

CHAPITRE VI

ANALYSE DES QUESTIONNAIRES-ELEVES SUR LA NOTION DE FONCTION

Plan du chapitre VI :

1. <i>Analyse a priori des questionnaires</i>	158
1.1 Premier questionnaire.....	158
1.1.1 Question n°1.....	158
1.1.2 Question n°2.....	160
1.1.3 Question n°3.....	161
1.1.4 Question n°4.....	163
1.1.5 Question n°5.....	163
1.1.6 Question n°6.....	165
1.1.7 Question n°7.....	166
1.2 Deuxième questionnaire.....	168
1.2.1 Question n°1.....	168
1.2.2 Question n°2.....	169
1.2.3 Question n°3.....	171
1.2.4 Question n°4.....	173
1.2.5 Question n°5.....	174
1.2.6 Question n°6.....	176
1.2.7 Question n°7.....	176
1.2.8 Question n°8.....	177
1.2.9 Question n°9.....	178
2. <i>Analyse posteriori du premier questionnaire</i>	180
2.1 Question n°1.....	180
2.1.1 Lycée anatolien.....	183
2.1.2 Lycée super.....	186
2.1.3 Lycée normal.....	187
2.1.4 Résultats des élèves par lycée.....	190
2.1.5 Résultats généraux des élèves.....	191
2.1.6 Conclusion.....	191
2.2 Question n°2.....	192
2.2.1 Lycée anatolien.....	194
2.2.2 Lycée super.....	197
2.2.3 Lycée normal.....	199
2.2.4 Résultats des élèves par lycée.....	201
2.2.5 Résultats généraux des élèves.....	202
2.2.6 Conclusion.....	202
2.3 Question n°3.....	203
2.3.1 Lycée anatolien.....	206
2.3.2 Lycée super.....	208
2.3.3 Lycée normal.....	211
2.3.4 Résultats des élèves par lycée.....	213
2.3.5 Résultats généraux des élèves.....	214
2.3.6 Conclusion.....	214
2.4 Question n°4.....	215
2.4.1 Lycée anatolien.....	217
2.4.2 Lycée super.....	220
2.4.3 Lycée normal.....	222
2.4.4 Résultats des élèves par lycée.....	224
2.4.5 Résultats généraux des élèves.....	225
2.4.6 Conclusion.....	225
2.5 Question n°5.....	227

2.5.1 Lycée anatolien.....	228
2.5.2 Lycée super.....	230
2.5.3 Lycée normal.....	232
2.5.4 Résultats des élèves par lycée.....	234
2.5.5 Résultats généraux des élèves.....	235
2.5.6 Conclusion.....	235
2.6 Question n°6.....	236
2.6.1 Lycée anatolien.....	240
2.6.2 Lycée super.....	244
2.6.3 Lycée normal.....	244
2.6.4 Résultats des élèves par lycée.....	246
2.6.5 Résultats généraux des élèves.....	247
2.6.6 Conclusion.....	248
2.7 Question n°7.....	248
2.7.1 Lycée anatolien.....	250
2.7.2 Lycée super.....	253
2.7.3 Lycée normal.....	255
2.7.4 Résultats des élèves par lycée.....	257
2.7.5 Résultats généraux des élèves.....	258
2.7.6 Conclusion.....	258
3. <i>Analyse a posteriori du deuxième questionnaire</i>	259
3.1 Question n°1.....	259
3.1.1 Lycée anatolien.....	260
3.1.2 Lycée super.....	263
3.1.3 Lycée normal.....	264
3.1.4 Résultats des élèves par lycée.....	266
3.1.5 Résultats généraux des élèves.....	267
3.1.6 Conclusion.....	267
3.2 Question n°2.....	270
3.2.1 Lycée anatolien.....	270
3.2.2 Lycée super.....	273
3.2.3 Lycée normal.....	274
3.2.4 Résultats des élèves par lycée.....	276
3.2.5 Résultats généraux des élèves.....	277
3.2.6 Conclusion.....	277
3.3 Question n°3.....	279
3.3.1 Lycée anatolien.....	282
3.3.2 Lycée super.....	285
3.3.3 Lycée normal.....	286
3.3.4 Résultats des élèves par lycée.....	288
3.3.5 Résultats généraux des élèves.....	289
3.3.6 Conclusion.....	290
3.4 Question n°4.....	290
3.4.1 Lycée anatolien.....	292
3.4.2 Lycée super.....	295
3.4.3 Lycée normal.....	296
3.4.4 Résultats des élèves par lycée.....	298
3.4.5 Résultats généraux des élèves.....	299
3.4.6 Conclusion.....	299
3.5 Question n°5.....	300

3.5.1 Lycée anatolien.....	302
3.5.2 Lycée super.....	305
3.5.3 Lycée normal.....	306
3.5.4 Résultats des élèves par lycée.....	308
3.5.5 Résultats généraux des élèves.....	309
3.5.6 Conclusion.....	309
3.6 Question n°6.....	310
3.6.1 Lycée anatolien.....	312
3.6.2 Lycée super.....	315
3.6.3 Lycée normal.....	316
3.6.4 Résultats des élèves par lycée.....	318
3.6.5 Résultats généraux des élèves.....	319
3.6.6 Conclusion.....	319
3.7 Question n°7.....	320
3.7.1 Lycée anatolien.....	321
3.7.2 Lycée super.....	324
3.7.3 Lycée normal.....	325
3.7.4 Résultats des élèves par lycée.....	327
3.7.5 Résultats généraux des élèves.....	328
3.7.6 Conclusion.....	328
3.8 Question n°8.....	329
3.8.1 Lycée anatolien.....	330
3.8.2 Lycée super.....	333
3.8.3 Lycée normal.....	334
3.8.4 Résultats des élèves par lycée.....	336
3.8.5 Résultats généraux des élèves.....	337
3.8.6 Conclusion.....	337
3.9 Question n°9.....	338
3.9.1 Classe de terminale.....	339
3.9.2 Conclusion.....	339
4. <i>Synthèse des questionnaires-élèves</i>	340
5. <i>Conclusion</i>	349

1. Analyse a priori des questionnaires-élèves

Il s'agit à présent de justifier le choix des questions proposées ainsi que de prévoir quelques réponses des élèves face à celles-ci. Je n'ai cependant pas tenu compte des erreurs de calcul qui peuvent se produire lors de la résolution des exercices étant donné la grande variété de fautes qui peuvent être commises, ne retenant que les réponses « catégorisables » révélant un intérêt pour notre recherche en cours.

Je vais commencer d'abord par le questionnaire 1 :

1.1 Premier questionnaire

1.1.1 Question n°1

Il y a un groupe de dix personnes qui viennent de Mars. Ils ne connaissent rien du tout sur la notion de la fonction. Comment vous leur racontez ce qu'est une fonction ?¹

Mon but est ici de ne pas attendre une définition mathématique des fonctions. Je voulais savoir à quoi pense l'élève quand on lui parle de fonction, c'est-à-dire quelle est la première chose qui lui vient à l'esprit à ce propos (conceptions des élèves²).

En posant la question dans cette forme au lieu de demander une simple définition de la fonction, je voulais donner aux élèves, en les éloignant d'une ambiance formelle ou scolaire à

¹ Lors de la préparation de cette question, nous nous sommes inspirés de la question suivante « Une civilisation d'une autre galaxie est venue chez nous. Ils connaissent le français et les quatre opérations : + - * /. Ils ont demandé ce que signifiait \sqrt{a} . Expliquer à ces visiteurs extra terrestres la signification de \sqrt{a} », utilisée par Suzette ROUSSET-BERT dans son travail intitulé « stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations », *Petit x*, n°25, pp.25-58, 1990-1991.

² Les travaux de recherche en didactique des sciences et des mathématiques ont amplement montré que certaines réponses données par des élèves à des problèmes d'ordre scientifique pouvaient se révéler fort éloignées des modèles canoniques correspondants. (cf. Artigue et Robinet (1982) ; Robert (1982) ; Rogalski (1982) ; Vergnaud (1983)...etc.)

une ambiance quotidienne, l'idée que toutes les réponses (même un mot) étaient les bienvenues.

Voici les réponses attendues ou les diverses définitions de la notion de la fonction :

Df.1 La fonction est un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles.

Df.2 Une fonction f d'un ensemble A dans un ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chacun des éléments de A au plus un élément de B .

Df.3 Une fonction f de A dans B est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$ tel que pour chaque $a \in A$ il y a au plus un $b \in B$, tel que $(a, b) \in f$.

Df.4 « Une quantité est dite fonction d'une variable indépendante lorsque sa valeur dépend de celle que l'on attribue à cette variable. »³

Df.5 « Considérons l'égalité : $y=2x+3$. Le nombre variable x peut prendre diverses valeurs et, quelle que soit la valeur donnée à x , nous saurons calculer la valeur correspondante de y . Nous dirons encore que y est une fonction de la variable x . »...⁴

Df.6 « Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que la valeur de l'une d'elles étant donnée on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. »⁵

Df.7 « Des quantités dépendent des autres de manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi. »⁶

Df.8 « une fonction d'une grandeur variable est une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. »⁷

En plus de ces définitions citées ci-dessus, je veux aussi donner quelques réponses a priori possibles hors définition de la fonction :

Df.9 La fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnu.

Comptine C_o : « Pour qu'une correspondance puisse être une fonction, il faut qu'aucun élément de l'ensemble de définition ne soit vacant et qu'un élément de l'ensemble de définition ait une seule image dans l'ensemble d'arrivée. »

³ Cours d'algèbre élémentaire, FEC, Mtl, 1961, p.159.

⁴ Mathématiques, Hachette, 1939, p.315.

⁵ La définition de Cauchy (1821) C. Phili.

⁶ La définition d'Euler (1755), Youschkevitch, 1976, p. 61.

⁷ La définition de Bernouilli (1667-1748), Cantor, 1896, p.23.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
Df.1	-	-	-	-	-	-	-
Df.2	+	+	+	+	+	+	+
Df.3	+	+	+	+	-	+	+
Df.4	-	-	-	-	-	-	-
Df.5	-	-	-	-	-	-	-
Df.6	-	-	-	-	-	-	-
Df.7	-	-	-	-	-	-	-
Df.8	-	-	-	-	-	-	-
Df.9	-	-	-	-	-	-	-
Comptine C_o	+	+	+	implicite	+	+	+

Comme nous l'avons déjà vu dans de l'analyse des manuels, tous les manuels introduisent la notion de fonction avec sa définition ensembliste. Nous ne trouvons ainsi aucune définition en terme de variable. Mais dans les manuels Tutibay et Zafer on parle cependant très brièvement du sens des fonctions à ce terme lors de l'introduction de la notation $y=f(x)$ (x est variable indépendante et y variable dépendante). Par ailleurs, dans tous les manuels, à part Güvender, la définition Df.3 paraît comme l'écriture symbolique de la définition Df.2. A l'exception du manuel officiel qui la propose implicitement dans des exemples, la comptine C_o figure, soit comme une remarque soit comme mise en garde, dans tous les manuels.

Le fait que dans les manuels la seule définition qui existe soit la définition ensembliste et que la comptine C_o soit proposée par la grande majorité des manuels me conduit à penser que la plupart des élèves auront tendance à les donner.

1.1.2 Question n°2

Trouver l'ensemble d'arrivée de la fonction f si $f:A \rightarrow B$, et $A=\{0,1,2,3\}$, $f(x)=2x+4$.

Il s'agit de travailler sur une question simple et isolée. Je me suis ici intéressé à la reconnaissance de l'ensemble image d'une fonction définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z . Grâce à cette question je pense à vérifier que tous les élèves ont le niveau technique et que les connaissances essentielles comme celles-ci (ou indiquées par le programme) sont disponibles chez tous les élèves. L'élève doit mettre tous les éléments de l'ensemble de définition A à la place de x dans la fonction f pour trouver l'ensemble image.

Je décris les réponses attendues par la suite :

P1. $f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$

$f(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$ donc $B = \{4, 6, 8, 10\}$

P2. On peut confondre l'ensemble de définition avec l'ensemble image.

$2x + 4 = 0$ donc $x = -2$

$2x + 4 = 1 \dots x = \frac{-3}{2}$

.....

$2x + 4 = 3$ donc $x = \frac{-1}{2}$ alors $B = \{-2, \frac{-3}{2}, -1, \frac{-1}{2}\}$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	+	+	+	+	+	+	+

Nous pouvons constater la première procédure correcte dans tous les manuels.

1.1.3 Question n°3

Trouver la fonction f^{-1} si $f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{3x+7}{2}$.

En Turquie ; « il y a un proverbe : « parle-moi de ton ami, ainsi que je te dirai qui tu es ». Cela signifie que tout le monde représente plus ou moins les comportements de son ami. On peut avoir des idées sur quelqu'un en regardant ses amis. Ainsi dans cette question je m'appuie sur ce proverbe et je dis que « parle-moi de la méthode que tu utilises pour trouver l'inverse des fonctions définies algébriquement je te dirai de quel type d'enseignement il s'agit ».

Ainsi cette question est l'une des questions qui pouvait confirmer mes hypothèses sur la mentalité utilitaire et les mauvais effets de l'enseignement de dérsané (ou plutôt de l'enseignement très proche du concours). Le but de la question est de vérifier que les élèves peuvent trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement et d'étudier quelles méthodes sont utilisées par les élèves : la recette **R_a** ou la méthode **M_{xy}**. Je pensais que dans les classes (ou les lycées) où l'enseignement des mathématiques est très proche du concours (comme le lycée Anatolien et le lycée Super) la recette **R_a** est majoritairement utilisée.

Comme nous l'avons déjà vu dans l'analyse des manuels, surtout les manuels MPC essaient d'attirer l'attention des élèves sur des erreurs fréquemment possibles à commettre lors de l'utilisation de la recette **R_a**. Puisque cette question est l'une des questions de ce type (parce

qu'il manque aux élèves le troisième élément dans le dénominateur), je me demandais si l'utilisation de la recette **R_a** poserait beaucoup de problèmes chez les élèves en difficulté. Je présente maintenant les différentes procédures de résolution que l'on peut raisonnablement attendre de la part des élèves pour trouver l'inverse de la fonction *f* :

P1. On peut trouver l'inverse de la fonction *f* en utilisant la méthode **M_{xy}** :

Soit *x* et *y* tels que $f(x)=y$ donc $y=\frac{3x+7}{2}$, $2y=3x+7$, $2y-7=3x$ $x=\frac{2y-7}{3}$ donc pour tout *x* $f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P2. L'élève peut trouver l'inverse de la fonction *f* en utilisant la recette **R_a** :

Si $f(x) = ax+b$, $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ alors $f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P3. On peut la trouver en utilisant la recette **R_a** :

$f(x)=\frac{3x+7}{2}$, on pense qu'il faut un zéro devant *x* dans le dénominateur $f(x)=\frac{3x+7}{0x+2}$. Et puis on change les places de 2 et 3 avec leurs signes. On obtient la bonne réponse $f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}$ $f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P4. On peut changer les places de 3 et 2 avec leurs signes et trouver la bonne réponse:

$f^{-1}(x)=\frac{-2x+7}{-3}$ $f^{-1}(x)=\frac{2x-7}{3}$.

P5. Comme la fonction *f* n'est pas inversible, on ne peut pas trouver l'inverse de la fonction *f*. Alors elle n'existe pas.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1 (méthode M_{xy})	+	+	+	+	+	+	+
P2 (recette R_a)	-	-	+	+	+	+	+

Le tableau ci-dessus montre qu'à part les manuels Tutibay et Altın dans lesquels il n'y a aucun exercice qui fait trouver l'inverse de ce type de fonctions en utilisant la recette **R_a**, dans tous les manuels on peut trouver les deux méthodes.

1.1.4 Question n°4

Trouver la fonction $f \circ g$ si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout x de \mathbb{R} par $f(x)=2x+1$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout x de \mathbb{R} par $g(x)=x+6$.

Dans cette question il s'agit de l'application directe de la définition de la composition des fonctions. Je voulais vérifier que les élèves peuvent composer les deux fonctions affines. Comme l'application de la définition de la composition met en jeu deux cadres : le cadre algébrique et le cadre fonctionnel, à l'occasion de cette question je pensais étudier si les élèves auraient des difficultés à passer d'un domaine familier (cadre algébrique) à un autre non familier (cadre fonctionnel).

Ce type de question est très habituel pour tous les élèves. Donc je pense que le taux de réussite sera assez élevé.

Je donne les réponses attendues ci-dessous :

P1. Pour tout x , $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2[g(x)] + 1 = 2(x+6) + 1 = 2x + 12 + 1 = 2x + 13$

P2. On peut trouver la fonction « g rond f » au lieu de « f rond g » :

$f \circ g(x) = f[g(x)] = (2x+1) + 6 = 2x + 7$.

P3. L'opérateur de la composée se devient celui de l'addition ou la soustraction :

$f \circ g(x) = (2x+1) + (x+6) = 3x+7$ $f \circ g(x) = (2x+1) - (x+6) = 2x+1-x-6 = x-5$.

P4. On peut trouver la fonction g sans prendre en compte le coefficient de x dans la fonction f :

$f \circ g(x) = f[g(x)] = 2x+6+1 = 2x+7$.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	+	+	+	+	+	+	+

Dans tous les manuels nous trouvons la procédure correcte P1.

1.1.5 Question n°5

Trouver la fonction f si $f \circ g$ est définie par $f \circ g(x)=6x+4$ et $g(x)=2x+1$.

Cette question était destinée à vérifier que les élèves pouvaient « décomposer » une fonction $f \circ g$ [ou $g \circ f$] en utilisant g [ou f]. Nous sommes face à une tâche inverse de celle de la question précédente. La reconnaissance de la fonction inverse et celle de la fonction composée sont mise en jeu. Il est aussi bien entendu nécessaire de connaître la définition de la fonction identique ($g \circ g^{-1} = I$). D'abord l'élève doit trouver l'inverse de la fonction g et

puis la composer avec la fonction $f \circ g$. De plus je pensais aussi que la décomposition des fonctions était plus difficile que la composition des fonctions pour les élèves. Grâce à cette question et la question précédente je pourrai vérifier si cette hypothèse est valable. La principale erreur que j'attendais dans toutes les classes de seconde consistait à trouver la fonction « $g^{-1} \circ f \circ g$ » à la place de f (cf. la procédure P5).

J'attends donc les réponses :

P1. On peut trouver d'abord l'inverse de la fonction g . Ensuite on peut composer l'inverse de la fonction g et la fonction $f \circ g$:

$$g(x)=2x+1, y=2x+1 \dots x=\frac{y-1}{2} \text{ donc } g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$(f \circ g) \circ g^{-1}(x)=(6x+4) \circ (\frac{x-1}{2}) \dots f \circ (g \circ g^{-1})(x)=6(\frac{x-1}{2})+4 \dots f \circ I(x)=3x-3+4 \text{ alors } f(x)=3x+1.$$

P2. Soit $\exists m, n \in \mathbb{R}$, pour tout x tels que $f(x)=mx+n$ donc

$f \circ g(x)=m(2x+1)+n=2mx+m+n, \quad 2mx+m+n=6x+4$. En utilisant l'égalité des polynômes on peut trouver les valeurs m et n ainsi que la fonction f .

$$2m=6 \Rightarrow m=3, \quad m+n=4 \Rightarrow n=1, \quad f(x)=3x+1$$

P3. L'élève peut écrire la fonction g dans la composée pour obtenir une composée (implicite).

$f \circ g(x)=6x+4, f(g(x))=6x+4, f(2x+1)=6x+4$. Il faut trouver l'inverse de $2x+1$ et ensuite la mettre à la place de x dans la composée (implicite).

$$y=2x+1 \Rightarrow y-1=2x \Rightarrow x=\frac{y-1}{2} \text{ (ou en utilisant la recette } \mathbf{R}_a : \frac{x-1}{2} \text{)}$$

$$f(2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1) = 6 \cdot \frac{x-1}{2} + 4 \Rightarrow f(x) = 3x + 1.$$

P4. On peut penser que la composée de la fonction f et g n'est pas déjà effectuée et qu'il s'agit d'une mission inaccomplie. On peut composer la fonction g encore une fois avec la fonction « $f \circ g$ ». Donc on obtient la fonction « $f \circ g \circ g$ »

$$f \circ g(x) = 6x + 4, f[f \circ g(x)] = 6x + 4, f(x) = 6g(x) + 4 = 6(2x + 1) + 4 = 12x + 6 + 4 = 12x + 10.$$

P5. On peut trouver l'inverse de la fonction g mais on peut mettre à gauche de la fonction $f \circ g$. Donc on obtient la fonction « $g^{-1} \circ f \circ g$ ».

$$g(x)=2x+1, y=2x+1 \dots x=\frac{y-1}{2} \text{ donc } g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$g^{-1} \circ (f \circ g) = (\frac{x-1}{2}) \circ (6x+4) \dots f(x) = \frac{6x+4-1}{2} \dots f(x) = \frac{6x+3}{2}.$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	+	+	+	+	+	+	+
P2	-	-	-	-	-	-	-
P3	-	+	-	+	-	-	-

Selon le tableau ci-dessus, les manuels se rapprochent par le privilège de la procédure P1 et par l'absence totale de la procédure P2. Altın et officiel sont les deux manuels qui font aussi fonctionner la procédure P3 dans ce type d'exercices. Par ailleurs, les procédures P2 et P3 sont totalement absentes dans les manuels MPC.

1.1.6 Question n°6

Trouver l'image de 2 par f^{-1} si $f: \mathbb{R}-\{\frac{2}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}-\{\frac{2}{3}\}$, $f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}$ et $2 \in D_g^{-1}$.

Cette question rejoint la question n°3 dans le sens où l'élève est conduit à trouver la fonction inverse d'une fonction définie algébriquement. Ainsi je voulais étudier si les élèves pouvaient trouver l'inverse d'une fonction rationnelle et quelles méthodes sont-elles privilégiées. Comme la recette R_a est plus utilisée et moins risquée des erreurs pour des fonctions rationnelles, je pensais que cette question allait inciter plus les élèves à l'utiliser que la question n°3. J'attends quand même que la plupart des élèves ne soient pas très à l'aise lors de l'utilisation de la recette R_a à cause de l'égalité de la fonction et son inverse ($\forall x f(x)=f^{-1}(x)=\frac{2x+6}{3x-2}$). Il me semble qu'ils auraient un air étonné comme s'ils n'avaient rien fait. Dans la deuxième partie de la question on demande de calculer l'image de 2 par la fonction inverse de f.

Je décris les différentes procédures de résolution attendues par la suite :

P1. On peut trouver l'inverse de f en utilisant la méthode M_{xy} . Ensuite on trouve l'image de 2 par f^{-1} :

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x-2} \text{ soit } y = f(x), \quad y = \frac{2x+6}{3x-2}, \quad y \cdot (3x-2) = 2x+6 \dots x = \frac{2y+6}{3y-2}$$

alors $f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x-2} \dots \dots f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2+6}{3 \cdot 2-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

P2. On peut trouver l'inverse en utilisant la recette R_a et puis on peut trouver l'image de 2.

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x-2} \text{ donc } f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2+6}{3 \cdot 2-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

P3. Comme la fonction f est égale à son inverse ($f=f^{-1}$), on peut trouver directement l'image de 2 par la fonction f :

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x-2} \dots\dots f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2+6}{3 \cdot 2-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

P4. On peut trouver en utilisant la définition de la fonction inverse l'image de 2 par f^{-1} sans trouver la fonction f^{-1} :

$$f^{-1}(2)=x \text{ donc } 2=f(x) \dots\dots 2 = \frac{2x+6}{3x-2}, 2(3x-2) = 2x+6 \dots\dots x = \frac{5}{2} \text{ alors } f^{-1}(2) = \frac{5}{2}.$$

P5. Comme la fonction f n'est pas inversible, on ne peut pas trouver son inverse ainsi que l'image demandée.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1 (méthode M_{xy})	+	-	-	+	-	+	+
P2 (recette R_a)	+	-	+	+	+	+	+

Les manuels Zafer et Uğur se contentent de traiter un seul exercice en utilisant la méthode M_{xy} . Dans le manuel Altın il n'y a aucun exercice qui demande de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle. Tandis que le manuel Aydın fait utiliser la recette R_a lors de trouver l'inverse de toutes les fonctions rationnelles. A part le manuel Altın dans tous les manuels figure la recette R_a .

1.1.7 Question n°7

Soit $f:A \rightarrow B$, est définie par $f(x)=2x^2+6$ et $A=\{-1,0,1,2,3\}$. Pour avoir une fonction injective quel élément on doit supprimer de l'ensemble de définition A ?

Cette question se rapproche un peu de la question 2 dans la mesure où les élèves sont amenés à trouver l'ensemble image. Ainsi en proposant cette question je voulais étudier si les élèves reconnaîtraient l'une des propriétés particulières des fonctions : injectivité. Bien que l'ensemble B soit un peu flou dans l'énoncé de la question, (il fallait peut-être l'ensemble \mathbb{R} au lieu de B), les élèves semblent avoir bien compris ce qu'on leur voulait. Je me demandais cependant lequel entre 1 et -1 les élèves auraient tendance à supprimer.

Je pense que dans la première partie le taux de réussite sera assez élevé, mais qu'à cause de l'injectivité il va diminuer.

En voici les résolutions possibles de la part des élèves :

P1. On peut trouver l'ensemble image par la fonction f . Comme les images de 1 et -1 sont identiques, on peut éliminer l'un d'entre eux de l'ensemble de définition :

$$f(x) = 2x^2 + 6$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 6 = 2 \cdot 1 + 6 = 8$$

$$f(0) = 2(0)^2 + 6 = 0 + 6 = 6$$

$$f(1) = 2(1)^2 + 6 = 2 + 6 = 8$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 6 = 8 + 6 = 14$$

$$f(3) = 2(3)^2 + 6 = 18 + 6 = 24$$

L'image de 1 et -1 sont identique $f(1) = f(-1) = 8$ donc il faut éliminer 1 ou -1

P2. Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, pour tout $x_1, x_2 \in A$, f est injective.

$-1 \neq 1$ mais $f(-1) = f(1) = 8$ donc il faut sortir soit 1 ou soit -1 de l'ensemble de définition.

P3. Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ pour tout $x_1, x_2 \in A$, f est injective.

$f(-1) = f(1) = 8$ mais $-1 \neq 1$ donc il faut enlever soit 1 ou soit -1 de l'ensemble de définition.

P4. Si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in A$, f est injective.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2 \Rightarrow 2x_1^2 \neq 2x_2^2 \Rightarrow 2x_1^2 + 6 \neq 2x_2^2 + 6$$

$-1, 1 \in A$ et $-1 \neq 1$ mais $f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.

P5. $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2 + 6 = 2x_2^2 + 6 \Rightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2$$

$f(-1) = f(1) = 8$ et puis $-1 \neq 1$ ou $-1 = -(1)$ alors la fonction f est injective.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	+	+	-	-	-	+
P2	-	+	+	-	-	-	+
P3	-	+	+	-	-	-	+
P4	+	+	-	+	-	-	-
P5	-	+	-	+	+	+	+

Dans le manuel Tutibay il y a des exercices qui font chercher l'injectivité des fonctions définies sur \mathbb{R} ou \mathbb{Q} ou \mathbb{Z} . Et on n'utilise que la procédure P4. Tandis que dans le manuel Altın il y a toutes les procédures. Les manuels Güvender et Uğur ne proposent pas les exercices dans lesquels il faut chercher l'injectivité des fonctions définies d'un sous-ensemble

fini de Z dans Z comme les manuels Tutibay et officiel. Dans les manuels Zafer et Uğur ne figure ni dans le cours ni dans les exercices le deuxième cas de l'injectivité (procédure P4). Tandis que Gündener illustre la définition des fonctions injectives avec ces deux cas (P4 et P5). Mais il ne fait utiliser que la procédure P5 dans les exercices.

1.2 Deuxième questionnaire

1.2.1 Question n°1

Si on définit la fonction f comme la suivante « f est une fonction qui fait correspondre à chaque nombre positif entier la somme de ce nombre et son inverse, écrire cette fonction et l'image de $1/2$ par f .

Il s'agit ici de travailler sur une question définie en langue naturelle. Grâce à cette question je voulais vérifier si les élèves peuvent passer d'une écriture à l'autre. Comme les connaissances portant sur l'inverse des nombres positifs réels dont l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail, je voulais étudier ce que les élèves pourraient mettre en fonctionnement de ces connaissances antérieures et les adapter à ce nouveau domaine (fonctionnel). J'ai développé cette question à partir de la question du concours (Q45/1998) dans laquelle on ne demande pas de calculer l'image d'un nombre. Sans remarquer que la fonction f est définie dans l'ensemble des nombres entiers, j'avais proposé aux élèves de calculer l'image d'un nombre rationnel. Grâce à cette erreur, je pense que j'aurai aussi l'occasion de constater le phénomène de « l'âge du capitaine⁸ » dans des réponses des élèves. Comme les élèves n'ont pas de l'habitude de penser, écrire ou dire autrement dans un automatisme provoqué par notre système, je me demandais si un petit changement des cadres ou écritures comme dans cette question faisait chuter le taux de réussite.

Je décris les réponses attendues par la suite :

P1. On peut écrire algébriquement la fonction f de la manière suivante :

⁸ C'est le titre donné par S.Baruk à l'un des ouvrages, en référence à l'expérience célèbre de l'institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques (IREM) de Grenoble. On a proposé à des élèves de CE₁ et CE₂ le problème suivant :

« Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? ». Parmi les 97 élèves, 76 ont donné l'âge du capitaine en utilisant les nombres de l'énoncé, répondant ainsi de manière absurde à un énoncé absurde. En situation de classe de mathématiques, même si, au fond, les élèves sont troublés par la question, ils font des opérations pour répondre : il doit y avoir une réponse puisque le maître a posé le problème ! C'est une des manifestations du contrat didactique (cf. Brousseau G.(1983b)). En dehors de la classe, ils expriment cependant des doutes.

$f(x) = x + \frac{1}{x}$. Ensuite comme $\frac{1}{2}$ n'est pas un nombre entier, on ne peut pas calculer son image par f .

P2. On peut écrire algébriquement la fonction f et ensuite calculer l'image demandée :

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad f(1/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

P3. On peut aussi trouver l'image de $1/2$ sans écrire algébriquement la fonction f :

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P	+	+	+	-	-	-	-

Le tableau ci-dessus montre la proposition de ce type d'exercices, où il s'agit de l'articulation entre différentes écritures, par manuel. Dans deux exercices le manuel Tutibay fait utiliser les deux écritures : écriture de la langue naturelle et écriture algébrique. Tandis que dans certains exercices Aydın amène les élèves à trouver la formule algébrique des fonctions définies par les diagrammes sagittaux. Dans le manuel Altın il y a un seul exercice dans lequel une fonction est définie d'un sous-ensemble fini de Z dans Z de la manière suivante : «la fonction f fait correspondre à chaque élément de l'ensemble de définition le reste de la division de cet élément par 5 ». En ce qui concerne les manuels MPC, malgré l'existence d'une question du concours à ce propos, ils ne proposent aucun exercice dans lequel l'articulation de ces deux écritures soit utilisée.

1.2.2 Question n°2

Trouver l'image de 0 par f si pour tout x $f(2x + 3) = 3x + 2$.

Comme nous l'avons déjà vu lors de l'analyse des thèmes du concours et des manuels, ce type de question est l'un des types plus fréquents de questions du concours. De plus tous les manuels MPC et certains manuels ML privilégient beaucoup ce type de composée au détriment de la composée normale (cf. la question n°5 du premier questionnaire). C'est pourquoi je pensais que cette question me permettrait aussi de vérifier l'influence du concours ou l'enseignement très proche du concours selon les classes (ou les lycées). Puisque dans le lycée Anatolien ce type d'enseignement est très remarquable et les élèves qui fréquentent les dérsanés sont plus nombreux, j'ai fait l'hypothèse que chez les élèves de ce lycée le taux de réussite à cette question est plus élevé que chez ceux des lycées Super et Normal. L'erreur

principale que j'attends consiste à mettre la fonction (implicite) $2x+3$ à la place de x dans la composée (implicite) $3x+2$ en supposant que la composée n'est pas déjà faite. J'appelle ce type d'erreurs « erreur de mission inaccomplie ».

J'ai regroupé les réponses attendues des élèves comme il suit :

P1. $f(2x+3)=3x+2$

Soit $g(x)=2x+3$ donc $f(g(x))=3x+2$, $fog(x)=3x+2$

On peut trouver la fonction inverse de g en utilisant la méthode $M_{x,y}$:

$g(x)=2x+3$, $y=g(x)$... $y=2x+3$, $y-3=2x$... $x=\frac{y-3}{2}$ alors $g^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$

$(fog)og^{-1}(x)=(3x+2)o(\frac{x-3}{2})$ $fogI(x)=3(\frac{x-3}{2})+2$, $f(x)=\frac{3x-9+4}{2}=\frac{3x-5}{2}$

Maintenant on peut trouver l'image de 0 par f : $f(0)=\frac{3 \cdot 0 - 5}{2} = \frac{-5}{2}$.

P2. On peut trouver l'inverse de $2x+3$ en utilisant la recette R_a et ensuite la mettre à la place de x dans la composée (implicite).

$f(2x+3)=3x+2$

$y=\frac{x-3}{2}$ et puis on la met à place de x dans la composée (implicite) $f(2 \cdot \frac{x-3}{2}+3)=3 \cdot \frac{x-3}{2}+2$

$f(x)=\frac{3x-5}{2}$ enfin on peut calculer l'image demandée $f(0)=\frac{3 \cdot 0 - 5}{2} = \frac{-5}{2}$.

P3. On peut trouver le nombre qui égalise $2x+3$ à zéro :

$f(2x+3)=3x+2$ $2x+3=0$, $x=\frac{-3}{2}$ donc on peut trouver l'image de 0 par f

$f(2 \cdot \frac{-3}{2} + 3) = 3 \cdot \frac{-3}{2} + 2$... $f(0) = \frac{-5}{2}$

P4. On peut penser que l'opération n'est pas déjà effectuée : $f(2x+3)=3x+2$

$f(x)=3(2x+3)+2=6x+9+2=6x+11$ enfin on peut trouver l'image de 0

$f(0)=6 \cdot 0 + 11 = 11$.

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	+	-	-	-	-	-
P2	+	-	+	+	+	+	+
P3	-	-	+	+	+	+	+

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, à part Tutibay et Altın, tous les manuels se rapprochent beaucoup par la mise en place des procédures. Ainsi dans ces manuels figurent

les procédures P2 et P3. Tandis que la procédure P1 est totalement absente. Dans deux exercices Altın fait utiliser P1 en amenant les élèves à obtenir une composée implicite lorsqu'il s'agit de travailler sur une composée normale. Le manuel Tutibay ne propose aucun exercice qui fait fonctionner les procédures P1 et P3. Mais il y a cependant un seul exercice dans lequel P2 est privilégiée.

1.2.3 Question n°3

Trouver $f(x)$ dans les conditions convenables si $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x+1}$.

Cette question rejoint la précédente dans le sens où il s'agit de travailler sur une composée (implicite). Ainsi toutes les hypothèses que j'ai déjà faites sont aussi valables. Comme les lycées dans lesquels nous avons passé ces questionnaires se différencient par le niveau des élèves et par le nombre des élèves qui fréquentent les dérsanés, j'attends qu'ils se distinguent aussi par le taux de réussite et par les types d'erreurs commises par les élèves. Par ailleurs je pense qu'ici l'apparition des fonctions rationnelles fait chuter la réussite à la question précédente.

Dans cette question la reconnaissance de la « décomposition » des fonctions et celle de l'inverse d'une fonction rationnelle sont mises en jeu. On invite cependant les élèves à remarquer que la fonction f est une fonction inverse ($f(x) = \frac{1}{x}$). Mais je crois que dans un concours comme celui-ci où on peut avoir quelques minutes par question il est très difficile de le remarquer sans calcul si on n'a pas déjà vu ce type de question (comme la procédure P5). Comme le but de l'enseignement de dérsané est de présenter les types de questions du concours et d'entraîner les élèves en posant beaucoup d'exercices de même type, j'attends que dans la classe de terminale (tous les élèves suivent les dérsanés) le taux de réussite est plus élevé et qu'il y a des élèves qui trouvent la bonne réponse sans calcul.

De plus cette question nous permet aussi à constater explicitement le but de ce concours où le temps est extrêmement important. Cette rapidité est le moyenne pour « sélectionner les meilleur ». Par exemple toutes les connaissances mises en jeu pour résoudre la question peuvent être disponibles chez un élève (candidat). Il peut aussi savoir les mobiliser. Mais s'il ne sait pas choisir les techniques adéquates (comme la procédure P3), cela le retardera par rapport à un autre qui les sait (ou à un autre qui connaît plus de types de questions).

Voici maintenant les procédures de résolution attendues des élèves :

P1. $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x+1}$ soit $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ on peut trouver l'inverse de g en utilisant la méthode

$M_{x|y}$;

$$g(x) = y \dots y = \frac{x+1}{x-2}, y(x-2) = x+1 \dots x = \frac{2y+1}{y-1} \dots g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$(f \circ g) \circ g^{-1}(x) = \frac{\frac{2x+1}{x-1} - 2}{\frac{2x+1}{x-1} + 1} = \frac{3}{3x} \text{ alors } f(x) = \frac{1}{x}$$

P2. On peut trouver l'inverse en utilisant la recette R_a :

$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x+1}$ soit $y = \frac{x+1}{x-2}$ donc $y^{-1} = \frac{2x+1}{x-1}$ et ensuite on met cette valeur à la place de x dans la composée (implicite)

$$f\left(\frac{\frac{2x+1}{x-1} + 1}{\frac{2x+1}{x-1} - 2}\right) = \frac{\frac{2x+1}{x-1} - 2}{\frac{2x+1}{x-1} + 1} = \frac{3}{3x} \text{ alors } f(x) = \frac{1}{x}$$

P3. $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x+1} \dots f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{-1}$ on peut écrire x à la place de $\frac{x+1}{x-2}$

$$f(x) = x^{-1} \text{ alors } f(x) = \frac{1}{x}$$

P4. $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x+1}$ donc $f(x) = \frac{1}{x}$

P5. . On peut penser que l'opération n'est pas déjà effectuée :

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x+1} \text{ donc } f(x) = \frac{\frac{x+1}{x-2} - 2}{\frac{x+1}{x-2} + 1} = \frac{-x+5}{2x-1}$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	-	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	+	+	+
P3	-	-	-	-	+	-	-
P4	-	-	-	-	-	-	-

Dans les manuels ML il n'y a aucun exercice dans lequel on demande de « décomposer » une composée rationnelle (implicite) en utilisant une fonction rationnelle (implicite). Le manuel Güvender met en place presque la même question en proposant aussi de calculer l'image d'un nombre réel par f et il fait utiliser la procédure P2. Tandis que dans les manuels Uğur et Zafer

il y a des exercices qui font utiliser la procédure P2 mais aucun exercice qui relèvent des procédures P3 et P4.

1.2.4 Question n°4

Trouver l'image de $x+1$ par f si $f(x)=x^2-2x+1$.

Cette question n'est pas une question du concours mais je me suis inspiré de la question du concours (Q24/1988) dans laquelle il s'agit de calculer la même image par la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$. Comme je n'ai pas voulu m'empêcher d'avoir des réponses des élèves qui essaient de calculer simplement l'image demandée sans reconnaître l'identité remarquable (parce que c'est plus difficile dans la question du concours), j'ai remplacé le cube d'un binome par le carré d'un binome.

Ainsi cette question demande de faire appel aux connaissances antérieures des élèves comme la plupart des questions du concours. On demande des élèves de trouver l'image de $x+1$ par f . Les connaissances déjà acquises sur les identités remarquables dont l'élève doit se servir sont des outils supposés disponibles dans ce travail. En posant cette question je voulais vérifier que les élèves peuvent mettre en fonctionnement ces connaissances. Par ailleurs je pense que se rendre compte de factoriser la fonction sera à disposition des élèves du lycée Anatolien.

Voici les réponses attendues des élèves :

P1. On peut trouver l'image de $x+1$ par f :

$$f(x)=x^2-2x+1$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)+1 \dots \dots f(x+1)=x^2+2x+1-2x-2+1 \text{ alors } f(x+1)=x^2$$

P2. On peut factoriser la fonction:

$$f(x)=x^2-2x+1$$

$$f(x)=(x-1)^2 \dots \dots f(x+1)=((x+1)-1)^2 \dots \dots f(x+1)=x^2$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	-	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	+	+	+

Le manuel Güvender propose la question du concours (Q24/1998). Et il fait utiliser la deuxième procédure. De plus il y a deux autres exercices résolus qui se fondent sur ce type de travaux. L'un des exercices demande de calculer l'image d'un nombre irrationnel par une

fonction définie par une identité remarquable et l'autre de calculer l'image d'une expression algébrique par une fonction trinôme du second degré. En effectuant des calculs l'élève est amené à obtenir une identité remarquable et ensuite à trouver l'image demandée. Dans le manuel Uğur nous trouvons un exercice dans lequel il s'agit de calculer l'image d'un nombre irrationnel par une fonction du troisième degré. L'élève doit obtenir une identité remarquable pour calculer l'image demandée. En ce qui concerne le manuel Zafer, il propose deux exercices dans lesquels l'identité remarquable « cube d'une différence » est mise en jeu pour calculer l'image d'un nombre irrationnel.

1.2.5 Question n°5

Si $f(x) = ax + b$, $f^{-1}(3) = 4$, $f^{-1}(2) = 5$ trouver le produit de a et b .

Comme nous l'avons déjà indiqué, dans le programme il n'y a aucune indication qui fait référence directe aux fonctions affines mais deux questions qui les concernent ont été cependant proposées dans le concours. Quand nous allons donner le tableau qui montre l'existence des procédures dans les manuels, nous allons constater que tous les manuels MPC et certains manuels ML proposent des exercices dans lesquels l'élève doit mettre en fonctionnement la formule générale des fonctions affines. De plus dans cette question l'élève doit faire appel aux connaissances antérieures portant sur la résolution du système linéaire d'équations. Je veux donc étudier si tous les élèves peuvent se servir ces connaissances antérieures. Par ailleurs il me semble que la reconnaissance du système d'équations et sa résolution seront une grande difficulté pour un bon nombre des élèves des lycées Super et Normal.

Je présente maintenant les différentes procédures de résolution que l'on peut raisonnablement attendre de la part des élèves:

PI. On peut trouver l'inverse de la fonction f :

$$f(x) = ax + b \text{ soit } f(x) = y \dots y = ax + b, y - b = ax \dots \dots x = \frac{y-b}{a} \text{ alors } f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

Maintenant on peut obtenir un système linéaire d'équations en utilisant les données ;

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} \text{ donc } f^{-1}(3) = \frac{3-b}{a} = 4 \dots \dots 3-b = 4a$$

$$f^{-1}(2) = \frac{2-b}{a} = 5 \dots \dots 2-b = 5a$$

on peut résoudre le système d'équations à deux variables ;

$$\left. \begin{array}{l} 3-b=4a \\ 2-b=5a \end{array} \right\} \dots \dots a=-1 \text{ et } b=7 \text{ alors } a.b=(-1).7=-7.$$

P2. On peut trouver l'inverse de la fonction f en utilisant la recette R_a :

$$f(x) = ax + b \text{ donc } f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \dots \dots f^{-1}(3) = \frac{3}{a} - \frac{b}{a} = 4 \text{ et } f^{-1}(2) = \frac{2}{a} - \frac{b}{a} = 5$$

on peut résoudre le système d'équations à deux variables ;

$$\left. \begin{array}{l} 3-b=4a \\ 2-b=5a \end{array} \right\} \dots \dots a=-1 \text{ et } b=7 \text{ alors } a.b=(-1).7=-7.$$

P3. On peut utiliser la définition de la fonction inverse :

$$f^{-1}(3)=4, f^{-1}(2)=5 \text{ donc } 3=f(4) \text{ et } 2=f(5)$$

on peut obtenir le système d'équations à deux variables ;

$$\left. \begin{array}{l} 4a+b=3 \\ 5a+b=2 \end{array} \right\} \dots \dots a=-1 \text{ et } b=7 \text{ alors } a.b=-7$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	-	-	-	-	-	-
P2	-	-	-	-	-	-	-
P3	-	-	+	-	+	+	+

Dans les manuels Tutibay, Altın et officiel il n'y a aucun exercice qui présente ce type de travail. Aydın propose un seul exercice dans lequel il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel par l'inverse de f en utilisant que f est une fonction affine et que deux images connues par f . Güvender fait travailler les élèves sur la formule générale des fonctions affines dans trois exercices dont deux présentent presque le même travail que cette question et l'autre presque le même travail que l'exercice du manuel Aydın. Dans ce cadre Uğur propose deux exercices ressemblants pour lesquels il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel en utilisant que f est affine et qu'une image connue par f , l'autre par f^{-1} . Dans le manuel Zafer nous trouvons trois exercices dont l'un rassemble beaucoup à cette question et l'autre à l'exercice du manuel Aydın. Le troisième exercice de ce manuel ne se rapproche de cette question que par l'utilisation de la formule générale des fonctions affines. Le travail que l'élève doit effectuer est cependant différent. Ainsi il s'agit de calculer l'image d'un nombre réel par f en utilisant

que la fonction f affine est définie par $f(x)=ax+b$ et que la double composée de la fonction f ($f \circ f$).

