HAL
open science

INSTABILITES ET BIFURCATIONS ASSOCIEES A LA MODELISATIONDE LA GEODYNAMO

Vincent Morin

To cite this version:

Vincent Morin. INSTABILITES ET BIFURCATIONS ASSOCIEES A LA MODELISATIONDE LA GEODYNAMO. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2005. Français. NNT : . tel-00011484

HAL Id: tel-00011484

https://theses.hal.science/tel-00011484v1

Submitted on 28 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

DOCTORAT

Spécialité : Géophysique Interne

Vincent MORIN

INSTABILITES ET BIFURCATIONS ASSOCIEES A LA MODELISATION DE LA GEODYNAMO

Thèse dirigée par Emmanuel DORMY.

Sera soutenue le 15 décembre 2005,
devant un jury composé de

Yves COUDER,	Examinateur,
David FEARN,	Examinateur,
Jean-Louis LE MOUËL,	Examinateur,
Jean-Francois PINTON,	Rapporteur,
Franck PLUNIAN,	Rapporteur,
Emmanuel DORMY,	Directeur.

Ces travaux ont été réalisés à l'Institut de Physique du Globe de Paris et au Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Emmanuel Dormy, mon directeur de thèse. Il a été un directeur formidable, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. Toujours présent à mes côtés, il m'a apporté une aide inestimable durant ces trois ans.

Je remercie également Julien Aubert. Il m'a permis de valider mon programme 2D de convection contre le sien et m'a fourni le programme MAGIC avec lequel j'ai effectué la quasi-totalité de mes calculs dynamos. Il a de plus été régulièrement présent pour répondre à mes questions.

Je souhaite aussi remercier Stéphan Fauve pour nos nombreuses discussions. Il m'a permis d'aborder mes travaux avec un autre point de vue. Je remercie aussi les autres membres du groupe de physique non-linéaire et tout particulièrement François Pétrélis.

Je remercie Jean-Louis Le Mouël de m'avoir accueilli au laboratoire de géomagnétisme de l'IPGP et Gautier Hulot pour m'avoir permis d'obtenir un complément de deux mois à mon financement de thèse. Je remercie de plus tous les étudiants du labo pour leurs aides (Cécile, Céline, Aude, Catherine, Claire, Hélène, Svetlana et bien sûr Thomas « Minimag » Lebrat).

Je remercie Michel Pérault et Stéphan Fauve pour avoir organisé mon accueil à l'ENS pour les deux dernières années de ma thèse.

Je remercie mes rapporteurs pour l'attention qu'ils ont apportée à mon travail et pour leur efficacité. Je remercie aussi messieurs Yves Couder, David Fearn et Jean-Louis Le Mouël pour avoir accepté d'être membres de mon jury.

Je remercie mes parents et ma soeur, sans qui je n'en serais évidemment pas là aujourd'hui. Merci pour votre amour et votre soutien qui m'ont permis d'aller de l'avant. Merci à mon nounet pour son amour et pour tout ce qu'elle m'a apporté depuis que nous sommes ensemble. Merci à tous mes amis pour tous les bons moments que nous avons passés.

Je tiens aussi à honorer la mémoire de mon grand-père qui était fier de ses petit-enfants, il ne lui aura manqué que quelques semaines de vie pour assister à l'aboutissement de mes études. Adieu, je pense à toi.

Les pages qui vont suivre constituent mes débuts en sciences. Je suis content d'avoir eu l'occasion d'effectuer ces recherches et par ce travail, certes modeste, d'avoir pu apporter ma contribution à l'effort de compréhension du problème de l'effet dynamo.

Table des matières

1 Introduction **7**
1.1 La dynamo terrestre . . . 7
1.2 Rappel sur les systèmes dynamiques et les bifurcations . . . 11
1.3 Système de Lorenz . . . 16

2 Instabilité convective **21**
2.1 Modélisation . . . 21
2.1.1 Système d'équations . . . 21
2.1.2 Géostrophie et modèle quasi-géostrophique . . . 26
2.1.3 Couches d'Ekman et pompage . . . 29
2.2 Description théorique . . . 32
2.2.1 Onde de Rossby . . . 32
2.2.2 Etudes analytiques . . . 33
2.3 Méthodes numériques . . . 37
2.4 Etude numérique . . . 38
2.4.1 Etude linéaire . . . 38
2.4.2 Etude non-linéaire . . . 40
2.4.3 Effet du pompage d'Ekman sur les bifurcations . . . 56
2.4.4 Effet du pompage d'Ekman sur la structure . . . 58
2.5 Interprétation géophysique . . . 66

3 Bifurcation dynamo **69**
3.1 Modélisation . . . 69
3.1.1 Système d'équations . . . 69
3.1.2 Décomposition Poloïdale-Toroïdale . . . 73
3.1.3 Harmoniques sphériques . . . 74
3.2 Méthodes numériques . . . 76
3.3 Description théorique . . . 77
3.4 Etude numérique . . . 82
3.4.1 Influence du nombre de Roberts . . . 83
3.4.2 Influence du nombre d'Ekman . . . 89
3.4.3 Interprétation . . . 91
3.4.4 Choix du paramètre de contrôle . . . 91

3.4.5 Rétroactions et couplages 97
3.4.6 Solutions multiples 104
3.5 Interprétation géophysique 108

4 Conclusions et perspectives 115

A Couche d'Ekman : exemple du cas plan 123

B Dissipations visqueuses et magnétiques 127

C Influence des conditions aux limites magnétiques 129

D Formules d'identités vectorielles 133

E Morin & Dormy (2004) 137

F Morin & Dormy (2005) 147

Chapitre 1

Introduction

1.1 La dynamo terrestre

De nombreux corps célestes possèdent un champ magnétique, la plupart des planètes du système solaire, les étoiles et même les galaxies. Parmi ceux-ci nous allons plus particulièrement nous intéresser au cas de la Terre.

La Terre est composée en première approximation de plusieurs couches organisées en coquilles sphériques concentriques (voir figure 1.1). En son centre un noyau solide (aussi appelé graine). Celui-ci est principalement composé de fer et son rayon est d'environ 1 220 kilomètres. La couche supérieure, le noyau externe, est fluide. Elle a une épaisseur d'environ 2 265 kilomètres. Elle est majoritairement composée de fer à l'état liquide auquel s'ajoutent des éléments plus légers (comme le soufre, l'oxygène ou le silicium). L'ensemble est surmonté du manteau puis de la croûte pour un rayon global d'environ 6 370 kilomètres (le manteau est lui-même divisé en un manteau inférieur et un manteau supérieur).

L'existence d'un champ magnétique est attesté dans le cas de la Terre depuis environ 3.2 milliards d'années. Le temps caractéristique de dissipation du champ par diffusion ohmique est de l'ordre de 10 000 ans pour le dipôle (la composante la plus lentement décroissante). Ce temps est donc inférieur de plusieurs ordres de grandeur au temps d'existence du champ magnétique terrestre. Il ne peut donc pas s'agir d'un champ fossile. Il existe nécessairement un processus dynamique qui régénère le champ contre la diffusion par dissipation ohmique [28].

Il est maintenant reconnu que ce processus est celui de la dynamo auto-entretenue. Nous sommes en présence d'un fluide conducteur de l'électricité qui est animé de mouvements de convection. Ces mouvements, en présence d'un champ magnétique initial, vont générer des courants électriques qui à leur tour vont créer un champ magnétique. Si ce champ induit vient renforcer le champ magnétique initial, celui-ci peut alors être maintenu contre la diffusion ohmique. La processus que nous venons de décrire mène à une croissance exponentielle du champ (car le champ induit est proportionnel au champ de départ). Le champ magnétique ainsi créé pourrait croître indéfiniment s'il n'existait pas une rétroaction pour stopper cette croissance. Le champ magnétique, lorsqu'il devient suffisamment important,

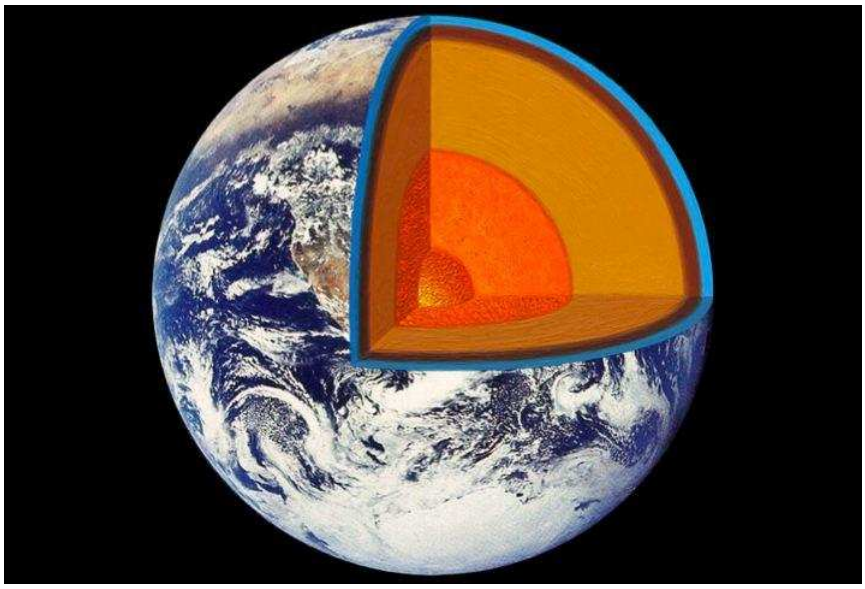

FIG. 1.1: *Vue écorchée du globe terrestre, avec du centre à la périphérie, la graine solide, le noyau externe fluide (orange foncé), le manteau (orange clair) et la croûte (marron).*

va agir sur l'écoulement qui l'a créé (via la force de Laplace). Il va modifier celui-ci de manière à saturer son énergie.

La théorie de la dynamo auto-entretenue propose donc que l'énergie cinétique des mouvements convectifs à l'oeuvre dans le noyau terrestre soit en partie convertie en énergie magnétique. Il existe donc nécessairement une ou plusieurs sources d'énergie qui vont entretenir cette convection en compensant les pertes des différents effets diffusifs. Ces sources d'énergie sont diverses et leur importance relative est toujours discutée.

Les mouvements convectifs dans le noyau peuvent être d'origine thermique. En effet un fluide plus chaud et donc moins dense que son environnement va monter sous l'action de la force d'Archimède. Le refroidissement séculaire de la Terre conduit dans le noyau à une température plus importante à la frontière noyau interne-noyau externe (ICB, pour *Inner Core Boundary* en anglais) qu'à la frontière noyau-manteau (CMB, pour *Core Mantle Boundary* en anglais), le gradient ainsi créé est super adiabatique et peut engendrer la convection.

Ce refroidissement est également la cause de la cristallisation du noyau interne qui est principalement composé de fer. Cette cristallisation libère la chaleur latente de solidification qui va chauffer le fluide et alimenter la convection.

D'autres sources d'énergie sont disponibles, Bullard (1949) a proposé la précession comme un moteur possible pour la convection dans le noyau. Cette hypothèse a par la suite été contestée, mais des calculs d'ordre de grandeur réalisés par Malkus (1994) montrent que la précession pourrait fournir l'énergie nécessaire à la dynamo.

La présence présumée d'une faible concentration d'éléments radioactifs dans le noyau

pourrait constituer une autre source possible de chaleur. Celle-ci est toutefois jugée beaucoup moins efficace que les précédentes. L'énergie due à la désintégration de ces éléments est faible, car ils sont en petite quantité dans le noyau (cette situation contraste avec le manteau terrestre qui est essentiellement chauffé par la désintégration des éléments radioactifs).

En plus du fer, le noyau interne contient des éléments légers. Lors de la cristallisation de la graine, ceux-ci sont rejetés à l'ICB ce qui mène à des différences locales de densité qui vont également engendrer la convection. Il s'agit alors de convection "solutale" (introduite par Braginsky en 1963). Des sources de convection que nous avons vues, c'est celle qui est probablement à l'origine de la plus large part des mouvements de fluide dans le noyau.

Le champ magnétique créé par ces mouvements de convection va lui même fournir de la chaleur au fluide par dissipation ohmique des courants électriques. Toutefois, pour des raisons thermodynamiques, cette chaleur n'est évidemment pas à même d'alimenter la convection.

Le champ magnétique terrestre actuel est observé depuis la surface par un réseau important d'observatoires ainsi que par des satellites. Le champ magnétique du noyau (appelé champ principal) traverse le manteau que l'on suppose être un isolant électrique parfait (le champ dans le manteau dérive d'un potentiel). La reconstruction du champ à la surface du noyau est alors possible grâce à la théorie du potentiel et aux harmoniques sphériques. Ce travail est cependant rendu très complexe par la présence de deux contributions. Tout d'abord, un champ magnétique d'origine externe (créé par l'interaction du vent solaire, un flux de particules ionisées, avec l'ionosphère et la magnétosphère). Ce champ est certes plus faible (environ 1% du champ magnétique total), mais il vient s'ajouter au champ d'origine interne. Il est donc nécessaire de séparer ces deux composantes pour connaître le champ provenant du noyau fluide. Afin de s'affranchir du champ externe, créé par le vent solaire, les observations sont effectuées dans les périodes magnétiquement calmes (de nuit et en l'absence d'orage magnétique). La contribution externe devient beaucoup plus problématique lorsque les mesures sont effectuées depuis un satellite. De plus, le champ principal se combine à un champ magnétique d'origine crustal, car les roches de la croûte étant à une température plus faible que le manteau peuvent être aimantées (elles sont en-dessous de leur température de Curie). Le champ crustal est dominant aux petites échelles spatiales. Il fait donc écran, à ces échelles, à l'observation du champ d'origine interne. Celui-ci n'est donc connu qu'aux grandes échelles spatiales.

Grâce au paléomagnétisme et à l'archéomagnétisme, il est également possible de reconstituer le champ magnétique passé ainsi que ses variations. Le paléomagnétisme repose sur l'analyse des roches magmatiques et sédimentaires contenant des minéraux magnétiques. Au moment du refroidissement ou de la compaction des roches qui les contiennent ces minéraux ont figé l'orientation du champ magnétique contemporain de cet événement. Le principe de l'archéomagnétisme est comparable, mais utilise des produits de production humaine (des poteries par exemple) qui sont datés indépendamment (par exemple grâce à leur contexte historique).

Toutes ces observations ont permis de dégager les grandes caractéristiques du champ magnétique terrestre (voir par exemple [26]). Celui-ci est principalement dipolaire et fluctue

sur des échelles de temps très variées. Il existe des variations de longues périodes (de 10 000 à 30 000 ans environ) de la composante dipolaire, mais aussi des variations brutales à l'échelle de l'année constituant de véritables bouffées de champ magnétique (jerks). Le champ magnétique terrestre possède aussi la particularité de changer de polarité de façon très irrégulière. Ce processus d'inversion se produit en moyenne tous les 100 000 ans. La durée d'une inversion est comprise entre 1 000 et 5 000 ans environ. Durant cette période la composante dipolaire du champ magnétique n'est plus dominante. Il existe, en outre, des excursions qui ont environ la même durée que les inversions. Elles correspondent à une décroissance du dipôle qui reprend ensuite de l'importance tout en gardant la même polarité (contrairement aux inversions où la polarité s'inverse). Les origines physiques de ces grandes caractéristiques sont encore loin d'être comprises.

Le problème de la géodynamo, et plus généralement celui de la théorie dynamo, est un problème complexe [29, 55] qui laisse encore de nombreuses questions ouvertes. L'approche théorique a permis de nombreux progrès (dont certains seront décrits dans cette thèse), mais elle ne peut offrir de solution au problème non-linéaire complet.

Récemment des travaux expérimentaux (Riga et Karlsruhe en 2000) ont réussi à produire une dynamo en utilisant un écoulement à géométrie fortement contrainte. Ces deux expériences reposent sur des écoulements issus de travaux théoriques (Ponomarenko, 1973 et Roberts , 1970, respectivement).

Depuis quelques décennies, il existe une autre voie pour étudier l'effet dynamo, celle des simulations numériques. Les simulations numériques ont permis des avancées significatives en offrant les premières solutions approchées du système complet d'équations caractérisant la géodynamo. Les modèles numériques ont réussi à reproduire certaines des grandes caractéristiques du champ magnétique terrestre. La plupart ont, par exemple, produit des dynamos dont le champ magnétique est principalement dipolaire et certains ont réussi à produire des inversions de polarité [33, 65].

Certains auteurs opèrent un rapprochement direct entre le champ magnétique produit par les modèles numériques et le champ magnétique observé pour la Terre (voir figure 1.2). Cependant les dynamos numériques utilisent des paramètres nécessairement éloignés de plusieurs ordres de grandeur de ceux de la Terre. Pour la Terre, il existe en effet une grande disparité d'échelles de temps et d'espace dans les phénomènes en jeu. Celle-ci rend pour l'instant impossible une simulation utilisant des paramètres réalistes pour la Terre. Le jour, temps caractéristique de la rotation, est par exemple excessivement court par rapport à l'échelle de temps de la diffusion visqueuse. Les échelles spatiales créées par la turbulence ou par les couches limites visqueuses dans le noyau terrestre sont terriblement petites vis à vis des grands mouvements convectifs. A ces difficultés de modélisation, liées aux paramètres, s'ajoutent celles liées à différents théorème anti-dynamo qui empêchent de simplifier le problème de trois dimensions à deux dimensions d'espace (Cowling, 1934, par exemple). La difficulté principale en ce qui concerne les simulations numériques est donc, en l'état actuel des connaissances, de comprendre dans quelle mesure elles nous éclairent sur la dynamique du noyau fluide terrestre.

Il apparaît donc nécessaire d'opter pour l'étude de cas simplifiés permettant de progresser vers la compréhension des phénomènes physiques à l'oeuvre dans la géodynamo. Nous

allons étudier, dans la première partie de ce manuscrit, le cas purement hydrodynamique de la convection dans une sphère en rotation. Nous nous attacherons à décrire les transitions (ou bifurcations) de l'écoulement et à caractériser l'effet du régime de paramètres (en tâchant de s'approcher du régime géophysiquement pertinent). Il en effet nécessaire de bien comprendre le processus de la convection non-linéaire en rotation qui est la première instabilité du système et engendre les mouvements qui permettront la génération de champ magnétique. Dans la seconde partie de cette thèse, nous étudierons l'effet dynamo dans la géométrie de la géodynamo (i.e. une coquille sphérique en rotation). Ce problème est très riche, du fait de sa complexité les paramètres ne peuvent être aussi largement variés que pour le problème de convection simple. Nous étudierons plus particulièrement la bifurcation dynamo. Il est en effet important de bien comprendre le domaine faiblement non-linéaire avant d'affronter le domaine fortement non-linéaire et toutes les difficultés qui y sont liées. Nous nous attacherons également dans cette partie à clarifier le rôle des paramètres et essaierons de préciser le comportement de la solution dans la limite des paramètres géophysiquement pertinents.

Comme les deux études qui constituent ce travail sont centrées sur l'apparition d'une instabilité, nous allons maintenant préciser la notion de bifurcation.

