

Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale

Pierre Martinon

novembre 2005



Méthode de tir et homotopie

Introduction

On souhaite résoudre numériquement les problèmes suivants:

- Problème de transfert orbital à poussée faible (contrôle bang-bang, grand nombre de révolutions)
- Problèmes présentant des arcs singuliers.

Méthodes directes (Discrétisation état / contrôle)

→ Problème d'optimisation non-linéaire

A priori mal adaptées pour un grand nombre de commutations.

Méthodes indirectes (Conditions nécessaires)

Basées sur le Principe du Maximum de Pontriaguine.

Rapides et précises dans les cas favorables.

Méthode de tir

Problème de contrôle optimal \rightarrow Système d'équations non linéaires

Problème de départ (P)



Problème aux deux bouts (BVP)



Problème à valeur initiale (IVP)



Fonction de tir S

Résoudre $S(z) = 0 \rightarrow$ Trouver une solution de (P)

Difficultés d'application pour les problèmes étudiés

Transfert orbital: S est peu régulière

La fonction de tir n'est pas différentiable (ni même définie) partout. Il faut un bon point initial pour faire converger le tir simple.

Arcs singuliers: S est multi-valuée

→ Tir multiple: requiert la connaissance de la structure du contrôle (nombre d'arcs singuliers en particulier).

Comment résoudre ces difficultés ?

→ On utilise une méthode homotopique pour obtenir les informations nécessaires (point initial et structure du contrôle), **sans connaissance a priori sur la solution du problème.**

Homotopie et chemin de zéros

Paramétrer le problème (P) par $\lambda \in [0, 1]$:

Famille de problèmes (P_λ) telle que

- (P_0) soit suffisamment simple à résoudre.
- (P_1) soit le problème originel (P) .

On définit l'homotopie H par

$$H : (z, \lambda) \mapsto S_\lambda(z)$$

Méthode homotopique (continuation)

- Partir d'un zéro z_0 connu de $H(\cdot, 0)$
- Suivre le chemin de zéros de H jusqu'à atteindre $\lambda = 1$
- On a alors un zéro z_1 de $H(\cdot, 1) = S_1 = S$.

Résultats de convergence (cf J.Gergaud)

Convergence de l'homotopie

On note $y = (x, p) \in \mathbf{R}^n$ le couple état-état adjoint.

$\mathcal{H} : [a, b] \times \mathbf{R}^n \times U \rightarrow \mathbf{R}$ continu et convexe par rapport à u .

Soit $\Gamma(t, x, p)$ l'ensemble des solutions de $\min_{u \in U} \mathcal{H}(t, x, p, u)$.

Sous les bonnes hypothèses (en particulier Γ à valeurs compactes convexes non vides et **scs**), de toute suite de solutions (y_{λ_k}) de $(BVP)_{\lambda_k}$ ($\lambda_k \rightarrow 1$), on peut extraire une sous suite (y_k) vérifiant:

- (i) (y_k) converge uniformément vers y solution de $(BVP)_1$.
- (ii) (\dot{y}_k) converge *-faiblement vers \dot{y} dans $L_n^\infty([0, t_f])$.
- et (iii) (u_k) converge *-faiblement dans $L_n^\infty([0, t_f])$.

Algorithme simplicial

Principe: approximation affine par morceaux du chemin

On considère une homotopie $H : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Simplexe et face

On appelle **simplexe** l'enveloppe convexe de $n + 2$ points affinement indépendants de \mathbf{R}^{n+1} . On appelle **k-face** l'enveloppe convexe de k sommets d'un simplexe (**face** pour $k = n + 1$).

Triangulation

On appelle **triangulation** toute famille dénombrable T de simplexes de \mathbf{R}^{n+1} vérifiant:

- L'intersection de deux simplexes est soit une k -face soit vide.
- T est localement finie.

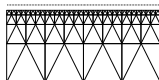
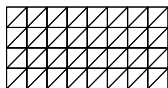


Illustration des triangulations K_1 et J_3

Étiquetage des sommets

On définit l'étiquetage l par $l(v^i) = H(z^i, \lambda^i)$, avec $v^i = (z^i, \lambda^i)$.
On définit H_T par interpolation affine sur les sommets des simplexes de T .