1.2.6 Question n°6

Trouver l'image de 2 par f si $f(x) = ax + bx + 2$, $f(-2) = 5$.

Cette question n'est pas une question du concours. Mais elle n'est pas très loin de la plupart des questions dans le sens où l'élève doit mettre en fonctionnement des connaissances antérieures pour la résolution. Ainsi les connaissances antérieures liées à la résolution d'équations que l'élève doit se servir sont des outils devant être disponibles dans ce travail. En proposant cette question je veux étudier que tous les élèves peuvent faire fonctionner ces connaissances et connaître le rapport entre les images de 2 et -2 par la fonction f .

J'attends donc la réponse :

$P. f(-2)=5 \quad \text{donc} \quad f(-2)=-2a-2b+2=5$

on peut écrire ; $-2(a+b)=3 \dots 2(a+b)=-3$

$f(2)=2a+2b+2=2(a+b)+2=-3+2=-1$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P	2	3	16	21	13	23	26

Dans les manuels il est très difficile de trouver la même question. Mais il y a cependant des exercices (dont le nombre varie d'un manuel à l'autre) qui demandent de faire fonctionner les connaissances antérieures portant sur la résolution d'équations. Le tableau ci-dessus montre la répartition du nombre des exercices qui font utiliser ce type de connaissances par manuel.

1.2.7 Question n°7

Si la fonction f est constante et $f(x) = (a + 2)x + 8$ trouver le nombre a .

Dans le concours il n'y a aucune question de ce type. Malgré cela tous les manuels MPC et certains manuels ML proposent des exercices dans lesquels l'élève est amené à utiliser la formule générale des fonctions constantes. Cette question est ainsi une application de la définition de la fonction constante ($f(x)=k$). Je veux ici vérifier que tous les élèves peuvent reconnaître que le coefficient de x doit être zéro dans l'image de l'expression des fonctions constantes. Comme dans les classes où l'enseignement très proche du concours est très

présent les élèves ont l'habitude de ce type de questions, je pense que dans ces classes le taux de réussite à cette question sera plus élevé que dans les autres

Voici les réponses attendues :

P1. On peut utiliser la définition des fonctions constantes :

Si f est constante donc $f(x)=k$ on peut dire que le coefficient de x doit être à zéro ;

$$f(x)=(a+2)x+8 \dots \dots a+2=0 \text{ alors } a=-2$$

P2. On peut résoudre en sachant que l'image de chaque élément de l'ensemble de définition d'une fonction constante est identique :

$$\text{Si } f \text{ est constante donc } f(1)=f(2) \dots \dots (a+2).1+8=(a+2).2+8$$

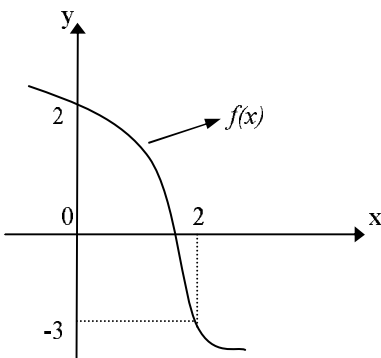
$$a+2+8=2a+4+8 \text{ alors } a=-2.$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	-	-	+	-	+	+
P2	-	-	-	-	-	+	+

A part le manuel officiel tous les manuels ML ne proposent aucun exercice de ce type. Tandis que dans tous les manuels MPC, à l'exception du manuel Güvender, il y a des exercices dans lesquels il s'agit de travailler sur la formule générale des fonctions constantes en privilégiant ensemble les deux procédures P1 et P2.

1.2.8 Question n°8

On considère que la fonction f est bijective sur $[0,2]$ et représentée graphiquement ci-dessous :



Quelle est la valeur $\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))}$?

Comme les manuels ML et MPC ne sont pas géométriquement très riches (cf. l'analyse des manuels), dans cette question je pense que tous les élèves auront des grandes difficultés à lire et à interpréter la représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormé. De plus ce type de questions est plus nombreux dans les manuels MPC que dans les manuels ML, c'est pourquoi je pense que dans les classes où l'enseignement est très proche du concours le taux de réussite est donc plus élevé.

Par ailleurs je me demande si les élèves peuvent reconnaître que cette représentation graphique de la fonction f est également celle de son inverse.

J'attends la réponse :

P. On peut trouver les points de coordonnées :

$$f(2)=-3, \quad f^{-1}(2)=0, \quad f(f(1))=f(0)=2$$

$$\frac{f(2)+f^{-1}(2)}{f(f(1))} = \frac{-3+0}{2} = \frac{-3}{2}$$

	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P	-	-	3	3	6	11	8

Selon le tableau ci-dessus qui montre le nombre des exercices résolus dans lesquels il s'agit de lire et interpréter la représentation graphique des fonctions dans un repère orthonormé, Tutibay et Altın sont les manuels qui ne proposent aucun exercice de ce type. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, les manuels MPC sont plus riches par rapport à la proposition de ce type d'exercices.

1.2.9 Question n°9

Trouver la fonction $f^{-1}(x)$ si $f(x):R - \{-1\} \rightarrow R - \{3\}$ $x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)}$.

C'est la question du concours (Q41/1997). A nouveau comme la question 3 du deuxième questionnaire nous sommes face à une question qui n'est pas bête. On offre aux élèves une occasion de la résoudre en quelques secondes sans toucher le crayon et le papier. Car la question est déjà résolue dans l'énoncé. Il reste aux élèves à voir que la fraction donnée est la dernière étape de la tâche. C'est pourquoi mes attentes sont différentes des questions précédentes qui demandent de trouver l'inverse d'une fonction définie algébriquement. Grâce à cette question je veux vérifier que comme dans les dérsanés les démarches les plus courtes

sont privilégiées. Tous les élèves de la classe de terminale (parce que cette question ne figure que dans le questionnaire de la classe de terminale) peuvent reconnaître qu'il s'agit de la dernière étape de la résolution consistant à trouver l'inverse de la fonction f à partir de la méthode M_{xy} (cf. la procédure P1).

De plus la façon de proposer cette question est inhabituelle. C'est la raison pour laquelle je pense que cela fait chuter le taux de réussite à la question n° 6 du premier questionnaire dans laquelle il s'agit aussi de trouver l'inverse d'une fonction rationnelle.

Donc voici les procédures de résolution attendues des élèves :

P1. On peut écrire y à la place de $f(x)$:

$$x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)} \dots\dots f(x)=y, \quad x = \frac{y+2}{3-y} \quad \text{alors } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}.$$

P2. On peut trouver $f(x)$ ensuite $f^{-1}(x)$:

$$x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)} \quad \text{donc } x(3-f(x))=f(x)+2 \dots\dots\dots f(x) = \frac{-3x+2}{x+1}$$

on peut trouver l'inverse en utilisant la recette R_a ;

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}.$$

P3. On peut trouver $f(x)$ ensuite $f^{-1}(x)$ en utilisant la méthode M_{xy} :

$$x = \frac{f(x)+2}{3-f(x)} \quad \text{donc } x(3-f(x))=f(x)+2 \dots\dots\dots f(x) = \frac{-3x+2}{x+1} \quad \text{soit } y=f(x)$$

$$y = \frac{-3x+2}{x+1} \dots\dots y(x+1)=-3x+2, \quad yx+y=-3x+2 \dots\dots x = \frac{y+2}{3-y}$$

$$\text{alors } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3-x}.$$

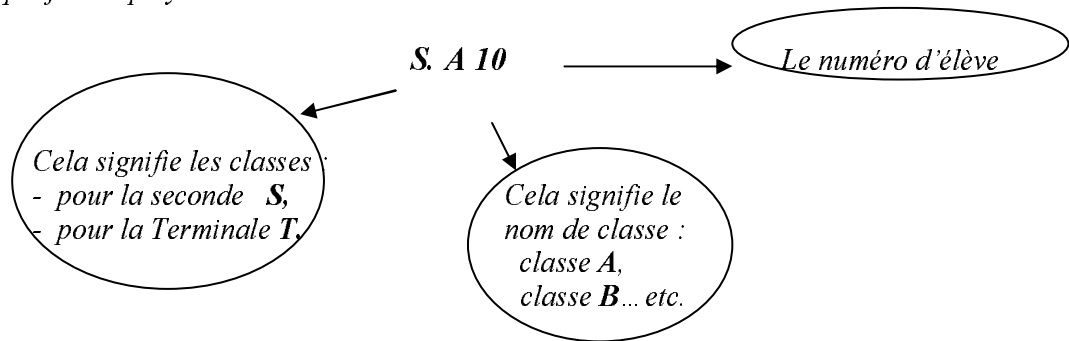
	Tutibay	Altın	Aydın	Officiel	Güvender	Uğur	Zafer
P1	-	-	-	-	+	-	+
P2	-	-	+	+	-	+	-
P3	-	-	-	-	-	-	-

Comme le montre bien le tableau suivant, Tutibay et Altın ne proposent aucun exercice de ce type. Les manuels Güvender et Zafer se rapprochent par le privilège de la procédure P1. Güvender propose cette question du concours. Aydın, officiel et Uğur sont les manuels qui mettent en place ce type d'exercices en privilégiant la procédure P2.

2. Analyse a posteriori du premier questionnaire-élèves

Afin de repérer les représentations des élèves sur la notion de la fonction et de vérifier les diverses compétences concernant l'utilisation de la fonction, dans cette partie j'analyserai les résultats des élèves question par question.

Dans l'analyse de toutes des questions je présenterai les réponses précisées en donnant quelques résultats exemplaires des élèves. Avant de passer à l'analyse des questions je veux expliquer les abréviations que j'ai employées dans les tableaux.



2.1 Question n°1

Comme le but de la question est de mettre en évidence les conceptions des élèves sur la notion de fonction, je ne suis pas exigeant et ne cherche pas à avoir une définition complète. Un mot ou une phrase donnée par les élèves qui renvoie à une des définitions de la fonction a été classée.

Maintenant je présente comment j'ai classé les réponses des élèves ;

J'ai réparti les réponses en six catégories :

RP1 (Df.1 : correspondance entre deux ensembles): la fonction est un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles.

Soit A et B deux ensembles, la fonction est une image contient les éléments de A liés avec ceux de B.....(SA28)

On donne deux ensembles, il s'agit d'une comparaison entre ces deux ensembles.....(SB6)

La fonction est des éléments qui sont définis de l'ensemble A dans l'ensemble B.....(SB7)

La fonction est un ensemble défini de l'ensemble A dans l'ensemble B.....(SB19)

Soit A et B deux ensembles qui ne sont pas vides, on appelle fonction, si elle peut faire correspondance chaque élément de A à chaque élément de B... ..(SC26)

RP2 (la comptine C_o) : pour qu'une correspondance puisse être une fonction, il faut qu'aucun élément de l'ensemble de définition ne soit vacant et qu'un élément de l'ensemble de définition ait une seule image dans l'ensemble image.

D'abord je leur dirais que pour qu'une opération ou un ensemble puisse être une fonction, il faut qu' aucun élément de l'ensemble de définition ne soit vacant. Ensuite je leur raconterais comment ils traitent les exercices.....(SD5)

La fonction est un ensemble qui n'a aucun élément étant vacant. A mon avis c'est très absurde. Quoi il fera même l'élève qui ne va pas s'orienter vers la filière des sciences naturelles, lors qu'il a maîtrisé ces trucs-là ?.....(SA31)

La fonction est un ensemble défini de l'ensemble A dans le B dont l'ensemble de définition n'a aucun élément vacant... ..(SA23)

Je dirais aux martiens d'imaginer deux ensembles. Ensuite j'essayerais de leur expliquer qu'ils doivent faire correspondre aux éléments du premier les éléments du deuxième de façon à ne pas rester un seul... ..(SA7)

RP3 (Df.9) : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue.

"Hindiniz ?
 fonksiyon verilmeden * gibi seyleri bulmaya yarar.
 fonksiyon kime olarak disunlerin burada bilinmeyen eleman
 ni fonksiyon ile bulunuz?"

La fonction est utile à trouver les choses comme des inconnues. Si on imagine la fonction comme un ensemble, on trouve ici l'inconnue à l'aide de la fonction.....(SB14)

La fonction est l'un des sujets difficiles des mathématiques. Et je ne crois pas que les Martiens veuillent l'apprendre et puissent l'apprendre. En fait ce n'est pas nécessaire. Mais si on me demande, je dirais qu'il y a un ensemble inconnu. On l'appelle x. Et on fait des opérations en donnant les valeurs à cet ensemble. Et le résultat est exact..... (SB13)

En réalité la fonction est un sujet facile. On ne doit correctement que mettre les données à leurs places. Dans les fonctions on vous donne toujours la forme sur la quelle on va faire des opérations.....(SC1)

La fonction est en fait un sujet facile. Le seule chose à faire est de mettre les données à leurs places. Généralement on nous le donne dans les énoncés.....(SC3)

Imaginez deux paniers de pommes. Soit le premier A et le deuxième B. on met dans le B de façon à ne pas rester une seule pomme dans le A.....(SA25)

RP4 (Df.2 et Df.3 :la définition ensembliste) : soient A et B deux ensemble qui ne sont pas vides. Une fonction f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chacun des éléments de A au plus un élément de B.

Fonction : Soient A et B deux ensembles qui ne sont pas vides. Si f est une correspondance qui est définie de A dans B tels que chacun des éléments de A est équivalent à un seul élément de B, on l'appelle fonction... .. (SC7)

Soient A et B deux ensembles qui ne sont pas vides. Si f est une correspondance qui fait correspondre à chacun des éléments de A au plus un élément de B, on dit que la correspondance f est une fonction définie de A dans B. On a besoin de deux règles, pour que f soit une fonction définie de A dans B :

$$1) \forall x \in A \text{ et } \exists y \in B (x, y) \in f$$

$$2) \forall x \in A \text{ et } y \in B, (x, y) \in f \text{ et } (x, z) \in f \text{ donc } y = z \dots \dots \dots (SD7)$$

Soient A et B deux ensemble qui ne sont pas vides. Une fonction f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une règle de correspondance qui associe à chaque élément de A seul un élément de B... .. (SE53)

Le premier ensemble s'appelle l'ensemble de définition et le deuxième l'ensemble image. Un élément de l'ensemble de définition correspond à des éléments différents de l'ensemble image. On appelle donc cette correspondance « fonction »... .. (SE14)

RP5 (si je suis professeur, je présente...): l'élève explique comment il présenterait la notion de la fonction.

Je leur présenterais la fonction facilement en donnant des exemples. Je les soumettrais à beaucoup de tests. J'évitais de les conduire à apprendre par cœur. Je corrigerais en expliquant les erreurs commises. En fait j'ai dit que j'évitais un apprentissage par cœur. Mais dans notre système de l'enseignement l'apprentissage par cœur est très important. Lors qu' il y a un examen le lendemain, on commence à mémoriser d'en fin de l'après-midi jusqu' à minuit... .. (B20)

Je ne peux pas présenter la définition de la fonction. Mais je peux leur transmettre tout ce que je sais en traitant les exercices. Seulement hors la méthode longue pour trouver la fonction inverse... ..(SB30)

D'abord je parlerais longuement des mathématiques. Ensuite je raconterais la définition de la fonction, ce qui est la fonction et à quoi sert la fonction. S'ils ne le comprennent pas encore, à nouveau je le représenterais en rendant simple... ..(SB26)

Moi je leur demanderais ce qu'ils savent au nom des mathématiques. S'ils n'ont pas de connaissances, je leur donnerais quelques une de bases. Je leur dirais qu'en fait la fonction n'est pas très nécessaire à l'homme mais dans notre société à cause de l'existence du concours d'entrée à l'université on doit l'apprendre... .. (SA30)

Je sais pas la définition de la fonction. Dans le système du concours où nous sommes on n'accorde pas l'importance aux définitions. L'objectif est de résoudre beaucoup de questions en court temps. C'est pour cela que moi je donnerais les propriétés de la fonction et résoudrais les exercices. En mathématiques, beaucoup de gens ne savent cependant pas les définitions... ..(T10)

Actuellement je sais superficiellement les opérations liées à la fonction. Je les étudie seulement pour qu'on les demande au concours. Comme je n'ai pas compris l'essentiel de la fonction et je ne sais pas où j'en aurais besoin une autre fois. Si je ne la répète pas, je l'oublie... ..(SB28)

Je ne pense pas que ce sujet se présente bien théoriquement. C'est pour ça que je ferais des applications. C'est-à-dire que j'essayerais de la présenter directement en résolvant les exercices... ..(T5)

Autres Réponses:

Bien que les réponses classées dans cette catégorie ne comportent pas de grandes choses au nom des mathématiques, mais elles nous aident à comprendre des opinions des élèves sur le système de l'enseignement et le concours.

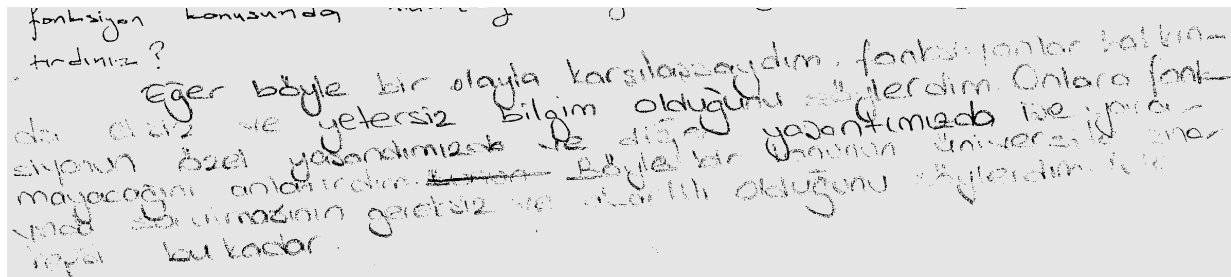
Je crois pas qu'ils aient besoin de ça... ..(T6)

Je leur dirais de laisser tomber. Ça ne sert à rien... ..(T16)

...je dirais que c'est très inutile et une absurdité lasse les élèves des mathématiques... (SA31)

Je sais pas le champ d'utilisation de la fonction et à quoi elle sert... (T8)

Je leur dirais de laisser tomber. Ça ne sert à rien. De toute façon ils n'ont pas de souci du concours... ..(T14)



Si je rencontre un événement pareil comme ça. Je leur dirais que je n'ai pas assez de connaissances sur les fonctions. Je leur raconterais que la fonction est inutile à notre vie privée et à d'autre. Je dirais que le fait qu'on demande un sujet pareil au concours est inutile et trop exagéré... ..(SA27)

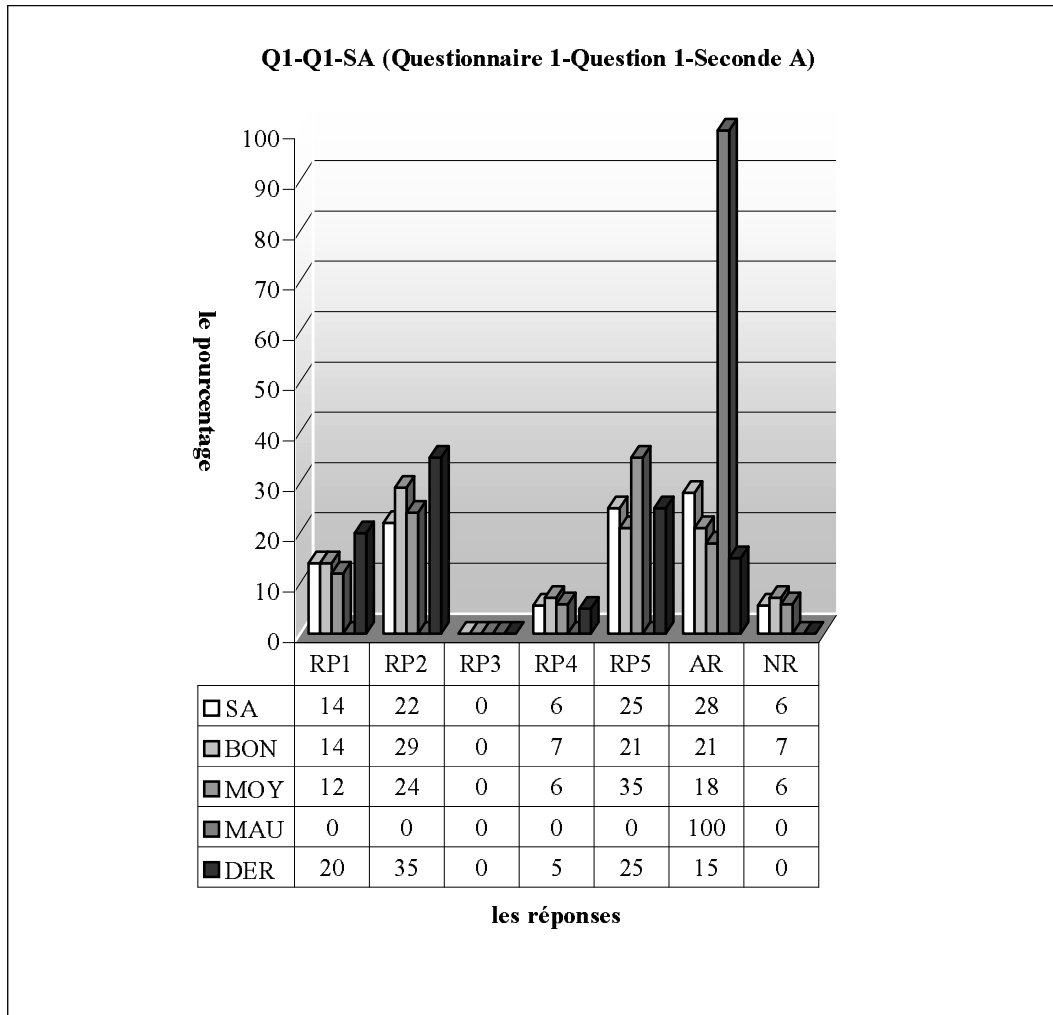
Non-Réponses :

Maintenant je passe à l'analyse des résultats (ou des réponses) en donnant les tableaux lycée par lycée :

2.1.1 Lycée Anatolien

Comme je l'ai déjà indiqué, les questionnaires se sont déroulés dans trois classes de ce lycée où le nombre des élèves qui suivent les dérsanés est plus nombreux. Par ailleurs, le lycée Anatolien recrute ses élèves par un concours. C'est la raison pour laquelle les meilleurs élèves du collège sont placés dans ce lycée.

Si mes hypothèses sont valables, dans ces classes, je n'attends pas que le taux de réponses privilégiant l'une des définitions de la fonction soit plus élevé. Par contre une réponse comme RP2 qui aide aux élèves à mémoriser les résultats de la définition de la fonction et comme RP3 qui vient de l'abus des applications dans le cadre algébrique devraient être majoritairement plus élevés chez les élèves anatoliens.



SA:seconde A, BON:bons élèves, MOY:moyens élèves, MAU: mauvaises élèves, DER:élèves qui suivent des dérsanés, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_0 , RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente..., AR : autres réponses, NR : non-réponses

Comme on l'a déjà prévu, les élèves de la classe A n'accordent pas beaucoup d'importance à la définition de la fonction à partir d'ensembles (5,6%). Il n'y a aucun élève qui dise que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues. Ce qui est tout à fait contraire à mes hypothèses. Par contre le fait qu'une bonne partie des élèves utilisent la comptine « l'évitement de l'élément vacant dans l'ensemble de définition » confirme mes attentes (22%). Pour 14% des élèves la fonction est prise comme l'unificateur entre les ensembles. Tandis que 28% des élèves préfèrent mettre en discours le rapport entre la fonction et le concours. Il est évident qu'un quart des élèves comprennent qu'on leur demande de se prendre pour un professeur. Cela me conduit cependant à poser la question suivante « est-ce qu'ils essaient de dire comment ils veulent apprendre ? »

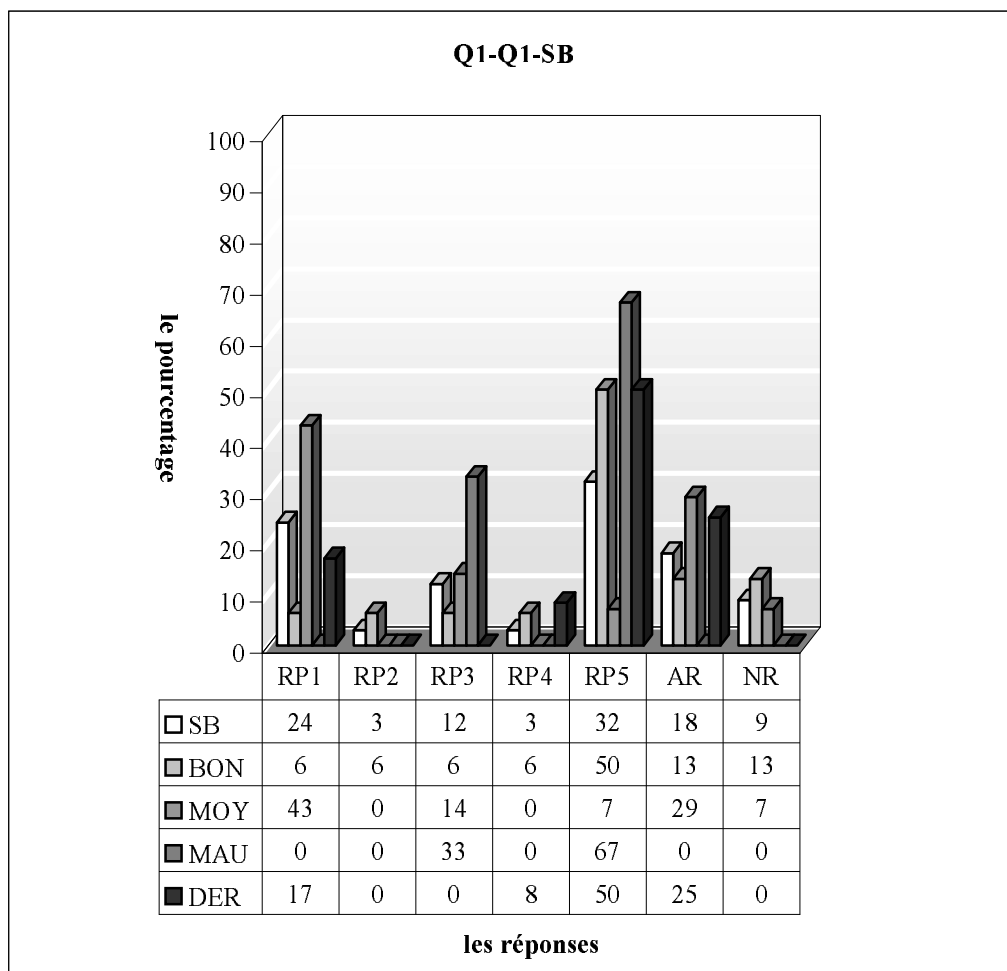
Quant aux résultats des élèves par niveau, une légère différence s'observe entre les bons et moyens. Ainsi 14% des bons prennent la fonction comme « un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles » contre 12% des moyens. Cependant les élèves qui utilisent la comptine dite « l'évitement de l'élément vacant dans l'ensemble de définition » sont plus nombreux chez les bons. 29% d'entre eux donnent cette réponse contre près du quart des moyens. 7% des bons donnent la définition de la fonction à partir d'ensembles. Ce taux atteint 6% chez les moyens.

Si l'on regarde les résultats des élèves de dérsané, on constate que la plupart d'entre eux utilisent la comptine (35%). Tandis que la définition à partir d'ensembles n'est présente que chez 5%. Par ailleurs, le pourcentage des élèves qui prennent la fonction comme un processus ou procédé de correspondance entre deux ensembles atteint 20% chez ces élèves.

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, en classe de seconde B, près du tiers des élèves expliquent comment ils présenteraient la fonction aux martiens. 24% des élèves disent que la fonction est un procédé de correspondance entre deux ensembles. Tandis que la comptine « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition » est utilisée par un très faible pourcentage des élèves (3%). Ce pourcentage est aussi valable pour les élèves qui donnent la définition à partir d'ensembles. 12% des élèves affirment que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues. Tandis qu'une bonne partie des élèves donnent leurs opinions sur le système de l'enseignement et du concours.

En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, les élèves qui disent que la fonction est un processus de correspondance entre des ensembles sont plus nombreux chez les moyens. Ainsi près de la moitié d'entre eux donnent cette réponse contre 6% des bons et un pourcentage nul chez les mauvais. Par ailleurs, l'utilisation de la comptine est uniquement réservée aux bons avec un taux de 6%.

L'idée que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues est plus fréquente chez les mauvais. Un tiers d'entre eux avancent cette idée contre 14% des moyens et 6% des bons. Seuls 6% de ces derniers donnent la définition de la fonction à partir d'ensembles. Par ailleurs, le taux des élèves qui se plaignent du système de l'enseignement et du concours est plus élevé chez les moyens. Plus du tiers d'entre eux donnent donc ce type de réponses contre 13% des bons et un pourcentage nul chez les mauvais.

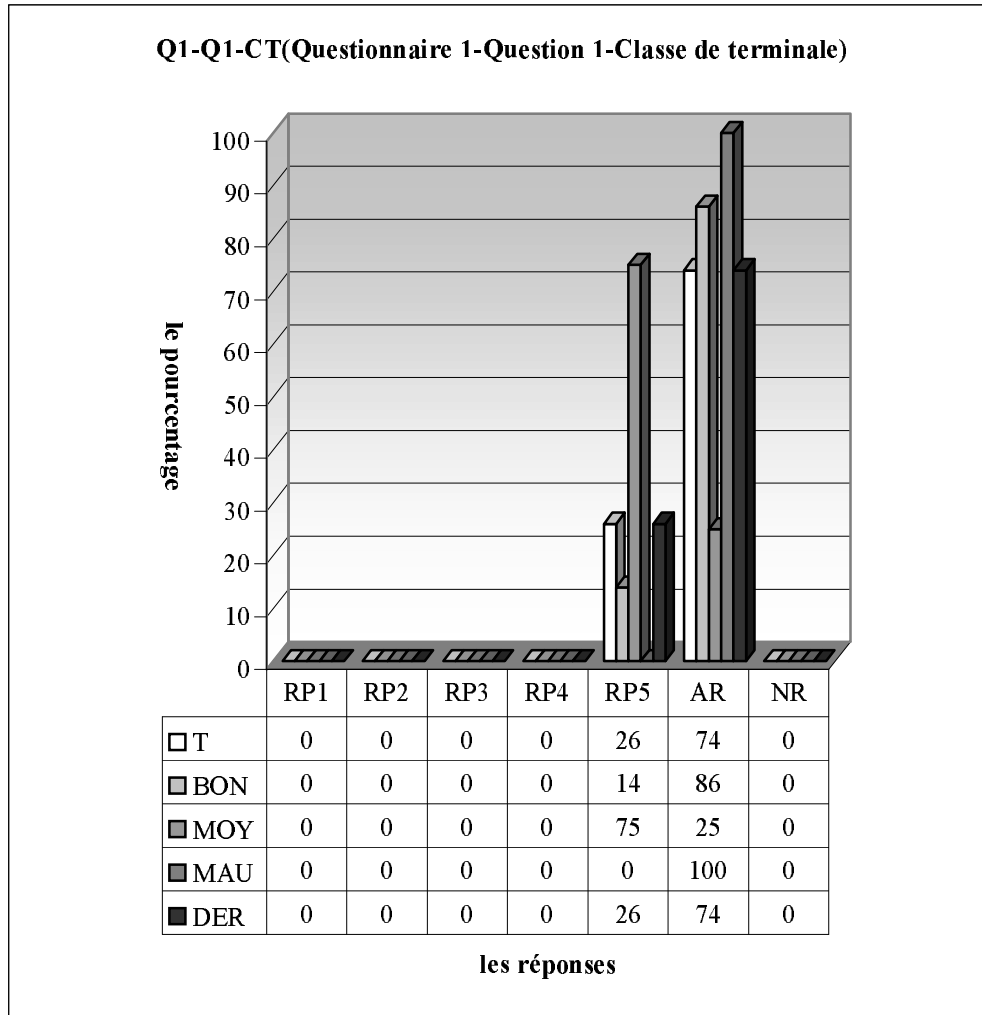


SB:seconde B, BON:bons élèves, MOY:moyens élèves, MAU: mauvaises élèves, DER:élèves qui suivent des dérsanés, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente..., AR : autres réponses, NR : non-réponses

Parmi les élèves de dérsané, on observe que la moitié donnent un plan de présentation de la fonction. Et un quart des élèves critiquent cependant le système où ils vivent. 8% donnent la définition à partir

des ensemble. Tandis que 17% des élèves estiment que la fonction est une correspondance entre des ensembles.

En ce qui concerne la classe de terminale, il est très intéressant qu'on ne rencontre aucune réponse relative à la définition de la fonction. 26% des élèves donnent une présentation de la fonction. Alors que les autres préfèrent mettre en discussion la discordance entre la fonction et le concours. Bien qu'il n'y ait aucune définition de la fonction chez ces élèves, leurs réussites dans les questions suivantes sont très remarquables.

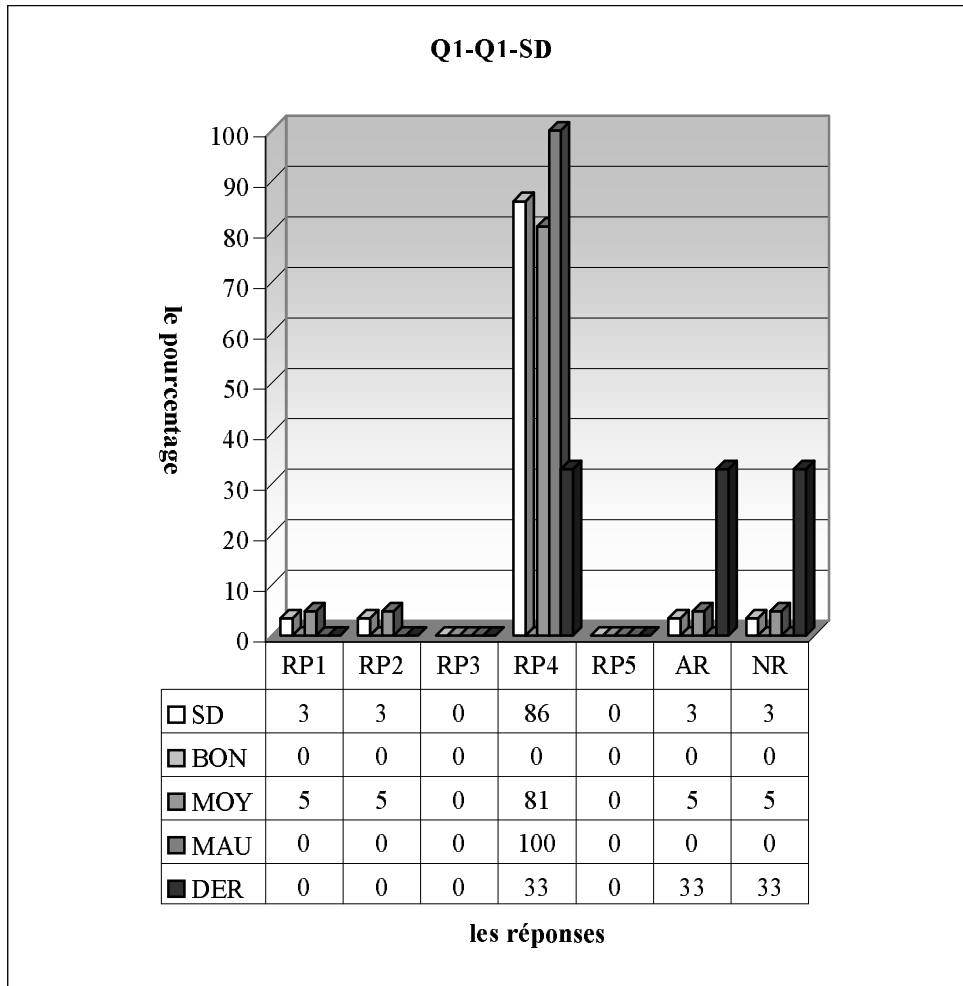


T:classe de terminale, BON:bons élèves, MOY:moyens élèves, MAU: mauvaises élèves, DER:élèves qui suivent des dérsanés, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente..., AR : autres réponses, NR : non-réponses

2.1.2 Lycée Super

Dans ce lycée, deux classes de seconde ont répondu aux questionnaires. Le niveau des élèves est moins fort que celui du lycée Anatolien et plus fort que le lycée Normal. Le nombre d'élèves qui suivent les cours des dérsanés est de 4 sur 29 dans l'une et 3 sur 29 dans l'autre.

J'attends à peu près les mêmes réactions des élèves que pour le lycée précédent :

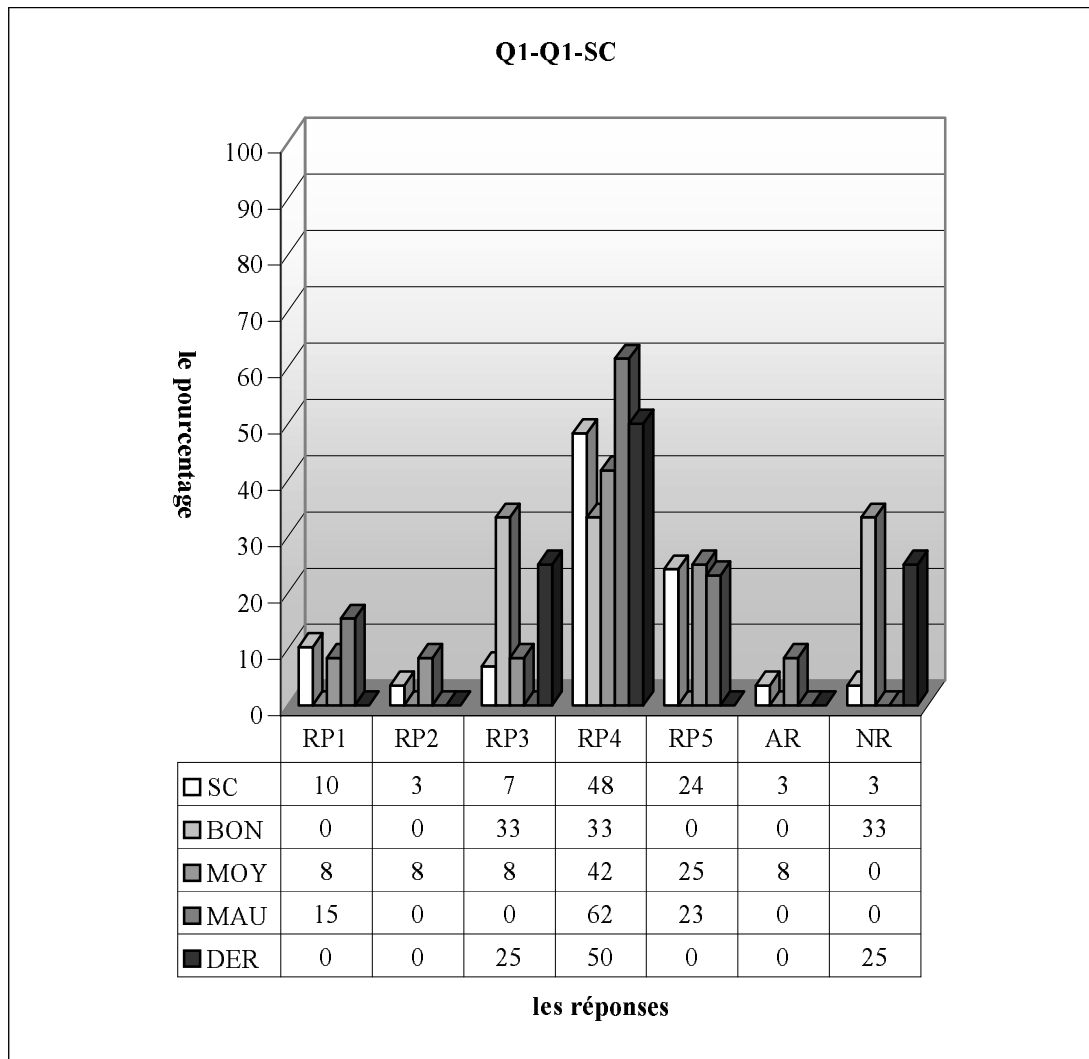


RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_0 , RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 : si je suis professeur, je présente..., AR : autres réponses, NR : non-réponses

Il semble que les résultats ne soient pas conformes à mon analyse a priori. La quasi-totalité des élèves de la classe D disent qu'ils raconteraient la fonction aux martiens en donnant sa définition à partir d'ensembles (RP4). Cependant le très petit nombre des élèves estiment que la fonction fait correspondre un ensemble à un autre. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui utilisent la comptine dite « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition ».

Comme il n'y a aucun élève qui déclare qu'il est bon, on a donc des moyens et mauvais. Il est cependant intéressant que chaque mauvais donne la définition à partir d'ensembles. Elle est aussi majoritairement utilisée par les moyens (81%). Parmi ces derniers, 5% disent que la fonction est une structure de correspondance entre des ensembles. Et 5% utilisent la comptine, quand on leur demande de parler de la fonction.

Un tiers des élèves de dérsané donnent la définition à partir d'ensembles. Tandis qu'un autre tiers critiquent le système de l'enseignement ou du concours. Les élèves restant ne répondent pas à la question.



Le tableau ci-dessus montre que près de la moitié des élèves donnent la définition à partir d'ensembles. Environ un quart des élèves expliquent comment ils présenteraient la fonction aux martiens. Par ailleurs, la fonction semble à 10% des élèves comme une correspondance entre des ensembles et à 7% une structure qui aide à trouver des inconnues. Le taux des élèves qui utilisent la comptine n'atteint que 4% dans cette classe. Un très petit nombre des élèves se révoltent contre le système de l'enseignement ou du concours (4%).