1.2 Rappel sur les systèmes dynamiques et les bifurcations

Considérons un système physique dont l'état instantané est entièrement déterminé par un ensemble de variables d'état $\mathbf{X} \equiv \{X_i\,,\ i = 1, ..., n\}$. L'évolution de ce système est décrite par un ensemble de n équations différentielles munies de conditions initiales $(\mathbf{X}_{(t=0)})$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X}, t)\,. \tag{1.1}$$

Envisageons le cas particulier d'un second membre $F(\mathbf{X})$ ne dépendant pas explicitement du temps (système autonome). Le nombre de variables d'état, aussi appelées degrés de liberté, définit la dimension du système. Cet ensemble de variables d'état sert de coordonnées canoniques dans un espace, appelé espace des phases, dans lequel on peut suivre l'évolution du système en observant l'évolution du vecteur $\mathbf{X}$. A titre d'exemple, un oscillateur harmonique, constitué d'une masse attachée par un ressort à un mur, sera entièrement déterminé par la vitesse et la position de la masse. Ce système possède donc deux degrés de liberté.

Selon cette définition, un milieu continu, par exemple constitué d'un fluide en convection, décrit par des champs (vitesse, température), aura donc un nombre infini de degrés de liberté (avant discrétisation), constitués par la valeur des champs aux différents points du domaine considéré.

Cependant, les différents processus physiques à l'oeuvre (advection, diffusion dans le cas de la convection) introduisent souvent une cohérence spatiale qui traduit via les dérivées

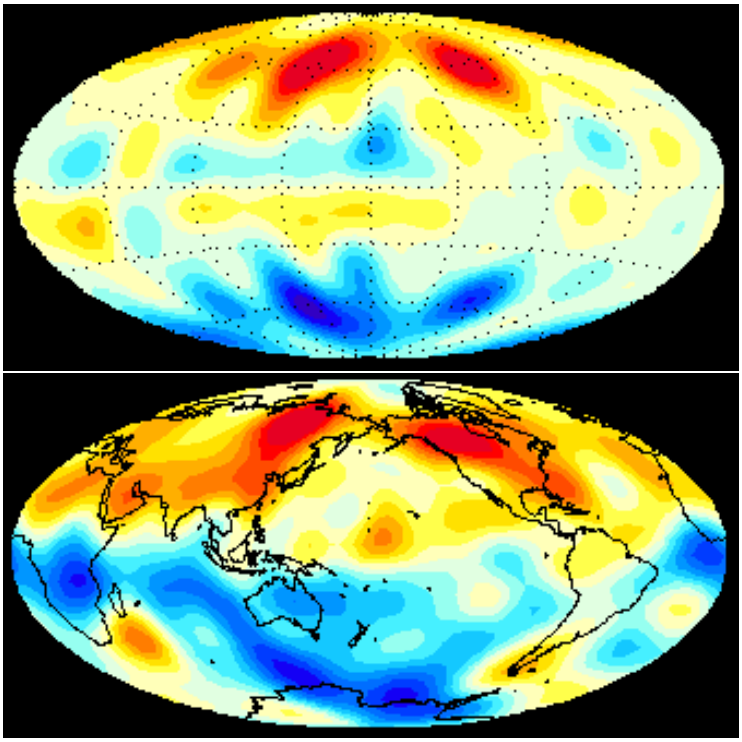

FIG. 1.2: *Comparaison de la composante radiale du champ magnétique à la CMB pour un modèle numérique filtré (à gauche) et pour la Terre en 1980 (à droite). Le flux pointant vers l'intérieur est indiqué en rouge et vers l'extérieure en bleu. Les paramètres du modèle sont* $E = 10^{-3}$, $Ra = 300$, $Pr = 1$ *et* $Pm = 4$. *Le champ obtenu avec le modèle numérique a été filtré passe-bas à la résolution des observations du champ magnétique terrestre (Christensen et al. 1999).*

partielles spatiales des conditions de contraintes entre états locaux ayant pour effet d'abaisser le nombre effectif de degrés de liberté à une valeur finie et suffisamment basse. Le comportement d'un système dynamique s'étudie en caractérisant ses états d'équilibre, ou points fixes,

$$\frac{d\mathbf{X_0}}{dt} = \mathbf{0} = F(\mathbf{X}). \tag{1.2}$$

Leur stabilité est étudiée en approximant $F(\mathbf{X})$ au voisinage de $\mathbf{X_0}$ par sa forme linéarisée. Par simplicité nous allons considérer par la suite le cas d'une variable scalaire X. L'égalité (1.1) peut aussi être écrite

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{dG}{dX}, \tag{1.3}$$

où $G(X) = -\int F(X)\,dX$, ce qui mène à

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{dX}\frac{dX}{dt} = -(F(X))^2 \leqslant 0. \tag{1.4}$$

G décroît donc au cours du temps, comprendre l'évolution à grand temps du système correspond donc à la recherche des minima de $G(X)$.

Supposons maintenant que $F(X)$ dépende d'un paramètre μ, appelé paramètre de contrôle. Le système peut présenter des changements de comportement brutaux en fonction des valeurs du paramètre de contrôle. A chacun de ces changements de comportement on dit qu'il y a bifurcation. Ces bifurcations correspondent à un changement de points fixes dont il faut déterminer la stabilité. La séquence exacte de bifurcation en fonction du paramètre de contrôle est propre à chaque système. Cependant le voisinage de toute bifurcation peut être décrit par un petit nombre de cas typiques, car dans ces régimes un seul terme non-linéaire gouverne l'évolution. Les termes non intéressants (ou non résonnants) sont éliminés par changement de variables. Il existe plusieurs types de bifurcations, nous nous bornerons ici à décrire celles de codimension un, c'est-à-dire celles obtenues en ne faisant varier qu'un seul paramètre. Et plus précisément nous ne décrirons parmi les bifurcations de codimension un que les bifurcations fourches super-critiques, sous-critiques et de Hopf, car celles-ci correspondent aux phénomènes que nous allons étudier par la suite.

Les systèmes dynamiques respectent souvent des conditions de symétries. Un système dynamique peut par exemple être invariant par le changement $X \mapsto -X$. Si le système satisfait cette propriété alors $F(X)$ est une fonction impaire et la première non-linéarité est un terme cubique. Etudions d'abord la forme normale suivante

$$\frac{dX}{dt} = \mu X - X^3. \tag{1.5}$$

Les bifurcations décrites par ce type d'équation sont qualifiées de super-critiques.

Lorsque μ prend des valeurs positives, cette non-linéarité cubique (de signe négatif) va permettre de saturer la solution à une valeur finie. Pour μ négatif, seul $X = 0$ est un point fixe. Pour étudier sa stabilité, il faut linéariser le second membre de (1.5), il vient directement $X = X_0 e^{\mu t}$. Pour $\mu < 0$, cette solution est donc stable et relaxe vers

$X = dX/dt = 0$ pour n'importe quelle condition initiale. Pour μ positif, le point fixe $X = 0$ devient instable et deux nouveaux points fixes apparaissent en $X = \pm\sqrt{\mu}$. Pour étudier leur stabilité on pose $X = \pm\sqrt{\mu} + \epsilon$. En reportant cette expression dans (1.5), et en supposant $\epsilon \ll 1$, nous obtenons $d\epsilon/dt = -2\mu\epsilon$ pour les deux points fixes. Ce sont donc des points fixes stables. Dans tous les cas, le retour à l'équilibre se fait par une dynamique de relaxation dont le temps caractéristique est

$$\begin{array}{lll} \tau = -\mu^{-1} & \text{pour} & \mu < 0, \\ \tau = (2\mu)^{-1} & \text{pour} & \mu > 0. \end{array}$$

La relaxation est donc très lente près du seuil. Les valeurs de X (paramètre d'ordre) en fonction du paramètre de contrôle sont résumées dans un diagramme de bifurcation où est indiquée la stabilité des différentes branches (voir figure 1.3, graphique du haut pour le cas super-critique).

Si maintenant la non-linéarité cubique est de signe positif, elle ne va plus saturer mais déstabiliser la solution, il faut donc prendre en compte une non-linéarité négative d'ordre supérieur (et toujours impaire) pour obtenir cette saturation. On obtient

$$\frac{dX}{dt} = \mu X + X^3 - X^5. \tag{1.6}$$

Les bifurcations décrites par ce type d'équation sont qualifiées de sous-critiques. Le point fixe $X = 0$ existe toujours, il est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu \geqslant 0$. Les solutions non-triviales sont les racines de $\mu + X^2 - X^4$. Elles sont au nombre de quatre pour $-1/4 \leqslant \mu < 0$ et de deux pour $\mu \geqslant 0$. En linéarisant autour de ces points fixes, on peut déterminer leur stabilité. On montre ainsi que pour $-1/4 \leqslant \mu$ les solutions non triviales telles que $X^2 = (1 + \sqrt{1 + 4\mu})/2$ sont stables. Pour $-1/4 \leqslant \mu < 0$ les solutions non triviales telles que $X^2 = (1 - \sqrt{1 + 4\mu})/2$ sont, quant à elles, instables.

Si μ varie depuis $\mu < -1/4$ continûment vers $\mu > 0$, le système choisit d'abord la solution triviale et ne se déstabilise que pour $\mu > 0$, là X prend brutalement une valeur finie. Si partant de cette valeur finie on diminue de nouveau μ, on reste sur la solution non-triviale sélectionnée par le système même pour $\mu < 0$ et ce jusqu'à $\mu = -1/4$ où le système retrouve brutalement la solution triviale. Entre la montée et la descente il apparaît donc une hystérésis dans le comportement du système, cette hystérésis est caractéristique des bifurcations sous-critiques (voir figure 1.3, graphique du bas).

Nous considérons maintenant le cas de la bifurcation de Hopf, contrairement aux cas précédents qui présentaient des solutions stationnaires, nous avons maintenant des solutions oscillantes.

L'espace des phases est maintenant de dimension deux (partie réelle et partie imaginaire de la variable) et, pour le cas super-critique, l'une des formes normales qui régit cette bifurcation s'écrit dans le plan complexe

$$\frac{dZ}{dt} = (\mu + i\omega)Z - (1 + i\gamma)|Z|^2 Z\,, \tag{1.7}$$

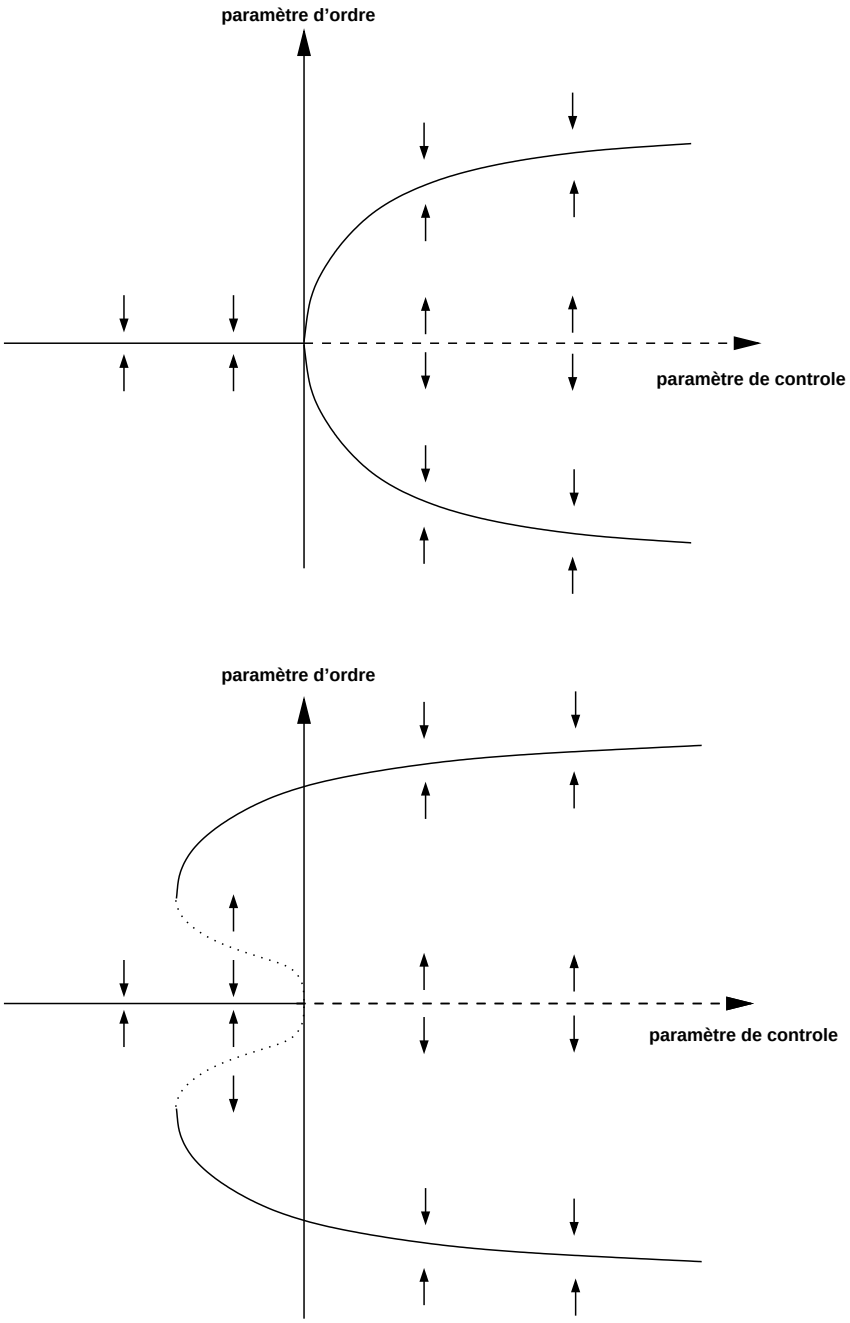

FIG. 1.3: *Diagramme de bifurcation super-critique (graphique du haut) et sous-critique (graphique du bas).*

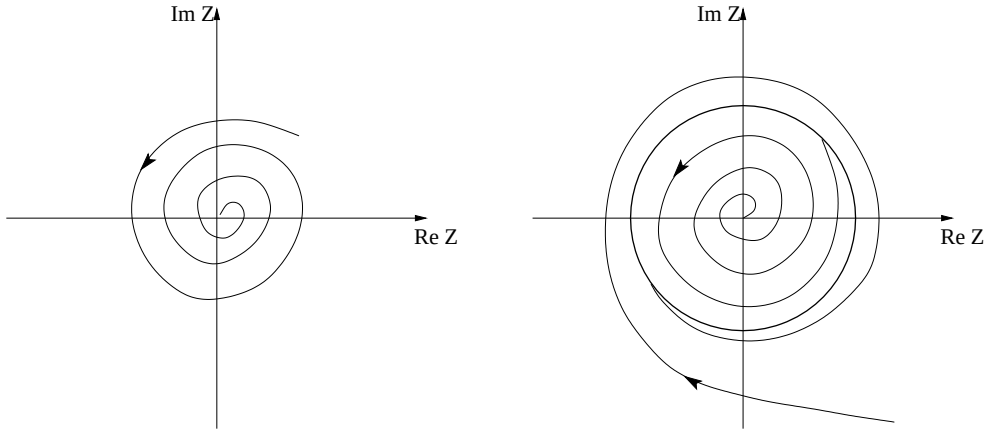

FIG. 1.4: *Diagramme d'une bifurcation Hopf super-critique. Pour $\mu < 0$, les solutions convergent vers le point fixe $r = 0$ (graphique de gauche). Pour $\mu > 0$ les solutions convergent vers le cycle limite de rayon $\sqrt{\mu}$ (cercle en gras), et ce indifféremment pour une condition initiale $r < \sqrt{\mu}$ ou $r > \sqrt{\mu}$.*

l'autre forme normale est similaire mais utilise le complexe conjugué $\bar{Z}$. En posant $Z = re^{i\theta}$, on obtient le système d'équation suivant

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - r^3 \,, \tag{1.8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \gamma r^2 \,. \tag{1.9}$$

Ce système correspond à une bifurcation super-critique pour l'amplitude r et une phase tournant à la vitesse $\omega - \gamma r^2$. Les points fixes de l'équation pour l'amplitude sont $r = 0$, stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$, et $r = \sqrt{\mu}$ (nous considérons seulement $r > 0$) stable pour μ positif. Pour $\mu > 0$ les solutions vont tendre vers un cycle limite de rayon $\sqrt{\mu}$ (cf. figure 1.4).

La bifurcation de Hopf peut aussi être sous-critique si le coefficient du terme non-linéaire $|Z|^2 Z$ est positif, il faut alors prendre en compte un terme non-linéaire en $|Z|^4 Z$ pour saturer l'instabilité.

Les différentes formes normales que nous avons décrites ici permettent de décrire en toute généralité le comportement de systèmes très différents mais se comportant qualitativement de la même façon. Elles expriment en effet des propriétés universelles de ces systèmes.

1.3 Système de Lorenz

Nous allons maintenant nous intéresser à un exemple classique de système dynamique, celui du modèle de Lorenz (1963). Ce système nous intéresse particulièrement car il modélise de manière simplifié la convection de Rayleigh-Bénard, dont nous allons par la suite étudier

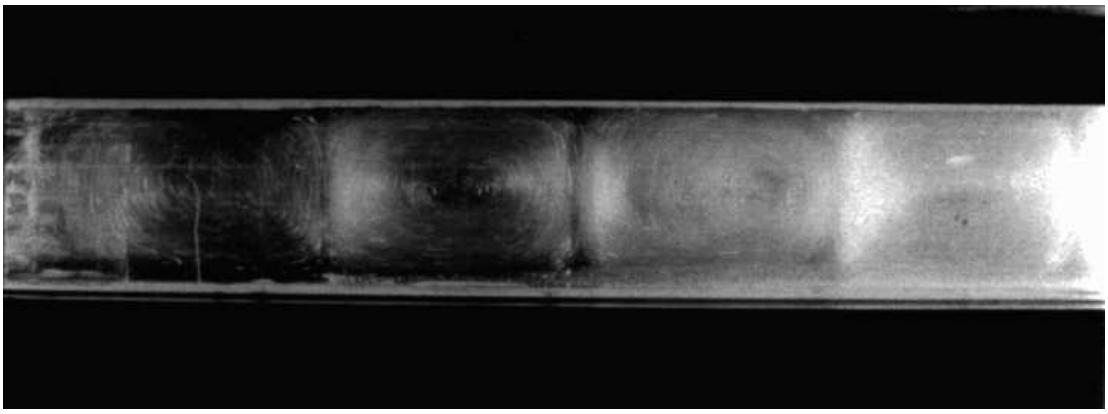

FIG. 1.5: *Réalisation expérimentale des rouleaux de Rayleigh-Bénard près du seuil de convection (Guillou et Jaupart, 1995).*

une variante (dans une coquille sphérique en rotation). Plaçons nous dans un repère cartésien direct (x, y, z) (avec z pour direction verticale), on considère, sous l'approximation de Boussinesq, un fluide compris entre deux plaques espacées d'une longueur D et de température T_2 pour la plaque inférieure et T_1 pour la plaque supérieure avec $T_2 - T_1 > 0$. Ce fluide est dans un champ de gravité $\mathbf{g}$ normal aux plaques et possède un coefficient d'expansion thermique $\alpha > 0$, ainsi que des coefficients de diffusivité cinématique et thermique ν et κ respectivement. Définissons un nombre sans dimension $Ra = \alpha g D^3(T_2 - T_1)/\nu\kappa$, dit nombre de Rayleigh, qui traduit l'intensité du chauffage imposé. Ce nombre va servir de paramètre de contrôle pour les problèmes de convection.

Pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh, le fluide est capable d'évacuer sa chaleur par diffusion et il n'y a pas de convection. Si l'on augmente ce paramètre jusqu'à excéder une valeur critique Ra_c l'état de fluide au repos se déstabilise et il se produit une bifurcation qui entraîne l'apparition de rouleaux de convection stationnaires. Une réalisation expérimentale de ces rouleaux est présentée sur la figure 1.5.

Pour des valeurs croissantes du nombre de Rayleigh, on obtient successivement une convection dépendante du temps puis à travers une série de bifurcations une perte progressive de la périodicité temporelle et au final un écoulement chaotique. Faisons l'hypothèse d'une invariance de la solution dans la direction y.

Introduisons la fonction de courant ψ, dont le gradient orthogonal constitue les composantes de la vitesse $\mathbf{u}$. Introduisons également θ, la déviation au profil statique verticale de température définie comme suit $\theta = T - T_s$.

Admettons, pour l'instant, que les équations adimensionnées régissant le phénomène s'écrivent

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - [\psi, \Delta\psi] = \Delta^2\psi - Ra\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - [\psi, \theta] = Pr^{-1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + \Delta\theta\right), \tag{1.11}$$

où $[a, b] \equiv \partial a/\partial x\, \partial b/\partial z - \partial a/\partial z\, \partial b/\partial x$ et le nombre de Prandtl Pr est égal ν/κ. Ce système sera obtenu plus en détail dans le chapitre 2 pour le cas de convection dans une sphère en rotation. Notons que l'équation (1.10) pour la fonction de courant a été obtenue en prenant le rotationnel de l'équation de la vitesse. Les équations (1.10) et (1.11) sont complétées de conditions aux limites de contraintes horizontales libres pour la vitesse ainsi que d'une condition de non pénétration aux parois. La perturbation de température θ est imposée nulle aux deux bords. Supposons que ψ et θ soient périodiques dans la direction horizontale x, ceci nous permet d'exprimer ces deux variables en terme de modes de série de Fourier. Nous ne garderons qu'un mode de cette série pour ψ et deux pour θ. Cette démarche n'est évidemment rigoureusement valable que très près du seuil. Au seuil, un seul mode va être marginal (celui correspondant à X) et les deux autres seront amortis (ceux correspondant à Y et Z).

Ecrivons ψ et θ sous la forme

$$\psi = \frac{(\pi^2 + k^2)\sqrt{2}}{\pi k} X \sin(kx) \sin(\pi z), \tag{1.12}$$

$$\theta = \frac{Ra_c}{\pi Ra}[\sqrt{2} Y \cos(kx) \sin(\pi z) - Z \sin(2\pi z)], \tag{1.13}$$

où k est le nombre d'onde de la solution dans la direction x et $Ra_c = (\pi^2 + k^2)^3/k^2$. Il est implicitement supposé que le mode le plus instable dans la direction z est le mode de nombre d'onde π (mode 1). Reportons ces deux expressions dans les équations (1.10) et (1.11), nous obtenons un système adimensionné de trois équations différentielles ordinaires couplées pour les variables X, Y et Z

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -PrX + PrY, \\ \frac{dY}{dt} &= -XZ + RX - Y, \\ \frac{dZ}{dt} &= XY - bZ, \end{aligned} \tag{1.14}$$

où le temps est renormalisé par $(\pi^2 + k^2)$, le paramètre de contrôle est normalisé par sa valeur critique $R = Ra/Ra_c$ et b est lié à l'allongement des cellules de convection par $b = 4\pi^2/(\pi^2 + k^2)$.

Il est à noter, que pour reproduire le système original de Lorenz ce système d'équations a été adimensionné en utilisant le temps thermique D^2/κ alors que les équations (1.10) et (1.11) ont été adimensionnées en utilisant le temps visqueux D^2/ν (ce qui introduit un facteur Pr sur l'unité de temps). La variable X représente une perturbation de vitesse, Y la perturbation de température et Z l'écart à un gradient vertical linéaire de température.

Le système passe, par une bifurcation fourche, d'un seul point fixe stable $\mathbf{X}_0$ pour $R < 1$, tel que $X = Y = Z = 0$ à, pour $R > 1$, un point fixe $\mathbf{X}_0$ instable et deux nouveaux points fixes stables $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ tels que $X = Y = \pm\sqrt{b(R-1)}$ et $Z = R - 1$, ceux-ci correspondent à une convection sous la forme de rouleaux parallèles.

On peut montrer que cette bifurcation fourche est super-critique. Il faut pour cela supposer que près du seuil la dynamique de la convection est très lente (Y relaxe vers sa valeur d'équilibre avec un taux de l'ordre de $R - 1 \leqslant 1$) et que seul Z relaxe rapidement (taux b) vers une valeur lentement variable XY/b. Il vient alors

$$\frac{(1+Pr)}{Pr}\frac{dX}{dt} = (R-1)X - X^3/b, \tag{1.15}$$

qui correspond bien à la forme normale d'une équation super-critique.

Par construction, le modèle de Lorenz n'est pleinement justifié que dans un régime de paramètres proche du seuil de bifurcation. La démarche qui consiste à utiliser un modèle faiblement non-linéaire hors de son domaine de validité stricte est courante. Lorenz a utilisé le sien dans des régimes de paramètres très éloignés du seuil, ce qui lui a permis de décrire qualitativement les transitions vers le chaos. Bien que nos modèles soient moins sévèrement tronqués, nous utiliserons également des modèles faiblement non-linéaires en dehors de leur strict domaine de validité (le voisinage du seuil) au chapitre 2.

Chapitre 2

Instabilité convective

2.1 Modélisation

2.1.1 Système d'équations

Dans nos simulations, nous adoptons une géométrie simplifiée pour le noyau fluide terrestre. Celui-ci est en effet approché par une coquille sphérique (volume compris entre deux sphères concentriques). Ce choix nous amène donc à négliger les trois points suivants :

- Les frontières noyau-manteau (CMB) et noyau interne-noyau externe (ICB) sont légèrement elliptiques, l'ellipticité de la CMB est d'environ $2.67 \cdot 10^{-3}$ [71] et est plus faible pour l'ICB.
- Ces deux frontières comportent des irrégularités de petites échelles [31].
- l'ICB se déplace en rayon à cause de la cristallisation de la graine solide.

Par souci de comparaison avec la théorie, nos modèles numériques ne prendront en compte par la suite que la convection thermique comme source d'énergie (celle-ci est formellement équivalente à la convection solutale aux valeurs de diffusivité près).

Dans nos calculs, le fluide est considéré comme Newtonien et Boussinesq. L'approximation Boussinesq signifie que le fluide est homogène et incompressible sauf pour la force d'Archimède où sa compressibilité est prise en compte au premier ordre. D'après le modèle PREM la compressibilité du mélange dans le noyau externe est d'environ 20%. Cette hypothèse d'incompressibilité est une hypothèse forte puisqu'elle nous amène à ne pas prendre en compte les variations de la densité avec la température et exclue le gradient thermique adiabatique présent dans le noyau fluide terrestre. Pour un fluide compressible si une particule fluide est moins dense que son environnement, elle va monter (direction radiale) vers des pressions plus faibles donc se dilater et se refroidir. Au contraire si une particule fluide est plus lourde, elle va descendre donc se contracter et s'échauffer. Il existe donc un gradient thermique tel que lorsqu'on déplace une particule fluide sans échange de chaleur elle reste en équilibre avec son environnement. Ce gradient s'appelle le gradient adiabatique, il est défini comme

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{g\alpha T}{c_p}, \tag{2.1}$$

où α est le coefficient d'expansion thermique, c_p la chaleur spécifique à pression constante et g la constante de gravité.

La première équation que nous étudions est celle de la conservation de la masse. Le fluide étant newtonien et Boussinesq sa masse volumique est donc supposée constante en espace et en temps. L'équation de conservation de la masse,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{2.2}$$

se réduit, sous ces hypothèses, à

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{2.3}$$

Nous allons maintenant étudier l'équation de conservation de la quantité de mouvement ou équation de Navier-Stokes. Celle-ci n'est en fait que l'expression de la deuxième loi de Newton où la variation de quantité de mouvement est égale à la somme des forces surfaciques et volumiques. Elle fait intervenir l'opérateur de dérivée totale ou dérivée particulaire dont l'expression est

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla). \tag{2.4}$$

Le dernier terme est appelé terme advectif. L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \tag{2.5}$$

où σ_{ij} est le tenseur des contraintes et f_i correspond aux forces volumiques qui s'exercent sur le fluide. Le tenseur des contraintes pour un fluide newtonien a pour expression

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \tag{2.6}$$

où P est la pression, μ est le coefficient de viscosité dynamique et λ la seconde viscosité. L'écoulement étant à divergence nulle dans notre cas, on peut simplifier cette expression en

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \tag{2.7}$$

Injectons maintenant cette expression dans l'équation (2.5), il vient l'expression suivante

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{u} + F. \tag{2.8}$$

Dans notre cas la divergence de la vitesse est nulle, ce qui signifie que la pression est une quantité asservie qui s'adapte pour satisfaire cette contrainte. On pourra donc par la suite

intégrer au gradient de pression tous les termes de gradient. L'équation pour la pression est obtenue en prenant la divergence de (2.8).

L'équation (2.8) est exprimée dans un référentiel galiléen, nous nous intéressons ici au fluide contenu dans une sphère en rotation, il est donc plus judicieux d'exprimer cette équation dans un référentiel en rotation. Dans le calcul suivant les termes exprimés dans le référentiel galiléen sont indicés par « g » et les termes exprimés dans le référentiel en rotation par « r ». $\mathbf{\Omega}$ est la vitesse angulaire de rotation du référentiel.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_g \mathbf{u}_g}{\partial t} &= \frac{\partial_g}{\partial t}\frac{\partial_g \mathbf{x}}{\partial t}, \\
&= \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\wedge\right)\left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\wedge\right)\mathbf{x}, \\
&= \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \mathbf{\Omega}\wedge\right)(\mathbf{u}_r + \mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{x}), \\
&= \frac{\partial_r \mathbf{u}_r}{\partial t} + 2(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{u}_r) + \frac{\partial_r \mathbf{\Omega}}{\partial t}\wedge\mathbf{x} + \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{x}), \\
&= \frac{\partial_r \mathbf{u}_r}{\partial t} + 2(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{u}_r) + \frac{\partial_r \mathbf{\Omega}}{\partial t}\wedge\mathbf{r} + \mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur du système de coordonnées sphériques (r, θ, φ). Faisons l'hypothèse que les variations temporelles de $\mathbf{\Omega}$ (terme de Poincaré) sont négligeables (la rotation est supposée constante). Le terme centrifuge $\mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{r})$ s'écrit de manière équivalente comme

$$\mathbf{\Omega}\wedge(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{s}) = \mathbf{\Omega}\wedge(s\Omega\mathbf{e}_\varphi) = -s\Omega^2\mathbf{e}_s = -\frac{1}{2}\nabla(\Omega^2 s^2), \tag{2.10}$$

où $\mathbf{s}$ est le rayon vecteur du système de coordonnées cylindriques (s, φ, z). Sous cette forme de gradient, le terme centrifuge peut être intégré au terme de pression.

Par la suite, toutes nos équations seront exprimées dans le référentiel en rotation. Afin de ne pas en alourdir l'écriture, l'indice « r » ne sera pas conservé. L'équation (2.8) s'écrit maintenant

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla P^* - 2\rho(\mathbf{\Omega}\wedge\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + F, \tag{2.11}$$

où P^* est la pression modifiée par la force centrifuge.

Le terme F dans cette équation rassemble les forces volumiques exercées sur le fluide, la poussée d'Archimède et la force de Laplace, qui traduit l'action d'un champ magnétique sur un fluide conducteur. Cette dernière ne sera introduite que plus tard puisque nous étudierons dans un premier temps un modèle purement hydrodynamique.

La poussée d'Archimède est le seul terme pour lequel nous allons prendre en compte les variations spatiales de densité. Cette force constitue dans nos modèles le moteur des mouvements convectifs. La masse volumique linéarisée a pour expression

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_s)), \tag{2.12}$$

où T_s est le profil de température statique de référence (sans convection), nous le décrirons plus en détail dans la section suivante. On notera par la suite $\theta = T - T_s$.

Le terme d'attraction gravitationnelle a pour expression $\rho\mathbf{g}$, il contient le terme $\rho_0\mathbf{g}$ qui est le terme principal et le terme $-\alpha\rho_0\theta\mathbf{g}$, la poussée d'Archimède qui traduit une modification locale d'attraction due à un changement de masse volumique induit par le chauffage du fluide. On considère ici une gravité purement radiale telle que $\mathbf{g} = -g\,r\,\mathbf{e_r}$. Ce profil de gravité correspond à une densité uniforme de référence qui néglige les effets de la variation de masse volumique sur $\mathbf{g}$. Le terme $\rho_0\mathbf{g}$ est lui aussi inclus dans le terme de pression.

L'équation (2.11) devient donc

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\Pi - 2\Omega\,(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u}) + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha\theta g\mathbf{r}, \tag{2.13}$$

où $\nu = \mu/\rho_0$ la viscosité cinématique. Par convention le terme de gradient de pression modifiée $\nabla\Pi$ regroupera dorénavant tous les termes de gradient.

Considérons à présent l'équation de l'énergie. Notons e l'énergie interne massique du fluide. Pour un fluide incompressible, on a (Tritton, 1988)

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\nabla\cdot\mathbf{q} + S, \tag{2.14}$$

où $\mathbf{q}$ est le flux de chaleur. Ce flux, d'après la loi de Fourier pour un fluide isotrope, a pour expression $\mathbf{q} = -k\nabla T$, où k est le coefficient de conductivité thermique. S désigne un taux de production d'énergie, on négligera pour ce terme l'apport d'énergie lié aux frottements visqueux. L'approximation de Boussinesq permet de dire que e ne dépend pas de la pression et s'écrit $e = C_pT$.

L'équation de la chaleur devient alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)T + \kappa\Delta T + S, \tag{2.15}$$

où $\kappa = k/\rho C_p$ est la diffusivité thermique du fluide et S un terme de source.

Différents modes de chauffage peuvent être considérés, le chauffage dit interne ($S \neq 0$ et conditions aux limites homogènes) qui suppose que les sources de chaleur sont uniformément réparties dans le noyau, ou le chauffage dit différentiel ($S = 0$ et gradient imposé entre les deux frontières). On peut aussi envisager de combiner ces modes de chauffage. Nous utiliserons l'un ou l'autre de ces modes de chauffage au cours de notre étude (sans les combiner), en prenant soin de toujours préciser le mode de chauffage retenu.

Nous décomposons la température T en une température stationnaire T_s indépendante du temps et un terme de fluctuation θ. L'équation de la température stationnaire s'écrit alors

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \kappa\Delta T_s + S = 0 \Rightarrow \Delta T_s = -\frac{S}{\kappa} = -3\tilde{\beta}\,, \tag{2.16}$$

d'où avec les conditions aux limites de température constante aux frontières

$$T_s = -\frac{\tilde{\beta}}{2}\,r^2 + T_0\,. \tag{2.17}$$

Avec cette décomposition, l'équation (2.15) s'écrit maintenant

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)T_s - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta + \kappa\Delta\theta\,. \tag{2.18}$$

Comme

$$\nabla\mathbf{T_s} = -\tilde{\beta}\mathbf{r}, \tag{2.19}$$

on a

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \tilde{\beta}\mathbf{u}\cdot\mathbf{r} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta + \kappa\Delta\theta\,. \tag{2.20}$$

Pour simuler les mouvements convectifs d'un fluide Boussinesq en rotation, nous aurons donc à résoudre numériquement les équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla\Pi - 2\Omega\,(\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{u}) + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha\theta g\mathbf{r}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta &= \tilde{\beta}\mathbf{u}\cdot\mathbf{r} + \kappa\Delta\theta\,, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ce système est complété par un jeu de conditions aux limites. Pour la vitesse les calculs seront effectués avec les deux types de conditions aux limites, non-glissement ($\mathbf{u} = 0$) et contraintes horizontales libres ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{n}\cdot\nabla(\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}) = 0$). Pour la température on impose $\theta = 0$ aux deux bords.

On peut à présent adimensionner ce système avec r_e le rayon externe du noyau terrestre ($\simeq$ 3400 km) comme échelle externe unique de longueur. Cette échelle est en effet adaptée à l'étude numérique de la sphère dans sa globalité. On utilise r_e^2/ν, comme échelle de temps, elle correspond à un temps caractéristique basé sur le temps d'atténuation visqueux. On utilise enfin $\tilde{\beta}r_e^2\nu/\kappa$ comme échelle de température.

Le système adimensionné s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla\Pi - E^{-1}\,(\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{u}) + \Delta\mathbf{u} + Ra\,\theta\,\mathbf{r}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta &= Pr^{-1}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r} + \Delta\theta), \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Nous avons introduit trois nombres sans dimension basés sur les échelles caractéristiques précédemment définies

$$E = \frac{\nu}{2\Omega r_e^2}\,,\quad Ra = \frac{\alpha\tilde{\beta}gr_e^6}{\nu\kappa}\,,\quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}\,. \tag{2.23}$$

Le nombre d'Ekman E mesure le rapport entre le terme visqueux et le terme de Coriolis, ou de manière équivalente le rapport du temps caractéristique de rotation sur le temps caractéristique d'atténuation visqueux. Le nombre de Rayleigh Ra qui mesure l'importance

du forçage thermique. Il caractérise le rapport entre le terme qui favorise le mouvement, la poussée d'Archimède, et ceux qui s'y opposent, les termes de diffusion visqueuse et thermique. Le nombre de Prandtl Pr mesure le rapport entre le terme de diffusion visqueuse et celui de diffusion thermique, il peut aussi être interprété comme le quotient du temps caractéristique de diffusion thermique sur le temps caractéristique de diffusion visqueuse.

2.1.2 Géostrophie et modèle quasi-géostrophique

Considérons pour l'instant la première équation du système (2.22) sans le terme de forçage thermique, on a

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla\Pi + \Delta\mathbf{u} - E^{-1}(\mathbf{e_z}\wedge\mathbf{u})\,. \tag{2.24}$$

On sait que pour le noyau terrestre $\Omega \simeq 7.3\cdot 10^{-5}$ rad/s, avec $r_e \simeq 3.5\cdot 10^6$ m et $\nu \approx 10^{-6}\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$ (Stacey, 1992) on obtient un nombre d'Ekman $E \approx 10^{-15}$.

Pour un nombre d'Ekman aussi petit, on peut, en première approximation, négliger tous les termes devant le terme de Coriolis, sauf bien sûr le gradient de pression qui lui est asservi afin de garantir $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$.

On obtient l'équation dite de l'équilibre géostrophique

$$E^{-1}(\mathbf{e_z}\wedge\mathbf{u}) = -\nabla\Pi\,. \tag{2.25}$$

En prenant le rotationnel de cette équation, on obtient

$$(\mathbf{e_z}\cdot\nabla)\mathbf{u} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z} = 0\,. \tag{2.26}$$

Cette contrainte constitue le théorème de Proudman-Taylor : dans un écoulement géostrophique la vitesse est invariante selon la direction de l'axe de rotation z. Plaçons nous en coordonnées cylindriques (s,φ,z), un écoulement géostrophique dans une sphère aura nécessairement u_s et u_z nulles pour satisfaire $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ et la non-pénétration aux bords.

