exp(-i*k*pi/N); % définition de  $C_B$  à l'aide de (4.24).
rhoah=sqrt((r+R)^2+(z-L/2)^2); %définition de  $\varrho(r, z, L/2)$ 
rhoab=sqrt((r+R)^2+(z+L/2)^2); %définition de  $\varrho(r, z, -L/2)$ 
kappaah=2*sqrt(r*R)/rhoah; %définition de  $\kappa(r, z, L/2)$ 
kappaab=2*sqrt(r*R)/rhoab; %définition de  $\kappa(r, z, L/2)$ 
% constantes multiplicatives.
Cahr=2*R*(z-L/2)/rhoah^3;
Cabr=-2*R*(z+L/2)/rhoab^3;
Cbr=CB;
Cbt=Cbr;

if r==0
    Caht=Cahr;
    Cabt=Cabr;
    Cahz=2*R^2/rhoah^3;
    Cabz=-2*R^2/rhoab^3;
```

```

else
    Caht=Cahr*CB ;
    Cabt=Cabr*CB ;
    Cahz=-2*R^2/((kappaah^2-1)*rhoah^3) ;
    Cabz=2*R^2/((kappaab^2-1)*rhoab^3) ;
end
% Initialisation.
Bbr=0 ;
Baht=0 ;
Babt=0 ;
Bbt=0 ;
if r==0
    Bahr=0 ;
    Babr=0 ;
    Bahz=pi*(1-CB) ;
    Babz=pi*(1-CB) ;
else
    [Kah,Fah,E1ah,Eah]=agm(kappaah,0) ;
    Bahr=2*(1-CB)*((kappaah^2-2)*E1ah/(kappaah^2-1)-2*Kah)/kappaah^2 ;
    Bahz=2*(1-CB)*E1ah ;
    [Kab,Fab,E1ab,Eab]=agm(kappaab,0) ;
    Babr=2*(1-CB)*((kappaab^2-2)*E1ab/(kappaab^2-1)-2*Kab)/kappaab^2 ;
    Babz=2*(1-CB)*E1ab ;
end
% Calcul.
for j=1:N
    theta=2*pi*(j-1)/N ;
    phi=(pi+the-theta)/2 ;
    % Calcul du champ cree par l'anneau du haut.
    if r==0
        Bahr=Bahr-CB*sin(2*phi)*exp(i*k*theta)/2 ;
        Babr=Babr-CB*sin(2*phi)*exp(i*k*theta)/2 ;
        Baht=Baht-CB*cos(2*phi)*exp(i*k*theta)/2 ;
        Babt=Babt-CB*cos(2*phi)*exp(i*k*theta)/2 ;
        Bahz=Bahz+CB*phi*exp(i*k*theta) ;
        Babz=Babz+CB*phi*exp(i*k*theta) ;
    else
        [Kah,Fah,E1ah,Eah]=agm(kappaah,phi) ;
        Fahz=sin(phi)*cos(phi)/sqrt(1-kappaah^2*sin(phi)^2)-Eah/kappaah^2 ;
        Fahr=(kappaah^2-2)*Fahz/(kappaah^2-1) ;
        Fahr=Fahr+2*Fah/kappaah^2 ;
        Bahr=Bahr-CB*Fahr*exp(i*k*theta) ;
        Bahz=Bahz-CB*kappaah^2*Fahz*exp(i*k*theta) ;
        [Kab,Fab,E1ab,Eab]=agm(kappaab,phi) ;
    end
end

```

---

```

    Fabz=sin(phi)*cos(phi)/sqrt(1-kappaab^2*sin(phi)^2)-Eab/kappaab^2 ;
    Fabr=(kappaab^2-2)*Fabz/(kappaab^2-1) ;
    Fabr=Fabr+2*Fab/kappaab^2 ;
    Babr=Babr-CB*Fabr*exp(i*k*theta) ;
    Babz=Babz-CB*kappaab^2*Fabz*exp(i*k*theta) ;
    Baht=Baht+2*exp(i*k*theta)/(kappaah^2*sqrt(1-kappaah^2*sin(phi)^2)) ;
    Babt=Babt+2*exp(i*k*theta)/(kappaab^2*sqrt(1-kappaab^2*sin(phi)^2)) ;
end
Fb=(z-L/2)/sqrt(r^2+R^2-2*r*R*cos(the-theta)+(z-L/2)^2) ;
Fb=Fb-(z+L/2)/sqrt(r^2+R^2-2*r*R*cos(the-theta)+(z+L/2)^2) ;
Fb=Fb/(r^2+R^2-2*r*R*cos(the-theta)) ;
Bbr=Bbr+R*sin(the-theta)*Fb*exp(i*k*theta) ;
Bbt=Bbt+(-r+R*cos(the-theta))*Fb*exp(i*k*theta) ;
end

Bahr=Cahr*Bahr ;
Babr=Cabr*Babr ;
Bbr=Cbr*Bbr ;
Baht=Caht*Baht ;
Babt=Cabt*Babt ;
Bbt=Cbt*Bbt ;
Bahz=Cahz*Bahz-r*Bahr/(z-L/2) ;
Babz=Cabz*Babz-r*Babr/(z+L/2) ;
Bbz=0 ;

fct=[Bahr Baht Bahz Babr Babt Babz Bbr Bbt Bbz] ;

```

La fonction `agm.m` permet de calculer les intégrales elliptiques complètes et incomplètes du premier et du deuxième type à l'aide des algorithmes B.2.4, B.3.4, B.4.3 et B.4.6. Le cas particulier où l'angle `phi` est un multiple de  $\pi/2$  est traité en fin de programme.