Face complètement étiquetée

Une face $[v_1, \dots, v_{n+1}]$ est dite **complètement étiquetée** ssi elle contient un zéro de H_T , ceci restant vrai à une certaine perturbation près (*précisément, elle contient une solution v_ϵ de l'équation $H_T(v) = \vec{\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, avec $\vec{\epsilon} = (\epsilon, \dots, \epsilon^n)$*).

Propriété fondamentale

Tout simplexe possède soit **aucune**, soit **exactement deux** faces complètement étiquetées.

Algorithme simplicial général

Simplexe de départ donné (face complètement étiquetée en $\lambda = 0$).

Tant que l'on n'a pas atteint $\lambda = 1$

- Déterminer la seconde face compl. étiquetée du simplexe courant.
- Construire l'unique simplexe partageant cette face (pivotage)
→ nouveau simplexe courant.

Fin Tant que

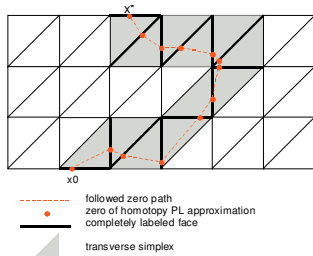


Illustration schématique en dimension 2

Propriétés

- Le chemin suivi ne reboucle pas sur lui-même
- Il est possible de suivre un chemin de rang non maximal
- Adaptation possible au cas multi-valué

Convergence pour H multi-valuée (cf Allgower-Georg)

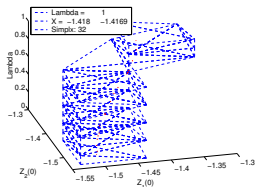
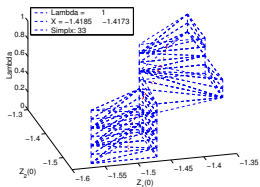
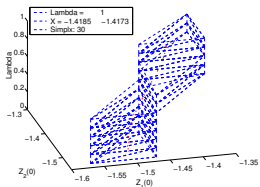
On considère un algorithme simplicial utilisant une sélection de H comme étiquetage et une triangulation raffinée de $\mathbf{R}^n \times [0, 1[$.

Sous les hypothèses suivantes:

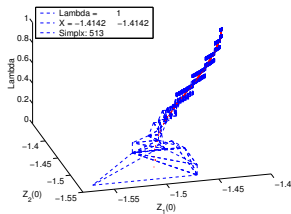
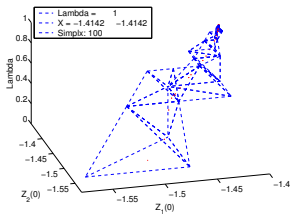
- (i) les faces générées restent dans $K \times [0, 1]$ (K compact).
- (ii) l'algorithme ne redescend pas en $\lambda = 0$.

Alors si H est scs et à valeurs convexes compactes, l'algorithme génère une suite (z_i, λ_i) telle que $\lambda_i \rightarrow 1$, et il existe une sous-suite qui converge vers $(z, 1)$ tel que $0 \in H(z, 1)$.

Exemples de suivis pour diverses triangulations



Triangulations uniformes K_1, J_1, D_1



Triangulations raffinées J_3 et J_4

Homotopie de jonction

Objectif:

On souhaite pouvoir trouver une face étiquetée pour une **taille de triangulation donnée, à un niveau λ_j donné.**

Utilité:

- Initialisation du suivi de chemin (première face en $\lambda = 0$)
- Changer de triangulation au cours du suivi
- Raffinage de solution en $\lambda = 1$

Principe:

Homotopie intermédiaire à λ_j fixé: on essaye de connecter une application affine bien choisie à $H(\cdot, \lambda_j)$, en utilisant la taille de triangulation voulue. Le choix de l'application affine permet d'initialiser facilement cette homotopie de jonction.

Triangulation adaptative

Objectif: améliorer la rapidité et/ou la précision du suivi

Triangulations raffinées ? Délicates à utiliser en pratique (taille figée dès le départ, indépendamment du chemin)

Idée: adapter **dynamiquement** la triangulation au chemin suivi

A certains "étages" $\lambda = \lambda_i$ du suivi de chemin:

- on détermine la nouvelle taille δ souhaitée.
- on effectue une homotopie de jonction pour trouver une face étiquetée de taille δ au niveau λ_i .
- le suivi continue avec la nouvelle taille jusqu'au prochain étage.