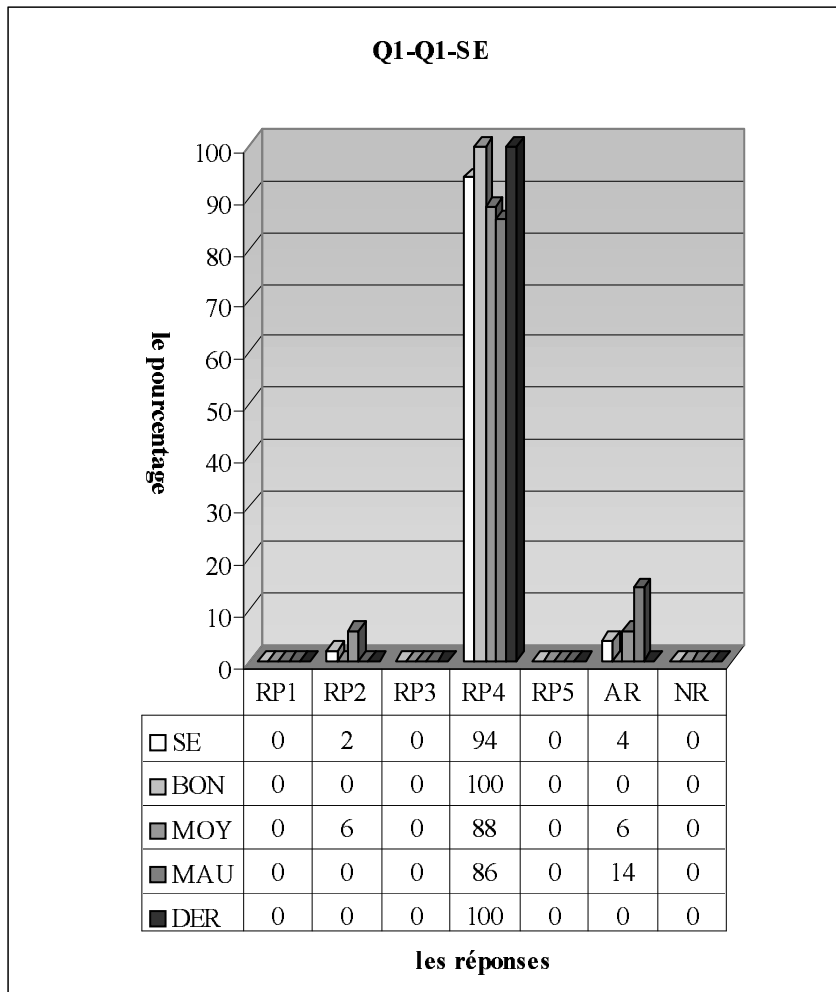
Quant aux résultats des élèves par niveau, on observe que la définition à partir d'ensembles est plus fréquente chez les mauvais. Ainsi 62% d'entre eux donnent cette définition contre 42% des moyens et un tiers des bons. Par ailleurs, on constate que seuls 8% des moyens utilisent la comptine. Pour 8% des moyens et 15% des mauvais la fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles. Cette idée est totalement absente chez les bons. Les élèves qui estiment que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues sont plus nombreux chez les bons (un tiers des bons contre 8% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais).

La définition à partir d'ensembles est aussi préférée chez les élèves de dérsané de cette classe. La moitié d'entre eux donnent cette définition. La fonction semble cependant à un quart de ces élèves comme un outil pour trouver des inconnues. Un même taux d'élèves ne donnent pas de réponse.

2.1.3 Lycée Normal

Comme je l'ai déjà indiqué, les enseignants et les élèves sont moins motivés par concours dans ce lycée. L'effectif des classes est beaucoup plus élevé. Il y a 49 élèves dans l'une des classes concernées et 53 dans l'autre. Un seul élève de la classe E suit le dérsané, alors que la classe F a eu 4 élèves.

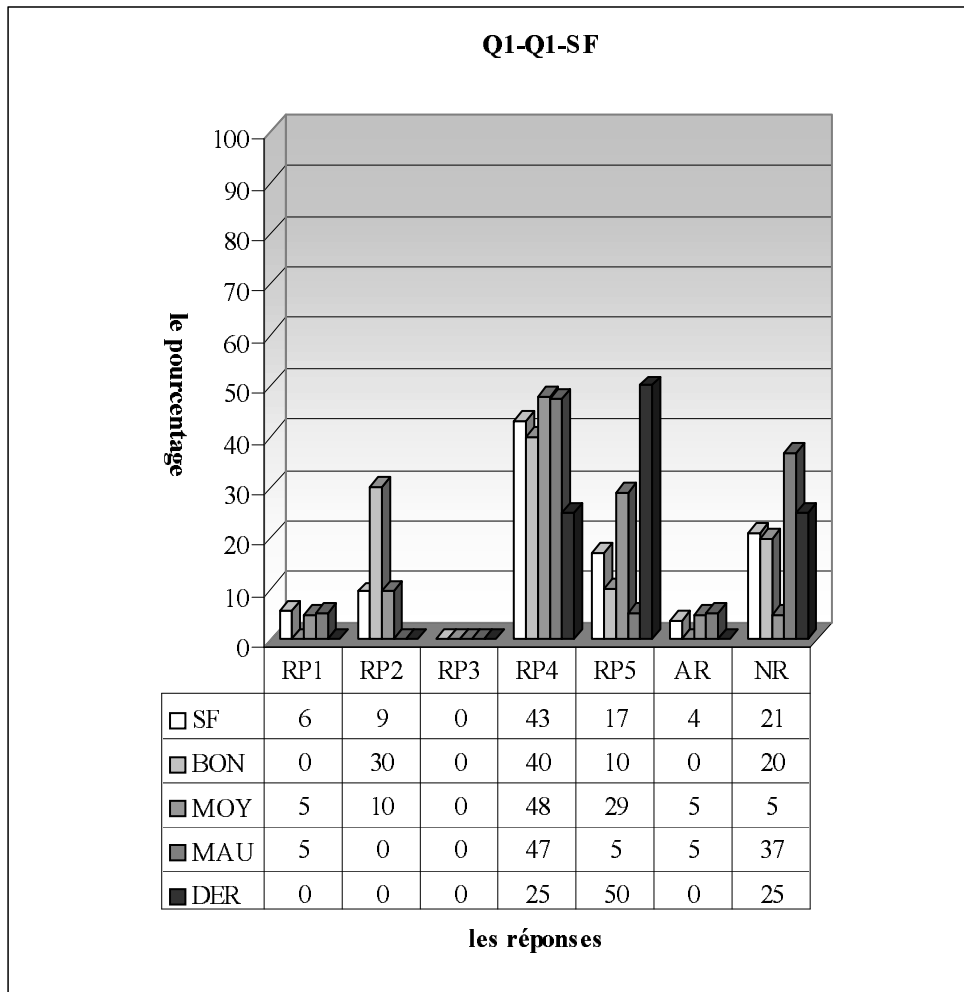
Pour les classes j'attends que la définition de la fonction (RP4) soit plus favorisée par les élèves. Je ne suppose cependant pas que les réponses RP2 et RP3 se seraient accordées de l'importance par les élèves comme chez les élèves des classes précédentes.



RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2: la comptine C_o, RP3: la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4: la définition ensembliste, RP5: si je suis professeur, je présente..., AR: autres réponses, NR: non-réponses

Comme l'enseignement dispersé dans ce lycée est plus proche des programmes officiels et le nombre des élèves qui suivent les dérsanés n'est pas plus important, il n'y a pas de grande surprise dans les réponses des élèves. La quasi-totalité des élèves donnent donc la définition de la fonction à partir d'ensembles qui paraît dans tous les manuels de la classe de seconde de lycée (94%). Les réponses RP1, RP3 et RP5 sont totalement absentes dans cette classe. Un très petit nombre des élèves utilisent cependant la comptine dite « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition ». Tandis que 4% des élèves se plaignent du système de l'enseignement ou du concours.

En ce qui concerne les résultats par niveau, on constate que tous les bons donnent la définition à partir d'ensembles contre 88% des moyens et 86% des mauvais. Il est intéressant de constater que la comptine ne vienne que de la part de 6% des moyens. Par ailleurs, les élèves de dérsané donnent aussi la définition portant sur des ensembles.



RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_0 , RP3 : la fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 : si je suis professeur, je présente..., AR : autres réponses, NR : non-réponses

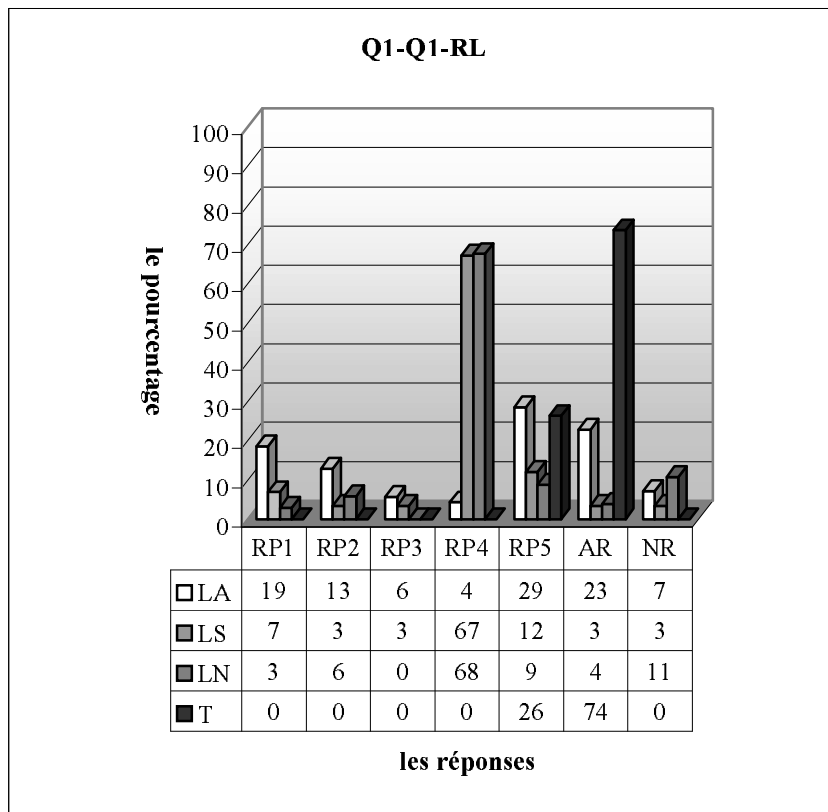
Comme le montre bien le tableau ci-dessous, en classe, la plupart des élèves donnent (43%) la définition à partir d'ensembles. Il est très intéressant qu'aucun élève n'estime que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues. Une bonne partie des élèves ne répondent pas à la question. Tandis que 17% expliquent comment ils présenteraient la notion de fonction aux martiens. On observe cependant que la comptine est utilisée par 9% des élèves. Environ 6% estiment que la notion de fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles.

Si l'on regarde les résultats par niveau, une légère différence entre les élèves s'observe par le taux de réponse RP4. Ainsi 48% des moyens donnent la définition à partir d'ensembles contre 47% des mauvais et 40% des bons. L'utilisation de la comptine dite « aucun élément vacant dans l'ensemble de définition » est plus fréquente chez les bons. 30% d'entre eux donnent cette comptine contre environ 10% des moyens et elle est totalement absente chez les mauvais. Par ailleurs, l'idée que la notion de fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles n'est pas présente chez les bons. Tandis que 5% des mauvais et moyens avancent cette idée.

Quant aux élèves de dérsané, la moitié d'entre eux manifestent un plan de la présentation de fonction. Un quart des élèves donnent cependant la définition à partir d'ensembles. Alors qu'un autre quart ne répondent pas à la question.

2.1.4 Résultats des élèves par lycée

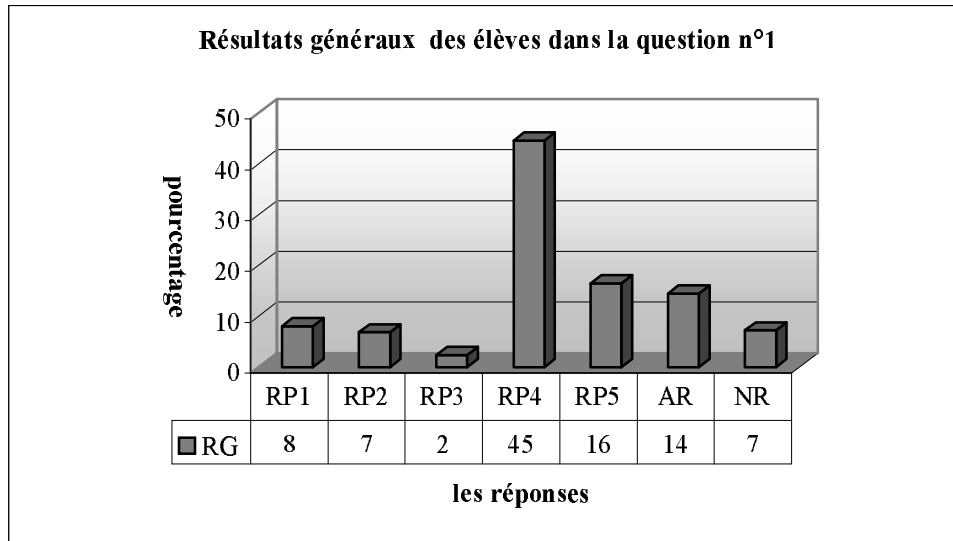
Si on prend en compte les résultats généraux suivant les lycées :



LA : lycée Anatolien, LS :lycée Super, LN :lycée Normal, T :classe de terminale, RP1: des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_o, RP3 : la notion de fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 :si je suis professeur, je présente..., AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le lycée Anatolien se distingue énormément des deux lycées dans la réponse 4 (environ 4% contre 67% et 68%). Comme les définitions importent peu au concours, il est donc normal que le taux des élèves anatoliens donnant la définition soit beaucoup moins élevé. De plus les élèves qui estiment que la fonction est un procédé de correspondance entre des ensembles (RP1), ceux qui disent que la fonction est un outil pour trouver des inconnues (RP3) et ceux qui utilisent la comptine dite « aucun éléments dans l'ensemble de définition » (RP2) sont toujours plus nombreux dans le lycée Anatolien où l'influence du concours et celle de l'enseignement de dérsané sont plus fortes. Ainsi 19% des anatoliens prennent la fonction comme un procédé de correspondance entre des ensembles contre 7% des élèves du lycée Super et 3% des lycéens normal. 13% des lycéens anatoliens utilisent cependant la comptine contre 4% des lycéens super et 6% normal. Le taux des élèves qui pensent que la fonction est une structure qui aide à trouver des inconnues est d'environ 6% chez les lycéens anatolien,4% les lycéens super et un pourcentage nul dans le lycée Normal.

2.1.5 Résultats généraux des élèves



RG : résultats généraux, RP1 : des correspondances entre deux ensembles, RP2 : la comptine C_0 , RP3 : La fonction est une structure qui aide à trouver l'inconnue, RP4 : la définition ensembliste, RP5 : si je suis professeur, je présente..., AR : autres réponses, NR : non-réponses

Conformément à notre analyse a priori, la grande majorité des élèves donne la définition ensembliste de la notion de fonction mais la comptine C_0 est cependant proposée par 7% des élèves. Par ailleurs, les fonctions sont définies par 8% des élèves comme des correspondances entre deux ensembles. Tandis que le taux des élèves qui qualifient la notion de fonction de structure qui sert à trouver l'inconnue n'est que de 2%.

Par ailleurs, près du quart des élèves répondent autrement à cette question, 16% expliquent comment ils présenteraient cette notion aux martiens en se mettant à la place de leur professeur tandis que 7% des élèves ne donnent pas de réponse.

2.1.6 Conclusion

Nous pouvons tout d'abord dire que la plupart des élèves définissent les fonctions avec leur définition ensembliste. Le fait que la comptine C_0 et la réponse RP1 soient plus fréquentes et que la définition ensembliste complète des fonctions soit moins fréquente au lycée Anatolien nous amènent à conclure que l'enseignement très proche du concours conduit à négliger des définitions et à favoriser ce type de situations qui sert à mémoriser des résultats d'une définition ou d'un théorème... etc. (cf. la comptine C_0) chez les élèves.

Si l'on regarde les aspects des réponses à cette question, on peut dire que, par exemple, la réponse RP1 est due à l'abus des ensembles lors de l'introduction de la fonction, que la réponse RP2 présente une comptine qui aide les élèves à mémoriser les résultats de la définition des fonctions pour résoudre des questions et que la réponse RP3 vient de l'abus des applications algébriques.

Comme l'a bien dit Sophie RENE DE COTRET dans son article⁹ de « petit x », plus on se rapproche des définitions modernes, plus on voit disparaître graduellement la variation, puis la dépendance, dont on peut retrouver quelques traces avec la règle de correspondance, pour finalement aboutir à une pure correspondance. Il est donc normal de constater que dans les réponses des élèves il n'y a aucune définition de la fonction qui porte sur la variation et la dépendance.

Par ailleurs, chez les élèves de terminale, on constate qu'il n'y a aucune réponse relative aux définitions des fonctions. Comme ils sont brillants dans la résolution des autres questions, on peut donc dire que ces élèves résolvent des questions sans savoir de définitions. Cela signifie que, d'une part un enseignement qui ne cherche qu'à établir un automatisme et d'autre part la définition à partir d'ensembles seuls, sont très loins de donner aux élèves une conception de ce qu'est la notion de fonction.

⁹ RENE DE COTRET. S (1988) : « Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante », petit x n°17 pp. 5-27.

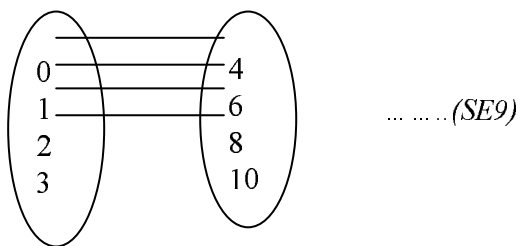
2.2 Question n°2

Cette question n'est pas très complexe pour tous les élèves. Mon objectif est ici de voir si les élèves peuvent trouver l'ensemble image à partir de l'ensemble de définition. J'attends que le taux de réussite soit plus élevé dans toutes les classes.

Voici les catégories des réponses des élèves :

RC1 (Procédure 1) : réponse correcte.

Pour $f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$
 Pour $f(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$
 Pour $f(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$
 Pour $f(3) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$ donc $B = \{4, 6, 8, 10\} \dots \dots (SA16)$
 $f(A) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$
 $f(A) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$
 $f(A) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$
 $f(A) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$ donc $B = \{4, 6, 8, 10\} \dots \dots (SB9)$

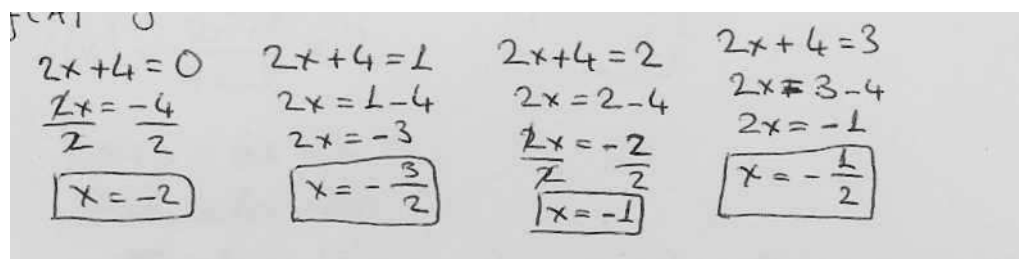


$B = \{4, 6, 8, 10\} \dots \dots (T18), (T16)$

RC2 : l'élève trouve la bonne réponse en traitant la fonction comme une équation :

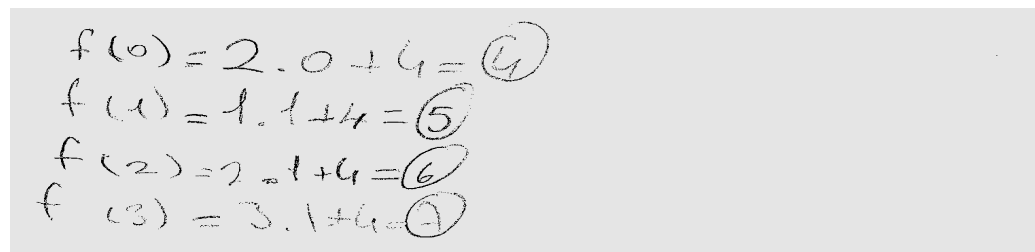
Pour $x=0$ $2x+4 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 4 = 4$
 ...
 Pour $x=3$ $2x+4 \Rightarrow 2 \cdot 3 + 4 = 10$ donc $f(A) = \{4, 6, 8, 10\} \dots \dots (SA36)$

RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image.



(SA4)

RP4 : il y a une confusion entre la variable et le coefficient :



(SF14)

RP5 : erreur de calculs.

RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A) = \emptyset$.

$$f(x) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

$$f(x) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$$

$$f(x) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

$$f(x) = 2 \cdot 3 + 4 = 10$$

comme les éléments ne se présentent pas dans l'ensemble A donc

$$f(A) = \emptyset \dots (SC14), (SC9)$$

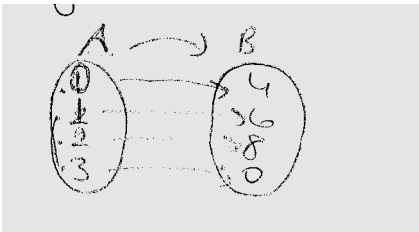
RP7: réponses incomplètes.

$$f(x) = 2x + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$f_1 = 2 \cdot 0 + 4 = 4$$

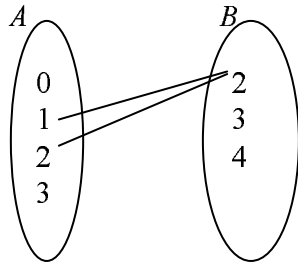
$$f_2 = 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 = 8 \dots \dots (SD28)$$

RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0.



(SF39), (SF36), (SF46)

Autres Réponses:

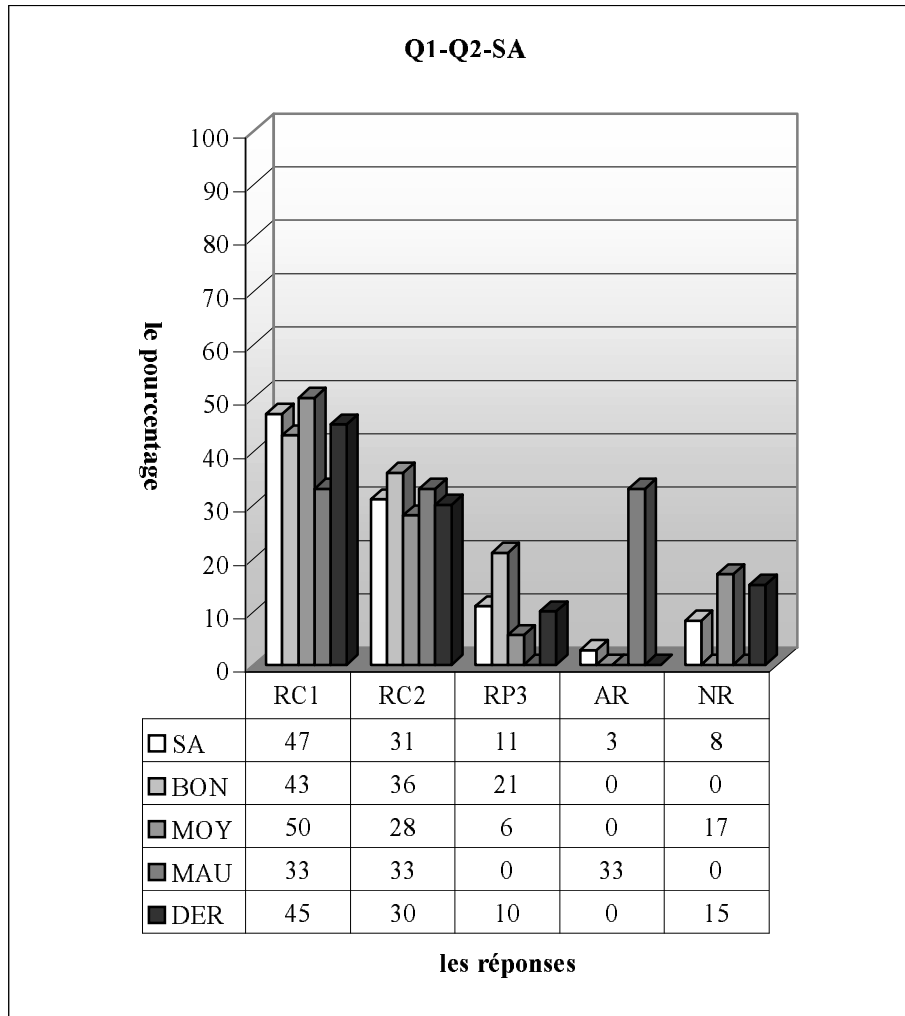


$f(A) = \{0, 14\} \dots \dots (SF47), (SF23), (SF26)$

Non-réponses :

Maintenant je vais analyser les résultats en donnant les tableaux:

2.2.1 Lycée Anatolien

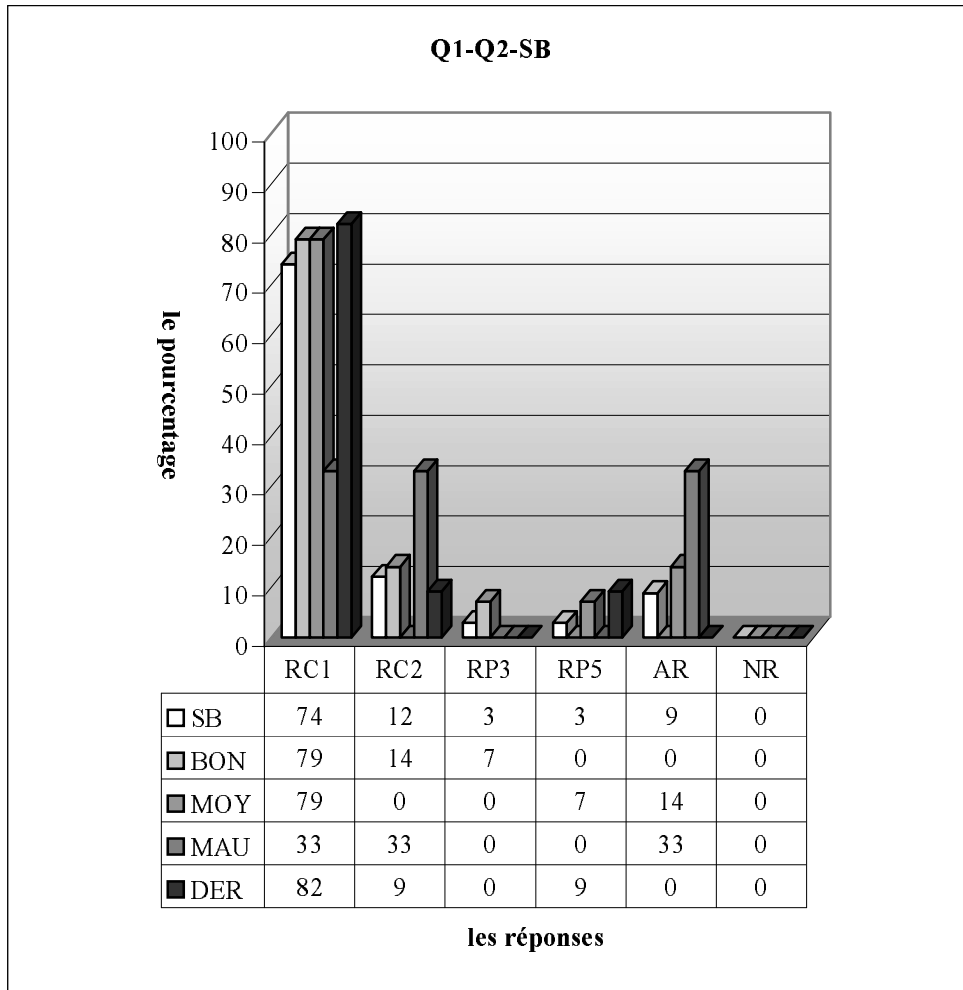


RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses

Comme déjà prévu, le taux de réussite est très élevé dans la classe A. Ainsi 78% des élèves fournissent une bonne réponse. 31% d'entre eux résolvent la question comme une équation. Ils ne veulent peut-être pas s'éloigner beaucoup d'un domaine familier. Par ailleurs, le pourcentage des élèves qui confondent l'ensemble image et l'ensemble de définition est de 11%. Un petit nombre des élèves répondent autrement à la question. Tandis que la question n'est pas abordée par 8% des élèves. On peut donc dire que les connaissances élémentaires (trouver l'image des éléments, reconnaître l'ensemble de définition et image) sont disponibles chez la grande majorité des élèves.

En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, une légère différence entre les élèves s'observe par le taux de réussite. Ainsi 79% des bons donnent la bonne réponse contre 78% des moyens et 66% des mauvais. L'erreur consistant à confondre l'ensemble de définition et image est plus fréquente chez les bons. Elle est donc commise par 21% des bons contre 6% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais.

Les trois quarts des élèves de dérsané fournissent une bonne réponse. 10% d'entre eux commettent l'erreur relative au confondement de l'ensemble de définition et image. Tandis que 15% ne traitent pas la question.

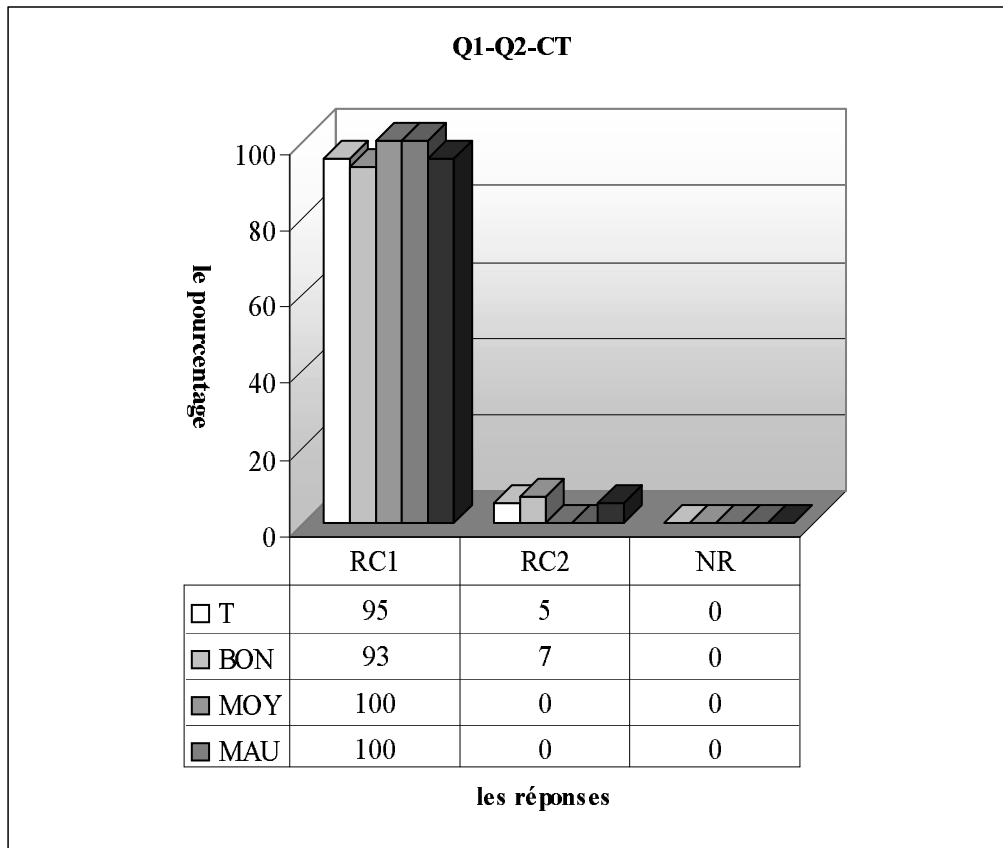


RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f. Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe la grande majorité des élèves (86%) fournissent une bonne réponse. Seuls 12% des élèves trouvent la bonne réponse en utilisant la procédure P2. Il semble cependant que l'erreur qui consiste à confondre l'ensemble de définition et l'ensemble image perde son importance dans cette classe. Elle est donc commise par seulement 3% des élèves. Ce taux est aussi valable pour les erreurs de calcul.

Quant on regarde les résultats par niveau, on remarque que le taux de réussite à cette question monte à 93% chez les bons élèves. Alors que plus des trois quarts des moyens et deux tiers des mauvais donnent la bonne réponse. L'erreur provoquée par la confusion de l'ensemble de définition et de l'ensemble image ne vient que de la part des bons. 7% d'entre eux commettent donc cette erreur. Par contre les erreurs de calcul sont uniquement réservées aux moyens avec un taux de 7%.

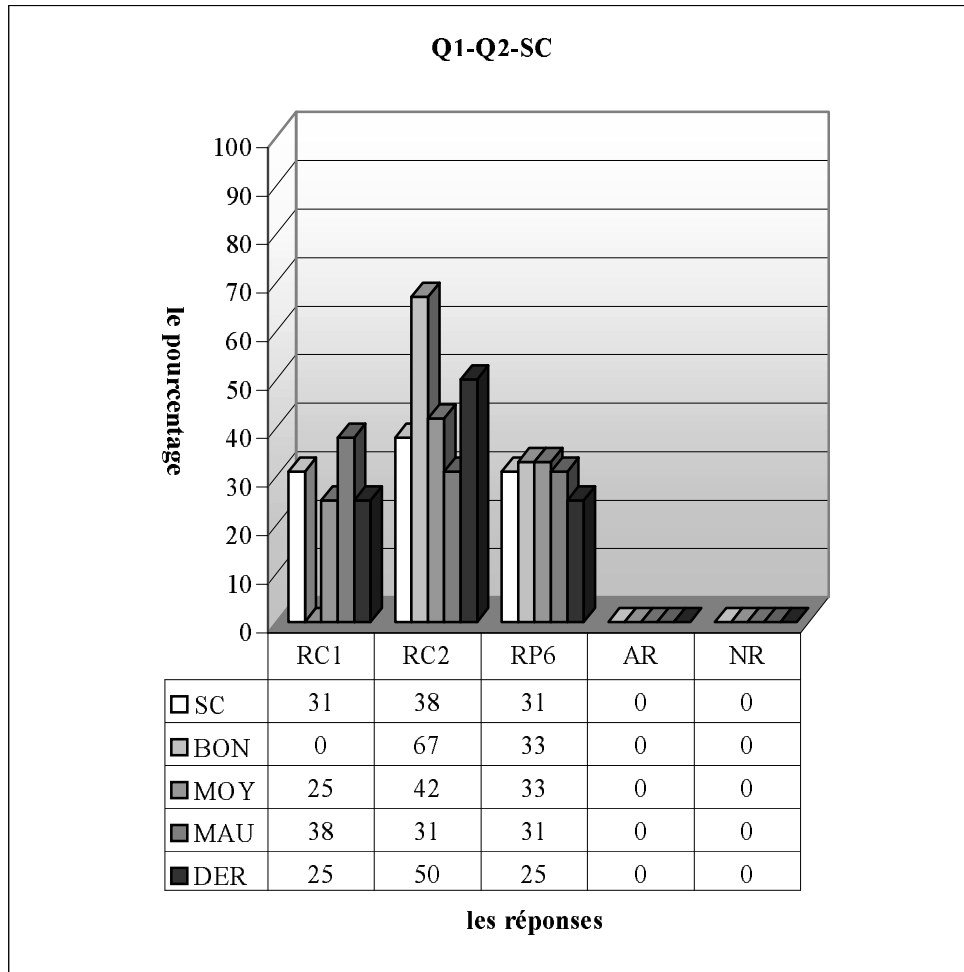
Par ailleurs, le taux de réussite est aussi très satisfaisant chez les élèves de dérsané. Alors 91% d'entre eux donnent la bonne réponse. Les seules erreurs qui existent sont des erreurs de calcul qui sont commises par 9% des élèves.



RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur $f = 0$. AR : autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe tous les élèves fournissent une bonne réponse. Et seuls 5% d'entre eux traitent la question comme une équation.

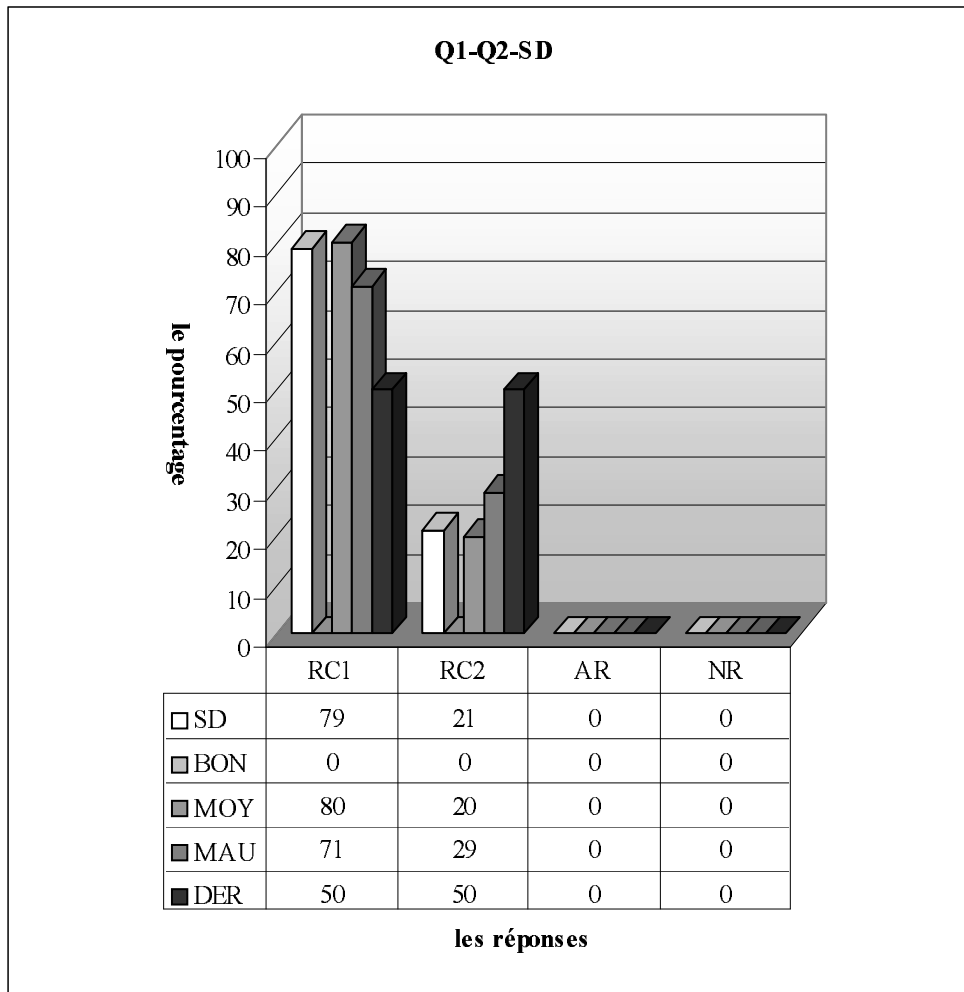
2.2.2 Lycée Super



RC1 (Procédure 1) : réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f. Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR : non-réponses

Remarquons que plus des deux tiers des élèves de la classe C fournissent une bonne réponse. Et ceux qui résolvent la question comme une équation sont plus nombreux. Ainsi 38% des élèves trouvent la bonne réponse à partir de la procédure P2. 31% trouvent cependant les images des éléments de l'ensemble de définition sur f. Ensuite ils cherchent ces images dans l'ensemble de définition au lieu de l'ensemble image. Il est donc évident de dire qu'une bonne partie des élèves ont du mal à reconnaître l'ensemble de définition et l'ensemble image. Par ailleurs, le fait que le pourcentage d'autres réponses et non-réponses soient nuls signifie que la question est très familière aux élèves.

Quant aux résultats par niveau, on constate presque un même taux de réussite chez tous les élèves. Ainsi 67% des bons et moyens donnent la bonne réponse contre 69% des mauvais. Alors cela veut dire que la question n'exprime pas beaucoup la différence entre les niveaux. Il est très intéressant de remarquer que le taux des élèves qui fournissent une bonne réponse à partir de la procédure P1 est plus élevé chez les mauvais (38% contre un quart des moyens et un pourcentage nul chez les bons). L'erreur consistant à chercher les images dans l'ensemble de définition apparaît chez tous les élèves avec un pourcentage très proche (33% des bons et moyens contre 31% des mauvais). Par ailleurs, le taux de réussite atteint 75% chez les élèves de dérsané et les élèves restant commettent l'erreur relative à chercher les images dans l'ensemble de définition.

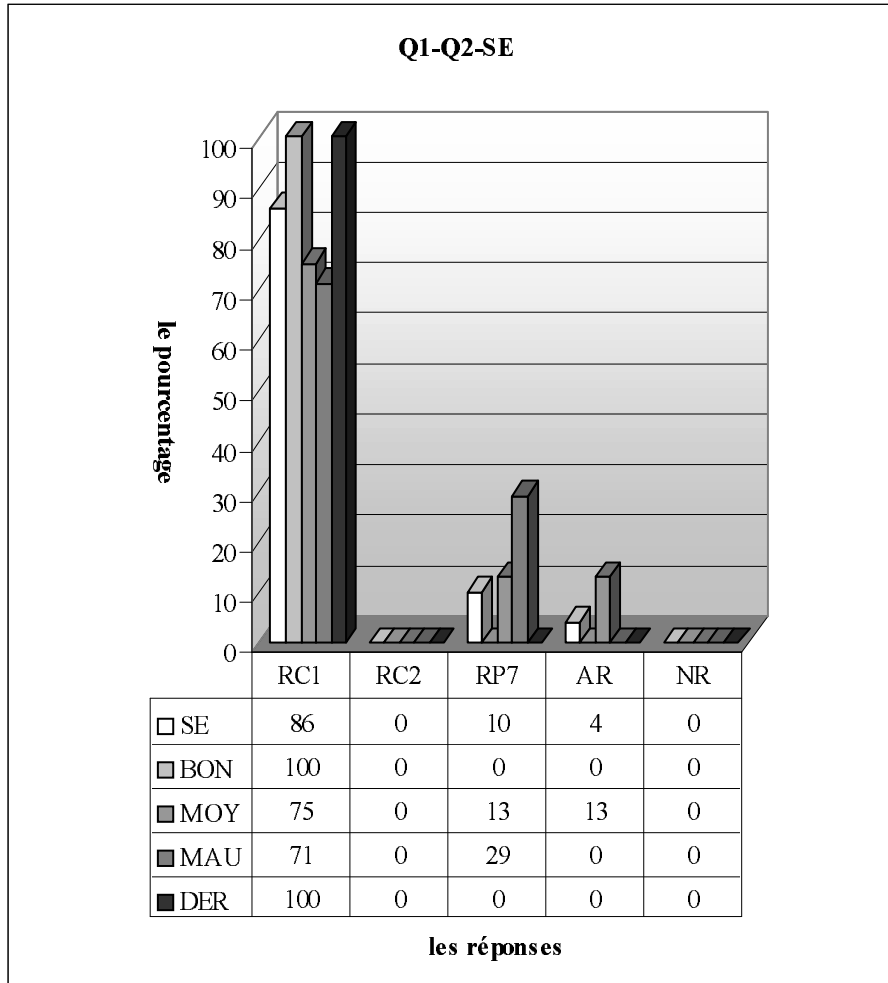


RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f. Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe chaque élève trouve la bonne réponse. La grande majorité des élèves utilisent la procédure P1 (79% contre 21%). Comme il n'y a aucun élève qui s'estime bon, une légère différence entre les moyens et mauvais se constate par les taux de réponses correctes. Ainsi 80% des moyens privilégient la procédure P1 contre 71% des mauvais et 20% des bons utilisent la deuxième procédure contre 29% de ces derniers.

En ce qui concerne les élèves de désané, une moitié trouvent la bonne réponse à partir de la procédure P1 et une autre en utilisant la deuxième procédure.

