



HAL
open science

L'enseignement des mathématiques en Turquie : le cas des fonctions au lycée et au concours d'entrée à l'université.

Savas Basturk

► **To cite this version:**

Savas Basturk. L'enseignement des mathématiques en Turquie : le cas des fonctions au lycée et au concours d'entrée à l'université.. Education. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2003. Français. NNT: . tel-00011441v1

HAL Id: tel-00011441

<https://theses.hal.science/tel-00011441v1>

Submitted on 21 Jan 2006 (v1), last revised 15 Jun 2010 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS VII-DENIS DIDEROT

Année 2003

THESE
pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VII
Spécialité

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES
présentée et soutenue publiquement
le 15 décembre 2003

par

Savaş BAŞTÜRK

**L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN
TURQUIE :le cas des fonctions au lycée et au concours
d'entrée à l'université**

Directeurs de thèse

Monsieur Jacques COLOMB

Madame Aline ROBERT

Membres du Jury

M. Jacques COLOMB
M. Jean Luc DORIER
Mme Aline ROBERT
Mme Jacqueline ROBINET
Mme Maggy SCHNEIDER

INRP de Paris
IUFM de Lyon
IUFM de Versailles
Université de Paris VII
FUNDP de Namur

Directeur
Rapporteur
Directeur
Examineur
Rapporteur

Remerciements

Il est très difficile de savoir par qui je vais commencer ces remerciements. Je vais commencer à remercier les deux pays concernés : la Turquie et la France. Je voudrais remercier beaucoup la première qui m'a envoyé faire ces études à l'étranger et je voudrais remercier la deuxième pour son accueil chaleureux et cette merveilleuse occasion de travailler.

Je tiens surtout remercier Madame Aline Robert. J'ai baigné pendant quatre ans dans un univers de recherche studieux, rigoureux, exigeant, riche, largement ouvert. J'ai profité d'un directeur de recherche toujours présent en cas de besoin, très disponible, sachant parfaitement doser ses aides, ses demandes ; elle a été encourageante, positive, amicale, patiente pendant quatre ans sans jamais faiblir.

Je tiens aussi remercier Monsieur Jacques Colomb. Malgré sa maladie, au début et à la fin de la thèse, il m'a aidé beaucoup, il m'a poussé, il m'a forcé à expliciter des choix, à avancer un peu plus. Pendant quatre ans, il n'a jamais cessé de m'aider, de me soutenir avec gentillesse.

Je voudrais encore remercier Madame Michèle Artigue. Il y a quatre ans elle a accepté la direction de mon mémoire de DEA. Elle m'a aussi ouvert la porte de la didactique et elle m'a encouragé à continuer mes études.

Je voudrais remercier mes proches pour leurs aides, leur soutiens et leur encouragement. Grâce à eux, j'ai pu faire un travail sur la Turquie en vivant en France. Ils ont trouvé les professeurs qui ont répondu aux questionnaires, des programmes nécessaires et tous ces que je leur ai demandé. A ma famille, ma femme Ebru Baştürk et mes amis Yılmaz Aksoy, Vedat Çelik, Kenan Güllü, j'adresse mes sincères remerciements.

Je voudrais encore remercier les responsables et les professeurs des lycées et des dérsanés suivants : lycée Anatolien de Alaşehir, lycée de Alaşehir, lycée Atatürk, dérsané Başarı, dérsané Hedef et dérsané Körfez pour leur participation active à l'organisation de la passation des questionnaires et à son déroulement, leur accueil chaleureux et leur soutien. Je tiens aussi à remercier les élèves de ces établissements pour leur spontanéité et leur investissement dans les problèmes proposés.

Il m'est agréable de remercier les responsables de la direction générale de l'enseignement supérieur à Ankara et ceux du conseiller de l'éducation à Paris pour toutes ces facilités qu'ils accordent aux étudiants en doctorat.

TABLE DES MATIERES

Introduction	5
Chapitre I : cadre général : présentation de l’enseignement des mathématiques en Turquie	10
1. <i>Concours d’entrée à l’université en Turquie</i>	12
2. <i>Naissance et l’évolution des dersanés en Turquie</i>	17
Chapitre II : problématique et méthodologie de la recherche	28
1. <i>Problématique</i>	30
2. <i>Méthodologie</i>	36
Chapitre III : analyse des manuels	55
1. <i>Place de la notion de fonction dans les programmes actuels de seconde, de première et de terminale en Turquie</i>	55
2. <i>Analyse du manuel Tutibay</i>	59
3. <i>Analyse du manuel officiel</i>	71
4. <i>Analyse du manuel de préparation au concours Gvender</i>	85
5. <i>Comparaison des analyses des manuels</i>	102
6. <i>Conclusion</i>	112
Chapitre IV : analyse des thèmes du concours d’entrée à l’université sur les fonctions du programme de seconde	114
1. <i>Thèmes</i>	116
2. <i>Synthèse</i>	125
3. <i>Conclusion</i>	130
Chapitre V : analyse des questionnaires-enseignants sur l’enseignement de la notion de fonction	132
1. <i>Parties des réponses</i>	134
2. <i>Synthèse</i>	148
3. <i>Conclusion</i>	150
Chapitre VI : analyse des questionnaires-élèves sur la notion de fonction	152
1. <i>Analyse a priori des questionnaires</i>	156
2. <i>Analyse a posteriori du premier questionnaire</i>	178
3. <i>Analyse a posteriori du deuxième questionnaire</i>	257
4. <i>Synthèse des questionnaires-élèves</i>	338
5. <i>Conclusion</i>	347

Chapitre VII : analyse des questionnaires-étudiants	350
1. <i>Analyse des réponses</i>	352
2. <i>Conclusion</i>	364
Synthèse générale des résultats	366
Conclusion	375
Bibliographie	380
Annexes	

Un plan détaillé de chaque chapitre est proposé au début de chacun d'eux.

INTRODUCTION

En Turquie, les concours sont très importants et occupent une grande place dans la vie de tout le monde : par exemple nous pouvons rencontrer ce système, pour la première fois, après le collège. Beaucoup d'élèves essaient d'avoir une place dans les bons lycées comme les lycées anatoliens, les lycées scientifiques etc. Ensuite il y a un autre concours que les élèves doivent passer avant l'enseignement supérieur : c'est le concours d'entrée à l'université. Après l'enseignement supérieur, le marathon de concours n'est pas encore terminé ; par exemple si vous voulez être enseignant ou fonctionnaire, vous devez passer le concours de sélection des personnels publics (KPSS : Kamu Personeli Seçme Sınavı) ou bien si vous voulez faire un DEA ou un doctorat dans une université, vous devez passer le concours de l'enseignement d'après-licence (LES : Lisansüstü Eğitim Sınavı). Mais il est tout à fait intéressant que ces concours ne se différencient pas en général par rapport à des contenus. C'est-à-dire qu'il est possible de rencontrer les mêmes type de questions dans ces concours parce que leur but principal n'est pas de préparer des élèves (ou des candidats) à l'enseignement suivant ou de les motiver à l'enseignement précédent (ou actuel) mais seulement de les sélectionner.

Par ailleurs, la préparation à ces concours, surtout au concours d'entrée à l'université engendre un très grand secteur : c'est le secteur de darsanés. Ils peuvent être qualifiés d'établissements privés qui préparent des élèves à des concours et qui servent à renforcer ou soutenir des élèves en difficulté dans l'enseignement secondaire.

Pourquoi les darsanés sont partout dans le pays, leur nombre augmentant toujours ? Si on pose ces questions à quelqu'un en Turquie, il est très probable qu'il y réponde en disant que des élèves ne peuvent pas passer le concours d'entrée à l'université sans suivre les darsanés, que le contenu du concours et les programmes sont très différents et que dans les darsanés on apprend aux élèves à « être pratique » et à bien utiliser le temps etc.

Dans l'enseignement de darsané, il n'y a pas de programmes explicites, les cours sont conditionnés le contenu du concours. Faire connaître les types de questions aux élèves et les entraîner en proposant beaucoup d'exercices de même type est indispensable dans cet enseignement. Les enseignants de darsané n'ont pas assez de temps, moins qu'en lycée. Ils sont obligés de présenter, par exemple, la notion de fonction en une semaine, alors que les enseignants de lycée consacrent un mois à ce sujet. De plus dans l'enseignement de darsané, résoudre des questions n'est pas suffisant, il faut trouver les techniques ou les procédures les plus économiques et les plus courtes. Comme le concours comprend des questions à choix

multiples, les élèves ne doivent pas présenter leurs démarches à ce concours. Ainsi dans les dérsanés, trouver la bonne réponse quelles que soient les méthodes utilisées est toujours acceptable même si ces méthodes sont mathématiquement très pauvres.

Pourquoi ce travail ? Il y a quatre ans que toutes les choses ont commencé pour moi et une trentaine de futurs didacticiens turcs. Nous avons été sélectionnés par un concours, comme ceux dont j'ai parlés plus haut, pour aller étudier en France une science que nous ne connaissions pas. J'avais terminé mes études supérieures à l'Université Hacettepe dans la discipline de l'enseignement des mathématiques et j'avais travaillé environ deux ans dans un dérsané mais je n'ai jamais rencontré un article ou un ouvrage sur les erreurs des élèves ou sur leurs conceptions. C'est pourquoi, par exemple, quand j'ai lu les articles liés aux erreurs et aux obstacles, j'ai appris que l'erreur peut jouer un rôle fondamentalement différent. Du « droit à l'erreur »¹ concédé aux élèves, on passe progressivement à la recherche de situations où les erreurs seraient révélatrices d'un savoir en voie de constitution, nécessaires à l'apprentissage. En d'autres termes, les erreurs des élèves « nous intéressent », autant qu'elles leur² sont profitables. C'était une révolution pour moi. Parce qu'avant je considérais l'erreur comme un dysfonctionnement du savoir de l'élève, je pensais qu'un bon apprentissage devrait permettre de l'éviter, que l'erreur est le signe d'un travail insuffisant de l'élève qui n'a pas (encore) su (ou pu) enregistrer un savoir suffisant pour lui permettre d'éviter cette erreur et que l'erreur est à éviter car elle pourrait s'incruster dans l'esprit de l'élève et devenir persistante. Ainsi j'ai préparé un mémoire³ de DEA sur les erreurs et les obstacles. Ce mémoire m'a donné l'occasion de dégager les erreurs et les obstacles liés à la notion de valeur absolue au niveau d'élèves de seconde et d'étudier le rôle de l'erreur dans l'apprentissage.

Après le DEA, de plus en plus mes découvertes dans l'océan « didactique » continuaient. Par exemple, dans la progression Douady-Perrin⁴, à propos de l'enseignement et de l'apprentissage, j'apprenais que les élèves doivent pouvoir se comporter comme des chercheurs si les énoncés de problèmes remplissent des conditions précises : ils doivent avoir du sens pour les élèves, être abordables avec les connaissances actuelles des élèves, mais ne peuvent pas être entièrement résolus puisque les connaissances visées sont des outils adaptés à la résolution, que la formulation du problème doit pouvoir se faire dans au moins deux cadres différents (graphique, géométrique ou numérique), que les connaissances antérieures

¹Titre de l'article d'Alain Bouvier (cf. Bouvier A. (1989), Le droit à l'erreur, dans « sans tambour ni trompette », n° 1, bulletin de l'IREM de Lyon).

² Les chercheurs.

³ Baştürk S. (2000), Difficultés des élèves de seconde à propos de la notion de valeur absolue et l'analyse des manuels turcs et français, DEA de didactique des mathématiques de l'Université de Paris VII.

⁴Cf. *Repère* IREM n°8 « Enseigner par les activités ».

interviennent comme outils explicites quand ils s'engagent dans la résolution, que la recherche provoque chez eux l'élaboration d'une connaissance partielle, implicite, explicitée au cours du débat, puis par l'enseignant qui va lui donner un statut d'objet en décontextualisant.

Par ailleurs, mes conceptions sur le bon professeur ont aussi commencé à changer. Ainsi je croyais que le bon professeur de mathématiques indique aux élèves la règle, la formule ou la construction géométrique à utiliser pour résoudre les problèmes, qu'il explique clairement son cours et illustre par de nombreux exemples de même type et qu'il fait aimer les mathématiques. Mais grâce aux travaux de didactique, j'ai vu que les élèves ont tendance à répondre en fonction du contrat d'abord, et non en fonction du problème (pour dire les choses schématiquement). Si le travail a lieu avant le cours, si le maître n'a qu'un rôle d'assistant, de coordinateur, dans cette phase du travail le contrat n'est pas encore entièrement fixé et donc moins fort. Le seul point fixé du contrat est que le déroulement de la séance dépend de l'activité des élèves et ce point précisément semble positif aux didacticiens⁵. Cela signifie pour le maître que la gestion de la classe pendant ce temps de recherche doit être faite en respectant le rythme des élèves, et sans imposer son point de vue. Comme le caricature bien Aline Robert, un bon enseignant est un enseignant qui sait se taire à certains moments. De plus j'étais très surpris, quand j'ai lu les phrases suivantes⁶ : *l'enseignement classique, du type « j'apprends, j'applique », ne respecte pas la condition de la (re)construction individuelle du savoir ; il joue sur l'imitation et la mise en application et donc risque d'accroître le rôle réducteur du contrat ; souvent, le caractère « objet » des notions est plus important que leur caractère outil dans la présentation qui est faite. Les « bons » élèves refont tout seuls un certain cheminement cognitif ; cela est renforcée par les initiatives qui caractérisent souvent les bons élèves, du type entraînement individuel sur d'autres exercices que ceux déjà vus en classe par exemple.*

Toutes ces remarques témoignant de mon évolution didactique m'ont donné l'envie de faire ce travail. A mon avis, dans l'enseignement des mathématiques actuels en Turquie il y a des problèmes. En effet, dans le pays, tout le monde, ceux qui s'intéressent à l'éducation ou ceux qui n'y s'intéressent pas, accuse notre système éducatif d'être un système d'apprentissage par cœur. Ce travail essaie de faire un diagnostic sur ce système et il a objectif d'apporter des réponses aux questions suivantes : le système oblige-t-il les élèves à apprendre par cœur ?

⁵Aline Robert (cf. Robert A. (1988), Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants), *Cahier de didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII).

⁶ Ibidem.

Qu'est-ce qui manque d'un point de vue didactique (plus précisément d'un point de vue outil/objet) dans ce système (ou dans l'enseignement des mathématiques)? Est-ce que les élèves apprennent par cœur volontairement ou n'ont-ils pas d'autres choix qu'apprendre par cœur? De plus dans le cadre de ce travail, nous allons aussi chercher à répondre aux questions suivantes : est-ce que l'enseignement secondaire est ou non suffisant pour préparer les élèves au concours d'entrée à l'université? L'enseignement de dérsané ou la motivation du concours influencent-ils négativement les manuels de lycée, les pratiques des enseignants de lycée et celles des élèves? Autrement dit, un enseignement, comme celui de dérsané, qui consiste à apprendre à résoudre des questions en utilisant les techniques les plus courtes sans commentaire et sans demander « comment? » ou « pourquoi? » fait-il apparaître une vision strictement utilitaire des outils mathématiques chez les élèves et implique-t-il de former des automates?

Pour ce faire, comme les fonctions sont introduites, pour la première fois, en classe de seconde en Turquie et qu'elles sont, en même temps, présentées au dérsané et au lycée, nous avons choisi le chapitre des fonctions au niveau de la seconde. Nous proposons d'analyser quatre manuels de lycée dont un est le manuel officiel et trois manuels de préparation au concours les plus utilisés, pour nous renseigner sur les activités (mathématiques) que chaque énoncé peut déclencher chez les élèves, et sur leurs conséquences éventuelles sur les acquisitions, à condition d'analyser ces activités en relation avec les apprentissages (chapitre II).

De plus, nous proposons d'étudier les programmes de seconde de lycée et les thèmes du concours d'entrée à l'université pour montrer l'éloignement du concours et du lycée (chapitre II et III). Par ailleurs, nous avons mis en place un questionnaire proposé aux enseignants sur la notion de fonction pour pénétrer un peu plus dans ce qui constitue la vie des fonctions dans les classes de seconde et pour étudier l'influence du concours dans les choix faits par les enseignants.

Comme nous avons voulu étudier les effets de l'enseignement de dérsané (ou d'un enseignement très proche du concours) sur les pratiques des élèves et répondre aux questions que nous avons citées plus haut, nous avons fait passer deux questionnaires à des élèves de seconde et des élèves d'une classe de terminale sur la notion de fonction (chapitre V). Le premier questionnaire a été préparé à partir des programmes officiels et des cahiers des élèves qui subissent un enseignement très proche des programmes et l'autre questionnaire à partir des questions déjà proposées au concours et des cahiers des élèves qui subissent un enseignement très proche du concours.

Le but principal des questionnaires proposés aux étudiants (chapitre VI) est de vérifier que subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieures des élèves. Pour ce faire nous avons mis en place un questionnaire que nous avons soumis à un certain nombre d'étudiants de différentes universités en Turquie.

La thèse sera conçue de la façon suivante :après avoir présenté brièvement le concours d'entrée à l'université en Turquie, nous parlerons de la naissance et de l'évolution des dérsanés et des différents points de vue sur eux et de l'enseignement dispensé au dérsané ; nous développerons ensuite la problématique et la méthodologie de la recherche, puis nous consacrerons un chapitre à l'analyse des manuels un autre chapitre à l'analyse des questionnaires proposés aux enseignants sur la notion de fonction. Dans le chapitre suivant, nous mettons en place l'analyse des questionnaires proposés aux élèves de seconde sur la notion de fonction. L'analyse des questionnaires proposés aux étudiants sur l'enseignement des mathématiques sera le dernier chapitre de la thèse. Enfin nous terminerons par une synthèse des différentes analyses effectuées, en revenant aux questions initialement posées.

CHAPITRE I

CADRE GENERAL : Présentation de l'enseignement des mathématiques en Turquie

Plan du chapitre I :

1. <i>Concours d'entrée à l'université en Turquie</i>	12
1.1 Présentation générale	12
1.2 Partie qualitative	14
1.3 Partie quantitative	15
2. <i>Naissance et l'évolution des dérsanés en Turquie</i>	17
2.1 Point de vue sur les dérsanés	21
2.2 Points de vue de l'Institut de la Planification d'Etat (IPE).....	22
2.3 Points de vue des administrateurs de dérsanés.....	22
2.4 Points de vue du Ministre de l'Education Nationale (MEN)	23
2.5 Enseignement de dérsané	24
2.6 Du côté du professeur de lycée	26
2.7 Du côté de l'élève	27
2.8 Du côté des étudiants de l'université.....	27

Afin de mieux comprendre le système éducatif turc et le cadre général dans lequel nous avons situé cette recherche, je vais, ici, présenter le concours d'entrée à l'université en Turquie et la place globale des diplômés dans le système éducatif turc.

I. Cadre général: présentation de l'enseignement des mathématiques en Turquie

1. Concours d'entrée à l'université en Turquie

Dans cette partie nous présentons brièvement le concours d'entrée à l'université que doivent passer les élèves en Turquie, après le lycée, pour pouvoir poursuivre leurs études. Nous prenons dans la première section, d'une manière générale, le système de ce concours. La deuxième section comprend des statistiques au sujet de ce concours et de son contenu. Nous pensons que ces informations permettront de mieux comprendre cette épreuve qui est plutôt différente de l'épreuve équivalente française, le BAC.

1.1 Présentation générale

Pour commencer leurs études supérieures, les élèves doivent, à la fin du lycée, passer un examen qui est préparé par le Centre de Sélection et d'Installation des Etudiants (Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Merkezi- ÖSYM). De 1974 à 1981 ce concours se déroulait en une seule étape par an. Ensuite entre 1981 et 1998 des candidats devaient passer deux étapes pour avoir une place dans une université. Enfin à partir de 1998 la deuxième étape a été supprimée. Les élèves sont recrutés sur un concours qui a lieu une fois par an en juin, se compose de deux parties: l'une qualifiée de qualitative et l'autre de quantitative. La partie qualitative comprend des questions d'histoire, de géographie, de turc (en tant que langue actuelle et littérature), de philosophie, et de sociologie. La partie quantitative comprend des questions de mathématiques, de sciences physiques, de chimie, et de biologie.

Ce concours est basé sur l'évaluation des élèves sur des résolutions de problèmes et des

raisonnements en utilisant les règles et les connaissances essentielles. La durée du concours, qui est une épreuve à choix multiples (5 choix par question), est de trois heures. Les élèves doivent répondre à cent quatre-vingt huit questions.

Pour chaque candidat, il est calculé trois sortes de totaux:

- Un premier, appelé ÖSS–SAY (le total quantitatif), est calculé en prenant en compte la somme des bonnes réponses pour chaque catégorie (qualitative et quantitative), mais en multipliant par un coefficient plus grand le nombre de bonnes réponses pour les questions quantitatives.
- Un deuxième, appelé ÖSS–EA (le total mixte), est calculé en prenant en compte la somme des bonnes réponses pour chaque catégorie (qualitative et quantitative), et en donnant la même importance à ces deux parties.
- Un troisième, appelé ÖSS–SÖZ (le total qualitatif), est calculé en prenant en compte la somme des bonnes réponses pour chaque catégorie (qualitative et quantitative), mais en multipliant par un coefficient de plus grande importance le nombre de bonnes réponses pour les questions qualitatives.

Après l'évaluation, les élèves ayant dépassé un certain minimum de points ont le droit de présenter une liste de facultés où ils voudraient poursuivre leurs études. Les listes de choix de tous les étudiants sont alors analysées, à nouveau par le ÖSYM, et selon le résultat de l'élève (son classement au concours), le contingent des facultés, et le nombre de postulants pour chaque faculté, les candidats acquièrent ou non le droit d'y poursuivre leurs études.

Les élèves voulant continuer leurs études supérieures en langues doivent passer l'*Examen de Langue Etrangère* (YDS- Yabancı Dil Sınavı) qui a lieu à une date différente de celle de l'ÖSS. Les lauréats s'orientent dans des disciplines telles que «Langues et Littérature Etrangère», «Interprétation et Traduction», «Tourisme», «Enseignement des Langues Etrangères».

En ce qui concerne les règles que les candidats doivent suivre pendant ce concours :

Les candidats ne peuvent utiliser les objets ci-dessous durant l'examen : « feuilles de brouillon, livres, cahiers, dictionnaires, règles, compas, équerres, etc....Tout appareil de

communication tel que téléphone portable, talkie-walkie, tout appareil informatique tel qu'ordinateur portable, **calculatrice**⁷, montre-calculatrice etc. Et armes, couteaux etc.»

Pour éviter tout copiage, il y a plusieurs livrets de questionnaires contenant les mêmes questions mais ordonnées différemment. Les candidats doivent s'asseoir à des places qui leur sont réservées à l'avance. Ils ne peuvent pas s'asseoir à leur gré.

Comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, le concours est composé de deux parties : qualitative et quantitative. Dans la première partie, on évalue la capacité de maîtrise de la langue turque, celle de réflexion à partir de concepts et principes de bases en sciences sociales (géographie, histoire, philosophie). Quant à la deuxième partie, elle évalue la capacité mathématique dans la résolution de problèmes et celle de réflexion à partir de concepts et principes de bases en sciences physiques et sciences naturelles.

Nous introduisons ces deux parties, plus bas, puis nous donnerons plus d'informations pour la partie quantitative puisque c'est cette partie qui nous concerne.

1.2 Partie Qualitative

Elle est composée de quatre-vingt huit questions dont quarante quatre sur la langue turque et quarante quatre sur l'histoire, la géographie et la philosophie. Le tableau ci-dessous indique le nombre de questions posées et les pourcentages correspondants :

Matière	Pourcentage	Nombre de questions
Langue turque	50%	44
Histoire	22%	19
Géographie	17%	15
Philosophie	11%	10

Maintenant, nous donnons le nombre de questions de chaque matière pour les cinq dernières années :

Matières	1996	1997	1998	1999	2000
Langue turque	45	44	44	44	45
Histoire	18	19	19	19	18
Géographie	15	15	15	15	15
Philosophie	10	10	10	10	10

⁷Dans son mémoire intitulé «analyse comparative des sujets de mathématiques dans les épreuves passées à la fin du lycée en France et en Turquie» Arslan a comparé deux épreuves et il a étudié s'il serait possible d'utiliser la calculatrice dans le concours turc. Il a montré que l'utilisation d'une calculatrice au CEU n'a pas beaucoup d'intérêt, voire pour certaines questions, ne sert qu'à faire perdre du temps au candidat. Selon lui l'intégration d'une calculatrice au concours d'entrée à l'université en Turquie, ne serait envisageable que si les sujets compris dans ce concours étaient modifiés de manière à rendre l'utilisation d'un tel outil intéressante.

1.3 Partie Quantitative

Cette partie est composée de quatre-vingt huit questions dont vingt huit sur l’algèbre, seize sur la géométrie, et le reste sur la physique, la chimie et la biologie. Le tableau sur la page suivante indique le nombre de questions posées et leur proportionnalité par rapport à la matière :

Matières	Pourcentage	Nombre de questions
Algèbre	31%	28
Géométrie	18%	16
Physique	22%	19
Chimie	15%	13
Biologie	14%	12

Le tableau ci-dessous donne le nombre de questions de chaque matière pour les cinq dernières années :

Matières	1996	1997	1998	1999	2000
Algébriques	26	29	27	28	28
Géométrie	15	15	16	16	16
Physique	19	19	19	19	19
Chimie	13	13	13	12	13
Biologie	12	12	12	12	12

Puisque notre recherche concerne plutôt la partie algébrique, nous trouvons intéressant de faire un tableau thématique représentant à quoi correspondent les sujets algébriques et géométriques des dernières années :

No	Sujets	1999 (annulé ⁸) CEU	1999	2000	2001	2002
1	Nombres	9	8	9	7	9
2	Puissances-racines	2	1	1	3	1
3	Proportionnalité	1	1	2	-	-
4	Factorisation	1	3	-	3	2
5	Mise en équations -problèmes	6	8	9	10	12
6	Ensembles	1	1	1	1	1
7	Correspondances-fonctions	1	1	1	-	-
8	Loi de composition interne- congruence	1	1	2	4	3
9	Polynômes	1	1	2	1	1
10	Equations- inéquations- parabole	3	2	1	-	-
11	Permutation- combinaison- binôme- probabilité	1	1	1	1	-
12	Angles	1	1	-	-	-
13	Triangles	2	3	3	5	-
14	Homothéties	1	2	1	-	1
15	Polygones et quadrilatères	6	1	3	1	5
16	Cercle et disque	2	5	3	5	3
17	Aire et volume des corps dans l’espace (sphère, cube, prisme...etc.)	1	1	2	1	2
18	Etude analytique des droites	4	3	4	3	5

⁸ En 1999 deux questionnaires du concours ont été volés sur place par certains individus un jours avant du déroulement. Ensuite le concours de 1999 a été annulé et un mois après il a eu lieu.

Si l'on regarde les notions à enseigner dans les programmes de lycée par classes, on observe que la grande majorité des notions introduites dans les classes de première et terminale ne figurent pas dans le concours.

Seconde	Première	Terminale
a) Logique	a) Trigonométrie	a) Fonctions particulières (fonctions entières, fonction valeur absolue, fonctions définies par morceaux...etc.)
b) Ensembles	b) Logarithme	b) Dérivée et ses applications
c) Correspondances – fonctions - loi de composition interne	c) Nombres complexes	c) Limite et continuité
d) Nombres	d) Permutation – combinaison - probabilité	d) Intégrale et ses applications
e) Polynômes	e) Vecteurs	e) Algèbre linéaire
f) Equations - inéquations-fonctions du second degré	f) Signes de somme et de produit	
	g) Suites – séries	
	h) Coniques (ellipse, hyperboloïde, parabole)	

Comme le disent bien les enseignants du désané Seçkinler⁹ dans leur étude intitulée « les effets du concours sur l'enseignement des mathématiques et les mathématiques dans le concours », pour les élèves qui ont terminé les études du lycée, les mathématiques se ramènent à quatre opérations simples. Dans la résolution des questions des concours, les élèves utilisent la méthode qui consiste à apprendre par cœur les types et les résolutions de questions au lieu d'apprendre des notions enseignées. Quant on les met en face d'un type différent de question, ils expriment leur réaction en disant que « dans leur classe on n'a pas résolu ce type de question ou c'était très difficile ». Ils ne pensent même pas de quelles notions, quelles méthodes ou de quelles règles élémentaires ils ont besoin pour la résolution. Les élèves répondent donc automatiquement aux questions qu'ils connaissent sans faire des opérations mentales et, l'élève qui connaît le plus de types obtient une place dans une université. De plus le fait qu'au lycée, un certain nombre des notions se répètent plusieurs fois durant trois ans provoque l'ennui, la tension et amène les élèves à ne pas travailler ce qu'ils savaient déjà. Or auparavant dans la deuxième étape du concours des questions qui demandent de faire l'analyse, la synthèse et des applications...etc. étaient proposées. C'est pourquoi alors les élèves devaient aussi sérieusement suivre les cours de lycée.

A l'époque où le concours se déroulait en deux étapes, la deuxième étape couvrait tous les programmes de lycée (seconde, première et surtout terminale). Dès l'abolition de la deuxième étape, les cours des classes premières et terminales sont donc devenus caduques.

⁹ « Une étude sur les effets du concours sur l'enseignement des mathématiques et les mathématiques du concours », service d'orientation et informations aux élèves du désané Seçkinler, Revue d'Oz-de-bir, juillet 2002, Page 24, Ankara.

2. Naissance et l'évolution des dérsanés en Turquie

Il est très difficile de travailler sans prendre en compte les dérsanés dans l'enseignement turc. C'est pourquoi dans les paragraphes suivants je vais présenter des dérsanés en cherchant les réponses à ces questions : comment et de quels besoins les dérsanés sont-ils nés ? Quels élèves suivent les cours de dérsanés ? Selon quels programmes les enseignants de dérsanés préparent-ils leur cours ?

Les dérsanés ont les missions suivantes : renforcer ou soutenir les élèves faibles dans l'enseignement secondaire et préparer les élèves au concours d'entrée à l'université (CEU) et aux autres concours (par exemple aux concours de lycées privés, de lycées anatoliens, de lycées scientifiques... etc).

Actuellement les dérsanés occupent une grande place et jouent un rôle très important. Ils n'ont pas été constitués par l'Etat. Au contraire ils sont nés d'une demande de la société. Bien que les écoles privées aient plus de possibilités et d'avantages que les écoles d'Etat, elles sont aussi insuffisantes pour préparer leurs élèves à ce concours. Ainsi tous les élèves des écoles privées sont amenés à suivre les dérsanés, mais ils vont dans les plus distingués.

A cause de la demande extrême de ces dérsanés on peut en trouver sept ou huit dans une petite ville. Par ailleurs, un dérsané peut économiquement prospérer à très court terme et il peut devenir une entreprise qui comporte beaucoup de nouveaux dérsanés.

En s'appuyant sur les raisons citées ci-dessous, on peut d'emblée dire que l'enseignement secondaire ne permet pas aux élèves de réussir au CEU. C'est-à-dire que l'insuffisance de l'enseignement secondaire¹⁰ provoque partout l'existence et le développement des dérsanés dans le pays.

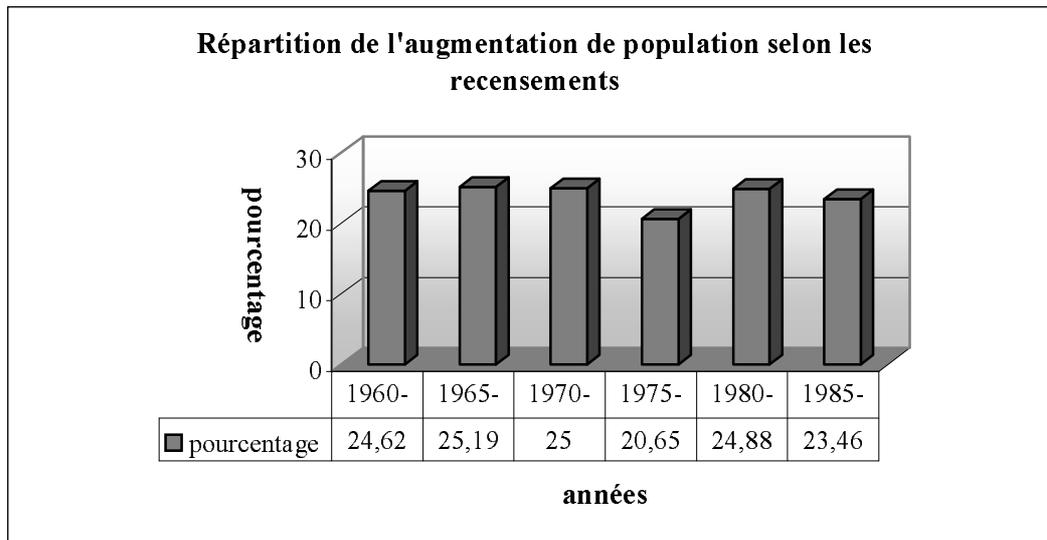
A partir de 1950 le développement socio-économique et l'augmentation rapide de la population ont entraîné une forte migration vers les villes, et cela a amené une insuffisance du nombre des écoles. Après 1955 surtout l'augmentation du nombre d'élèves, l'insuffisance du nombre d'enseignants, le fait que les écoles qui existent ne peuvent pas répondre aux besoins, la croissance de la demande d'entrée dans l'enseignement supérieur ont influencé négativement la qualité de l'enseignement secondaire turc¹¹.

Le fait que l'augmentation du nombre d'élèves n'ait pas été suivie de celle du nombre d'écoles est un problème important. En 2002 on peut encore trouver des classes qui comportent 80 élèves sous la surveillance d'un seul professeur. Comme on peut le voir

¹⁰ Au CEU de 2001 458 des 6022 premiers de leur promotion n'ont pas réussi à dépasser le barrage minimal de 105 points (OSYM, Ankara).

¹¹ Ozguven E.(1984) : « Les influences des dérsanés sur l'entrée à l'université », Revue de la science sociale de l'université, N° 4, Université Hacettepe, Ankara.

facilement sur le tableau¹² ci-dessous, la population turque augmente d'environ 24% à chaque recensement.



N_1 = le nombre d'habitants d'après le recensement 1960

N_2 = le nombre d'habitants d'après le recensement 1964

$$\text{Augmentation de population} = \frac{N_2 - N_1}{N_1}$$

Comme notre pays a une population estudiantine plus nombreuse, il est difficile d'accepter tous les élèves à l'université. Les élèves, qui vont entrer à l'université, sont donc sélectionnés par un concours. Si on sait que presque 170 000 élèves peuvent avoir une place pour étudier dans une université parmi plus d'un million d'élèves voulant passer ce concours, il est facile de conclure qu'il s'agit d'un concours très difficile.

A partir de 1955, les universités ont commencé à recruter les étudiants par un concours national et sélectif. En fait pendant l'année scolaire 1955-56, tous les élèves qui étaient bacheliers pouvaient avoir une place dans une université ou une école supérieure. En 1960-61, cette proportion a baissé à 76,2%, en 1965-66 à 61% , en 1970-71 à 32% et de nos jours elle est tombée à 12% des élèves¹³.

Les reformes économiques et la capacité limitée de l'enseignement supérieur ont amené les jeunes de l'enseignement secondaire à s'orienter vers les lycées techniques (professionnels); toutes les politiques ont été faites dans cette direction. Comme les élèves qui ont fini ces écoles ne pouvaient pas trouver de travail à cause de l'insuffisance des infrastructures nécessaires et du manque des exploitations industrielles, cette entreprise n'a pas réussi à

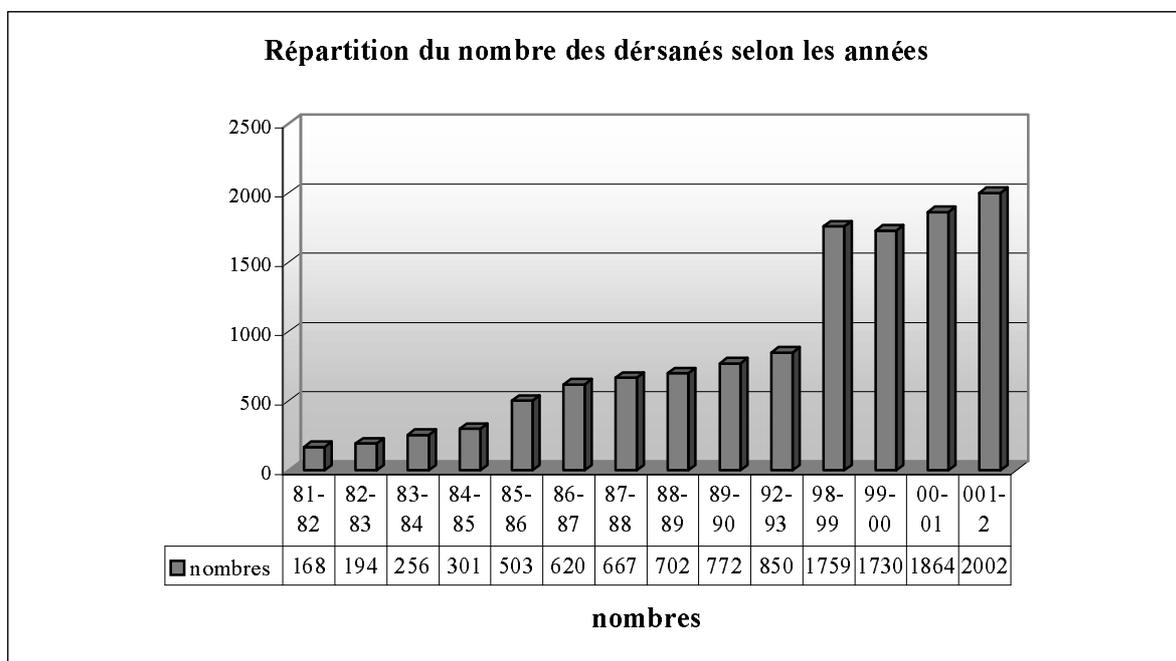
¹² L'annale de poche de l'institut de statistiques (1990), Ankara

¹³ Le Ministre de l'Education Nationale : « les développements en éducation nationale turque par l'égalité des chances pour l'équité de l'éducation », 1970, page 14, Ankara

empêcher l'accumulation des élèves devant les portes des universités. Ainsi les élèves des lycées professionnels ont aussi commencé à se préparer au CEU pour tenter leur chance au lieu d'aller dans les écoles de techniques supérieures, ils sont donc devenus des clients supplémentaires des dérsanés pour compléter leurs lacunes avant le concours.

Le fait que le but principal de chaque candidat est d'obtenir les meilleurs résultats pour devancer les autres, que les parents souhaitent que leurs enfants n'échouent pas au concours et que dès la classe de seconde les élèves commencent à se préparer, augmente le désir d'aller aux dérsanés. De plus, le fait que le type du concours est très différent de celui des examens du lycée, que le contenu des concours ne correspond pas aux connaissances acquises dans l'enseignement secondaire, que dans certaines écoles les professeurs ne puissent terminer les programmes et que les niveaux des élèves rentrant au concours soient très différents entre eux favorise l'augmentation du nombre de dérsanés¹⁴.

D'abord dans les grandes villes comme Ankara, Istanbul et Izmir, des dérsanés ont commencé à s'établir avec l'objectif de préparer les élèves au CEU, puis de plus en plus ils se sont diffusés partout en constituant des succursales. Le tableau suivant¹⁵ montre que le nombre des dérsanés atteint 2002 dans l'année scolaire 2001-2002.



¹⁴ MEN(Ministre de l'Education Nationale) : «Les dérsanés », Rapport présenté à l'Institut de la Planification d'Etat par la direction générale de l'enseignement secondaire, 1982.

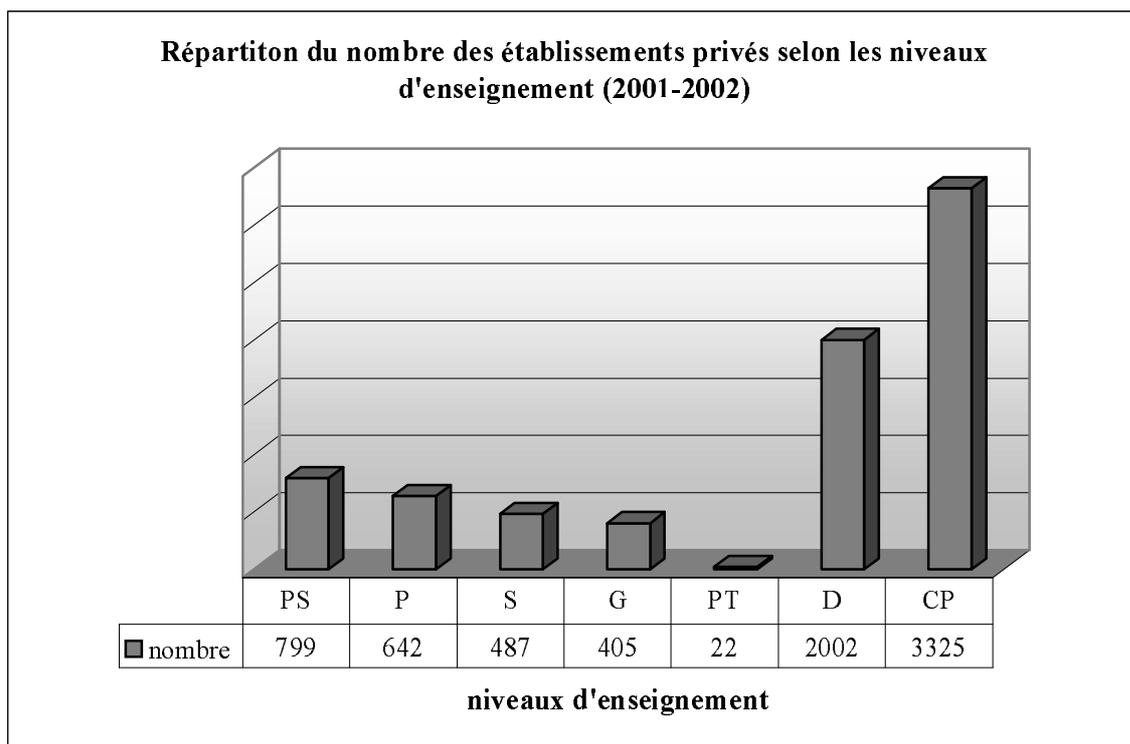
¹⁵ MEN : « Les statistiques éducatives », www.meb.gov.tr

Même si parfois certains partis politiques mettent en discussion l'existence des dérsanés de manière pragmatique,¹⁶ on ne peut pas empêcher l'augmentation du nombre des dérsanés d'années en années à cause de la demande forte des parents, du fait que les professeurs des écoles d'état ayant un répertoire de bons professeurs soient entraînés par les dérsanés qui proposent des salaires très élevés.

A partir du 31 janvier 1981, les affaires et les contrôles des dérsanés, qui étaient faits par les préfetures, ont été pris sous contrôle du Ministère de l'Education Nationale et le nombre de leurs professeurs et l'effectif de leurs classes ont été limités. Ensuite grâce à la publication d'une circulaire, le règlement interne des dérsanés a été analogue à celui des écoles d'Etat.

De plus, les dérsanés qui n'ont pas respecté les conditions ci-dessous peuvent être fermés selon la loi 1495 :

«Ne pas faire travailler soit les professeurs qui enseignent dans une école d'Etat, soit ceux qui n'ont pas de formation pédagogique ; ne pas prendre les élèves en abusant leur contingent ; ne pas demander des élèves un montant supérieur du prix déterminé et ne pas travailler sans autorisation du Ministre de l'Education Nationale ».



PS :Préscolaire, P :Primaire, S :Secondaire, G : Général, PT :Professionnel et Technique, D :Dérsané, CP :Cours privés¹⁷

¹⁶ parce qu'ils promettent toujours au public de résoudre les problèmes de l'enseignement en fermant les dérsanés

¹⁷ Des adultes peuvent suivre, ce type de cours destiné à faire acquérir des compétences particulières dans certains domaines, autant que des élèves. Ces établissements répondent aux besoins des personnels intermédiaires.

2.1 Points de vue sur les dérsanés

Le fait qu'on ait voulu fermer les dérsanés pour rétablir l'égalité des chances et l'équité de l'éducation et la publication d'une directive dans le programme du gouvernement en 1981 ont donné lieu à un nouveau débat dans notre pays.

Après le coup d'Etat du 12 septembre 1980, comme toutes les entreprises (y compris les dérsanés) ont été accusées par le gouvernement d'avoir provoqué des manifestations, on voit apparaître une idéologie qui se fonde sur la centralisation de toutes les affaires à Ankara (la capitale de la Turquie). Dans ce cas le gouvernement de cette époque-là a pensé transférer le fonctionnement des dérsanés aux écoles d'Etat en ajoutant des cours supplémentaires mais, comme l'a bien montré dans son DEA Tunay,¹⁸ cela n'a pas non plus réussi à empêcher les élèves d'aller aux dérsanés.

