HAL
open science

Instabilité d'un lit granulaire cisaillé par un écoulement fluide

Vincent Langlois

To cite this version:

Vincent Langlois. Instabilité d'un lit granulaire cisaillé par un écoulement fluide. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT : . tel-00011456

HAL Id: tel-00011456

https://theses.hal.science/tel-00011456v1

Submitted on 24 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° Ordre : 3287

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de : ***DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1***

Mention : Physique

PAR

Vincent LANGLOIS

Équipe d'accueil : Groupe Matière Condensée et Matériaux

École Doctorale : Sciences de la Matière

Composante universitaire : U.F.R. Structure et Propriétés de la Matière

TITRE DE LA THÈSE :

Instabilité d'un lit granulaire cisaillé par un écoulement fluide

soutenue le 09 décembre 2005 devant la commission d'examen

COMPOSITION DU JURY :

M. François CHARRU	Professeur, Université P. Sabatier de Toulouse	Rapporteur
M. Philippe DAVY	Directeur de recherches, Université Rennes 1	Examinateur
M. John HINCH	Professeur, Université de Cambridge	Président du jury
M. Jean-Pierre HULIN	Directeur de recherches, Université Paris Sud	Rapporteur
M. Alexandre VALANCE	Chargé de recherches, Université Rennes 1	Directeur de thèse
M. José-Eduardo WESFREID	Directeur de recherches, ESPCI	Examinateur

« In terra nostra est quoddam mare sine aqua sed harena tantum movetur et intumescit undas ad similitudinem alterius et nunquam est tranquillum. »

Lettre du Prêtre Jean (anonyme, XIIe s.)

Sur notre terre, se trouve une mer non pas d'eau mais de sable. Le sable bouge, en effet, et forme des vagues, à l'instar de toute autre mer, et jamais il n'est tranquille.
[*Bejczy*, 2001]

Remerciements

Je tiens évidemment à remercier en premier lieu Alexandre Valance qui m'a orienté et conseillé pendant ces trois ans (et demi). Sa très grande disponibilité, la liberté au jour le jour dont j'ai bénéficié et la confiance qu'il m'a témoignée en m'incitant très souvent à présenter mes résultats en congrès ont été précieuses.

Je remercie vivement mes rapporteurs, François Charru et Jean-Pierre Hulin, d'avoir bien voulu consacrer du temps à la lecture détaillée de ce manuscrit, ainsi que les autres membres du jury : Philippe Davy, John Hinch et José-Eduardo Wesfreid, pour l'attention qu'ils ont prêtée à mes travaux.

Merci beaucoup à Pascal Dupont de nous avoir prêté (et transporté) le matériel de P.I.V. ainsi que l'anémomètre Doppler, et pour tous ses précieux conseils en mécanique des fluides expérimentale.

Un très grand merci à Stéphane Bourlès, qui a réussi à transformer de vagues idées griffonnées sur le papier en une manip' imposante et fonctionnelle, et à Patrick Chasle, qui en a réalisé la partie « acquisition des données » ; merci aussi à Stéphane de savoir entretenir et aviver l'enthousiasme pour la vulgarisation et la communication avec les habitants du monde réel.

Un autre très grand merci à Luc, qui a réussi à sauver le contenu de mon ordinateur à d'innombrables occasions, y compris à distance depuis une plage corse.

Il me faut bien sûr remercier Nico et Jen, qui m'ont accompagné pendant toute cette thèse, pour, disons, plein de délicieux gâteaux (et beaucoup d'autres choses).

Merci à Jérôme avec qui cela a été un bonheur de partager de longues discussions scientifiques et surtout non scientifiques, et (souvent en même temps) de jolies balades à vélo.

Mercis enfin à Franck, Philippe, Jeff, Dah, et tous ceux qui ont passé quelque temps dans la salle des thésards, dont l'ambiance n'a pas peu contribué au plaisir de faire cette thèse. Et également à Manu, Djaoued, Patrick, Cédric... et à tous les membres de l'équipe granulaires/mousses, et des autres équipes du G.M.C.M., en particulier à Véronique de m'avoir fait confiance pour de nombreux enseignements, et à Émilie pour les photos au microscope.

Et merci aussi à beaucoup d'autres gens, mais ça n'a plus grand chose à voir avec la thèse.

Sommaire

Introduction **11**

1 Instabilités d'érosion : contexte et motivations **13**
1.1 Introduction . . . 13
1.1.1 Quelques exemples géomorphologiques . . . 13
1.1.2 Motivations . . . 17
1.2 État des connaissances . . . 19
1.2.1 Rides sous-marines . . . 20
Sous écoulement oscillant . . . 20
Sous écoulement continu . . . 22
1.2.2 Dunes et rides . . . 25
Tridimensionnalité . . . 26
1.2.3 Rides éoliennes . . . 26

2 Méthodes expérimentales **29**
2.1 Description du dispositif expérimental . . . 29
Le canal d'écoulement . . . 30
Entrée du canal . . . 30
Alimentation en eau . . . 32
Mesure du débit . . . 32
Milieu granulaire . . . 33
2.2 Méthodes de mesure du profil de hauteur . . . 34
2.2.1 Télémétrie laser . . . 34
2.2.2 Relevé du profil par déviation d'une nappe laser . . . 36
2.3 Mesure du champ de vitesses par P.I.V. . . . 37
2.3.1 Principe de la P.I.V. . . . 37
2.3.2 Caractérisation de l'écoulement . . . 40

3 Résultats expérimentaux **45**
3.1 Initiation des rides . . . 45
3.1.1 Protocole expérimental . . . 45
3.1.2 Mesure de la longueur d'onde moyenne . . . 46
3.1.3 Influence du débit d'eau . . . 48
3.1.4 Influence de la taille des grains . . . 48
3.2 Dynamique et mûrissement . . . 51

3.2.1 Croissance et allongement de la longueur d'onde 51
Influence de la taille des grains 53
3.2.2 Tridimensionnalité 55
3.3 Instabilité transverse 57
3.3.1 Observations expérimentales 57
Dynamique d'un tas bidimensionnel (dièdre) 57
Apparition des sillons 57
3.3.2 Mécanisme de l'instabilité 60
3.3.3 Évolution aux temps longs 65

4 Approche théorique : analyse de stabilité linéaire 67
4.1 Description du problème 67
4.1.1 Motivations 67
4.1.2 Mécanisme physique de l'instabilité 68
4.2 Modélisation du problème 69
4.2.1 Écoulement du fluide 69
4.2.2 Transport des grains 73
Modèle de base 74
Effet de la pente 76
Effet de l'inertie des grains 77
4.2.3 Principe du calcul 79
4.3 Stabilité marginale 81
4.3.1 Principe de l'analyse de stabilité linéaire 81
4.3.2 Relation de dispersion 82
Sans mécanisme stabilisant 83
Effet de la pente 84
Effet de l'inertie des grains 86
4.3.3 Comparaison des deux régimes 88

5 Instabilité tridimensionnelle 91
5.1 Extension du modèle à trois dimensions 91
5.1.1 Écoulement du fluide 91
5.1.2 Transport des grains 92
Effet de l'inertie des grains 94
5.2 Stabilité marginale 95
5.2.1 Solutions des équations hydrodynamiques 96
5.2.2 Relation de dispersion 99
Diagramme de stabilité 100
Influence des paramètres libres 101
Vitesse de déplacement 102
5.2.3 Introduction de l'inertie 102
5.3 Analyse faiblement non-linéaire 103
5.3.1 Quelles non-linéarités ? 104
5.3.2 Choix des modes résonants 105
5.3.3 Dynamique non-linéaire 106

5.3.4 Motifs stationnaires 108
5.4 Pertinence des résultats - discussion 111

6 Mûrissement et dynamique non-linéaire 113
6.1 Simulations numériques à deux dimensions 113
6.1.1 Principe du programme 114
Schéma itératif 114
Méthodes numériques 114
Grandeurs physiques 115
Grandeurs caractéristiques des rides 116
6.1.2 Champ de vitesses 116
6.1.3 Croissance en régime linéaire 118
Inertie et effet de pente 118
Influence de la loi de transport 119
6.1.4 Mûrissement 121
Évolution des grandeurs caractéristiques 121
Influence de la taille de la boîte 123
6.2 Équations modèles 123
6.2.1 Mûrissement 2D 125
Une solution analytique ? 125
6.2.2 Mûrissement dans d'autres types d'instabilité 128
Instabilité de type II 129
Instabilité de type III 131
6.3 Dynamique à trois dimensions 133
6.3.1 Modèle simplifié 133

Conclusions 139

Annexe A Expressions analytiques en 2D 143
A.1 Écoulement 2D 143
A.2 Analyse de stabilité 145
A.3 Longueur d'onde la plus instable 146

Annexe B Expressions analytiques dans le cas tridimensionnel 147
B.1 Constantes d'intégration pour le champ de vitesses 147
Expressions des constantes en profondeur infinie 148
B.2 Expressions détaillées du cisaillement en surface 148
B.3 Analyse non-linéaire : recherche des états stationnaires 149

Table des notations 151

Liste des publications 153

Bibliographie 155

Introduction

Les matériaux granulaires ont suscité depuis une vingtaine d'années un regain d'intérêt de la part des physiciens, et ont fait l'objet récemment de nombreuses études. Bien qu'ils soient constitués d'une collection d'objets solides, au comportement bien connu, les forces d'interaction internes (chocs, frottement solide) sont non-linéaires, et l'ensemble peut présenter des comportements allant du solide au gaz en passant par le liquide. La difficulté dans leur modélisation est donc de relier les lois à l'échelle «microscopique» (qui est ici l'échelle du grain), à la description de leur comportement d'ensemble. Contrairement aux liquides ou aux solides élastiques, les lois constitutives des milieux granulaires restent donc encore à établir. Après avoir étudié successivement leur comportement statique (propriétés géométriques et rhéologiques des empilements, percolation, vieillissement,...) et dynamique (écoulements gravitaires, avalanches, réaction au cisaillement,...), l'attention des physiciens s'est naturellement portée sur l'interaction d'un milieu granulaire et d'un écoulement fluide (autre que le fluide interstitiel).

Cette interaction est à l'origine d'une très grande variété de structures géologiques (rides, dunes, bancs de sable,...), et le transport de grains de sable par le vent ou l'eau était déjà l'objet de multiples études en géophysique, sédimentologie, ingéniérie chimique et hydraulique, géographie. L'étude du transport éolien et de la formation des dunes, en particulier, remonte à la colonisation de l'Afrique saharienne par les puissances européennes à la fin du XIXe siècle et prend son essor avec les travaux de Bagnold [*Bagnold*, 1941]. Si les lois de l'hydrodynamique sont parfaitement connues, leur résolution, en particulier dans le cas turbulent, et plus encore dans un domaine borné par un relief complexe, reste délicate. Comme nous l'avons dit, le comportement du milieu granulaire est, quant à lui, encore mal modélisé. Enfin, comme nous l'exposerons plus avant dans la thèse, les phénomènes se produisant à l'interface entre le lit granulaire et le fluide, c'est-à-dire le transport des grains par le fluide, sont également très mal connus (malgré plusieurs décennies d'études dans les diverses domaines déjà énumérés). Il est pourtant nécessaire, pour appréhender la formation des rides ou des dunes, de coupler la physique de ces trois domaines. L'objectif de cette thèse est de mieux isoler et comprendre les mécanismes à l'œuvre dans le cas particulier de la formation des rides sous écoulement liquide continu. En nous basant sur

les résultats expérimentaux, théoriques et numériques, nous tenterons en particulier de comprendre la formation de motifs tridimensionnels.

Plan de l'exposé

La thèse est divisée en six chapitres. Nous commencerons dans le premier chapitre par exposer l'objet et l'intérêt de cette étude, et nous dresserons un état des lieux des connaissances actuelles sur les instabilités d'érosion, et en particulier sur les rides sous-marines.

Le chapitre 2 présente le dispositif que nous avons mis en place pour l'étude expérimentale, ainsi que les principales techniques de mesure utilisées au cours de la thèse, en particulier la technique de vélocimétrie par image de particules.

Dans le chapitre 3 sont détaillés les résultats expérimentaux. On s'intéressera d'abord au phénomène d'apparition des rides dans les premiers instants, puis à leur évolution, en particulier l'augmentation de la longueur d'onde ainsi que leur tridimensionnalisation, sur des temps plus longs. Enfin, nous décrirons une étude préliminaire concernant une instabilité secondaire que nous avons pu mettre en évidence.

Les chapitres 4 et 5 concernent les travaux théoriques réalisés parallèlement sur les mécanismes de l'instabilité. Dans le chapitre 4 nous présentons la modélisation classique du phénomène ainsi que l'analyse de stabilité linéaire à deux dimensions. Nous introduisons ensuite un nouveau mécanisme et ses conséquences sur les prédictions analytiques. Dans le chapitre 5, nous étendons la modélisation à un système tridimensionnel. L'analyse de stabilité linéaire est prolongée par un étude théorique faiblement non-linéaire, qui met en évidence l'existence possible de motifs tridimensionnels stables.

Enfin, le chapitre 6 présente une étude plus fondamentale sur l'évolution non-linéaire (et en particulier le phénomène de mûrissement) des structures. Nous exposons tout d'abord des simulations numériques bidimensionnelles basées sur le modèle présenté au chapitre 4, et permettant d'accéder au comportement non-linéaire des rides. Dans un deuxième temps, l'instabilité est simulée numériquement à l'aide d'une équation-modèle aux dérivées partielles. Le mûrissement est alors abordé successivement en deux et trois dimensions.

Chapitre 1 Instabilités d'érosion : contexte et motivations

Dans ce chapitre nous ferons une présentation générale du cadre dans lequel s'inscrit ce travail de thèse, en commençant par une brève description des diverses structures formées par l'interaction entre un fluide en mouvement et un milieu granulaire – et dont les rides sous-marines ne sont qu'un exemple. Nous expliciterons ensuite plus précisément quel est l'état des connaissances dans ce domaine, en nous appuyant sur les travaux théoriques, expérimentaux et numériques antérieurs, tant en physique qu'en géophysique ou dans d'autres domaines.

1.1 Introduction

1.1.1 Quelques exemples géomorphologiques

L'interaction entre un fluide en écoulement et un milieu granulaire est présente partout dans la nature : c'est pourquoi ce domaine a été depuis longtemps objet d'investigation des géomorphologues. Que l'on soit en présence de vent, de courants fluviaux ou marins, ou de vagues, ce couplage crée, à des échelles très diverses, de nombreuses structures remarquables.

- Les plus petites sont les rides de sable :
  - sous-marines : ces structures ont une largeur d'une dizaine de centimètres pour une hauteur de quelques centimètres. On peut marcher dessus en bord de mer, comme dans la baie du Mont Saint-Michel (cf. Fig. 1.1(a)), où elles peuvent être formées soit par le mouvement des vagues, soit par le va-et-vient de la marée. On peut également les observer au fond des petits cours d'eau à fond sablonneux (comme sur la figure 1.1(b)), où elles sont dues au courant continu. Ces rides intéressent également les paléontologues : en effet, il arrive que leur forme soit

(a) (b)

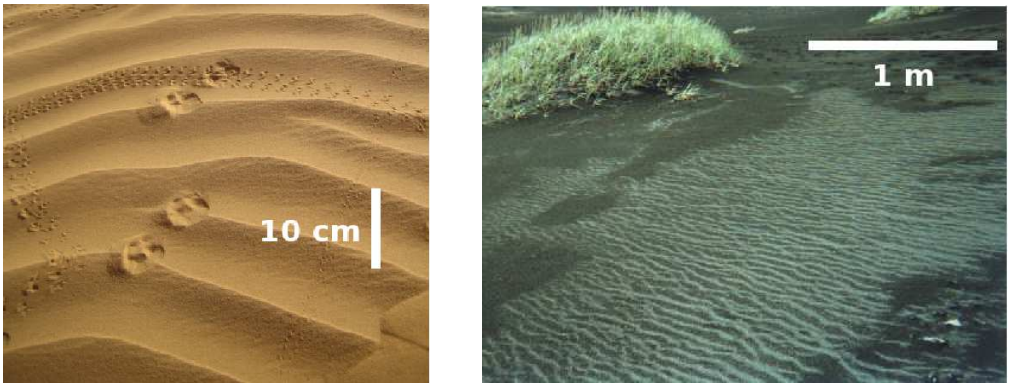
FIG. 1.1 – (a) Baie du Mont Saint-Michel ; (b) Ruisseau à sec au pied du glacier d'Otemma (Suisse).

«fossilisée» en même temps que le fond vaseux sur lequel elles s'étaient développées. On peut par exemple trouver de telles rides, parsemées de traces de pas de dinosaures, sur des dalles calcaires dans les Alpes suisses (Fig. 1.3(a)). Leurs caractéristiques peuvent alors fournir des renseignements sur l'environnement de la région (profondeur de l'eau, importance du courant, etc.) à l'époque de leur formation.

– éoliennes : de même taille que les précédentes, elles se rencontrent à la surface des grandes dunes sahariennes (Fig. 1.2(a)), ou dans des endroits plus inattendus (Fig. 1.2(b)).

- Dans certaines conditions, on observe également dans le désert une structure similaire à une échelle plus grande : les méga-rides (cf. Fig. 1.3), dont la longueur d'onde atteint 1 m. Elles se forment quand le sable disponible est bidisperse, c'est-à-dire qu'il contient deux tailles de grains très différentes.

- Les dunes proprement dit, se rencontrent aussi bien dans l'air que dans l'eau. L'*American Geological Survey* classe les dunes éoliennes en cinq catégories principales (cf. Fig. 1.4) : barchanes (croissants), dômes, dunes linéaires, dunes paraboliques et dunes en étoile. Leur taille varie d'une dizaine à plusieurs centaines de mètres. Leur morphologie est essentiellement gouvernées par la régularité du vent et la quantité de sable disponible. On trouve également des dunes de sable en environnement fluvial : les dunes détectées au fond du Rhin (Fig. 1.5(a)) ont une longueur d'onde de l'ordre



(a) (b)

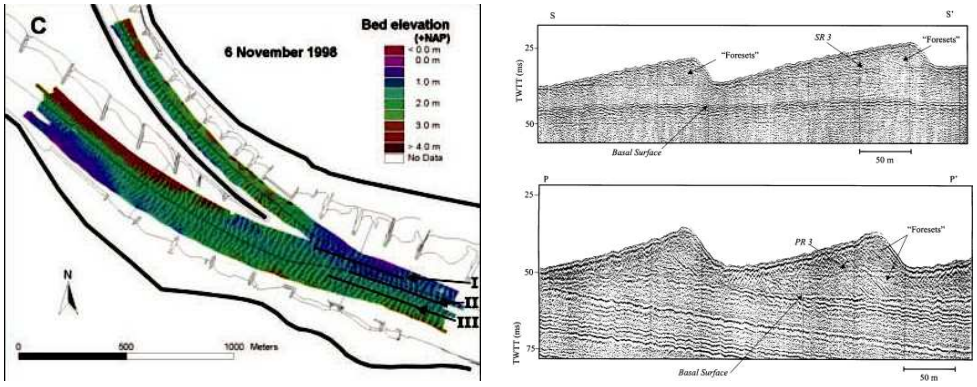
FIG. 1.2 – (a) Rides éoliennes en gros plan (Mauritanie) ; (b) Désert des Damnés (Islande). Après la pluie, le sable volcanique, noir, sèche plus rapidement sur les crêtes des rides, d'où la couleur blanchâtre de celles-ci.

(a) (b)

FIG. 1.3 – (a) Rides «fossiles», vallon d'Émosson (Suisse).(b) Méga-rides (Algérie).

FIG. 1.4 – Différents types de dunes éoliennes. De haut en bas et de gauche à droite : barchane (Mauritanie), dunes paraboliques (Nouveau-Mexique), dunes longitudinales (Désert du Namib), dunes transverses (Mexique), et dunes étoiles vue du sol (Maroc) et du ciel (Namib).

de 10 m pour une hauteur de 1 m. Sur les fonds marins, les plus grosses structures peuvent atteindre plusieurs dizaines de mètres en hauteur comme en largeur (cf. Fig. 1.5(b)). Dans les deux cas, éolien et sous-marin, les champs de dunes peuvent couvrir des dizaines de kilomètres carrés, comme l'illustre la figure 1.6.



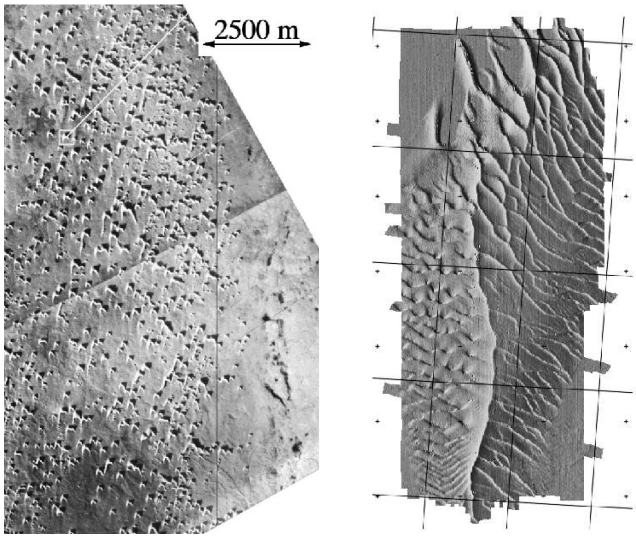
(a) (b)

FIG. 1.5 – (a) Relevé topographique du fond du Rhin (Pays-Bas) lors d'une crue (d'après *Wilbers et Brinke* [2003]).
(b) Relevé du relief sur un banc de sable en Manche, par tomographie sismique (d'après *Bastos et al.* [2003]).

- On peut également mentionner quelques structures plus éloignées de l'objet de notre étude [*Kondolf et Piégeay*, 2003], comme les bancs de sable alternés (cf. Fig. 1.7(b)), qui apparaissent dans le cours de certains canaux [*Nelson*, 1990], les méandres et les tresses des rivières (cf. Fig. 1.7(a)), qui font l'objet de nombreuses études en géophysique [*Métivier et Meunier*, 2003] en raison de leur importance dans le transport global de sédiments. Les instabilités de ligne de côte (cf. Fig. 1.7(c)) [*Murray et Ashton*, 2004], structures sédimentaires dont la longueur d'onde peut atteindre plusieurs centaines de kilomètres, obéissent également à des mécanismes similaires.

1.1.2 Motivations

Le même phénomène, l'érosion d'un matériau sédimentaire par l'air ou l'eau, est donc à l'origine de l'apparition récurrente de motifs réguliers et surprenants dans des environnements a priori chaotiques, et aussi bien à l'échelle d'un ruisseau comme à celle d'un continent. La beauté de ces structures et la compréhension des mécanismes de leur formation sont des motifs en soi pour les étudier. Le pionnier en la matière, Ralph Bagnold,



(a) (b)

FIG. 1.6 – (a) Champ de barchanes au Maroc (d'après *Hersen* [2004b])
(b) Champ de dunes en Mer du Nord (d'après *Garlan* [2004]).

(a) (b) (c)

FIG. 1.7 – (a) Rivière en tresse (Islande).
(b) Bancs de sable alternés dans une rivière, Hokkaido (Japon) (`http ://env-web.ceri.go.jp/`).
(c) Côte nord de la mer d'Azov (`http ://visibleearth.nasa.gov/`).

écrit : « Lorsque l'on observe les dunes du désert, au lieu de n'y rencontrer que chaos et désordre, on ne peut être que frappé par une simplicité de forme, une exactitude dans la répétition, un ordre géométrique qui n'ont d'équivalent dans la nature que dans les structures cristallines. Par endroits, de vastes amoncellements de sable pesant des millions de tonnes, se déplacent inexorablement, en formation régulières, sur la surface du pays, tout en grossissant, en conservant leur forme et même en se multipliant, d'une façon qui est, par son étrange imitation de la vie, un peu troublante pour un esprit imaginatif » [*Bagnold*, 1941].

Mais ces phénomènes peuvent également revêtir une importance matérielle. Dans les pays désertiques (au Sahara bien sûr, mais aussi dans le nord de la Chine notamment), le déplacement des dunes pose de sérieux problèmes : des masses de sable parfois énormes peuvent recouvrir et endommager les infrastructures (routes, voies ferrées), voire menacer d'envahir les zones cultivées ou habitées – Nouakchott, la capitale de la Mauritanie, et une grande partie des terres fertiles au nord de Pékin pourraient être ensablées d'ici quelques dizaines d'années.

Les dunes et bancs de sable sous-marins, quant à eux, font l'objet d'une surveillance constante par les services hydrographiques (en France, le S.H.O.M.). En effet, en se déplaçant ils peuvent perturber les voies de navigation ou les chenaux des ports, et recouvrir des pipelines et des câbles sous-marins. Plus généralement, le transport sédimentaire est aussi à l'origine de problèmes d'ensablement dans les ports, les canaux, ou dans encore la baie du Mont Saint-Michel. Il peut donc s'avérer crucial de mieux comprendre, à un niveau fondamental, la physique gouvernant le comportement de ces objets, pour améliorer les prédictions et éventuellement, à long terme, trouver des solutions pour éviter les ensablements.

1.2 État des connaissances

Diverses approches ont été utilisées pour modéliser la formation de ces diverses structures : la démarche la plus naturelle consiste à étudier l'évolution de l'interface fluide/granulaire en couplant les comportements de chacune des phases. Cette méthode est en particulier utilisée pour mener des analyses de stabilité linéaire. Pour reproduire les comportements non-linéaires, dans le cas éolien en particulier, il peut être plus intéressant de considérer chaque dune comme un objet individuel, et de chercher des lois phénoménologiques qui reproduisent les interactions entre objets voisins. Des modèles d'automates cellulaires ont également été appliqués et permettent de reproduire différents motifs dunaires [*Nishimori*

et al., 1997], mais les mécanismes physiques réels sont alors quelque peu «masqués».

1.2.1 Rides sous-marines

Sous écoulement oscillant

Les premières études expérimentales sur la formation des rides ont vu le jour dès la fin du XIXe siècle, avec *de Candolle* [1882]; *Darwin* [1883]; *Ayrton* [1910], qui observent les tourbillons formés derrières les rides sous écoulement oscillant. Par la suite, *Bagnold* [1946] utilise un dispositif semblable (cf. Fig. 1.8) où le lit de sable est mis en mouvement oscillatoire dans une cuve d'eau. Il décrit l'apparition d'une première structure : les rides à grains roulants, et son évolution par coalescence vers des rides à tourbillons, de plus grande amplitude. Ses expériences montrent en particulier que la longueur d'onde finale

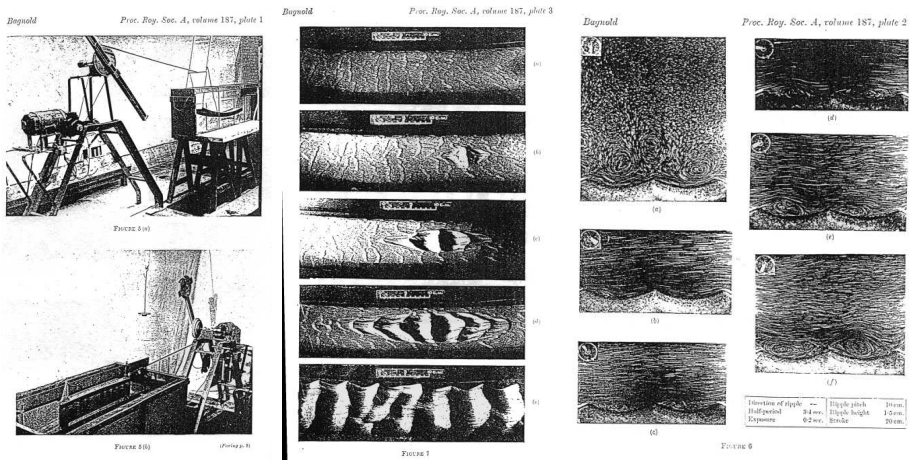


FIG. 1.8 – Montage expérimental et observations de *Bagnold* [1946].

des rides à tourbillon ne dépend pas de la fréquence des oscillations, mais seulement de leur amplitude, et de la taille des grains. Les études expérimentales plus récentes se font en général dans des dispositifs annulaires (cf. Fig. 1.9) mis en rotation alternée : la différence d'inertie entre le sédiment et le fluide crée un écoulement périodique [*Rousseaux et al.*, 2004]. Une première explication de l'instabilité primaire a été donnée par *Sleath* [1976] : elle fait intervenir l'apparition d'un écoulement secondaire indépendant du temps, dû aux termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes. Le calcul exact de l'écoulement, intégré à une analyse de stabilité linéaire et non-linéaire, a été effectué par l'équipe de P. Blondeaux [*Blondeaux*, 1990; *Vittori et Blondeaux*, 1990]. Ces études montrent que les rides à grains roulants et à tourbillon possèderaient des domaines de stabilité disjoints, alors qu'on observe expérimentalement que les rides à grains roulants sont toujours instables. De plus, la visualisation de l'écoulement autour des rides par *Rousseaux* [2003] tend à

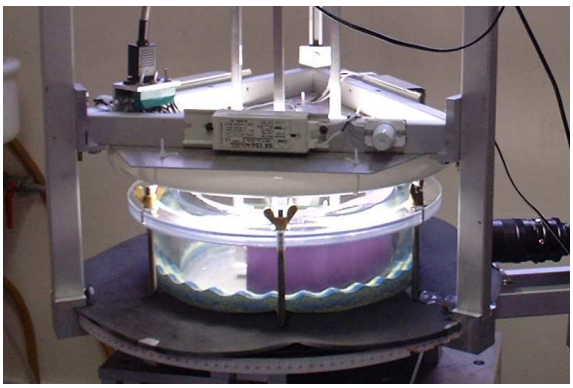


FIG. 1.9 – Montage expérimental utilisé à l'ESPCI pour l'étude des rides sous écoulement oscillant (d'après *Rousseaux* [2003]).

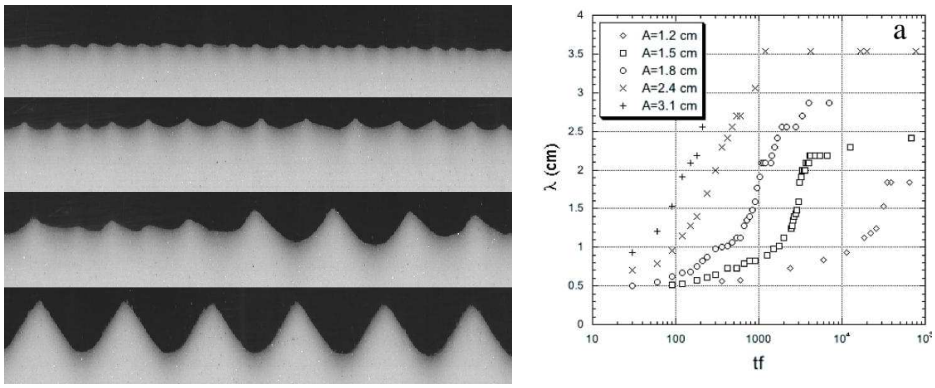


FIG. 1.10 – Évolution temporelle (coalescence) des rides à grains roulants vers les rides à tourbillons (d'après *Rousseaux* [2003]).

montrer qu'il n'y aurait pas de réelle différence de mécanisme entre les deux types de rides. Enfin, pour modéliser l'évolution aux temps longs des rides bidimensionnelles, *Andersen* [2001] a proposé un modèle phénoménologique pour expliquer la coalescence des rides, en les considérant comme des objets individuels interagissant par échange de matière.

Sous écoulement continu

Les structures obtenues sous écoulement permanent sont de différents types : elles ont été classifiées par les sédimentologues en fonction de la taille des sédiments et de la vitesse caractéristique de l'écoulement, comme l'illustre le diagramme de la figure 1.11. Les antidunes sont des dunes formées pour des débits importants et en présence d'une

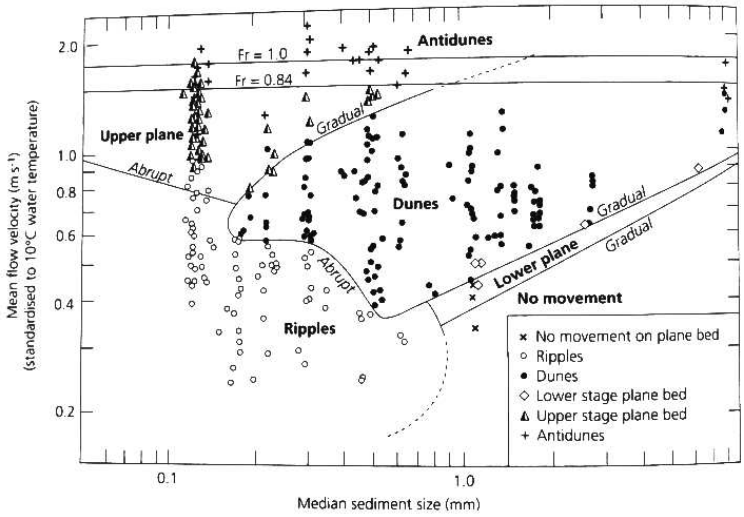


FIG. 1.11 – Diagramme de stabilité des motifs d'érosion (d'après *Southard* [1991]).

surface libre. Elles possèdent la particularité remarquable de se déplacer en sens opposé au courant. La distinction de nomenclature entre *rides* et *dunes* ne fait pas l'objet d'un véritable consensus. Il existe en effet, suivant les auteurs, plusieurs critères désignant un objet comme «dune» plutôt que «ride» : sa taille, la dépendance de sa taille à la profondeur d'eau, et sa tridimensionnalité. Enfin, les termes «lower-plane» et «upper-plane» désignent deux domaines de paramètres où la surface plane est stable alors que des grains sont transportés par le fluide.

De nombreuses études ont été menées sur le transport et la formation de rides en écoulement continu. Le mécanisme de base de l'instabilité est bien connu : une structure apparaît si le cisaillement exercé par le fluide sur le sable est déphasé par rapport au relief (cf. 4.1.2). Cependant, l'analyse de stabilité linéaire n'a pas donné jusqu'à présent

de résultat convaincant quant à la valeur de la longueur d'onde sélectionnée [*Charru et Mouilleron-Arnould*, 2002].

On peut invoquer le fait que le régime linéaire n'est peut-être pas observable expérimentalement : la nature discrète de la surface granulaire rend difficile la mesure d'un relief d'amplitude infinitésimale. Cependant, les observations de *Betat et al.* [1999], dans un canal annulaire quasi-2D, montrent que la croissance de l'amplitude des rides est bien exponentielle dans les premiers instants, ce qui justifie l'approche théorique de l'analyse de stabilité linéaire. Mais nous verrons qu'il est possible d'améliorer les prédicitions du calcul linéaire en introduisant, comme dans le cadre du transport éolien, un mécanisme de saturation du flux de grains.

La dynamique non-linéaire des rides se caractérise essentiellement par le phénomène de mûrissement (*coarsening*), c'est-à-dire d'accroissement de la longueur d'onde au cours du temps. Ceci reste difficile à expliquer ou à modéliser, en raison de la difficulté à tenir compte de la non-linéarité de l'écoulement fluide ainsi que du transport de grains. Numériquement, le calcul rigoureux de l'écoulement au-dessus du relief (c'est-à-dire la résolution complète de l'équation de Navier-Stokes) représente déjà un temps de calcul important, qu'il faut répéter à chaque itération puisque la forme du fond évolue. La question de savoir si l'amplitude et la longueur d'onde finissent par atteindre une valeur de saturation est encore irrésolue. En 2D, et avec une profondeur d'eau très faible (environ 15 mm pour des rides d'amplitude 7 mm), *Betat et al.* [2002] observent une saturation de l'amplitude et de la longueur d'onde. Cependant, il n'est pas certain que cette saturation soit due à un mécanisme spécifique et non simplement à la taille finie (et réduite) du système expérimental. Dans un canal beaucoup plus large et plus profond, *Baas* [1999] observe une saturation pour la longueur d'onde, mais elle coïncide avec un changement notable de la morphologie des rides. En effet, il est important de signaler que le mécanisme d'instabilité a surtout été étudié dans des configurations bidimensionnelles. Or, de nombreuses structures tridimensionnelles ont été obtenues expérimentalement sous écoulement continu : rides sinueuses, en «briques», en écailles [*Raudkivi*, 1997; *Baas*, 1999]. La plupart des dunes sous-marines dans la nature sont également irrégulières. À notre connaissance, aucune étude théorique n'a été menée sur la transition possible entre des rides rectilignes et ces structures plus complexes. Toutefois, *Maddux et al.* [2003] ont étudié expérimentalement l'écoulement turbulent au-dessus de «fausses» dunes rigides. Ils ont montré que la tridimensionnalité des dunes avait une influence non négligeable sur l'écoulement, et que dans certaines configurations le taux de turbulence était plus faible que sur des dunes rectilignes.

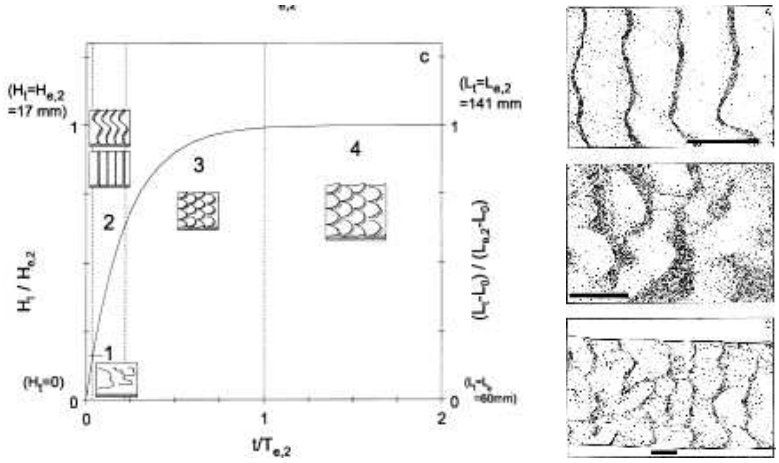


FIG. 1.12 – Transition vers les rides tridimensionnelles en écailles (d'après *Baas* [1999]).

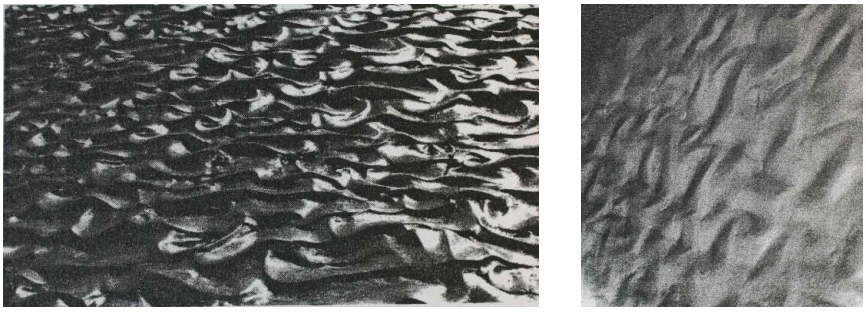


FIG. 1.13 – Rides tridimensionnelles obtenues expérimentalement sous écoulement continu (d'après *Raudkivi* [1997]).

1.2.2 Dunes et rides

Comme nous le verrons par la suite, les mécanismes de formation des dunes éoliennes et des rides sous-marines sont très similaires. Les dunes elles-mêmes ont été très étudiées sur le terrain [*Bagnold*, 1941; *Pye et Tsoar*, 1990], mais la plupart de ces études restaient essentiellement descriptives : en effet, avant l'apparition des satellites, il était difficile de suivre quantitativement l'évolution très lente de ces structures.

Du côté des physiciens, la plupart des études a porté sur les barchanes : ces dunes en forme de croissant sont relativement petites, très mobiles, et se forment sur un sol pauvre en sable : même si elles se rassemblent fréquemment en *corridors*, elles sont en général isolées les unes des autres, ce qui permet de les considérer comme des objets individuels. Leur grande vitesse de déplacement permet en outre de les observer facilement sur le terrain. Récemment, de grands progrès ont été réalisés dans la compréhension de ces dunes modèles, grâce à de nouvelles simulations numériques et expériences en laboratoire. D'une part, il est très délicat de reproduire correctement en soufflerie le transport éolien [*Iversen et Rasmussen*, 1999] ; d'autre part il a été montré que les dunes n'étaient stables qu'au dessus d'une taille minimale [*Sauermann et al.*, 2001; *Andreotti et al.*, 2002a], de l'ordre de quelques mètres, ce qui interdit leur reproduction directe en soufflerie. Cependant, Pascal Hersen a réalisé dans sa thèse [*Hersen*, 2004a] des barchanes miniatures en remplaçant le vent par un écoulement d'eau (cf. Fig. 1.14). Cette étude analogique permet désormais

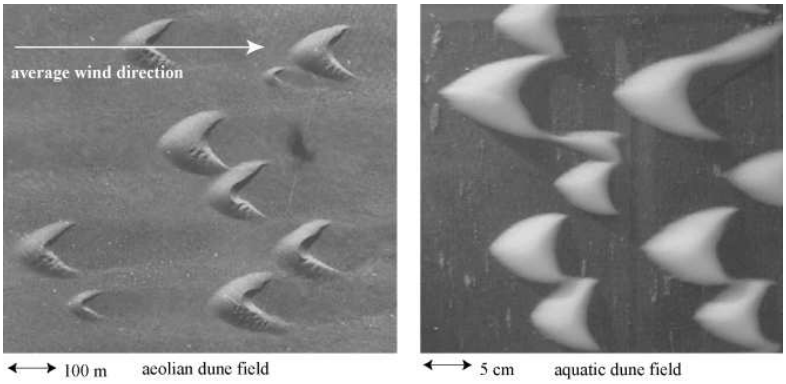


FIG. 1.14 – Comparaison entre barchanes éoliennes et sous-marines (d'après *Hersen* [2004a]).

d'étudier beaucoup plus facilement les propriétés des dunes, sur un système à l'échelle du laboratoire et entièrement contrôlable. Elle montre également que, en dépit des différences dans la nature du transport, les structures de petite taille dans l'eau reproduisent les caractéristiques des dunes éoliennes. Nous reparlerons de cette analogie au chapitre 4. En effet, les études théoriques et numériques de l'équipe de Hans Herrmann ont permis

d'identifier le rôle crucial de la notion de *saturation* du flux de grains éolien et nous verrons que c'est ce phénomène qui permet de faire le lien entre les deux échelles. Les études expérimentales en écoulement liquide permettent donc d'améliorer la compréhension des structures éoliennes aussi bien que sous-marines.

Il reste toutefois dans ce domaine de nombreux problèmes ouverts : la collision entre deux barchanes est-elle «solitonesque», comme les simulations numériques de *Schwämmle et Herrmann* [2003] tendent à le montrer, ou plus complexe, comme l'indiquent les observations de *Hersen* [2004a] ? La nucléation elle-même des barchanes, en particulier la déstabilisation latérale d'une dune transverse, n'est pas encore comprise. En outre, les barchanes ne constituent qu'une petite fraction des dunes présentes dans les déserts, et d'autres structures, comme les dunes longitudinales, sont encore très mal connues.

Tridimensionnalité

Les modèles de formation des barchanes que nous venons d'évoquer sont basés sur le même schéma explicatif que les analyses de stabilité dans le cas des rides, que nous détaillerons au chapitre 4. Toutefois, ce sont en général des modèles «pseudo-3D». En effet, l'écoulement et le transport de grains résultant sont calculés en deux dimensions pour des «tranches» de barchane [*Andreotti et al.*, 2002b]. Les tranches correspondant aux cornes avancent plus rapidement que celles du centre puisqu'elles sont moins hautes. Il est alors nécessaire de les coupler entre elles en ajoutant un terme de diffusion *ad hoc*, d'origine gravitaire, dans l'expression du transport. On modélise ainsi le fait que des grains sont évacués du centre vers les cornes, ce qui permet à la barchane de conserver sa forme en croissant [*Hersen*, 2004b]. Or il arrive dans la nature que des barchanes soient nucléées par déstabilisation d'un rideau de dunes transverses (sur la figure 1.4, on peut observer des dunes transverses «barchanoïdes»). Cette observation a été reproduite en miniature par *Hersen* [2004a] (figure 1.15). Le modèle pseudo-tridimensionnel, où le seul terme transverse est un terme de diffusion, ne peut pas rendre compte de ce phénomène. Il est donc nécessaire de trouver un mécanisme responsable de cette instabilité. Nous présenterons une hypothèse à ce sujet dans le chapitre 3, et reviendrons sur le phénomène de tridimensionnalisation tout au long de l'analyse théorique.

1.2.3 Rides éoliennes

Les rides éoliennes constitue un cas à part dans l'ensemble des instabilités dont nous avons parlé. En effet, le mécanisme est de nature très différente des autres – et ce bien que leur morphologie soit quasiment la même que celle des rides sous-marines : le fluide, ici le vent, ne joue qu'un rôle très limité dans leur formation. Nous nous contenterons donc de

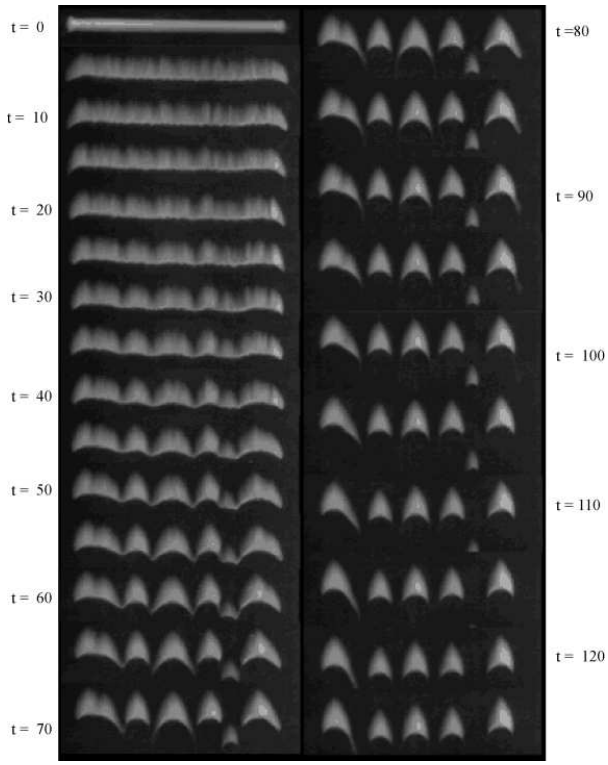


FIG. 1.15 – Évolution d'une barre de sable transverse à l'écoulement : instabilité transverse et découpage en barchanes (d'après *Hersen* [2004a]).

quelques mots.

Le mécanisme de base, suggéré par *Bagnold* [1941], puis formalisé et amélioré, entre autres, par *Anderson* [1987]; *Hoyle et Woods* [1997]; *Valance et Rioual* [1999]; *Rioual* [2002], repose sur l'hypothèse que le surface est bombardée par des grains en saltation, arrivant à angle constant (cf. Fig. 1.16). Chaque impact d'un de ces saltons met d'autres grains (reptons) en mouvement : c'est l'effet «splash». L'instabilité provient du fait que les pentes à l'abri du vent le sont aussi des grains incidents : on est en présence d'une instabilité «d'écrantage», contrôlée par les propriétés intrinsèques du matériau granulaire, et non directement par le fluide. Toutefois, le rôle respectif des deux longueurs caractéristiques du problème, longueurs de saltation et de reptation, ne sont pas clairement déterminés. Les

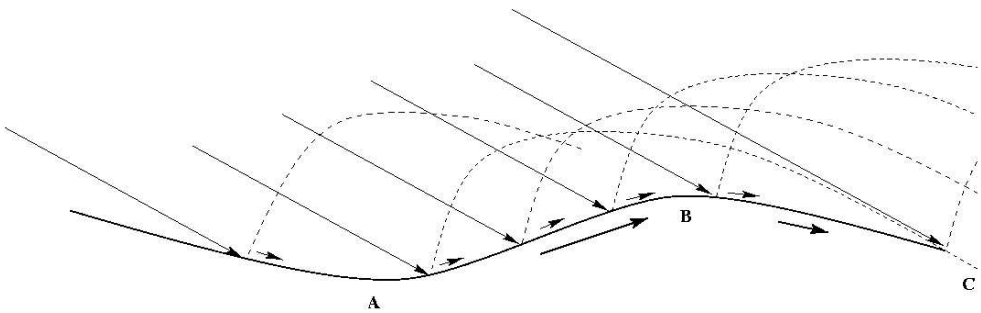


FIG. 1.16 – Mécanisme de formation des rides éoliennes (d'après *Rioual* [2002]).