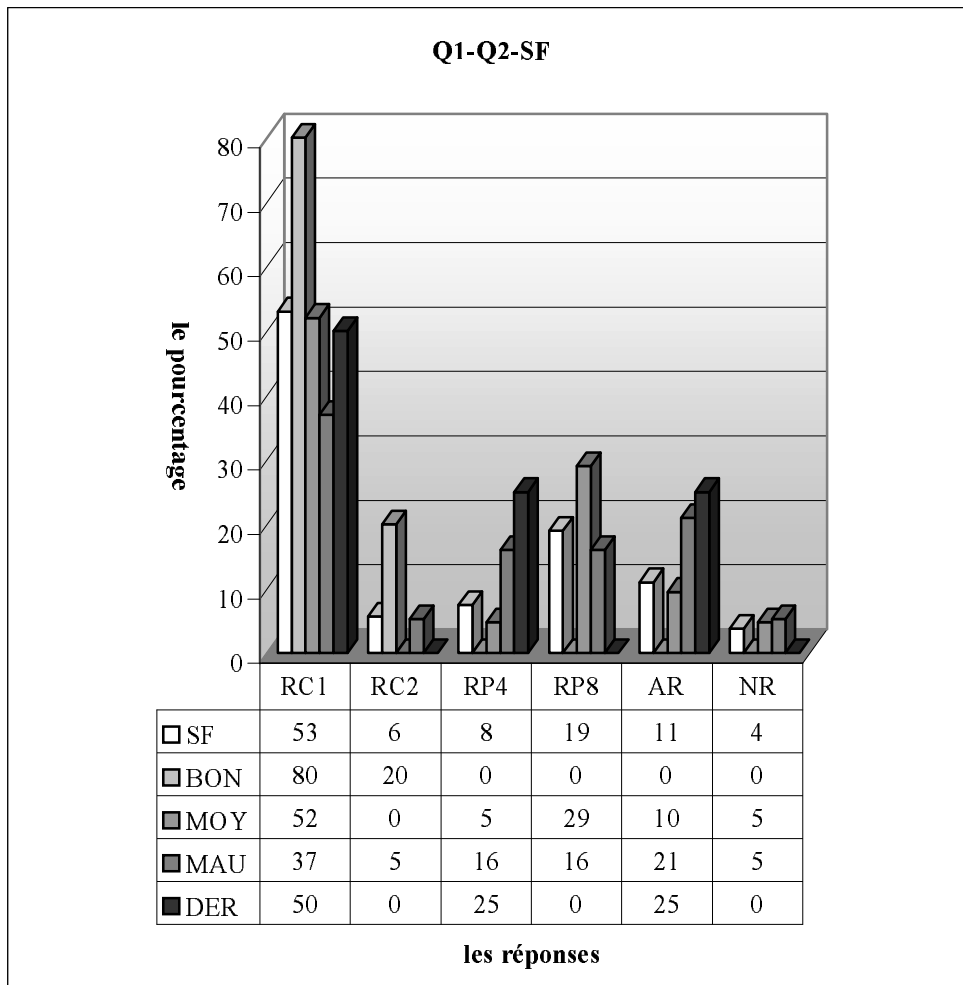
2.2.3 Lycée Normal



RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses

Dans la seconde E la grande majorité des élèves donnent la bonne réponse comme les classes précédentes. Il n'y a aucun élève qui privilégie la deuxième procédure (P2). 10% d'entre eux n'arrivent pas à terminer la résolution, tandis que le taux d'autres réponses est de seulement 4%.

Quant on regarde les résultats par niveau, on observe que tous les bons fournissent une bonne réponse contre trois quarts des moyens et 71% des mauvais. Les élèves qui donnent des réponses incomplètes sont plus nombreux chez les mauvais. Ainsi 29% d'entre eux ne peuvent pas terminer la résolution de la question contre 13% des moyens. Par ailleurs, tous les élèves de dérsané trouvent aussi la bonne réponse.

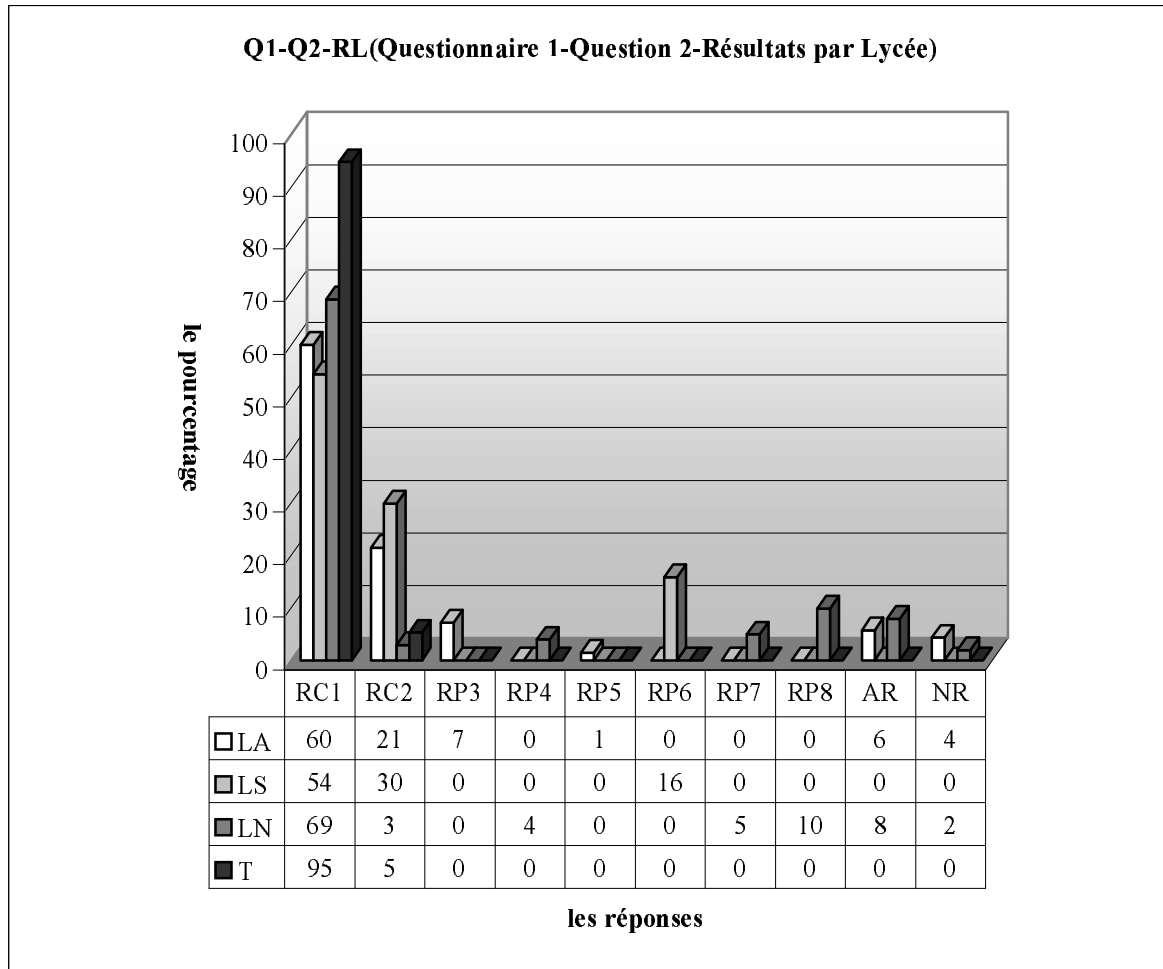


RC1 (Procédure 1) : réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f . AR : autres réponses, NR : non-réponses

Quant à la classe F plus de la moitié des élèves peuvent fournir une réponse correcte. Et 5,7% d'entre eux préfèrent traiter la question dans le cadre algébrique. Une bonne partie des élèves (19%) commettent l'erreur du traitement de l'image de 3. Tandis que l'erreur de la confusion entre la variable et le coefficient de x est commise par 7,5% des élèves. Environ 4% ne répondent pas à la question et 11% des élèves deviennent perplexes face à la question.

Comme dans la classe précédente, tous les bons élèves fournissent une réponse correcte. Ce taux descend à 52% chez les moyens et 42% chez les mauvais. Le taux de bonne réponse à partir de la procédure P1 est toujours plus élevé chez tous les élèves (80% des bons contre 52% des moyens et 37% des mauvais). Il est donc possible de dire que ces élèves n'ont pas beaucoup de difficultés à utiliser deux cadres ensembles : cadre algébrique et cadre fonctionnel. L'erreur consistant à confondre la variable et le coefficient de x est plus fréquente chez les mauvais. Alors 16% de ces derniers commettent cette erreur contre environ 5% des moyens. Par contre le taux de l'erreur relative au traitement de l'image de 3 est plus élevé chez les moyens (29% contre 16% des mauvais). Par ailleurs, la moitié des élèves de dérsané fournissent une réponse correcte. Et un quart d'entre eux confondent la variable et le coefficient de x .

2.2.4 Résultats des élèves par lycée



RC1 (Procédure 1): réponse correcte 1, RC2: réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4: confusion entre la variable et le coefficient, RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A) = \emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR: autres réponses, NR: non-réponses

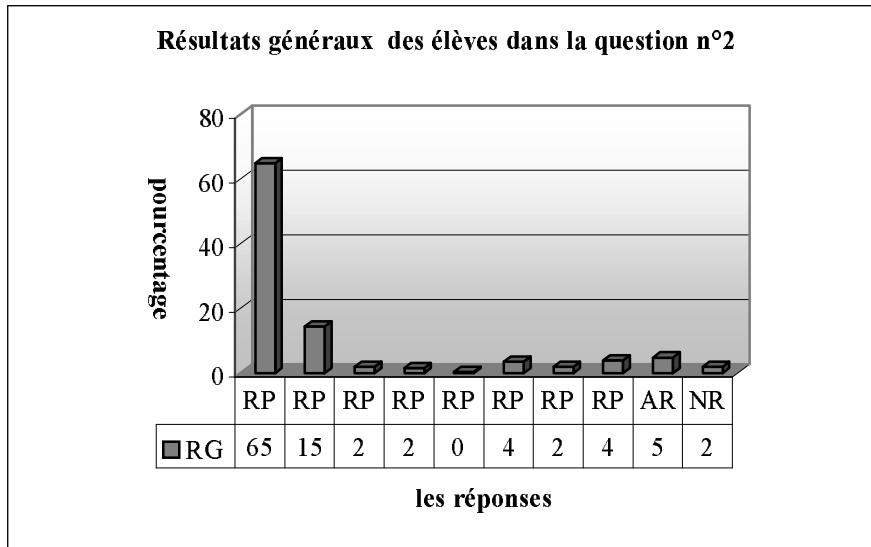
Le tableau ci-dessus montre qu'il n'y a pas de grande différence entre les taux de réussites. Ainsi 81% des lycéens anatolien donnent la bonne réponse contre 84% des lycéens super et 72% des lycéens normal. Chaque élève de terminale fournit cependant une réponse correcte. On peut donc dire que les élèves de trois lycées sont très habitués à ce type des questions basiques. Les reconnaissances élémentaires, trouver une image, reconnaître l'ensemble de définition et l'ensemble image, sont disponibles chez la plupart des élèves.

Les élèves qui résolvent correctement la question à partir de la procédure P2 sont beaucoup moins nombreux chez les élèves du lycée Normal. Environ 3% d'entre eux trouvent la bonne réponse en utilisant cette procédure contre 30% des lycéens super et 21% des lycéens anatolien. Cela signifie que les élèves du lycée Normal ont moins de difficultés à accepter la notation du nouveau sujet.

Il est toutefois très intéressant de constater qu'il n'y a aucune erreur commune. Alors l'erreur qui consiste à confondre l'ensemble de définition et l'ensemble image est uniquement réservée aux élèves du lycée Anatolien avec un taux de 7%. Et il y a seulement 4% des lycéens normal qui commettent l'erreur relative à la confusion entre la variable et le coefficient. Ensuite les erreurs de calcul n'apparaissent que chez les anatoliens. Un très faible pourcentage de ces derniers font donc ce type des erreurs (1,4%). L'erreur provoquée par chercher les images des éléments dans l'ensemble de définition n'est commise que par 16% des élèves du lycée Super. Par ailleurs, on ne constate les réponses incomplètes que dans le lycée Normal et presque 5% des élèves n'arrivent pas à terminer la résolution

de la question. Les élèves qui trouvent zéro image de 3 ne sont présents que dans le lycée Normal. Leur pourcentage atteint 10%.

2.2.5 Résultats généraux des élèves



RC1 (Procédure 1) :réponse correcte 1, RC2 : réponse correcte 2 (traiter la fonction comme une équation), RP3 (Procédure P2): l'élève confond l'ensemble de définition avec l'ensemble image. RP4 : confusion entre la variable et le coefficient, RP5 : erreurs de calcul, RP6 : l'élève trouve les images des éléments de l'ensemble de définition sur f . Comme ces images ne se trouvent pas dans l'ensemble de définition, il conclut $f(A)=\emptyset$, RP7: réponses incomplètes, RP8: l'élève trouve l'image de 3 sur f 0. AR : autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre que la plupart des élèves répondent correctement à cette question (80%, RP1+RP2), 15% d'entre eux trouvent la bonne réponse en traitant la fonction comme une équation, 5% des élèves répondent autrement. Tandis que la question n'est pas abordée par seulement 2% des élèves. Les erreurs les plus fréquentes sont les erreurs des réponses RP6 et RP8 avec un taux de 4%. L'erreur qui consiste à confondre l'ensemble de définition avec l'ensemble image est seulement le fait de 2% des élèves. Ce taux est aussi valable pour l'erreur consistant à confondre la variable et le coefficient pour les réponses incomplètes.

2.2.6 Conclusion

Les données recueillies semblent confirmer nos attentes : la majorité des élèves s'est sentie à l'aise pour répondre à cette question (2% de non-réponses). Par ailleurs, nous pouvons dire que la plupart des élèves ont le niveau technique et que les connaissances essentielles indiquées par le programme (trouver les ensembles correspondant à la fonction : ensemble de définition, ensemble image... etc.) sont disponibles chez eux. En ce qui concerne les erreurs, elles sont peu fréquentes, changent suivant les lycées et il n'y a aucune erreur commune.

2.3 Question n°3

Cette question présente un double intérêt. D'une part elle sert à étudier si les élèves savent trouver l'inverse d'une fonction affine et d'autre part elle permet de repérer les techniques qui sont privilégiées par les élèves.

Je présente maintenant les catégories de réponses des élèves :

RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes.

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+7}{-3} \dots \dots (SB29), (SB2)$$

$f^{-1}(x) = \frac{-2x+7}{-3} = \frac{+2x+7}{+3} = \frac{2x+7}{3} \dots \dots (SB21)$ change d'abord les places et les signes. Ensuite il divise les signes sans prendre en compte 7.

RP2 : L'élève change seulement les places de 3 et 2.

$$f(x) = \frac{3x+7}{2} \text{ donc } f^{-1}(x) = \frac{2x+7}{3} \dots \dots (SA12) (SA13)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+7}{3} \text{ j'ai oublié l'autre démarche} \dots \dots (SB31)$$

L'élève trouve l'inverse en changeant seulement les places. Ensuite il trouve l'image de un nombre : f

$$^{-1}(x) = \frac{2x+7}{3} \dots \dots \text{ Pour } x=1 \text{ } f^{-1}(x) = \frac{2 \cdot 1 + 7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \dots \dots (SD17), (SD20), (SD28)$$

RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux.

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+7}{-3} \dots \dots (SA35)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+7}{3} \dots \dots (SB13)$$

RP4 (Procédure 4) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette **R_a**.

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+7}{-3} = \frac{2x-7}{3} \dots \dots (SA17)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+7}{-3} = \frac{2x-7}{3}$$

j'ai oublié l'autre démarche... (SB17)

$$f^{-1}(x) = \frac{2x-7}{3} \text{ J'ai oublié l'autre technique} \dots \dots (SB30)$$

RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode **M_{xy}**.

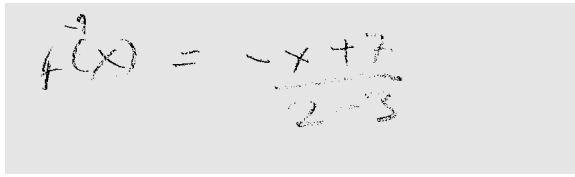
$$y = \frac{3x+7}{2}, \quad 2y = 3x+7, \quad 2y-7 = 3x \dots \dots x = \frac{2y-7}{3} \text{ donc } f^{-1}(x) = \frac{2x-7}{3} \dots \dots (SE8), (SE4), (SE6)$$

$$y = 3x+7, \quad 2y = 3x+7, \quad \frac{2y-7}{3} = x \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-7}{3x} \dots \dots (SE51), (SE52), (SE41)$$

RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette **R_a** hors les précédentes (RP2, RP3).

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+1}{7} \dots \dots \text{l'élève change le signe de 2. il supprime 3 et descend 7} (SA1)$$

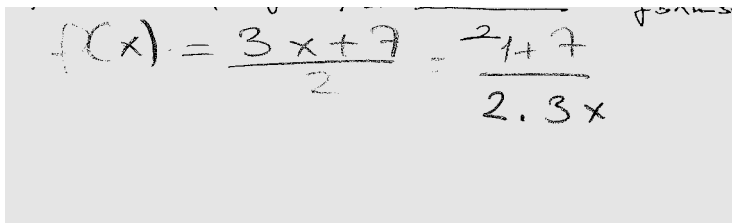
$f^{-1}(x) = \frac{-2x-7}{-3} \dots f^{-1}(x) = \frac{2x+7}{3} \dots \dots$ l'élève change d'abord tous les signes. Et puis il retourne à ce point qu'il a commencé (SA25).



(SA26)

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2-3} \dots$ (SA2)

$f^{-1}(x) = \frac{0x+7}{2-3} = \frac{7}{-1} = -7 \dots \dots$ (SC1)



(SC11)

$f^{-1}(x) = \frac{x-7}{2} \dots \dots$ l'élève change le signe de 7. Ensuite il divise 2 par 3 (SC25).

$f(x) = \frac{3x+7}{2} = \frac{x+7}{2-x} \dots \dots$ (SD16)

$f(x) = \frac{3x+7}{2}, f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2-3} \dots \dots$ (SD2)

$\frac{3x+7}{2} = \frac{x+7}{2-3} \dots \dots$ (SD1)

$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3} \dots \dots$ (SD22)

$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2}, f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3} \dots \dots$ (SD24)

RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xy} .

$\frac{y}{1} = \frac{3x+7}{2} \dots \dots \frac{3x}{3} = \frac{2y-7}{3} \dots f^{-1}(x) \dots \dots$ (SE54)

$y = \frac{3x+7}{2}, 2y = 3x+7, 3x = 2y-7, x = \frac{2y-7}{3} f(x)=y, f(y)=1, f(x)^{-1} \dots \dots$ (SE45)

$2y \frac{3x+7}{2} \cdot 2 \dots 2y = 3x+7, \frac{3x=2y-7}{3}, x = \frac{2y-7}{3} \dots \dots$ (SF39)

$f(x)=y, f(y) = \frac{3x+7}{2}, 2y = 2x+1, \frac{2y-7}{3} = x, 2y = \frac{3x+7}{2} \cdot 2$

$y = 3x+4, f(x) = 3x+4 \dots \dots$ (SF9), (SF31)

(SF45)

$$f(x) = 2y = \frac{3x+7}{2}, \quad 2y = 3x+7, \quad \frac{2y-7}{3} = \frac{3x}{3}, \quad y = \frac{2y-7}{3}, \quad f^{-1}(x) = \frac{2y-7}{3} \dots \dots (SF44)$$

$$2x = \frac{3x+7}{2}, \quad \frac{2x-7}{3} = \frac{3x}{3}, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+7}{3} \dots \dots (SF17)$$

RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xy} .

$$2y = \frac{3x+7}{2} \cdot 2, \quad 2y = 3x+7, \quad \frac{2y-3}{7} = \frac{3x}{3}, \quad x = \frac{2y-1}{3}, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{3} \dots \dots (SF5), (SF36)$$

$$f(x) = y, \quad y = 2 \frac{3x+7}{2} \cdot 2, \quad y = 3x+7, \quad y = \frac{3x}{3} + \frac{7}{3}, \quad y = \frac{7}{3}, \quad f^{-1}(x) = \frac{7}{3} \dots \dots (SF38), (SF15)$$

Autres Réponses :

$$f(x) = \frac{3x+7}{2}, \quad f(x) = \frac{-2x+7}{-3} = -2x+7=3, \quad =x=-5 \dots \dots (SA11)$$

$$\frac{3x+7}{2} = x, \quad 3(x+7) \cdot 2 = x, \quad 3x+21 \cdot 2 = x, \quad 3x+42 = x, \quad 14 = x \dots \dots (SA27)$$

$$\frac{3 \cdot (-1) - 7}{2} = \frac{-3-7}{2} = -5 \dots \dots (SB7)$$

$$f^{-1}(x) = 6x+7 \dots \dots (SF22), (SF49)$$

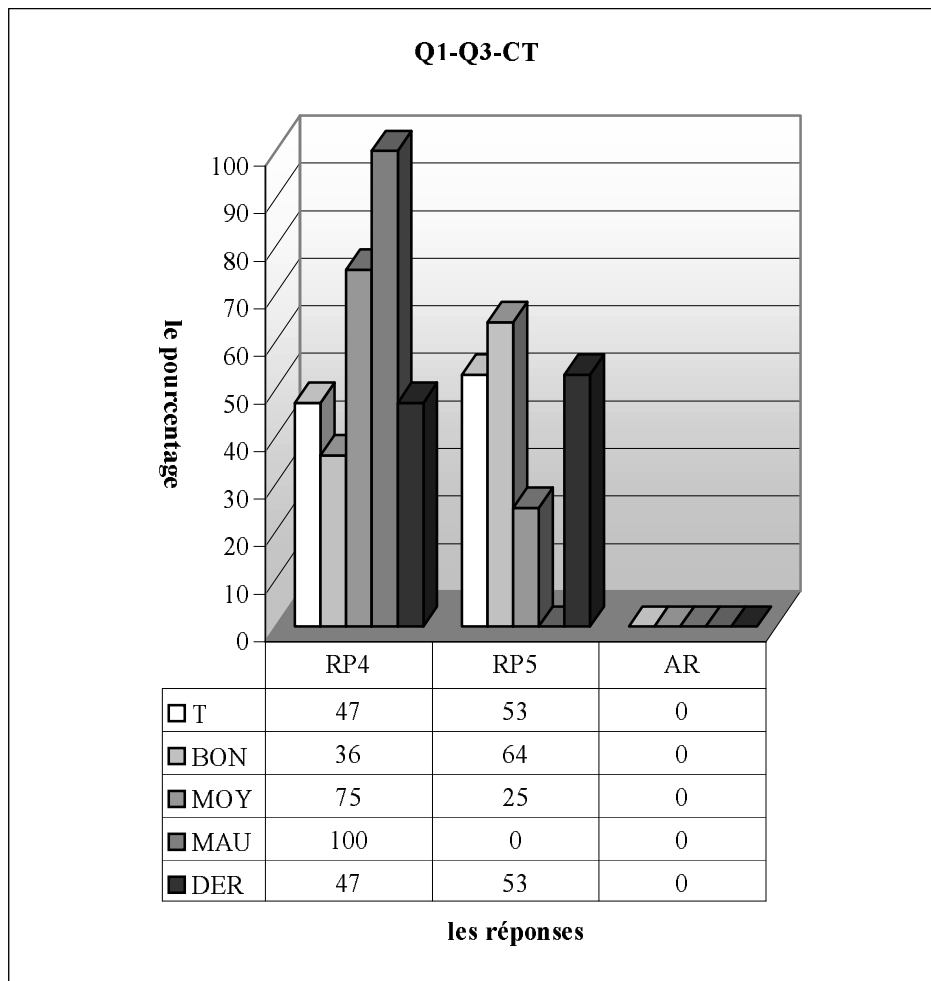
$$f^{-1}(x) = \frac{3x+7}{2} \cdot 2, \quad f^{-1}(x) = 3x+7 \dots \dots (SF42)$$

Non-Réponses :

Voici les résultats lycée par lycée :

2.3.1 Lycée Anatolien

Dans ce lycée j'attends que la recette R_a soit trop privilégiée par les élèves. Il me semble évident que les erreurs liées à cette recette se présenteront dans les résultats des élèves surtout chez les élèves en difficulté.

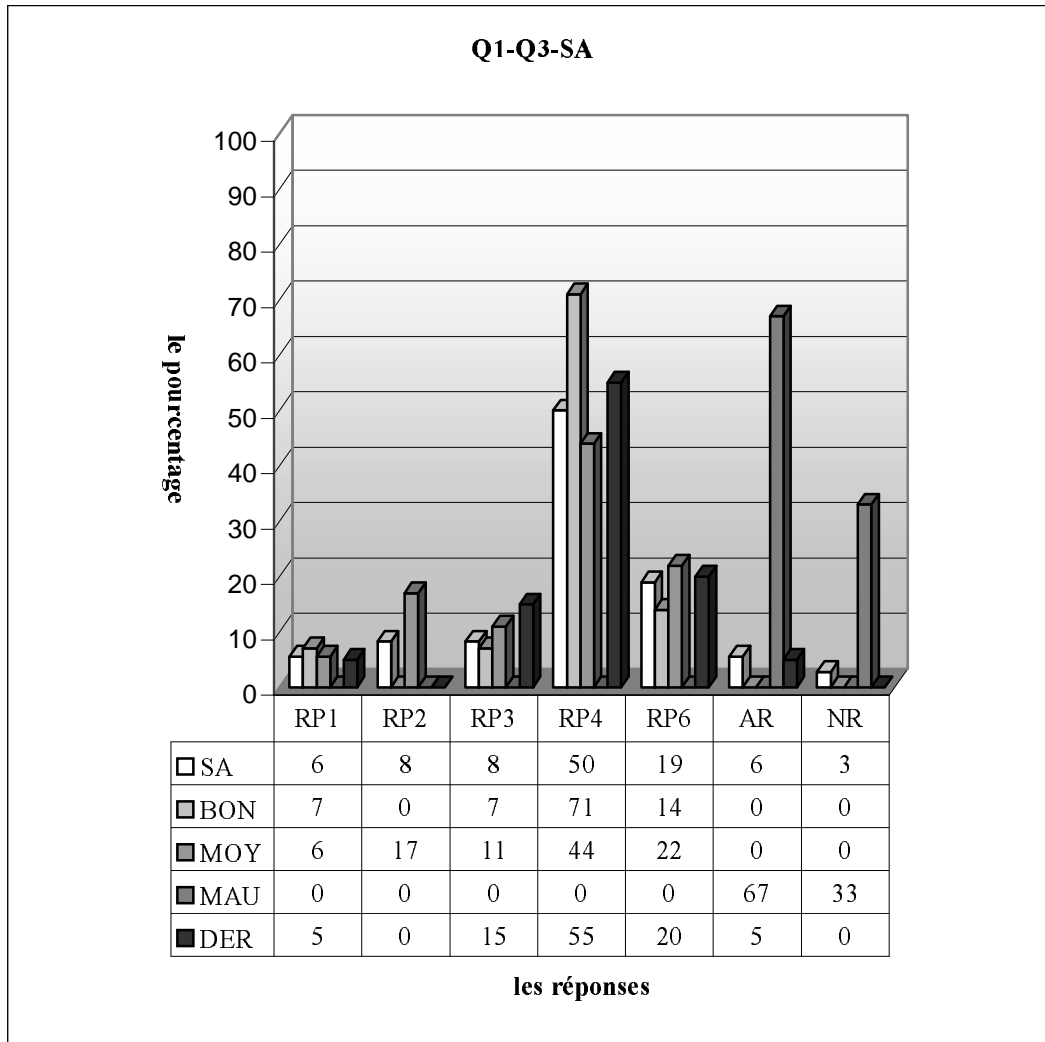


RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xy} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7 : réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xy} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xy} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Je commence par les résultats de la classe de terminale :

Comme le montre bien le tableau ci-dessous, en classe, le taux de réussite est de 100%. 47% des élèves trouvent la bonne réponse en utilisant la recette R_a . Tandis que les autres (soit 53%) utilisent la méthode « trouver x en fonction de y ». Comme la forme de la question ne permet pas facilement d'utiliser le phénomène, on peut donc dire que la plupart des élèves préfèrent être prudente en évitant des risques de ce dernier.

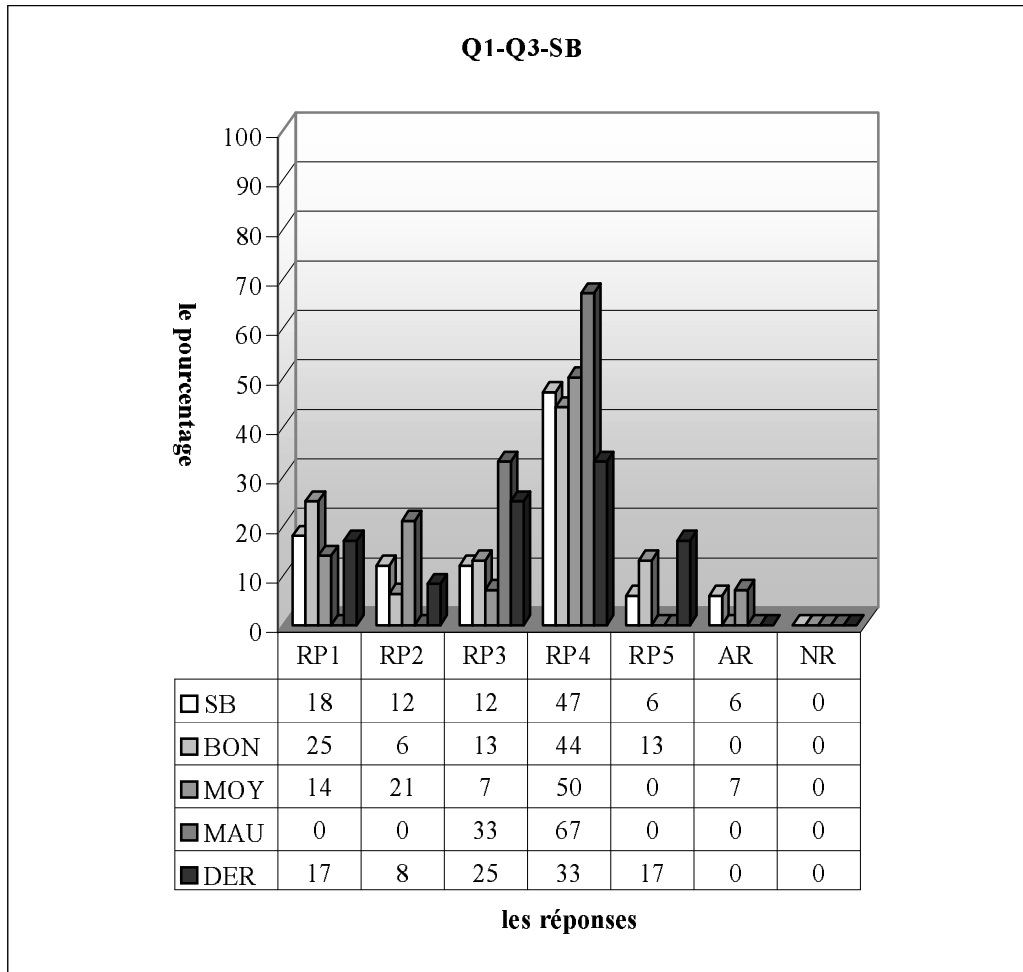
Quant aux résultats des élèves par niveau, une grande différence entre les moyens et bons s'observe par le taux des techniques privilégiées. Ainsi trois quarts des moyens favorisent la recette R_a contre 36% des bons. Et tous les mauvais utilisent aussi cette recette. Cela dit que plus le niveau des élèves descend, plus l'utilisation de la recette R_a monte.



RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xy} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7 : réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xy} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xy} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le tableau ci-dessus montre que la moitié des élèves fournissent une bonne réponse en utilisant la recette R_a . Si l'on compte les réponses RP4 et RP1 ensemble, le taux de réussite atteint 56% dans cette classe. Par contre il n'y a aucun élève qui trouve la bonne réponse à partir de la méthode « trouver x en fonction de y », 19% des élèves commettent cependant des erreurs liées à la recette R_a hors les réponses RP2 et RP3, 8,3% des élèves changeant seulement les places de 2 et 3. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui oublient de changer le signe de l'un des deux nombres. Si on prend en compte les réponses RP2, RP3 et RP6 ensemble, on constate donc que le pourcentage des erreurs provoquées par l'utilisation de la recette R_a atteint 36%. Par ailleurs, la question n'est pas abordée par un très petit nombre des élèves. Et environ 6% répondent autrement à la question.

Quant aux résultats des élèves par niveau, on observe que les élèves qui donnent la bonne réponse en utilisant la recette R_a sont plus nombreux chez les bons élèves. Ainsi 71% de ces derniers fournissent une réponse correcte contre 44% des moyens et aucune réponse correcte de la part des mauvais. Par contre, les erreurs liées à la recette sont plus fréquentes chez les moyens. La moitié d'entre eux commettent donc ce type d'erreurs contre 21% des bons. Ce qui signifie que l'utilisation des techniques plus pratiques comme recette R_a ne pose pas plus de problèmes chez les bons élèves. Une grande majorité des mauvais deviennent perplexes face à la question et un tiers d'entre eux ne donnent pas de réponse.



RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xy} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7 : réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xy} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xy} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

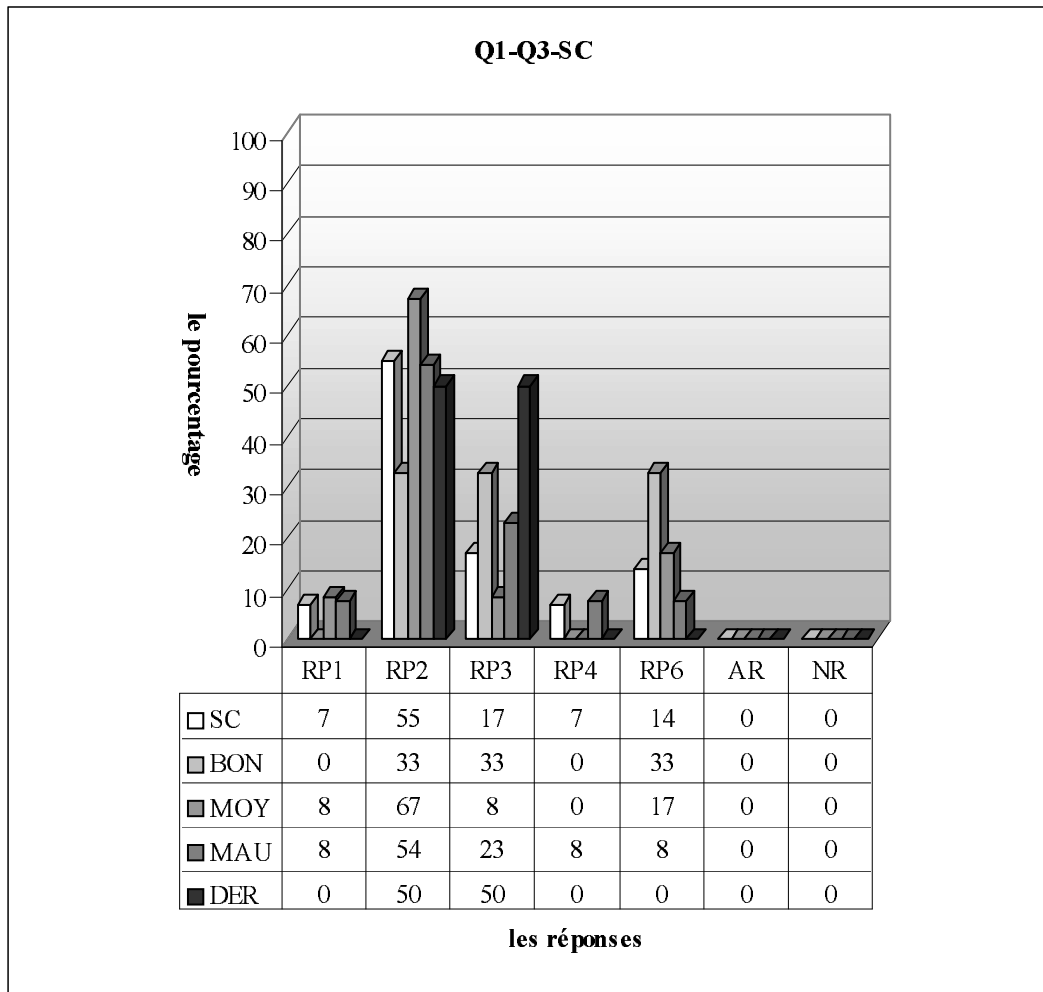
Selon le tableau ci-dessus, près de la moitié des élèves à partir de recette R_a et, environ 6% en utilisant la méthode « trouver x en fonction de y », fournissent une réponse correcte. Si l'on compte aussi la réponse RP1 comme réponse correcte, le taux de réussite monte jusqu'à 71%. Les erreurs relatives à la recette R_a sont cependant commises par 24% des élèves. Le fait que chaque élève réponde à la question et un très faible pourcentage d'autres réponses montre que la question est assez familière aux élèves.

Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate que le taux de réussite à cette question est plus élevé chez les bons en prenant en compte la réponse RP1. Ainsi 82% des bons fournissent une réponse correcte contre 64% des moyens et 67% des mauvais. Seuls 13% des bons trouvent cependant la bonne réponse à partir de la méthode plus mathématisée. Le taux des erreurs liées à la recette R_a augmente des bons aux mauvais. Alors 19% des bons commettent ces erreurs contre 28% des moyens et 33% des mauvais.

En ce qui concerne les résultats des élèves de dérsané, 67% des élèves donnent la bonne réponse. Et seuls 17% d'entre eux privilégient la méthode « trouver x en fonction de y ». Une bonne partie des élèves échouent cependant à cause d'une mauvaise-utilisation de la recette R_a .

2.3.2 Lycée Super

Dans ce lycée je n'attends pas non plus que la plupart des élèves soient fidèles à la démarche plus mathématisée.



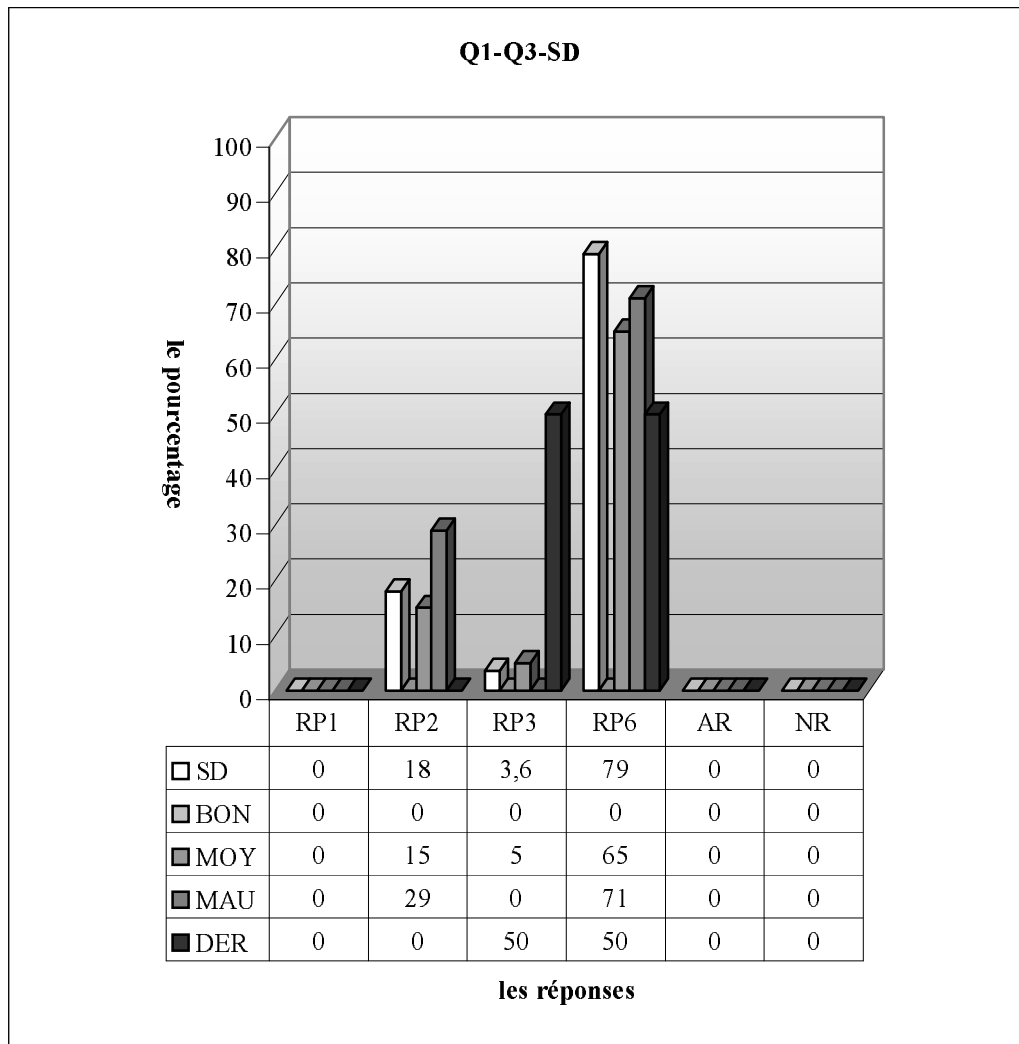
RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xy} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7 : réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xy} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xy} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Remarquons qu'en classe seuls 7% des élèves donnent la bonne réponse et ce taux double avec la réponse RP1. Par ailleurs, il n'y a aucun élève qui traite la question à partir de la méthode M_{xy} .

Quant aux erreurs commises par les élèves, elles sont bien entendu des erreurs relatives au phénomène. Ainsi plus de la moitié des élèves ne changent que les places de 2 et 3. De plus 17% changent les places mais ils oublient de changer le signe de l'un des deux. Enfin 14% des élèves commettent aussi des erreurs liées à la recette R_a hors les précédentes. Si l'on regroupe donc les erreurs du phénomène, on observe que 86% des élèves sont très loin de savoir utiliser cette recette. Il est cependant très intéressant de constater que tous les élèves abordent la question et qu'il n'y a aucune autre réponse. On peut donc dire que la question est assez familière aux élèves.

En ce qui concerne les résultats par niveau, seuls 8% des mauvais fournissent une réponse correcte. Et ce taux double avec la réponse RP1. Les erreurs relatives à la recette R_a sont plus fréquentes chez les bons. Alors chaque bon fait ces erreurs contre 92% des moyens et 85% des mauvais.

Chez les élèves de dérsané, il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse. Ils se distinguent en deux groupes. Une moitié changent seulement les places de 2 et 3 et l'autre change les places mais ils oublient de changer le signe de l'un des deux nombres.

