

UNIVERSITE PARIS VII-DENIS DIDEROT

Année 2003

THESE

Pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VII
Spécialité

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue publiquement

le 23 novembre 2003

par

Savaş BAŞTÜRK

**ETUDE SUR L'ENSEIGNEMENT ACTUEL DES MATHÉMATIQUES EN
TURQUIE D'UN POINT DE VUE DIDACTIQUE :en cas du concours d'entrée à
l'université**

(ANNEXES)

Directeurs de thèse

Monsieur Jacques COLOMB

Madame Aline ROBERT

Membres du Jury

M. Jacques COLOMB

M. Jean Luc DORIER

Mme Aline ROBERT

Mme Jacqueline ROBINET

Mme Maggy SCHNEIDER

INRP de Paris

IUFM de Lyon

IUFM de Versailles

Université de Paris VII

FUNDP de Namur

Directeur

Rapporteur

Directeur

Examineur

Rapporteur

ANNEXES

Table des matières des annexes :

ANNEXE I : ANALYSE DES MANUELS :MANUEL ALTIN, MANUEL AYDIN, MANUEL UGUR, MANUEL ZAFER.....	390
ANNEXE II : QUESTIONS PROPOSEES AU CONCOURS LORS DES EPREUVES DE L' ANNEE 1970-2003.....	464
ANNEXE III : UN EXEMPLAIRE DU CONCOURS D'ENTREE A L'UNIVERSITE DE 2003.....	475
ANNEXE IV : PROGRAMME DE SECONDE EN TURC ET EN FRANÇAIS	486
ANNEXE V : QUESTIONNAIRES.....	493

ANNEXE I

ANALYSE DES MANUELS :

- 1. manuel de lycée Altın**
- 2. manuel de lycée Aydın**
- 3. manuel de préparation Uğur**
- 4. manuel de préparation Zafer**

Plan de l'annexe I :

1. <i>Analyse du manuel de lycée Altın</i>	393
1.1 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant.....	393
1.2 Egalité des fonctions.....	394
1.3 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières.....	394
1.4 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	395
1.5 Ensembles infinis ou finis et ensembles équipotents.....	395
1.6 Définition de l'inverse d'une fonction.....	395
1.7 Composition des fonctions.....	396
1.8 Exercices résolus.....	397
1.8.1 Thème I : définition ensembliste de la notion de fonction.....	398
1.8.2 Thème II : propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières.....	400
1.8.3 Thème III : recherche de l'inverse d'une fonction algébrique.....	400
1.8.4 Thème IV : composition des fonctions.....	401
1.8.5 Thème V : image d'un nombre réel ou d'une expression.....	402
1.9 Synthèse.....	402
2. <i>Analyse du manuel de lycée Aydın</i>	405
2.1 Activités introductrices.....	405
2.2 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant.....	405
2.3 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	406
2.4 Egalités des fonctions.....	406
2.5 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières.....	407
2.6 Ensembles infinis et ensembles équipotents.....	408
2.7 Composition des fonctions.....	408
2.8 Définition de l'inverse d'une fonction.....	409
2.9 Exercices résolus.....	410
2.9.1 Thème I : définition ensembliste de la notion de fonction.....	412
2.9.2 Thème III : composition des fonctions.....	412
2.9.3 Thème IV : recherche de l'inverse d'une fonction.....	415
2.9.4 Thème V : image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique.....	416
2.9.5 Thème VI : représentation graphique des fonctions.....	417
2.10 Synthèse.....	418
3. <i>Analyse du manuel de préparation au concours Uğur</i>	422
3.1 Définition ensembliste de la notion de fonction.....	422
3.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	423
3.3 Quatre opérations sur les fonctions.....	424
3.4 Egalité des fonctions.....	424
3.5 Propriétés particulières et fonctions particulières.....	425
3.6 Fonction de permutation.....	427
3.7 Définition de l'inverse d'une fonction.....	428
3.8 Composition des fonctions.....	431
3.9 Exercices résolus.....	431
3.9.1 Thème I : définition ensembliste de la notion de fonction.....	432
3.9.2 Thème II : propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières.....	432
3.9.3 Thème III : recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement.....	433
3.9.4 Thème IV : composition des fonctions.....	433
3.9.5 Thème V : image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique.....	436
3.9.6 Thème VI : représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	439
3.10 Synthèse.....	440
4. <i>Analyse du manuel de préparation au concours Zafer</i>	445

4.1 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant.....	445
4.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé.....	445
4.3 Quatre opérations sur les fonctions.....	446
4.4 Egalité des fonctions.....	446
4.5 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières.....	447
4.6 Définition de l'inverse des fonctions.....	449
4.7 Composition des fonctions.....	451
4.8 Exercices résolus.....	451
4.8.1 Thème I : définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondant.....	451
4.8.2 Thème II : propriétés particulières et fonctions particulières.....	452
4.8.3 Thème III : recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement.....	452
4.8.4 Thème IV : composition des fonctions.....	454
4.8.5 Thème V : image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique.....	457
4.8.6 Thème VI : représentation graphique des fonctions.....	459
4.9 Synthèse.....	460

Annexe I-1 : analyse du manuel de lycée Altın

Comme le manuel précédent la notion de fonction est présentée dans le chapitre intitulé « correspondances- fonctions- loi de composition interne ». Nous ne trouvons aucune activité introductrice même pas une petite phrase qui provoque une réflexion chez élèves sur la nouvelle notion à présenter. Les auteurs du manuel commencent directement par le cours en faisant introduire la notion de fonction avec sa définition ensembliste.

1.1 La définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant

Comme nous l'avons déjà indiqué, le manuel présente la notion de fonction de manière ensembliste.

Etant donné A et B deux ensembles non vides. On appelle fonction de A vers B la correspondance qui à chaque élément de A associe un seul élément de B .

On note : $f: A \rightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$.

Bien qu'il n'y ait aucune indication sur la définition de la notion de fonction dans le programme, les auteurs se contentent de donner la définition à partir d'ensembles. Comme nous le verrons dans les parties suivantes, on ne parle jamais du sens en termes de variable dépendante ou indépendante.

Il y a un exemple qui illustre la définition. Conformément au programme le manuel fait introduire les ensembles associés à la notion de fonction : ensemble de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image et leur représentation en diagramme sagittal. L'écriture symbolique de la définition et la comptine C_0 figurent aussi à la suite de la définition.

Si f est une fonction de A vers B ;

a. Il n'y a aucun élément vacant dans l'ensemble de définition.

b. Un élément de l'ensemble de définition s'associe à un seul élément unique de l'ensemble d'arrivée.

c. $\text{Card}(f) = \text{Card}(A)$ c'est-à-dire le cardinal de la fonction est égal à celui de l'ensemble de définition de la fonction.

d. Dans l'ensemble d'arrivée il (ne) peut y avoir des éléments vacants.

e. Un élément de l'ensemble d'arrivée peut s'associer à plus d'un élément de l'ensemble de définition.

La théorie est suivie d'une série d'exemples. Les trois premiers exemples font appliquer directement la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine C_0). Il s'agit donc des correspondances définies à partir d'ensembles. Et l'élève est amené à repérer quelle est une fonction parmi des correspondances définies. Dans le quatrième exercice on demande d'écrire une fonction f affine d'un sous-ensemble fini de Z dans Z sous forme d'une liste¹ des couples et ensuite représenter la fonction f en diagramme sagittal. En ce qui concerne les deux derniers, l'un montre qu'une fonction définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) n'est pas fonction de l'un des sous-ensembles de A vers B . Inversement l'autre consiste à montrer qu'une fonction définie de A vers B est fonction de A vers l'un des sous-ensembles de B . Dans ces deux exemples la représentation en diagramme sagittal est utilisée.

1.2 Egalité des fonctions

Nous trouvons ici la définition des fonctions identiques et un exemple illustratif dans lequel l'élève doit étudier si une fonction du second degré et une fonction affine, définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z , sont égales.

1.3 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

D'abord figurent la définition ensembliste des fonctions injectives et l'écriture symbolique. Il y a deux exemples qui suivent la définition. L'un fait utiliser directement la définition à partir d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . Et l'autre demande de mettre en fonctionnement l'écriture symbolique de la définition pour montrer l'injectivité d'une fonction affine définie sur $|\mathbb{R}$.

Le manuel illustre aussi la définition ensembliste des fonctions surjectives avec deux exemples. Dans le premier, il s'agit d'étudier la surjectivité d'une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit faire attention au fait qu'il n'y ait aucun élément vacant dans l'ensemble d'arrivée. Quant au deuxième exemple, l'élève doit y faire la même chose à partir d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z .

Par ailleurs nous pouvons trouver la définition des autres propriétés particulières des fonctions de manière ensembliste: fonctions non-surjectives, bijectives, injectives et non-

¹ Comme la suivante $f = \{(1,4), (2,7), (3,10), (4,13)\}$

surjectives, fonction identique, constantes et nulle. Et elles sont illustrées par des exemples et leurs représentations en diagrammes sagittaux.

1.4 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

Après avoir défini la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, le manuel propose deux exemples. L'un fait représenter graphiquement dans un repère orthonormé une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et l'autre, une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit d'abord déterminer des points de coordonnées en calculant les images et ensuite les placer dans le plan analytique.

1.5 Ensembles infinis ou finis et ensembles équipotents

Les ensembles infinis ou finis et les ensembles équipotents sont présentés à partir de la bijectivité et de l'exemple conforme aux consignes du programme officiel. La définition des ensembles infinis ou finis est suivie d'un exemple dans lequel on demande de montrer que l'ensemble des nombres naturels est infini. Pour ce faire l'élève est amené à étudier la bijectivité de la fonction f définie de l'ensemble des nombres naturels vers l'ensemble des nombres pairs par $f(x)=2x$. En ce qui concerne les ensembles équipotents, il y a un seul exemple qui illustre leur définition. Dans cet exemple en utilisant la fonction définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z) par $f(x)=2x-1$ il est nécessaire de montrer que les ensembles A et B sont équipotents.

1.6 Définition de l'inverse d'une fonction

En s'appuyant sur la notion de correspondance entre ensembles l'inverse d'une fonction est définie à partir des éléments. La définition est suivie de quelques commentaires qui peuvent être qualifiés des mises en garde. Ainsi on dit que si la fonction f définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z) est bijective, elle est inversible, que la fonction f et f^{-1} est réciproquement l'inverse de l'une et de l'autre et que la notation f^{-1} ne signifie pas $\frac{1}{f}$. Nous

constatons que l'écriture symbolique de la définition figure aussi à la suite de la définition

$$((x,y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1} \text{ donc } y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)).$$

Cette théorie est suivie de cinq exemples. Les trois premiers exemples concernent des applications directes du premier commentaire. Alors on y demande d'étudier si l'inverse des

trois fonctions définies à partir d'ensembles sont une fonction. L'élève doit chercher la bijectivité des fonctions proposées.

A la suite de ces exemples, le manuel fait introduire la méthode \mathbf{M}_{xfy} pour trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement :

En pratique lorsqu'on trouve l'inverse d'une fonction (si elle existe), on calcule x en fonction de y dans la formule de la fonction. Cette valeur dépendante de y et égale à x désigne la formule de la fonction inverse. En général dans la formule de cette dernière on remplace x par y et vice et versa.

Le quatrième exemple comprend deux parties. La première partie propose de déterminer l'ensemble image d'une fonction f affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé et en diagramme sagittal. Dans la deuxième partie l'élève est amené à trouver la formule générale de la fonction inverse f^{-1} et représenter f^{-1} graphiquement dans un repère orthonormé et en diagramme sagittal. L'élève doit trouver l'inverse de la fonction en mettant en fonctionnement la méthode \mathbf{M}_{xfy} .

Le dernier exemple fait trouver l'ensemble de définition d'une fonction f affine surjective définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction à partir de la méthode \mathbf{M}_{xfy} et ensuite trouver l'ensemble de définition de la fonction f ou l'ensemble image de la fonction inverse f^{-1} .

Après ces exemples, la représentation graphique de la fonction inverse dans un repère orthonormé est introduite sous le titre « tracer la représentation graphique d'une fonction donnée et son inverse ». Une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et son inverse sont graphiquement représentés dans un même repère orthonormé. Grâce à cet exemple, l'élève est amené à reconnaître que la représentation graphique d'une fonction et celle de son inverse sont symétrique par rapport à la droite $y=x$.

1.7 Composition des fonctions

Cette partie commence par un exemple préparatoire dans lequel il s'agit de représenter en diagrammes sagittaux deux fonctions affines dont l'une est définie de A vers B et l'autre de B vers C (A , B et C sont les sous-ensembles finis de Z). Ainsi on conduit l'élève à reconnaître qu'il y a une troisième fonction qui associe à chaque élément de A un seul élément de C .

La définition est suivie de l'écriture symbolique, de la représentation en diagramme sagittal et d'une série d'exemples.

Dans le premier exemple on demande de composer une fonction du second degré et une fonction affine. Le deuxième exemple amène les élèves à étudier une composée représentée graphiquement. L'articulation entre le registre fonctionnel et les diagrammes sagittaux est utilisée. Quant à l'exemple suivant, il fait composer une fonction affine et une fonction du second degré définies sur Z et calculer l'image de quelques valeurs numériques. Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Le quatrième exemple demande de trouver d'abord la composée d'une fonction du second degré et une fonction affine définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et ensuite l'ensemble image de la composée demandée. Le but principal des deux derniers exemples est de faire trouver l'une des fonctions lorsqu'on donne la composée ($g \circ f$) et l'autre fonction (f). Ainsi le premier d'entre eux propose une composée et une fonction affines et le deuxième une composée du second degré et une fonction affine. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction à partir de la méthode M_{xy} et ensuite le mettre à la place de x dans la composée. Dans le deuxième exemple une identité remarquable dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

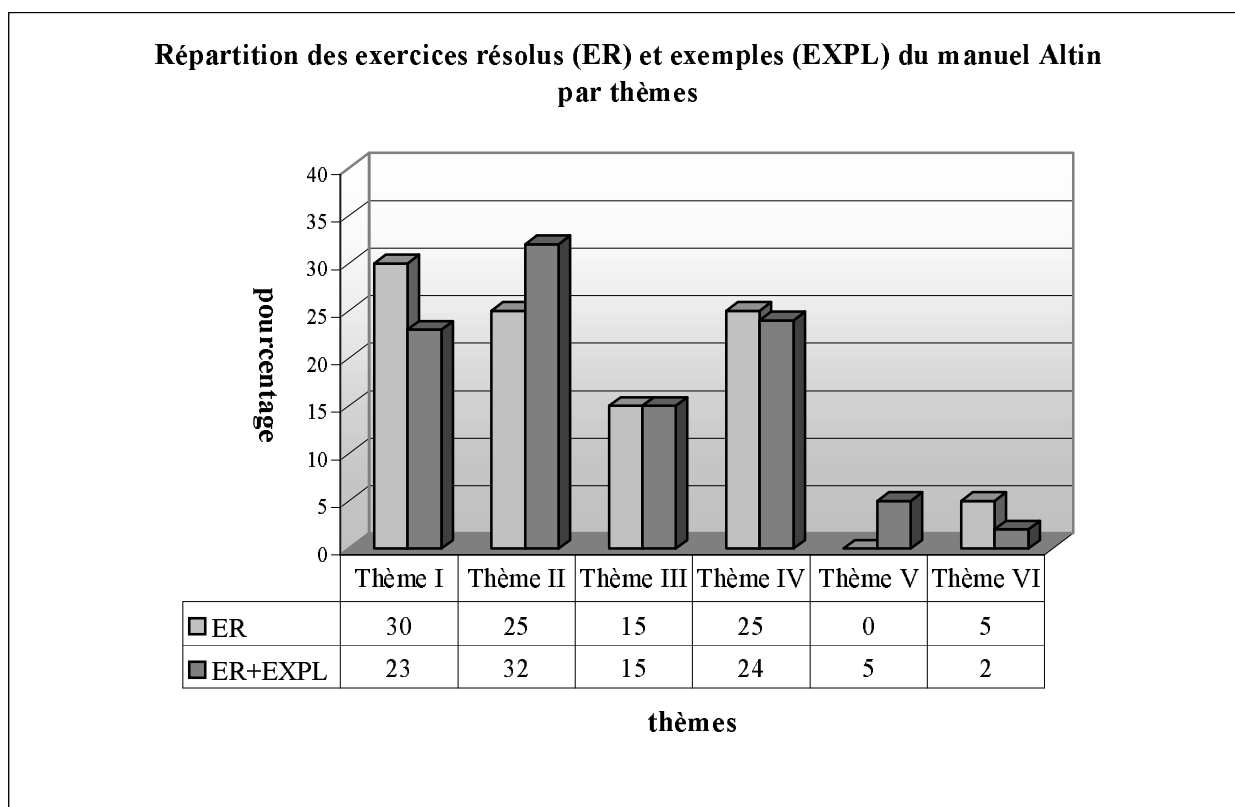
Par ailleurs le manuel présente certaines propriétés de la composée. Ainsi l'inexistence de la commutativité de la composée (elle n'est pas démontrée, illustrée par un exemple), la bijectivité de la composée des fonctions bijectives (pas démontrée, ni illustrée par un exemple), la composée d'une fonction et la fonction identique (démontrée), la composée d'une fonction et son inverse (démontrée et illustrée par un exemple), l'inverse de la composée (démontrée et illustrée par un exemple), l'inverse de l'inverse d'une fonction (démontré et illustré par un exemple) et l'associativité de la composée (démontrée et illustrée par un exemple) sont mises en place.

1.8 Exercices résolus (20 exercices)

Nous abordons maintenant les exercices résolus. Le manuel les propose en deux parties sous le titre « applications ». Conformément aux consignes du programme la loi de composition interne est introduite avant de passer à la notion de fonction inverse et la composition des fonctions. Alors la première partie des exercices résolus apparaît avant ces dernières. Quant à la deuxième partie, elle figure au bout du chapitre.

Nous trouvons cinq thèmes dans les exercices résolus. Si l'on prend en compte tous les exercices (exemples) du manuel, le nombre des thèmes monte à six. :

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, qui présente la répartition de tous les exercices résolus et exemples du manuel Altin, le thème II est le thème le plus fréquent. Et il est suivi des thèmes I et IV. Puisque la plupart des exercices concernant la composition des fonctions utilisent aussi la fonction inverse, le taux des exercices liés directement à l'inverse d'une fonction est seulement de 15%. Les thèmes V et VI sont les thèmes marginaux des exercices du manuel.



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction... Thème II : Propriétés particulières des fonctions... Thème III : Recherche de l'inverse à partir d'une fonction définie algébriquement ou de manière ensembliste Thème IV : Composition des fonctions à partir d'ensembles, Thème V : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé², Thème VI : Recherche de l'image d'un nombre réel ou d'une fonction définie par une expression algébrique, EXP : Exemples (effectif : 42), ER : Exercices résolus (effectif : 20 exercices)

1.8.1 Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction : (6 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Application de la définition ensembliste (1 exercice) : il s'agit de travailler sur la représentation en diagramme sagittal d'une correspondance définie entre ensembles. L'élève est amené à chercher si cette correspondance est une fonction. Alors il doit appliquer la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine C₀).