Prenons l'exemple d'un u_s non nul, étant invariant selon z, u_s sera aussi non nul à la frontière inférieure et supérieure. La non-pénétration à la paroi externe impliquera alors une vitesse verticale non nulle et opposée pour ces deux frontières. L'invariance selon z ne sera ainsi plus vérifiée pour u_z.

Les seuls mouvements respectant le théorème sont donc ceux pour lesquels seule u_φ est non nulle (mouvements angulaires ou zonaux), u_φ ne dépend évidemment pas de z et ne peut pas non plus dépendre de φ pour satisfaire la contrainte de divergence nulle, on a donc $\mathbf{u} = u_\varphi(s)\mathbf{e}_\varphi$. Le mouvement s'organise en cylindres concentriques, inclus dans la sphère et coaxiaux avec l'axe de rotation de la sphère, appelés contours géostrophiques (cf fig.2.1).

Si maintenant on réintroduit le forçage thermique, on note d'emblée que les mouvements convectifs ne vont pas pouvoir respecter cette contrainte. En effet des mouvements purement zonaux ne permettent pas au fluide le transport radial de la température. Pour autant

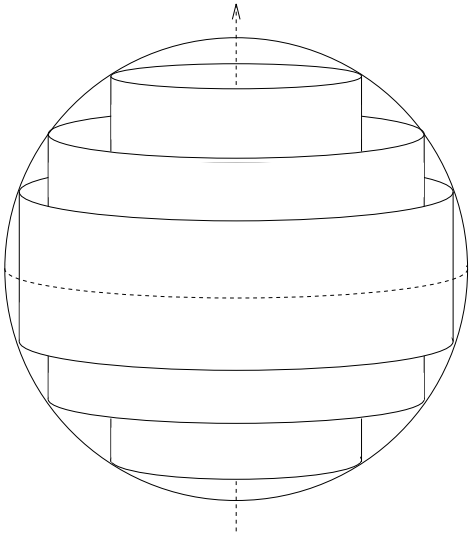

FIG. 2.1: *Les contours géostrophiques dans le cas d'une sphère parfaite correspondent à des cylindres co-axiaux avec l'axe de rotation du système.*

la géométrie de l'écoulement restera fortement influencée par la rotation, nous resterons donc pour la suite de notre étude en coordonnées cylindriques (s, φ, z).

Bien que le mouvement obtenu ne soit plus exactement géostrophique, les expériences (Carrigan et Busse, 1983 ; Cardin et Olson, 1994) ont montré que la quasi-invariance selon z des mouvements convectifs est une caractéristique robuste de l'écoulement à bas nombre d'Ekman. Cependant les mouvements verticaux ne peuvent pas être z-invariant. Nous avons donc utilisé un modèle à deux dimensions dit modèle quasigéostrophique (QG) où seuls les mouvements horizontaux sont invariant selon z mais pas les mouvements verticaux, ce modèle, dit quasi-géostrophique sphérique fut introduit pour ce problème par Busse (1970). Cette hypothèse implique, pour satisfaire à un divergence nulle, une vitesse verticale linéaire en z.

Nous supposons que les mouvements verticaux ont une variation à l'échelle de la sphère, et nous allons donc par la suite négliger les gradients verticaux devant les gradients horizontaux ($\frac{\partial}{\partial z} \ll \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$). L'équation de conservation de la matière devient donc

$$\nabla_H \cdot \mathbf{u} \simeq 0\,. \tag{2.27}$$

où l'indice H désigne les composantes horizontales.

En coordonnées cylindriques le système (2.22) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} &= -\nabla\Pi - E^{-1}\left(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{u}\right) + \Delta\mathbf{u} + Ra\theta(s\mathbf{e_s} + z\mathbf{e_z}), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\theta &= Pr^{-1}(su_s + zu_z + \Delta\theta), \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Prenons maintenant le rotationnel de la première équation de ce système, afin d'éliminer le gradient de pression. Il en résulte l'équation de la vorticité. Nous ne nous intéressons qu'à ω, la composante selon z de cette équation ($\omega = (\nabla \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e_z}$), puisqu'elle ne met en jeu que les composantes horizontales de la vitesse, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \Delta\omega + (E^{-1} - \omega)\frac{\partial u_z}{\partial z} - Ra\,\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}. \tag{2.29}$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette équation peut être simplifié. Il comporte en effet un terme en E^{-1}, qui est très grand puisque nous allons nous intéresser à la limite des petits nombres d'Ekman, et un terme en ω, qui à priori est d'ordre un. Ce dernier terme est donc négligeable devant le terme précédent.

En moyennant ensuite en z l'équation (2.29) à l'aide de $< >_z = \frac{1}{2H}\int_{-\mathrm{H}}^{\mathrm{H}} \mathrm{d}z$, où H est la demi hauteur d'une colonne de fluide, il vient

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\bar{\omega} = \Delta\bar{\omega} + \frac{E^{-1}}{2H}[u_z]_{-H}^{H} - Ra\,\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \varphi}\,. \tag{2.30}$$

De plus, nous avons $\bar{\omega} = \omega$ car ω, la composante selon z de la vorticité, est indépendante de z d'après l'hypothèse quasigéostrophique.

Le terme en E^{-1}, qui correspond à l'injection ou au pompage de fluide aux extrémités inférieure et supérieure d'une colonne fluide, agit comme une source ou un puit de vorticité. La vitesse verticale u_z a une double origine. La première est due à la conversion des mouvements radiaux en mouvements verticaux, du fait de la condition de non pénétration à la sphère externe.

Cette condition de non pénétration aux parois implique en effet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n_{sup}} = u_s cos\lambda + u_z sin\lambda = 0 \Rightarrow u_{z_{sup}} = -u_{s_{sup}}\frac{s}{H} = -u_{s_{sup}}\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,,$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n_{inf}} = u_s cos\lambda - u_z sin\lambda = 0 \Rightarrow u_{z_{inf}} = u_{s_{inf}}\frac{s}{H} = u_{s_{inf}}\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,,$$

où λ correspond à la latitude à laquelle une colonne de fluide, de demi hauteur H et située au rayon s, touche la sphère externe. La normale supérieure (inférieure) à la sphère externe est désignée par $\mathbf{n_{sup}}$ (respectivement $\mathbf{n_{inf}}$).

La deuxième est due au pompage induit par la couche d'Ekman (voir la section suivante pour une définition). La vitesse verticale $\mathbf{v_p}$ induite loin du bord par ce pompage a pour expression (Greenspan, 1968)

$$\mathbf{v_p} = -\frac{1}{2}E^{\frac{1}{2}}\mathbf{e_z} \cdot \nabla \wedge \left(\frac{\mathbf{n} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{u}}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e_z}|}}\right)\mathbf{e_z}\,. \tag{2.31}$$

On extrait de cette formule l'expression de $u_{z_{sup}}$ induite par le pompage

$$u_{z_{sup}} = (\mathbf{v_p} \cdot \mathbf{e_z})(H) = -\frac{1}{2}\frac{E^{1/2}}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e_z}|}}\omega. \tag{2.32}$$

Le pompage induit à l'extrémité inférieure produit une vitesse $u_{z_{inf}}$ opposée.

Nous allons par la suite négliger ce terme de pompage devant le terme de viscosité dans l'équation de ψ. En effet le terme de pompage est en $E^{-\frac{1}{2}}$ et pour que ce terme devienne du même ordre que le terme viscosité, $E^{-\frac{1}{2}}\omega \sim \Delta\omega$, il faut que l'échelle caractéristique l de variation de ω vérifie $l \sim E^{\frac{1}{4}}$. Or comme nous le verrons dans la section 2.2, la convection a pour échelle caractéristique $E^{\frac{1}{3}}$, à cette échelle plus petite la viscosité est dominante.

L'équation (2.30) s'écrit donc

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \Delta\omega - E^{-1}\frac{s}{1-s^2}u_s - Ra\,\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \varphi}\,. \tag{2.33}$$

La deuxième équation du système (2.22) (équation de la chaleur) est elle aussi moyennée en z avec $<>_z$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = -\overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta} + Pr^{-1}(su_s + \Delta\bar{\theta})\,. \tag{2.34}$$

Le terme $\overline{zu_z}$ est quant à lui négligé puisqu'il implique une vitesse verticale.

Notons que la géométrie de notre domaine a été modifiée lors de cette intégration. Le rôle de la graine est ainsi étendu sur l'ensemble du cylindre tangent. Il en résulte un domaine d'intégration à deux dimension qui n'est plus simplement connexe. Nous négligeons donc tous les phénomènes convectifs à l'intérieur du cylindre tangent. Ceci est raisonnable pour la convection près du seuil. En effet, Roberts (1965) a calculé le seuil pour ce mode convectif, ce seuil est bien plus élevé que celui que nous allons étudier (en terme de nombre de Rayleigh).

D'après l'hypothèse quasi-géostrophique on a un champ de vitesse $\mathbf{u}$ qui dans le plan (s, φ) est à divergence horizontale nulle. Celui-ci peut donc être exprimé en terme de fonction de courant ψ comme suit

$$u_s = \frac{1}{s}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad u_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial s}, \text{ d'où } \omega = -\Delta\psi + (\nabla \wedge u_0\mathbf{e}_\varphi) \cdot \mathbf{e_z}\,, \tag{2.35}$$

où u_0 est le mouvement zonal moyenné en φ. La condition de non pénétration implique que la vitesse normale soit nulle à la frontière interne et externe, ψ est donc constante à la paroi. La fonction de courant étant définie à une constante près on peut, dans le cas d'un domaine simplement connexe, prendre celle-ci comme nulle. Or, notre domaine n'est pas simplement connexe et ψ ne peut donc pas être prise comme nulle aux deux frontières sans introduire un mouvement azimutal axisymétrique (ou vent zonal) arbitraire qui serait sans origine physique (voir [47]). Pour contourner cette difficulté, nous avons choisi de résoudre séparément les équations des mouvements axisymétriques et non-axisymétriques. Les équations sont résolues en modes de Fourier selon φ. Pour tous les modes $m \neq 0$, ψ peut effectivement être prise comme nulle aux deux parois (voir [2] pour une démarche similaire).

2.1.3 Couches d'Ekman et pompage

Dans le cas de conditions aux limites de non-glissement la vitesse du fluide doit se raccorder à zéro à la paroi. Ceci a pour conséquence la présence d'une couche limite vis-

queuse, le fluide étant en rotation cette couche limite est ici une couche d'Ekman. Alors que par définition dans notre modèle la force de Coriolis est dominante dans le coeur de la coquille sphérique, dans la couche d'Ekman c'est un équilibre entre la force de Coriolis et les forces visqueuses qui est réalisé (et bien sûr le gradient de pression). Cette couche limite est d'épaisseur $E^{1/2}$ sauf dans la région proche de l'équateur de la sphère d'extension $E^{1/5}$ où elle est d'épaisseur $E^{2/5}$. La couche d'Ekman est importante pour l'écoulement dans son ensemble. En effet, le profil de vitesse horizontale créé dans la couche (la spirale d'Ekman) induit, pour que la conservation de la masse soit assurée, un écoulement normale à la couche appelé pompage d'Ekman. Cet écoulement secondaire créé par le pompage est non nul loin de la couche d'Ekman et influe sur la circulation générale du fluide (voir en annexe pour plus de détails sur la couche d'Ekman).

Contrairement aux modes non-axisymétrique ($m \neq 0$), le mode axisymétrique (m=0) est de grande échelle en φ, nous allons donc établir l'équation des mouvements axisymétriques en tenant compte de ce pompage d'Ekman. En prenant la composante φ de l'équation de Navier-Stokes du système (2.22), on obtient

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\varphi = -\frac{1}{s}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - E^{-1} u_s + \Delta u_\varphi. \tag{2.36}$$

En moyennant ensuite cette équation en φ et en z ($\overline{u}_s$ signifiant par exemple la moyenne en φ de u_s) il vient

$$\frac{\partial \overline{u_\varphi}}{\partial t} + \overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\varphi} = -\frac{E^{-1}}{2H} \int_{-H}^{H} \overline{u_s} dz + \Delta \overline{u_\varphi} - \frac{\overline{u_\varphi}}{s^2}. \tag{2.37}$$

Le gradient de pression a disparu identiquement. Le terme de Coriolis est nul à l'ordre dominant d'après l'incompressibilité et en utilisant la formule de Green (D.33). Pour trouver l'expression du pompage il nous faut donc aller aux ordres supérieurs. On part de l'incompressibilité intégrée sur le volume, ce qui d'après le théorème de la divergence nous donne

$$\iint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0. \tag{2.38}$$

Considérons S la surface fermée formée par le cylindre de rayon s_i (Σ_1), le cylindre concentrique de rayon s (Σ_2) et la calotte sphérique trouée fermant au-dessus et en-dessous l'espace compris entre ces cylindres (Σ_3).

On applique le même moyennage que précédemment

$$\iint_{\Sigma_1} \overline{u_s}\, dS + \iint_{\Sigma_2} \overline{u_s}\, dS + \iint_{\Sigma_3} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_{-H}^{H}\, dS = 0\,. \tag{2.39}$$

Le premier terme est nul car u_s est nulle à la graine et donc nulle sur tout le cylindre de rayon s_i (u_s est indépendante de z). On obtient donc

$$2\pi s \int_{-H}^{H} \overline{u_s} dz + \iint_{\Sigma_3} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_{-H}^{H}\, dS = 0\,. \tag{2.40}$$

Le terme $[\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}]_{-H}^{H}$ traduit l'existence d'une vitesse normale à la paroi engendrée par le pompage d'Ekman. Cette vitesse, pour le couvercle supérieur, s'exprime par (Greenspan, 1968)

$$\mathbf{u}(H)\cdot\mathbf{n} = -\frac{1}{2}E^{\frac{1}{2}}\nabla_e \wedge \left(\frac{\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}+\mathbf{u}}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}|}}\right)\cdot\mathbf{n}, \tag{2.41}$$

où ∇_e n'implique que des dérivés horizontales.

En injectant cette expression dans l'équation (2.40), il vient

$$2\pi s\int_{-H}^{H}\overline{u_s}dz - E^{\frac{1}{2}}\iint_{\Sigma_3}\nabla_e\wedge\left(\frac{\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}+\mathbf{u}}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}|}}\right)d\mathbf{S} = 0\,. \tag{2.42}$$

Il nous faut maintenant appliquer le théorème du rotationnel (Stokes) sur le deuxième terme de cette égalité. Pour utiliser ce théorème il faut que le contour de la circulation soit connexe ce qui n'est pas le cas pour la calotte sphérique trouée que nous considérons. On peut cependant écrire

$$\iint_{\Sigma_3} = \iint_{\Sigma_{totale}} dS - \iint_{\Sigma_{trou}} dS\,, \tag{2.43}$$

où Σ_{totale}, la surface englobant le trou, et Σ_{trou} sont deux surfaces connexes. En posant comme nulle la vitesse dans le cylindre tangent ce qui annule la contribution du trou, on obtient

$$\iint_{\Sigma_3}\nabla_e\wedge\left(\frac{\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}+\mathbf{u}}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}|}}\right) = \oint_\Gamma\frac{(\mathbf{n}\wedge\mathbf{u})\cdot\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}|}}sd\varphi + \oint_\Gamma\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}|}}sd\varphi\,, \tag{2.44}$$

où Γ est le contour de rayon s.

Ce résultat n'est valable que pour des conditions aux limites de type non-glissement et pour des bords au repos dans le référentiel considéré. Il devra être adapté pour d'autres configurations (par exemple pour une super rotation de la graine). Le premier terme du membre de droite de l'équation précédente contient un produit mixte avec $\mathbf{n}$ la normale contenue dans un plan (s,z) et e_φ, il est donc nul, on obtient l'égalité suivante

$$\int_{-H}^{H}\overline{u_s}dz = E^{\frac{1}{2}}\frac{\overline{u_\varphi}}{\sqrt{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{e_z}|}}\,. \tag{2.45}$$

Le système d'équations à résoudre est le système quasi-géostrophique

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\Delta\psi &= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\omega + \frac{E^{-1}}{1-s^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + Ra\,\frac{\partial\bar\theta}{\partial\varphi}\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}-\left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)\right)u_0 &= -\left(\overline{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_\varphi}\right)_0 - \frac{E^{-1/2}}{2(1-s^2)^{3/4}}\,u_0\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}-Pr^{-1}\Delta\right)\bar\theta &= -(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\overline{\theta} + Pr^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Dans le cadre de notre modèle quasi-géostrophique et pour des conditions aux limites de contraintes libres le terme de pompage sur le vent zonal n'existe pas. En effet, de part l'hypothèse quasi-géostrophique le vent zonal est invariant selon z, la contrainte verticale est donc nulle et son raccordement à zéro aux parois ne crée pas de pompage.

Dans le cas de conditions aux limites de non-glissement le pompage sur le vent zonal sera tout d'abord négligé puis réintroduit pour étudier son effet sur les caractéristiques de l'écoulement.

2.2 Description théorique

2.2.1 Onde de Rossby

Les phénomènes convectifs dans une sphère en rotation ne sont pas observés lorsque la quantité de chaleur apportée au fluide n'est pas suffisante, c'est-à-dire pour de faibles valeurs du nombre de Rayleigh. En effet, pour un chauffage trop faible le fluide est capable d'évacuer la chaleur qui lui est fournie par diffusion thermique. Une instabilité convective apparaît lorsque le transport de chaleur par diffusion seule n'est plus suffisant. Ceci se produit lorsque la chaleur apportée au système dépasse un certain seuil, ce seuil correspond à une valeur du nombre de Rayleigh, appelée nombre de Rayleigh critique et souvent noté Ra_c.

Cette instabilité convective ne peut apparaître sous la forme de cylindres géostrophiques, car ceux-ci ne permettent pas au fluide d'évacuer son énergie. La convection a donc besoin pour s'installer de briser cet l'équilibre géostrophique. Elle apparaît sous la forme d'un collier de colonnes co-axial avec l'axe de rotation de la coquille sphérique (cf fig.2.2). Ce collier est en fait une onde, dite onde de Rossby thermique, qui se déplace dans le sens de la rotation solide du fluide, mais plus vite que celui-ci.

Les ondes de Rossby ont pour origine l'inclinaison des bords de la sphère. L'effet stabilisateur de la rotation s'équilibre avec l'effet déstabilisateur de la poussée d'Archimède. C'est d'ailleurs elle qui est responsable de la pérennité de ces ondes qui, sans cela, seraient amorties par frottement visqueux, c'est pourquoi on parle dans ce cas d'ondes de Rossby thermiques.

La localisation des colonnes au rayon critique est le résultat de la compétition entre deux effets contraires. Le gradient thermique d'une part, qui dans le cas de chauffage interne que nous considérons ici est plus fort à grand rayon cylindrique (voir équation (2.19)) et la contrainte géostrophique d'autre part, qui est plus faible près de l'axe de rotation car la pente de la sphère y est plus petite. Dans le cas de chauffage différentiel le gradient thermique est plus fort près de l'axe et la convection se développe toujours le long du cylindre tangent [27].

Ces colonnes vont par paire de colonnes contra-rotatives, le mouvement effectif d'une particule fluide sera donc au premier ordre un va et vient dans la direction radiale lié aux passages successifs des colonnes tournant dans un sens puis dans l'autre.