Maintenant je vais présenter successivement les points de vue émis à l'occasion de ce débat à cette époque par l'Institut de la Planification d'Etat, par les administrateurs de dérsanés et par le Ministère de l'Education Nationale.

2.2 Points de vue de l'Institut de la Planification d'Etat (IPE)

Lorsqu'il s'est agi de changer la loi 625 qui concerne les établissements privés en 1982, un exposé a été fait par l'IPE auprès du conseil des ministres. Dans cet exposé l'IPE affirme que les niveaux des lycéens rentrant au concours sont très différents. Cela pose un problème de qualité chez ces élèves. De plus le fait qu'on ne puisse supprimer l'inégalité entre les enseignements amène l'échec au concours de la plupart des bons élèves de lycée. L'entrée à l'université devient de plus en plus difficile. Le système du concours n'est pas analogue à celui des examens du lycée. A cause de ces raisons les dérsanés se sont diffusés dans tout le pays.

Par ailleurs l'IPE prétend que les dérsanés ne suppriment pas l'égalité des chances et l'équité de l'éducation. Ils assurent en plus l'égalité en constituant des succursales dans tout le pays.

D'après cet institut, les parents attendent des dérsanés de combler les lacunes de la qualité de l'enseignement secondaire. De plus, si on ferme les dérsanés sans que les programmes des autres établissements soient rendus analogues aux contenus du CEU, cela causera l'apparition d'un marché de cours privés encore plus chers que les dérsanés. Comme le contrôle des cours

¹⁸Tunay U.(1992) : « Les facteurs qui forcent les élèves du lycée à suivre les cours des dérsanés », Mémoire de DEA non publié, Institut des sciences sociales, Université Ankara, 1992.

privés est très difficile, l'Etat serait également privé des redevances qui viennent de la part des dérsanés.

L'IPE conseille de ne pas fermer à court terme les dérsanés, mais de les prendre sous contrôle de l'Etat et ce jusqu'à ce que l'enseignement secondaire ait atteint un niveau de qualité suffisant et qu'il soit répandu partout uniformément.

2.3 Points de vue des administrateurs de dérsanés

Dans le rapport présenté à l'Institut de la Planification d'Etat par les administrateurs des dérsanés, ceux-ci prétendent que les dérsanés sont des établissements légaux, qu'ils ne suppriment pas l'égalité, qu'ils l'assurent.

Par ailleurs les administrateurs prétendent que le fait que les dérsanés enseignent aux élèves qui viennent de différentes écoles et de différentes conditions selon un programme unique rétablit l'égalité. De plus ils n'acceptent pas le reproche que les dérsanés ne s'accumulent que dans les grandes villes.

Selon les administrateurs les dérsanés servent généralement aux élèves qui ont des familles ayant un revenu modeste. De plus ils font gratuitement profiter des milliers d'élèves pauvres des cours de dérsané et partagent leurs expériences avec tout le monde en publiant les manuels, les guides, les banques de question et en organisant des concours blancs. Cela aide des milliers d'élèves qui ne peuvent pas aller au dérsané pour des raisons économiques.

Les administrateurs affirment aussi que les dérsanés contribuent à l'économie du pays en payant des redevances et qu'ils diminuent le chômage en faisant travailler du personnel.

Maintenant on va citer les points de vue du Ministère de l'Education Nationale.

2.4 Points de vue du Ministère de l'Education Nationale (MEN)

Dans un rapport préparé par le Ministère de l'Education Nationale sur l'enseignement secondaire nous constatons que le MEN reconnaît aussi que les connaissances transmises aux élèves par l'enseignement secondaire ne sont pas analogues à celles du CEU.

Par ailleurs le MEN affirme que l'augmentation rapide de la population multiplie l'effectif des classes et que cela influence négativement l'enseignement. La répartition des professeurs dans le pays montre beaucoup de différences entre les villes et les campagnes.

D'après le MEN, la formation des enseignants dans les écoles d'Etat n'est ni pédagogiquement et ni scientifiquement suffisante. De plus dans certaines écoles, on ne peut pas trouver de professeurs pour faire cours. Les programmes ne peuvent pas être terminés

dans la plupart des écoles. Pour quelques domaines comme la physique, la chimie et la biologie il n'y a pas non plus de matériel expérimental dans les écoles.

En ce qui concerne le CEU, le MEN indique que le type des contrôles dans l'enseignement secondaire et celui du CEU sont très différents et que les élèves qui viennent de lycées suivant des programmes différents sont confrontés à un même concours.

Par ailleurs le MEN explicite ses raisons à propos des inconvénients des dérsanés en disant que le fait que les élèves suivent les cours des dérsanés en n'étant conditionnés que par l'idée de réussir, les surcharge psychologiquement et les force à travailler plus que leur capacité. De plus les élèves commencent à croire qu'ils peuvent réussir au CEU seulement à condition de participer au dérsané. Cette croyance amène les élèves à considérer que l'enseignement secondaire et leur professeur de lycée ne sont pas très importants.

D'après le MEN, de temps en temps, les dérsanés font travailler illégalement les professeurs qui travaillent déjà dans des écoles d'état. Cela multiplie le nombre de cours hebdomadaires de ces professeurs. De plus le fait que les dérsanés endossent la mission de faire entrer les élèves à l'université à la place des écoles, et ceci en gagnant de l'argent, rend difficile la compréhension de la conception de l'enseignement considéré comme un service public.

Quant à l'enseignement diffusé par les dérsanés, le MEN affirme que les dérsanés ne transmettent pas de nouvelles connaissances aux élèves mais ils leur apprennent plutôt l'application des connaissances déjà acquises en trouvant les techniques les plus courtes. En outre les concours blancs centraux auxquels les grands groupes de dérsanés soumettent les élèves, pour qu'ils puissent voir leur niveau général, diffusent dans l'ensemble du pays inquiétude et concurrence entre les élèves.

Le MEN affirme aussi que les dérsanés recrutent les professeurs qui travaillent dans les écoles d'état avec de l'expérience et des compétences. Cela influence négativement l'enseignement secondaire. Par ailleurs le fait que les dérsanés se constituent généralement dans les grandes villes supprime l'égalité des chances et l'équité de l'éducation.

Cependant le Ministère de l'Education Nationale a des préoccupations en cas de fermeture des dérsanés. Dans ce rapport on indique que si les dérsanés sont fermés, les cours privés gagneront de l'importance avec des prix plus élevés. Ainsi ce service qui servait les classes moyennes, ne sera plus que pour le monopole d'une petite minorité. De plus l'Etat serait privé des impôts sur le revenu des dérsanés.

Le MEN affirme aussi que l'insuffisance dans les écoles d'Etat peut être complétée par les dérsanés. Si on les ferme, cela sera en faveur des écoles privilégiées. On ne peut pas remplacer les dérsanés par des classes de préparation au CEU en embauchant les professeurs

présents. Il faut qu'ils soient techniquement et scientifiquement formés aux contenus du CEU. Sinon dans ces classes il ne s'agira que d'une simple répétition des cours de lycée. Enfin avec la fermeture des dérsanés, les personnels qui y travaillent rencontreraient le problème du chômage.

Comme on l'a vu, les points de vue des dérsanés et de l'Institut de la Planification d'Etat sont parallèles, et ceux du Ministère de l'Education Nationale ne sont pas en conflit avec ces derniers.

Il est facile de constater que les dérsanés sont appréciés différemment par tous ces agents : par les parents, qui les estiment nécessaires pour l'avenir de leurs enfants ; par le Ministère de l'Education Nationale qui les considère négativement comme étant une alternative à l'enseignement; par le Ministère des Finances qui les voit comme une source d'impôt ; par les politiciens qui les estiment comme une source de vote.

2.5 Enseignement de Dérsané

L'enseignement de dérsané se fonde sur le contenu du CEU et surtout sur les types de questions proposées dans ce concours. Il n'y a généralement pas de programmes officiels qui montrent explicitement les buts à atteindre, les moyens à utiliser etc. Tandis que le professeur de dérsané peut attacher beaucoup d'importance à certains outils ou objets qui vont servir aux élèves, il peut en négliger d'autres qui ne sont pas nécessaires dans un même sujet mathématique. Je prends un exemple :

en ce qui concerne la notion de fonction, si on a posé beaucoup de questions sur l'inverse d'une fonction jusqu'à maintenant au CEU et si, par contre, il n'y a aucune question liée à la fonction « valeur absolue », le professeur passera cette dernière sans en parler alors que l'inverse d'une fonction sera un de ses buts principaux.

Une autre contrainte inévitable pour le professeur de dérsané est de trouver, de privilégier et de faire acquérir les techniques les plus courtes dans la résolution des problèmes. Dans le dérsané, il est très important de savoir résoudre les questions en utilisant les techniques les plus économiques. On trouve toujours ainsi l'insistance des élèves vis à vis de leurs professeurs : « Madame ou Monsieur, est-ce qu'il n'y a pas d'autres techniques plus courtes ? ». Ce n'est pas étonnant parce que, comme nous l'avons déjà indiqué, dans ce concours les candidats ont environ une minute par question et encore ils n'ont ni brouillon ni cahier et ni calculatrice. Ils ne peuvent disposer que d'un crayon à papier, d'une gomme, d'un taille-crayon et des places libres qui se trouvent autour des questions pour faire quelques

petits calculs. Il faut rappeler que les questions du concours sont constituées de questions à choix multiples (QCM).

Ces conditions-là forcent les élèves bon gré mal gré à apprendre les techniques les plus courtes. Par conséquent, les professeurs du dérsané doivent aussi remplacer chez les élèves les techniques déjà acquises au lycée par les plus courtes (éventuellement).

Par ailleurs on peut parler un peu de la vie du professeur de dérsané. Par exemple il n'a pas le droit de ne pas pouvoir résoudre une question posée par les élèves. C'est-à-dire qu'il est obligé de donner l'impression qu'il est bon dans son métier parce que ses élèves le contrôlent toujours en éprouvant le besoin de s'assurer qu'ils ont choisi un bon dérsané et qu'ils ont un bon professeur.

Comme l'expérience et la qualité de professeur sont très importants dans cette arène, les responsables de dérsanés font commencer les professeurs débutants par les classes très faibles pour empêcher qu'ils soient ridiculisés par les bons élèves.

Afin de mieux cerner cet enseignement il me semble aussi nécessaire d'étudier les conseils donnés aux élèves par les dérsanés pour leur préparation et notamment les préfaces de certains manuels de préparation au concours.

Dans la préface du manuel Zafer, on dit que ce manuel s'est construit autour des notions essentielles en prenant en compte le programme entier de la classe de seconde et le besoin de préparer au concours les élèves. Chaque chapitre est enrichi par des notions essentielles, par des règles et par de nombreux d'exemples (corrigés) d'application. Chaque chapitre est aussi illustré par des test résolus. Les élèves qui pensent qu'ils ont assez de connaissances dans ces notions doivent antérieurement résoudre des tests résolus eux-mêmes. Les tests de chaque chapitre contrôlent toutes les connaissances concernées sans négliger un seul point. Tous les exercices sont proposés avec l'objectif d'évaluer une certaine connaissance et son application. C'est pourquoi les élèves sont invités à considérer chaque exercice qu'ils n'ont pas pu résoudre comme une occasion de remarquer *le manque d'une connaissance ou d'un entraînement, ensuite à retourner aux explications et aux résolutions des exercices concernés.*

Dans ses annales du concours¹⁹ intitulés « des questions immuables dans le CEU entre 1966-2000 » Teslim Özdemir affirme qu'on peut absolument être admis au concours à condition que *certain types de questions soient entièrement acquises.*

Dans leur site Internet, les enseignants du dérsané Kültür rappellent d'abord aux élèves que dans le concours CEU les questions relèvent du programme de la classe de seconde et

¹⁹ Özdemir T.(2000) : « des questions immuable et leurs résolutions dans le CEU entre 1999-2000 », Caglayan A.S, Gaziemir-IZMIR.

couvrent des sujets élémentaires. Ensuite ils donnent les conseils suivants : « le système de ce concours se fonde sur le fait d'utiliser à bon escient des connaissances sur des notions élémentaires plutôt que sur le fait de les savoir. C'est pourquoi si vous apprenez des sujets à un certain niveau, si vous acquérez *les types élémentaires de questions* et si vous ne les oubliez pas, il est très difficile que vous échouiez dans le concours. De plus les élèves qui ont de bonnes bases doivent *faire beaucoup de pratique pour enrichir leurs archives de questions*. En ce qui concerne les élèves qui sont privés de bonnes bases, au lieu de résoudre d'abord beaucoup de questions ils doivent *apprendre certains types de question dans certains sujets* et ensuite ils doivent commencer à résoudre les différents types de question. »

2.6 Du côté du professeur de lycée

Du côté du professeur de lycée je me demande si l'on peut dire que l'enseignement du dérsané pose beaucoup de problèmes au professeur de lycée. Est-ce que le fait que certains élèves commencent à fréquenter les dérsanés, et ceci, à partir de la classe de seconde et même des classes de CM, déséquilibre le niveau de la classe ? Est-ce que le fait que certaines techniques sont apprises aux élèves dans les dérsanés rend la réalisation de son scénario difficile ? De plus est-ce que les professeurs de lycée ont des préoccupations sur lesquelles ils ne peuvent pas motiver les élèves lorsqu'il s'agit d'un sujet qui ne figure pas dans le contenu du CEU ? Il est très difficile de répondre à toutes ces questions dans le cadre de ce travail. Mais j'ai essayé quand-même, autant que possible, de chercher certaines réponses en proposant un questionnaire aux professeurs de lycée et à ceux de dérsanés. De plus les analyses des manuels et l'analyse des questionnaires m'ont semblé aussi apporter des réponses.

2.7 Du côté de l'élève

A l'époque où j'étais un élève de lycée, je rencontrais des difficultés à cause de ces deux systèmes différents et de leurs différents contrats. Par exemple je n'arrivais pas à comprendre pourquoi mon professeur de lycée n'acceptait pas toujours les techniques qui nous avaient été apprises au dérsané. De plus j'ai eu aussi de la peine à comprendre que je me préparais à un concours comportant des questions à choix multiples, tandis que nous étions évalués par des contrôles écrits dans le lycée. Donc, grâce à cette recherche je vais chercher la réponse à la question suivante « Est-ce que les méthodes privilégiées dans les dérsanés et celles dans le lycée sont différentes ? Si oui est-ce qu'elles sont inacceptables pour l'enseignement de lycée ? Pourquoi ? »

2.8 Du côté des étudiants de l'université

Comme l'enseignement supérieur est différent de l'enseignement de lycée et surtout de celui des dérsanés et que cet enseignement se fonde sur le raisonnement, la recherche, le fait de poser et répondre à des questions « pourquoi », je pense que ce type d'enseignement doit poser des problèmes chez les étudiants universitaires qui ont déjà subi l'enseignement de dérsané (ou un enseignement très proche du concours (**EPC**)).

Dans mes études supérieures il m'a fallu passer les trois premières années pour commencer à aimer les mathématiques de l'université. Ainsi quand j'ai aimé les mathématiques, j'avais terminé mes études. De plus j'ai aussi observé que, chez la plupart de mes collègues, beaucoup de comportements venant du lycée continuaient. Par exemple, avant des examens j'ai vu les gens qui essaient d'apprendre par cœur « la démonstration du fait que l'intervalle ouvert $(0,1)$ soit non dénombrable ».

Tous ces constats m'ont donné l'idée de chercher si l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui-ci) posait des problèmes d'adaptation aux études supérieures (en mathématiques) chez les étudiants de l'université.

CHAPITRE II

PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Plan du chapitre II :

1. <i>Problématique de la recherche</i>	30
1.1 Constats probablement à vérifier	30
1.2 Pourquoi les fonctions et les classes de seconde	32
1.3 Hypothèses admises de la recherche	33
2. <i>Méthodologie de la recherche sur les fonctions</i>	36
2.1 Résumé du programme	36
2.2 Analyse des manuels	37
2.3 Description et passation des questionnaires-élèves	43
2.4 Analyse des questionnaires-enseignants sur les fonctions	49
2.5 Analyse des questionnaires-étudiants	49

Le but de ce chapitre est de présenter le cadre scientifique dans lequel s'inscrit ce travail et mon questionnement. Je présenterai les choix portés sur l'analyse des programmes, des thèmes du concours, des manuels de préparation au concours et des manuels de lycée (à savoir les manuels étudiés et l'analyse adoptée lors de l'exploration des exercices proposés) pour ensuite décrire la mise en œuvre des questionnaires que nous avons passés. Nous avons choisi de ne pas présenter l'analyse a-priori des questionnaires-élèves sur les fonctions dans ce chapitre : il nous a paru plus judicieux de le faire au moment où nous explorerons les données recueillies. Mais nous allons cependant décrire les questions que nous avons mises dans les questionnaires.

1. Problématique de la recherche

Dans ce travail, nous nous attachons à faire un diagnostic sur un chapitre précis (notion de fonction) au niveau des élèves de seconde. Le système actuel du concours d'entrée à l'université en Turquie nécessite une préparation spécifique, proposée en dérsané, pour réussir ; or cela éloigne les élèves d'une pratique mathématique authentique, rendant « l'enseignement en lycée superficiel » et cela peut avoir des conséquences négatives plus tard.

1.1 Constats probablement à vérifier

En ce qui concerne les constats probables à vérifier dans le cadre de tous ces questionnements, ils se répartissent en trois catégories différentes : caractérisation du concours demandant une préparation spécifique non donnée au lycée, différences d'enseignement entre lycée et dérsané et enfin conséquences de l'enseignement dérsané sur les élèves.

Caractérisation du concours demandant une préparation spécifique non donnée au lycée

CPV (Constat probable à vérifier) 1. Le concours est très technique c'est pourquoi les élèves qui ne suivent pas les dérsanés, même s'ils sont très bons élèves, échouent.

CPV 2. Le fait que les questions du concours portent sur plusieurs connaissances antérieures (connaissances qui viennent de l'enseignement précédent par exemple) empêche les élèves non préparés de les résoudre, même s'ils savent mettre en fonctionnement des connaissances actuelles (c'est-à-dire des connaissances qui font référence directe aux fonctions par exemple).

Différences d'enseignement entre lycée et dérsané

CPV 3. Comme l'enseignement des mathématiques au dérsané est fondé sur les questions du concours et l'enseignement des mathématiques au lycée sur le programme officiel, ces deux enseignements doivent être différents. L'enseignement du dérsané n'est pas une simple répétition des cours de lycée.

CPV 4. Dans l'enseignement de dérsané (ou l'enseignement très proche du concours) il s'agit de présenter les types de questions du concours et d'entraîner des élèves à les résoudre en proposant beaucoup d'exercices du même type.

Conséquences de l'enseignement dérsané sur élèves

CPV 5. L'enseignement de dérsané et/ou la motivation forte du concours peuvent négativement influencer les manuels de lycée, les pratiques des enseignants de lycée et celles des élèves. En d'autres termes, dans les dérsanés, du fait qu'on essaie de trouver les techniques les plus courtes sans commentaire et sans se demander « comment ? » ou « pourquoi ? » il apparaît une vision strictement utilitaire des outils mathématiques chez les élèves et cela implique de devenir un automate. De plus ce type d'enseignement peut éloigner les élèves des mathématiques. Je prends un exemple :

Dans les dérsanés, on apprend une formule pour trouver l'inverse des fonctions du type

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; ainsi « pour trouver f^{-1} il est suffisant de changer les places de a et de d et

leur signe : $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$. » On voit ici l'utilisation d'une technique plutôt qu'un

apprentissage lié à la notion de fonction inverse.

CPV 6. Dans les classes qui ne sont pas homogènes, c'est-à-dire les classes ayant des élèves qui fréquentent les dérsanés et d'autres non, les pratiques (les rapports au savoir de l'élève²⁰) des élèves ne sont pas non plus homogènes. Ainsi les erreurs commises, les méthodes privilégiées et les procédures sont différentes.

CPV 7. Subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieures des élèves.

CPV 8. Le désir de préparer les élèves au concours s'avère aussi dans les choix faits par les enseignants de lycée.

1.2 Pourquoi les fonctions et la classe de seconde ?

En deuxième année de cette recherche 2001-2002 nous avons prévu de faire cette étude en faisant des observations de classes au lycée et au dérsané. De plus nous voulions assister à ces séances munies d'un caméscope ou d'un magnétophone et les filmer pour mieux faire ce diagnostic en regardant aussi les pratiques des enseignants et des élèves. C'est pourquoi nous devons choisir une notion qui est introduite en même temps au dérsané et au lycée. Comme les dérsanés font leur cours à partir du contenu du concours, il était très difficile de trouver ce type de notion dans les classes de première et terminale. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi la notion de fonction.

Comme je suis boursier du gouvernement turc, je pouvais rester en Turquie au plus deux mois par an. Pour gagner du temps, avant de partir en France j'avais envoyé une demande au Ministre de l'Education Nationale et j'avais sollicité une autorisation un mois avant pour faire ce travail dans trois lycées et trois dérsanés dans la ville où j'habite et je suis né.

L'autorisation du MEN n'était pas encore envoyée aux lycées et dérsanés concernés quand je suis arrivé en Turquie. J'ai dû téléphoner plusieurs fois au MEN pour demander où est mon autorisation. Ils m'ont dit qu'il fallait aller à Manisa (notre préfecture est là) et la chercher à la direction provinciale de l'éducation nationale. J'ai enfin réussi à récupérer mon autorisation. Mais il y avait encore une surprise pour moi ; dans cette autorisation le caméscope et le magnétophone n'étaient pas mentionnés (j'avais écrit tous les détails dans ma lettre). J'ai quand même essayé de les faire accepter aux responsables des lycées. L'un

²⁰En citant Bernard Charlot, nous dirons que « le rapport au savoir est un ensemble de relations de sens, et donc de valeur, entre un individu (ou un groupe) et les processus ou produits du savoir. Premièrement, le rapport au savoir est rapport à des processus (l'acte d'apprendre et ce qui peut spécifier cet acte) et à des produits (les savoirs comme compétences acquises et comme objets culturels, institutionnels, sociaux). Deuxièmement, le rapport au savoir est à la fois relation de sens et relation de valeur : l'individu valorise ce qui fait sens pour lui, ou, inversement, confère du sens à ce qui pour un individu dépend de l'identité de cet individu » (cf. Bernard Charlot (1997) : « *Du rapport au savoir-éléments pour une théorie* », Edition Anthropos, 1997).

d'entre eux a voulu m'aider en insistant auprès d'une enseignante qui avait refusé (cette enseignante était très importante pour nous parce qu'elle enseignait dans toutes les classes de seconde au lycée anatolien où la plupart des élèves suivent les dérsanés). Cela a rendu mes conditions de travail difficiles. Parce que cette enseignante s'est plainte à la direction de l'éducation nationale en ville. Le directeur m'a dit que dans l'envoi du MEN il n'y avait aucune indication sur le fait de filmer des séances et que je ne pourrais donc pas le faire. De plus il m'a dit que ce n'était pas aussi facile d'entrer dans les classes avec un caméscope. Je lui ai répondu qu'il y avait beaucoup de recherches réalisées avec un et peut-être même deux caméscope en France. Il m'a répondu banalement que nous avions des conditions différentes en Turquie.

Ainsi nous avons renoncé de filmer les séances et nous sommes contents de proposer des questionnaires aux élèves dans les classes, pour faire ce diagnostic et vérifier nos constats probables ci-dessous en nous appuyant sur les hypothèses admises que nous allons présenter ci-dessous. Nous avons analysé le programme de seconde et le contenu du concours, les questionnaires proposés aux enseignants sur la notion de fonction pour essayer de pénétrer un peu plus dans ce qui constitue la vie des fonctions dans les classes, les questionnaires aux étudiants pour vérifier que subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieures des élèves.

1.3 Hypothèses admises de la recherche

Comme notre méthodologie de la recherche est fondée sur l'analyse des manuels, des thèmes du concours et des questionnaires proposés aux élèves, pour expliquer les raisons de ce choix, il nous semble nécessaire de retenir certaines hypothèses en didactique portant sur les apprentissages des élèves en fonction des énoncés proposés aux élèves.

Les chercheurs en didactiques des mathématiques étudient l'enseignement des notions mathématiques en essayant de le relier à l'apprentissage des élèves. Ainsi les exercices choisis par l'enseignant (surtout les énoncés) sont considérés comme l'un des facteurs qui dépendent de l'enseignement et ils peuvent avoir une conséquence sur les apprentissages des élèves.

Parmi les facteurs qui dépendent de l'enseignement et qui peuvent avoir une répercussion sur les apprentissages des élèves, nous retenons les exercices que l'enseignant a choisis : plus précisément nous proposons d'étudier des énoncés précis (à proposer aux élèves) et la manière dont ils peuvent être travaillés en classe. Cela nous renseigne en effet sur les activités (mathématiques) que chaque énoncé peut déclencher chez les élèves, et sur leurs conséquences

éventuelles sur les acquisitions, à condition d'analyser ces activités en relation avec les apprentissages²¹.

Par ailleurs, peuvent intervenir d'autres disciplines comme la psychologie cognitive, la psychologie, la psychanalyse, l'épistémologie, la sociologie, l'histoire des sciences...etc. Toutes ces disciplines, y compris la didactique des mathématiques, ont une approche spécifique, se fondent sur un découpage particulier de la réalité, a des hypothèses et des questionnements qui lui sont propres. Chacune d'entre eux complète d'autres et utilise leurs avancées.

La plupart des chercheurs qui adoptent une démarche didactique fondent leurs problématiques, leurs analyses sur les savoirs, les notions à enseigner.

Il y a d'autres analyses des tâches proposées aux élèves (Notamment en termes de praxéologies), notamment celles qui permettent de reconstituer ce qui est abordé en classe dans la panoplie des tâches possibles. Ces analyses peuvent mettre en évidence certains manques dont on peut inférer des conséquences sur les apprentissages. Notre point de vue ici est autre, complémentaire : ce ne sont pas des considérations organisées autour du savoir présenté aux élèves qui nous guident mais un questionnement centré sur le détail du travail de l'élève à partir des énoncés qui lui sont proposés²².

Il nous semble important de donner tout de suite quelques précisions sur le vocabulaire que nous utilisons dans le cadre de ce travail. Par le mot *activité(s)*²³ nous entendons que tout ce que dit, fait, pense un élève pendant l'action, avant ou après. Cela peut avoir des traces, écrites ou orales, mais une partie est invisible. Pour nous, le mot *tâche* désigne ce qui déclenche une activité : ici un énoncé, ou plus exactement, une question d'un énoncé.

Par ailleurs, en terme d'apprentissage, les conséquences de l'application d'un théorème en remplaçant des données générales par des données particulières et celles de l'adaptation de ce théorème, en travaillant la manière de l'appliquer ne sont pas identiques.

Nous associons à un énoncé une analyse des activités des élèves qu'il peut engendrer, notamment en étudiant ce que les élèves ont à faire de leurs connaissances. Par exemple s'ils doivent utiliser les identités remarquables en reconnaissant sur une forme non habituelle des groupements à effectuer, ou s'ils ont à les utiliser deux fois de suite de manière non indépendante, nous dirons qu'ils ont adapté cette connaissance et c'est ce qui nous intéresse dans cette activité.

*L'enjeu des activités déployées par les élèves n'est autre en effet que l'apprentissage : c'est du moins l'entrée que nous avons choisie, nous restreignant à cet aspect qui dépend en large partie des choix de l'enseignant. Appliquer un théorème en remplaçant des données générales par des données particulières ou adapter ce théorème, en travaillant la manière de l'appliquer n'ont pas les mêmes conséquences en terme d'apprentissage(...)*²⁴

²¹ Voir bibliographie, Robert A. & Rogalski M. (2002)

²² ibidem.

²³ Nous utilisons la définition que propose Aline Robert (2000).

²⁴ Robert A. & Rogalski M. (2002).

Les élèves apprennent ce qui leur a été présenté en cours avec des applications simples et isolées et ils peuvent l'enrichir en travaillant sur autre chose et d'autres applications non isolées et moins simples.

(...) nous admettons que ce qu'apprend un élève à qui on ne proposerait, par exemple, que des applications simples et isolées des théorèmes du cours, pourrait être enrichi si on lui proposait aussi autre chose, d'autres applications, non isolées ou moins simples. Bien sûr la première fois il risque de ne pas réussir à donner une solution de l'exercice, sans doute sera-t-il arrêté, mais nous suggérons que s'il doit résoudre suffisamment souvent des énoncés différents, en recevant des aides adéquates, il apprendra à la fois chercher et à utiliser autrement ses théorèmes, autrement dit il enrichira ses connaissances. Les enrichissements auxquels nous pensons sont l'accès à des démarches mathématiques pas uniquement algorithmiques, à une certaine généralité des outils et à une certaine organisation des connaissances. Un théorème a un caractère général (abstrait, conceptuel, décontextualisé), et il faut des applications diverses pour en saisir la généralité. De même un théorème s'inscrit dans un champ de connaissances et il faut des applications variées pour saisir sa place, lui donner de plus en plus de sens. Enfin si plusieurs fois les élèves sont confrontés à une certaine recherche, ils s'y font »²⁵.

Nous avons conscience du fait que l'activité du professeur ne représente qu'une partie des facteurs qui déterminent l'apprentissage d'un élève. L'hétérogénéité d'une classe en témoigne. Le riche travail de Bernard Charlot, Elisabeth Bautier et Jean-Yves Rochex²⁶ contribue à expliquer, par une approche sociologique, que les élèves ne reçoivent pas de la même manière un même enseignement : non seulement ils ne rentrent pas en classe avec les mêmes attentes et les mêmes projets, mais encore ils ne donnent pas le même sens au discours de l'enseignant et à ses consignes ni même aux tâches qu'ils réalisent en classe ou à la maison. Néanmoins, nous faisons l'hypothèse que ce qui se passe dans une classe reste un facteur essentiel des apprentissages des élèves. De plus, nous fixons à notre recherche une première limite : nous ne prenons pas en compte la dimension sociale des élèves des classes dans lesquelles nous avons passé nos questionnaires.

Dans une situation d'enseignement, le professeur s'engage personnellement. Des logiques inconscientes s'y manifestent nécessairement. Nous avons pu percevoir quelques-unes de leurs manifestations lors de certaines observations, mais n'étant pas spécialiste des théories ni des analyses psychanalytiques, nous avons préféré ne pas en tenir compte dans le cadre de ce travail. Cette limitation suppose, nous en faisons l'hypothèse, que la compréhension partielle à laquelle nous pourrions parvenir reste cependant pertinente pour expliquer, suffisamment même si ce n'est pas totalement, les activités du professeur en fonction de ce qu'elles induisent sur les apprentissages des élèves.

²⁵ Ibidem.

²⁶ Charlot B., Bautier E et Rochex J.-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Armand Colin : Paris

Dans une classe, les interactions entre le professeur et les élèves comportent nécessairement une dimension affective qui n'est pas négligeable. Par exemple il est tout à fait possible de remarquer, lors des observations de classe, que le ton du professeur change suivant la situation ou suivant les élèves, que ses accompagnements du discours purement mathématique (verbaux ou non) sont nombreux pour souligner son égard pour ses élèves, que sa position dans la salle comme ses déplacements témoignent aussi de la dimension affective du jeu qui se déroule en classe. Pour des raisons d'ordre méthodologique, nous avons décidé de ne pas aborder la dimension affective des situations d'enseignement observées. En effet, les exemples que nous avons cités montrent que la prise en compte de cette dimension mérite d'adopter un point de vue très local sur les situations, point de vue qui vient se heurter au choix de considérer l'ensemble complet de la séquence de chaque professeur. Malgré ces nouvelles limitations de notre étude, nous supposons encore qu'elle conserve sa pertinence.

2. Méthodologie de la recherche sur la notion de fonction

Comme nous l'avons précisé auparavant, notre étude va comporter plusieurs dimensions différentes : résumé du programme pour caractériser le concours et montrer la différence entre le programme des lycées et le contenu du concours, analyse des manuels de lycée et des manuels de préparation au concours, des thèmes du concours, des questionnaires proposés aux élèves, aux enseignants et aux étudiants. Nous allons présenter dans cette partie comment nous allons mener l'analyse de ces différentes données et les articuler.

2.1 Résumé du programme

Pour classer ce qui apparaît dans le programme concernant les fonctions, le comparer avec les thèmes qui apparaissent dans le concours d'entrée à l'université et montrer ainsi l'éloignement du programme de lycée et du contenu du concours, nous avons résumé le programme officiel de la classe de seconde. Dans le chapitre suivant nous décrirons le contenu prévu à ce niveau ainsi que les compétences exigibles tout en soulignant les commentaires (s'ils existent) qui les accompagnent.

Face à ce qui est proposé par le Ministre de l'Education Nationale, il s'agit de savoir ensuite ce qui est retenu dans les manuels de lycée et pour ce faire nous avons choisi quatre exemples qui nous semblent assez représentatifs : manuel officiel (édition : Ministre de l'Education Nationale), collection Tutibay (édition : TUTIBAY), collection Altın (édition : ALTIN KITAPLAR), et collection Aydın (édition : AYDIN).

Puisque l'un de nos objectifs principaux est de caractériser l'enseignement dispensé au désané en relation avec celui du lycée, il s'agit aussi de savoir ce qui apparaît dans les manuels de préparation au concours et pour ce faire notre choix s'est porté sur trois manuels de ce type : il s'agit de mathématiques CEU de la collection Gündender chez GÜVENDER YAYINLARI, du manuel de seconde de préparation au concours et de soutien aux cours de lycée de la collection Zafer chez ZAFER YAYINLARI, du manuel de préparation au CEU de la collection Uğur chez UGUR YAYINLARI. Cette liste n'est pas exhaustive mais couvre les livres principalement utilisés par les élèves. Nous développerons plus en détail les caractéristiques analysées de chaque manuel dans le paragraphe suivant.

Comme les manuels de préparation au concours sont constitués en référence au contenu du concours avec l'objectif de préparer les élèves et que nous voulons étudier l'influence de ce concours dans l'enseignement de lycée, il nous a semblé important d'analyser ce qui a été proposé aux élèves aux concours de 1970 à 2003. L'analyse menée est la même que celle adoptée pour les exercices des manuels afin de permettre une meilleure comparaison entre les deux.

2.2 Analyse des manuels

Notre analyse comportera quatre parties, dont nous allons détailler le plan : chapitre où les fonctions sont introduites globalement, activités introductrices, cours et exercices résolus.

Chapitre où les fonctions sont introduites globalement

Dans cette partie nous avons étudié si les manuels attribuent un chapitre propre aux fonctions ou si elles sont présentés dans un chapitre commun avec d'autres notions. Cette indication fournit des repères sur la qualification des fonctions par les manuels.

Pour les activités introductrices

Nous nous sommes intéressés par la manière avec laquelle chaque manuel introduit la notion de fonction, quel(s) type(s) d'activité(s) est proposé ainsi que sa conformité à l'esprit des programmes.

Pour le cours

Nous avons effectué l'analyse du cours en regardant à la fois : le statut des fonctions (la définition proposée), les notations qui sont introduites à leur propos et les

caractères outil²⁷ ou objet²⁸ présents, les théorèmes et les propriétés qui apparaissent, en distinguant ceux qui sont démontrés, les notations proposées et donc les différentes écritures et cadres²⁹ introduits aussi que les articulations explicitées entre ces derniers. Par ailleurs dans l'analyse du cours nous nous sommes penchés aussi sur les remarques grâce auxquelles les connaissances essentielles dont l'élève doit se servir pour résoudre les exercices sont introduites. De plus comme les manuels turcs proposent plusieurs exemples qui peuvent être qualifiés d'exercices résolus dans le cours, nous avons aussi analysé ces exemples, surtout s'ils font référence directe aux notions qui les précèdent, en prenant en compte les mêmes niveaux que ceux que nous utilisons dans l'analyse des exercices résolus.

Pour les exercices résolus.

Nous classerons tout d'abord les différents types de tâches prescrites et demandées aux élèves. A. Robert a introduit l'idée (Robert, 1999) que proposer des tâches simples et isolées des théorèmes, définitions, formules, ne provoque pas chez l'élève les mêmes activités que si des adaptations sont à mettre en œuvre. Nous distinguerons ainsi quatre types de tâches qui n'engendrent pas des activités de même nature pour les élèves dans une classe d'un niveau scolaire donné.

- Les tâches élémentaires : lire, répéter, prendre son cahier, écrire sous la dictée. Les activités potentielles des élèves ne sont pas mathématiques.
- Les tâches simples et isolées : elles ne demandent que l'application immédiate d'une règle ou d'une propriété. Il peut s'agir de donner le résultat d'un calcul énoncé par le professeur, de composer deux fonctions affines et de calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie algébriquement. Ces tâches permettent de mettre en fonctionnement le lien décontextualisation-contextualisation.
- Les tâches simples : toutes les tâches qui demandent un travail de reconnaissances pour appliquer un résultat, celles qui demandent des répétitions, ne peuvent pas être considérées comme simples et isolées. La reconnaissance d'une figure, la répétition d'une construction sont des tâches simples, elles demandent aux élèves de mettre en fonctionnement les liens contextualisation-décontextualisation-recontextualisation. Nous considérons, par exemple, la détermination de la formule algébrique d'une fonction affine à partir de deux images connues

²⁷ Nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs problèmes peuvent être adaptés à un même problème (Douady, 1987, p.9).

²⁸ Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement (ibidem).

²⁹ Dans le sens employé par R.Douady

en classe de seconde, comme une tâche simple, simple parce qu'elle met en jeu une contextualisation immédiate, non isolée parce qu'elle met en jeu plusieurs connaissances à la fois.

- Les tâches complexes : ce sont celles qui amènent les élèves à conjecturer, à adapter, à choisir une propriété parmi plusieurs, à faire un raisonnement en plusieurs étapes. Elles nécessitent l'association d'un problème et d'une mise en fonctionnement et non plus l'application d'un théorème ou une propriété à une figure. Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme est une tâche complexe en cinquième. Les élèves ont tout d'abord à sélectionner parmi les hypothèses celles qui leur permettront de caractériser le parallélogramme. Il leur faut donc mettre en relation hypothèses et caractérisation d'un parallélogramme. Ils ont ensuite à adapter le raisonnement au contexte de l'exercice avant de conclure.

Nous allons donc analyser la tâche prescrite aux élèves dans les exercices résolus en la positionnant par rapport aux exigences du programme et en regardant :

- Les cadres : nous développons l'idée que les notions mathématiques interviennent souvent dans des *cadres* différents³⁰. Avec ce mot, nous étiquetons un domaine de travail du mathématicien dans lequel la notion concernée peut fonctionner et être utilisée en liaison avec d'autres, ce domaine n'étant pas le seul champ où la notion peut intervenir. Nous défendons l'idée que les exercices peuvent utilement amener à contextualiser les notions en utilisant divers cadres, soit explicitement, soit sans le demander aux élèves, mais en espérant cependant qu'ils penseront à introduire³¹ ces changements de cadres.

En accordant une importance à ces idées, dans les exercices nous allons regarder les cadres qui apparaissent dans chacun et les changements de cadres, indiqués ou non, qu'il faut effectuer pour la résolution.

- Le degré de décontextualisation de la tâche (tâche particulière, générique, mise en fonctionnement outil ou objet de la notion)
- Les commentaires et les points méthodes éventuellement existants.
- Les connaissances qui sont en jeu, en distinguant celles qui sont relatives au domaine des fonctions et celles qui ne le sont pas. Dans chacune de ces catégories, nous distinguerons les outils disponibles et mobilisables ainsi que les mises en fonctionnement techniques des connaissances.

³⁰ Nous reprenons ici les travaux de R. Douady (cf. RDM volume 7-2, *Repères IREM* n°15).

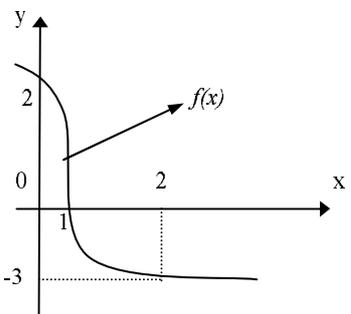
³¹ C'est ce que R. Douady appelle les jeux de cadres.