² Dans la partie des exercices résolus, il n'y a aucun exercice qui concerne la représentation graphique de la fonction dans un repère orthonormé. Mais le manuel propose trois exemples (ou exercices) à la suite de la définition de cette dernière.

ii) *Déterminer les ensembles correspondant (l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée ou l'ensemble image d'une fonction) (2 exercices)* : il y a deux exercices pour lesquels on demande de déterminer les ensembles correspondant. Ainsi l'un propose de trouver l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction en utilisant sa représentation en diagramme sagittal et d'écrire la fonction sous forme de liste de couples. Et l'autre est une des questions du concours (Q9/1976). L'élève est amené à déterminer l'ensemble image d'une fonction définie algébriquement de A qui est l'ensemble des nombres pairs vers B. Il doit mettre l'expression générale des nombres pairs ($2n$), qui est précisée dans l'énoncé de l'exercice, à la place de x dans la formule de la fonction. Ainsi les connaissances antérieures liées aux ensembles des nombres paraissent comme des outils supposés disponibles dans ce travail.

iii) *Calculer le nombre des fonctions ou non-fonctions (3 exercices)* : il y a trois exercices dans lesquels il s'agit de calculer le nombre des correspondances qui sont des fonctions ou qui n'en sont pas définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. L'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercices. Ainsi dans un exercice on demande de calculer le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans la résolution la formule nécessaire est simplement donnée sans commentaire. Il faut cependant souligner que dans le programme il n'y a aucune indication relative à cet exercice. L'élève doit d'abord trouver le cardinal des ensembles. Ensuite il doit appliquer la formule donnée³. Le cardinal et la puissance sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exercice fait calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Les formules sont aussi énoncées sans raison comme dans l'exercice précédent et on demande à l'élève de les appliquer simplement. L'élève doit d'abord calculer le nombre des correspondances et des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre et ensuite la différence entre eux. Dans le dernier exercice on demande de calculer le cardinal de l'ensemble A si les cardinaux des ensembles A et B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z) sont égaux et le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z est de 12. En utilisant les formules données dans les exercices précédents l'élève doit obtenir une équation exponentielle très particulière et ensuite la résoudre à partir des expérimentations numériques mais cette tâche est celle des chapitres suivants. Alors on peut dire qu'il s'agit d'une tâche prématurée.

³ Si $\text{Card}(A)=m$ et $\text{Card}(B)=n$, le nombre des fonctions définies de A vers B : n^m

1.8.2 Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (5 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Chercher l'injectivité des fonctions (2 exercices) : un exercice fait chercher si une fonction f affine définie sur Z est injective. L'élève doit mettre en fonctionnement l'écriture symbolique de la définition des fonctions injectives. Dans le deuxième exercice l'élève est amené à déterminer d'abord l'ensemble B qui contient des restes de la division de chaque élément de l'ensemble A par 5. Ensuite il doit représenter en diagramme sagittal la fonction f qui associe à chaque élément de A un élément de B et étudier la bijectivité de cette fonction. La division paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii) Calculer le nombre des fonctions bijectives, injectives et non surjectives, non surjectives et non bijectives (3 exercices) : L'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercice. De plus il n'y a aucune indication qui les mentionne dans le programme. Dans un exercice on demande de calculer le nombre des fonctions injectives et non-surjectives définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . La formule⁴ dont l'élève a besoin est donnée dans la résolution sans commentaire et on lui demande de l'appliquer simplement en faisant appel aux connaissances antérieures concernant la permutation et les factorielles. Le deuxième exercice fait calculer le nombre des fonctions bijectives définies sur A (un sous-ensemble fini de Z). L'élève doit trouver le cardinal de l'ensemble A et ensuite appliquer simplement la formule énoncée comme dans les exercices précédents. Les factorielles que l'élève doit se servir sont les outils devant être disponibles dans ce travail. Dans le dernier exercice il faut calculer le nombre des fonctions non bijectives définies sur A (un sous-ensemble fini de Z). L'élève doit d'abord trouver le nombre des fonctions et celui des fonctions bijectives définies sur A et ensuite leur différence. La puissance, les factorielles et le cardinal s'avèrent les outils supposés disponibles dans ce travail.

1.8.3 Thème III : Recherche de l'inverse à partir d'une fonction algébrique (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Recherche de l'inverse d'une fonction définie à partir d'ensembles (1 exercice) : il s'agit de travailler sur une fonction f définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. On demande de déterminer certaines images par l'inverse de la fonction f . L'écriture

⁴ Si $\text{Card}(A)=m$, $\text{Card}(B)=n$ et $n>m$, le nombre des fonctions injectives et non-surjectives ;

$$P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

des fonctions (f et f^{-1}) sous forme de liste de couples et leur représentation en diagrammes sagittaux sont utilisées.

ii) *Recherche de l'inverse des fonctions définies algébriquement (2 exercices)* : dans un exercice il s'agit de trouver l'inverse d'une fonction f affine définie sur Z et exprimer la somme $f(2)+f^{-1}(3)$. En mettant en fonctionnement la méthode \mathbf{M}_{xy} , l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction et ensuite calculer les images demandées pour trouver leur somme. Le deuxième exercice comprend deux parties. La première partie fait trouver l'inverse d'une fonction f affine, bijective et définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . Dans la deuxième partie il est nécessaire de résoudre l'équation $f^{-1}(24)-f(x)=f(-1)$. L'élève doit calculer l'image de 24 par f^{-1} et l'image de -1 par f pour obtenir l'équation demandée. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

1.8.4 Thème IV :Composition des fonctions (5 exercices)

Nous constatons que les exercices se distinguent en deux catégories différentes suivant la tâche prescrite :

i) *Composition des fonctions (3 exercices)* : dans un exercice on demande de calculer la valeur $(f \circ g^{-1})^{-1}(1)$ à partir des deux fonctions affines, bijectives et définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit d'abord appliquer la propriété de l'inverse de la composée puis trouver l'inverse de la fonction f en utilisant la méthode \mathbf{M}_{xy} pour obtenir la composée $g \circ f^{-1}$ et l'image demandée. Le deuxième exercice fait trouver, en utilisant deux fonctions affines définies sur Z , pour quelle valeur entière de k on a $(f \circ g^{-1})(k)=1$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction g et ensuite la composée. La résolution d'équations que l'élève doit faire fonctionner est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le dernier exercice on demande de trouver, en utilisant deux fonctions affines définies sur Z , pour quelle valeur de a on a $(f \circ g)(a)+(g \circ f)(a)=f(a)-g(a)+1$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord déterminer les deux types de composée ($g \circ f$ et $f \circ g$) et ensuite calculer l'image de a par ces composées et les fonctions f et g . La résolution d'équations paraît aussi comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii) *Décomposition des fonctions (2 exercices)* : Un exercice fait trouver la fonction g si $(f \circ g)(x)=x$ et $f(x)=\frac{2x-5}{3}$, pour les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . En utilisant la relation entre la fonction identique et la composée d'une fonction et son inverse l'élève doit reconnaître que la fonction g est égale à l'inverse de la fonction f . Il lui reste donc à trouver ce dernier à partir de la méthode \mathbf{M}_{xy} . Le deuxième exercice on demande

de trouver la fonction g si $f: x \rightarrow x^2$ et $g \circ f: x \rightarrow -2x^2 + 5$, pour les fonctions f et g définies sur Z . L'élève est amené à utiliser la méthode du changement de variable. Ainsi il doit remplacer x^2 par y dans la formule de la composée. Cela lui permet d'obtenir la fonction g sans mettre en fonctionnement l'inverse de g et la décomposition.

1.8.5 Thème V : Image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction (1 exercice)

Puisqu'il y a beaucoup d'exercices dans lesquels l'élève doit calculer l'image des nombres réels, nous pouvons trouver un seul exercice qui fait directement calculer l'image d'un nombre réel. Dans cet exercice on demande de trouver la valeur $f(-2) - 4f(1) + 2f(0)$ à partir d'une fonction f affine définie sur Z . L'élève doit d'abord calculer les images et ensuite exprimer la valeur demandée.

1.9 Synthèse

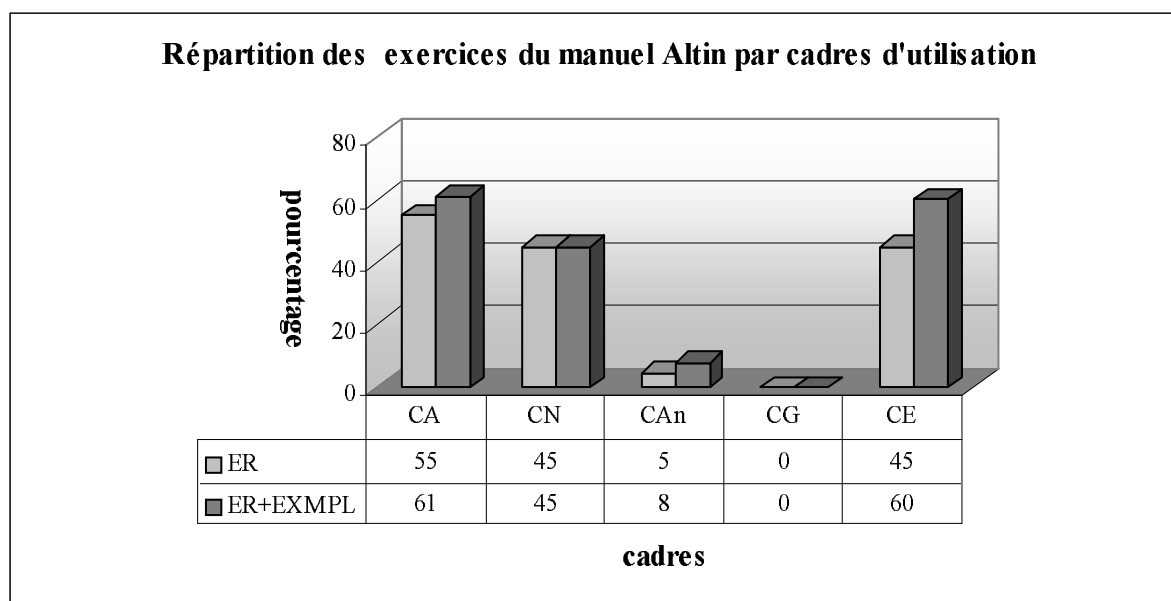
Nous constatons que toutes les notions qui figurent dans le programme officiel sont abordées par le manuel. Il n'y a aucune activité introductrice. La définition ensembliste est la seule définition utilisée pour introduire la notion de fonction. En ce qui concerne la méthode utilisée pour trouver l'inverse des fonctions, c'est la méthode M_{xfy} . Nous ne rencontrons pas la recette R_a dans le cours ni dans les exercices résolus.

Dans la collection de Altın il n'y a pas non plus de travaux pratiques comme le manuel précédent. Le manuel présente la résolution d'un certain nombre d'exercices. Et chacun contient une solution commentée. Dans la plupart des exercices il s'agit en général des applications directes du cours. Mais nous pouvons cependant trouver des exercices résolus⁵ qui sont mis en place pour la première fois (le calcul des nombres de correspondances qui sont des fonctions ou qui n'en sont pas...etc). Dans leur résolution proposée, les formules dont l'élève doit se servir sont simplement données sans commentaire. Et on attend de l'élève de les mémoriser et de les appliquer. De plus ils ne sont même pas dans le programme.

Quant aux cadres d'utilisation des exercices, le tableau ci-dessous montre que les cadres principaux sont le cadre algébrique(CA), le cadre numérique(CN) et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles(CE). Le très faible pourcentage des exercices utilisent le cadre

⁵ Les exercices concernant le nombre des fonctions, non-fonctions, fonctions injectives définies de A vers B ...etc.

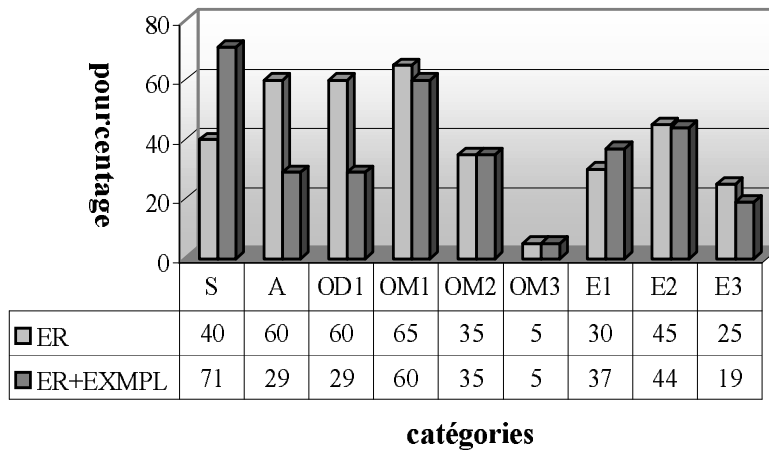
analytique (CAn). Tandis que le cadre géométrique(CG) est totalement absent. Cela signifie que le manuel Altin est géométriquement très pauvre.



Comme le montre bien le tableau précédent, près du tiers des exercices résolus font utiliser plusieurs connaissances antérieures de l'élève. 60% des exercices présentent un travail qui fait référence directe à la notion de fonction ou ses composantes. Dans la plupart des exercices l'élève doit mobiliser un seul outil. Tandis que 32% d'entre eux demandent de faire appel aux deux outils mobilisables. En ce qui concerne la répartition du nombre des étapes⁶ près de la moitié des exercices comprennent une seule étape. Ce taux descend un petit peu dans les exercices où l'élève doit passer deux étapes pour arriver à la bonne réponse. Par ailleurs il y a 19% des exercices résolus qui peuvent être résolus en trois étapes.

⁶ Puisqu'on peut résoudre certains exercices en une étape ou deux étapes, il est normal que la somme des pourcentages des étapes dépasse 100%.

articulé ou simple-outils disponibles ou mobilisables-nombre des étapes



Annexe I-2 : analyse du manuel de lycée Aydın

2.1 Activités introductrices

Les auteurs du manuel commencent par annoncer que la notion de fonction est une correspondance particulière. Alors elle est aussi un ensemble des couples. Puisque la notion de fonction est une correspondance particulière, chaque correspondance ne peut donc être une fonction.

Ce manuel se distingue sensiblement des autres par la mise en cause de l'utilisation différente du mot « fonction » dans la vie courante et en mathématiques. Ainsi les auteurs affirment qu'on utilise la fonction en langue parlée au sens de l'activité que doit accomplir une personne pour jouer son rôle dans la société dans un groupe social. Ensuite ils prennent les deux exemples suivants :

L'activité du médecin est d'examiner des patients.

L'activité du jardinier est de cultiver des fleurs.

En ajoutant que la notion de fonction en mathématiques a un sens particulier, les auteurs définissent de l'ensemble A contenant des élèves de grandes tailles vers l'ensemble B des élèves de petites tailles en classe, une correspondance qui associe à chaque élève de grande taille un seul élève de petite taille. Grâce à cet exemple la comptine C_0 est introduite.

Nous pensons que ce type d'activité est très loin d'être considéré concerne une activité introductrice. Il s'agit plutôt d'essayer de faciliter la compréhension de la définition ensembliste de la notion de fonction. De plus une introduction comme celle-ci nous semble réduire la notion de fonction à une simple correspondance entre ensembles.

2.2 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant

Le manuel introduit la notion de fonction à partir de sa définition ensembliste comme les manuels précédents mais, contrairement aux autres, dans la définition il y a cependant une petite phrase supplémentaire qui renvoie à la première partie de la comptine C_0 «aucun élément vacant dans l'ensemble de définition».

A la suite l'écriture symbolique de la définition et la deuxième partie de la comptine « chaque élément de l'ensemble de définition ne peut correspondre avec plus d'un élément de l'ensemble d'arrivée » sont mises en place. Ainsi l'élève rencontre la même chose (la comptine C_0) pour la troisième fois dans une même page.

Par ailleurs le manuel présente les ensembles correspondant à la notion de fonction (ensemble de définition, ensemble d'arrivée, ensemble image) et il les représente en diagramme sagittal. La notation $y=f(x)$ est également introduite à la place de la notation $(x,y) \in f$.

Cette théorie est suivie d'une série d'exemples. Les deux premiers exemples font appliquer directement la définition ensembliste de la notion de fonction (cf. la comptine C_0). Ainsi dans l'un il s'agit de travailler sur une correspondance du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit chercher si cette correspondance est une fonction et si oui il doit déterminer son ensemble image. La représentation en diagramme sagittal est aussi utilisée. Dans l'autre on propose trois correspondances définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. L'élève est amené à chercher si elles sont des fonctions et à les représenter en diagrammes sagittaux. La comptine C_0 est mise en fonctionnement. Le troisième exemple demande de trouver l'ensemble de définition d'une fonction affine définie de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de Z). L'élève doit calculer les antécédents en égalisant la formule algébrique de la fonction à chaque élément de l'ensemble image B . La résolution d'équation apparaît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne l'exemple suivant, il fait travailler sur la représentation en diagramme sagittal d'une fonction f définie à partir d'ensembles. L'élève doit écrire la fonction f sous forme de liste de couples et trouver sa formule algébrique. Avant proposer le dernier exemple, le manuel donne la formule du calcul du nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre sans commentaire. Dans le dernier exemple il s'agit d'appliquer directement cette formule.

2.3 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

La définition de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé est suivie d'un exemple dans lequel on demande de représenter graphiquement une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit d'abord déterminer les points de coordonnées données en calculant les images et ensuite les placer dans un repère orthonormé. Dans la deuxième partie de cet exemple on propose aussi de représenter graphiquement cette même fonction dans la mesure où elle est définie sur \mathbb{R} . L'élève doit donc reconnaître qu'il s'agit de la représentation graphique d'une droite.

2.4 Egalité des fonctions

Nous trouvons un exemple qui illustre la définition de l'égalité des fonctions. Ainsi l'élève est

amené à chercher, en trouvant les ensembles images, si une fonction du premier degré et une fonction du troisième degré définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z sont égales.

2.5 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Conformément au programme le manuel présente la définition des fonctions injectives, surjectives, non surjectives, la fonction identique, constantes et nulle. De plus on peut aussi trouver la définition des fonctions bijectives et injectives-non surjectives.

En ce qui concerne ce qui accompagne les définitions, l'écriture symbolique de la bijectivité figure à la suite de la définition et il y a aussi quatre exemples qui illustrent la théorie. Les trois premiers exemples présentent la représentation graphique des fonctions injectives. Ainsi deux d'entre eux montrent la représentation en diagramme sagittal d'une fonction définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre et le troisième exercice, la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction affine définie sur $|\mathbb{R}$. A la suite on invite les élèves, à partir de ces exemples, à inventer une représentation en diagramme sagittal d'une fonction injective définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . Quant au dernier exemple concernant la bijectivité on y demande d'étudier si la fonction carré définie sur $|\mathbb{R}$ est bijective. La méthode du contre-exemple est utilisée. Ainsi l'élève est amené à reconnaître que les images de 2 et -2 sont égales.

La définition des fonctions surjectives et celle des fonctions non-surjectives sont illustrées par les deux exemples qui présentent la représentation en diagramme sagittal d'une fonction surjective ou non-surjective définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre.

Par ailleurs, il y a trois exemples (ou exercices) proposés sous le titre intitulé « exemples » à la fin de cette partie. Les deux derniers exemples font chercher le type d'une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit trouver l'ensemble image et ensuite appliquer les définitions des propriétés particulières des fonctions. En ce qui concerne le premier exemple on y demande à l'élève d'inventer une fonction bijective définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et trouver sa formule algébrique. L'élève doit établir un lien entre les éléments de A et ceux de B .

La définition de la fonction identique est suivie de trois exemples. L'un des deux premiers montre la représentation en diagramme sagittal de la fonction identique définie sur un sous-ensemble fini de Z et l'autre, la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction identique définie sur $|\mathbb{R}$. Dans le deuxième exemple l'élève est aussi invité à reconnaître que la représentation graphique de la fonction identique est celle de la droite $y=x$. Le dernier exemple demande de trouver les valeurs m et n si la fonction f définie sur Z par

$f(x)=(m-1)x+n-4$ est identique. En sachant que le coefficient de x est égal à 1 et le terme constant, à zéro dans la formule algébrique de la fonction identique l'élève doit égaliser $m-1$ à 1 et $n-4$ à zéro. Alors la résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

La partie des propriétés particulières des fonctions se termine par deux exemples qui illustrent la définition des fonctions constantes dans lesquels il s'agit de la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre.

2.6 Ensembles infinis et ensembles équipotents

Il y a deux exemples qui accompagnent la théorie. Ainsi le premier exemple indique que l'ensemble des nombres naturels est un ensemble infini et met en évidence ses différentes écritures. Dans l'exemple suivant, il s'agit d'étudier si la fonction f définie de l'ensemble des nombres entiers vers l'ensemble des nombres entiers impairs par $f(x)=2x+1$ est bijective et de chercher si ces ensembles sont équipotents. L'élève doit d'abord calculer les images de certains éléments de l'ensemble de définition et ensuite utiliser la définition de la bijectivité et des ensembles équipotents.

Comme on demande d'introduire la notion de loi de composition interne avant la composition des fonctions dans le programme, à la suite de cet exemple le manuel s'arrête et il présente la définition de la notion de loi de composition interne et ses propriétés.