Le principe de l'onde de Rossby peut être décrit de manière assez simple. Considérons

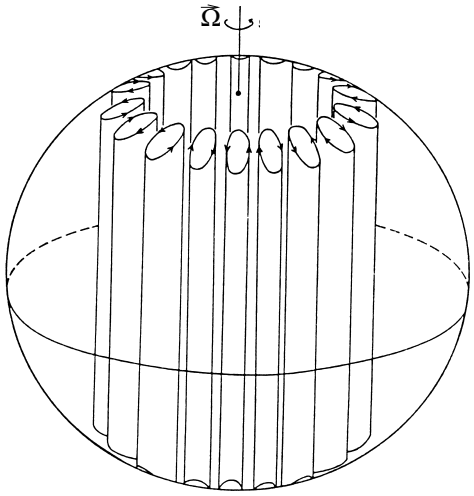

FIG. 2.2: *Instantané des colonnes de convection au seuil. Ces colonnes dérivent rapidement dans le sens prograde (Busse, 1970).*

un repère local cartésien dans le plan équatorial (voir figure 2.3). Partant d'un état de fluide au repos, une particule fluide B (donc une colonne de fluide dans le plan normal à la figure, cf Proudman-Taylor) qui, déstabilisée par une perturbation, se déplace vers une zone moins profonde (en s'éloignant de l'axe), par conservation de la masse va s'élargir et par conservation du moment cinétique (qui n'est pas nul car le repère est en rotation) va tourner dans le sens inverse de la rotation de la sphère. Cela va donc localement créer un anticyclone (fig.2.3.1). Cette différence de vitesse de rotation aura tendance à déplacer A vers une zone de fluide moins profond et donc A va tourner moins vite, et C vers une zone de fluide plus profond, C va donc tourner plus vite. L'action conjointe de A et C va ramener B vers son point de départ (fig.2.3.2). Le système étant périodique C est ramené à l'équilibre par A (fig.2.3.3). La perturbation qui était en B s'est déplacée en A, on a bien propagation de la perturbation dans le sens prograde. La période, temporelle et spatiale, de ces ondes va diminuer avec l'augmentation de la vitesse de rotation car la force de rappel sera plus importante.

2.2.2 Etudes analytiques

L'étude analytique locale au seuil (en chauffage uniforme), réalisée dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman, a été menée par Roberts (1968) et corrigée par Busse (1970). Roberts supposait en effet que le mode le plus instable au seuil de convection possédait une composante axiale de vitesse symétrique par rapport à l'équateur, Busse a corrigé cette hypothèse en prenant une composante axiale antisymétrique.

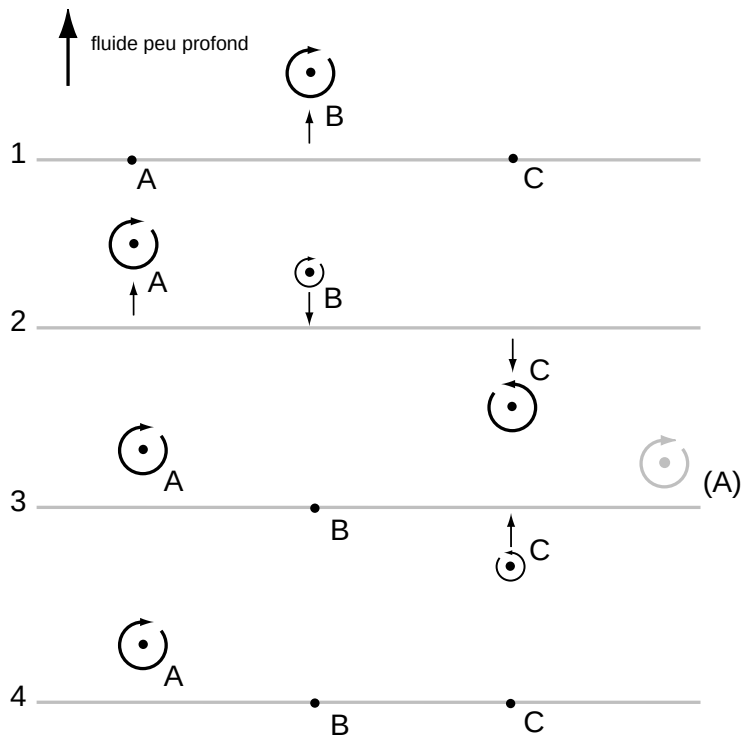

FIG. 2.3: *Mécanisme de l'onde de Rossby, la direction du fluide peu profond indique l'extérieur de la sphère (d'après Aubert, 2001).*

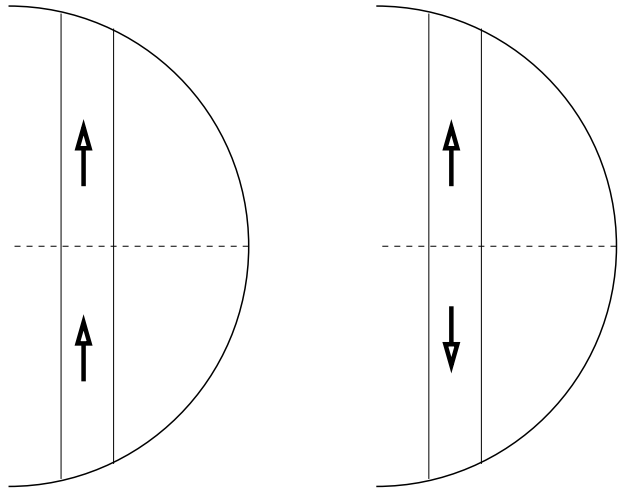

FIG. 2.4: *Hypothèse sur la symétrie de l'écoulement au seuil. A gauche celle considérée par Roberts (1968) et à droite celle, choisie par l'écoulement, considérée par Busse (1970) et correspondant au mode le plus instable.*

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres classique. Les conditions considérées par Roberts et Busse, sont quasi-identiques aux nôtres : une sphère en rotation rapide remplie d'un fluide respectant les approximations de Boussinesq, un chauffage uniforme, et des conditions aux limites de contraintes libres. L'ajout d'une graine dans notre cas ne change rien au problème car les colonnes ne touchent pas la graine et le rayon critique n'est déterminé que par le gradient de température et la pente de la sphère [27]. La description analytique de ce problème repose sur une décomposition en onde plane du type WKBJ à partir des équations linéarisées de la chaleur et de la vorticité exprimées à l'aide de la fonction de courant ψ. Elle ne fait pas appel à l'approximation quasi-géostrophique, contrairement à l'étude dite en perturbation également considérée par Busse dans la seconde partie de son article de 1970.

Les auteurs supposent que ψ et θ s'expriment sous forme d'onde plane qui s'écrit : $e^{i(ks+m\varphi)+\sigma t}$ et obtiennent une équation différentielle en z de la composante z de la vitesse. A partir de cette équation, ils cherchent le plus petit nombre de Rayleigh Ra_c donnant une solution marginalement croissante. Ce nombre de Rayleigh est minimisé en fonction du rayon s, du nombre d'onde radiale k, du mode m et de la pulsation ω de l'onde.

La valeur propre σ est un nombre complexe dont la partie réelle τ donne le taux de croissance de l'instabilité et la partie imaginaire ω sa vitesse de phase. Tant que τ_m (taux de croissance associé au mode m) est négatif $\forall m$, l'état de fluide au repos est stable. S'il existe un mode m_c pour lequel τ_{m_c} est strictement positif, alors le mode m_c est instable et croît exponentiellement en temps. La stabilité marginale correspond à un taux de croissance nul :

- $\tau_{m_c} < 0$: la perturbation du mode m_c décroît, il est stable,

- $\tau_{m_c} = 0$ et $\tau_m < 0$, $\forall m \neq m_c$: la perturbation du mode m_c ne croît, ni ne décroît, c'est la stabilité marginale,
- $\tau_{m_c} > 0$: la perturbation croît, le mode m_c est instable.

La pulsation pulsation du mode critique satisfait :

- $\omega_{m_c} = 0$: le mode m_c est stationnaire,
- $\omega_{m_c} \neq 0$: le mode m_c est oscillant (il se propage).

Dans notre cas, le démarrage de la convection se fait sous forme d'onde progressive c'est-à-dire que pour $\tau_c = 0$ on a ω_{m_c} non nul. La bifurcation associée au démarrage de la convection est une bifurcation de type Hopf.

Le premier problème de cette approche vient du fait que pour minimiser le nombre de Rayleigh il faut $k = 0$. Il s'en suit donc une échelle radiale infinie. Le second problème, souligné par Soward (1977), est que pour le Rayleigh critique trouvé dans cette étude, il existe un gradient de vitesse de phase $\partial\omega/\partial s$ non nul qui détruit la solution. Ce gradient est dû à la variation de pente en fonction de s. La convection n'est donc pas réalisée pour le nombre de Rayleigh critique obtenu par l'approche locale.

Une seconde étude, globale celle-ci, a été menée par Jones *et al.* (2000), ils ont cherché à minimiser le nombre de Rayleigh sous la contrainte $\partial\omega/\partial s = 0$ pour que la solution soit pérenne. Cela correspond à une pulsation uniforme de l'onde, on parle alors de critère global d'instabilité.

Le nombre de Rayleigh critique ainsi obtenu est supérieur à celui de l'étude locale de Busse et les colonnes sont spiralisées à cause de la variation de pente avec le rayon cylindrique s. Les résultats de Jones *et al.* ont été confirmés par confrontations avec les études numériques [72, 25].

La résolution des équations en z de l'étude asymptotique globale donne un profil pour la composante z de la vitesse proche de la linéarité (cf [25] et [2] pour une confrontation des résultats 2D/3D), c'est pourquoi dans nos équations nous faisons l'approximation d'un profil de u_z linéaire. Cette approximation va créer un décalage pour les valeurs des paramètres critiques obtenues $(s_c, \omega_c, m_c, Ra_c)$. Cependant la difficulté associée au $\partial\omega/\partial s$ non nul dans le cas d'une étude locale reste entière avec notre modèle simplifié et les résultats obtenus, comme nous allons le voir dans les sections à venir, donnent un bon accord qualitatif avec les études 3D plus complètes.

Ces deux études ont aussi déterminé des lois d'évolution asymptotiques pour les paramètres critiques

$$m_c \propto E^{-1/3},\ Ra_c \propto E^{-4/3},\ \omega_c \propto E^{-2/3}. \tag{2.47}$$

Ces résultats vont dans le sens de l'intuition puisque pour des nombres d'Ekman décroissants, c'est-à-dire pour des rotations de plus en plus rapides, le nombre de Rayleigh critique va croissant. Il faut de plus en plus d'énergie pour vaincre la contrainte géostrophique. La convection viole la contrainte de Proudman-Taylor sur une échelle d'autant plus petite que le nombre d'Ekman est petit.

Pour le mode critique $m_c \propto E^{-1/3}$ il y a en effet $2m_c$ colonnes. L'extension azimutale de ces colonnes est donc proportionnelle à $E^{1/3}$. L'extension radiale de la zone convective est

elle en $E^{1/6}$. Mais la spiralisation des colonnes permet l'apparition d'une deuxième échelle imbriquée en rayon, elle aussi en $E^{1/3}$ (Jones *et al.*, 2000).

Nous avons vérifié avec le modèle QG que ces deux échelles radiales ($E^{1/3}$ pour les oscillations et $E^{1/6}$ pour l'enveloppe) sont bien présentes dans nos résultats numériques au seuil. A cette échelle $E^{1/3}$, le terme visqueux peut s'équilibrer avec la force de Coriolis.

Notons que pour le modèle QG, le seuil convectif diffère un peu de celui du modèle 3D complet. Il correspond en fait à l'étude de Yano (1992). Cette étude au seuil a été validée numériquement dans le travail de thèse de S. Cole (2004).

2.3 Méthodes numériques

Dans notre programme (dont je suis l'auteur), le système d'équation (2.46) est traité numériquement de la façon suivante. Le terme de dérivé temporelle est une différence progressive, estimée en $t + \delta t/2$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{1}{\delta t} u(t + \delta t) - \frac{1}{\delta t} u(t).$$

Le bilaplacien et le terme en E^{-1} (force de Coriolis) sont eux discrétisés en temps sur un schéma de Crank-Nicholson semi-implicite, le terme de poussée d'Archimède et les non-linéarités sont calculés selon un schéma d'Adams-Bashford explicite d'ordre 2.

Pour un terme $f(t)$ donné, appliquer le schéma de Crank-Nicholson correspond à une discrétisation en temps de la forme :

$$\frac{1}{2} f(t + \delta t) + \frac{1}{2} f(t),$$

avec δt le pas de temps.

Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable, c'est pourquoi la force de Coriolis, qui devient prépondérante à bas nombre d'Ekman, a été traitée avec ce schéma. Ce traitement est facilement mis en oeuvre dans le cas 2D car ce terme peut être facilement inversé, contrairement au cas 3D où les composantes toroïdale et poloïdale sont couplées.

Appliquer le schéma d'Adams-Bashford à un terme $f(t)$ donné correspond à une discrétisation en temps de la forme

$$\frac{3}{2} f(t) - \frac{1}{2} f(t - \delta t)\,.$$

Ce schéma est conditionnellement stable. La stabilité dans nos calculs a été déterminée de manière empirique. Nos calculs ont été éffectués dans l'espace spectral, en prenant ψ sous la forme $f(s)e^{-im\varphi}$.

Nous avons choisi cette technique spectrale pour plusieurs raisons :

- elle est adaptée à la périodicité du système,
- en régime linéaire les modes étant découplés, on peut ne travailler qu'avec quelques modes.

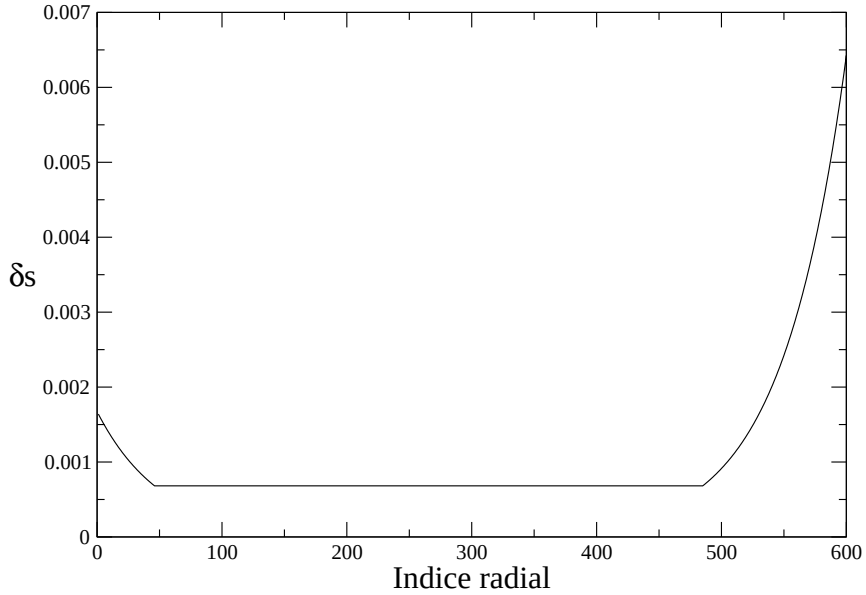

FIG. 2.5: *Pas d'espace de notre grille radiale en fonction de l'indice radiale.*

Dans un souci d'optimisation numérique, nous avons introduit une grille radiale irrégulière (pour les régimes linéaires et non-linéaires). Celle-ci est à progression géométrique, plus large sur les bords, elle se rétrécit vers le centre jusqu'à une zone de grille régulière centrée sur la convection (voir figure 2.5).

Nous disposons ainsi d'un pas d'espace plus fin sur la zone où la convection se développe. La grille se faisant plus large dans les parties moins intéressantes du domaine d'étude. Cette grille lâche aux bords n'est pas pénalisante dans notre cas, car le pompage d'Ekman est dans notre cas paramètré. Tous les termes ont été discrétisés en espace sur cette grille par une méthode de différences finies.

2.4 Etude numérique

2.4.1 Etude linéaire

Pour le problème linéaire nous devons résoudre une version linéarisée du système (2.46)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Delta\psi &= \frac{E^{-1}}{1-s^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + Ra\,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\varphi}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - Pr^{-1}\Delta\right) \bar{\theta} &= Pr^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Notons que pour toutes nos simulations (aussi bien linéaires que non-linéaires) le rapport entre le rayon interne et le rayon externe a été fixé à 0.35 pour son intérêt géophysique,

excepté pour l'étude de la structure du vent zonal en présence de pompage d'Ekman (voir la section 2.4.4).

L'étude linéaire consiste à chercher, à un nombre d'Ekman donné, la valeur du nombre de Rayleigh telle que le taux de croissance τ soit nul (stabilité marginale). Pour cela on se rapproche par dichotomie (pondérée des taux de croissance) de ce seuil jusqu'à ce que $|\tau| \ll 1$, puis on linéarise τ comme fonction du nombre de Rayleigh pour déterminer précisement la valeur de Ra_c, connaissant $\tau(Ra_c - \epsilon_1)$ et $\tau(Ra_c + \epsilon_2)$ deux valeurs près du seuil. On sait que le mode critique croît près du seuil comme $A = e^{\sigma t}$. Pour calculer τ on utilise la discrétisation suivante

$$\tau \simeq \frac{1}{|A(t)|} \frac{|A(t)| - |A(t - \delta t)|}{\delta t} . \tag{2.49}$$

Tandis que pour ω on emploie

$$\omega \simeq Im \left(\frac{1}{A(t)} \frac{A(t) - A(t - \delta t)}{\delta t} \right) . \tag{2.50}$$

Les résultats obtenus par notre étude linéaire sont reportés dans le tableau (2.1). Nous avons effectué les calculs pour les deux types de conditions aux limites pour la vitesse, non-glissement et contraintes horizontales libres. On peut constater que les résultats sont très proches dans les deux cas. En effet la convection se développe au voisinage du centre de la coquille et est donc peu influencée au seuil par les conditions aux limites sur la vitesse en $r = r_i$ et $r = r_e$ (on rappelle qu'il n'y a pas de pompage d'Ekman ici puisque $1/m \simeq E^{1/3} \ll E^{1/4}$). Ceci ne sera pas vrai pour nos résultats non-linéaires car le vent zonal occupe alors l'ensemble de la coquille et est donc sensible aux conditions aux limites.

Nous avons représenté sur la figure 2.6 (à gauche) une coupe radiale du module de la fonction de courant ψ pour $E = 10^{-5}$ avec des conditions aux limites de contraintes horizontales nulles. Le module de ψ nous permet de visualiser l'enveloppe de la convection tandis que la partie réelle de ψ (ici en valeur absolue) met en évidence la spiralisation des colonnes de convection.

Lorsque le nombre d'Ekman est suffisamment petit, la convection est assez localisée pour ne pas subir l'influence de la graine (pour $E = 10^{-7}$ et $E = 10^{-8}$ par exemple). Les résultats linéaires que nous avons obtenu pour de tels nombres d'Ekman sont donc valides pour une sphère pleine.