```

function [K,F,E1,E]=agm(k,phi)
format long
% Initialisation
newa=1 ;
newb=sqrt(1-k^2) ;
newc=k ;
i=0 ;
Sc=newc^2 ;
Z=0 ;
seuil=1.E-15 ; % critere d'arret de la boucle while
% on ramene phi entre -pi/2 et pi/2.
r=floor(.5-phi/pi) ;
newphi=phi+r*pi ;
eps=1 ;
% on ramene phi entre 0 et pi/2.

```

```

if newphi<0
    eps=-1;
    newphi=-newphi;
end
% Initialisation pour  $\kappa = 0$  (on ne passe pas dans la boucle while).
olda=newa;
oldphi=newphi/2;
% Mise en œuvre de la relation de Landen.
while abs(newc > seuil)
    i=i+1;
    olda=newa;
    oldb=newb;
    oldc=newc;
    newa=(olda+oldb)/2;
    newb=sqrt(olda*oldb);
    newc=(olda-oldb)/2;
    Sc=Sc+(2^i)*newc^2;
    oldphi=newphi;
    newphi=atan((oldb/olda)*tan(oldphi))+oldphi+floor(oldphi/pi+0.5)*pi;
    Z=Z+newc*sin(newphi);
end
K=pi/(2*olda); %  $K(\kappa)$ 
E1=K*(1-Sc/2); %  $E(\kappa)$ 
F1=oldphi/(olda*2^(i-1));
if floor(2*phi/pi)==2*phi/pi % cas où  $\varphi$  est un multiple de  $\pi/2$ 
    F=(2*phi/pi)*K; %  $F(\varphi, \kappa)$ 
    E=(2*phi/pi)*E1; %  $E(\varphi, \kappa)$ 
else
    F=eps*F1-2*r*K; %  $F(\varphi, \kappa)$ 
    E=eps*(Z+E1*F1/K)-2*r*E1; %  $E(\varphi, \kappa)$ 
end

```

## Annexe D

# Mélina : une bibliothèque de calculs éléments finis

Les différents calculs présentés dans le chapitre 9 ont été réalisés à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis MÉLINA (voir [68]). Ce code est installé et utilisé dans plusieurs laboratoires, en particulier à l'IRMAR et à l'ENSTA.

## Présentation

La bibliothèque d'éléments finis MÉLINA se compose d'un ensemble de routines (en Fortran 77 pour l'instant ; une version C++ est en cours de réalisation) permettant à l'utilisateur de définir et de résoudre des problèmes aux limites gouvernés par des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis en dimension 1, 2 ou 3.

Pour résoudre un problème aux limites à l'aide de MÉLINA, deux éléments sont nécessaires au préalable :

- un maillage du (ou des) domaine(s),
- la formulation variationnelle du problème.

Ensuite, il suffit de transcrire au format approprié la formulation variationnelle du problème (conditions aux limites comprises) et de préciser le type d'élément fini à utiliser (Lagrange  $\mathbb{P}_1$  ou  $\mathbb{Q}_{10}$  aux abscisses de Gauss-Lobatto par exemple).

Un programme MÉLINA se compose généralement de trois fichiers :

- le premier définit la formulation variationnelle à l'aide d'intégrands élémentaires prédéfinis,
- le deuxième regroupe les fonctions annexes utilisées (second membre, poids des intégrales, ...)
- le troisième commande les actions d'assemblage, de résolution et de renseignements des fichiers résultats.

Différents utilitaires concernant la construction ou la visualisation de maillages ainsi que le traitement des sorties graphiques sont disponibles :

- le traducteur MOME permet la traduction de maillages construits à l'aide du

- logiciel MODULEF (voir [58]) au format MÉLINA,
- le mailleur MAILME permet la construction de maillages bidimensionnels paramétriques de haut degré,
  - l'interface graphique MEVISU permet de visualiser les maillages bidimensionnels au format MÉLINA,
  - l'interface graphique GRAME permet de visualiser des fichiers résultats bidimensionnels.