2.7 Composition des fonctions

Le manuel commence la composition des fonctions par un exemple introductif comme les manuels précédents. Grâce à cet exemple l'élève est amené à connaître qu'il y a une nouvelle fonction définie de A vers C à partir d'une fonction carré f définie de A vers B et une fonction affine g définie de B vers C (A , B et C sont les sous-ensembles finis de Z). De plus le manuel explique comment on trouve la formule générale de la composée des fonctions f et g .

Par ailleurs il y a cinq exemples qui suivent la définition ensembliste de la composée. Dans ces exemples le manuel introduit également certaines propriétés de cette dernière. Le premier exemple dans lequel on met en évidence la non-commutativité de la composée demande de trouver les deux types de composées ($f \circ g$ et $g \circ f$) d'une fonction du second degré et une fonction affine définies sur \mathbb{R} . Pour l'une des composées une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Le but principal de l'exemple suivant est de montrer que dans certains cas il est possible que la composée soit commutative. Ainsi il

propose de trouver les deux types de composées des deux fonctions affines définies sur \mathbb{R} . En ce qui concerne le troisième exemple à la suite duquel l'associativité de la composée est introduite, on demande de trouver les composées $(f \circ g) \circ h$ et $f \circ (g \circ h)$ à partir d'une fonction du second degré et deux fonctions affines définies sur \mathbb{R} . Le quatrième exercice fait calculer l'image d'un nombre réel par la composée d'une fonction affine et une fonction du second degré définies sur \mathbb{R} . Deux solutions sont proposées. L'élève peut d'abord trouver la composée demandée et ensuite calculer l'image du nombre réel. Ou bien il peut aussi calculer l'image demandée «fonction par fonction» sans trouver la formule algébrique de la composée. Dans le dernier exemple, l'élève est amené à trouver les deux types de composition d'une fonction affine et de la fonction identique définies sur \mathbb{R} . A la suite de cet exemple la définition de la fonction identique à partir de la composée est mise en place.

2.8 Définition de l'inverse d'une fonction

Avant la définition nous constatons qu'il y a un exemple grâce auquel on met en évidence qu'une fonction doit être bijective pour avoir une inverse. Alors l'élève doit d'abord représenter en diagrammes sagittaux une fonction affine et une fonction du second degré définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et préciser leur type, ensuite écrire les fonctions sous forme de liste de couples et trouver leurs inverses et enfin étudier si ces inverses sont des fonctions.

La définition de la fonction inverse à partir de la composée est suivie de sa représentation en diagramme sagittal et de son écriture symbolique. De plus la relation entre la composée et la fonction identique est aussi introduite.

Il y a quatre exemples qui illustrent la théorie. Le premier exemple comprend deux parties. La première partie fait écrire une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z et son inverse sous forme de liste de couples. Ainsi l'élève doit déterminer tout couple (x, y) tel que $y=f(x)$ en calculant les images et ensuite la fonction inverse en remplaçant les abscisses par les ordonnées et vice et versa. Dans la deuxième partie on demande de trouver algébriquement l'inverse de la fonction. La méthode \mathbf{M}_{xy} est utilisée. L'exemple suivant fait trouver l'inverse d'une fonction f définie algébriquement sur \mathbb{R} et la composée de la fonction f et son inverse. Deux solutions sont proposées : dans la première solution on demande de trouver l'inverse de la fonction à partir de la méthode \mathbf{M}_{xy} et ensuite la composée de la fonction et son inverse, quant à la deuxième en sachant que la composée d'une fonction et son inverse est égale à la fonction identique l'élève est amené à obtenir l'équation $f(f^{-1}(x))=x$ et à calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x . Le troisième exemple demande de représenter graphiquement

une fonction affine définie sur \mathbb{R} et son inverse dans un même plan analytique. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction en utilisant la méthode \mathbf{M}_{xy} et ensuite déterminer au moins deux points pour chacune des fonctions. Il est aussi amené à reconnaître que la représentation graphique d'une fonction et celle de son inverse sont symétriques par rapport à la droite $y=x$. En ce qui concerne le dernier exemple dans lequel on décontextualise que l'inverse de l'inverse d'une fonction est égal à la fonction elle-même, il s'agit d'une fonction affine définie sur \mathbb{R} . L'élève doit trouver les inverses en utilisant deux fois la méthode \mathbf{M}_{xy} . Contrairement aux manuels précédents ce manuel présente la méthode très courte pour trouver l'inverse de certaines fonctions définies algébriquement que nous appelons *recette d'abracadabra* \mathbf{R}_a sous le titre « trouver l'inverse de certaines fonctions par une démarche courte » :

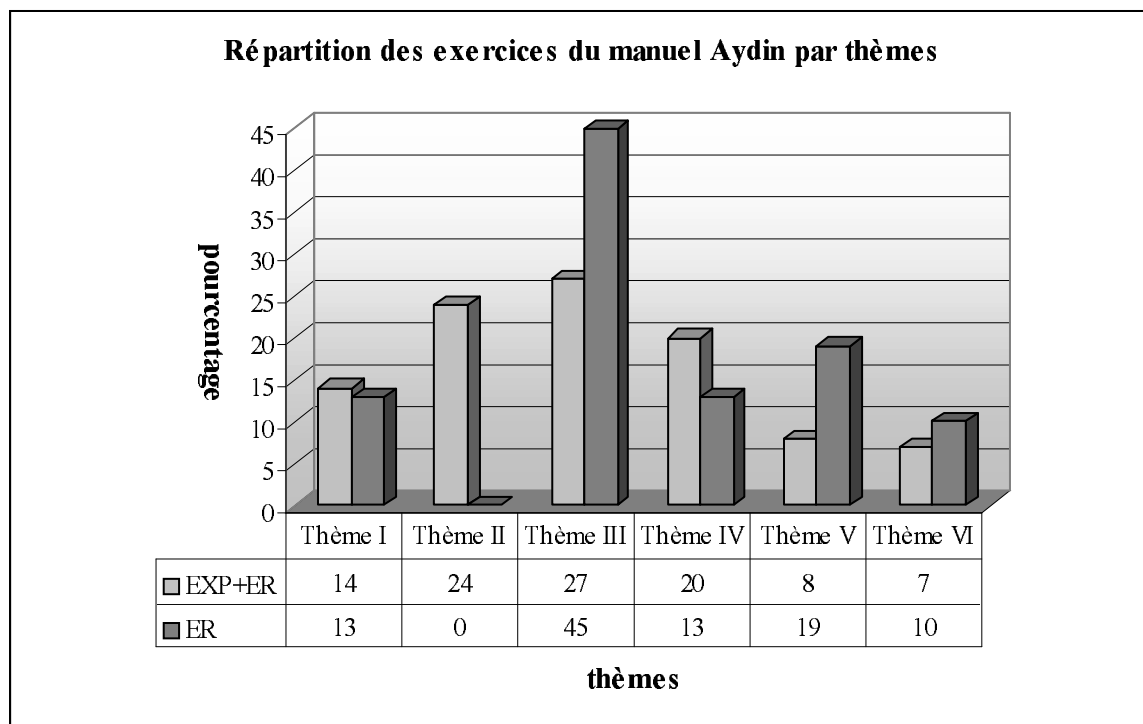
1. $f(x)=ax \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{a}$	2. $f(x)=x+a \Rightarrow f^{-1}(x)=x-a$
3. $f(x)=ax+b \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$	4. $f(x)=\frac{ax+b}{c} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{cx-b}{a}$
5. $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ (<i>a et d changent à la fois leurs places et leurs signes.</i>)	

A la suite il y a six exemples qui appliquent directement ces formules. Dans ces exemples nous constatons que les auteurs du manuel essaient d'attirer l'attention des élèves sur des erreurs à éviter en choisissant les coefficients négatifs :

2. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=x-8 \Rightarrow f^{-1}(x)=x+8,$	3. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=-2x+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{-2}=\frac{1-x}{2}$
4. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=-x+5 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-5}{-1}=5-x,$ 5. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=\frac{2x-3}{4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{4x+3}{2},$	

2.9 Exercices résolus (31 exercices)

Dans ce manuel les exercices résolus se décomposent en trois parties. La première partie qui figure à la suite de la composition des fonctions et l'inverse de la fonction est proposée sous le titre « Exercices divers ». La deuxième partie est intitulée « trouver f [ou g] lorsqu'on a donné la composée fog et g [ou f] ». Dans cette partie il y a ainsi des exercices concernant la décomposition des fonctions. En ce qui concerne la dernière partie, elle est intitulée « test résolu ». Il y a des exercices à choix multiple qui concernent tout le chapitre « correspondance- fonction-loi de composition interne ».



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant, Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières, Thème III : Composition des fonctions, Thème IV : Recherche de l'inverse des fonctions..., Thème V : Image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique... Thème VI : Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, EXP : Exemples (effectif : 43 exemples), ER : Exercices résolus (effectif : 31 exercices).

Comme le manuel propose beaucoup d'exemples (ou exercices) à la suite des notions présentées, il nous semble indispensable de prendre en compte la répartition générale des exercices par thèmes. Selon le tableau précédent, les thèmes II, III et IV sont les thèmes plus fréquents. Nous constatons que le pourcentage des exercices qui concernent la définition ensembliste de la notion de fonction est de 14%. Pour les thèmes V et VI il s'agit presque du même pourcentage et ils sont les thèmes les moins fréquents des exercices du manuel.

Quand on regarde la répartition des exercices résolus par thèmes, près de la moitié des exercices concernent le thème III. Il est suivi du thème V (image d'un nombre) avec un taux de 19%. Par ailleurs il s'agit du même pourcentage (13%) pour les thèmes I et IV. Le nombre des exercices qui concernent la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé est assez modeste, tandis que le thème II a totalement disparu.

A partir de ces résultats, nous pouvons dire que le manuel accorde une place importante à la composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles. Cela est peut-être dû au fait que cette dernière contient également plusieurs applications du cours : l'inverse de la fonction, l'image d'un nombre et elle est l'un des thèmes les plus importants du concours.

2.9.1 Thème I : Définition ensembliste de la fonction et ensembles correspondant (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Application de la définition ensembliste de la notion de fonction (1 exercice) : il s'agit de travailler sur les correspondances définies sur un sous-ensemble fini et discret par une liste de couples. L'élève est amené à choisir celle qui n'est pas une fonction. En faisant appel à la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine C_0) l'élève doit à la fois chercher s'il y a des éléments vacants et des éléments qui aient plus d'une image dans l'ensemble de définition parmi les correspondances proposées.

ii) Déterminer les ensembles (ensemble de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image) correspondant à la notion de fonction (2 exercices) : dans un exercice on demande de déterminer l'ensemble image d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit calculer les images en mettant à la place de x les éléments de l'ensemble de définition de la fonction. Inversement le deuxième exercice fait déterminer l'ensemble de définition d'une fonction affine définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . L'élève doit donc calculer les antécédents en égalisant la formule algébrique de la fonction à chaque élément de l'ensemble image. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail.

2.9.2 Thème III : Composition des fonctions (14 exercices)

Voici les catégories des exercices selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (4 exercices) : dans un exercice il s'agit de montrer l'égalité $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver la composée des deux fonctions affines définies sur $|\mathbb{R}$ et son inverse, ensuite il doit trouver les inverses des fonctions et leur composée. Enfin il lui reste à vérifier si ces deux composées sont égales. Le deuxième exercice fait trouver, à partir des deux fonctions affines définies sur $|\mathbb{R}$, pour quelle valeur de m on a $f^{-1}(m) + g(m) = (f \circ g)(m)$. L'élève doit d'abord trouver la composée des fonctions et l'inverse de la fonction f à partir de la recette \mathbf{R}_a , ensuite les images de m par les fonctions. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le troisième exercice il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel par la composée des deux fonctions polynômes définies par morceaux sur $|\mathbb{R}$. L'élève rencontre pour la première fois ce type d'exercice qui présente un travail prématuré pour lui. Car les fonctions définies par morceaux relèvent du programme de la classe de terminale. L'élève doit calculer l'image

demandée «fonction par fonction» sans trouver la formule générale de la composée. Dans le dernier exercice il est nécessaire de trouver la valeur m si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x)=3x+m$ et $(f \circ f)(x)=9x+8$. L'élève doit d'abord composer la fonction f avec elle-même et ensuite trouver la valeur m en utilisant l'égalité des polynômes. Il faut cependant indiquer que cette dernière est une notion qui appartient à l'un des chapitres suivants (les polynômes). C'est la raison pour laquelle nous pouvons dire qu'il s'agit d'un travail prématuré pour ce niveau des élèves.

ii) *Décomposition implicite des fonctions (6 exercices)* : dans un exercice on propose de trouver la fonction f définie sur \mathbb{R} à partir de la fonction $f(2x+5)=3x-8$. Un point méthode est proposé par le manuel comme suit :

Etant donné les fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} . Pour obtenir $f(x)$ à partir de l'expression $f[g(x)]=h(x)$, on met $g^{-1}(x)$ à la place de x dans la fonction $h(x)$.

Alors l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction implicite $(2x+5)$ et ensuite le mettre à la place de x dans la composée $f(2x+5)=3x-8$ pour trouver $f(x)$. Le deuxième exercice fait calculer l'image de 1 par la fonction f définie sur \mathbb{R} si $f\left(\frac{x-2}{3}\right)=1-3x$. Un point méthode est mis en place :

Etant donné les fonctions f, g et h définies sur \mathbb{R} . Pour trouver facilement $f(a)$ ($a \in \mathbb{R}$) à partir de l'expression $f[g(x)]=h(x)$, on met la valeur x qu'on a trouvée en résolvant $g(x)=a$, dans la fonction $h(x)$

Deux solutions sont proposées. Ainsi, ou bien l'élève peut suivre la même procédure que dans l'exercice précédent et il peut trouver la fonction f et ensuite calculer l'image de 1, ou à partir de ce point méthode il peut trouver pour quelle valeur de x on a $2x+5=1$ et ensuite mettre la valeur obtenue dans la composée. Dans le troisième exercice l'élève est aussi amené à calculer l'image de 3 par l'inverse de la fonction f définie sur \mathbb{R} si $f(3x-4)=4x+2$. Deux solutions sont proposées. La première demande de trouver la fonction f et son inverse, ensuite calculer l'image de 3 par f^{-1} . Dans la deuxième solution il n'est pas nécessaire de trouver la fonction f et son inverse. En utilisant la définition de la fonction inverse l'élève peut obtenir la fonction $f^{-1}(4x+2)=3x-4$ et ensuite calculer l'image de 3 par f^{-1} à partir du point méthode de l'exercice précédent. Le quatrième exercice propose de trouver la somme des inverses des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} si $f(x-3)=3x-9$ et $g(2x+1)=2x+7$. L'élève doit d'abord

trouver les fonctions f et g et ensuite leur inverse à partir de \mathbf{R}_a pour exprimer $f^{-1} + g^{-1}$. Dans un autre exercice on demande de trouver pour quelle valeur de a on a $f(a) = -1$ si $g(x+1) = 2x-3$ et $(f^{-1} \circ g)(x) = 5-2x$, pour les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} . Il s'agit de plusieurs étapes. L'élève doit tout d'abord trouver la fonction g . Ensuite en écrivant $g(x)$ dans la composée il doit obtenir une autre décomposée implicite $f^{-1}[g(x)] = 5-2x$. A nouveau il doit faire la même chose pour trouver f^{-1} . Après avoir trouvé la fonction f il doit trouver l'image de a et ensuite la valeur de a . Le dernier exercice fait calculer l'image de -2 par la fonction g définie de \mathbb{R} vers $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(2x) = 2x-4$ et $(f \circ g)(x) = \frac{3x}{x-1}$. Il y a aussi

plusieurs étapes. L'élève doit d'abord trouver la fonction f comme dans les exercices précédents. Ensuite sans faire appel à l'inverse de la fonction f et la définition de la fonction identique il doit obtenir une équation en calculant l'image de $g(x)$ par f . Enfin il doit calculer la fonction g en fonction de x et l'image de -2 par g .

iii) Décomposition des fonctions (4 exercices) : dans un exercice il s'agit de « décomposer » $(f \circ g)(x) = 4x+5$ en utilisant $f(x) = 3x-1$ pour trouver la fonction g , dans le deuxième exercice de « décomposer » $(f \circ g)(x) = 3x-4$ en utilisant $g(x) = 2x+3$ pour trouver la fonction f , dans le troisième exercice de « décomposer » $(g \circ f^{-1})(x) = 5-x$ en utilisant $f^{-1}(x) = 3x-2$ pour trouver la fonction g et dans le dernier exercice de « décomposer » $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = 1-3x$ en utilisant $g(x) = \frac{x+1}{3}$ pour calculer la valeur $f^{-1}(1)$. Dans le premier exercice deux solutions sont proposées. En mettant $g(x)$ dans la fonction f l'élève peut obtenir une équation. Ensuite il doit calculer $g(x)$ en fonction de x . Quant à la deuxième solution, l'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction f à partir de la recette \mathbf{R}_a et ensuite la fonction g en utilisant la définition de la fonction identique. Dans le deuxième exercice en écrivant $g(x)$ dans la fonction f l'élève est amené à obtenir une composée (implicite) $f(2x+3) = 3x-4$. Il doit d'abord trouver l'inverse de la fonction g et ensuite le mettre à la place de x dans la composée (implicite). Dans le troisième exercice on invite aussi l'élève à obtenir une composée (implicite) $g(3x-2) = 5-x$ en écrivant f^{-1} dans la fonction g . Ensuite il doit trouver la fonction g comme dans l'exercice précédent. Quant au dernier exercice, à partir de l'inverse de la composée l'élève doit d'abord obtenir $g \circ f(x) = 1-3x$ et ensuite mettre $f(x)$ dans la fonction g

$(\frac{f(x)+1}{3}=1-3x)$. Cela lui permet de trouver la fonction f sans faire appel à la décomposée.

Enfin il doit calculer la fonction f en fonction de x et l'image de -1 .

2.9.3 Thème IV : Recherche de l'inverse d'une fonction (5 exercices)

Dans le cours le manuel propose beaucoup d'exemples qui font chercher l'inverse des fonctions définies algébriquement. C'est pourquoi nous ne pouvons trouver que cinq exercices sur ce thème, et nous pouvons les classer en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Recours indispensable de l'inverse de la fonction pour la résolution d'une autre question (2 exercices) : dans un exercice l'élève est amené à trouver l'ensemble image de la fonction g définie par $g(x)=f(x)+3.f^{-1}(x)$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x)=5x+1$. Il s'agit des trois étapes. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction f à partir de la recette \mathbf{R}_a et ensuite la formule algébrique de la fonction g . La résolution d'équations à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. Le deuxième exercice fait trouver l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée de la fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x)=\frac{5}{x-3}$. C'est un type de question du concours (Q43/1997 et Q44/1998). En sachant que l'ensemble d'arrivée d'une fonction est égal à l'ensemble de définition de l'inverse de cette fonction l'élève doit trouver pour quelles valeurs de x le dénominateur de la fonction et celui de son inverse sont égaux à zéro. Ainsi il doit trouver l'inverse de la fonction en utilisant la recette \mathbf{R}_a . Il faut cependant souligner que ce type de travail est tout à fait dans le programme de la classe de terminale.

ii) Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (1 exercice) : on demande de trouver l'inverse de la fonction f bijective définie par $f(x)=\frac{x+2f(x)}{3x-1}$. C'est un exercice qui s'inspire beaucoup d'une des questions du concours (Q41/1997). L'élève doit d'abord calculer $f(x)$ en fonction de x et ensuite trouver son inverse à partir de la recette \mathbf{R}_a .

iii) Recherche de l'inversibilité d'une fonction (1 exercice) : on demande de trouver laquelle des fonctions proposées au choix n'a pas d'inverse. Il s'agit donc de l'utilisation de la relation entre la bijectivité et la fonction inverse. A nouveau nous sommes face à un exercice semblable à l'une des questions du concours (Q3/1971). En sachant qu'une fonction doit être bijective pour avoir un inverse l'élève est amené à étudier la bijectivité de chacune des fonctions définies sur \mathbb{R} proposées au choix. Dans la résolution sans prendre en compte les

autres fonctions on montre directement, à partir de la méthode de contre-exemple, que la fonction carré définie sur \mathbb{R} n'est pas bijective.

iv) *Calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions (1 exercice)* : un exercice fait calculer le nombre des correspondances qui ne sont pas des fonctions définies de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) si $\text{card}(A)=2$ et $\text{card}(B)=4$. L'élève doit utiliser la formule du calcul du nombre des correspondances définies de A vers B et celle du nombre des fonctions définies de A vers B et ensuite trouver leur différence.