études expérimentales directes des rides éoliennes sont très délicates à mettre en oeuvre : elles nécessitent des souffleries de taille importante et très bien contrôlées. Des expériences de ce type ont été récemment effectuées, notamment par *Andreotti et al.* [2005]. L'essentiel des études expérimentales sont cependant consacrées plus spécifiquement au processus de transport dans l'air, c'est-à-dire à la fonction *splash*, qui décrit l'éjection de reptons par l'impact d'un salton [*Rioual*, 2002]. La description théorique de ce mode de transport (écoulement dilué mais collisionnel) repose quant à elle sur la théorie cinétique [*Pasini et Jenkins*, 2005]. Toutefois, nous verrons au chapitre 6 que, qualitativement, la dynamique des rides sous-marines et éoliennes peut être décrite mathématiquement de manière similaire.

Chapitre 2 Méthodes expérimentales

Dans ce chapitre nous allons décrire, dans un premier temps, le montage expérimental conçu et utilisé pour l'étude de la formation et de la dynamique des rides, puis nous présenterons les différentes techniques d'observation utilisées : détection du profil des rides par télémétrie laser et par déplacement d'une nappe laser, et mesure du champ de vitesses pour le fluide par P.I.V.

2.1 Description du dispositif expérimental

De nombreuses expériences sur les rides sous-marines ont été conduites, en particulier par les géologues et sédimentologues. Dans le cas de l'écoulement continu, il existe deux classes de dispositifs expérimentaux : le canal rectiligne ouvert («flume»), ou l'anneau (fermé). Ce dernier montage, très courant pour l'étude en écoulement oscillant, a été relativement peu utilisé en écoulement continu, pour plusieurs raisons : d'une part, dans un canal circulaire, les forces centrifuges peuvent s'avérer handicapantes (pour de grandes vitesses d'écoulement) [*Charru et al.*, 2004]. Ce problème peut toutefois être contourné en construisant un montage en forme de stade, et en étudiant les rides uniquement dans les parties rectilignes [*Schmeeckle et Nelson*, 2003]. Cependant, l'autre inconvénient de cette configuration est la mise en mouvement du fluide : celle-ci peut se faire par entraînement par le couvercle [*Charru et al.*, 2004], mais il faut alors un fluide très visqueux et une couche de fluide très mince pour espérer atteindre des cisaillements suffisants et transporter les grains. Il est également possible de mettre le fluide en mouvement grâce à des hélices, mais l'écoulement produit est alors difficilement contrôlable et chaotique.

Le dispositif rectiligne a en revanche été très étudié, à des échelles diverses : d'un canal à section circulaire de 30 mm de diamètre [*Kuru et al.*, 1995] à de gigantesques expériences de plusieurs centaines de mètres de longueur, sur une largeur d'un mètre ! De telles expériences

étaient bien sûr hors de notre portée et nous avons dû nous contenter de la taille d'une salle de manip «ordinaire».

Le canal d'écoulement

Des expériences préliminaires ont été menées sur un premier canal d'écoulement d'une section de 60 mm de côté, et d'une longueur totale de 3 m. Ce canal était alimenté en circuit fermé par une pompe, et non instrumenté : le repérage des rides se faisait «à la main». La manipulation préalable sur ce dispositif a permis de concevoir et de monter au cours de la thèse une seconde version de l'expérience.

Ce nouveau montage consiste en un canal en plexiglass, d'une longueur utile d'environ 2 m. Sa section est rectangulaire, de largeur 120 mm et de hauteur maximale 75 mm – la hauteur peut être réduite à la valeur souhaitée en posant des cales au fond du canal. La section a donc été augmentée, afin d'obtenir un montage vraiment tridimensionnel. En fonctionnement, un couvercle est maintenu fermé, par des «sauterelles» (fermoirs à levier) d'un côté et des charnières de l'autre, au-dessus de l'écoulement. Celui-ci ne présente donc pas de surface libre. Signalons que le canal est très légèrement incliné (d'environ 0,5°) de la sortie vers l'entrée, afin de faciliter son remplissage complet (de cette façon les bulles d'air sont chassées plus facilement vers la sortie). Les parois latérales et supérieure du canal sont transparentes, ce qui permet d'observer facilement la formation des structures granulaires. Le dispositif est également équipé, sur une longueur de $1,5$ m, d'un rail motorisé parallèle au canal, couplé à un rail de plus petite taille, fixé sur le premier, et permettant de se déplacer perpendiculairement. Sur ce montage peuvent être fixés et translatés les appareils de mesure (télémètre, caméra, etc.). À la sortie du canal, l'eau passe par un filtre qui récupère les grains entraînés, puis s'écoule dans une cuve, d'où une pompe la remonte dans le réservoir d'entrée. Pour faciliter la mise en eau du canal avant une expérience, sa section de sortie a été réduite par un convergent. Il est ainsi possible d'immerger le milieu granulaire sans entraîner d'écoulement important du fluide ni mettre les grains en mouvement.

Entrée du canal

L'alimentation du canal se fait par un conduit de 2,5 cm de diamètre, ce qui représente à l'entrée du canal un changement de section très important. Il est donc nécessaire d'aménager celle-ci pour réduire les effets perturbateurs (turbulence, bulles d'air rémanentes, etc.) et obtenir l'écoulement le plus régulier possible. Pour cela, nous avons adopté le dispositif représenté sur la figure 2.3. À la sortie du tuyau d'entrée, l'eau passe d'abord à travers un milieu poreux, constitué d'un empilement de billes de verre de 1 cm de diamètre. Cet

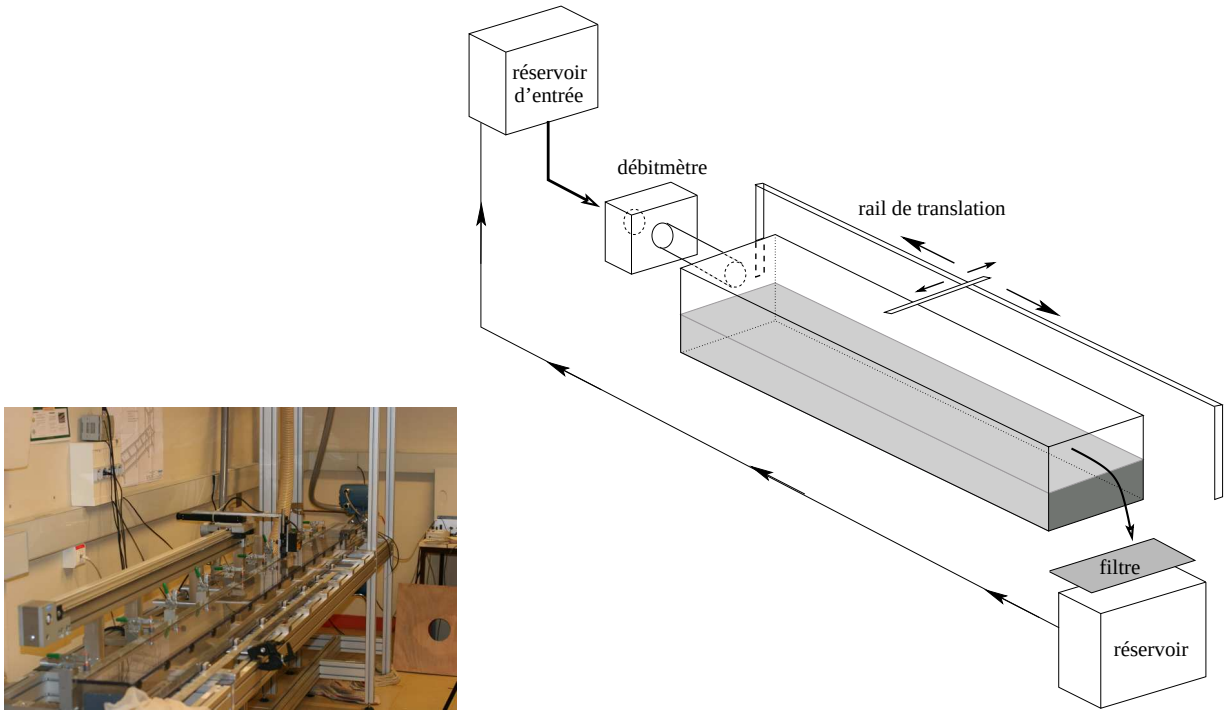


FIG. 2.1 – Photo et schéma du canal d'écoulement.

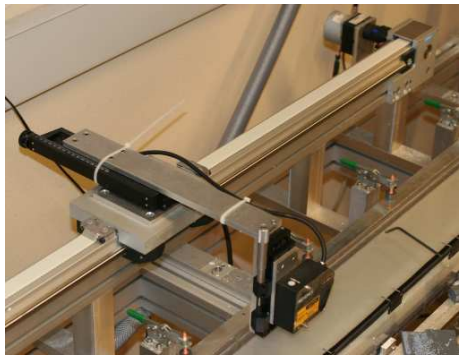


FIG. 2.2 – Rails de translation et télémètre. En haut à droite, le moteur du rail principal.

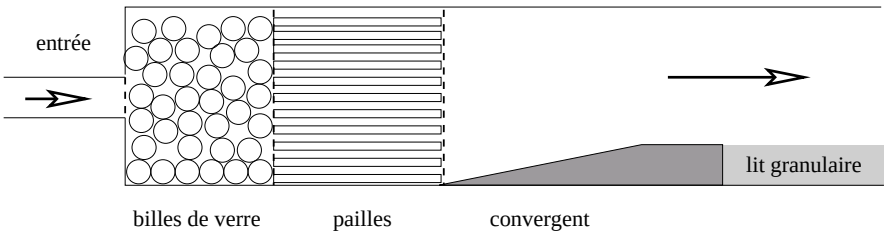


FIG. 2.3 – Schéma de l'entrée du canal d'écoulement.

obstacle joue le rôle d'un divergent : on évite ainsi d'avoir un «jet» localisé au centre du canal. L'écoulement est ensuite canalisé par un ensemble de pailles d'environ 5 mm de diamètre (et de longueur 20 cm) afin de le régulariser. Enfin, puisque la section du canal est réduite par la présence du lit de sable, une rampe fait converger l'écoulement vers sa section définitive. Une partie rigide plane est placée avant la transition avec le milieu granulaire.

Cet ensemble de dispositifs régulateurs permet d'obtenir un écoulement beaucoup plus régulier, et par ailleurs d'éviter la présence résiduelle de bulles d'air en entrée du canal. L'inconvénient du dispositif est bien sûr la perte de charge qu'il engendre, en particulier au niveau du milieu poreux.

Alimentation en eau

Nous avions observé sur le montage préliminaire qu'il était très difficile d'obtenir un débit constant à l'aide des pompes du commerce. Un système d'alimentation différent a donc été préféré. L'écoulement d'eau est gravitaire : le canal est alimenté par un réservoir situé à 3 m de hauteur, donc le niveau est contrôlé par un trop-plein. Ce niveau étant maintenu constant, le débit fourni par le réservoir est également stable. Une vanne permet ensuite d'obtenir le débit souhaité dans le canal. Enfin, le circuit est fermé par une pompe qui remonte l'eau de la sortie du canal jusqu'au réservoir surélevé. Le trop-plein de la cuve permet de s'affranchir des oscillations du débit de cette pompe. Cette alimentation gravitaire permet d'atteindre un débit maximal de 86 $L.min^{-1}$. Les fluctuations sont inférieures à 1%.

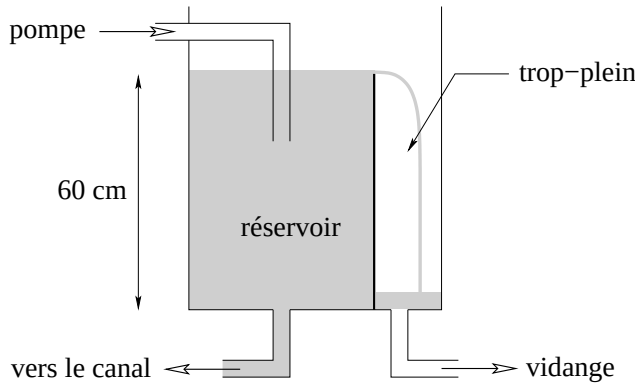


FIG. 2.4 – Schéma en coupe de la cuve d'alimentation du canal.

Mesure du débit

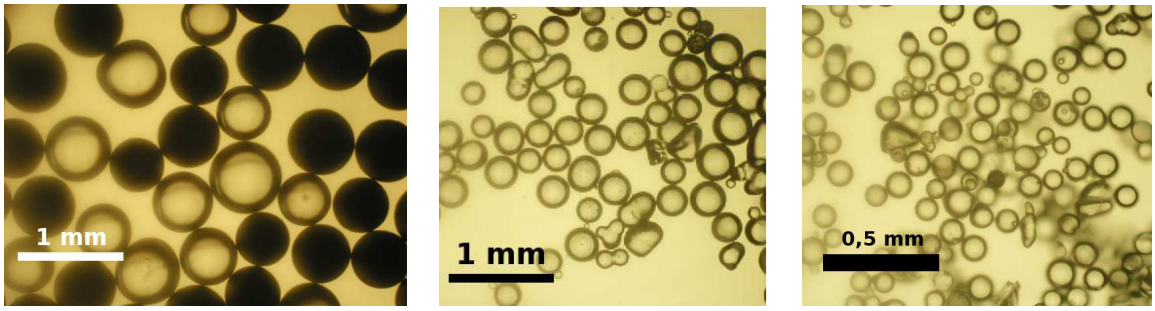
Le paramètre de contrôle de l'écoulement est le débit parcourant le canal. Celui-ci est mesuré entre la sortie de la cuve d'alimentation et l'entrée du canal grâce à un débitmètre

électromagnétique interfaçable (Fig. 2.5). Le principe de fonctionnement de cet appareil est basé sur la conductivité de l'eau et la loi de Faraday : le débitmètre crée un champ magnétique autour du tube de courant, et la tension induite, proportionnelle à la vitesse du conducteur, est mesurée par deux électrodes. L'intérêt de cette méthode est qu'elle est très précise et que la mesure n'implique aucune perte de charge.

FIG. 2.5 – Débitmètre électromagnétique.

Milieu granulaire

Pour constituer le milieu granulaire, nous avons utilisé essentiellement des billes de verre transparentes (Sigmund Lindner^{TM}), sphériques, de densité $d = 2{,}5$. Trois gammes de taille ont été utilisées : $70 - 110$ μm, $200 - 300$ μm et $400 - 600$ μm (auxquelles nous nous référerons respectivement par 100, 250 et 500 μm). La gamme de tailles utilisable est restreinte par les propriétés de transport sédimentaire : les billes doivent pouvoir être transportées par le fluide avec le débit dont nous disposons, et nous voulions également limiter le transport par suspension, qui devient non négligeable pour des tailles inférieures à 100 μm. De plus, les billes plus petites deviennent relativement cohésives. Nous avons également utilisé dans quelques cas des billes de verre colorées ($d = 500$ μm), ainsi que du sable de Fontainebleau teinté, de diamètre médian $d_{50} = 250$ μm. L'inconvénient de ces grains est que leur traitement de surface les rend très peu mouillants : ils forment sous l'eau des «micelles» en emprisonnant des bulles d'air. Pour remédier à ce problème, nous les avons imprégnées de savon avant de les mélanger à l'eau.



(a) $d = 500\ \mu$m. Grossissement : $\times 4$.

(b) $d = 250\ \mu$m. Grossissement : $\times 4$.

(c) $d = 100\ \mu$m. Grossissement : $\times 10$.

FIG. 2.6 – Photos au microscope optique des trois tailles de billes. On peut remarquer que la sphéricité est moins bonne pour les plus petites billes, même si la forme reste grossièrement isotrope.

2.2 Méthodes de mesure du profil de hauteur

2.2.1 Télémétrie laser

Bien que les parois latérales du canal soient transparentes, on ne peut pas mesurer directement le profil des structures en filmant de côté : d'une part, le rapport d'aspect très faible du canal nécessite d'observer sous un très grand angle, mais surtout la tridimensionnalité des rides formées empêche d'obtenir facilement le profil, même le long de la paroi. Nous avons décidé de mesurer la hauteur de sable grâce à un dispositif télémétrique laser : cet appareil permet de mesurer la distance à une surface lisse avec une précision de l'ordre du micron, ce qui est largement supérieur à la résolution souhaitée (les plus petites billes utilisées ayant un diamètre de 100 μm).

Le fonctionnement du télémètre est basé sur une méthode géométrique simple, comme expliqué sur la figure 2.7 : l'appareil émet un faisceau vertical qui se réfléchit sur la surface. La position de l'image de ce point de réflexion est repérée sur un récepteur CCD et donne la distance entre l'émetteur et la surface réfléchissante. Le télémètre étant fixé sur le double système de rail longeant le canal, il est possible de balayer l'ensemble de la surface des grains pour obtenir le profil tridimensionnel du relief. L'inconvénient de cette méthode est le temps nécessaire pour parcourir la longueur du canal : il est impossible de suivre les rides dans leur déplacement. Pour suivre l'évolution du relief, il est cependant nécessaire d'obtenir un balayage du profil à différents instants. Or, l'arrêt brutal de l'alimentation en haut provoque un reflux qui détruit les structures formées. Avant chaque mesure, le débit est donc abaissé en dessous du seuil d'érosion, de manière à ne pas affecter les rides, et le

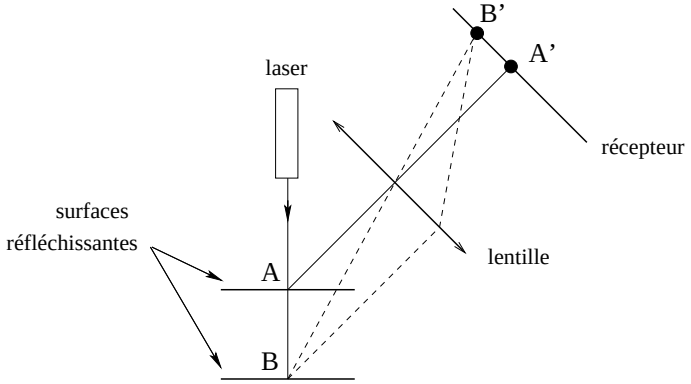


FIG. 2.7 – Schéma de fonctionnement du télémètre laser. L'image du point A est A' et celle du point B est B'. La position du point image sur le récepteur donne donc la distance de l'émetteur à la surface réfléchissante.

balayage s'effectue «en eau». Cette procédure permet également de s'assurer que le canal est rempli (on évite en particulier la présence de «flaques» résiduelles entre les rides), et peut ainsi être reproduite facilement pour toutes les mesures.

Le signal brut délivré par le télémètre est très bruité : en effet, à cause de la transparence et de la granularité de la surface réfléchissant le faisceau laser, il arrive fréquemment que le récepteur ne récupère aucune image. Dans ce cas, l'appareil délivre une tension de saturation. On effectue donc un nombre très élevé de mesures, avant de retirer les points «saturés», pour conserver un nombre suffisant de données. Le télémètre opère ainsi 50 000 relevés sur la longueur totale du parcours, soit environ 300 points/cm. On effectue ensuite un lissage en appliquant un filtre passe-bas pour éliminer le bruit.

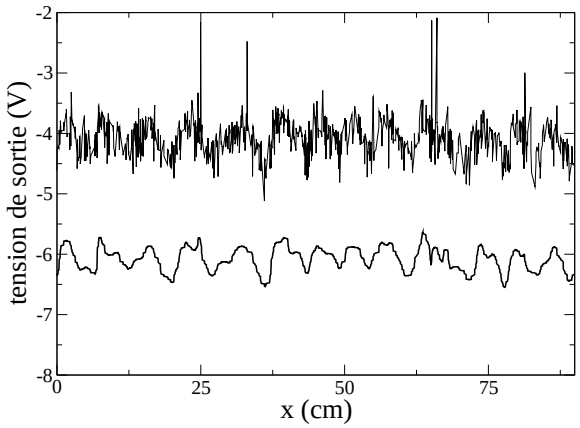


FIG. 2.8 – Signal de sortie délivré par le télémètre, et signal après traitement par un filtre passe-bas.

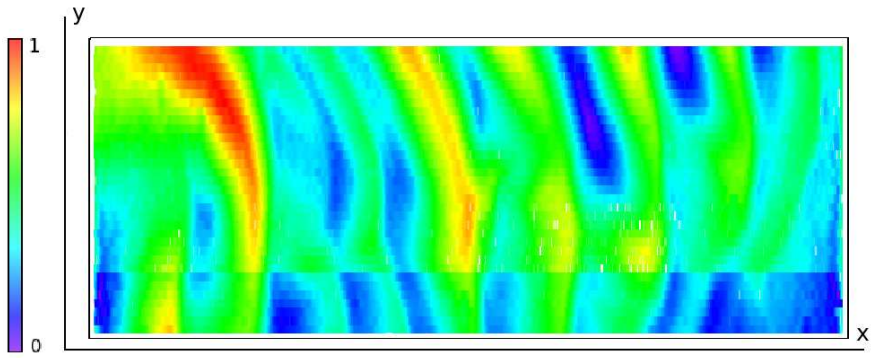


FIG. 2.9 – Balayage 3D de la surface par télémétrie. La couleur code la hauteur de sable en chaque point, normalisée par la hauteur maximale.

2.2.2 Relevé du profil par déviation d'une nappe laser

Dans le cas de structures isolées, comme des cônes, des prismes ou des barchanes, l'évolution est très rapide (de l'ordre de quelques minutes). La méthode de télémétrie n'est donc pas adaptée pour étudier leur dynamique. Pour ce faire, nous avons choisi une méthode simple : on envoie sur le lit de sable une nappe laser créée par une diode couplée à une lentille cylindrique. Ce plan est dirigé de manière oblique sur la structure, comme illustré sur la figure 2.10. La déviation du faisceau par le relief est calibrée en effectuant

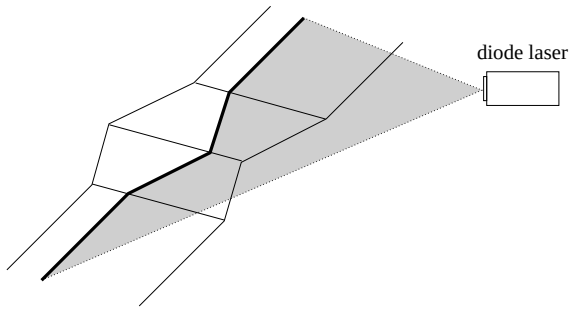


FIG. 2.10 – Relevé du profil par déviation d'une nappe laser.

initialement, sur la structure fixe, un relevé télémétrique. Une photo de la ligne laser est prise à la verticale du canal. On traite l'image obtenue en effectuant une série de profils de luminosité ; on extrait ensuite pour chaque «tranche» la position du maximum, pour finalement obtenir le profil de hauteur.

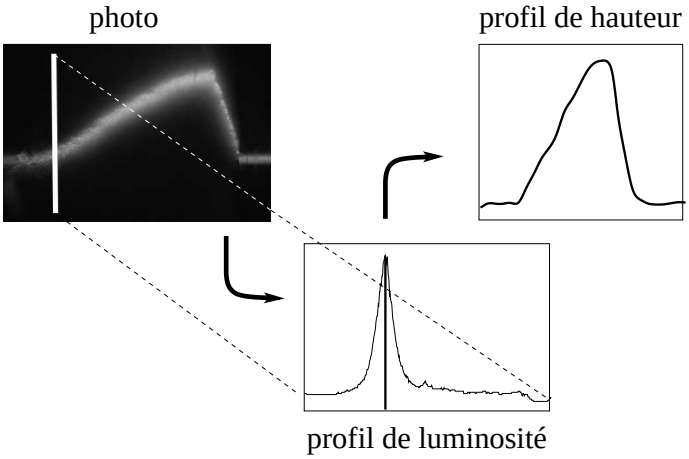


FIG. 2.11 – Extraction du profil de hauteur à partir d'une ligne laser.

2.3 Mesure du champ de vitesses par P.I.V.

Le champ de vitesses dans l'écoulement a été obtenu à l'aide d'un dispositif de P.I.V. (*Particle Imaging Velocimetry*) qui nous a été généreusement prêté par le laboratoire de thermocinétique de l'université de Nantes.

2.3.1 Principe de la P.I.V.

La vélocimétrie par images de particules consiste à déduire le champ de vitesses d'un ensemble de particules (traceurs) à partir de la corrélation entre deux images successives, prises à intervalle très rapproché. Pour cela, l'image initiale est découpée en plusieurs domaines (au centre desquels est calculée la vitesse). Pour obtenir une bonne résolution, il est bien sûr avantageux d'avoir le plus de domaines possibles. Cependant, il est d'une part nécessaire que chaque domaine contienne un nombre suffisant de traceurs et, d'autre part, le temps de calcul devient rapidement un obstacle. Nous avons donc dû nous limiter à des résolutions de 31×31 points.

Pour que l'inter-corrélation soit probante, il convient également de choisir correctement le laps de temps séparant les deux images : la disposition des traceurs à l'intérieur d'un domaine doit pouvoir être retrouvée sur l'image suivante. Il faut donc que chaque traceur ait bougé d'une distance de l'ordre de quelques pixels seulement. Sur la deuxième image, le logiciel translate le domaine initial en différentes positions, et compare ensuite la concordance entre les dispositions des traceurs, *via* une fonction de corrélation (sur le codage en niveaux de gris des images). Le vecteur déplacement, pour le domaine initial, est donné par la position donnant la meilleure corrélation. Pour appliquer cette méthode, nous disposions

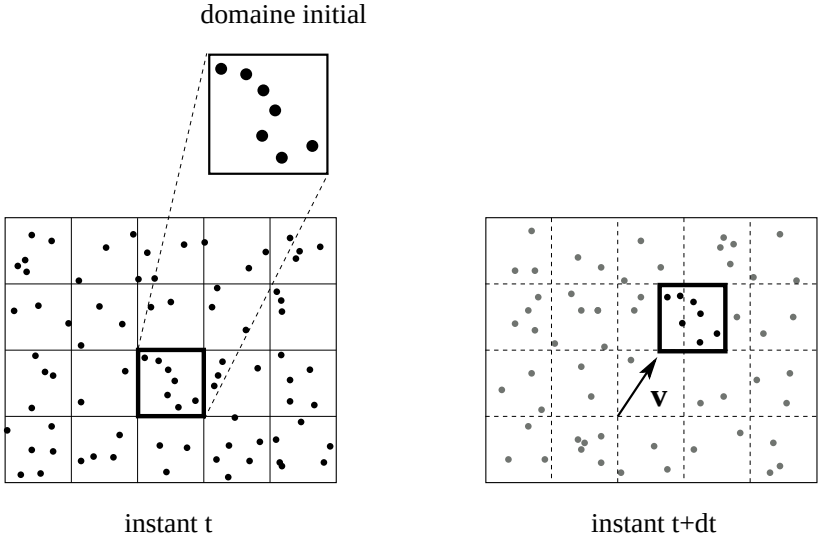


FIG. 2.12 – Illustration du principe de la corrélation d'images.

de deux types de particules pour «ensemencer» l'eau (cf. Fig. 2.13) : des billes de verre, creuses, de 10 μm de diamètre, et de densité effective égale à celle de l'eau ; et d'autre part des billes de verre argentées de 20 μm de diamètre. Bien que ces dernières soient plus brillantes, elles ont tendence à sédimenter dans les réservoirs. Nous leur avons donc préféré les traceurs transparents, dont on peut considérer que le mouvement est identique à celui des particules de fluide. Pour les rendre visibles, l'écoulement est éclairé par une nappe laser de forte puissance, orientée parallèlement à l'écoulement (cf. Fig. 2.14). Deux images très rapprochées sont alors prises par une caméra rapide synchronisée sur le laser : un exemple d'une de ces images est donné par la figure 2.15.

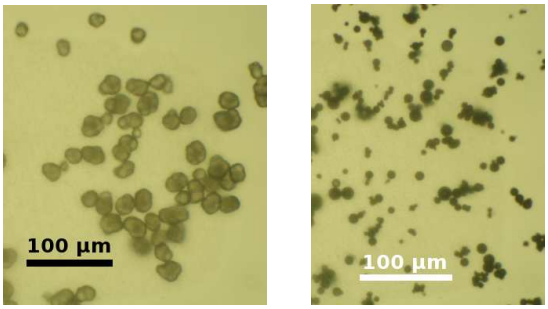


FIG. 2.13 – Photos des traceurs utilisés en P.I.V., grossis 40 fois. On peut constater que les sphères, à cette échelle, n'en sont pas vraiment.

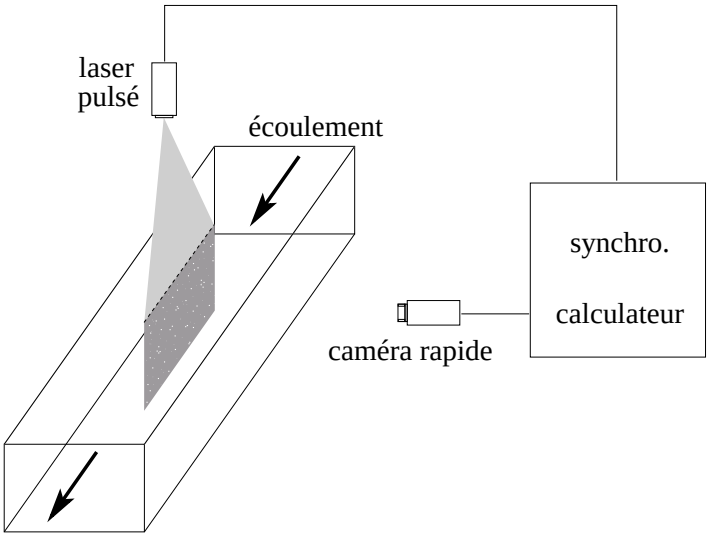


FIG. 2.14 – Schéma de la mesure par P.I.V.

FIG. 2.15 – Exemple d'une image prise par la caméra rapide P.I.V.

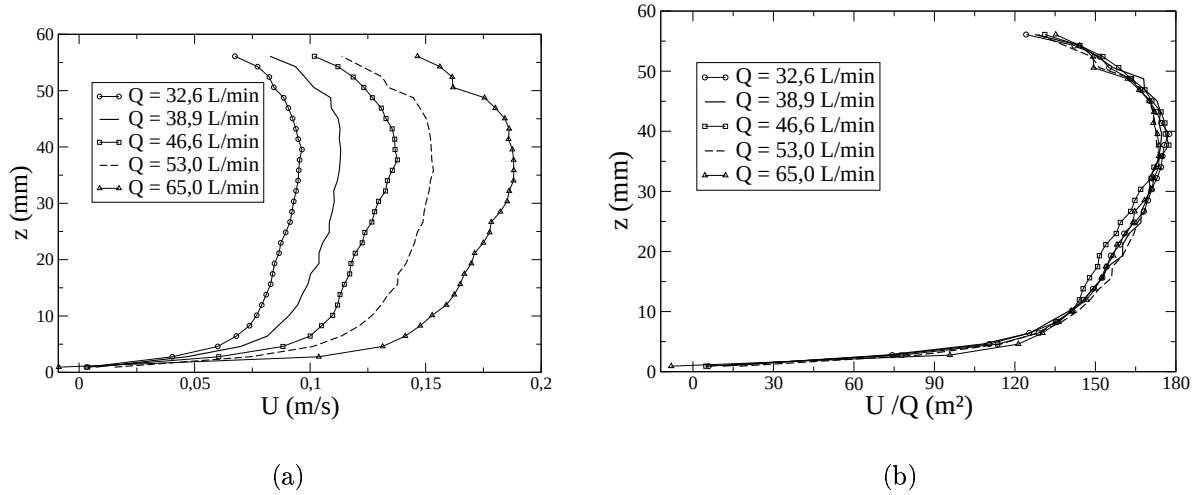


FIG. 2.16 – (a) Profil vertical de vitesse horizontale, moyennée dans le temps, pour différents débits. (b) Mêmes courbes que précédemment, renormalisées par le débit.

2.3.2 Caractérisation de l'écoulement

Avant d'étudier l'écoulement en présence de structures granulaires, nous avons cherché à caractériser l'écoulement dans le canal *à vide*. Pour ce faire, le lit de sable a été «remplacé» par des socles rigides de 2 cm d'épaisseur. Nous avons qualifié l'écoulement à une distance de $1,5$ m de l'entrée, et au milieu du canal (à égale distance des deux parois latérales). La mesure se fait avec une résolution de 31×31 points. Chacun des profils ci-dessous est une moyenne sur trois séries de 50 mesures chacune – dans une série, les mesures ont lieu toutes les secondes, et les séries sont séparées d'une minute entre elles.

La figure 2.16(a) montre le profil vertical de la composante horizontale de la vitesse pour différentes valeurs du débit. On constate que pour les faibles débits, la vitesse se rapproche d'un profil «bouchon». Cependant, quand le débit augmente, ce profil devient verticalement assymétrique. Toutefois, la hauteur des rides est en général inférieure à 1 cm, c'est-à-dire qu'elles se trouvent dans la partie inférieure du profil, là où le gradient de vitesse est le plus élevé. La vitesse caractéristique de l'écoulement varie donc entre 10 et 20 cm.s^{-1}. On peut vérifier sur la figure 2.16(b) que les différents profils de vitesse sont bien confondus quand la vitesse est normalisée par le débit. Cette observation garantit que le régime d'écoulement est bien établi à ce niveau du canal. En effet, une augmentation de la vitesse moyenne ne modifie pas l'aspect du profil de vitesses. On peut donc bien considérer que le taux de cisaillement au niveau de la surface du sable ($z = 0$) est proportionnel au débit de fluide. L'épaisseur de la zone de fort cisaillement, en particulier, demeure constante. Sur la figure 2.17, est représenté le profil de vitesse verticale, dont on peut vérifier qu'elle est

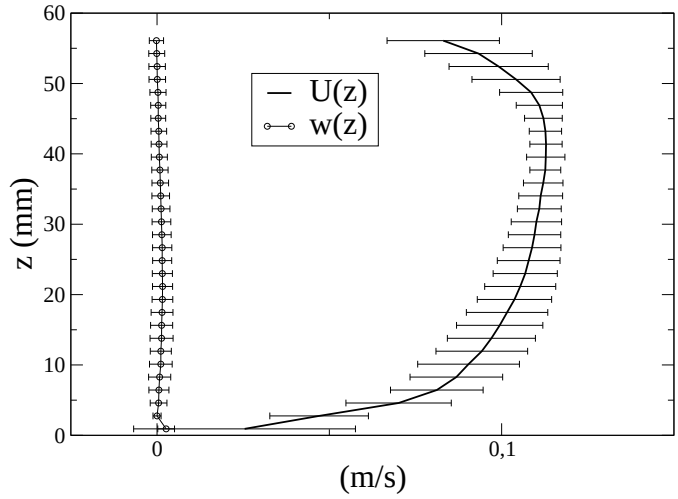


FIG. 2.17 – Profils des vitesses horizontale et verticale, et fluctuations ($Q = 38,9$ L.min^{-1}).

bien négligeable. Les fluctuations de vitesse ont également été reportées pour les deux composantes u et w : on constate que les fluctuations (sur la vitesse horizontale) sont de l'ordre de 10 à 15%. Cette dispersion peut être attribuée, d'une part, à l'imprécision du calcul de corrélations, et d'autre part aux fluctuations turbulentes, propres à l'écoulement. Il n'est donc pas évident de quantifier le taux de turbulence (intrinsèque). En revanche, il est possible de superposer au profil de vitesses mesuré les profils tabulés des couches limites laminaire et turbulente, dans la partie inférieure de l'écoulement (la dissymétrie de l'écoulement par rapport au centre du canal est probablement due à l'inhomogénéité de l'écoulement dès l'entrée du canal. Toutefois, les rides se développant sur une épaisseur de l'ordre du cm, ce défaut du canal ne devrait pas influer sur leur dynamique). Ces deux profils sont ajustés pour la valeur maximale de la vitesse $\mathrm{U_{max}}$, atteinte à la cote z_{max}. Pour le cas laminaire, nous avons adopté le profil de Blasius en le redimensionnant par $z_{\mathrm{max}} = \delta_{99} = 5\sqrt{\frac{\nu x}{\mathrm{U_0}}}$. Pour la couche limite turbulente, nous avons adopté la formulation empirique

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U_{max}}} = \left(\frac{z}{z_{\mathrm{max}}}\right)^{1/7} \tag{2.1}$$

On constate aisément que le profil de vitesses mesuré à l'aide de la P.I.V. est nettement plus proche du profil théorique dans le cas turbulent que dans le cas laminaire : le gradient de vitesses est très élevé au-dessus de la paroi inférieure. Il reste toutefois inférieur à la valeur prédite. Pour expliquer cette différence, on peut invoquer les limitations intrinsèques propres au principe de la P.I.V. En effet, celle-ci est mal adaptée si la variation de la vitesse à l'intérieur d'une zone d'interrogation est trop importante : dans ce cas, la corrélation va

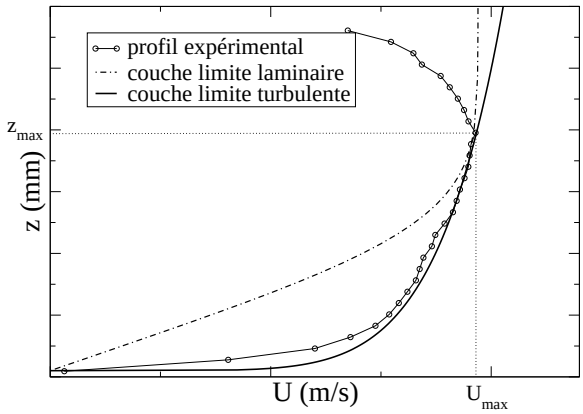


FIG. 2.18 – Profil de la vitesse horizontale comparé aux profils de Blasius et de couche limite turbulente donnant la même vitesse maximale. ($Q = 32,6$ L.min^{-1}).

sous-estimer la vitesse moyenne sur la zone. Or on peut constater que, à l'abord de la paroi, cette variation relative est de l'ordre de 40% entre deux points de mesure successifs. Il est donc normal de sous-évaluer la vitesse par rapport au profil théorique au voisinage immédiat de la paroi.

La figure 2.19 montre le même profil de vitesses, tracé cette fois en échelle semi-logarithmique. On constate bien la présence dans une large zone, au centre du canal, d'un profil logarithmique, tel que le prédit la théorie :

$$\mathrm{U}(z) = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln(\frac{z}{z_0}) \tag{2.2}$$

où u_τ est la vitesse de frottement, z_0 la rugosité de la surface et $\kappa = 0{,}41$ la constante de von Kármán. L'ajustement logarithmique permet d'estimer la vitesse de frottement : celle-ci varie linéairement avec le débit et dans la gamme accessible, elle peut atteindre la valeur maximale $u_\tau = 5{,}3$ cm.s^{-1}. La contrainte de cisaillement correspondante vaut $\tau = \rho u_\tau^2 = 2{,}8$ N.m^{-2}.

Si l'on considère que ces grandeurs restent valables également lorsque la paroi rigide est remplacée par un lit de grains, on peut calculer le nombre de Reynolds particulaire correspondant

$$\mathrm{Re_p} = \frac{u_\tau d}{\nu} \tag{2.3}$$

Pour la valeur maximale du débit, celui-ci vaut $\mathrm{Re_p} = 5$ pour les grains de 100 μm et $\mathrm{Re_p} = 27$ pour les grains de 500 μm. Calculons également un nombre de Shields (celui-ci

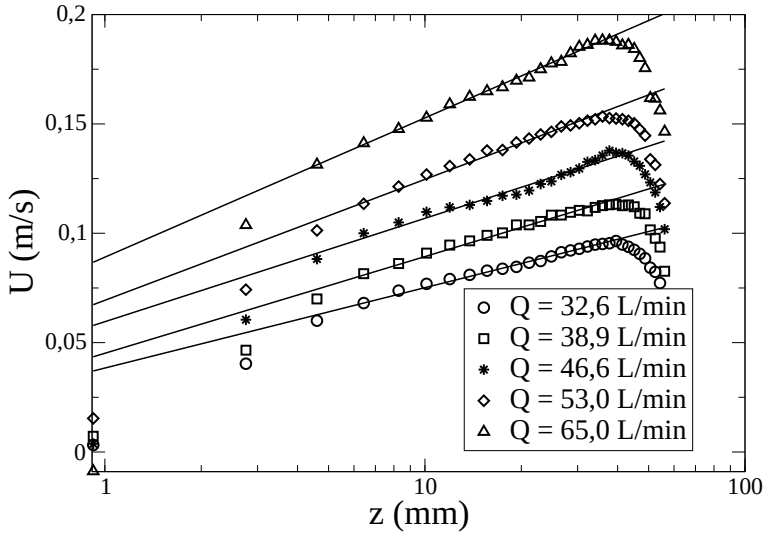


FIG. 2.19 – Profils de la vitesse horizontale en échelle semi-logarithmique. Les courbes sont ajustées par des profils logarithmiques (droites).

sera introduit plus précisément au chapitre 4) :

$$\Theta = \frac{\rho_{\text{fluide}} u_\tau^2}{g(\rho_{\text{grains}} - \rho_{\text{fluide}})d} = \begin{cases} 1{,}6 \text{ pour les grains de } 100\ \mu\text{m} \\ 0{,}3 \text{ pour les grains de } 500\ \mu\text{m} \end{cases} \tag{2.4}$$

Chapitre 3 Résultats expérimentaux

Dans ce chapitre nous avons regroupé l'ensemble des observations expérimentales réalisées dans le dispositif présenté au chapitre précédent. Nous présenterons tout d'abord les résultats concernant l'initiation des rides, c'est-à-dire l'apparition des premières structures sur un lit initialement plan, avant de passer à l'évolution de ces rides sur des temps longs. Enfin, dans la dernière partie, nous nous intéresserons plus brièvement à la dynamique d'objets isolés, et en particulier à une étude expérimentale d'une instabilité secondaire, qui pourrait être à l'origine de la «tridimensionnalisation» des rides.

3.1 Initiation des rides

3.1.1 Protocole expérimental

Le fond meuble est préparé de la façon suivante : les billes de verre sont déposées *dans l'eau* et sédimentent. On aplanit le lit ainsi constitué à la hauteur souhaitée en le «ratissant» sur toute la longueur. Entre deux expériences, le milieu granulaire est systématiquement remué pour «casser» une éventuelle structuration interne. Le canal est ensuite rempli d'eau de manière progressive pour ne pas mettre les grains en mouvement. Le débit est ensuite brutalement augmenté jusqu'à atteindre la valeur voulue.

La longueur des profils réalisés (comme celle du rail de translation) est inférieure à la longueur totale du canal. En effet, nous ne prenons pas en compte ce qui se passe dans les 30 cm suivant l'entrée du canal (ou, plus précisément, suivant la transition entre le fond rigide et le fond granulaire), ni dans les 30 cm précédant la sortie du canal. D'une part, les rides formées à l'entrée du canal ne sont pas vraiment nucléées à partir d'un fond plan : le changement de rugosité entraîne en général une érosion très importante dans les premiers centimètres de sable. Il se forme donc un creux à l'entrée (*scour-hole*)[*Hopfinger et al.*, 2004], ce qui entraîne la formation d'une bosse en aval. La déformation se propage

et les rides ainsi formées ne sont pas vraiment celles que nous voulons étudier. D'autre part, avant la sortie, l'écoulement peut être perturbé par le convergent et le changement de rugosité (on passe du fond granulaire à un fond rigide).

Le temps nécessaire pour effectuer un balayage complet (tridimensionnel) des rides étant prohibitif, nous avons réalisé en général deux profils par expérience, à 1 cm de part et d'autre du centre du canal. En effet, le motif apparaissant dans les premiers instants de l'instabilité est relativement bidimensionnel : les crêtes sont relativement régulières et perpendiculaires à l'écoulement. Il est important de signaler qu'il est impossible de mesurer *rigoureusement* la longueur d'onde à l'initiation. En effet, les structures deviennent repérables à l'œil alors que leur amplitude n'est que de quelques diamètres de grains, trop faible pour être repérée par le télémètre. Nous n'avons donc accès à la longueur d'onde que quand la hauteur des rides dépasse un seuil d'environ 2 mm.

3.1.2 Mesure de la longueur d'onde moyenne

À partir du profil relevé par le télémètre, il existe plusieurs façons d'extraire la longueur d'onde moyenne. Quand le signal n'est pas trop bruité, il est possible de relever la position de chaque crête, et de prendre comme longueur d'onde la moyenne des distances entre deux crêtes successives. On peut également décomposer le signal en série de Fourier et mesurer le mode le plus instable. Toutefois, cette méthode est loin d'être parfaite puisqu'on obtient généralement une bande de modes instables relativement large. Enfin, une dernière possibilité est de calculer la fonction d'auto-corrélation du signal et de repérer la position du premier pic de cette fonction.

La mesure «manuelle» des longueurs d'onde donne typiquement, pour une expérience donnée, la distribution représentée sur la figure 3.1. La longueur d'onde moyenne est $\langle\lambda\rangle = 43{,}6$ mm, et l'écart-type est $\sigma = 8{,}8$ mm. La transformée de Fourier du signal correspondant est donnée par la figure 3.2(a) : on peut constater qu'il est difficile d'extraire une information de cette fonction. De nombreux pics autour de la valeur moyenne déjà mesurée sont visibles et la détermination d'une longueur d'onde privilégiée n'est pas aisée. L'abscisse du pic le plus élevé donne ici une longueur d'onde de 51,6 mm, supérieure à celle calculée «manuellement». La figure 3.2(b), quant à elle, représente la fonction d'auto-corrélation du profil de hauteur. Cette courbe est plus facile à interpréter que la précédente, le premier pic étant bien marqué, pour une longueur d'onde de 40,3 mm. Toutefois, l'avantage de compter les rides une à une est de pouvoir accéder facilement à la dispersion des longueurs d'onde. C'est donc cette méthode que nous utiliserons dans la suite.

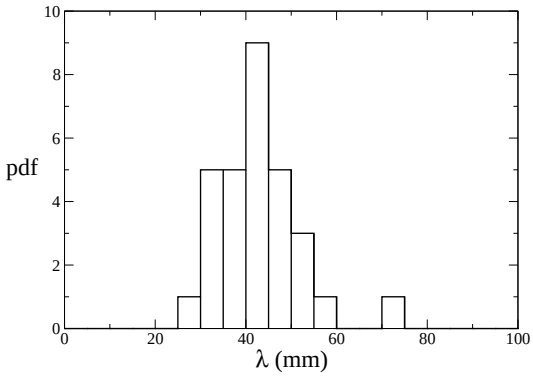
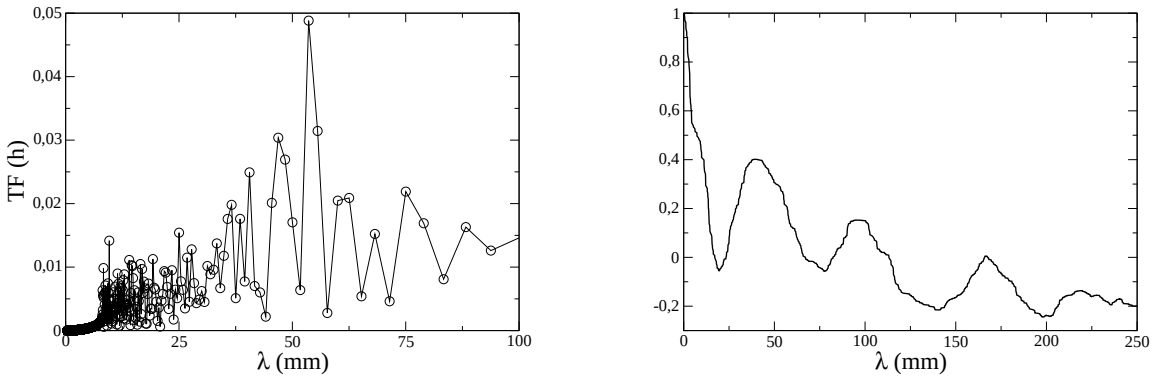


FIG. 3.1 – Distribution des longueurs d'onde à l'initiation, pour $d = 250$ μm, H = 35 mm et Q = 82 L.min^{-1} .