2 mécanismes pour choisir la nouvelle taille:

Contrôle de déviation: adapter la taille à la précision du suivi.

Déformation anisotropique: mieux coller à la direction du chemin.

Contrôle de déviation

Norme de H aux zéros de H_T : indication de la précision du suivi.
Suivant la qualité de cette indication, on dilate ou rétrécit uniformément la triangulation.

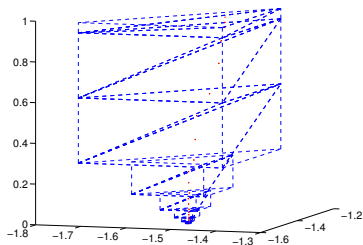


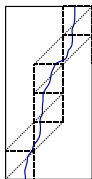
Illustration sur un exemple simple

Effet souhaité:

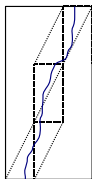
Accélérer le suivi, sans trop dégrader la précision.

Déformation anisotrope

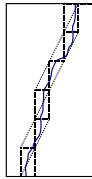
On évalue le poids relatif de chaque dimension dans le chemin suivi depuis l'étage précédent. On agrandit (*diminue*) la triangulation suivant les dimensions majoritaires (*minoritaires*).



$$\delta_1 = \delta_2$$



$$\delta_2 \leftarrow 2\delta_2$$



$$\delta_1 \leftarrow \frac{\delta_1}{2}$$



$$(\delta_1, \delta_2) \leftarrow \left(\frac{\delta_1}{2}, 2\delta_2\right)$$

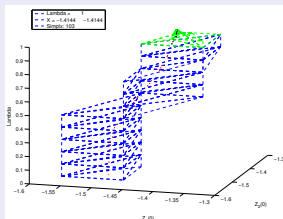
Effet souhaité:

Meilleure précision, permet d'équilibrer le contrôle de déviation.

Raffinage de solutions

Objectif: améliorer la solution en $\lambda = 1$.

Première idée: triangulation raffinée avant $\lambda = 1$ pour finir le suivi



Inconvénient: on retrouve les problèmes des triangulations raffinées.

Seconde idée: effectuer une suite de jonctions en $\lambda = 1$

avec des triangulations successives de taille décroissante
(cf algorithme de redémarrage de Merrill)

Efficace en général, mais coût des jonctions souvent élevé.

Conclusion

- L'utilisation des homotopies de jonction permet d'initialiser facilement l'algorithme simplicial, et de réaliser les changements de taille de la triangulation adaptative
- Pour la triangulation adaptative, on a tenté de préserver la robustesse de l'algorithme simplicial (pas de dérivées, mêmes réglages numériques pour tous les problèmes)

Transfert orbital

Présentation du problème

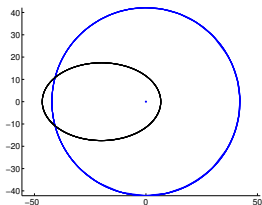
Problème de transfert orbital (CNES)

Orbite initiale: ellipse faiblement inclinée (7 degrés)

Orbite finale: géostationnaire géosynchrone

Critère: maximisation de la masse finale (charge utile)

On considère des propulseurs à poussée faible.



Difficultés:

- Critère masse → contrôle bang-bang
- Poussée faible → grand nombre de révolutions

Formulation du problème

Modélisation des forces: force centrale + poussée du propulseur

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\mu_0 \frac{r}{|r|^3} + \frac{u}{m} \\ \dot{m} = -\frac{T_{Max}}{I_{sp}g_0} |u| \end{cases}$$

$\mu_0 = \mathcal{G}m_T$ constante gravitationnelle de la Terre.

T_{Max} la poussée maximale ($|u| \leq 1$).

I_{sp} l'impulsion spécifique du propulseur.

Pour la résolution pratique (cf T.Haberkorn):

- on minimise la consommation de carburant.
- coordonnées non cartésiennes, issues des paramètres orbitaux.
- intégration suivant la longitude et non le temps.
- temps final et longitude finale fixés.