2.9.4 Thème V : Image d'un nombre réel ou une expression algébrique par une fonction (6 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en quatre catégories différentes selon la tâche prescrite:

i) *Utilisation indispensable de la formule générale des fonctions affines pour calculer l'image d'un nombre réel (1 exercice)* : il s'agit de mettre en fonctionnement la formule générale de la fonction affine. Il faut d'emblée signaler que l'élève entend pour la première fois le nom de la fonction affine. De plus dans le programme il n'y a aucune indication qui concerne la fonction affine. Mais il y a des questions du concours (Q22/1987 et Q38/1996). Si on reprend l'exercice, on demande de calculer l'image d'un nombre réel par f^{-1} si $f(1)=2$ et $f(2)=3$, et si la fonction f est affine. Il y a plusieurs étapes. L'élève doit d'abord obtenir un système linéaire d'équations en calculant l'image de 1 et 2 par $f(x)=ax+b$. Après avoir trouvé la fonction f il doit trouver son inverse à partir de la recette \mathbf{R}_a et ensuite calculer l'image demandée. La résolution du système linéaire d'équations paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail.

ii) *Trouver l'image d'un nombre réel à partir d'images connues (1 exercice)* : on propose de déterminer la valeur $(f^{-1} \circ g)^{-1}(6)$ en utilisant $f^{-1}(4)=6$ et $g(3)=4$ si les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} sont bijectives. De l'application de l'inverse de la composée l'élève doit trouver $g^{-1}[f(6)]$. En utilisant la définition de la fonction inverse pour f et g il doit trouver $f(6)=4$ et $g^{-1}(4)=3$.

iii) *Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de f(x) (1 exercice)* : il s'agit de calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de $f(x)$. C'est un type de question du concours (Q30/1990 et Q36/1995) qui est mis en place pour la première fois. L'élève est amené à calculer l'image de $3x+1$ par f en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x)=4x-1$. Il doit d'abord calculer l'image de $3x+1$ par f. Ensuite il doit aussi calculer x en fonction de $f(x)$ et le mettre à la place de x dans l'image de $3x+1$. La résolution d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail.

iv) *Calculer l'image d'un nombre réel à partir d'expérimentations numériques (3 exercices)* : dans un exercice on demande de calculer la valeur $f(1)$ si $2f(x)+xf(-x)=-3x^2+7x+2$, pour la fonction f définie sur \mathbb{R} . L'élève doit d'abord obtenir un système linéaire d'équations en mettant respectivement 1 et -1 à la place de x dans l'expression et ensuite le résoudre. Alors les connaissances antérieures concernant la résolution du système linéaire d'équations sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exercice fait trouver la valeur $f(1)-f(6)$ si $f(3x)+f(2x-1)=5x+1$, pour la fonction f définie sur \mathbb{R} . L'élève doit mettre respectivement les valeurs numériques 1 et 2 à la place de x dans l'expression. Ensuite il doit résoudre le système linéaire d'équations de manière à obtenir la différence $f(1)-f(6)$. Dans le dernier exercice il est nécessaire de calculer l'image de 17 par f si $f(x)=\frac{x}{3}f(4x+1)$ et $f(\frac{3}{4})=1$, pour la fonction f définie sur \mathbb{R} . Pour calculer l'image demandée l'élève a besoin de trouver l'image de 4 et pour cette dernière l'image de $\frac{3}{4}$. Alors il doit calculer ces images en mettant les nombres 4 et $\frac{3}{4}$ à la place de x dans l'expression.

2.9.5 Thème VI :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (3 exercices)

Nous constatons qu'il n'y a que trois exercices qui concernent la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé . Dans chacun d'eux il s'agit de lire et interpréter cette dernière. L'élève doit prendre en compte qu'on repère les éléments de l'ensemble de définition sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées.

Dans un exercice comprenant quatre parties les deux premières parties font déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée d'une fonction f à partir de sa représentation graphique dans un repère orthonormé . En ce qui concerne les deux dernières parties, l'élève est amené à déterminer graphiquement l'image de nombres réels par f , f^{-1} ou certaines composées ($f \circ f$, $f \circ f^{-1}$... etc.). L'élève doit prendre en compte que la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé et également celle de son inverse (en échangeant les axes). Dans le deuxième exercice il s'agit de calculer la valeur $f^{-1}(4) + g(0) - (f \circ g^{-1})(3)$ graphiquement à partir des représentations graphiques dans un même repère orthonormé des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} . Le dernier exercice demande de trouver, dans les intervalles où

la fonction f^{-1} est définie, la valeur $\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{(f^{-1} \circ f)(3)}$ à partir de la représentation graphique de la fonction f définie de $[0,5]$ vers $[-2,2]$.

2.10 Synthèse

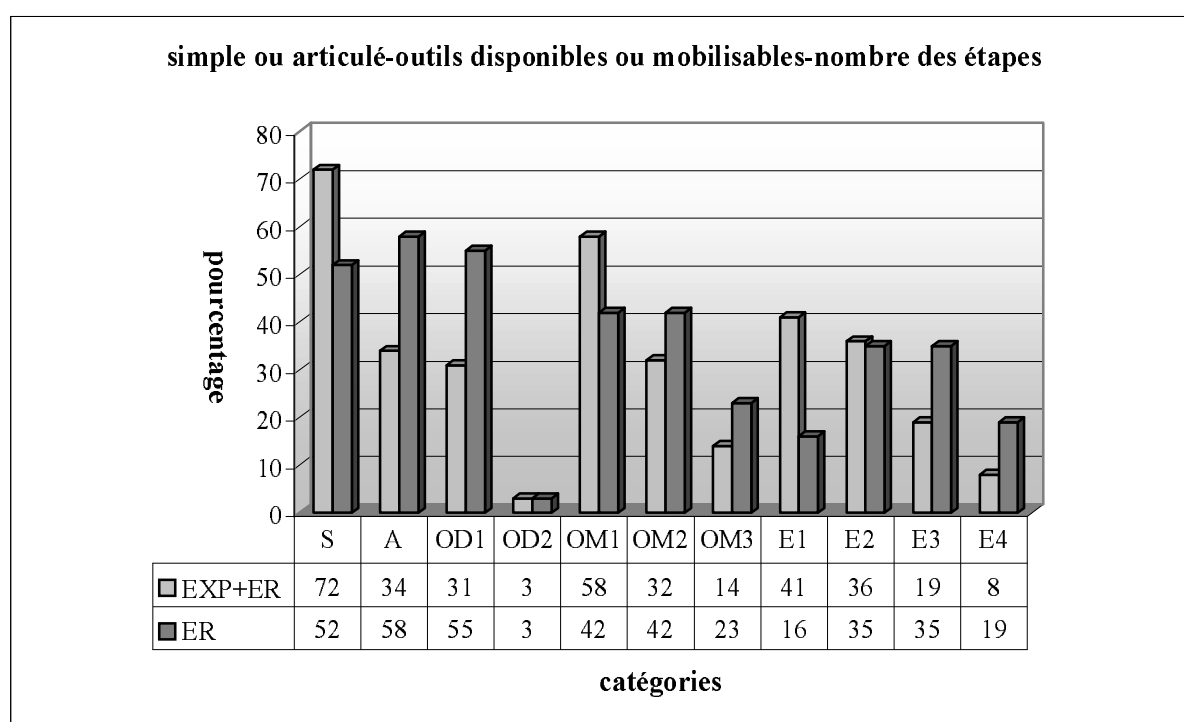
Constatons tout d'abord que le manuel aborde toutes les notions qui figurent dans le programme. Conformément aux manuels précédents celui-ci commence par mettre en évidence différentes utilisations du mot « fonction » dans la vie courante et en mathématiques. De plus il propose un exemple introductif dont le but principal est de présenter la comptine C_o qui aidera à la reconnaissance de la définition ensembliste de la notion de fonction. Mais il est difficile de le considérer comme une activité introductrice.

Par ailleurs, la définition ensembliste de la notion de fonction est la seule définition utilisée pour introduire les fonctions. En ce qui concerne la méthode privilégiée pour trouver la fonction inverse, nous pouvons trouver les deux méthodes : méthode M_{xy} et recette R_a . Mais ce manuel se différencie des autres manuels par l'attribution d'un titre à la recette R_a dans le cours. Ainsi après avoir traité quelques exemples avec la méthode M_{xy} , la recette R_a est introduite sous le titre « trouver l'inverse de certaines fonctions par des démarches courtes ». A partir de là la méthode plus mathématisée a totalement disparu.

Il est cependant très intéressant que les trois manuels présentent une grande diversité dans l'utilisation de certaines formules pour le calcul du nombre des correspondances, des correspondances qui sont des fonctions, des correspondances qui ne sont pas des fonctions, des fonctions injectives, non-injectives définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre...etc. Ainsi dans le manuel Tutibay nous ne retrouvons aucune formule. Le manuel Altın met en place presque toutes les formules dans des exercices résolus. Tandis que le manuel Aydın ne présente que celle qui consiste à calculer le nombre des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre grâce à une remarque. Comme dans le programme il n'y a aucune indication qui concerne ces formules, nous nous demandons d'où viennent-t-ils ces formules ?

Dans la collection d'Aydın l'influence du concours est assez forte. Et elle ne se limite pas à la recette R_a . Par exemple la « décomposée » implicite $(f(ax+b)=dx+c)$ est un des thèmes plus fréquents du concours. Dans sa résolution proposée par le manuel on demande à l'élève de trouver d'abord l'inverse de $ax+b$ et ensuite le mettre à la place de x dans $f(ax+b)=dx+c$. Il nous semble que ce type de solution ne permet pas à l'élève de reconnaître qu'il s'agit d'une

décomposée, $ax+b$ est une fonction et on utilise aussi ici la définition de la fonction identique. Le manuel met en place beaucoup d'exercices de ce type. En plus lorsqu'il s'agit d'une décomposée normale⁷ l'élève est toujours amené à la rendre en décomposée implicite et à privilégier la résolution décrite plus haut. Nous pouvons trouver plusieurs types de questions du concours dans les exercices résolus. Par ailleurs cet intérêt du concours force également les auteurs à s'éloigner du programme de la classe de seconde. Par exemple l'élève peut rencontrer pour la première fois un exercice concernant la fonction définie par morceaux qui est en principe dans le programme de terminale ou bien la formule générale de la fonction affine dont on ne parle jamais pendant le cours. Le tableau ci-dessous montre très bien que les investissements au concours paraissent plutôt dans les exercices résolus.



S : Simple, A : Articulé, OD1 : Outil disponible 1, OD2 : Outil disponible 2, OM1 : Outil mobilisable 1, OM2 : Outil mobilisable 2, OM3 : Outil mobilisable 3, E1 : Etape 1, E2 : Etape 2, E3 : Etape 3, E4 : Etape 4, EXP : Exemples (effectif : 43 exemples), ER : Exercices résolus (effectif : 31 exercices)

Quand on prend en compte tous les exemples et exercices du manuel, nous constatons que la plupart des exercices demandent des applications directes du cours (Simple :S). Tandis que seuls plus du tiers d'entre eux portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves (Articulé :A). Pour 31% des exercices l'élève doit faire appel à une connaissance déjà acquise. D'un très faible pourcentage s'agit-il dans les exercices qui demandent deux outils devant être disponibles pour le travail. En ce qui concerne la répartition des outils

⁷ Lorsqu'on donne la composée comme la suite $gof(x)=3x+2$ et l'une des fonctions $f(x)=2x+1$, on demande de trouver l'autre fonction.

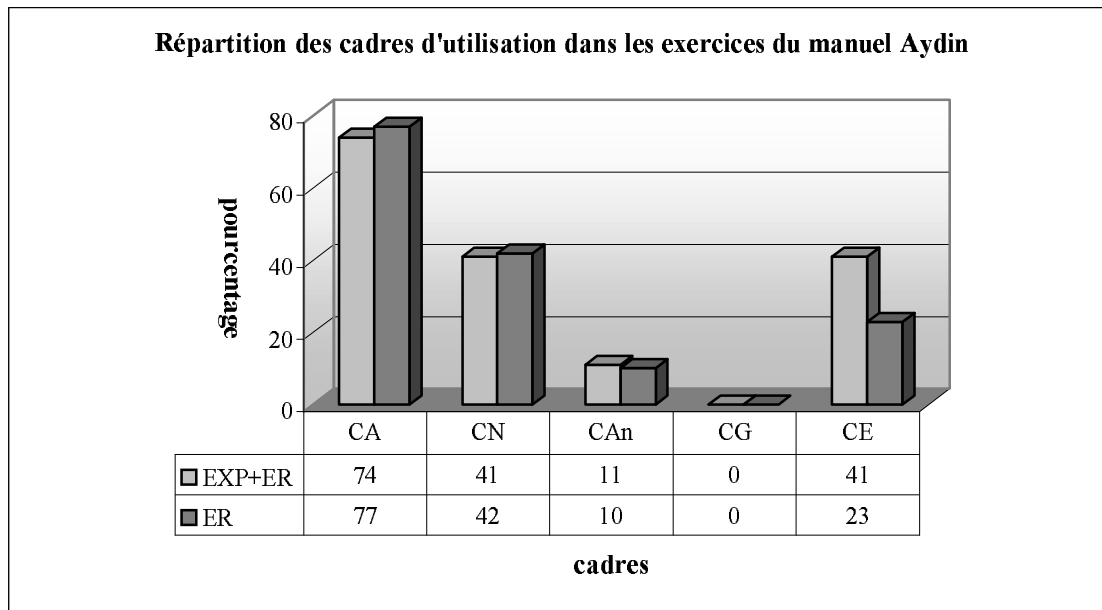
mobilisables, la moitié des exercices demandent de mobiliser un seul outil contre 32% des exercices deux outils et 14%, trois outils. Par ailleurs 77% des exercices peuvent être résolus en une ou deux étapes⁸. Tandis que le taux des exercices nécessitant trois ou quatre étapes est de 27%.

Comme nous l'avons déjà dit, l'influence du concours est plus évidente dans les exercices résolus. Le tableau ci-dessus⁹ montre que la plupart des exercices portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves. Tandis que dans 52% des exercices il s'agit des applications directes du cours. Plus de la moitié demandent à l'élève de faire appel à un seul outil disponible contre un très petit nombre, deux outils disponibles. Quant aux outils mobilisables, 65% des exercices invitent l'élève à mobiliser plusieurs connaissances directement liées à la fonction ou ses composantes (OM2+OM3). Par ailleurs, dans la grande majorité des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en plusieurs étapes (E2+E3+E4 :89%).

En ce qui concerne les cadres d'utilisation dans tous les exercices du manuel, comme le montre bien le tableau suivant, le cadre majoritairement mobilisé est le cadre algébrique. Il est suivi du cadre numérique (il intervient plutôt lors du calcul des images des nombres réels) et cadre de la théorie élémentaire des ensembles (il intervient lorsqu'il s'agit des fonctions définies de manière ensembliste et leur représentation en diagrammes sagittaux) avec un taux de 41%. Seuls 11% des exercices utilisent le cadre analytique. Tandis que le cadre géométrique est totalement absent. Comme les deux manuels précédents, celui-ci est aussi géométriquement très pauvre.

⁸ Puisque le manuel propose, pour certains exercices, deux solutions qui se différencient par le nombre des étapes et par les outils mobilisables ou disponibles, la somme des répartitions du nombre des étapes ou des outils dépasse 100%.

⁹ Idem



Si l'on prend en compte la répartition des cadres d'utilisation dans les exercices résolus, à part le cadre de la théorie élémentaire des ensembles, ces taux ne changent presque pas. Ainsi le taux des exercices qui utilisent le cadre de la théorie élémentaire des ensembles descend à 23%.

Annexe I-3 : analyse du manuel de préparation au concours Uğur

Dans la collection d'Uğur la notion de fonction est présentée dans le chapitre intitulé « correspondance et fonction ». Contrairement aux manuels de lycée ce manuel distingue donc la notion de loi de composition interne des notions de fonction et de correspondance.

Il n'y a aucune activité préparatoire. Les auteurs du manuel commencent directement par le cours en présentant la définition de la notion de fonction de manière ensembliste.

3.1 Définition ensembliste de la notion de fonction

La définition ensembliste de la notion de fonction est introduite de la manière symbolique.

Soient A et B deux ensembles non-vides et f une correspondance définie de A vers B . La correspondance f est une fonction définie de A vers B , si

$$i) \forall x \in A, \exists y, y \in B (x, y) \in f$$

$$ii) (x, y) \in f \text{ et } (x, z) \in f \Rightarrow y=z$$

On écrit $f: A \rightarrow B$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

A la suite de cette définition nous constatons que figurent la représentation d'une fonction f en diagramme sagittal et quatorze exemples (ou exercices résolus) dont la plupart ne concernent pas directement la définition.

Dans le premier exemple il s'agit de déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image d'une fonction définie en diagramme sagittal. Le passage du diagramme sagittal à l'écriture par une liste de couples est mobilisé.

L'introduction de la comptine C_0 suit cet exemple comme une remarque :

REMARQUE N°1¹⁰ : Pour que la correspondance f puisse être une fonction, il faut que chaque élément de l'ensemble de définition ait une image et que chaque élément ait une seule image.

Le deuxième exemple est une application directe de cette remarque. L'élève est amené à étudier si trois correspondances définies par une liste de couples d'un sous-ensemble discret fini dans un autre sont des fonctions. Dans les deux exemples suivants on demande de chercher si une correspondance définie algébriquement sur \mathbb{R} est une fonction. Pour le premier exemple de ce groupe l'élève est amené à constater que pour tout x réel, $f(x)=3x-1$

¹⁰ Dans le manuel les remarques ne sont pas numérotées.

est aussi réel. Alors cette correspondance est une fonction. Pour le deuxième comme un élément de l'ensemble de définition a plus d'une image (par exemple $x=0$), la correspondance f définie sur \mathbb{R} par $|y|=x+2$ n'est pas une fonction. Le cinquième exemple demande de déterminer l'ensemble image d'une fonction rationnelle définie d'un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} et d'écrire la fonction sous forme de liste de couples.

En ce qui concerne les exemples restant, comme nous l'avons déjà indiqué, ils ne font pas référence directe à la définition et sont plutôt destinés à calculer l'image d'un nombre réel. C'est pourquoi nous les analyserons dans la partie des exercices résolus.

3.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

La définition de la représentation graphique des fonctions est suivie d'un certain nombre d'exercices et de deux remarques. Dans le premier exemple il s'agit de représenter graphiquement une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . L'élève doit d'abord déterminer les couples puis les placer dans un repère orthonormé. Le but du deuxième exemple est de montrer pour quelles valeurs ou quels intervalles une fonction définie sur \mathbb{R} et représentée graphiquement dans un repère orthonormé est négative, positive ou nulle. En ce qui concerne le troisième exemple qui est une question à choix multiple (QCM), il s'agit de lire et d'interpréter la représentation graphique d'une fonction définie par morceaux. L'élève doit chercher en déterminant graphiquement quelques images mises en jeu si cinq propositions sont vraies.

Avant de passer aux exemples suivants, une remarque est proposée comme suit :

REMARQUE N°2 : Dans la représentation graphique d'une fonction son ensemble de définition se repère sur l'axe des abscisses, son ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées.

Le quatrième exemple illustre cette remarque. A partir de la représentation graphique dans un repère orthonormé l'élève doit déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble image et l'ensemble d'arrivée d'une fonction définie d'un sous-intervalle de \mathbb{R} dans un autre. Les connaissances liées aux intervalles que l'élève doit faire fonctionner sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

A la suite de cet exemple nous constatons qu'il y a une autre remarque qui peut être qualifiée de point méthode pour chercher graphiquement si une correspondance est une fonction.

REMARQUE N°3 : Si chaque droite tracée parallèle à l'axe des ordonnées et la représentation graphique d'une correspondance se coupent au plus en un point, la représentation graphique est celle d'une fonction. Si au moins une droite tracée parallèle à l'axe des ordonnées et la représentation graphique se coupent en plusieurs points, la représentation graphique n'est pas celle d'une fonction mais celle d'une correspondance.