Nous avons distingué les exercices résolus selon les connaissances en jeu et les avons classé en deux catégories : les exercices simples où il s'agit d'utiliser seulement les connaissances qui font référence directe à la notion de fonction et les exercices articulés où l'élève doit faire appel aussi à des connaissances antérieures pour résoudre. En ce qui concerne les connaissances antérieures des élèves, nous nous sommes limités au programme de la classe de 3.^{ème} La liste suivante montre quelles connaissances antérieures nous appelons «outils devant être disponibles» :

- Nombres (les ensembles des nombres et leurs propriétés: ensemble des nombres rationnels, entiers, irrationnels...etc.)
- Puissances et racines
- Factorisation
- Identités remarquables
- Factorielles
- Valeur absolue (d'un nombre réel)
- Résolution d'équations à une inconnue et d'équations à deux inconnues
- Résolution de système linéaire d'équations
- Equation des droites
- Permutation et probabilités

En nous appuyant sur les travaux de A. Robert (1998), nous avons compté dans les exercices résolus les outils supposés disponibles dans le travail et les outils mobilisables. De plus nous avons aussi précisé, dans la grille d'analyse, le nombre des étapes par lesquels l'élève doit passer pour résoudre l'exercice. Afin de mieux expliquer cette analyse nous allons donner des exemples :

Exemples	Solution	Notre analyse
<p>Si $f(2)=5$ et $f(3)=8$, pour la fonction f affine, quelle est la valeur $f(1)$?</p> <p>(exercice articulé dans lequel il y a un outil supposé disponible, deux outils mobilisables, trois étapes, il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)</p>	<p>Si f est une fonction affine, $f(x)=ax+b$</p> $f(2)=2a+b=5$ $f(3)=3a+b=8$ $2a+b=5$ $3a+b=8$ $a=3 \text{ et } b=-1$ $f(x)=ax+b=3x-1$ $f(1)=3 \cdot 1 - 1 = 2$	<p>La formule générale des fonctions affines (Outil mobilisable 1)</p> <p>-Cadre algébrique (CA)</p> <p>-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions</p> <p>Trouver les images en mettant à la place de x dans la fonction f (outil mobilisable 2, étape 1)</p> <p>La résolution du système linéaire d'équations (outil supposé être disponible dans le travail 1, étape 2)</p> <p>Déterminer la fonction f et calculer l'image demandée (outil mobilisable 2, étape 3)</p>
<p>Etant donné $f(x)=x^2-2x+1$, calculer $f(\sqrt{3}+1)$.</p> <p>(exercice articulé dans lequel il y a deux outils supposés disponibles dans le travail, un outil mobilisable, deux étapes et il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique et numérique)</p>	$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ $f(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3}+1-1)^2=(\sqrt{3})^2=3.$	<p>Utilisation d'une identité remarquable (outil supposé disponible dans le travail 1, étape 1)</p> <p>-Cadre algébrique (CA)</p> <p>-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions</p> <p>L'élève doit calculer l'image demandée en se servant des connaissances antérieures liées aux puissances ou racines (outil mobilisable 1, outil supposé disponible dans le travail 2, étape 2)</p> <p>-Cadre numérique (CN)</p>
<p>Etant donné $f(x)=\frac{x}{x+1}$, calculer $f(x-1)$ en fonction de $f(x)$.</p> <p>(exercice articulé dans lequel il y a un outil supposé disponible dans le travail, un outil disponible, trois étapes et il s'agit d'un travail sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)</p>	<p>On trouve x à partir de $f(x)=\frac{x}{x+1}$.</p> $xf(x)+f(x)=x \Rightarrow x-xf(x)=f(x)$ $\Rightarrow x(1-f(x))=f(x) \Rightarrow x=\frac{f(x)}{1-f(x)}$ $f(x)=\frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x-1)=\frac{x-1}{x-1+1}=\frac{x-1}{x}$ <p>on écrit à la place de x la valeur x en fonction de $f(x)$</p> $f(x-1)=\frac{\frac{f(x)}{1-f(x)}-1}{\frac{f(x)}{1-f(x)}}=\dots=\frac{2f(x)-1}{f(x)}$	<p>Calculer x en fonction de $f(x)$ en mettant en fonctionnement la résolution d'équations (outil supposé disponible dans le travail 1, étape 1)</p> <p>-Cadre algébrique (CA)</p> <p>-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions</p> <p>Calculer $f(x-1)$ (outil mobilisable 1, étape 2)</p> <p>Trouver l'image demandée en remplaçant x par la valeur x en fonction de $f(x)$ (étape 3)</p>

Exemples	Solution	Notre analyse
<p>Si les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par $f(x)=x^2-1$ et $g(x)=x-1$, trouver $f \circ g$ et $g \circ f$.</p> <p>(exercice articulé dans lequel il y a un outil supposé disponible, un outil mobilisable, une seule étape et il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)</p> <p>(exercice simple dans lequel il y a un outil mobilisable, une seule étape et il s'agit de travailler sur l'écriture algébrique des fonctions dans le cadre algébrique)</p>	$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ $= f(x-1)$ $= (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ $= g(x^2 - 1)$ $= (x^2 - 1) - 1$ $= x^2 - 2$	<p>Utilisation de la définition de la composition des fonctions (outil mobilisable 1, étape 1)</p> <p>-Cadre algébrique (CA)</p> <p>-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions</p> <p>Une identité remarquable que l'élève doit se servir (outil supposé disponible dans le travail 1)</p> <p>Utilisation de la définition de la composition des fonctions (outil mobilisable 1, étape 1)</p> <p>-Cadre algébrique (CA)</p> <p>-Travail sur l'écriture algébrique des fonctions</p>
<p>Etant donné $f = \{(-1, 2), (1, 3), (2, -4)\}$ et $g = \{(-1, 1), (2, 2), (3, 1)\}$, trouver $f + 2g$.</p> <p>(exercice simple dans lequel il y a deux outils mobilisables, une seule étapes et il s'agit de travailler sur l'écriture de la liste de couples des fonctions dans le cadre de la théorie élémentaire des ensembles et le cadre numérique)</p>	$(f + 2g)(-1) = f(-1) + 2g(-1) = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ $(f + 2g)(2) = f(2) + 2g(2) = -4 + 2 \cdot 2 = 0$ $f + 2g = \{(-1, 4), (2, 0)\}$	<p>Utilisation de l'opération « addition » sur les fonctions définies d'un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} par une liste de couples et déterminer les images (outil mobilisable 1 et 2, étape 1)</p> <p>-Cadre de la théorie élémentaire des ensembles (CE) et cadre numérique (CN)</p> <p>-Travail sur l'écriture de la liste de couples des fonctions</p> <p>Les quatre opérations sur les fonctions figurent dans le programme de la classe de terminale.</p>
<p>On considère que la fonction f est bijective sur $[0, 2]$ et représentée graphiquement ci-dessous :</p> <p>Quelle est la valeur $\frac{f(2) + f^{-1}(2)}{f(f(1))}$?</p>  <p>(exercice simple dans lequel il y quatre outils mobilisables, quatre étapes et il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé dans le cadre analytique et le cadre numérique)</p>	<p>On détermine graphiquement $f(2) = -3$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$</p> <p>Soit $f^{-1}(2) = a$. On obtient donc $f(a) = 2$.</p> <p>Si $f(a) = 2$ et $f(0) = 2$, on trouve $a = 0$ et puis $f^{-1}(2) = 0$</p> $f(f(1)) = f(0) = 2$ <p>On peut trouver la valeur demandée en mettant à leurs places les valeurs qu'on a trouvées</p> $\frac{f(2) + f^{-1}(2)}{f(f(1))} = \frac{-3 + 0}{2} = \frac{-3}{2}$	<p>Détermination graphique des images demandées dans un repère orthonormé (outil mobilisable 1, étape 1)</p> <p>-Cadre analytique (CAN)</p> <p>-Travail sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé</p> <p>Application de la définition de l'inverse des fonctions et de la bijectivité (outil mobilisable 2 et 3, étape 2)</p> <p>Mise en fonctionnement de la définition de la composition des fonction (outil mobilisable 4, étape 3)</p> <p>Calculer la valeur demandée (étape 4)</p> <p>-Cadre numérique (CN)</p>

2.3 Description et passation des questionnaires-élèves sur la notion de fonction

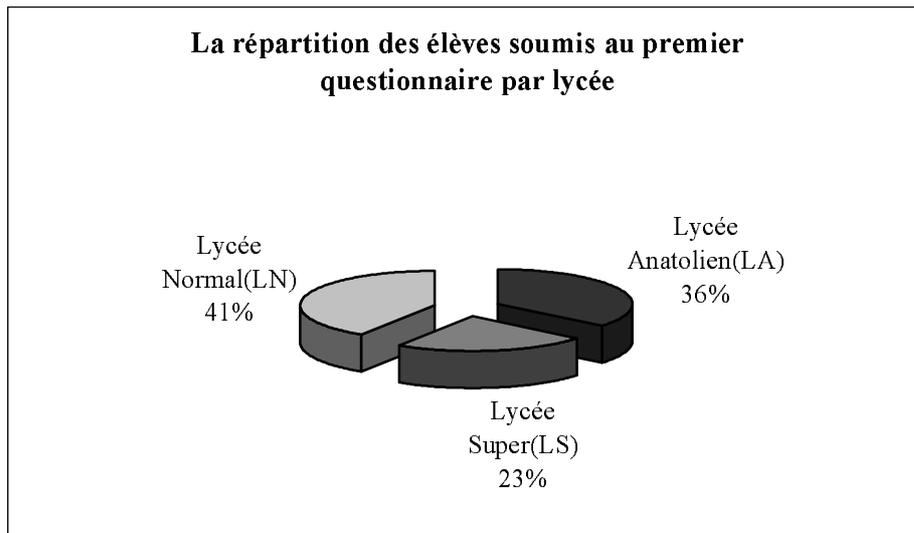
Maintenant je vais parler des questionnaires³² proposés aux élèves de seconde et d'une classe de terminale à l'aide desquels je pourrais vérifier mes constats probables (cf. CPV1, CPV2, CPV5 et CPV6). Comment se sont-ils déroulés ? Pourquoi avons-nous proposé deux questionnaires ? Comment avons-nous choisi les questions des questionnaires ? Pourquoi se sont-ils déroulés dans trois lycées différents ?

Lors du choix des questions, j'ai d'une part fait appel à mon expérience scolaire (comme étudiant) et d'autre part à mon expérience professionnelle (comme enseignant dans un dérsané). Les questions du premier questionnaire (QF1) ont été préparées à partir des programmes officiels de lycée et des cahiers des élèves du lycée normal. Parce que dans les classes de seconde de ce lycée l'enseignement était très proche du programme, il n'y avait aucun élève (ou un très petit nombre) qui suivait le dérsané ; il était très difficile de trouver des questions du concours ou des questions y ressemblant dans les cahiers des élèves. Quant au deuxième questionnaire, je me suis basé sur l'enseignement dispensé dans les classes de seconde du lycée anatolien où l'enseignement était très proche du concours, l'intérêt du concours étant très important pour les élèves, pour les enseignants et pour les parents ; le nombre des élèves qui suivent les dérsanés était élevé et il était possible de remarquer beaucoup de questions du concours ou des questions y ressemblant dans les cahiers des élèves.

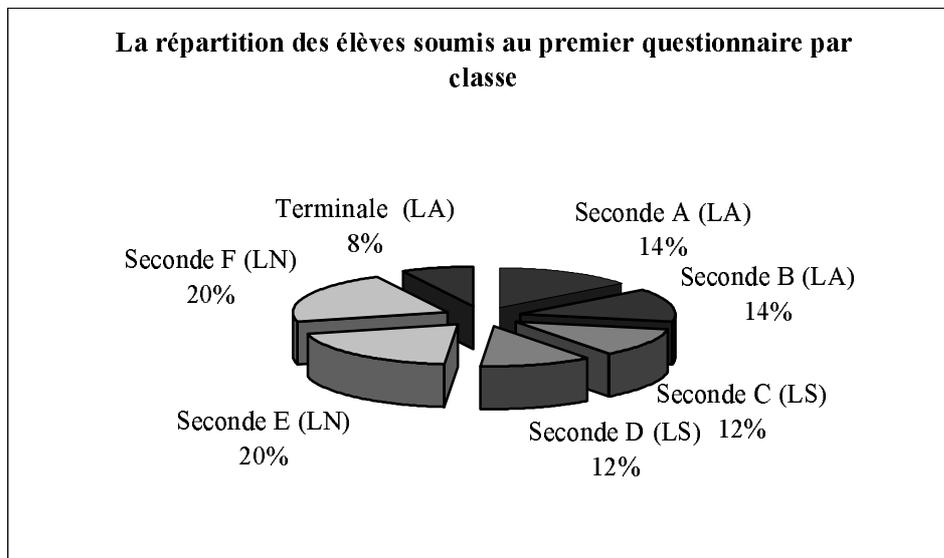
Il y a deux questionnaires. L'un comporte 7 questions et l'autre 10 questions³³ qui traitent de la notion de fonction. Je les ai proposés aux élèves de seconde de trois lycées différents et à une classe de terminale. Comme le montrent bien les tableaux ci-dessous, le premier questionnaire a été passé par 249 élèves appartenant à 6 classes de seconde et 1 classe de terminale, le deuxième a été proposé aux mêmes élèves (sauf ceux d'une classe de seconde) une semaine après. Les questionnaires se sont déroulés pendant des cours d'orientation. Dans les questionnaires, afin de disposer d'informations sur les élèves, nous leur avons demandé d'indiquer comment ils s'estiment en mathématiques (bon, moyen, mauvais), de noter les résultats des contrôles et d'indiquer s'ils suivent un enseignement en dérsané.

³² Voir annexe V-1 et annexe V-2.

³³ Deux questions de ce questionnaire n'ont été proposées que dans la classe de terminale. Comme l'une d'entre elles n'est pas bien formée, nous ne l'avons pas analysée.



LN :Lycée Normal (effectif :102 élèves), LA :Lycée Anatolien (effectif :89 élèves), LS :Lycée Super (effectif :58 élèves)



SA :Seconde A (LA :Lycée Anatolien-effectif de la classe :36 élèves), SB :Seconde B (LA-effectif de la classe :34), SC :Seconde C (LS:Lycée Super-effectif de la classe :29 élèves), SD :Seconde D (LS- effectif de la classe :29 élèves), SE :Seconde E (LN :Lycée Normal-effectif de la classe :49 élèves), SF :Seconde F (LN-effectif de la classe :53 élèves), CT :Classe de terminale (LA-effectif :19 élèves)

Afin de mieux comprendre le niveau des élèves, il me semble nécessaire présenter les lycées où les questionnaires se sont passés. Il y a trois classes du Lycée Anatolien qui est le meilleur lycée en ville. Il recrute les élèves sur un concours. Les familles des élèves sont de haut niveau social. Les élèves commencent à suivre les dérsanés dès la classe de seconde. L'une des classes de seconde engagées dans le questionnaire a 20 élèves sur 37 qui suivent les cours de dérsané et l'autre 12 sur 34. Tandis qu'en classe de terminale tous les élèves les suivent.

La quasi-totalité des professeurs dans ce lycée fait le cours à partir des programmes officiels et (implicitement) du contenu du concours.

Les bons élèves de collège ayant échoué peuvent aller au lycée super. Il y a deux classes de seconde de ce lycée où les questionnaires se sont déroulés. Le nombre des élèves qui suivent les dérsanés dans ces classes ne dépasse pas 4 ou 5.

Le dernier lycée qu'on appelle le lycée normal recrute les élèves restant après ces deux sélections. Il y a deux classes de seconde de ce lycée où un ou deux élèves suivent les cours de dérsané. Les professeurs et les élèves sont moins motivés par le concours que ceux des autres établissements. Le professeur des classes soumis aux questionnaires suit uniquement les programmes de lycée.

Les questions sont présentées avec un espace libre après chaque question, afin que l'élève y inscrive l'ensemble de ses calculs. Les élèves ont 45 minutes pour répondre aux questions. L'ordre de présentation des questionnaires est aléatoire, néanmoins les deux questionnaires commencent par les questions les plus simples de manière qu'aucun élève ne soit d'emblée en échec. Comme les calculatrices ne sont pas autorisées en Turquie, il n'y a aucun élève qui ait utilisé une calculatrice.

Présentation des questions

Le premier questionnaire est plus proche du programme de seconde. Les questions sont simples et isolées. Elles ne demandent que l'application immédiate d'une règle ou d'une propriété. Le premier questionnaire cherche ainsi à vérifier que les élèves peuvent mettre en fonctionnement leurs connaissances essentielles qui font référence directe à la notion de fonction. On peut trouver ces types de questions dans tous les manuels. En ce qui concerne le deuxième questionnaire, les questions sont soit des questions du concours (comme les questions n°1, n°2, n°3, n°5, n°8, n°9) soit des exercices des manuels de préparation au concours. Elles ne sont pas isolées, mais simples. Elles demandent un travail de reconnaissance pour appliquer un résultat. On peut trouver ces types de questions dans tous les manuels de préparation du concours et certains manuels de lycée. Je joins en annexe³⁴ un exemplaire des deux questionnaires. En laissant faire l'analyse a-priori des questions dans le chapitre concernant l'analyse des questionnaires (chapitre VI), je présente ici brièvement les questions des questionnaires :

- La question n°1 nous permet de préciser le sens de la notion de la fonction pour les élèves. C'est une question générale. Ainsi avoir une définition complète de la fonction n'est pas très

³⁴ Cf. annexe V

exigé en général. Même si l'élève donne un mot qui renvoie à une des définitions, cela nous renseigne déjà. Comme tous les manuels de dérsané ou de lycée introduisent les fonctions de manière ensembliste, nous attendons que la plupart des élèves aient tendance à donner la définition ensembliste.

- La question n°2 permet de voir les connaissances élémentaires des élèves sur la notion de fonction. Elle invite les élèves à calculer les images des éléments de l'ensemble de définition par une fonction affine. C'est une question très bien préparée.

- La question n°3 implique l'application de la définition de la fonction inverse.

- Les questions n°4 et n°5 impliquent la mise en fonctionnement de la définition de la composition des fonctions. Dans la question n°4 il s'agit de composer deux fonction données. Inversement dans la question n° 5 on demande aux élèves de « décomposer » une fonction en utilisant l'une des fonctions composées.

- Dans la question n°6 il est nécessaire de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle.

- La septième question consiste à appliquer la définition des fonctions injectives. L'élève est amené à chercher l'injectivité d'une fonction carré à partir de son ensemble de définition.

Maintenant je fais la présentation du questionnaire 2 ;

- Dans la question n°1 il s'agit de travailler sur une fonction définie par la langue naturelle. D'abord l'élève est amené à traduire la fonction en langage algébrique et ensuite à trouver l'image d'un nombre rationnel.

- La question n°2 concerne une composée des fonctions. On demande de « décomposer » une fonction composée et ensuite de trouver l'image de 2 par cette fonction.

- La question n°3 consiste aussi à « décomposer » deux fonctions. Il s'agit de deux fonctions rationnelles composées.

- La question n°4 concerne la fonction qui présente une identité remarquable. On demande aux élèves de trouver l'image de l'expression $x+1$ par la fonction.

- Dans la question suivante il s'agit d'une fonction affine sous la forme $f(x)=ax+b$. On invite les élèves à déterminer a et b à partir des images de 3 et 2 par l'inverse de la fonction.

- La sixième question implique aussi une fonction affine. Les coefficients de x sont inconnus et l'élève est invité à trouver les coefficients en utilisant la relation entre les images de 2 et -2.

- Dans la question n°7 il apparaît une fonction constante. Le fait que le coefficient d'une fonction constante soit nul doit être mobilisé par les élèves.

- La question n°8 est celle dans la quelle la courbe représentative d'une fonction est proposée. On demande aux élèves de déterminer les images de certains éléments par la fonction et son inverse en utilisant la courbe.

- La question n°9 implique aussi la reconnaissance de l'inverse de fonction. Dans l'énoncé de la question en passant quelques étapes du traitement de l'inverse d'une fonction on donne la dernière étape et il reste aux élèves à terminer cette tâche incomplète.

Le tableau récapitulatif ci-dessous montre les connaissances à utiliser ou à mobiliser, dans les questions de nos questionnaires, par question. Ainsi dans le deuxième questionnaire il y a des questions qui demandent d'utiliser plusieurs connaissances antérieures de l'élève. Tandis que le premier est construit avec des questions qui font référence directe à la notion de fonction. Nous pensons que cette différence nous permet de vérifier notre hypothèse « les élèves qui ne suivent pas les dérsanés échouent au concours, même s'ils sont très bons élèves ».

Le tableau récapitulatif des connaissances à utiliser ou à mobiliser par question
Propriétés évoquées dans le programme de seconde de lycée

	définition de la fonction	trouver des images sur la fonction	inverse d'une fonction affine	inverse d'une fonction rationnelle	composée des fonction	décomposée des fonctions	une des fonction diverses	traduction entre différents langages	trouver les images sur une courbe représentative (Lecture graphique)	résolution du système linéaire d'équations	inverse des nombres	résolution des équations à une inconnue	fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$	reconnaissance des identité remarquables	définition de l'inverse de la fonction
Questionnaire n°1															
Q1	oui														
Q2		oui													
Q3				oui											
Q4					oui										
Q5						oui									
Q6		oui		oui											
Q7		oui					oui								
Questionnaire n°2															
Q1		oui						oui			oui				
Q2		oui				oui						oui			
Q3				oui		oui									
Q4		oui												oui	
Q5			oui							oui					oui
Q6		oui										oui			
Q7							oui					oui			
Q8									oui						oui
Q9				oui									oui		oui

2.4 Analyse des questionnaires-enseignants sur l'enseignement des fonctions

Il nous semble nécessaire cependant d'aller au-delà de ces analyses dont nous avons parlé plus haut, pour essayer de pénétrer un peu plus, dans ce qui constitue la vie des fonctions dans les classes de seconde et pour montrer l'influence du concours dans les choix faits par les enseignants (cf. CPV 8). Comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons rencontré beaucoup de difficultés pour observer et filmer les séances. C'est pourquoi nous avons mis en place un questionnaire³⁵ que nous avons soumis à un certain nombre d'enseignants au lycée et au dérsané, pour essayer de cerner plus précisément comment ils conçoivent l'enseignement des fonctions.

Les questionnaires-enseignants ont été distribués aux intéressés lors d'un passage du chercheur dans leur établissement et récupérés une semaine plus tard. J'ai reçu 15 réponses des enseignants.

Chaque questionnaire comprend onze questions.

Les deux premières questions nous apportent des informations sur le parcours de l'enseignant, particulièrement dans les classes concernées ici.

La troisième question nous apporte des informations sur la relation qu'il entretient avec les programmes officiels.

Ensuite, dans une troisième partie, j'ai posé six questions, pour cerner, autant que possible, l'image que l'enseignant se fait de l'enseignement de la fonction, son idée sur le degré de difficulté du chapitre, ses objectifs, les types d'erreurs et de difficultés aux quelles il s'attend.

La quatrième partie, avec deux questions, concerne la façon dont il gère les contraintes liées à l'existence de l'examen final. Dans cette partie nous avons demandé aux enseignants de citer trois exercices (activités) qu'ils avaient proposés aux élèves en classe et qui leur semblent particulièrement représentatifs du chapitre et de citer un exercice qu'ils ont proposé en contrôle. Dans l'analyse de ces exercices proposés nous avons aussi utilisé l'analyse menée pour les exercices résolus des manuels.

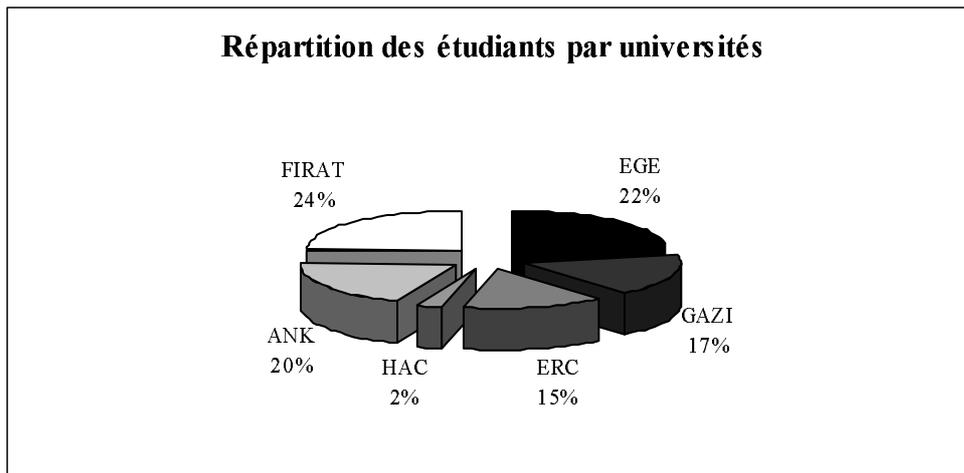
2.5 Analyse des questionnaires-étudiants sur l'enseignement des mathématiques

Le but principal de ces questionnaires est de vérifier que subir l'enseignement de dérsané (ou tout enseignement très proche de celui du concours) pose des problèmes dans les études supérieures des étudiants. Pour ce faire nous avons mis en place un questionnaire que nous

³⁵ Voir annexe V-2

avons soumis à un certain nombre d'étudiants de différentes universités en Turquie (41 étudiants).

Les questionnaires ont été envoyés par Internet aux proches du chercheur qui travaillent ou étudient aux universités citées ci-dessous. Ainsi ils ont trouvé les étudiants qui acceptent de répondre aux questionnaires et ils les leur ont distribué et ramassé. Dans chaque questionnaire, il y avait une petite explication qui met en évidence le but du questionnaire³⁶.

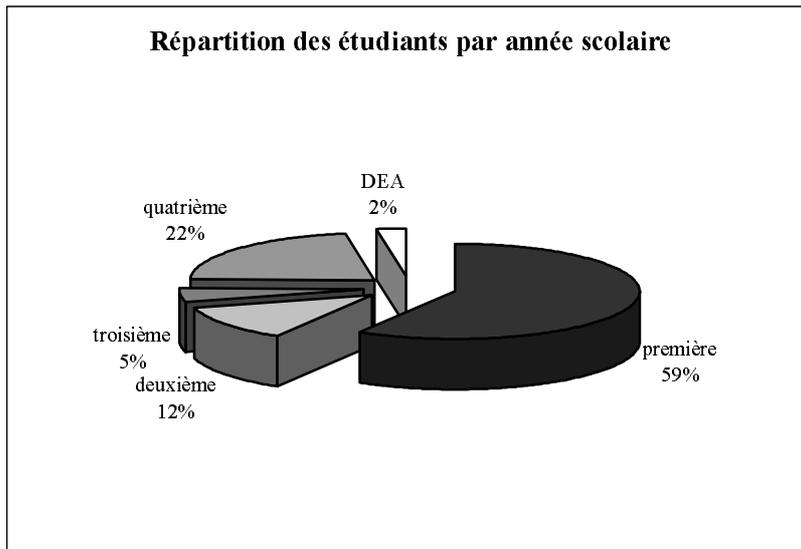


Nous disposons de dix questionnaires provenant d'étudiants de l'Université Firat (Euphrate) à Elaziğ (au Sud-Est de la Turquie), de neuf questionnaires provenant d'étudiants de l'Université Ege à Izmir (à l'Est de la Turquie), de six questionnaires provenant d'étudiants de l'Université Erciyes à Kayseri (au milieu de la Turquie), de sept questionnaires d'étudiants de l'Université Gazi, de huit questionnaires de l'Université Ankara et d'un questionnaire de l'Université Hacettepe, à Ankara (la capitale de la Turquie, au milieu du pays).

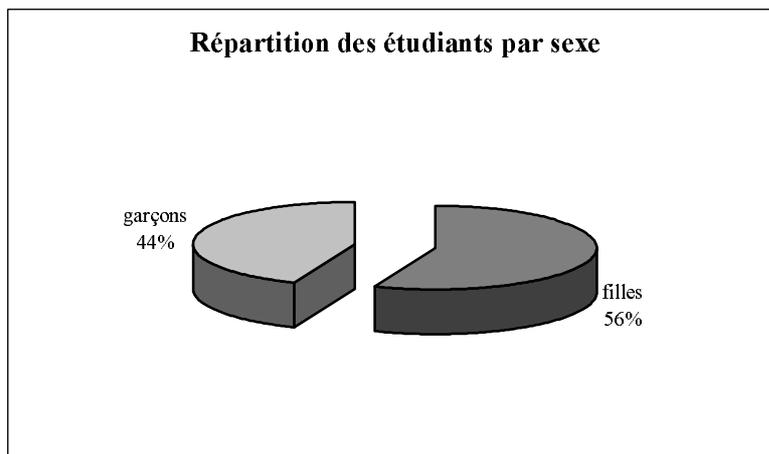
La plupart des étudiants qui répondent aux questionnaires étudiaient les mathématiques dans des facultés scientifiques (soit 37 étudiants sur 41). Quatre étudiants étudiaient les mathématiques dans la discipline « mathématiques » de l'enseignement primaire des facultés d'éducation et un étudiant dans la discipline « mathématiques » des mêmes facultés.

En ce qui concerne la répartition des étudiants par année scolaire, comme le montre bien le tableau ci-dessous, la plupart des étudiants étaient en première année lors de la passation des questionnaires. Un faisait son DEA, neuf étaient sur le point de terminer leurs études supérieures (quatrième année), deux étudiants étaient en troisième année et cinq étudiants en deuxième année.

³⁶ Cf. annexe V-3



Le sexe dominant des étudiants qui répondent aux questionnaires est féminin. Selon le tableau suivant les filles³⁷ constituent 56% des effectifs globaux des étudiants ayant répondu.



Chaque questionnaire comprend sept questions. Dans la première question nous avons invité les étudiants à exprimer leurs idées en répondant à la question suivante « pourquoi on se sent le besoin d'apprendre ou de faire apprendre les mathématiques ? ». La deuxième question demandait aux étudiants d'estimer les mathématiques effectuées au lycée, au désané et à l'université. Dans la question suivante nous leur avons demandé s'il y a une différence entre leurs idées actuelles sur les mathématiques et celles d'avant le commencement de l'enseignement supérieur. La quatrième question invitait les étudiants à parler un peu du système des concours et leur demandait ainsi s'il est toujours possible de dire qu'un élève qui répond correctement à toutes les questions de mathématiques au concours va réussir dans

³⁷ Selon le Centre de Sélection et d'Installation des Etudiants, au concours de 2003, 44,8% des élèves qui ont obtenu une place dans une université sont des filles et 55,2% sont des garçons. (cf. le site Internet de OSYM, www.osym.gov.tr)

l'enseignement supérieur. Dans la cinquième question nous leur avons proposé un dialogue entre trois étudiants qui parlent des difficultés auxquelles ils font face dans l'enseignement supérieur, en faisant un lien avec leur enseignement précédent. Les étudiants devaient ainsi indiquer avec quel étudiant ils sont d'accord et ensuite exprimer leur raisons. En ce qui concerne la sixième question, nous avons invité les étudiants à proposer des conseils pour l'enseignement des mathématiques aux lycées et aux dérsanés. Dans la dernière question nous leur avons demandé comment ils s'estiment (ou s'estimaient) en mathématiques au lycée et à l'université.

CHAPITRE III

ANALYSE DES MANUELS

Plan du chapitre III :

1. <i>Place de la notion de fonction dans les programmes actuels de seconde, de première et de terminale en Turquie</i>	55
1 Définition ensembliste et représentation graphique.....	56
1.2 Egalité des fonctions à partir d'ensembles.....	56
1.3 Propriétés particulières des fonctions.....	57
1.4 Composition des fonctions.....	57
1.5 Conclusion.....	58
2. <i>Analyse du manuel de lycée Tutibay</i>	59
2.1 Définition ensembliste de la notion de fonction.....	59
2.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	60
2.3 Egalité des deux fonctions.....	60
2.4 Propriétés particulières des fonctions.....	61
2.5 Ensembles infinis ou finis et ensembles équipotents.....	63
2.6 Composition des fonctions.....	64
2.7 Définition de l'inverse d'une fonction.....	64
2.8 Synthèse.....	67
3. <i>Analyse du manuel Officiel</i>	71
3.1 Définition ensembliste de la notion de fonction.....	71
3.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	72
3.3 Egalité des deux fonctions.....	72
3.4 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières.....	72
3.5 Définition de l'inverse d'une fonction.....	74
3.6 Ensembles infinis et équipotents.....	75
3.7 Composition des fonctions.....	75
3.8 Exercices résolus.....	76
3.8.1 Thème III : recherche de l'inverse d'une fonction.....	76
3.8.2 Thème IV : composition des fonctions.....	77
3.8.3 Thème V : image d'un nombre réel ou une expression algébrique.....	79
3.8.4 Thème VI : représentation graphique des fonctions.....	80
3.9 Synthèse.....	80
4. <i>Analyse du manuel de préparation au concours Gvender</i>	85
4.1 Définition ensembliste de la notion de fonction.....	85
4.2 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières.....	86
4.3 Quatre opérations sur les fonction.....	87
4.4 Définition de l'inverse d'une fonction.....	88
4.5 Composition des fonctions.....	90
4.6 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	91
4.7 Exercices résolus.....	91
4.7.1 Thème I : définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles.....	91
4.7.2 Thème II : recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement.....	92
4.7.3 Thème III : composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles.....	92
4.7.4 Thème IV : image d'un nombre réel ou d'une expression par une fonction.....	95
4.7.5 Thème V : représentation graphique des fonctions.....	97
4.8 Synthèse.....	97
5. <i>Comparaison des analyses des manuels</i>	102
6. <i>Conclusion</i>	112

Afin de comparer les manuels de lycée et ceux de préparation au concours et de mettre en évidence les similarités et les divergences, l'enjeu fort du concours dans les manuels de lycée, dans ce chapitre, nous allons continuer notre travail par l'analyse des manuels. Comme nous l'avons déjà indiqué, nous avons choisi sept manuels dont l'un est le manuel officiel et trois sont les manuels de préparation au concours les plus utilisés.

En particulier, pour chaque manuel nous décrirons : les activités introductrices, le cours, les travaux pratiques et les exercices résolus suivant les lignes directrices précisées dans la partie méthodologique. Nous donnerons ici l'analyse de deux manuels de lycée et d'un manuel de préparation au concours manuel par manuel. Nous avons mis l'analyse des quatre autres manuels en annexes³⁸. Nous allons terminer cette partie par une synthèse comparative des données recueillies.

Avant de passer à l'analyse des manuels, nous allons mettre en évidence la place de la notion de fonction dans les programmes actuels en Turquie.

1. Place de la fonction dans les programmes actuels de seconde, de première et de terminale en Turquie

Il nous semble tout d'abord nécessaire d'indiquer que les programmes officiels turcs sont très courts. On annonce simplement des objectifs et des compétences exigibles sans détailler. Il est très rarement possible de trouver des commentaires, des explications et des exemples.

En Turquie la notion de fonction est, pour la première fois, introduite en classe de seconde. A ce niveau l'élève rencontre une définition³⁹, des propriétés particulières des fonctions et des fonctions particulières, la composition des fonctions et la définition de l'inverse d'une fonction. Dans cette classe ultérieurement on traite le chapitre « polynômes », et on revoit alors la notion de fonction. En première l'élève est face aux fonctions trigonométriques,

³⁸ Voir annexe I.

³⁹ La définition ensembliste de la notion de fonction.

logarithmiques, exponentielles et fonctions de permutation. En classe de terminale la composition des fonctions et l'inverse de la fonction sont brièvement reprises d'un point de vue ensembliste. De plus les fonctions croissantes et décroissantes, les fonctions paires et impaires, les quatre opérations sur les fonctions, des fonctions particulières (fonction définie par morceaux, fonction valeur absolue, fonction signe⁴⁰, et fonction valeur entière⁴¹) figurent dans le programme de terminale.

Par ailleurs, en terminale l'élève continue à utiliser la notion de fonction en travaillant sur les limites de fonctions, la continuité des fonctions et les dérivées des fonctions.

Dans le programme officiel de la classe de seconde les fonctions sont mises en place en même temps que la notion de correspondance entre ensembles et de loi de composition interne⁴² dans un même chapitre. Nous avons classé les notions qui apparaissent ensuite dans le programme de seconde en quatre rubriques:

1.1 Définition ensembliste et représentations graphiques

Il n'y a aucune indication sur la façon de définir «les fonctions ». C'est la raison pour laquelle le choix de définition reste assez flou. Cependant le fait que des éléments sur les ensembles et les correspondances entre ensemble précédent les fonctions conduit à penser que la définition ensembliste des fonctions est préconisée. Dans ce cadre on attend des élèves de pouvoir définir les fonctions à partir d'ensembles, l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée, l'ensemble image et de les représenter graphiquement (par exemple avec des diagrammes sagittaux). De plus l'élève est aussi amené à chercher si une correspondance donnée (algébriquement ou à partir d'ensembles) est une fonction. Nous constatons que la représentation graphique d'une fonction donnée dans un repère orthonormé ainsi que le passage de l'écriture ensembliste à l'écriture sous forme de liste⁴³ figurent dans le programme.

1.2 Egalité des fonctions à partir d'ensembles

Dans cette partie on propose de définir l'égalité des deux fonctions à partir d'ensembles et chercher si deux fonctions données sont égales.

1.3 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

⁴⁰ $y = \text{sign}(f(x))$

⁴¹ $f(x) = E(x)$

⁴² Soit A un ensemble non vide. Chaque fonction définie d'un sous-ensemble quelconque non vide de $A \times A$ vers A est appelée « loi de composition interne » sur A.

⁴³ Par exemple $f = \{(a,1), (b,2), (c,4)\}$

Nous trouvons, dans le programme de seconde, quelques propriétés des fonctions et quelques fonctions particulières. Ainsi on demande de définir à partir d'ensembles les fonctions injectives, surjectives, non surjectives, la fonction identique, les fonctions constantes et nulle. Malgré cette diversité, les fonctions linéaires, affines ne sont pas mises en place dans le programme. La reconnaissance des propriétés particulières d'une fonction donnée et l'écriture d'une fonction ayant une de ces propriétés sont dans les compétences exigibles⁴⁴ des élèves. Le programme introduit enfin la définition des ensembles infinis et l'équipotence des deux ensembles grâce à une correspondance bijective

1.4 Compositions des fonctions

Dans cette dernière partie, le programme a pour objectif de définir à partir d'ensembles la composition des fonctions et de montrer que cette opération est associative et non commutative. De plus la définition de l'inverse d'une fonction bijective et celle de la fonction identique sont données⁴⁵ à partir de la composition. Le programme introduit la composée d'au maximum trois fonctions définies de manière ensembliste, la composée d'une fonction donnée et son inverse et enfin l'inverse de l'inverse d'une fonction. La représentation graphique d'une fonction donnée et celle de son inverse dans un même plan muni d'un repère orthonormé et la reconnaissance de la relation entre elles sont aussi indiquées dans le programme de seconde. L'élève est amené à trouver et écrire la fonction f lorsqu'on lui a donné la composée $f \circ g$ (ou $g \circ f$) et g .

Enfin il y a une petite explication dans laquelle les auteurs proposent d'abord d'introduire la loi de composition interne et ses propriétés avant la composition des fonctions. De plus ils conseillent d'aborder la fonction identique et l'inverse des fonctions à partir de la composition et d'expliquer des ensembles équipotents et des ensembles infinis avec des exemples grâce aux fonctions bijectives. Ensuite ils proposent l'exemple suivant :

Pour $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$, $P=\{0,2,4,6,\dots\}$ et $P \subset \mathbb{N}$ $f: \mathbb{N} \rightarrow P$ est définie pour tout x de \mathbb{N} par $f(x)=2x$. Comme la fonction f est bijective, donc $\mathbb{N} \equiv P$ et les ensembles \mathbb{N} et P sont les ensembles infinis.

1.5 Conclusion

⁴⁴ Compétences exigibles=compétences déduites du programme.

⁴⁵ Reprises.

L'élève rencontre pour la première fois la notion de fonction en seconde. Malgré cela on aborde presque toutes les notions ensemblistes à ce propos. Cependant nous voyons en général que la notion apparaît exclusivement comme « objet⁴⁶ », sauf dans la démonstration de « équipotence des ensembles infinis où on utilise comme « outil⁴⁷ » la bijectivité d'une fonction.

Nous allons vérifier dans les manuels le respect de ce programme tant au niveau du cours qu'en ce qui concerne les exercices. Est-ce que le caractère outil des fonctions apparaît ? Les élèves auraient-ils à mélanger plusieurs notions ? Est-ce que les seuls cadres d'utilisation vont être les cadres ensemblistes, algébriques et graphiques ?

⁴⁶ Cf. Douady (1987).

⁴⁷ Ibidem

2. Analyse du manuel Tutibay

Nous remarquons d'emblée que dans le manuel Tutibay la notion de fonction se présente dans le chapitre intitulé « correspondances, fonctions, loi de composition interne ». Alors il n'y a pas de chapitre exclusivement consacré à la notion de fonction. Nous ne trouvons aucune activité que nous pouvons qualifier d'activité introductrice. Les auteurs du manuel débutent par mettre en rapport fonctions et correspondances. Ils conseillent aux élèves de se rappeler la définition des couples et des correspondances. Ensuite est donné l'exemple suivant : on appelle fonction la correspondance définie par $\beta = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$ dont on vérifiera ensuite que c'est bien une fonction. Enfin ils terminent cette petite introduction par faire le bilan suivant : « chaque fonction est également une correspondance ».

2.1 Définition ensembliste de la notion de fonction

L'introduction de la notion de fonction se fait à partir de sa définition ensembliste. On donne donc la définition suivante :

« Soient A et B deux ensembles non vides et β une correspondance de A vers B , $\beta \subset (A \times B)$. Si chaque élément de A a une et une seule image dans l'ensemble B , on appelle β fonction de A vers B . »

Nous voyons ainsi que la notion de fonction apparaît comme une correspondance vérifiant des conditions particulières. L'analyse de notre premier questionnaire qui contient une question demandant aux élèves de définir la notion de fonction nous permettra de préciser leur connaissance de la notion.

A la suite de cette définition, conformément au programme officiel, le manuel présente l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction en utilisant un diagramme sagittal. Ensuite les deux conditions reprises la comptine C_0 « aucun élément de l'ensemble de définition sans image et pas de plus d'une image par élément » sont citées comme suit :

Une correspondance est une fonction si

- a) Dans l'ensemble de définition il n'y a pas d'élément sans image.*
- b) Tout élément de l'ensemble de définition a une seule image.*

Nous rencontrons aussi l'écriture symbolique de la définition :

Soit $f \subset A \times B$

a) $\forall x \in A, \exists y, y \in B \quad (x, y) \in f$

b) $(x, y_1) \in f \text{ et } (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

Bien qu'il ne mette pas en place la définition de la notion de fonction en terme de variable, le manuel cite la notation $y=f(x)$ (y variable dépendante et x variable indépendante).

Cette théorie est suivie d'une série d'exemples. Le premier exemple concerne l'utilisation de la comptine C_0 pour déterminer les fonctions parmi trois correspondances représentées à partir d'ensembles. Le deuxième exemple demande aux élèves de déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction représentée en diagramme sagittal (ce qui nous renvoi aux compétences exigibles par le programme officiel). A la suite de cet exemple nous rencontrons l'introduction de la notation $y=f(x)$ et sa représentation en diagramme sagittal. Dans le troisième exemple il s'agit de la formule algébrique d'une fonction affine. On demande à l'élève de définir l'ensemble image de la fonction à partir de l'ensemble de définition. Le passage du registre algébrique au diagramme sagittal est mobilisé. L'exemple suivant nécessite de calculer quelques valeurs numériques à partir de la formule algébrique d'une fonction linéaire. Le dernier exemple consiste à trouver l'ensemble de définition et l'ensemble image d'une fonction définie par une liste de couples⁴⁸ et les représenter graphiquement à la fois dans un repère orthonormé et à l'aide d'un diagramme sagittal.

2.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

La définition de la représentation graphique des fonctions est présentée dans un plan analytique (muni d'un repère orthonormé). Ensuite cette définition est illustrée par deux exemples. L'un concerne la représentation graphique d'une fonction du second degré et l'autre celle d'une fonction affine (linéaire)⁴⁹ dans un repère orthonormé. Les deux fonctions sont définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z .

2.3 Egalité des deux fonctions

Après avoir présenté la définition de l'égalité des fonctions, le manuel l'illustre avec deux exemples dans lesquels il s'agit presque des mêmes types de fonction. Ainsi l'élève doit

⁴⁸ $f = \{(1,3), (2,5), (3,3), (7,0), (9,-1)\}$

⁴⁹ En Turquie quand on dit la fonction linéaire, cela signifie qu'on parle d'une fonction définie par $f(x) = ax + b$.

étudier si la restriction d'une fonction linéaire et d'une fonction du second degré à des sous-ensembles finis de Z sont égales.

2.4 Propriétés particulières des fonctions

Nous retrouvons tous les types de propriétés particulières des fonctions indiqués par le programme officiel : les fonctions injectives, non surjectives, surjectives, constantes, la fonction nulle et identique. Bien que les fonctions affines ou polynomiales soient implicitement utilisées lors des exemples et exercices résolus, on n'en parle jamais. Le manuel présente d'abord les définitions formelles ensuite les illustre avec des exemples. Dans certains cas il y a des exercices résolus qui suivent. Nous ne présenterons pas toutes ces définitions. Nous nous limitons aux exercices résolus et points méthodes proposées au cours de leur résolution.

Il y a trois exercices qui concernent la notion de fonction surjective. Les deux premiers sont destinés à étudier la surjectivité d'une fonction affine à partir de la donnée des ensembles A et B (sous-ensembles de Z). La représentation en diagramme sagittal est présente dans les deux cas. Avant de passer au dernier exemple une méthode est proposée comme suit :

Pour étudier la bijectivité d'une fonction $y=f(x)$, on écrit d'abord x à la place de y et y à la place de x . Ensuite on calcule y en fonction de x . Et on examine s'il y a un $x \in A$, pour tout $y \in B$.

Enfin le dernier exercice conduit les élèves à utiliser cette méthode pour étudier la surjectivité d'une fonction affine définie sur $|\mathbb{R}$. On propose également de résoudre cet exercice en utilisant la représentation graphique de la fonction dans le plan analytique. Et pour cette solution on propose une autre méthode :

Pour étudier la surjectivité d'une fonction à partir de sa représentation graphique, on trace une parallèle à l'axe des abscisses par un point de l'ensemble d'arrivée. Si cette parallèle coupe la représentation graphique, la fonction est surjective et $f(|\mathbb{R})=|\mathbb{R}$.

Nous remarquons cependant que dans l'énoncé de cette deuxième méthode il y a une imprécision. Est-ce qu'une seule parallèle suffit à vérifier la surjectivité d'une fonction définie sur $|\mathbb{R}$? Nous croyons qu'il faut remplacer le mot « un point » par un point quelconque.

A la suite de ces méthodes nous ne retrouvons aucun raisonnement ni aucune explication. Cela nous amène à penser qu'on ne demande à l'élève qu'à les appliquer simplement.

Pour la non-surjectivité des fonctions, deux exercices sont proposés : l'un montre la non-surjectivité d'une fonction linéaire définie d'un sous-ensemble de Z dans Z . La représentation en diagramme sagittal est mobilisée. Pour l'autre est énoncée une méthode concernant l'étude de la non-surjectivité d'une fonction définie par $y=f(x)$:

Soit la fonction définie par $y=f(x)$; en écrivant x à la place de y et y à la place de x on étudie les x pour lesquels $y \in B$. Si $x \notin A$, f est une fonction non surjective.

L'élève est donc invité à appliquer cette méthode lors de la résolution du deuxième exercice qui propose d'étudier la non-surjectivité d'une fonction affine définie sur Z . Nous voyons que la résolution analytique est aussi proposée. Et bien sûr la méthode correspondante est énoncée :

Pour étudier la non-surjectivité d'une fonction à partir de sa représentation graphique dans le plan analytique, on trace les droites parallèles à l'axe des abscisses de l'ensemble d'arrivée. Si au moins une d'elles ne coupe pas la représentation graphique, la fonction est non surjective.

En ce qui concerne la fonction injective, le manuel illustre la définition avec son écriture symbolique, une méthode analytique et un certain nombre d'exercices.

f est injective si

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{ou} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Si une droite parallèle à l'axe des abscisses menée par un point de l'ensemble d'arrivée coupe la représentation graphique d'une fonction en un seul point, la fonction est injective.

Nous constatons qu'il y a cinq exercices résolus : le premier illustre la définition et cette méthode analytique. Les trois exercices suivants concernent l'application directe de l'écriture symbolique de la définition. Le premier exercice demande d'étudier la bijectivité d'une fonction linéaire définie de Z vers Q . Le deuxième invite aussi l'élève à étudier si une fonction linéaire définie sur $|\mathbb{R}$ est bijective. Dans le dernier exercice de ce groupe, on demande d'écrire une fonction injective définie sur $|\mathbb{R}$. Il nous semble nécessaire souligner que c'est la première fois que l'élève rencontre un exercice ouvert. Le cinquième exercice n'a pas un rapport direct avec l'injectivité. Il s'inspire beaucoup d'une des questions du concours. L'élève doit déterminer l'ensemble de définition d'une correspondance rationnelle définie sur

\mathbb{R} à partir de sa formule algébrique pour qu'elle soit une fonction. Il faut signaler que cet exercice est tout à fait dans l'esprit du programme de la classe de Terminale.