Concernant les fichiers résultats, il est aussi possible de faire des sorties graphiques tridimensionnelles pour MEDIT (voir [57]).

## Mise en œuvre

Dans cette section, on va expliquer rapidement la méthodologie utilisée pour résoudre les problèmes axisymétriques ainsi que les difficultés rencontrées.

### Les maillages

Le maillage tridimensionnel représenté sur la figure 57 du chapitre 9 a été réalisé à l'aide de MODULEF. Il se compose de 131 220 tétraèdres. Le choix de l'utilisation de tétraèdres est imposé par l'utilisation de MEDIT pour la visualisation des résultats tridimensionnels.

Les maillages bidimensionnels présentés au chapitre 9 ont été réalisés à partir d'un programme C++. Pour définir les conditions aux limites dans MÉLINA, il est nécessaire de définir dans le fichier de maillage les différents bords du domaine étudié. La condition vérifiée par le champ magnétique sur  $\Gamma_1$  fait intervenir la normale extérieure à  $\Omega^*$ . Comme celle-ci n'est pas définie aux angles du rectangle  $\Omega^*$ , on a défini séparément chacun des quatre bords (domaines  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ ) ainsi que le domaine  $\Gamma_5$  constitué des quatre coins (voir la figure 97). Pour imposer la condition aux limites  $h \times n = 0$  sur le bord  $\Gamma_1$  de  $\Omega^*$ , on impose d'abord  $h = 0$  aux quatre coins puis  $h \times n = 0$  sur les domaines  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$ .

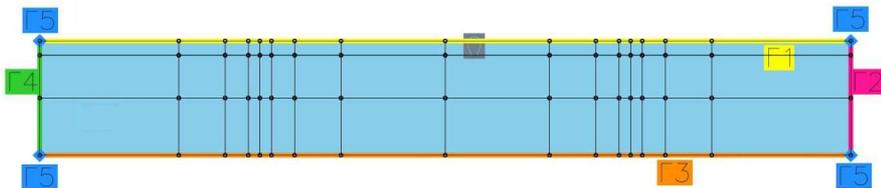


FIG. 97 – Les différents domaines du maillage

### Le code

La bibliothèque MÉLINA contient de nombreux intégrands élémentaires avec lesquels il est possible de composer un nombre important de formulations variation-

nelles. Elle contient les intégrands

$$(D.1) \quad U_{\alpha,\gamma} V_{\beta,\delta} \equiv \int_{\mathcal{O}} \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial \gamma} \overline{\frac{\partial V_{\beta}}{\partial \delta}} dx,$$

où  $U, V$  sont des fonctions scalaires ou vectorielles, les intégrales

$$(D.2) \quad \text{DIVUDIVV} \equiv \int_{\mathcal{O}} \text{div } U \overline{\text{div } V} dx,$$

où  $U$  et  $V$  sont des inconnues vectorielles à 3 composantes et

$$(D.3) \quad \text{ROTUROTV} \equiv \int_{\mathcal{O}} \text{rot } U \cdot \text{rot } V dx,$$

où  $U$  et  $V$  sont des inconnues vectorielles ayant 2 ou 3 composantes.

Pour les calculs en configuration axisymétrique, l'inconnue  $h$  est une fonction vectorielle à 3 composantes alors que le maillage est bidimensionnel. L'intégrand élémentaire (D.3) n'est donc pas approprié et on a décomposé l'intégrale

$$\int_{\Omega^*} \text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h' r dr dz$$

en intégrands élémentaires de la forme (D.1).