Nos résultats vérifient les mises à l'échelle théoriques qui sont $m_c \propto E^{-1/3}$, $Ra_c \propto E^{-4/3}$ et $\omega_c \propto E^{-2/3}$. On peut en effet constater (les trois colonnes de droite dans le tableau (2.1)) que les préfacteurs de ces lois convergent dans la limite des petits nombres d'Ekman. Nous avons aussi vérifié que l'enveloppe de la convection possède une extension radiale en $E^{1/6}$, en comparant l'enveloppe de la convection pour $E = 10^{-7}$ et $E = 10^{-8}$ en fonction de $(s - s_c)E^{1/6}$ (voir figure 2.6, graphique de droite), où s_c est le rayon critique auquel s'établit la convection. Cela montre que nous sommes dans le cadre de l'étude globale de Jones *et al.*. Le nombre de colonnes, ainsi que le nombre de Rayleigh critique auquel elles apparaissent, augmentent quand le nombre d'Ekman décroît. La contrainte géostrophique

E	m_c	Ra_c	ω_c	$m_c\,E^{1/3}$	$Ra_c\,E^{4/3}$	$\omega_c\,E^{2/3}$
Non-glissement						
10^{-4}	7	$6.024 \cdot 10^5$	272.48	0.325	2.80	0.587
10^{-5}	13	$1.091 \cdot 10^7$	1179.2	0.280	2.35	0.547
10^{-6}	23	$2.206 \cdot 10^8$	4967.8	0.230	2.20	0.497
10^{-7}	56	$4.690 \cdot 10^9$	24571	0.260	2.18	0.529
10^{-8}	122	$9.958 \cdot 10^{10}$	114185	0.263	2.15	0.530
Contraintes horizontales nulles						
10^{-4}	7	$5.961 \cdot 10^5$	268.50	0.325	2.77	0.578
10^{-5}	12	$1.086 \cdot 10^7$	1134.4	0.258	2.34	0.526
10^{-6}	22	$2.215 \cdot 10^8$	4856.4	0.220	2.21	0.485
10^{-7}	56	$4.690 \cdot 10^9$	24573	0.260	2.18	0.529
10^{-8}	122	$9.914 \cdot 10^{10}$	113510	0.263	2.14	0.527

TAB. 2.1: *Paramètres critiques au seuil de convection (Pr=1).*

est en effet de plus en plus difficile à vaincre et lorsque la convection y parvient c'est sur une échelle d'autant plus petite que la vitesse de rotation est importante. La vitesse de phase ω_c augmente, elle aussi, pour des nombres d'Ekman décroissants. D'un point de vue numérique, il nous faut donc diminuer à la fois le pas d'espace et le pas de temps. Pour des nombres d'Ekman très faibles (en-dessous de 10^{-8}) cela devient très difficile. En pratique, malgré l'utilisation d'un modèle 2D, nous avons dû limiter notre étude à $E \geqslant 10^{-8}$ en régime linéaire et $E \geqslant 10^{-7}$ en régime non-linéaire.

Nous représentons sur la figure 2.7 un instantané de la fonction de courant au seuil de convection, on peut constater que cela correspond qualitativement à une coupe équatoriale des colonnes de convection de la figure 2.2. Notons également que la convection est bien plus localisée pour $E = 10^{-7}$ que pour $E = 10^{-5}$, comme le prédit la mise à l'échelle théorique en $E^{1/6}$.

2.4.2 Etude non-linéaire

Au seuil, un mode devient d'abord marginalement instable, juste au-dessus du seuil il a un taux de croissance exponentiel positif. Cependant, il est évident qu'il doit exister un mécanisme de saturation, car cette augmentation exponentielle de l'amplitude du mode instable ne peut durer indéfiniment. Cette saturation est assurée par les non-linéarités (les termes $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}$ et $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\theta$) qui, en couplant les modes, amènent de l'énergie sur les modes de petite échelle qui la dissipent par diffusion. Près du seuil, le couplage s'effectue essentiellement sur le mode 0 (vent zonal) et sur les harmoniques du mode critique m_c .

C'est ce qui nous a mené, comme nous le verrons par la suite, à développer une approche faiblement non-linéaire où seul le vent zonal et le mode critique ont été retenus dans nos calculs numériques.

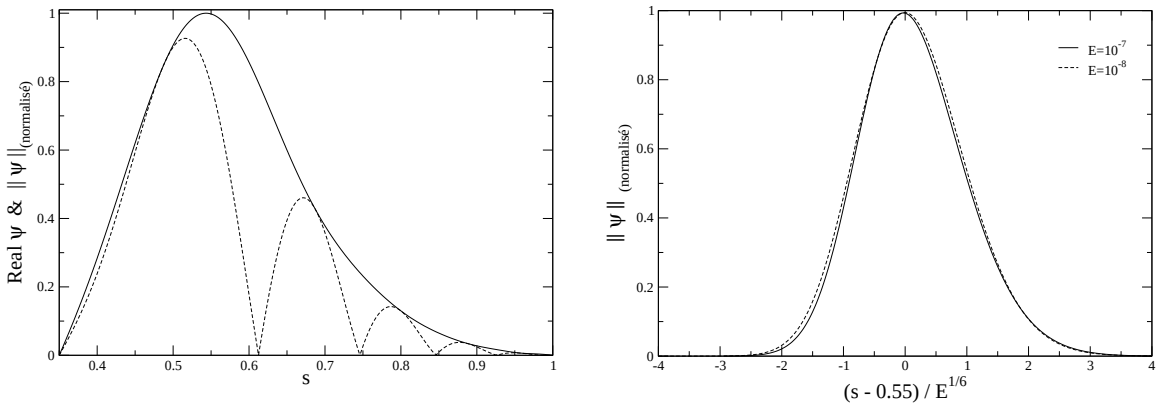

FIG. 2.6: *Coupe radiale du module de la fonction de courant au seuil de convection (normalisé), à gauche pour $E = 10^{-5}$ et à droite pour $E = 10^{-7}$ (trait plein) et $E = 10^{-8}$ (trait pointillé). Les conditions aux limites sont de contraintes horizontales libres. Sur le graphique de gauche, le trait pointillé indique la valeur absolue de la partie réelle de ψ.*

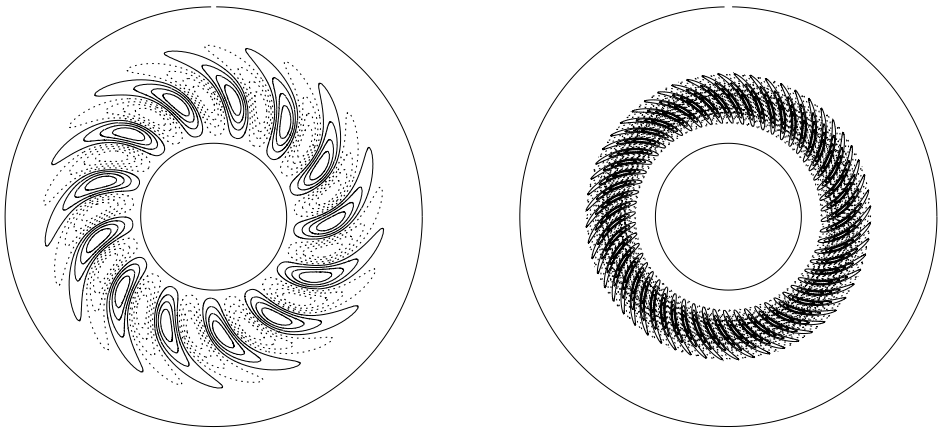

FIG. 2.7: *Isovaleurs de la fonction de courant au seuil de convection pour $E = 10^{-5}$ (à gauche) et $E = 10^{-7}$ (à droite). L'augmentation du nombre de colonnes, quand le nombre d'Ekman diminue, est clairement visible, ainsi que l'existence d'un cylindre critique de rayon s_c.*

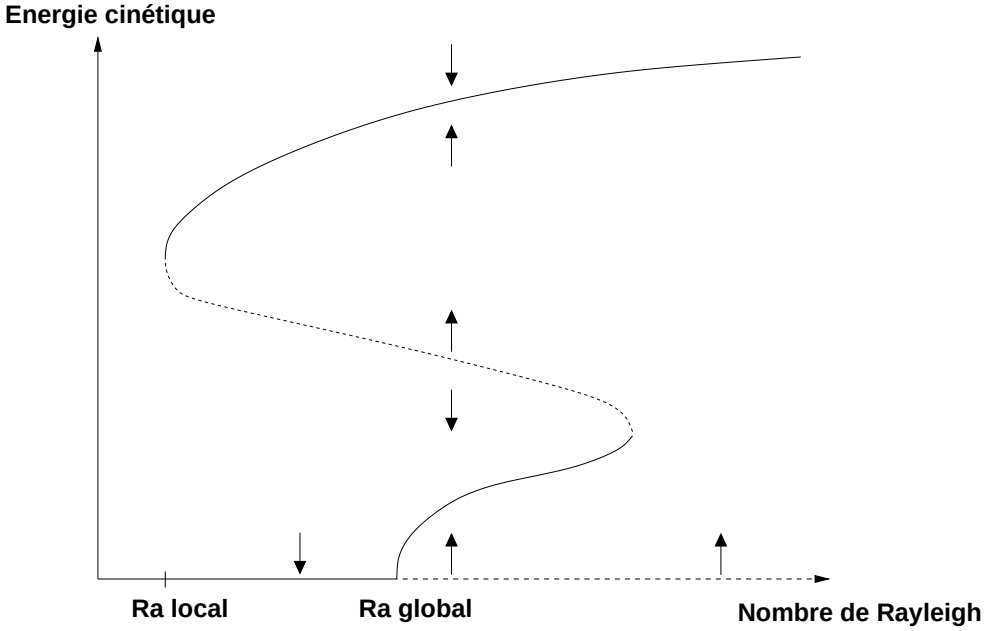

FIG. 2.8: *Diagramme de bifurcation convective proposé par Proctor (1994) pour réconcilier l'étude théorique de Soward (1977) et les résultats super-critiques obtenus numériquement par Zhang (1992).*

Dans la deuxième partie de son article de 1977, Soward, en introduisant les non-linéarités au seuil, a montré que, toujours dans la limite des petits nombres d'Ekman, les couplages non linéaires génèrent un vent zonal qui corrige la variation radiale de vitesse de phase ($\partial\omega/\partial s$) qui était non nulle au nombre de Rayleigh déterminé par Busse (étude locale). Ainsi la convection devient réalisable à ce nombre de Rayleigh si les non-linéarités sont prises en compte. Ce nombre de Rayleigh critique local étant inférieur à celui de l'étude globale (Jones *et al.*, 2000) cela justifie la prédiction théorique (Soward, 1977) que la bifurcation associée au démarrage de la convection est sous-critique : la convection persiste lorsque l'on fait décroître le paramètre de contrôle (le nombre de Rayleigh) en-dessous de sa valeur critique. Contrairement au cas super-critique où l'énergie tend continuement vers zéro quand on fait décroître le paramètre de contrôle vers sa valeur critique. Evidemment le raisonnement ci-dessus concerne les solutions faiblement non-linéaires (près du seuil) et dont l'énergie est constante dans le temps. A l'opposé de la prédiction théorique de Soward (1977), les modèles numériques n'ont jusqu'ici trouvé que des bifurcations super-critiques [72, 25, 16]. Proctor (1994) a proposé un diagramme de bifurcation pour réconcilier les résultats théoriques et numériques (voir 2.8).

La géométrie déterminée au seuil est peu modifiée par les non-linéarités tant que l'on est proche du Rayleigh critique. Si on s'éloigne trop de celui-ci plusieurs modes peuvent devenir instables et la géométrie de la solution est largement modifiée par rapport au cas linéaire.

Nous avons, dans un premier temps, résolu numériquement le système suivant

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Delta\psi &= (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\omega + \frac{E^{-1}}{1-s^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + Ra\,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\varphi}, \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\right) u_0 &= -\left(\overline{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_\varphi}\right)_0, \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} - Pr^{-1}\Delta\right) \bar{\theta} &= -(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\overline{\theta} + Pr^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\ ,.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Notons que le pompage d'Ekman sur le vent zonal a été négligé, nous le réintroduirons plus tard pour étudier son effet. Dans nos simulations les non-linéarités $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\omega$ et $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\overline{\theta}$ ont été traitées de deux manières différentes.

La première méthode, dite de collocation, consiste à calculer chaque partie du produit non-linéaire dans l'espace spectral, puis on transforme la solution dans l'espace physique par une transformée de Fourier rapide (FFT) inverse, on effectue le produit des termes dans l'espace physique puis on le ramène dans l'espace spectral par FFT. La plupart des termes sont calculés dans l'espace spectral cependant il serait compliqué d'y évaluer les termes non-linéaires car il faudrait effectuer une convolution. Les termes non-linéaires sont calculés dans l'espace physique sur une grille de calcul comportant un nombre minimum de points de collocation dans la direction azimutale. Ce nombre est fonction de la troncature du spectre. Pour un calcul effectué jusqu'au mode m les non-linéarités vont générer du $2m$, il faudra donc $4m$ points (critère de Shannon) pour éviter les erreurs de repliement de spectre, ou aliasing. Cependant dans nos simulations, qui sont faiblement non-linéaires, les derniers modes calculés ont peu d'énergie. Nous avons donc choisi de nous limiter à respecter le minimum de $2m$ (et non pas $4m$) avec une erreur d'aliasing négligeable.

La deuxième méthode, dite de couplage, consiste à coupler directement dans l'espace spectral un nombre restreint de mode de Fourier. Dans notre cas nous ne gardons que le mode critique déterminé par l'étude linéaire et le mode 0 (vent zonal). Cette méthode, valable essentiellement dans le domaine faiblement non-linéaire, présente l'avantage d'être moins coûteuse numériquement.

Nous avons effectué des calculs non-linéaires pour différents nombres d'Ekman $E = 10^{-5}$, $E = 10^{-6}$ et $E = 10^{-7}$ pour un nombre de Prandtl $Pr = 1$. Pour toutes ces valeurs du nombre d'Ekman nous avons constaté que la bifurcation associée au démarrage de la convection est une bifurcation super-critique. Ces résultats sont en accord avec les simulations que Zhang (1992) a réalisé en 3D pour différentes valeurs du nombre de Prandtl ainsi que celles de Dormy (1997) réalisées jusqu'à des nombres d'Ekman de 10^{-5} pour différents modes de chauffage dont celui de chauffage uniforme. Chen *et al.* ont quant à eux développé un modèle 2D, un anneau cylindrique dont les bords supérieures et inférieures sont paraboliques, avec différents rapports d'aspects et sont arrivés à la même conclusion.

Comme cela a été vu plus haut, le premier effet des non-linéarités est de saturer l'énergie de la solution. Si on s'éloigne du seuil de convection en augmentant le forçage thermique (et donc Ra) plusieurs transitions apparaissent où l'énergie de la solution devient dépendante du temps.

Busse et Grote [36, 14, 35] ont décrit avec leur modèle 3D (chauffage uniforme et condition aux limites de contraintes horizontales libres) la série de transitions qui apparaît lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté au-dessus du seuil de convection pour un nombre d'Ekman fixé, $E = 10^{-4}$ dans leur cas (cf. figure 2.9). Nous allons comparer leurs résultats aux nôtres obtenus avec la méthode de collocation.

La première étape de cette série de transition est dénommée « vacillating oscillations » ou convection vacillante (voir [73] pour un cas 3D, et [57], [1] pour des modèles 2D cylindriques). Elle correspond à une oscillation sinusoïdale en temps de l'énergie cinétique de la solution (cf. fig.2.9 première et deuxième cartouche). La symétrie azimutale des cellules de convection est conservée, mais une oscillation de l'enveloppe de la convection se développe. Busse [14] a remarqué, en représentant le nombre de Nusselt (rapport du flux de chaleur avec et sans convection) en fonction du nombre d'Ekman, que le transport de chaleur augmente par cette bifurcation. Comme pour les autres transitions le système adopte ce nouveau comportement pour pouvoir mieux évacuer l'énergie qui lui est fournie.

La figure 2.10 présente les oscillations de l'énergie cinétique obtenues avec notre modèle quasi-géostrophique pour un nombre d'Ekman de 10^{-5} et de Prandtl égal à un. Cette instabilité est observée avec les deux types de conditions aux limites. Cependant la valeur précise du paramètre de contrôle pour laquelle la transition apparaît dépend du type de conditions aux limites choisi (tout comme les paramètres critiques du tableau 2.1). Les paramètres utilisés pour la figure 2.10 correspondent à la plus petite valeur du nombre de Rayleigh pour laquelle une énergie dépendante du temps a été observée. L'énergie cinétique Ek a été calculée par l'intégrale sur le domaine de $(u_s^2 + u_\varphi^2)$, la vitesse étant exprimée en unité adimensionnée ν/r_o. Cette énergie peut être séparée en deux énergies, celle du vent zonal, Ek_0, qui est l'intégrale sur le domaine de $\bar{u}_0$ et celle des modes non-axisymétriques, Ek', qui est l'intégrale sur le domaine de $((1/s\,\partial_\varphi\psi)^2 + (\partial_s\psi)^2)$

Cette première transition est qualitativement très proche de celle décrite par Busse *et al.* avec leur modèle 3D. Notons sur la figure 2.10 que le rapport énergie du vent zonal / énergie des modes non-axisymétriques diffère pour les deux types de conditions aux limites. Dans le cas de contrainte libre le vent zonal n'est pas contraint à s'annuler aux bords, son énergie est très proche de celle de la somme des modes non-axisymétriques alors que dans le cas de non-glissement celle-ci est bien inférieure à celle de la somme des modes non-axisymétriques.

Le vent zonal généré par couplage non-linéaire est prograde à la frontière externe et rétrograde à la frontière interne (cf fig.2.11 pour un profil obtenu avec ce modèle quasi-géostrophique). Ce profil va, dans notre cas comme dans celui de Busse et Grote [36, 14, 35], cisailler les colonnes de convection et tendre à séparer la région convective en un anneau intérieur et extérieur au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh va être augmenté et donc que le vent zonal va prendre de l'importance.

La valeur moyenne ainsi que l'amplitude des vacillating oscillations augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, la période devenant de moins en moins régulière, jusqu'à l'apparition de la transition suivante.