Après avoir défini les fonctions constantes de manière ensembliste, le manuel fait intervenir sa représentation en diagramme sagittal et deux exemples. Le premier montre que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=3$ est une fonction constante. Les deux types de représentation graphique sont présents : la représentation graphique dans un repère orthonormé et le diagramme sagittal. A la suite de cet exemple, nous trouvons le commentaire⁵⁰ suivant :

Si l'ensemble d'arrivée de la fonction constante contient un seul élément, la fonction est également surjective.

L'autre exemple demande d'étudier si l'expression $x=3$ est une fonction. La représentation graphique dans un repère orthonormé et en diagramme sagittal est aussi mobilisée.

Enfin le manuel présente comme fonctions particulières la fonction nulle et la fonction identique. En ce qui concerne la fonction nulle nous ne rencontrons que ce bref commentaire « le deuxième élément de chaque point sur l'axe des abscisses est nul ». La définition de la notion de fonction identique est suivie des représentations graphiques dans un repère orthonormé et diagramme sagittal, un exercice résolu concerne l'utilisation directe de la formule de la notion de fonction identique. Il s'agit de calculer la valeur k si $y=f(x)=x-4+k$ est une fonction identique. Cette partie se termine par cette phrase « la fonction identique est bijective et l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée sont identiques »

2.5 Ensembles infinis ou finis et ensembles équipotents

Conformément aux consignes du programme officiel les ensembles infinis ou finis et les ensembles équipotents sont présentés à partir de la bijectivité et sur des exemples. Ainsi la définition des ensembles infinis ou finis est suivie d'une série d'exemples dans lesquels on parle de quelques ensembles infinis et ou finis comme les nombres naturels et les jours de la semaine et de leur écriture. En ce qui concerne les ensembles équipotents, il y a deux exemples qui illustrent la définition. L'un montre que deux ensembles finis sont équipotents en utilisant les diagrammes sagittaux. L'autre consiste à montrer que l'ensemble des nombres naturels est infini. Pour ce faire la fonction f définie de l'ensemble des nombres naturels vers l'ensemble des nombres pairs par $f(x)=2x$ est mobilisée (ce qui nous renvoie à

⁵⁰ Ce manuel présente, les points méthodes ou les connaissances que l'élève doit retenir, en écrivant en bleu. Comme ce commentaire est aussi présenté en bleu, nous l'avons encadré.

l'exemple suggéré par le programme officiel). Alors c'est la bijectivité de f qui doit être utilisé comme outil. Un diagramme sagittal est toujours utilisé.

Comme c'est bien indiqué dans le programme officiel, avant de présenter la composition des fonctions le manuel propose la notion de loi de composition interne et ses propriétés (commutativité, associativité...). Cela nous conduit à penser que, puisque la composition est une loi de composition interne entre des fonctions, les auteurs du programme considèrent ce passage important.

2.6 Composition des fonctions

Dans la définition ensembliste de la composition, il y a un mot sur lequel est attirée notre attention. C'est le mot « transporter ». Alors la composition des fonctions est considérée comme « un porteur » qui transporte les éléments d'un ensemble vers un autre. La représentation en diagramme sagittal accompagne la définition. Il y a aussi un certain nombre d'exercices. Le premier exercice consiste à utiliser le passage du diagramme sagittal au registre algébrique. Les deux exercices suivants demandent de composer une fonction affine et une fonction du second degré. Il s'agit des deux types de composée ($f \circ g$ et $g \circ f$) et on utilise la représentation en diagramme sagittal. Cet exercice sert également à montrer que la composition n'est pas commutative. Le dernier exercice invite l'élève à étudier l'associativité de la composition à partir de trois fonctions du premier degré.

Nous retrouvons pour la deuxième fois la définition de la fonction identique. Mais cette fois-ci elle est définie à partir de la composition. De plus la propriété $f \circ I = I \circ f = f$ est démontrée. La théorie est suivie d'un exercice dans lequel il s'agit des deux types de composée d'une fonction affine et la fonction identique ($f \circ I(x)$ et $I \circ f(x)$). Dans la dernière partie de cet exercice on demande de calculer la valeur $f \circ I(3)$.

2.7 Définition de l'inverse d'une fonction

Après avoir présenté la définition de l'inverse d'une fonction de manière ensembliste on donne l'interprétation de la définition en diagramme sagittal et la relation entre la fonction inverse et la fonction identique ($f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$). Il y a sept exercices proposés. En regardant la quantité des exercices nous pouvons dire que la fonction inverse est considérée comme importante. Le premier exercice demande à l'élève de travailler dans le cadre de la théorie élémentaire des ensembles. Ainsi l'élève doit trouver l'inverse d'une fonction représentée en diagramme sagittal. Les trois exemples suivants proposent de trouver l'inverse

d'une fonction du premier degré. Parmi eux le premier n'utilise pas de calcul ni de formule. Il s'agit de passer du registre de la formule algébrique au registre de la langue naturelle et vice versa. Nous remarquons cependant que cet exercice s'inspire beaucoup d'une des questions du concours (Q36/1998).

Exemple : on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x - 1$. Trouver l'inverse de f .

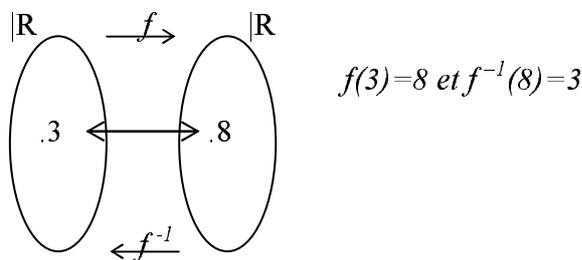
Comme la fonction f est bijective, $f^{-1}(x)$ existe.

f : elle prend un élément. Ensuite elle le multiplie par 3 et elle en soustrait 1.

f^{-1} : elle prend un élément. Ensuite elle y ajoute 1 et elle le divise par 3.

Brièvement si on écrit comme fonction ceux qu'on a dit en haut :

$$f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3} \quad \text{par exemple ; } f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8, \quad f^{-1}(8) = \frac{8+1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$



Avant de passer aux deux exercices résolus suivants le manuel énonce comme une règle la méthode \mathbf{M}_{xy} « calculer x en fonction de y » lors de trouver l'inverse d'une fonction :

Règle : on trouve y en écrivant x à la place de y et y à la place de x . Si on écrit $f^{-1}(x)$ à la place de y , on trouve l'inverse de la fonction f

Il y a cinq exemples pour lesquels on utilise cette méthode. Les deux premiers sont destinés à trouver l'inverse d'une fonction du premier degré. Parmi eux l'un demande deux fois l'utilisation de la méthode pour montrer que l'inverse de l'inverse d'une fonction est égal à la fonction elle-même ($(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$). Et l'autre propose aussi de calculer quelques valeurs numériques de x par la fonction et son inverse. Le troisième exercice invite les élèves à trouver l'inverse d'une fonction rationnelle. Au travers de cet exemple les auteurs du manuel fait intervenir la technique plus courte pour trouver l'inverse que nous appelons « la Recette d'Abacadabra (\mathbf{R}_a) » :

Exemple : Trouver l'inverse de la fonction f définie de $|\mathbb{R}-\{\frac{d}{c}\}$ vers $|\mathbb{R}-\{\frac{a}{b}\}$ par $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x=\frac{ay+b}{cy+d}, \quad cxy+xd=ay+b, \quad y(cx-a)=-xd+b, \quad y=\frac{-xd+b}{cx-a}, \quad y=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$. $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ les constantes a et d qui se trouvent sur la diagonale changent à la fois la place et le signe.

Le quatrième exercice comprend trois parties. Il s'agit d'une fonction f linéaire définie sur $|\mathbb{R}$. Dans la première partie l'élève est amené à trouver la double composée de la fonction f . La deuxième demande de déterminer la composée $(f^{-1} \circ f)$ et la dernière la composée $(f \circ f)^{-1}$.

En ce qui concerne le dernier exercice il s'agit d'une composée implicite. L'élève doit trouver l'inverse de l'une des fonctions et calculer l'image de 3 :

Exemple : Si $f:|\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow|\mathbb{R}-\{1\}$ et $f(2x-1)=\frac{2x+1}{2x-1}$, trouver f^{-1} et calculer la valeur $f^{-1}(3)$.

Si on écrit l'inverse de $2x-1$ au lieu de x dans la fonction f , on trouve $f(x)$.

Soit $2x-1=y$. Si $x=\frac{y+1}{2}$, l'inverse de $2x-1$ est de $\frac{x+1}{2}$.

$$f\left(2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1\right)=\frac{2\left(\frac{x+1}{2}\right)+1}{2\left(\frac{x+1}{2}\right)-1}, \quad f(x)=\frac{x+2}{x}, \quad f^{-1}(x)=\frac{2}{x-1}, \quad f^{-1}(3)=\frac{2}{3-1}=1$$

La relation entre la représentation graphique de la fonction et celle de son inverse dans un repère orthonormé est introduite, sous la rubrique intitulée « la représentation graphique de la fonction inverse dans un repère orthonormé », les deux représentations graphiques sont symétriques par rapport à la droite $y=x$. A la suite nous remarquons qu'il y a quatre exercices résolus. Les deux premiers concernent directement la représentation graphique de la fonction et son inverse. Ainsi l'un demande de représenter graphiquement dans un repère orthonormé une fonction du premier degré définie d'un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . Quant à l'autre il s'agit aussi d'une fonction du premier degré. Mais cette fois-ci elle est définie sur $|\mathbb{R}$.

L'énoncé du troisième exercice nous a donné l'impression qu'il s'agit d'un exercice représentatif dans le sens où la composée est considérée comme une loi de composition interne numérique :

Exemple : Résoudre l'équation $(\frac{2x+7}{3x-5}) \circ (\frac{x+1}{2x+1})(3) = \frac{11}{23}x - 2$.

Deux solutions sont proposées. La première solution demande de mettre la valeur numérique 3 dans la première fonction à droite, ensuite la valeur obtenue dans la deuxième fonction. Quant à l'autre solution l'élève est amené à définir d'abord la composée et ensuite l'image de 3. Dans ces deux types de solutions la résolution d'équation paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

Le dernier exercice du manuel dans lequel il y a deux composées : l'une « implicite » ($g(2x-3)=2x+4$) et l'autre « explicite » ($f \circ g^{-1}(x)=4x-3$). On demande de déterminer la fonction f. L'élève doit d'abord trouver la fonction g comme il l'a déjà fait dans les exercices précédents. Ensuite en utilisant la définition de la composée et la fonction identique il doit trouver la fonction f. Il s'agit donc de l'application directe du cours.

2.8 Synthèse

Constatons tout d'abord que toutes les notions qui apparaissent dans le programme officiel sont abordées par le manuel. Il n'y a aucune activité introductrice. En s'appuyant sur la relation entre fonctions et correspondances la notion de fonction est introduite de manière ensembliste. Nous pensons que ce type d'introduction est très loin de provoquer une motivation chez les élèves. Il est possible qu'ils supposent que la notion de fonction est peu distinguée de la notion de correspondance entre ensembles.

Après ou avant des exercices les points essentiels des connaissances qui servent directement à les résoudre sont simplement énoncés. Il n'y a aucun raisonnement qui les accompagne.

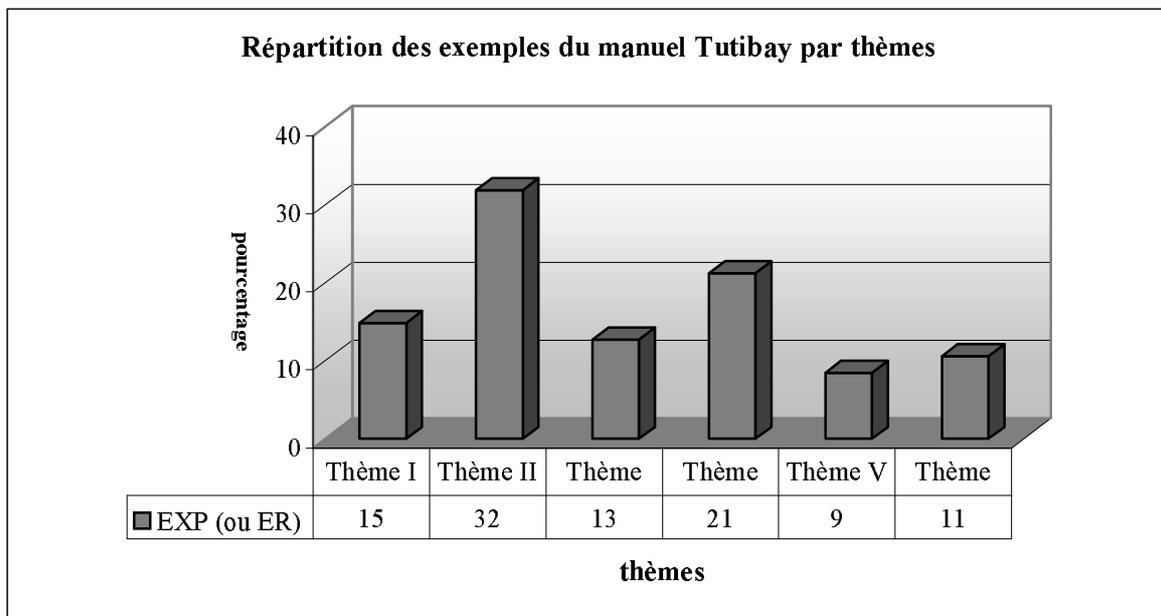
Dans la collection de Tutibay il n'y a pas de travaux pratiques. Le manuel présente la résolution d'un certain nombre d'exercices et chacun contient une solution commentée. De plus le manuel ne poursuit pas un ordre traditionnel⁵¹ (cours-exercices résolus). Toutes les choses semblent passer dans le cours. Par exemple après avoir présenté une définition, cinq ou six exemples (ou exercices résolus) peuvent figurer.

La notion de fonction est toujours présentée comme un objet dans le manuel. Il n'y a aucun exercice dans lequel on utilise la notion de fonction comme un outil.

⁵¹ Nous parlons des manuels turcs.

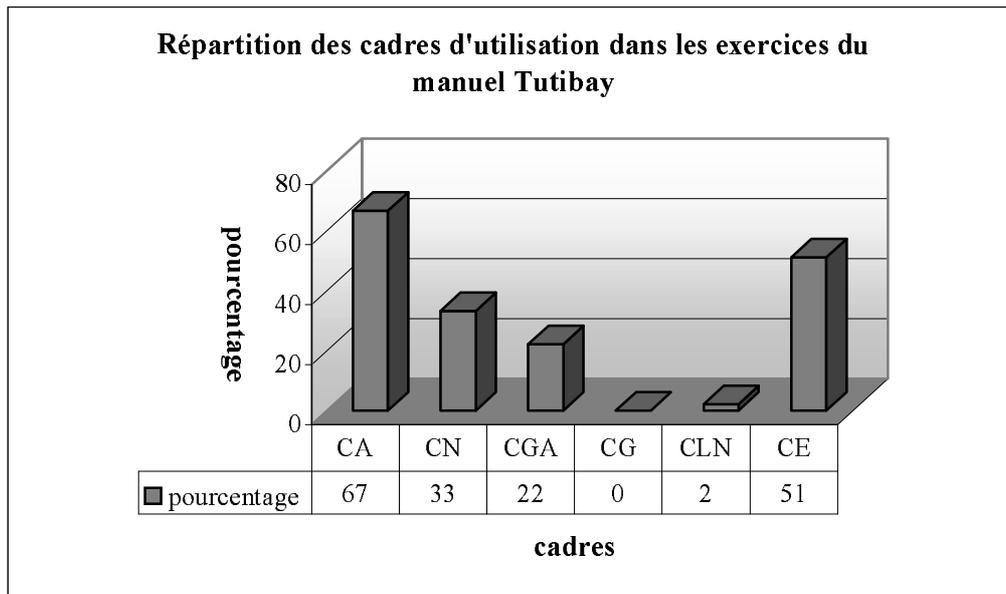
Pour trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement la méthode M_{xy} est toujours utilisée. Quant à la recette R_a elle est présentée dans un seul exercice. Et il n'est jamais repris.

Selon le tableau ci-dessous la plupart des exemples proposés par le manuel font travailler sur les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (thème II). Le taux des exemples qui concernent la composition des fonctions est de 21% (thème VI). Le thème I et le thème III se rapprochent par le taux de proposition. Ainsi dans 15% des exemples l'élève est amené à utiliser la définition ensembliste de la notion de fonction ou les ensembles correspondant (thème I). Et 13% font chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (thème III). Par ailleurs les exemples qui font travailler sur la représentation des fonctions dans un repère orthonormé sont les exemples les plus rares du manuel Tutibay (thème V).



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant, Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières, Thème III : Recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles, Thème IV : Composition des fonctions, Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, Thème VI : Ensembles finis et équipotents. EXP : Exemples, ER : Exercices résolus, (Effectif : 47 exemples)

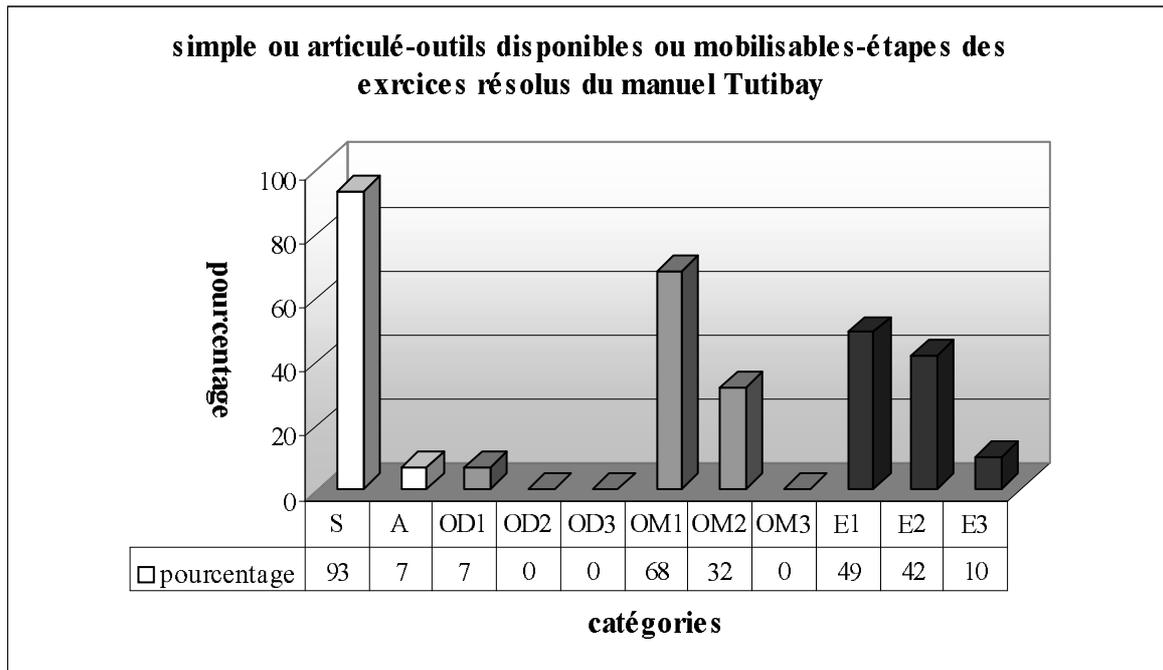
Comme le montre bien le tableau ci-dessous, les cadres majoritairement d'utilisation dans les exercices résolus sont le cadre algébrique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles. Le cadre géométrique est totalement absent. En ce qui concerne le cadre analytique il est peu fréquent. Cela signifie que le manuel Tutibay n'est pas géométriquement riche.



CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CGA :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CLN :Cadre de la Langue Naturelle, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des Ensembles.

Le tableau suivant montre bien qu'un très petit nombre des exercices portent sur plusieurs connaissances antérieures (ou ultérieures). La grande majorité d'entre eux font référence directe la notion de fonction. Dans les exercices résolus nous constatons que les auteurs du manuel respectent généralement le programme officiel de la classe de seconde. Il y a un seul exercice qui présente une question du concours dans l'esprit du programme de la classe de terminale. Dans la plupart des exercices l'élève doit mobiliser un seul outil. Tandis que 32% d'entre eux nécessitent de faire appel aux deux outils mobilisables. En ce qui concerne la répartition du nombre des étapes⁵² près de la moitié des exercices comprennent une seule étape. Ce taux descend un petit peu dans les exercices où l'élève doit passer deux étapes pour arriver à la bonne réponse. Par ailleurs, un faible pourcentage d'exercices peuvent être résolus en trois étapes.

⁵² Puisqu'on peut résoudre certains exercices en une étape ou deux étapes, il est normal que la somme des pourcentages des étapes dépasse 100%.



S : Simple, A : Articulé, OD1 : Outil disponible 1, OD2 : Outil disponible 2, OM1 : Outil mobilisable 1, OM2 : Outil mobilisable 2, OM3 : Outil mobilisable 3, E1 : Etape 1, E2 : Etape 2, E3 : Etape 3

3. Analyse du manuel officiel

3.1 Définition ensembliste de la notion de fonction

Avant la définition de la notion de la fonction les auteurs du manuel rappellent la définition de la notion de correspondance et mettent en évidence la relation entre ces deux notions. Il n'y a aucune activité préparatoire.

La définition ensembliste des fonctions est suivie de son écriture symbolique, de sa représentation en diagramme sagittal et d'un certain nombre d'exemples. La comptine C_0 n'est pas explicitement présentée. Mais avant de passer aux exemples il y a cependant deux correspondances définies par des diagrammes sagittaux dont l'une est une fonction et l'autre ne l'est pas.

En ce qui concerne les exemples, dans le premier exemple il s'agit d'écrire une correspondance définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=3x$, sous forme d'une liste de couples, de chercher si cette correspondance est une fonction, d'écrire l'ensemble image de f sous forme de liste de couples et de représenter f en diagramme sagittal. Le deuxième exemple fait chercher si une correspondance définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples est une fonction. L'application directe de la définition ensembliste est aussi mise en jeu comme dans l'exemple précédent. Dans le troisième exemple on demande d'écrire une correspondance définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=x^2$ sous forme de liste de couples, de la représenter en diagramme sagittal et de déterminer son ensemble image. Quant au quatrième exemple l'élève doit écrire une fonction définie par un diagramme sagittal sous forme de liste de couples et trouver sa formule algébrique. Dans le cinquième exemple l'élève est amené à écrire sous forme de liste de couples et représenter en diagramme sagittal une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z .

Dans l'exemple suivant on demande de trouver la valeur a si la fonction f est définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+3$ et $f(-2)-f(a+1)=f(2a-3)=f(4)$. L'élève doit d'abord calculer les images, ensuite obtenir une équation pour trouver la valeur a . La résolution d'équations s'avère donc un outil devant être disponible dans ce travail. Le septième exercice fait trouver la valeur a si la fonction f est définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-4$ et $f(2a)=f(a-1)$. La résolution d'équations que l'élève doit se servir est aussi un outil devant être disponible dans ce travail comme dans l'exercice précédent. Quant au dernier exemple on demande de calculer le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Pour ce faire une formule est simplement donnée sans commentaire et il ne reste à l'élève qu'à l'appliquer.

3.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

Il y a cinq exemples qui illustrent la définition de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé. Dans le premier exemple il s'agit de représenter une fonction définie de l'ensemble A qui contient quatre prénoms vers l'ensemble B qui contient quatre villes en Turquie par $f = \{(x, y) : y \text{ est la ville natale de } x\}$. Le deuxième exemple demande de représenter une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z. Le quatrième exemple consiste à déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé. A la suite de cet exemple, la méthode qui consiste à chercher si une représentation graphique dans un repère orthonormé est celle d'une fonction est introduite. Mais elle n'est jamais utilisée. Dans l'exemple suivant l'élève doit déterminer graphiquement certaines images et exprimer leur somme. En ce qui concerne le dernier exemple, il s'agit de déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble image d'une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé et de trouver graphiquement l'image de 2 et le nombre dont l'image est -5. Les connaissances antérieures portant sur les intervalles sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

3.3 Egalités des deux fonctions

La définition des fonctions égales est suivie d'un exemple dans lequel l'élève est amené à montrer que les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x) = x^2 - 1$ et $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ sont égales. L'élève doit déterminer l'ensemble image des deux fonctions et chercher s'ils sont identiques.

3.4 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Nous trouvons tous les types de propriété particulière des fonctions qui figurent dans le programme officiel : fonctions injectives, non surjectives, surjectives, constantes, la fonction nulle et identique. La définition de chaque propriété est illustrée par des exemples ou la représentation en diagramme sagittal ou l'écriture symbolique de la définition.

Ainsi l'écriture symbolique, la représentation en diagramme sagittal et deux exemples sont proposés à la suite de la définition des fonctions injectives. Dans ces deux exemples l'élève doit chercher si une fonction affine définie sur \mathbb{R} est injective. L'application de l'écriture symbolique de l'injectivité est mise en jeu.

Il y a aussi deux exemples qui illustrent la définition des fonctions surjectives. L'un fait chercher si la fonction carrée définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z est surjective. Et l'autre demande de montrer qu'une fonction affine définie sur $|\mathbb{R}$ est surjective.

Dans l'exemple des fonctions non surjectives l'élève doit étudier la non surjectivité de la fonction carrée définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z .

La définition des fonctions injectives-non surjectives est suivie de deux exemples. L'un consiste à chercher le type de propriétés d'une fonction affine définie sur Z . Et l'autre demande à l'élève d'inventer une fonction injective définie sur $|\mathbb{R}$.

En ce qui concerne les exemples de la définition de la fonction identique, il y a deux exemples. Dans le premier exemple l'élève doit trouver l'ensemble image de la fonction f identique définie sur un sous-ensemble fini de Z et de représenter f en diagramme sagittal. Dans le deuxième exercice on demande de trouver les valeurs m et n si la fonction f définie sur Z par $f(x)=(2m-1)x+2n-4$ est identique.

La définition des fonctions constantes et celle des fonctions nulles sont illustrées par une dizaine d'exemples dont deux ne font pas référence directe à cette partie. C'est la raison pour laquelle il nous semble préférable de les analyser dans la partie des exercices résolus.

Quant aux autres exemples, le premier exemple présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante et d'une fonction nulle définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans le deuxième exemple il s'agit de trouver la valeur a si la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=(a+2)x+3$ est constante. L'élève doit comprendre que la variable x n'existe pas dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Il doit donc égaliser $a+2$ à zéro pour trouver la valeur demandée. Le troisième exemple demande de trouver les valeurs

m et n si la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{mx^2+nx+2}{4x^2-2x+1}$ est une fonction constante. En

sachant que si la fonction f est constante, $f(x)=c$, ($c \in |\mathbb{R}$) pour tout x réel, l'élève doit obtenir deux polynômes égaux, ensuite trouver les valeurs m et n en utilisant l'égalité des polynômes. Comme les polynômes figurent dans les chapitres qui viennent, dans cet exemple on demande de faire fonctionner une connaissance prématurée. Le quatrième exemple présente la représentation graphique d'une fonction constante définie sur $|\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé et il demande à l'élève de reconnaître que la représentation graphique des fonctions constantes est parallèle à l'axe des abscisses. Dans l'exemple suivant l'élève est amené à représenter la fonction f définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=0$ dans un repère orthonormé et à reconnaître que la représentation graphique des fonctions nulles sont des points sur l'axe

des abscisses. Le sixième exercices comprend six parties : dans la première partie il s'agit de calculer le nombre des fonctions possibles définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la deuxième partie de calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la troisième partie de calculer le nombre des fonctions injectives définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la quatrième partie de calculer le nombre des fonctions constantes définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre, dans la cinquième partie de calculer le nombre des fonctions non surjectives définies sur un sous-ensemble fini et discret et dans la dernière partie de calculer le nombre des fonctions bijectives définies sur un sous-ensemble fini et discret. Pour tout ce faire les formules que l'élève doit utiliser sont simplement données sans commentaire. Et l'élève est amené à les appliquer. Les connaissances antérieures liées aux puissances, factorielles et à la permutation sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Par ailleurs il faut signaler que dans le programme de la classe de second il n'y a aucune indication qui correspond à ce type de travaux. Le septième exemple fait trouver les valeurs a et n si la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(a-8)x+(2a-n+3)$ est identique. En prenant en compte la formule algébrique de la fonction identique ($f(x)=x$) l'élève doit égaliser $(a-8)$ à 1 et $(2a-n+3)$ à zéro pour trouver a et n . La résolution d'équations que l'élève doit mettre en fonctionner est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans l'exemple suivant on demande de déterminer la formule algébrique de f et de représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé si la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(4n-2)x+2n+3$ est constante. Comme dans le deuxième exemple l'élève doit d'abord égaliser le coefficient de x à zéro, ensuite trouver n et la fonction f .

3.5 Définition de l'inverse d'une fonction

Il y a un exemple qui précède la définition de l'inverse d'une fonction à partir des éléments dans lesquels la relation entre l'existence de l'inverse d'une fonction et la bijectivité est mise en évidence. De plus l'écriture symbolique et la méthode \mathbf{M}_{xy} sont introduites à la suite de la définition.

Par ailleurs nous constatons que conformément au programme le manuel reprend l'inverse d'une fonction selon la composition des fonctions. Dans ce cadre la relation entre la fonction identique et la composée d'une fonction et son inverse sont mis en place. De plus le manuel propose cinq exemples qui font chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles. Dans le premier exemple on demande de trouver l'inverse d'une fonction affine définie sur \mathbb{R} . La méthode \mathbf{M}_{xy} est utilisée. En ce qui concerne le deuxième exemple

comprenant quatre parties, la première partie demande d'écrire une fonction f affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et son inverse sous forme de liste de couples. La deuxième partie demande de trouver algébriquement l'inverse de la fonction f en utilisant la méthode \mathbf{M}_{xy} . Dans la partie suivante l'élève est amené à déterminer les deux types de composée de la fonction f et son inverse. Enfin dans la quatrième partie il est nécessaire de représenter graphiquement la fonction f et son inverse dans un même repère orthonormé et de reconnaître la relation entre ces deux représentations graphiques. Le troisième exemple consiste à trouver l'inverse de l'inverse d'une fonction affine définie sur $|\mathbb{R}$. L'élève doit faire fonctionner deux fois la méthode \mathbf{M}_{xy} . A la suite de cet exemple la recette \mathbf{R}_a qui correspond aux fonctions affines est introduite. Dans l'exemple suivant il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle à partir de la méthode \mathbf{M}_{xy} . Comme dans l'exemple précédent l'introduction de la recette \mathbf{R}_a concernant les fonctions rationnelles est suivie de cette résolution. Quant au dernier exemple, l'élève doit y montrer que la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{2x+1}{3}$ est bijective et trouver son inverse. En faisant appel à l'écriture symbolique des fonctions injectives et à la définition des fonctions surjectives l'élève doit montrer la bijectivité de la fonction f et trouver son inverse à partir de \mathbf{R}_a .

3.6 Ensembles infinis et équipotents

Les auteurs du manuel se contentent de donner la définition des ensembles infinis et des ensembles équipotents. Il n'y a ni un exemple comme celui qui est indiqué par le programme ni une démonstration. Mais ils énoncent simplement que comme on peut définir une correspondance bijective entre l'ensemble des nombres naturels et l'un de ses sous-ensembles, l'ensemble des nombres naturels est infini.

3.7 Composition des fonctions

La définition de la composition des fonctions est introduite de manière ensembliste. La représentation en diagramme sagittal de la définition et un certain nombre d'exemples sont mis en place à la suite.

Dans le premier exemple on demande de représenter en diagramme sagittal les fonctions f, g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=2x-3$ et $g(x)=x^2-1$, de trouver la formule algébrique de la fonction $g \circ f$ et de représenter $g \circ f$ en diagramme sagittal. Le deuxième exercice comprend trois parties. La première partie demande de trouver les deux types de composition ($g \circ f$ et $f \circ g$) en utilisant deux fonctions affines définies sur $|\mathbb{R}$ et de

vérifier si elles sont identiques. Dans la deuxième partie l'élève doit calculer $(g \circ f)(-1)$ et $(f \circ g)(-1)$. En ce qui concerne la dernière partie, elle consiste à trouver pour quelle valeur de k on a $(f \circ g)(2k-1)=4$. En remplaçant x par $2k-1$ dans la fonction $f \circ g$ l'élève doit obtenir une équation et trouver k . Dans le troisième exemple on démontre l'associativité de la composition des fonctions. La représentation en diagramme sagittal est aussi utilisée. Dans l'exemple suivant il s'agit de l'application directe de l'exemple précédent (associativité). Ainsi l'élève doit trouver $(f \circ g) \circ h$ et $f \circ (g \circ h)$ en utilisant deux fonctions affines et une fonction du second degré définies sur \mathbb{R} . Le cinquième exemple fait composer une fonction affine et une fonction polynôme définie par morceaux. Il faut signaler que les fonctions définies par morceaux sont dans le programme de la classe de terminale. Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le dernier exemple on demande de calculer $(f \circ g)(-2)$ en utilisant une fonction f du second degré et une fonction g affine définies sur \mathbb{R} . Deux solutions sont proposées. La première demande de composer ces deux fonctions et ensuite de calculer l'image demandée. Une identité remarquable est un outil devant être disponible dans ce travail. Quant à la deuxième solution, elle consiste à calculer l'image «fonction par fonction».

Après ces exemples la relation entre la composition et la fonction identique est introduite sous une rubrique « fonction identique ». Il y a un exemple qui illustre cette théorie. L'élève est amené à trouver les deux types de composée d'une fonction du second degré et la fonction identique définies sur \mathbb{R} , ensuite à calculer l'image d'un nombre réel par ces deux composées.

3.8 Exercices résolus (26 exercices)

Nous trouvons quatre thèmes des exercices résolus du manuel officiel. Le thème I (définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant) et le thème II (propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières) ne sont présents que dans les exemples du cours.

Maintenant nous analysons les exercices résolus thème par thème.

3.8.1 Thème III : Recherche de l'inverse d'une fonction (2 exercices)

Dans un exercice il s'agit de calculer $f(I)$ si f est bijective et $xf^{-1}(x)-2x=-3+3f^{-1}(x)$. L'élève doit d'abord calculer f^{-1} en fonction de x et ensuite trouver son inverse à partir de \mathbf{R}_a . Enfin il lui reste à calculer l'image demandée.

Dans un autre exercice on propose de trouver la valeur k si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x+k}{3}$ et $f^{-1}(-2) = -1$. En faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir $f(-1) = -2$ et ensuite une équation. La résolution d'équations que l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

3.8.2 Thème IV : Composition des fonctions (20 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) *Composition des fonctions (5 exercices)* : dans un exercice on demande de montrer

$(fog)^{-1}(x) = g^{-1}(x) \circ f^{-1}(x)$ en utilisant les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 2$ et $g(x) = 3x + 1$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver la composée fog et son inverse. Ensuite en trouvant l'inverse des fonctions f et g il doit déterminer la composée $g^{-1} \circ f^{-1}$. Enfin il doit vérifier si ces deux composées sont identiques. Dans le deuxième exercice l'élève est amené à calculer $(fofofof)(3)$ si la fonction f est définie par morceaux de la façon suivante : (si x est pair, $f(x) = \frac{x+2}{2}$ et si x est impair, $f(x) = x + 1$). L'élève doit trouver l'image demandée « fonction par fonction ». Comme nous l'avons déjà indiqué, ce type de travail relève du programme de la classe de terminale. Le troisième exercice demande de calculer $(gof^{-1})^{-1}(2)$ si les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par $f(x) = (si\ x \geq 2, f(x) = x^2 - 2x + 3$ et si $x < 2, f(x) = 2x + 4)$ et $g(x) = x + 3$. En faisant appel à l'inverse de la composition des fonctions l'élève doit obtenir $(fog^{-1})(2)$, ensuite trouver l'inverse de g et calculer l'image de 2 « fonction par fonction ». Dans le quatrième exercice on demande de trouver la valeur m en utilisant $f^{-1}(x) = 1 - mf(x)$ et $(fof)^{-1}(x) = 3x + 1$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de l'inverse de la composée. En utilisant la fonction identique il doit mettre à la place de x $f(x)$ dans l'équation donnée et obtenir fof . Enfin il doit comparer ces deux composées fof pour trouver la valeur a . L'égalité des polynômes que l'élève doit faire fonctionner s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le cinquième exercice on demande de trouver la valeur n si $(fog)(x) = 3x + 15 - 2n$ et $g(4) = f^{-1}(3)$, pour les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} . L'élève doit calculer l'image de 4 par fog et obtenir $f(g(4)) = 27 - 2n$. Ensuite il doit remplacer $g(4)$ par $f^{-1}(3)$ et obtenir une équation en faisant appel à la fonction identique.

ii) *Décomposition des fonctions (8 exercices)* : dans un exercice on demande de « décomposer » $(fog)(x) = 3x - 4$ en utilisant la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 1$ et trouver

la fonction g définie sur $|\mathbb{R}$. Sans utiliser la décomposition l'élève est amené à mettre à la place de x $g(x)$ dans la fonction f et obtenir une équation. Ensuite il doit calculer $g(x)$ en fonction de x pour trouver g . Dans le deuxième exercice on propose aussi de déterminer la fonction g définie sur $|\mathbb{R}$ en utilisant la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1$ et $(fog^{-1})(x)=3x+8$, dans le troisième exercice de « décomposer » $(fog)(x)=2x^2-x-1$ en utilisant la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-3$ pour trouver g , dans le quatrième exercice de « décomposer » $(gof)(x)=4x+3$ en utilisant la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+7$ pour trouver g , dans le cinquième exercice de « décomposer » $(fog)(x)=27^{2x-4}$ en utilisant $f(x)=3^{2x+1}$ pour trouver g^{-1} . Pour ces quatre derniers exercices il s'agit de la même procédure comme dans le premier exercice. Obtenir une équation sans utiliser la décomposition est toujours utilisé. La résolution d'équations dans les quatre premiers exercices paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail mais celle d'équations exponentielles très particulières dans le dernier exercice est une tâche des chapitres suivants. Dans un autre exercice on demande de calculer $f^{-1}(3)$ si la fonction g est définie par $g(x)=x^2-x$ et $(fog)(x)=2x^2-2x+5$. L'élève est amené à écrire $f(x^2-x)=2x^2-2x+5$ et à obtenir $f(t)=2t+5$ en utilisant la méthode du changement de variable (soit $t=x^2-x$). Ensuite il doit trouver l'inverse de f et l'image demandée. En ce qui concerne le septième exercice, il consiste à « décomposer » $(fog)(x)=4x-3$ en utilisant g définie sur $|\mathbb{R}$ par $g(x)=3x+2$ pour trouver f définie sur $|\mathbb{R}$. Deux solutions sont proposées. La première solution demande de mettre en fonctionnement la décomposition. Ainsi l'élève doit d'abord trouver l'inverse de f et ensuite en faisant appel à la fonction identique il doit déterminer le fonction g . Quant à la deuxième solution en effet elle n'est pas très différente de la première. En écrivant $f(3x+2)=4x-3$ l'élève est amené à obtenir une composée (implicite) et trouver l'inverse de la fonction $3x+2$ et le mettre à la place de x dans la composée (implicite). Dans le huitième exercice il s'agit de trouver g si la fonction f est définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+5$ et $(g^{-1}of)^{-1}(x)=x+1$. En appliquant deux fois la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir $g(x)=f(x+1)$. Ensuite il lui reste à calculer $f(x+1)$ pour trouver g . Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

iii) *Décomposition implicite des fonctions (7 exercices)* : dans un exercice il s'agit de déterminer la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ si $f(x-2)=4x+3$, dans le deuxième exercice de

déterminer la fonction f définie sur \mathbb{R} si $f(3x-1)=2x+3$. Dans le premier exercice en posant $x-2=u$ l'élève est amené à obtenir $x=u+2$ et à le mettre à la place de x dans la composée (implicite). Cela lui permet d'obtenir la fonction demandée sans mettre en fonctionnement la décomposition. Dans la résolution on indique également qu'on peut aussi trouver f en mettant à la place de x l'inverse de $x-2$. Quant à la solution du deuxième exercice, l'élève doit faire fonctionner la décomposition en posant $h(x)=3x-1$. Ainsi il doit trouver l'inverse de h et la mettre à la place de x dans la composée. Il est très intéressant qu'il n'y ait aucune indication qui fait un lien entre les solutions proposées de l'exercice précédent et celle de cet exercice. Dans le troisième exercice on demande de trouver la valeur k si $f(2x-3)=4x+k$ et $f^{-1}(5)=8$, pour la fonction f bijective définie sur \mathbb{R} . En faisant appel à la définition de l'inverse des fonctions, l'élève doit d'abord obtenir $f(8)=5$, ensuite trouver pour quelle valeur de x on a $2x-3=8$ et remplacer x par cette valeur dans la composée (implicite). Le quatrième exercice consiste à calculer $f^{-1}(2)$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} et $f(2x+5)=3x-4$. En faisant appel à la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir $f^{-1}(3x-4)=2x+5$ et ensuite trouver pour quelle valeur de x on a $3x-4=2$. Il s'agit de la même procédure comme dans l'exercice précédent. Dans un autre exercice on propose de calculer $(g^{-1} \circ f)(2)$ si la fonction g est définie sur \mathbb{R} par $g(x)=\frac{2x-3}{5x-4}$ et $f(x-2)=5x+3$. L'élève doit d'abord calculer $f(2)$ comme dans les exercices précédents. Ensuite il doit trouver l'inverse de g en faisant fonctionner la recette \mathbf{R}_a et calculer l'image de $f(2)$. Le sixième exercice consiste à déterminer g si $f^{-1}(3x-1)=10x+1$ et $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)=5x$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver f^{-1} et mettre à la place de x $g^{-1}(x)$ dans la fonction f^{-1} et ensuite obtenir une équation. Enfin il doit calculer $g^{-1}(x)$ en fonction de x et trouver son inverse. Dans le dernier exemple on demande de calculer $(g^{-1} \circ f)(4)$ en utilisant $f(5x-1)=x+3$ et $g(3x-2)=x-2$. L'élève est amené à calculer l'image demandée «fonction par fonction». En déterminant pour quelle valeur de x on a $5x-1=4$ il doit calculer $f(4)$. Ensuite de la définition de l'inverse des fonctions il doit obtenir $g^{-1}(x-2)=3x-2$. Pour calculer $g^{-1}(f(4))$ il s'agit aussi de la même procédure.

3.8.3 Thème V :Image d'un nombre réel ou une expression algébrique (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) *Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de $f(x)$ (1 exercice)* : l'élève est amené à calculer $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie, pour les valeurs où elle

est définie, par $f(x) = \frac{1}{x-2}$. L'élève doit d'abord calculer $f(x+2)$, ensuite x en fonction de $f(x)$ et le mettre à la place de x dans l'image de $x+2$ par f .

ii) *Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction (2 exercices)* : dans un exercice on demande de calculer $g(1)$ si la fonction f est définie par $f(x) = 2^x + 3^x$ et $g(x) = \frac{f(x+2)}{f(x)}$. En calculant l'image de $x+2$ l'élève doit déterminer la fonction g et ensuite trouver l'image demandée. Les connaissances antérieures liées aux puissances sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exercice fait trouver la différence $f(101) - f(2)$ si la fonction f définie par $f(x) = (a+2)x + a + 1$ est constante. L'élève doit d'abord déterminer la fonction f . Pour ce faire il doit égaliser le coefficient de x à zéro en raison de l'inexistence de variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Ensuite en sachant que l'image de chaque nombre est identique il doit trouver nulle la différence demandée.

3.8.4 Thème VI : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (1 exercice)

Nous pouvons trouver un seul exercice résolu qui concerne la représentation graphique des

fonctions. Dans cet exercice on demande de trouver la valeur de $\frac{f(-3) - f^{-1}(9)}{f(0) - f^{-1}(0)}$ à partir de la

représentation graphique de la fonction f . L'élève doit prendre en compte que la représentation graphique d'une fonction bijective dans un repère orthonormé est également celle de son inverse.

3.9 Synthèse

Nous remarquons tout d'abord que contrairement au programme (et aux autres manuels de lycée) le manuel officiel ne met pas en place l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence. Les auteurs du manuel se contentent de présenter la définition des ensembles infinis et des ensembles équipotents.

A part cela toutes les notions indiquées par le programme sont abordées. La notion de fonction est introduite à partir de la définition ensembliste. La comptine C_0 n'est pas explicitement présentée. Dans des exemples elle est cependant utilisée. En ce qui concerne la méthode utilisée pour trouver la fonction inverse, nous pouvons rencontrer les deux méthodes : méthode M_{xy} et recette R_a . Pour tous les exercices qui figurent dans le cours la

première est utilisée. La deuxième est implicitement introduite dans des exemples comme une deuxième méthode. A partir de là, la méthode M_{x+y} est totalement disparue.

Malgré leur inexistence dans le programme le manuel officiel propose aussi, dans des exercices résolus, certaines formules pour le calcul du nombre des correspondances, fonctions, non-fonctions, injectives, non-injectives définies de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) comme dans le manuel Aydin.