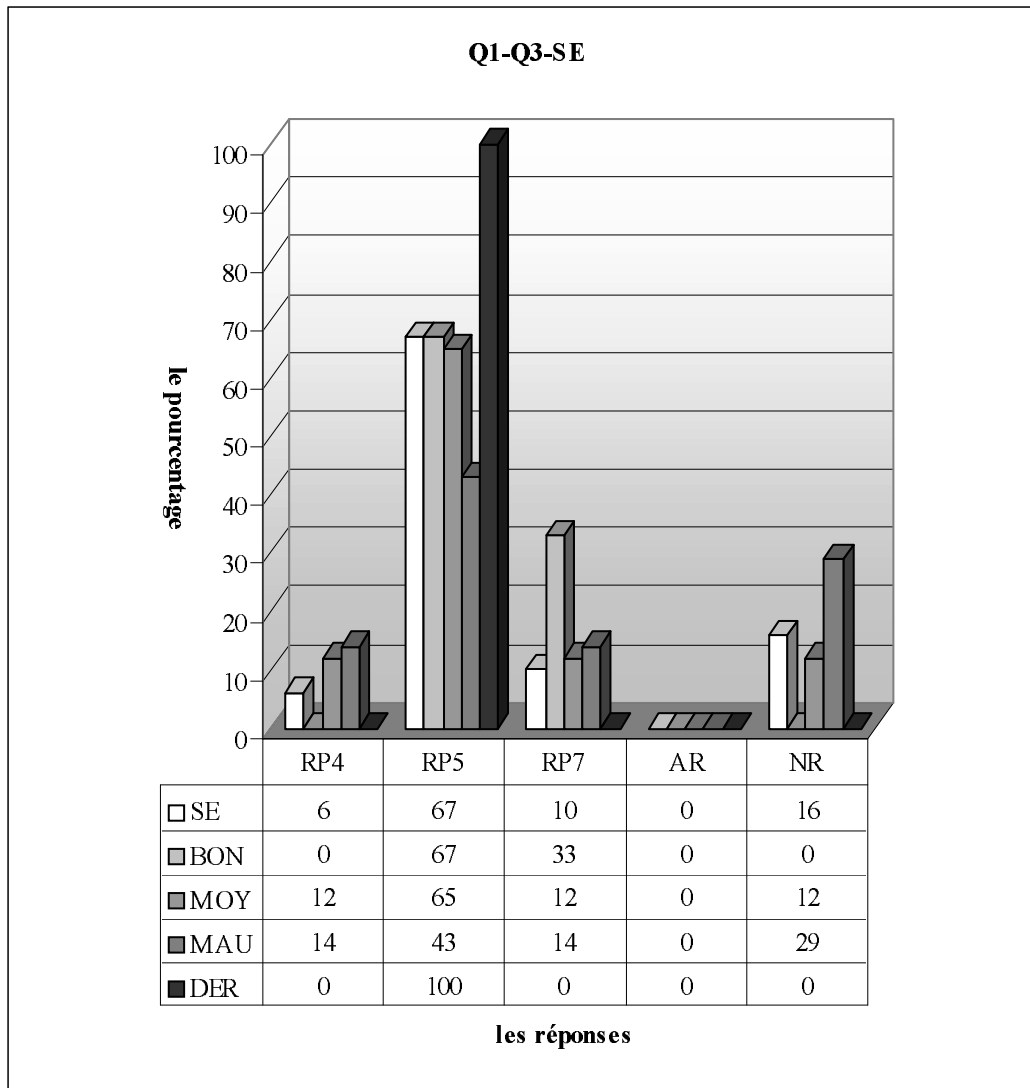


RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_b , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{sf} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7 : réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{sf} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{sf} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Quant à la deuxième classe du lycée Super, il est très intéressant de noter qu'aucun élève ne peut trouver la bonne réponse. Tous les élèves abordent utilitairement la question comme la classe précédente : 18% des élèves commettent l'erreur consistant à changer seulement les places. Alors que le taux des élèves qui traitent la question en changeant les places et un seul signe est de 36%. La grande majorité des élèves (79%) font des erreurs liées à la recette R_a hors les réponses RP2 et RP3. Par ailleurs, l'erreur consistant à changer seulement les places de 2 et 3 est plus fréquente chez les mauvais. Ainsi 29% d'entre eux commettent cette erreur contre 15% des moyens. Seuls 5% des moyens changent les places et un seul signe. 71% des mauvais commettent les erreurs liées à la recette R_a hors les réponses RP2 et RP3. Ce taux descend à 65% chez les moyens.

2.3.3 Lycée Normal

Je suppose que ce lycée se distinguera d'autres à partir de l'utilisation de la recette R_a et des erreurs commises par les élèves. Il me paraît que le taux de réussite ne doit pas être plus élevé que dans les autres.

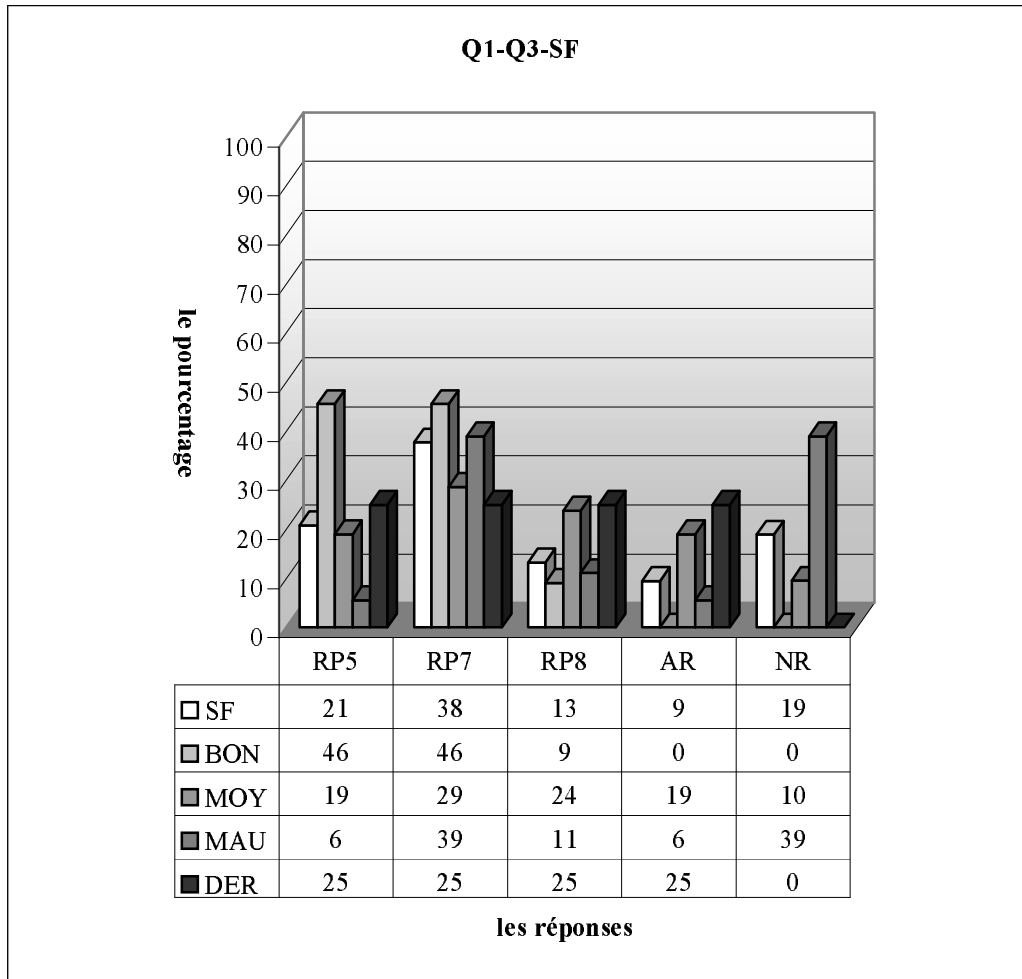


R

P1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xy} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7 : réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xy} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xy} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

En classe de seconde E, les élèves utilisent très majoritairement (78%) la longue procédure pour cette question, 67% d'entre eux peuvent trouver la bonne réponse. Avec les deux méthodes le taux de réussite monte jusqu'à 73,1% ce qui est contraire à mes attentes. 10% des élèves ne peuvent pas arriver à la fin dans la démarche plus mathématisée. Une bonne partie des élèves (16%) ne touchent pas la question.

Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate qu'aucun bon n'utilise le phénomène. Par contre 12% des moyens et 14% des mauvais trouvent la bonne réponse à partir de ce dernier. Les élèves qui fournissent une réponse correcte en privilégiant la méthode « trouver x en fonction de y » sont plus nombreux chez les bons (67% des bons contre 65% des moyens et 43% des mauvais). Par ailleurs un tiers des bons n'arrivent pas à terminer la résolution de la question dans la démarche plus mathématisée contre 12% des moyens et 14% des mauvais.



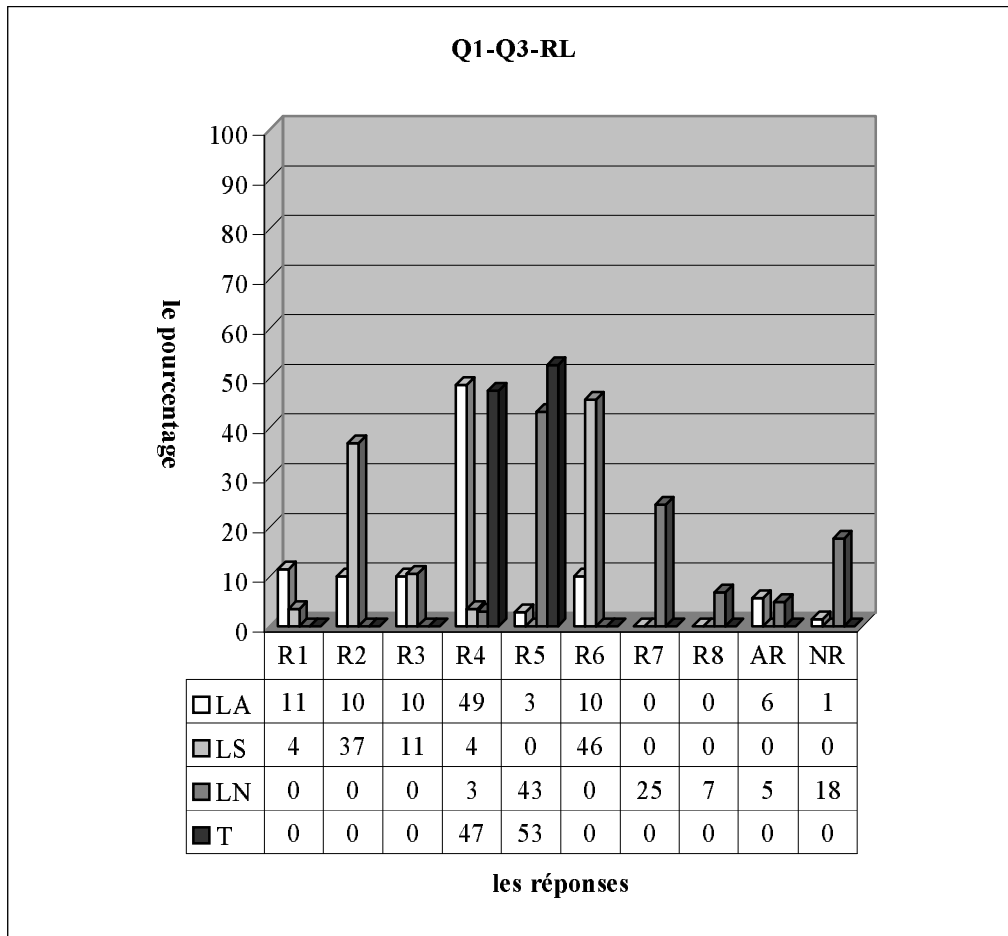
RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{sf} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{sf} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{sf} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Pour l'autre classe, le taux de réussite descend à 21%. Il n'y a aucun élève qui utilise la recette R_a . Environ 38% des élèves donnent des réponses incomplètes. C'est-à-dire qu'ils peuvent retirer x dans l'équation mais ils n'arrivent pas à passer au-delà de cette étape. Les erreurs algébriques sont cependant commises par 13,2% des élèves, environ 19% des élèves ne répondent pas à la question, tandis que le taux d'autres réponses est de 9%.

Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on observe que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Alors près de la moitié de ces derniers fournissent une réponse correcte contre 19% des moyens et 6% des mauvais. Par ailleurs, les réponses incomplètes sont moins nombreuses chez les moyens. 29% d'entre eux n'arrivent pas à terminer la résolution de la question contre 46% des bons et 39% des mauvais. Les erreurs algébriques sont plus fréquentes chez les moyens. Ainsi 24% d'entre eux commettent ces erreurs contre 9% des bons et 11% des mauvais.

2.3.4 Résultats des élèves par lycée

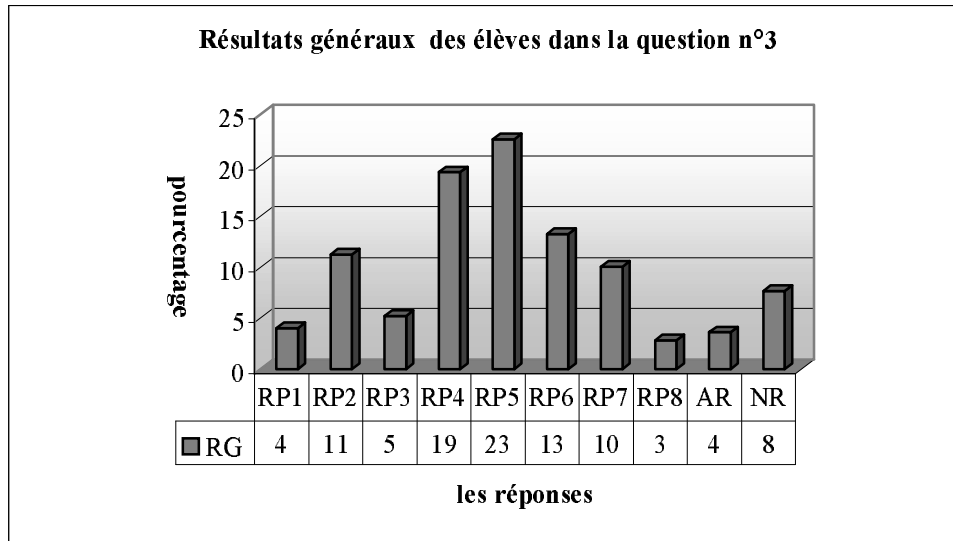
En ce qui concerne les résultats généraux des lycées :



RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xf} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7 : réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xf} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xf} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Si on ne prend pas en compte le très petit nombre des élèves du lycée Normal (environ 3%) qui utilisent la recette R_a et celui des élèves du lycée Anatolien qui privilégient la démarche partant sur la définition de la fonction inverse (presque 3%), il est très facile de dire que les lycées se distinguent en deux groupes différents suivant les méthodes préférées par les élèves pour traiter la question. Dans le lycée Anatolien et super la quasi-totalité des élèves abordent la question en changeant les places de 2 et 3 et leurs signes. Plus de la moitié des élèves dans le premier et 7% des élèves dans le deuxième trouvent la bonne réponse dans cette procédure. Dans le lycée Normal, près de la moitié des élèves ont du succès dans la démarche plus mathématisée. 25% d'entre eux ne peuvent pas arriver jusqu'au bout et environ 7% d'entre eux font des erreurs algébriques.

2.3.5 Résultats généraux des élèves



RP1 : l'élève change les places de 3 et 2 en même temps leurs signes, RP2 : l'élève change seulement les places de 3 et 2, RP3 : l'élève change les places de 3 et 2 et le signe de l'un des deux, RP4 (Procédure 2) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la recette R_a , RP5 (Procédure 1) : l'élève trouve la bonne réponse en utilisant la méthode M_{xy} , RP6 : les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a hors les précédentes (RP2, RP3), RP7: réponses incomplètes dans l'utilisation de la méthode M_{xy} , RP8 : erreurs algébriques liées à l'utilisation de la méthode M_{xy} , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Selon le tableau suivant, il y a 42% des élèves qui trouvent la bonne réponse, 23% d'entre eux privilégient la méthode M_{xy} , tandis que le taux des élèves qui arrivent correctement à résoudre la question en utilisant la recette R_a est de 19%. 33% des élèves ont échoué à cause de la mauvaise utilisation de la recette R_a (RP1+RP2+RP3+RP6). Ce taux descend à 13% chez les élèves qui échouent en utilisant la méthode M_{xy} (RP7+RP8). Si l'on ne qualifie pas les réponses incomplètes (RP7) d'erreurs, ce taux perd son importance et descend jusqu'à 3%. Par ailleurs, la question n'est pas abordée par 8% des élèves tandis que 4% donnent d'autres réponses.

2.3.6 Conclusion

Comme nous l'avons prédit lors de l'analyse a priori, la recette R_a est majoritairement utilisée dans les lycées anatolien et super. En revanche dans le lycée Normal il y a un très petit nombre des élèves qui utilisent cette recette. Par ailleurs, le nombre des élèves qui échouent en utilisant la recette R_a est plus important que celui des élèves qui échouent en utilisant la méthode M_{xy} cela nous amène à dire que l'utilisation de la recette R_a a plus de risque d'erreurs que celle de la méthode M_{xy} .

Du lycée Anatolien au lycée Super, nous constatons que le taux d'erreurs qui résulte de la mauvaise utilisation de la recette R_a augmente beaucoup (4% de bonnes réponses). Comme le niveau des élèves descend du lycée Anatolien au lycée Super, nous pouvons conclure que plus le niveau des élèves descend, plus le taux d'erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette augmente. En d'autres termes, ce type de situations (comme la recette R_a) pose beaucoup de problèmes chez des élèves en difficulté.

2.4 Question n°4

Dans cette question les élèves doivent mobiliser les connaissances liées à la fonction composée. Comme cette tâche n'est pas loin d'être routinière pour les élèves de tous les lycées, j'attends que le taux de réussite sera assez satisfaisant dans les classes.

J'ai classé les réponses des élèves comme suit :

RC (Procédure 1) : réponse correcte

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) &= 2x+1 && 2x+1 \text{ o } x+6= \\
 f(x+6) &= 2x+1 && =2(x+6)+1 \\
 f(x) &= 2(x+6)+1 && =2x+12+1 \\
 &= 2x+12+1 && =2x+13 \dots \dots (SA36) \\
 &= 2x+13 \dots \dots (SA36) && =2x+13 \dots \dots (SB2) \\
 f \circ g(x) &= 2(x+6)+1 = 2x+12+1 = 2x+13
 \end{aligned}$$

RP1 (Procédure 4) : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x.

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) &= f(x+6) = 2x+6+1 = 2x+7 \\
 f \circ g(x) &= 2x+7 \\
 f \circ g^{-1}(x) &= \frac{x-7}{2}
 \end{aligned}$$

(SA34) met x+6 dans la fonction à la place de x sans parenthèse.

RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g⁻¹ ».

$$\begin{aligned}
 f \circ g(x) &= 2(x-6)+1 \\
 &= 2x-12+1 \\
 &= 2x-11 \dots \dots (SB8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) &= f(x-6) = 2x+1 \\
 &= 2(x-6)+1 \\
 &= 2x-12+1 \\
 &= 2x-11 \dots \dots (SA8), (SA10), (SA18)
 \end{aligned}$$

RP3 (Procédure 3) : l'élève ne peut pas utiliser ensemble les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. Et il reste dans le cadre algébrique. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions.

$$\begin{aligned}
 f \circ g(x) &= 2x+1 - x+6 \\
 &= 3x+7 \dots \dots (SF14), (SF16)
 \end{aligned}$$

L'élève écrit le signe de moins. Malgré cela il fait l'addition.

f(x)=2x+1, g(x)=x+6, f(x+6)=2x+1, l'élève enlève la fonction et il résout une équation en supprimant l'un des x, f(x)=2x-5... (SB13), (SB15)

RP4 : l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre.

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) \text{ donc } f(x) &= 2(x+6)+1, f(x) = 2x+12+1, 12-1=2x, \frac{-13}{2} = \frac{2x}{2} \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{-13}{2} + 6\right) = 2 \cdot \frac{6}{2} + 6 + 1 = 13 + 6 + 1 = 20 \dots \dots (SA6)
 \end{aligned}$$

$$2x+1=2x+12+2$$

$$=2x+14$$

$$x=14 \dots \dots \dots (SB7)$$

RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} ».

$$f(g(x)), f(x+6)=2(x+6)+1, f(x+6)=2x+12+1, f(x+6)=2x+13$$

$$f(x)=2(x-6)+13, f(x)=2x-12+13, f(x)=2x+1 \dots \dots (SB22),(SB23)$$

$$f(g(x))=$$

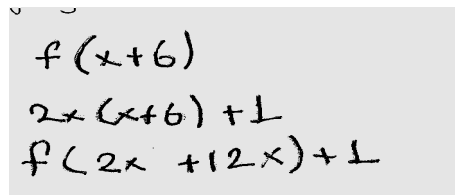
$$f(x+6)=$$

$f(x+6)=2(x+6)+1, f(x+6)=2x+12+1, f(x)=2(x-6)+13, f(x)=2x+1$, l'élève dit que quand on simplifie la fonction $f(g(x))$, on obtient la fonction f. Comme la fonction f est précisée, le résultat est pareil... ..(SA25),(SA23)

RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f .

$$f(x+6), 2(x+6)+1, fog(x)=2x^2+12x+1, fog(x)=14x+1 \dots \dots (SF19)$$

Autres Réponses:



(SF7),(SF17),(SF24)

$$f(2x+1)=x(2x+1)+6=2x+6, fog=2x+6 \dots \dots (SF38),(SF15)$$

$$f:R \rightarrow R, f(x)=2x+1; g:R \rightarrow R g(x)=x+6$$

$$2x+1 = \text{pour } x=2, 2 \cdot 2+1=5, x+6=9+6=11 \dots \dots (SB19)$$

$$f\left(\frac{x+6}{6}\right)=\frac{0}{6}, f(x)=\frac{0}{6}, 2x+1=\frac{0}{6}=2x+1 \cdot 6=0, 2x=-6, x=-3 \dots \dots (SB6)$$

$$f(g(x))=f(x+6), \frac{f(2x+1)}{2+1}=\frac{0}{2+1} \dots \dots (SB16)$$

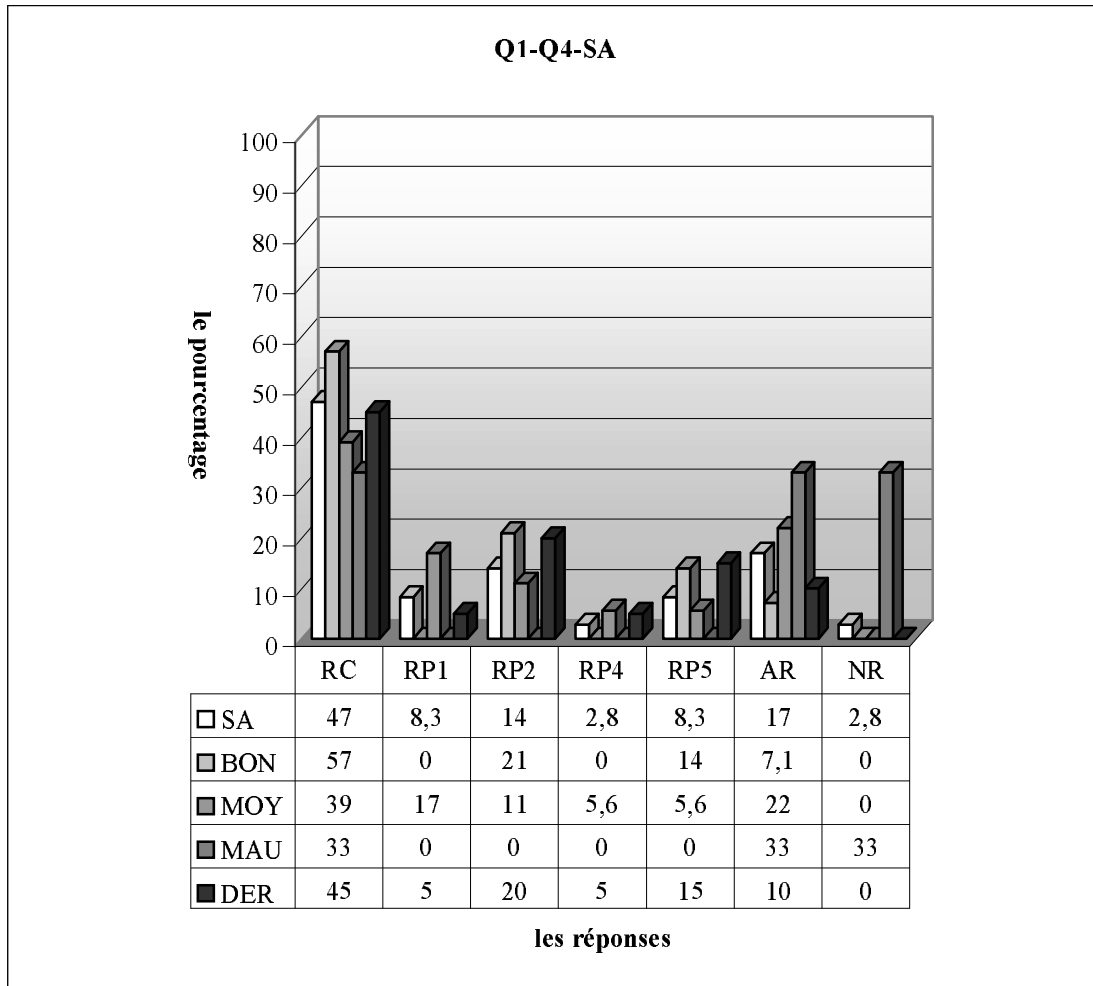
Non-réponses:

Maintenant je vais présenter les résultats des élèves :

2.4.1 Lycée Anatolien

Je n'attends pas de grande surprise dans les réponses des élèves. La question n'offre pas beaucoup de liberté aux élèves pour privilégier les techniques plus courtes dans une perspective utilitaire. C'est pour cela que les réactions des élèves seraient identiques à celles des autres lycées. Je crois que la majorité des élèves pourront trouver la bonne réponse sans peine.

En voici les tableaux :

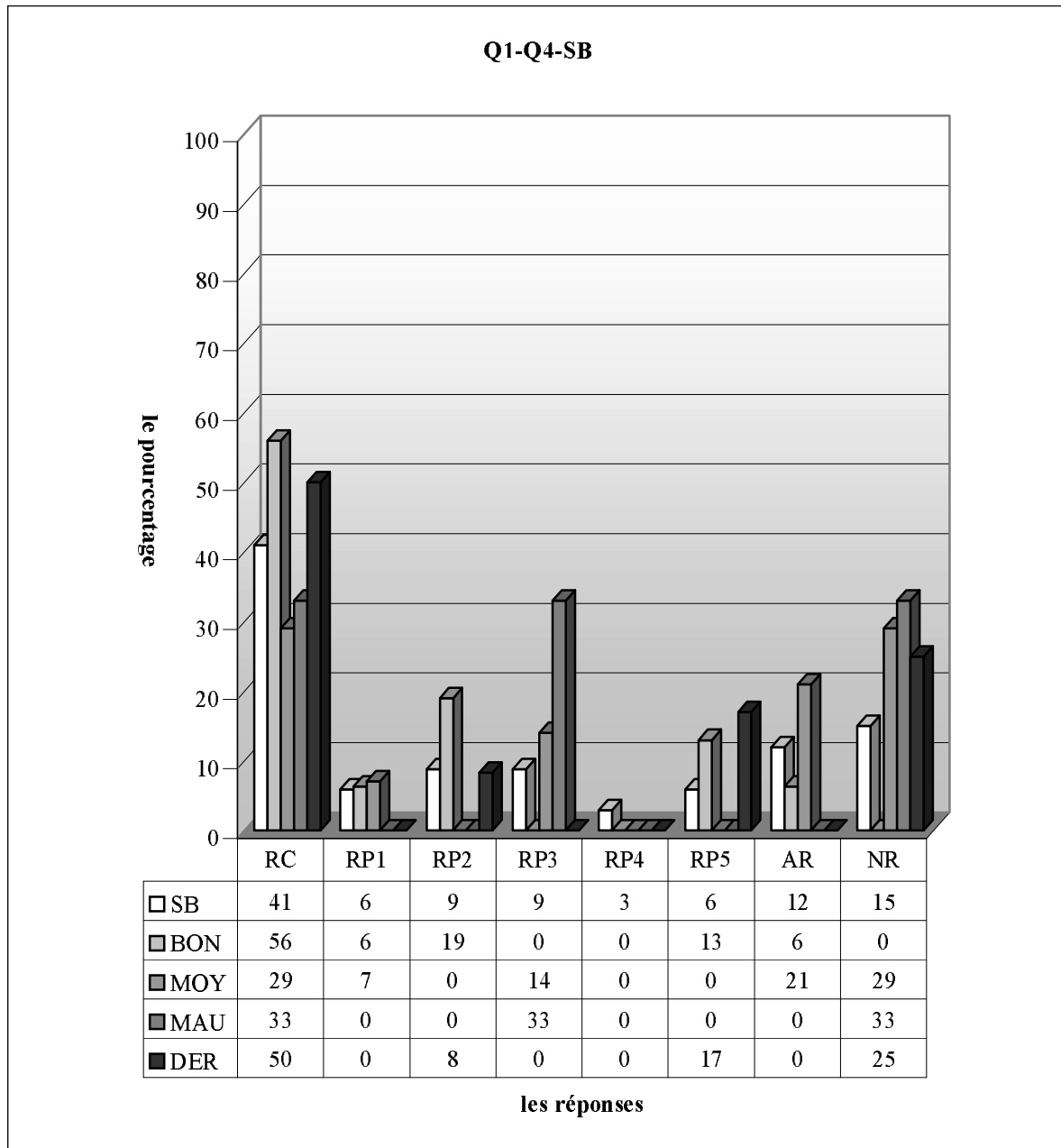


RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x , RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f : il obtient la fonction « $f \circ \text{fond } g^{-1}$ », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g . Ensuite il trouve la fonction « $f \circ g \text{ de } g^{-1}$ », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f , AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe, le taux de réussite n'est pas satisfaisant. 47% des élèves donnent donc la bonne réponse, ce qui est contraire à mes attentes. Une bonne partie des élèves (14%) trouvent d'abord l'inverse de g et puis il la met à la place de x dans la fonction f . 8,3% des élèves trouvent la fonction composée de f et g mais ils ne s'arrêtent pas là. De plus ils trouvent la fonction « $f \circ g \text{ de } g^{-1}$ ». Par ailleurs, l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x est commise par 8,3% des élèves. Un faible pourcentage des élèves ne donnent pas de réponse. Tandis que le taux d'autres réponses est de 17%. On peut donc dire que la question n'est pas a priori considérée comme difficile par ces élèves.

Si l'on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Ainsi plus de la moitié des bons fournissent une réponse correcte contre 39% des moyens et 33% des mauvais. L'erreur consistant à mettre seulement x à la place de x (17%) et celle qui consiste à égaliser la fonction à zéro (6%) sont uniquement réservées aux moyens. Les élèves qui composent la fonction inverse de g avec la fonction f sont plus nombreux chez les bons. Alors 21% d'entre eux commettent cette erreur contre 11% des moyens et il n'y a aucune réponse pareille chez les mauvais. Par ailleurs, 14% des bons commettent l'erreur consistant à trouver la fonction « $f \circ g \text{ de } g^{-1}$ ». Cette erreur atteint 6% chez les moyens et un pourcentage nul chez les mauvais. Il est cependant normal que les élèves qui deviennent perplexes face à la question soient plus nombreux chez les mauvais. 33% de ces derniers répondent autrement à la question contre 22% des moyens et 7% des bons.

En ce qui concerne les élèves de dérsané, 45% trouvent la bonne réponse. L'erreur qui consiste à composer l'inverse de la fonction g avec la fonction f est plus fréquente chez ces élèves (20%). 5% d'entre eux mettent seulement x à la place de x dans la fonction f . Ce taux est aussi valable pour les élèves qui égalisent la fonction à zéro tandis que le taux des élèves qui trouvent la fonction « $f \circ g \circ g^{-1}$ » est de 15%.



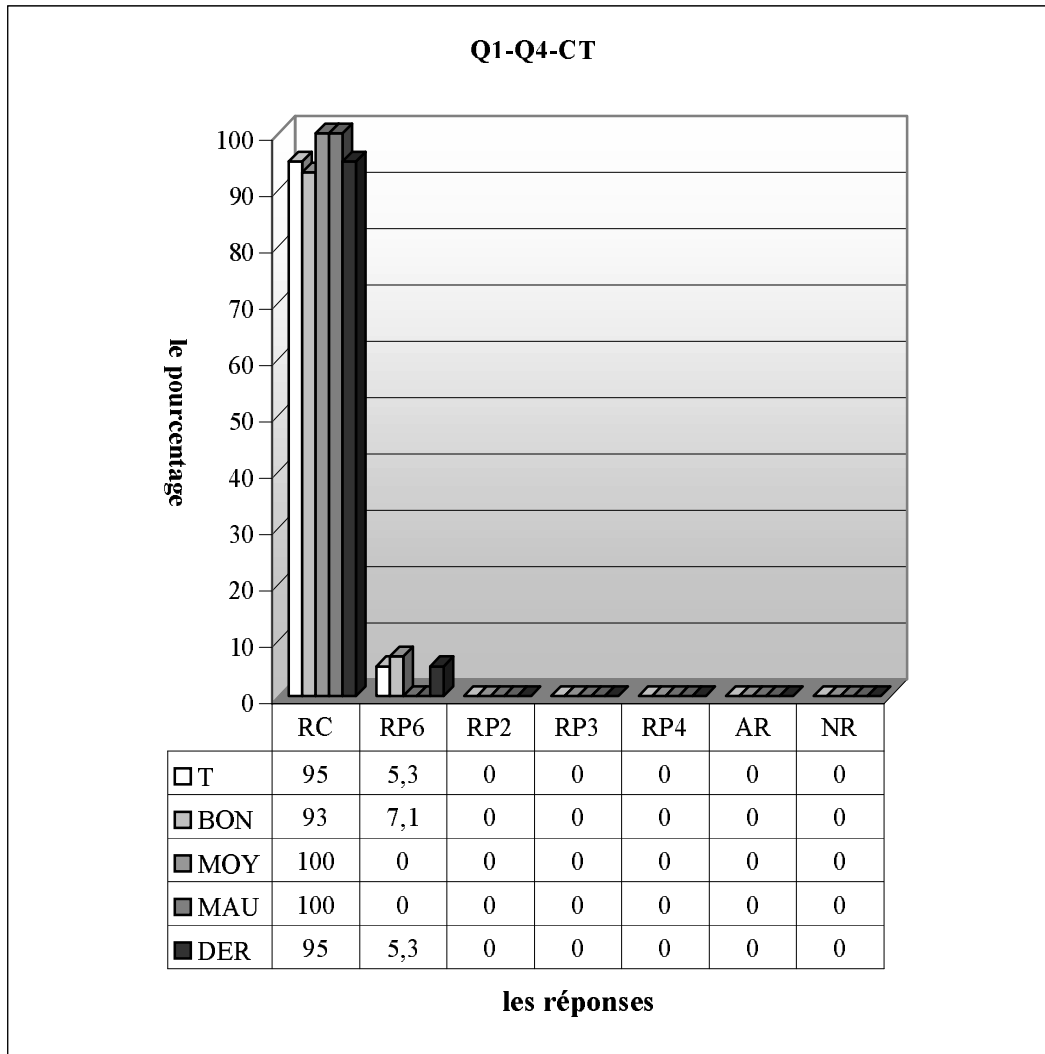
RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x , RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f . il obtient la fonction « $f \circ g^{-1}$ », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4 : l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g . Ensuite il trouve la fonction « $f \circ g \circ g^{-1}$ », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le tableau ci-dessus montre que 41% des élèves fournissent une réponse correcte. Et la question n'est cependant pas abordée par une bonne partie des élèves (15%). Environ 9% des élèves ne peuvent pas passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel alors ils prennent l'opération de la composition comme l'addition, la soustraction ou une équation. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui composent la fonction f et l'inverse de g . L'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x »

est commise par 6% des élèves. Tandis qu'un très petit nombre égalisent la fonction composée à zéro et ils trouvent donc un nombre.

Il n'est pas très étonnant de constater que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Ainsi plus de la moitié des bons élèves fournissent une réponse correcte contre 29% des moyens et 33% des mauvais. L'erreur consistant à composer la fonction inverse de g et la fonction f (19%) et celle qui consiste à trouver la fonction « $f \circ g \circ g^{-1}$ » (13%) sont uniquement réservées aux bons. Une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le pourcentage de l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x (6% des bons contre 7%). Ce type d'erreurs est totalement absent chez les mauvais.

Par ailleurs, le taux de réussite monte un petit peu chez les élèves de dérsané. Alors la moitié de ces derniers donnent la bonne réponse. Par contre un quart des élèves ne répondent pas à la question. Le pourcentage des élèves qui trouvent la fonction « $f \circ g \circ g^{-1}$ » atteint 17%.

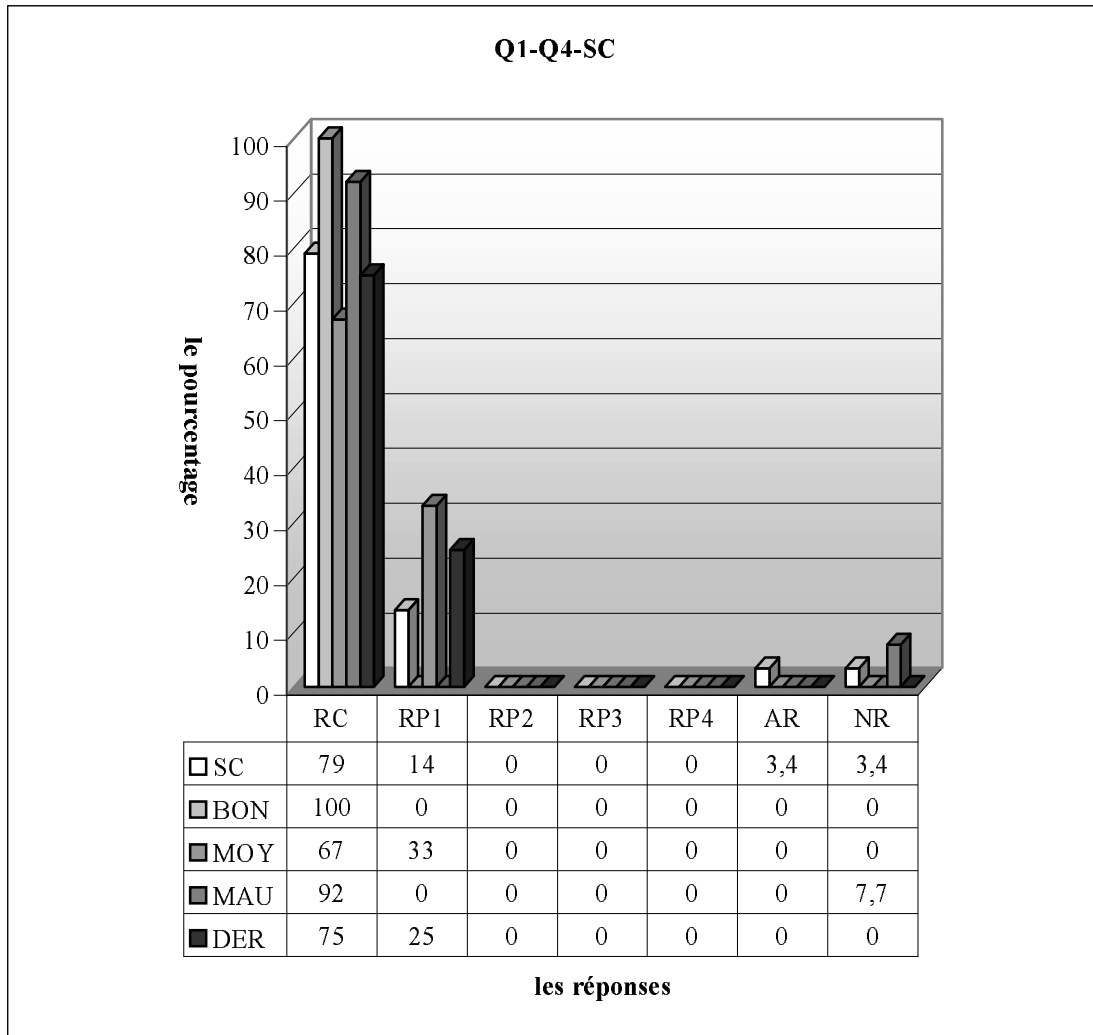


RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x , RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f . il obtient la fonction « $f \circ g \circ g^{-1}$ », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4 : l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g . Ensuite il trouve la fonction « $f \circ g \circ g^{-1}$ », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f , AR : autres réponses, NR : non-réponses

En ce qui concerne la classe de terminale, à part un élève qui a commis une erreur de calcul, tous les élèves trouvent la bonne réponse.

2.4.2 Lycée Super

Dans ce lycée, je suppose aussi que la question ne posera pas beaucoup de problèmes aux élèves et que le taux de réussite sera donc plus élevé.



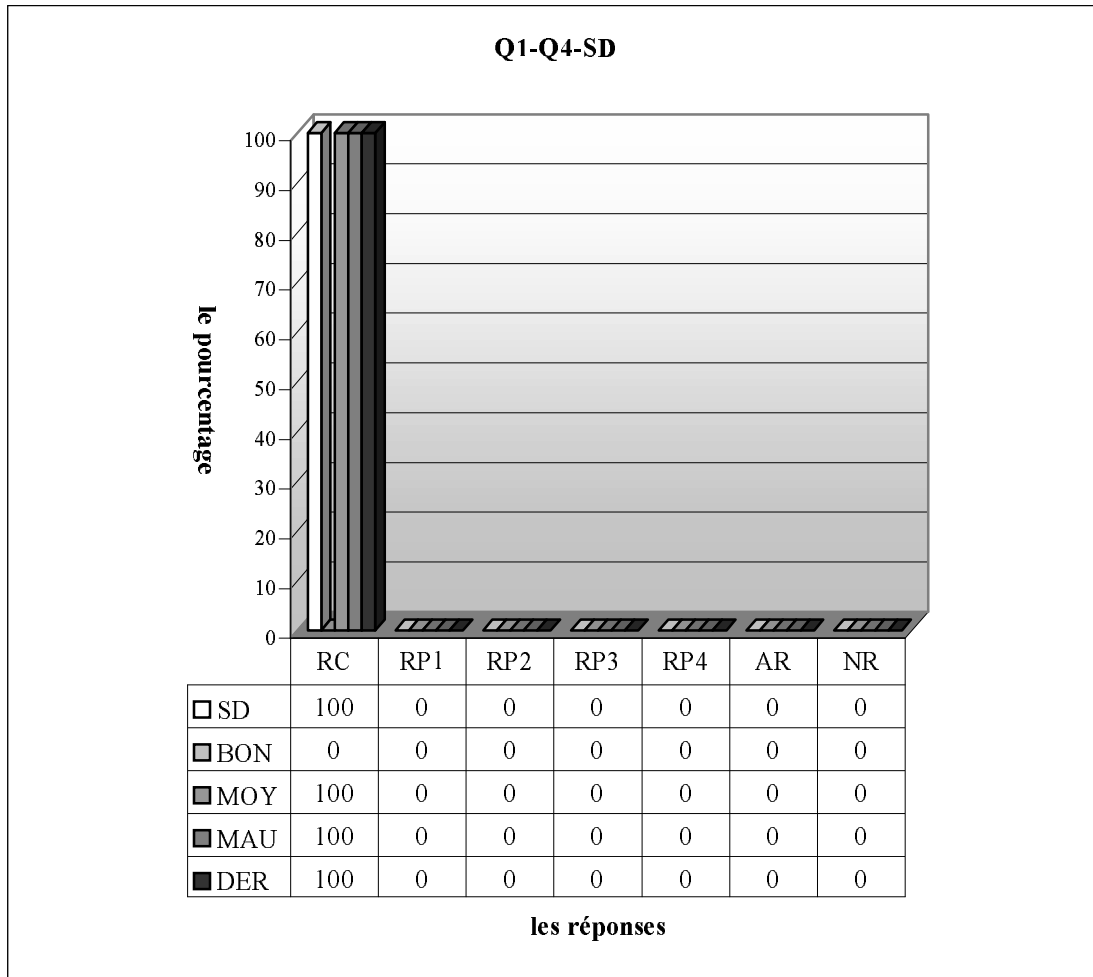
RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « f rond g⁻¹ », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g⁻¹ », RP6 : l'élève juxtapose x et x+6 dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Remarquons qu'en classe les élèves trouvent majoritairement (79%) la bonne réponse. L'erreur consistant à négliger la parenthèse est cependant commise par 14% des élèves. Environ 3% des élèves ne répondent pas à la question. Ce taux est aussi valable pour les autres réponses.

En regardant le pourcentage de réussite et le faible pourcentage d'autres réponses et non-réponse on peut donc dire que la question est assez familière aux élèves.

Quant aux résultats des élèves par niveau, on observe que chaque bon fournit une réponse correcte contre 67% des moyens et 92% des mauvais. Par ailleurs, l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x est uniquement réservée aux moyens avec un taux de 33%.