(a) (b)

FIG. 3.2 – (a) Transformée de Fourier du profil de hauteur à l'initiation. (b) Fonction d'auto-corrélation du profil. Mêmes paramètres qu'à la figure 3.1.

3.1.3 Influence du débit d'eau

Le paramètre de contrôle principal de l'expérience est le débit d'eau entrant. La figure 3.3 donne la longueur d'onde moyenne obtenue après 1 min d'expérience, pour différentes valeurs du débit, une hauteur d'eau H = 35 mm et un lit de billes de 250 μm. Malheureusement, le dispositif expérimental ne nous permet pas d'explorer une très large gamme de débit : on peut observer «à l'œil» un transport intermittent de grains à la surface à partir de Q = 45 L.min^{-1}. Toutefois, le transport ne devient continu que pour Q $\simeq$ 65 L.min^{-1}. Les rides mettent alors un temps très long à apparaître, et elles sont plutôt formées, comme nous l'avons déjà mentionné, à partir de la discontinuité de l'entrée du canal. Nous n'avons donc représenté sur la courbe 3.3 que les longueurs d'onde des rides obtenues en un temps très court, c'est-à-dire pour des débits élevés. Compte tenu de la relative dispersion des

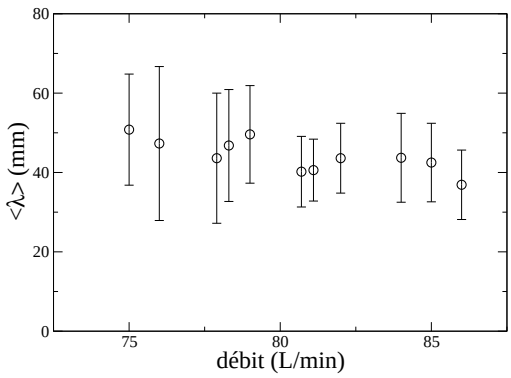
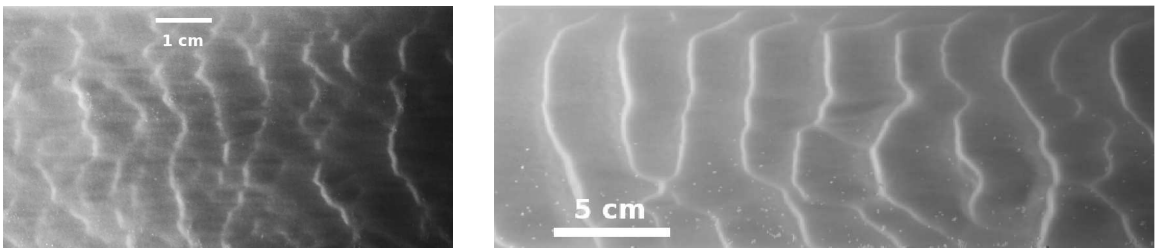


FIG. 3.3 – Distribution des longueurs d'onde à l'initiation, pour $d = 250$ μm, H = 35 mm .

longueurs d'onde observées, il est délicat d'identifier une réelle influence du débit sur la longueur d'onde à l'initiation, même si la valeur moyenne semble décroître légèrement avec le débit. La longueur d'onde dans les premiers instants de l'instabilité serait donc indépendante du cisaillement appliqué. Cette observation est compatible avec celles faites notamment par *Loiseleux et al.* [2004] dans un canal bidimensionnel.

3.1.4 Influence de la taille des grains

Nous avons réalisé les mêmes expériences avec les trois tailles de grains déjà citées. Pour des grains de diamètre $d = 100$ μm, on observe très rapidement l'apparition de structures tridimensionnelles de très faible amplitude (quelques grains, soit moins de 1 mm), observables en éclairant la surface de manière rasante, comme l'illustre la photo 3.4(a). La



(a) (b)

FIG. 3.4 – Aspect des rides pour $d = 100$ μm après (a) 1 min et (b) 4 min de cisaillement.

longueur d'onde est alors difficilement définissable, d'autant que l'amplitude des rides est trop petite pour les détecter à l'aide du télémètre. Les photographies en lumière rasante permettent de donner comme ordre de grandeur $\lambda \simeq 1$ cm. Toutefois, on observe très rapidement un réarrangement de ces «proto-rides» vers des crêtes plus régulières d'amplitude détectable (de l'ordre de 2 mm). Nous avons donc mesuré à l'aide du télémètre le profil après 4 min de cisaillement. C'est cette longueur d'onde que nous prendrons comme étant celle de l'initiation. La durée de l'expérience est un critère pratique pour la reproductibilité de l'expérience, même s'il n'est pas idéal : en effet, suivant le débit d'eau les rides peuvent évoluer plus ou moins rapidement. Il serait préférable de mesurer λ dès que l'amplitude dépasse un certain seuil, mais cette méthode nécessiterait de repérer l'amplitude en continu, ce qui n'est pas possible avec notre dispositif.

L'influence du débit sur la longueur d'onde moyenne est à nouveau difficilement quantifiable : aucune variation significative devant la dispersion des mesures n'est visible. On peut éventuellement considérer que $\langle\lambda\rangle$ augmente légèrement avec le débit, mais cet effet peut être dû au fait que nous avons effectué toutes les mesures au bout d'un temps identique, et que les rides mûrissent plus vite si le débit est plus élevé.

Dans le cas des billes de 500 μm, nous avons légèrement modifié la configuration de l'expérience : en effet dans ce cas le seuil de formation des rides représente pratiquement le débit maximal fourni par le réservoir. Pour pouvoir disposer d'une plage de mesure plus importante, nous avons donc réduit la hauteur d'eau en surélevant le lit de grains de 10 mm. La hauteur d'eau est donc réduite à 25 mm. Comme nous nous intéressons à l'apparition des rides après seulement 30 s d'érosion, alors que leur amplitude est de l'ordre de 1 mm seulement, on peut considérer que la réduction de la hauteur d'eau (et la proximité de la paroi supérieure) n'a pas une influence cruciale. La figure 3.6 illustre que comme dans les deux cas précédents, aucune variation nette de la longueur d'onde initiale avec le débit ne

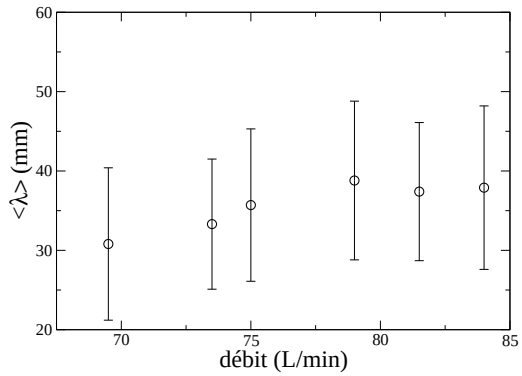


FIG. 3.5 – Variation de la longueur d'onde après 4 min de cisaillement en fonction du débit, pour $d = 100$ μm, H = 35 mm .

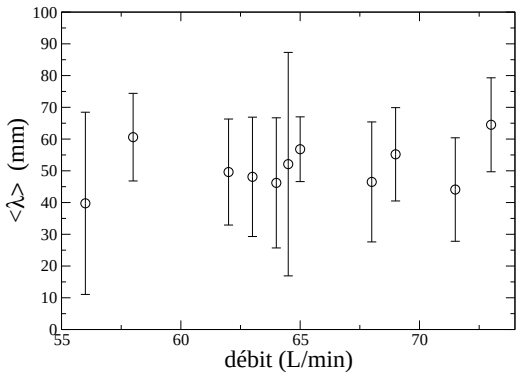


FIG. 3.6 – Variation de la longueur d'onde après 30 s de cisaillement en fonction du débit, pour $d = 500$ μm, H = 25 mm .

peut être mise en évidence. En revanche, le diamètre des grains est quant à lui un paramètre déterminant. La figure 3.7 rassemble les longueurs d'onde moyennes mesurées pour les trois tailles de grains différentes (et moyennées sur l'ensemble des valeurs du débit). On constate que la longueur d'onde croît avec le diamètre des grains. Cependant, la gamme restreinte de tailles ne permet pas de proposer une loi reliant λ à d.

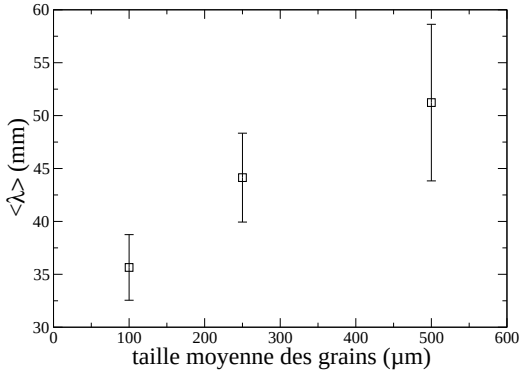


FIG. 3.7 – Longueur d'onde moyenne à l'initiation des rides, en fonction du diamètre des grains.

3.2 Dynamique et mûrissement

La figure 3.8 illustre l'évolution du profil de hauteur, relevé au centre du canal, au cours du temps : on constate immédiatement que le nombre de rides présentes dans le champ d'observation diminue tandis que leur amplitude augmente. Les rides ont également tendance à se superposer : la dispersion en longueur d'onde et en amplitude augmente. Ceci est dû au fait que les structures deviennent tri-dimensionnelles : pour des temps longs, le relevé du profil sur une ligne ne suffit donc pas à décrire complètement le relief.

3.2.1 Croissance et allongement de la longueur d'onde

Comme nous l'avons déjà dit, le mouvement du télémètre est trop lent pour pouvoir mesurer l'ensemble du profil de manière instantanée (par rapport au déplacement des rides). Le protocole suivant a donc été adopté : on laisse le lit évoluer pendant un temps donné, puis le débit est abaissé sous le seuil d'érosion, et le profil est relevé au centre du canal. L'expérience est ensuite réitérée pour plusieurs valeurs de la durée.

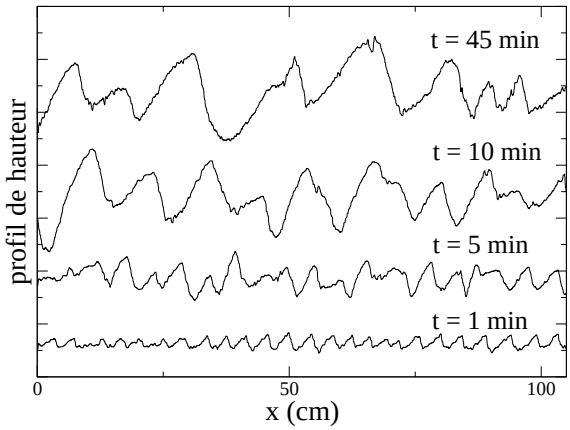


FIG. 3.8 – Aspect du profil de hauteur au centre du canal à différents instants. $d = 250$ μm, Q = 85 L.min^{-1}.

Rappelons que le profil est mesuré sur la partie centrale (longitudinalement) du canal : on peut donc considérer que cette section est toujours alimentée en grains (le lit en amont n'est jamais complètement «asséché»). Toutefois, on récupère des grains en sortie du canal : globalement, le niveau moyen du lit s'abaisse au cours du temps, comme l'illustre la figure 3.9. Nous observons une variation linéaire du niveau, ce qui signifie que le taux d'érosion moyen reste constant pendant toute la durée des expériences.

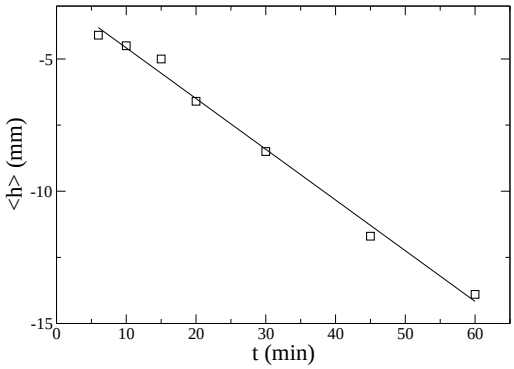


FIG. 3.9 – Niveau moyen du lit de grains au cours du temps (l'origine est arbitraire). $d = 100$ μm, Q = 85 L.min^{-1}.

On peut maintenant tracer l'évolution de l'amplitude et de la longueur d'onde moyenne

mesurées au cours du temps pour des billes de diamètre 100 μm. L'amplitude est définie

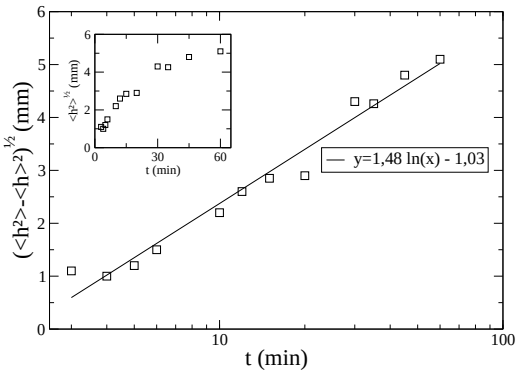


FIG. 3.10 – Évolution de l'amplitude moyenne des rides, en échelle semi-logarithmique (en encart, même courbe en échelle linéaire). $d = 100$ μm, Q = 85 L.min^{-1}.

comme $\sqrt{\langle h(x)^2\rangle - \langle h(x)\rangle^2}$. Comme le montre la figure 3.10, l'évolution de la hauteur caractéristique des rides, après un court palier, est très bien approximée par une loi logarithmique. Nous n'observons pas de réelle saturation, bien que nous n'ayons pas réalisé d'expériences sur des temps très longs : dans un dispositif annulaire et bidimensionnel, *Betat et al.* [2002] observent un état stationnaire au bout d'un temps supérieur à un jour. L'absence d'alimentation en grains nous empêche de réaliser des expériences aussi longues sur le montage actuel. En revanche, les observations dans un canal linéaire bidimensionnel (en régime d'écoulement laminaire) de *Loiseleux et al.* [2004] montrent également une croissance logarithmique de la hauteur des rides aux temps longs.

Si l'on s'intéresse à présent à la longueur d'onde moyenne, on constate (cf. Fig. 3.11) qu'elle évolue tout d'abord de manière linéaire sur une durée d'environ 10 min, avant de suivre, à l'instar de l'amplitude, une loi logarithmique. Ce changement de régime est également mentionné par *Loiseleux et al.* [2004]. Pour la longueur d'onde non plus, nous n'observons donc pas de saturation. Toutefois, la forte dispersion des données, indiquée par les barres d'erreur, incite à la prudence : il n'est pas évident de distinguer, aux temps longs, une saturation et une augmentation très lente de la longueur d'onde.

Influence de la taille des grains

Commençons par tracer l'évolution de l'amplitude moyenne des rides pour les deux tailles extrêmes de grains, 100 μm et 500 μm (cf. Fig. 3.12). Le comportement des rides à gros grains se distingue nettement de celles à petits grains. En effet, si l'amplitude

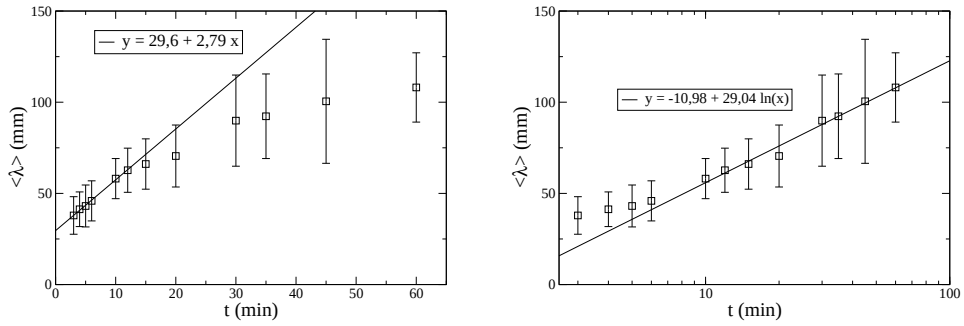


FIG. 3.11 – Évolution de la longueur d'onde moyenne des rides, en échelle semi-logarithmique et linéaire. $d = 100$ μm, Q = 85 L.min^{-1}.

suit un temps la même croissance logarithmique, elle sature ensuite, après un temps de l'ordre de 20 min. En suivant *Loiseleux et al.* [2004], nous avons ajusté la croissance aux premiers instants par une loi linéaire. Soulignons toutefois que, sur une durée aussi courte, un ajustement par une loi exponentielle donnerait la même adéquation. On peut également constater sur le diagramme de droite que pour $d = 500$ μm, la croissance de l'amplitude est en fait quasiment linéaire jusqu'au début de la saturation. Le comportement aux temps

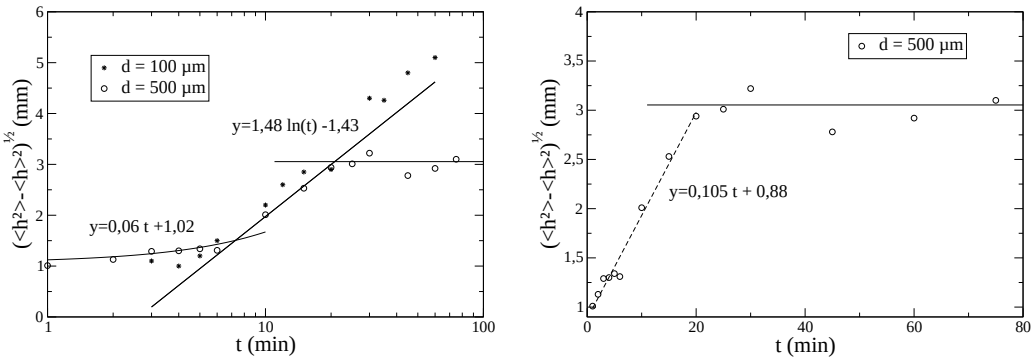


FIG. 3.12 – Évolution de l'amplitude moyenne des rides, en échelle semi-logarithmique et linéaire. Q = 85 L.min^{-1}.

longs de la longueur d'onde diffère également suivant la taille des grains, comme le montre la figure 3.13. À la croissance logarithmique pour les grains de diamètre 100 μm se substitue un régime de croissance linéaire, suivi d'une phase de saturation, pour des grains plus gros. Pour des raisons de lisibilité, nous n'avons pas indiqué sur le diagramme précédent la dispersion des longueurs d'onde mesurées. Il faut cependant rappeler que celle-ci devient très importante pour les temps longs, en raison de la tridimensionnalisation des rides. Il

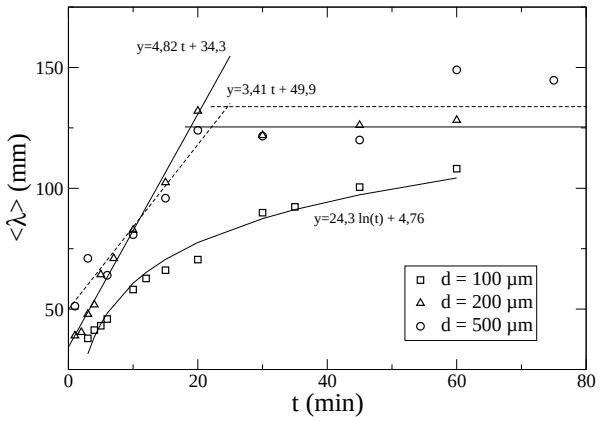


FIG. 3.13 – Évolution de la longueur d'onde moyenne des rides. Q = 85 L.min^{-1}.

convient donc de prendre avec précaution la distinction entre un état de saturation et une croissance logarithmique. En particulier, la saturation n'est pas évidente pour les plus gros grains (500 μm).

3.2.2 Tridimensionnalité

Comme cela a déjà été observé entre autres par *Raudkivi* [1997] et *Baas* [1999], les rides obtenues dans le canal, qui sont au départ à peu près perpendiculaires à l'écoulement, se déforment rapidement pour devenir tridimensionnelles. Dès les tout premiers instants, les «proto-rides» sont tridimensionnelles (1e et 2e images de la figure 3.14). Des portions de crêtes peuvent apparaître de manière déphasée suivant la position transversale. Ces morceaux de rides se «recollent» rapidement pour donner des crêtes régulières perpendiculaires à l'écoulement (3e image). Puis ces rides sont à leur tour déstabilisées transversalement (images suivantes) et le motif formé devient complètement tridimensionnel.

Cette évolution est observée quel que soit le débit et quelle que soit la taille des grains. Il est difficile de repérer une transition bien définie, et quantitative, entre deux régimes. En effet, si les rides 3D peuvent présenter des structures régulières (hexagones, briques, écailles), notre canal n'est pas assez large pour contenir plusieurs longueurs d'onde et permettre de mesurer rigoureusement une longueur d'onde transverse. Nos observations, au contraire, sont perturbées par les effets de bord, et les structures tridimensionnelles observées sont relativement désordonnées. Nous allons donc nous concentrer, dans la dernière partie de ce chapitre, sur un phénomène de tridimensionnalisation plus localisé et mieux quantifiable.

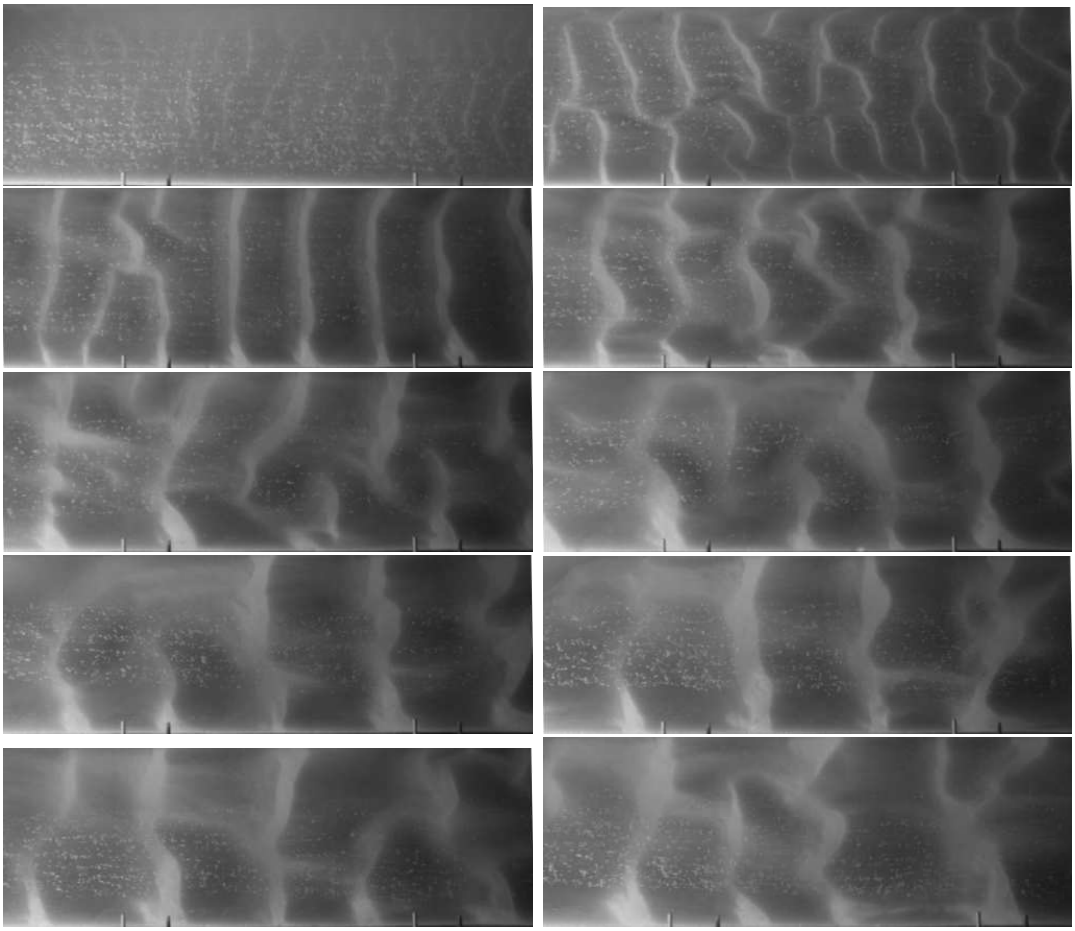


FIG. 3.14 – Évolution de l'aspect de la surface du lit au cours du temps (de gauche à droite puis de haut en bas, une image toutes les 5 min). Le lit de billes de 100 μm est éclairé sous incidence rasante. L'écoulement se fait de la droite vers la gauche.

3.3 Instabilité transverse

Nous avons constaté au cours des expériences d'évolution des rides aux temps longs qu'elles avaient tendance à devenir tridimensionnelles, les mécanismes à l'origine de cette évolution restant inconnus. Malheureusement, le canal dont nous disposons est de largeur trop limitée pour pouvoir observer des structures réellement tridimensionnelles (sur plusieurs longueurs d'onde dans la direction transverse). En revanche, il est fréquent d'observer, sur la face amont des rides, des «sillons» de petite taille, parallèles à l'écoulement, qui se creusent au cours du temps. Nous avons cherché à isoler ce phénomène en observant l'évolution d'une ride isolée, posée sur un fond rigide.

3.3.1 Observations expérimentales

Dynamique d'un tas bidimensionnel (dièdre)

Pour cette série d'expériences, le protocole suivi est le suivant : le canal est rempli d'eau au repos, et le fond recouvert de cales pour réduire la section à 35 mm de hauteur. Un petit volume de sable (saturé en eau) est maintenu entre deux plans verticaux, qui sont ensuite lentement écartés l'un de l'autre pour laisser le tas relaxer. Il est difficile de reproduire ainsi des tas strictement identiques : on obtient un tas dont l'angle varie entre 15° et 20°.

Ce tas symétrique se déforme très rapidement. À l'aide d'une nappe laser, nous avons tracé sur la figure 3.15 l'évolution de son profil au cours du temps. Un état quasi-stationnaire où le tas avance avec l'écoulement en se déformant de façon négligeable est rapidement atteint. Il se forme du côté aval une face d'avalanche (avec un angle d'environ 30°), tandis que l'angle de la face amont avec l'horizontale est alors d'environ 10°.

Apparition des sillons

Le tas est également très rapidement déstabilisé transversalement : on observe nettement la formation de plusieurs stries, orientées parallèlement à l'écoulement, sur sa face amont. Ces stries peuvent apparaître et disparaître rapidement, mais leur nombre moyen sur la largeur du tas reste remarquablement constant. Malheureusement, leur amplitude est trop faible pour pouvoir être détectée, soit par la méthode de la nappe laser, soit par le télémètre. Pour parvenir à une mesure de la longueur d'onde, nous avons donc photographié le motif à la verticale tout en l'éclairant de manière rasante, de côté. Les stries apparaissent alors par contraste, comme l'illustre la figure 3.17, où l'on peut en observer environ neuf sur la largeur du canal. Leur comptage donne une bonne approximation de la longueur d'onde mais il reste délicat, puisque ces structures sont peu marquées (leur amplitude ne dépassant pas 1 mm). Nous avons donc réalisé un profil de luminosité per-

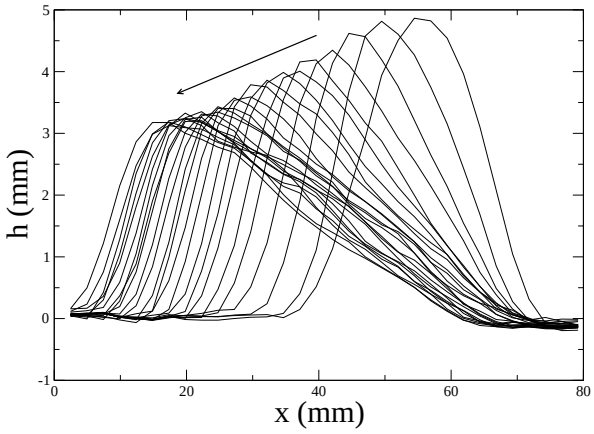


FIG. 3.15 – Évolution du profil du tas au cours du temps. L'intervalle entre deux profils est de 5 s. L'écoulement se fait de la droite vers la gauche.

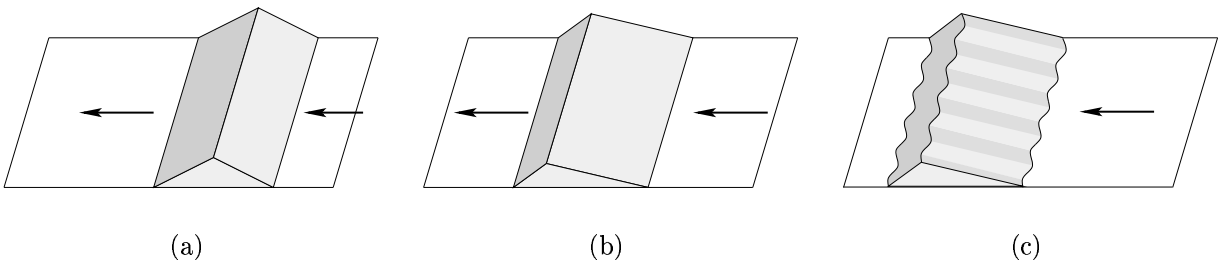


FIG. 3.16 – Évolution schématique du tas de sable au cours du temps.

pendiculairement à l'écoulement, puis une auto-corrélation du signal obtenu (cf. Fig. 3.18). En effet, une transformée de Fourier effectuée sur ce signal ne donne qu'un pic très bruité et relativement large. Nous avons choisi de retenir comme longueur d'onde moyenne la position du premier pic de la fonction d'auto-corrélation. La figure 3.19 rassemble les

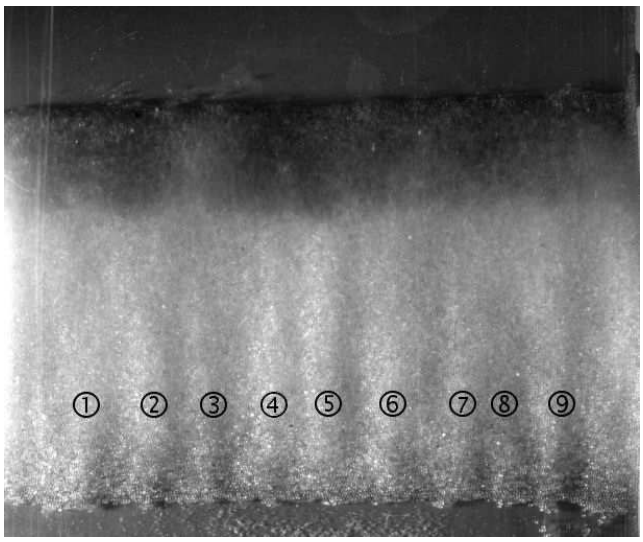


FIG. 3.17 – Vue de dessus du tas. L'écoulement est du bas vers le haut : on peut observer neuf sillons sur le côté «face au vent».

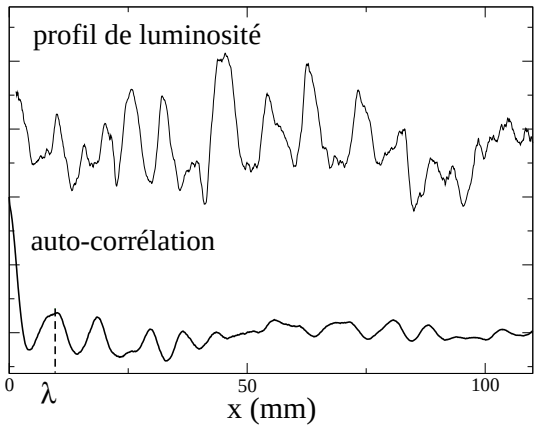


FIG. 3.18 – Exemple de profil de luminosité et de sa fonction d'auto-corrélation.

longueurs d'onde mesurées pour un tas d'environ 3 cm de largeur initiale, réalisé avec des billes de 100 μm. On peut constater que les données sont très dispersées, mais que le débit de l'écoulement n'a pas d'influence notable sur la longueur d'onde. Cependant, en dépit

de cette dispersion, l'ordre de grandeur de la taille des sillons $\langle\lambda\rangle \simeq 10$ mm constitue un résultat très reproductible.

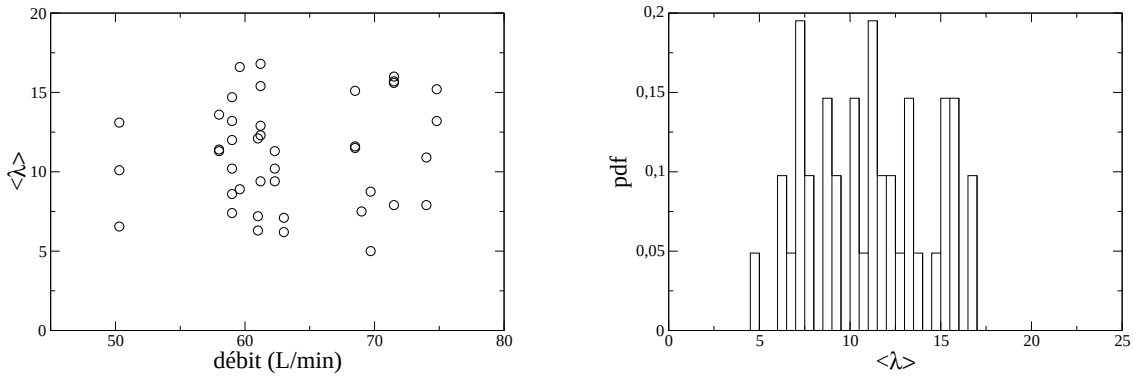


FIG. 3.19 – Longueur d'onde des sillons mesurée par auto-corrélation du profil de luminosité, en fonction du débit (a) et distribution des valeurs (b). $d = 100$ μm.

3.3.2 Mécanisme de l'instabilité

Une première hypothèse peut être invoquée pour expliquer cette instabilité transverse : le changement de rugosité entre le fond rigide et le milieu granulaire de la ride pourrait engendrer une instabilité du front de transition, qui se propagerait sur toute la face amont. Pour tester cette hypothèse, nous avons modifié légèrement le montage, en plaçant le tas initial sur un support ayant été préalablement rendu rugueux. Pour ce faire, nous avons collé sur toute sa surface une monocouche de grains identiques à ceux composant le tas. Nous pouvons alors considérer que la rugosité de surface est constante de part et d'autre du tas (même si, en toute rigueur, elle varie également avec l'érodabilité du lit granulaire). Avec ce nouveau montage, nous avons également observé l'apparition des sillons : ce n'est donc pas le changement de rugosité de surface qui génère l'instabilité.

Un autre mécanisme possible pouvant intervenir est celui des tourbillons de Görtler [*Petitjeans et Wesfreid*, 1996]. Ce sont des tourbillons parallèles à l'écoulement qui apparaissent dans une couche limite lorsque celle-ci est soumise à des forces centrifuges, c'est-à-dire lorsque la paroi présente une courbure non-nulle. Cette instabilité est en fait identique à l'instabilité de Taylor, responsable de la formation de rouleaux horizontaux dans un dispositif de Couette cylindrique. L'intervention d'un mécanisme dû à la force centrifuge a déjà été évoquée dans une étude purement théorique par *Hara et Mei* [1990] pour expliquer la formation des rides de type «briques» sous écoulement oscillant, mais,

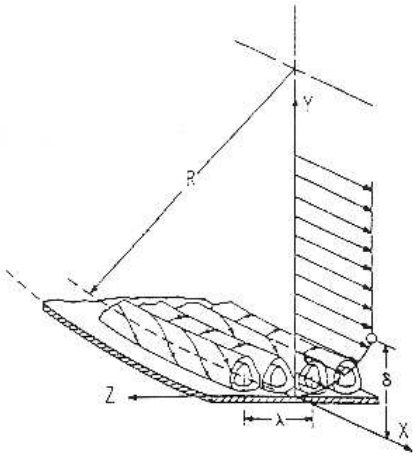


FIG. 3.20 – Tourbillons de Görtler (d'après *Schlichting et Gersten* [2000]).

à notre connaissance, elle n'a jamais été observée dans des expériences sur les rides. En revanche, l'hypothèse d'une instabilité de ce type a été invoquée par *Hopfinger et al.* [2004] pour expliquer la formation de stries, à une échelle supérieure, sur un lit granulaire creusé par un écoulement de type *wall-jet*. Comme dans notre expérience, les stries observées ne sont pas stationnaires : elles apparaissent, se déplacent et disparaissent de façon aléatoire. On peut supposer que seuls les tourbillons les plus importants (de longueur d'onde suffisamment grande) sont capables de participer au transport de grains, et se traduisent par la présence de sillons observables.

Pour valider cette hypothèse, nous allons à présent estimer le nombre de Görtler de l'écoulement sur la face amont du tas. Ce nombre est, en général, défini comme

$$\mathrm{G}_\theta = \mathrm{Re}_\theta \sqrt{\frac{\theta}{\mathrm{R}}} \tag{3.1}$$

où θ est une longueur caractéristique de la couche limite, R le rayon de courbure, et Re_θ le nombre de Reynolds construit à partir de la longueur θ, et de la vitesse caractéristique de l'écoulement U_0. Dans notre expérience, le fluide ne s'écoule pas *stricto sensu* dans une géométrie cylindrique : toutefois, il subit bien une force centrifuge due à la présence de la ride. Nous avons donc calculé une courbure «effective» en appliquant la construction géométrique présentée sur la figure 3.21 : L est la longueur horizontale du côté amont, et α son inclinaison. Le rayon de courbure ainsi défini est

$$\mathrm{R} = \frac{2\mathrm{L}}{\tan\alpha} \tag{3.2}$$

Pour L = 3 cm et $\alpha = 10°$, le rayon de courbure effectif est donc R = 34 cm. Pour la longueur θ, nous avons choisi la hauteur sur laquelle la vitesse horizontale varie significativement (en amont du tas), c'est-à-dire (cf. 2.3.2) $\theta \sim 1$ cm. Enfin, pour calculer l'ordre

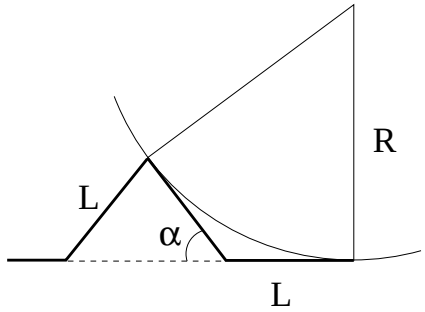


FIG. 3.21 – Calcul de la courbure effective d'un tas.

de grandeur du nombre de Görtler, nous avons suivi *Tani* [1962] et *Hopfinger et al.* [2004], en supposant que l'écoulement est complètement turbulent et en posant

$$G_T = \frac{U_0\theta}{\nu_T}\sqrt{\frac{\theta}{R}} \simeq 31\sqrt{\frac{\theta}{R}} \tag{3.3}$$

où $\nu_0 \simeq 0{,}032U_0\theta$ est la viscosité turbulente. Finalement, dans les conditions préalablement indiquées, $G_T \simeq 5{,}1$, c'est-à-dire au-dessus de la valeur critique ($G_c \simeq 1$) nécessaire à l'apparition des tourbillons.

Cependant, cette estimation du nombre de Görtler est contestable : en effet, pour une face amont d'angle fixé, le rayon de courbure du tas diminue avec sa hauteur, ce qui entraîne une augmentation de G. Physiquement, on s'attend au contraire à ce que l'instabilité disparaisse pour un tas de hauteur négligeable. Le nombre de Görtler que nous avons utilisé a en effet été défini pour les expériences classiques où une couche limite se développe le long d'une paroi concave de dimension très supérieure à la hauteur de la couche limite. Or, dans notre cas, la couche limite est déjà développée en arrivant sur un obstacle plus petit qu'elle. Il serait donc plus pertinent que les deux grandeurs, dimension de la couche limite θ et longueur de l'obstacle L, interviennent dans le critère d'instabilité. Pour cela, redéfinissons le nombre de Reynolds comme

$$Re = \frac{L^2U_0/\theta}{\nu_T} \tag{3.4}$$

Le deuxième terme compare la taille de l'obstacle à son rayon de courbure. Finalement, ce nouveau nombre de Görtler s'écrit

$$G_L = \frac{L^2U_0/\theta}{\nu_T}\sqrt{\frac{L}{R}} = G_T\left(\frac{L}{\theta}\right)^{5/2} \tag{3.5}$$

On obtient bien un paramètre qui augmente avec la taille de l'obstacle, contrairement au précédent. Avec les mêmes données numériques, ce nouveau nombre vaut $G_L \simeq 14 > 1$.

L'estimation théorique de la longueur d'onde λ des tourbillons formés est elle aussi sujette à caution. La loi la plus courante est du type

$$\Lambda = \mathrm{Re_R} \left(\frac{\lambda}{\mathrm{R}}\right)^{3/2} \tag{3.6}$$

avec Λ une constante, dont la valeur est en général estimée autour de $\Lambda = 270$. Finalement, la longueur d'onde prédite pour les structures est

$$\lambda = \left(\Lambda \frac{\nu \mathrm{R}^{1/2}}{\mathrm{U_0}}\right)^{2/3} \tag{3.7}$$

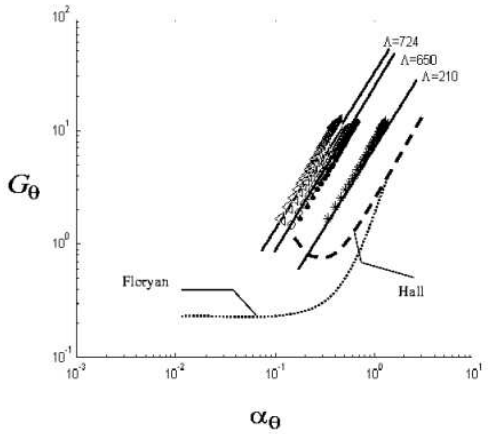


FIG. 3.22 – Diagramme de stabilité : en abscisse est représenté le nombre d'onde adimensionné pas θ et en ordonnée le nombre de Görtler. · · · · et - - - : courbes de stabilité marginale. Seul le modèle de Hall prévoit l'existence d'une longueur d'onde préférentielle. $\star$, $\circ$, Δ : longueurs d'ondes mesurées expérimentalement (d'après *Momayez et al.* [2004]).

Dans le cas de notre expérience, avec $\mathrm{U_0} \sim 20$ cm.s^{-1}, on obtient

$$\lambda_{\mathrm{th}} = 8{,}6 \text{ mm} \tag{3.8}$$

On s'attend bien à ce que le mécanisme de Görtler produise des tourbillons de longueur d'onde très proche de ceux que nous observons par l'intermédiaire les sillons de la surface granulaire. Sur la base de ce calcul rudimentaire d'ordre de grandeur, cette hypothèse pour expliquer l'instabilité transverse apparaît donc raisonnable. Toutefois, il faut mentionner que certaines observations tendent à faire penser que les stries pourraient apparaître même sur un lit horizontal. En effet, en cisaillant un lit de billes de 100 μm, plan, de très faible épaisseur, on observe très rapidement la formation des sillons, en même temps que celle

des rides, comme on peut le voir sur la figure 3.23. Les rides étant alors de hauteur très faible, l'effet de courbure devrait être négligeable, et les stries ne devraient pas apparaître. Cette observation nous conduit donc à nuancer les propos précédents. Un autre phénomène, comme par exemple le développement de stries turbulentes dans la sous-couche visqueuse de l'écoulement, pourrait être à l'origine de la variation transverse du flux de grains. Même s'il

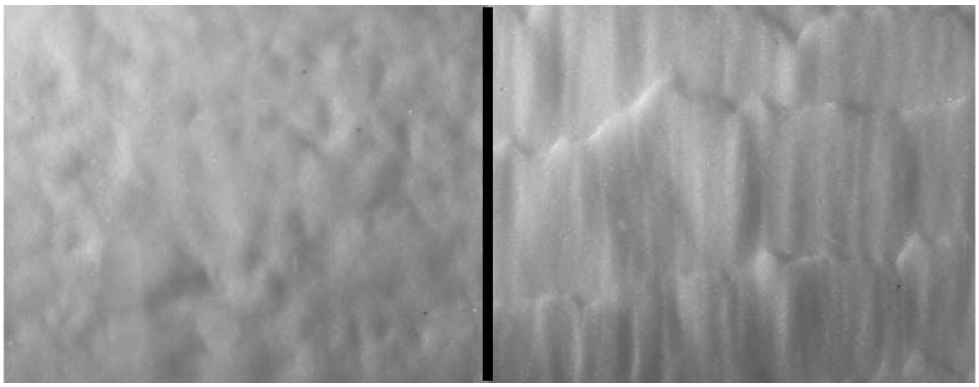


FIG. 3.23 – Vue de dessus de l'évolution d'un lit de billes (100 μm) plan, éclairé de côté en lumière rasante. Image de gauche : $t = 0$. Image de droite : $t = 30$ s. L'écoulement est du bas vers le haut.

est encore prématuré d'en fournir une explication, cette étude préliminaire montre toutefois très clairement l'existence d'une instabilité secondaire affectant le transport de grains, dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Pour aller plus loin dans ce sens, il serait très bénéfique de parvenir à confirmer de manière plus directe la présence des structures hydrodynamiques transverses qu'on s'attend à trouver au-dessus des sillons. Pour cela, nous avons commencé, avec Pascal Dupont, de l'université de Nantes, à effectuer des mesures de vitesse transverse dans l'écoulement à l'aide d'un anémomètre Doppler à ultrasons. Pour simplifier l'expérience, une «ride» symétrique en PVC, d'angle 10°, est substituée au tas de billes. L'objectif est de mettre en évidence la présence de telles vitesses, non nulles, dans l'écoulement au niveau du tas, tout en montrant qu'aucune structure de ce type n'existe en amont du tas.

D'autre part, il serait également intéressant de pouvoir exhiber une variation transverse du flux de grains le long de la face amont. Nous avons effectué des essais préliminaires de mesure par P.I.V. du champ de vitesses des grains, mais cette méthode s'avère très délicate. En effet, en filmant la surface du lit du dessus à l'aide d'une caméra rapide, on visualise aussi bien les grains roulants que ceux, immobiles, de la couche inférieure. La corrélation des images n'est donc pas le moyen optimal pour repérer le mouvement des seuls grains roulants. Il serait probablement plus approprié de développer une méthode de suivi de

particules.