Le manuel illustre cette remarque avec deux exemples. L'élève est amené à chercher en traçant des parallèles à l'axe des ordonnées si les représentations graphiques données sont celle d'une fonction.

3.3 Quatre opérations sur les fonctions

Il faut tout d'abord signaler que les quatre opérations sur les fonctions figurent dans le programme de la classe de terminale. Il n'y a aucune explication ni démonstration. Le manuel cite simplement les quatre opérations sur les fonctions de manière symbolique. Ensuite deux exemples sont proposés. Le premier exemple demande de calculer la valeur $(f+g)(-8) + (f.g)(27)$ en utilisant les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x < 1 \\ x - 10; & x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt[3]{x} - 5.$$

Les signes d'inéquations et la racine cubique auxquels l'élève doit faire appel sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Le deuxième exemple demande de déterminer les fonctions $f+2g$ et $\frac{f}{g}$ en utilisant les fonctions f et g définies par une liste de couples ($f = \{(-1, 2), (1, 3), (2, -4)\}$ et $g = \{(-1, 1), (2, 2), (3, 1)\}$). L'élève doit faire attention au fait qu'il ne peut faire ces opérations que pour les éléments communs aux ensembles de définition des deux fonctions.

3.4 Egalité des fonctions

La définition de l'égalité des fonctions est illustrée par un seul exemple au cours duquel l'élève est amené à chercher si les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par $f(x) = 3|x|$ et $g(x) = x^2$ sont égales. L'élève doit calculer les images par chacune des fonctions ensuite vérifier qu'elles sont égales. La valeur absolue paraît comme outil devant être disponible dans ce travail.

3.5 Propriétés particulières des fonctions

Nous pouvons trouver toutes les propriétés particulières des fonctions qui figurent dans le programme de la classe de seconde. La définition de la notion de fonction non surjective est suivie de deux exemples dont l'un illustre la définition avec la représentation en diagramme sagittal d'une fonction non surjective définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Quant au deuxième exemple, l'élève est amené à chercher si la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^2+1$ est non surjective. En sachant que pour tout x réel, $x^2+1 \geq 1$ l'élève doit s'apercevoir que dans l'ensemble d'arrivée il y a des éléments vacants.

Après avoir défini la surjectivité des fonctions, quatre exemples sont proposés. Le premier présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction surjective définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans les deux exemples suivants il s'agit d'étudier la surjectivité d'une fonction affine définie sur \mathbb{R} et sur \mathbb{R} . L'élève doit chercher s'il est toujours possible de trouver un antécédent réel et naturel pour tout y réel et naturel.

Avant le dernier exemple pour chercher si une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé est surjective le manuel donne la remarque suivante :

REMARQUE N°4 : Si chaque droite parallèle à l'axe des abscisses qu'on trace par un point de l'ensemble d'arrivée d'une fonction f définie sur \mathbb{R} coupe la représentation graphique de f , la fonction f est surjective.

En ce qui concerne le dernier exemple, l'élève est amené à déterminer l'intervalle de définition et l'intervalle d'arrivée d'une fonction représentée graphiquement dans un repère orthonormé pour qu'elle soit surjective ou non surjective.

L'écriture symbolique et un certain nombre d'exemples accompagnent la définition de l'injectivité des fonctions. Le premier exemple présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction injective définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans le deuxième exemple on demande de chercher si une fonction affine définie sur \mathbb{R} est injective. L'utilisation de l'écriture symbolique de la bijectivité est mise en jeu. Cet exemple est suivi d'une remarque destinée à chercher si une fonction définie sur \mathbb{R} est injective à partir de sa représentation graphique dans un repère orthonormé :

REMARQUE N°5 : Si chaque droite parallèle à l'axe des abscisses qu'on trace par un point de l'ensemble image d'une fonction f définie sur \mathbb{R} coupe la représentation graphique de f , la fonction f est injective

Le manuel illustre cette remarque avec deux exemples.

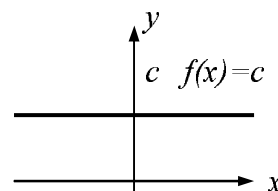
La définition de la notion de fonction bijective est introduite et illustrée avec deux exemples dans lesquels on présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction bijective et d'une fonction non bijective, définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre.

Par ailleurs le manuel propose trois exemples pour illustrer la définition des fonctions constantes. Le but du premier exemple est de montrer la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Les deux exemples suivants reposent sur l'utilisation de l'inexistence de variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes. Le premier exemple de ce groupe invite l'élève à calculer la différence de a et b si la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(a-2)x^2+(b+1)x+5$ est constante. Deux solutions sont proposées. L'une demande d'utiliser l'inexistence de variable dans les fonctions constantes. Ainsi l'élève doit égaliser tous les coefficients de x à zéro. Et l'autre propose de trouver la différence demandée en sachant que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition d'une fonction constante est identique. En envisageant qu'elles sont identiques l'élève est amené à calculer les trois valeurs $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. Ensuite il doit obtenir et résoudre un système linéaire d'équations. Ce dernier paraît donc comme un outil devant être disponible dans ce travail. En ce qui concerne le deuxième exemple, il nécessite

de calculer le produit de a et b si la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=\frac{ax^2+bx+4}{3x^2+x+2}$ est constante.

Deux solutions sont proposées. La première est la deuxième solution de l'exemple précédent. Quant à la deuxième elle s'appuie sur le fait que les coefficients de x du numérateur et du dénominateur soient proportionnels s'il s'agit d'une fonction rationnelle et constante. Le manuel énonce simplement ce point méthode et il n'y a aucun raisonnement qui l'accompagne. Cette partie qui concerne les fonctions constantes se termine par la remarque suivante :

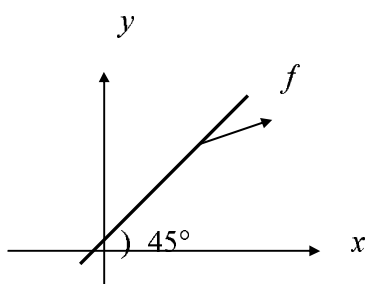
REMARQUE N°6 : La représentation graphique de la fonction constante dans un repère orthonormé est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



Enfin nous trouvons la définition de la fonction identique, ensuite un exemple et une remarque qui suivent. L'exemple consiste à trouver la valeur $(b+c-a)$ si la fonction f définie

sur \mathbb{R} par $f(x)=(a+4)x^3+(b-3)x+c-1$ est la fonction identique. Deux solutions sont proposées. La première se base sur le fait que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition de la fonction identique est égale à cet élément lui-même. L'élève est amené à calculer les valeurs $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ et à obtenir un système linéaire d'équations. Ainsi les connaissances liées à la résolution de ce dernier que l'élève doit mettre en fonctionnement sont des outils devant être disponibles dans ce travail. La deuxième solution demande de faire fonctionner la formule algébrique de la fonction identique ($f(x)=x$). En faisant appel à l'égalité des polynômes l'élève doit égaliser le coefficient de x^3 le terme constant ($c-1$) à zéro et le coefficient de x à 1. L'égalité des polynômes paraît donc comme un outil devant être disponible dans ce travail. Au cours d'une remarque comme ci-dessous le manuel propose la représentation graphique de la fonction identique définie sur \mathbb{R} dans un repère orthonormé:

REMARQUE N°7 : Les points de la représentation graphique de la fonction identique se trouvent sur la droite $y=x$.



3.6 Fonctions de permutation

La définition des fonctions de permutation¹¹ qui figurent dans le programme de la classe de terminale est introduite et illustrée avec deux exemples dont l'un consiste à écrire une fonction définie sur A par une liste de couples sous forme de matrice¹². L'autre exemple demande de chercher si la fonction f définie sur A (un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}) par $f(x)=-x$ est une fonction de permutation.

¹¹ Soit $A \neq \emptyset$. Chaque fonction bijective définie sur A est appelée fonction de permutation.

¹² $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$

A la suite de cette partie le manuel propose un certain nombre de formules qui concernent le calcul du nombre des fonctions définies de A vers B, des fonctions injectives ou bijectives définies de A vers B, des fonctions de permutation définies sur A, des fonctions de non-permutation définies sur A et des fonctions constantes définies de A vers B.

Nous ne trouvons aucun raisonnement ni démonstration qui accompagnent ces formules. Elles sont simplement énoncées. Il y a deux exemples proposés. Le premier exemple comporte six parties. A partir du diagramme sagittal, les deux premières parties demandent à l'élève de trouver le nombre des fonctions et des fonctions injectives définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre sans avoir recours aux formules. En ce qui concerne les parties suivantes, l'élève doit directement appliquer les formules. Les puissances et les factorielles sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le deuxième exemple on demande de calculer le nombre des fonctions de non-permutation définies sur A si le nombre des correspondances définies sur A est de 16^9 . Il y a trois étapes. L'élève doit d'abord trouver le cardinal de l'ensemble A en utilisant le nombre des correspondances définies sur A. Ensuite calculer le nombre de toutes les fonctions et de toutes les fonctions de non-permutation définies sur A. Enfin il doit trouver la différence entre ces derniers. Les puissances et les factorielles auxquelles l'élève doit faire appel sont les outils devant être disponibles dans ce travail.

3.7 Définition de l'inverse d'une fonction

Avant de présenter la définition de l'inverse d'une fonction, il y a un exemple dans lequel on met en évidence qu'une fonction doit être bijective pour qu'elle soit inversible. Il s'agit de deux correspondances définies d'un ensemble fini et discret dans un autre par une liste de couples. L'élève est d'abord invité à chercher si ces correspondances sont des fonctions et ensuite si ces fonctions sont inversibles. Enfin il doit s'apercevoir que la fonction ayant une inverse est bijective. La remarque suivante contextualise ce qui est fait plus haut :

REMARQUE N°8 : La correspondance inverse d'une fonction f est aussi une fonction si et seulement si f est bijective.

La définition de l'inverse d'une fonction est suivie de sa représentation en diagramme sagittal, de son écriture symbolique, d'un certain nombre d'exemples et de remarques. Le manuel donne la méthode \mathbf{M}_{xy} grâce à la remarque suivante :

REMARQUE N°9 : En général lorsqu'on trouve l'inverse d'une fonction définie algébriquement, on écrit d'abord x à la place de y , y à la place de x ensuite on calcule y en fonction de x .

Il y a un exemple qui applique directement cette remarque. L'élève est amené à trouver l'inverse d'une fonction affine définie sur $|\mathbb{R}$. A la suite de cet exemple, la recette **R_a** qui concerne les fonctions affines est mise en place comme une remarque et un certain nombre d'exemples sont proposés. Nous avons encadré cette remarque et les exemples qui l'illustrent comme suit :

REMARQUE N°10 : Si $a \neq 0$, $f(x) = ax + b$, $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

$$\text{i) } y = 3x + 5 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x-5}{3}$$

$$\text{ii) } y = 4x \Rightarrow y^{-1} = \frac{x}{4}$$

$$\text{iii) } y = -x + 2 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x-2}{-1} = -x + 2$$

$$\text{iv) } y = \frac{x}{3} \Rightarrow y^{-1} = 3x$$

Le manuel propose un autre exemple destiné à trouver l'inverse d'une fonction bijective et rationnelle à partir de la méthode **M_{xy}**. Ensuite la recette **R_a** qui concerne les fonctions rationnelles est repris dans une remarque. Nous avons encadré cette remarque et les exemples qui l'illustrent :

REMARQUE N°11 : Si $f: |\mathbb{R} - \{\frac{d}{c}\}| \rightarrow |\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}|$ et $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

$$\text{i) } y = \frac{2x-5}{x-4} \Rightarrow y^{-1} = \frac{4x-5}{x-2}$$

$$\text{ii) } y = \frac{x}{2x+3} \Rightarrow y^{-1} = \frac{-3x}{2x-1}$$

$$\text{iii) } y = \frac{3}{x-1} = \frac{0x+3}{x-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{x+3}{x}$$

$$\text{iv) } y = \frac{1}{x} = \frac{0x+1}{x+0} \Rightarrow y^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\text{v) } y = \frac{x+2}{5} = \frac{x+2}{0x+5} \Rightarrow y^{-1} = \frac{-5x+2}{-1} = 5x-2$$

Par ailleurs le manuel propose les fonctions qui ne permettent pas d'appliquer **R_a** dans les exemples suivants. Le premier exemple demande de trouver l'inverse de la fonction bijective définie d'un sous-ensemble fini de $|\mathbb{R}$ dans un autre par $f(x) = (x-2)^5 + 1$. L'utilisation de la méthode **M_{xy}** est indispensable. Les racines cinquièmes s'avèrent un outil supposé disponible dans ce travail. Dans les deux exemples suivantes, il est aussi très difficile d'utiliser la

méthode \mathbf{M}_{xy} . L'un demande de calculer la valeur $f^{-1}(17)$ si la fonction f est définie de \mathbb{R} vers $(1, \infty)$ par $f(x) = 2^{x-3} + 1$. En faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir $f(x) = 17$. Ainsi le travail se ramène à la résolution d'une équation exponentielle très particulière. En ce qui concerne l'autre exemple, on demande de trouver pour quelle valeur de x on a $f^{-1}(x) = 2$ si la fonction f est bijective et définie par $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 3^x + 2^{x-1}$. L'utilisation de la définition de l'inverse d'une fonction permet à l'élève d'obtenir $f(2) = x$. Pour trouver la bonne réponse il ne lui reste donc qu'à calculer l'image de 2. Dans le quatrième exemple on demande de trouver l'inverse de la fonction f définie de $[1, +\infty)$ vers $[-6, +\infty)$ par $f(x) = x^2 - 2x - 5$. L'élève doit utiliser la méthode \mathbf{M}_{xy} . La résolution d'équations du second degré et la factorisation auxquelles l'élève doit faire appel sont les outils supposés disponibles dans ce travail. Dans la dernière partie l'élève doit faire attention à son choix ($y_1 = -1 + \sqrt{x+6}$ ou $y_2 = -1 - \sqrt{x-6}$) par rapport à l'ensemble de définition de f (ou l'ensemble d'arrivée de f^{-1}). Le cinquième exemple consiste à trouver la valeur a si la fonction f bijective est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + x^2 + ax - 3$ et la représentation graphique de la fonction f^{-1} passe par le point $(4, 1)$. En sachant que l'image de 4 par f^{-1} est 1 l'élève doit faire appel à la définition de l'inverse d'une fonction et obtenir $f(1) = 4$. La résolution d'équations s'avère un outil supposé disponible dans ce travail. Dans l'exemple suivant, il faut déterminer l'inverse d'une fonction de permutation définie sous forme de matrice sur un sous-ensemble fini et discret. L'exemple qui concerne les fonctions affines précède une remarque au cours de laquelle la formule générale des fonctions affines est introduite :

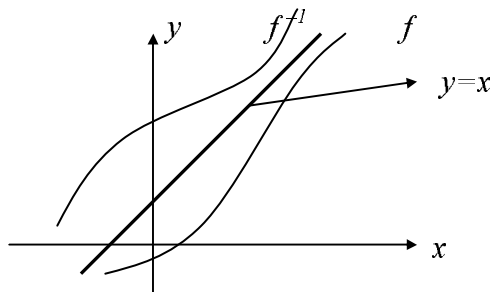
REMARQUE N°12 : Si $f(x) = ax + b$, f est une fonction affine.

Le septième exemple se base sur l'application de cette remarque. L'élève doit calculer la valeur $f(4)$ si la fonction f est affine et $f(2) = 5$, $f^{-1}(2) = 1$. En utilisant la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit obtenir $f(1) = 2$, puis un système linéaire d'équations à partir de la formule générale des fonctions affines. La résolution du système d'équations dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

Avant de proposer le dernier exemple qui demande de déterminer graphiquement la valeur $f(0) + f^{-1}(5) + f^{-1}(0)$ à partir de la représentation graphique d'une fonction, le manuel met en

place la treizième remarque destinée à mettre en évidence la relation entre la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f et celle de son inverse :

REMARQUE N°13 : Les représentations graphiques des fonctions $y=f(x)$ et $y=f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$.



3.8 Composition des fonctions

L'interprétation en diagramme sagittal et un exemple en trois parties accompagnent la définition de la composition des fonctions. Dans les deux premières parties de l'exemple l'élève est amené à trouver les deux types de composition ($f \circ g$ et $g \circ f$) d'une fonction affine et une fonction du second degré. Quant à la dernière partie, on y demande de trouver l'image d'un nombre réel par $g \circ f$. Une identité remarquable paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail de la deuxième partie.

Enfin le manuel termine le cours en citant simplement certaines propriétés de la composition des fonctions sans rien démontrer : non-commutativité, associativité, inverse de la composition des fonctions, relation entre la fonction identique et la composition, inverse de l'inverse d'une fonction, composée d'une fonction et son inverse, « décomposition ».

3.9 Exercices résolus (65 exercices)

Dans la collection Uğur les exercices résolus sont mis en place généralement à la fin du chapitre. Mais il y a aussi certains exercices qui figurent dans le cours. Comme ces exercices ne font pas référence directe aux notions qui les précèdent, il nous a semblé préférable de les analyser dans cette partie. De plus nous trouvons deux tests proposant des exercices en forme de QCM à la fin du chapitre. Puisque les résolutions de ces exercices sont aussi proposées, nous les analyserons ici.

3.9.1 Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles (4 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) *Utilisation directe de la définition ensembliste (1 exercice)* : il s'agit de travailler sur des correspondances définies de manière ensembliste. L'élève doit repérer parmi ces correspondances celle qui n'est pas une fonction. L'utilisation de la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine C_0) est donc mobilisée.

ii) *Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée ou l'ensemble image d'une fonction (2 exercices)* : à partir de l'ensemble image l'élève est amené à trouver la somme des éléments de l'ensemble de définition d'une fonction affine définie sur un sous-ensemble fini de Z dans un autre. La résolution d'équations à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on demande aussi de déterminer l'ensemble de définition A d'une fonction affine et bijective définie de A vers $[-8,2]$. En sachant que pour $x \in A$, $-8 \leq f(x) < 2$ l'élève doit obtenir l'inéquation $-8 \leq -5x - 3 < 2$ et la résoudre. Ainsi les connaissances portant sur les intervalles et la résolution d'inéquations que l'élève doit faire fonctionner sont des outils devant être disponible dans ce travail.

iii) *Calculer le nombre des correspondances définies de A vers B fonctions ou non-fonctions (1 exercice)* : il s'agit de calculer le nombre des correspondances définies de A vers B qui ne sont pas de fonctions en utilisant $\text{card}(A)=4$ et $\text{card}(B)=2$. En mettant en fonctionnement les formules concernées, l'élève doit d'abord trouver le nombre des correspondances puis celui des fonctions définies de A vers B , et enfin leur différence.

3.9.2 Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (2 exercices)

Dans cette partie nous pouvons trouver deux exercices pour lesquels on demande de déterminer des valeurs à partir des formules algébriques de certaines fonctions particulières.

Dans un exercice on invite l'élève à déterminer la somme de a et b si la fonction f définie par $f(x)=(a-b)x+2a-3b$ est identique. En sachant que $f(x)=x$ si f est identique, l'élève doit égaliser le coefficient de x à 1 et le terme constant à zéro. L'égalité des polynômes paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le deuxième exercice

l'élève doit trouver la valeur $a+b+f(x)$ si la fonction f définie par $f(x)=\frac{ax^2-x+3}{4x^2-2x+b}+\frac{3}{2}$ est

constante. En utilisant le fait que les coefficients $(\frac{a}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{b})$ sont proportionnels si f est constante, l'élève doit trouver a et b puis $f(x)$.