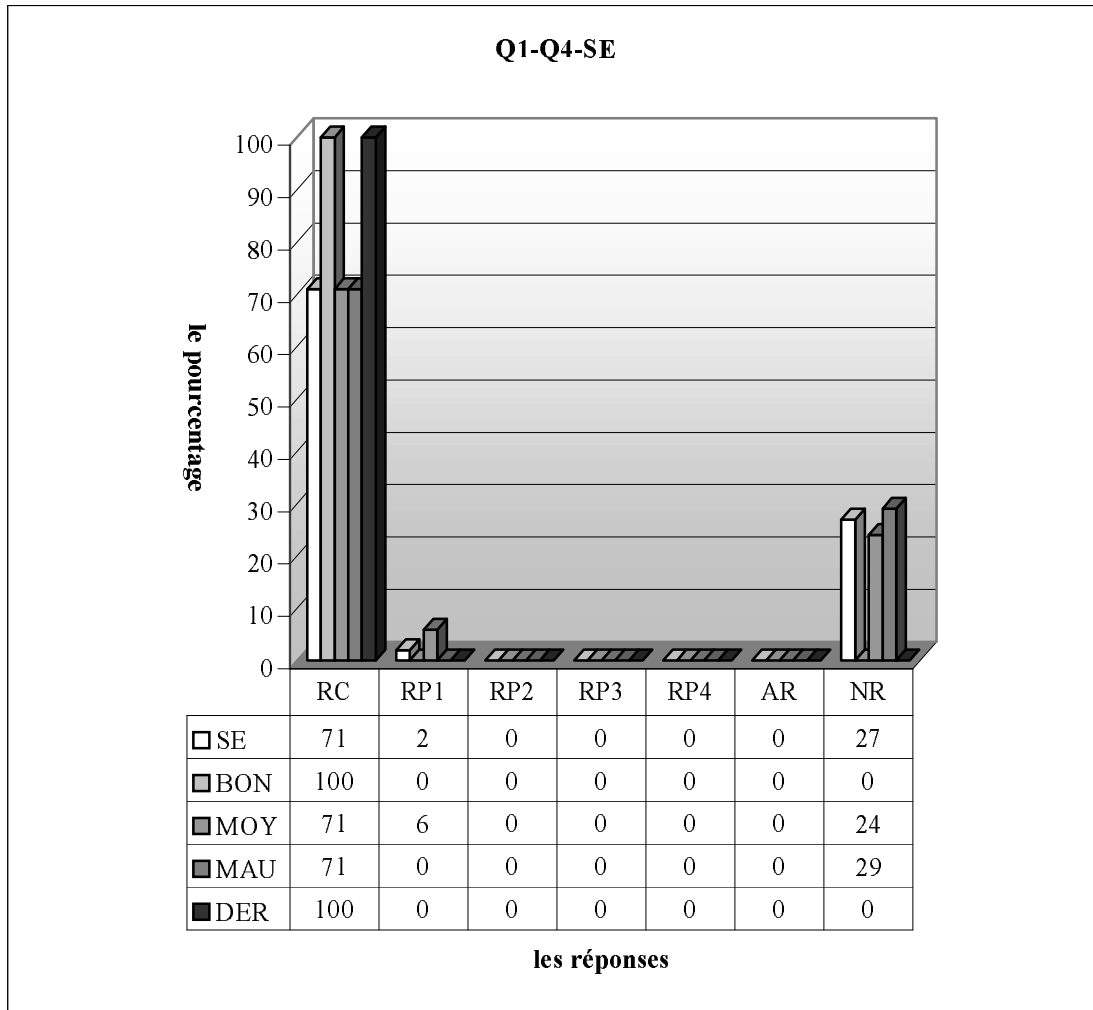
Le taux de réussite atteint 75% chez les élèves de dérsané et les élèves restants commettent l'erreur provoquée par mettre seulement x à la place de x.



RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x , RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f . il obtient la fonction « $f \circ g^{-1}$ », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g . Ensuite il trouve la fonction « $f \circ g^{-1}$ », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Comme le bien montre le tableau ci-dessus, en classe, tous élèves donnent la bonne réponse. On peut donc dire que la question est facile et très familière aux élèves.

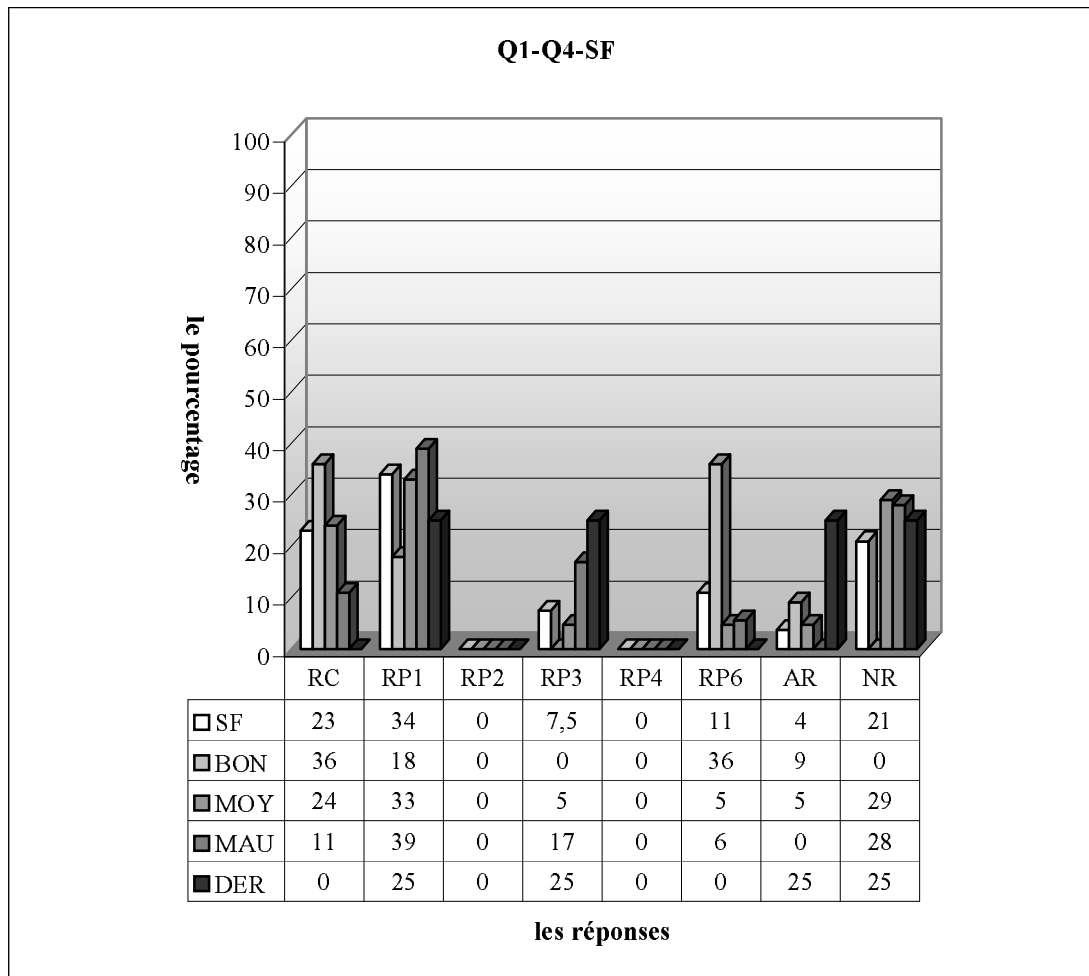
2.4.3 Lycée Normal



RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x, RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f. il obtient la fonction « frond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g. Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans la classe E, la bonne partie des élèves (27%) ne touchent pas la question et 2% d'entre eux commettent l'erreur qui consiste à ne pas faire attention à la parenthèse. Alors les restants (71%) donnent la bonne réponse, ce qui confirme à mon analyse a priori.

Si on regarde les résultats des élèves par niveau, on constate que chaque bon fournit une réponse correcte contre 71 des moyens et mauvais. Seuls environ 6% des moyens commettent l'erreur de parenthèse. Par ailleurs, tous élèves de dérsané trouvent la bonne réponse.



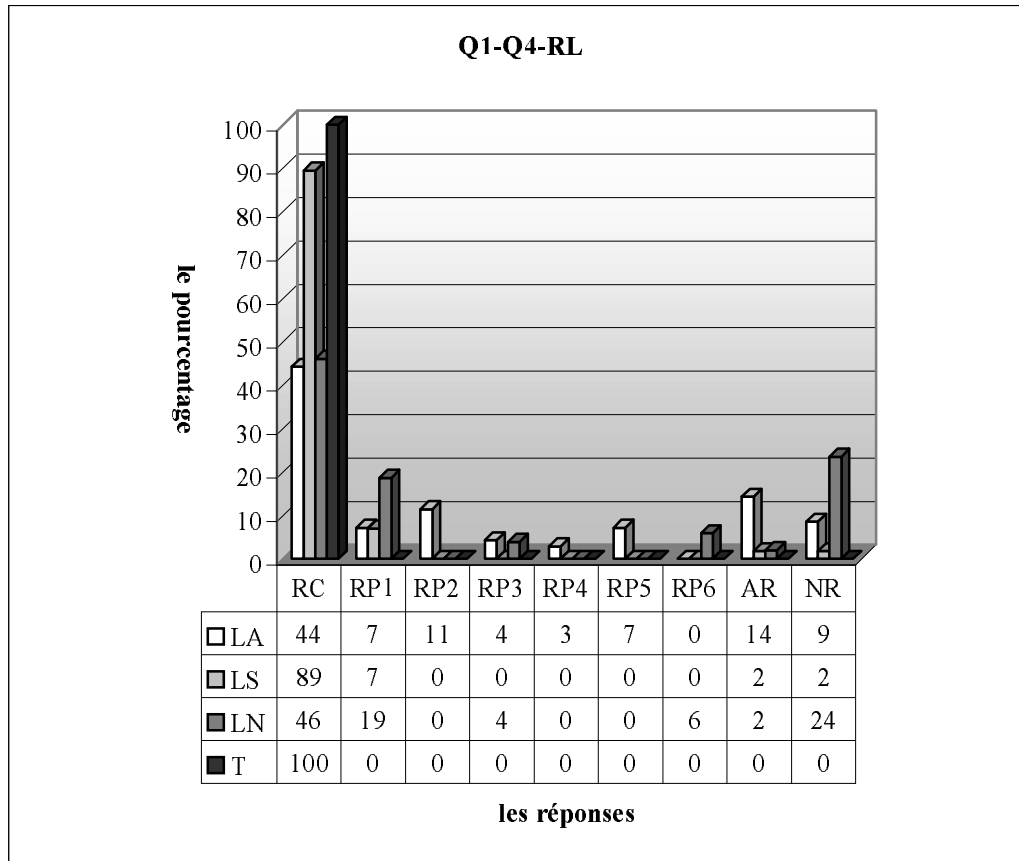
RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x , RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f . il obtient la fonction « frond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4 : l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g . Ensuite il trouve la fonction « fog de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Quant à la classe F, le taux de réussite descend jusqu'à 23% et la question n'est pas abordée par 21% des élèves. Par ailleurs, le pourcentage des élèves qui ont négligé la parenthèse est de 34%. Pour 7,5% des élèves il est difficile de faire co-habiter les deux cadres : algébrique et fonctionnel. L'erreur qui consiste à juxtaposer la fonction g et x dans la fonction f est commise par 11% des élèves.

Remarquons que le taux de réussite à cette question monte à 36% chez les bons élèves et ce taux atteint 24% chez les moyens et 11% chez les mauvais. Il est cependant très intéressant qu'aucun élève de dérsané ne fournisse une réponse correcte. L'erreur qui consiste à négliger la règle de parenthèse est plus fréquente chez les mauvais. Ainsi 39% d'entre eux commettent cette erreur contre un tiers des moyens et 18% des bons. Les élèves qui juxtaposent x et $x+6$ dans la fonction f sont plus nombreux chez les bons. Cette erreur est commise par 36% de ces derniers contre 5% des moyens et 6% des mauvais. Les mauvais ont plus de difficulté à utiliser les deux cadres ensemble : cadre algébrique et fonctionnel. 17% d'entre eux essaient de résoudre la question que dans le cadre algébrique contre environ 5% des moyens. Ce type d'erreurs est totalement absent chez les bons. Une très légère différence entre les moyens et mauvais s'observe par le taux de non-réponse. 29% des moyens et 28% des mauvais ne répondent donc pas à la question. Tandis que la question est abordée par tous les bons. Parmi les élèves de dérsané, on observe deux types d'erreur. L'erreur qui consiste à négliger la parenthèse et celle consistant à rester dans le cadre algébrique sont commises par un même taux des élèves (25%).

Maintenant les résultats des élèves suivant les lycées :

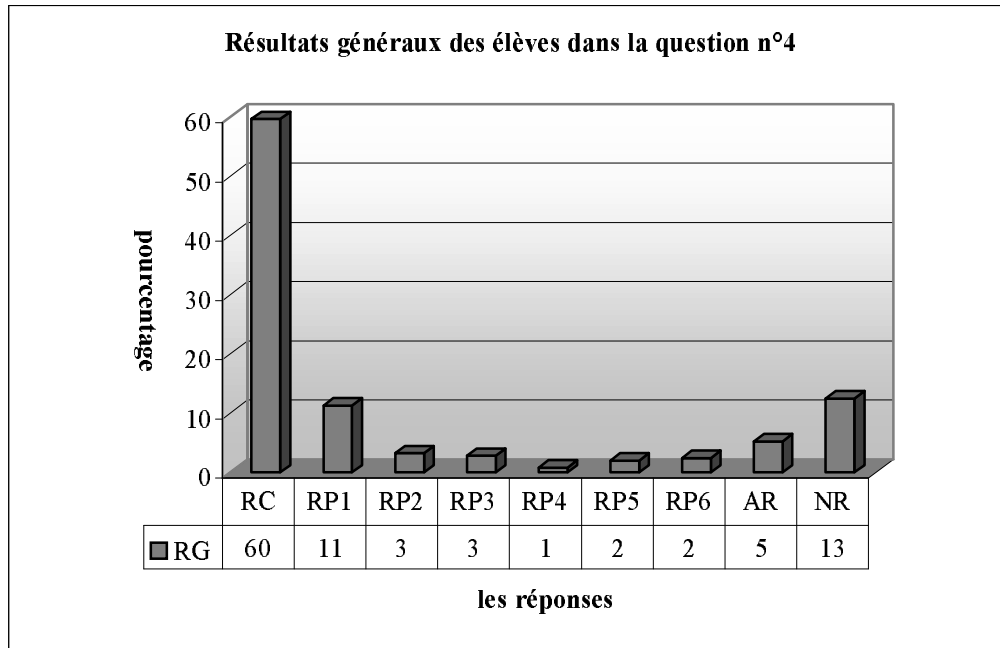
2.4.4 Résultats des élèves par lycée



RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x , RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f il obtient la fonction « f rond g^{-1} », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4 : l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g . Ensuite il trouve la fonction « f og de g^{-1} », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le taux de réussite et les erreurs commises par les élèves se différencient selon les lycées. Le lycée Anatolien et normal se rapprochent en ayant une réussite modeste (respectivement 44%, 46%). Tandis que le lycée Super obtient environ 89% de succès. L'erreur la plus fréquente est l'erreur qui consiste dans l'inattention de parenthèse dans les deux lycées, le lycée Normal (19%) et le lycée Super (7%). Dans le lycée Anatolien on peut rencontrer presque toutes les erreurs catégorisées sauf celle qui est classée dans la réponse RP7. 14% d'entre eux sont perturbés dans la résolution de la question. Le taux des élèves qui ne répondent pas à la question est plus élevé dans le lycée Normal que dans les autres (24% contre environ 2% dans le lycée Super et 9% dans le lycée Anatolien).

2.4.5 Résultats généraux des élèves



RC : réponse correcte, RP1 : l'erreur qui consiste à mettre seulement x à la place de x , RP2 : l'élève compose la fonction inverse de g avec la fonction f . il obtient la fonction « $f \circ g^{-1}$ », RP3 : l'élève ne peut pas articuler les deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel. Il fait l'addition, la résolution d'équation ou la soustraction au lieu de composer les fonctions, RP4: l'élève égalise la fonction composée à zéro et il trouve un nombre, RP5 : l'élève compose la fonction f et g . Ensuite il trouve la fonction « $f \circ g^{-1}$ », RP6 : l'élève juxtapose x et $x+6$ dans la fonction f , AR : autres réponses, NR : non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, la plupart des élèves trouvent la bonne réponse tandis que la question n'est pas abordée par 13% des élèves. L'erreur la plus fréquente est celle qui consiste à mettre seulement x à la place de x avec un taux de 11%. En ce qui concerne les autres erreurs, elles sont peu fréquentes, leurs taux varient de 1% à 3%. Par exemple, le taux d'erreurs qui consistent à composer l'inverse de g et f et celui d'erreurs consistant à ne pas utiliser deux cadres ensemble, sont de 3%, 5% des élèves répondent autrement à cette question.

2.4.6 Conclusion

Nous avons considéré dans l'analyse a priori que cette question aurait un taux de réussite assez élevé. Conformément à cette analyse a priori, en général la plupart des élèves résolvent correctement la question. Mais si on prend en compte les résultats des élèves par lycée, seul dans le lycée Super le taux de réussite est assez satisfaisant (89%). Dans les lycées anatolien et normal, il y a seulement près de la moitié des élèves qui donnent la bonne réponse et le taux de non-réponses est assez élevé dans le lycée Normal (24%). De plus les erreurs qui consistent à ne pas articuler deux cadres (cadre algébrique et cadre fonctionnel) ne sont pas aussi fréquentes que nous attendions (3%).

Par ailleurs, il y a des différences entre les erreurs commises par les élèves du lycée Anatolien et ceux du lycée Normal. Par exemple, ce sont les réponses RP1 et RP6 qui amènent 25% des élèves à échouer dans le lycée Normal. Ce type d'erreurs signale des lacunes théoriques profondes. En ce qui concerne le lycée Anatolien, 21% des élèves échouent en commettant les erreurs de RP2, RP4 et RP5. Ces erreurs sont peut-être dues à la confusion entre la démarche à suivre et celle d'autres questions. Comme nous l'avons déjà vu, dans un enseignement très proche du concours, entraîner des élèves en proposant beaucoup de questions qui portent sur plusieurs connaissances et leur faire connaître les types de questions du concours sont très importants. C'est pourquoi il est possible que ces élèves du lycée Anatolien confondent des démarches même s'il s'agit d'une question simple et isolée.

2.5 Question n°5

La question contient les deux questions précédentes dans le sens où les tâches sont à réaliser par les élèves. Mais elle est plus complexe que la précédente. C'est pourquoi j'attends que le taux de réussite soit moins élevé que dans la question précédente. Les élèves sont obligés de mobiliser les connaissances portant sur la fonction composée et l'inverse. Je pense avoir à peu près les mêmes réactions des élèves suivant les lycées.

Maintenant je présenterai les réponses des élèves en démontrant des erreurs. J'ai caractérisé 8 catégories des réponses :

RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte.

$$f(g(x))=6x+4, f(2x+1)=6x+4, f(x)=6\left(\frac{x-1}{2}\right)+4, f(x)=3x-3+4, f(x)=3x+1 \dots (SA4)$$

$$f(g(x))=6x+4, f(2x+1)=6x+4, f\left(2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+1\right)=6\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+4,$$

$$f(x-1+1)=\frac{6x}{2}-\frac{6}{2}+4, f(x)=3x+1 \dots (T10)$$

$$f(x)=mx+n, fog(x)=m(2x+1)+n=2mx+m+n, 2mx+m+n=6x+4, 2m=6 \Rightarrow m=3$$

$$m+n=4 \Rightarrow n=1, f(x)=3x+1 \dots (T12)$$

RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g.

$$fog(x)=f(g(x))$$

$$f(2x+1)=6x+4$$

$$f(x)=6\left(\frac{x+1}{2}\right)+4$$

$$= \frac{6x+6+8}{2} = \frac{6x+14}{2} = \frac{2(3x+7)}{2} = 3x+7 \dots (SA22)$$

$$fog(x)=6x+4, g(x)=2x+1$$

$$f(g(x))=6x+4, f(2x+1)=6x+4, \frac{x+1}{2}=6\left(\frac{x+1}{2}\right)+4, f(x)=\frac{6x+6+4}{2}, f(x)=6x+8 \dots (SB5)$$

$$g^{-1}(x)=2x-1, f(x)=6.2x-1+4, f(x)=12x-6+4, f(x)=12x-2 \dots (SC29), (SC28)$$

RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x).

$$f(g(6x+4)), f(g(6x+4))$$

$$2.6x+4+1=12x+9 \dots (SB20)$$

$$fog(x)=g(x)=2x$$

$$=2(6+x4)+1$$

$$12x+8=1, 12x+9 \quad x=12-9 \Rightarrow x=3 \dots (SF31), (SF40), (SF21)$$

RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble.

(SB27)

$$fog(x)=6x+4, g(x)=2x+1, fog(x)=4x+3 \text{ or } 2x+1=6x+4,$$

$$f(x)=2x+1=6x+4, f(x)=4x+3 \dots (SC9), (SC7), (SC6)$$

$$6x+4=f(2x+1), 6x+4-2x+1=f(x), 4x+4=f(x), f(x)=4x+5 \dots (SE51), (SE50)$$

$$f(g(x))=6x+4$$

$$\frac{x-1}{2}=6x+4, 12x+4=x-1, 12x-x=-4-1, \frac{11x}{11}=\frac{-5}{11}, x=\frac{5}{11},$$

$$=6\left(\frac{-5}{11}\right)+4 = \frac{-30}{11} + \frac{44}{11} = \frac{-30+44}{11}, f(x)=\frac{14}{11} \dots (SA6)$$

$$f(g(x))=6x+4, f\left(\frac{2x+1}{2x+1}\right)=\frac{6x+4}{2+1}=f(x)=\frac{6x+4}{2+1}=6x+2 \dots (SB6)$$

$$\begin{aligned}
 fog(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(2x+1) \\
 f(x) &= 6x+4-2x-1 \\
 f(x) &= 4x-3 \dots \dots \dots (SC24) \\
 fog &= fog \\
 6x+4 &= f(2x+1), f=2x+1-6x+4, f(x)=-4x+5 \dots \dots \dots (SE1) \\
 fog(x) &= 6x+4, \\
 6x+4 &= x(2x+1), \frac{6x}{2x}+4-1, 3x+3 \dots \dots \dots (SF5), (SF25), (SF9) \\
 Si fog &= 6x+4, g(x)=2x+1, f_x = \frac{6x+4}{2x+1} = \frac{3x+4}{x+1} \dots \dots \dots (SF42)
 \end{aligned}$$

RP4 (Procédure 4 :erreurs de mission inaccomplie): l'élève trouve la fonction « fog de g(x) ».

$$\begin{aligned}
 fog(x) &= f(g(x)) = f(2x+1) = 6 \cdot (2x+1) + 4 \\
 &= 6 \cdot 2x + 4 \\
 f(x) &= 12x + 4
 \end{aligned}$$

(SF46)

$$\begin{aligned}
 f(g(x)), f(2x+1), f=6 \cdot 2x+1+4, f=12x+5 \dots \dots \dots (SB14) \\
 fogog, \text{ l'élève barre les deux } g, 6x+4 \text{ o } 2x+1, 6(2x+1)+4, 12x+6+4, 12x+10 \dots \dots (SC13) \\
 fog=6x+4, g(x)=2x+1, (fog)=3(2x+1+4), f(x)=\dots \dots \dots (SF39) \\
 (fog)(x)=(g(x))=(2x+1)+4=2x+5 \dots \dots \dots (SF34)
 \end{aligned}$$

RP5: erreurs de calcul.

$$\begin{aligned}
 f(2x+1) &= 6x+4, f(x) = 6\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4 = \frac{6x+6}{2} + 4 = 6x+7 \dots \dots (SB15) \\
 f(g(x)) &= 6x+4, g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}, 6 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) + 4 = \frac{6x-6}{2} + \frac{4}{2} = 6x-6+8 = 6x-14 \dots \dots (SA17) \\
 f(g(x)) &= f(2x+1) = 6x+4, f(x) = \frac{6x-1}{2} + 4 = \frac{6x-6+8}{2} = \frac{6x+2}{2} = 3x+2, \text{ l'élève simplifie } 6 \text{ et } 2 \text{ sans prendre} \\
 &\text{en compte } 2 \text{ dans le numérateur} \dots \dots (SA34) \\
 g(x) &= 2x+1, fog(x) = 6x+4, 6 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) + 4, \frac{6x-6}{2} + 4, = \frac{6x-6+8}{2}, \frac{6x+2}{2} = 12x+4 \dots (SB1)
 \end{aligned}$$

RP6 (Procédure 5): l'élève trouve la fonction « g⁻¹ de fog (x) ». c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g.

$$fog(x) = 6x+4, (fog)og^{-1} = f, f = g^{-1} \circ (fog) = \frac{6x+4-1}{2} = 3x+3 \dots \dots (SD18), (SD15), (SD2)$$

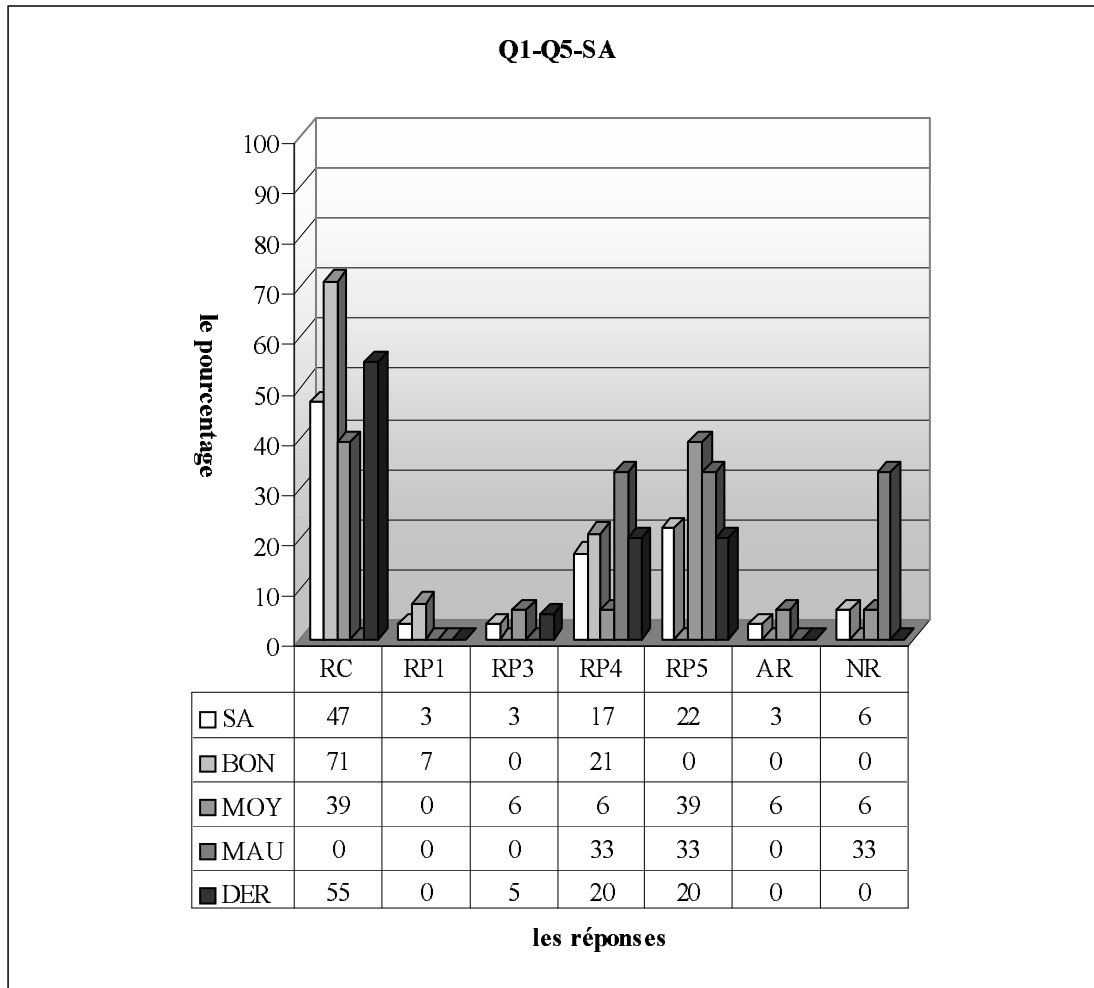
Autres Réponses:

$$\begin{aligned}
 f(g(x)) &= 2\left(\frac{x+4}{6}\right) + 1 = \frac{2x-8}{6} + 1 = \frac{x-7}{3} = 6\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4 = \frac{6x-2}{2} = 6x \dots \dots (SA2) \\
 f(2x+1) &= 6x+4, f(x) = \left(\frac{3x-1}{2}\right) + 4, f(x) = 3x+4, f(x) = 3x+1 \dots \dots (SB22) \\
 f(g(x)) &= 6x+4, f(2x+1) = 6x+4, f(x) = \frac{6x+4}{2} \dots \dots (SB24) \\
 \frac{7x+7}{10}, \frac{2x+1}{3} &= 12, 86-y=7, =12+7=5=9 \dots \dots (SE58) \\
 fog(x) &= 6x+4, g(x) = 2x+1, (fog)(x) = \frac{2x+1}{2} \cdot 2 = x+1, fog(x) = \frac{6x+4}{6} = x+4 \dots \dots (SF32)
 \end{aligned}$$

Non-réponses :

Je voudrais donner dans le tableau ci-dessous les effectifs des procédures employées par les élèves pour chaque classe. Il est nécessaire de rappeler que quand je compte les procédures, je fais attention aux procédures qu'ils ont suivi sans tenir compte des erreurs qu'ils ont commises.

2.5.1 Lycée Anatolien

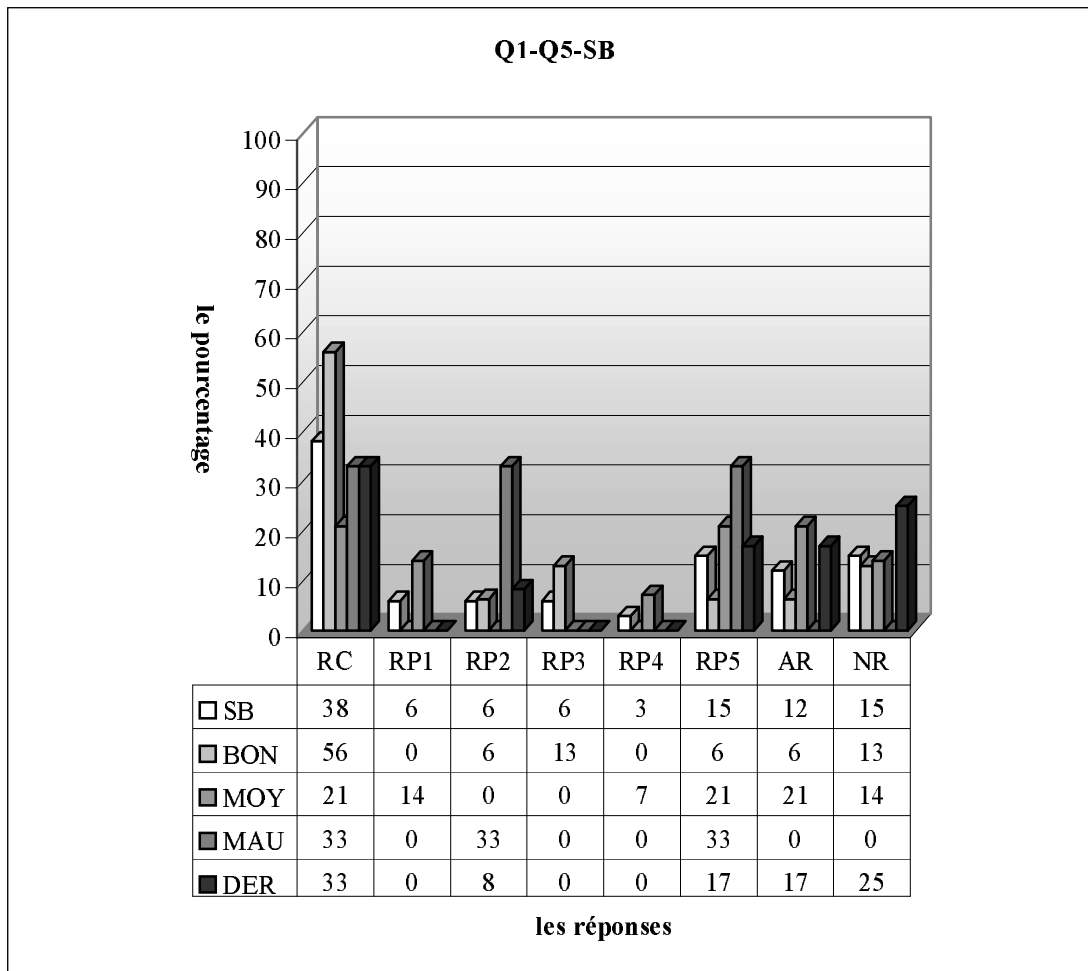


RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4: l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g⁻¹ de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Dans la classe de seconde A, près de la moitié des élèves (47%) donnent la bonne réponse. L'erreur la plus fréquente est de l'erreur de calcul commise par 22% des élèves et l'erreur qui consiste à trouver la fonction « fog de g(x) » suit avec un taux de 17%. Il s'agit cependant de la même répartition pour les erreurs liées au traitement de l'inverse de la fonction g et les élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres :cadre algébrique et fonctionnel (environ 3%). Enfin presque 6% des élèves ne répondent pas à la question.

En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, on constate que le taux de réussite monte à 71% chez les bons. Ce taux atteint 39% chez les moyens et il n'y a aucune réponse correcte de la part des mauvais. Les erreurs relatives au traitement de l'inverse de la fonction g ne sont présentes que chez les bons. 7,1% de ces derniers commettent donc ces erreurs. Par contre seuls 6% des moyens font l'erreur qui consiste à trouver la fonction « gofog ». Les élèves qui trouvent la fonction composée « fogog » sont plus nombreux chez les mauvais. Ainsi un quart d'entre eux commettent cette erreur contre 21% des bons et 6% des moyens. Les moyens et mauvais se rapprochent par le taux d'erreur de calcul. Alors 39% des moyens et 33% des mauvais font ces erreurs. Par ailleurs, ce type d'erreurs est totalement absent chez les bons.

Si l'on regarde les résultats des élèves de dérsané, on observe que le taux de réussite monte à 55%. Il s'agit cependant du même pourcentage pour les erreurs de calcul et l'erreur consistant à trouver la fonction « fog de g(x) » (20%). Un très petit nombre de ces élèves ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles.



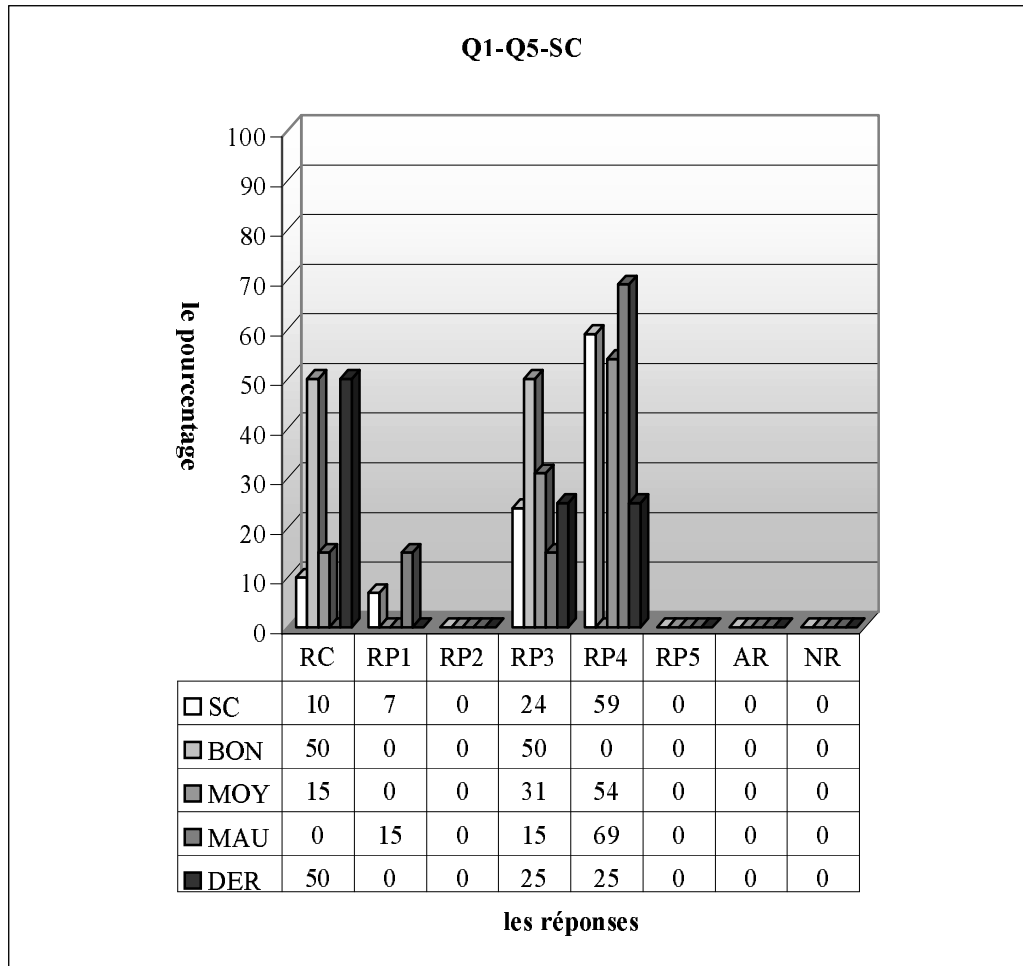
RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g⁻¹ de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Quant à l'autre classe de seconde du lycée Anatolien, la bonne réponse est donnée par 38% des élèves. L'erreur plus fréquente est l'erreur de calcul comme en classe précédente (15%). Presque 6% des élèves ne peuvent pas traiter correctement l'inverse de la fonction g. Il est cependant très intéressant de constater la même répartition pour les élèves qui trouvent la fonction composée g de fog(x) et ceux qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles. Un très faible pourcentage des élèves trouvent la fonction « fog de g(x) » au lieu de la fonction f alors que 15% des élèves ne donnent pas de réponse. Pour 12% des élèves il est très difficile de catégoriser leurs réponses dans les six réponses précisées. Il est normal que le taux de réussite soit plus élevé chez les bons. Ainsi plus de la moitié d'entre eux fournissent une réponse correcte contre 21% des moyens et un tiers des mauvais. L'erreur liée à trouver l'inverse de la fonction g (14%) et celle qui consiste à trouver « la fonction « fog de g(x) » (7%) sont uniquement réservées aux moyens. Par contre l'erreur consistant à trouver la fonction composée « g de fog(x) » est totalement absente chez ces derniers et elle est commise par 6% des bons et un tiers des mauvais. On observe cependant que les erreurs de calcul sont plus fréquentes chez les mauvais. Alors un tiers de ces derniers commettent ces erreurs contre 21% des moyens et 6% des bons.

En ce qui concerne les résultats des élèves de dérsané, le taux de réussite n'est pas satisfaisant. Seuls un tiers peuvent donc fournir une réponse correcte. Les erreurs commises par les élèves sont des erreurs qui consistent à trouver la fonction composée « g de fog(x) » (8%) et des erreurs de calcul (17%). Par ailleurs, un quart des élèves n'abordent pas la question tandis que 17% deviennent perplexes face à la question.

Je termine ce lycée par le résultat splendide de la classe de terminale : toute la classe donne la bonne réponse !

2.5.2 Lycée Super



RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g⁻¹ de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

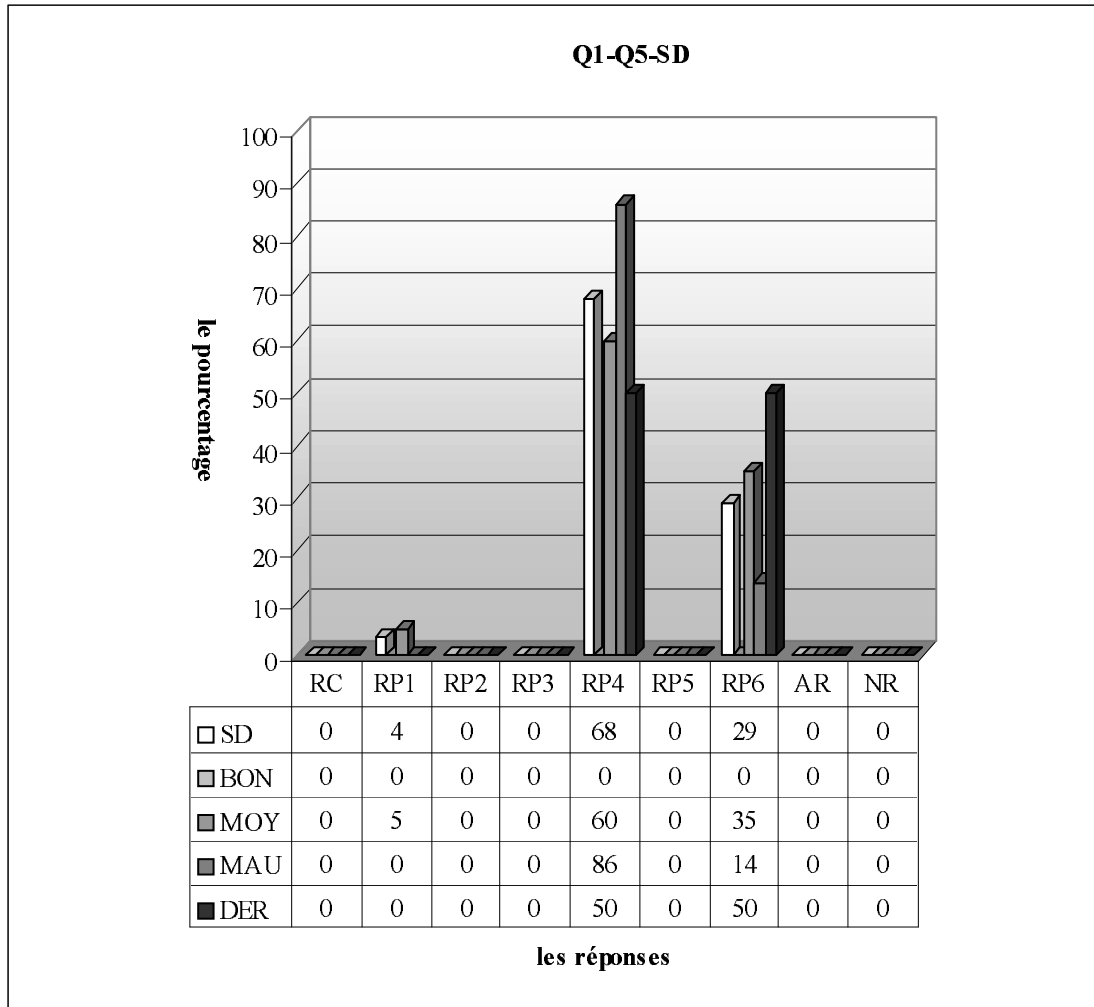
Il est remarquable qu'en classe le taux de réussite à cette question descende à 10%. L'erreur la plus fréquente est l'erreur consistant à mettre la fonction g dans la fonction composée « f rond g » (59%). Donc on peut dire que la plupart des élèves dans ce lycée pensent que l'opération n'est pas déjà faite (ou il s'agit d'une mission accomplie). 24% des élèves ont de grosses difficultés à passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel. Tandis que le taux des élèves qui commettent des erreurs relatives au traitement de l'inverse de la fonction g est d'environ 7%.

Par ailleurs, le pourcentage nul de non-réponse et autres réponses montrent que la question est très familière aux élèves. De plus il semble aussi que cette question n'a pas été considérée comme difficile par eux.

Remarquons cependant que le taux de réussite atteint 50% chez les bons. Ce taux descend jusqu'à 15% chez les moyens et il n'y a aucune réponse correcte de la part des mauvais. Les élèves qui ont de

grosses difficultés à utiliser les deux cadres ensembles sont plus nombreux chez les bons. Ainsi la moitié d'entre eux commettent ce type d'erreurs contre 31% des moyens et 15% des mauvais. Par ailleurs, l'erreur qui consiste à trouver la fonction « fog de g(x) » au lieu de la fonction f est totalement absente chez les bons tandis qu'elle est commise par plus de la moitié des moyens et 69% des mauvais.