3.3.3 Évolution aux temps longs

Après environ une minute d'érosion, on peut observer l'apparition d'une structure de plus grande longueur d'onde, qui se superpose aux sillons toujours présents (cf. Fig. 3.24). Cette déformation s'amplifie pour finalement «briser» la barre en un petit nombre de barchanes (comme l'illustre la figure 3.25). Cette transition d'une barre de sable transversale

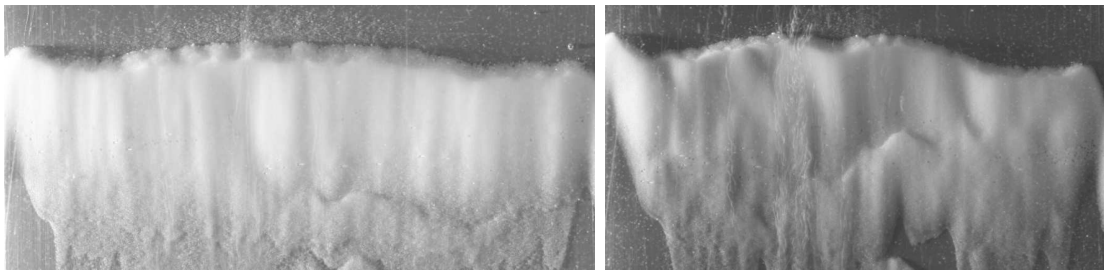


FIG. 3.24 – Vue de dessus de l'évolution d'une barre transverse de billes (100 μm) plan, éclairé de côté en lumière rasante. Image de gauche : $t = 1$ min. Image de droite : $t = 2$ min. L'écoulement est du bas vers le haut.

vers une série de barchanes a déjà été observée par *Hersen* [2004a] (comme nous l'avons évoqué dans le premier chapitre, cf. Fig. 1.15) et on suppose que dans le désert les barchanes éoliennes peuvent se former de la même façon, par déstabilisation de dunes transverses. Toutefois, aucun mécanisme satisfaisant n'a encore été proposé pour expliquer ce phénomène. L'hypothèse la plus courante est que cette instabilité prend naissance dans la zone de recirculation située derrière la face d'avalanche. Cette hypothèse n'a cependant jamais pu être testée directement. En effet, la recirculation derrière une dune est très délicate à modéliser : dans les études théoriques, la plupart des modèles incluent une forme standard (le plus souvent un polynôme du troisième degré, raccordé de manière «lisse» au profil de la dune) pour l'enveloppe de cette zone [*Andreotti*, 2004] et l'écoulement à l'intérieur est négligé. Plus récemment, *Herrmann et al.* [2005] ont étudié numériquement à l'aide d'un code commercial de mécanique des fluides l'influence de la forme de la dune sur la taille de la zone de recirculation. À l'heure actuelle il reste difficile de détailler un mécanisme d'instabilité à l'intérieur de cette bulle. Cependant, à la lumière des expériences présentées dans cette partie, on peut invoquer une autre hypothèse : celle d'une déstabilisation à partir de la face amont (face au vent). En effet, on peut supposer que les stries que nous avons observées dans notre dispositif constituent l'instabilité initiale, et servent ensuite de précurseur pour le découpage de la barre. Le mécanisme non-linéaire permettant une

FIG. 3.25 – Découpage de la barre transverse en barchanes, après 15 min d'érosion. L'écoulement est du bas vers le haut.

augmentation significative de la longueur d'onde et de l'amplitude de la déformation reste cependant à déterminer. On peut signaler que, dans l'optique de l'analogie avec le phénomène éolien, le mécanisme des tourbillons de Görtler ne constitue pas le candidat idéal. En effet, selon l'expression (3.7), la longueur d'onde observée croît avec le rayon de courbure mais décroît avec la vitesse caractéristique de l'écoulement. En utilisant le même calcul que dans l'eau avec $L = 10$ m, $\alpha = 10°$ et $U_0 = 5$ m.s^{-1}, on trouve pour le cas éolien une longueur d'onde de l'ordre de $\lambda \sim 2$ cm, ce qui est trop faible pour que des stries soient observées. Si l'hypothèse d'une instabilité de Görtler peut donc raisonnablement expliquer la formation des sillons dans notre expérience sous l'eau (avec les réserves que nous avons apportées au paragraphe précédent), elle ne prédit pas de phénomène analogue observable dans le cas éolien.

Chapitre 4 Approche théorique : analyse de stabilité linéaire

Ce chapitre ainsi que le suivant présentent les travaux théoriques réalisés sur les mécanismes fondamentaux de l'instabilité de rides. Il convient de préciser que nous avons délibérément simplifié le problème, de sorte que cette étude n'a pas vocation à modéliser rigoureusement nos expériences, mais à donner des solutions analytiques à un problème modèle, ce qui permet ensuite d'identifier clairement les mécanismes physiques gouvernant l'instabilité.

Dans une première partie, nous rappellerons le mécanisme qualitatif de l'instabilité et les résultats des travaux théoriques existants. La deuxième partie expose en détails les hypothèses et la modélisation que nous avons adoptées. Dans la troisième partie nous exposerons les résultats de l'analyse de stabilité linéaire classique à deux dimensions, avant d'améliorer le modèle en introduisant l'inertie des grains. L'extension de cette étude à trois dimensions fera l'objet du chapitre 5.

4.1 Description du problème

4.1.1 Motivations

La modélisation des rides sous-marines (et plus généralement des structures érosives) pose encore des problèmes : en effet, elle requiert de décrire simultanément le mouvement du fluide, l'effet du fluide sur les grains, et le comportement du lit de grains. Sur ces trois points, seul le premier peut être considéré comme résolu de manière satisfaisante. Malheureusement, la complexité du calcul de l'écoulement oblige à adopter un modèle restreint afin de pouvoir l'intégrer à l'analyse globale. La modélisation de l'interface fluide-grains repose, quant à elle, sur des modèles semi-empiriques et des hypothèses simplificatrices.

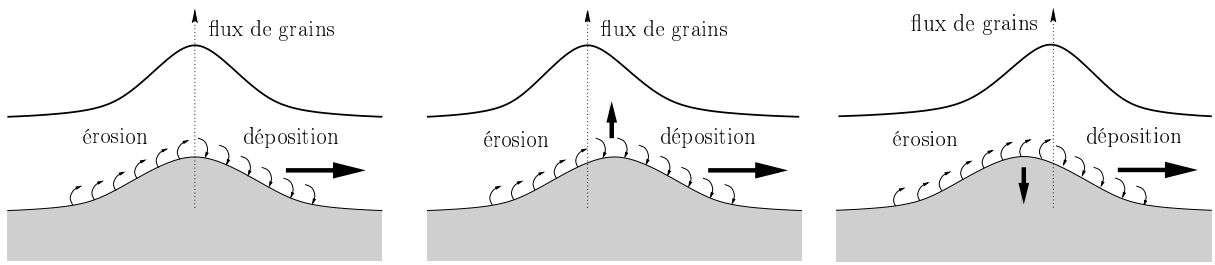
Pour expliquer le phénomène de l'apparition des rides, de nombreuses études théoriques ont été menées, en faisant le plus souvent appel à l'analyse de stabilité linéaire. Cette ap-

proche peut sembler abusive, puisqu'on suppose l'existence de perturbations d'amplitude infinitésimale, alors qu'en réalité la taille mésoscopique des grains impose une limite inférieure à la dimension des perturbations. Toutefois, nous verrons que cette hypothèse de «milieu continu» peut donner des résultats positifs.

4.1.2 Mécanisme physique de l'instabilité

Dans un premier temps, rappelons le mécanisme qualitatif de la formation des rides (ou des dunes). On considère un milieu granulaire, érodé en surface par un écoulement fluide. Supposons que cette surface présente initialement un relief : sous l'effet de l'érosion, une bosse va-t-elle disparaître, grossir ou se déplacer ?

Nous allons faire l'hypothèse que l'interface est bien définie entre le milieu granulaire et le fluide, et ne considérer qu'une estimation grossière du flux de grains en surface. La conservation de la masse implique qu'il y a érosion là où le flux de grains augmente (des grains sont arrachés) et déposition là où il diminue. Admettons que le flux de grains varie *qualitativement* comme la hauteur de sable – cette hypothèse sera justifiée dans l'exposé détaillé du modèle. On peut alors identifier trois situations possibles, qui sont schématisées sur la Fig. 4.1.



(a) Déphasage nul (b) Déphasage positif (c) Déphasage négatif

FIG. 4.1 – Trois comportements possibles d'une déformation en fonction du flux de grains.

Si le flux de grains est en phase avec la perturbation du relief (a), il y a autant de grains arrachés à la face amont que de grains déposés sur la face aval. La bosse va donc se déplacer dans le sens du flux de grains, sans que sa hauteur soit affectée. Dans le deuxième cas (b), le flux de grains atteint son maximum *en amont* de la crête : des grains sont donc déposés au sommet de la bosse. Sa hauteur va donc augmenter tandis qu'elle avance dans le sens de l'écoulement. C'est donc dans ce cas que la surface plane est instable vis-à-vis des perturbations : la bosse grossit a priori indéfiniment. Enfin, dans le troisième cas (c),

le flux de grains est cette fois-ci déphasé *vers l'aval* par rapport au relief : l'écoulement va donc arracher des grains au sommet pour les déposer en aval. La hauteur de la bosse va donc diminuer, et celle-ci va disparaître.

Ainsi, cette description très simple met en évidence l'importance du déphasage entre le flux de grains et le relief : c'est le signe de ce déphasage qui détermine le devenir d'une perturbation lorsqu'elle est érodée par l'écoulement. Or, dans la quasi-totalité des modèles de transport proposés dans la littérature, le flux de grains est *en phase* avec le cisaillement local exercé par le fluide. Les trois régimes précédents se distinguent donc par le déphasage du cisaillement, c'est-à-dire du champ de vitesses dans le fluide, par rapport au relief. Par ailleurs, comme nous le verrons dans la partie suivante, les analyses de stabilité linéaire effectuées en deux dimensions (aussi bien dans le cas laminaire que turbulent) montrent que le champ de vitesses est toujours déphasé vers l'amont par rapport au relief [*Hunt et al.*, 1988; *Charru et Mouilleron-Arnould*, 2002] : toute perturbation, quelle que soit sa taille, est donc amplifiée. Il est donc nécessaire d'introduire des mécanismes supplémentaires pour rendre compte de la sélection d'une longueur d'onde.

4.2 Modélisation du problème

4.2.1 Écoulement du fluide

Il existe de nombreuses modélisations possibles, de complexité variable, pour l'écoulement du fluide au-dessus du relief : par exemple, les premiers modèles de formation des rides considéraient un écoulement potentiel [*Kennedy*, 1963]. Dans cette hypothèse, le champ de vitesses est toujours en phase avec le relief, ce qui oblige à introduire un déphasage «artificiel» pour expliquer l'instabilité de la surface plane. En effet, examinons brièvement ce que donne le calcul en fluide parfait à deux dimensions : on appelle x la direction de l'écoulement et z l'axe vertical. Le relief est défini par la hauteur de sable $h(x)$. Les équations hydrodynamiques linéarisées autour du profil plat $\overrightarrow{u_0} = (\mathrm{U}, 0)$ se réduisent à :

$$\begin{cases} \mathrm{U}\,\partial_x u &= -\dfrac{\partial_x p}{\rho} \\ \mathrm{U}\,\partial_x w &= -\dfrac{\partial_z p}{\rho} \\ \partial_x u + \partial_z w &= 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

On se ramène facilement à l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{4.2}$$

soit, dans l'espace de Fourier,

$$\partial_z \widehat{u}_k - k^2 \widehat{u}_k = 0 \tag{4.3}$$

La seule solution physiquement acceptable de cette équation est

$$\widehat{u}_k(z) = \mathrm{A}_k e^{-|k|z} \tag{4.4}$$

En imposant la condition $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ en $z = h$ ($\overrightarrow{n}$ étant un vecteur normal à la surface granulaire), on parvient finalement à

$$\widehat{u}_k(0) = |k|\,\widehat{h}_k\,\mathrm{U} \tag{4.5}$$

c'est-à-dire, dans l'espace réel,

$$u(x,0) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_x h(\xi)}{x-\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{4.6}$$

Ce résultat traduit en fait simplement l'effet du resserrement des lignes de courant le long d'une pente montante (comme illustré sur la figure 4.2), ce qui entraîne une accélération du fluide (suivie d'une décélération en aval). L'écoulement est alors symétrique de part et d'autre de la bosse. On se trouve donc dans le cas décrit dans le paragraphe précédent (Fig. 4.1(a)) : il n'y a pas d'instabilité. De nombreux modèles turbulents ont ensuite été

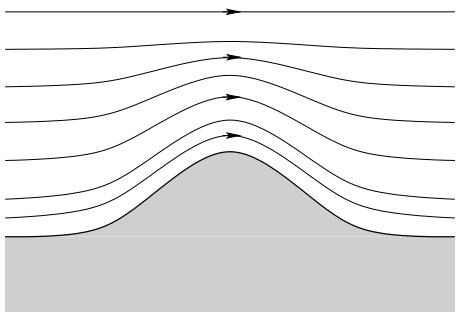


FIG. 4.2 – Pincement des lignes de courant au-dessus d'une bosse, pour un fluide parfait.

développés dans le cadre des rides sous-marines [*Richards*, 1980; *Sumer et Bakioglu*, 1984]. Au voisinage du lit, l'écoulement est alors décrit avec une viscosité turbulente dépendant de la hauteur. Le cisaillement calculé est en déphasage avec le relief, et la longueur d'onde des rides prédite par ce modèle est reliée à la rugosité de surface. Le problème est alors d'estimer correctement ce paramètre : les valeurs utilisées vont de $d/30$ à $4d$ (où d est le diamètre des grains). En effet, la première valeur correspond à la rugosité pour un lit de grains monodisperses *fixes*, alors que certains auteurs [*Smith et McLean*, 1977] considèrent que la présence des grains en mouvement engendre une rugosité effective plus importante. En outre, la rugosité due à la présence des rides n'est pas prise en compte. Malheureusement, la longueur d'onde prédite est souvent très inférieure aux valeurs expérimentales. De plus, les résultats obtenus dépendent grandement du modèle de turbulence choisi.

Or, plus récemment, *Charru et Mouilleron-Arnould* [2002] ont montré que la turbulence n'est pas indispensable à l'existence de l'instabilité : en effet, dans un écoulement de Couette laminaire, les effets combinés de la viscosité du fluide et de son inertie produisent un déphasage entre le cisaillement et le relief. Celui-ci ne peut donc être observé si l'on considère un fluide parfait ou un écoulement de Stokes : un modèle minimal devra quand même prendre en compte tous les termes de l'équation de Navier-Stokes. Un calcul dans un cas plus général a ensuite été développé par *Lagrée* [2003], qui a appliqué au problème des rides, dans un écoulement de couche limite laminaire, la théorie de la triple couche. Dans ce modèle, l'écoulement est divisé en trois domaines : la couche supérieure, décrite par un écoulement de fluide parfait, une couche inférieure de la taille des déformations de surface, et une couche intermédiaire (cf. Fig. 4.3). L'intérêt de ce découpage est que l'on peut tenir compte de la déformation de la couche limite due à la présence d'un relief. La hauteur de la couche limite étant modifiée, le fluide parfait est lui aussi affecté par la ride. Enfin, il

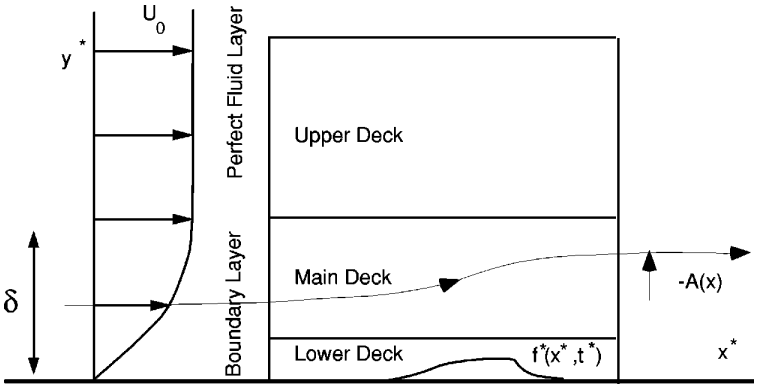


FIG. 4.3 – Définition des différentes régions de l'écoulement dans la théorie de la triple couche (d'après *Lagrée* [2003]).

faut signaler que le calcul de l'écoulement turbulent au-dessus d'un relief a été effectué, par une méthode de raccordement asymptotique, par *Hunt et al.* [1988] dans le cadre du transport éolien. Ce calcul est trop complexe pour être abordé ici en détail ; toutefois, nous en utiliserons le résultat analytique approché à la fin du chapitre suivant.

Quel modèle choisir ? Certes, ils donnent tous des champs de vitesse différents, mais nous verrons que les mécanismes essentiels de l'instabilité restent les mêmes – seul un cas particulier dans la théorie de la triple couche donne un résultat qualitativement différent : nous l'aborderons rapidement au chapitre 6. Or un écoulement laminaire présente le grand avantage de pouvoir être calculé de manière analytique beaucoup plus simplement que l'écoulement turbulent. De plus, on peut arguer que dans le cas turbulent, les fluctuations de vitesses peuvent avoir un rôle capital dans le transport des grains, alors que les calculs

existants ne donnent accès qu'aux valeurs moyennes. Il semble donc raisonnable de se placer dans un cas très simple : celui d'un écoulement laminaire cisaillé (configuration de Couette), comme présenté sur la figure 4.4. Nous verrons par la suite comment les résultats de ce calcul peuvent être étendus à des situations plus réalistes.

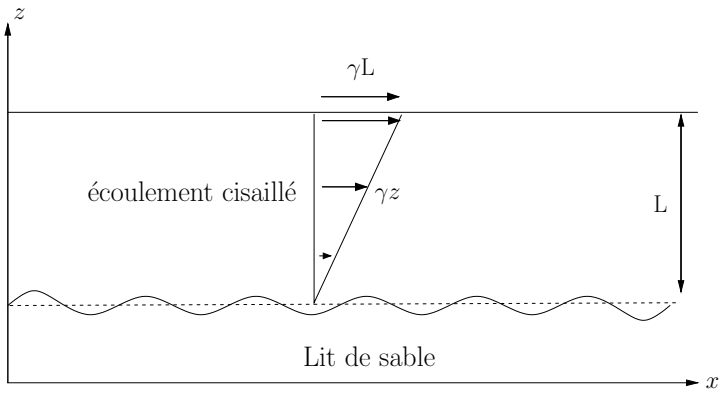


FIG. 4.4 – Configuration de Couette adoptée pour l'écoulement.

Le champ de vitesses pour l'écoulement de base s'écrit donc

$$\overrightarrow{u_0} = (u_0, w_0) = \gamma z \, \overrightarrow{e_x} \tag{4.7}$$

On ne préjuge pas de ce qui impose le taux de cisaillement à l'écoulement : cette configuration peut être vue comme l'approximation d'une couche limite laminaire, surmontée d'un fluide parfait. Il faut toutefois supposer que la taille de cette couche limite est très grande devant les dimensions des rides, et qu'elle n'est pas perturbée par la présence de ces dernières – tenir compte de la déformation de la couche limite revient à se placer dans le cadre de la triple couche [*Lagrée*, 2003]. On peut constater sur la figure 4.5 que, qualitativement, l'écoulement autour d'une bosse est similaire dans les deux cas : la principale différence est la diminution du cisaillement en amont de la bosse dans le cadre de la triple couche, mais ceci n'a pas d'incidence sur le reste de l'analyse. Notons que dans les deux cas, le cisaillement total peut devenir négatif en aval de la bosse, ce qui correspond à la présence d'une zone de recirculation. Celle-ci peut donc être prise en compte même dans le cadre d'un modèle très simple. Enfin, pour calculer le champ de vitesses dans le fluide, on adopte l'hypothèse de quasi-stationnarité : le temps caractéristique du mouvement du lit est très supérieur à celui du mouvement du fluide. Ce découplage est très bien vérifié expérimentalement : on trouve que la vitesse caractéristique des rides est de l'ordre du cm.min^{-1}, alors que celle du fluide est de plusieurs cm.s^{-1}. Ceci implique que la forme de l'écoulement s'adapte de façon instantanée à une modification du relief.

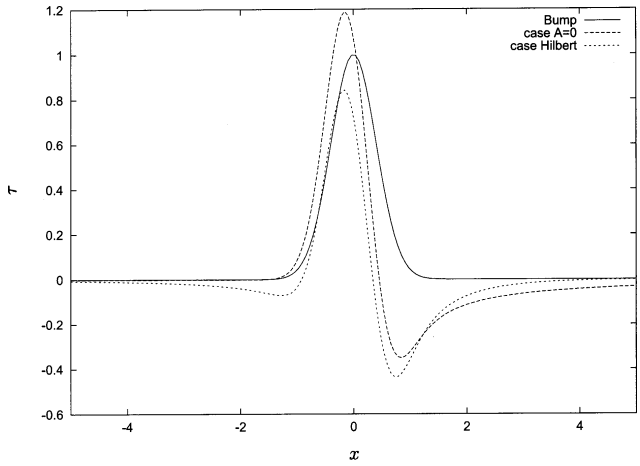


FIG. 4.5 – Comparaison du cisaillement autour d'une bosse gaussienne pour une profondeur d'eau infinie dans le cas de l'écoulement de Couette cisaillé (- - -) et de la triple couche (cas Hilbert : couche limite déformable surmontée d'un fluide parfait de hauteur infinie) (· · · ·) (d'après *Lagrée* [2003]).

4.2.2 Transport des grains

Le transport de particules par un écoulement fluide a été l'objet d'un nombre extraordinairement élevé d'études, aussi bien en physique qu'en géophysique et en sédimentologie, mais aussi en ingénierie hydraulique et chimique. Sa modélisation à elle seule ferait l'objet d'une thèse, et nous n'en présenterons (et utiliserons) ici qu'une seule formulation. Malheureusement, il n'existe pas à ce jour de description complète et unanimement acceptée du transport sédimentaire. On trouve dans la littérature un très grand nombre de lois donnant la quantité de grains entraînés en fonction du cisaillement imposé par le fluide [*Einstein*, 1942; *Meyer-Peter et Müller*, 1948; *Bagnold*, 1966; *Nielsen*, 1992; *Yalin et Karahan*, 1979; *Rijn*, 1984; *Sumer et Bakioglu*, 1984; *Komarova et Hulscher*, 2000; *Fredsøe et Deigaard*, 1992; *Roos et Blondeaux*, 2001; *Charru et Mouilleron-Arnould*, 2002]. Une revue complète des différents modèles de transport est effectuée par *Kouakou* [2005]. Cependant, nombre des lois utilisées ne sont que des ajustements de données expérimentales relativement dispersées. La simulation numérique complète du transport sédimentaire, en prenant en compte l'effet rétroactif de la présence des grains sur l'écoulement, commence seulement à être réalisable (en particulier dans le cas éolien) même si la rétroaction de la présence des grains sur l'écoulement est souvent modélisée de manière approchée.

Modèle de base

Dans toute l'étude, nous ne prendrons pas en compte le phénomène de *suspension* des grains dans l'écoulement : on suppose que le transport se fait entièrement par *charriage* («bedload transport»), c'est-à-dire qu'une couche de quelques diamètres de grains d'épaisseur est en mouvement. On considérera donc que les grains roulent le long de la surface (une description plus détaillée de ce mode de transport en écoulement visqueux a été élaborée par *Charru et al.* [2004] sur la base de l'observation expérimentale du mouvement individuel des grains de surface), et on négligera l'influence de ces grains roulants sur l'écoulement fluide – à notre connaissance, seule l'étude numérique et expérimentale de *Schmeeckle et Nelson* [2003] aborde ce phénomène, mais en restant à l'échelle du grain. En particulier, dans le calcul de l'écoulement, les conditions aux limites à l'interface sable/fluide seront celles de non-glissement. Malgré leur multiplicité, la plupart des lois de transport peuvent

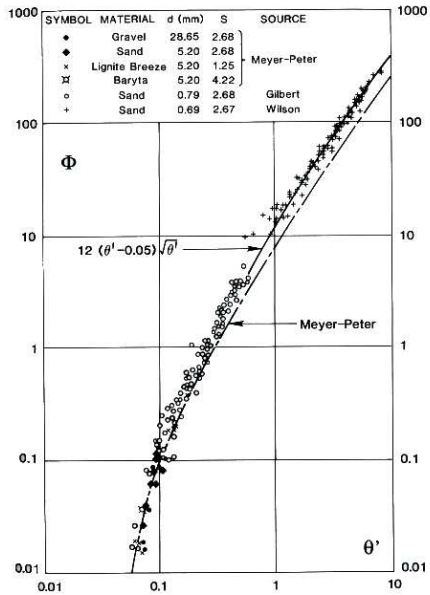


FIG. 4.6 – Mesures expérimentales du flux total de grains transportés en fonction du nombre de Shields, ajustées par la loi de Meyer-Peter/Müller (d'après *Nielsen* [1992]).

être réduites à une forme générale commune. L'existence d'un seuil de cisaillement nécessaire pour mettre les grains de surface en mouvement est quasi-unanimement acceptée. Cette valeur minimale traduit la compétition entre les forces qui s'exercent sur le grain : la force de traînée exercée par le fluide tend à l'arracher au lit tandis que son poids s'y oppose. Il est ainsi naturel de définir un nombre adimensionné comparant les ordres de

grandeur de ces deux forces (la force de traînée étant donnée par la formule de Stokes) :

$$\Theta = \frac{\eta\gamma d \times d}{\rho(s-1)gd^3} = \frac{\eta\gamma}{\rho(s-1)gd} \tag{4.8}$$

où η est la viscosité dynamique du fluide, γ le taux de cisaillement subi par la surface des grains, $s = \rho_g/\rho$ la densité relative du sédiment par rapport au fluide, g l'accélération de la pesanteur et d le diamètre des grains. Ce paramètre est le nombre de Shields. Son interprétation pose quelques problèmes : en effet, on adopte pour la force exercée par le fluide la formule de Stokes, proportionnelle à la vitesse. Or, cette formule n'est valable que lorsque le nombre de Reynolds particulaire $\mathrm{Re_p}$ est suffisamment faible (cf. plus bas l'équation (4.18)). On peut donc s'attendre à ce que la valeur critique du nombre de Shields Θ_c, nécessaire à la mise en mouvement des grains, dépende de $\mathrm{Re_p}$. Une telle dépendance a en effet été mise en évidence expérimentalement, notamment par *Loiseleux et al.* [2005] grâce à des expériences d'érosion dans un canal de Hele-Shaw (bidimensionnel) : le nombre de Shields critique apparaît constant pour $\mathrm{Re_p} \lesssim 1$ et tend à décroître pour des valeurs supérieures, comme l'illustre la figure 4.7. Malgré cette restriction, le nombre de Shields

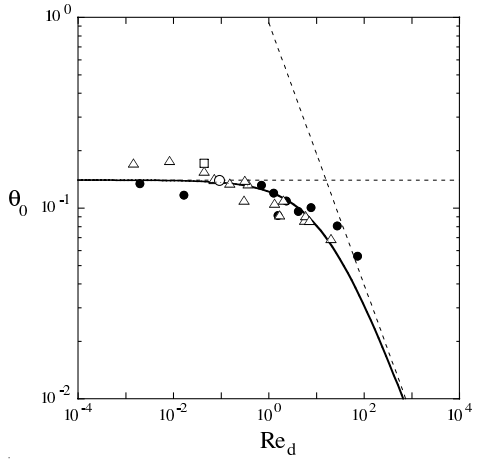


FIG. 4.7 – Nombre de Shields critique en fonction du nombre de Reynolds particulaire (d'après *Loiseleux et al.* [2005]).

reste le plus couramment utilisé pour quantifier le transport de grains par un écoulement. S'il est inférieur au seuil de mise en mouvement, le flux de grains est nul. En revanche, au-dessus du seuil, le flux d'érosion est écrit le plus souvent, à des variantes près, sous la forme d'une loi de puissance de l'écart au seuil [*Fredsøe et Deigaard*, 1992] :

$$q_\mathrm{eq} = q_\mathrm{b}\left[\Theta - \Theta_\mathrm{c}\right]^m \times \mathcal{H}\left[\Theta - \Theta_\mathrm{c}\right] \tag{4.9}$$

$\mathcal{H}$ étant la fonction de Heaviside et Θ_c la valeur critique du nombre de Shields correspondant au seuil de mise en mouvement des grains. $q_\mathrm{b} = c\sqrt{(s-1)gd^3}$, où c est une constante

numérique, est un flux de référence. La valeur de l'exposant m varie suivant les auteurs.

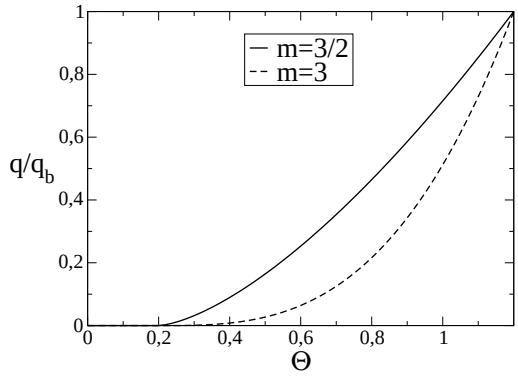


FIG. 4.8 – Allure du flux de grains en fonction du nombre de Shields. $\Theta_c = 0{,}2$.

En se basant sur la théorie de la resuspension visqueuse développée par *Leighton et Acrivos* [1986], *Charru et Mouilleron-Arnould* [2002] parviennent à un exposant $m = 3$. Cette valeur est également celle trouvée par *Bagnold* [1956] (bien que sa loi de transport comporte un facteur logarithmique supplémentaire). Les observations «grain par grain» effectuées par *Charru et al.* [2004] dans un écoulement visqueux conduisent en revanche à une loi parabolique (plus précisément $q \propto \Theta\,(\Theta - \Theta_c)$). Toutefois, une des lois les plus couramment utilisées est celle, empirique, de Meyer-Peter/Müller, où $m = 3/2$ [*Fredsøe et Deigaard*, 1992] (cf. Fig. 4.6). C'est sur celle-ci que nous nous baserons, sauf mention contraire. Le choix de cet exposant n'a cependant pas d'influence cruciale sur les résultats de l'analyse de stabilité linéaire.

Effet de la pente

La loi de transport ci-dessus a été définie pour le cas d'une surface granulaire horizontale, ce qui n'est évidemment pas toujours le cas dans le cadre de la formation des rides. Il est possible de prendre en compte l'effet de la pente sur le transport en modifiant légèrement la loi (4.9). On considère généralement que c'est la valeur critique du nombre de Shields qui varie suivant la pente locale de la surface : il est plus facile de mettre un grain en mouvement le long d'une pente descendante (négative) que sur une pente montante (positive). Cette dépendance se traduit par

$$\Theta_c = \Theta_{c_0}\left(1 + \frac{1}{\mu_s}\frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{4.10}$$

où $\mu_s = \tan\phi_s$, ϕ_s étant l'angle de stabilité interne du matériau granulaire. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'une telle équation se déduit facilement d'un simple bilan de

forces sur un grain au seuil de mise en mouvement. Un effet supplémentaire, directement sur la valeur du flux, est parfois ajouté [*Fredsøe et Deigaard*, 1992], mais il est du second ordre par rapport à la correction sur le seuil. Nous ne tiendrons pas compte non plus de la dépendance en $\mathrm{Re_p}$.

Effet de l'inertie des grains

Dans le cadre que nous avons défini jusqu'à présent, l'analyse de stabilité linéaire à deux dimensions donne des résultats très éloignés de la réalité pour la longueur d'onde sélectionnée [*Charru et Mouilleron-Arnould*, 2002]. Or, comme nous le montrerons dans la partie suivante, c'est le mécanisme stabilisant, à savoir l'effet de pente, qui détermine cette longueur d'onde. Nous verrons qu'il est alors nécessaire d'introduire un nouveau type de mécanisme stabilisant. Présentons donc le modèle utilisé pour prendre en compte l'inertie des grains.

Si le lit de grains mouvants n'est pas à l'équilibre avec le fluide, le flux de grains ne s'adapte pas instantanément aux variations du cisaillement : quand celui-ci augmente, des grains sont arrachés du lit statique, mis en mouvement, et ils mettent un certain temps à atteindre la vitesse du fluide. Ce temps caractéristique peut être associé à une longueur de mise à l'équilibre que nous noterons l_{eq}. En outre, il est naturel que l'inertie des grains joue un rôle, puisque dès que le diamètre des grains dépasse 50 μm, le nombre de Reynolds particulaire devient plus grand que 1 au seuil de mise en mouvement. Pour tenir compte de ce phénomène, nous allons repartir d'une description du transport par charriage proche du modèle BCRE [*Bouchaud et al.*, 1994]. On adopte la dichotomie classique entre deux espèces de grains : une couche de grains roulants, d'épaisseur *effective* $r(x,t)$[1], surmonte une couche de grains statiques, d'épaisseur $\mathrm{H}(x,t)$. La hauteur totale du lit est simplement

$$h(x,t) = \mathrm{H}(x,t) + r(x,t) \tag{4.11}$$

Écrivons à présent la conservation de la quantité de matière dans chaque couche : on notera Γ le taux d'échange, c'est-à-dire la quantité de grains passant de l'état statique à l'état roulant par unité de temps.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial r}{\partial t} & = & \dfrac{\partial q}{\partial x} + \Gamma \\ \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} & = & -\Gamma \end{array} \right. \tag{4.12}$$

[1] Comme la hauteur totale h, r est défini par $r(x,t) = \dfrac{1}{\phi_0}\displaystyle\int_{\mathrm{H}(x,t)}^{\infty} \mathrm{d}z\phi(x,t)$, où ϕ_0 est la fraction volumique en grains du lit statique, et $\phi(x,t)$ celle du lit roulant.

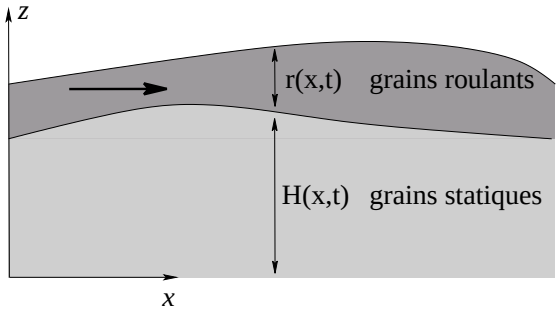


FIG. 4.9 – Grains roulants et grains statiques dans le modèle BCRE.

On peut vérifier que l'on retrouve bien l'équation de conservation de la masse totale de grains :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{4.13}$$

On admet tout d'abord que l'épaisseur de la couche roulante varie lentement avec le temps, ce qui entraîne

$$\Gamma = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{4.14}$$

Pour fermer le problème, il faut également adopter une expression pour le taux d'échange. Celui-ci peut être développé en puissances successives de l'épaisseur de grains roulants r :

$$\Gamma = \alpha - \beta r + \mathrm{O}(r^2) \tag{4.15}$$

le premier terme représentant l'érosion, et le second la déposition de grains. Nous allons réécrire différemment cette équation, en supposant que le taux d'échange est proportionnel à l'écart du flux de grains à sa valeur «saturée», c'est-à-dire sa valeur lorsque les grains roulants sont à l'équilibre avec le fluide. On écrit donc

$$\Gamma = \frac{q_{\mathrm{eq}} - q}{l_{\mathrm{eq}}} \tag{4.16}$$

Le flux «réel» de grains obéit donc finalement à l'équation de relaxation suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{q - q_{\mathrm{eq}}}{l_{\mathrm{eq}}} \tag{4.17}$$

On retrouve une loi de saturation identique à celle adoptée classiquement pour le transport éolien [*Sauermann et al.*, 2001; *Andreotti et al.*, 2002b] : en arrivant sur un fond érodable, le fluide se «charge» en grains de manière exponentielle, jusqu'à ce que la valeur d'équilibre du flux soit atteinte, comme l'illustre la figure 4.10 Il reste maintenant à estimer la longueur de mise à l'équilibre. Un moyen simple d'en obtenir un ordre de grandeur est de calculer le temps caractéristique nécessaire à un grain pour passer d'une vitesse nulle à sa vitesse

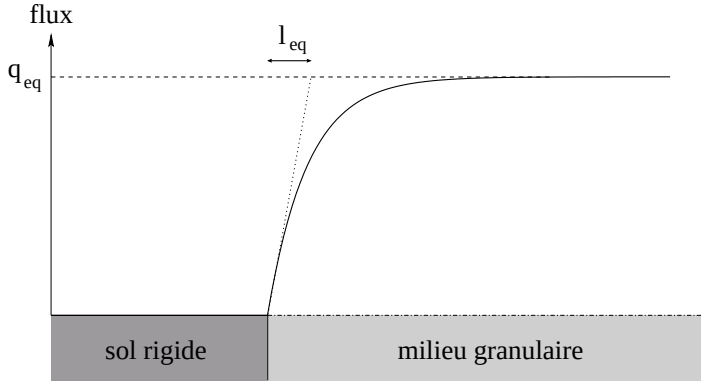


FIG. 4.10 – Saturation exponentielle du flux de grains en fonction de la distance.

d'équilibre. Celle-ci peut s'exprimer grossièrement comme $v_g = \gamma d/2$ [*Valance et Langlois*, 2005] : c'est la vitesse du fluide au niveau du centre de gravité du grain. Cependant, on peut noter que *Charru et al.* [2004] ont mesuré que les grains érodés avaient des vitesses plus faibles, inférieures à $\gamma d/5$. Or, une fois mis en mouvement, le grain est accéléré par la force de traînée. De manière générale, celle-ci s'exprime comme

$$\|\overrightarrow{F_d}\| = \frac{\pi}{8} c_d \, \rho \, d^2 v_r^2 \tag{4.18}$$

où v_r est la vitesse relative du grain par rapport au fluide, et c_d le coefficient de traînée, qui dépend du nombre de Reynolds particulaire $\mathrm{Re_p} = \gamma d^2/\nu$:

$$c_d = 0{,}4 + \frac{24}{\mathrm{Re_p}} + \frac{6}{1+\sqrt{\mathrm{Re_p}}} \tag{4.19}$$

Par analyse dimensionnelle, on peut alors estimer un «temps de mise à l'équilibre» :

$$\tau_{eq} = f(\mathrm{Re_p})\frac{s}{\gamma} \tag{4.20}$$

où la fonction f, qui provient de la dépendance de c_d en $\mathrm{Re_p}$, varie comme $f \sim 0{,}035\mathrm{Re_p}$ pour $\mathrm{Re_p} < 10$ et tend vers 3,3 quand $\mathrm{Re_p}$ devient grand. Il est maintenant facile d'obtenir la longueur caractéristique

$$l_{eq} = v_g \tau_{eq} = f(\mathrm{Re_p})\, s\, d \tag{4.21}$$

La figure 4.12 montre la variation de cette longueur d'équilibre avec $\mathrm{Re_p}$, dont la valeur au seuil de mise en mouvement est représentée sur la figure 4.11, en fonction du diamètre des grains.

4.2.3 Principe du calcul

La séparation des échelles temporelles (hypothèse de quasi-stationnarité) permet d'établir pour la modélisation le schéma de principe représenté sur la figure 4.13. En partant

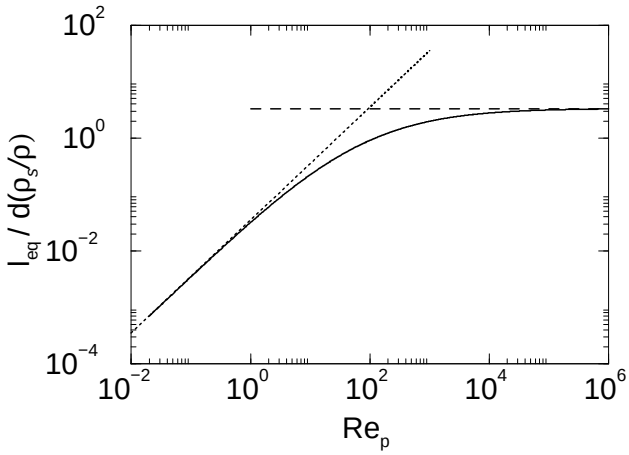


FIG. 4.11 – Évolution de la longueur de mise à l'équilibre en fonction du nombre de Reynolds particulaire.

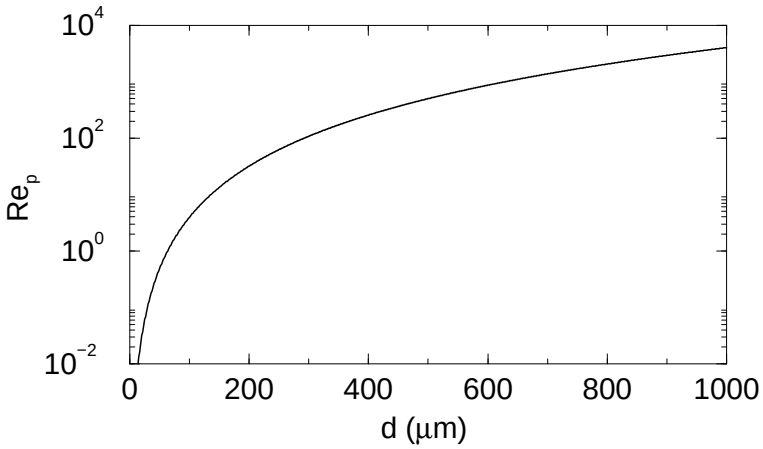


FIG. 4.12 – Nombre de Reynolds particulaire au seuil de mise en mouvement ($\Theta_{c_0} = 0{,}2$) .

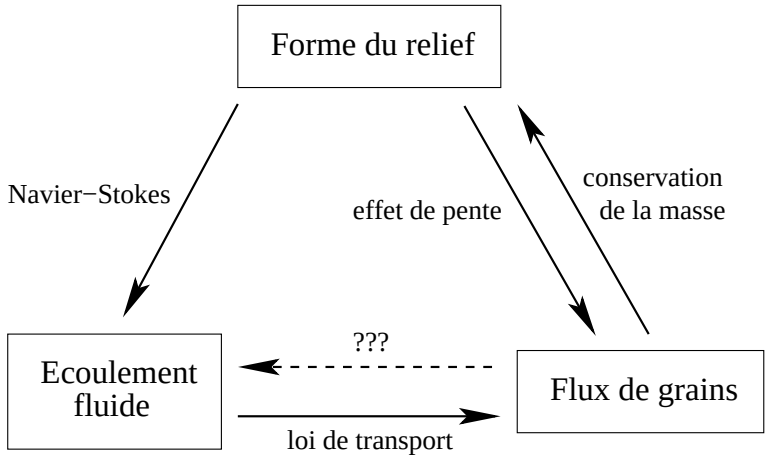


FIG. 4.13 – Schéma de principe de la modélisation.

d'un relief initial, on peut calculer le champ de vitesses dans le fluide (cf. 4.2.1). La loi de transport (4.9) nous donne le flux de grains saturé. On peut alors utiliser l'équation de relaxation (4.17) afin d'obtenir le flux réel à la surface. La rétroaction du transport des grains sur l'écoulement ne sera pas, ici, prise en compte. Enfin, on utilise pour fermer le problème la conservation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{4.22}$$

ce qui nous donne une nouvelle forme du relief. Il ne reste plus qu'à itérer ce schéma. C'est ce que nous allons faire, à l'ordre linéaire, dans la partie suivante.

4.3 Stabilité marginale

4.3.1 Principe de l'analyse de stabilité linéaire

À l'aide des équations que nous venons de détailler, nous pouvons maintenant décrire l'évolution du relief par érosion. Pour savoir quelles structures émergent à partir d'une surface de sable initialement plane, nous allons étudier la stabilité linéaire de celle-ci vis-à-vis des perturbations. Initialement, sa position est décrite par

$$h(x, t = 0) = 0 \tag{4.23}$$

Dans ces conditions (configuration de Couette), l'écoulement présente un profil de vitesse linéaire :

$$\overrightarrow{u_0} = (u_0, w_0) = \gamma z \overrightarrow{e_x} \tag{4.24}$$

et le flux de grains est alors

$$\overrightarrow{q}_0 = c\sqrt{(s-1)gd^3}\,(\Theta_0 - \Theta_{c_0})^m\,\overrightarrow{e_x} \tag{4.25}$$

où $\Theta_0 = \nu\gamma/(g(s-1)d)$ est le cisaillement adimensionné à la surface, pour un lit plan. Le profil de pression est, lui, simplement hydrostatique :

$$p_0(z) = -\rho g z + \mathrm{C^{te}} \tag{4.26}$$

Considérons maintenant que la surface présente une petite déformation $h_1(x,t)$. Cette déformation peut être décrite par ses composantes de Fourier

$$h_1(x,t) = \int \widehat{h}_1(k_x,t)\,e^{ik_x x+\omega t}\,\mathrm{d}k_x \tag{4.27}$$

L'objectif de l'analyse de stabilité linéaire est d'obtenir la relation de dispersion, c'est-à-dire le taux de croissance d'une perturbation en fonction de son nombre d'onde. On considère donc une perturbation à un seul mode, soit

$$h_1(x,t) = \widehat{h}_1(k_x)\,e^{ik_x x+\omega t} \tag{4.28}$$

k_x étant son nombre d'onde, et ω son taux de croissance *complexe*. La partie imaginaire de ω donne la vitesse de phase de la perturbation. La partie réelle de ω correspond véritablement au taux de croissance : s'il est positif, la perturbation s'amplifie, alors qu'elle décroît s'il est négatif. La surface plane est donc instable vis-à-vis de ce mode dans le premier cas, et stable dans le second.[2] La longueur d'onde dont l'analyse prédit l'apparition est donc celle possédant le taux de croissance le plus élevé.

4.3.2 Relation de dispersion

Pour résoudre les équations de l'hydrodynamique, on suppose donc que l'écoulement est stationnaire et que les conditions aux limites ne dépendent pas du temps. Ce calcul est effectué dans *Charru et Mouilleron-Arnould* [2002] et *Valance et Langlois* [2005], et nous le détaillerons seulement pour le cas tridimensionnel, au chapitre suivant. Il est toutefois utile pour la suite de définir la longueur visqueuse :

$$l_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}} \tag{4.29}$$

[2]Dans toute la suite, on dira, par abus de langage, qu'un mode est (in)stable si la surface plane est (in)stable vis-à-vis de ce mode.

Une fois connu le champ de vitesses, et en particulier le cisaillement au niveau de la surface, il reste à linéariser la loi de transport et à l'incorporer dans l'équation de conservation de la masse. Dans toute la suite, on se placera dans l'approximation d'une hauteur d'eau très grande devant les dimensions des rides. Pour faire apparaître plus clairement les termes correspondant aux différents mécanismes, nous ne donnerons ici que les expressions simplifiées du taux de croissance. Les solutions détaillées du calcul de l'écoulement et de l'analyse de stabilité sont données dans l'Annexe A.

Sans mécanisme stabilisant

Commençons par rappeler le résultat si l'on ne tient compte ni de l'effet de pente, ni de l'effet de l'inertie des grains (c'est-à-dire si le flux est donné par $q = q_{\mathrm{b}} \left[\Theta - \Theta_{\mathrm{c}_0}\right]^m \times \mathcal{H}\left[\Theta - \Theta_{\mathrm{c}_0}\right]$). Dans ce cas, le taux de croissance s'écrit

$$\mathrm{Re}\,(\omega) \propto \begin{cases} (kl_{\mathrm{v}})^{4/3} + \mathrm{O}\left((kl_{\mathrm{v}})^{8/3}\right) & \text{pour } kl_{\mathrm{v}} \ll 1 \\ \mathrm{C}^{\mathrm{te}} & \text{pour } kl_{\mathrm{v}} \gg 1 \end{cases} \tag{4.30}$$

Notons que les puissances non-entières de k traduisent la non-localité du phénomène : en toute rigueur, il faudrait noter $|k|$. En effectuant une transformée de Fourier inverse, on retrouverait une expression intégrale du même type que (4.6). Voyons maintenant l'allure de cette relation de dispersion :

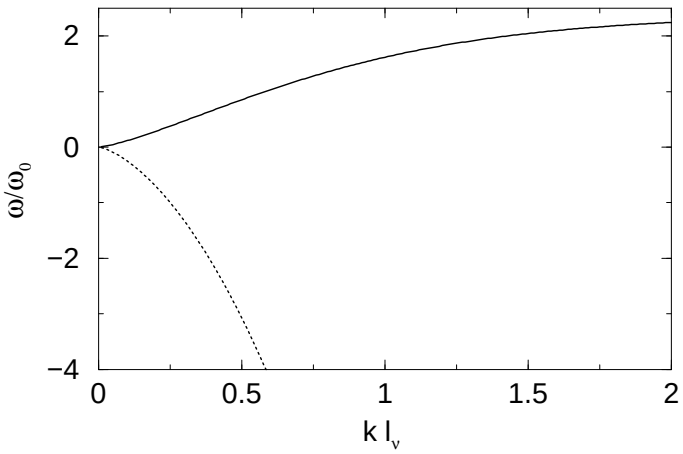


FIG. 4.14 – Taux de croissance complexe d'une perturbation en fonction de son nombre d'onde (sans effet de pente ni inertie) : la partie réelle est en trait plein et la partie imaginaire en pointillés. $\chi = 0{,}1$, $\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} et $d = 100$ μm.

On constate que toutes les perturbations sont instables, et plus leur longueur d'onde est petite, plus elles croissent vite. Cette solution n'est pas physiquement acceptable. Il

est donc nécessaire d'introduire un mécanisme supplémentaire pour «stabiliser» les grands nombres d'onde. Ce mécanisme doit décaler vers l'aval le maximum du flux de grains quand la longueur d'onde est petite. Mathématiquement, cela revient à ajouter un terme imaginaire négatif, dépendant de k, à l'expression du flux q.