3.9.3 Thème III : Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (4 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) *Trouver directement l'inverse d'une fonction (1 exercice)* : un exercice demande de trouver l'inverse de la fonction f si $xf(x)-2=\frac{2x+f(x)}{3}$. L'élève doit d'abord calculer la fonction f en fonction de x ensuite trouver son inverse en utilisant la recette \mathbf{R}_a . La résolution d'équations est un outil devant être disponible dans ce travail.

ii) *Calcul de l'inverse d'une fonction pour la résolution d'une autre question (3 exercices)* : dans un exercice il s'agit de trouver la valeur réelle a si la fonction f est définie par $f(x)=\frac{4ax}{3x-2}$, pour tout $x \in |\mathbb{R}-\{2\}$ et $f(x)=f^{-1}(x)$. L'élève doit trouver l'inverse de la fonction f à partir de \mathbf{R}_a , ensuite la valeur a en utilisant l'égalité des polynômes rationnels. Cette dernière paraît donc comme un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on propose de trouver la valeur x si la fonction f bijective est définie de $[2, +\infty[$ vers $]-3, +\infty[$ par $f(x)=x^2-4x+1$ et $f^{-1}(x)+f^{-1}(-2)=6$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction f en utilisant la méthode \mathbf{M}_{xy} . Ensuite calculer l'image de -2 . La résolution d'équations et la racine carrée sont les outils devant être disponibles dans ce travail. Par ailleurs dans la résolution la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé est aussi présente. Mais elle ne fait pas référence directe à la résolution. En ce qui concerne le dernier exemple de ce groupe, on demande de trouver la valeur $f^{-1}(-1)+f(3)$ à partir d'une fonction f définie par morceaux (pour tout $x \geq 2$, $f(x)=x^2-4x+5$ et pour tout $x < 2$, $f(x)=2x-3$). L'élève doit trouver l'image de 3 par f en utilisant $f(x)=x^2-4x+5$. Ensuite il doit obtenir $f(x)=-1$ en faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction. Dans la résolution l'élève est directement conduit à utiliser $f(x)=2x-3=-1$. Il n'y a aucun raisonnement. Par contre la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé est donnée, mais on ne sait pas à quoi elle sert.

3.9.4 Thème IV : Composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles (22 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) *Composition des fonctions (6 exercices)* : dans un exercice l'élève est amené à trouver la composée $f \circ g$ en utilisant la fonction f définie sur \mathbb{R} par morceaux (pour tout $x \geq 2$, $x-1$ et pour tout $x < 2$, x^2-1) et la fonction g affine définie sur $|\mathbb{R}$ par $g(x)=x+1$. L'élève doit remplacer la fonction g dans la fonction de f en prenant en compte l'intervalle de définition.

Une identité remarquable est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice, on propose de trouver la somme de a et b si les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par $f(x)=ax+3$, $g(x)=2x+b$ et $fog=I$. L'élève doit d'abord trouver la composée fog . En faisant appel à la formule de la fonction identité et à l'égalité des polynômes il doit déterminer la somme de a et b . Dans le troisième exercice il s'agit de la même tâche. Ainsi l'élève est amené à trouver la valeur a si les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par $f(x)=3x-4$, $g(x)=2ax+\frac{4}{3}$ et $fog=I$. En ce qui concerne le quatrième exercice, l'élève doit trouver ce que peut être la valeur $f(1)$ si la fonction f définie sur \mathbb{R} est affine et $(fof)(x)=25x-6$. En sachant que la formule générale des fonctions affines est $f(x)=ax+b$ l'élève doit composer la fonction f avec elle-même. Ensuite à l'aide de l'égalité des polynômes il doit déterminer les valeurs a et b . Cela lui permet d'obtenir deux fonctions et deux images différentes. Dans un autre exercice il s'agit de composer l'inverse d'une fonction définie par morceaux et une fonction affine. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction définie par morceaux à partir de \mathbf{R}_a en prenant en compte aussi le changement des intervalles de définition, ensuite trouver la composée demandée. Les connaissances liées aux inéquations dont l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Le dernier exercice demande de déterminer l'ensemble image de la composée d'une fonction définie par morceaux d'un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} (si x est premier, $2x-1$ et si x n'est pas premier, $2x$) et d'une fonction affine définie sur \mathbb{Z} . Sans trouver la composition des fonctions l'élève est amené à calculer les images «fonction par fonction». Les connaissances antérieures portant sur les nombres premiers sont des outils devant être disponibles dans ce travail.

ii) *Décomposition des fonctions (9 exercices)* : dans un exercice on propose de déterminer la fonction g en utilisant $f(x)=3x-1$ et $fog(x)=6x+8$. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de f en appliquant \mathbf{R}_a . Ensuite il doit utiliser la définition de la fonction identité et déterminer g . Dans un autre exercice l'élève est aussi amené à déterminer la fonction g en utilisant la fonction f définie par $f(x)=\frac{-x+4}{2}$ et la composée $(fog)(x)=3x-1$. Il s'agit de la même tâche que dans l'exercice précédent. Le troisième exercice demande de déterminer la fonction f en utilisant les fonctions suivantes : $g(x)=\frac{1}{x-2}$ et $(gof^{-1})(x)=x+2$ (pour les valeurs où elles sont définies¹³). L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la composée et obtenir fog^{-1} . Ensuite en faisant appel à la définition de la fonction identité, il peut trouver la fonction f . Dans un

¹³ Ce sont les termes du manuel.

autre exercice on demande de trouver la valeur $g(3)$ si la fonction f est définie par $f(x)=-x+1$ et $(f \circ g^{-1})(x)=x^2-1$. L'élève doit aussi mettre en fonctionnement la propriété de l'inverse et la composition comme dans l'exemple précédent. Ensuite il doit « décomposer » $g \circ f^{-1}$ en utilisant f et calculer l'image de 3. Dans le cinquième exercice on demande à l'élève de trouver pour quelle valeur de x on a $g(x)=1$ si la fonction f est définie par $f(x)=2x-1$ et $(f+g) \circ g^{-1}(x)=5x+9$. En mettant en fonctionnement la distributivité de la composition sur l'addition et la définition de la fonction identique l'élève doit obtenir la composée $f \circ g^{-1}$. Sans faire fonctionner la décomposition il doit mettre $g^{-1}(x)$ à la place de x dans la fonction f et calculer g^{-1} en fonction de x . Enfin il doit trouver l'inverse de g^{-1} à partir de \mathbf{R}_a et trouver l'antécédent de 1. La résolution d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans deux exercices suivants on travaille sur la décomposition des fonctions de permutations définies sur un sous-ensemble fini et discret par une forme de matrices. Dans le huitième exercice l'élève doit déterminer la fonction g si la fonction f est définie par $f(x)=\frac{ax}{2x-1}$ et $(f \circ f)(x)=x$, $(g \circ f)(x)=2x$ (pour les valeurs où les fonctions sont définies). En sachant que la fonction f est égale à son inverse si $(f \circ f)(x)=x$ l'élève doit trouver l'inverse de f à partir de \mathbf{R}_a et ensuite trouver la valeur a . Enfin il lui reste à « décomposer » la fonction $g \circ f$ et trouver g . Dans le dernier exemple on demande de trouver la valeur $g(2)$ en utilisant la fonction f définie par $f(x)=3-2x$ et $(f^{-1} \circ g)(x)+3=xf(x)$. L'élève doit d'abord mettre 2 à la place de x dans l'expression $(f^{-1} \circ g)(x)+3=xf(x)$ et calculer l'image de 2 par f , ensuite trouver l'inverse de f à partir de \mathbf{R}_a . En mettant $g(2)$ dans la fonction f^{-1} il doit obtenir une équation et la résoudre.

iii) *Décomposition implicite des fonctions (7 exercices) :* dans un exercice on demande de calculer l'image de 9 si $f(2x+1)=x^2-3$. Sans utiliser la décomposition l'élève est conduit à trouver pour quelle valeur de x on a $2x+1=9$. Ensuite il doit mettre la valeur qu'il a trouvée dans la composée (implicite) $f(2x+1)=x^2-3$. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on demande de trouver la fonction g si $f(\frac{2}{x})=x+3$ et $(f^{-1} \circ g)(x-2)=3x-2$, pour les valeurs où les fonctions sont définies. Il s'agit des deux composées (implicites). L'élève doit d'abord trouver l'inverse de la fonction implicite $\frac{2}{x}$ ensuite en remplaçant x par cette valeur dans la première composée $f(\frac{2}{x})=x+3$ il

doit trouver la fonction f . La même procédure est valable pour la deuxième composée. Enfin il lui reste à « décomposer »

$f^{-1} \circ g$ en utilisant f . Dans les deux exercices suivants l'élève est amené à calculer la valeur $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour l'un en utilisant $f\left(1-\frac{1}{x}\right)=3x+1$ et pour l'autre, $f\left(\frac{2x}{x-3}\right)=2x+1$. Il doit d'abord faire la décomposée (implicite) comme dans les exercices précédents. Ensuite trouver la fonction f et l'image demandée. Le cinquième exercice consiste à trouver la différence $(b-a)$ si $f(2x-3)=4x+1$ et $f(x)=ax+b$. L'élève doit trouver la fonction f en faisant la décomposée implicite. En utilisant l'égalité des polynômes il doit trouver les valeurs a et b ensuite leur différence. Dans un autre exercice on donne $f(x)=3x+a$, $g(2x-1)=3x-7$ et $(f \circ g)(3)=1$ et on demande de trouver la valeur a . L'élève est d'abord invité à calculer l'image de 3 par g en déterminant pour quelle valeur de x on a $2x-1=3$. Ensuite il doit obtenir une équation en remplaçant l'image de 3 dans la fonction f et résoudre pour trouver la valeur a . Le septième exercice propose aussi de trouver la valeur a en donnant $f(2x-1)=3x+1$ et $f^{-1}(3a-2)=7$. En faisant appel à la définition de l'inverse d'une fonction l'élève doit d'abord obtenir $f(7)=3a-2$. Ensuite à partir de la composée implicite il doit calculer l'image de 7 et trouver pour quelle valeur de x on a $2x-1=7$. La résolution d'équations dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail.

3.9.5 Thème V : Image d'un nombre réel ou d'une expression algébrique par une fonction (22 exercices)

Voici les catégories des exercices de cette partie selon la tâche prescrite :

i) Calculer l'image d'un nombre réel par des fonctions définies indirectement (6 exercices) :
 dans un exercice on demande de trouver la différence $f(10)-f(1)$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} et $f(x+1)=f(x)+3x$. L'élève doit d'abord obtenir $f(x+1)-f(x)=3x$, ensuite donner à la place de x les valeurs numériques entières de 1 à 9. Enfin par addition il doit obtenir la différence demandée. Dans le deuxième exercice l'élève doit trouver la valeur $f(21)$ en utilisant $f(1)=3$ et $f(x)=2+f(x-1)$. La procédure à suivre n'est pas très différente de l'exercice précédent. L'élève doit donner à la place de x les valeurs numériques variées de 2 à 21, ensuite trouver la différence de l'image de 21 et celle de 1 par addition. Enfin en utilisant l'image de 1 il doit déterminer l'image de 21. Dans un autre exercice on demande de trouver la valeur $f(25)$ en utilisant $f(x+1)=xf(x)$ et $f(1)=2$. L'élève doit donner à la place de x les valeurs numériques entières de 1 à 24 dans l'expression $f(x+1)=xf(x)$. Après les trois premières expérimentations

numériques il est amené à reconnaître la relation entre l'antécédent et l'image. Les connaissances antérieures liées à la notion de factorielle sont des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le quatrième exercice il s'agit de calculer l'image de 2 en utilisant $f(x+1)-f(x)=x+2$ et $f(4)=2$. En donnant à la place de x les valeurs 3 et 2 l'élève doit obtenir un système linéaire d'équations, ensuite trouver la différence $f(4)-f(2)$ par addition et l'image demandée. En ce qui concerne le cinquième exercice, il s'agit de trouver la différence $f(5)-f(2)$ si $f(x+2)-f(x+1)=x^2+1$, pour tout x naturel. L'élève doit d'abord donner à la place de x les valeurs entières 1, 2 et 3 et obtenir la différence demandée par addition. Le dernier exercice qui demande de calculer l'image de 2 par f si $f(n)=\frac{n}{3}f(n+1)$ et $f(5)=\frac{9}{16}$ est une question du concours (cf. analyse des thèmes du concours, (Q13/1978)).

ii) *Calculer l'image d'une expression algébrique en fonction de $f(x)$ (5 exercices)* : dans un exercice on demande de calculer $f(3x+1)$ en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie par $f(x)=2x-5$. L'élève doit d'abord calculer l'image de $3x+1$ par f . Ensuite il doit calculer x en fonction de $f(x)$ et le mettre en x dans l'image de $3x+1$. La résolution d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice on propose aussi de calculer $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie par $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$. Dans un autre exercice l'élève est amené à calculer l'image de $2x+1$ par f en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie par $f(x)=3^{5x-1}$. Le quatrième exemple fait trouver la valeur $f(3x+2)$ en fonction de $f(x)$ si la fonction f est définie par $f(2x-1)=3x+1$. Dans ces trois derniers exemples la procédure que l'élève doit suivre est tout à fait identique à celle du premier exercice. Pour les exercices qui concernent les fonctions exponentielles la résolution d'équations exponentielles très particulières à laquelle l'élève doit faire appel est un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le dernier exemple, il est nécessaire de calculer $f\left(\frac{x}{2}\right)$ en fonction de $f(x)$ si $f(2x)=\frac{2x}{2x+1}$. En faisant appel à la « décomposition », l'élève doit d'abord déterminer la fonction f . Ensuite il doit refaire ce qu'il a fait dans les exercices précédents.

iii) *Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction définie algébriquement (11 exercices)* : dans un exercice il s'agit de trouver la somme des images de trois nombres réels par une fonction définie par morceaux. Le deuxième exercice qui est une des questions du concours demande de trouver $f(1)$ parmi plusieurs choix si $f(ab)=f(a)+f(b)$ (cf. analyse des thèmes du concours (Q20/1985)). Dans un autre exercice on propose de calculer la valeur

$f(\sqrt[3]{2}-1)$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x)=x^3+3x^2+3x+4$. En faisant appel à l'identité remarquable $(a+b)^3$ l'élève est amené à obtenir $f(x)=(x+1)^3+3$ et à trouver l'image demandée. Une identité remarquable et les connaissances antérieures liées aux racines (ou puissances) sont donc des outils supposés disponibles dans ce travail. Dans le quatrième exercice on demande de trouver la somme des images des nombres 3 et 7 par la fonction $2^{f(x)}=x+1$. En donnant à la place de x les valeurs 3 et 7 dans la fonction l'élève doit obtenir des équations exponentielles très particulières et les résoudre. Ainsi la résolution d'équations exponentielles très particulières paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le cinquième exercice, il consiste à calculer $f^{-1}(9)$ si la fonction f est affine avec $f^{-1}(5)=1$ et $f(-1)=1$. L'utilisation de la formule générale des fonctions affines est indispensable pour la résolution. L'élève doit d'abord utiliser la définition de l'inverse d'une fonction et trouver $f(1)=5$. En sachant que si f est une fonction affine, $f(x)=ax+b$, il doit déterminer a et b à l'aide des images connues. La résolution du système linéaire d'équations est un outil supposé disponible dans ce travail.

Dans un autre exercice on donne $f(x)=2^{x-1}$, $f(x+2)+kf(x+1)=f(x)$ et on demande de trouver la valeur k . En calculant les images des expressions algébriques l'élève doit obtenir une équation exponentielle très particulière et la résoudre. Dans les deux exercices suivants il s'agit de calculer l'image des couples par les fonctions définies de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R} à l'aide des notions de maximum et minimum. Ainsi l'un des exercices demande de trouver la somme $f(1,-3)+g(-3,2)$ en utilisant $f(x,y)=\max(x,x-y)$ et $g(x,y)=\min(x^2,y+1)$. Et l'autre consiste à calculer la valeur $f(f(1,2),g(2,2))$ à partir des fonctions f et g définies par $f(x,y)=\min(x+y^2,2y-x)$, $g(x,y)=\max(-2x,-3y)$. Les notions de maximum et minimum que l'élève doit mettre en fonctionnement sont les outils devant être disponibles pour ce travail. Dans le neuvième exercice, il s'agit de déterminer une fonction f définie par morceaux (si $x < 2$, $f(x)=1-2ax$ et si $x > 2$, $f(x)=ax+b$) à l'aide des deux images connues ($f(1)=5$ et $f(3)=1$) et de trouver la somme $a+b$. La résolution d'équations paraît comme un outil supposé disponible dans ce travail. En ce qui concerne le dixième exercice, on donne la fonction f définie par morceaux sur \mathbb{R} de la manière suivante : si $x \geq 0$, $f(x)=3-x$, si $x < 0$, $f(x)=4+x$ et on demande de trouver pour combien de valeurs entières de x on a $f(x) > 0$. En prenant en compte les intervalles de définition l'élève doit trouver, par expérimentations numériques, pour quelles valeurs de x on

a $f(x) > 0$. Les connaissances antérieures portant sur les inéquations sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

Dans le dernier exemple on demande de trouver $2g-3f$ en utilisant les fonctions f et g qui sont définies par une liste de couples ($f=\{(1,2),(2,1),(3,0)\}$ et $g=\{(1,-1),(2,0),(3,-2)\}$). Il s'agit de l'application directe des propriétés des opérations sur les fonctions données dans le cours.

3.9.6 Thème VI :Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (11 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Lire et interpréter la représentation graphique des fonctions (4 exercices) : dans trois exercices l'élève est amené à déterminer graphiquement certaines images et à les utiliser dans des opérations proposées. Ainsi le premier d'entre eux demande de déterminer $(fof)(3)$ et $(fof)(4)+(fof)(-2)$ à partir de la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} . Dans le deuxième exercice il s'agit de trouver $(fof)(0)$ en utilisant les représentations graphiques des fonctions gof et g dans un même repère orthonormé. En ce qui concerne le dernier exemple l'élève doit trouver la valeur $\frac{3f(4)+f(-3)}{1+f^{-1}(2)}$ à partir de la représentation graphique de l'inverse

de la fonction f définie par morceaux. Dans un autre exercice en utilisant la représentation graphique de la fonction f définie d'un intervalle dans un autre (de A vers B , sous-ensembles de \mathbb{R}) l'élève est conduit à trouver combien de nombres entiers il y a dans l'ensemble $B-A$. Il doit d'abord déterminer les intervalles A et B , ensuite leur différence. Les connaissances antérieures correspondant aux ensembles et aux intervalles sont des outils disposés disponibles dans ce travail.

ii) Recours indispensable à la représentation graphique des fonctions pour la résolution d'une autre question (5 exercices) : dans un exercice en faisant appel à la représentation graphique de la fonction f bijective et définie sur \mathbb{R} on demande de trouver la valeur a si $f^{-1}(x-2)f(x)=a+1-f^{-1}(x)$. L'élève doit d'abord déterminer $f(0)=4$ et $f(4)=2$ ensuite obtenir $f^{-1}(4)=0$ et $f^{-1}(2)=4$ en utilisant la définition de l'inverse d'une fonction. La résolution d'équations apparaît comme un outil devant être disponible dans ce travail. Le deuxième exercice consiste à trouver pour quelles valeurs entières de x on a $2 \leq f\left(\frac{x}{2}\right) \leq 4$ et à exprimer leur somme, à partir de la représentation graphique de la fonction f définie sur \mathbb{R} . L'élève est

amené à s'apercevoir que $2 \leq f(x) \leq 4$ pour $0 \leq x \leq 2$ ensuite qu'il est possible d'avoir $2 \leq f\left(\frac{x}{2}\right) \leq 4$ pour les nombres entiers 1,2,3 et 4. Dans un autre exercice à l'aide de la représentation graphique de la fonction f l'élève doit calculer le nombre des sous-ensembles de l'ensemble A qui contient les nombres réels pour lesquels la fonction g définie par $g(x) = xf(x)f^{-1}(x)$ est nulle. En prenant en compte qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul, l'élève doit obtenir $x=0$ ou $f(x)=0$ ou $f^{-1}(x)=0$ ensuite déterminer graphiquement les éléments de A et calculer le nombre des sous-ensembles de A . Dans le quatrième exercice demande de trouver, à partir de la représentation graphique de f , pour combien de nombres entiers x on a $xf(x) > 0$. En ce qui concerne le dernier exercice de cette partie l'élève est amené à déterminer $(g \circ f^{-1})(-4) + (f^{-1} \circ g)(0)$ à partir des représentations graphiques des fonctions f et g . Pour la résolution l'élève doit d'abord trouver l'équation de la droite qui désigne la représentation graphique de la fonction f affine ensuite son inverse en utilisant \mathbf{R}_a .

iii) *Travailler sur les fonctions définies géométriquement (2 exercices)* : dans un exercice on demande de trouver pour quelle valeur de x on a $f \circ g(x) = 72$ si la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x$ et la fonction g définie par $g(x) =$ « Aire du triangle rectangle de AOB ». L'élève doit d'abord déterminer la fonction g en calculant l'aire du triangle rectangle dont l'hypoténuse se trouve sur la représentation graphique de f ensuite la composée $f \circ g$ et la valeur x . L'aire du triangle rectangle à laquelle l'élève doit faire appel est un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le deuxième exercice il s'agit aussi de trouver une fonction définie par l'aire d'un triangle dans un carré. En mettant en fonctionnement les connaissances antérieures liées à l'aire du triangle et au carré l'élève doit déterminer la fonction demandée.