Par ailleurs dans le manuel officiel nous pouvons aussi constater l'influence du concours. Et elle ne se limite pas à la recette R_a . Par exemple la décomposée (implicite) $(f(ax+b)=dx+c)$ est un des thèmes plus fréquents du concours. Le manuel propose beaucoup d'exercices attachés à ce thème et trois solutions :

Exercice 2 : Trouver f si $f(x-2)=4x+3$, pour la fonction f définie sur IR.

Solution : Soit $x-2=u$ donc $x=u+2$. On écrit à la place de x $u+2$:

$$f(u+2-2)=4(u+2)+3 \Rightarrow f(u)=4u+11. \text{ Si l'on écrit à u x, } f(x)=4x+11 \dots (1)$$

On peut trouver f en écrivant à la place de x, $(x+2)$ qui est l'inverse de $(x-2)$ (2)

Exercice 3 : Trouver f si $f(3x-1)=2x+3$, pour la fonction f définie sur IR.

Solution : Soit $3x-1=h(x)$. On trouve f en mettant à la place de x, h^{-1} dans l'expression.

$$h^{-1}(x)=\frac{x+1}{3} \text{ et } f(3x-1)=2x+3 \Rightarrow f\left(3 \cdot \frac{x+1}{3}-1\right)=2\left(\frac{x+1}{3}\right)+3 \text{ (on écrit } \frac{x+1}{3} \text{ à la place de x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x+11}{3} \dots (3)$$

Nous constatons tout d'abord qu'il n'y a aucune indication qui fait un lien entre ces solutions proposées. Le manuel traite ces deux exercices comme s'il s'agissait d'exercices différents.

Dans la solution n°1 l'élève doit utiliser la méthode du changement de variable. Mais elle est cependant assez prématurée chez les élèves de seconde. Et elle reste uniquement réservée à cet exercice. La solution n° 2 est toujours proposée par le manuel comme tous les manuels de préparation au concours. Elle demande à l'élève de trouver d'abord l'inverse de $ax+b$ et ensuite le mettre à la place de x dans $f(ax+b)=dx+c$. Il nous semble que ce type de solution ne permet pas à l'élève de reconnaître qu'il s'agit d'une décomposée, $ax+b$ est une fonction et on utilise aussi ici la définition de la fonction identique. Même si la proposition de la troisième solution enlève nos inquiétudes, elle n'est plus jamais reprise.

Nous rencontrons la même situation dans la décomposition des fonctions. Sans mettre en fonctionnement la décomposition, l'élève est à chaque fois conduit à obtenir une équation et

à calculer la fonction demandée en fonction de x . Ainsi la décomposition se ramène à une résolution d'équations. Nous avons encadré certains exemples et leurs solutions comme suit :

Exemple 7 : Trouver g si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x)=2x+1$ et $(f \circ g)(x)=3x-4$.

$$\text{Solution : } (f \circ g)(x)=3x-4 \Rightarrow f[g(x)]=3x-4 \Rightarrow 2g(x)+1=3x-4 \Rightarrow 2g(x)=3x-5 \Rightarrow g(x)=\frac{3x-5}{2}$$

Exemple 11 : Trouver g si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x+1$ et $(f \circ g^{-1})(x)=3x+8$.

$$\text{Solution : } (f \circ g^{-1})(x)=3x+8 \Rightarrow f(g^{-1}(x))=3x+8 \text{ et } f(g^{-1}(x))=g^{-1}(x)+1 \text{ donc}$$

$$3x+8=g^{-1}(x)+1 \Rightarrow g^{-1}(x)=3x+7 \Rightarrow g(x)=\frac{x-7}{3}.$$

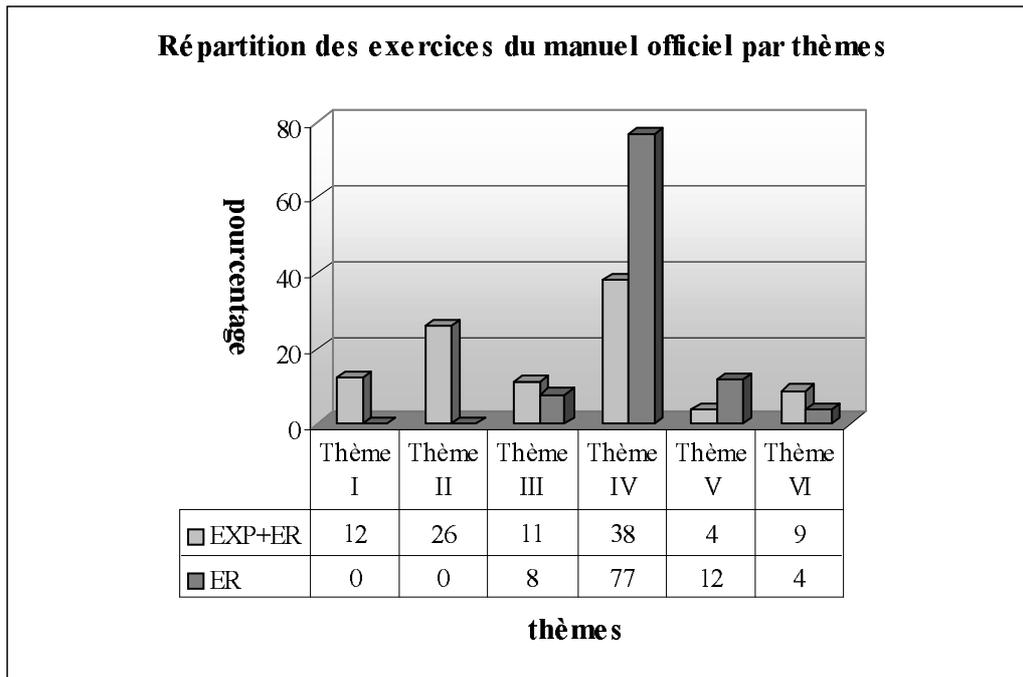
Par ailleurs le manuel essaie systématiquement d'habituer les élèves à la décomposée (implicite). Même s'il s'agit d'une décomposée normal, l'élève est à chaque fois amené à la rendre en décomposée (implicite) et utiliser la résolution décrite plus haut. Nous proposons un exercice typique :

Exemple 15 : Trouver g si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x)=2x+7$ et $(g \circ f)(x)=4x+3$.

$$\text{Solution : } g(f(x))=4x+3 \Rightarrow g(2x+7)=4x+3$$

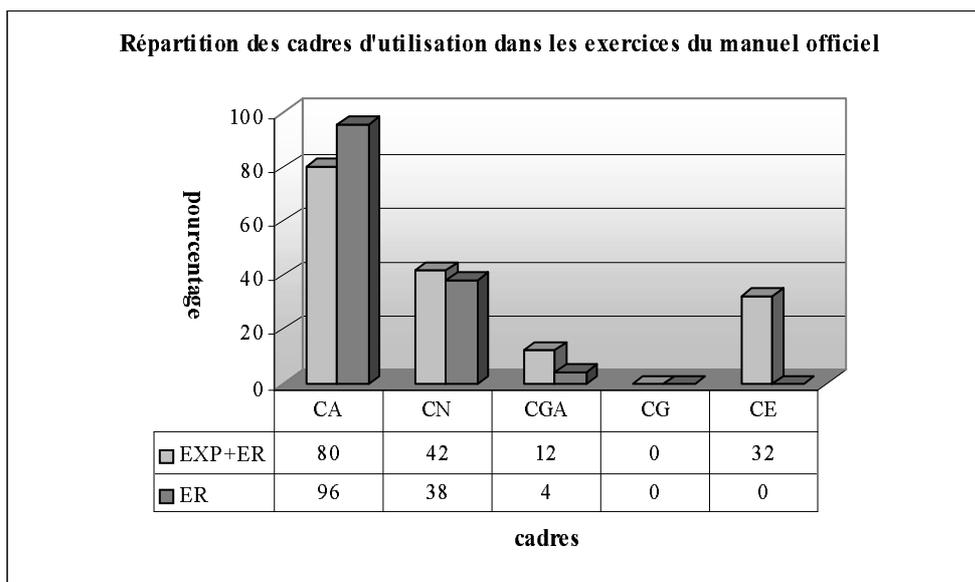
$$\Rightarrow g(x)=4\left(\frac{x-7}{2}\right)+3 \Rightarrow g(x)=2x-11$$

Nous pouvons trouver certains exercices résolus qui concernent les notions relevant du programme des classes suivantes. Par exemple dans un exercice on peut demander à l'élève de composer une fonction affine et une fonction polynôme définie par morceaux qui est en principe dans le programme de terminale.



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction... Thème II : Propriétés particulières des fonctions... Thème III : Recherche de l'inverse d'une fonction, Thème IV : Composition des fonctions, Thème V : Image d'un nombre réel... Thème VI : Représentation graphique des fonctions EXP : Exemples (effectif : 55 exemples), ER : Exercices résolus (effectif : 26 exercices)

Selon les thèmes les exercices résolus du manuel officiel se décomposent en quatre. Comme le bien montre le tableau ci-dessus, les thèmes I et II ne sont présents que dans le cours. Le thème « écrasant » est le thème IV avec un taux de 77%. Il y a seulement 12% des exercices dans lesquels il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique. Le thème VI est le thème le plus marginal des exercices du manuel.



En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les exercices résolus, la quasi-totalité des exercices utilisent le cadre algébrique. Ce cadre est suivi du cadre numérique avec un taux de

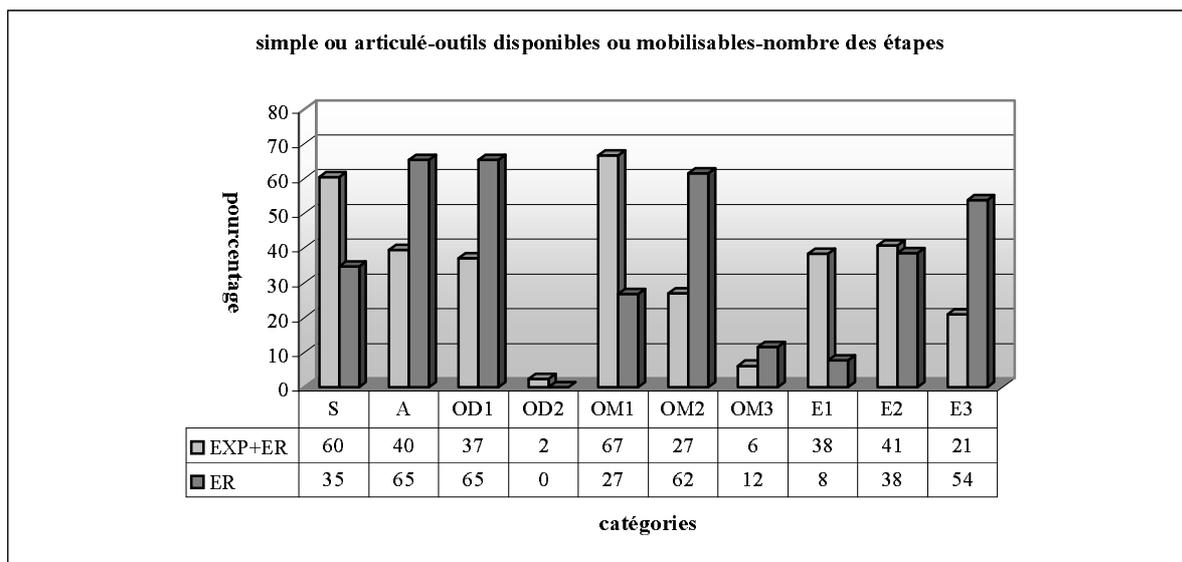
38%. Il y a seulement 4% des exercices pour lesquels le cadre analytique est utilisé. Le cadre géométrique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles sont totalement absents.

Cela signifie que le manuel officiel est algébriquement riche et géométriquement très pauvre.

Par ailleurs La plupart des exercices résolus portent sur plusieurs connaissances antérieures.

De plus la résolution de bon nombre des exercices présente plusieurs étapes. Le tableau ci-dessous montre que 65% des exercices résolus font utiliser plusieurs connaissances antérieures (A :articulé). Tandis que 35% des exercices ne sont destinés qu'à mobiliser des connaissances qui font référence directe à la notion de fonction (S :simple). Dans 65% des exercices l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 :un outil disponible). Il n'y a aucun exercice qui nécessite de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : deux outils disponibles).

Plus du quart des exercices demandent de mobiliser une connaissance qui fait référence directe à la notion de fonction (OM1 : un outil mobilisable). Tandis que dans 62% il s'agit des deux connaissances à mobiliser (OM2 :deux outils mobilisables). Le taux des exercices qui conduisent l'élève à mobiliser trois connaissances liées directement à la fonction est de 12% (OM3 : trois outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des exercices suivant le nombre des étapes, lors de la résolution de plus de la moitié il s'agit des trois étapes (E3 :trois étapes). 38% présentent un travail qui ait deux étapes (E2 : deux étapes). Dans seuls 8% des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape (E1 :une étape).



S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2, OM3 :Outil mobilisable 3, E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

4. Analyse du manuel de préparation au concours Gvender

4.1 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles

Le manuel Gvender attribue un chapitre propre à la notion de fonction. Il n'y a aucune activité préparatoire. Ainsi le chapitre commence par le cours en présentant la définition ensembliste de la notion de fonction. Comme les manuels précédents (de lycée ou de dérsané) l'interprétation de la définition en diagramme sagittal, la présentation de l'ensemble de définition, de l'ensemble d'arrivée et de l'ensemble image grâce à un exemple, la comptine C_0 et un certain nombre d'exemples sont mis en place à la suite de la définition.

Dans le premier exemple il s'agit de déterminer l'ensemble image d'une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit calculer les images et ensuite représenter la fonction en diagramme sagittal. Après cet exemple la comptine C_0 est introduite comme une remarque :

Remarque : Pour qu'une correspondance f définie de A vers B puisse être une fonction,

- 1) Il faut que dans l'ensemble de définition (dans A) il n'y ait aucun élément sans image (vacant). Mais dans l'ensemble d'arrivée (dans B) il peut y avoir des éléments vacants.*
- 2) Il faut que chaque élément de l'ensemble de définition n'ait pas plus d'une image.*

Le deuxième exemple comprend quatre parties dont chacune consiste à appliquer directement cette remarque. Ainsi dans chaque partie l'élève doit chercher si une correspondance f définie par une liste de couples d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre est une fonction. En ce qui concerne l'exemple suivant qui comprend six parties il s'agit aussi de l'application directe de la définition (cf. la comptine C_0) au moyen de correspondances définies algébriquement pour les cinq premières parties et dans une correspondance définie graphiquement pour la dernière partie. La première partie demande de montrer que la correspondance f_1 définie sur $|\mathbb{R}$ par $f_1 = \{(x, y) : y = \frac{2x+1}{x-4}\}$ est une fonction ; la deuxième

partie fait étudier la correspondance f_2 définie sur $|\mathbb{R}$ par $f_2 = \{(x, y) : |y| = x^2 + 3\}$, la troisième partie, la correspondance f_3 définie sur $|\mathbb{R}$ par $f_3 = \{(x, y) : y = x - 5\}$, la quatrième partie, la correspondance f_4 définie sur Z par $f_4 = \{(x, y) : y = \frac{2x+1}{3}\}$ et la cinquième partie, la correspondance f_5 définie sur Z par $f_5 = \{(x, y) : y = x^2 + 1\}$. Dans la dernière partie l'élève doit chercher si une correspondance f définie sur un sous-ensemble fini et discret et représentée graphiquement dans un repère orthonormé est une fonction. Dans la première partie l'élève

est ainsi amené à s'apercevoir que la correspondance f_1 n'est pas définie pour les nombres réels -2 et 2 : dans l'ensemble de définition il y a des éléments sans images (vacants). La résolution d'équations du second degré paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Comme chaque élément de l'ensemble de définition a deux images (par exemple *pour* $x=1, y=\pm 4$), la correspondance f_2 n'est pas non plus une fonction. La notion de valeur absolue à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne la correspondance f_3 , les nombres naturels entre 0 et 4 n'ont pas d'image. Ce n'est donc pas une fonction. Puisqu'il y a des nombres entiers sans images dans l'ensemble de définition, la correspondance f_4 ne désigne pas non plus une fonction. Comme l'image de tous les éléments de l'ensemble de définition est un nombre entier, la correspondance f_5 est une fonction. Dans toutes ces parties les connaissances antérieures liées aux ensembles de nombres doivent être disponibles.

Le dernier exemple demande de trouver la somme de quelques images par une fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples.

Avant de passer aux propriétés des fonctions le manuel donne simplement la formule du calcul du nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre sous le titre « nombre des fonctions » et l'illustre avec un exemple.

4.2 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Dans la collection de Gündener nous trouvons la définition des fonctions injectives, des fonctions surjectives, des fonctions non surjectives et la définition de la fonction identique, des fonctions constantes et des fonctions égales. Contrairement aux manuels précédents ce manuel donne aussi la définition des fonctions paires et impaires. Toutes ces définitions sont illustrées par un exemple. De plus la définition de la fonction identique et celle des fonctions constantes sont suivies de représentation graphique de ces fonctions dans un repère orthonormé et la définition des fonctions injectives de son écriture symbolique.

Quant à l'exemple qui illustre la bijectivité des fonctions, il comprend quatre parties. Les trois premières parties sont destinées à chercher si des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre par un diagramme sagittal sont injectives. Il s'agit de l'application directe de la définition de la bijectivité. Dans la quatrième partie l'élève est amené à chercher si une fonction affine définie sur \mathbb{R} est injective. La mobilisation de l'interprétation formelle de la bijectivité est mise en jeu.

Un exemple comprenant plusieurs parties accompagne aussi la surjectivité des fonctions. Les deux premières parties proposent de chercher si une fonction définie d'un sous-ensemble fini

de Z dans un autre par un diagramme sagittal est surjective. Dans les trois dernières parties l'élève doit aussi chercher si une fonction affine définie sur \mathbb{N} , une fonction du second degré définie sur Z et une fonction affine définie sur Z sont surjectives. L'élève est amené à représenter les fonctions en diagramme sagittal et à chercher s'il y a des éléments « vacants » dans l'ensemble d'arrivée. Par ailleurs, on donne la définition des fonctions bijectives au cours d'une remarque à la suite de cet exemple. En ce qui concerne l'exemple de la non surjectivité, il comprend quatre parties. Dans les trois premières parties, il s'agit de chercher si les fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre par des diagrammes sagittaux sont ou non surjectives. La quatrième partie consiste à montrer qu'une fonction affine définie de Z vers \mathbb{R} est non surjective. La mobilisation de la définition est indispensable. Dans la dernière partie l'élève doit prendre en compte que les éléments qui ne sont pas des nombres entiers sont vacants dans l'ensemble d'arrivée (\mathbb{R}). Alors la fonction est non surjective.

L'exemple qui concerne les fonctions constantes demande de montrer qu'une fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre par un diagramme sagittal est constante. En ce qui concerne l'exemple qui illustre la définition de fonction identique, l'élève est amené à chercher si la fonction f définie sur un sous-ensemble fini de Z par $f(x)=x$ est une fonction identique. La représentation en diagramme sagittal est mobilisée.

Pour illustrer la définition des fonctions égales, le manuel propose un exemple pour lequel on demande de chercher si une fonction du second degré et une fonction du troisième degré définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z sont égales.

A la suite de la définition des fonctions paires et impaires il y a un exemple pour lequel on demande de chercher si les fonctions f , g et h définies par $f(x)=x^2+|x|$, $g(x)=2x^3+5x$ et $h(x)=2x^2-3x$ sont impaires ou paires. Par ailleurs il faut signaler que ce type des fonctions figure dans le programme de la classe de terminale.

4.3 Quatre opérations sur les fonctions (\mp, \times, \div)

Les quatre opérations sur les fonctions sont simplement citées sans explication ni démonstration. De plus la multiplication d'une fonction par un nombre réel est aussi introduite.

Il y a deux exemples proposés. Le premier exemple comprend quatre parties dont chacune propose d'effectuer une opération sur une fonction du second degré et une fonction affine définies sur \mathbb{R} . En ce qui concerne le deuxième exemple, on demande de déterminer

l'ensemble image de la fonction $(f+3g)$ en utilisant une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans $|\mathbb{R}$ et une fonction affine définie d'un autre sous-ensemble fini de Z dans $|\mathbb{R}$. L'élève doit comprendre qu'il doit effectuer cette opération pour les éléments communs des ensembles de définition des fonctions.

Par ailleurs nous constatons qu'il y a un certain nombre d'exemples qui ne font pas référence directe aux opérations sur les fonctions. C'est la raison pour laquelle nous les analyserons dans la partie des exercices résolus.

4.4 Définition de l'inverse d'une fonction

La définition de l'inverse d'une fonction à partir des éléments est suivie de sa représentation en diagramme sagittal et de son écriture symbolique. De plus on énonce simplement de manière symbolique que l'inverse de l'inverse d'une fonction est égal à la fonction elle-même.

Par ailleurs le manuel met en évidence la relation entre la bijectivité et l'existence de l'inverse d'une fonction dans la remarque suivante :

Remarque : Si la fonction f définie de A vers B n'est pas bijective, f^{-1} n'est pas une fonction de B vers A mais une correspondance.

Cette remarque est illustrée par un exemple dans lequel on demande de chercher si une fonction définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre a une inverse. L'élève doit étudier la bijectivité de la fonction. La représentation en diagramme sagittal de la fonction est utilisée.

La méthode \mathbf{M}_{xy} est introduite sous le titre « trouver la fonction inverse » comme suit :

Comme $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, pour trouver $f^{-1}(x)$ on calcule x en fonction de y et on change les places de x et y .

A la suite il y a deux exemples qui appliquent directement cette méthode \mathbf{M}_{xy} . L'un demande de trouver l'inverse de la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3x+2}{4}$. Et l'autre, l'inverse de la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt[3]{x+2}-1$.

La règle suivante est donnée avec la recette \mathbf{R}_a :

$$\text{R\`egle : 1) } f(x)=ax+b \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$2) \text{ Si } f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}, \quad f(x)=\frac{ax+b}{xc+d} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a} \dots \dots \dots (\mathbf{R}_a)$$

Après cette règle il y a cinq exemples. Le premier exemple consiste à calculer $f^{-1}(-1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=2x+3$. L'élève doit trouver l'inverse de f à partir de \mathbf{R}_a et ensuite déterminer l'image demandée. Dans le deuxième exercice il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle en utilisant \mathbf{R}_a . En ce qui concerne l'exemple suivant, il consiste à trouver la valeur a si $f(x-1)=x^2+3x+a$ et $f^{-1}(2)=3$. L'élève doit d'abord obtenir $f(3)=2$ en faisant fonctionner la définition de l'inverse d'une fonction. Ensuite il doit trouver pour quelle valeur de x on a $x-1=3$. Cela lui permet d'obtenir une équation et de trouver la valeur a à partir de la composée implicite. Comme le quatrième exercice montre que le raisonnement et le respect de l'ordre de présentation des notions ne sont pas très importants pour ce type de manuels, nous proposons cet exemple et sa résolution :

$$\text{Exemple : Trouver } f^{-1} \text{ si } f\left(\frac{x+1}{2}\right)=x+1.$$

$$\text{Solution : Comme } f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y), \quad f\left(\frac{x+1}{2}\right)=x+1 \Rightarrow f^{-1}(x+1)=\frac{x+1}{2}.$$

Si on écrit $x-1$ à la place de x ,

$$\Rightarrow f^{-1}(x-1+1)=\frac{x-1+1}{(x-1)+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-2x+2}$$

Nous ne trouvons aucun raisonnement qui explique pourquoi on écrit $x-1$ à la place de x . La première étape de la résolution fait référence directe à la définition de l'inverse d'une fonction. Mais la deuxième étape prescrit une tâche s'appuyant sur la décomposition⁵³ des fonctions qui n'est pas encore présentée.

Le dernier exemple consiste à calculer $f^{-1}(16)$ si la fonction f est définie par $f(x)=2^{x+1}$.

L'utilisation de la définition de l'inverse est aussi mise en jeu. En posant $f^{-1}(16)=a$ l'élève doit obtenir $f(a)=16$ et une équation exponentielle très particulières⁵⁴. La résolution de cette dernière paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

⁵³ On appelle décomposition le fait de trouver f [ou g] connaissant $f \circ g$ et g [ou f].

⁵⁴ $f(a)=16 \Rightarrow 2^{a+1}=16 \Rightarrow 2^{a+1}=2^4 \Rightarrow a+1=4 \Rightarrow a=3$.

Cette partie se termine par une remarque dans laquelle on met en évidence la relation entre la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé et celle de son inverse.

4.5 Composition des fonctions

La définition de la composition des fonctions est suivie de son interprétation en diagramme sagittal et deux exemples. Dans le premier exemple il s'agit de trouver les deux types de composée (*fog* et *gof*) des deux fonctions affines définies sur \mathbb{R} . Le deuxième exemple demande de calculer $(fog)(4)$ si les fonctions g et f sont définies sur \mathbb{R} par $g(x)=x^2-2x-9$ et $f(x)=x^{1997}+x^{1998}+5$. Le calcul de l'image demandée fonction par fonction est indispensable. L'élève doit d'abord calculer l'image de 4 par g et ensuite le mettre à la place de x dans la fonction f .

Par ailleurs certaines propriétés de la composition des fonctions sont introduites. Nous trouvons ainsi la non-commutativité (une remarque explique que dans certains cas la composition est commutative), l'associativité, la composée d'une fonction et de la fonction identique, la composée d'une fonction et son inverse, l'inverse de la composition de deux fonctions ou trois fonctions et la décomposition des fonctions.

Avant de terminer cette partie, le manuel propose six exemples. Dans le premier exemple on demande de calculer $(fogoh)(2)$ en utilisant une fonction du second degré et deux fonctions affines définies sur \mathbb{R} . Sans trouver la formule générale de composée $fogoh$ l'élève doit calculer l'image de 2 « fonction par fonction ». Dans le deuxième exemple l'élève est amené à déterminer g si la fonction f est définie par $f(x)=3x+2$ et la composée fog , par $(fog)(x)=6x+11$. Sans faire appel à la décomposition l'élève doit mettre à la place de x $g(x)$ dans la fonction f et obtenir une équation. Ensuite il doit calculer $g(x)$ en fonction de x . Dans le troisième exemple on demande de calculer $(gof)(3)$ en utilisant les composées implicites $f(x+2)=5x+3$ et $g(x-3)=3x+1$. La décomposition des fonctions n'est pas préconisée. L'élève doit d'abord trouver pour quelle valeur de x on a $x+2=3$ et obtenir $f(3)$. Ensuite il doit suivre la même procédure pour $g[f(3)]$. L'exemple suivant invite l'élève à calculer $(f^{-1}ogof)(-2)$ en utilisant les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x)=5^{x+2}$ et $g(x)=x^2+4$. Le calcul de l'image fonction par fonction est toujours mobilisé. Dans la dernière étape l'élève doit faire appel à la définition de l'inverse d'une fonction et obtenir une équation exponentielle très particulière. Le cinquième exemple consiste à calculer $(gof)(2)$ en utilisant deux fonctions polynômes définies par morceaux. Dans cet exemple il s'agit aussi de calculer l'image demandée

« fonction par fonction » sans faire fonctionner la formule générale de composition des fonctions. En ce qui concerne le dernier exemple, on demande de « décomposer » la fonction $f \circ g(x) = 4x - 1$ en utilisant la fonction $g(x) = 2x + 3$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de g à partir de \mathbf{R}_a et ensuite effectuer la décomposition en faisant appel à la définition de la fonction identique.

4.6 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

A la suite de la définition il y a cinq exemples. Dans le premier exemple il s'agit de représenter graphiquement la fonction carrée définie d'un sous-ensemble fini de \mathbf{Z} dans $|\mathbf{R}$. Le deuxième exemple demande de représenter graphiquement une fonction affine définie sur $|\mathbf{R}$. Le tableau de valeurs apparaît pour la première fois depuis le début du chapitre sans commentaire. A la fin de ces deux exemples l'élève est amené à reconnaître la différence entre les représentations graphiques des fonctions. En ce qui concerne les exemples suivants, il s'agit de lire et interpréter la représentation graphique des fonctions. L'élève doit graphiquement déterminer la valeur $\frac{f(-2)+f(-1)}{f(3)+f(5)}$ dans le troisième exemple, déterminer la valeur $f(-1)+f^{-1}(2)+f(2)$ en faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction dans le quatrième exemple et déterminer la valeur $(f \circ g^{-1} \circ f)(4)$ en mettant en fonctionnement la composition des fonctions dans le dernier exemple.

4.7 Exercices résolus (48 exercices)

A part les exercices qui sont proposés à la fin de la partie des quatre opérations sur les fonctions tous les exercices résolus du manuel Gündener sont en forme de QCM.

Maintenant nous analysons les exercices résolus thème par thème.

4.7.1 Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles (1 exercice)

Ce thème est le thème le plus marginal du manuel Gündener. Nous pouvons trouver un seul exercice qui peut être considéré dans cette partie. Cet exercice demande de déterminer l'intervalle d'arrivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x + 3$ si son ensemble de définition est $A = [2, 3)$. En sachant que $[2, 3)$ est l'ensemble des valeurs de la variable telles que $2 \leq x < 3$ l'élève doit obtenir $4 \leq x^2 < 9$ et $4 \leq 2x < 6$, ensuite par addition $8 \leq x^2 + 2x < 15$ et enfin

$11 \leq x^2 + 2x + 3 < 18$. Les connaissances antérieures liées aux intervalles et inéquations sont les outils devant être disponibles dans ce travail.

4.7.2 Thème II : Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (4 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Utilisation de la relation entre l'inverse des fonctions et la bijectivité (1 exercice) : dans un exercice il s'agit de chercher la fonction inversible parmi les fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. En faisant appel à la relation entre la bijectivité et l'inverse des fonctions l'élève doit étudier la bijectivité des fonctions proposées.

ii) Trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement (3 exercices) : dans un exercice on demande de trouver l'inverse de la fonction f définie de $|\mathbb{R} - \{-1\}$ vers $|\mathbb{R} - \{3\}$ par

$$x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)}. \text{ C'est une question du concours(Q41/1997). En faisant appel à la définition de}$$

l'inverse d'une fonction l'élève est amené à remplacer $f(x)$ par y sans calculer $f(x)$ en fonction de x . Cela lui permet d'obtenir l'inverse demandée d'une manière assez économique. Dans le deuxième exercice⁵⁵ on demande de trouver l'inverse de la fonction définie sur $|\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 4x + 3. \text{ L'utilisation de la méthode } \mathbf{M}_{xy} \text{ est indispensable. La résolution d'équations}$$

du second degré paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Le dernier exemple

propose de calculer $f^{-1}(-5)$ en utilisant une fonction f définie par morceaux (si $x < 2$, $f(x) = -x + 1$ et si $x \geq 2$, $f(x) = -x - 3$). En appliquant la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir $f(a) = -5$ (soit $f^{-1}(-5) = a$) et trouver les deux valeurs a . Ensuite il doit vérifier leur appartenance aux ensembles de définition des fonctions.

4.7.3 Thème III : Composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (20 exercices)

Voici les catégories des exercices selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (6 exercices) : dans un exercice l'élève est amené à calculer $(f \circ f)(5)$ si la fonction f est définie par morceaux de la façon suivante (si $x < 1$, $f(x) = 3x$ et si $x \geq 1$, $f(x) = \frac{3-x}{2}$). Sans trouver la formule générale de composée $f \circ f$ l'élève doit calculer

l'image demandée «fonction par fonction». Le deuxième exercice consiste à trouver la

⁵⁵ Par ailleurs dans l'énoncé de l'exercice nous ne pouvons pas trouver l'indication utilisée $x > 2$ dans la résolution. C'est peut-être dû à une erreur d'impression.

valeur a si les fonction f et g sont définies par $g(x)=3x-1$, $f(x)=\frac{2x+1}{x+5}$ et $(g^{-1}of)(a)=2$. Il s'agit de plusieurs étapes. L'élève doit d'abord calculer $g(2)$ et $f(a)$, ensuite obtenir une équation $g(2)=f(a)$ en appliquant la définition de l'inverse d'une fonction. La résolution d'équations que l'élève doit utiliser est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans un autre exercice il s'agit de trouver la valeur u si $f(x)=\frac{2x+u}{x+1}$ et $(fof)(x)=\frac{x-9}{3x-2}$. C'est une question du concours (Q29/1990). L'élève est amené à donner à x la valeur zéro dans les deux fonctions et obtenir $f(f(0))=\frac{9}{2}$ et $f(0)=u$ donc $f(u)=\frac{9}{2}$. Ensuite il lui reste à obtenir une équation et à trouver la valeur u . En ce qui concerne le quatrième exemple, l'élève doit repérer $f(5)$ par f parmi les propositions données si la composée fof est définie par $(fof)(x)=4x-3$. En posant $f(x)=ax+b$ l'élève doit composer la fonction f avec elle-même, puis déterminer les deux fonctions f possibles en utilisant l'égalité des polynômes et calculer les images possibles. Dans le cinquième exemple demande de trouver $(fofof)(3)$ à partir d'une fonction définie sur un sous-ensemble fini et discret par une liste de couples. L'élève doit trouver l'image « fonction par fonction ». Dans le dernier exemple on demande de trouver la valeur $\frac{(f.g-h)(-1)}{(fogoh)(1)}$ si les

fonctions f , g et h sont définies par $f(x)=x+3$, $g(x)=x^2-1$ et $h(x)=x^3+2$. Après avoir calculé les images de -1 par les fonctions en cause l'élève est amené à effectuer les opérations. En ce qui concerne l'image de 1 par $fogoh$, l'élève doit la calculer «fonction par fonction ».

ii) *Décomposition des fonctions (1 exercice)* : il y a un seul exercice pour lequel on demande de décomposer la fonction $(fog)(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ en utilisant la fonction $f(x)=3x$ et trouver la fonction g . Deux solutions sont proposées. La première solution consiste à décomposer fog en utilisant la définition de la fonction identique et de l'inverse de la fonction f . Quant à la deuxième solution, l'élève doit mettre $g(x)$ à la place de x dans la fonction f et obtenir une équation. Il lui reste à calculer $g(x)$ en fonction de x .

iii) *Décomposition implicite des fonctions (13 exercices)* : dans un exercice il s'agit de calculer $f(8)$ si $f(3x+2)=5x-4$, dans le deuxième exercice qui est l'une des questions du concours (Q23/1987), de calculer $f(0)$ si $f(2x+3)=3x+2$, dans le troisième exercice, de calculer $f(2)$ si $f(\frac{3x-1}{2x+1})=2x-3$, dans le quatrième exercice qui est une question du concours (Q27/1989), de calculer $f(2)$ si $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{x-1}{x+2}$, dans le cinquième exercice, de calculer $f(-\frac{1}{4})$

si $f(x^2-x)=x^2+x+3$. Comme il s'agit de la même procédure dans tous ces exercices, nous nous contentons d'analyser le premier. L'élève doit d'abord trouver pour quelle valeur de x on a $3x+2=8$ et ensuite mettre cette valeur dans la composée implicite $f(3x+2)=5x-4$. Cela lui permet d'obtenir l'image cherchée. Par ailleurs dans la quatrième question, en utilisant la méthode du changement de variable l'élève est amené à s'apercevoir $f(x)=\frac{1}{x}$ sans calcul et à trouver l'image cherchée.

Par ailleurs le sixième exercice fait trouver la somme $f(-1)+f(1)$ si $f\left(\frac{ax-b}{bx-a}\right)=x^2+x+1$ et $a \neq b$.

L'élève doit donner à la place de x les valeurs numériques 1 et -1 dans la composée implicite. Ensuite il doit simplifier et obtenir les images de 1 et -1 . Le septième exercice de cette partie propose de trouver la somme $f(-1)+f(0)$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} et $f(2x+1)=\left(\text{si } x \geq -\frac{1}{2}, x-1 \text{ et si } x < -\frac{1}{2}, 3-x\right)$. L'élève doit d'abord trouver pour quelles valeurs de x on a $2x+1=-1$ et $2x+1=0$. Ensuite il doit remplacer x par ces valeurs dans la formule de la fonction qui est définie pour ces valeurs de x .

Dans le huitième exercice l'élève doit déterminer la fonction f si $f(x^2+x)=2x^2+2x+2$, dans le neuvième exercice qui est une question du concours (Q32/1992), déterminer f si

$f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$, dans le dixième exercice, déterminer f si $f(2x+1)=4x^2-3$, dans le onzième

exercice, déterminer f si $f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{x}$, dans le douzième exercice, déterminer f si

$f\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)=\frac{x}{x+1}$, dans le treizième exercice, déterminer f si $f\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)=x+4$. A part dans les

exercices huit et onze, l'élève doit suivre la même procédure. Par exemple dans le neuvième exercice il doit d'abord chercher l'inverse de la fonction implicite $2x+1$ et ensuite remplacer x

par cette valeur dans la composée implicite $f(2x+1)=\frac{x^2+3}{5}$. En ce qui concerne le huitième

exercice, en posant $t=x^2+x$ l'élève doit faire en fonctionnement la méthode du changement de variable. Cela lui permet d'obtenir la fonction f sans calcul. Dans le onzième exercice en faisant appel à la factorisation et à une identité remarquable l'élève doit déterminer la fonction f . La méthode du changement de variable est aussi utilisée.

4.7.4 Thème IV : Image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction
(20 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) *Calculer l'image d'un nombre réel par des fonctions définies indirectement (7 exercices)* : dans un exercice il s'agit de calculer $f(3)$ si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x+1)=f(x)-x$ et $f(1)=1$, dans le deuxième exercice, de calculer $f(4)$ si $f(x+1)=x \cdot f(x)$ et $f(2)=5$, dans le troisième exercice, de calculer $f(2)$ si $f(x)=\frac{f(x+1)}{x}$ et $f(4)=12$. Pour ces exercices l'élève doit donner à x des valeurs numériques correspondant à l'image cherchée et à l'image énoncée. Par exemple dans le premier exercice l'élève doit donner à x les valeurs 1 et 2 et trouver $f(3)$.

En ce qui concerne le quatrième exercice, il consiste à calculer $f(2)$ si $f(\frac{x}{2})=x f(\frac{2}{x})+x^2+1$.

L'élève doit donner à x les valeurs 4 et 1 et obtenir deux équations ; ensuite calculer l'image à partir de la méthode de substitution.

Dans le cinquième exercice on propose de trouver la différence $f(3)-f(-3)$ si $f(x+2)+f(x-1)=3x+1$, dans le sixième exercice, de trouver la différence $f(2)-f(0)$ si $f(x)+f(x+1)=2x+3$. Pour ces exercices l'élève doit aussi donner à x des valeurs numériques liées aux images et obtenir un système linéaire d'équations. Ensuite par addition il doit trouver la différence des images. Dans le septième exemple il est nécessaire de trouver $f(102)$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} et $f(x+2)=f(x)+2$, $f(2)=1$. L'élève doit d'abord mettre en ordre l'expression et donner à x des valeurs qui varient de 2 à 100. Par addition il doit obtenir la différence des images de 102 et 2 et enfin l'image de 102.

ii) *Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de $f(x)$ (3 exercices)* : dans un exercice il s'agit de calculer $f(3x)$ en fonction de $f(x)$ si $f(x)=3^{2x-1}$, dans le deuxième exercice, de calculer $f(\frac{x}{2})$ en fonction de $f(x)$ si $f(x)=2^{x+2}$, dans le troisième exercice qui est une question du concours (Q36/1995), de calculer $f(x-1)$ en fonction de $f(x)$ si $f(x)=\frac{x}{x+1}$. La procédure à suivre est identique. Par exemple dans le premier exercice l'élève doit d'abord calculer $f(3x)$. Ensuite il doit calculer 3^{2x} en fonction de $f(x)$ et le mettre à la place de 3^{2x} dans $f(3x)$. Dans les deux premiers exercices la résolution d'équations exponentielles très particulières et dans l'autre exercice la résolution d'équations paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail.

iii) Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie algébriquement (10 exercices) : dans un exercice il s'agit de déterminer $f(16)$ parmi plusieurs possibilités si $f(a.b)=f(a)+f(b)$, dans le deuxième exercice, de déterminer $f(1)$ parmi plusieurs possibilités si $f:|\mathbb{R} \rightarrow |\mathbb{R}^+$ et $f(m.n)=f(m).f(n)$, dans le troisième exercice, de calculer $f(6)$ si $f(x+y)=f(x).f(y)$ et $f(2)=5$. Pour le premier exercice en sachant $16=2.2.2.2$ l'élève doit obtenir $f(2.2.2.2)=f(2)+f(2)+f(2)+f(2)$ et ensuite $f(16)=4f(2)$. En ce qui concerne le deuxième exercice, en posant $n=1$ l'élève doit obtenir $f(m)=f(m).f(1)$ et ensuite trouver $f(1)$. Dans le troisième exercice l'élève doit d'abord obtenir $f(6)=f(2+4)=f(2)+f(4)$, ensuite il fait la même chose pour $f(4)$ et obtenir $f(6)=3f(2)$. Enfin il lui reste à remplacer $f(2)$ par 5.

Le quatrième exercice demande de déterminer la fonction f si f est affine et $f^{-1}(5)=4$, $f^{-1}(7)=3$, le cinquième exercice, de calculer $f(1)$ si f est affine et $f(5)=3$, $f(3)=5$ et le sixième exercice, de trouver le produit $m.n$ si la fonction f est définie par $f(x)=mx+n$ et $f^{-1}(4)=5$, $f^{-1}(3)=6$. Ces trois derniers exemples présentent un travail fondé sur la formule générale des fonctions affines. Et la résolution du système linéaire d'équations dont l'élève doit se servir est un outil de travail. Dans les exercices quatre et six en faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction, l'élève est amené à remplacer la fonction inverse par la fonction.

Par ailleurs le septième exercice demande de calculer $f(\sqrt{3}+1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=x^2-2x+1$. Remplacer x par $\sqrt{3}+1$ n'est pas préconisé. L'élève est amené à reconnaître l'identité remarquable pour obtenir $f(x)=(x-1)^2$. Cela lui permet de résoudre l'exercice d'une manière assez économique. Dans le huitième exercice l'élève doit calculer $f(x-1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$. La mobilisation de l'identité remarquable $(a+b)^3$ est préconisée. Dans le neuvième exercice on demande de calculer $f(x-1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=x^2+4x+5$. L'élève est aussi amené à obtenir une identité remarquable en décomposant 5 en 4+1.

En ce qui concerne le dernier exercice de cette partie, il consiste à calculer $\frac{f(2)}{f(1)}$ si la fonction

f est définie par $f(x)=a^{-x}-b^x$ et $a \neq b$. En calculant les images mises en jeu l'élève doit obtenir

$\frac{a^2 - b^2}{a - b}$. A partir de là le travail devient une factorisation. Une identité remarquable que l'élève doit utiliser est un outil supposé disponible dans ce travail.

4.7.5 Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 exercices)

Dans ce thème nous trouvons trois exercices. Ils ne sont pas différents. Un exercice fait trouver la somme $f(0)+g^{-1}(4)$ à partir des représentations graphiques des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} . Le deuxième exercice propose de déterminer pour quelles valeurs de x on a $f(x+4)=0$ et de trouver leur somme en utilisant la représentation graphique de f dans un repère orthonormé. L'élève doit d'abord trouver les valeurs pour lesquelles f est nulle et les égaliser à $x+4$, ensuite pour trouver les valeurs de x et leur somme.

En ce qui concerne le dernier exercice, l'élève est amené à trouver $\frac{(g \circ f^{-1})(2)}{(f^{-1} \circ g)(3)}$ en utilisant les

représentation graphiques des fonctions f , g et $g(x)=2x-2$. La mobilisation de la composition et de la définition de l'inverse d'une fonction est indispensable. De plus pour déterminer les images, l'élève doit aussi utiliser la formule algébrique de la fonction g .

4.8 Synthèse

D'abord nous constatons que le manuel Gündener donne la notion de fonction dans un chapitre uniquement réservé à cette notion. Comme la plupart des manuels précédents il n'y a aucune activité préparatoire. Les auteurs du manuel commencent par la définition ensembliste de la notion de fonction. La comptine C_0 est introduite comme une remarque et appliquée dans une dizaine d'exemples. Contrairement aux autres manuels le tableau de variation est présent. Mais il est utilisé une seule fois dans un exemple concernant la représentation graphique d'une fonction affine définie sur \mathbb{R} sans commentaire.

Par ailleurs le manuel aborde la plupart des notions qui figurent dans le programme de la classe de seconde. Mais les définitions des ensembles finis et infinis, les ensembles équipotents et l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence des ensembles infinis sont totalement absents. De plus nous trouvons les fonctions paires ou impaires et les quatre opérations sur les fonctions qui relèvent du programme de la classe de terminale.