De même, le terme  $h \times n$  n'a pas de sens pour une application  $h$  vectorielle à 3 composantes et un vecteur normal  $n$  à 2 composantes. On a donc séparé l'inconnue  $h$  en deux nouvelles inconnues : une inconnue  $H$  à 2 composantes et une inconnue scalaire notée  $K$ . La première idée est d'exploiter la forme des conditions aux limites sur  $\Gamma_1$  et de prendre

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{n,r} \\ h_{n,z} \end{pmatrix} \text{ et } K = h_{n,\theta}.$$

Malheureusement, la condition aux limites sur l'axe pour les coefficients de Fourier d'indice  $\pm 1$  combine les composantes suivant  $r$  et suivant  $\theta$ , et il est impossible de combiner deux inconnues pour une condition aux limites dans MÉLINA. Finalement, on a donc posé :

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{n,r} + i n h_{n,\theta} \\ h_{n,z} \end{pmatrix} \text{ et } K = h_{n,\theta}.$$

Les conditions (8.19) s'expriment alors :

$$\begin{cases} H \times n = 0 \text{ et } K = 0, \text{ sur } \Gamma_0 \\ H = \vec{0}, \text{ sur } \Gamma_0 \\ H = \vec{0} \text{ et } K = 0, \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

De même, la condition  $h_{n,r} n_z - h_{n,z} n_r = h_{n,\theta} = 0$  sur  $\Gamma_1$  devient :

$$H \times n = 0 \text{ et } K = 0, \text{ sur } \Gamma_1.$$

Pour écrire la formulation variationnelle des problèmes axisymétriques, il faut maintenant exprimer les termes  $\text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h'$ ,  $\text{div}_{r,z}^n h_n \overline{\text{div}_{r,z}^n h'}$  et  $h_n \cdot h'$  intervenant dans les problèmes (8.21 - 8.24) en fonction des inconnues  $H$  et  $K$ .

$$\begin{aligned}
\text{rot}_{r,z}^n h_n \cdot \text{rot}_{r,z}^n h' &= \left( \frac{in}{r} h_{n,z} - \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial z} \right) \overline{\left( \frac{in}{r} h'_z - \frac{\partial h'_\theta}{\partial z} \right)} + \left( \frac{\partial h_{n,r}}{\partial z} - \frac{\partial h_{n,z}}{\partial r} \right) \overline{\left( \frac{\partial h'_r}{\partial z} - \frac{\partial h'_z}{\partial r} \right)} \\
&\quad + \left( \frac{1}{r} h_{n,\theta} + \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} - \frac{in}{r} h_{n,r} \right) \overline{\left( \frac{1}{r} h'_\theta + \frac{\partial h'_\theta}{\partial r} - \frac{in}{r} h'_r \right)} \\
&= \frac{1}{r^2} \left[ n^2 h_{n,z} \overline{h'_z} + (1-n^2)^2 h_{n,\theta} \overline{h'_\theta} + in(1-n^2) h_{n,\theta} \overline{(h'_r + inh'_\theta)} \right. \\
&\quad \left. - in(1-n^2) (h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \overline{h'_\theta} - n^2 (h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \overline{(h'_r + inh'_\theta)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[ -inh_{n,z} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial z} + in \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial z} \overline{h'_z} + (1-n^2) h_{n,\theta} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial r} + (1-n^2) \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} \overline{h'_\theta} \right. \\
&\quad \left. + in \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} \overline{(h'_r + inh'_\theta)} - in(h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial r} \right] \\
&\quad + \left[ (1+n^2) \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial z} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial z} + \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial r} + \frac{\partial h_{n,z}}{\partial r} \frac{\partial \overline{h'_z}}{\partial r} \right. \\
&\quad + \frac{\partial (h_{n,r} + inh_{n,\theta})}{\partial z} \frac{\partial \overline{(h'_r + inh'_\theta)}}{\partial z} + in \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial z} \frac{\partial \overline{h'_z}}{\partial r} - in \frac{\partial h_{n,z}}{\partial r} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial z} \\
&\quad - in \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial z} \frac{\partial \overline{(h'_r + inh'_\theta)}}{\partial z} + in \frac{\partial (h_{n,r} + inh_{n,\theta})}{\partial z} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial z} \\
&\quad \left. - \frac{\partial h_{n,z}}{\partial r} \frac{\partial \overline{(h'_r + inh'_\theta)}}{\partial z} - \frac{\partial (h_{n,r} + inh_{n,\theta})}{\partial z} \frac{\partial \overline{h'_z}}{\partial r} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{div}_{r,z}^n h_n \overline{\text{div}_{r,z}^n h'} &= \left( \frac{1}{r} h_{n,r} + \frac{\partial h_{n,r}}{\partial r} + \frac{in}{r} h_{n,\theta} + \frac{\partial h_{n,z}}{\partial z} \right) \overline{\left( \frac{1}{r} h'_r + \frac{\partial h'_r}{\partial r} + \frac{in}{r} h'_\theta + \frac{\partial h'_z}{\partial z} \right)} \\
&= \frac{1}{r^2} \left[ (h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \overline{(h'_r + inh'_\theta)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[ (h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \frac{\partial \overline{(h'_r + inh'_\theta)}}{\partial r} + \frac{\partial (h_{n,r} + inh_{n,\theta})}{\partial r} \overline{(h'_r + inh'_\theta)} \right. \\
&\quad \left. + in(h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial r} - in \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} \overline{(h'_r + inh'_\theta)} + (h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \frac{\partial \overline{h'_z}}{\partial z} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial h_{n,z}}{\partial z} \overline{(h'_r + inh'_\theta)} \right] \\
&\quad + \left[ \frac{\partial (h_{n,r} + inh_{n,\theta})}{\partial r} \frac{\partial \overline{(h'_r + inh'_\theta)}}{\partial r} + \frac{\partial h_{n,z}}{\partial z} \frac{\partial \overline{h'_z}}{\partial z} + n^2 \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial r} \right. \\
&\quad - in \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} \frac{\partial \overline{(h'_r + inh'_\theta)}}{\partial r} + in \frac{\partial (h_{n,r} + inh_{n,\theta})}{\partial r} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial r} - in \frac{\partial h_{n,\theta}}{\partial r} \frac{\partial \overline{h'_z}}{\partial z} \\
&\quad \left. + in \frac{\partial h_{n,z}}{\partial z} \frac{\partial \overline{h'_\theta}}{\partial r} + \frac{\partial h_{n,z}}{\partial z} \frac{\partial \overline{(h'_r + inh'_\theta)}}{\partial r} + \frac{\partial (h_{n,r} + inh_{n,\theta})}{\partial r} \frac{\partial \overline{h'_z}}{\partial z} \right].