Homotopie sur le critère

Critère “énergie vers masse”

On part d'un critère quadratique (minimisation d'une “énergie”) pour arriver au critère consommation:

$$J_\lambda = \text{Min} \int_{t_0}^{t_f} \lambda |u(t)| + (1 - \lambda) |u(t)|^2 dt.$$

Homotopie: fonction de tir correspondante pour $\lambda \in [0, 1]$

$$H : (z, \lambda) \mapsto S_\lambda(z)$$

- $\lambda < 1$: contrôle continu (Hamiltonien strictement convexe)
- $\lambda = 1$: contrôle bang-bang (on retrouve le problème original)

Suivi de chemin et résultats

Initialisation en $\lambda = 0$:

On effectue un tir en intégrant à pas fixe (Runge Kutta 4).
Cette solution suffit pour la première jonction du simplicial.

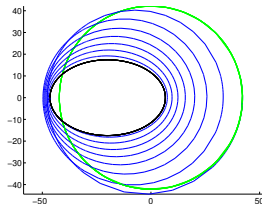
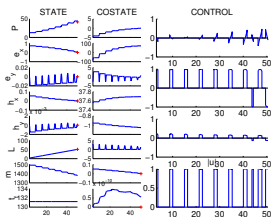
Résultats

T_{max}	Norme initiale	Simplexes	Temps	Objectif	Norme finale
10N	$3.29 \cdot 10^{-4}$	1336	20	121.21	$3.43 \cdot 10^{-10}$
5N	$1.55 \cdot 10^{-4}$	1909	51	121.58	$4.63 \cdot 10^{-10}$
1N	$3.09 \cdot 10^{-3}$	840	132	121.78	$8.02 \cdot 10^{-11}$
0.5N	$3.58 \cdot 10^{-3}$	2028	548	121.69	$1.12 \cdot 10^{-9}$
0.2N	$6.34 \cdot 10^{-3}$	912	661	121.71	$3.21 \cdot 10^{-9}$
0.1N	$8.33 \cdot 10^{-3}$	775	1252	121.70	$1.75 \cdot 10^{-6}$

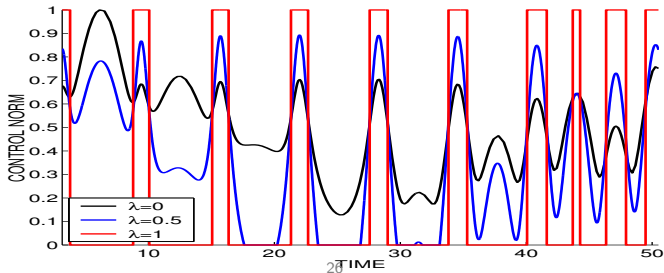
Le suivi se déroule sans difficultés majeures jusqu'en $\lambda = 1$.
Le nombre de simplexes ne semble pas lié à la poussée T_{Max} .
Le tir donne des résultats cohérents avec ceux de T.Haberkorn.

Transfert à $T_{Max} = 10$ Newtons

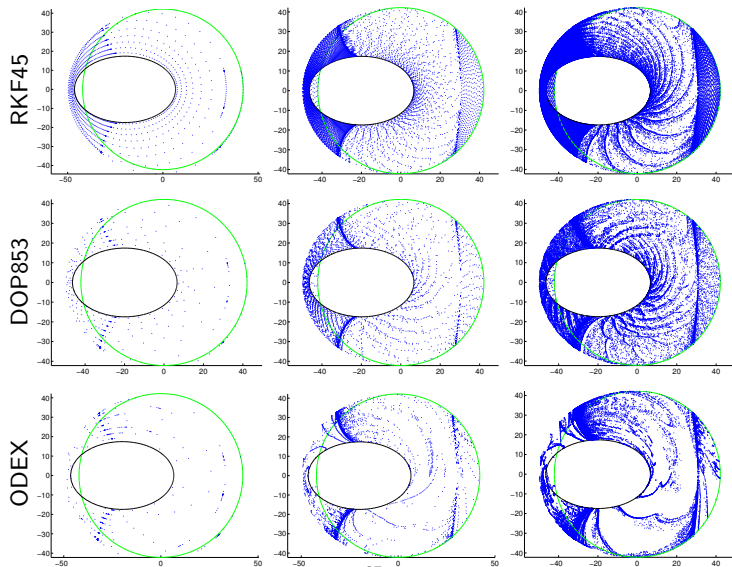
Solution en $\lambda = 1$



Evolution du contrôle le long du chemin



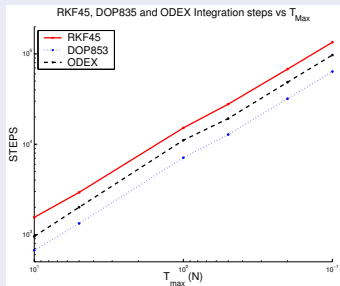
Comparaison des intégrateurs: Trajectoires pour 10,1,0.1N