En ce qui concerne les méthodes préconisées pour trouver l'inverse d'une fonction, la méthode \mathbf{M}_{xfy} est d'abord introduite. Elle est utilisée une seule fois pour une fonction qui peut relever aussi de la recette \mathbf{R}_a et à chaque fois pour les fonctions qui n'en relèvent pas.

Dans la collection de Gvender nous pouvons trouver la plupart des questions du concours ou très ressemblantes. Par ailleurs certains exercices qui s'inspirent d'une des questions concours peuvent apparaître à la suite de notions qui ne font pas référence directe à ces exercices. Par exemple les exercices suivants sont proposés à la suite des quatre opérations sur les fonctions au moment où l'inverse d'une fonction et la composition des fonctions ne sont pas encore introduits.

Exemple 1 : Trouver $f(8)$ si $f(3x+2)=5x-4$.

Exemple 2 : Déterminer $f(x)$ si $f(x^2+x)=2x^2+2x+2$

Cela signifie que le but principal de ce type de manuels est de présenter des questions du concours et d'entraîner les élèves. Afin de montrer le niveau de cet entraînement et l'inspiration des exercices des questions du concours, nous avons encadré tous les exercices résolus ou non résolus d'un même type dans le manuel Gvender.

Trouver $f(8)$ si $f(3x+2)=5x-4$ (exercice résolu)

tant donné $f(2x+3)=3x+2$, quelle est la valeur $f(0)$? (exercice résolu) :Q23/1987

tant donné $f(\frac{3x-1}{2x+1})=2x-3$, quelle est la valeur $f(2)$? (exercice résolu)

tant donné $f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{x-1}{x+2}$, quelle est la valeur $f(2)$? (exercice résolu)

tant donné $f(x^2-x)=x^2+x+3$, quelle est la valeur $f(-\frac{1}{4})$? (exercice résolu)

tant donné $f(2x-3)=3x+2$, quelle est la valeur $f(5)$? (Test 1,exercice solution non proposée)

tant donné $f(2x+1)=x+2$, quelle est la valeur $f(0)$? (Test 1,exercice solution non proposée)

tant donné $f(\frac{x+1}{x-1})=2x+3$, quelle est la valeur $f(2)$? (Test 1,exercice solution non proposée)

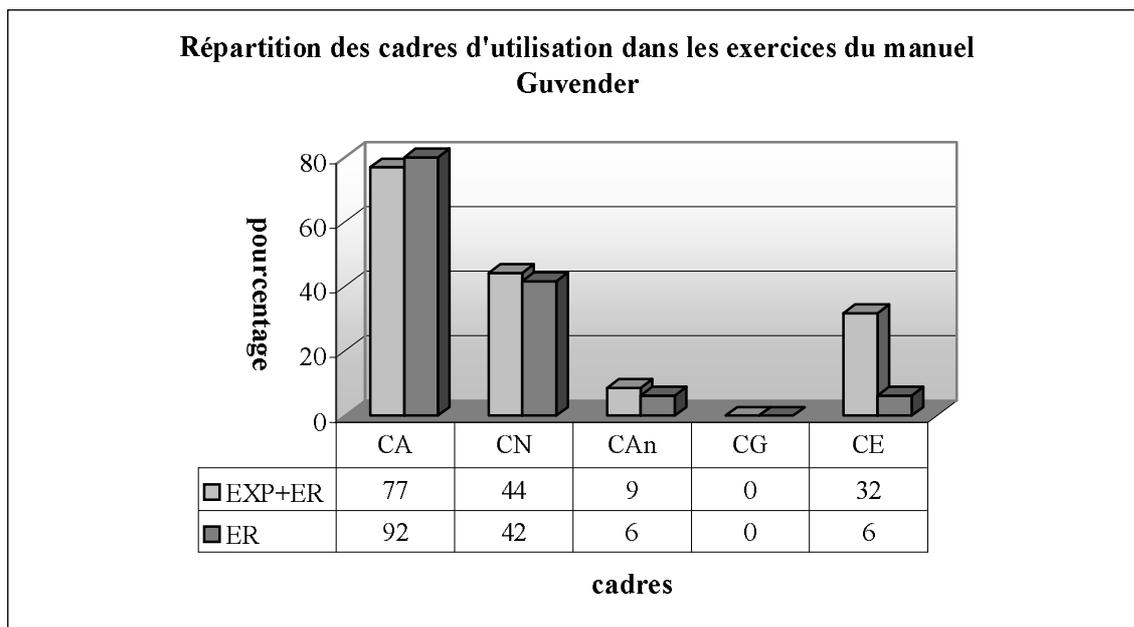
tant donné $f(3x+4)=x+1$, quelle est la valeur $f^{-1}(5)$? (Test 1,exercice solution non proposée)

tant donné $f(3x-4)=9x+2$, quelle est la valeur $f(0)$? (Test 2,exercice solution non proposée)

tant donné $f(x^2+x)=2x+3$, quelle est $f(-\frac{1}{4})$? (Test 3,exercice solution non proposée)

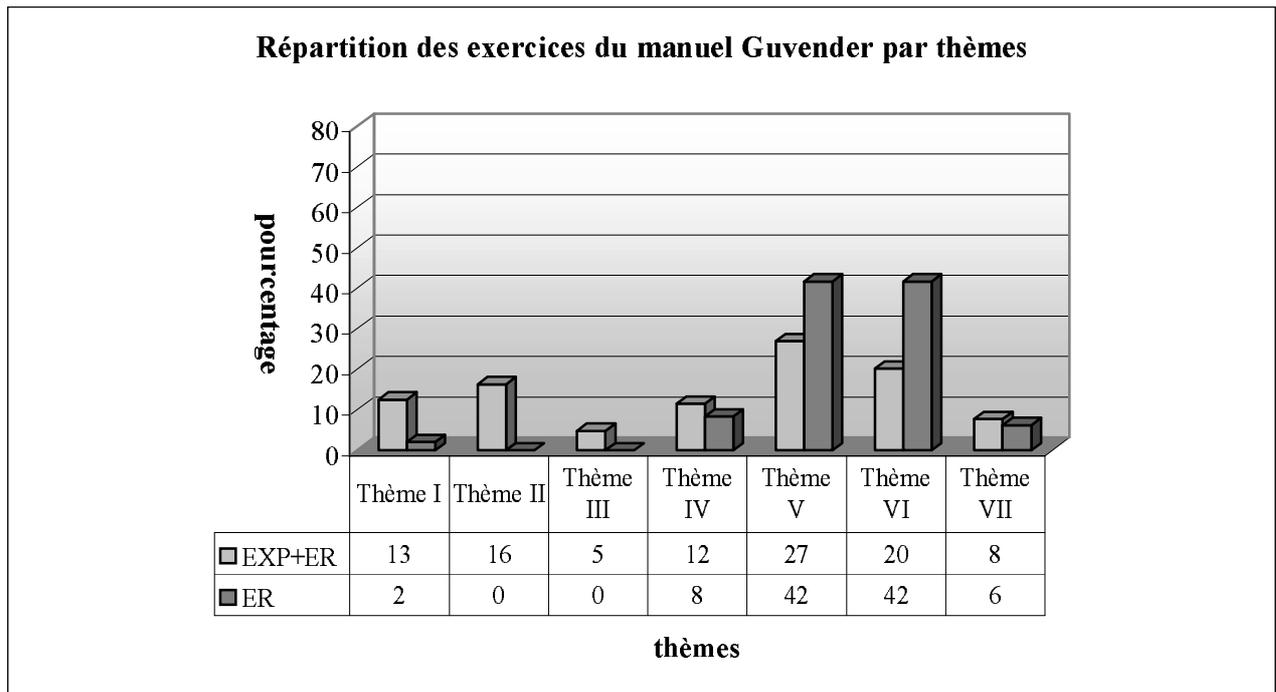
tant donné $f(\frac{2x+2}{x-3})=\frac{x+3}{x-2}$, quelle est $f^{-1}(2)$? (Test 3,exercice solution non proposée)

En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les exercices, le cadre algébrique est le cadre écrasant. Comme le montre bien le tableau suivant, 92% des exercices résolus utilisent le cadre algébrique. Le cadre analytique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles sont très peu utilisés. Quant au cadre géométrique il n'y a aucun exercice résolu (ni exemple) qui fait intervenir ce cadre. Si on prend en compte ensemble les exercices résolus et les exemples, seul le taux d'utilisation du cadre de la théorie élémentaire des ensembles change sensiblement. Et il monte de 6% à 32%. C'est dû au fait que le manuel utilise souvent ce cadre pour les représentations en diagrammes sagittal dans le cours.



CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles

Selon le tableau ci-dessous tous les thèmes qui figurent dans les questions du concours apparaissent aussi dans le manuel. Les thèmes V et VI sont les thèmes plus fréquents des exercices résolus. Le taux des exercices qui concernent directement l'inverse d'une fonction est de 8%. Par ailleurs, nous ne rencontrons les exercices liés aux propriétés particulières des fonctions et aux quatre opérations sur les fonctions que dans le cours. Dans 6% des exercices il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions. En ce qui concerne le thème I, il est le thème le plus marginal.

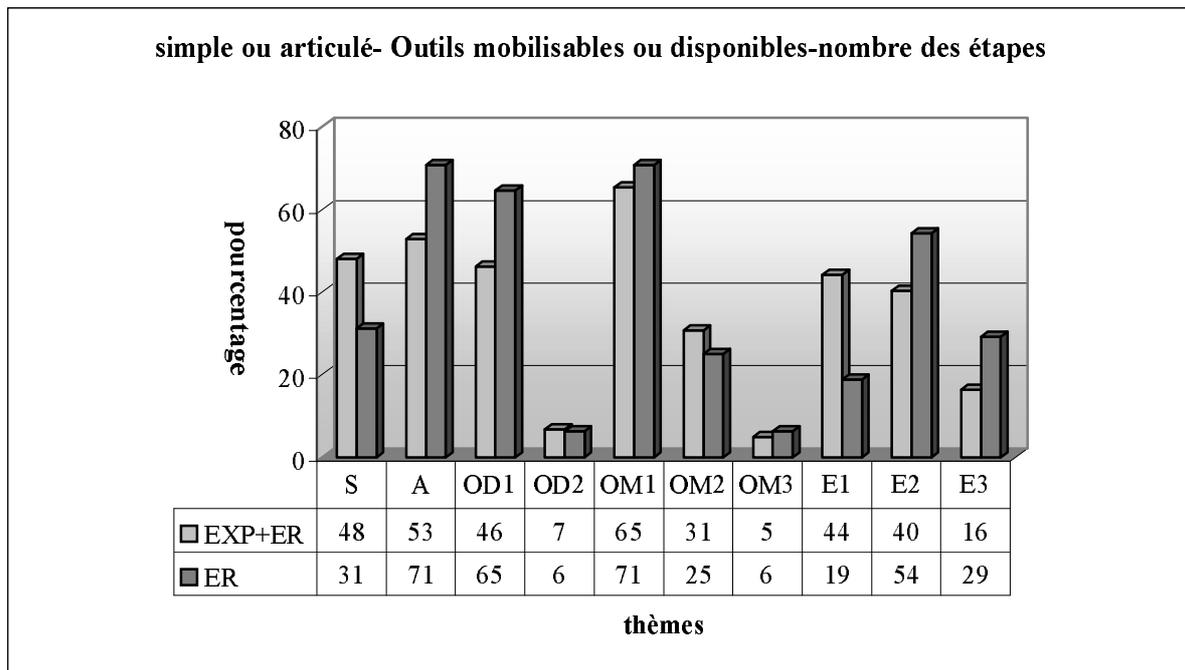


Thème I : Définition de la notion de fonction et ensembles, Thème II : Propriétés particulières des fonctions, Thème III : Quatre opérations sur les fonctions, Thème IV : Recherche de l'inverse des fonctions..., Thème V : Composition des fonctions, Thème VI : Image d'un nombre... Thème VII : Représentation graphique des fonctions..., EXP : Exemples (Effectif : 56 exemples), ER : Exercices résolus (Effectif : 48 exercices).

Comme nous l'avons déjà indiqué, la plupart des exercices relèvent du programme officiel du seconde. Mais on peut aussi trouver les exercices qui portent sur des connaissances dans le programme des classes suivantes (par exemple fonctions définies par morceaux). Par ailleurs la majorité des exercices résolus du manuel Guvender font utiliser plusieurs connaissances antérieures. De plus la résolution de bon nombre des exercices présente plusieurs étapes. Quant on regarde le tableau ci-dessous, on remarque que 71% des exercices résolus portent sur plusieurs connaissances antérieures (A : articulé). Tandis que 31% des exercices ne sont destinés qu'à mobiliser des connaissances liées directement à la notion de fonction (S : simple). Par ailleurs dans 65% des exercices l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 : un outil disponible). Ce taux descend à 6% dans les exercices résolus qui nécessitent de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : deux outils disponibles).

La plupart des exercices demandent de mobiliser une connaissance qui fait référence directe à la notion de fonction (OM1 : un outil mobilisable). Tandis que dans un quart des exercices il s'agit des deux connaissances à mobiliser (OM2 : deux outils mobilisables). Un très petit nombre conduisent l'élève à mobiliser trois connaissances liées directement à la fonction (OM3 : trois outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des exercices suivant le nombre des étapes, lors de la résolution de plus de la moitié il s'agit des deux étapes

(E2 :deux étapes). 29% présentent un travail qui ait trois étapes (E3 : trois étapes). Dans 19% des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape (E1 :une étape).



S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2, OM3 :Outil mobilisable 3, E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

5. Comparaison des analyses des manuels

Place de la notion de fonction dans les manuels

Nous constatons tout d'abord que les quatre manuels de lycée (ML) présentent la notion de fonction dans un chapitre commun avec les correspondances entre ensembles et la loi de composition interne. Le manuel de préparation au concours (MPC) Gündener se distingue de tous les manuels par le fait de consacrer un chapitre propre aux fonctions. Tandis que les manuels MPC Uğur et Zafer abordent les fonctions avec la notion de correspondance.

Par ailleurs conformément au programme les manuels ML introduisent la loi de composition interne et ses propriétés avant passer à la composition des fonctions. Mais dans les manuels MPC elle est présentée, après les fonctions, dans un chapitre différent.

Activités introductrices

Comme il n'y a aucune indication dans le programme officiel de la classe de seconde pour l'introduction des fonctions, dans tous les manuels (surtout les manuels ML), nous ne trouvons aucune activité introductive. Ainsi le manuel ML Altın commence directement par le cours comme les manuels MPC. Les manuels ML Tutibay et officiel conseillent d'abord de se rappeler la notion de correspondance et ensuite ils mettent en évidence la relation entre les correspondances et les fonctions en énonçant « toute correspondance n'est pas une fonction. Et les fonctions sont des correspondances particulières ». En ce qui concerne le manuel ML Aydın, il parle d'abord de la relation entre les fonctions et les correspondances comme les manuels ML Tutibay et officiel. Mais il se distingue sensiblement de tous les manuels par la mise en cause de l'utilisation différente du mot « fonction » dans la vie courante et en mathématiques. De plus ce manuel propose aussi un exemple grâce auquel la comptine C_0 est utilisée. Il est cependant difficile de considérer cette activité comme une activité introductive.

Introduction de la notion de fonction

Bien que le programme n'indique pas la façon de définir «les fonctions », tous les manuels n'utilisent que la définition ensembliste de la notion de fonction. Mais seuls le manuel ML Tutibay et le manuel MPC Zafer parlent très brièvement du sens des fonctions en terme de variable en citant qu'à partir de la notation $y=f(x)$ y est appelé variable dépendante et x variable indépendante.

En ce qui concerne la comptine C_0 , elle est présente presque dans tous les manuels mais de manière différente. Par exemple les manuels MPC qualifient cette comptine d'une remarque.

Dans le manuel officiel elle n'est pas explicitement introduite. Mais l'élève est amené à reconnaître les fonctions à partir d'exemples en les faisant fonctionner. Le manuel ML Tutibay la propose comme un résultat de la définition ensembliste et d'un exemple. Tandis que dans le manuel Altın elle apparaît comme une mise en garde. Aydın la met en fonctionnement trois fois dans la même page: à partir d'exemple introductrice, dans la définition et dans l'écriture symbolique de la définition.

Notions qui apparaissent dans le programme officiel de la classe de seconde abordées par les manuels

Nous constatons que toutes les notions qui apparaissent dans le programme de la classe de seconde sont abordées par tous les manuels. Comme les manuels MPC sont utilisés par tous les élèves (surtout les élèves de terminale), nous pouvons y trouver des notions qui relèvent du programme des classes suivantes. Ainsi certaines propriétés particulières des fonctions comme les fonctions injectives, surjectives, non-surjectives, bijectives et certaines fonctions particulières comme la fonction identique, les fonctions constantes et les fonctions nulles sont mises en place dans les manuels ML et MPC. Par ailleurs les manuels MPC se différencient par la mise en place de notions qui appartiennent aux classes suivantes. Par exemple les fonctions de permutation qui sont dans le programme de la classe de première sont présentes dans les manuels Zafer et Uğur. Les fonctions paires ou impaires et les quatre opérations sur les fonctions qui relèvent du programme de terminale sont abordées par Gündener et Zafer.

Il y a une autre diversité entre les manuels sur la présentation des formules qui servent à calculer le nombre des correspondances définies de A vers B (A et B sous-ensembles finis et discrets) qui sont des fonctions ou n'en sont pas, des fonctions injectives, bijectives... etc. Dans le programme de seconde il n'y a aucune indication qui concerne ce type de travaux. Malgré cela les manuels ML Altın et officiel donnent presque toutes les formules dans des exercices résolus sans commentaire. Ainsi l'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercices et de formules et il est amené à les appliquer simplement. Le manuel ML Aydın ne propose, comme point de méthode pour un exemple, que la formule qui sert à calculer le nombre des correspondances définies de A vers B qui sont des fonctions. Tandis que dans le manuel ML Tutibay il n'y a aucune formule. En ce qui concerne les manuels MPC, Gündener propose seulement la formule dont l'élève se servira pour calculer le nombre des fonctions comme dans le manuel Aydın sous une rubrique spéciale. Dans le manuel Zafer l'élève rencontre les formules qui concernent le nombre des fonctions, des fonctions injectives, bijectives et nulles dans les exercices résolus comme dans les manuels ML Altın et officiel.

Uğur présente aussi la plupart des formules même celles qui servent à trouver le nombre des fonctions de permutation ou non permutation sous une rubrique spéciale.

En ce qui concerne l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence qui est indiquée et illustrée avec un exemple par le programme, dans les manuels MPC nous ne la trouvons pas, pas plus que les ensembles finis ou infinis ni les ensembles équipotents. Il est très intéressant que le manuel officiel ne mette pas non plus en place cette utilisation de la bijectivité. Et il se contente de présenter la définition des ensembles infinis et des ensembles équipotents. Les autres manuels ML font fonctionner la bijectivité pour démontrer le caractère infini de l'ensemble des nombres naturels.

Méthodes privilégiées pour trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement : méthode $M_{x^f y}$ et recette R_a

Les manuels ML présentent une grande diversité quant aux méthodes privilégiées pour trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement. Ainsi, dans le manuel officiel nous pouvons trouver les deux méthodes : méthode $M_{x^f y}$ et recette R_a . Pour tous les exercices (à part un seul exercice) qui figurent dans le cours la première est utilisée. Dès que la deuxième est implicitement introduite dans des exemples comme une deuxième méthode. La méthode $M_{x^f y}$ n'est plus utilisée. Altın privilégie une seule méthode. C'est la méthode $M_{x^f y}$. Nous ne rencontrons la recette R_a ni dans le cours ni dans les exercices résolus. Comme le manuel officiel, le manuel Aydın utilise les deux méthodes. Mais ce manuel se différencie des autres manuels par l'attribution d'un titre à la recette R_a dans le cours. Ainsi après avoir traité quelques exemples avec la méthode $M_{x^f y}$, la recette R_a est introduite sous le titre « trouver l'inverse de certaines fonctions par des démarches courtes ». Ensuite la méthode plus mathématisée n'est plus jamais reprise. Dans le manuel Tutibay les deux méthodes sont présentes. La méthode $M_{x^f y}$ est toujours utilisée. Quant à la recette R_a elle est présentée dans un seul exercice. Et elle n'est jamais mise en fonctionnement.

Dans les manuels MPC il y a une grande homogénéité à ce propos. Ainsi Gündener introduit d'abord $M_{x^f y}$ sous une rubrique. Elle est utilisée une seule fois pour une fonction qui peut relever aussi de la recette R_a et à chaque fois pour les fonctions qui n'en relèvent pas. A part cela, R_a est la seule méthode privilégiée. Dans les collections Zafer et Uğur la méthode $M_{x^f y}$ est d'abord mise en place grâce à une remarque. Et elle n'est mobilisée que pour deux fonctions pour lesquelles on peut utiliser aussi R_a . A part pour les fonctions pour lesquelles l'utilisation de $M_{x^f y}$ est indispensable (par exemple les fonctions exponentielles), c'est toujours R_a qui est utilisé comme dans le manuel Gündener.

Enoncé simple des points essentiels des connaissances qui servent directement à résoudre des exercices

Les manuels MPC se distinguent des manuels ML (à part Tutibay) en donnant sans commentaire des points essentiels des connaissances qui servent directement à résoudre des exercices. Les manuels Uğur et Zafer sont les manuels MPC qui proposent le plus de remarques. Ainsi nous trouvons treize remarques dans le manuel Zafer et dix dans le manuel Uğur. De plus ces remarques sont très semblables. Par exemple dans une remarque la formule générale des fonctions affines est tout à coup introduite. Ensuite l'élève est amené à résoudre un exercice dans lequel l'utilisation de cette formule est mise en jeu.

Le manuel Tutibay se différencie des autres manuels ML par la mise en place de ce genre de remarques. Les remarques qui figurent dans ce manuel s'intensifient lors de la recherche des propriétés des fonctions à partir de leur représentation graphique dans un repère orthonormé.

Utilisation de la notion de fonction dans les manuels d'un point de vue outil et objet

En général dans tous les manuels la notion de fonction est présentée comme un objet. A part l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence dans les manuels Tutibay, Altın et Aydın, dans tous les manuels nous ne rencontrons aucune situation ni exercice dans lesquels les fonctions sont utilisées comme un outil.

Exercices résolus

Les manuels ML se distinguent par la place des exercices résolus. Ainsi le manuel Tutibay ne poursuit pas un ordre traditionnel (cours-exercices résolus). Tous les exercices résolus sont proposés dans le cours. Après avoir présenté une notion, cinq ou six exemples (ou exercices résolus) peuvent figurer dans ce manuel. Dans le manuel Altın les exercices résolus se sont présentés en deux parties sous le titre « applications ». La première partie se trouve avant la notion de fonction inverse et la composition des fonctions. Quant à la deuxième partie, elle figure au bout du chapitre. Les exercices résolus du manuel Aydın se décomposent en trois parties. La première partie qui figure à la suite de la composition des fonctions et l'inverse d'une fonction est proposée sous le titre « Exercices divers ». La deuxième partie est intitulée « trouver f [ou g] lorsqu'on a donné la composée $f \circ g$ et g [ou f] ». Dans cette partie il y a ainsi des exercices concernant la décomposition des fonctions. En ce qui concerne la dernière partie, elle est intitulée « test résolu ». Il y a des exercices à choix multiple. Ainsi le manuel

Aydın se distingue des autres manuels LM⁵⁶ et se rapproche des manuels MPC en proposant des exercices résolus en forme de QCM. Dans le manuel officiel la plupart des exercices résolus sont mis en place à la fin du chapitre. Mais il se rapproche beaucoup des autres par le fait de proposer des exercices résolus dans le cours qui ne correspondent pas directement aux notions qui les précèdent.

En ce qui concerne les manuels MPC, ils présentent une homogénéité. Les exercices résolus sont mis en place généralement à la fin du chapitre sous forme de QCM. Mais il y a aussi certains exercices qui figurent dans le cours. Mais ces exercices ne font pas référence directe aux notions qui les précèdent.

Thèmes qui apparaissent dans les exercices résolus des manuels

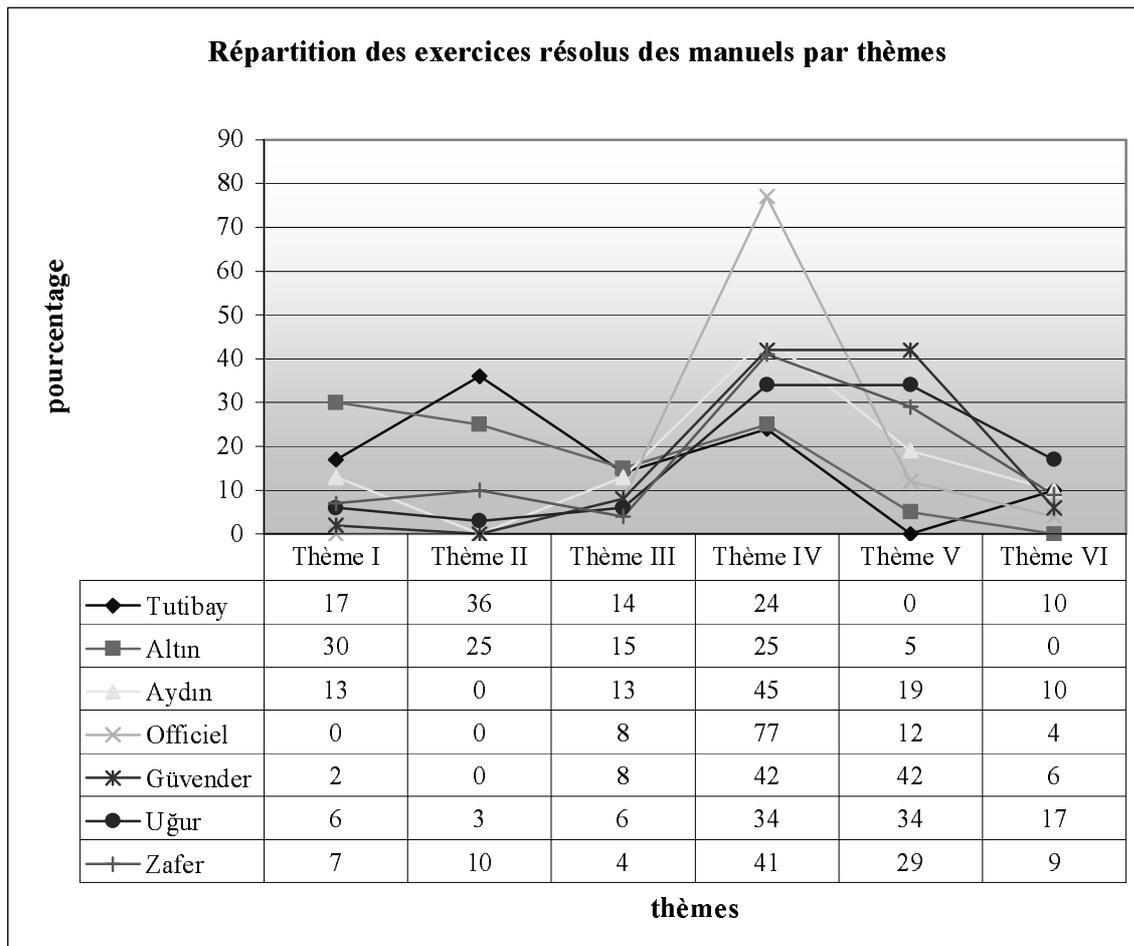
Selon les thèmes il y a certains manuels ML qui s'approchent des manuels MPC et il y a aussi certains manuels MPC qui s'approchent des manuels ML. Comme le montre bien le tableau ci-dessous, les exercices qui font utiliser la définition ensembliste des fonctions (thème I) sont plus fréquents dans les manuels LM, à l'exception du manuel officiel, que dans les manuels MPC. Les manuels se rapprochent beaucoup par le taux d'exercices portant sur la recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement (thème III). Comme le thème V est un des thèmes les plus fréquents des questions du concours, le taux correspondant pour les manuels ML montre aussi très bien le degré de l'influence du concours sur ces manuels. En revanche ce type d'exercices est totalement absent dans le manuel Tutibay. Et dans le manuel Altın il n'y a que 5% des exercices à ce thème. Tandis que les manuels officiel et Aydın font travailler les élèves sur ce thème respectivement dans 12% et 19% des exercices.

Pour le thème IV dans tous les manuels on trouve un taux assez élevé. Les manuels Tutibay et Altın se distinguent des autres manuels par le taux le moins élevé. Au contraire le manuel officiel se distingue par le taux plus élevé.

En ce qui concerne le thème VI, il est l'un des thèmes les plus marginaux des exercices pour la plupart des manuels. De plus les manuels ML et MPC ne présentent pas d'homogénéité. Ainsi dans le manuel Altın il n'y a aucun exercice dans lequel il est nécessaire de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé. Tandis que les manuels Tutibay et Aydın en proposent 10% et le manuel officiel 4%. Par ailleurs Gündener et Zafer ne mettent en place respectivement que 6% et 9% des exercices à ce thème. Alors qu'il y a 17% des exercices dans le manuel Uğur.

⁵⁶ En effet à l'exception du manuel Altın les autres manuels LM proposent à la fin du chapitre des tests qui contiennent des exercices en forme de QCM. Mais ils ne sont pas corrigés.

Le thème II nous amène aussi à voir la différence entre les manuels ML par rapport à l'intérêt du concours comme pour le thème V. Ainsi il n'y a aucun exercice dans lequel il s'agit de travailler sur les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (thème II) dans les manuels Aydın, officiel et Gündener. Par contre les manuels Tutibay, Altın et Zafer en proposent respectivement 36%, 25% et 10%. Un très petit nombre des exercices du manuel Uğur relèvent du thème II.



Thème I : Définition de la notion de fonction et ensembles, Thème II : Propriétés particulières des fonctions, Thème III : Recherche de l'inverse des fonctions..., Thème IV : Composition des fonctions, Thème V : Image d'un nombre... Thème VI : Représentation graphique des fonctions (Effectif des exercices Tutibay : 42 exercices, Altın : 20 exercices, Aydın : 31 exercices, Officiel : 26 exercices, Gündener : 48 exercices, Uğur : 65 exercices, Zafer : 69 exercices)

Présentation des questions du concours et répétition du même type d'exercices

Nous constatons que dans les manuels MPC on peut trouver la plupart des questions du concours ou des questions ressemblantes. De plus le même type d'exercices est répété plusieurs fois. Comme nous l'avons déjà dit, dans le cours ces manuels (et manuel officiel) proposent certains exercices qui ne font pas référence directe aux notions qui les précèdent.

Cela signifie que pour ce type de manuels le but primordial est de présenter le type de questions du concours et d'entraîner les élèves.

En ce qui concerne les manuels ML, nous pouvons aussi trouver certains types de questions du concours mais pas autant que dans les manuels MPC. La répétition des mêmes types d'exercices n'est pas non plus évidente.

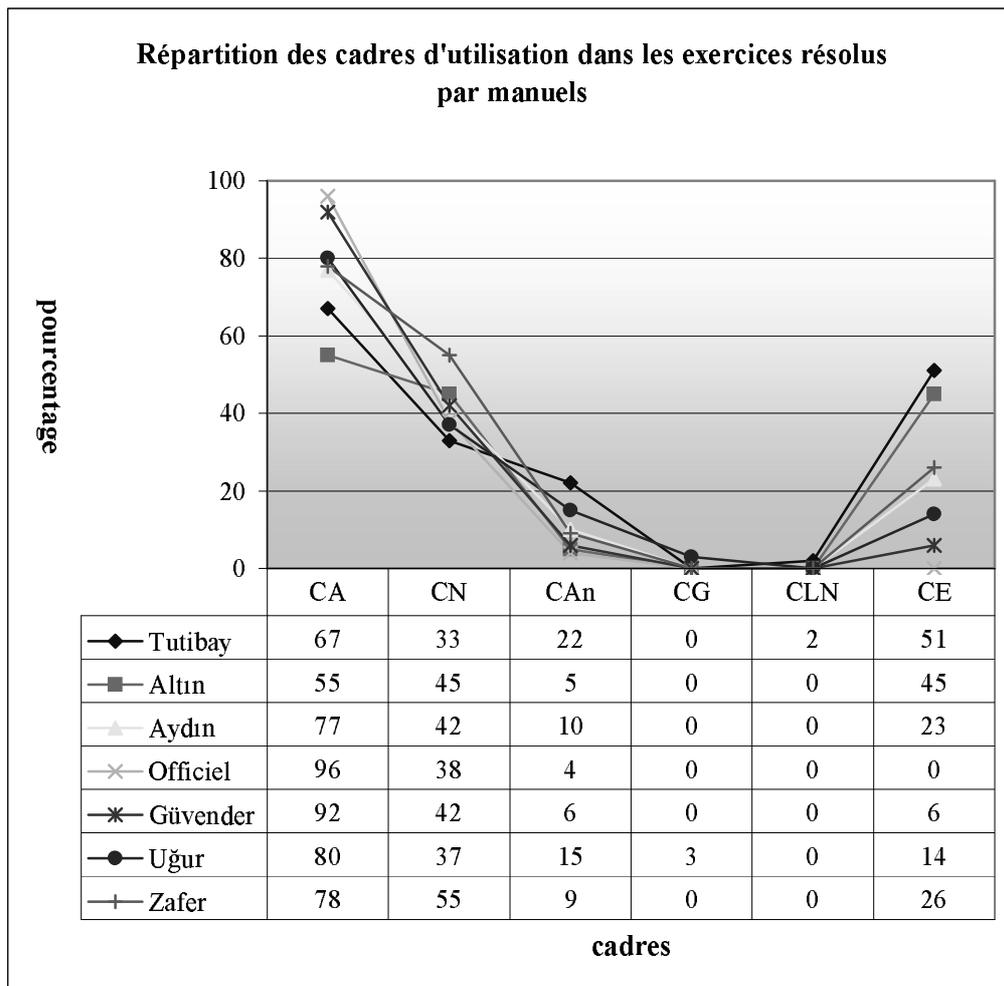
Cadres d'utilisations dans les exercices résolus

Le tableau suivant montre qu'il y a une grande homogénéité dans tous les manuels en ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les exercices résolus. On peut d'emblée dire que les manuels sont algébriquement très riches et géométriquement très pauvres.

Ainsi le cadre algébrique est le cadre « écrasant » dans tous les manuels. Son taux varie de 55% à 96%. Les manuels Gündener et officiel sont les manuels les plus algébriques avec un taux supérieur à 90%. À l'exception du manuel Uğur il n'y a aucun manuel qui propose des exercices dans lesquels le cadre géométrique est utilisé. Par ailleurs le cadre de la langue naturelle n'est réservé qu'au manuel Tutibay avec un taux très bas.

En ce qui concerne le cadre analytique, il est aussi un des cadres moins utilisés dans les manuels. Il n'y a pas de stabilité selon les groupes de manuels. Le manuel Tutibay se distingue à nouveau des autres manuels par un taux plus élevé. Ainsi il fait travailler les élèves dans 22% des exercices dans le cadre analytique. Ce taux descend un petit peu dans le manuel Uğur. Gündener, officiel et Altın se rapprochent par une utilisation rare de ce cadre. Zafer et Aydın proposent presque 10% des exercices dont la résolution se fait dans ce cadre.

Pour l'utilisation du cadre de la théorie élémentaire des ensembles, ni les manuels ML et ni les manuels MPC ne sont très homogènes. Ainsi dans les manuels Zafer, Uğur et Gündener le taux des exercices où il s'agit d'utiliser ce cadre est respectivement de 26%, 14% et 6%. Le manuel officiel est le seul manuel dans lequel ce cadre est totalement absent. Tandis qu'environ la moitié des exercices des manuels Tutibay et Altın et 23% du manuel Aydın font fonctionner ce cadre. Si l'on excepte le manuel Zafer et officiel, on peut dire que les manuels ML sont plus ensemblistes que les manuels MPC.



CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CAn :Cadre Analytique, CG :Cadre Géométrique, CLN :Cadre de la Langue Naturelle, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des ensembles (Effectif des exercices Tutibay :42 exercices, Altın :20 exercices, Aydın :31 exercices, Officiel :26 exercices, Gündender :48 exercices, Uğur :65 exercices, Zafer :69 exercices)

Méthodes privilégiées pour décomposer les fonctions (décomposer ou résoudre une équation)

Nous rencontrons une situation qui ressemble à celle de la recette R_a dans la « décomposition » des fonctions. Lorsqu'il s'agit de « décomposer » une fonction (fog) en utilisant f, sans mettre en fonctionnement la décomposition, l'élève est à chaque fois conduit à obtenir une équation et à calculer la fonction demandée en fonction de x. Ainsi la décomposition se ramène à une résolution d'équations. Ce type de solution apparaît comme une solution proposée systématiquement dans les manuels Gündender, Uğur et comme une deuxième solution dans le manuel Zafer. En ce qui concerne les manuels ML, dans Tutibay et Altın nous ne rencontrons pas cette solution. Tandis que le manuel officiel la propose systématiquement comme Gündender et le manuel Aydın se rapproche du manuel Zafer par la mise en place de cette solution comme une deuxième méthode.

Par ailleurs comme la « décomposée implicite » est un des thèmes les plus fréquents des questions du concours, elle est aussi très fréquente dans les manuels MPC. En ce qui concerne les manuels ML, dans les manuels officiel, Altın et Aydın on essaie systématiquement d'habituer les élèves à la décomposée (implicite). Même s'il s'agit d'une décomposée normale⁵⁷, l'élève est à chaque fois amené à la mettre sous forme de décomposée (implicite). Dans le manuel Tutibay nous ne rencontrons pas ce type de solution.

Exercices qui sont illustrés par les notions relevant du programme des classes suivantes

Le but principal des manuels MPC est de préparer les élèves au concours. C'est pourquoi il est normal qu'ils proposent des exercices illustrés par des notions du programme des classes de première et terminale. Mais nous trouvons aussi ce type d'exercices dans les manuels ML. Par exemple les fonctions polynômes définies par morceaux qui relèvent du programme de terminale figurent dans les exercices résolus des manuels officiel et Aydın. Tutibay et Aydın proposent un exercice dans lequel il s'agit de la recherche de l'intervalle de définition le plus large d'une fonction rationnelle qui appartient aussi au programme de terminale. L'égalité des polynômes et la résolution d'équations exponentielles très particulières sont ultérieurement introduites dans les chapitres suivants en seconde. Mais elles sont utilisées par les manuels officiel et Aydın. L'élève rencontre pour la première fois les fonctions affines sur lesquelles il n'y a aucune indication dans le programme de seconde dans un exercice du manuel Aydın. La méthode du changement de variable est mise en fonctionnement dans les classes ultérieures. Malgré cela le manuel officiel propose des exercices dans lesquels cette méthode est utilisée.

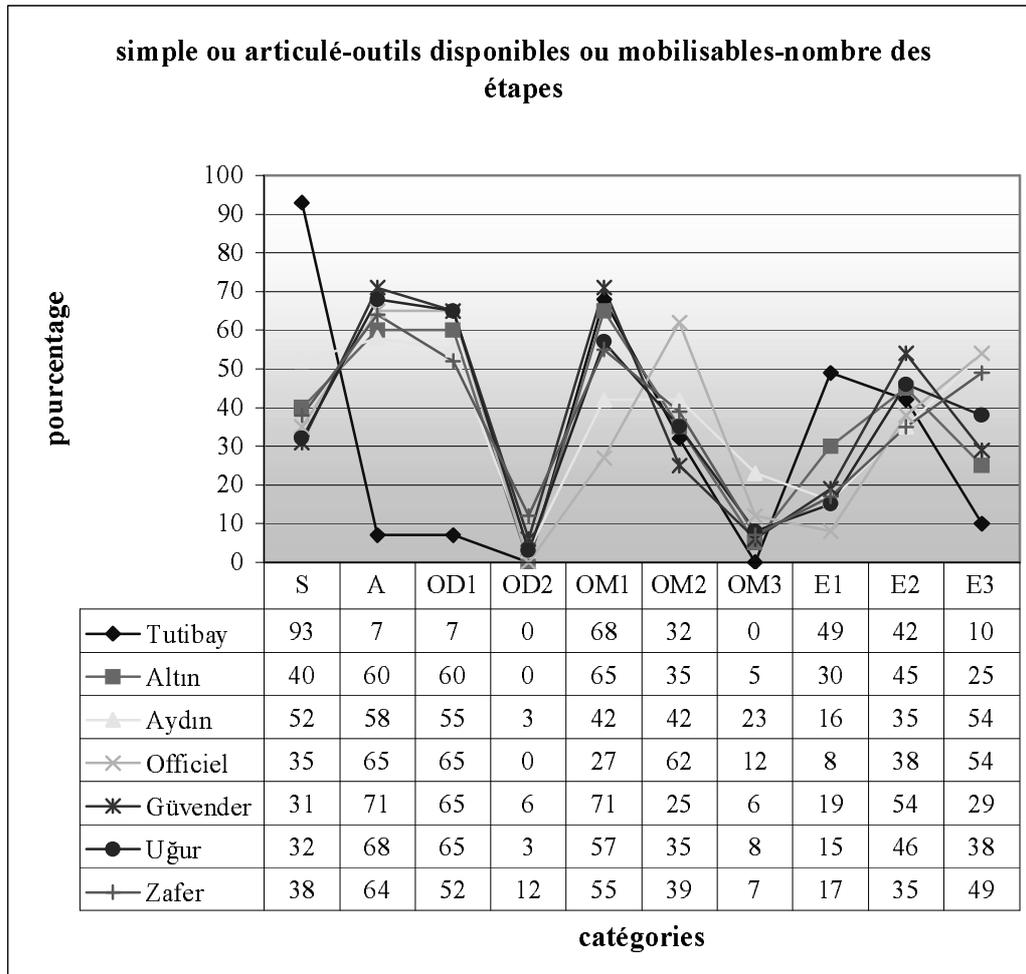
Simple ou articulé-outils disponibles ou mobilisables-nombre d'étapes

Le tableau ci-dessous montre qu'à part Tutibay les manuels présentent une grande homogénéité en ce qui concerne le contenu des exercices. Le manuel Tutibay est le manuel le plus simple. Dans 93% des exercices de ce manuel l'élève ne doit utiliser que des connaissances qui font référence directe à la notion de fonction. Par contre Gündener est le manuel le plus complexe. Ainsi il propose 71% des exercices dans lesquels l'élève doit se servir de connaissances antérieures. A l'exception du manuel officiel les manuels MPC

⁵⁷ Lorsqu'on donne la composée comme la suite $g \circ f(x) = 3x + 2$ et l'une des fonctions $f(x) = 2x + 1$, on demande de trouver l'autre fonction. On conduit l'élève à écrire $g(2x + 1) = 3x + 2$ pour obtenir une composée implicite. Dans la résolution on demande de trouver d'abord l'inverse de $ax + b$ et ensuite le mettre à la place de x dans $f(ax + b) = dx + c$. Mais ce type de solution ne permet pas à l'élève de reconnaître qu'il s'agit d'une décomposée, $ax + b$ est une fonction et on utilise aussi ici la définition de la fonction identique.

proposent plus d'exercices portant sur plusieurs connaissances antérieures que les manuels ML.

En ce qui concerne le nombre des outils disponibles, il est très intéressant de constater que dans les trois manuels officiel, Gvender et Uğur le taux des exercices qui demandent d'utiliser un seul outil disponible soit identique (65%).



Si l'on ne prend pas en compte 3% des exercices du manuel Aydın, il n'y a aucun manuel ML qui propose des exercices dans lesquels il est nécessaire d'utiliser deux outils disponibles. En ce qui concerne les manuels MPC, Zafer se distingue des autres par le taux le plus élevé. Ainsi dans ce manuel 12% des exercices font utiliser deux outils disponibles contre 6% dans Gvender et 3% dans Uğur.

Par ailleurs dans les manuels officiel et Aydın la plupart des exercices demandent de mobiliser plusieurs connaissances qui font référence directe   la notion de fonction (OM2+OM3). Cette fois-ci Tutibay et Altın se reprochent des manuels MPC par le taux le moins élevé. Ainsi le taux de ce type d'exercices est respectivement de 31%, 43% et 46%

dans les manuels Gündener, Uğur et Zafer contre 32% dans le manuel Tutibay et 40% dans le manuel Altın.

Quant au nombre des étapes dans les exercices résolus, les manuels Tutibay et Altın se distinguent des autres manuels par un taux moins élevé d'exercices dans lesquels l'élève doit passer par plusieurs étapes pour arriver à la bonne réponse. Les manuels MPC présentent une grande homogénéité à ce propos. Ainsi il y a environ 84% des exercices de ce type dans ces manuels. Il est très intéressant que dans le manuel officiel seuls 8% des exercices puissent être résolus en un seule étapes.