Comme dans les modèles 3D de convection [36, 14, 35] (voir figure 2.9, troisième et quatrième cartouches) si l'on augmente à nouveau le nombre de Rayleigh une nouvelle tran-

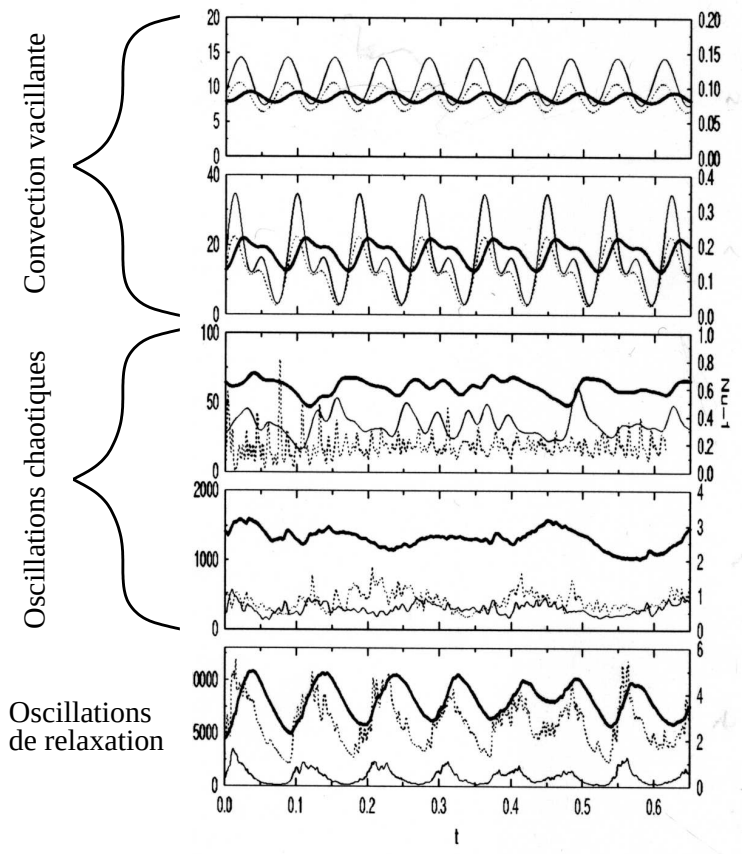

FIG. 2.9: *Séries temporelles obtenues par Busse et Grote pour la densité d'énergie cinétique toroïdale axisymétrique (ligne continue en gras), d'énergie cinétique toroïdale non-axisymétrique (ligne continue) et du nombre de Nusselt (ligne pointillée, ordonnées à droite) pour* $E = 10^{-4}$, $Pr = 1$ *et* $Ra = 2.8 \cdot 10^5, 3 \cdot 10^5, 3.5 \cdot 10^5, 7 \cdot 10^5$ *et* $12 \cdot 10^5$ *(de haut en bas), soit entre* 1.47 *et* $6.31 \times Ra_c$. *L'énergie poloïdale axisymétrique n'est pas représentée car elle est de plusieurs ordres de grandeur inférieure aux autres énergies. L'énergie poloïdale non-axisymétrique est elle approximativement 0.4 fois l'énergie toroïdale non-axisymétrique (E. Grote et F.H. Busse, 2001).*

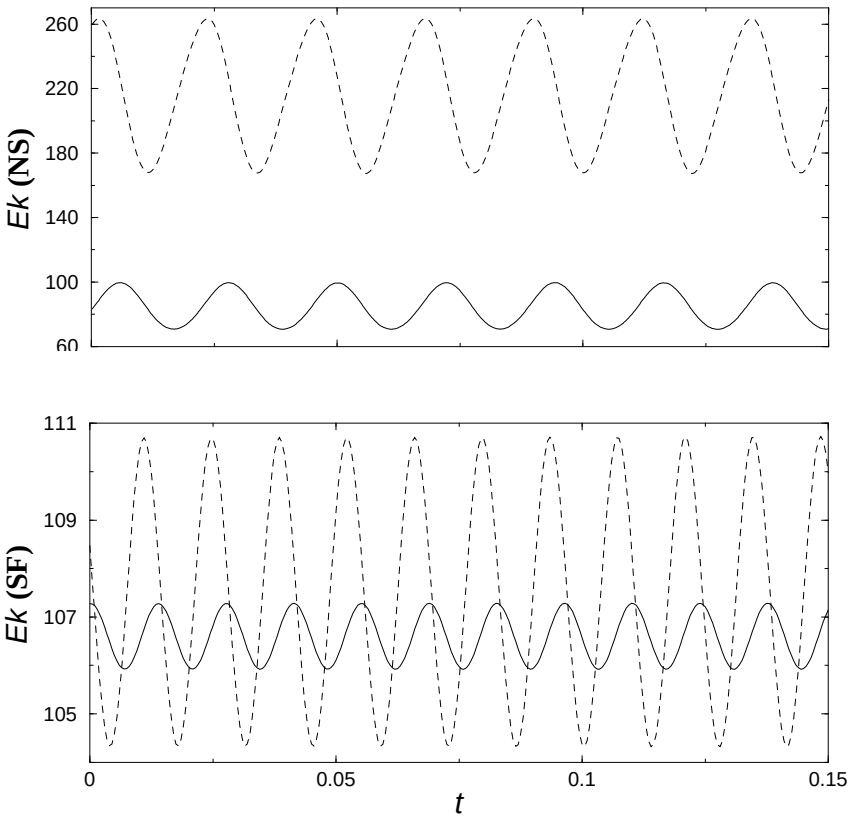

FIG. 2.10: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 1.4 \times Ra_c$ *et conditions aux limites de non glissement (graphique du haut), et* $Ra = 1.34 \times Ra_c$ *et conditions aux limites de contraintes libres (graphique du bas). La somme des énergies des modes non-axisymétriques est représentée par une ligne pointillée, l'énergie du mode* $m = 0$ *(vent zonal) par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux.*

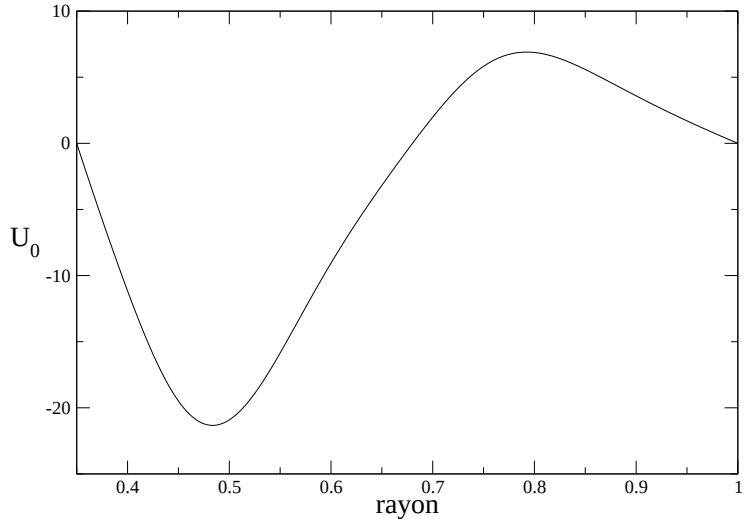

FIG. 2.11: *Profil radial du vent zonal obtenu avec le modèle quasi-géostrophique pour* $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$ *et* $Ra = 1.4 \times Ra_c$.

sition apparaît, caractérisée par des oscillations chaotiques en temps de l'énergie cinétique de la solution (voir figure 2.12).

Notons que, relativement à l'énergie des modes non-axisymétriques, l'énergie du vent zonal a augmenté (d'autant plus dans le cas de contrainte libre). L'action cisaillante du vent zonal est devenue si intense que la zone de convection tend à se concentrer dans une partie réduite du domaine, si bien que la symétrie azimutale de la solution est perdue. Cette convection localisée est illustrée dans la figure 2.13 pour le modèle 3D de Busse et Grote [36, 14, 35] (gauche) et pour le nôtre (droite).

Comme l'ont remarqué Grote *et al.* [36] avec leur modèle 3D, si on augmente encore le nombre de Rayleigh une nouvelle transition intervient sous la forme d'oscillation de relaxation de l'énergie cinétique. Alors que la périodicité spatiale n'est pas rétablie on retrouve une quasi-périodicité en temps. Ces oscillations sont dues au cisaillement du vent zonal [8] qui est devenu si important qu'il détruit périodiquement les colonnes de convection. Le mécanisme de ces oscillations est le suivant. Le vent zonal au fur et à mesure qu'il est alimenté par les non-linéarités devient de plus en important, parallèlement les modes non-axisymétriques sont de plus en plus cisaillés et donc décroissent. Le vent zonal tirant son énergie de ces modes non axisymétriques finit par ne plus être alimenté et décroît donc par diffusion visqueuse. Lorsque celui-ci a suffisamment décru la convection peut finalement reprendre et alimenter de nouveau le vent zonal. Ce processus se répète de façon quasi-périodique.

Nous avons reproduit ces oscillations avec notre modèle quasi-géostrophique (cf fig.2.14). Là encore, il existe des différences entre les deux types de conditions aux limites. Alors que l'énergie de la somme des modes non-axisymétriques est comparable dans les deux cas, l'énergie du vent zonal est bien plus importante dans le cas contrainte libre. La période

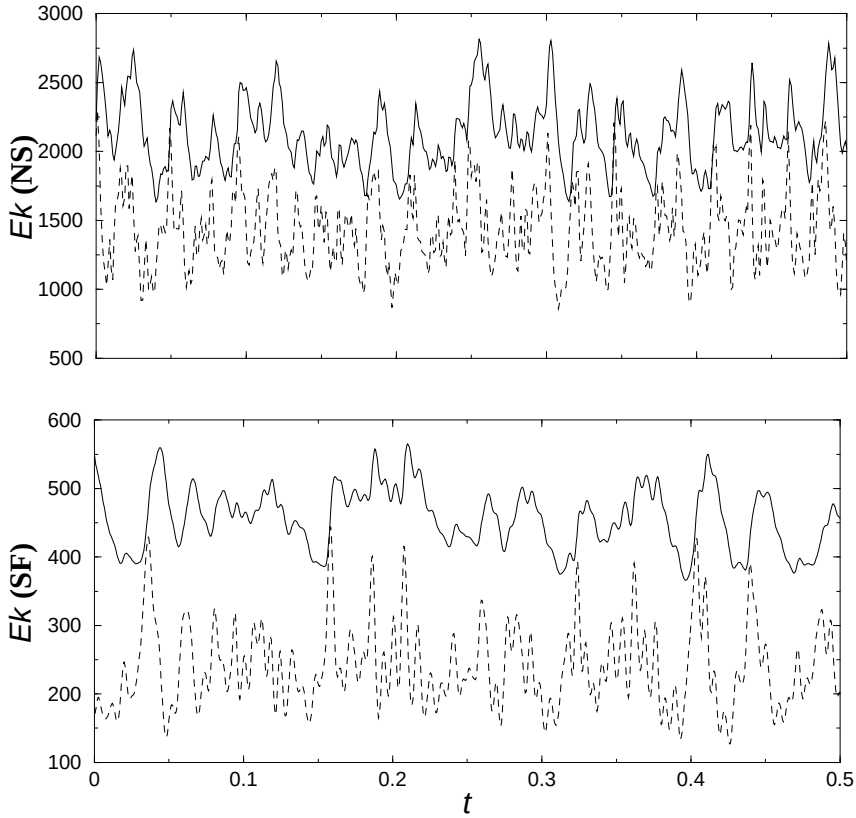

FIG. 2.12: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 2 \times Ra_c$ *et conditions aux limites de non glissement (graphique du haut), et* $Ra = 1.6 \times Ra_c$ *et conditions aux limites de contrainte libre (graphique du bas). La somme des énergies des modes non-axisymétriques est représentée par une ligne pointillée, l'énergie du mode* $m = 0$ *(vent zonal) par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux.*

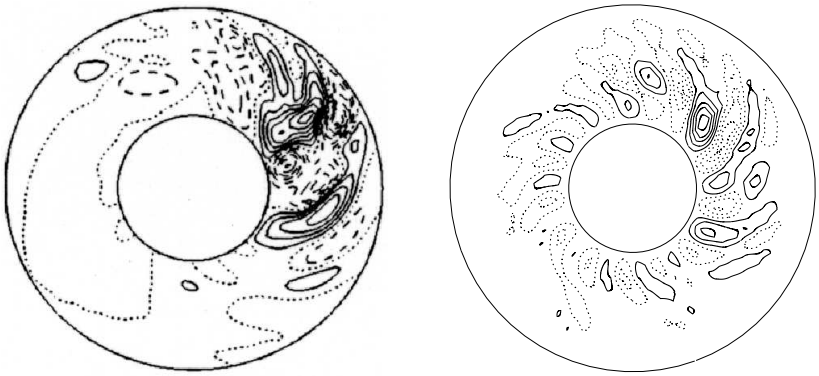

FIG. 2.13: *Isovaleurs de la fonction de courant ψ pour $E = 10^{-4}$, $Pr = 1$, $Ra = 3.7 \times Ra_c$ et conditions aux limites de contrainte libre (graphique de gauche, simulation de issue de Busse (2002) [14]), et $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 2 \times Ra_c$ et conditions aux limites de non-glissement (graphique de droite, issue d'une simulation effectuée avec notre modèle QG). Ces graphiques correspondent au régime des oscillations chaotiques, la périodicité azimutale est perdue et l'action cisaillante du vent zonal est maintenant assez importante pour détruire les colonnes de convection dans la majeure partie de la coquille.*

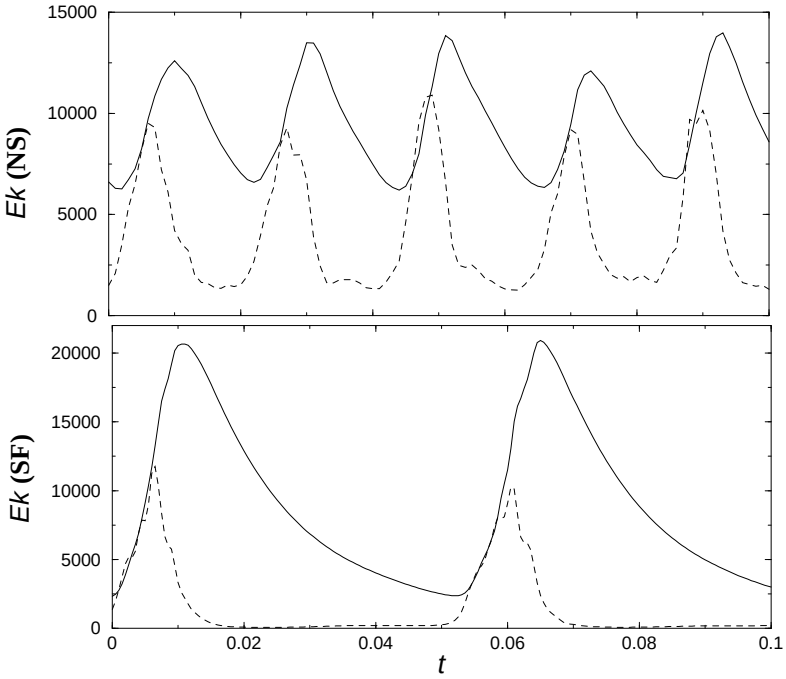

FIG. 2.14: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 3 \times Ra_c$ *et conditions aux limites de non-glissement (graphique du haut), et* $Ra = 2.6 \times Ra_c$ *et conditions aux limites de contrainte libre (graphique du bas). La somme des énergies des modes non-axisymétriques est représentée par une ligne pointillée, l'énergie du mode* $m = 0$ *(vent zonal) par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux.*

de ces oscillations est aussi affectée. En effet, après une brusque croissance de son énergie le vent zonal décroît par dissipation visqueuse et cette décroissance est naturellement plus rapide dans le cas de conditions aux limites de non-glissement (les valeurs étant fixées aux deux bords) que dans le cas de contraintes horizontales libres. Nous pouvons de plus constater que la période des oscillations est effectivement plus courte dans le premier cas (cf fig.2.14).

Ces oscillations quasi-périodiques existent pour une large gamme de nombres de Rayleigh, mais elles perdent leur régularité pour des nombres de Rayleigh trop importants.

Chen *et al.* ont eux aussi étudié, avec un modèle 2D et des conditions aux limites de non-glissement, cette série de transition déjà obtenue par Busse et Grote [36, 14, 35]. Ils ont reproduit les deux premières transitions sans parvenir à trouver les oscillations de relaxations, ce qui est cohérent avec nos calculs pour des régimes de paramètres comparables. Ils ont aussi remarqué qu'au delà du seuil de convection, pour des nombres de Rayleigh de plus en plus grand, l'échelle à laquelle la convection se développe a tendance à croître. Nous avons également observé cet élargissement de l'échelle spatiale pour un nombre d'Ekman de 10^{-4}. Cependant il est à noter que les détails de cette série de transition dépendent de la valeur du nombre d'Ekman.

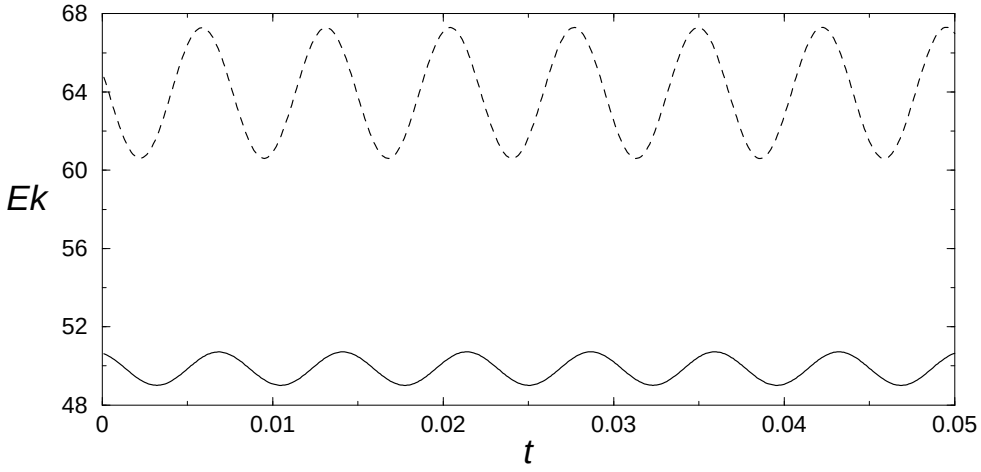

FIG. 2.15: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 1.41 \times Ra_c$, *conditions aux limites de non glissement et couplage de modes. L'énergie du mode critique est représentée par une ligne pointillée (ici multipliée par* $\mathbf{0.4}$*), l'énergie du mode* $m = 0$ *(vent zonal) par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux.*

Toujours d'après leurs résultats, il semble que la transition de solution d'énergie constante à vacillating oscillations ne présente pas d'hystérésis.

Résultats en couplage de mode

Nous avons aussi reproduit cette séquence de bifurcation avec la deuxième méthode de traitement des non-linéarités. Cette méthode moins coûteuse numériquement utilise un couplage direct des termes non-linéaires dans l'espace spectral. Ce modèle ne retient que deux modes de Fourier, le mode 0 (vent zonal) et le mode critique linéaire. Cette démarche n'est pleinement justifiée que dans le régime faiblement non-linéaire, c'est à dire proche du seuil. C'est comme nous allons le voir, bien le cas dans nos simulations à bas nombre d'Ekman.

Les « vacillating oscillations » obtenues avec ce modèle sont présentées dans la figure 2.15. Celles-ci apparaissent pour un nombre de Rayleigh très proche de celui trouvé précédemment avec une plus grande résolution spectrale. Cependant les énergies en jeu dans les deux cas sont assez différentes, ce qui montre les limitations de cette approche, qui trop loin du seuil ne peut fournir d'informations quantitatives sur la dynamique de la convection.

L'action cisaillante du vent zonale est elle aussi présente dans cette approche de couplage de mode. La figure 2.16 montre que l'action du vent zonal a bien tendance à séparer le domaine de convection en deux parties comme le notait [36], ce qui montre que les ingrédients physiques nécessaires restent présents.