Pas d'intégration suivant la poussée T_{Max}

Pour chacun des trois intégrateurs, on a:

$$\text{Integration steps} \times T_{Max} \approx C^{te}$$

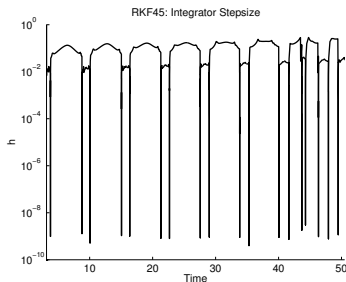
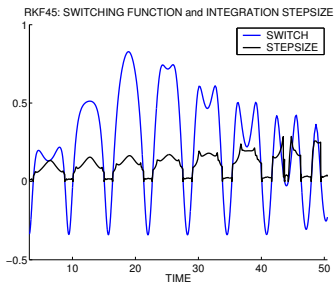


Note: échelle logarithmique pour les deux axes

Confirme la très grande régularité du problème par rapport à T_{max}
(on avait déjà $t_f \times T_{Max} \approx C^{te}$, $L_f \times T_{Max} \approx C^{te}$)

Trajectoire et pas - RKF45

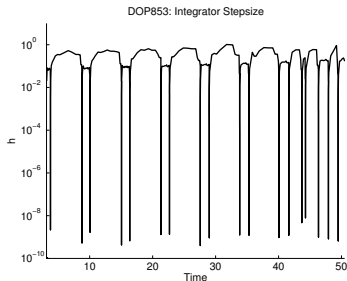
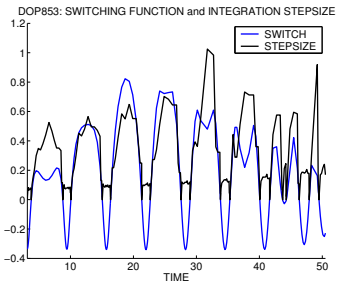
- RKF45: méthodes de Runge Kutta imbriquées (4,5)



- Disposition régulière des points, 3 plages de valeurs du pas
- Plus grand pas sur les arcs sans poussée (seule L évolue)
- Pas extrêmement faible aux commutations (10^{-9})

Trajectoire et pas - DOP853

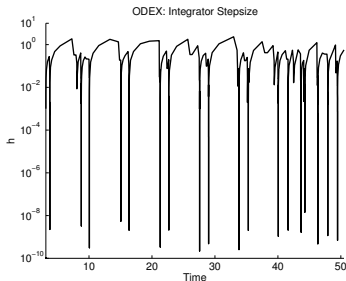
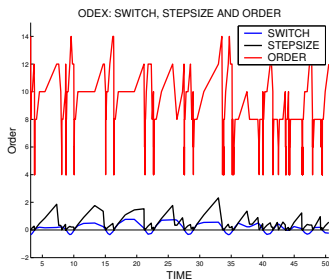
- DOP853: méthodes de Runge Kutta imbriquées (8,5-3)



- Similarité avec RKF45 dans la répartition de points
- Globalement, plus grand pas que pour RKF45 (ordre plus élevé)
- Toujours très faible pas aux commutations

Trajectoire et pas - ODEX

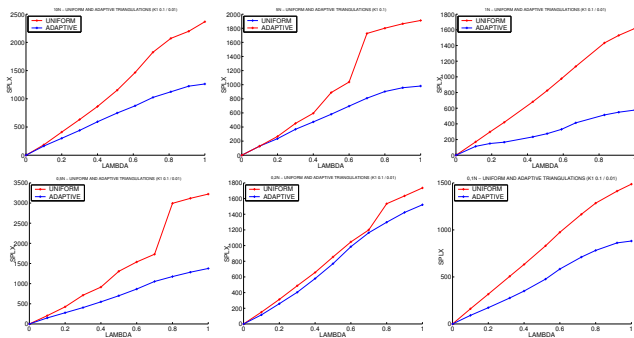
- ODEX: Extrapolation (ordre variable)