Effet de la pente

Classiquement, on introduit à cette fin l'effet de la pente sur la loi de transport (4.10) : la relation de dispersion devient alors

$$\mathrm{Re}\,(\omega_\mathrm{p}) \propto \begin{cases} (kl_\mathrm{v})^{4/3} - (kl_\mathrm{v})^2 + \mathrm{O}\left((kl_\mathrm{v})^{8/3}\right) & \text{pour } kl_\mathrm{v} \ll 1 \\ -(kl_\mathrm{v})^2 & \text{pour } kl_\mathrm{v} \gg 1 \end{cases} \tag{4.31}$$

L'effet de pente se traduit par un terme quadratique négatif dans le développement de $\mathrm{Re}\,(\omega_\mathrm{p})$: les plus grands nombres d'onde, c'est-à-dire les plus petites longueurs d'onde (ou encore, les pentes trop importantes) sont donc atténués : la gravité a pour effet de «lisser» la surface, comme on s'y attendait intuitivement. On peut alors définir une zone d'instabilité bornée, ainsi qu'une longueur d'onde préférentielle. Il faut toutefois noter que le mode $k = 0$ reste neutre, et que les très grandes longueurs d'onde sont toujours instables. Le maximum

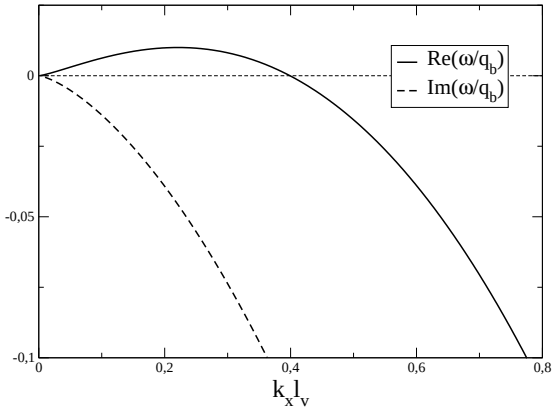


FIG. 4.15 – Taux de croissance d'une perturbation en fonction de son nombre d'onde (avec effet de pente).

de cette courbe définit la longueur d'onde qui sera choisie par le système (c'est-à-dire le mode linéairement le plus instable). On peut facilement calculer sa position :

$$\lambda_\mathrm{max} = \frac{30\,l_\mathrm{v}}{\mu_\mathrm{s}^{3/2}(1+\chi)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{g(s-1)d}}\,\frac{30\,\nu}{\Theta_{c0}^{1/2}\,\mu_\mathrm{s}^{3/2}\,(1+\chi)^2} \tag{4.32}$$

où nous avons introduit le paramètre χ, écart relatif au nombre de Shields critique :

$$\chi = \frac{\Theta_0 - \Theta_{c_0}}{\Theta_{c_0}} \tag{4.33}$$

Il apparaît que la longueur d'onde sélectionnée dépend à la fois des propriétés des grains et de l'écoulement : la figure 4.16 montre pour plusieurs valeurs de d l'évolution de λ en fonction de l'excès de cisaillement χ. On constate en particulier que cette longueur d'onde

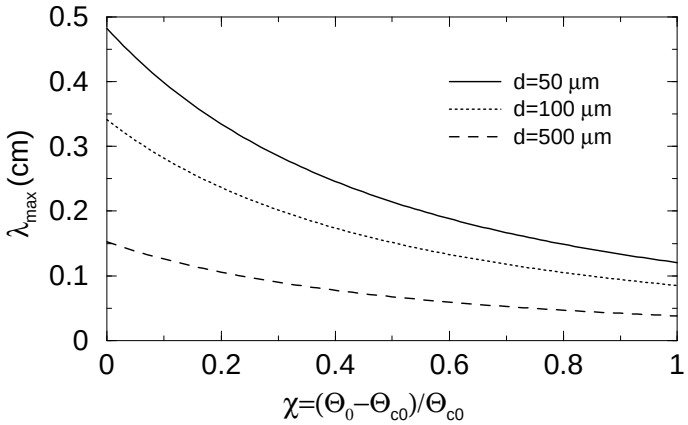


FIG. 4.16 – Longueur d'onde la plus instable (avec effet de pente) en fonction du taux de cisaillement. $\phi_s = 30°$, $\Theta_{c_0} = 0{,}2$, $s = 2{,}7$, $\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} .

décroît quand le diamètre des grains ou le cisaillement augmentent. Or, de manière générale, les observations expérimentales tendent à montrer un comportement inverse en fonction de la taille des grains, tandis que la longueur d'onde à l'initiation ne varie pas significativement en fonction du cisaillement (cf. chapitre 3). Qu'en est-il de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde prédite ? Plaçons-nous dans un cas «typique» (correspondant à des expériences réalisées par **?**) :

$$\left.\begin{array}{l} \nu = 10^{-6}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1} \\ d = 110\ \mu\mathrm{m} \\ \chi = 1{,}1 \end{array}\right\} \quad \lambda_{\max} = 0{,}9\ \mathrm{mm}$$

Malgré toutes les précautions, déjà évoquées, nécessaires pour comparer les résultats de notre analyse à des valeurs expérimentales, cette application numérique montre donc un réel défaut de l'analyse linéaire, puisque l'ordre de grandeur des rides observées, même dans les premiers instants de l'instabilité – du moins dès que des rides sont observables, est toujours de quelques cm [*Kuru et al.*, 1995; *Loiseleux et al.*, 2004] – les expériences en cellule de Hele-Shaw permettant pourtant de se placer en régime laminaire. Notre modèle sous-estime donc la longueur d'onde initiale au moins d'un facteur 10. De plus, nous avons observé (cf. chapitre 3) que celle-ci augmentait avec le diamètre des grains mais ne dépendait pas

du débit d'eau, c'est-à-dire du taux de cisaillement. Or le calcul théorique prévoit ici un comportement inverse. Une hypothèse pour expliquer la mise en défaut de l'analyse de stabilité linéaire pourrait être que la longueur d'onde initiale n'est jamais observée. En effet, au vu des résultats expérimentaux, on peut penser que le régime linéaire ne peut être observé que pendant un temps très court, et que la dynamique des rides devient très rapidement non-linéaire. Toutefois, les observations de *Betat et al.* [1999] tendent au contraire à valider cette approche analytique. Puisque la longueur d'onde est fixée par le mécanisme stabilisant (ici la gravité), c'est ce dernier qu'il faut modifier pour tenter d'améliorer la prédiction.

Effet de l'inertie des grains

En utilisant cette fois le modèle de transport incluant l'inertie des grains, mais en négligeant l'effet de pente, on effectue la même analyse de stabilité linéaire que précédemment, et on obtient une nouvelle expression pour la relation de dispersion :

$$\mathrm{Re}\,(\omega_\mathrm{i}) \propto \begin{cases} (kl_\mathrm{v})^{4/3}\left[1-\dfrac{l_\mathrm{eq}}{l_\mathrm{v}}(kl_\mathrm{v})\right]+\mathrm{O}\left((kl_\mathrm{v})^{8/3}\right) & \text{pour } kl_\mathrm{v} \ll 1 \\ -(kl_\mathrm{v}) & \text{pour } kl_\mathrm{v} \gg 1 \end{cases} \tag{4.34}$$

Qualitativement, l'inertie des grains a le même effet que la gravité : elle tend à stabiliser

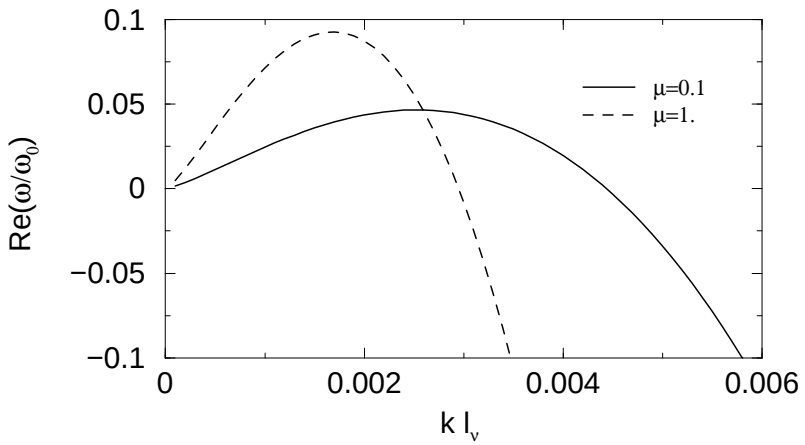


FIG. 4.17 – Taux de croissance d'une perturbation en fonction de son nombre d'onde (avec effet d'inertie).

les petites longueurs d'onde (celles-ci seront «écrantées» par la longueur de saturation). En revanche, c'est maintenant la longueur de mise à l'équilibre des grains qui contrôle la longueur d'onde sélectionnée par le système. On obtient :

$$\lambda_\mathrm{max} \simeq 19 f(\mathrm{Re_p}) sd \tag{4.35}$$

Comme le montre la figure 4.18, la longueur d'onde du mode le plus instable augmente

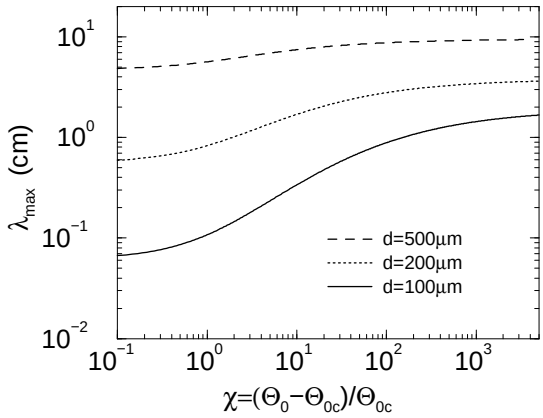


FIG. 4.18 – Longueur d'onde sélectionnée par l'inertie en fonction du cisaillement. $\Theta_{c_0} = 0{,}2$, $s = 2{,}7$, $\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} .

avec le diamètre des grains et le taux de cisaillement, ce qui est plus conforme aux observations expérimentales. De plus, si l'on se place dans le cas d'un écoulement d'eau ($\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1}), pour $d = 200$ μm, $s = 2{,}7$, et $\chi = 1$, on trouve une valeur numérique

$$\lambda_{\text{max}} = 1 \text{ cm} \tag{4.36}$$

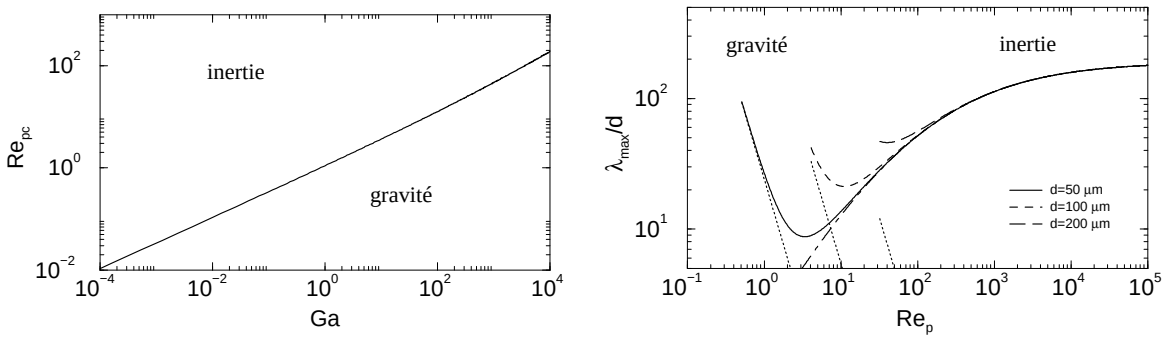
Cette prédiction est bien meilleure que celle donnée par le mécanisme classique (effet de pente), même si sa valeur est encore assez petite comparée aux valeurs expérimentales (dont l'ordre de grandeur est de 40 mm (cf. 3.1)). Toutefois, il faut souligner qu'elle repose sur l'estimation relativement grossière de la longueur de mise à l'équilibre. Nous avons vu que nous avons surestimé la vitesse des grains roulants par rapport aux valeurs expérimentales obtenues par *Charru et al.* [2004]. À l'inverse, la longueur de saturation mesurée dans le cas éolien [*Bagnold*, 1941; *Hersen*, 2004b; *Andreotti*, 2004], notamment par le truchement de la taille minimale des dunes, s'avère très supérieure (d'un ordre de grandeur) à la «longueur de traînée» $l_{\text{drag}} = s\,d$. Il serait donc bénéfique de parvenir à mesurer cette longueur expérimentalement dans l'eau. Malheureusement, comme nous l'avons déjà mentionné, cette longueur est très petite, et il est délicat d'obtenir expérimentalement une valeur précise du flux de grains.

Ajoutons que, contrairement au cas de l'effet de pente, la longueur d'onde prédite ici ne dépend pas du taux de cisaillement, et croît linéairement avec le diamètre des grains. Ces deux comportements sont bien compatibles avec les observations expérimentales du chapitre 3.

4.3.3 Comparaison des deux régimes

Nous avons vu que la stabilité du lit était le résultat d'une compétition entre l'effet déstabilisant du fluide d'une part, et les effets stabilisants de la gravité et de l'inertie des grains d'autre part. Il y a donc une seconde compétition entre ces deux effets : la longueur d'onde la plus instable dépend du mécanisme stabilisant le plus pertinent. Or il convient d'incorporer les deux dans un modèle complet. Physiquement, on s'attend à ce que l'inertie des grains prévale lorsque le nombre de Reynolds particulaire devient plus grand que 1, ou encore, quand la longueur de mise à l'équilibre est non-négligeable devant la taille des grains.

L'expression exacte, dans le cas générique (en tenant compte à la fois de l'effet de pente et de l'inertie des grains), de la longueur d'onde la plus instable est donnée en annexe (cf. A.3). Le comportement de cette longueur est donné par la figure 4.19(b). La longueur



(a) (b)

FIG. 4.19 – (a) Valeur critique du nombre de Reynolds particulaire en fonction du nombre de Galilée. Les effets inertiels prévalent au dessus de $\mathrm{Re_{pc}}$.
(b) Longueur d'onde la plus instable en fonction de $\mathrm{Re_p}$, pour différents diamètres de grains. Les asymptotes indiquent le mode le plus instable en l'absence d'inertie (· · · ·) et sans effet de pente (- - -).

d'onde la plus instable donnée par l'effet de pente diminue très rapidement, et devient trop petite, quand $\mathrm{Re_p}$ augmente. L'inertie devient le mécanisme stabilisant prépondérant au-delà d'une valeur critique $\mathrm{Re_{pc}}$. Le nombre de Reynolds particulaire correspondant à la transition entre les régimes inertiel et gravitaire dépend du nombre de Galilée, qui est lui-même relié aux caractéristiques du fluide et des grains :

$$\mathrm{Ga} = \frac{(s-1)gd^3}{\nu^2} \tag{4.37}$$

Il est intéressant de constater que dans le régime inertiel, la longueur d'onde la plus instable ne dépend plus des caractéristiques de l'écoulement, et est contrôlée par la taille des grains d'une part, et le rapport ρ_g/ρ_{eau} d'autre part. Or, si l'on effectue la même analyse de stabilité dans l'air, la longueur d'onde préférentielle sera donnée par ρ_g/ρ_{air}. Or la densité de l'air est 1000 fois inférieure à celle de l'eau : ainsi, une structure de 5 cm dans l'eau peut être considérée comme analogue à une structure de 50 m dans l'air, ce qui est la taille caractéristique d'une dune (et non d'une ride éolienne). Bien que le mode de transport soit différent dans les deux cas, si l'on s'attache uniquement au comportement global du flux de grains, le mécanisme d'instabilité est donc identique dans les cas éolien et sous-marin.

Chapitre 5

Instabilité tridimensionnelle

Dans ce chapitre, nous présentons l'extension à trois dimensions de la modélisation présentée au chapitre précédent : comme nous l'avons vu au chapitre 3, il est courant d'observer expérimentalement l'apparition de structures tridimensionnelles, même quand l'écoulement est unidirectionnel et continu. Nous avons donc cherché à effectuer une analyse de stabilité linéaire du problème à trois dimensions, ce qui n'avait jamais été réalisé dans le cas de l'écoulement continu, afin de tenter d'expliquer la formation de tels motifs.

Nous commencerons par exposer comment la modélisation présentée au chapitre précédent peut être étendue simplement au cas tridimensionnel. Dans la deuxième partie, nous donnerons les résultats de l'analyse de stabilité linéaire à trois dimensions. Enfin, nous montrerons un prolongement direct de ce travail : une première analyse des mécanismes non-linéaires susceptibles d'intervenir dans la dynamique aux temps longs du système.

5.1 Extension du modèle à trois dimensions

5.1.1 Écoulement du fluide

Nous reprenons la même configuration que dans le chapitre précédent : on considère un écoulement laminaire cisaillé. Le champ de vitesses pour l'écoulement de base s'écrit donc

$$\overrightarrow{u_0} = (u_0, v_0, w_0) = \gamma z \, \overrightarrow{e_x} \tag{5.1}$$

L'écoulement, qu'on considère toujours comme stationnaire (cf. 4.2.1), est décrit par les équations de Navier-Stokes et d'incompressibilité :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \overrightarrow{u} & = & \overrightarrow{\text{grad}}\, p + \rho \overrightarrow{g} + \nu \overrightarrow{\Delta \overrightarrow{u}} \\ \text{div } \overrightarrow{u} & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.2}$$

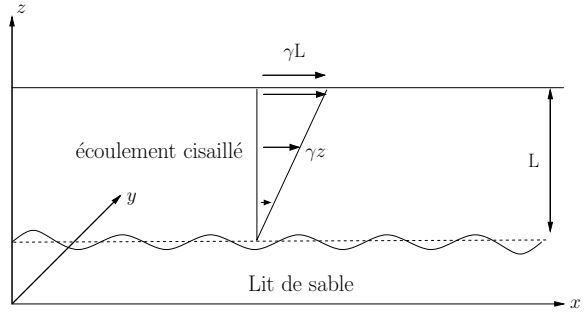


FIG. 5.1 – Configuration de Couette adoptée pour l'écoulement.

5.1.2 Transport des grains

Les lois de transport usuelles, que nous avons exposées au chapitre précédent, ne rendent compte du transport que selon une direction. Elles ne sont donc valables que dans une configuration bidimensionnelle, c'est-à-dire quand le système est invariant par translation perpendiculairement à l'écoulement principal. En nous basant sur le calcul effectué par *Fredsøe et Deigaard* [1992] pour le transport le long d'une pente transverse, nous avons donc cherché à étendre la loi de Meyer-Peter/Müller (ou toute autre loi de puissance) au cas général d'une surface quelconque. Commençons par définir un cisaillement (vectoriel) adimensionné, que nous appellerons «vecteur de Shields» :

$$\overrightarrow{\Theta} = \frac{\overrightarrow{\tau_{\mathrm{b}}}}{\rho g(s-1)d} \tag{5.3}$$

avec $\overrightarrow{\tau_{\mathrm{b}}}$ le cisaillement fluide au niveau du lit. C'est la norme de ce vecteur que nous nommerons nombre de Shields. Faisons maintenant un bilan très simplifié des forces qui s'appliquent sur un grain (cf. Fig. 5.1.2). La première est le poids immergé (*i.e.*, le poids corrigé par la poussée d'Archimède) :

$$\overrightarrow{\mathrm{W}} = -(s-1)\rho g d^3\,\overrightarrow{e_z} \tag{5.4}$$

Si l'on définit $\overrightarrow{n}$ comme le vecteur unitaire normal à la surface, le poids peut être décomposé en une composante normale $(\overrightarrow{\mathrm{W}}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$, et une composante tangentielle, $\overrightarrow{\mathrm{W}}-(\overrightarrow{\mathrm{W}}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$, qui tend à déstabiliser le grain. Vient ensuite la traînée exercée par le fluide visqueux sur le grain, qui est proportionnelle au cisaillement de surface :

$$\overrightarrow{\mathrm{F_d}} = \xi(s-1)\rho g d^3\,\overrightarrow{\Theta} \tag{5.5}$$

On introduit la constante adimensionnée ξ afin de tenir compte de la configuration géométrique autour du grain : celui-ci est proche d'une paroi et peut, de plus, être partiellement

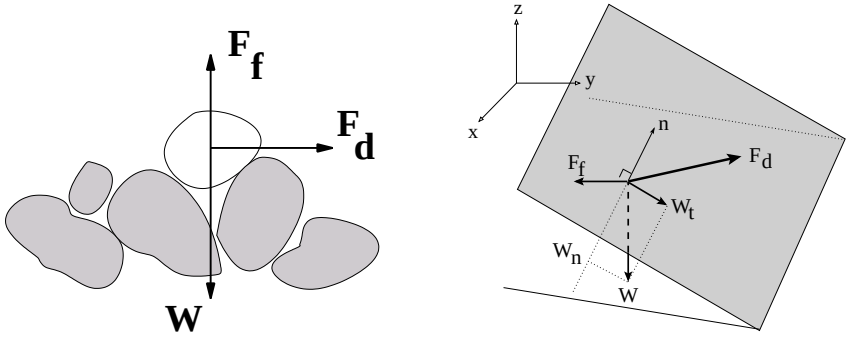


FIG. 5.2 – Schéma des forces agissant sur un grain en surface.

«masqué» par ses voisins. Il n'est donc pas entièrement exposé au fluide. La valeur de cette constante n'est pas calculable facilement, mais sera explicitée plus loin, puisqu'elle est reliée au nombre de Shields critique. Enfin, la troisième force est la friction du grain sur le lit. On adopte ici une formulation très simplifiée, en prenant la loi de Coulomb à l'initiation du mouvement :

$$\overrightarrow{\mathrm{F_f}} = \mu_\mathrm{s}\,(\overrightarrow{\mathrm{W}} \cdot \overrightarrow{n})\,\overrightarrow{u_\mathrm{t}} \tag{5.6}$$

où $\overrightarrow{u_\mathrm{t}}$ est le vecteur unitaire de la direction du mouvement du grain et μ_s le coefficient de frottement[1] du matériau. Celle-ci est donnée par la somme des forces déstabilisantes, soit

$$\overrightarrow{u_\mathrm{t}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{F_d}} + \overrightarrow{\mathrm{W}} - (\overrightarrow{\mathrm{W}} \cdot \overrightarrow{n})\,\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{\mathrm{F_d}} + \overrightarrow{\mathrm{W}} - (\overrightarrow{\mathrm{W}} \cdot \overrightarrow{n})\,\overrightarrow{n}\|} \tag{5.7}$$

À l'instant où le grain est mis en mouvement, toutes les forces s'équilibrent, ce qui conduit à :

$$-\mu_\mathrm{s}(\overrightarrow{\mathrm{W}} \cdot \overrightarrow{n}) = \|\overrightarrow{\mathrm{F_d}} + \overrightarrow{\mathrm{W}} - (\overrightarrow{\mathrm{W}} \cdot \overrightarrow{n})\,\overrightarrow{n}\| \tag{5.8}$$

ce que l'on peut réécrire comme

$$\|\xi/\mu_\mathrm{s}\overrightarrow{\Theta} - \overrightarrow{\nabla} h/\mu_\mathrm{s}\| = 1 \tag{5.9}$$

Il est possible d'éliminer un paramètre : si l'on se place dans le cas d'un lit plan horizontal, le seuil du mouvement correspond au nombre de Shields critique Θ_{c_0}. Or l'équation (5.9) donne dans ce cas

$$\xi = \mu_\mathrm{s}/\Theta_{\mathrm{c}_0} \tag{5.10}$$

[1] On ne distinguera pas entre frottement statique et dynamique.

On peut ainsi éliminer le paramètre inconnu ξ [2]. Par analogie avec la loi de transport à deux dimensions, nous supposons que la norme du flux de grains doit être donné par une loi de puissance (semblable à (4.9)) d'un paramètre s'annulant au seuil de mise en mouvement[3] :

$$\|\overrightarrow{q}_{\mathrm{eq}}\| = q_{\mathrm{b}} \left[\|\overrightarrow{\Theta} - \frac{\Theta_{\mathrm{c}_0}}{\mu_{\mathrm{s}}} \overrightarrow{\nabla h}\| - \Theta_{\mathrm{c}_0} \right]^m \tag{5.11}$$

Il reste à présent à définir la direction horizontale du flux de grains. Celle-ci est donnée par la projection horizontale de la somme des forces déstabilisantes, c'est-à-dire la composante tangentielle du poids et la force de traînée. Au premier ordre en h, on trouve $\xi\overrightarrow{\Theta}_{\mathrm{h}} - \overrightarrow{\nabla h}$ (où $\overrightarrow{\Theta_h}$ est la projection horizontale du vecteur de Shields). Il ne reste plus qu'à normaliser ce vecteur. Finalement, le flux de grains horizontal est donc donné par l'équation suivante :

$$\overrightarrow{q}_{\mathrm{eq}} = q_{\mathrm{b}} \left[\|\overrightarrow{\Theta} - \frac{\Theta_{\mathrm{c}_0}}{\mu_{\mathrm{s}}} \overrightarrow{\nabla h}\| - \Theta_{\mathrm{c}_0} \right]^m \frac{\overrightarrow{\Theta}_{\mathrm{h}} - \dfrac{\Theta_{\mathrm{c}_0}}{\mu_{\mathrm{s}}} \overrightarrow{\nabla h}}{\|\overrightarrow{\Theta}_{\mathrm{h}} - \dfrac{\Theta_{\mathrm{c}_0}}{\mu_{\mathrm{s}}} \overrightarrow{\nabla h}\|} \tag{5.12}$$

Il convient d'insister sur le fait que cette loi correspond à une situation extrêmement idéalisée, et ne repose pas sur une étude extensive du phénomène de transport. L'utilisation de ce type de loi permet de «masquer» l'aspect granulaire du sédiment : tout se passe comme si le matériau érodé était un milieu continu. La complexité de l'écoulement des grains en surface, de l'écoulement fluide dans le milieu poreux qu'ils constituent, et l'effet rétroactif de leur présence dans l'écoulement principal ne sont pas pris en compte. En toute rigueur, le bilan de forces lui-même devrait s'accompagner d'une équation sur les moments, puisque la mise en mouvement d'un grain correspond à une rotation autour des grains sous-jacents. Toutefois, il faut garder à l'esprit que l'étude de l'instabilité nécessite de coupler le modèle de transport au modèle hydrodynamique. Il est donc indispensable de simplifier chaque composante pour pouvoir ensuite effectuer un calcul global.

Effet de l'inertie des grains

Le phénomène de l'inertie dans le transport des grains est plus délicat à modéliser sur une surface quelconque que dans le cas 2D. Pour obtenir une description satisfaisante,

[2] Ce paramètre a été évalué expérimentalement par *King et Leighton* [1997] à $\xi = 1{,}70$. Pour $\phi_{\mathrm{s}} = 30°$, on trouve alors $\Theta_{\mathrm{c}_0} = 0{,}34$.

[3] Par souci de clarté, nous omettons d'insérer dans l'expression la fonction de Heaviside, qui assure que le flux est bien nul en dessous du seuil.

il serait nécessaire de coupler une démarche de type «Saint-Venant» sur l'équation de conservation de la quantité de mouvement (mais en trois dimensions) avec la modélisation «BCRE» des échanges entre couches roulante et statique. Cependant, nous avons choisi de simplifier le problème en considérant que seul l'écoulement principal (d'ordre 0) jouait un rôle quant à l'inertie des grains. Cette hypothèse revient à considérer que le flux dans la direction transverse est toujours à sa valeur d'équilibre, tandis que la longueur de mise à l'équilibre dans la direction de l'écoulement est la même que celle que nous avons calculée au chapitre précédent. Cette restriction de l'effet de l'inertie à la direction de l'écoulement principal paraît réaliste. Toutefois, il serait souhaitable de parvenir à une description plus rigoureuse du mouvement des grains, afin de vérifier que l'inertie dans la direction transverse ne joue pas de rôle important.

Finalement, on utilisera donc la loi suivante pour la relaxation du flux de grains :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial q_x}{\partial x} & = & -\dfrac{q_x - q_{x,\mathrm{eq}}}{l_{\mathrm{eq}}} \\ q_y & = & q_{y,\mathrm{eq}} \end{array} \right. \tag{5.13}$$

5.2 Stabilité marginale

Pour l'analyse de stabilité linéaire, on procède de la même façon qu'en deux dimensions : l'état de base se caractérise par une surface

$$h(x, y, t = 0) = 0 \tag{5.14}$$

un profil de vitesse linéaire

$$\overrightarrow{u_0} = (u_0, v_0, w_0) = \gamma z \overrightarrow{e_x} \tag{5.15}$$

et un flux de grains

$$\overrightarrow{q}_0 = c\sqrt{(s-1)gd^3}\,(\Theta_0 - \Theta_{\mathrm{c}_0})^m\,\overrightarrow{e_x} \tag{5.16}$$

où $\Theta_0 = \nu\gamma/(g(s-1)d)$ est le cisaillement adimensionné à la surface, pour un lit plan. On étudie maintenant l'évolution d'une perturbation infinitésimale à deux dimensions :

$$h_1(x, y, t) = \widehat{h}_1(k_x, k_y)\, e^{i(k_x x + k_y y) + \omega t} \tag{5.17}$$

$\overrightarrow{k} = k_x\,\overrightarrow{e_x} + k_y\,\overrightarrow{e_y}$ étant son vecteur d'onde (dont la norme sera notée $\|\overrightarrow{k}\| = k$), et ω son taux de croissance *complexe*. Avant d'aller plus loin, il convient de préciser la terminologie que nous emploierons dans toute la suite : les modes avec $k_y = 0$ sont dit *longitudinaux*. Cependant, ils correspondent à des rides dont les crêtes sont perpendiculaires à l'écoulement principal, et que nous nommerons donc *transverses*. À l'inverse, les modes à $k_x = 0$, qui sont des *modes transverses*, correspondent à des *rides longitudinales*, dont les crêtes sont

parallèles à l'écoulement. La première étape de l'analyse consiste à calculer la forme de l'écoulement fluide au dessus d'un relief quelconque.

5.2.1 Solutions des équations hydrodynamiques

Pour calculer le champ de vitesses, on adopte ici aussi l'hypothèse de quasi-stationnarité : le fond de l'écoulement est supposé fixe. Le champ de vitesses et de pression dans le fluide est décrit par :

$$(u, v, w, p) = (u_0, 0, 0, p_0) + (u_1, v_1, w_1, p_1)\, e^{i(k_x x + k_y y) + \omega t} \tag{5.18}$$

En ne retenant des équations (5.2) que les termes linéaires, on obtient les équations couplées suivantes, pour les quantités perturbées u_1, v_1, w_1 et p_1 :

$$i\, k_x\, \gamma z u_1 + \gamma w_1 + i k_x \frac{p_1}{\rho} = \nu \left({\partial_z}^2 - k_x^2 - k_y^2 \right) u_1 \tag{5.19}$$

$$i\, k_x\, \gamma z v_1 + i k_y \frac{p_1}{\rho} = \nu \left(\partial_z^2 - k_x^2 - k_y^2 \right) v_1 \tag{5.20}$$

$$i\, k_x\, \gamma z w_1 + \frac{1}{\rho}\, \partial_z p_1 = \nu \left(\partial_z^2 - k_x^2 - k_y^2 \right) w_1 \tag{5.21}$$

$$i\, k_x u_1 + i k_y v_1 + \partial_z w_1 = 0 \tag{5.22}$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont elles aussi linéarisées :

$$\begin{array}{l} u(z=0) \;\; = 0 = u_0(z=0) + u_1(z=0) = \gamma h_1 + u_1(z=0) \\ u(z=\mathrm{H}) = 0 = u_0(z=0) + u_1(z=0) = u_1(z=0) \end{array} \tag{5.23}$$

En procédant de la même façon, on obtient également les conditions aux limites pour les composantes v et w :

$$\begin{array}{llll} z = 0: & u_1 = -\gamma h_1\,, & v_1 = 0\,, & w_1 = 0 \\ z = \mathrm{H}: & u_1 = 0\,, & v_1 = 0\,, & w_1 = 0 \end{array} \tag{5.24}$$

Les équations (5.19,5.22) sont linéaires mais les variables u_1, v_1, w_1 et p_1 y sont encore couplées. Cependant, en les combinant de manière adéquate, il est possible d'éliminer la pression de l'équation (5.21) pour obtenir l'équation suivante en w_1 :

$$\left[\nu \left(\partial_z^2 - k^2 \right) - i\, k_x\, \gamma z \right] \left(\partial_z^2 w_1 - k^2 w_1 \right) = 0 \tag{5.25}$$

Cette équation est très semblable à celle d'Orr-Sommerfeld, qui intervient dans l'analyse de stabilité linéaire d'un écoulement cisaillé [*Landau et Lifschitz*, 1989; *Schlichting et Gersten*, 2000]. En faisant le changement de variable

$$\xi(z) = e^{i\pi/6} \left(|k_x|\, l_\mathrm{v} \right)^{-2/3} \mathrm{sgn}(k_x) \left(k_x z - i k^2 l_\mathrm{v}^2 \right) \tag{5.26}$$

elle se ramène à

$$\left[\partial_\xi^2 - \xi\right](w(\xi)) = 0 \tag{5.27}$$

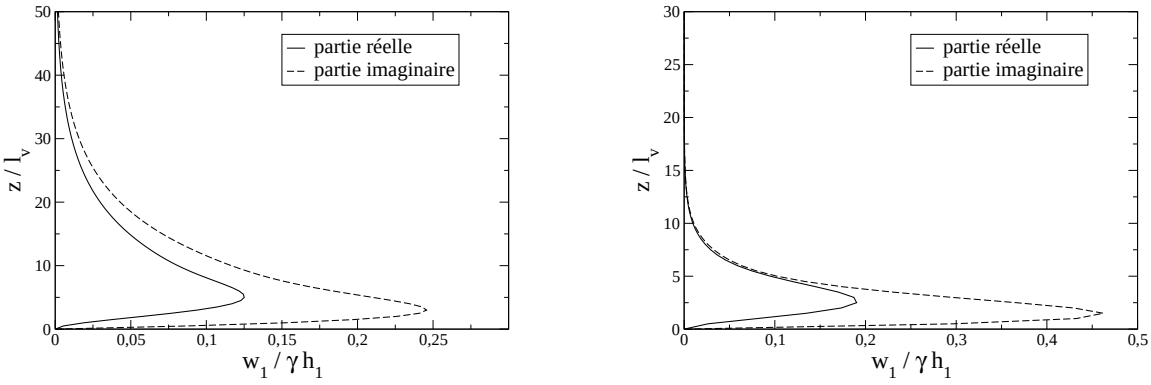
dont les solutions sont les fonctions d'Airy Ai et Bi [*Airy*, 1838; *Abramovitz et Stegun*, 1965]. Finalement, il reste à résoudre l'équation du second ordre

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}z^2} - k^2 w_1(z) = a_2\,\mathrm{A}i \circ \xi(z) + b_2\,\mathrm{B}i \circ \xi(z) \tag{5.28}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} w_1(z) \;=\; & a_1\,e^{kz} + b_1\,e^{-kz} + \frac{e^{kz}}{2k}\int_0^z \mathrm{d}\zeta\; e^{-k\zeta}(a_2\mathrm{A}i \circ \xi(\zeta) + b_2\mathrm{B}i \circ \xi(\zeta)) \\ & -\frac{e^{-kz}}{2k}\int_0^z \mathrm{d}\zeta\; e^{k\zeta}(a_2\mathrm{A}i \circ \xi(\zeta) + b_2\mathrm{B}i \circ \xi(\zeta)) \end{aligned} \tag{5.29}$$

Les conditions aux limites permettent d'expliciter les constantes d'intégration a_1, b_1, a_2 et b_2 : leurs expressions sont données dans l'annexe B.



(a) $k_x l_\mathrm{v} = 0{,}1$ et $k_y l_\mathrm{v} = 0$.

(b) $k_x l_\mathrm{v} = 0{,}4$ et $k_y l_\mathrm{v} = 0{,}2$.

FIG. 5.3 – Profil vertical de la vitesse w_1 calculé analytiquement (en profondeur infinie).

Il faut à présent calculer les vitesses horizontales u_1 et v_1. L'expression de w_1 étant maintenant connue, l'équation (5.21) permet d'obtenir la pression, que l'on peut ensuite réinjecter dans les équations (5.19) et (5.20) en u_1 et v_1. Cependant, il est moins fastidieux d'éliminer d'abord la pression des équations : en posant $\phi_1 = k_y u_1 - k_x v_1$, on peut combiner les équations (5.19) et (5.20), pour obtenir

$$\left[\nu\left(\partial_z^2 - k^2\right) - i\,k_x\,\gamma z\right](\phi_1) = \gamma k_y w_1 \tag{5.30}$$

On reconnaît une équation similaire à (5.25), bien que le second membre soit non-nul. Elle se résout de la même façon :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= a_3 \mathrm{A}i \circ \xi(z) + b_3 \mathrm{B}i \circ \xi(z) \\ &+ \frac{\pi\gamma k_y}{\nu\xi'(z)} \left[\mathrm{B}i \circ \xi(z) \int_0^z w_1(t) \mathrm{A}i \circ \xi(t)\, \mathrm{d}t - \mathrm{A}i \circ \xi(z) \int_0^z w_1(t) \mathrm{B}i \circ \xi(t)\, \mathrm{d}t \right]\end{aligned} \tag{5.31}$$

Rappelons que u_1 et v_1 vérifient le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_y u_1 - k_x v_1 &=& \phi_1 \\ ik_x u_1 + ik_y v_1 &=& -\partial_z w_1 \end{array} \right. \tag{5.32}$$

dont la deuxième équation n'est autre que l'incompressibilité de l'écoulement. Finalement :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1(z) &=& \dfrac{ik_y \phi_1(z) - k_x \partial_z w_1(z)}{ik^2} \\ v_1(z) &=& \dfrac{ik_x \phi_1(z) - k_y \partial_z w_1(z)}{ik^2} \end{array} \right. \tag{5.33}$$

À nouveau, les conditions aux limites permettent d'exprimer les constantes d'intégration a_3 et b_3 (cf. Annexe B). Nous ne présenterons pas les profils des vitesses u_1 et v_1 : leur calcul exact est en effet compliqué à effectuer, et n'est en particulier pas faisable avec Maple®. Nous verrons toutefois que des développements asymptotiques permettent d'obtenir l'information nécessaire. En revanche, on pourra trouver au chapitre 6 l'aspect des profils calculés numériquement (dans le cas d'une profondeur finie).

Nous connaissons maintenant le profil des vitesses au-dessus de la surface granulaire, ce qui nous permet de calculer la perturbation du cisaillement due à la présence du relief. Le cisaillement total peut être décomposé en

$$\overrightarrow{\tau}_{\mathrm{b}} = \overrightarrow{\tau}_{\mathrm{b}_0} + \left[\overrightarrow{\tau}_{\mathrm{b}_1} e^{i(k_x x + k_y y) + \omega t} + \mathrm{c.c.} \right] \tag{5.34}$$

Pour simplifier la suite des calculs, nous nous placerons dans la situation où la hauteur de l'écoulement H est très grande devant les dimensions de la perturbation du lit. Cette approximation permet de simplifier considérablement les expressions des constantes d'intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = -\dfrac{2ka_1}{\mathrm{A}_\infty^-} \\ b_2 = 0 \end{array} \right. \tag{5.35}$$

où $\mathrm{A}_\infty^- = \displaystyle\int_0^\infty e^{-kz} \mathrm{A}i \circ \xi(z) \mathrm{d}z$. Malgré tout, les expressions des composantes du champ vitesses restent compliquées : il est utile de rechercher des équations simplifiées dans deux cas limites : les petites longueurs d'onde ($kl_{\mathrm{v}} \gg 1$) et les grandes longueurs d'onde ($kl_{\mathrm{v}} \ll$

1). On utilise alors les développements limités des fonctions d'Airy [*Abramovitz et Stegun*, 1965] pour calculer les différentes intégrales. Finalement, on obtient, aux ordres les plus élevés :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\tau_{b_{1x}}}{\tau_{b_0}} & = & l_{\mathrm{v}}^{-2/3}\, k_x^{1/3}\, \dfrac{0{,}535k_x^2 - 0{,}365k_y^2}{k_x^2+k_y^2}\,(\sqrt{3}+i) + \mathrm{O}(kl_{\mathrm{v}}) \\ \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\tau_{b_{1y}}}{\tau_{b_0}} & = & -0{,}17\, l_{\mathrm{v}}^{-2/3}\, \dfrac{k_x^{4/3}\, k_y}{k_x^2+k_y^2}\,(\sqrt{3}+i) + \mathrm{O}(kl_{\mathrm{v}}) \end{array}\right. \tag{5.36}$$

où $\tau_{b_0} = \eta\gamma$. Les termes suivants du développement peuvent être trouvés dans l'Annexe B. Les expressions dans la limite des grandes longueurs d'onde suffisent en fait pour tracer le diagramme de stabilité. Le résultat du calcul pour $kl_{\mathrm{v}} \gg 1$ est également présenté en annexe.

5.2.2 Relation de dispersion

Le déphasage selon x (resp. selon y) entre le cisaillement de surface et le profil du lit correspond à la partie imaginaire de $\tau_{b_{1x}}$ (resp. $\tau_{b_{1y}}$) : on constate d'ores et déjà que celle-ci est non nulle pour les deux composantes, ce qui signifie qu'elles sont toutes les deux déphasées par rapport au relief. On peut donc s'attendre à un comportement instable. Pour obtenir le taux de croissance complexe de la perturbation, il reste à linéariser l'équation de transport (5.12), et à injecter le flux de grains dans l'équation de conservation de la masse. Dans un premier temps, nous n'utiliserons que le flux de grains «classique», sans prendre en compte l'inertie des grains.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\ \overrightarrow{q} \tag{5.37}$$

On obtient alors les expressions suivantes pour les parties réelle et imaginaire de $\omega(\overrightarrow{k})$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{Re}\,(\omega)}{q_{\mathrm{b}}} & = & m\chi^{m-1}\Theta_{\mathrm{c}_0}^m \left[(1+\chi)\, k_x\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\tau_{b_1x}}{h_1\tau_{b_0}}\right) - \dfrac{k_x^2}{\mu_{\mathrm{s}}}\right] \\ & & +\chi^m\Theta_{\mathrm{c}_0}^m \left[k_y\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\tau_{b_1y}}{h_1\tau_{b_0}}\right) - \Theta_{\mathrm{c}_0}(1+\chi)\dfrac{k_y^2}{\mu_{\mathrm{s}}}\right] \end{array} \tag{5.38}$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{Im}\,(\omega)}{q_{\mathrm{b}}} & = & -m\mu^{m-1}\Theta_{\mathrm{c}_0}^m\,(1+\mu)\, k_x\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{\tau_{b_1x}}{h_1\tau_{b_0}}\right) \\ & & -\mu^m\Theta_{\mathrm{c}_0}^m\, k_y\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{\tau_{b_1y}}{h_1\tau_{b_0}}\right) \end{array} \tag{5.39}$$

Rappelons que le paramètre $\chi = (\Theta_0 - \Theta_{\mathrm{c}_0})/\Theta_{\mathrm{c}_0}$ représente l'écart relatif au seuil de mouvement des grains. La partie réelle de ω correspond à son taux de croissance : s'il est

positif, la perturbation s'amplifie, alors qu'elle décroît s'il est négatif. La partie imaginaire de ω représente la vitesse de phase de la perturbation.

Diagramme de stabilité

L'équation (5.38) comporte deux termes, dépendant respectivement du flux de grains dans la direction de l'écoulement, et du flux transversal. Chacun de ces termes dépend lui-même du cisaillement en surface ainsi que de la pente locale. Les deux termes correspondant à l'effet de pente sont réels, négatifs, et proportionnels au nombre d'onde au carré. On retrouve donc bien l'effet «lissant» de la gravité. La compétition entre ces mécanismes, entraînement par le fluide d'une part et gravité d'autre part, conduit à l'existence d'une région de modes amplifiés dans l'espace (k_x, k_y). Le diagramme de stabilité 5.4 montre cette région instable : sur la figure 5.4 sont tracées les courbes de stabilité marginale (c'est-à-dire $\mathrm{Re}\,(\omega) = 0$) pour différentes valeurs de χ, c'est-à-dire du cisaillement. Le lit est instable vis-à-vis des modes contenus à l'intérieur de cette courbe, et stable vis-à-vis des autres.

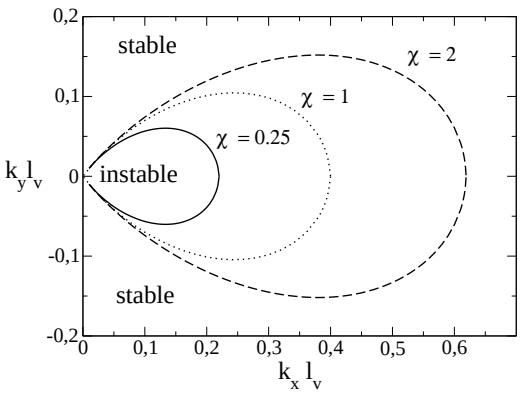
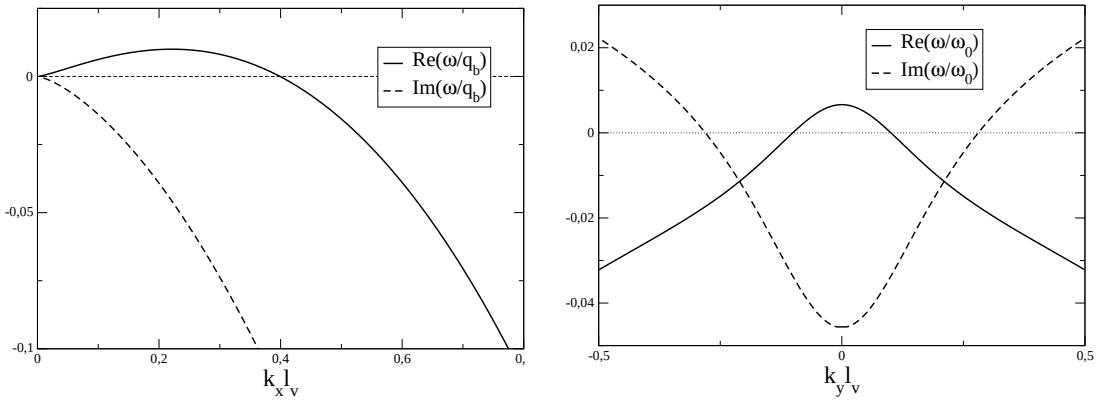


FIG. 5.4 – Courbe de stabilité marginale pour différentes valeurs de χ. $\Theta_{c_0} = 0{,}2$ et $\phi_s = 30°$.

On constate tout d'abord que la région instable s'étend quand le cisaillement augmente. Pour les grandes longueurs d'onde, les modes purement longitudinaux (c'est-à-dire les rides perpendiculaires à l'écoulement) sont toujours amplifiés. En revanche, les modes purement transverses ne se développent pas. Pour les plus petites longueurs d'onde, les modes longitudinaux sont stabilisés par l'effet de pente, tout comme en 2D. Représentons maintenant des «coupes» dans ce diagramme, c'est-à-dire le taux de croissance en fonction de k_x (resp. k_y) avec k_y (resp. k_x) fixé (cf. Fig. 5.5). On vérifie aisément que le taux de croissance maximal est atteint pour $k_y = 0$, c'est-à-dire pour des rides transverses, et que la longueur d'onde ainsi sélectionnée est la même que celle donnée par le calcul à deux dimensions. On retrouve ainsi le résultat trouvé par *Roos et Blondeaux* [2001] dans le cas oscillant. C'est



(a) $k_y = 0$ (b) $k_x l_\mathrm{v} = 0{,}1$

FIG. 5.5 – Taux de croissance d'une perturbation en fonction de son vecteur d'onde ($\chi = 1$, $\Theta_{\mathrm{c}_0} = 0{,}2$, $\mu_\mathrm{s} = 0{,}58$).