3.10 Synthèse

Dans le manuel Uğur la notion de fonction est présentée avec celle de correspondance. Les auteurs du manuel introduisent les fonctions de la manière ensembliste. Ainsi la seule définition des fonctions qui existe est la définition ensembliste. Au cours d'une remarque la comptine \mathbf{C}_0 est introduite. Dans le cours nous trouvons aussi des exercices résolus qui ne correspondent pas directement aux notions qui les précèdent comme dans le manuel Gündener.

Par ailleurs ce manuel met en place un certain nombre de remarques (treize) au cours desquelles on introduit des connaissances indispensables pour les exercices qui suivent.

Nous constatons que la plupart des notions qui apparaissent dans le programme de seconde sont abordées. Mais nous rencontrons cependant certaines notions qui relèvent du programme des classes suivantes. Par exemple les quatre opérations sur les fonctions, les fonctions de permutation et les fonctions définies par morceaux.

En ce qui concerne les méthodes pour trouver l'inverse des fonctions, la méthode \mathbf{M}_{xy} est introduite comme une remarque. Et elle n'est mobilisée que pour deux fonctions pour lesquelles on peut utiliser aussi \mathbf{R}_a . A part pour les fonctions pour lesquelles l'utilisation de \mathbf{M}_{xy} est indispensable (par exemple fonctions exponentielles), c'est toujours \mathbf{R}_a qui est utilisé.

Dans la collection d'Uğur nous pouvons aussi constater que figurent la plupart des questions du concours ou des questions très ressemblantes comme dans la collection de Gündener. Dans le chapitre l'élève peut rencontrer plusieurs fois un même type d'exercices. Comme les exercices encadrés ci-dessous nous semblent assez représentatifs, nous les présentons :

Si $f(x)=2x-5$, quelle est la valeur $f(3x+1)$ en fonction de $f(x)$? (exercice résolu)

Si $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$, quelle est la valeur $f(\frac{x}{x-1})$ en fonction de $f(x)$? (exercice résolu)

Si $f(2x)=\frac{2x}{2x+1}$, quelle est la valeur $f(\frac{x}{2})$ en fonction de $f(x)$? (exercice résolu)

Si $f(x)=3^{5x-1}$, quelle est la valeur $f(2x+1)$ en fonction de $f(x)$? (exercice résolu)

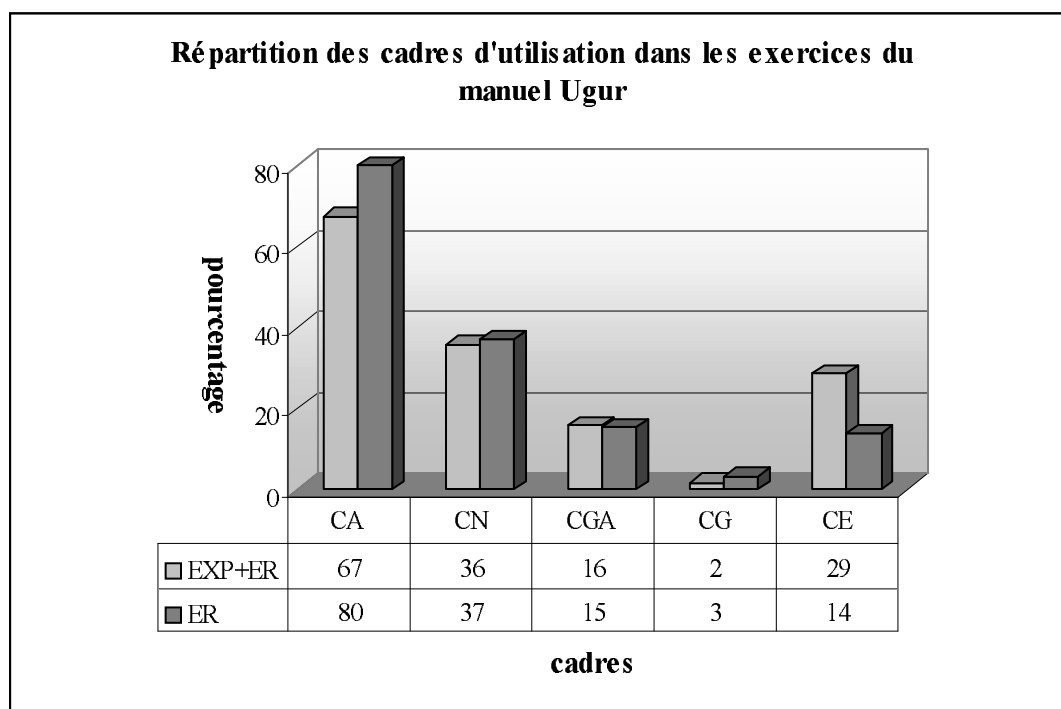
Si $f(x)=2^{x-1}$, quelle est la valeur $f(3x+2)$ en fonction de $f(x)$? (exercice résolu)

Si $f(x)=3^{2x-1}$, quelle est la valeur $f(3x)$ en fonction de $f(x)$? (Test 3, exercice non résolu)

Si $f(x)=5^{2x-1}$, quelle est la valeur $f(3x+1)$ en fonction de $f(x)$? (Test 6, exercice non résolu)

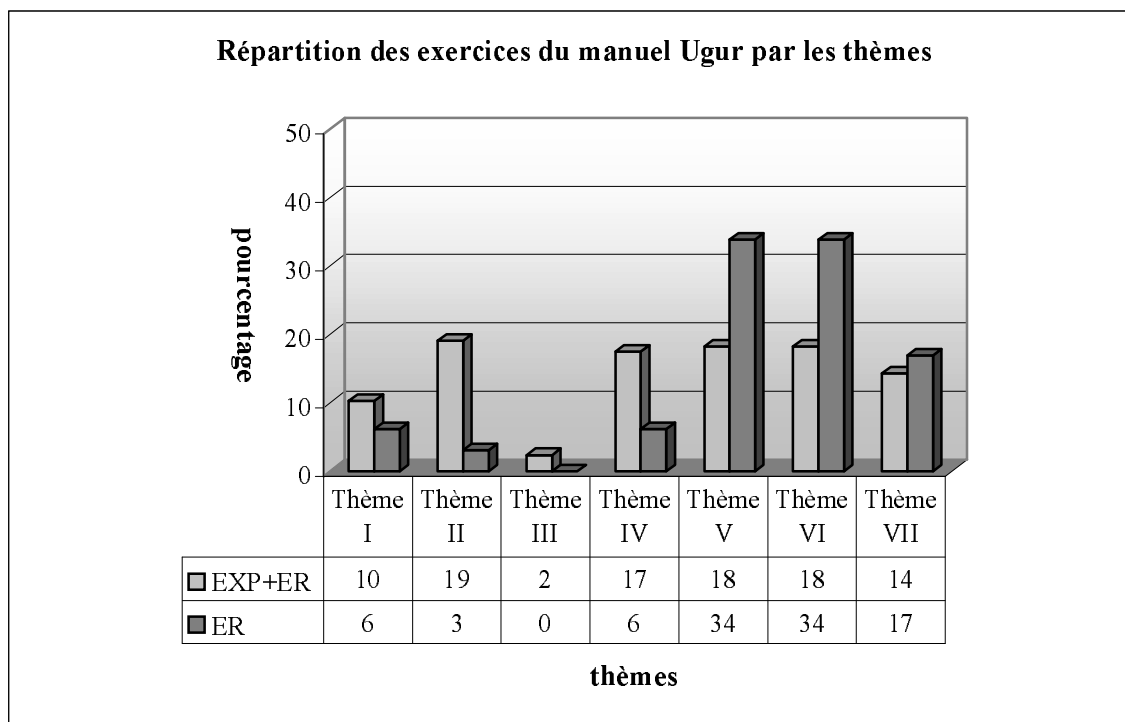
Si $f(x)=e^x - e^{-x}$, quelle est la valeur $f(3x)$ en fonction de $f(x)$? (Test 6, exercice non résolu)

Par ailleurs le tableau ci-dessous montre que la grande majorité des exercices résolus utilisent le cadre algébrique. Ce dernier est suivi par le cadre numérique avec un taux de 37%. Le cadre analytique et le cadre de la théorie élémentaire des ensembles sont les cadres peu fréquents des exercices résolus du manuel Uğur. Il y a seulement 3% des exercices au cours desquels l'élève doit travailler dans le cadre géométrique. D'un point de vue des cadres nous pouvons dire que le manuel Uğur est algébriquement très riche et géométriquement pauvre.



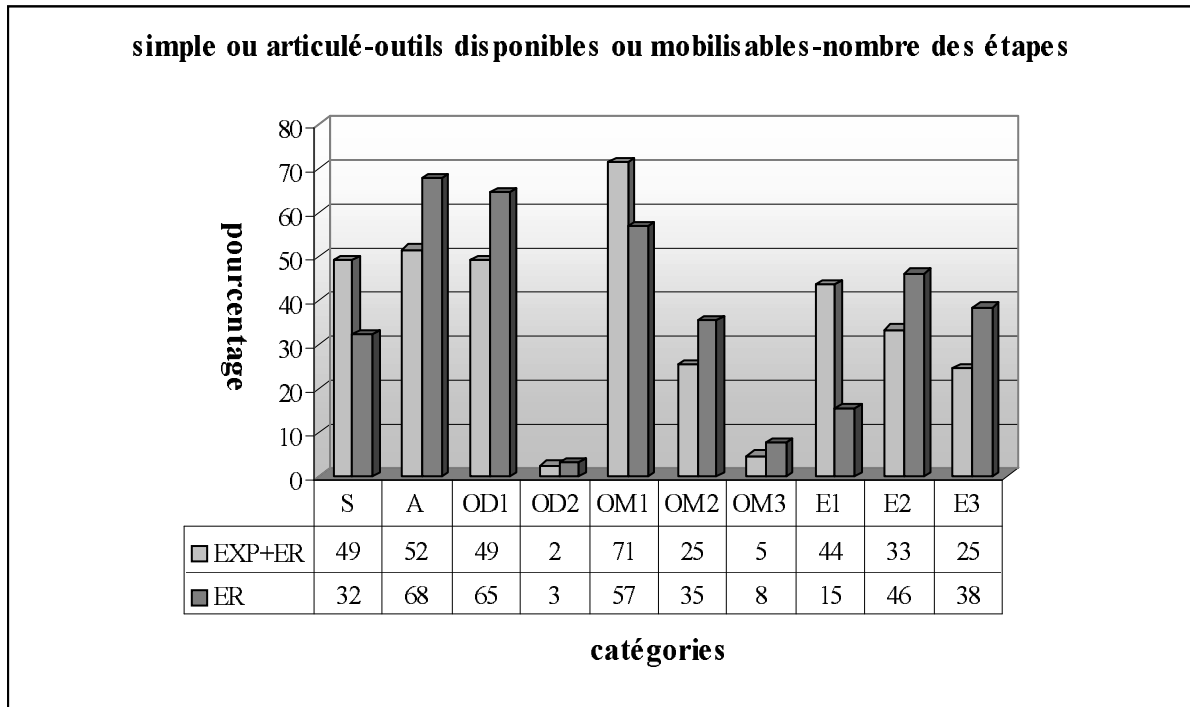
CA :Cadre Algébrique, CN :Cadre Numérique, CGA :Cadre Géométrie Analytique, CG :Cadre Géométrie, CE :Cadre de la Théorie Elémentaire des Ensembles, EXP :Exemple(effectif :61exemples), ER :Exercices résolus(effectif :65 exercices)

Nous constatons que tous les thèmes qui existent dans les questions du concours sur la notion de fonction figurent dans le manuel. Selon le tableau suivant, les thèmes V et VI sont les thèmes plus fréquents des exercices résolus comme dans le manuel Gvender. Le thème III est totalement absent des exercices résolus. Bien que le manuel propose beaucoup d'exercices qui concernent les propriétés des fonctions et fonctions particulières dans le cours, un très petit nombre d'exercices résolus sont rattachés à ce thème II. C'est peut-être dû au fait que le thème II n'est pas très important pour le concours mais important pour le lycée et que les auteurs du manuel considèrent que des questions sur ce thème pourraient être proposées dans le concours suivant. Par ailleurs dans 17% des exercices il s'agit de travailler sur la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé (thème VII). Il y a beaucoup d'exemples qui font référence directe à l'inverse des fonctions dans le cours mais la plupart des exercices des autres thèmes la font intervenir seulement indirectement aussi, le thème IV est l'un des thèmes plus marginaux des exercices résolus du manuel Uğur.



Thème I : Définition ensembliste de la notion de fonction... Thème II : Propriétés particulières des fonctions... Thème III : Quatre opérations sur les fonctions, Thème IV : Recherche de l'inverse d'une fonction, Thème V : Composition des fonctions, Thème VI : Image d'un nombre réel... Thème VII : Représentation graphique des fonctions...

Comme nous l'avons déjà dit, dans le manuel Uğur nous pouvons trouver la plupart des questions du concours ou des questions ressemblantes soit dans le cours soit dans les exercices résolus. D'après le tableau suivant nous constatons que la plupart des exercices résolus portent sur plusieurs connaissances antérieures des élèves. Tandis que dans 32% des exercices il s'agit d'applications directes du cours. Plus de la moitié demandent à l'élève de faire appel à un seul outil disponible contre un très petit nombre deux outils disponibles. Dans plus de la moitié des exercices l'élève doit faire appel à un seul outil mobilisable pour le travail. Tandis que 43% des exercices invitent l'élève à mobiliser plusieurs connaissances qui font référence directe à la notion de fonction ou ses composantes (OM2+OM3). Par ailleurs, dans la grande majorité des exercices l'élève peut arriver à la bonne réponse en plusieurs étapes (E2+E3: 84%).



S :Simple, A :Articulé, OD1 :Outil disponible 1, OD2 :Outil disponible 2, OM1 :Outil mobilisable 1, OM2 :Outil mobilisable 2,OM3 :Outil mobilisable 3,E1 :Etape 1, E2 :Etape 2, E3 :Etape 3

Annexe I-5 : analyse du manuel de préparation au concours Zafer

5.1 Définition ensembliste de la notion de fonction et ensembles correspondant

Le manuel Zafer présente les fonctions avec les correspondances entre ensembles dans un même chapitre. La seule définition qui existe pour l'introduction des fonctions est la définition ensembliste. Mais nous constatons cependant qu'on parle très brièvement du sens de la notion de fonction en terme de variable en citant qu'à partir de la notation $y=f(x)$, y est appelé variable dépendante et x variable indépendante. La présentation des ensembles correspondant (ensemble de définition, ensemble d'arrivée et ensemble image) est suivie de la comptine C_0 qui s'avère une remarque et d'une quinzaine d'exemples dont la plupart ne font pas référence directe à la définition ensembliste des fonctions.

Il y a donc cinq exemples qui font travailler sur la définition. Le premier exemple comprend quatre parties. Dans chaque partie l'élève doit chercher si une correspondance définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre est une fonction. Il s'agit donc de l'utilisation directe de la définition ensembliste (cf. la comptine C_0). La représentation en diagramme sagittal est aussi utilisée. Dans le deuxième exemple il s'agit de travailler sur une fonction f définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre par un diagramme sagittal. L'élève est amené à déterminer les ensembles correspondant à la fonction f et à écrire f sous forme de liste de couples. L'exemple suivant demande de chercher si une correspondance f affine définie sur $|\mathbb{R}$ est une fonction. L'élève doit reconnaître que pour tout x réel on a $f \in |\mathbb{R}$. Dans le quatrième exemple on demande aussi de chercher si la correspondance f définie sur $|\mathbb{R}$ par $|y|=x$ est une fonction. A partir d'une expérimentation numérique l'élève doit montrer qu'il y a deux images de 1. Le dernier exemple demande d'écrire une fonction f rationnelle définie de A (A est le sous-ensemble fini de \mathbb{Z}) vers $|\mathbb{R}$ sous forme de liste de couples et de trouver l'ensemble image de f . L'élève doit calculer toutes les images pour trouver l'ensemble image et écrire la fonction sous forme de liste de couples.

5.2 Représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé

A la suite de la définition de la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé quatre exemples et deux remarques sont proposés. Le premier exemple fait représenter une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} dans $|\mathbb{R}$. L'élève doit d'abord calculer les images et ensuite placer les points des coordonnées dans un repère orthonormé. L'écriture sous forme de liste de couples est aussi utilisée. Dans les deux exemples suivants il s'agit de lire et interpréter la représentation d'une fonction définie sur $|\mathbb{R}$.

Ainsi l'un amène l'élève à repérer quelle est fautive parmi des propositions données à partir de la représentation graphique de la fonction. L'élève doit déterminer graphiquement les images dont il s'agit et ensuite vérifier si les propositions sont vraies (par exemple $f(-5)+f(-2)=3$). Et l'autre demande de trouver graphiquement pour quelles valeurs de x on a $x.f(x)>0$ et d'exprimer leur somme. Après ces exemples il y a deux remarques qui sont consécutivement mises en place. Dans la première on indique que les éléments de l'ensemble de définition sont repérés sur l'axe des abscisses et ceux de l'ensemble d'arrivée sur l'axe des ordonnées. Quant à la deuxième remarque, elle consiste à mettre en évidence une méthode dont l'élève se servira de chercher si la représentation graphique d'une correspondance dans un repère orthonormé est celle d'une fonction (cf. analyse du manuel Uğur, remarque n°3). Un exemple dans lequel il s'agit de travailler sur la représentation graphique de cinq correspondances illustre la deuxième remarque. En traçant des parallèles à l'axe des ordonnées l'élève doit chercher si ces parallèles coupent les représentations graphiques en un seul point unique.

5.3 Quatre opérations sur les fonctions (\mp, \times, \div)

Il n'y a aucune explication ni démonstration. Le manuel cite simplement les quatre opérations sur les fonctions et la multiplication d'une fonction par un nombre réel de manière symbolique. Ensuite trois exemples comprenant plusieurs parties sont proposés. Dans le premier exemple il est nécessaire de déterminer les fonctions $f+g$, $2f-g$, $f.g$, $\frac{g}{f}$ en utilisant les fonctions f et g définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. Le deuxième exemple fait trouver la fonction $(f.g+3.f)(x)$ à partir des fonctions f et g affines définies sur $|\mathbb{R}$. Dans le dernier exemple l'élève est amené à trouver quelle peut être la valeur $f(3)$ en faisant fonctionner les fonctions $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x^2+2x+5$ et $(f.g)(x)=x^4-2x^3+x^2-12x+20$. L'élève doit d'abord calculer $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$ et $(f.g)(3)$, ensuite les multiplier pour obtenir $[f(3)]^2=20$. Cela lui permet de trouver les deux valeurs possibles de l'image de 3 par f .

5.4 Egalité des fonctions

La définition des fonctions égales est suivie d'un seul exemple dans lequel on demande de chercher si une fonction du second degré et une fonction affine définies d'un sous-ensemble fini de Z dans un autre sont égales.

5.5 Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières

Il y a deux exemples qui illustrent la définition des fonctions non surjectives. Dans le premier exemple on demande de chercher si une fonction du second degré définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z est non-surjective. La représentation en diagramme sagittal est aussi mise en fonctionnement. En ce qui concerne le deuxième exemple, il faut chercher si une fonction du second degré définie sur $|\mathbb{R}$ est non-surjective.

La définition des fonctions surjectives est suivie de quatre exemples et d'une remarque. Dans les deux premiers exemples il s'agit de chercher la surjectivité d'une fonction affine définie sur Z et d'une fonction affine définie sur $|\mathbb{N}$. A la suite de ces exemples, la remarque grâce à laquelle on présente la méthode dont l'élève se servira pour chercher si la représentation graphique d'une fonction est celle d'une fonction surjective est mise en place (cf. analyse du manuel Uğur, remarque n°4). Dans le troisième exemple à partir de sa représentation graphique on demande de chercher les intervalles pour lesquels la fonction f est non-surjective et surjective. Le dernier exemple fait utiliser la remarque suivante : en utilisant sa représentation graphique l'élève doit chercher si une fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ est surjective.