- Disposition moins régulière des points
- Présence de très grands pas (extrapolation, ordre élevé)
- Toujours très faible pas aux commutations
- Ordre généralement élevé (≥ 8), redescend aux commutations

Triangulation adaptative

Nombre de simplexes parcourus le long du chemin
(uniforme / adaptatif) pour $T_{Max} = 10, 5, 1, 0.5, 0.2$ et $0.1N$



- Moins de simplexes parcourus (et suivi plus lisse)
- Meilleure précision finale (tir plus rapide)
- MAIS: le coût des jonctions annule parfois le gain ainsi réalisé !

Conclusion

- Résolution du problème jusqu'à $T_{Max} = 0.1N$, on retrouve des résultats cohérents avec ceux de l'homotopie différentielle (pour un temps 3 à 5 fois supérieur).
- Les 3 intégrateurs étudiés parviennent à réaliser l'intégration, mais les commutations (plus de 1500 à $0.1N$) nécessitent des pas très faibles (10^{-9}).
- Mode adaptatif qualitativement satisfaisant (moins de simplexes, suivi plus précis) mais souffre parfois du coût numérique élevé des jonctions.

Arcs singuliers

Introduction

Arc singulier:

Intervalle non réduit à un point sur lequel la minimisation de \mathcal{H} ne détermine pas u^* de façon unique.

Inclusion différentielle:

φ la dynamique du couple état-état adjoint $y = (x, p)$.

Γ l'expression du contrôle optimal, Γ est multi-valuée et on a

$$(BVP) \begin{cases} \dot{y} \in \Phi(y) = \varphi(y, \Gamma(y)) & pp \text{ sur } [t_0, t_f] \\ \text{Conditions aux limites} \end{cases}$$

Résolution par Tir multiple:

Requiert typiquement la connaissance de la structure singulière (nombre, localisation approximative et nature des arcs).

Problème 1: pêche optimale

$$(P_1) \begin{cases} \text{Min} \int_0^{10} \left(\frac{c}{x(t)} - E \right) u(t) U_{\max} dt \\ \dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) - u(t) U_{\max} \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 10] \\ x(0) = 70 \cdot 10^6 \quad x(10) \text{ libre} \end{cases}$$

$$E = 1, c = 17.5 \cdot 10^6, r = 0.71, k = 80.5 \cdot 10^6, U_{\max} = 20 \cdot 10^6$$

Fonction de commutation et contrôle optimal:

$$\psi(t) = \frac{c}{x(t)} - E - p(t), \quad \begin{cases} u^*(t) = 0 & \text{si } \psi(t) > 0 \\ u^*(t) = 1 & \text{si } \psi(t) < 0 \\ u^*(t) \in [0, 1] & \text{si } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Sur un arc singulier: via $\ddot{\psi} = 0$

$$u_{\text{sing}}^* = \frac{k r}{2 \left(\frac{c}{x} - p \right) U_{\max}} \left(\frac{c}{x} - \frac{c}{k} - p + \frac{2px}{k} - \frac{2px^2}{k^2} \right)$$

Problème 2: régulateur quadratique

$$(P_2) \begin{cases} \text{Min } \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ -1 \leq u(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, 5] \\ x(0) = (0, 1) \\ x(5) \text{ libre.} \end{cases}$$

Fonction de commutation et contrôle optimal:

$$\psi(t) = p_2(t), \quad \begin{cases} u^*(t) = -\text{sign } p_2(t) & \text{si } \psi(t) \neq 0 \\ u^*(t) \in [-1, 1] & \text{si } \psi(t) = 0. \end{cases}$$

Sur un arc singulier: via $\ddot{\psi} = 0$

$$u_{\text{sing}}^*(t) = x_1(t)$$

Homotopie sur le critère: perturbation quadratique

Ajout d'une perturbation quadratique au critère ($\lambda \in [0, 1]$)

On régularise ces problèmes en ajoutant un terme en u^2 au critère (note: $\frac{c}{x} - E < 0$).