Quant aux résultats des élèves de dérsané, la moitié fournissent une réponse correcte. Il s'agit de la même répartition (25%) pour les élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensembles et ceux qui trouvent la fonction « fog de g(x) ».



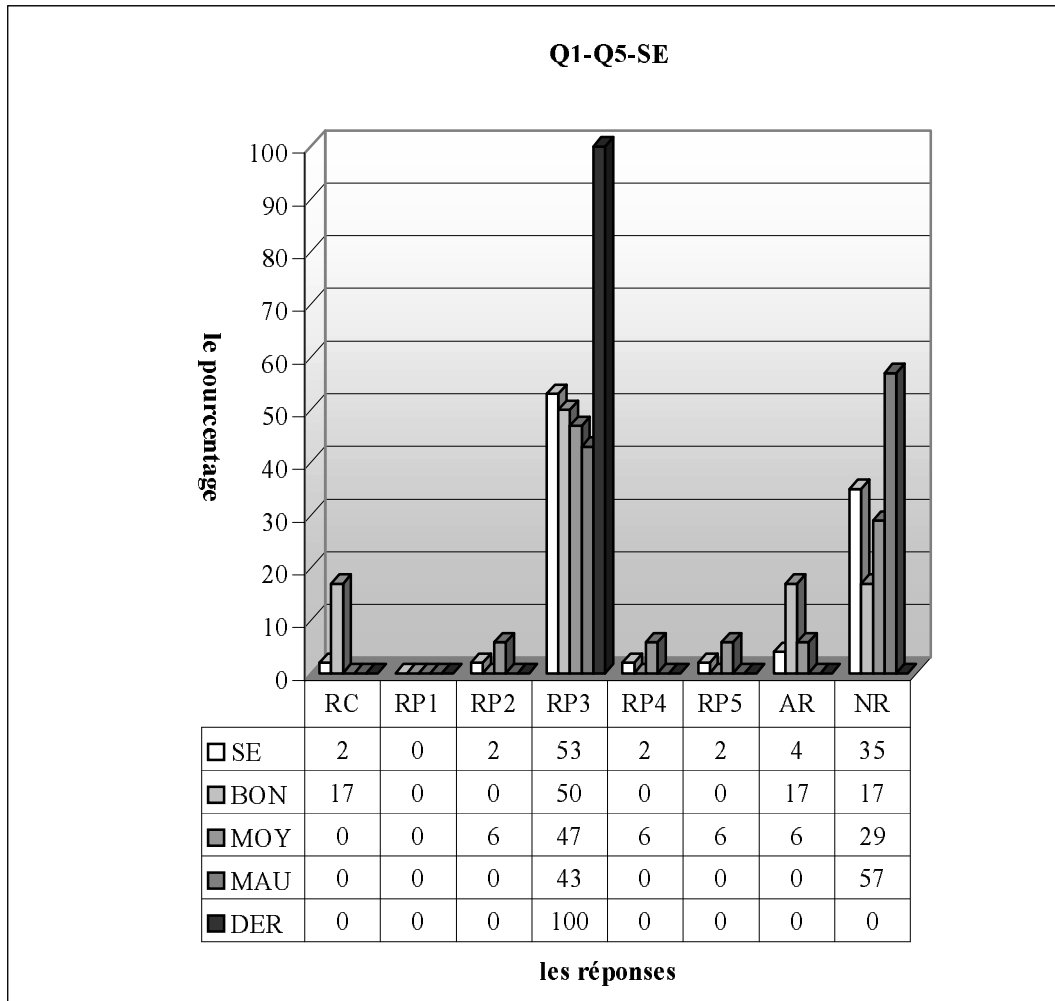
RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4: l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g⁻¹ de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe il n'y a aucun élève qui trouve la bonne réponse. Par contre tous les élèves répondent à la question. Plus des deux tiers des élèves commettent cependant l'erreur qui consiste à trouver la fonction « fog de g(x) » au lieu de la fonction f. Une bonne partie (29%) traitent d'abord l'inverse de la fonction g. Mais ensuite ils trouvent la fonction « g⁻¹ de fog(x) ». Environ 4% des élèves commettent les erreurs relatives au traitement de l'inverse de la fonction g.

En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, comme il n'y a aucun élève qui déclare qu'il est bon, l'erreur plus fréquente en classe consistant à trouver la fonction « fog de g(x) » est commise par 86% des mauvais et 60% des moyens. Par ailleurs, les élèves qui trouvent la fonction « g⁻¹ de fog(x) » sont plus nombreux chez les moyens. Ainsi 35% de ces derniers commettent ce type d'erreur contre 14% des mauvais. Les erreurs liées au traitement de la fonction g ne sont présentes que chez les moyens avec un très faible pourcentage.

Si on regarde les résultats des élèves de dérsané, on constate qu'une moitié commettent les erreurs de calcul, l'autre moitié trouvent la fonction « g^{-1} de $fog(x)$ » au lieu de la fonction f .

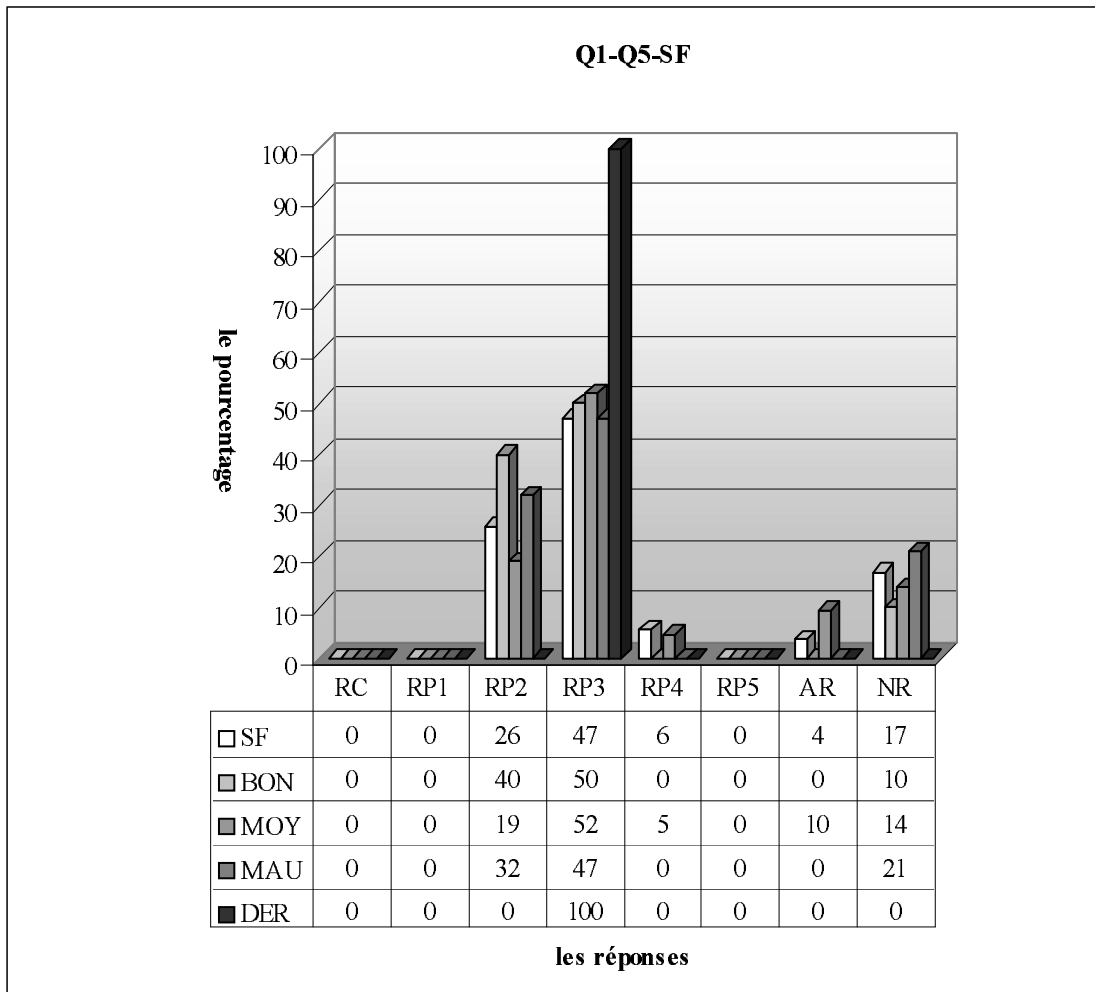
2.5.3 Lycée Normal



RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g , RP2: l'élève trouve la fonction composée g de $fog(x)$, RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4: l'élève trouve la fonction « fog de $g(x)$ », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de $fog(x)$ », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g , AR :autres réponses, NR :non-réponses

Comme le montre bien le tableau ci-dessus, un très faible pourcentage des élèves fournissent une réponse correcte (2%). Une bonne partie ne répondent cependant pas à la question, ce qui signifie que la question est assez complexe et peu familière aux élèves. Plus de la moitié des élèves commettent les erreurs consistant à ne pas utiliser ensemble les deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel (53%). 2% des élèves trouvent la fonction composée « g de $fog(x)$ ». Ce taux est aussi valable pour les élèves qui obtiennent la fonction « fog de $g(x)$ » et les erreurs de calcul.

Remarquons que toutes les bonnes réponses viennent de la part des bons. Ainsi 17% d'entre eux fournissent une réponse correcte. Les élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres sont plus nombreux chez les bons élèves. La moitié de ces derniers commettent ce type d'erreurs contre 47% des moyens et 43% des mauvais. Il n'est cependant pas très étonnant que le taux de non-réponse soit plus élevé chez les mauvais. Alors plus de la moitié d'entre eux ne donnent pas de réponse à cette question contre 29% des moyens et 17% des bons. L'erreur qui consiste à trouver la fonction composée « g de $fog(x)$ », la fonction « fog de $g(x)$ » au lieu de la fonction f et les erreurs de calcul sont uniquement réservées aux moyens avec un taux de 6%. Par ailleurs, tous les élèves de dérsané commettent les erreurs relatives aux cadres.

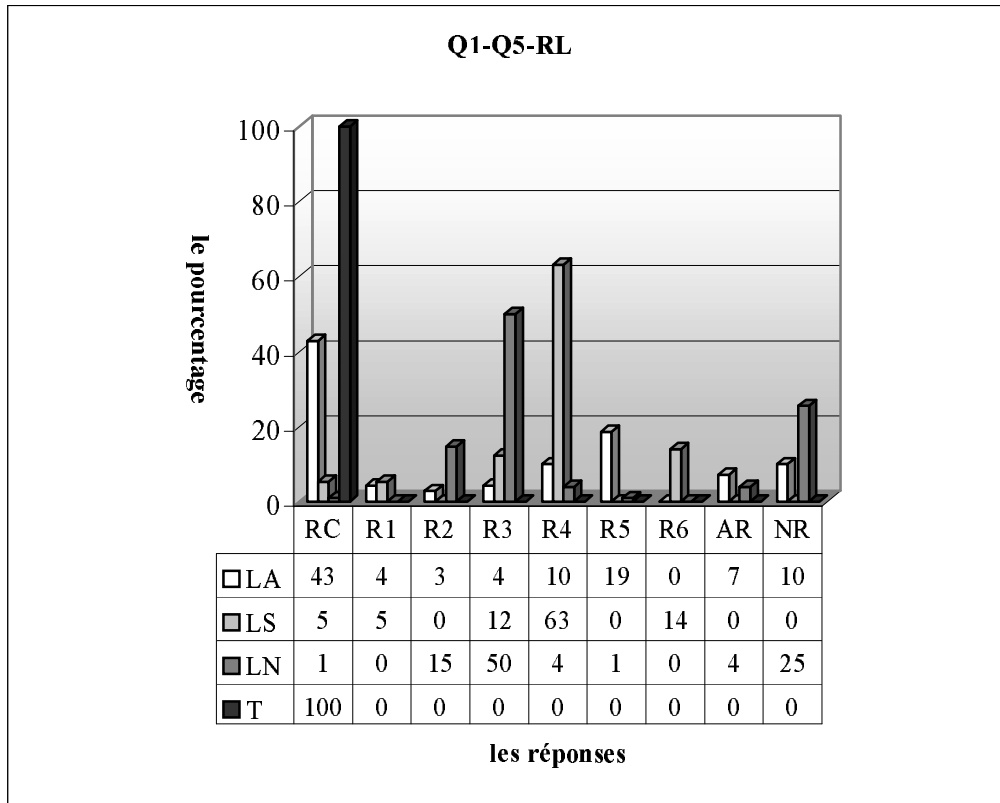


RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse dans la classe, la plupart des élèves commettent cependant les erreurs liées aux cadres (47%). Pour environ 6% des élèves la fonction composée « fog » n'est pas déjà effectuée. Alors ils font pour la deuxième fois et ils obtiennent la fonction « f rond g rond g ». De plus 26% des élèves trouvent la fonction composée « g de fog(x) » au lieu de la fonction f tandis que le taux de non-réponse est de 17%.

Une très légère différence entre les élèves s'observe cependant par le taux des élèves qui ne peuvent pas utiliser les deux cadres ensemble. Ainsi la moitié des bons commettent ces erreurs contre 52% des moyens et 47% des mauvais. Les moyens se distinguent des autres par le taux plus faible des élèves qui trouvent la fonction composée « g de fog(x) », 19% font donc ce type d'erreur contre 40% des bons et 32% des mauvais. Il est normal que le taux de non-réponse soit plus élevé chez les mauvais. Alors 21% de ces derniers ne répondent pas à la question contre 14% des moyens et 10% des bons. Par ailleurs, chaque élève de dérsané commet les erreurs relatives aux cadres.

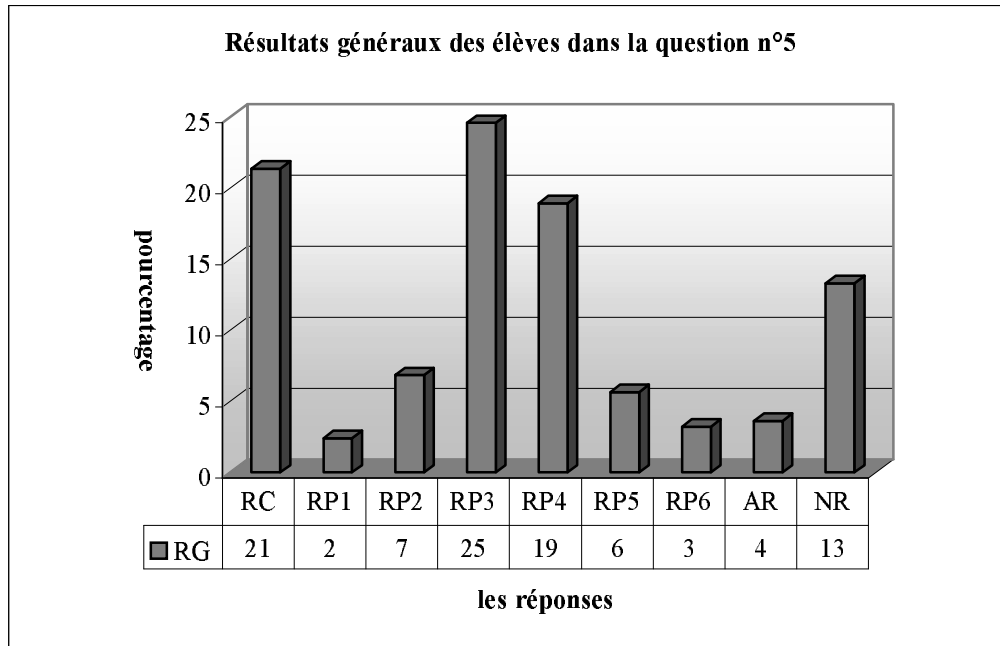
2.5.4 Résultats des élèves par lycée



RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g, RP2: l'élève trouve la fonction composée g de fog (x), RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres :cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « fog de g(x) », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g⁻¹ de fog (x) », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g, AR :autres réponses, NR :non-réponses

Si on excepte la classe de terminale, le taux de réussite à cette question descend jusqu'à environ 1% dans les classes de seconde. Il y a des erreurs caractéristiques suivant les lycées : par exemple 63% des élèves du lycée Super font l'erreur nommée « l'erreur de la mission (ou opération) inaccomplie » alors qu'elle est commise par environ 4% des élèves du lycée Normal et 10% du lycée Anatolien. La moitié des élèves du lycée Normal commettent l'erreur catégorisée dans la réponse RP4 en restant dans le cadre algébrique tandis que cette démarche erronée est effectuée par 12% des élèves dans le lycée Super et 4% dans le lycée Anatolien. L'erreur de calcul n'apparaît presque jamais dans les lycées super et normal tandis que près de 19% des élèves du lycée Anatolien font cette erreur.

2.5.5 Résultats généraux des élèves



RC (Procédures P1,P2 et P3): réponse correcte, RP1: erreurs liées au fait de trouver l'inverse de la fonction g , RP2: l'élève trouve la fonction composée g de $f \circ g(x)$, RP3: l'élève ne peut pas utiliser deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble, RP4 : l'élève trouve la fonction « $f \circ g$ de $g(x)$ », RP5: erreurs de calcul, RP6: l'élève trouve la fonction « g^{-1} de $f \circ g(x)$ », c'est-à-dire qu'il ne peut pas choisir le bon côté à composer l'inverse de la fonction g , AR :autres réponses, NR :non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'il y a seulement 21% des élèves qui donnent la bonne réponse. Les erreurs les plus fréquentes sont celles qui consistent à ne pas articuler deux cadres ensemble avec un taux de 25%. Le taux des élèves qui commettent les erreurs de « mission inaccomplie » est de 19%. Tandis que 7% trouvent la composée « $g \circ f \circ g$ » au lieu de trouver la fonction demandée. Par ailleurs, 6% des élèves commettent des erreurs de calcul dans une démarche correcte. Contrairement à nos attentes, l'erreur consistant à trouver la fonction « $g^{-1} \circ f \circ g(x)$ » n'est pas la plus fréquente. Ainsi il y a seulement 3% des élèves qui commettent cette erreur. Les erreurs liées au fait de trouver l'inverse de g sont aussi des erreurs marginales (2%) et 13% des élèves n'abordent pas la question, tandis que le taux d'autres réponses est de seulement 4%. Cela signifie que la question est assez familière aux élèves.

2.5.6 Conclusion

Dans notre analyse a priori, nous avons émis l'hypothèse que la décomposition des fonctions était plus difficile que la composition des fonctions pour des élèves et que le taux de réussite à cette question allait donc chuter dans cette question par rapport à la question précédente. Nous constatons que cette hypothèse est validée. Le taux de réussite à cette question descend à 21%. C'est presque trois fois plus que dans la question précédente. De plus dans cette question le taux des élèves qui commettent les erreurs qui consistent à ne pas utiliser deux cadres ensemble est plus élevé que dans la question précédente. Ainsi 3% des élèves commettent ce type d'erreurs lors qu'il s'agit de composer deux fonctions. Ce taux monte, ici, à 25%. Cela nous amène à dire que la décomposition des fonctions est moins familière aux élèves et que la complexité d'une question amène les élèves à commettre des erreurs qu'ils n'ont pas déjà commises dans des questions plus faciles.

Par ailleurs, les résultats des élèves du lycée Anatolien ne confirment pas à nos attentes. Il n'y pas de grande différence entre les taux de réussite des deux questions (n°4, 44% et n°5, 43%). Mais en ce qui concerne les deux autres lycées, cette différence est énorme (89%-5% dans le lycée Super et 46%-1% dans le lycée Normal). Cela signifie que les élèves du lycée Anatolien sont aussi familiers de la décomposition que de la composition.

2.6 Question n°6

Comme je l'ai déjà remarqué, cette question était aussi destinée à vérifier si les élèves utilisaient la recette **R_a**. De plus, elle devait permettre d'observer les rapports des élèves liés à une mentalité utilitaire et de témoigner de l'appauvrissement des mathématiques dans les activités des élèves.

J'ai de nombreuses catégories de réponses à cette question. Je les présente en donnant des résultats typiques :

RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette **R_a**. L'élève trouve simplement la réponse correcte en changeant les places des deux 2 et leurs signes.

$$\frac{2x+6}{3x-2} = \frac{2 \cdot 2+6}{3 \cdot 2-2} = \frac{4+6}{6-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \dots \dots (SB29)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, \quad f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2+6}{3 \cdot 2-2} = \frac{4+6}{6-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \dots \dots (SC16)$$

RC2 (Procédure 1) : réponse correcte avec la méthode **M_{x_{fy}}**.

$$y = \frac{2x+6}{3x-2} \Rightarrow 3xy-2y=2x+6, \quad 3xy-2x=2y+6, \quad x(3y-2)=2y+6, \quad x = \frac{2y+6}{3y-2},$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3y-2}, \quad f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2+6}{3 \cdot 2-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \dots \dots (T7)$$

$$y = \frac{2x+6}{3x-1}, \quad y(x-2)=2x+6, \quad 3xy-2y=2x+6, \quad 2xy-2x=6+2y, \quad x = \frac{6+2y}{3y-2},$$

$$f^{-1}(y) = \frac{6+2x}{3 \cdot x-2} = \frac{6+4}{6-2} = \frac{5}{2} \dots \dots (SE33)$$

$$y = \frac{2x+6}{3x-2}, \quad f(x)=y, \quad f^{-1}(y)=x, \quad y(3x-2)=2x+6, \quad 3xy-2y=2x+6, \quad 3xy-2x=6+2y,$$

$$x(3y-2)=6+2y, \quad f^{-1}(y) = \frac{6+2x}{3 \cdot x-2} = \frac{6+4}{6-2} = \frac{5}{2} \dots \dots (SE25)$$

RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f.

$$f^{-1}(2)=a \Rightarrow f(a)=2$$

$$\frac{2a+6}{3a-2}=2 \Rightarrow 2a+6=6a-4 \Rightarrow 4a=10 \Rightarrow a = \frac{5}{2}, \quad f^{-1}(2) = \frac{5}{2} \dots \dots (T12)$$

$$\frac{2x+6}{3x-2}=2, \quad 6x-4=2x+6, \quad 4x=10, \quad x = \frac{5}{2} \dots \dots (T8)$$

$$f^{-1}(2)=x, \quad f(x)=2, \quad f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}=2, \quad f(x)=6x-4=2x+6, \quad f(x) = \frac{4x-10}{4}, \quad f(x) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \dots \dots (SA7)$$

$$f^{-1}\left(\frac{2x+6}{3x-2}\right)=x, \quad \frac{2x+6}{3x-2}=x, \quad 2x+6=6x-4, \quad -4x=-10, \quad x = \frac{5}{2} \dots \dots (SA25)$$

RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette **R_a**. L'élève ne peut pas changer correctement les places ou les signes.

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, \quad \text{l'élève change les places de 2 et 3, } f^{-1}(x) = \frac{3x+6}{2x-2},$$

$$f^{-1}(2) = \frac{3 \cdot 2+6}{2 \cdot 2-2} = \frac{6+6}{6-2} = \frac{12}{4} = 3 \dots \dots (SB24)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-3x+6}{-2x-2}, \quad f^{-1}(2) = \frac{-6+6}{-4-2} = \frac{0}{-2} = 0 \dots \dots (SB27)$$

$f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}$
 $f(x) = \frac{3x+6}{2x-2}$
 $f(2)^{-1} = \frac{2 \cdot 2 - 6}{3 \cdot 2 + 2} = \frac{4 - 6}{6 + 2} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

(SC17)

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, f^{-1}(x) = \frac{-2x-6}{3x+2}, f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2 - 6}{3 \cdot 2 + 2} = \frac{4-6}{6+2} = \frac{-2}{8} \dots \dots (SA34)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x+2x}, \text{ pour } x=2, f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2 + 6}{3 \cdot 2 - 2} = \frac{10}{6-2} = \frac{10}{4} = 2,5 \dots \dots (SB31)$$

RP5 : l'élève trouve correctement l'inverse de la fonction f. Mais il fait des erreurs lorsqu'il trouve l'image de 2 sur f⁻¹.

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2 + 6}{3 \cdot 2 - 4} = \frac{4+6}{6-4} = \frac{10}{2} = 5 \dots \dots (SA13)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, f^{-1}(2) = \frac{-2 \cdot 2 + 6}{3 \cdot 2 - 2} = \frac{-4+6}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \dots \dots (SA33), (SA17)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, \text{ pour } x=2, f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot 2 + 6}{3 \cdot 2 - 2} = \frac{4+6}{6-2} = \frac{13}{4} \dots \dots (SA35)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, f^{-1}(2) = \frac{2 \cdot (-2) + 6}{3 \cdot (-2) - 4} = \frac{-4+6}{-8-4} = \frac{2}{-12} = -\frac{1}{6} \dots \dots (SB23)$$

RP6 : l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f.

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 6}{3 \cdot 2 - 2} = \frac{10}{4} \dots \dots (SB10)$$

RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xy}.

(SF46)

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, y = \frac{2x+6}{3x-2}, x = \frac{2y+1}{3y-2} \dots \dots (SF39), (SF36)$$

RP8 : les élèves ne peuvent pas utiliser deux cadres : cadre algébrique et cadre fonctionnel, ensemble. Alors l'un égalise le numérateur au dénominateur. L'autre essaie de trouver un nombre en faisant quelques choses avec le numérateur et le dénominateur.

$$3x-2x = \frac{2x+6}{3x-2} \cdot 3x-2, 3x-2x = 2x+6, 3x-2x = 2x+6, x = 2x+6,$$

$$f^{-1}(2) = 2 \cdot 2 + 6, 4 + 6 = 10 \dots \dots (SF9), (SF25), (SF45)$$

(SF14)

$$3x-2y = \frac{2x+6}{3x-2} \cdot 3x-2, \frac{3x-2y-6}{2} = \frac{2x}{2}, \frac{x-6}{2} \dots \dots (SF13), (SF5)$$

RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3.

$$f(x) = 2, f(x) = \frac{2x+6}{3x-2} = \frac{2x+6}{3x-6} = \frac{2}{1}, 2x+6 = 6x+4, 4x = 2, x = 2,$$

$$\frac{2x+6}{3x-2} = \frac{2 \cdot 2 + 6}{3 \cdot 2 - 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \dots \dots (SD11), (SD12), (SD27), (SD4)$$

RP10 : erreurs qui correspondent à la méthode M_{xy}.

$$y = \frac{2x+6}{3x-2}$$

$$y(3x-2) = 2x+6$$

$$y = \frac{2x+6}{3x-2}$$

$$f^{-1}(2) = \frac{4+6}{6-2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

(SE1)

RP11 : réponses incomplètes.

$$y = \frac{2x+6}{3x-2}, f(x)=y, f^{-1}(y)=x, y(x-2)=2x+6, 3xy-2y=2x+6,$$

$$2xy-2x=6+2y \dots (SE51), (SE35), (SE21)$$

$$y = \frac{2x+6}{3x-2}, f(x)=y, f^{-1}(y)=x, y(3x-2)=2x+6, 3xy-2y=2x+6,$$

$$3xy-2x=6+2y, x(3y-2)=6x+2y, x = \frac{6+2y}{3y-2} \dots (SE57)$$

Autres Réponses :

$$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{3} \right\}, f(x) = \frac{2x+6}{3x-2}, x=6 \quad 2x=12; 6=x \quad 12=2x \dots (SA21)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} = \frac{2x+6}{3x-2}, \frac{2x-6}{3x+6} = \frac{4-6}{6+6} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}, \frac{2x-6}{3x+6} = 2, 6x+6=2x-6,$$

$$6x-2=-6-6, 4x=-12, x=-3 \dots (SB7)$$

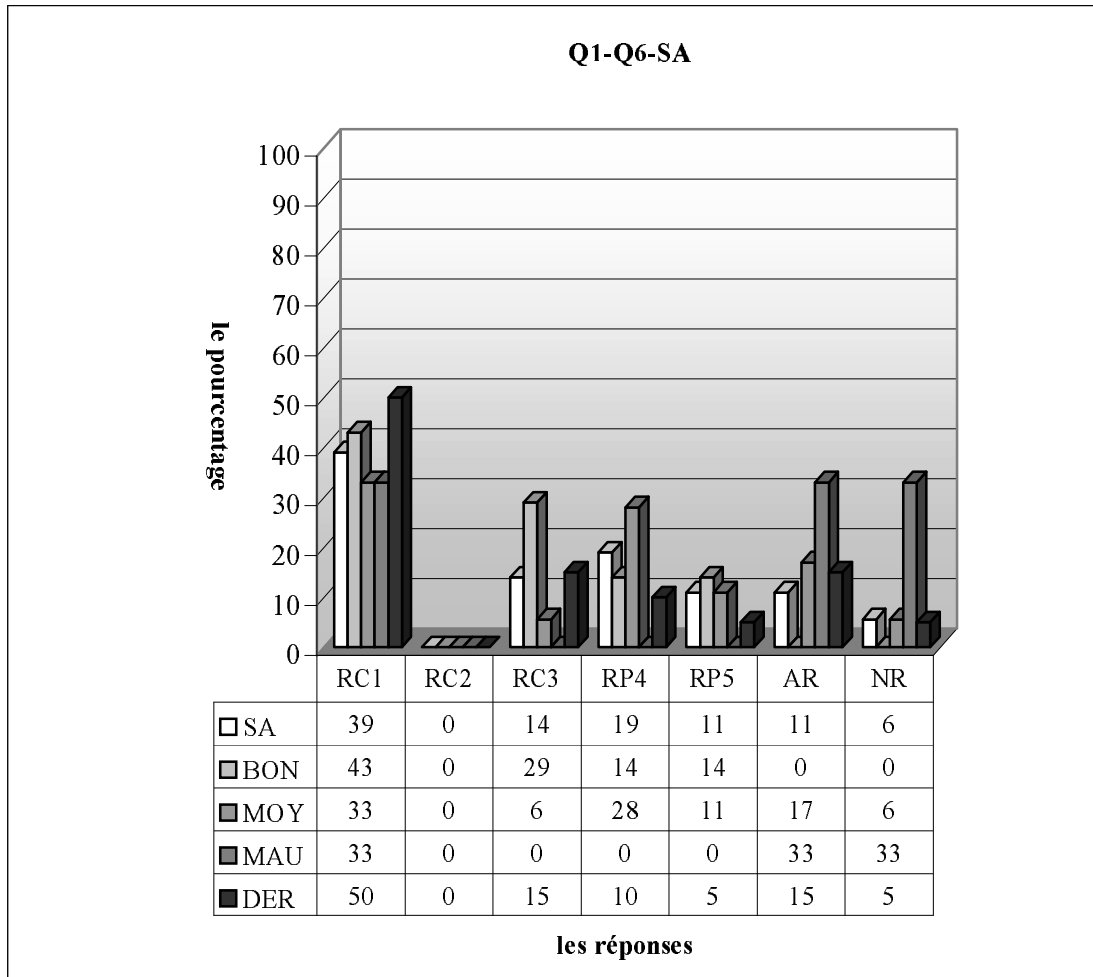
$$\frac{4.2x+6}{3x-1}, f(x)=y, f(y)=x, y(x-2) \dots (SE30)$$

Non-réponses :

En voici les résultats des élèves lycée par lycée :

2.6.1 Lycée Anatolien

Comme les élèves sont bien motivés au concours dans ce lycée, j'attendais un taux élevé des élèves qui utilisent la recette R_a . Le fait que la fonction et son inverse sont identique sera le seul souci des élèves ($f(x)=f^{-1}(x)$) car cela donne une impression qu'on n'a rien fait.

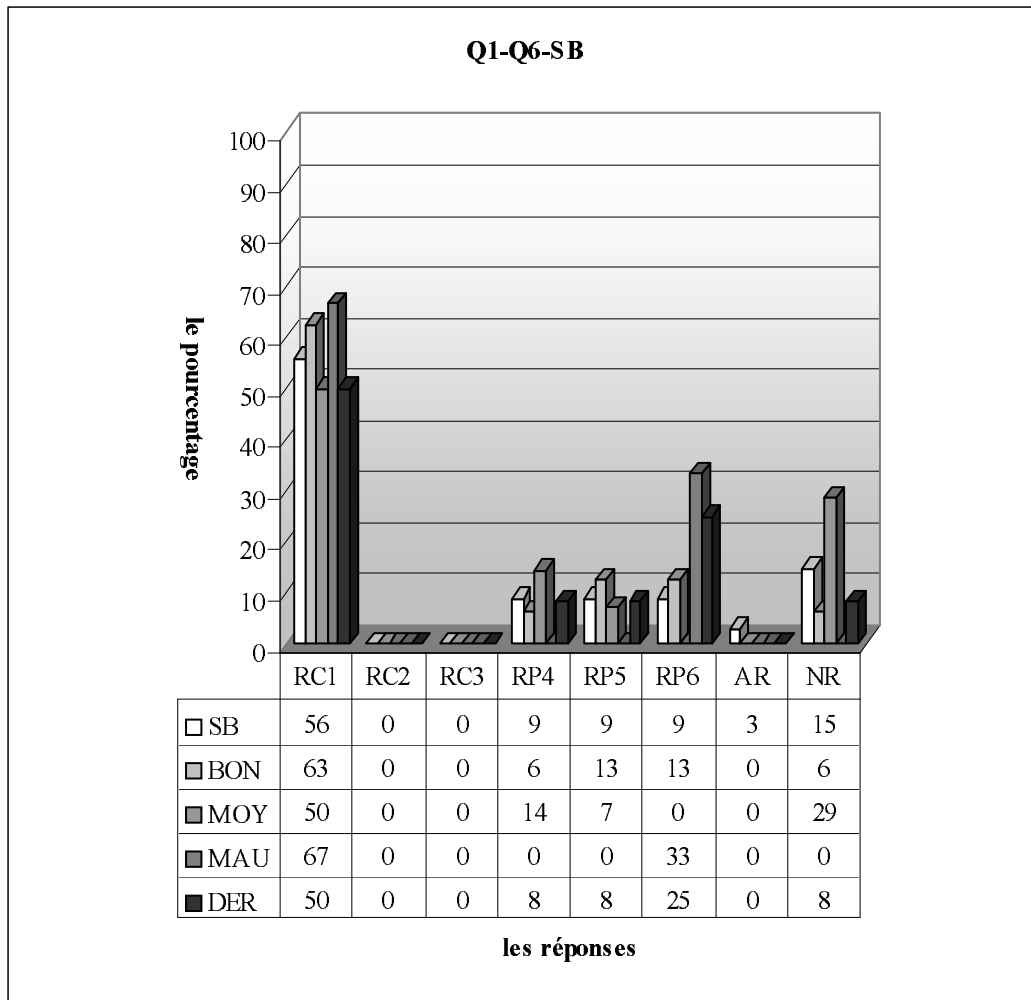


RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a , RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xy} , RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f , RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a , RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f , RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xy} , RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xy} , RP11 : réponses incomplètes, AR : autres réponses, NR: non-réponses

Dans la classe A, le taux de réussite est de 53%. Si l'on prend les réponses des élèves qui trouvent correctement l'inverse de la fonction mais pas l'image de 2 comme correcte, ce taux monte jusqu'à 64% et la plupart d'entre eux (39%) fournissent une réponse correcte à partir de la procédure partant sur la recette R_a , tandis que 14% arrivent à la bonne réponse en privilégiant la procédure P3. Il n'y a cependant aucun élève qui aborde à la question en utilisant la deuxième procédure. Les erreurs les plus fréquentes sont des erreurs correspondant à la recette R_a (19%). 11% des élèves peuvent trouver l'inverse de la fonction dans une démarche peu mathématisée mais ils ne réussissent pas à trouver l'image de 2 par cette inverse à cause des erreurs de calcul. Par ailleurs, environ 6% des élèves ne répondent pas à la question alors que la question perturbe 11% des élèves.

En regardant les résultats des élèves par niveau, on observe que le taux des élèves qui trouvent la bonne réponse en privilégiant la recette R_a est plus élevé chez les bons. Alors 43% de ces derniers donnent cette réponse contre un tiers des moyens et mauvais. Par ailleurs, les élèves qui arrivent à la bonne réponse à partir de la procédure P3 sont aussi plus nombreux chez les bons (29% contre 6% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais). 14% des bons commettent les erreurs relatives à la recette R_a et ce taux double chez les moyens. Par contre elles sont totalement absentes chez les mauvais. Une légère différence entre les bons et moyens s'observe par le taux des élèves qui trouvent incorrecte l'image de 2. Alors 14% des bons commettent cette erreur contre 11% des moyens et un pourcentage nul chez les mauvais.

En ce qui concerne les élèves de dérsané, le taux de la réponse RC1 monte à 50% chez eux. De plus une bonne partie trouvent la bonne réponse à partir de la procédure P3 (15%). 10% des élèves commettent cependant les erreurs relatives à la recette R_a , tandis que le taux d'autres réponses atteint 15%.



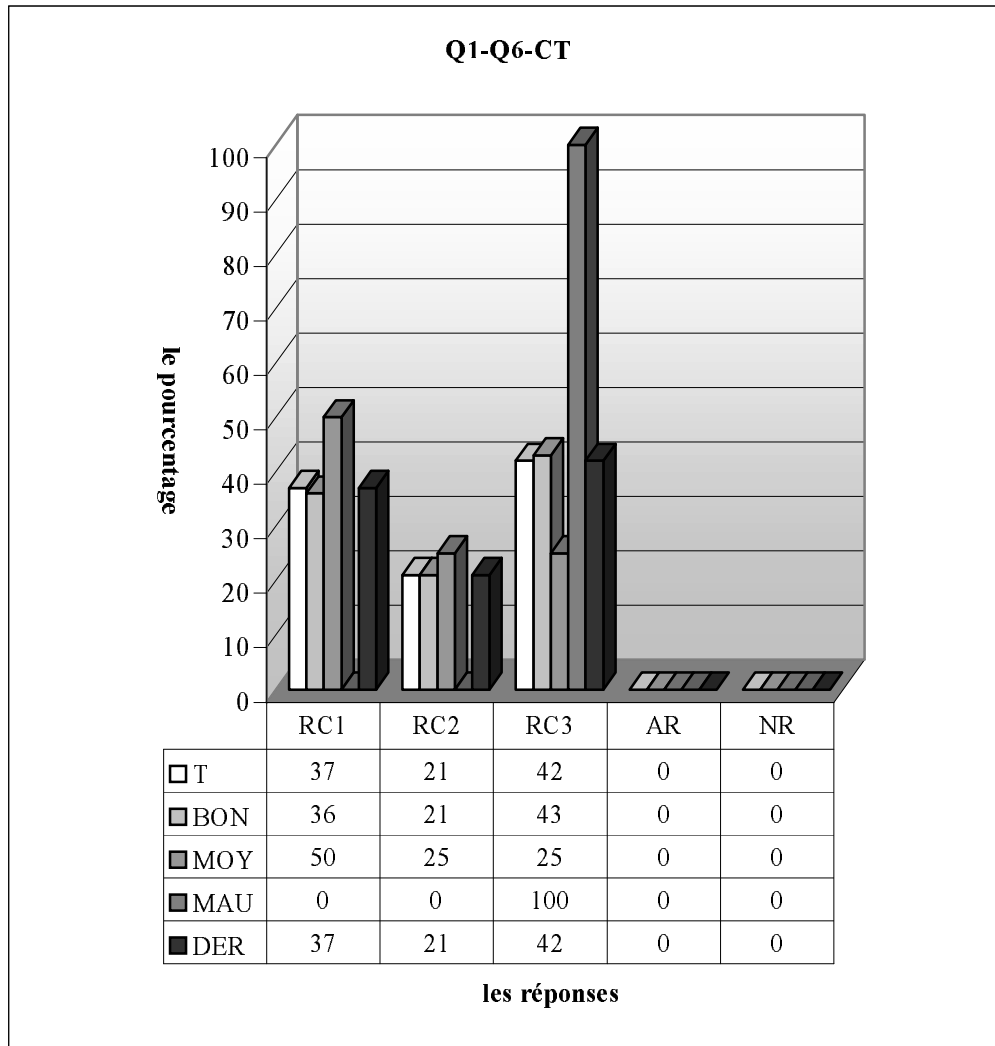
RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a , RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xy} , RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f . RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a , RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f , RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xy} , RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xy} , RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

Quant à la deuxième seconde, la répartition des élèves qui donnent la bonne réponse est à peu près la même qu'en classe précédente (64% y compris la réponse RP5)). La seule procédure utilisée est la procédure portant sur la recette R_a . Environ 9% des élèves font des erreurs provoquées par la mauvaise-utilisation du phénomène. Par ailleurs, il s'agit du même taux pour les élèves qui trouvent directement l'image de 2 sur f sans prendre en compte l'inverse et ceux qui font des erreurs lors qu'ils trouvent l'image de 2. Le fait que la répartition de non-réponses est assez élevée ne montre pas que la question est plus complexe et peu habituée aux élèves mais l'égalité de la fonction et son inverse conduit les élèves à rester immobiles face à la question.

Si on regarde les résultats des élèves par niveau, une légère différence entre les élèves s'observe par le taux de réussite à cette question : ainsi, 63% des bons fournissent une réponse correcte contre la moitié des moyens et 67% des mauvais ; ce qui signifie que l'utilisation de la recette R_a supprime l'importance des connaissances mathématiques et du savoir-faire. De plus elle détruit aussi la différence entre des bons, moyens et mauvais élèves. Les erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a sont plus fréquentes chez les moyens. 14% d'entre eux commettent ces erreurs contre 6%

des bons. Par contre les élèves qui commettent des erreurs lors du traitement de l'image de 2 sur f^{-1} sont plus nombreux chez les bons (13% des bons contre 7% des moyens). Par ailleurs, ces deux types d'erreurs sont totalement absents chez les mauvais. Une bonne partie de ces derniers (33%) trouvent l'image de 2 par la fonction f contre 13% des bons et il n'y a aucune réponse concernant cette erreur de la part des moyens.

Le taux de réussite à cette question ne dépasse pas la moitié chez les élèves de dérsané. On observe cependant trois types d'erreurs parmi ces élèves. Alors un quart des élèves trouvent simplement l'image de 2 sur la fonction f sans traiter l'inverse tandis que le taux des erreurs relatives à la mauvaise utilisation de la recette R_a est d'environ 8%, ce taux est aussi valable pour les élèves qui font des erreurs lorsqu'ils trouvent l'image de 2 par f^{-1} .