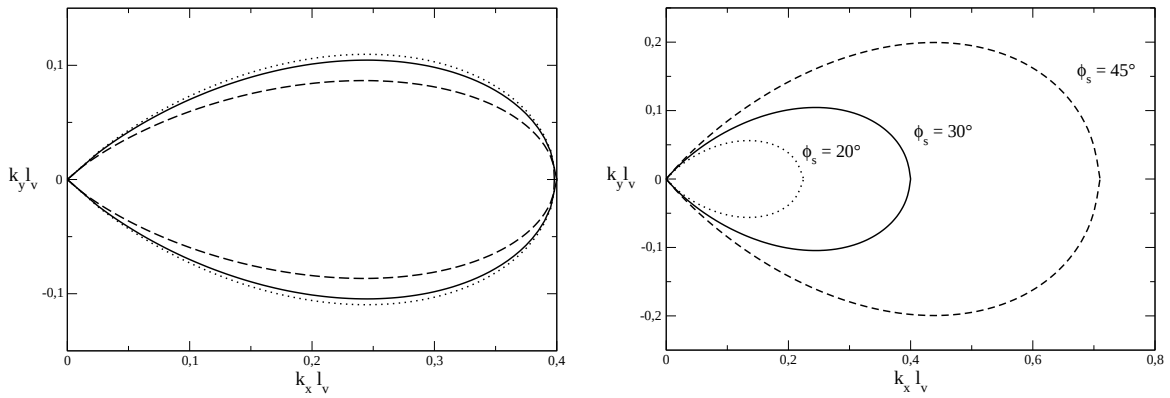
également conforme à ce que montrent la plupart des études expérimentales : les rides qui se forment dans les premiers instants de l'instabilité sont en général transverses. On peut rapprocher ce résultat du théorème de Squire [*Landau et Lifschitz*, 1989] qui montre que dans un écoulement de Couette, les perturbations pour lesquelles le nombre de Rayleigh critique est le plus faible sont les perturbations bidimensionnelles.

Influence des paramètres libres

La valeur de plusieurs paramètres utilisés dans le modèle peut être discutée : le nombre de Shields critique, en particulier, n'est pas connu avec une bonne précision. On trouve dans la littérature des valeurs s'étalant entre 0,05 et 0,35 (rappelons que les résultats présentés jusqu'ici étaient basés sur $\Theta_{\mathrm{c}_0} = 0{,}2$). De même, la valeur du coefficient de friction utilisé pour exprimer l'effet de pente est discutable : nous avons en effet choisi approximativement l'angle de stabilité d'un tas ($\phi_\mathrm{s} = 30°$) pour calculer μ_s. Cependant, des observations expérimentales au F.A.S.T. [*Loiseleux et al.*, 2004] sur l'initiation du transport le long d'une surface inclinée tendent à montrer qu'il faudrait utiliser une valeur beaucoup plus grande de ϕ_s (jusqu'à 60°).

Il est donc utile de regarder dans quelle mesure nos résultats dépendent de ces paramètres – ce qui est très aisé puisque l'ensemble du calcul est analytique. Les deux graphiques de la figure 5.6 montrent la courbe de stabilité marginale en fonction de la valeur de Θ_{c_0} et de ϕ_s. On constate que le nombre de Shields critique a une influence négligeable. Au contraire, la taille de la région d'instabilité est très sensible à une variation de l'angle de

friction interne. En effet, celui-ci intervient dans l'expression de l'effet de pente, et donc «contrôle» la longueur d'onde la plus instable dans le régime gravitationnel.



(a) $\cdots$: $\Theta_{c_0} = 0{,}05$, —— : $\Theta_{c_0} = 0{,}2$, - - - : $\Theta_{c_0} = 1$. $\chi = 1, \phi_s = 30°$.

(b) $\cdots$: $\phi_s = 20°$, —— : $\phi_s = 30°$, - - - : $\phi_s = 45°$. $\chi = 1, \Theta_{c_0} = 0{,}2$.

FIG. 5.6 – Influence du nombre de Shields critique (a) et de l'angle de stabilité interne (b) sur la courbe de stabilité marginale.

Vitesse de déplacement

La partie imaginaire de ω caractérise la vitesse de déplacement des rides. À partir de l'équation (5.17), on constate que la perturbation dérive dans le sens du courant (dans le sens des x croissants) si $\mathrm{Im}\,(\omega) < 0$, et dans le sens opposé si $\mathrm{Im}\,(\omega) > 0$. On a représenté sur la figure 5.7 le signe de $\mathrm{Im}\,(\omega)$ pour $\chi = 1$: on peut observer que toutes les structures amplifiées migrent dans le sens du courant, tandis que des rides très obliques (presque parallèles à l'écoulement) se déplaceraient dans le sens opposé. La vitesse de déplacement de la perturbation augmente donc avec le nombre d'onde, c'est-à-dire que les plus grosses structures se déplacent plus lentement.

5.2.3 Introduction de l'inertie

En utilisant cette fois le modèle de transport comprenant l'équation de relaxation du flux de grains, on effectue la même analyse de stabilité linéaire que précédemment, et on

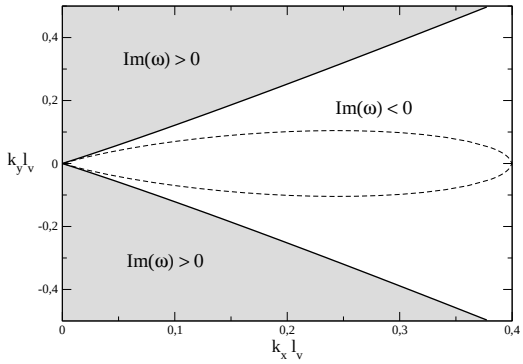


FIG. 5.7 – Signe de la partie imaginaire du taux de croissance, pour $\chi = 1$. Partie grisée : les structures se déplacent dans le sens opposé au courant. La courbe en pointillés rappelle la courbe de stabilité marginale.

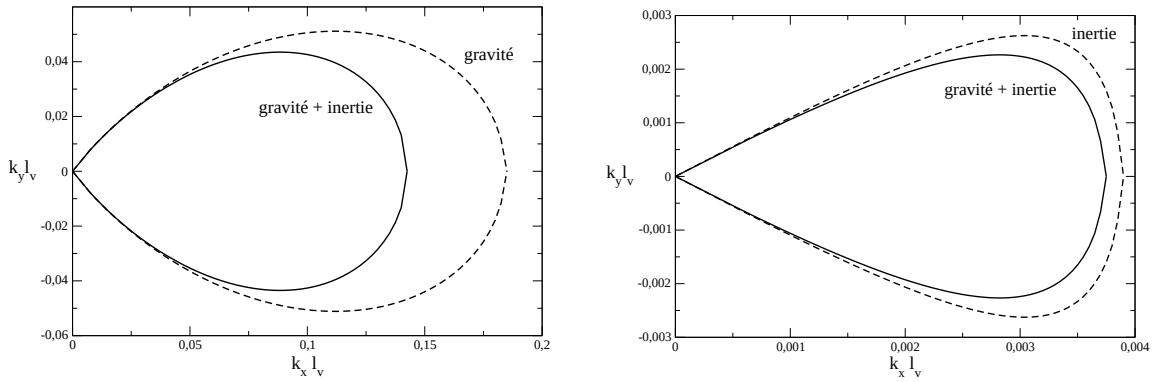
obtient une nouvelle expression pour la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{q_{\mathrm{b}}} &= -ik_x\, m\mu^{m-1}\Theta_{\mathrm{c}0}^m \left((1+\mu)\frac{\tau_{b_1 x}}{\tau_{b_0}} - \frac{ik_x}{\mu_{\mathrm{s}}}\right)\left(\frac{1-ik_x l_{\mathrm{eq}}}{1+k_x^2 l_{\mathrm{eq}}^2}\right) \\ &\quad -ik_y \mu^m \Theta_{\mathrm{c}0}^m \left(\frac{\tau_{b_1 y}}{\tau_{b_0}} - \Theta_{\mathrm{c}0}(1+\mu)\frac{ik_y}{\mu_{\mathrm{s}}}\right) \end{aligned} \tag{5.40}$$

L'effet de l'inertie des grains est traduit par le facteur $\left(\frac{1-ik_x l_{\mathrm{eq}}}{1+k_x^2 l_{\mathrm{eq}}^2}\right)$ devant la «composante x» du taux de croissance. Le diagramme de stabilité obtenu est qualitativement le même que dans le cas de l'effet de pente, comme l'illustrent les figures 5.8 (a) et (b). À grand nombre de Reynolds particulaire (b), l'ajout de l'effet de la pente n'est pas significatif. En revanche, même pour une faible valeur de $\mathrm{Re_p}$ (a), l'ajout de l'inertie des grains influe sensiblement sur la zone de stabilité. En réduisant le système à deux dimensions, on retrouve bien entendu les mêmes effets quant à la sélection de la longueur d'onde qu'au chapitre précédent.

5.3 Analyse faiblement non-linéaire

Si l'analyse linéaire tridimensionnelle permet de confirmer que le mode le plus instable est longitudinal, et que la restriction de l'étude linéaire à deux dimensions est justifiée, elle prouve également l'existence d'une large zone instable dans l'espace des vecteurs d'onde (k_x, k_y), c'est-à-dire que des modes «obliques» peuvent apparaître, même s'ils sont amplifiés moins rapidement que le mode longitudinal principal.



(a) $s = 2{,}7, d = 50\ \mu\text{m}, \chi = 0{,}1(\text{Re}_\text{p} = 2{,}3)$.

(b) $s = 2{,}7, d = 200\ \mu\text{m}, \chi = 1(\text{Re}_\text{p} = 267)$.

FIG. 5.8 – Courbes de stabilité marginale avec et sans effet d'inertie pour Re_p faible, et avec et sans effet de pente pour Re_p élevé.

Une question se pose donc naturellement : quelle est l'influence de ces modes dans la croissance de la structure ? Y-a-t-il une interaction (par essence non-linéaire) entre les modes longitudinaux, qui devraient apparaître dans les premiers instants de l'instabilité, et ces modes obliques ? Si tel est le cas, quelle structure finale peut-on prédire ? Dans la fin de ce chapitre nous allons étudier cette question analytiquement en établissant les équations d'amplitude régissant l'interaction entre modes en régime faiblement non-linéaire.

Une analyse semblable à celle que nous avons réalisée a été effectuée par *Vittori et Blondeaux* [1992] et *Roos et Blondeaux* [2001] dans le cadre des rides sous écoulement oscillant. Cette étude a montré que les mécanismes non-linéaires pouvaient expliquer la formation des rides «briques». Bien que la présence de la dérive rende le problème assez différent dans le cas de l'écoulement unidirectionnel, nous allons utiliser des outils semblables

5.3.1 Quelles non-linéarités ?

Les non-linéarités qui peuvent intervenir dans la dynamique du système sont de deux ordres : celles qui proviennent de l'écoulement du fluide, et celles créées par le transport des grains. Dans un souci de simplification, nous avons choisi de ne retenir que les termes non-linéaires issus de la loi de transport. En effet, les équations de l'hydrodynamique deviennent très complexes à résoudre à l'ordre supérieur. La résolution complète de l'équation de Navier-Stokes au dessus d'un relief a en fait été effectuée numériquement à l'aide du programme CASTEM par *Kouakou* [2005], et comparée à la solution du problème linéarisé. Cette étude montre que cette dernière constitue une très bonne approximation : le

profil «réel» du cisaillement au dessus de la bosse ne diffère que faiblement de celui que nous avons calculé dans l'approximation linéaire. Nous allons nous affranchir de cette non-linéarité, c'est-à-dire conserver le résultat de l'analyse linéaire pour l'écoulement du fluide, et développer en revanche la loi de transport à l'ordre supérieur.

5.3.2 Choix des modes résonants

Le comportement non-linéaire global d'un tel système, même en se restreignant à la non-linéarité du transport, reste bien sûr hors de portée du calcul analytique. Nous allons donc simplifier encore l'analyse, en nous restreignant à l'interaction entre seulement trois modes : deux modes obliques et un mode longitudinal. Le couplage entre ces modes est dit résonant si le premier est égal à la somme (vectorielle) des deux autres, comme on l'a représenté sur la figure 5.9. En effet, au second ordre, l'équation d'évolution va faire apparaître des produits de termes du premier ordre. Le couplage des modes 2 et 3 contribuera donc à la dynamique du mode 1. Pour des raisons de symétrie et pour réduire la taille du système à résoudre, nous avons de plus choisi de nous restreindre au cas de deux modes obliques conjugués. On introduit les notations suivantes pour les vecteurs d'onde de ces trois modes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{k_1} & = & k_x\,\overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{k_2} & = & \dfrac{k_x}{2}\,\overrightarrow{e_x} + k_y\,\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{k_3} & = & \dfrac{k_x}{2}\,\overrightarrow{e_x} - k_y\,\overrightarrow{e_y} \end{array}\right. \tag{5.41}$$

Leurs amplitudes *complexes* sont notées respectivement A_1, A_2 et A_3.Comme nous nous restreignons à ces trois modes, la perturbation du lit est entièrement définie :

$$h_1(x,y,t) = \left[\mathrm{A}_1(t)\,e^{i\overrightarrow{k_1}\cdot\overrightarrow{r}} + \mathrm{A}_2(t)\,e^{i\overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{r}} + \mathrm{A}_3(t)\,e^{i\overrightarrow{k_3}\cdot\overrightarrow{r}}\right] + \text{c.c.} \tag{5.42}$$

où $\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}$ désigne le vecteur position horizontale.

Que peut-on attendre d'une telle réduction du problème ? Il est évident que la dynamique complète des rides est différente de celle d'un système à seulement trois modes. En particulier, les équations au second ordre devraient faire apparaître, outre les modes 1, 2 et 3, des «harmoniques», par exemple $\overrightarrow{k} = 2k_x\overrightarrow{e_x}$, ou $\overrightarrow{k} = \dfrac{3k_x}{2}\overrightarrow{e_x} + k_y\overrightarrow{e_y}$. Pour qu'il soit justifié de ne pas prendre en compte ces modes, il est nécessaire que le triplet résonant soit choisi non loin de la courbe de stabilité marginale : ainsi, les harmoniques d'ordre plus élevé sont asservis aux modes de base – nous verrons cependant au chapitre 6 que (malheureusement) même ces modes sont susceptibles d'intervenir dans la dynamique. Un autre point important que nous négligeons dans cette analyse est le couplage des modes

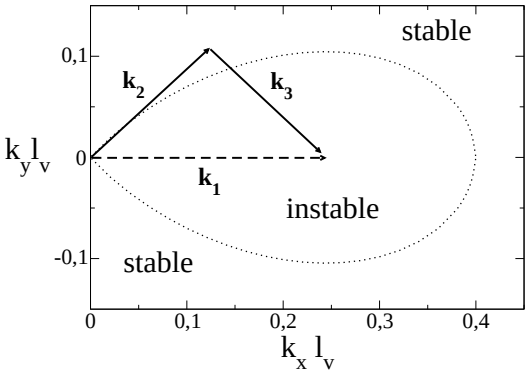


FIG. 5.9 – Triplet de modes résonants. Le trait pointillé rappelle la zone linéairement instable.

de base avec leurs sous-harmoniques, qui donne lieu au phénomène de mûrissement : nous en reparlerons également au chapitre 6.

5.3.3 Dynamique non-linéaire

Rappelons que pour étudier l'évolution temporelle de cette perturbation, nous conservons l'approximation linéaire pour le calcul de l'écoulement (c'est-à-dire les équations (5.19-5.22)). En revanche, l'équation de transport des grains est développée à l'ordre suivant. Nous avons simplifié le problème en n'incluant qu'un seul effet stabilisant : l'effet de pente, et en éliminant le terme d'inertie. Enfin, on adopte l'approximation des grandes longueurs d'onde ($kl_{\mathrm{v}} \ll 1$), et on se place en profondeur infinie.

Introduisons d'abord les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega(\overrightarrow{k_i}) \\ \tau_i &= \tau_{b_1x}(\overrightarrow{k_i})/\tau_{b_0} \end{aligned} \tag{5.43}$$

où $\omega(\overrightarrow{k_i})$ et $\tau_{b_1x}(\overrightarrow{k_i})$ sont données respectivement par les équations (5.38),(5.39) et (5.36). Si l'on combine les équations (5.42), (5.12) et (5.37), on obtient trois équations couplées régissant l'évolution des amplitudes A_1, A_2 et A_3 (le signe * désigne la conjugaison complexe) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\mathrm{dA}_1}{\mathrm{d}t} &= \omega_1\mathrm{A}_1 + \mathrm{K}_1\,\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 \\ \frac{\mathrm{dA}_2}{\mathrm{d}t} &= \omega_2\mathrm{A}_2 + \mathrm{K}_2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3{}^* \\ \frac{\mathrm{dA}_3}{\mathrm{d}t} &= \omega_3\mathrm{A}_3 + \mathrm{K}_3\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2{}^* \end{aligned} \right. \tag{5.44}$$

Les coefficients de couplage K_1, K_2 and K_3 peuvent être calculés analytiquement en fonction du cisaillement de surface. Il vient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{K}_1 & = & -\frac{3i}{4}k_x\Theta_{c0}^{3/2}\mu^{-1/2}\left[(1+\mu)^2\dfrac{\tau_2\tau_3}{\sigma_0^2} - ik_x\dfrac{(1+\mu)}{\mu_s}\dfrac{\tau_2}{\sigma_0} - \dfrac{k_x^2}{4\mu_s^2}\right] \\ \mathrm{K}_{2,3} & = & -\frac{3i}{8}k_x\Theta_{c0}^{3/2}\mu^{-1/2}\left[(1+\mu)^2\dfrac{\tau_1\tau_{3,2}^*}{\sigma_0^2} + \dfrac{k_x^2}{2\mu_s^2} - i(1+\mu)\dfrac{k_x}{\mu_s}\left(\dfrac{\tau_{3,2}^*}{\sigma_0} - \dfrac{\tau_1}{2\sigma_0}\right)\right] \end{array}\right. \tag{5.45}$$

Introduisons maintenant l'amplitude réelle a_i et la phase ϕ_i pour chaque perturbation A_i (*i.e.* : $\mathrm{A}_i = a_i e^{i\phi_i}$). Les trois modes sont maintenant décrits par

$$\left\{\begin{array}{rcl} h_1(x,y,t) & = & a_1(t)e^{i(k_x x+\phi_1(t))} \\ h_{2,3}(x,y,t) & = & a_{2,3}(t)e^{i(\frac{k_x}{2}x+\phi_{2,3}(t))}e^{\pm ik_y y} \end{array}\right. \tag{5.46}$$

On peut donc maintenant définir deux vitesses de migration suivant la direction x : $v_1(t) = \dot{\phi}_1(t)/k_x$ et $v_2(t) = 2\dot{\phi}_2(t)/k_x$. Les équations (5.44) deviennent six équations réelles, qui se réduisent en fait à seulement trois équations si l'on utilise la symétrie $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_3$ et si l'on introduit le déphasage $\Delta\phi = 2\phi_2 - \phi_1$ (c'est-à-dire que la perturbation longitudinale est prise comme origine des phases). Finalement, il vient

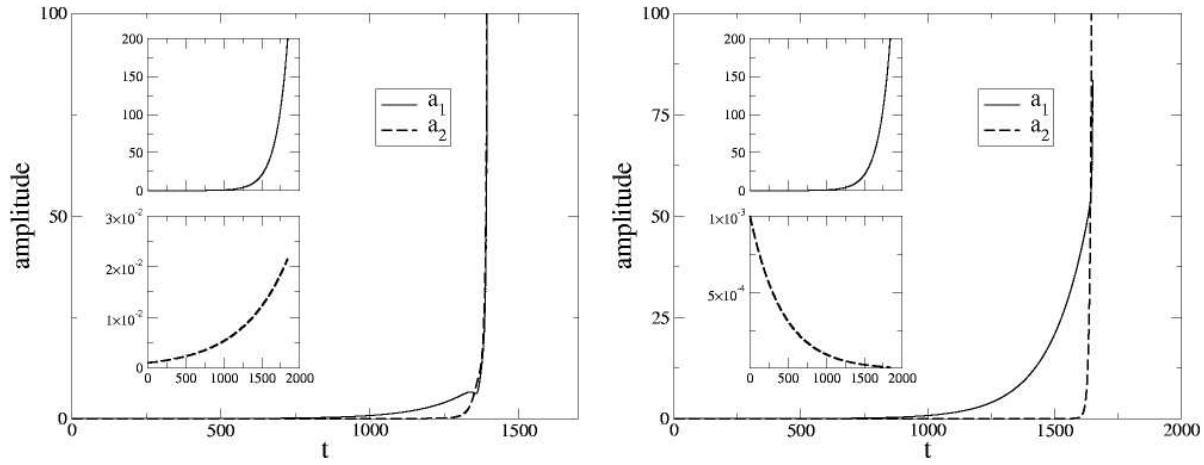
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} & = & \mathrm{Re}\,(\omega_1)\,a_1 + \kappa_1(\Delta\phi){a_2}^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} & = & \mathrm{Re}\,(\omega_2)\,a_2 + \kappa_2(\Delta\phi)a_1a_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}(\Delta\phi)}{\mathrm{d}t} & = & \mathrm{Im}\,(2\omega_2-\omega_1) - \kappa_3(a_1,a_2)\sin(\Delta\phi) + \kappa_4(a_1,a_2)\cos(\Delta\phi) \end{array}\right. \tag{5.47}$$

Les nouveaux coefficients de couplage, *réels* cette fois, sont fonction de $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$, et K_3 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \kappa_1 & = & \mathrm{Re}\,(\mathrm{K}_1)\cos(\Delta\phi) - \mathrm{Im}\,(\mathrm{K}_1)\sin(\Delta\phi) \\ \kappa_2 & = & \mathrm{Re}\,(\mathrm{K}_1)\sin(\Delta\phi) + \mathrm{Im}\,(\mathrm{K}_1)\cos(\Delta\phi) \\ \kappa_3 & = & -2\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{K}_2)a_1 - \mathrm{Re}\,(\mathrm{K}_1)\,\dfrac{a_2^2}{a_1} \\ \kappa_4 & = & 2\,\mathrm{Im}\,(\mathrm{K}_2)a_1 - \mathrm{Im}\,(\mathrm{K}_1)\,\dfrac{a_2^2}{a_1} \end{array}\right. \tag{5.48}$$

La dynamique de notre système à trois modes est donc maintenant décrite par les équations d'amplitude (5.47). Si les amplitudes a_1 et a_2 sont suffisamment petites, les termes non-linéaires sont négligeables, et les deux modes vont, par conséquent, croître ou décroître exponentiellement (suivant leur position dans le diagramme de stabilité). Si l'un de ces modes est instable, son amplitude va croître, de telle sorte que les termes non-linéaires ne puissent plus être négligés. Ils vont alors influencer la dynamique de l'ensemble, soit en

saturant la croissance, soit en l'accélérant, selon le signe des coefficients de couplage κ_1 et κ_2 – celui-ci dépendant de manière non triviale du vecteur d'onde de chaque mode, ainsi que de leur phase relative $\Delta\phi$. Étudions les différentes possibilités : sur les figures 5.10 (a) et



(a) $k_x l_\mathrm{v} = 0{,}2$ et $k_y l_\mathrm{v} = 0{,}05$.

(b) $k_x l_\mathrm{v} = 0{,}2$ et $k_y l_\mathrm{v} = 0{,}1$.

FIG. 5.10 – Évolution linéaire (en encart) et non-linéaire d'un triplet de modes résonants.

(b) nous avons représenté l'évolution de a_1 et a_2 pour les triplets définis respectivement par $(k_x l_\mathrm{v}; k_y l_\mathrm{v}) = (0{,}2; 0{,}1)$ et $(k_x l_\mathrm{v}; k_y l_\mathrm{v}) = (0{,}2; 0{,}05)$. Les encarts montrent l'évolution linéaire de chacun des deux modes : en (a) les deux modes sont linéairement instables, tandis qu'en (b) le mode 1 est linéairement instable et le mode 2 stable. La résolution numérique des équations (5.47) montre qu'aux temps longs, le mode longitudinal déstabilise les modes obliques : leur amplitude croît alors plus rapidement qu'une exponentielle. Dans les cas que nous venons d'observer, l'analyse faiblement non-linéaire est donc rapidement mise en défaut par la croissance explosive de l'amplitude des trois modes.

5.3.4 Motifs stationnaires

Nous avons vu que suivant le choix de chacun des modes du triplet, plusieurs régimes étaient possibles, chacun des modes pouvant être amplifié ou au contraire saturé par les autres. On peut donc imaginer que dans certains cas, les effets linéaires et non-linéaires se compensent exactement – pour cela, il est nécessaire que les coefficients κ_1 et κ_2 soient tous deux négatifs –, de sorte que le motif formé serait stationnaire (à la dérive près). Les amplitudes et phases des modes doivent pour cela obéir aux équations suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\Delta\phi)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.49}$$

Après de fastidieux calculs, le système ci-dessus peut être réduit à une équation du second degré en Arctan $\Delta\phi$ (cf. annexe B). On trouve finalement des solutions stationnaires si $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ sont linéairement instables. La figure 5.11 présente les amplitudes a_1 et a_2, ainsi que le déphasage $\Delta\phi$, de ces solutions, en fonction de k_y pour k_x et χ fixés. Les structures ainsi

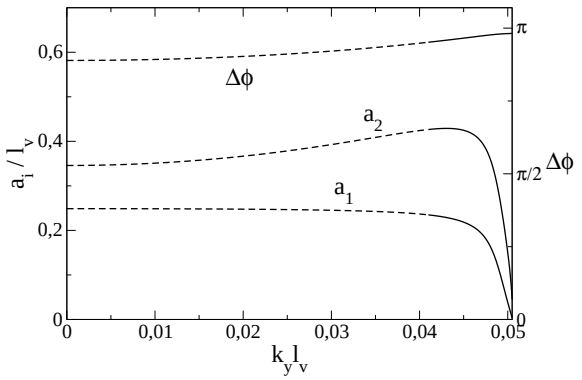


FIG. 5.11 – Amplitudes et déphasage dans les triplets stationnaires. Les états représentés en trait plein sont stables. Paramètres : $k_x l_\mathrm{v} = 0{,}1$ et $\chi = 1$.

identifiées se déplacent dans le sens de l'écoulement à la vitesse constante

$$v_\mathrm{d} = \frac{2}{k_x}\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{k_x}\frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.50}$$

Tous les modes dérivent bien à la même vitesse, ce qui assure que le motif formé ne se déforme pas au cours de leur déplacement. Nous avons donc effectivement isolé des structures permanentes. On peut remarquer que des solutions existent pour k_y variant de 0 à k_{y_c}, cette dernière valeur étant définie par $\mathrm{Re}\,(\omega(k_{y_\mathrm{c}})) = 0$. Au-delà, les modes 2 et 3 sont linéairement stables.

L'aspect de ces motifs (dont la figure 5.12 montre quelques exemples) rappelle les structures de rides «hexagonales» et «briques» observées dans la nature sous écoulement oscillant, et identifiées par une méthode analogue par *Vittori et Blondeaux* [1992] et *Roos et Blondeaux* [2001]. Si l'on considère l'évolution du triplet de modes comme un flot dynamique, ces points particuliers $(a_1, a_2, \Delta\phi)$ constituent des *foyers* de l'espace des états à trois dimensions. Il est donc maintenant légitime de se demander si ces foyers sont accessibles au système. Les équations d'évolution étant à ce stade très complexes, nous n'analyserons pas ici la dynamique complète (on tentera de l'étudier sur un système «modèle» au chapitre 7). En revanche, il est possible de déterminer lesquels de ces foyers sont *attractifs*, c'est-à-dire stables vis-à-vis des perturbations. Pour cela, on peut réécrire le flot dynamique sous la forme suivante :

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{F}(\mathrm{X}) \tag{5.51}$$

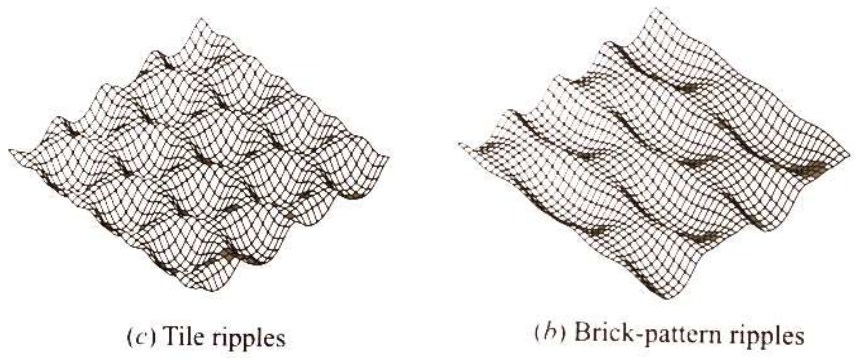


FIG. 5.12 – Rides *hexagonales* et *briques* (d'après [*Roos et Blondeaux*, 2001].

$$\text{avec} \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \Delta\phi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{F(X)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\omega_1)\, a_1 + \kappa_1 {a_2}^2 \\ \mathrm{Re}\,(\omega_2)\, a_2 + \kappa_2 a_1 a_2 \\ \mathrm{Im}\,(2\omega_2 - \omega_1) - \kappa_3 \sin(\Delta\phi) + \kappa_4 \cos(\Delta\phi) \end{pmatrix}$$

Si l'on appelle $\mathrm{X_f}$ un point fixe de cette équation, on peut linéariser F autour de $\mathrm{X_f}$. La stabilité de $\mathrm{X_f}$ est alors déterminée par les valeurs propres de la matrice

$$\mathrm{M} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial \mathrm{X}_j} \right)_{\mathrm{X}=\mathrm{X_f}} \tag{5.52}$$

Le foyer $\mathrm{X_f}$ est stable (vis-à-vis des fluctuations d'amplitudes et de phase), si la partie réelle de chacune des valeurs propres de M est négative. On peut calculer ces dernières analytiquement avec Maple®. Tous calculs effectués, on montre qu'une partie des foyers préalablement identifiés sont stables (cf. Fig. 5.11). Ces points d'attraction correspondent à des modes obliques très proches de la courbe de stabilité marginale. Nous avons donc identifié des structures tridimensionnelles stationnaires et *stables* (avec les restrictions que nous avons apporté à ce terme), vers lesquelles pourrait tendre le système. Le problème est qu'il en existe une infinité : il est impossible de prédire vers quel foyer le système va évoluer. Toutefois, il est intéressant de constater que même dans le cas d'un écoulement très simple, unidirectionnel, la non-linéarité de la loi de transport suffit à expliquer l'émergence possible de structures 3D à partir d'une surface plane. De plus, on peut souligner que l'évolution prédite du système suit les observations expérimentales : les rides perpendiculaires au courant étant la perturbation la plus instable linéairement, on s'attend à les voir apparaître en premier, avant que les termes non-linéaires ne deviennent importants et conduisent à l'apparition des structures 3D.

5.4 Pertinence des résultats - discussion

La situation que nous avons analysée est extrêmement simplifiée : l'écoulement cisaillé de hauteur infinie n'est évidemment pas la configuration rencontrée généralement dans la nature ou même dans les expériences. Toutefois, le même type de mécanisme de couplage entre modes peut être imaginé dans différents modèles, même dans le cas plus réaliste d'un écoulement turbulent. Comme nous l'avons mentionné en 4.2.1, le calcul du cisaillement à l'ordre linéaire a été effectué dans ce cas par *Hunt et al.* [1988] : on obtient, dans l'espace de Fourier, les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\tau_x}{h} & \propto & \dfrac{\mathrm{A}k_x(k_x + i\mathrm{B}\,|k_x|)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \\ \dfrac{\tau_y}{h} & \propto & \dfrac{\mathrm{A}k_x k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \end{cases} \tag{5.53}$$

La même analyse de stabilité que celle décrite dans ce chapitre peut alors être effectuée en incorporant ce champ de vitesses dans l'expression (5.38). On trouve alors pour la courbe de stabilité marginale l'allure donnée par la figure 5.13, qui est bien similaire à celle obtenue avec notre modèle d'écoulement. De plus, c'est le mécanisme stabilisant choisi (à nombre de Reynolds élevé, l'inertie des grains) qui contrôle le choix du mode le plus instable. La longueur d'onde prédite variera donc comme $\leqslant$ même dans le cas d'un écoulement turbulent. L'analyse non-linéaire que nous avons présentée, quant à elle, repose uniquement

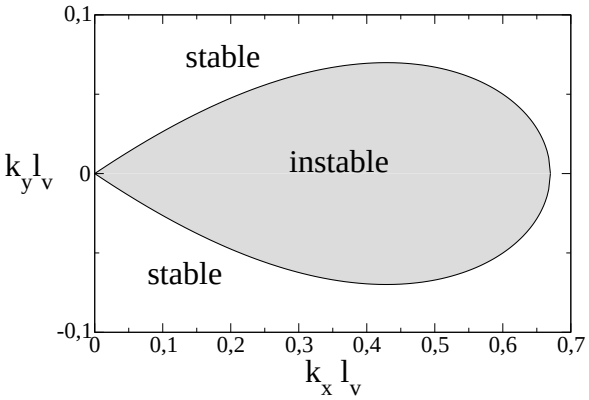


FIG. 5.13 – Diagramme de stabilité dans le cas d'un écoulement turbulent. Le cisaillement est décrit par les équations (5.53) avec A = 0,2 et B = 1.

sur les non-linéarités provenant de la loi de transport des grains, et non de l'écoulement. On peut donc conclure que les mêmes conclusions quant à l'interaction d'un triplet de modes,

s'appliquent aussi bien dans le cas laminaire que dans le cas turbulent. En revanche, on peut bien sûr s'attendre à ce que les fluctuations turbulentes jouent un rôle important dès lors qu'elles deviennent du même ordre de grandeur que le champ moyen. De même, le développement de zones de recirculations en aval des dunes invalide également l'approche calculatoire fondée sur une méthode de raccordement asymptotique. Les effets spécifiques à la turbulence doivent alors être étudiés indépendamment.
Toutefois, même dans le cas laminaire, des efforts supplémentaires sont encore nécessaires pour être capable de prédire l'évolution sur des temps longs des structures tridimensionnelles. Une analyse non-linéaire plus complète serait indispensable pour déterminer quels sont les motifs qui seront finalement sélectionnés, et quels paramètres contrôlent cette forme finale.

Pour expliquer l'émergence de structures tridimensionnelles complexes, nous avons évoqué en 3.3 l'hypothèse d'une instabilité secondaire d'origine hydrodynamique. L'analyse très simplifiée que nous avons présentées dans ce chapitre montre qu'un autre mécanisme, par couplage non-linéaire de modes obliques instables, pourrait expliquer l'apparition de structures 3D. Il est difficile à ce stade de trancher entre ces deux hypothèses. De plus, l'émergence possible de structures tridimensionnelles, même dans le cas très simple d'un écoulement laminaire cisaillé, montre que l'aspect tridimensionnel du phénomène d'érosion ne doit pas être négligé dans l'étude des phénomènes naturels plus complexes.

Cette analyse non-linéaire montre donc que certains motifs tri-dimensionnels sont stables par rapport à l'érosion. Toutefois, nous en avons mis en évidence plusieurs, et rien dans notre calcul ne permet de les discriminer. De plus, nous n'avons calculé que des états finals, mais la dynamique du système reste à décrire, même dans cette configuration simplifiée à trois modes. En effet, en partant d'un état aléatoire, quels «foyers» le système pourra-t-il atteindre, et vers lequel évoluera-t-il ?

Pour répondre à ces questions, il est indispensable d'intégrer numériquement les équations d'évolution (5.47). Cependant, le calcul des coefficients de ces équations n'est pas des plus aisés. Nous reviendrons sur cette dynamique dans le cadre d'un modèle simplifié, au chapitre 6.

Malgré ses restrictions, cette étude montre que même dans un cas très simplifié, la tridimensionnalité du système ne peut être négligée. Il n'est donc pas nécessaire d'invoquer l'intervention de la turbulence pour expliquer la formation de motifs complexes : la seule non-linéarité du transport sédimentaire peut suffire à les former.

Chapitre 6 Mûrissement et dynamique non-linéaire

Dans les deux chapitres précédents, nous avons réussi à calculer analytiquement la longueur d'onde et la vitesse des rides dans l'approximation linéaire, et nous avons également extrait des résultats qualitatifs sur la dynamique non-linéaire. Toutefois, il apparaît très difficile d'aller plus loin dans le calcul de l'évolution à long terme des rides. En particulier, nous n'avons pas rendu compte du phénomène de mûrissement, c'est-à-dire d'évolution vers des structures de plus grande longueur d'onde au cours du temps. Pour cela, nous avons d'une part conduit des simulations numériques intégrant les équations du modèle détaillé au chapitre 4. Nous commencerons par exposer les méthodes utilisées dans le programme de simulation, puis nous présenterons les résultats obtenus concernant l'évolution aux temps longs des rides.

D'autre part, nous avons cherché à modéliser de manière plus simple le comportement linéaire et non-linéaire des rides, en introduisant des équations locales reproduisant les caractéristiques de l'évolution des rides. Nous tenterons tout d'abord d'expliquer le phénomène de mûrissement de manière analytique, avant de passer à une résolution numérique à deux puis trois dimensions, pour différents types d'instabilité.

6.1 Simulations numériques à deux dimensions

Dans un premier temps, nous avons mis au point un programme permettant d'intégrer les équations du modèle exposées au chapitre 4, en deux dimensions.

6.1.1 Principe du programme

Schéma itératif

Le programme de simulation a été écrit en langage Fortran et est basé sur les bibliothèques NAG® pour effectuer le calcul des transformées de Fourier et la résolution des équations différentielles. Tout le calcul est réalisé en conditions aux limites périodiques en x, dans un domaine de largeur L et de hauteur H. La structure du programme est la suivante :

1. On résout, dans l'espace de Fourier, les équations de l'hydrodynamique linéarisées. On obtient ainsi les composantes de Fourier du cisaillement normalisé $\widehat{\tau}_k/\widehat{h}_k$[1].
2. On choisit un profil de hauteur initial $h^n(x)$.
3. On calcule les composantes de Fourier du profil $\widehat{h}_k^n$.
4. Grâce au calcul de l'étape 1, on connaît, par linéarité, les composantes de Fourier du cisaillement, $\widehat{\tau}_k$, au dessus du lit.
5. On effectue une transformée de Fourier inverse pour obtenir le cisaillement de surface dans l'espace réel $\tau(x)$.
6. On déduit le flux de grains $q(x)$ par l'intermédiaire de la loi de transport choisie.
7. En appliquant la conservation de la masse, on obtient le nouveau profil $h^{n+1}(x)$.
8. Les étapes 3 à 7 sont répétées.

Notons que l'étape a priori la plus lourde du point de vue du temps de calcul, la résolution des équations hydrodynamiques, est effectuée une fois pour toutes au début du programme. On peut ensuite obtenir le champ de vitesses au-dessus d'un lit quelconque simplement par linéarité dans l'espace de Fourier. Ce sont donc plutôt les «aller-retour» répétés entre l'espace réel et l'espace de Fourier qui constituent le facteur limitant dans la vitesse d'exécution.

Méthodes numériques

Dans un premier temps, nous avons cherché à résoudre directement, par une méthode de relaxation, le système d'équations linéaires couplées en $\widehat{u}_1, \widehat{w}_1$ et $\widehat{p}_1$. Toutefois, le calcul est grandement simplifié si l'on utilise les calculs de l'analyse de stabilité, et qu'on repart de l'équation (5.25). En deux dimensions, celle-ci s'écrit

$$\left[\nu\left(\partial_z^2 - k^2\right) - i\,k\,\gamma z\right]\left(\partial_z^2\widehat{w}_1 - k^2\widehat{w}_1\right) = 0 \tag{6.1}$$

[1] Les chapeaux désignent les grandeurs dans l'espace de Fourier.

Le problème est donc réduit à une équation sur une seule inconnue, ce qui accélère grandement sa résolution. Pour que le programme effectue tous les calculs sur des réels, on décompose (6.1) en deux équations sur $\widehat{w}_{\mathrm{r}} = \mathrm{Re}\,(\widehat{w})$ et $\widehat{w}_{\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\,(\widehat{w})$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widehat{w}_{\mathrm{r}}^{(4)} - 2k^2\,\widehat{w}_{\mathrm{r}}'' + k\dfrac{u_0}{\nu}\,\widehat{w}_{\mathrm{i}}'' + k^4\,\widehat{w}_{\mathrm{r}} - k^3\dfrac{u_0}{\nu}\,\widehat{w}_{\mathrm{i}} & = & 0 \\ \widehat{w}_{\mathrm{i}}^{(4)} - 2k^2\,\widehat{w}_{\mathrm{i}}'' - k\dfrac{u_0}{\nu}\,\widehat{w}_{\mathrm{r}}'' + k^4\,\widehat{w}_{\mathrm{i}} + k^3\dfrac{u_0}{\nu}\,\widehat{w}_{\mathrm{r}} & = & 0 \end{array}\right. \tag{6.2}$$

Pour résoudre ces deux équations du quatrième ordre, on les réduit chacune à un système de 4 équations différentielles du premier ordre. Finalement, une bibliothèque NAG est utilisée pour résoudre le système de 8 équations différentielles, écrit sous la forme

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{F}(z)\mathrm{Y} \tag{6.3}$$

et associé aux conditions limites en $z = 0$ et $z = \mathrm{H}$, qu'on peut écrire de la façon suivante :

$$\mathrm{C}\,\mathrm{Y}(0) + \mathrm{D}\,\mathrm{Y}(\mathrm{H}) = \Gamma \tag{6.4}$$

où $\mathrm{F}(z)$, C et D sont des matrices réelles 8×8, et Y et Γ sont des vecteur de dimension 8. Le problème ainsi formulé est résolu par une méthode aux différences finies sur une grille verticale de 256 points. Dans certains cas (pour $k\mathrm{H} \gtrsim 1$), le gradient de vitesse est très élevé dans une zone étroite proche de $z = 0$. Pour améliorer la résolution, nous avons donc défini une grille non-équidistante, dont les points sont de plus en plus rapprochés au fur et à mesure qu'on se rapproche de $z = 0$.

Une fois la vitesse verticale $\widehat{w}_k$ calculée, il reste ensuite à déterminer la composante horizontale de la vitesse $\widehat{u}_1$, sur la même grille, en utilisant l'équation d'incompressibilité.

Enfin, l'intégration temporelle de l'équation de conservation de la masse (étape 7 du schéma d'itération) se fait par la méthode d'Euler ou d'Adams-Bashforth d'ordre 2. Nous avons vérifié que ces deux méthodes donnaient bien des résultats identiques.

Grandeurs physiques

Des valeurs réalistes sont adoptées pour les grandeurs physiques intervenant dans le programme. Toutefois, pour une hauteur d'eau $\mathrm{H} = 10$ cm et des grains de diamètre 500 μm, le seuil de mise en mouvement correspond à un nombre de Reynolds très élevé, ce qui rend le calcul numérique du champ de vitesses dans le fluide très délicat. Or, dans le modèle exposé au chapitre 4, l'écoulement est calculé à l'ordre linéaire et on ne tient pas compte de la présence d'une paroi au-dessus du lit de sable. Nous avons donc choisi de conserver une hauteur d'eau significative, mais d'adopter une valeur de viscosité artificiellement élevée pour le fluide : $\nu = 10^{-4}$ m.s^{-2} . On peut ainsi obtenir un nombre de Shields supérieur au

seuil pour un taux de cisaillement plus faible. Le nombre de Reynolds typique est alors Re = 2000.

La densité relative des grains est fixée à $s = 2{,}5$ (ce qui correspond à des grains en verre). Le taux de cisaillement est fixé *via* le nombre de Shields, qu'on fait varier entre 0,2 et 2. Dans le cas où on tient compte de l'effet de l'inertie des grains, la formulation $l_{\mathrm{eq}} = 3ds$ a été adoptée : cette valeur constante est valable pour un nombre de Reynolds particulaire est élevé, c'est-à-dire quand l'inertie est prédominante (cf. 4.2.2).

Grandeurs caractéristiques des rides

À une certaine fréquence dans l'exécution du programme, les grandeurs caractéristiques suivantes sont calculées :

- la hauteurs maximale h_{max} de la structure ;
- l'amplitude $\sqrt{\langle h^2 \rangle}$;
- le nombre de bosses N : on compte une «bosse» à chaque fois que la hauteur locale franchit un seuil, que l'on a fixé à $h_{\mathrm{max}}/10$. La longueur d'onde moyenne est alors $\langle \lambda \rangle = \mathrm{L/N}$;
- la largeur moyenne $\langle \ell \rangle$: pour chaque «bosse», la largeur est calculée au niveau du seuil (cf. Fig, 6.1). On moyenne ensuite sur toutes les bosses.

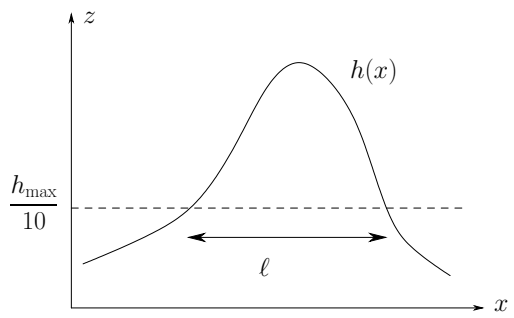
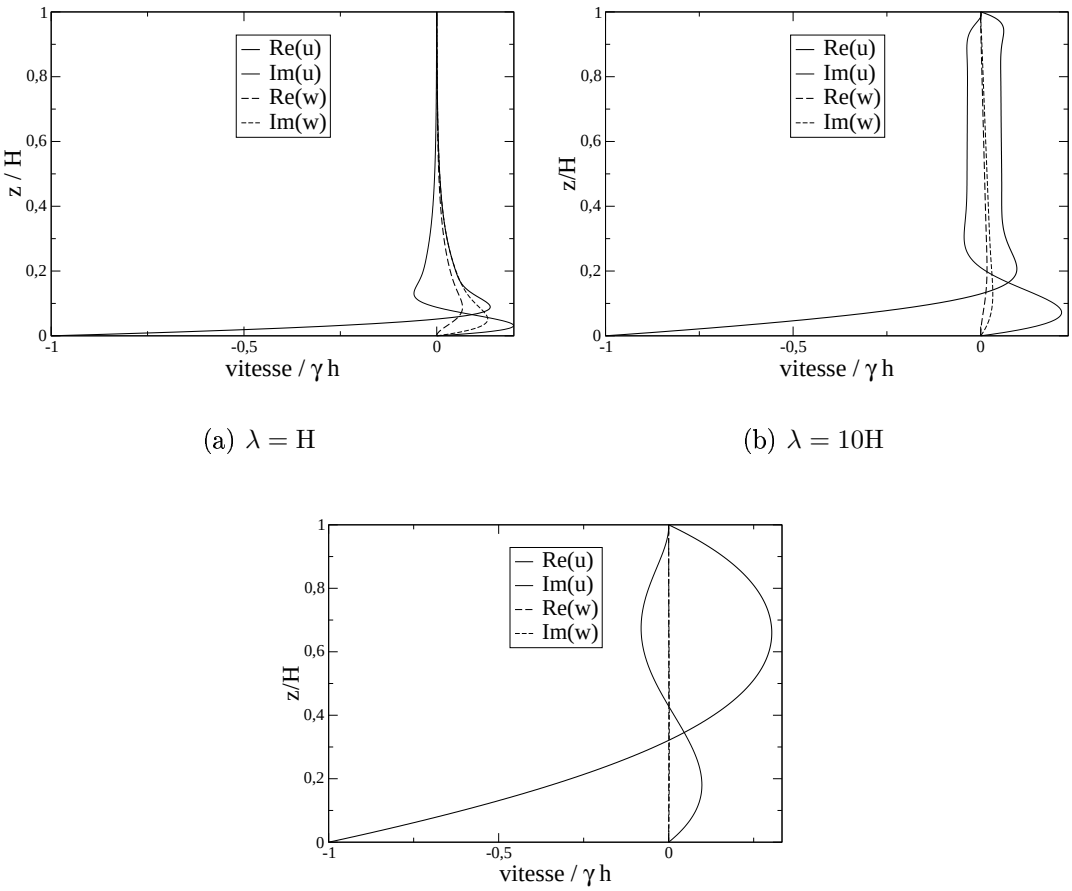


FIG. 6.1 – Définition de la largeur «au seuil» d'une bosse.

6.1.2 Champ de vitesses

En introduisant initialement comme relief $h(x)$ une perturbation sinusoïdale de nombre d'onde k fixée, on calcule le champ de vitesses $(\widehat{u}_k, \widehat{w}_k)$, dont les parties réelle et imaginaire sont représentées sur la figure 6.2. On retrouve bien l'allure des courbes théoriques présentées en 5.2.1 : l'épaisseur de la zone sur laquelle s'étend la perturbation du champ de vitesses diminue quand le nombre d'onde k augmente. La présence de gradients de vitesse trop élevés au voisinage de la paroi inférieure pose des problèmes pour la résolution



(a) $\lambda = \mathrm{H}$

(b) $\lambda = 10\mathrm{H}$

(c) $\lambda = 100\mathrm{H}$.