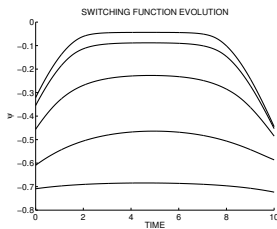
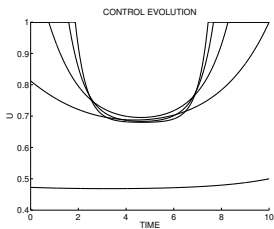
$$(J_1^\lambda) \quad \text{Min} \int_0^{10} \left(\frac{c}{x} - E \right) (u - (1 - \lambda) u^2) U_{\max} dt$$

$$(J_2^\lambda) \quad \text{Min} \frac{1}{2} \int_0^5 (x_1^2 + x_2^2) + (1 - \lambda) u^2 dt$$

- $\lambda < 1$: Hamiltonien strictement convexe, u^* fonction continue.
- $\lambda = 1$: on retrouve les deux problèmes de départ.

Suivi de chemin

Initialisation en $\lambda = 0$ sans difficulté, le suivi commence bien.
Evolution du contrôle et de la fonction de commutation ?

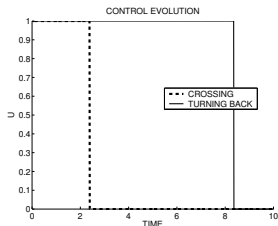
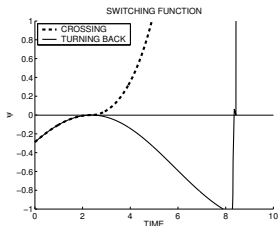


(P_1) : u et ψ pour $\lambda = 0, 0.5, 0.75, 0.9$ et 0.95

On devine l'apparition d'un arc singulier quand $\lambda \rightarrow 1$:

- contrôle u demeure non extrême
- ψ se rapproche de 0

Mais le suivi se dégrade brutalement quand λ se rapproche de 1
 Instabilité numérique lorsque ψ proche de 0.



$\lambda = 1$ - Deux structures de contrôle - (P_1)

- Suivant le signe de ψ en sortie: 2 contrôles bang-bang différents.
- Quand $\lambda \rightarrow 1$, 2 structures aux sommets des simplexes.
- L'algorithme converge en $\lambda = 1$, mais perd la structure singulière.
- En $\lambda = 1$: Discontinuité de S au voisinage de l'arc singulier.

Formulation BVP discrétisé

On discrétise les équations du BVP:

Schéma Euler ou Trapèzes (\rightarrow homotopie à valeurs convexes).

(x_i, p_i) inconnues, u_i obtenus par les CN usuelles.

Conditions de raccordement aux t_i : continuité de x, p

$$Match_{cond} \begin{cases} x_i - (x_{i-1} + h \frac{\partial x}{\partial t}(t_{i-1}, x_{i-1}, p_{i-1}, u_{i-1}^*)) \\ p_i - (p_{i-1} + h \frac{\partial p}{\partial t}(t_{i-1}, x_{i-1}, p_{i-1}, u_{i-1}^*)) \end{cases}$$

Note: finesse de discrétisation limitée par la taille du problème.

Résultats

- Converge sans difficultés en $\lambda = 1$.
- Bonne approximation de x, p .
- Détection de la structure singulière sur ψ .
- Raccordements: erreurs résiduelles liées aux u_i sur l'arc singulier.

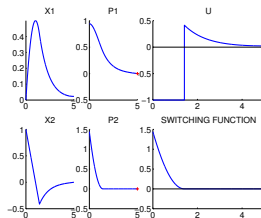
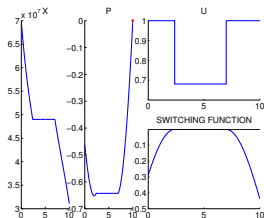
Résolution précise

Tir multiple adapté au cas singulier

Utilise l'expression algébrique du contrôle singulier u_{sing} .

Les bornes des arcs singuliers sont des inconnues.

Initialisation avec les informations obtenues par les homotopies.

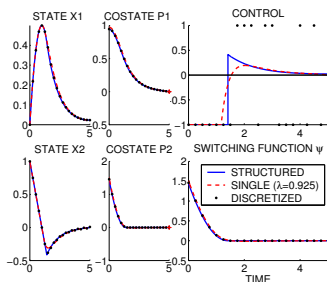
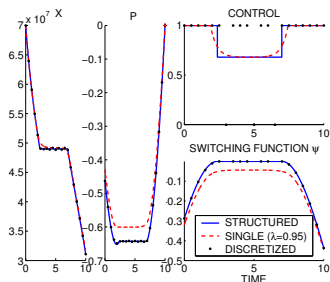


- Solution précise, convergence quasi instantanée.
- On retrouve clairement les arcs singuliers prévus.
- Demande un bon point initial (structure correcte).