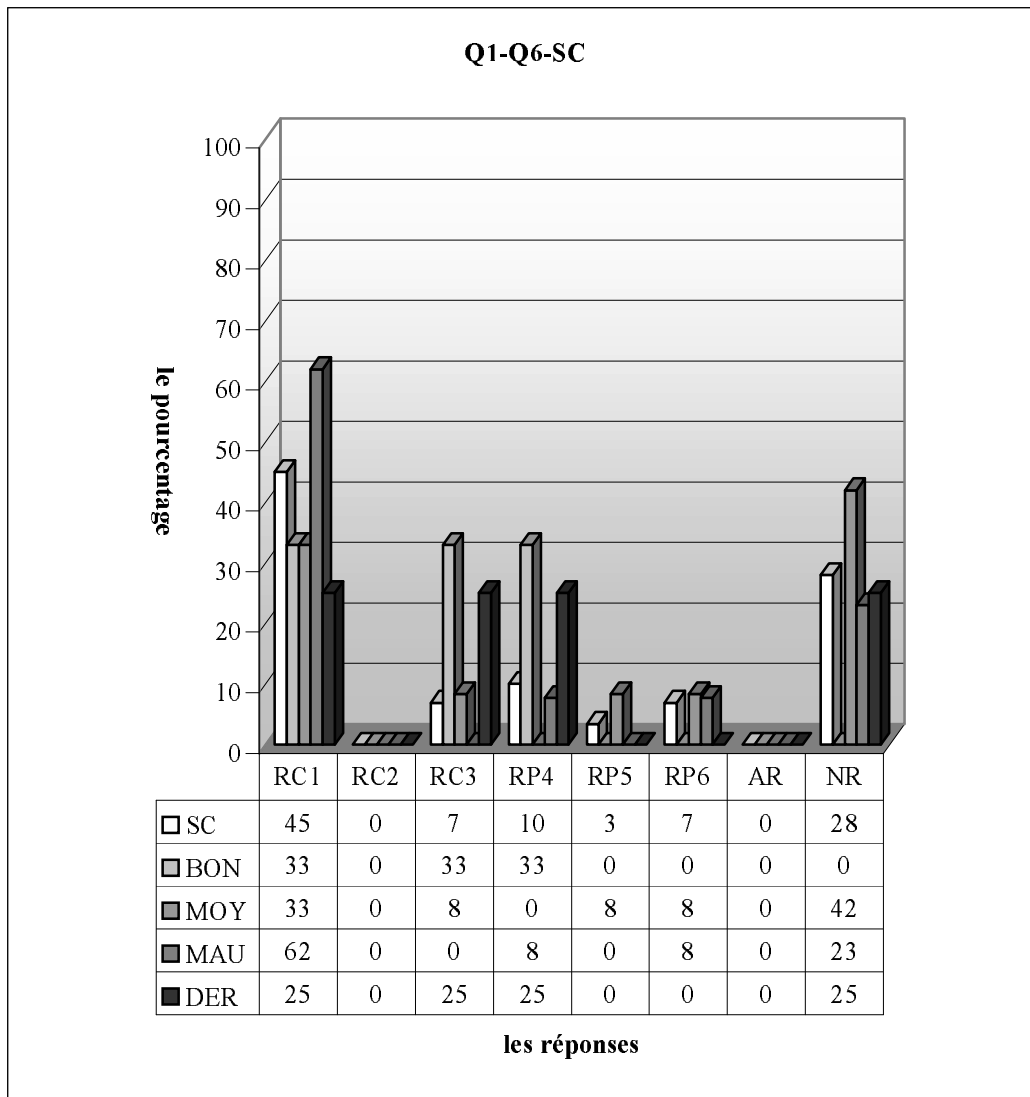


Comme le montre bien le tableau ci-dessus, en classe, il s'agit d'une réussite pleine. De plus les élèves se distinguent suivant les procédures préférées. Ainsi 21% d'entre eux trouvent la fonction inverse en favorisant la méthode $M_{x,fy}$. Tandis que le taux des élèves qui mettent en cause la recette R_a fameuse est de 37%. Par ailleurs, la majorité de la classe (42%) privilégie la démarche célébrée dans la réponse RC3. Ce qui signifie donc que le fait que la fonction et son inverse soient identiques peut provoquer à s'orienter vers d'autres démarches peu risquées chez ces élèves bien équipés.

En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, remarquons que le taux d'utilisation de la recette R_a est plus élevé chez les moyens. Ainsi la moitié fournissent une réponse correcte à partir de recette R_a contre 36% des bons. Par contre les élèves qui trouvent la bonne réponse en utilisant la définition de la fonction inverse sont plus nombreux chez les moyens. Alors un quart de ces derniers privilégie la méthode $M_{x,fy}$ contre 21% des bons. On constate cependant que la totalité des mauvais

donnent la bonne réponse avec la procédure de la réponse RC3 contre 43% des bons et un quart des moyens.

2.6.2 Lycée Super



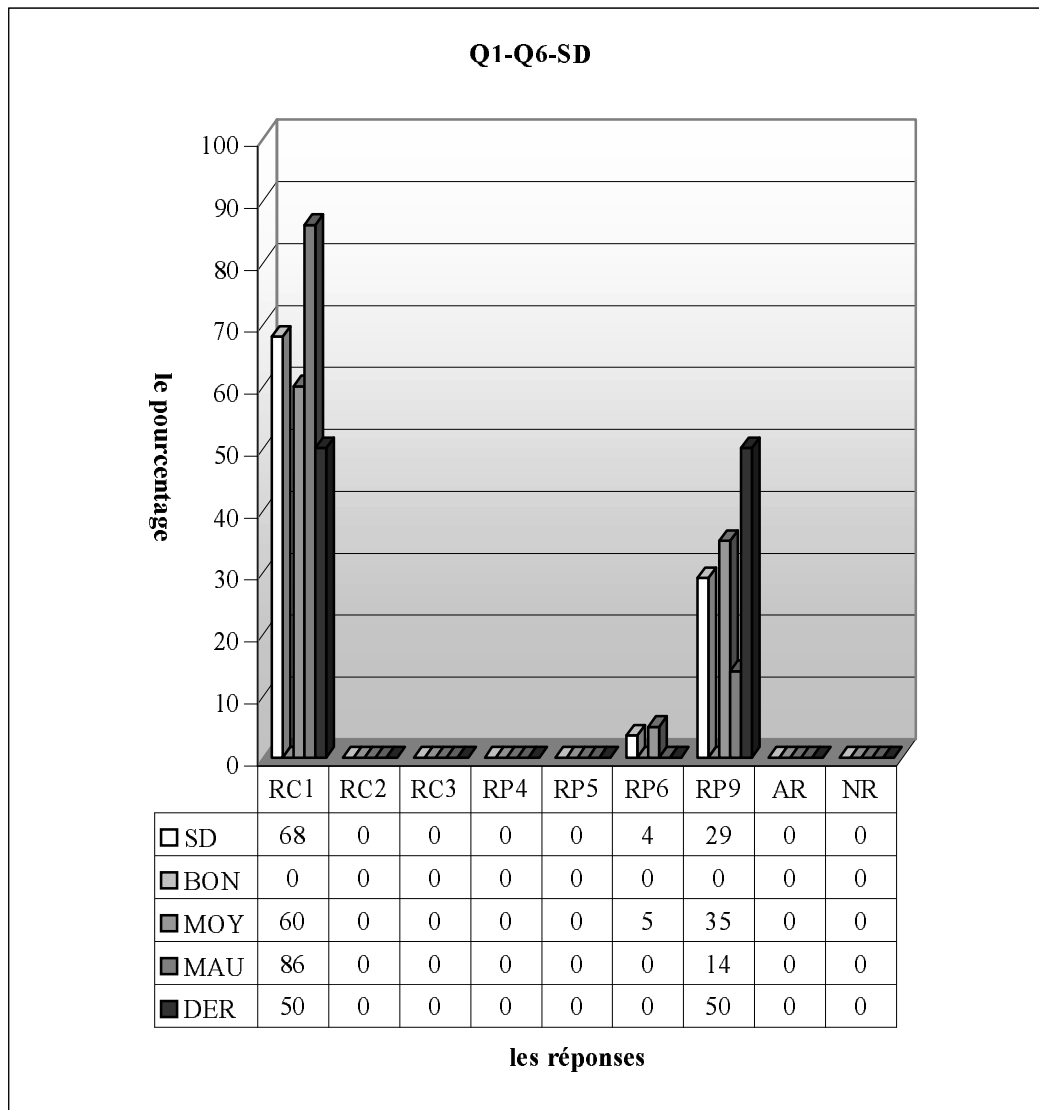
RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a , RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xy} , RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f . RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a , RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f , RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xy} , RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xy} , RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe C, plus de la moitié des élèves donnent la bonne réponse. De plus ce taux monte à 55% avec la réponse RP5. Environ 7% d'entre eux utilisent la démarche de la réponse RC3 alors que la recette R_a est majoritairement utilisée par 45% des élèves, 10% des élèves commettent cependant des erreurs lors de l'utilisation du phénomène. La hausse de non-réponse(28%) peut être interprétée comme l'effet de l'égalité de la fonction et son inverse. 7% des élèves trouvent simplement l'image de 2 par la fonction f tandis qu'il s'agit d'un très petit pourcentage pour les erreurs relatives au mauvais-traitement de l'image de 2 par f^{-1} .

Quant aux résultats suivant les niveaux, les mauvais se distinguent remarquablement des autres par le taux plus élevé de la réponse correcte RC1 : ainsi 33% des moyens et bons fournissent une réponse correcte à partir de recette R_a contre 62% des mauvais. Par ailleurs, le pourcentage de la réponse correcte RC3 est plus élevé chez les bons, alors un tiers d'entre eux donnent ce type de réponses contre

8% des moyens et il s'agit d'un pourcentage nul chez les mauvais. L'erreur consistant au mal-traitement de l'image de 2 par la fonction f^{-1} est uniquement réservée aux moyens avec un taux de 8%. Tandis qu'une très légère différence entre les moyens et mauvais s'observe par le taux des élèves qui trouvent simplement l'image de 2 par la fonction f (respectivement 8,3% contre 7,7%). Les erreurs correspondant à la mauvaise utilisation de la recette R_a sont cependant plus fréquentes chez les bons : un tiers de ces derniers commettent ces erreurs contre environ 8% des mauvais. Par contre elles sont totalement absentes chez les moyens. La question n'est pas abordée par 42% des moyens contre 23% des mauvais. Alors que chaque bon répond à la question.

Le taux de réussite atteint cependant 50% chez les élèves de désané. 25% trouvent la bonne réponse en privilégiant le phénomène. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui fournissent une réponse correcte à partir de la procédure de la réponse RC3. Par ailleurs, on observe un seul type d'erreur chez ces élèves : c'est l'erreur qui consiste à la mauvaise-utilisation de la recette R_a : un quart des élèves commettent ces erreurs tandis qu'un autre quart ne répondent pas à la question.



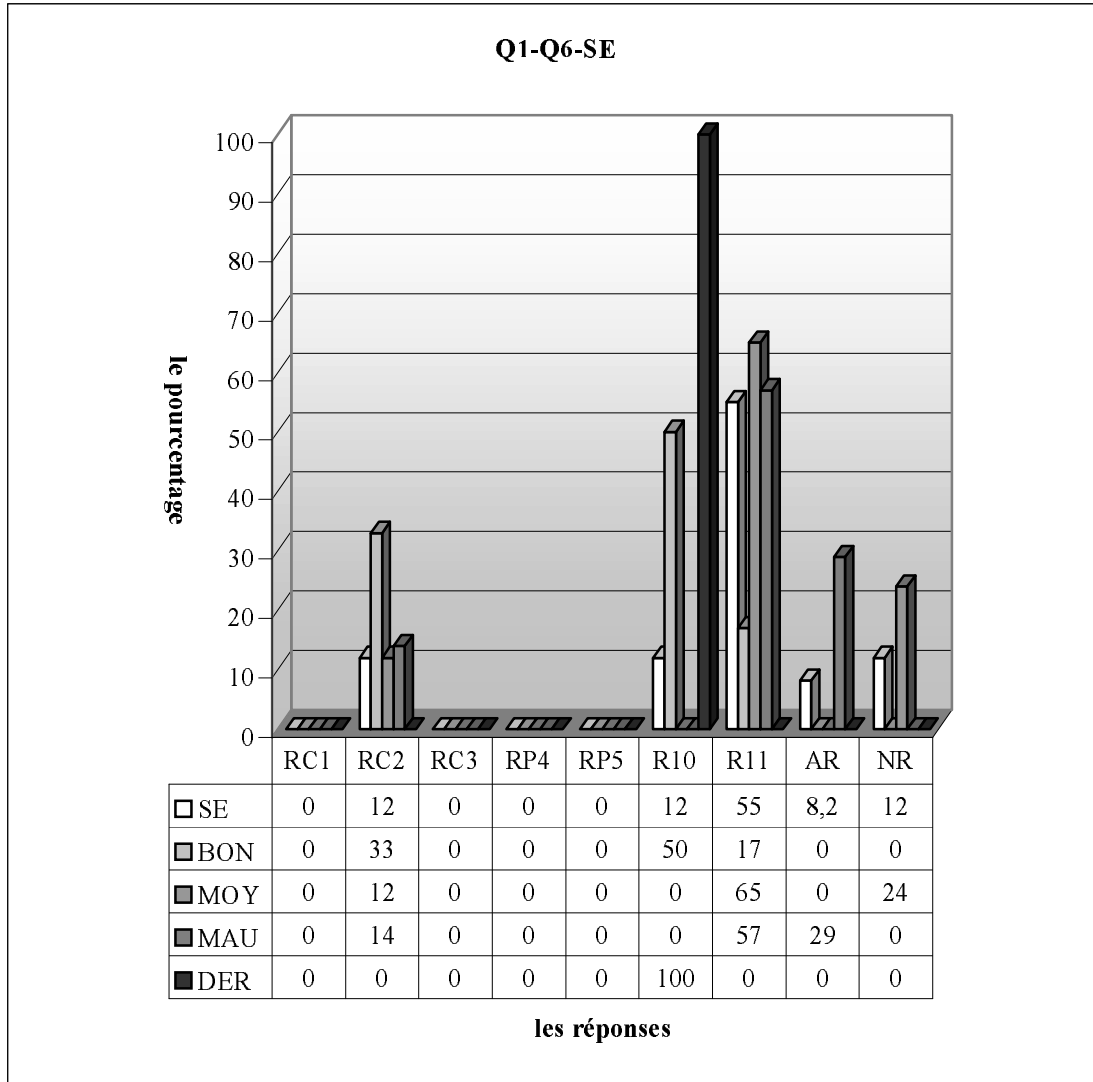
Le taux de réussite à cette question dans la classe D est de 68%. La seule démarche utilisée par les élèves est la démarche célébrée (la recette R_a). La grande partie des élèves (29%) font des erreurs dans la démarche de la réponse RC3 tandis que 4% des élèves trouvent simplement l'image de 2 sur f . On remarque cependant que tous les élèves répondent à la question.

En ce qui concerne les résultats des élèves par niveau, comme il n'y a aucun élève qui déclare qu'il est bon, la grande majorité des mauvais (86%) fournissent une réponse correcte contre 60% des moyens.

Les erreurs liées à la démarche de la réponse RC3 sont cependant plus fréquentes chez les moyens. Ainsi 35% d'entre eux commettent ce type d'erreurs contre 14% des mauvais. L'erreur consistant à trouver simplement l'image de 2 sur la fonction f est uniquement réservée aux moyens avec un taux de 5%.

L'une moitié des élèves de dérsané trouvent la bonne réponse à partir de la recette R_a tandis qu'une autre commettent des erreurs liées à la démarche de la réponse RC3.

2.6.3 Lycée Normal

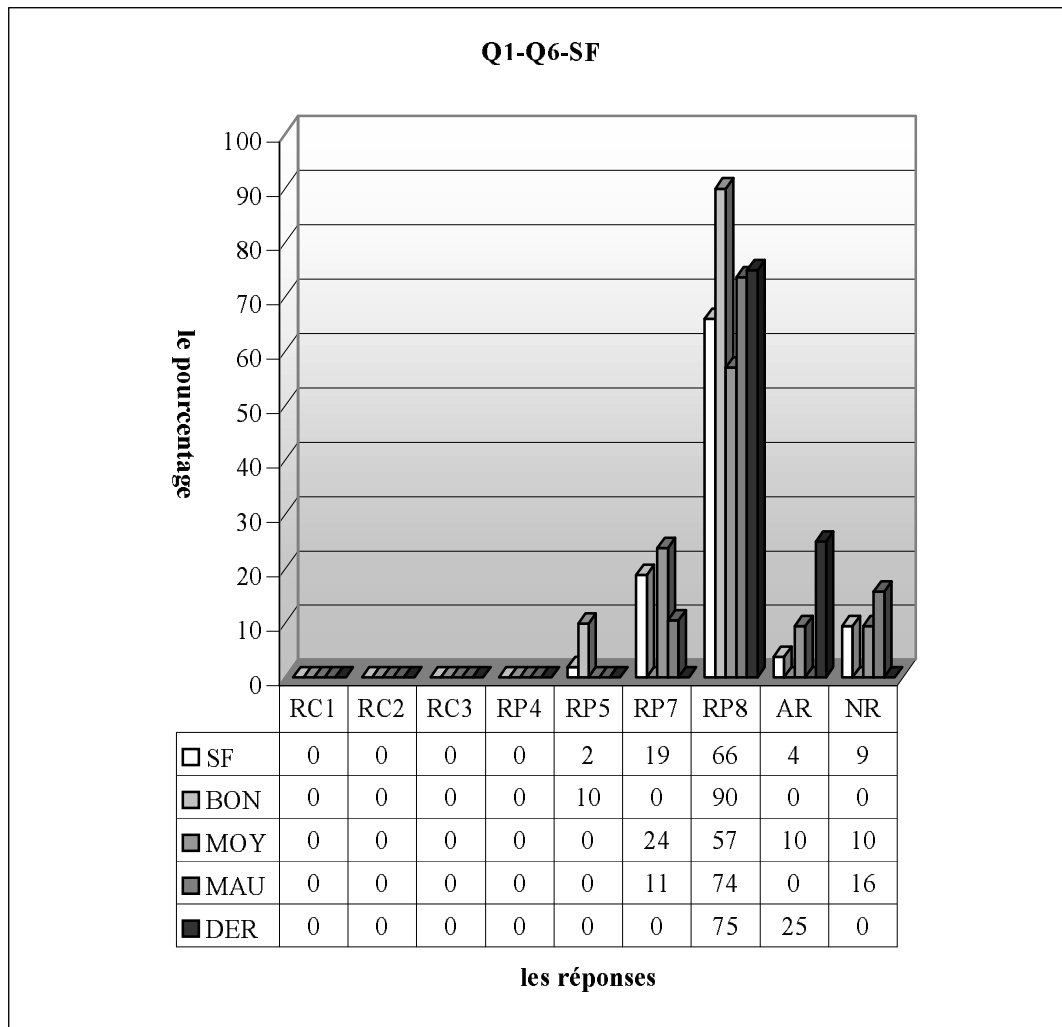


RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a , RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xy} , RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f . RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a , RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6 : l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f , RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xy} , RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xy} , RP11 : réponses incomplètes, AR : autres réponses, NR: non-réponses

En classe de seconde E, on ne rencontre pas les élèves qui utilisent la recette R_a et la démarche citée dans la réponse RC3. Le taux de réussite à cette question ne dépasse pas de 12%. Par ailleurs, la grande majorité des élèves (55%) ne peuvent pas terminer la résolution de la question dans la démarche partant sur la méthode M_{xy} . De plus les erreurs liées à cette méthode sont commises par 12% des élèves. Ce taux est aussi valable pour les élèves qui ne répondent pas à la question.

Si on regarde les résultats des élèves par niveau, il n'est pas très étonnant d'observer que le taux de réussite est plus élevé chez les bons. Un tiers de ces derniers trouvent donc la bonne réponse contre

12% des moyens et 14% des mauvais. La moitié des bons commettent cependant les erreurs relatives à la méthode M_{xy} . Par contre ce type d'erreurs est totalement absent chez les moyens et mauvais. Les réponses incomplètes sont plus fréquentes chez les moyens. Ainsi près des deux tiers d'entre eux ne peuvent pas terminer la résolution de la question contre 57% des mauvais et 17% des bons.



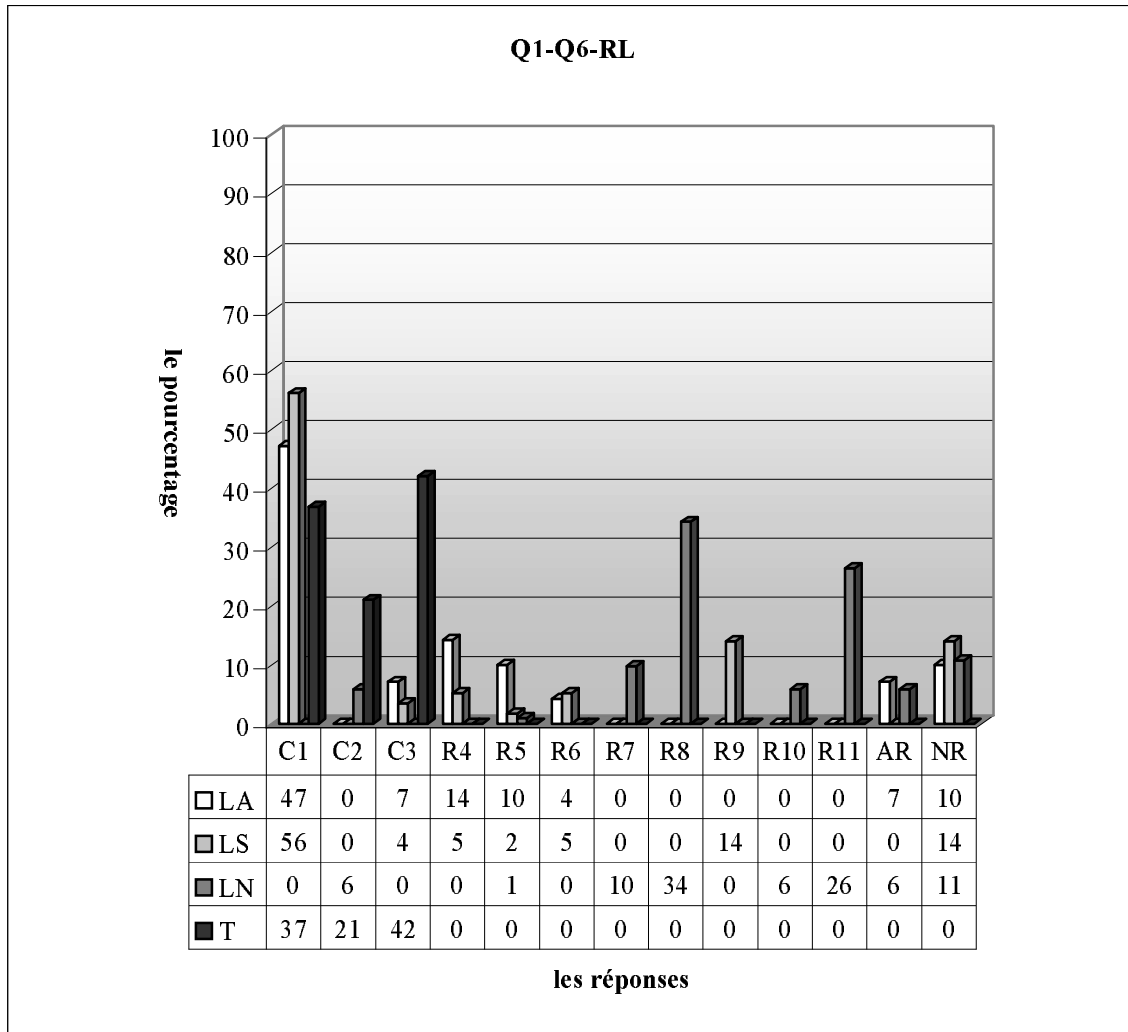
RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a . RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xy} . RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f . RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a . RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6: l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f , RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xy} , RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10: erreurs qui correspondent à la méthode M_{xy} , RP11 : réponses incomplètes, AR :autres réponses, NR: non-réponses

En ce qui concerne l'autre classe de ce lycée, il est très intéressant d'observer qu'il n'y a aucun élève qui donne la bonne réponse. 66% des élèves ne peuvent pas utiliser les deux cadres :cadres algébriques et fonctionnel. Alors certains égalisent le numérateur au dénominateur, d'autres essaient de trouver un nombre en faisant quelques opérations avec les données dans l'énoncé. Au début de la démarche de la méthode M_{xy} environ 19% des élèves changent simplement les places de x et y en passant plusieurs étapes intermédiaires tandis que la question n'est pas abordée par 9% des élèves.

Remarquons cependant que les élèves qui ne peuvent pas utiliser ensemble les deux cadres sont plus nombreux chez les bons élèves. Ainsi la grande majorité d'entre eux commettent ce type d'erreurs contre 74% des mauvais et 57% des moyens. Par ailleurs, 24% des moyens changent simplement les places de x et y en passant plusieurs étapes intermédiaires contre 11% des mauvais. Cette erreur est totalement absente chez les bons.

Quant aux élèves de dérsané, les trois quarts commettent l'erreur consistant à changer simplement les places de x et y et les élèves restant répondent autrement à la question.

2.6.4 Résultats des élèves par lycée



RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a , RC2 (Procédure 1): réponse correcte avec la méthode M_{xy} , RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f , RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a , RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6 : l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f , RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xy} , RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10 : erreurs qui correspondent à la méthode M_{xy} , RP11 : réponses incomplètes, AR : autres réponses, NR: non-réponses

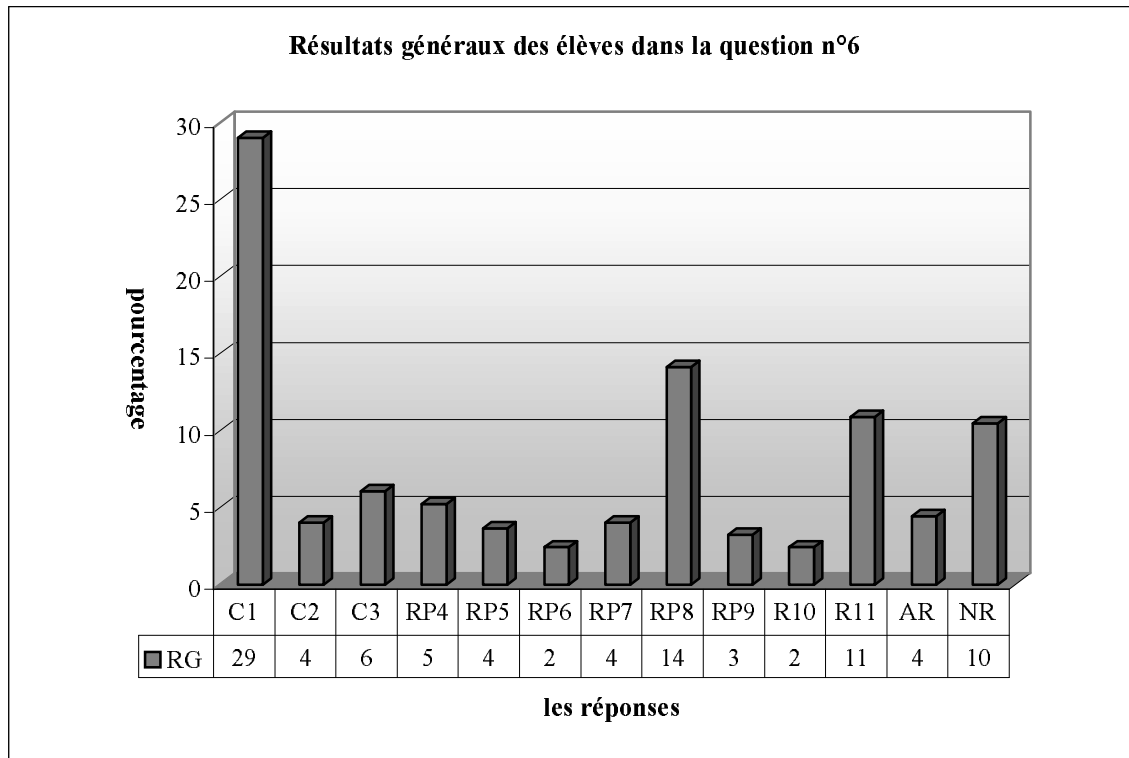
A nouveau nous sommes face à une question où les démarches privilégiées et les erreurs commises par les élèves se différencient suivant les lycées, et même suivant les classes. Dans le lycée Normal aucun élève ne privilégie la recette R_a tandis qu'il est majoritairement utilisé dans les autres. Par ailleurs, la démarche partant sur la définition de la fonction inverse ne paraît jamais dans ces deux derniers alors qu'elle conduit 21% des élèves de terminale et presque 6% des élèves du lycée Normal à trouver la bonne réponse.

Les erreurs célébrées dans les réponses RP7, RP8, RP10 et RP11 sont uniquement réservées aux élèves du lycée Normal tandis que l'erreur de la réponse RP9 ne paraît que dans le lycée Super.

Si on regarde l'aspect des erreurs dans les lycées, on rencontre les erreurs correspondant à la démarche utilisée, par exemple les erreurs provoquées par la mauvaise-application de la recette R_a sont commises par 14% des élèves dans le lycée Anatolien et 5% dans le lycée Super. 14% des élèves du lycée Super font des erreurs dans la démarche de la réponse RC3 tandis que 34% des élèves du lycée Normal ne peuvent pas passer du cadre algébrique au cadre fonctionnel dans la résolution de la question à partir de la méthode de « en fonction de y », 26% d'entre eux n'arrivent pas à terminer la résolution. Environ 10% des élèves du lycée Normal changent les places de x et y comme s'ils étaient à la dernière étape de la résolution.

En ce qui concerne le taux de réussite, plus de la moitié des élèves des lycées anatolien et super donnent la bonne réponse alors que le taux de réussite est seulement d'environ 6% dans le lycée Normal.

2.6.5 Résultats généraux des élèves



RC1 (Procédure 2) : réponse correcte avec la recette R_a , RC2 (Procédure 1) : réponse correcte avec la méthode M_{xfy} , RC3 (Procédure 4) : réponse correcte portant sur l'image de 2 par l'inverse de la fonction f , RP4 : erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a , RP5 : erreurs liées au calcul de l'image demandée, RP6 : l'élève trouve l'image de 2 sur la fonction f , RP7 : l'élève rend simplement x en y lorsqu'il utilise la méthode M_{xfy} , RP8 : les élèves ne peuvent pas articuler deux cadres, RP9 : l'élève devient perplexe dans la démarche de la réponse RC3, RP10 : erreurs qui correspondent à la méthode M_{xfy} , RP11 : réponses incomplètes, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le tableau précédent montre que plus du tiers des élèves répondent correctement à cette question. La grande majorité de ces bonnes réponses sont fournies en utilisant la recette R_a (29%). Il y a seulement 4% des élèves qui trouvent la bonne réponse en privilégiant la méthode M_{xfy} tandis que le taux de bonnes réponses avec la procédure 4 (RC3) est de 6%.

Les erreurs qui consistent à ne pas utiliser deux cadres ensemble, sont les erreurs les plus fréquentes, 14% des élèves commettent ainsi ce type d'erreurs. Par ailleurs, le taux des élèves qui n'arrivent pas à terminer la résolution de la question et donnent des réponses incomplètes est de 11%.

En ce qui concerne les autres erreurs commises par les élèves, elles ne sont pas très fréquentes. Par exemple, 5% des élèves commettent des erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette R_a , 4% des élèves font des erreurs de calcul, lors qu'ils calculent l'image demandée, 4% des élèves font des erreurs consistant à remplacer simplement x par y lors de l'utilisation de la méthode M_{xfy} et 2% des élèves font des erreurs liées à cette méthode.

Par ailleurs, un très petit nombre d'élèves trouve simplement l'image demandée par f et 3% des élèves n'arrivent pas à trouver la bonne réponse dans la démarche de la réponse RC3. Le taux d'autres réponses et celui de non-réponses ne sont pas plus élevés. Ainsi la question n'est pas abordée par 10% des élèves. Tandis que le taux des élèves qui répondent autrement à la question n'est que de 4%. Cela indique que la question est assez familière aux élèves.

2.6.6 Conclusion

En regardant les taux des procédures correctes, nous constatons que la procédure P2 dans laquelle la recette R_a est privilégiée est majoritairement utilisée. Cela nous permet de dire que les procédures utilitaires (ou les plus courtes) sont préférées par les élèves. De plus le fait que, dans cette question, le taux des élèves qui trouvent la bonne réponse à partir de méthode $M_{x_{fy}}$ soit beaucoup moins élevé que dans la question n°3 (4%-23%) montre que les élèves sont plus habitués à utiliser la recette R_a dans des fonctions rationnelles et que la recette R_a engendre moins de risques d'erreurs dans des fonctions rationnelles (5% des erreurs liées à la mauvaise utilisation de la recette contre 13% dans la question n°3).

Par ailleurs, dans les lycées anatolien et super les taux de réussite sont très proches et satisfaisants. La quasi-totalité des élèves qui trouvent la bonne réponse utilisent la recette R_a . Comme les élèves ne privilégient pas la méthode $M_{x_{fy}}$, il n'y a aucune réponse correcte ni aucune réponse erronée liée à cette méthode dans ces deux lycées. Cela montre bien qu'un enseignement très proche du concours est très favorisé. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà indiqué, les élèves du lycée Anatolien sont meilleurs en mathématiques que ceux des lycées super, parce qu'ils sont recrutés sur un concours. Mais il y a cependant une très petite différence entre les taux de réussite à cette question dans ces lycées. Cela nous conduit à nous demander si ce type de situations comme la recette R_a (mathématiquement peu riches) gomme la différence entre les élèves qui sont bons et ceux qui ne les sont pas. En ce qui concerne le lycée Normal, un très petit nombre des élèves peut trouver la bonne réponse. Contrairement aux élèves des autres lycées, il n'y a aucun élève qui utilise la recette R_a et la procédure 4. C'est pourquoi la plupart des erreurs sont liées à la méthode $M_{x_{fy}}$. De plus les aspects des erreurs commises par les élèves de ce lycée nous amènent à conclure qu'ils ont beaucoup de lacunes théoriques profondes (34% des erreurs consistent à ne pas utiliser deux cadres et 26% des réponses sont incomplètes).

2.7 Question n°7

Comme je l'ai dit plus haut, j'ai voulu ici voir si les élèves connaissent la définition de la fonction injective et qu'ils peuvent la réinvestir à l'occasion d'un exercice.

Je présente maintenant les catégories de réponse des élèves :

RC (Procédure 1) : réponse correcte.

$$2(-1)^2 + 6 = 8, \quad 2 \cdot 0 + 6 = 6, \quad 2(1)^2 + 6 = 8, \quad 2 \cdot (2)^2 + 6 = 14, \quad 2 \cdot (3)^2 + 6 = 24,$$

il faut sortir 1, $f(x) = \{(-1, 8), (0, 6), (1, 8), (2, 14), (3, 24)\} \dots \dots$ (SA30)

$x = -1 \quad f(-1) = 2 \cdot 1^2 + 6 = 8, \quad x = 1 \quad f(1) = 2 \cdot 1 + 6 = 8$ il faut sortir 1 ou -1 (SA24)

il faut sortir l'élément $\{-1\} \dots \dots$ (SB7)

$f(x) = 2 \cdot (-1)^2 + 6 = 2 \cdot 1^2 + 6$ pour que le même élément n'ait pas de deux images, il faut sortir 1 ou -1 (T5)

RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f.

$$f(x) = 2x^2 + 6 = 2 \cdot -1 + 6 = -2 + 6 = 4, \quad = 2x^2 + 6 = 2 \cdot 0^2 + 6 = 2 \cdot 1 + 6 = 8, \quad = 2x^2 + 6 = 2 \cdot 1^2 + 6 = 8, \\ = 2x^2 + 6 = 2 \cdot 2^2 + 6 = 14, \quad = 2x^2 + 6 = 2 \cdot 3^2 + 6 = 18 + 6 = 24 \dots \dots$$
 (SF9)

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 6 = 8, \quad f(0) = 2 \cdot 0 + 6 = 6, \quad f(1) = 2 \cdot 1 + 6 = 8,$$

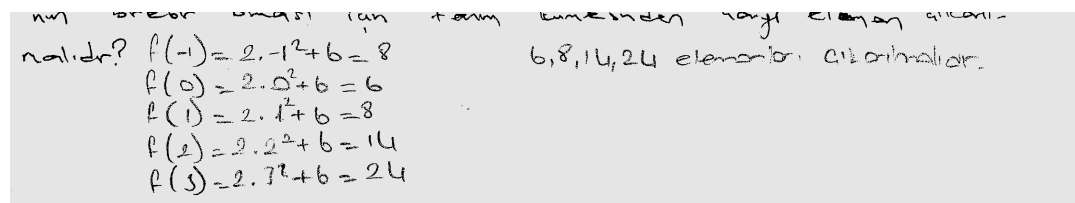
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 6 = 10, \quad f(3) = 2 \cdot 3 + 6 = 12 \dots \dots$$
 (SA26)

RP2 : erreur des éléments à supprimer.

$$f(-1) = 2 \cdot -1^2 + 6 = 8, \quad f(0) = 2 \cdot 0^2 + 6 = 6, \quad f(1) = 2 \cdot 1^2 + 6 = 8,$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 6 = 9, \quad f(0) = 2 \cdot 0^2 + 6 = 8, \quad f(1) = 2 \cdot (1)^2 + 6 = 8,$$

$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 6 = 14, \quad f(3) = 2 \cdot 3^2 + 6 = 24$ comme chaque élément a sa correspondance, il ne faut supprimer aucun élément (SA9)



... il faut sortir les éléments 6, 8, 14, 24 (SA20)

RP3 : erreurs de calcul.

Pour $x=0$, $2x^2+6=2.0^2+6=6$

Pour $x=-1$, $2x^2+6=2(-1)^2+6=-2+6=4$

Pour $x=1$, $2x^2+6=2.1^2+6=8$

Pour $x=2$, $2x^2+6=2.2^2+6=8+6=14$

Pour $x=3$, $2x^2+6=2.3^2+6=17... ..(SA36)$

$f(-1)=2.(-1)+6=6$, $f(0)=2.0^2+6=6$, $f(1)=2.1^2+6=8$, $f(2)=2.2^2+6=12$,

$f(3)=2.3^2+6=24$ $f(-1), f(0)$ ne se fait pas correspondance au même ensemble (ils veulent dire au même élément), on doit supprimer l'un des deux... ..(SB25),(SB26)

RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et -1.

$2. -1^2+6,$

$2.1+6,$

$2+6=8$

il faut supprimer $=6$

2.0^2+6

$0+6$

2.1^2+6

$2.1+6$

$2+6$

2.3^2+6

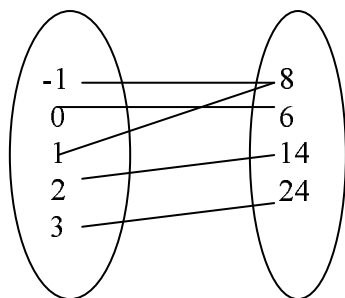
$2.9+6$

$18+6$

RP5 : l'élève trouve les images sur la : $=8$ $=24$ quelques éléments de l'ensemble d'images.

okulda almas o'dugunuz liryorsunuz?

Il faut enlever 8. Car 8 peut avoir une seule image dans l'ensemble de définition... ..(SD27)



Pour $x=-1$
 $=2.1+6$
 $=8$

Pour $x=0$
 $=0+6$
 $=6$

Pour $x=1$
 $=2+6$
 $=8$

Pour $x=2$, $=14$

Pour $x=3$, $=24$. le résultat : il faut supprimer 8. Sinon la fonction semble comme une fonction fixe... ..(SD18)

RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f.

$2. -1^2+6$

$2+1+6$

$=9... ..(SE51)$

RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et -1 sur f.

(SE35)

Autres Réponses:

$f: A \rightarrow B, f(x)=2x^2+6=4+6=10... ..(SE23)$

$f: A \rightarrow B, f(x)=2x^2+6$ et $A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}, f(x)=2x-6 A=\{1, 2, 3\} \dots (SA14)$
 $1, 2, 3, 0, 5, 7=8 \dots (SE8)$

on met $x = -1, 2x+6, 2-1^2+6=8$, comme 8 n'est pas dans l'ensemble A, donc il faut sortir -1.....(SE15)

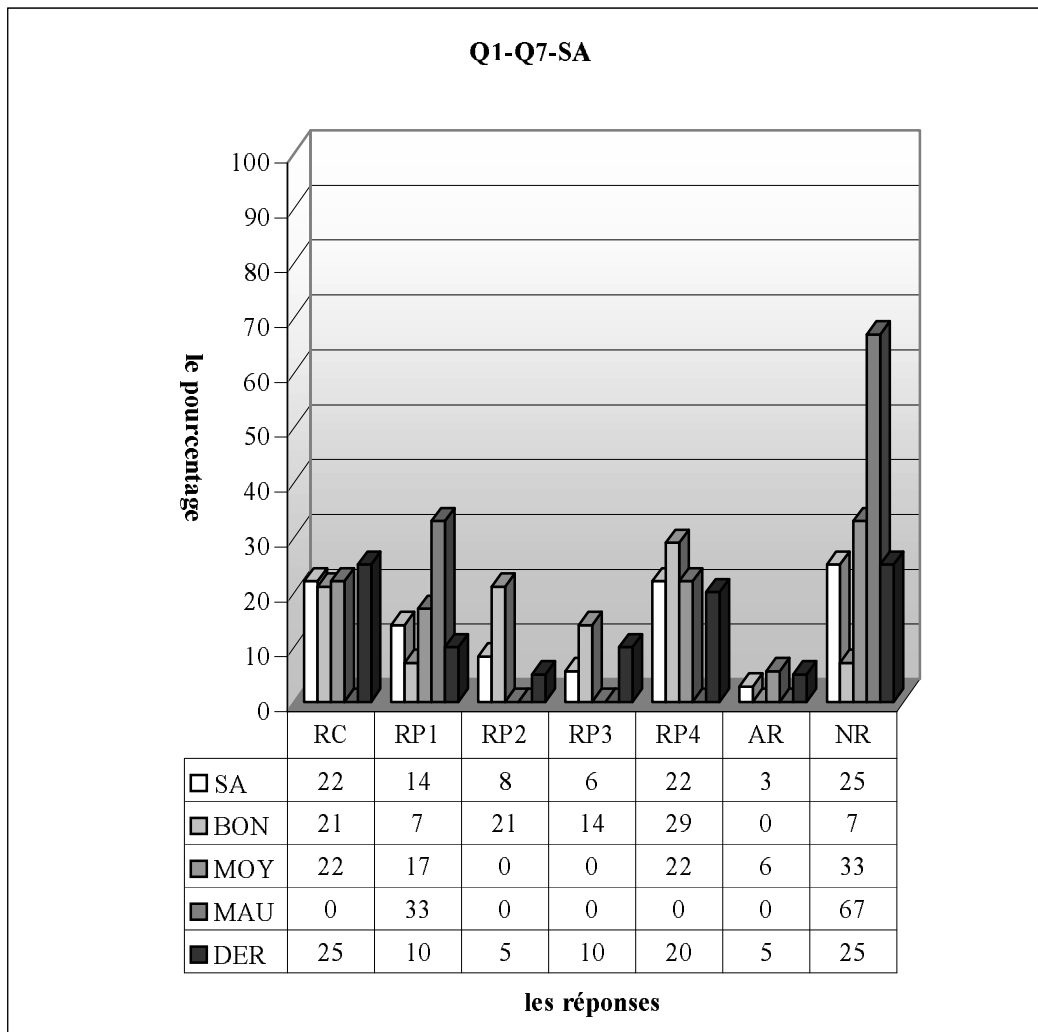
Non-réponses :

Maintenant je vais passer à l'analyse des résultats des élèves lycée par lycée :

2.7.1 Lycée Anatolien

Comme la question n'est pas un simple exercice d'application, (les élèves doivent savoir et adapter la définition de la fonction injective à la résolution de la question) j'attends que cela fasse chuter le taux de réussite dans le lycée.

Bien qu'il soit suffisant de sortir l'un des deux, je suppose que la bonne partie des élèves auraient tendance à supprimer les deux 1 et -1 dans l'ensemble de définition.



RC (Procédure 1) : réponse correcte, RP1 : l'élève ne trouve que les images des éléments de l'ensemble A sur f, RP2 : erreur des éléments à supprimer, RP3 : erreurs de calcul, RP4 : l'élève supprime les éléments 1 et -1, RP5 : l'élève trouve les images sur la fonction f. Ensuite il supprime quelques éléments de l'ensemble d'images, RP6 : l'élève trouve les images de quelques éléments sur la fonction f, RP7 : L'élève trouve l'image de 1 et -1 sur f, AR : autres réponses, NR : non-réponses

Le tableau ci-dessus montre qu'en classe de seconde A, le taux de réussite est de 22%. Ce taux monte à 44%, si l'on prend comme correcte la réponse RP4 qui est donnée par les élèves qui suppriment les deux nombres -1 et 1. 14% des élèves trouvent cependant l'image des éléments de l'ensemble A sur la fonction f sans mettre en cause l'injection. L'erreur des éléments à supprimer est faite par 8,3% des élèves. Tandis qu'environ 6% des élèves commettent les erreurs de calcul dans une démarche correcte.