FIG. 6.2 – Profils des perturbations en vitesse, horizontale et verticale, dans l'espace de Fourier, obtenues par la résolution numérique de l'équation 6.1.

numérique. Il est donc impossible de résoudre les équations hydrodynamiques si la taille du système est trop faible, ou si la résolution est trop grande.

6.1.3 Croissance en régime linéaire

Essayons maintenant de retrouver le comportement linéaire prédit par l'analyse de stabilité. Pour cela, on «éteint» tous les modes (à chaque itération leur amplitude est nulle) sauf le fondamental $\lambda = L$ dans des boîtes de hauteur H fixée et de longueur L variable. À partir de l'évolution exponentielle de l'amplitude de la perturbation, on mesure le taux de croissance, et on obtient le diagramme de stabilité représenté sur la figure 6.3. Notre programme reproduit donc bien le comportement linéaire que nous avons prédit à

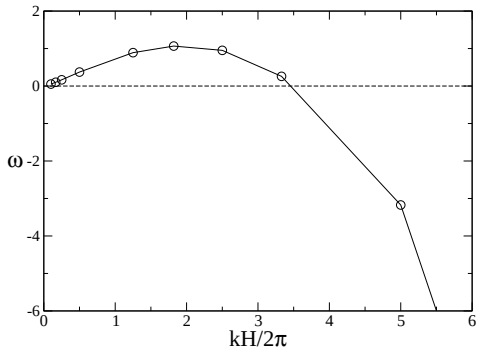


FIG. 6.3 – Taux de croissance, obtenu numériquement, d'une perturbation sinusoïdale (avec effet de pente), en fonction de son nombre d'onde.

l'aide de l'analyse de stabilité linéaire au chapitre 4.

Inertie et effet de pente

Nous avons implanté dans le programme les deux effets stabilisants, nécessaires à la sélection d'une longueur d'onde. La figure 6.4 compare l'état final obtenu en faisant évoluer une perturbation initiale aléatoire dans un domaine de longueur $L = \lambda_{max}$ (c'est-à-dire qu'une bosse unique doit se développer). La morphologie finale est quasiment identique dans les deux cas. On observe en particulier la dissymétrie de la ride : la pente est plus faible du côté amont que du côté aval, ce qui correspond bien aux observations. Cependant, il est beaucoup plus facile de faire converger le programme en ne prenant en compte que l'inertie des grains. En effet, le calcul de la pente a tendance à générer des discontinuités et à réduire la stabilité numérique. Dans la suite nous utiliserons donc plutôt l'effet d'inertie comme mécanisme stabilisant : les structures obtenues sont plus «lisses» et d'aspect plus réaliste.

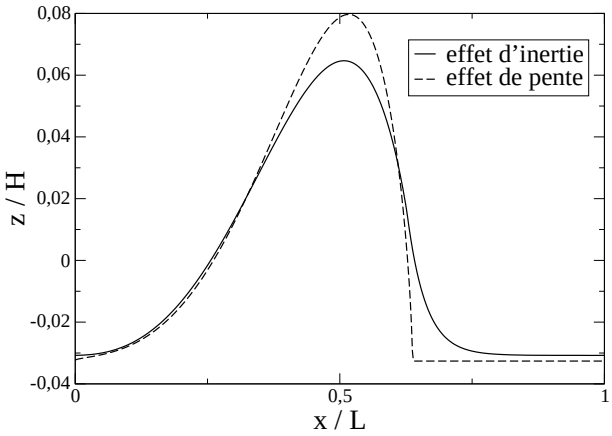


FIG. 6.4 – Comparaisons entre les structures finales obtenues dans une boîte de longueur $L \simeq \lambda_{max}$ selon le mécanisme stabilisant pris en compte.

Influence de la loi de transport

Nous avons cherché à isoler l'effet de la loi de transport sur la morphologie des structures obtenues. Pour cela, nous avons reproduit le même type d'expérience que dans le paragraphe précédent, en ne prenant en compte que la relaxation inertielle du flux, et en faisant varier l'exposant de la loi de puissance. L'aspect général des rides obtenues ne varie pas qualitativement. On peut noter que dans le cas $m = 1$, la ride obtenue est très aplatie au niveau du creux. En effet, le fait d'imposer un seuil pour le transport des grains équivaut en fait à limiter la quantité de sable disponible pour «construire» la dune : en-dessous d'une certaine hauteur, le cisaillement exercé par le fluide n'est plus suffisant pour mettre les grains en mouvement, et il est donc impossible de «creuser» plus profondément que cette hauteur : la ride est donc verticalement asymétrique.

Sur la figure 6.6, nous avons également représenté l'amplitude moyenne $\sqrt{\langle h^2 \rangle}$ de la ride à l'état final, en fonction du cisaillement imposé Θ_0 et pour deux valeurs de l'exposant m (loi linéaire et loi de Meyer-Peter/Müller). On constate que, comme nous l'avons remarqué sur la figure précédente, la non-linéarité de la loi de transport a tendance à freiner la croissance des structures. De plus, il apparaît que la structure finale présente un maximum d'amplitude, assez peu marqué, pour $\Theta_0 \simeq 0{,}5$.

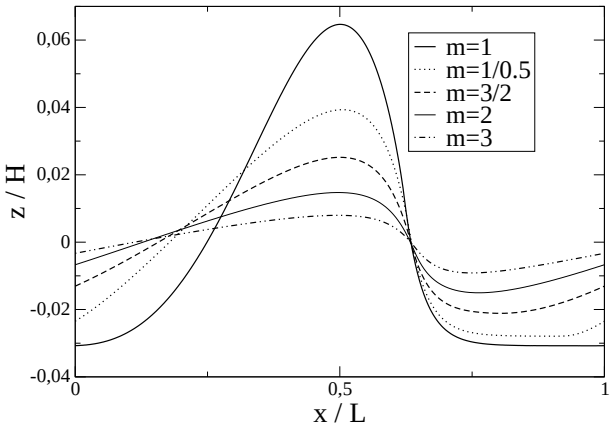


FIG. 6.5 – Structure finale obtenue dans une boîte de largeur L $\simeq \lambda_{\max}$ pour différentes lois de transport : m représente l'exposant de la loi $q = (\Theta - \Theta_c)^m$ (sauf dans le cas noté $m = 1/0{,}5$, où la loi de transport utilisée est $q = (\Theta - \Theta_c)\sqrt{\Theta - \Theta_c}$.

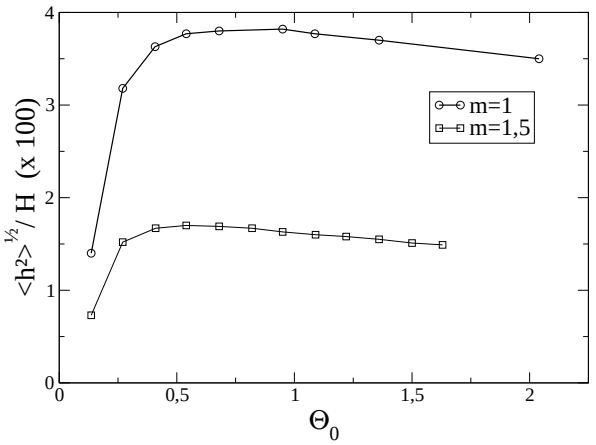


FIG. 6.6 – Amplitude moyenne de la structure finale dans un domaine de longueur L $= \lambda_{\max}$ en fonction du nombre de Shields imposé par l'écoulement (Θ_0), avec $\Theta_{c_0} = 0{,}1$.

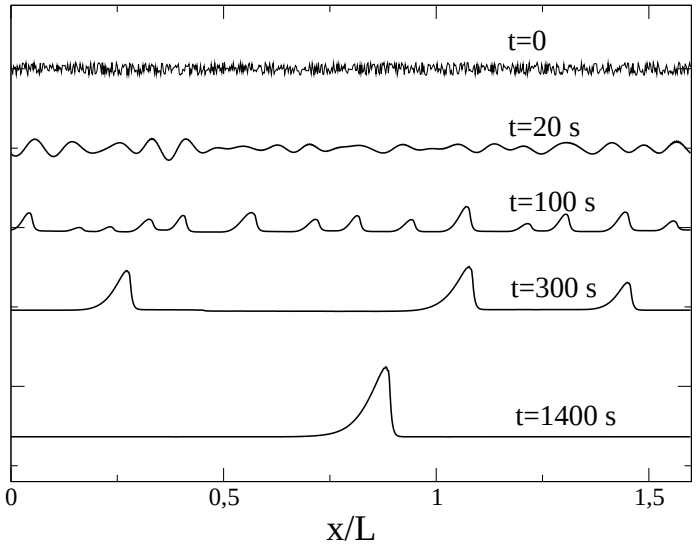


FIG. 6.7 – Aspect du relief à différents instants au cours du mûrissement. L'échelle respective des structures a été modifiée pour la lisibilité de la figure.

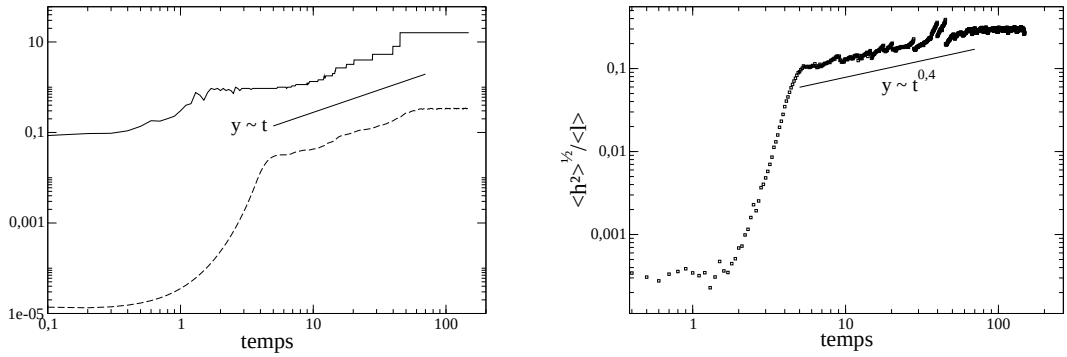
6.1.4 Mûrissement

Évolution des grandeurs caractéristiques

Les équations du modèle présenté au chapitre 4 sont-elles suffisantes pour reproduire le phénomène de mûrissement des rides, c'est-à-dire l'augmentation de la longueur d'onde au cours du temps ? Pour le savoir, nous avons effectué des simulations dans des domaines plus étendus que la longueur d'onde linéairement la plus instable. On s'attend donc, en partant d'une perturbation initiale aléatoire, à voir d'abord se développer des rides de longueur d'onde $\lambda_{\max}$, puis dans un deuxième temps à la coalescence de ces structures et à l'évolution vers des rides de plus grande longueur d'onde. On peut en effet observer cette évolution sur la figure 6.7 qui montre l'aspect du lit à différents instants, dans un domaine de longueur $\mathrm{L} = 16\lambda_{\max}$. Dans toute la suite, on utilisera la loi de transport $q = (\Theta - \Theta_c) \times \mathcal{H}(\Theta - \Theta_c)$. En effet, la seule non-linéarité due à la présence d'un seuil de mise en mouvement suffit à produire le mûrissement. Nous n'avons malheureusement pas réussi à faire converger le programme pour des domaines de taille suffisamment grande en utilisant la loi de Meyer-Peter/Müller.

Il est important de remarquer que le mûrissement aboutit à la formation d'une ride unique (celle-ci apparaissant localisée : à cause de l'existence du seuil de mise en mouve-

ment, l'érosion ne peut se produire que jusqu'à une profondeur donnée). Malheureusement, pour des domaines significativement plus grands que $L = 16\lambda_{max}$, le temps de calcul pour atteindre un état final stationnaire devient beaucoup trop long. Dans cette limite, il apparaît donc que le mûrissement ne s'arrête pas : c'est la taille du système qui détermine la longueur d'onde finale obtenue. Traçons à présent l'évolution de l'amplitude et de la longueur moyenne des rides, ainsi que leur rapport d'aspect (cf. Fig. 6.8). Dans un premier



(a) (b)

FIG. 6.8 – (a) Évolution de l'amplitude moyenne (- - -) et de la longueur d'onde moyenne $\langle\lambda\rangle$ (——) (normalisées par H) en fonction du temps.
(b) Évolution du rapport d'aspect individuel des rides $\sqrt{\langle h^2\rangle}/\langle\ell\rangle$ au cours du temps. La longueur du domaine est $L = 16\lambda_{max}$.

temps, la croissance des rides est exponentielle : c'est le régime linéaire. On passe ensuite brusquement à un régime non-linéaire, où l'amplitude des rides, tout comme leur longueur d'onde moyenne, croissent pratiquement linéairement avec le temps, comme l'indique la portion de droite sur la figure 6.8(a) :

$$\sqrt{\langle h^2\rangle} \propto \langle\lambda\rangle \propto t \tag{6.5}$$

D'autre part, la croissance du rapport d'aspect moyen des rides peut elle aussi être approximée par une loi de puissance :

$$\frac{\langle h^2\rangle}{\langle\ell\rangle} \propto t^{0,4} \tag{6.6}$$

soit $\langle\ell\rangle \propto t^{0,6}$. Les mêmes résultats ont été obtenus par *Kouakou* [2005] avec des simulations numériques basées, pour la partie hydrodynamique, sur la théorie de la double couche. Si

le régime linéaire n'a pas pu être observé expérimentalement, la croissance linéaire (aux temps longs) de l'amplitude et de la longueur d'onde des rides est compatible avec les mesures expérimentales réalisées sur les grains d'un diamètre supérieur à 200 μm (cf. chapitre 3). En revanche, il doit manquer un ingrédient physique au modèle pour reproduire la dynamique des rides pour les grains de petite taille (100 μm). On peut supposer que notre loi de transport n'est plus adaptée au cas des grains trop petits. En effet, pour ces simulations nous avons linéarisé la loi de Meyer-Pe ter/Müller. Or la théorie de la resuspension visqueuse utilisée par *Charru et Mouilleron-Arnould* [2002] prévoit un exposant $m = 3$ dans la loi de transport : l'approximation linéaire serait alors d'autant moins justifiée. Il faut en outre signaler que la simulation ne prévoit pas de saturation, ni de l'amplitude, ni de la longueur d'onde, si ce n'est celle due à la taille finie du domaine d'intégration.

Influence de la taille de la boîte

Dans cette expérience, on laisse évoluer le système à partir d'un état initial quelconque jusqu'à obtenir un état stable. Pour une boîte de longueur $\mathrm{L} = n\lambda_{\max}$, on observe donc la formation initiale de n rides de longueur d'onde $\lambda_{\max}$ (instabilité linéaire), puis le mûrissement de cette structure, jusqu'à ce que la boîte ne contienne plus qu'une seule ride de longueur L. Sur la figure 6.9, nous avons représenté le profil de hauteur à l'état final, en adimensionnant les abscisses par la longueur de la boîte. On constate ainsi que le rapport d'aspect de la structure finale est grandement affecté par la taille de la boîte : plus celle-ci est grande, plus la ride sera localisée et haute. Nous avons tracé sur la figure 6.10 les variations comparées de l'amplitude $\langle h^2 \rangle$ et de la largeur moyenne des structures $\langle \ell \rangle$, ainsi que celle du rapport d'aspect, en fonction de la taille de la boîte. Ce diagramme permet de confirmer que le rapport d'aspect des structures finales s'accroît fortement quand la taille du domaine augmente : la ride finale est, proportionnellement, de plus en plus localisée.

6.2 Équations modèles

Dans le chapitre 5, nous avons effectué une analyse non-linéaire à trois dimensions du comportement des rides, en restreignant le système à un ensemble de trois modes. Ce faisant, nous avons en particulier supposé que les modes de plus petit nombre d'onde n'intervenaient pas, c'est-à-dire que nous n'avons pas pris en compte le phénomène du mûrissement.

L'inconvénient des équations de la partie 4 est que les expressions sont très compliquées, en particulier en raison de leur non-localité : dans l'espace de Fourier, l'équation d'évolution de $h_k(t)$ fait intervenir des puissances non-entières de $|k|$, ce qui correspond

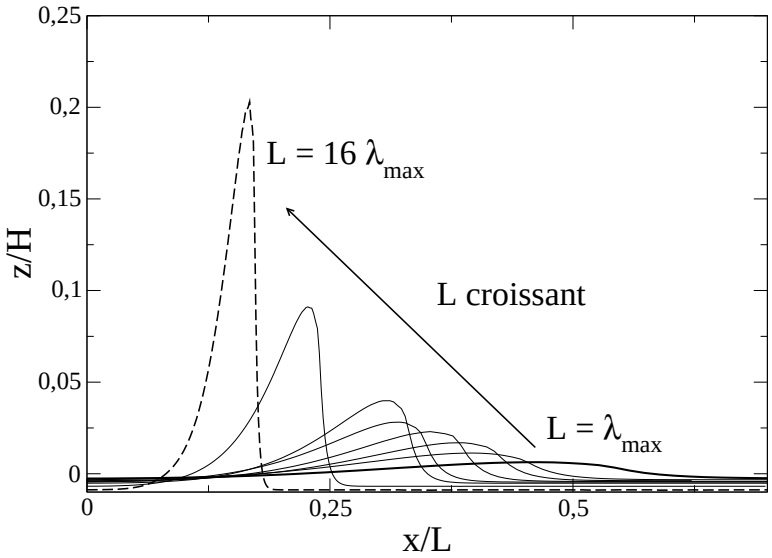


FIG. 6.9 – Aspect de la structure finale obtenue dans des domaines de taille croissante, les abscisses étant redimensionnées par L.

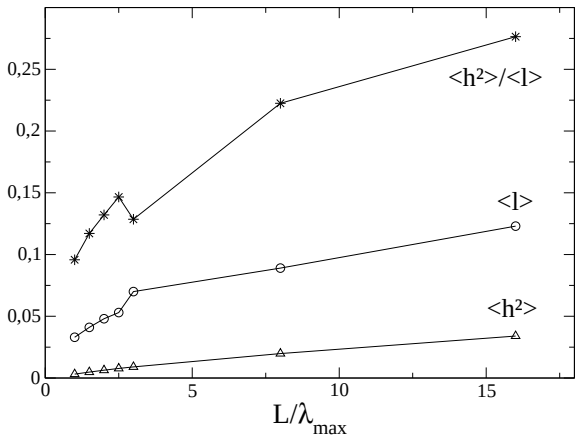


FIG. 6.10 – Variation des grandeurs caractéristiques du système obtenu à l'état final en fonction de la taille du domaine d'intégration.

dans l'espace réel à des termes de type «intégrale de Hilbert». C'est pourquoi la résolution des équations de l'hydrodynamique, même linéarisées, nécessite un temps de calcul important. Il peut donc être utile de chercher à reproduire un comportement similaire à celui des équations «complètes» grâce à des équations *modèles*, locales et donc plus faciles à intégrer. L'évolution linéaire, à deux dimensions, peut être décrite par un développement en dérivées successives de h :

$$\partial_t h = a_1 \partial_x h - a_2\, \partial_{xx} h + a_3\, \partial_{xxx} h - a_4\, \partial_{xxxx} h \tag{6.7}$$

Les dérivées paires contribuent au taux de croissance de la structure :

$$\sigma(k) = \mathrm{Re}\,(\omega) = a_2 k^2 - a_4 k^4 \tag{6.8}$$

Les coefficients a_2 et a_4 doivent être tous deux positifs pour que le comportement linéaire soit celui de l'instabilité des rides. Le diagramme de stabilité correspondant est tracé sur la figure 6.11 : on s'aperçoit que l'allure de la courbe est bien identique à celle obtenue par l'analyse de stabilité linéaire au chapitre 4. Les termes en h_x et h_{xxx} sont, quant à eux, responsables de la dérive des rides (ils contribuent à $\mathrm{Im}\,(\omega)$). En faisant les changements d'échelle adaptés sur t, x, et h, on peut se ramener, sans perte de généralité, à une équation du type

$$\partial_t h = \partial_x h - \partial_{xx} h + \beta \partial_{xxx} h - \partial_{xxxx} h \tag{6.9}$$

Il reste à ajouter un terme non-linéaire pour rendre compte du phénomène de mûrissement. Là encore nous nous limitons à des termes locaux, pour faciliter l'intégration numérique. Le terme de plus grand ordre est du type $\partial_x(h_x^2)$, mais il contribue à la migration et non à la croissance de la structure. On introduit donc le terme d'ordre suivant, $\partial_{xx}(h_x^2)$. Finalement, nous allons étudier la dynamique décrite par l'équation

$$\partial_t h = \partial_x h - \partial_{xx} h + \beta \partial_{xxx} h - \partial_{xxxx} h + \alpha \partial_{xx}(h_x^2) \tag{6.10}$$

Cette équation est en fait identique à celle décrivant la dynamique des rides éoliennes, introduite par *Valance et Rioual* [1999] à partir d'un modèle de saltation et par *Csahók et al.* [2000] à partir de considérations de symétrie.

6.2.1 Mûrissement 2D

Une solution analytique ?

On peut penser que le phénomène du mûrissement peut être appréhendé par une analyse du même type que celle que nous avons conduite au chapitre 5 sur l'interaction entre un mode longitudinal majoritaire et deux modes obliques. Ici, on suppose qu'à l'état initial,

un mode de nombre d'onde $2k$ (proche de $k_{\max}$) est présent majoritairement. Pour rendre compte du mûrissement, nous allons étudier son couplage non-linéaire avec le mode k, et leurs harmoniques $3k$ et $4k$. La valeur de k est choisie de telle sorte que ces harmoniques soient linéairement stables, c'est-à-dire qu'on a $0,75 < 2k < 1$, comme illustré sur la figure 6.11. La perturbation étudiée peut donc s'écrire

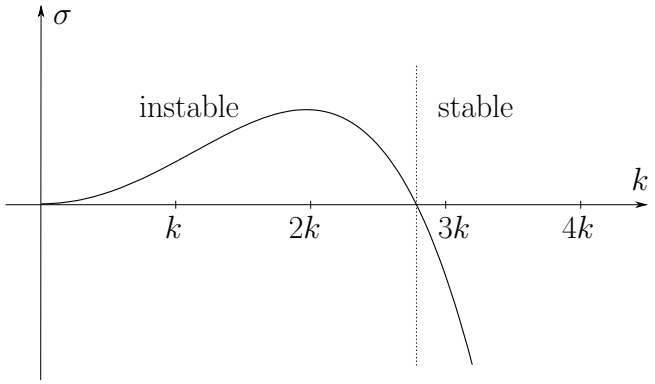


FIG. 6.11 – Choix de quatre modes pour l'étude analytique du mûrissement.

$$h(x,t) = \mathrm{A}_1(t)e^{ikx} + \mathrm{A}_2(t)e^{2ikx} + \mathrm{A}_3(t)e^{3ikx} + \mathrm{A}_4(t)e^{4ikx} + \text{c.c.} \tag{6.11}$$

où les A_i sont des amplitudes complexes.

En partant d'une perturbation aléatoire dans une boîte de taille $\mathrm{L} = \lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, on s'attend à observer, dans un premier temps, l'émergence d'une perturbation de longueur d'onde $\lambda/2$ (puisque c'est le mode linéairement le plus instable), puis, dans un deuxième temps, l'évolution vers une longueur d'onde λ. Considérons l'équation d'évolution (6.10) avec $\alpha = \beta = 1$, et en supprimant le terme de dérive en $\partial_x h$ (un changement de repère galiléen suffit à s'affranchir de ce terme). Dans ce cas les équations d'amplitude décrivant le système à quatre modes sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{dA}_1}{\mathrm{d}t} & = & \omega_1\mathrm{A}_1 - k^2\left[4k^2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1^* + 12k^2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2^* + 24k^2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3^*\right] \\ \dfrac{\mathrm{dA}_2}{\mathrm{d}t} & = & \omega_2\mathrm{A}_2 - 4k^2\left[-k^2\mathrm{A}_1^2 + 6k^2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1^* + 16k^2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_2^*\right] \\ \dfrac{\mathrm{dA}_3}{\mathrm{d}t} & = & \omega_3\mathrm{A}_3 - 9k^2\left[-4k^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + 8k^2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_1^*\right] \\ \dfrac{\mathrm{dA}_4}{\mathrm{d}t} & = & \omega_4\mathrm{A}_4 - 16k^2\left[-6k^2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 - 4k^2\mathrm{A}_2^2\right] \end{array}\right. \tag{6.12}$$

où $\omega_m = (mk)^2 - i(mk)^3 - (mk)^4$. Les modes A_3 et A_4 étant linéairement stables, il paraît raisonnable de les considérer comme *asservis* aux deux autres, c'est-à-dire qu'on néglige leur variation temporelle. Cette hypothèse permet d'écrire, en première approximation :

$$\begin{cases} A_3 &= -\dfrac{36k^4}{\omega_3} A_1 A_2 \\ A_4 &= -\dfrac{64k^4}{\omega_4} A_2^2 \end{cases} \tag{6.13}$$

Il suffit de réinjecter ces expressions dans le système (6.12), puis de séparer les parties réelles et imaginaires ($A_i = a_i e^{i\phi_i}$) afin d'obtenir les équations d'évolution des amplitudes réelles a_1 et a_2 et du déphasage $\Delta\phi = \phi_2 - 2\phi_1$ Il reste alors à chercher si ce système de dimension trois possède des états stationnaires stables, de la même façon qu'en 5.3.3. On s'aperçoit aisément qu'il existe un état stationnaire «pur» en A_2 (c'est-à-dire avec $A_1 = 0$) : son amplitude réelle vérifie

$$a_2^2 = -\frac{\mathrm{Re}\,(\omega_2)}{2^{12}\,k^8\ \mathrm{Re}\,(1/\omega_4)} \tag{6.14}$$

C'est la perturbation qui apparaît dans le régime linéaire. Toutefois, on s'attend à ce que cette perturbation ne soit pas stable vis-à-vis des fluctuations d'amplitude et de phase, et à ce que le système tende vers un état stable, où le mode A_1 serait majoritaire (c'est-à-dire une structure de longueur d'onde λ). C'est ce qu'on peut vérifier en calculant à l'aide de Maple® les valeurs propres de la matrice d'évolution (cf. 5.3.3). Or la résolution du système montre qu'il n'existe pas d'autre état stationnaire stable. Nous avons vérifié que même en ne négligeant aucun terme dans les équations (6.12), on obtient le même résultat.

Une décomposition en quatre modes, dont deux sont linéairement stables (A_4 étant même «très stable», puisque σ décroît comme $-k^4$), n'est donc pas suffisante pour décrire le doublement de période d'une perturbation. Les modes harmoniques jouent donc un rôle très important dans la dynamique du système. Le calcul analytique pour un système de plus de quatre modes devenant trop lourd, nous avons alors cherché à calculer numériquement l'évolution d'un système de n modes de nombres d'onde $q_m = mk$:

$$h(x,t) = \sum_{m=1}^{n} A_m(t) e^{imkx} + \text{c.c.} \tag{6.15}$$

On a posé $A_0 = 0$ et $A_{-m} = A_m$. L'équation d'évolution de chaque composante peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}A_m}{\mathrm{d}t} = \omega_m A_m + m^2 k^4 \sum_{p=-n}^{n} p(m-p) A_p A_{m-p} \tag{6.16}$$

On peut donc maintenant intégrer l'évolution des A_m. On part d'un état initial largement dominé par le mode $m = 2$: $a_{m\neq 2}(t = 0) = 10^{-5}a_2(t = 0)$. Les déphasages initiaux entre les différents modes sont choisis aléatoirement et on intègre les équations (6.16) par la méthode d'Euler. On observe que pour k quelconque, le système ne mûrit vers un état stationnaire dominé par le mode fondamental $m = 1$ que si $n > 10$, c'est-à-dire si l'on inclut dans la dynamique au moins huit modes harmoniques linéairement stables. La figure 6.12 montre l'évolution de l'amplitude réelle des quatre premiers modes dans ce cas. Il

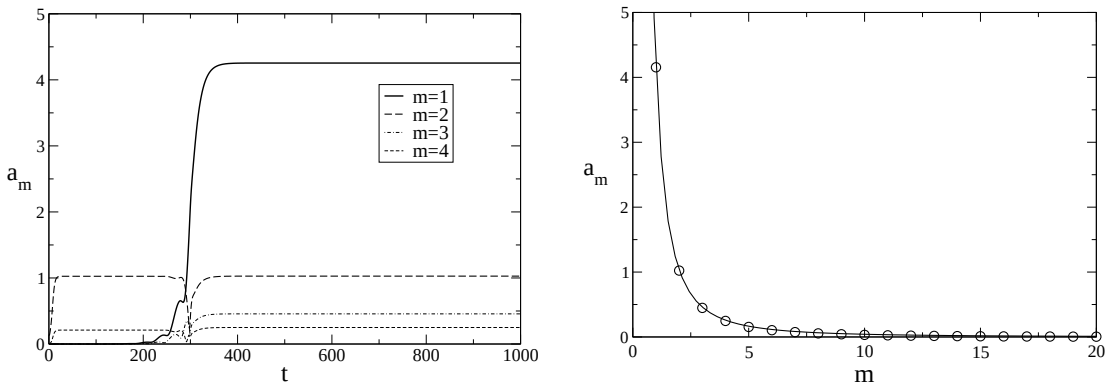


FIG. 6.12 – (a) Évolution temporelle des quatre premiers modes. (b) Amplitude des vingt premiers modes à l'état final. La courbe est ajustée par $a_m = \dfrac{a_1}{m^2}$.

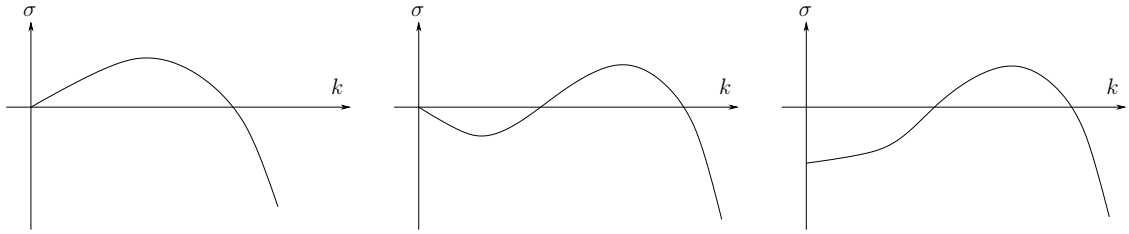
est donc impossible d'appréhender le doublement de période simplement par le couplage non-linéaire d'un petit nombre de modes. On peut vérifier que pour $n > 10$, l'influence du nombre de modes pris en compte sur la dynamique est négligeable. L'état final du système (Fig. 6.12) est caractérisé, comme montré par *Csahók et al.* [2000], par

$$\frac{a_m}{a_1} = \frac{1}{m^2} \tag{6.17}$$

6.2.2 Mûrissement dans d'autres types d'instabilité

Nous avons donc constaté qu'un modèle simple, construit à l'aide d'équations locales, permettait de reproduire le phénomène de mûrissement, même si celui-ci ne peut pas être appréhendé facilement de manière analytique. Toutefois, le modèle présenté reproduit un comportement linéaire spécifique (cf. Fig. 6.13), similaire à celui que nous avons identifié au chapitre 4. Or, il existe d'autres types d'instabilités linéaires, caractérisés par des relations

de dispersion différentes. Nous avons représenté sur la figure 6.13 trois comportements possibles.



(a) Type I $\sigma = k^2 - k^4$ (b) Type II $\sigma = -k^2 + k^4 - k^6$ (c) Type III $\sigma = -\alpha + k^2 - k^4$

FIG. 6.13 – Allure de la relation de dispersion pour trois types simples d'instabilités linéaires. Pour chaque type nous avons indiqué la forme générale du taux de croissance correspondant.

Le type I correspond à l'instabilité que nous avons étudié jusqu'à maintenant : la bande de modes instables contient le mode $k = 0$ qui est neutre. Dans le type II, ce mode $k = 0$ est toujours neutre mais est exclu de la zone d'instabilité. Celle-ci est bornée par deux valeurs finies de k. Dans le type III en revanche, les petits nombres d'onde ainsi que $k = 0$ sont stables : la symétrie par translation verticale est donc rompue. Comme nous le verrons au paragraphe suivant, certains modèles de rides donnent une relation de dispersion différente de celle que nous avons obtenue. Il est donc intéressant d'analyser si, dans ces autres cas, et toujours en ajoutant un terme non-linéaire local simple, un mûrissement a lieu.

Instabilité de type II

Nous avons déjà évoqué en 4.2.1 la théorie de la triple couche comme modèle hydrodynamique possible pour la formation des rides. Comme nous l'avons dit, le cas que nous avons étudié jusqu'à maintenant (écoulement cisaillé) correspond à une couche limite de hauteur constante. Cependant, si l'on tient compte de la déformation de la couche limite, tout en se plaçant dans l'approximation d'une profondeur d'eau très grande, on obtient finalement une relation de dispersion différente de celle que nous avons utilisée jusqu'à présent. En effet, le taux de croissance linéaire s'écrit dans ce cas, pour les grandes longueurs d'onde [*Lagrée*, 2003] :

$$\sigma = a\,k^{8/3} - b\,k^2 + \mathrm{o}(k^2) \tag{6.18}$$

Le terme en k^2 représente toujours l'effet de la pente, mais le terme d'origine hydrodynamique varie ici comme $k^{8/3}$ et non comme $k^{4/3}$ comme nous l'avons trouvé au chapitre

4. Pour les grands nombres d'onde, c'est toujours l'effet de pente qui domine et σ décroît comme k^2. Cette instabilité correspond au type II défini plus haut, comme on peut le constater sur le diagramme de stabilité (Fig. 6.14). Quelle est l'évolution non-linéaire d'un

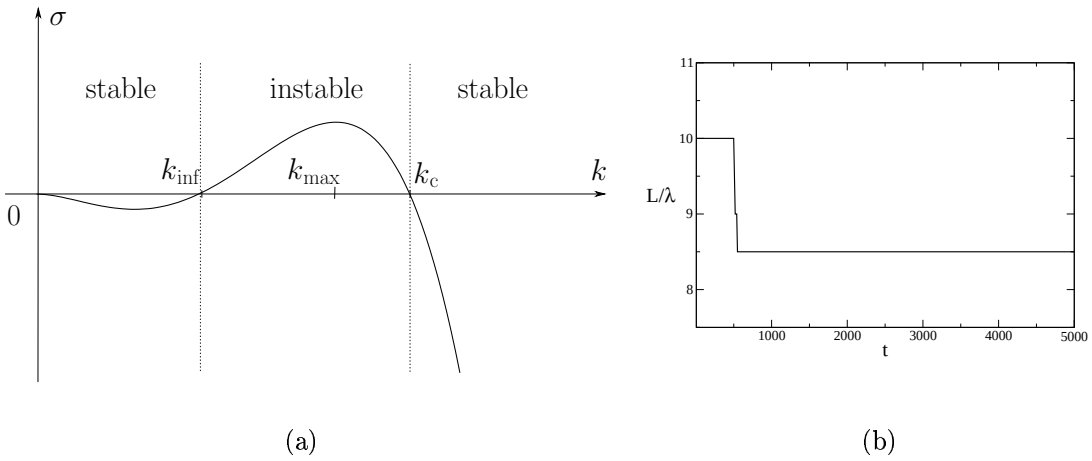


FIG. 6.14 – (a) Allure de la relation de dispersion dans le cas «Hilbert» de la théorie de la triple couche ; (b) Évolution du nombre de bosses dans un domaine de largeur $\mathrm{L} = 20\lambda_{\rm c}$, pour $\varepsilon = 0{,}1$, $\delta = 0{,}5$ et $\gamma = \delta - \varepsilon = 0{,}4$.

tel système ? Y-a-t-il mûrissement, et si oui, quel nombre d'onde final atteint-on ? Pour reproduire numériquement ce type d'instabilité, nous prendrons la relation de dispersion du type II, donnée précédemment :

$$\sigma(k) = -\varepsilon k^2 + \delta k^4 - \gamma k^6 \tag{6.19}$$

Pour simplifier la résolution, nous n'avons également conservé qu'un seul terme linéaire pour la dérive, en $\partial_x h$. L'équation d'évolution devient donc

$$\partial_t h = \partial_x h + \varepsilon \partial_{xx} h + \delta \partial_{xxxx} h + \gamma \partial_{6x} h + \partial_{xx}(h_x^2) \tag{6.20}$$

On effectue alors directement l'intégration numérique de cette équation pour différentes valeurs de ε, δ et γ (de façon à ce que la région instable soit assez large pour espérer a priori un mûrissement). La simulation est réalisée en partant d'une perturbation de longueur d'onde $\lambda_{\rm c}$, dans un domaine de largeur $\mathrm{L} = 10\lambda_{\rm c}$. On a représenté sur la figure 6.14 le diagramme de stabilité et l'évolution de la longueur d'onde moyenne des rides.
On constate ainsi que la longueur d'onde augmente au cours du temps jusqu'à atteindre approximativement la valeur $\lambda_{\rm max}$: ceci est le résultat de l'instabilité linéaire. Cependant, la longueur d'onde reste ensuite constante sur des temps très longs. Ce type d'instabilité linéaire, couplé à un terme non-linéaire simple, ne semble donc pas produire de mûrissement,

alors que les simulations de *Lagrée* [2003], effectuées sur le modèle complet (hydrodynamique et transport non-linéaire) montrent une augmentation de la longueur d'onde jusqu'à une valeur limite. Il faut toutefois souligner que l'équation à l'ordre linéaire n'est pas identique à l'équation effectivement donnée par l'étude hydrodynamique (la non-localité a été supprimée, et le taux de croissance σ décroît comme k^6, c'est-à-dire beaucoup plus rapidement qu'en réalité. Or nous avons vu précédemment que les harmoniques de grand nombre d'onde avaient un rôle non négligeable dans la dynamique non-linéaire). D'autre part, l'ajout d'un terme non-linéaire d'ordre supérieur est peut-être nécessaire à l'observation du mûrissement dans ce cas.

Instabilité de type III

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la bande instable est bornée, mais où le mode $k = 0$ n'est pas neutre. Le diagramme de stabilité présente alors l'aspect suivant (cf. Fig. 6.15). On peut retrouver un diagramme similaire avec l'équation de Swift-Hohenberg. Nous

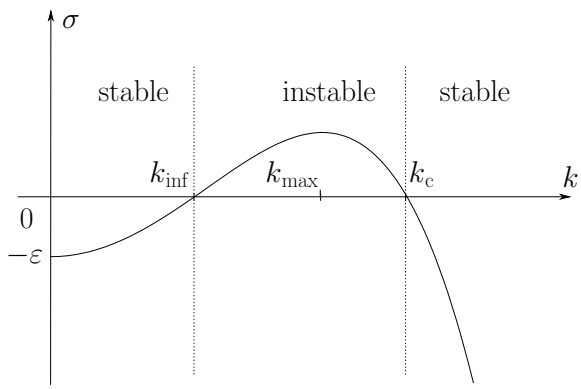


FIG. 6.15 – Relation de dispersion pour une instabilité de type III.

prendrons comme équation-type

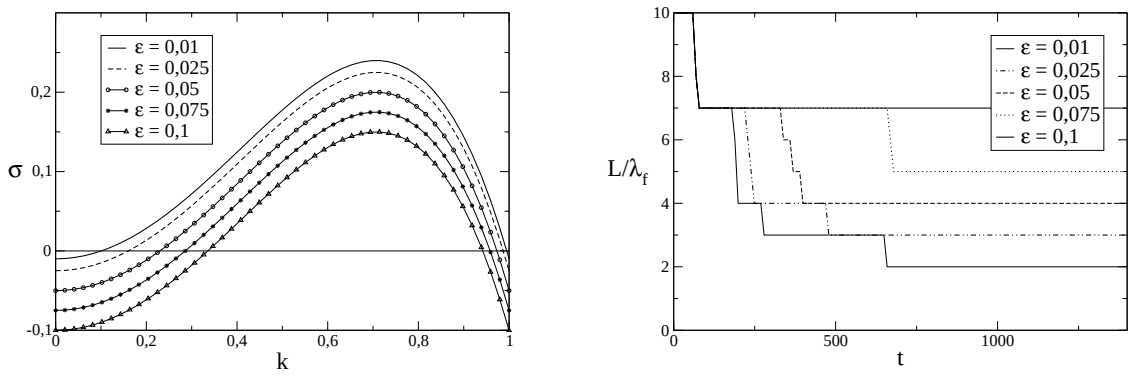
$$\sigma = -\varepsilon + k^2 - k^4 \tag{6.21}$$

ce qui correspond à une équation d'évolution du type

$$\partial_t h = -\varepsilon h - \partial_{xx} h - \partial_{xxxx} h + \partial_{xx}(h_x^2) + \partial_x h \tag{6.22}$$

Il faut noter que l'introduction du terme négatif proportionnel à h revient à rompre la symétrie de translation suivant l'axe vertical. Cette équation ne peut donc pas s'appliquer directement au cas des rides. Comme dans la partie précédente, nous avons intégré numériquement l'équation (6.22) pour différentes valeurs de ε. On peut constater sur la figure 6.16

que le mode le plus instable $k_{\max} = 0{,}7$ ne change pas tandis que la fréquence de coupure reste proche de $k_c \simeq 1$. En revanche, la bande d'instabilité est bornée à gauche par le mode $k_{\inf}(\varepsilon)$. Pour le calcul, nous avons fait évolué une perturbation initiale de longueur d'onde λ_c dans un domaine de longueur $L = 10\lambda_c$. La figure 6.16(b) montre l'évolution au cours du temps du nombre des bosses présentes dans la boîte, pour les différentes valeurs de ε. Le mûrissement est donc bien possible dans le cas d'une instabilité de ce type. Toutefois,



(a) (b)

FIG. 6.16 – (a) Relation de dispersion pour une instabilité de type 2 en fonction de ε ; (b) Évolution du nombre de bosses dans une boîte de longueur $L = 10\lambda_c$.

on pourrait s'attendre à ce qu'il ait lieu jusqu'à ce que le nombre d'onde atteigne la valeur limite de $k_{\inf}$: ce n'est pas le cas, comme l'illustre la figure 6.17. On peut supposer que, comme nous l'avons déjà observé précédemment, les modes de petit nombre d'onde, même s'ils sont linéairement stables, interviennent dans la dynamique non-linéaire. Le mûrissement ne serait alors possible que si leur taux de croissance n'est pas trop élevé (en valeur absolue). Pour pouvoir comparer avec le type d'instabilité précédent, nous avons reproduit les mêmes calculs en prenant comme taux de croissance linéaire

$$\sigma = -\varepsilon + \delta k^4 - (\delta - \varepsilon)k^6 \tag{6.23}$$

On constate alors que, comme précédemment, la longueur d'onde augmente jusqu'à atteindre $\lambda_{\max}$, mais pas au-delà : on peut donc estimer que c'est bien la pente trop importante (en valeur absolue) du taux de croissance qui est responsable de l'absence de mûrissement, ce qui confirme l'importance des modes linéairement stables dans la dynamique aux temps longs du système.

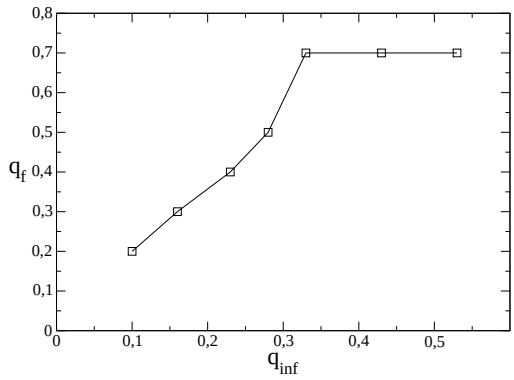


FIG. 6.17 – Nombre d'onde atteint à l'état final en fonction du nombre d'onde de coupure.

6.3 Dynamique à trois dimensions

Nous avons vu au chapitre 5 que même dans le cadre d'un modèle très simplifié, on peut prédire l'apparition possible des rides tridimensionnelles, et que certaines structures stationnaires étaient stables – du moins si on se restreignait à un nombre limité de modes. Cette restriction revient d'une part à empêcher le mûrissement, et d'autre part à négliger l'intervention des modes linéairement stables. Or nous avons montré ci-dessus que cette dernière hypothèse n'est pas forcément justifiée. Comment le système complet va-t-il se comporter ? Des états tridimensionnels stables peuvent-ils réellement être atteints, ou sont-ils instables vis-à-vis du mûrissement ?

6.3.1 Modèle simplifié

L'idéal pour répondre à cette question serait bien sûr de réaliser une étude numérique complète, similaire à celle du chapitre 6, en trois dimensions. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est très coûteuse en temps de calcul, puisqu'à chaque itération il faut successivement passer dans l'espace de Fourier puis revenir à l'espace réel. Pour résoudre le problème du temps de calcul, nous avons donc là aussi tenté de trouver une équation modèle plus simple.

Comme dans la partie précédente, on partira d'une équation aux dérivées partielles (donc locale) linéaire pour reproduire le diagramme de stabilité obtenu au chapitre 5. En faisant les changements de variables adéquats, on peut se ramener sans perte de généralité à l'équation suivante :

$$\partial_t h = -\partial_{xx} h - \alpha \partial_{xxxx} h + \beta \partial_{xxx} h + \partial_{yy} h \tag{6.24}$$

Le diagramme de stabilité associé à cette équation linéaire est représenté sur la figure 6.18 : on constate qu'il est bien similaire à celui du modèle «réel». Il reste ensuite à choisir le terme

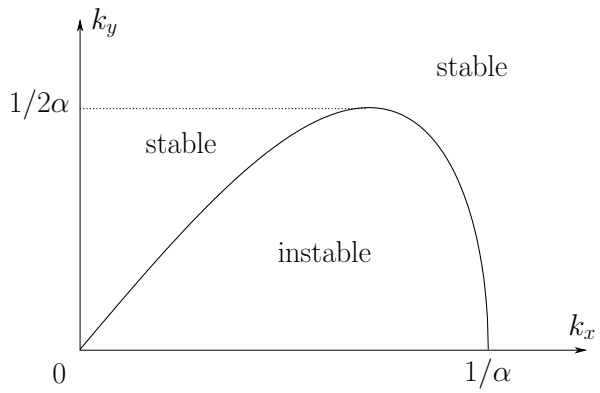


FIG. 6.18 – Diagramme de stabilité associé à l'équation (6.24).

non-linéaire adéquat. On a vu dans la partie précédente qu'un terme de la forme $\partial_{xx}(h_x^2)$ suffisait à générer le phénomène du mûrissement. Essayons dans un premier temps une généralisation simple de ce terme, sous la forme $\partial_{xx}(h_x^2 + h_y^2)$. Nous avons donc implementé la résolution numérique de l'équation suivante :

$$\partial_t h = -\partial_{xx} h - \partial_{xxxx} h + \partial_{xxx} h + \partial_{yy} h + \partial_{xx}(h_x^2 + h_y^2) \tag{6.25}$$

dans un domaine avec conditions périodiques dans les directions x et y. Initialement, le système est décrit par

$$h(x, y) = a_0 \cos(k_{\max} x) + \frac{a_0}{10} \text{alea}(x, y) \tag{6.26}$$

La fonction alea est un bruit blanc de valeur moyenne nulle. On peut ainsi initier plus facilement des perturbations transversales à l'écoulement. L'évolution typique d'un tel système est représentée sur la figure 6.19.

Il existe donc bien un phénomène de mûrissement (globalement, la longueur d'onde augmente) à trois dimensions, mais le processus est beaucoup plus complexe qu'une simple coalescence comme à deux dimensions. En effet, pour augmenter sa longueur d'onde longitudinale, le système passe par des «états de transition» où des modes de déformation transverses sont sollicités. Pour avoir une idée de la «tridimensionnalité» de la structure, nous avons tracé en fonction du temps le nombre moyen de bosses. Pour calculer ce paramètre, on découpe le domaine en «tranches» longitudinales, on détermine comme en 2D le nombre de bosses avant de moyenner sur toute la largeur. Une valeur entière de ce paramètre indique donc un motif unidimensionnel (des rides à crête sinueuse régulières sont alors considérées comme unidimensionnelles).