Qualité des solutions approchées ?

Comparaison des formulations

- Tir simple ($\lambda = 0.95$ et 0.925 , avant la perte de structure)
- BVP discrétisé (50 et 20 points, Trapèzes avec raffinement)
- Solution de référence

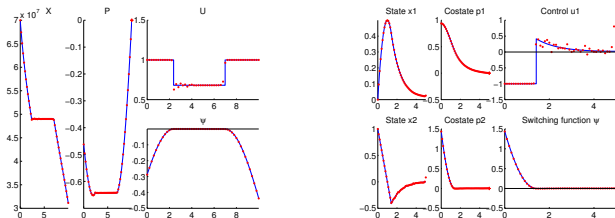


- Solution discrétisée très proche (sauf pour le contrôle singulier...)

Formulation Contrôle discrétisé

Inspirée des méthodes directes:

- le contrôle discrétisé fait partie des inconnues, x , p sont intégrés.
- conditions sur les u_i : $u_i \in \Gamma(t_i, x_i, p_i)$ (à formaliser...).



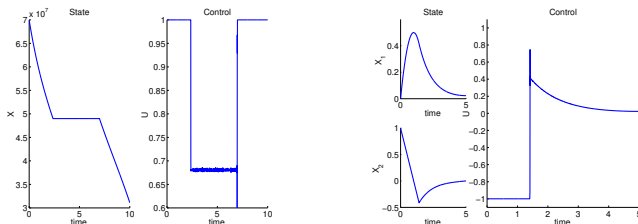
Contrôle discrétisé (RK4 - 50 points) - (P_1) et (P_2)

- Bonne approximation de x , p , ψ .
- Approximation du contrôle singulier *sans l'expression algébrique*.
- MAIS: implémentation délicate des conditions sur les u_i .

Comparaison avec une méthode directe

Discrétisation de x et de u

Pb contrôle optimal \rightarrow Pb optimisation non linéaire
Résolution avec KNITRO (sous-problèmes barrière, SQP).



Méthode directe (RK4 - 1000 points) - (P_1) et (P_2)

- On retrouve la structure singulière.
- Solution un peu bruitée sur les arcs singuliers (commutations).

Conclusion

- Les deux homotopies (tir simple et BVP discrétisé) convergent.
- Tir simple: devine la structure singulière mais la perd en $\lambda = 1$.
- Formulation BVP discrétisé: bonne approximation de x , p et ψ
- Résolution précise par une méthode de type tir multiple.
- Formulation contrôle discrétisé: à formaliser, mais premiers résultats numériques encourageants.
- Méthode directe: résultats cohérents pour un temps comparable.

Conclusions et Perspectives

Conclusions générales

- Pour les problèmes étudiés (transfert orbital et arcs singuliers), l'homotopie a permis de déterminer la structure du contrôle et d'obtenir un point initial satisfaisant, *sans connaissance a priori*.
- Grâce à ces informations, on parvient ensuite à résoudre précisément les problèmes par les méthodes de tir.
- L'algorithme simplicial et les méthodes de tir utilisées ont été implémentées dans un unique programme (Simplicial), utilisé pour toutes les expérimentations numériques (sauf méthodes directes). Codes externes utilisés: HYBRD, RKF45 (Shampine/Watts), DOP853 (Hairer/Wanner), ODEX (Hairer/Wanner)

Perspectives

- Algorithme simplicial:
 - améliorer coût des jonctions pour l'adaptatif et le raffinement
 - introduire des mécanismes d'accélération (cf Newton / sécante)
- Travailler sur la méthode de tir elle-même:
 - adaptation de l'intégration (détection des discontinuités)
 - meilleur calcul des dérivées (IND)
- Poursuivre sur les formulations discrétisées:
 - schémas de discrétisation plus évolués (symplectique ? cf Bonnans/Laurent-Varin)
 - mieux formaliser la formulation contrôle discrétisé
- Comparaison plus poussée avec les méthodes directes
- Contraintes d'état (formulation, homotopie ?)