En ce qui concerne la définition des fonctions injectives, l'écriture symbolique, quatre exemples et une remarque accompagnent la définition. Dans le premier exemple il s'agit de travailler sur les trois fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre par les diagrammes sagittaux. L'élève doit chercher quel est le type de propriétés de ces fonctions. L'exemple suivant fait chercher le type de propriété d'une fonction f affine définie sur $|\mathbb{R}$. Après cet exemple la remarque dans laquelle on introduit la méthode qui consiste à chercher graphiquement l'injectivité d'une fonction (cf. idem, remarque n°5). Dans le dernier exemple qui fait appliquer cette remarque en traçant les parallèles à l'axe des abscisses dans la représentation graphique de trois fonctions l'élève est amené à chercher si ces parallèles couplent les représentations graphiques en un seul point unique.

Après avoir défini les fonctions bijectives, le manuel propose deux exemples dont l'un demande de chercher la bijectivité de trois fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre par les diagrammes sagittaux et l'autre fait chercher si une fonction f du second degré définie de $|\mathbb{R}$ vers $[2, +\infty)$ est bijective.

Quant aux exemples qui illustrent la définition des fonctions constantes, ils sont au nombre de six. Le premier exemple présente la représentation en diagramme sagittal d'une fonction constante définie d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans les trois exemples suivants on demande de trouver $(a-b+f(x))$ si la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par

$f(x)=(a-2)x^2+(b+3)x+7$ est constante, de trouver la valeur a si la fonction f définie de $|\mathbb{R}-\{2\}$ vers $|\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{ax+3}{x-2}$ est constante, de trouver $(a+b+f(x))$ si la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par

$f(x)=\frac{ax^2+bx+3}{3x^2-2x+1}$ est constante. Dans le premier exemple de ce groupe deux solutions sont

proposées. L'une fondée sur l'inexistence de variable dans l'expression de l'image des fonctions constantes : ainsi l'élève doit égaliser $a-2$ et $b+3$ à zéro pour trouver a , b et $f(x)$. Et l'autre sur le fait que les images de chaque élément de l'ensemble de définition des fonctions sont identiques. L'élève est amené à mettre en fonctionnement $f(0)=f(1)$ pour trouver a et b . Dans le deuxième exemple on propose aussi les mêmes solutions. Dans la première solution l'élève doit reconnaître que si la fonction f rationnelle est constante on doit donc simplifier les variables x qui se trouvent dans le numérateur et le dénominateur. En ce qui concerne le dernier exemple de ce groupe, il s'agit aussi de deux solutions. La deuxième solution de l'exemple précédent est toujours proposée. Dans l'autre solution sans commentaire on énonce simplement que si la fonction f est constante, les coefficients du dénominateur et du numérateur sont proportionnels. Il ne reste à l'élève qu'à appliquer ce point de méthode pour trouver a et b . La remarque qui indique la représentation graphique des fonctions constantes est une droite parallèle à l'axe des abscisses est présentée à la suite de ces exemples. Enfin il y a deux exemples dans lesquels la représentation graphique d'une fonction f constante définie de $|\mathbb{R}$ vers $\{2\}$ et d'une fonction f constante définie de $|\mathbb{R}$ vers $\{-1\}$ est mise en place.

La représentation en diagramme sagittal, la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction identique et d'un exemple sont suivis de sa définition. Dans l'exemple l'élève doit trouver $(a-b+c)$ si la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x)=(a-3)^2+(b+2)x+c-4$ est une fonction identique. Deux solutions sont proposées. L'une se fonde sur l'utilisation de la formule générale de la fonction identique et l'autre sur le fait que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition est égale à cet élément lui-même.

Par ailleurs le manuel présente aussi la définition des fonctions de permutation et des fonctions paires ou impaires. Chacune de ces définitions est illustrée par un exemple. Dans l'exemple des fonctions de permutation il s'agit de présenter deux fonctions de permutation définies sur un sous-ensemble fini et discret. En ce qui concerne l'exemple des fonctions paires ou impaires, il consiste à chercher si une fonction du cinquième degré et deux fonctions du second degré sont paires ou impaires.

5.6 Définition de l'inverse des fonctions

Avant la définition il y a deux exemples grâce auxquels on met en évidence que si une fonction est bijective, elle est inversible. L'élève est amené à trouver l'inverse de deux fonctions définies d'un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} par une liste de couples et à reconnaître si ces fonctions sont bijectives et si leur inverse est une fonction. Le manuel propose ensuite le bilan de ces exemples comme une remarque (cf. idem, remarque n°8).

La définition de l'inverse des fonctions à partir des éléments est suivie d'une remarque dans laquelle on introduit la méthode \mathbf{M}_{xfy} (cf. idem, remarque n°9) et d'une dizaine d'exemples. Le premier exemple fait trouver l'inverse de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x)=ax+b$, ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) en utilisant la méthode \mathbf{M}_{xfy} . Dans cet exemple le manuel propose aussi de trouver l'inverse de cinq fonctions affines à partir de la recette \mathbf{R}_a .

* $y=2x+5 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x-5}{2} = \frac{1}{2}(x-5)$	* $y=-3x+1 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x-1}{-3} = \frac{1}{3}(-x+1)$
* $y=x+2 \Rightarrow y^{-1} = x-2$	* $y=-x+3 \Rightarrow y^{-1} = \frac{x-3}{-1} = -x+3$
* $y=5x \Rightarrow y^{-1} = \frac{x}{5}$	

Dans le deuxième exemple nous constatons aussi l'articulation entre la recette \mathbf{R}_a et la méthode \mathbf{M}_{xfy} . On demande d'abord de trouver l'inverse de la fonction f rationnelle définie de $\mathbb{R} - \{ \frac{d}{c} \}$ vers $\mathbb{R} - \{ \frac{a}{b} \}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ à partir de la méthode \mathbf{M}_{xfy} . Ensuite comme dans l'exemple précédent il y a cinq exemples dans lesquels la recette \mathbf{R}_a est utilisée pour les fonctions rationnelles.

* $y = \frac{2x-3}{x-5} \Rightarrow y^{-1} = \frac{5x-3}{x-2}$	* $y = \frac{3x}{2x+1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{-x}{2x-3}$
* $y = \frac{4}{2x-3} = \frac{0x+4}{2x-3} \Rightarrow y^{-1} = \frac{3x+4}{2x-0} = \frac{3x+4}{2x}$	* $y = \frac{2x+1}{3} = \frac{2x+1}{0x+3} \Rightarrow y^{-1} = \frac{-3x+1}{0x-2} = \frac{-3x+1}{-2} = \frac{3x-1}{2}$
* $y = 3 - \frac{2}{x} = \frac{3x-2}{x+0} \Rightarrow y^{-1} = \frac{0x-2}{x-3} = \frac{-2}{x-3}$	

Les exemples suivants font trouver l'inverse des fonctions qui ne relèvent pas de la recette \mathbf{R}_a . Ainsi le troisième exemple demande de trouver l'inverse de la fonction f bijective, définie de A vers B (A et B ne sont pas indiqués). Nous supposons qu'ils sont les sous-ensembles finis de \mathbb{Z}) par $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$. L'utilisation de \mathbf{M}_{xfy} est indispensable. La résolution d'équations de

racine carrée s'avère un outil devant être disponible dans ce travail. Dans le quatrième exemple il s'agit de trouver la valeur $f^{-1}(9)$ si la fonction f est définie de $|\mathbb{R}$ vers $(1, +\infty)$ par $f(x) = 2^{2x-1} + 1$. En mettant en fonctionnement la définition de l'inverse des fonctions l'élève trouve $f(x) = 9$ et ensuite obtient une équation exponentielle très particulière pour trouver la valeur demandée. L'exemple suivant demande de trouver pour quelle valeur de x on a $f^{-1}(x) = 3$ si la fonction f est bijective et définie de A vers B (A et B ne sont pas indiqués) par $f(x) = 2^x + 2^{x-1}$. L'application de la définition de l'inverse des fonctions et de la méthode \mathbf{M}_{xy} est mise en jeu. Le sixième exemple fait trouver l'inverse de la fonction f définie de $[-1, +\infty)$ vers $[-5, +\infty)$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$. La résolution d'équations du second degré dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans la dernière étape de la résolution où l'élève doit choisir l'inverse de la fonction f parmi les inverses possibles il doit prendre en compte que l'ensemble de définition de f contient des nombres positifs supérieurs à 1. Dans l'exemple suivant l'élève est amené à trouver $f^{-1}(26)$ si la fonction f est bijective et $f(x^2 + 3) = x^3 - 1$. En faisant fonctionner la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir $f^{-1}(x^3 - 1) = x^2 + 3$ et ensuite trouver pour quelle valeur de x on a $x^3 - 1 = 26$ pour calculer $f^{-1}(26)$. La résolution d'équations du troisième degré paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail. Le huitième exemple consiste à faire calculer $f^{-1}(1)$ en utilisant la fonction f définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 16x + 1$. L'élève doit d'abord utiliser la définition de l'inverse des fonctions et trouver $f(x) = 1$. Cela lui permet d'obtenir une équation du troisième degré. Enfin il doit résoudre cette équation pour trouver les images de 1 par f^{-1} . Dans l'exemple suivant on demande de trouver l'inverse d'une fonction de permutation définie sur un sous-ensemble fini et discret de manière ensembliste. En ce qui concerne le dernier exemple, il consiste à faire trouver la valeur a si la fonction f est définie sur $|\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax - 5$ et si la représentation graphique de f^{-1} se passe par le point $(-1, 2)$. Le recours à la définition de l'inverse des fonctions est aussi indispensable dans cet exemple. En utilisant le point des coordonnées l'élève doit trouver $f(2) = -1$. Cela lui permet d'obtenir une équation pour trouver la valeur demandée. Cette partie se termine par une remarque qui met

en évidence la relation entre la représentation graphique d'une fonction et celle de son inverse (cf. idem, remarque n°13).

5.7 Composition des fonctions

La représentation en diagrammes sagittaux, deux exemples et certaines propriétés suivent la définition ensembliste de la composition des fonctions. Dans le premier exemple on demande de trouver $(gof)(1)$, $(fog)(2)$ et $(fof)(-1)$ en utilisant les fonctions f et g définies par $f(x)=2x+3$, $g(x)=x^2-5$. Sans trouver la formule générale des compositions demandées l'élève est amené à calculer les images « fonction par fonction ». Le deuxième exemple fait déterminer fog , gof et gog en utilisant une fonction f du second degré et une fonction g affine définies sur \mathbb{R} . Une identité remarquable que l'élève doit mettre en fonctionnement s'avère un outil supposé disponible dans ce travail.

Enfin le manuel termine le cours en présentant certaines propriétés de la composition des fonctions : non-commutativité (pas démontrée mais illustrée par un exemple), associativité (pas démontrée mais illustrée par un exemple), composée de la fonction identique et une fonction (démontrée mais pas d'exemple), composée d'une fonction et son inverse (démontrée et illustrée par un exemple), inverse de la composition des fonctions (démontrée mais pas d'exemple), « décomposition » (démontrée et illustrée par un exemple) et inverse de l'inverse d'une fonction (pas démontrée mais illustrée par un exemple).

5.8 Exercices résolus (66 exercices¹⁴)

Les exercices résolus sont généralement proposés à la fin du chapitre. Mais il y a aussi certains exercices qui figurent dans le cours. Comme ces exercices ne font pas référence directe aux notions qui les précèdent, il est préférable de les analyser dans cette partie. De plus nous trouvons deux tests proposant des exercices en forme de QCM à la fin du chapitre. Puisque ces exercices sont aussi corrigés, nous les analyserons ici.

5.8.1 Thème I :Définition ensembliste des fonctions et ensembles correspondant (4 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Utilisation de la définition ensembliste des fonctions (1 exercice) : on demande de travailler sur des correspondances définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre par une liste

¹⁴ il y a des exercices qui comprennent plusieurs parties. Parfois nous avons compté ces parties comme un exercice différent. C'est pourquoi l'effectif des exercices résolus dans les tableaux est 69.

de couples. L'élève doit repérer parmi ces correspondances celle qui n'est pas une fonction. L'utilisation de la définition ensembliste de la fonction (cf. la comptine C_0) est donc mise en fonctionnement.

ii) *Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble d'arrivée ou l'ensemble image d'une fonction (2 exercices)* : dans un exercice il s'agit de trouver l'ensemble d'arrivée d'une fonction f affine, bijective défini de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis de \mathbb{Z}) à partir de l'ensemble de définition. Le deuxième exercice fait trouver l'ensemble de définition d'une fonction f affine, bijective définie de A vers B (A et B sont les sous-intervalles de $|\mathbb{R}$) en utilisant $B=[5,14)$. Les connaissances antérieures liées aux intervalles et inéquations sont des outils supposés disponibles dans ce travail.

iii) *Calculer le nombre des correspondances définies de A vers B qui sont des fonctions ou qui n'en sont pas (1 exercice)* : il s'agit de calculer le nombre des correspondances définies de A vers B (A et B sont les sous-ensembles finis et discrets) qui sont des fonctions en utilisant $\text{card}(A)=4$ et $\text{card}(B)=2$. L'élève doit simplement appliquer la formule concernée.

5.8.2 Thème II : Propriétés particulières des fonctions et fonctions particulières (3 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en deux catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) *Déterminer des valeurs demandées à partir des formules générales de certaines fonctions particulières (1 exercice)* : on demande à l'élève à déterminer la valeur $(a-b+n+g(2))$ si la fonction f définie par $f(x)=(a-2)x+b+1$ est identique et si la fonction g définie par $g(x)=(n-5)x+4$ est constante. En sachant que $f(x)=x$ si f est identique, l'élève doit égaliser le coefficient de x à 1 et le terme constant à zéro. L'égalité des polynômes paraît donc comme un outil supposé disponible dans ce travail. Pour trouver n et $g(2)$ l'élève doit égaliser $n-5$ à zéro en raison de l'inexistence de variable x dans l'expression de l'image des fonctions constantes.

ii) *Trouver le nombre des fonctions injectives, bijectives, surjectives... définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre (2 exercices)* : il y a un exercice qui comprend quatre parties dont la première fait trouver le nombre des correspondances qui sont des fonctions définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. La deuxième partie demande de trouver le nombre des fonctions injectives, la troisième partie de trouver le nombre des fonctions bijectives et la quatrième partie de trouver le nombre des fonctions constantes définies d'un sous-ensemble fini et discret dans un autre. Dans le deuxième exercice il s'agit aussi de trouver le nombre des fonctions bijectives, le nombre des fonctions non bijectives et

le nombre des fonctions qui associe à l'élément de l'ensemble de définition a et l'élément de l'ensemble d'arrivée d , définies sur un sous-ensemble fini et discret. Avant ces exemples le manuel encadre toutes les formules dont l'élève doit se servir sous le titre « nombre des fonctions ». Il reste donc à l'élève à les appliquer simplement. Par ailleurs pour pouvoir appliquer ces formules l'élève doit disposer des connaissances antérieures liées aux factorielles, puissances et permutations.

5.8.3 Thème III : Recherche de l'inverse d'une fonction définie algébriquement (5 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Trouver directement l'inverse d'une fonction (2 exercices) : dans un exercice on définit une fonction f de la manière suivante : $(y=f(x) \text{ et } x=2t-1, y=t+5)$ et on demande de trouver l'inverse de la fonction f . Pour ce faire l'élève doit d'abord déterminer la fonction f en calculant t en fonction de x et en mettant cette valeur obtenue à la place de x dans y . Ensuite il doit trouver l'inverse de f en utilisant \mathbf{R}_a . L'élève rencontre pour la première fois ce type de fonctions définies paramétriquement. Un autre exercice fait trouver f^{-1} si la fonction f est bijective et définie par $x.f(x)-3=2[f(x)]^2+x$. L'élève doit d'abord échanger x et $y=f(x)$ et ensuite il doit calculer y en fonction de x pour trouver l'inverse de f .

ii) Utilisation de la définition de l'inverse des fonctions à partir des éléments (2 exercices) : dans un exercice on demande de trouver la valeur m si la fonction f est définie de A vers B (A et B sont les ensembles finis de Z) par $f(x)=\frac{x+m}{x-1}$ et $(5,2)\in f^{-1}$. En appliquant la définition de l'inverse des fonctions l'élève doit obtenir $f(2)=5$ et ensuite une équation pour trouver la valeur demandée. Un autre exercice fait trouver la valeur $f^{-1}(8)$ si $f(x^2+2x)=5x^2+10x-2$. En posant $y=x^2+2x$ l'élève est amené à déterminer la fonction f . Ensuite il doit mettre en fonctionnement la définition de l'inverse des fonctions et obtenir $f(x)=8$ (soit $f^{-1}(8)=x$) pour trouver la valeur demandée.

iii) Utilisation de la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions (1 exercice) : il y a un exercice dans lequel il s'agit de travailler sur les correspondances définies d'un sous-ensemble fini de Z dans Z par une liste de couples. L'élève doit repérer quelles sont les correspondances qui sont à la fois des fonctions et inversibles parmi des correspondances proposées. La définition ensembliste des fonctions et la relation entre la bijectivité et l'inversibilité des fonctions sont mises en fonctionnement.

5.8.4 Thème IV :Composition des fonctions définies algébriquement ou à partir d'ensembles
(27 exercices)

Nous pouvons classer les exercices en trois catégories différentes selon la tâche prescrite :

i) Composition des fonctions (15 exercices) : dans un exercice on demande de composer une fonction f polynome définie sur \mathbb{R} par morceaux et une fonction g affine définie sur \mathbb{R} pour trouver $f \circ g$. Une identité remarquable paraît comme un outil devant être disponible dans ce travail. Le deuxième exercice fait composer une fonction de permutation f et l'inverse d'une fonction de permutation g définies sur un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} de manière ensembliste. L'élève doit d'abord trouver l'inverse de g en utilisant la définition de l'inverse des fonctions à partir des éléments et ensuite la composée demandée. Le troisième exercice fait trouver la fonction $(g \circ f^{-1})$ en utilisant les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt[3]{x-5}$, $g(x) = 2x-7$. En appliquant la méthode \mathbf{M}_{x^y} l'élève doit d'abord trouver l'inverse de f et ensuite la composée demandée. La résolution d'équations du troisième degré est un outil supposé disponible dans ce travail. Dans un autre exercice il faut calculer $(f \circ f)(2)$ si les fonctions f et g sont bijectives et $(f \circ g^{-1})(x) = 2x-3$, $(g \circ f)(x) = 5x-1$. Composer ces deux composées données permet à l'élève d'obtenir la fonction $f \circ f$ et l'image demandée. La définition de la fonction identique est utilisée. Dans le cinquième exercice on demande de trouver la différence $a-b$ si la composée $f \circ g$ est identique et si les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ax+1$, $g(x) = 3x+b$, dans le sixième exercice de trouver le produit $m.n$ si la composée $f \circ g$ est identique et les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x+m$, $g(x) = nx+1$. Pour ces deux exercices l'élève doit d'abord trouver la composée $f \circ g$ et ensuite en faisant fonctionner l'égalité des polynômes il doit déterminer les valeurs m et n (ou a et b) pour exprimer le produit (ou la différence) demandé. Le septième exercice consiste à faire trouver quelle peut être la valeur $f(2)$ si la fonction f affine est définie par $f(x) = ax+b$ et $(f \circ f)(x) = 4x-15$. L'élève doit d'abord composer la fonction f avec elle-même et ensuite trouver a et b en appliquant l'égalité des polynômes. Cela lui permet de définir les fonctions f possibles et de calculer les images de 2. Dans un autre exercice il est nécessaire de trouver la somme $a+b$ si les fonctions f et g sont définies par $f(x) = nx+2$, $g(x) = \frac{3x+m}{2}$ et $(f \circ g)(x) = \frac{3x-1}{3}$. L'égalité des polynômes dont l'élève doit se servir est un outil supposé disponible dans ce travail comme dans les exercices précédents. L'élève doit d'abord composer f et g pour trouver $f \circ g$ et ensuite les valeurs m et n à partir de l'égalité des composées. Le neuvième exercice demande de trouver