\end{aligned}$$

$$h_n \cdot h' = (h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \overline{(h'_r + inh'_\theta)} - inh_{n,\theta} \overline{(h'_r + inh'_\theta)} + in(h_{n,r} + inh_{n,\theta}) \overline{h'_\theta} + (1 + n^2) h_{n,\theta} \overline{h'_\theta} + h_{n,z} \overline{h'_z}.$$

Concernant l'organisation proprement dite du code, on calcule initialement tous les intégrands élémentaires intervenant dans la formulation variationnelle. Puis, à l'intérieur de la boucle sur l'indice du coefficient de Fourier, on calcule les constantes multiplicatives et on assemble la matrice du système linéaire ainsi que le second membre. On les supprime après avoir résolu le système afin de limiter la place mémoire occupée. Ainsi, il n'est pas nécessaire de recalculer à chaque étape les intégrands élémentaires, ce qui représente un gain de temps appréciable. On présente dans la figure 98 une version synthétique du programme MÉLINA utilisé pour résoudre les problèmes axisymétriques.

Calcul des intégrales élémentaires

Pour  $n$  allant de  $1 - ZN$  à  $1 + ZN$  par pas de  $N$

### Résolution du système linéaire

Calcul du coefficient de Fourier d'ordre  $n$

Calcul des constantes multiplicatives

Assemblage de la matrice du système linéaire

Assemblage du second membre

Prise en compte des conditions aux limites

Résolution du système linéaire par factorisation  $LU$

### Post-traitement

Récupération des composantes  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  de la solution

→ Écriture de la norme  $\mathbb{L}^2$  de la solution dans un fichier

→ Sortie graphique de la norme  $l^2$  des composantes

→ Sortie graphique de la norme  $l^2$  de la solution

Calcul de la divergence de la solution

→ Écriture de la norme  $L^2$  de la divergence dans un fichier

→ Sortie graphique de la norme  $l^2$  de la divergence

Calcul du rotationnel de la solution

→ Écriture de la norme  $L^2$  des composantes dans un fichier

→ Écriture de la norme  $\mathbb{L}^2$  du rotationnel dans un fichier

→ Sortie graphique de la norme  $l^2$  des composantes

→ Sortie graphique de la norme  $l^2$  du rotationnel

Fin

FIG. 98 – Schéma du code de calcul



## Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN, eds., *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover Publications Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.
- [2] R. ALVI, W. JAFFE, S. JONES, *Burns associated with electrocardiographic monitoring during magnetic resonance imaging*, *Burns*, 22 (1996), pp. 420–421.
- [3] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, *Math. Methods Appl. Sci.*, 21 (1998), pp. 823–864.
- [4] E. ATALAR, C. J. YEUNG, *RF Transmit Power Limit for the Barewire Loopless Catheter Antenna*, *J. Magn. Reson. Imaging*, 12 (2000), pp. 86–91.
- [5] —, *A Green's function approach to local rf heating in interventional MRI*, *Med. Phys.*, 28 (2001), pp. 826–832.
- [6] E. ATALAR, H. JI, J-M. SERFATY, X. YANG, C. J. YEUNG, *Thermal effect of intravascular MR imaging using an MR imaging-guidewire : en in vivo laboratory and histopathological evaluation*, *Med. Sci. Monit.*, 8 (2002), pp. 113–117.
- [7] E. ATALAR, R. C. SUSIL, C. J. YEUNG, *Modeling of RF Heating Due to Metal Implants in MRI*, *IEEE Antennas and Propagating Systems International Symposium*, San Antonio, (2002), pp. 823–826.