6. Conclusion

Après avoir analysé les manuels, nous avons remarqué que les manuels se repartent en trois catégories différentes en ce qui concerne l'enjeu de la préparation au concours : manuels ML loin du concours, manuels ML très proche du concours et manuels MPC. Tutibay et Altın sont les manuels qui sont dans la première catégories. Dans ces manuels l'influence du concours n'est pas très forte. Il est très rarement possible de trouver des questions du concours ou des questions ressemblant et tous les thèmes des questions du concours. Dans ces manuels la recette R_a n'est pas proposée (ou très implicitement dans quelques exercices). En ce qui concerne les manuels ML très proche du concours, dans ces manuels l'influence du concours est très forte. Dans certains cas ils se rapprochent des manuels MPC. Par exemple ils essaient d'habituer systématiquement les élèves à des types de questions du concours (composée implicite par exemple). On peut ainsi trouver certaines questions du concours ou des questions ressemblant. La recette R_a est introduite et la seule méthode utilisée dans les exercices résolus. En ce qui concerne la dernière catégorie, c'est les manuels MPC. Ils sont les manuels qui consistent à préparer au concours. Il est tout à fait possible de trouver toutes les questions du concours, ou ressemblant et tous les thèmes des questions du concours.

Par ailleurs, dans tous les manuels les fonctions sont introduites à partir de leur définitions ensembliste. Il n'y a pas d'autres définitions. Mais dans certains manuels (un manuel ML et un manuel MPC) on trouve très brièvement le sens des fonctions en terme de variable.

Les manuels MPC proposent plus de remarques dans lesquelles des connaissances essentielles dont l'élève se servira pour résoudre des exercices sont introduites. Comme nous l'avons déjà dit, dans ces manuels on peut trouver aussi presque toutes les questions du concours ou des questions ressemblantes. De plus ils proposent, dans le cours, des exercices résolus (bien sûr la plupart de ces exercices sont des questions du concours) qui ne font pas référence directe

aux notions qui les précèdent. Tout cela nous amène à conclure que l'objectif principal de ce type de manuel est de rappeler des connaissances essentielles ou antérieures des élèves, de présenter les types de questions du concours.

L'intérêt du concours conduit les manuels ML, surtout les manuels de la deuxième catégorie, à ne pas respecter, dans les exercices résolus, le programme de la classe de seconde. Ainsi on peut trouver des exercices illustrés par des notions du programme des classes suivantes (les fonctions polynômes définies par morceaux, la recherche de l'intervalle de définition le plus large des fonctions rationnelles par exemple) ou des notions du programme de seconde qui sont introduites ultérieurement (l'égalité des polynômes, la résolution d'équations exponentielles très particulières) ou des notions pas indiquées par le programme de seconde (les fonctions affines, le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par exemple). Ainsi l'élève peut rencontrer pour la première fois certaines notions dans les exercices résolus.

Par ailleurs, les manuels MPC proposent beaucoup plus d'exercices de même type que les manuels ML. Cela montre l'autre objectif de ces manuels qui consiste à entraîner des élèves et à leur faire acquérir un automatisme en les faisant travailler dans des mêmes types d'exercice.

Comme il n'y a aucune question du concours dans laquelle la notion de fonction paraît comme un outil, dans les manuels MPC on ne trouve aucune situation (comme l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence suggérée par le programme de seconde) ni aucun exercice dans lesquels les fonctions sont utilisées comme outils. En ce qui concerne les manuels ML, à l'exception du manuel officiel, ils font utiliser la bijectivité comme un outil pour démontrer l'équipotence en proposant l'exemple indiqué par le programme. A part cela, la notion de fonction n'est jamais utilisée comme un outil. De plus comme nous l'avons déjà vu, les questions du concours sont très courtes et il n'y a pas de vrais problèmes. C'est pourquoi on ne trouve pas non plus de ce type de problèmes dans les manuels MPC. Il est cependant très intéressant de constater que c'est aussi valable pour les manuels ML.

Dans tous les manuels le cadre algébrique est le cadre « écrasant ». Et le taux d'utilisation de ce cadre atteint jusqu'à 98%. De plus le cadre géométrie analytique et géométrie sont les cadres les moins utilisés. Donc on peut dire que les manuels sont très algébriques et moins géométriques. Le changement de cadre est ainsi très rare.

La plupart des manuels (à part Tutibay) proposent majoritairement des exercices qui portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves. De plus ces exercices demandent à l'élève de passer par plusieurs étapes.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES THEMES DU CONCOURS D'ENTREE

A L'UNIVERSITE (CEU) EN TURQUIE

Plan du chapitre IV :

1. <i>Thèmes du concours de 1970 à 2003 sur les fonctions du programme de seconde</i>	117
1.1 Thème I : définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondant.....	118
1.2 Thème II : recherche de l'inverse à partir d'une fonction algébrique.....	119
1.3 Thème III : composition des fonctions.....	120
1.4 Thème IV : image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique.....	123
1.5 Thème V : représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	125
2. <i>Synthèse</i>	126
3. <i>Conclusion</i>	132

Dans cette partie, nous allons analyser les thèmes du concours national d'entrée à l'université en Turquie de l'année 1970 jusqu'à présent. Comme nous voulons montrer le non-renouvellement des types de questions proposées, nous avons choisi cette longue période.

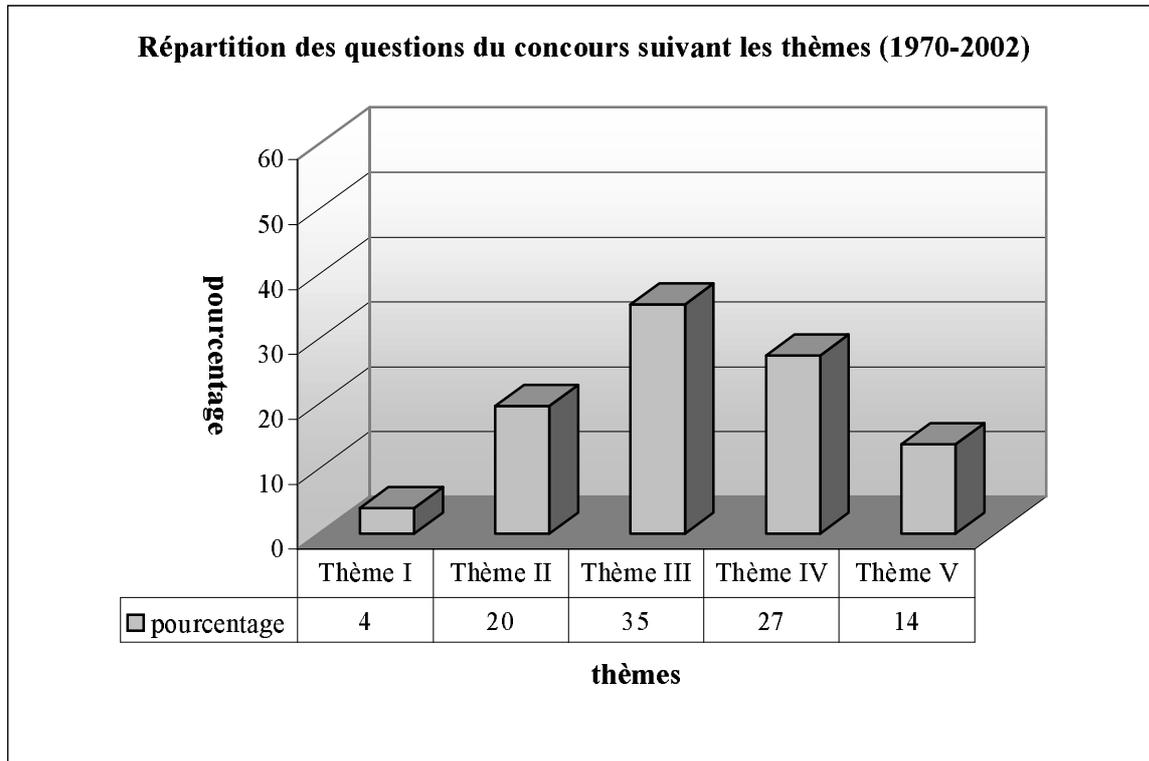
Nous repérons ce qui est attendu de la part des élèves par les institutions qui ont posé les sujets de concours. Cela permet de comparer avec les attentes des institutions qui ont mis en place l'enseignement de la fonction à travers les programmes et manuels de lycée. En particulier, pour chaque question, nous précisons les connaissances qui sont en jeu, en analysant la tâche prescrite et en étudiant par exemple l'autonomie des élèves.

1. Thèmes du concours de 1970 à 2003 sur les fonctions du programme de seconde

Nous trouvons cinq thèmes principaux dans les annales du concours (sujets proposés lors des épreuves de l'année 1970-2003) : définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondants (thème I), recherche de l'inverse à partir d'une fonction définie algébrique (thème II), composition des fonctions à partir des définitions ensemblistes (thème III), image d'un nombre réel ou d'une expression par une fonction définie algébriquement (thème IV) et représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème V).

Le tableau suivant montre la répartition des questions du concours de 1970 à 2003 suivant les thèmes. Ainsi les questions qui font travailler sur la composition des fonctions sont les questions les plus fréquentes du concours (thème III). Elles sont suivies des questions qui demandent de calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression par une fonction définie algébriquement avec un taux de 27% (thème IV). Il y a 20% des questions dans lesquelles

l'élève est amené à chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement (thème II), tandis que dans seulement 12% des questions il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème VI). Le thème I est le thème le plus marginal du concours.



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant, Thème II : Recherche de l'inverse à partir d'une fonction algébrique, Thème III : Composition des fonctions, Thème IV : Image d'un nombre réel ou une expression par une fonction définie algébriquement, Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (effectif : 51 questions)

1.1 Thème I : Définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondant (2 questions)

Dans la question (Question n° 8/Année 1974⁵⁸) il s'agit de travailler sur des correspondances définies de la manière ensembliste. L'élève doit repérer parmi ces correspondances celle qui est une fonction. C'est donc l'utilisation de la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine C_0). Ainsi l'élève doit à la fois étudier s'il y a des éléments « vacants » et s'il y a des éléments qui ont plus d'une image dans l'ensemble de définition des correspondances proposées. Rappelons que c'est le cadre de la théorie élémentaire des ensembles qui est le cadre du travail.

⁵⁸ Voir Annexe II.

Dans la question (Q9/1976) on demande de trouver l'ensemble d'arrivée d'une fonction du premier degré définie sur l'ensemble des nombres pairs. L'élève peut utiliser directement l'expression générale des nombres pairs ($2n$) ou expérimenter numériquement. Les connaissances antérieures auxquelles l'élève doit faire appel sont donc liées aux ensembles des nombres pairs et impairs.

1.2 Thème II : Recherche de l'inverse à partir d'une fonction algébrique (10 questions)

Nous pouvons classer les questions en trois catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) Travail sur la formule algébrique de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (6 questions) : dans la question (Q1/1970) il s'agit de déterminer la formule algébrique de l'inverse d'une fonction affine, dans les questions (Q7/1973, Q11/1976 et Q41/1997) de déterminer la formule algébrique de l'inverse d'une fonction rationnelle, dans la question (Q46/1998) de chercher l'inverse d'une fonction du second degré. Dans la question (Q41/1997) la fonction f est donnée par $x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)}$. L'élève doit d'abord calculer la fonction

f en fonction de x et ensuite trouver son inverse. La question invite cependant l'élève à s'apercevoir qu'il ne lui reste qu'à faire la dernière étape de la résolution à partir de la méthode M_{xy} . Ainsi l'élève peut facilement trouver l'inverse de la fonction en utilisant la définition ensembliste de la fonction inverse ($f(x)=y \Rightarrow x=f^{-1}(y)$). Dans la question (Q46/1998) une identité remarquable et la relation entre racine carrée et valeur absolue dont l'élève doit se servir sont les outils supposés disponibles. La question (Q16/1981) fait trouver la valeur a si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow f(x) = \frac{-2x}{x+a}$ et $f(x) = f^{-1}(x)$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de f . Ensuite il doit utiliser l'égalité des polynômes.

ii) Recherche de l'intervalle de définition (2 questions) : dans la question (Q44/1998) on demande de définir l'ensemble d'arrivée d'une fonction rationnelle. L'élève doit trouver l'inverse de la fonction. Ensuite il doit trouver pour quelle valeur le dénominateur est nul.

La question (Q43/1997) fait trouver le couple (a,b) dans le cas où la fonction f bijective est définie de $\mathbb{R}-\{2\}$ vers $\mathbb{R}-\{3\}$ par $f(x) = \frac{ax-4}{3x-b}$. L'élève doit prendre en compte que pour $x=2$ le dénominateur de la fonction f est nul et pour $x=3$ le dénominateur de son inverse nul. Ces deux questions relèvent du programme officiel de la classe de terminale.

iii) Existence d'une inverse (2 questions) : il s'agit d'utiliser la relation entre bijectivité et fonction inverse. Dans la question (Q25/1988) l'élève doit déterminer laquelle a une fonction

inverse parmi des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. Alors il s'agit d'une question qui renvoie l'élève aux choix. L'élève doit étudier la bijectivité des fonctions proposées en sachant qu'une fonction doit être bijective pour avoir un inverse. La question (Q3/1971) fait déterminer quelle est la fonction dont l'inverse n'est pas une fonction parmi des fonctions définies algébriquement. En connaissant la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions, l'élève doit chercher si les fonctions proposées sont bijectives.

1.3 Thème III : Composition des fonctions (18 questions)

Nous pouvons classer les questions en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (8 questions) : il y a cinq questions dans lesquelles on demande de composer deux fonctions définies algébriquement. Dans la question (Q4/1971) il est nécessaire de composer une fonction du second degré et une fonction affine. L'identité remarquable $(a+b)^2$ paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. La question (Q5/1975) consiste à composer une fonction du troisième degré et une fonction affine. Les identités remarquables sont aussi des outils devant être disponibles dans ce travail. Dans la question (Q6/1973) il est nécessaire de déterminer l'ensemble image de la composée d'une fonction affine et une fonction du second degré en utilisant l'ensemble de définition. Deux solutions sont possibles. L'élève peut trouver la composée ensuite l'ensemble image. Il peut aussi déterminer l'ensemble image « fonction par fonction » sans trouver la formule algébrique de la composée. La question (Q2/1970) fait trouver les deux types de composée d'une fonction du premier degré et une fonction du second degré (*fog* et *gof*). Ensuite elle renvoie l'élève aux réponses proposées pour choisir celle qui est vraie. Dans la question (Q37/1995) on demande à l'élève de trouver pour quelle valeur de x on a $(g^{-1} \circ f)(x) = -16$ en mobilisant les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \frac{2x-1}{x+5}$. L'élève doit trouver d'abord l'inverse de g et ensuite la composée $(g^{-1} \circ f)$. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q17/1982) la formule algébrique de la composée n'est pas en jeu. Ainsi on conduit l'élève à calculer la valeur $fog(2)$ si les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{N} par $f : x \rightarrow \sum_{n=1}^x n$ et $g : x \rightarrow \sum_{n=1}^x n^2$. L'élève doit trouver la valeur $fog(2)$ « fonction par fonction ». La notion de somme à laquelle l'élève doit faire appel est donc un outil devant être disponible dans ce travail. Par ailleurs il faut signaler que la notion de somme relève du programme de la classe de première. La question

(Q14/1978) demande de composer une fonction définie par morceaux sur \mathbb{N} avec elle-même. L'élève doit aussi faire appel aux connaissances antérieures portant sur les nombres pairs et impairs. Dans la question (Q29/1990) on demande de trouver la valeur u en utilisant $f(x) = \frac{2x+u}{x+1}$ et $fof(x) = \frac{x-9}{3x-2}$. L'élève doit définir la composition de la fonction f avec elle-même. L'égalité des polynômes dont l'élève doit se servir est un outil devant être disponible dans ce travail.

ii) *Décomposition implicite des fonctions (4 questions)* : la question (Q21/1986) fait trouver la fonction f en utilisant la composée (implicite) $f(2x+3) = x^2 + 1$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction implicite $2x+3$ et ensuite en utilisant la définition de la fonction identique il doit trouver la fonction f . Dans la question (Q32/1992) l'élève doit faire la même chose pour la fonction $f(2x+1) = \frac{x^2+3}{5}$. L'identité remarquable $(a+b)^2$ s'avère un outil supposé disponible pour la résolution de ces deux questions. La question (Q27/1989) présente aussi le même travail que dans les précédentes. Mais cette fois-ci la fonction implicite et la composée sont rationnelles. De plus cette question permet aussi à l'élève de trouver la bonne réponse, sans calcul, en s'apercevant que la fonction f est une fonction inverse ($f(x) = \frac{1}{x}$). La question (Q23/1987) dans laquelle la fonction implicite et la composée sont du premier degré fait calculer l'image de 0 par f . Deux solutions sont possibles. La première solution invite l'élève à trouver la fonction f comme il l'a déjà fait dans les questions précédentes et ensuite à calculer la valeur $f(0)$. Dans la deuxième l'élève doit d'abord trouver pour quelle valeur de x la fonction implicite est égale à zéro et ensuite mettre cette valeur à la place de x dans la composée.

iii) *Décomposition des fonctions (5 questions)* : il y a cinq questions pour lesquelles on demande de décomposer des fonctions définies algébriquement. Il est très intéressant que les deux questions (Q26/1988) et (Q28/1989) soient quasiment identiques, bien qu'elles aient été proposées dans des années différentes. Dans leur énoncé nous ne remarquons qu'une petite différence : la fonction g devient f . Puisque cet exemple est très représentatif pour montrer le non-renouvellement des types des questions du concours, nous présentons intégralement ces questions:

(Q26/1988) : Si $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x+1}$ et $g(x) = x+1$, laquelle de ces fonctions ci-dessous est la

fonction f ?

A) $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ B) $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ C) $\frac{x^2+1}{x+1}$ D) $\frac{x^2+1}{x}$ E) $\frac{x}{x+1}$

(Q28/1989) : Si $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x+1}$ et $f(x) = x+1$, laquelle de ces fonctions ci-dessous est la

fonction g ?

A) $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ B) $\frac{x-1}{x^2-2x+2}$ C) $\frac{1}{x+1}$ D) $\frac{x}{x+1}$ E) $\frac{-x^2+x-1}{x+1}$

Dans la question (Q26/1988) l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction g . Ensuite en faisant appel à la définition de la fonction identique il doit « décomposer » $f \circ g$ pour trouver la fonction f . Dans la question (Q28/1989) l'identité remarquable n'est pas utilisée. De plus l'élève peut déterminer g sans trouver l'inverse de la fonction f . Ainsi il peut mettre $g(x)$ à la place de x dans la fonction f et ensuite arriver à la bonne réponse en calculant $g(x)$ en fonction de x . La résolution d'équations paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q34/1994) la procédure utilisée dans les questions précédentes ne permet pas à l'élève de résoudre la question. Il doit donc essayer les fonctions proposées dans les choix en composant avec la fonction f . La factorisation est un outil qui facilite le travail. Dans la question (Q35/1994) il s'agit d'une composée affine et une fonction logarithmique en base 2 de x . En faisant appel aux connaissances déjà acquises portant sur cette dernière qui relève du programme de la classe de première l'élève doit trouver l'inverse de la fonction. Ensuite il va trouver la fonction demandée en mettant en fonctionnement la définition de la fonction identique. La question (Q15/1980) demande de « décomposer » $(g^{-1} \circ f)$ en utilisant f pour trouver g . La procédure à suivre n'est pas différente que dans la plupart des questions précédentes. L'élève doit deux fois faire appel à l'inverse d'une fonction.

iv) *Démonstration de l'injectivité de la composition des fonctions (1 exercice)* : dans la question (Q10/1976) on donne la démonstration ensembliste de l'injectivité de la composition des fonctions injectives dans l'énoncé de la question et on demande de la reconnaître. L'élève doit simplement choisir quelle définit cette activité parmi les réponses proposées.

1.4 Thème IV : Image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction (14 questions)

Nous pouvons classer les questions en cinq catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Utilisation indispensable de la formule générale des fonctions affines (2 questions) : dans deux questions l'utilisation de la formule algébrique des fonctions affines est indispensable. La question (Q22/1987) fait calculer l'image de 1 en utilisant le fait que f soit une fonction affine et l'image des deux nombres réels ($f(2)=3$ et $f(3)=2$). L'élève doit d'abord déterminer la fonction f en mobilisant la formule générale algébrique des fonctions affines. Ensuite il doit calculer l'image de 1. La résolution du système linéaire d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne la question (Q38/1996), cette fois-ci la formule algébrique des fonctions affines est donnée dans l'énoncé. On demande de calculer le produit de a et b lorsque $f^{-1}(3)=4$ et $f^{-1}(2)=5$. Deux solutions sont possibles. L'élève peut trouver l'inverse de la fonction f . Ensuite en faisant appel à la résolution du système linéaire d'équations il peut trouver a et b . Dans l'autre solution il peut trouver $f(4)=3$ et $f(5)=2$ en utilisant la définition ensembliste de la fonction inverse. Ainsi il peut obtenir un système linéaire d'équations pour trouver a et b .

ii) Calculer l'image d'un nombre réel par des fonctions définies indirectement (4 questions) : il y a quatre questions dans lesquelles il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel à partir d'une image connue et d'une fonction définie indirectement. Nous voudrions mettre en place les deux questions pour soit confirmer au non-renouvellement du concours et soit faire mieux voir le type de questions :

(Q13/1978) : Si $f(n)=\frac{n}{3}f(n+1)$ et $f(5)=\frac{9}{16}$, quelle est la valeur $f(2)$?

A) $\frac{3}{4}$ B) 2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

(Q31/1991) : Si $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=xf(x+1)$ et $f(4)=\frac{4}{3}$, quelle est la valeur $f(2)$?

A) 14 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

Dans la question (Q13/1978) l'élève doit mettre respectivement à la place de x les valeurs numériques 2, 3 et 4 dans la formule pour aller de la valeur $f(5)$ vers $f(2)$. Dans la question (Q31/1991) il s'agit aussi du même travail. L'élève doit donner en x les valeurs numériques 2 et 3 dans la formule pour obtenir l'image de 2. Puisque les questions (Q39/1996 et Q40/1997)

présentent aussi le même travail que dans les questions précédentes, nous passons à la catégorie suivante.

iii) *Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de $f(x)$ (2 questions)* : la question (Q30/1990) fait trouver l'image de l'expression $2x$ par f . Ensuite il doit remplacer 2^{3x} par $2f(x)$ en sachant l'égalité $2f(x)=2^{3x}$. Alors les connaissances antérieures dont l'élève doit se servir sont liées aux puissances. Dans la question (Q36/1995) il s'agit aussi de la même procédure. La résolution d'équations paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail.

iv) *Calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction définie algébriquement (5 questions)* : dans la question (Q24/1988) dans laquelle il s'agit de l'identité remarquable $(a+b)^3$ en extension comme formule algébrique de la fonction demande de trouver l'image de $x+1$. L'élève peut trouver cette dernière en mettant directement à la place de x dans la fonction. Mais la factorisation de l'identité remarquable facilite beaucoup le travail et réduit le risque d'erreurs. La question (Q48/1999) fait calculer la différence $f(1-x)-f(x)$ à partir d'une fonction trinôme du second degré. L'identité remarquable $(a+b)^2$ est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q12/1977) il est nécessaire de calculer quelques valeurs à partir de deux fonctions définies de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R} . L'une des fonctions associe à chaque couple réel (a,b) la valeur $\min(a\sqrt{2}, b\sqrt{3})$ et l'autre la valeur $\max(3a, 2b)$. Les notions de maximum et minimum que l'élève doit faire fonctionner sont donc les outils devant être disponibles dans ce travail. La question (Q20/1985) demande de déterminer la valeur $f(1)$ parmi plusieurs possibilités si la fonction f est définie par $f(a.b)=f(a)+f(b)$. L'élève doit prendre en compte $1.1=1$ pour trouver $f(1)$. Dans la question du concours de 2003 (Q51/2003) on demande de calculer la somme $f(-1)+f(0)+f(1)$ si la fonction f est définie par $f(x)=|x-2|-|x|$. L'élève doit calculer les images concernées pour trouver la somme demandée. La notion de valeur absolue dont l'élève doit se servir s'avère un outil supposé disponible dans ce travail.

v) *Déterminer la formule algébrique d'une fonction représentée en langue naturelle (1 question)* : dans la question (Q45/1998) on donne une fonction définie par la suivante « la fonction f associe à chaque nombre entier la somme de ce nombre et son inverse » et on demande à l'élève la représentation algébrique de cette fonction. La notion d'inverse s'avère un outil devant être disponible dans ce travail.

1.5 Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (7 questions)

Nous pouvons classer les questions en trois catégories différentes suivant la tâche prescrite :

i) Lire ou interpréter la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 questions) : dans toutes les questions l'élève doit reconnaître qu'on repère les éléments de l'ensemble de départ sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées. La question (Q18/1982) demande de déterminer graphiquement pour quelle valeur de x on a $f[f(x)]=3$. Dans la question (Q42/1997) l'élève doit calculer la valeur

$\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}$ à partir de la représentation graphique de la fonction f bijective dans un repère

orthonormé. Il doit prendre en compte que la représentation graphique d'une fonction bijective est également celle de son inverse (en échangeant les axes). La question (Q47/1998)

il est nécessaire de calculer la valeur $\frac{g(1)+fog(2)}{f(4)}$ à partir des représentations graphiques des

deux fonctions dans un repère orthonormé. L'élève doit aussi ici faire appel à la composée que dans les questions précédentes.

ii) Utilisation indispensable de l'équation des fonctions pour déterminer graphiquement des valeurs demandées (3 questions) : il s'agit aussi de déterminer quelques valeurs à partir des représentations graphiques données des fonctions dans un repère orthonormé. Mais il est bien nécessaire de définir (ou utiliser) l'équation des fonctions. Dans la question (Q33/1993) on

demande de calculer la valeur $\frac{fog(8)}{fof(2)}$ à partir des représentations graphiques de la parabole f

et la droite g . Les deux points communs de ces dernières sont précisés. Pour trouver quelques valeurs l'élève doit définir l'équation de la droite g . La question (Q49/1999) fait calculer la

valeur $(f^{-1}og(6))+(gof^{-1})(-1)$ en utilisant la représentation graphique de la fonction linéaire f et de la fonction g dans un repère orthonormé. L'élève doit utiliser la composée et l'inverse de

la fonction. De plus l'équation de la fonction linéaire dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la question (Q50/2000) l'élève est amené à

déterminer la valeur $(fog^{-1}of)(0)$ à partir de la représentation graphique de la fonction f et de

la fonction g définie par $g(x)=x^3$. Pour quelques valeurs nécessaires l'élève doit faire appel à l'équation de la fonction g . Comme la question précédente la composée et l'inverse sont les outils mobilisables du travail.

iii) *Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie géométriquement (1 question)* : dans la question (Q19/1982) il s'agit de travailler sur une fonction f définie géométriquement par $f : x \rightarrow f(x) =$ « la mesure de l'aire hachée ». Il y a trois carrés juxtaposés sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Les cotés de ces carrés sont respectivement de 1, 2 et 4. L'élève doit d'abord déterminer la formule algébrique de la fonction en calculant la mesure de l'aire hachée. Ensuite il doit trouver l'image de 3. Ainsi l'aire du carré et du rectangle paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail.

2. Synthèse

Dans notre synthèse nous reprendrons successivement les différentes dimensions prises en compte dans l'analyse et nous comparons avec les résultats de l'analyse du programme et des manuels.

Thèmes qui apparaissent dans les questions

Globalement il y a peu de thèmes et peu de questions différentes. Il est tout à fait possible de rencontrer les mêmes types de question avec des petites modifications selon les années. La composition des fonctions à partir de leurs formules algébriques est le thème le plus fréquent. Elle est suivie par la recherche de l'image d'un nombre ou d'une expression algébrique et du calcul de l'inverse d'une fonction à partir de sa formule algébrique. Les questions qui concernent la géométrie analytique ou la géométrie sont peu fréquentes. En ce qui concerne le travail sur la définition ensembliste de la fonction c'est un thème très marginal du concours.

Si l'on compare ces résultats avec les résultats obtenus par l'analyse des manuels, dans tous les manuels MPC et certains manuels ML il est possible de trouver tous ces thèmes avec un taux qui varie d'un manuel à l'autre. Ainsi à part le manuel officiel tous les manuels ML se distinguent beaucoup du concours par le taux très élevé du thème I. Dans les manuels MPC le taux de proposition de ce thème n'est pas très différent de celui du concours.

Comme nous l'avons déjà indiqué, la composition des fonctions et l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction sont les thèmes les plus fréquents du concours. C'est aussi valable pour les manuels MPC et certains ML. Ainsi à part les manuels Tutibay et Aydın chaque manuel propose majoritairement des exercices portant sur la composition des fonctions. Le manuel officiel se distingue beaucoup des autres par le taux plus élevé encore de proposition de ce type d'exercices.

Par ailleurs les exercices qui demandent de calculer l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique sont plus nombreux dans les manuels MPC (thème V). Dans le manuel

Tutibay il n'y a aucun exercice à ce thème. Tandis que Altın ne propose que 5% des exercices. Les manuels Zafer et Uğur sont très proches du concours par le taux attribué au thème V (respectivement 29% et 34%). Gündener est le manuel qui met en place le plus d'exercices à ce thème (42%).

Comme dans le concours il n'y a aucune question dans lequel il s'agit de travailler sur les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières, pour les manuels MPC et les manuels où l'influence du concours est très forte (officiel et Aydın), le thème II est très peu fréquent. Par contre Tutibay et Altın se distinguent beaucoup du concours en proposant respectivement 36% et 25% des exercices à ce thème.

En ce qui concerne le thème III, puisque les manuels proposent beaucoup d'exercices liés à la recherche de l'inverse des fonctions dans le cours, il nous semble préférable de prendre en compte l'ensemble des résultats des exemples et des exercices résolus (EXP+ER). Les manuels ne se différencient pas beaucoup et ils sont proches du concours par le taux attribué à ce thème.

Si l'on regarde le thème VI, on observe une diversité. Les manuels Altın, Aydın, Uğur et Zafer se rapprochent du concours. Les manuels officiel et Gündener sont les manuels qui proposent moins d'exercices pour lesquels l'élève doit travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.

Formes des questions

Les questions du concours sont généralement très courtes. De plus dans l'énoncé de certaines questions on n'indique pas les ensembles où les fonctions données sont définies.

(Q30/1990) : Si $f(x)=2^{3x-1}$, laquelle de ces réponses proposées ci-dessous est la valeur $f(2x)$ en fonction de $f(x)$?

A) $3f(x)$ B) $3[f(x)]^2$ C) $2f(x)$ D) $2[f(x)]^2$ E) $2[f(x)]^3$

(Q7/1973) : Laquelle de ces fonctions suivantes est l'inverse de la fonction définie par

$$y = \frac{3x-1}{2x+1} ?$$

A) $y = \frac{3-2x}{1+2x}$ B) $y = \frac{2x+1}{3x+1}$ C) $y = \frac{2x+1}{3x-1}$ D) $y = \frac{1+x}{3-2x}$ E) $y = \frac{3x+1}{2x+1}$

(Q29/1990) : Etant donné la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x+u}{x+1}$ et la fonction $f \circ f$ définie par $f \circ f(x) = \frac{x-9}{3x-2}$, quel est le nombre u ?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 0 E) 1

Nous pensons que ce type de questions peut engendrer chez les élèves l'idée que la seule chose importante est de trouver à tout prix la bonne réponse (numérique ou algébrique) en négligeant des « détails » plus formels. Il n'est pas nécessaire de se demander si la fonction est définie et dans quelles conditions on peut appliquer une formule ou une procédure...

Nous constatons aussi ce type de situations dans les manuels. En général soit les manuels n'indiquent pas des ensemble de définition des fonctions soit ils demandent de travailler pour les valeurs où les fonctions sont définies ou dans les conditions convenables.

Programmes, contenu du concours et manuels

Nous remarquons que les questions du concours contiennent en général des applications directes du cours. Il n'y a aucune question qui fait intervenir la notion de fonction comme un outil. La plupart des questions relèvent du programme officiel du seconde. Mais on peut aussi trouver des questions qui font utiliser des connaissances non indiquées par le programme et des connaissances relevant du programme des classes suivantes. Par exemple dans le concours il y a deux questions dans lesquelles la formule générale des fonctions affines est utilisée. Par contre dans les programmes il n'y a aucune indication concernant ces fonctions. C'est la raison pour laquelle dans les manuels MPC et certains manuels ML l'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercices comme des exercices résolus.

Par ailleurs les fonctions définies par morceaux figurent dans le programme de terminale. Et il y a une question du concours qui les concernent. Dans certains manuels ML, comme dans la situation précédente, on peut trouver des exercices résolus illustrés par ces fonctions.

Comme nous l'avons déjà vu lors de l'analyse du programme de seconde, l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence est suggérée par le programme. Mais il n'y a aucune question qui provoque cette utilisation dans le concours. Les propriétés particulières des fonctions et fonction particulières occupent une grande place dans le programme de seconde. Malgré cela dans le concours il n'y a presque aucune question (à part la démonstration de l'injectivité de la composition des fonctions et la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions (Q10/1976)). C'est pourquoi les manuels MPC et

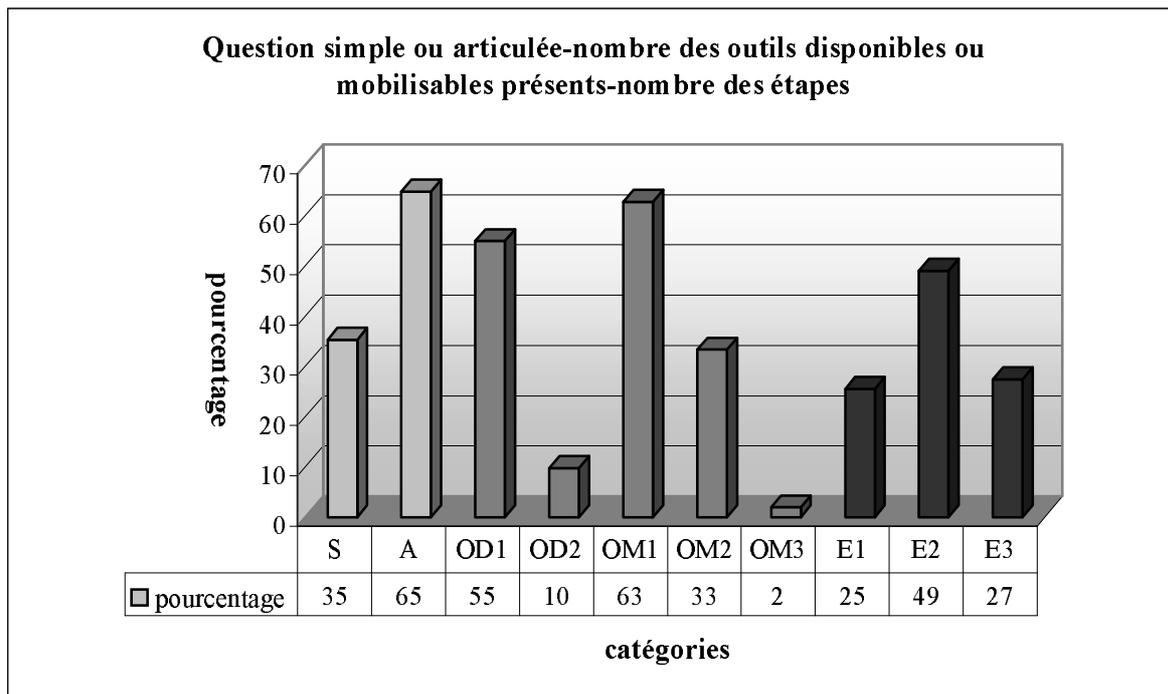
certaines manuels ML ne proposent pas d'exercices de ce type ou n'en proposent qu'un très petit nombre dans les exercices résolus.

Simple ou articulé-outils disponible ou mobilisable-nombre d' étapes

La majorité des questions du concours portent sur plusieurs connaissances antérieures. Par exemple l'élève doit faire appel à des identités remarquables pour trouver l'image d'une fonction définie par une expression algébrique ou à la résolution d'un système linéaire d'équations pour définir la formule algébrique d'une fonction affine.

Il est très probable que certaines questions du concours comme la question (Q27/1989) provoquent chez les élèves une idée que l'on peut (doit) toujours trouver des démarches plus courtes.

De plus la résolution de nombre des questions même courtes nécessite plusieurs étapes pas toujours indiquées. Quand on regarde le tableau ci-dessous, on remarque que 65% des questions font mettre en fonctionnement plusieurs connaissances antérieures (A :articulée). Tandis que 35% des questions ne sont destinées qu'à mobiliser des connaissances liées directement à la notion de fonction (S :simple). Par ailleurs dans plus de la moitié des questions l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 : 1 outil disponible). Ce taux descend à 10% dans les questions pour lesquelles il est nécessaire de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : 2 outils disponibles). 63% des questions demandent de mobiliser une seule connaissance liée à la notion de fonction (OM1 : 1 outil mobilisable). Dans plus du tiers des questions il s'agit des deux connaissances à mobiliser (OM2 :2 outils mobilisables). Un très petit nombre des questions conduisent l'élève à mobiliser trois connaissances liées directement à la fonction (OM3 : 3 outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des questions suivant le nombre des étapes, lors de la résolution de près de la moitié des questions il s'agit des deux étapes (E2 :2 étapes). 27% présentent un travail qui ait trois étapes (E3 : 3 étapes). Dans 25% des questions l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape (E1 :1 étape).



Si on compare ces résultats avec ceux de l'analyse des manuels, on constate qu'il y a en général une grande similitude. Dans tous les manuels, à part Tutibay, la plupart des exercices font utiliser plusieurs connaissances antérieures. Les manuels et le concours se rapprochent beaucoup par le taux de proposition de ce type d'exercices.

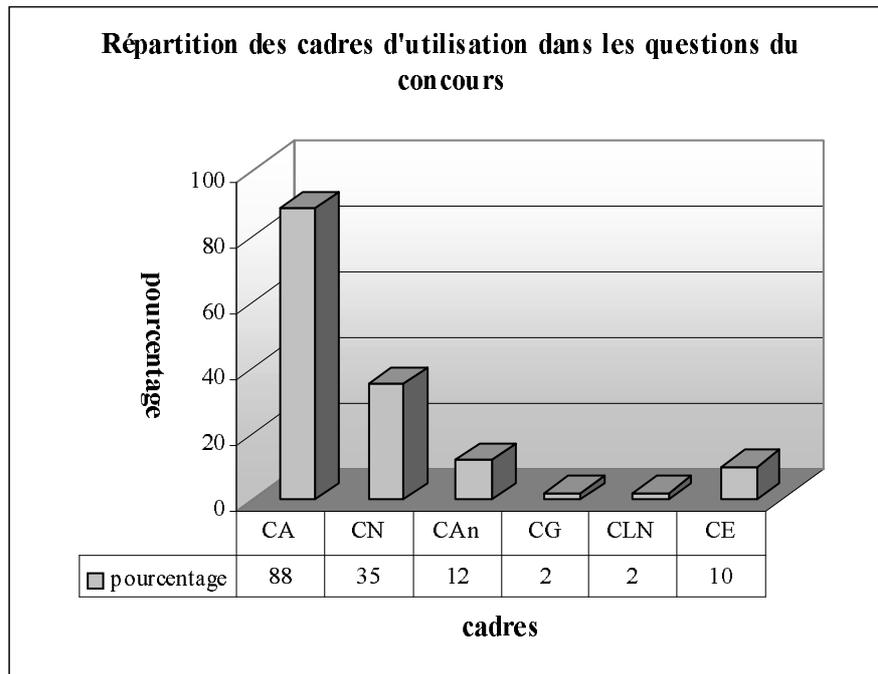
En ce qui concerne le nombre des outils mobilisables, les manuels Gündener et Tutibay se rapprochent en proposant moins d'exercices qui nécessitent de mobiliser plusieurs outils que le concours. Alors que dans les autres manuels ce type d'exercices est plus nombreux que dans le concours.

Par ailleurs les exercices des manuels comprennent aussi plusieurs étapes comme les questions du concours. A l'exception du manuel Tutibay les manuels proposent plus d'exercices à plusieurs étapes que le concours.

Cadres d'utilisations dans les questions du concours

En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les questions, comme le montre bien le tableau ci-dessous, le cadre majoritairement présent est le cadre algébrique (CA, 88%). Dans plus du tiers des questions le cadre numérique est un des cadres du travail (CN,35%). En regardant les taux très modestes des cadres géométrique (CG,2%) et géométrie analytique (CAn,12%) nous pouvons dire que les thèmes du concours sont géométriquement très pauvres. Dans 10% des questions l'élève doit travailler dans le cadre de la théorie élémentaire

des ensembles. Tandis que le cadre de langue naturelle est aussi un des cadres peu fréquentés (CLN,2%).



Si on compare ces résultats avec ceux des manuels, on constate aussi une grande similitude. Ainsi en général dans tous les manuels le cadre algébrique est le cadre « écrasant » et son taux d'utilisation varie de 55% à 96%. Le pourcentage très faible des questions du concours dans lesquelles le cadre géométrique est utilisé n'est pris en compte que par le manuel Uğur. Ainsi à part ce manuel il n'y a aucun qui propose des exercices de ce type. On retrouve la même situation pour le cadre de la langue naturelle. Dans les manuels l'utilisation de ce cadre n'est réservé qu'au manuel Tutibay avec un taux très bas.

En ce qui concerne le cadre analytique, il est aussi un des cadres les moins utilisés dans les manuels comme dans le concours. Tutibay se distingue des autres par un taux plus élevé d'utilisation de ce cadre. Ainsi dans 22% des exercices l'élève doit mettre en fonctionnement le cadre analytique. Ce taux descend un petit peu dans le manuel Uğur. Gündener, officiel et Altın se distinguent du concours par la rare utilisation de ce cadre. Tandis que Zafer et Aydın sont les manuels les plus proches du concours dans l'utilisation du cadre analytique.

Par l'utilisation très fréquente du cadre de la théorie élémentaire des ensembles Tutibay, Altın, Aydın et Zafer se distinguent du concours. Uğur est le manuel le plus proche du concours avec un taux d'utilisation de 14%. Tandis que le manuel officiel ne propose aucun exercice dont la résolution se fait dans ce cadre.

Autonomie de l'élève dans les questions

Quant à l'autonomie de l'élève, nous constatons que dans l'ensemble des questions l'élève a une autonomie complète. On peut avoir des démarches plus ou moins économiques pour un temps limité. Il y a certaines questions qui favorisent l'apprentissage par cœur. Puisque aucun formulaire n'est autorisé⁵⁹, les candidats doivent connaître par cœur certaines propriétés et formule.

3. Conclusion

Lors de notre analyse, nous avons remarqué qu'en général il y a peu de thèmes et peu de questions différentes. Les mêmes types de questions sont proposées avec des petites modifications durant des années. De plus les questions du concours sont très courtes. Dans certaines questions on n'indique pas d'ensembles de définition des fonctions.

Par ailleurs les questions du concours contiennent en général des applications directes du cours. Il n'y a aucune question qui fait utiliser la notion de fonction comme un outil. La plupart des questions relèvent du programme officiel du seconde. Mais l'utilisation de la bijectivité comme outil pour la démonstration de l'équipotence et les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières sont totalement absents dans les thèmes du concours. De plus on peut aussi trouver des questions qui font utiliser des connaissances non indiquées par le programme et des connaissances relevant du programme des classes suivantes. Cela amène certains manuels ML à proposer ce type de question du concours ou ressemblantes dans les exercices résolus.

La composition des fonctions à partir de leurs formules algébriques et le calcul de l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique sont les thèmes les plus fréquents. Les thèmes dans les exercices résolus des manuels MPC et de certains manuels ML sont équivalents à ceux du concours. En général les manuels proposent des exercices qui demandent d'utiliser plusieurs connaissances antérieures et qui comprennent plusieurs étapes comme le concours. Et les exercices à plusieurs étapes sont plus nombreux dans les manuels.

Les cadres principaux des questions du concours sont le cadre algébrique et le cadre numérique. Nous pouvons donc dire qu'elles sont géométriquement très pauvres. Les manuels se rapprochent beaucoup du concours par l'utilisation très fréquente de ces cadres et par l'utilisation rare du cadre géométrique et du cadre analytique.

⁵⁹ Il faut rappeler qu'au concours national d'entrée à l'université aucun formulaire n'est autorisé et les candidats n'ont pas le droit d'introduire dans la salle d'examen quoique ce soit, même pas de brouillons, à part des crayons et une gomme.

Pour toutes les questions aucune méthode n'est suggérée, laissant ainsi tous les choix à la charge des élèves.