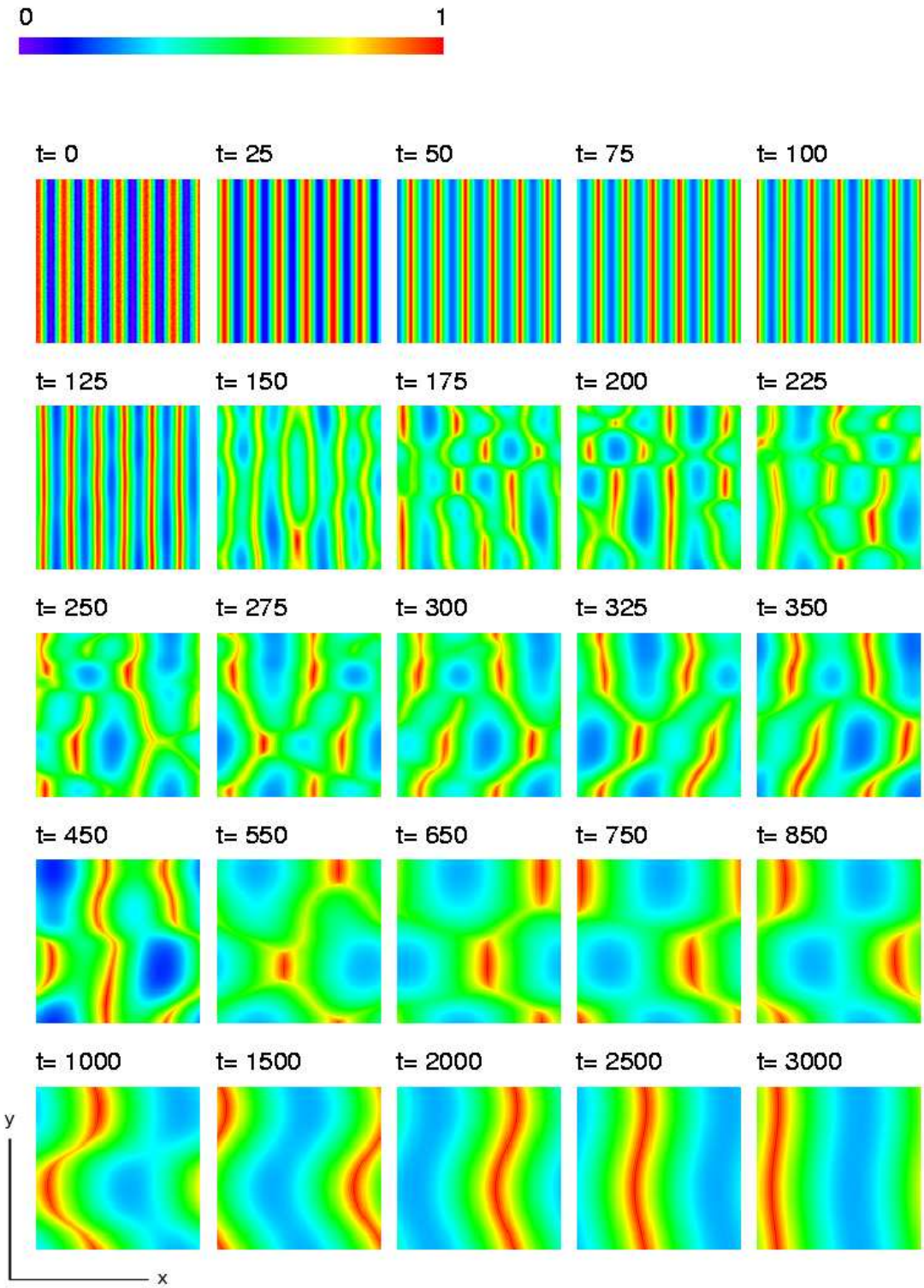


FIG. 6.19 – Évolution temporelle d'un système décrit par (6.25). La taille de la boîte est $\mathrm{L} = 6\lambda_{\max} \times \ell = 15\lambda_{\mathrm{c,y}}$. Initialement, $k_x = k_{\max}$.

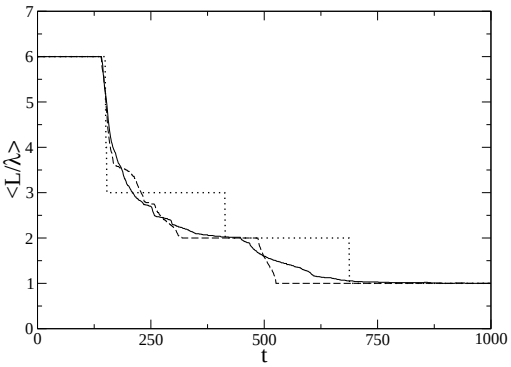


FIG. 6.20 – Évolution du nombre de bosses dans un système décrit par (6.25), pour une boîte de longueur $L = 6\lambda_{max}$ et de largeur $\ell = 2{,}5\lambda_{c,y}$ ($\cdots$), $\ell = 7{,}5\lambda_{c,y}$ (- - -), $\ell = 20\lambda_{c,y}$ (——). Initialement, $k_x = k_{max}$.

Quand le domaine n'est pas assez large pour laisser des modes instables transverses apparaître, l'évolution se fait de la même façon qu'en deux dimensions : le nombre moyen de bosses reste entier, et évolue par paliers successifs, correspondant à l'élimination d'une ride. En revanche, quand la largeur du système augmente, les paliers disparaissent, et le système reste tridimensionnel pendant toute la durée du mûrissement, jusqu'à ce qu'il atteigne un état pseudo-stationnaire à une ride.

On peut donc constater que des motifs tridimensionnels peuvent apparaître et se maintenir sur des temps relativement longs. Toutefois, le mûrissement finit toujours par les détruire et l'état final est systématiquement bidimensionnel. On obtient finalement des rides sinueuses qui se redressent sur des temps très longs. Cette transition correspond relativement bien à celle décrite par exemple par *Robert et Uhlman* [2001] entre les rides, de faible amplitude et bidimensionnelles, et les dunes, également bidimensionnelles mais de plus grandes amplitude et longueur d'onde, cette transition se faisant *via* des rides «linguoides» tridimensionnelles.

Cette étude préliminaire sur la dynamique tridimensionnelle, modélisée à partir d'une équation locale obtenue en étendant de manière simple l'équation modèle présentée pour l'évolution en 2D, montre donc que le système tend à se tridimensionnaliser au cours du temps, même si l'état final reste bidimensionnel. Toutefois, le choix du terme non-linéaire peut modifier la dynamique du système. D'autres types de non-linéarité respectant les symétries du système doivent donc être testées. On peut également signaler que si l'on «force» la tridimensionnalité du système, en introduisant comme état initial une perturbation constituée d'un triplet de modes conjugués (comme pour l'analyse non-linéaire pré-

sentée en 5.3), cette tridimensionnalité persiste sur des temps longs avant que le système ne relaxe en mûrissant vers une ride unique transverse.

L'ensemble de ces observations nous conduit donc de nouveau à souligner l'importance de la non-linéarité dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Même si, à l'ordre linéaire, les modes transverses ne sont pas sollicités, le phénomène de mûrissement peut donc entraîner leur déstabilisation, et l'apparition, au moins transitoire, de structures tridimensionnelles.

Conclusion

« À trois ou quatre cents mètres de la Pyramide, je me suis baissé, j'ai pris une poignée de sable, je l'ai laissé couler silencieusement un peu plus loin et j'ai dit à voix basse : "Je suis en train de modifier le Sahara." »

Jorge Luis Borges, Atlas.

Au cours de cette étude, nous avons successivement abordé les aspects expérimentaux, théoriques et numériques de l'instabilité affectant l'interface entre un milieu granulaire et un fluide en écoulement continu. Ce travail s'inscrit dans la problématique du transport de sédiments par un fluide, et de la formation de nombreuses structures naturelles comme les rides, les dunes et les bancs de sable. Nous nous sommes plus spécifiquement concentrés sur les rides sous-marines (structures à petite échelle), tout en gardant à l'esprit que des mécanismes analogues régissent les dunes à grande échelle.

La partie expérimentale de la thèse a consisté à mettre au point un dispositif d'écoulement instrumenté pour observer la formation et l'évolution des rides sous cisaillement unidirectionnel. On peut souligner que le montage réalisé pourrait également servir à d'autres études que celles que nous avons menées, comme par exemple la dynamique de mini-barchanes, ou une observation plus ciblée du transport des grains par l'écoulement. À l'aide de ce canal, nous avons tout d'abord observé la formation des rides sur un lit de billes monodisperses. Dans la limite de la gamme de débits accessibles, nous n'avons observé aucune variation significative de la longueur d'onde initiale avec le débit. En revanche, l'augmentation de la taille des grains conduit à une augmentation de cette longueur d'onde. Nous nous sommes également intéressés à l'évolution des rides sur des temps plus longs. L'augmentation de la longueur d'onde (*mûrissement*), parallèlement à la croissance de l'amplitude, a été mise en évidence. Il est apparu que cette croissance dépendait de la taille des grains : linéaire pour les plus gros, elle est logarithmique pour les plus petits.

D'autre part, l'amplitude comme la longueur d'onde saturent pour les plus gros grains.

Ces études ont également permis d'observer, de manière qualitative, l'évolution des rides, initialement perpendiculaires à l'écoulement, vers des structures plus complexes et tridimensionnelles. La largeur limitée du canal ne nous a cependant pas permis d'identifier clairement quel était le motif final adopté. Enfin, nous avons présenté des résultats préliminaires concernant une instabilité secondaire, qui se superpose aux rides. Nous avons mis en évidence expérimentalement l'apparition sur la face amont des rides de sillons parallèles à l'écoulement. Bien que son mécanisme physique reste à préciser, ce phénomène pourrait constituer un élément précurseur dans le processus de tridimensionnalisation des rides. Il pourrait également être à l'origine de l'instabilité transformant une barre rectiligne en une série de barchanes.

Le prolongement naturel de cette étude devrait consister d'une part à exploiter plus avant les mesures de l'écoulement autour de structures bien définies que nous avons commencé à réaliser à l'aide de la P.I.V., et d'autre part à développer une technique de mesure du flux de grains en surface (les premiers essais effectués ont montré les limites de la technique P.I.V. pour observer ce phénomène : une approche de type suivi de particules pourrait s'avérer plus fructueuse), dans l'objectif de parvenir à un couplage entre le mouvement du fluide et celui des grains.

Dans un second temps, nous avons abordé l'aspect théorique du phénomène d'instabilité. À partir de l'analyse de stabilité linéaire classique à deux dimensions, nous avons introduit l'inertie des grains dans le modèle et montré que les prédictions analytiques (même si le calcul est relativement éloigné des conditions de l'expérience : nous modélisons un écoulement laminaire de profondeur infinie) étaient nettement améliorées. Cette modélisation donne le bon ordre de grandeur pour la longueur d'onde initiale ; de plus, comme nous l'avons montré expérimentalement, cette longueur prédite ne dépend pas du débit d'eau mais croît avec le diamètre des grains. Pour tenir compte des observations expérimentales, nous avons ensuite étendu l'analyse de stabilité à une configuration tridimensionnelle, en introduisant une généralisation de la loi de transport utilisée précédemment. Cette analyse a prouvé que le mode linéairement le plus instable correspondait bien à des rides perpendiculaires à l'écoulement – ce qui est conforme à l'expérience. Cependant, un autre résultat important est que des modes obliques (par rapport à l'écoulement) sont également instables, et qu'on peut s'attendre à ce qu'ils interviennent dans la dynamique non-linéaire des rides. Pour confirmer cette hypothèse, nous avons mené une étude faiblement non-linéaire en étudiant le couplage entre trois modes (rides transverses et rides obliques). Il a ainsi été montré que, avec les réserves imposées par les limites de validité du calcul, des motifs tridimensionnels stationnaires (c'est-à-dire se déplaçant avec le courant sans

modification ni d'amplitude ni de forme) et stables pouvaient être exhibés.

La question demeure néanmoins : peut-on prévoir quel motif sera atteint à l'état final ? Il paraît difficile de pouvoir y répondre à partir du seul calcul analytique, sans avoir recours à la simulation numérique. Dans une troisième partie, nous avons présenté une ébauche d'étude numérique du comportement non-linéaire des rides. Dans le même esprit que pour le couplage tridimensionnel de modes, nous avons tenté de modéliser le phénomène du mûrissement par un couplage entre un petit nombre de modes. Malheureusement, cette tentative n'a pas abouti, ce qui met en évidence l'importance dans la dynamique non-linéaire des modes linéairement stables, dont on aurait pu *a priori* négliger l'influence. Le mûrissement a donc été étudié à l'aide d'une simulation numérique complète en deux dimensions. En résolvant les équations données par le modèle théorique, on parvient effectivement à reproduire l'augmentation de la longueur d'onde au cours du temps, celle-ci étant compatible avec certaines des observations expérimentales. En vue d'améliorer ces simulations, et de les rendre plus proches des conditions expérimentales, deux obstacles se présentent. D'une part, la résolution des équations dans le cas turbulent (plus conforme à notre dispositif expérimental) est très coûteux en temps de calcul. D'autre part, il serait nécessaire de mieux modéliser le couplage entre l'écoulement et le flux des grains (et en particulier la rétroaction du second sur le premier), de façon à obtenir une meilleure description du transport.

Il serait également utile d'étendre le programme à un système tridimensionnel. En effet, les simulations numériques simplifiées que nous avons réalisées en trois dimensions tendent à montrer qu'un ensemble de rides transverses évolue naturellement vers des motifs tridimensionnels complexes au cours de son mûrissement, avant de redevenir bidimensionnel. Les structures tridimensionnelles observées dans l'expérience pourraient donc n'être que des états de transition vers un état final bidimensionnel. Malgré tout, cette étude prouve qu'il est nécessaire de considérer un système 3D si l'on souhaite appréhender correctement la dynamique des rides.

Annexe A

Expressions analytiques dans le cas bidimensionnel

A.1 Écoulement 2D

Pour résoudre les équations hydrodynamiques à deux dimensions, il est pratique d'adimensionner le problème, en choisissant k^{-1} comme unité de longueur et γ^{-1} comme unité de temps. Dans la suite, toutes les variables seront adimensionnées par ces grandeurs. Le champ de vitesses et de pression dans le fluide est décrit par :

$$(u, w, p) = (u_0, 0, p_0) + (u_1, w_1, p_1)\, e^{i(k_x x)+\omega t} \tag{A.1}$$

On pose les deux paramètres adimensionnés suivants :

$$\alpha = k\mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad \beta = k l_{\mathrm{v}} \quad \text{où} \quad l_{\mathrm{v}} = \sqrt{\nu/\gamma} \tag{A.2}$$

En ne retenant des équations de Navier-Stokes et d'incompressibilité que les termes linéaires, on obtient les équations couplées suivantes, pour les quantités perturbées u_1, w_1 et p_1 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} izu_1 + w_1 + ip_1 & = & \beta^2 \left({\partial_z}^2 u_1 - u_1 \right) \\ izw_1 + \partial_z p_1 & = & \beta^2 \left(\partial_z^2 w_1 - w_1 \right) \\ iu_1 + \partial_z w_1 & = & 0 \end{array} \right. \tag{A.3}$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont elles aussi linéarisées :

$$\begin{array}{l} u(z=0) = 0 = u_0(z=0) + u_1(z=0) = h_1 + u_1(z=0)\,, \\ u(z=\alpha) = 0 = u_0(z=0) + u_1(z=0) = u_1(z=0)\,. \end{array} \tag{A.4}$$

En procédant de la même façon, on obtient également les conditions aux limites pour la composante verticale w :

$$\begin{array}{lll} z=0: & u_1 = -h_1\,, & w_1 = 0\,; \\ z=\alpha: & u_1 = 0\,, & w_1 = 0\,. \end{array} \tag{A.5}$$

Il est alors pratique d'utiliser les équations sur la vorticité $\Omega_1 = \partial_x w_1 - \partial_z w_1$ et la fonction de courant ψ :

$$\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y^2} - \Omega_1 \right) = iz\Omega_1 \tag{A.6}$$

Après avoir effectué le changement de variable

$$\mathrm{Z} = e^{i\pi/6} \frac{z - i\beta^2}{\beta^{2/3}} \tag{A.7}$$

on peut exprimer la solution comme une combinaison linéaire des fonctions d'Airy :

$$\Omega_1(z) = c_1 \mathrm{A}i(\mathrm{Z}) + c_2 \mathrm{B}i(\mathrm{Z}) \tag{A.8}$$

La fonction de courant obéit à l'équation

$$\partial_z^2 \psi_1 - \psi_1 = -\Omega_1 \tag{A.9}$$

dont la solution s'écrit

$$\psi_1(z) = c_3 e^{-z} + c_4 e^{z} + \frac{e^{-z}}{2} \int_0^z \Omega_1(\xi) e^{\xi} \, \mathrm{d}\xi - \frac{e^{z}}{2} \int_0^z \Omega_1(\xi) e^{-\xi} \, \mathrm{d}\xi \tag{A.10}$$

Les constantes d'intégration, données par les conditions aux limites, s'écrivent

$$\begin{cases} c_1 &= h_1 \dfrac{\mathrm{B}^- - \mathrm{B}^+}{\mathrm{A}^-\mathrm{B}^+ - \mathrm{A}^+\mathrm{B}^-} \\ c_2 &= h_1 \dfrac{\mathrm{A}^+ - \mathrm{A}^-}{\mathrm{A}^-\mathrm{B}^+ - \mathrm{A}^+\mathrm{B}^-} \\ c_3 &= -\dfrac{h_1}{2} \\ c_4 &= \dfrac{h_1}{2} \end{cases} \tag{A.11}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\pm} &= \int_0^{\alpha} \mathrm{A}i(\mathrm{Z}) e^{\pm z} \\ \mathrm{B}^{\pm} &= \int_0^{\alpha} \mathrm{B}i(\mathrm{Z}) e^{\pm z} \end{aligned} \tag{A.12}$$

On peut maintenant se placer dans la limite $\alpha = k\mathrm{H} \gg 1$, simplifier l'expression de ψ_1 ci-dessus et finalement déduire le cisaillement au niveau du lit de sable :

$$\frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{\eta\gamma} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{z=0} = \frac{h_1(-ie^{i\pi/6}\beta^{4/3})}{\mathrm{A}_{\infty}^{-}} \tag{A.13}$$

A.2 Analyse de stabilité

En utilisant les développements limités de la fonction d'Airy [*Abramovitz et Stegun*, 1965] pour $\beta \ll 1$ et $\beta \gg 1$, on obtient les expressions asymptotiques suivantes :

$$\frac{\sigma_{\mathrm{b}}}{\eta\gamma} = \begin{cases} \dfrac{h_1}{l_{\mathrm{v}}}\left[1{,}06e^{i\pi/6}\beta^{1/3} + 0{,}83\beta + 0{,}43e^{i\pi/3}\beta^{5/3} + \mathrm{O}\left(\beta^{7/3}\right)\right] & \text{pour } \beta \ll 1 \\ \dfrac{h_1}{l_{\mathrm{v}}}\left[2\beta + \dfrac{i}{2\beta} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\beta^3}\right)\right] & \text{pour } \beta \ll 1 \end{cases} \tag{A.14}$$

La composante d'ordre 1 du flux de grains s'écrit

$$q_{1_{\mathrm{eq}}} = m\, q_{\mathrm{b}}\Theta_{\mathrm{c}_0}^m\, \chi^{m-1}\left[\frac{\Theta_1}{\Theta_{\mathrm{c}_0}} - \frac{\partial_x h_1}{\mu_{\mathrm{s}}}\right] \tag{A.15}$$

Finalement, le taux de croissance complexe peut être exprimé comme

$$\omega = m\, q_{\mathrm{b}}\Theta_{\mathrm{c}_0}^m\, \chi^{m-1}\left[-i\,\frac{\Theta_1}{\Theta_{\mathrm{c}_0}}\frac{k}{h_1} - \frac{k^2}{\mu_{\mathrm{s}}}\right] \times \frac{1 - ikl_{\mathrm{eq}}}{1 + k^2 l_{\mathrm{eq}}^2} \tag{A.16}$$

Détaillons maintenant les différents cas, en posant $\omega_0 = m\,\dfrac{q_{\mathrm{b}}}{d^2}\,\Theta_{\mathrm{c}_0}^m$:

- Sans effet de pente ni inertie (c'est-à-dire en posant $\mu_{\mathrm{s}} = \infty$ et $l_{\mathrm{eq}} = 0$).
  Pour $\beta \ll 1$:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\omega) &= \dfrac{d^2}{l_{\mathrm{v}}^2}\,\omega_0\chi^{m-1}(1+\chi)\left[0{,}53\beta^{4/3} + \mathrm{O}\left(\beta^{8/3}\right)\right] \\ \mathrm{Im}\,(\omega) &= -\dfrac{d^2}{l_{\mathrm{v}}^2}\,\omega_0\chi^{m-1}(1+\chi)\left[0{,}92\beta^{4/3} + \mathrm{O}\left(\beta^2\right)\right] \end{cases} \tag{A.17}$$

  Pour $\beta \gg 1$:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\omega) &= 0{,}5\dfrac{d^2}{l_{\mathrm{v}}^2}\,\omega_0\chi^{m-1}(1+\chi) \\ \mathrm{Im}\,(\omega) &= -2\dfrac{d^2}{l_{\mathrm{v}}^2}\,\omega_0\chi^{m-1}(1+\chi)\beta^2 \end{cases} \tag{A.18}$$

- Avec effet de pente mais sans inertie (c'est-à-dire en posant $\mu_{\mathrm{s}} \neq \infty$ et $l_{\mathrm{eq}} = 0$).
  Pour $\beta \ll 1$:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\omega) &= \dfrac{d^2}{l_{\mathrm{v}}^2}\,\omega_0\chi^{m-1}\left[0{,}53(1+\chi)\beta^{4/3} - \dfrac{\beta^2}{\mu_{\mathrm{s}}} + \mathrm{O}\left(\beta^{8/3}\right)\right] \\ \mathrm{Im}\,(\omega) &= -\dfrac{d^2}{l_{\mathrm{v}}^2}\,\omega_0\chi^{m-1}(1+\chi)\left[0{,}92\beta^{4/3} + \mathrm{O}\left(\beta^2\right)\right] \end{cases} \tag{A.19}$$

- Sans effet de pente mais avec inertie (c'est-à-dire en posant $\mu_s = \infty$ et $l_{eq} \neq 0$). Pour $\beta \ll 1$:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\omega) &= \dfrac{d^2}{l_v^2}\,\omega_0 \chi^{m-1}(1+\chi)\left[0{,}53\beta^{4/3}\left(1-\sqrt{3}\,\dfrac{l_{eq}}{l_v}\,\beta\right)\right] \\ \mathrm{Im}\,(\omega) &= -\dfrac{d^2}{l_v^2}\,\omega_0 \chi^{m-1}(1+\chi)\left[0{,}92\beta^{4/3}+\mathrm{O}\left(\beta^2\right)\right] \end{cases} \tag{A.20}$$

A.3 Longueur d'onde la plus instable

Dans le cas général (en prenant en compte à la fois l'effet de la pente et l'effet de l'inertie des grains), la longueur d'onde la plus instable s'exprime comme

$$\lambda_{max} = 1{,}75\pi\sqrt{3}\,l_{eq}\left[\left(1+\sqrt{1-r}\right)^{1/3}+\left(1-\sqrt{1-r}\right)^{1/3}\right]^3 \tag{A.21}$$

où le paramètre r est défini par

$$r = \frac{8}{147}\frac{l_v^2}{(0{,}53\mu_s)^3\,\left(1+\chi\right)^3 l_{eq}^2} \tag{A.22}$$

Annexe B

Expressions analytiques dans le cas tridimensionnel

B.1 Constantes d'intégration pour le champ de vitesses

Les conditions aux limites (5.23) permettent d'identifier les constantes d'intégration associées à la solution (5.29). On trouve, dans le cas général (profondeur quelconque) :

$$\begin{cases} a_1 &= \dfrac{ik_x\gamma h_1}{2k} \\ b_1 &= -\dfrac{ik_x\gamma h_1}{2k} \\ a_2 &= 2ka_1\dfrac{\mathrm{B}^- - \mathrm{B}^+}{\mathrm{A}^-\mathrm{B}^+ - \mathrm{A}^+\mathrm{B}^-} \\ b_2 &= 2ka_1\dfrac{\mathrm{A}^+ - \mathrm{A}^-}{\mathrm{A}^-\mathrm{B}^+ - \mathrm{A}^+\mathrm{B}^-} \end{cases} \tag{B.1}$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^\pm &= \int_0^{\mathrm{H}} \mathrm{A}i \circ \xi(z) e^{\pm kz} \\ \mathrm{B}^\pm &= \int_0^{\mathrm{H}} \mathrm{B}i \circ \xi(z) e^{\pm kz} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Pour exprimer les constantes d'intégration intervenant dans les expressions des vitesses u_1 et v_1 (5.31), il est pratique de définir

$$\Phi_1(z) = \frac{\pi\gamma k_y}{\nu\xi'(z)}\left[\mathrm{B}i \circ \xi(z)\int_0^z w_1(t)\mathrm{A}i \circ \xi(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{A}i \circ \xi(z)\int_0^z w_1(t)\mathrm{B}i \circ \xi(t)\,\mathrm{d}t\right] \tag{B.3}$$

ainsi que

$$\Delta = \mathrm{A}i \circ \xi(0)\mathrm{B}i \circ \xi(\mathrm{H}) - \mathrm{A}i \circ \xi(\mathrm{H})\mathrm{B}i \circ \xi(0) \tag{B.4}$$

Les expressions des constantes a_3 et b_3 sont alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_3 & = & \dfrac{\gamma k_y h_1 \,\mathrm{B}i \circ \xi(\mathrm{H}) + \Phi(\mathrm{H})\,\mathrm{B}i \circ \xi(0)}{\Delta} \\ b_3 & = & \dfrac{-\gamma k_y h_1 \,\mathrm{A}i \circ \xi(\mathrm{H}) - \Phi(\mathrm{H})\,\mathrm{A}i \circ \xi(0)}{\Delta} \end{array}\right. \tag{B.5}$$

Expressions des constantes en profondeur infinie

Dans le cas où $\mathrm{H} \to \infty$, les expressions des constantes sont considérablement simplifiées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_2 & = & -2ka_1\,\mathrm{A}_\infty^- \\ b_2 & = & 0 \\ a_3 & = & \displaystyle\lim_{\mathrm{H}\to+\infty} \frac{\gamma k_y h_1 + \Phi(\mathrm{H})\,\mathrm{B}i \circ \xi(0)/\mathrm{B}i \circ \xi(\mathrm{H})}{\mathrm{A}i \circ \xi(0)} \\ b_3 & = & \displaystyle\lim_{\mathrm{H}\to+\infty} \frac{-\Phi(\mathrm{H})\,\mathrm{A}i \circ \xi(0)}{\mathrm{B}i \circ \xi(\mathrm{H})\,\mathrm{A}i \circ \xi(0)} \end{array}\right. \tag{B.6}$$

Les expressions de a_3 et b_3 peuvent être encore simplifiées en utilisant les développements limités ou asymptotiques des fonctions d'Airy, si l'on se trouve dans les cas limites (petites ou grandes longueurs d'onde).

B.2 Expressions détaillées du cisaillement en surface

Dans la limite des grandes longueurs d'onde ($kl_\mathrm{v} \ll 1$), on obtient le développement suivant pour les composantes x et y du cisaillement au niveau du lit de grains (on rappelle que $\tau_{b_0} = \eta\gamma$) :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{b_{1x}}}{h_1\tau_{b_0}} &= e^{i\pi/6}\, l_\mathrm{v}^{-2/3}\, k_x^{1/3}\, \frac{1.07k_x^2 - 0.73k_y^2}{k_x^2 + k_y^2} + 0.83\,\frac{k_x^2}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \\ &\quad + e^{-i\pi/6}\, l_\mathrm{v}^{2/3}\, k_x^{-1/3}\,(0.43k_x^2 - 0.53k_y^2) + \mathrm{O}((kl_\mathrm{v})^{7/3}) \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{b_{1y}}}{h_1\tau_{b_0}} &= -0.34\, e^{i\pi/6}\, l_\mathrm{v}^{-2/3}\, \frac{k_x^{4/3}\, k_y}{k_x^2 + k_y^2} - 0.83\,\frac{k_x\, k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \\ &\quad + 0.96\, e^{-i\pi/6}\, l_\mathrm{v}^{2/3}\, k_x^{2/3}\, k_y + \mathrm{O}((kl_\mathrm{v})^{7/3}) \end{aligned} \tag{B.8}$$

Nous avons également calculé le cisaillement dans la limite des grands nombres d'onde

$(kl_{\mathrm{v}} \gg 1)$:

$$\frac{\tau_{b_{1x}}}{h_1\tau_{b_0}} = \frac{1}{ik^2}\left[\frac{l_{\mathrm{v}}^{-2}}{4k^2}k_xk_y^2 + ik(2k_x^2 - k_y^2)\right] + \frac{\delta^{-3}}{ik^2}\left[\frac{i}{2}kk_x^2 - \frac{i}{4}kk_y^2 - \frac{l_{\mathrm{v}}^{-2}}{4k^2}k_xk_y^2\right] \tag{B.9}$$

$$\frac{\tau_{b_{1x}}}{h_1\tau_{b_0}} = \frac{i}{k^2}\left[\frac{l_{\mathrm{v}}^{-2}}{4k^2}k_x^2k_y + ikk_xk_y\right] - \frac{\delta^{-3}}{ik^2}\left[\frac{i}{4}kk_xk_y - \frac{l_{\mathrm{v}}^{-2}}{4k^2}k_x^2k_y\right] \tag{B.10}$$

B.3 Analyse non-linéaire : recherche des états stationnaires

Les états stationnaires dans l'espace des états de dimension trois obéissent au système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} & = & \mathrm{Re}\,(\omega_1)\,a_1 + \kappa_1(\Delta\phi)\,{a_2}^2 & = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} & = & \mathrm{Re}\,(\omega_2)\,a_2 + \kappa_2(\Delta\phi)\,a_1a_2 & = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(\Delta\phi)}{\mathrm{d}t} & = & \mathrm{Im}\,(2\omega_2 - \omega_1) - \kappa_3(a_1,a_2)\sin(\Delta\phi) + \kappa_4(a_1,a_2)\,\cos(\Delta\phi) & = 0 \end{array}\right. \tag{B.11}$$

dont les coefficients κ_i sont donnés par (5.48). Après résolution, on peut se ramener à une équation du second degré en $\mathrm{T} = \mathrm{Arctan}\,\phi$:

$$\mathrm{AT}^2 + \mathrm{BT} + \mathrm{C} = 0 \tag{B.12}$$

dont les coefficients sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{A} & = & \mathrm{Re}\,\omega_1\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_2 - \mathrm{Im}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_2\,\mathrm{Im}\,(2\omega_2 - \omega_1) - 2\,\mathrm{Re}\,\omega_2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_1 \\ \mathrm{B} & = & \mathrm{Im}\,(2\omega_2 - \omega_1)\,(\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_2 - \mathrm{Re}\,\mathrm{K}_2\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_1) \\ & & +\,\mathrm{Re}\,\omega_1\,(\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_2 + \mathrm{Im}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_2) \\ & & +2\,\mathrm{Re}\,\omega_2\,(\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_2 + \mathrm{Im}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_2) \\ \mathrm{C} & = & \mathrm{Im}\,(2\omega_2 - \omega_1)\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_2 + \mathrm{Re}\,\omega_1\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_2 - 2\,\mathrm{Re}\,\omega_2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{Im}\,\mathrm{K}_2 \end{array}\right. \tag{B.13}$$

Table des notations

Analyses de stabilité

ρ	masse volumique du fluide
ρ_{g}	masse volumique des grains
Θ	nombre de Shields
Θ_0	nombre de Shields pour l'écoulement principal
Θ_{c}	nombre de Shields critique
Θ_{c_0}	nombre de Shields critique pour une surface plane
q_{eq}, $\overrightarrow{q}_{\mathrm{eq}}$	flux de grains à saturation
q, $\overrightarrow{q}$	flux de grains réel
q_{b}	flux de référence
H	épaisseur de la couche de fluide
g	accélération de la pesanteur
d	diamètre des grains
ν, η	viscosités cinématique et dynamique du fluide
h	hauteur de la surface granulaire
Re_{p}	nombre de Reynolds particulaire
$\mu_{\mathrm{s}}, \phi_{\mathrm{s}}$	coefficient de friction et angle de stabilité du matériau granulaire
l_{v}	longueur visqueuse
ω	taux de croissance complexe
σ	partie réelle du taux de croissance
$\overrightarrow{k}, k$	vecteur ou nombre d'onde d'une perturbation

Liste des publications

Publications dans des journaux à comité de lecture

1. V. Langlois & A. Valance, Three-dimensionality of sand ripples under a laminar shear flow, *J. Geophys. Res.*, **110**, F04S09 (2005).
2. V. Langlois & A. Valance, Two-dimensional sand ripples under continuous laminar shear flow, *Phys. Rev. Lett*, **94**, 248001 (2005).
3. A. Valance & V. Langlois, Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow, *Eur. Phys. J. B*, **43**, 283-294 (2005).

Publications dans des actes de conférences

1. V. Langlois & A. Valance, Three-dimensional sand patterns under shear flow, *Powders and Grains 2005*, Stuttgart (Allemagne).
2. V. Langlois & A. Valance, 2D and 3D stability analysis of sand ripple formation, *MARID 2004*, Twente (Pays-Bas).

Bibliographie

Abramovitz M. et Stegun I. (1965), *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York.

Airy G. (1838), On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **VI**, 379–402.

Andersen K. (2001), A particle model of rolling grain ripples, *Phys. Fluids*, **13**, 58–64.

Anderson R. (1987), A theoretical model for aeolian impact ripples, *Sedimentology*, **34**, 943–956.

Andreotti B. (2004), A two-species model of aeolian sand transport, *J. Fluid Mech.*, **510**, 47–70.

Andreotti B., Claudin P., et Douady S. (2002a), Selection of dune shapes and velocities Part 1 : Dynamics of sand, wind and dunes, *Eur. Phys. J. B*, **28**, 341–352.

Andreotti B., Claudin P., et Douady S. (2002b), Selection of dune shapes and velocities Part 2 : A two-dimensional modelling, *Eur. Phys. J. B*, **28**, 341–352.

Andreotti B., Claudin P., et Pouliquen O. (2005), Aeolian sand ripples : experimental evidence of coarsening and saturation, *cond-mat/0506758*.

Ayrton H. (1910), The origin and growth of ripple-mark, *Proc. Roy. Soc. A*, **84**, 285–310.

Baas J. (1999), An empirical model for the development and equilibrium morphology of current ripples in fine sand, *Sedimentology*, **46**, 123–138.

Bagnold R. (1941), *The physics of blown sand and desert dunes*, Chapman and Hall, Londres.

Bagnold R. (1946), Motion of waves in shallow water. Interaction between waves and sand bottom, *Proc. Roy. Soc. A*, **187**, 1–15.

Bagnold R. (1956), The flow of cohesionless grains in fluids, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, **249**, 235–297.

Bagnold R. (1966), An approach of sediment transport model from general physics, *US Geol. Survey Prof. Paper*, **422**.

BASTOS A., COLLINS M., et KENYON N. (2003), Morphology and internal structure of sand shoals and sandbanks off the Dorset coast, English Channel, *Sedimentology*, **50**, 1105–1122.

BEJCZY I. (2001), *La lettre du Prêtre Jean, une utopie médiévale*, Imago, Paris.

BETAT A., FRETTE V., et REHBERG I. (1999), Sand ripples induced by water shear flow in an annular channel, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 88–91.

BETAT A., KRUELLE C., FRETTE V., et REHBERG I. (2002), Long-time behavior of sand ripples induced by water shear flow, *Eur. Phys. J. E*, **8**, 465–476.

BLONDEAUX P. (1990), Sand ripples under sea waves. I : Ripple formation, *J. Fluid Mech.*, **218**, 1–17.

BOUCHAUD J.-P., CATES M., PRAKASH J. R., et EDWARDS S. (1994), A model for the dynamics of sandpile surfaces, *J. Phys. I France*, **4**, 1383.

CHARRU F. et MOUILLERON-ARNOULD H. (2002), Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow, *J. Fluid Mech.*, **452**, 303–323.

CHARRU F., MOUILLERON H., et EIFF O. (2004), Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow, *J. Fluid Mech.*, **519**, 55–80.

CSAHÓK Z., MISBAH C., RIOUAL F., et VALANCE A. (2000), Dynamics of aeolian sand ripples, *Eur. Phys. J. E*, **3**, 71–86.

DARWIN G. (1883), On the formation of ripple-mark in sand, *Proc. Roy. Soc. A*, **36**, 18–43.

DE CANDOLLE C. (1882), Rides formées à la surface du sable déposé au fond de l'eau, *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, **9**, 253.

EINSTEIN H. (1942), Formula for the transportation of bed-load, *Transactions of the ASCE*, **107**, 561–573.

FREDSØE J. et DEIGAARD R. (1992), *Mechanics of coastal sediment transport*, World Scientific, Singapour.

GARLAN T. (2004), séminaire, in *International workshop on dune formation and migration*, Carry-le-Rouët, France.

HARA T. et MEI C. (1990), Centrifugal instability of an oscillatory flow over periodic ripples, *J. Fluid Mech.*, **217**, 1–32.

HERRMANN H., JR. J. A., SCHATZ V., SAUERMANN G., et PARTELI E. (2005), Calculation of the separation streamlines of barchans and transverse dunes using Fluent, in *Powders and Grains 2005*, Stuttgart, Germany.

HERSEN P. (2004a), Morphogénèse et dynamique des barchanes, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

HERSEN P. (2004b), On the crescentic shape of barchan dunes, *European Physical Journal B*, **37**, 507–514.

HOPFINGER E., KURNIAWAN A., GRAF W., et LEMMIN U. (2004), Sediment erosion by Görtler vortices : the scour-hole problem, *J. Fluid Mech.*, **520**, 327–342.

HOYLE R. et WOODS A. (1997), Analytical model of propagating sand ripples, *Phys. Rev. E*, **56**, 6861–6868.

HUNT J., LEIBOVICH S., et RICHARDS K. (1988), Turbulent shear flow over hills, *Quart. J. R. Met. Soc.*, **114**, 1435–1470.

IVERSEN J. D. et RASMUSSEN K. R. (1999), The effect of wind speed and bed slope on sand transport, *Sedimentology*, **46**, 723–731.

KENNEDY J. (1963), The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *J. Fluid Mech.*, **16**, 521–544.

KING M. et LEIGHTON D. (1997), Measurement of the inertial lift on a moving sphere in contact with a plane wall in a shear flow, *Phys. Fluids*, **9**, 1248–1255.

KOMAROVA N. et HULSCHER S. (2000), Linear mechanisms for sand wave formation, *J. Fluid Mech.*, **413**, 219–246.

KONDOLF G. et PIÉGEAY H. (2003), *Tools in fluvial geomorphology*, Wiley, Chichester.

KOUAKOU K. (2005), Instabilités des interfaces écoulement/fond érodable : approches asymptotiques, Thèse de doctorat, Université Paris 6.

KURU W., LEIGHTON D., et MCREADY M. (1995), Formation of waves on a horizontal erodible bed of particles, *Int. J. Multiphase Flow*, **21**, 1123–1140.

LAGRÉE P.-Y. (2003), A triple deck model of ripple formation and evolution, *Physics of Fluids*, **15**(8), 2355–2368.

LANDAU L. et LIFSCHITZ E. (1989), *Physique théorique. Tome 6 : Mécanique des fluides*, Éditions Mir, Moscou.

LEIGHTON D. et ACRIVOS A. (1986), Viscous resuspension, *Chem. Engng. Sci.*, **41**, 1377–1384.

LOISELEUX T., DOPPLER D., GONDRET P., et RABAUD M. (2004), Incipient grain transport and pattern formation at a sand surface sheared by a continuous laminar flow (part. I), in *Proceedings of the second international workshop on marine sandwaves and river dune dynamics*, pp. 200–207, Enschede, Netherlands.

LOISELEUX T., GONDRET P., RABAUD M., et DOPPLER D. (2005), Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow, *à paraître dans Phys. Fluids.*

MADDUX T., NELSON J., et MCLEAN S. (2003), Turbulent flow over three-dimensional dunes : 1. Free surface and flow response, *J. Geophys. Res.*, **108**.

MEYER-PETER E. et MÜLLER R. (1948), Formula for the bedload transport, in *Proceedings of the 3rd Meeting of the International Association of Hydraulic Research*, pp. 39–64, Stockholm.

MOMAYEZ L., DUPONT P., et PEERHOSSAINI H. (2004), Some unexpected effects of wavelength and perturbation strength on heat transfer enhancement by Görtler instability, *Int. J. Heat & Mass Transfer*, **47**, 3783–3795.

MURRAY A. B. et ASHTON A. (2004), Extending a 1-line modeling approach to explore emergent coastline behaviors, in *Coastal Engineering*, pp. 2035–2047, Lisbonne, Portugal.

MÉTIVIER F. et MEUNIER P. (2003), Input and output mass flux correlations in an experimental braided stream. Implications on the dynamics of bed load transport, *J. Hydro.*, **271**, 22–38.

NELSON J. (1990), The initial instability and finite-amplitude stability of alternate bars in straight channels, *Earth-Science Reviews*, **29**, 97–115.

NIELSEN P. (1992), *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*, World Scientific.

NISHIMORI H., YAMASAKI M., et ANDERSEN K. (1997), A simple model for the various pattern dynamics of dunes, *Int. J. Mod. Phys. B*, **12**, 256–272.

PASINI J.-M. et JENKINS J. (2005), Aeolian transport with collisional suspension, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **363**, 1625–1646.

PETITJEANS P. et WESFREID J.-E. (1996), Spatial evolution of Görtler instability in a curved duct of high curvature, *AAIA Journ.*, **34**, 1793–1800.

PYE K. et TSOAR H. (1990), *Aeolian sand and sand dunes*, Hyman, Londres.

RAUDKIVI A. (1997), Ripples on stream bed, *Journ. Hyd. Eng.*, **123**, 58–64.

RICHARDS K. (1980), The formation of ripples and dunes on an erodible bed, *J. Fluid Mech*, **99**, 597–618.

RIJN L. V. (1984), Sediment transport ; part I : bedload transport, *J. Hydraul. Eng.*, **110**, 1431–1456.

RIOUAL F. (2002), Étude de quelques aspects du transport éolien : processus de saltation et formation des rides, Thèse de doctorat, Université Rennes 1.

ROBERT A. et UHLMAN W. (2001), An experimental study on the ripple-dune transition, *Earth Surf. Process. Landforms*, **26**, 615–629.

ROOS P. et BLONDEAUX P. (2001), Sand ripples under sea waves. IV : Tile ripple formation, *J. Fluid Mech.*, **447**, 227–246.

ROUSSEAUX G. (2003), Étude de l'instabilité d'une interface fluide-granulaire : application à la morphodynamique des rides de plage, Thèse de doctorat, Université Paris 6.

ROUSSEAUX G., STEGNER A., et WESFREID J. (2004), Wavelength selection of rolling-grain ripples in laboratory, *Phys. Rev. E*, **69**, 031,307.

SAUERMANN G., KROY K., et HERMANN H. (2001), Continuum saltation model for sand dunes, *Phys. Rev. E*, **64**, 031,305.

SCHLICHTING H. et GERSTEN K. (2000), *Boundary layer theory*, Springer.

SCHMEECKLE M. et NELSON J. (2003), Direct numerical simulation of bedload transport using a local, dynamic boundary condition, *Sedimentology*, **50**, 279–301.

SCHWÄMMLE V. et HERRMANN H. (2003), Solitary wave behavior of sand dunes, *Nature*, **426**, 619.

SLEATH J. (1976), On rolling-grain ripples, *Journal of Hydraulic Research*, **14**, 69–81.

SMITH J. et MCLEAN S. (1977), Spatially averaged flow over a wavy surface, *J. Geophys. Res.*, **82**, 1735–1746.

SOUTHARD J. (1991), Experimental determination of bedform stability, *Ann. Rev. of Earth and Planetary Sciences*, **19**, 423–455.

SUMER B. et BAKIOGLU M. (1984), On the formation of ripples on an erodible bed, *Phys. Rev. E*, **144**, 117–190.

TANI I. (1962), Production of longitunial vortices in the boundary layer along a concave wall, *J. Geophy. Res.*, **67**, 3075–3080.

VALANCE A. et LANGLOIS V. (2005), Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow, *Eur. Phys. J. B*, **43**, 283–294.

VALANCE A. et RIOUAL F. (1999), A nonlinear model for aeolian sand ripples, *Eur. Phys. J. B*, **10**, 543–548.

VITTORI G. et BLONDEAUX P. (1990), Sand ripples under sea waves. II : Finite-amplitude development, *J. Fluid Mech.*, **218**, 19–39.

VITTORI G. et BLONDEAUX P. (1992), Sand ripples under sea waves. III : Brick-pattern ripple formation, *J. Fluid Mech.*, **239**, 23–45.

WILBERS A. et BRINKE W. T. (2003), The response of subaqueous dunes to floods in sand and gravel bed reaches of the Dutch Rhine, *Sedimentology*, **50**, 1013–1034.

YALIN M. et KARAHAN E. (1979), Inception of sediment transport, *J. Hydr. Div. ASCE*, **105**, 1433–1443.

Résumé :

Cette thèse a pour objet l'étude expérimentale, théorique et numérique de l'instabilité d'un lit granulaire cisaillé par un écoulement fluide continu.

Un canal d'écoulement rectiligne a été mis au point pour étudier l'apparition et la dynamique des rides à la surface d'un lit de grains. Nous avons en particulier déterminé la longueur d'onde initiale des rides, en fonction du débit d'eau et de la taille des grains, et caractérisé le processus de mûrissement, c'est-à-dire l'évolution de leur amplitude et de leur longueur d'onde moyenne au cours du temps. Par ailleurs, nous nous sommes intéressés à la transition morphologique des rides perpendiculaires à l'écoulement vers des motifs 3D plus complexes.

Dans un deuxième temps, nous avons développé une analyse de stabilité linéaire du problème, dans le cas d'un écoulement laminaire. Celle-ci permet de prédire correctement la longueur d'onde à l'initiation, à condition de prendre en compte le mécanisme de relaxation du flux de grains. D'autre part, nous avons rendu compte de l'apparition de motifs tridimensionnels grâce à une analyse faiblement non-linéaire.

Enfin, nous abordons la dynamique non-linéaire des rides. Des simulations numériques en 2D, basées sur l'étude théorique précédente, permettent de retrouver qualitativement l'évolution aux temps longs observée expérimentalement. Nous montrons enfin à l'aide d'un modèle basé sur des équations locales très simplifiées que le passage par des structures tridimensionnelles pourrait être nécessaire au mûrissement en 3D.

Mots-clefs :

Transport sédimentaire, instabilités hydrodynamiques, dunes, équations différentielles non-linéaires, milieux granulaires.

Abstract :

This work deals with experimental, theoretical and numerical investigations on the instability of a granular bed when sheared by a steady fluid flow.

We built an open flume set-up to study the growth and dynamics of ripples on the surface of a sand bed. We determined the wavelength at the onset of instability as a function of flowrate and grain size, and the evolution of the mean amplitude and wavelength of the ripples (through a coarsening process). We observed a shape transition from 2D ripples, that are perpendicular to the flow, to more complex 3D patterns.

Besides, we carried out a theoretical stability analysis, in the case of a laminar fluid flow. This calculation correctly captures the initial wavelength of the structure if the effect of grain inertia is taken into account. We also predicted the existence of 3D structures by performing a nonlinear analysis.

Finally, we studied the nonlinear dynamics of ripples. 2D numerical simulations, based on the previous theoretical computation, gave a qualitative long-time evolution similar to our experiments on ripples. We used a simplified nonlinear model to show that 3D structures may be a necessary transient state in the coarsening process of ripples.

Keywords :

Sediment transport, hydrodynamic instabilities, sand ripples, sand dunes, nonlinear differential equations, granular media.