- [8] —, *RF Heating Due to Conductive Wires During MRI Depends on the Phase Distribution of the Transmit Field*, *Magn. Reson. Med.*, 48 (2002), pp. 1096–1098.
- [9] —, *RF Safety of Wires in Interventional MRI : Using a Safety Index*, *Magn. Reson. Med.*, 47 (2002), pp. 187–193.
- [10] E. ATALAR, X. DU, B. QIU, X. YANG, C. J. YEUNG, *Development of an Intravascular Heating Source Using an MR Imaging Guidewire*, *J. Magn. Reson. Imaging*, 16 (2002), pp. 716–720.
- [11] C. J. G. BAKKER, L. W. BARTELS, M. K. KONINGS, H. F. M. SMITS, *Heating Around Intravascular Guidewires by Resonating RF Waves*, *J. Magn. Reson. Imaging*, 12 (2000), pp. 79–85.
- [12] S. BALAC, *Artefacts de susceptibilité magnétique en IRM : étude du problème de magnétostatique et simulation numérique*, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 1997.
- [13] S. BALAC, G. CALOZ, *Mathematical Modeling and Numerical Simulation of Magnetic Susceptibility Artifacts in Magnetic Resonance Imaging*, *Comput. Methods Biomech. Biomed. Engin.*, 3 (2000), pp. 335–349.

- [14] C. BERNARDI, M. DAUGE,, Y. MADAY, *Spectral methods for axisymmetric domains*, vol. 3 of Series in Applied Mathematics (Paris), Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris, 1999.
- [15] P. BOESIGER, R. CANDINAS, F. DURU, R. LUECHINGER, *Safety considerations for magnetic resonance imaging of pacemaker and ICD patients*, *Herzschr Elektrophys*, 15 (2004), pp. 73–81.
- [16] J. M. BORWEIN, P. B. BORWEIN, *Pi and the AGM*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1987. A study in analytic number theory and computational complexity, A Wiley-Interscience Publication.
- [17] A. BOSSAVIT, *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, vol. 14 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [18] H. BOUK'HIL, *Étude de l'échauffement de biomatériaux métalliques en Imagerie par Résonance Magnétique. Développement de nouvelles techniques de mesure*, Mémoire de DEA, Université de Rennes 1, (1999).
- [19] —, *Contribution à la caractérisation des effets thermiques liés aux biomatériaux métalliques en IRM*, Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, 2003.
- [20] H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [21] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [22] G. BRINKER, G. BRIX, M. REINL, *Sampling and evaluation of specific absorption rates during patient examinations performed on 1.5-Tesla MR systems*, *Magn. Reson. Imag.*, 19 (2001), pp. 769–779.
- [23] D. N. BUECHLER, D. A. CHRISTENSEN, C. H. DURNEY, *Calculation of electric fields induced near metal implants by Magnetic Resonance Imaging switched-gradient magnetic fields*, *Magn. Reson. Imag.*, 15 (1997), pp. 1157–1166.
- [24] A. BUFFA, *Trace theorems on non-smooth boundaries for functional spaces related to Maxwell equations : an overview*, *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, 28 (2003), pp. 23–34.
- [25] A. BUFFA, P. CIARLET, JR., *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. I. An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra*, *Math. Methods Appl. Sci.*, 24 (2001), pp. 9–30.
- [26] —, *On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. II. Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications*, *Math. Methods Appl. Sci.*, 24 (2001), pp. 31–48.
- [27] A. BUFFA, M. COSTABEL,, D. SHEEN, *On traces for  $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains*, *J. Math. Anal. Appl.*, 276 (2002), pp. 845–867.

- [28] P. F. BYRD, M. D. FRIEDMAN, *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd LXVII, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [29] M. CESSENAT, *Mathematical methods in electromagnetism*, vol. 41 of Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [30] D. W. CHAKERES, A. KANGARLU, F. G. SHELLOCK, *8.0-Tesla Human MR System : Temperature Changes Associated With Radiofrequency-Induced Heating of a Head Phantom*, J. Magn. Reson. Imaging, 17 (2003), pp. 220–226.
- [31] C. CHIN, C. M. COLLINS, B. J. DARDZINSKI, S. LI, M. B. SMITH, *A Method to Create an Optimum Current Distribution and Homogeneous  $B_1$  Field for Elliptical Birdcage Coils*, Magn. Reson. Med., 37 (1997), pp. 600–608.
- [32] Y. CHU, *Numerical Calculation for the Magnetic Field in Current-Carrying Circular Arc Filament*, IEEE Transactions on magnetics, 34 (1998), pp. 502–504.