CHAPITRE V

ANALYSE DES QUESTIONNAIRES-ENSEIGNANTS SUR L'ENSEIGNEMENT DES FONCTIONS

Plan du chapitre V :

1. <i>Parties des réponses</i>	136
1.1 Première partie : expérience professionnelles des enseignants	136
1.2 Deuxième partie : rapport des enseignants aux programmes et textes officiels	137
1.3 Troisième partie : image que les enseignants se font de l'enseignement des fonctions	137
1.4 Quatrième partie : organisation du cours	141
1.4.1 Thème I : définition ensembliste des fonctions	143
1.4.2 Thème II : propriétés particulières des fonctions	143
1.4.3 Thème III : recherche de l'inverse des fonctions	144
1.4.4 Thème IV : composition des fonctions	144
1.4.5 Thème V : image d'un nombre réel	146
1.4.6 Thème VI : représentation graphique des fonctions	150
2. <i>Synthèse</i>	154
3. <i>Conclusion</i>	152

Afin de cerner plus précisément comment les enseignants conçoivent l'enseignement des fonctions, nous avons mis en place un questionnaire que nous avons soumis à un certain nombre d'enseignants au lycée et au dérsané. Nous disposons de six questionnaires provenant d'enseignants de lycée, de cinq questionnaires provenant d'enseignants de dérsané, d'un questionnaire de la part d'un enseignant qui a déjà travaillé au dérsané et qui travaille actuellement au lycée et de deux questionnaires provenant de deux enseignants qui ont déjà enseigné au lycée et qui enseignent actuellement au dérsané. Puisque ce n'est pas autorisé, il n'y a aucun enseignant qui travaille à la fois au lycée et au dérsané.

Chaque questionnaire comprend onze questions.

Les deux premières questions jouent un rôle préliminaire et nous apportent des informations sur le parcours de l'enseignant, particulièrement dans les classes concernées ici. La troisième question nous apporte des informations sur la relation qu'il entretient avec les programmes officiels. Ensuite, dans une troisième partie, nous avons posé cinq questions, pour cerner autant que possible l'image que l'enseignant se fait de l'enseignement de la fonction, son idée sur le degré de difficulté du chapitre, ses objectifs, les types d'erreurs et de difficultés auxquelles il s'attend. La quatrième partie, avec deux questions, concerne la façon dont il gère les contraintes liées à l'existence de l'examen final.

Nous présenterons les réponses partie par partie et ensuite nous ferons une synthèse pour chaque partie du questionnaire.

1. Parties des réponses aux questionnaires-enseignants

1.1 Première partie : expérience professionnelle des enseignants

Cette partie nous apporte des informations sur le parcours de l'enseignant. Ainsi nous avons demandé aux enseignants depuis combien d'années ils sont enseignants et depuis combien d'années ils enseignent et en quelles classes.

A partir de la durée de leur expérience, nous avons classé les enseignants interrogés en trois catégories différentes : les enseignants chevronnés (6 enseignants, durée de 21 à 26 ans), les enseignants expérimentés (4 enseignants, durée de 8 à 12 ans) et les enseignants débutants (4 enseignants, durée de 4 mois à 2 ans). Nous constatons cependant que tous les enseignants enseignent (ou ont enseigné) dans la classe qui nous concerne.

1.2 Deuxième partie : rapport des enseignants aux programmes et textes officiels

Pour cerner la relation que les enseignants entretiennent avec les programmes officiels, nous leur avons demandé s'ils avaient consulté les programmes avant de commencer l'enseignement des fonctions. La plupart des enseignants interrogés affirment qu'ils utilisent les programmes pour l'organisation de leur cours et qu'ils en dégagent des limites à donner à leur enseignement, aussi que le contenu et les objectifs du programme à enseigner.

Il y a cependant quatre enseignants qui ont répondu à cette question qu'ils ne consultent pas le programme. Deux d'entre eux disent que puisqu'ils travaillent dans un désané, ils ne suivent pas le programmes officiel et ils ne s'intéressent qu'aux sujets qui figurent au concours d'entrée à l'université. En ce qui concerne les deux autres qui travaillent au lycée, l'un affirme que puisque les manuels scolaires sont préparés à partir des programmes, il n'éprouve pas le besoin de les consulter. Ayant fait un plan annuel au début de l'année scolaire, l'autre n'a pas regardé le programme avant l'enseignement des fonctions.

Par ailleurs, les deux enseignants de désané disent qu'ils ont consulté le programme. L'un explicite ses raisons en évoquant le fait que le sujet « fonction » est très vaste, il a encore une fois révisé les notions qui sont introduites à son propos. L'autre affirme qu'au désané on fait d'une part le cours pour soutenir des élèves aux cours du lycée et d'autre part les sujets du concours correspondent aussi aux programmes.

1.3 Troisième partie : image que les enseignants se font de l'enseignement de la notion de fonction

Notre objectif est ici de cerner, autant que possible, l'image que l'enseignant se fait de l'enseignement de la notion de fonction. Dans ce cadre, nous avons posé cinq questions. La première était destinée à voir comment les enseignants apprécient le chapitre correspondant à la notion de fonction. Dix enseignants considèrent le chapitre très important et quatre enseignants, important.

Il apparaît que ce chapitre semble très important aux enseignants parce que la notion de fonction est l'une des notions les plus importantes (cité par 4 enseignants) et que ce chapitre

établit un lien entre plusieurs autres domaines mathématiques (cité par 6 enseignants) et d'autres disciplines (cité par 1 enseignant). Par ailleurs, pour 5 enseignants, ce chapitre est important parce qu'il permet aux élèves d'organiser leurs connaissances, d'améliorer la capacité de pensée et d'interprétation.

Nous avons choisi, parmi les réponses, les suivantes comme représentatives :

Comme la notion de fonction est l'une des notions principales de l'enseignement secondaire, ce chapitre est très important. Je pense que dans les classes suivantes les fonctions seront une base sur laquelle les élèves s'appuient. De plus dans le concours d'entrée à l'université il y a des questions qui font référence aux fonctions et aux notions qui y correspondent (comme les polynômes).⁶⁰

Très important. Il y a beaucoup de notions qui correspondent à la notion de fonction en mathématiques. La trigonométrie, le logarithme, les fonctions définies particulièrement portent sur cette notion.⁶¹

Très important, pour que les élèves pensent et établissent un lien entre des événements.⁶²

La deuxième question de cette partie demandait aux enseignants de citer, à leur avis, les objectifs principaux de ce chapitre en termes de savoirs et de compétences des élèves. Nous constatons tout d'abord que sept enseignants parlent encore des objectifs lointains⁶³ du chapitre comme dans la question précédente. En ce qui concerne les autres réponses elles ne présentent pas une homogénéité relativement à ce que les enseignants attendent de leurs élèves. Nous présentons les types de compétences citées ainsi que la fréquence de leur apparition :

- La définition (ensembliste) de la notion de fonction (citée 1 fois).
- Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (cité 3 fois).
- Trouver l'inverse des fonctions (cité 2 fois).
- Trouver la composition des fonctions (cité 1 fois).
- Reconnaître la relation entre fonction et correspondance (cité 2 fois).
- Reconnaître les propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (cité 2 fois).
- La notion de variable (citée 2 fois).
- L'amélioration de la capacité de calcul (citée 2 fois sans précision).

⁶⁰ Une enseignante de dérsané qui travaille depuis un an au dérsané.

⁶¹ Un enseignant qui travaille depuis douze ans au dérsané.

⁶² Une enseignante qui travaille depuis douze ans au lycée

⁶³ L'amélioration de la capacité de pensée, interprétation...etc.

-L'utilisation du plan analytique (citée 1 fois).

-Résoudre toutes les questions qui concernent les fonctions au concours (citée 1 fois).

Nous voudrions citer quelques réponses qui nous paraissent intéressants ou typiques :

*Dans ce chapitre j'attends d'abord des élèves qu'ils puissent reconnaître l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles, qu'ils puissent trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement et composer des fonctions.*⁶⁴

*Dans l'enseignement de la notion de fonction, mon premier objectif est que dans le concours les élèves puissent résoudre toutes les questions qui font référence à cette notion. Et le deuxième objectif est d'améliorer la capacité de pensée, d'établir un lien entre des événements et d'interprétation des élèves.*⁶⁵

Dans cette partie nous avons aussi essayé d'aborder les principales erreurs et difficultés auxquelles les enseignants ont dû faire face. Nous présentons la liste des difficultés, citées par de croissance du nombre d'apparitions :

-Difficultés dues à la notion de variable (citées 1 fois).

-Difficultés dues à confondre les signes de l'inégalité ($>$, $<$) (citées 1 fois).

-Difficultés liées à la définition ensembliste de la notion de fonction (citées 1 fois).

-Difficultés liées à écrire une fonction en termes d'une autre fonction (citées 2 fois).

-Difficultés liées à la composition (ou décomposition) des fonctions (citées 2 fois).

-Des préjugés des élèves sur les fonctions (cités 2 fois).

-La première rencontre à une notion assez vaste et complexe (citée 2 fois).

-Difficultés à interpréter et à tracer la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (citées 3 fois).

-Difficultés liées à trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement (ou à partir d'ensembles) (citées 5 fois).

-Difficultés dues au calcul arithmétique (citées 5 fois).

-Difficultés dues au calcul algébrique (citées 6 fois).

Citons quelques réponses :

⁶⁴ Un enseignant de dérsané qui travaille depuis douze ans au dérsané.

⁶⁵ Un enseignant chevronné de dérsané qui a travaillé longtemps au lycée.

La capacité du calcul et de l'acquisition des élèves est insuffisante et incomplète. Ils essaient toujours d'acquérir des notions présentées à partir des exemples. Chez ceux qui n'ont pas de difficultés dues au calcul l'acquisition est courante et permanente. Je pense qu'il faut faire beaucoup d'exercices lors du cours.⁶⁶

Le problème principal est dans les connaissances qui ont été mal assimilées lors de l'enseignement au collège. Parce qu'ils ne peuvent pas résoudre des équations, cela conduit les élèves à penser que les fonctions sont trop difficiles. A partir de là pour nous les fonctions se ramènent à la résolution d'équations simples. Par ailleurs, l'autre problème essentiel est que les élèves commencent le chapitre avec l'idée que les fonctions sont très difficiles. Il est très intéressant que le même élève dise que c'était très facile lorsqu'il a vu le même type de fonctions dans la classe de première.⁶⁷

La question suivante de cette partie invitait les enseignants à présenter leurs points de vue sur des erreurs qui leur semblent liées aux connaissances antérieures des élèves.

La grande majorité des enseignants interrogés sont convaincus que certaines erreurs sont liées aux connaissances antérieures des élèves. Ils explicitent leurs raisons en disant que ces erreurs sont dues au manque des connaissances essentielles et la capacité du calcul algébrique ou arithmétique, concernant l'enseignement précédent (cité 12 fois). Par ailleurs, un enseignant débutant de dérsané n'accepte pas que certaines erreurs reposent sur des connaissances antérieures des élèves. Il accuse directement le désintérêt des élèves. Un enseignant chevronné de lycée affirme sans précision que ce type d'erreurs provient à la fois des élèves et du système de l'enseignement.

Voici quelques réponses représentatives :

Certaines erreurs sont dues à l'insuffisance des connaissances antérieures des élèves. Parce que certains élèves n'ont pas assez assimilé les quatre opérations, la table de multiplication, des équations simples, des identités remarquables, la représentation graphique dans un repère orthonormé, la factorisation, les nombres entiers et rationnels, les puissances et les racines.⁶⁸

Un enseignant chevronné de lycée qui a une longue expérience au dérsané met aussi l'accent sur le niveau des élèves dans la même classe :

⁶⁶ Un enseignant chevronné de lycée.

⁶⁷ Une enseignante de lycée qui travaille depuis deux ans au lycée.

⁶⁸ Un enseignant chevronné de dérsané qui a travaillé longtemps au lycée.

La plupart des erreurs proviennent des connaissances mal assimilées des classes précédentes. Par ailleurs, le fait qu'il y ait des élèves en différents niveaux dans la même classe retarde l'enseignement.

La dernière question de cette partie avec laquelle nous avons essayé de mettre en évidence quelles ressources ont utilisé les enseignants interrogés pour préparer leur enseignement.

Nous constatons que la majorité écrasante utilisent à la fois des différents manuels de lycée et des manuels de préparation au concours (12 enseignants sur 14). Il y a deux enseignants qui organisent aussi le cours à partir des notes personnelles. Par ailleurs, deux enseignants de dérsané affirme qu'ils n'utilisent que des manuels de préparation au concours. Un enseignant chevronné de lycée qui a travaillé longtemps au dérsané dit qu'il prépare son cours grâce à son expérience.

Nous donnons quelques réponses typiques :

En général d'une part j'utilise le manuel de lycée en tant qu'il a été préparé à partir du programme et d'autre part j'utilise aussi des manuels de la préparation au concours en tant que le concours contient des questions pratiques à choix multiple.⁶⁹

Lorsque je prépare le cours, je préfère les manuels qui présentent bien des points essentiels et importants du sujet et proposent beaucoup d'exercices résolus. Il n'y a pas de manuel que j'utilise régulièrement.⁷⁰

1.4 Quatrième partie : Organisation du cours

Dans cette partie nous avons essayé d'obtenir des informations sur l'organisation du cours réservée par les enseignants au chapitre des fonctions. Ainsi la première question où nous avons demandé aux enseignants d'écrire comment ils avaient fait introduire la notion de fonction et décrire les activités éventuellement proposées.

Les réponses des enseignants présentent une grande homogénéité. Ainsi 11 enseignants nous ont écrit qu'ils font introduire les fonctions avec leur définition ensembliste et ensuite ils proposent des exemples s'inspirant de la vie courante pour faciliter la compréhension de cette définition.

Citons les réponses qui nous paraissent assez représentatives :

⁶⁹ Un enseignant chevronné de lycée.

⁷⁰ Un enseignant débutant de dérsané.

Dans les fonctions j'ai fait tout d'abord rappeler les élèves ce qui est la correspondance. Ensuite j'ai indiqué que chaque correspondance ne peut être une fonction et j'ai parlé des conditions nécessaires pour qu'une correspondance soit une fonction. A partir des exemples j'ai montré quelles correspondances sont une fonction.⁷¹

Une enseignante débutante de lycée répond à cette question comme la suivante :

Je passe de la correspondance à la fonction. Lorsque j'indique que chaque correspondance n'est pas une fonction, je prends l'exemple « mère-enfant ». Je dis que chaque enfant a une seule mère et il n'y a aucun enfant qui n'a pas de mère. Pour la composition des fonctions je dis que nous préparons un gâteau⁷². Ainsi j'essaie de prendre des exemples de la vie courante. Et cela permet aux élèves de garder des règles longtemps dans l'esprit.

Comme la réponse d'une enseignante débutante de dérsané met très bien en évidence la différence entre l'enseignement du dérsané et celui du lycée, nous voudrions aussi la citer :

Si je travaille au lycée, je pourrais faire des activités différentes et essayer d'attirer l'attention des élèves, grâce à de différents exemples, sur le sujet. Mais au dérsané puisque nous présentons des sujets de manière plus pratique et courte, au lieu de faire des activités j'ai commencé rapidement les fonctions en donnant brièvement la définition et les propriétés particulières des fonctions.

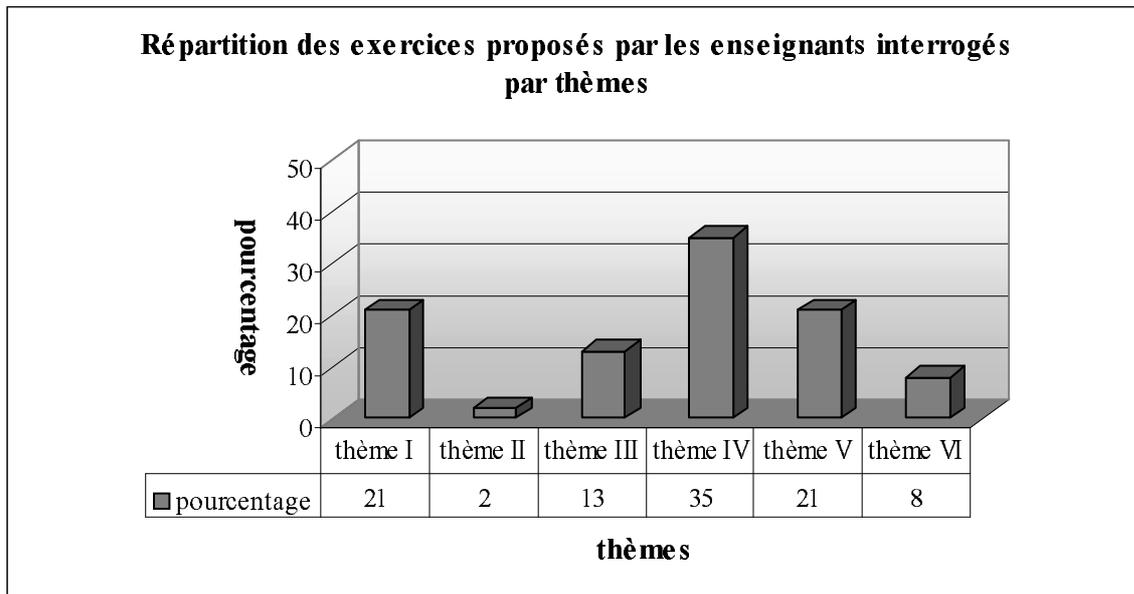
Les deux dernières questions de cette partie (et même des questionnaires) étaient destinées à obtenir les exercices (ou activités) que les enseignants interrogés avaient proposés aux élèves en classe et qui leur semblent particulièrement représentatifs du chapitre et un exercice qu'ils avaient proposé en contrôle et qui leur semble particulièrement adapté à cet enseignement.

Nous retrouvons cinq types de thèmes principaux dans leurs réponses en ce qui concerne les exercices qui semblent aux enseignants représentatifs du chapitre : définition ensembliste de la notion de fonction (thème I), propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (thème II), recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (thème III), composition des fonctions (thème IV), image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction définie algébriquement (thème V) et

⁷¹ Un enseignant chevronné de dérsané qui a travaillé longtemps au lycée.

⁷² L'enseignante l'explique dans la question suivante qui demande de citer trois exemples représentatifs. Alors nous reprendrons cet exemple lors de l'analyse de la question suivante.

représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème VI). Le tableau ci-dessous montre la répartition des exercices proposés par les enseignants interrogés :



1.4.1 Thème I : définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant (10 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) Utilisation de la définition ensembliste des fonctions (8 exercices) : il s'agit de travailler sur des correspondances définies algébriquement (3 exercices) ou à partir des ensembles (5 exercices). L'élève doit chercher si elles sont des fonctions. C'est l'utilisation de la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine C_0).

ii) Détermination de l'ensemble de définition, de l'ensemble d'arrivée ou de l'ensemble image des fonctions (2 exercices) : dans deux exercices on demande de déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie algébriquement à partir de l'ensemble image. L'un des exercices propose de travailler sur une fonction linéaire et l'autre sur une fonction trinôme du second degré. La résolution d'équations du premier degré et second degré paraît comme un outil disponible du travail.

1.4.2 Thème II : propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (1 exercices).

Nous pouvons trouver un exercice qui concerne les fonctions particulières : dans un exercice⁷³ on demande de calculer la valeur $f(1998)$ si la fonction f définie par $f(x)=(m-1)x^2+(m+n)x+m-n$ est une fonction constante. L'élève doit définir les valeurs m et n

⁷³ Un enseignant débutant de dérsané propose cet exemple en cours.

en sachant qu'il n'y a aucune variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Alors il doit égaliser les coefficients de chaque variable x à zéro pour trouver les valeurs m et n ainsi que la fonction f .

1.4.3 Thème III : recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (6 exercices).

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) Trouver l'inverse d'une fonction définie par une liste de couples (1 exercice): il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction définie à partir d'ensembles. L'élève doit changer les places d'éléments des couples en mobilisant la définition des fonctions inverses.

ii) Trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement (5 exercices) : dans deux exercices il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle. L'un des exercices demande aussi de calculer l'image d'un nombre réel. L'élève peut trouver les inverses soit la méthode \mathbf{M}_{xy} soit la recette \mathbf{R}_a . Dans le troisième exercice il est nécessaire de trouver l'inverse d'une fonction affine définie sur \mathbb{Z} . Le quatrième exercice s'inspire beaucoup d'une question du concours.⁷⁴ Comme elle n'est pas proposée sous forme habituelle, l'élève doit d'abord calculer la fonction donnée en termes de x . Ensuite il doit trouver l'inverse de la fonction et calculer l'image d'un nombre réel. Dans le dernier exercice ressemblant à une question du concours,⁷⁵ on demande aux élèves de déterminer le couple (a, b) à partir de la fonction bijective définie de $\mathbb{R}-\{2\}$ vers $\mathbb{R}-\{4\}$ par $f(x)=\frac{nx-8}{2x-n}$. L'élève doit prendre en compte que pour $x=2$ le dénominateur de la fonction f est nul et pour $x=4$ le dénominateur de son inverse, nul.

1.4.4 Thème IV : composition des fonctions (définies algébriquement ou à partir des ensembles) (17 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (6 exercices) : dans deux exercices on demande de trouver les deux types de composées d'une fonction rationnelle et une fonction du second degré (fog et gof) et de calculer la somme des images des deux nombres réels sur ces composées obtenues. Dans le troisième exercice il faut trouver les deux types de composées des deux fonctions affines. Le quatrième exercice demande de trouver la double composée d'une fonction définie par morceaux (fof) et de calculer l'image d'un nombre réel. L'élève peut calculer l'image

⁷⁴ Cet exercice est proposé par un enseignant chevronné de lycée ayant une longue expérience au dérsané.

⁷⁵ Un enseignant débutant de dérsané propose cet exercice.

demandée « fonction par fonction » sans trouver la formule générale de la composée. Dans un autre exercice il est nécessaire de trouver la composée d'une fonction du second degré et l'inverse d'une fonction rationnelle. L'élève doit trouver d'abord ce dernier et ensuite la composée. Le dernier exercice est l'une des questions du concours.⁷⁶ On amène les élèves à trouver pour quelle valeur de x on a $(g^{-1} \circ f)(x) = -16$ en mobilisant les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \frac{2x-1}{x+5}$. L'élève doit trouver d'abord l'inverse de g et ensuite la composée $(g^{-1} \circ f)$. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii) *Décomposition implicite des fonctions (8 exercices)* : il s'agit de « décomposer » implicitement⁷⁷ les fonctions à partir des formules algébriques. Dans un exercice on demande de trouver la fonction f à partir de la composée $f(\frac{2x-1}{3}) = 2x+5$, dans le deuxième exercice de trouver la fonction f en utilisant la composée $f(3x+5) = 6x-1$. Dans le premier exercice l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction implicite $\frac{2x-1}{3}$ et ensuite mettre, ce qu'il a trouvé, à la place de x dans la composée. La même procédure est aussi valable pour le deuxième exercice. Dans quatre exercices il s'agit de travailler sur une fonction implicite affine et une composée affine. L'un de ces exercices demande aux élèves de trouver la fonction f et de calculer l'image d'un nombre réel. Les trois autres présentent presque le même travail. Mais ils demandent de calculer l'image d'un nombre réel par l'inverse de la fonction f . Le septième exercice invite les élèves à calculer la valeur $f(x+1)$ à partir de la composée $f^{-1}(\frac{x+2}{3}) = \frac{3x-2}{x-3}$. Il s'agit des trois étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f^{-1} comme dans les exercices précédents et ensuite la fonction f et l'image de $x+1$. Dans le dernier exercice on demande de trouver pour quelle valeur de a on a $f^{-1}(a) = -2$ si $f(x+2) = 3x-5$. Il s'agit des trois étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f et ensuite en utilisant la définition de la fonction inverse il peut obtenir $f(-2) = a$. Enfin il ne lui reste qu'à calculer l'image de -2 pour trouver la valeur a .

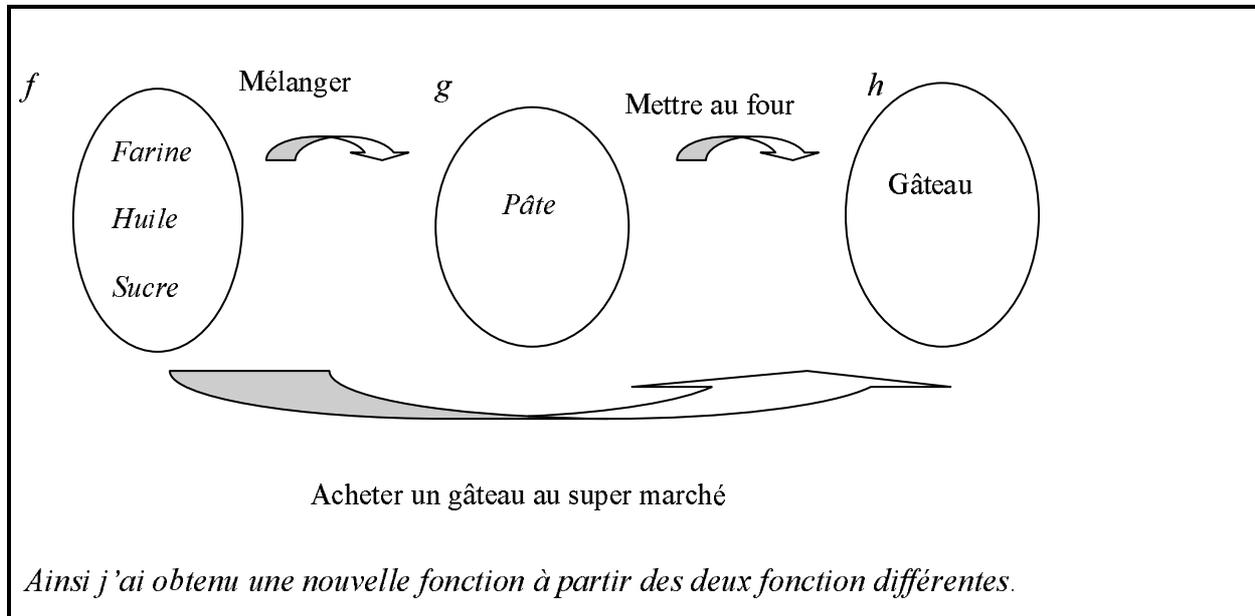
iii) *Décomposition des fonctions (2 exercices)* : dans deux exercices il s'agit de « décomposer » fog [ou gof] en utilisant f [ou g]. Chaque fonction qui figure dans l'énoncé sont du première degré. L'élève doit trouver d'abord l'inverse de la fonction donnée et ensuite

⁷⁶ Un enseignant chevronné de dérsané ayant une longue expérience au lycée propose cet exercice.

⁷⁷ Comme la question suivante si $f(2x+1) = 3x-2$, trouver la fonction f . Puisque l'une des composées $(2x+1)$ est implicitement donnée dans l'énoncé, nous appelons décomposée implicite ce type de décomposée.

l'autre fonction en utilisant la définition de la fonction identique. L'un des exercices demande aussi de calculer l'image d'un nombre réel par l'inverse de la fonction demandée.

iv) *Composition des fonctions dans la vie courante (1 exercice)* : une enseignante débutante de lycée prend un exemple de la vie courante pour faire introduire la composition des fonction.



1.4.5 Thème V : image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction définie algébriquement ou à partir d'ensembles (10 exercices)

Nous avons précisé deux catégories différentes pour classer les exercices selon la tâche prescrite :

i) *Calcul de l'image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction définie algébriquement ou à partir d'ensembles (7 exercices)* : dans un exercice⁷⁸ on amène les élèves à calculer l'image de $8x^2$ par la fonction définie par $f(x) = \log_2 x + 1$. L'élève doit mettre l'expression $8x^2$ à la place de x dans la fonction f . Le logarithme est un outil devant être disponible (ou chez les élèves de seconde il s'agit d'un outil prématuré⁷⁹) dans ce travail.

Le deuxième exercice demande de calculer la valeur $\frac{f(x-2) - f(x+2)}{f(x-1)}$ à partir de la fonction

exponentielle définie par $f(x) = 3^{x-2}$. L'élève est amené à trouver les images des expressions

⁷⁸ Un enseignant débutant de dérsané propose cet exercice en cours. Il n'enseigne que dans les classe de seconde. Par ailleurs, le logarithme est tout à fait dans l'esprit du programme officiel de la classe de première. Ainsi au dérsané à travers de cet exemple ces élèves-là font connaissance avec un sujet qui appartient à la classe suivante.

⁷⁹ Le mot est pris au sens de « adj. 1. Qu'il n'est pas encore temps d'entreprendre. 2. Qui arrive avant le temps normal » (*Le petit Robert*). Ainsi par un outil prématuré nous entendons qu'il s'agit d'utiliser une notion qui fait référence aux chapitres ultérieurs ou au programme des classes ultérieures.

algébriques par f . Ensuite les connaissances liées aux puissances que l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le troisième exercice il est nécessaire de calculer la valeur $f(-5)$ à partir de l'expression suivante $x.f(x)-3.f(-x)=3x+5$. L'élève doit mettre les valeurs 5 et -5 à la place de x dans l'expression. Ensuite en faisant appel à la résolution du système linéaire d'équations il doit trouver la valeur demandée. Dans le quatrième exercice où il s'agit de travailler sur une fonction exponentielle définie algébriquement, l'élève est amené à calculer la somme des images d'un nombre réel à la fois par la fonction et par son inverse. Les puissances que l'élève doit faire fonctionner sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Un autre exercice dont le type est un des types de question du concours⁸⁰ demande aux élèves de calculer l'image d'un nombre réel en utilisant la fonction définie par $f(x)=ax+b$ et les images des deux nombres réels. Alors l'élève doit tout d'abord trouver les valeurs a et b et ensuite l'image demandée. La résolution du système linéaire d'équations s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Le sixième exercice demande de calculer l'image de 0 en utilisant l'expression $f(x+1)-f(x)=x$ et $f(2)=5$. L'élève doit mettre les valeurs 0 et 1 à la place de x dans l'expression. Ensuite il doit faire la résolution du système linéaire d'équations comme dans l'exercice précédent. Le dernier exercice dans lequel il s'agit de travailler sur une fonction définie à partir d'ensembles par $f=\{(1,4),(3,2),(2,5),(4,3),(5,1)\}$ demande de calculer la valeur $f(2)+f^{-1}(3)+(f \circ f)^{-1}(1)$. L'élève doit mettre en fonctionnement la définition de la fonction inverse et de la composition.

ii) *Calcul de l'image d'une expression algébrique en fonction de $f(x)$* : dans un exercice⁸¹ on demande de calculer $f(2x-1)$ en fonction de $f(x)$ en utilisant la fonction $f(x+5)=5x-3$. Il s'agit de quatre étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f et ensuite l'image de l'expression $2x-1$ par f . Après avoir calculé x en fonction de $f(x)$ il doit le mettre dans l'image de $2x-1$. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans un autre exercice⁸² l'élève est amené à calculer l'image de $2x-1$ en fonction de $f(x)$ en utilisant la fonction f définie par $f(x)=2^{x+3}+2^{x-1}$. L'élève doit suivre la même procédure que dans les exercices précédents. La résolution d'équations exponentielles très particulières s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Le troisième exercice⁸³ demande de calculer la valeur $f(2x-1)$ en fonction de $f(x+2)$ à partir de la fonction $f(x-2)=3x+5$. La résolution de cet exercice comprend plusieurs étapes. Alors l'élève peut d'abord trouver la fonction f à partir

⁸⁰ Une enseignante débutante de lycée propose cet exercice en contrôle.

⁸¹ Un enseignant chevronné de lycée propose cet exemple en cours.

⁸² Idem (en contrôle).

⁸³ Un enseignant chevronné de lycée qui a une longue expérience au désané propose cet exercice en contrôle.

de la composée (implicite). En calculant les images des expressions $2x-1$ et $x+2$ par f il peut suivre la même procédure que dans les exercices précédents. Par ailleurs, l'élève peut aussi calculer les images par la fonction $f(x-2) = 3x+5$ sans trouver f . La résolution d'équations que l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

1.4.6 Thème VI : représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (4 exercices).

Nous avons classé les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite:

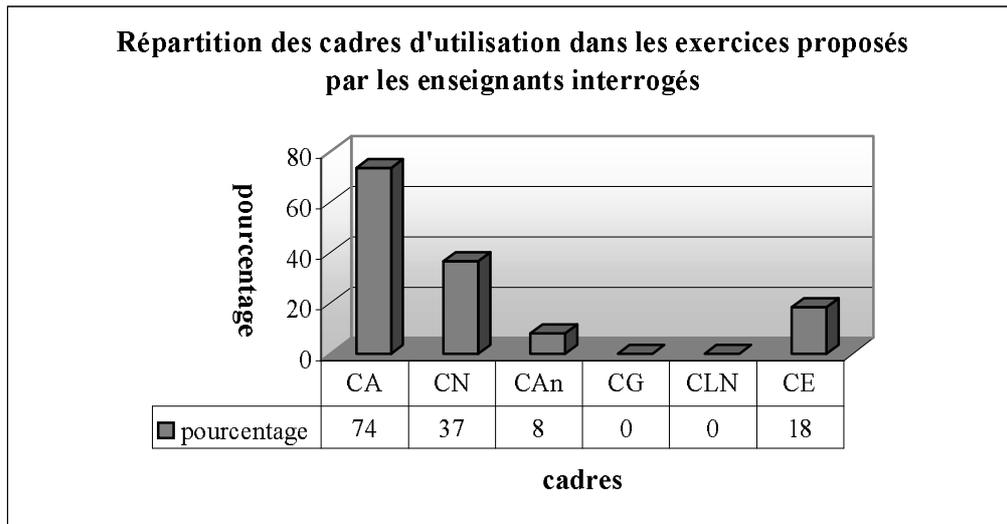
i) Déterminer graphiquement les valeurs demandées à partir de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 exercices) : l'élève doit déterminer graphiquement les images en sachant qu'on repère les éléments de l'ensemble de départ sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées. Ensuite il doit

calculer la valeur $\frac{f(6)+f^{-1}(6)}{f(f(3))}$ pour le premier exemple, la valeur $\frac{f(-1)+f(5)}{f^{-1}(4)}$ pour le

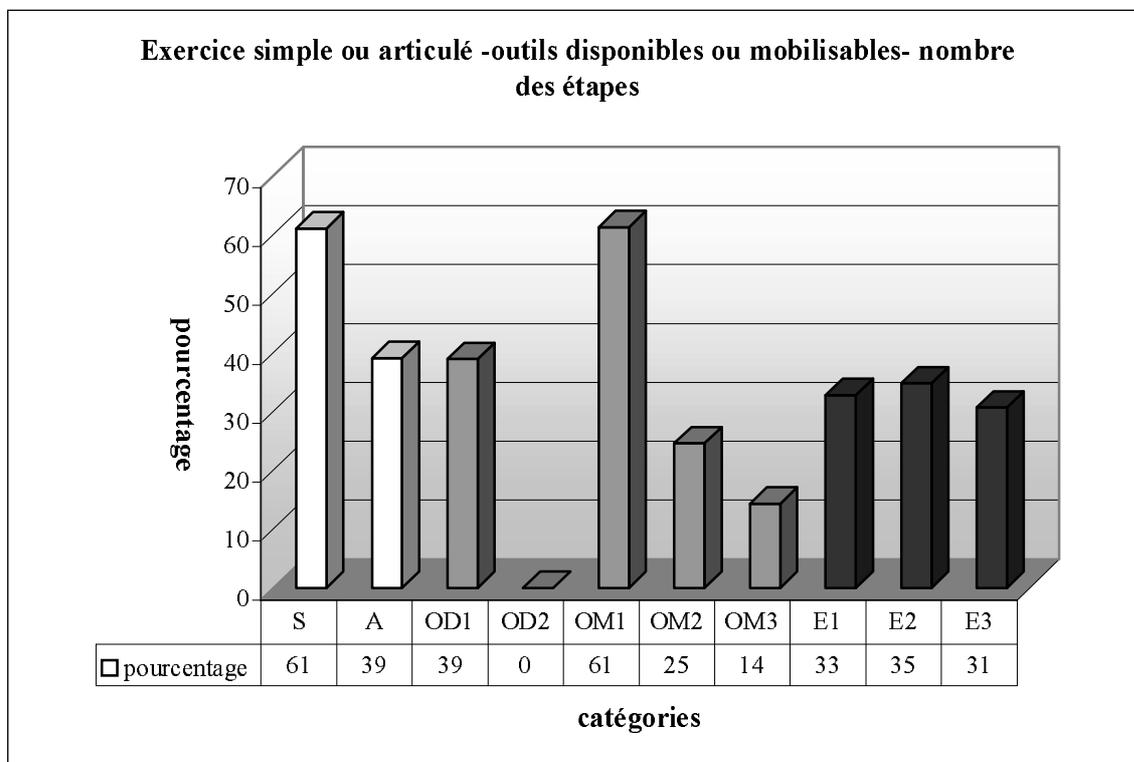
deuxième et la valeur $\frac{f(0)+f^{-1}(-3)}{f^{-1}(0)}$ pour le troisième.

ii) Représenter graphiquement des fonctions dans un repère orthonormé (1 exercice) : on invite les élèves à représenter graphiquement trois fonctions affines dans un repère orthonormé. Dans l'énoncé de l'exercice les ensembles où les fonctions sont définies ne sont pas précisés.⁸⁴ En faisant appel aux connaissances antérieures liées à la représentation graphique de la droite dans un repère orthonormé l'élève doit déterminer au moins deux points pour représenter les fonctions.

⁸⁴ En Turquie, dans le cas comme celui-ci, beaucoup d'élèves commencent généralement à tracer les représentations graphiques des fonctions en acceptant qu'elles sont définies sur \mathbb{R} .



En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans les exercices, comme le montre bien le tableau ci-dessus, le cadre « écrasant » est le cadre algébrique (CA, 74%). Dans plus du tiers des questions le cadre numérique est l'un des cadres du travail (CN, 37%). Par ailleurs, le cadre analytique (CAn) est peu fréquent. Tandis que le cadre géométrique (CG) et le cadre de langue naturelle (CLN) sont totalement disparus. Alors nous pouvons dire que les exercices proposés en cours ou contrôle par les enseignants interrogés sont algébriquement très riches et géométriquement très pauvres.



Nous remarquons que les exercices contiennent en général des applications directes du cours. La plupart d'entre eux relèvent du programme officiel du seconde. Mais on peut aussi trouver les exercices qui portent sur des connaissances dans le programme des classes suivantes. Plus de la moitié des exercices font référence directe à la notion de fonction ou à ses composantes (simple :S). Tandis que 39% portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves (articulé :A). Dans 39% des exercices l'élève doit faire appel à une seule connaissance antérieure (OD1 : 1 outil disponible). Il n'y a aucun exercice dans lequel il est nécessaire de disposer des deux connaissances antérieures (OD2 : 2 outils disponibles).

La plupart des exercices demandent de mobiliser une connaissance qui fait référence directe aux fonctions (OM1 : 1 outil mobilisable). Tandis que dans un quart des exercices il s'agit de deux connaissances à mobiliser (OM2 :2 outils mobilisables). Un petit nombre d'entre eux conduisent l'élève à mobiliser trois ou plus de trois connaissances liées directement aux fonctions (OM3 : 3 outils mobilisables). En ce qui concerne la répartition des exercices suivant le nombre des étapes, la plupart d'entre eux présentent plusieurs étapes (66% E2 et E3). Tandis que dans un tiers des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en une seule étape.

2. Synthèse

Nous présenterons pour chaque partie du questionnaire les tendance générales qui se dégagent des réponses.

Signalons toutefois qu'il convient de rester prudent par rapport à ces résultats. En effet nous n'avons pas eu l'occasion d'observer directement les pratiques effectives des enseignants et nous nous contenterons des réponses données aux questionnaires. De plus, le nombre limité d'enseignants que nous avons pu interroger ne permet pas de garantir que les résultats obtenus soient significatifs.

L'expérience professionnelle des enseignants

Les professeurs chargés de l'enseignement de la fonction, que nous avons interrogés se distinguent en trois catégories différentes par la durée de leur expérience professionnelle :débutant, expérimenté et chevronné. En ce qui concerne les établissements où les professeurs travaillent (ou ont travaillé), nous avons aussi une diversité riche :lycée, dérsané, avant lycée maintenant dérsané⁸⁵ et avant dérsané maintenant lycée. Par ailleurs, tous

⁸⁵ Certains enseignants commencent à travailler au dérsané après leur retraite.

les enseignants enseignent (ont enseigné) dans la classe concernée pendant une période qui varie de 4 mois à 22 ans.

Le rapport des enseignants aux programmes officiels

Les enseignants de lycée s'appuient sur le programme pour réaliser leur enseignement. Par contre certains enseignants de dérsané indiquent qu'ils ne l'ont jamais consulté. Et ils réalisent leur enseignement à partir des questions déjà posées au concours. Certains d'autres affirment consulter le programme en disant qu'ils font des cours qui visent à la fois à préparer les élèves au concours et les soutenir aux cours de lycée.

L'image que les enseignants se font de l'enseignement de la notion de fonction

Le chapitre sur la fonction est perçu comme important par les enseignants mais pour des raisons, semble-t-il, un peu vagues. Toutefois nous avons l'impression que l'intérêt du chapitre repose plutôt sur le fait que la notion de fonction soit un des sujets essentiels des mathématiques et elle améliore la capacité de penser et interpréter des élèves. Parmi les objectifs, nous constatons que les enseignants accordent une place importante à l'acquisition des notions de base par les élèves (la définition ensembliste des fonctions, les ensembles correspondant, l'inverse d'une fonction, la composition des fonctions... etc.).

La quasi-totalité des enseignants pense qu'à l'origine d'une grande partie des erreurs et des difficultés des élèves se trouve une assimilation insuffisante des connaissances élémentaires concernant les classes précédentes. De plus les difficultés liées à trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement sont aussi fréquemment citées par les enseignants.

Les réponses données sur la question relative aux ressources confirment que les enseignants de lycée utilisent à la fois des manuels différents de lycée et ceux de la préparation au concours. Quant à ceux qui travaillent au dérsané, certains se limitent à l'utilisation des manuels du concours et certains d'autres utilisent en plus des manuels de lycée.

Organisation du cours

Ce que nous retenons des réponses données en ce qui concerne l'introduction des fonctions, par les enseignants, c'est leur homogénéité. En mettant en évidence la différence entre correspondance et fonction les enseignants font introduire la notion de fonction avec sa définition à partir des ensembles. Ensuite ils proposent des exemples de la vie courante pour faciliter la compréhension de cette définition ensembliste.

Quand on regarde les exercices utilisés, nous remarquons qu'il n'y a aucun exercice qui fait intervenir la fonction comme un outil. Les exercices utilisés donnent en général l'impression qu'il s'agit de sujet type pour le concours. Mais, contrairement aux questions du concours, la plupart d'entre eux ne portent pas sur plusieurs connaissances antérieures des élèves.

La composition de fonctions définies algébriquement (ou à partir d'ensembles) semble très importante aux enseignants. Il y a pas mal d'exercices proposés qui concernent la définition ensembliste de la notion de fonction, l'image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction définie algébriquement et l'inverse d'une fonction définie algébriquement.

En ce qui concerne les cadres d'utilisation, les cadres principaux des exercices sont le cadre algébrique et le cadre numérique. Le fait qu'un très petit nombre des exercices mobilisent le cadre analytique et aucun exercice n'utilise le cadre géométrique nous conduit à dire que les exercices sont géométriquement très pauvres.

3. Conclusion

Selon les enseignants, la grande partie des erreurs et des difficultés des élèves proviennent d'une assimilation insuffisante des connaissances élémentaires relatives aux classes précédentes. De plus ils affirment que les élèves ont de grosses difficultés à trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement. Nous pensons que cela explique aussi le privilège de la recette R_a par la plupart des enseignants. Comme il manque des connaissances élémentaires aux élèves, au lieu de faire beaucoup d'efforts pour leur faire acquérir la méthode plus mathématisée, les enseignants préfèrent la recette R_a .

Les enseignants de lycée utilisent à la fois des manuels différents de lycée et ceux de la préparation au concours. On peut donc dire que dans leurs cours l'intérêt du concours joue un rôle important.

Conformément aux manuels, les enseignants introduisent la notion de fonction en mettant en évidence la différence entre correspondance et fonction et ils utilisent la définition ensembliste des fonctions. Cela signifie qu'il est difficile de rencontrer le sens des fonctions en termes de variable dans les pratiques des enseignants. De plus ils proposent des exemples de la vie courante à l'intention de faciliter la compréhension de cette définition ensembliste.

Les enseignants ne proposent aucun exercice, ni dans le cours ni dans les contrôles, qui fait intervenir la notion de fonction comme un outil et l'influence du concours apparaît aussi dans le choix d'exercices des enseignants. La plupart des exercices utilisés par les enseignants sont soit des questions déjà posées au concours soit leurs ressemblantes, mais, contrairement aux questions du concours, la plupart des exercices sont simples et isolés.

Comme dans les manuels, le cadre algébrique et le cadre numérique sont les cadres principaux des exercices. Un très petit nombre des exercices demandent d'utiliser le cadre analytique et le cadre géométrique n'est jamais utilisé. On peut donc dire que les exercices utilisés par les enseignants sont géométriquement très pauvres.