- [33] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, vol. 40 of Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam ; MR0520174 (58 #25001)].
- [34] B. CONDON, M. F. DEMPSEY, *Thermal Injuries Associated with MRI*, Clinical Radiology, 56 (2001), pp. 457–465.
- [35] P. J. DAVIS, *Circulant matrices*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1979. A Wiley-Interscience Publication, Pure and Applied Mathematics.
- [36] J. D. DE CERTAINES, *Is Biomedical Nuclear Magnetic Resonance Limited by a Revisitable Paradigm in Physics ?*, to appear in Mol. and Cell. Biol., (2005).
- [37] J. D. DE CERTAINES, W. M. M. J. BOVEE, P. F., *Magnetic Resonance Spectroscopy in Biology and Medicine*, Edited by J.D. de Certaines, W.M.M.J. Bovée, F. Podo, Pergamon Press, Oxford, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris, 1992.
- [38] R. J. DEMEURE, *Physique IRM-IRM d'aujourd'hui et de demain*, Louvain Med., 118 (1999), pp. 107–113.
- [39] M. F. DEMPSEY, B. CONDON, D. M. HADLEY, *Investigation of the Factors Responsible for Burns During MRI*, J. Magn. Reson. Imaging, 13 (2001), pp. 627–631.
- [40] F. D. DOTY, G. J. ENTZMINGER, C. D. HAUCK, J. P. STAAB, *Practical Aspects of Birdcage Coils*, J. Magn. Reson., 138 (1999), pp. 144–154.
- [41] J. DRONIOU, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles*, Polycopié de l'Ecole Doctorale de Maths-Info de Marseille, 2001, pp. 1–85.
- [42] G. DUCKWILER, K. FARAHANI, C.-Y. LIU, D. S. LU, A. OPPELT, *Safety of MRI-Guided Endovascular Guidewire Applications*, J. Magn. Reson. Imaging, 12 (2000), pp. 75–78.

- [43] G. DUVAUT, J.-L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.
- [44] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [45] J. P. FINN, J. D. GREEN, Y. LI, D. LI, R. A. OMARY, E. SCHIRF, *Real-Time Magnetic Resonance Imaging-Guided Coronary Catheterization in Swine*, *Circulation*, 107 (2003), pp. 2656–2659.
- [46] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, vol. 224 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1983.
- [47] G. GIOVANNETTI, L. LANDINI, M. F. SANTARELLI, P. VINCENZO, *A fast and accurate simulator for the design of birdcage coils in MRI*, *MAGMA*, 15 (2002), pp. 36–44.
- [48] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, vol. 5 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [49] W. GREATBATCH, V. MILLER, F. G. SHELLOCK, *Magnetic Resonance Safety Testing of a Newly-Developed Fiber-Optic Cardiac Pacing Lead*, *J. Magn. Reson. Imaging*, 16 (2002), pp. 97–103.
- [50] J. GRELLET, C. GUINET, *Introduction à l'IRM. De la théorie à la pratique*, Masson, 1992.
- [51] F. W. GROVER, *Inductance calculations, Working Formulas and Tables*, Dover publications, 1946.
- [52] A. HARAUX, *Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains*, *Math. Rep.*, 3 (1987), pp. i–xxiv and 1–281.
- [53] C. HAYES, W. EDELSTEIN, J. SCHENCK, O. MUELLER, M. EASH, *An Efficient, Highly Homogeneous Radiofrequency Coil for Whole-Body NMR Imaging at 1.5 T*, *J. Magn. Reson.*, 63 (1985), pp. 622–628.
- [54] C. HAZARD, M. LENOIR, *On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell's equations*, *SIAM J. Math. Anal.*, 27 (1996), pp. 1597–1630.
- [55] C. HE, F. LIU, L. XIA, H. ZHAO, *Study Of Heart Stimulation Caused By Induced Eddy-Currents In Fast Switched MRI*, XVII. Annual Conference HE-PATHOLOGY AND GENE THERAPY, Hangzhou, (2002).
- [56] D. I. HOULT, D. PHIL, *Sensitivity and Power Deposition in a High-Field Imaging Experiment*, *J. Magn. Reson. Imaging*, 12 (2000), pp. 46–67.
- [57] INRIA, MEDIT, *logiciel de visualisation graphique*.  
<http://www.ann.jussieu.fr/~frey/logiciels/medit.html>.
- [58] —, MODULEF, *une bibliothèque modulaire d'éléments finis*.  
<http://www-rocq.inria.fr/modulef/>.
- [59] A. ISNARD, C. PIOCHE, *Les Problèmes actuels en Imagerie Interventionnelle*, Projet DESS “THB”, UTC, (1997), pp. 1–37.

- [60] J. JIN, *Electromagnetic Analysis and Design in Magnetic Resonance Imaging*, CRC Press, 1997.
- [61] Y. LAFRANCHE, D. MARTIN, FIG4TEX, *macros pour le graphisme de précision*. <http://perso.univ-rennes1.fr/yvon.lafranche/fig4tex/index.html>.
- [62] A. C. LARDO, *Real-Time Magnetic Resonance Imaging : Diagnostic and Interventional Applications*, *Pediatric Cardiology*, 21 (2000), pp. 80–98.
- [63] R. W. M. LAU, R. J. SHEPPARD, *The modelling of biological systems in three dimensions using the time domain finite-difference method : I. The implementation of the model*, *Phys. Med. Biol.*, 31 (1986), pp. 1247–1256.
- [64] M. C. LEIFER, *Resonant Modes of the Birdcage Coil*, *J. Magn. Reson.*, 124 (1997), pp. 51–60.
- [65] V. LEVILLAIN, *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*, Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1991.
- [66] J. S. LEWIN, A. METZGER, W. R. SELMAN, *Intraoperative Magnetic Resonance Image Guidance in Neurosurgery*, *J. Magn. Reson. Imaging*, 12 (2000), pp. 512–524.
- [67] B. K. LI, *Magic angle magnetic resonance imaging*, PhD thesis, Queensland University, 2000.
- [68] D. MARTIN, MÉLINA, *bibliothèque de calculs éléments finis*. <http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin/melina/index.html>.
- [69] B. MERCIER, G. RAUGEL, *Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en  $r$ ,  $z$  et séries de Fourier en  $\theta$* , *RAIRO Anal. Numér.*, 16 (1982), pp. 405–461.
- [70] C. T. W. MOONEN, *MR temperature mapping in local drug delivery and therapy*, *Medica Mundi*, 44 (2000), pp. 34–42.
- [71] D. MUGNOLO, *Semigruppi di Operatori Non Lineari e Problemi di Cauchy Astratti*, PhD thesis.
- [72] L. PAQUET, *Problèmes mixtes pour le système de Maxwell*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (5), 4 (1982), pp. 103–141.
- [73] D. L. PARKER, *Applications of NMR imaging in hyperthermia : an evaluation of the potential for localized tissue heating and noninvasive temperature monitoring*, *IEEE Trans Biomed Eng.*, 31 (1984), pp. 161–167.
- [74] B. QUESSON, *Développements méthodologiques et instrumentaux appliqués à la spectroscopie et à l'imagerie par résonance magnétique nucléaire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, 1998.
- [75] M. REMAKI, *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell stationnaires en milieu hétérogène*, Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.
- [76] A. R. REZAI, D. FINELLI, J. A. NYENHUIS, G. HRDLICKA, J. TKACH, A. SHARAN, P. RUGIERI, P. H. STYPULKOWSKI, F. G. SHELLOCK, *Neurostimulation Systems for Deep Brain Stimulation : In Vitro Evaluation of Magnetic Resonance Imaging-Related Heating at 1.5 Tesla*, *J. Magn. Reson. Imaging*, 15 (2002), pp. 241–250.

- 
- [77] F. G. SHELLOCK, *MR Imaging and Cervical Fixation Devices : Evaluation of Ferromagnetism, Heating, and Artifacts at 1.5 Tesla*, Magn. Reson. Imag., 14 (1996), pp. 1093–1098.
- [78] ———, *Metallic Neurosurgical Implants : Evaluation of Magnetic Field Interactions, Heating, and Artifacts at 1.5-Tesla*, J. Magn. Reson. Imaging, 14 (2001), pp. 295–299.
- [79] F. G. SHELLOCK, V. J. SHELLOCK, *Vascular access ports and catheters : ex vivo testing of ferromagnetism, heating, and artifacts associated with MR imaging*, Magn. Reson. Imag., 14 (1996), pp. 443–447.
- [80] J. TROPP, *The Theory of the Bird-Cage Resonator*, J. Magn. Reson., 82 (1989), pp. 51–62.
- [81] ———, *Mutual Inductance in the Bird-Cage Resonator*, J. Magn. Reson., 126 (1997), pp. 9–17.
- [82] D. VADROT, L. ARRIVÉ, C. GUINET, *Imagerie par Résonance Magnétique, Notions théoriques, Applications pratiques abdomino-pelviennes*, Maloine, 1987.
- [83] J. J. VAN DER KLINK, R. MEULI, J. PICTET, S. WICKY, *Radiofrequency heating around resonant lengths of wire in MRI*, Physics in Medicine and Biology, 47 (2002), pp. 2973–2985.
- [84] V. VOGELSANG, *On the strong unique continuation principle for inequalities of Maxwell type*, Math. Ann., 289 (1991), pp. 285–295.