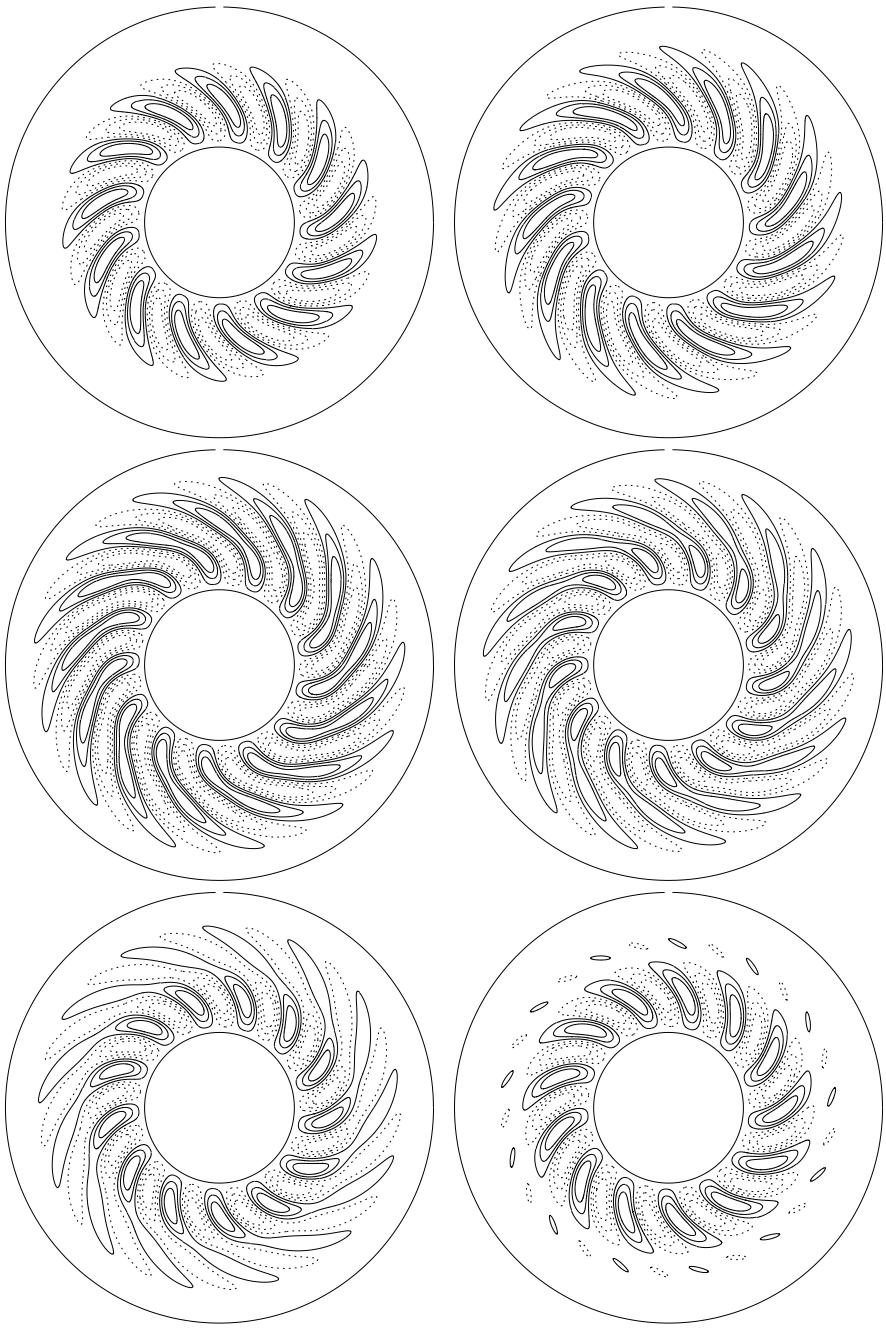

FIG. 2.16: *Isovaleurs de la fonction de courant* ψ *pour* $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 1.45 \times Ra_c$, *conditions aux limites de non-glissement droite et couplage de modes. Les graphiques sont régulièrement espacés en temps (de en haut à droite à en bas à gauche). L'intervalle de temps entre deux graphiques consécutifs est de* 10^{-3} *unité de temps. Ces six graphiques couvrent une période entière.*

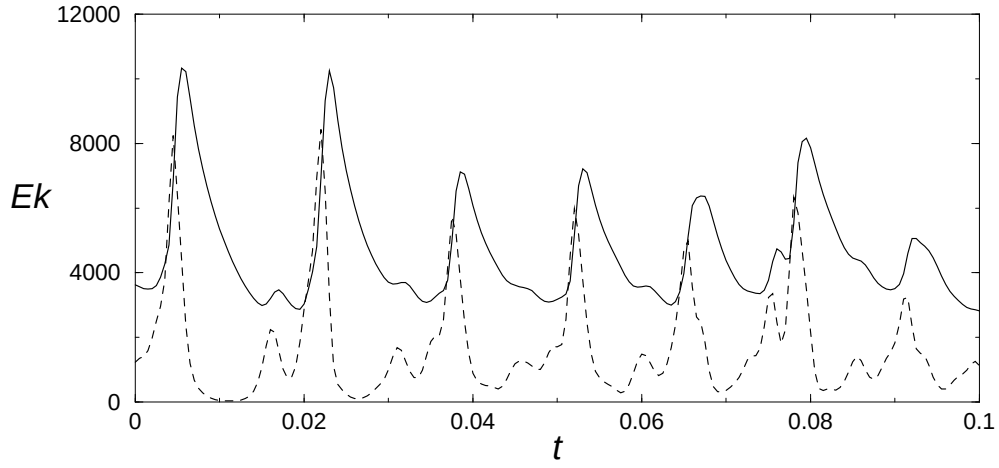

FIG. 2.17: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$ *et* $Ra = 2.5 \times Ra_c$, *avec des conditions aux limites de non-glissement et en utilisant le couplage de modes. L'énergie du mode critique est représentée par une ligne pointillée, l'énergie du mode* $m = 0$ *(le vent zonal) par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux.*

La convection localisée ne peut pas être reproduite avec cette approche car elle requiert plus de modes. Les oscillations de relaxation sont en revanche retrouvées avec cette approche simplifiée (voir fig.2.17), la valeur du nombre de Rayleigh pour laquelle elles apparaissent est bien entendu différente de celle obtenue avec la méthode précédente (en particulier pour les simulations où le nombre d'Ekman n'est pas suffisamment faible).

Limite des petits nombres d'Ekman

L'avantage principal du modèle quasi-géostrophique est de permettre une exploration plus large de l'espace des paramètres, le temps de calcul par rapport aux modèles 3D est en effet considérablement réduit. Le gain de temps de calcul supplémentaire dû à notre approche par couplage de modes nous a permis d'étudier, avec ce modèle, le seuil d'apparition des solutions dont l'énergie dépend du temps pour des nombres d'Ekman allant jusqu'à 10^{-7}. Le nombre de Prandtl est quant à lui toujours unitaire.

De façon inattendue, nous avons trouvé que ce seuil se rapproche du seuil de convection pour des nombres d'Ekman décroissants. Ceci est valable pour les vacillating oscillations et les oscillations de relaxations, le seuil d'apparition de ces deux transitions converge vers le seuil d'apparition de la convection pour des nombres d'Ekman décroissants. Par exemple, pour un nombre d'Ekman de $E = 10^{-6}$ et un nombre de Rayleigh de $Ra = 1.5 \times Ra_c$ nous obtenons des oscillations de relaxations alors que pour $E = 10^{-5}$ et $Ra = 1.5 \times Ra_c$ nous en sommes encore aux vacillating oscillations. Par conséquent la fourchette de nombre de Rayleigh pour laquelle la convection a une énergie constante se réduit jusqu'à disparaître

dans la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman.

Les valeurs pour lesquelles les premières solutions dont l'énergie dépend du temps sont obtenues sont présentées pour les deux types de conditions aux limites (non-glissement et contrainte libre) dans le tableau 2.2.

Alors que les valeurs reportées dans ce tableau correspondent à la première observation d'une énergie dépendante du temps (vacillating oscillations), pour la valeur la plus basse du nombre d'Ekman ($E = 10^{-7}$) nous avons obtenu directement les oscillations de relaxation, pour les deux types de conditions aux limites et ce pour une valeur du nombre de Rayleigh excédant le nombre de Rayleigh critique de convection de seulement un pour cent. Nos résultats sont exprimés en fonction de Ra/Ra_c, de cette façon ils sont indépendants de la définition choisie pour le nombre de Rayleigh.

E	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
Non-glissement			
$(Ra_{c_2}/Ra_c) - 1$	0.41	0.25	0.01
Contraintes horizontales nulles			
$(Ra_{c_2}/Ra_c) - 1$	0.44	0.29	0.01

TAB. 2.2: *Paramètres critiques pour l'apparition de solutions dont l'énergie dépend du temps (solutions obtenues avec la méthode de couplage de modes).*

Dans le graphique de la figure 2.18, nous illustrons le fait que pour un nombre d'Ekman donné (ici 10^{-7}) la période des oscillations de relaxations de l'énergie cinétique décroît lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh. En effet, le taux de croissance de la solution augmente lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté au delà de sa valeur critique. La convection peut donc reprendre, après avoir été supprimée par le vent zonal, avant que le vent zonal ne disparaisse totalement, d'où une réduction de la période des oscillations de relaxation (voir fig.2.18).

Le vent zonal est bien moins contraint dans le cas de conditions aux limites de contraintes libres que dans le cas de conditions aux limites de non-glissement. Il décroît donc plus lentement. A nombre d'Ekman et de Rayleigh fixés, la période des oscillations de relaxations est donc plus longue dans le cas de condition aux limites de contrainte libre que dans la cas non-glissement (voir fig.2.18).

Pour les valeurs du nombre d'Ekman étudiées, et bien que celles-ci soient relativement basses, nous n'avons obtenu que des bifurcations super-critiques pour le seuil de la convection. Soward [58] a proposé que pour le cas 3D (sans graine, chauffage interne, non-glissement) les non-linéarités devaient générer un vent zonal qui en contrant le problème de mélange de phase, ou « phase mixing », permettrait à la solution d'exister en-dessous du seuil convectif, conduisant ainsi à une bifurcation convective sous-critique.

Cependant cette étude n'a pas pris en compte la possibilité d'une solution dont l'énergie dépendrait du temps juste après le seuil de convection. Nos résultats semblent indiquer

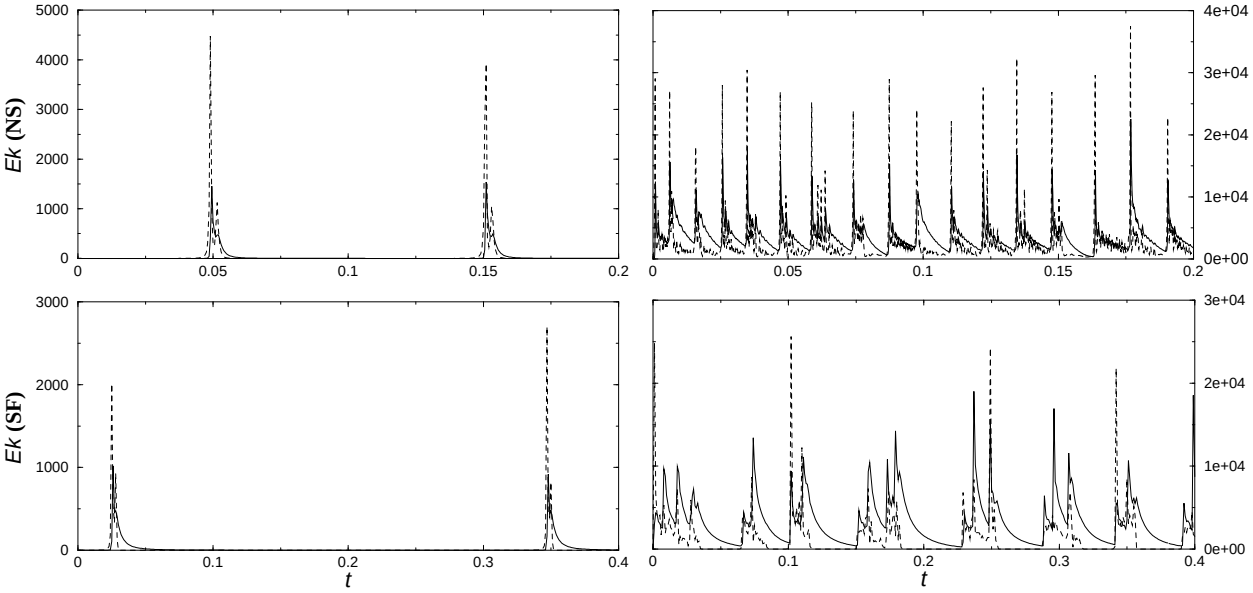

FIG. 2.18: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-7}$, $Pr = 1$ *et colonne de gauche* $Ra = 1.01 \times Ra_c$, *colonne de droite* $Ra = 1.2 \times Ra_c$. *Les conditions aux limites sont de non-glissement (graphiques du haut), de contrainte libre (graphiques du bas), et utilise le couplage de modes. La somme des énergies des modes non-axisymétriques est représentée par une ligne pointillée, l'énergie du mode* $m = 0$ *(le vent zonal) par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux. Soulignons que la fourchette de temps représentée sur les graphiques de la première ligne est différente de celle des graphiques de la seconde ligne.*

que le vent zonal, s'il prend de l'importance très près du seuil, est en fait trop fort pour simplement compenser le mélange de phase $\partial\omega/\partial s$, et ainsi permettre une bifurcation sous-critique. La solution prend la forme d'une oscillation de relaxation dès le seuil franchi. Une branche sous-critique a été trouvée par Cole (2004) mais celle-ci est instable Morin et Dormy (2004). Cependant il est à noter que la non-linéarité principale invoquée par Soward (1977) est due au vent thermique qui par construction est absent de nos simulations. Ce vent thermique a pour origine le décalage, qui existe en 3D, entre les surfaces d'iso-densité et celles d'iso-accélération. Le vent zonal dans nos simulations n'est généré que par ce qu'on appelle le tenseur de Reynolds (ou « Reynolds stress »), qui est une non-linéarité issue du couplage entre les deux composantes de vitesse horizontales u_s et u_φ, elle s'exprime ici par $u_s\partial_s u_\varphi$ ou $1/s\,\partial_\varphi\psi\,\partial_s^2\psi$.

De plus nous avons négligé le pompage d'Ekman sur le vent zonal dans nos simulations alors qu'il est présent dans [58]. Nous allons maintenant le réintroduire afin d'étudier son effet.

2.4.3 Effet du pompage d'Ekman sur les bifurcations successives

Nous réintroduisons donc le pompage d'Ekman sur le vent zonal, le système à résoudre numériquement est alors

$$\begin{aligned}
Pr\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\theta\right) &= \Delta\theta+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,,\\
E\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\omega\right) &= E\,\Delta^2\psi+\frac{1}{1-s^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+Ra\,E\,\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\,,\\
E\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_\varphi\big|_0\right) &= E\left(\Delta-\frac{1}{s^2}\right)u_0-\frac{E^{1/2}}{2(1-s^2)^{3/4}}\,u_0\,.
\end{aligned}\tag{2.52}$$

Notons que pour tous les calculs de cette section et de la suivante nous avons utilisé la méthode de couplage de mode. Le terme de pompage pris en compte nous avons déterminé le seuil d'apparition des vacillating oscillations. Pour un nombre d'Ekman de 10^{-5}, elles interviennent pour $Ra = 1.48 \times Ra_c$ (cf fig.2.19) avec des conditions aux bords de non-glissement et couplage de modes, ce qui est très proche du seuil trouvé sans le terme de pompage d'Ekman sur le vent zonal. De même on peut remarquer que les périodes des premières vacillating oscillations observées sont très proches dans ces deux cas.

La figure 2.20 présente les oscillations de relaxation obtenues pour $E = 10^{-7}$, $Pr = 1$, $Ra = 1.01 \times Ra_c$, avec des conditions aux limites de non-glissement et en couplage explicite de modes. Nous pouvons constater que l'ajout du pompage sur le vent zonal n'a pas qualitativement changé nos résultats. Le phénomène des oscillations de relaxation est en effet toujours présent.

De même, pour des nombres d'Ekman décroissants le seuil d'apparition de solutions dont l'énergie dépend du temps se rapproche toujours du seuil de convection. En effet pour un nombre d'Ekman de $E = 10^{-5}$ et $Pr = 1$, les premières solutions dont l'énergie dépend

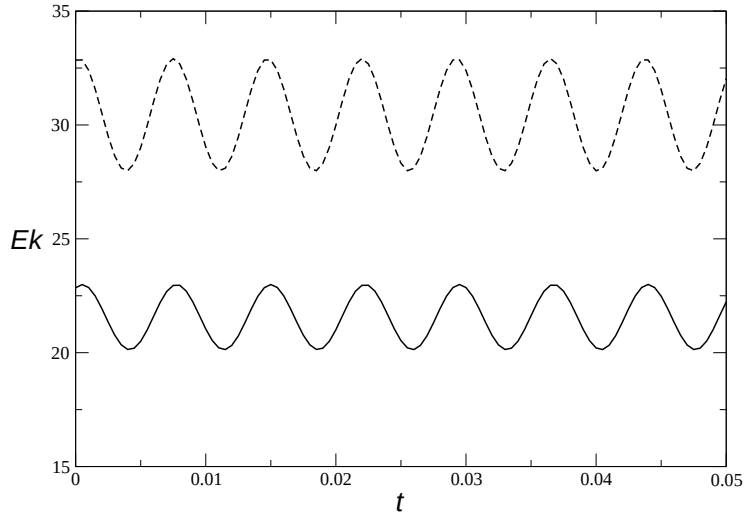

FIG. 2.19: *Oscillations de l'énergie cinétique (convection oscillante) en fonction du temps pour $E = 10^{-5}$, $Pr = 1$, $Ra = 1.48 \times Ra_c$, avec des conditions aux limites de non-glissement, et en utilisant le couplage de modes. Ces calculs incluent le pompage d'Ekman sur le vent zonal. L'énergie du mode critique est représentée par une ligne pointillée (ici multipliée par* $\mathbf{0.1}$*). L'énergie du mode $m = 0$ (le vent zonal) est représentée par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux.*

du temps sont observées pour $Ra = 1.48 \times Ra_c$ alors que pour $E = 10^{-7}$ elles le sont pour $Ra = 1.01 \times Ra_c$.

Notons, en comparant la figure 2.20 à la figure 2.18 obtenue pour des paramètres identiques et même conditions aux limites, mais sans pompage sur le vent zonal, que la période des oscillations de relaxation est bien plus courte dans le cas incluant le pompage d'Ekman.

En effet, le temps de spin-up (temps de mise à l'équilibre d'un fluide après un incrément de la vitesse de rotation) est proportionnel à $E^{1/2}$ (Greenspan, 1969, adapté à notre mise à l'échelle), ce temps est donc bien plus court que le temps diffusif qui est d'ordre unité dans notre adimensionnement.

Après la suppression des mouvements non-axisymétriques par le vent zonal celui-ci décroît donc plus rapidement que dans le cas avec diffusion seule et la convection peut donc reprendre plus rapidement.

En ce qui concerne la nature de la bifurcation associée au seuil de convection, l'ajout du pompage sur le vent zonal n'a pas eu non plus d'incidence. Nous n'avons trouvé que des bifurcations super-critiques. L'apparition d'une dépendance temporelle de l'énergie de la convection très près du seuil de convection semble donc être une caractéristique robuste.

Si l'addition du pompage d'Ekman n'a pas eu d'effet qualitatif sur la nature de la bifurcation convective, on peut se demander s'il en est de même de la géométrie de l'écoulement.

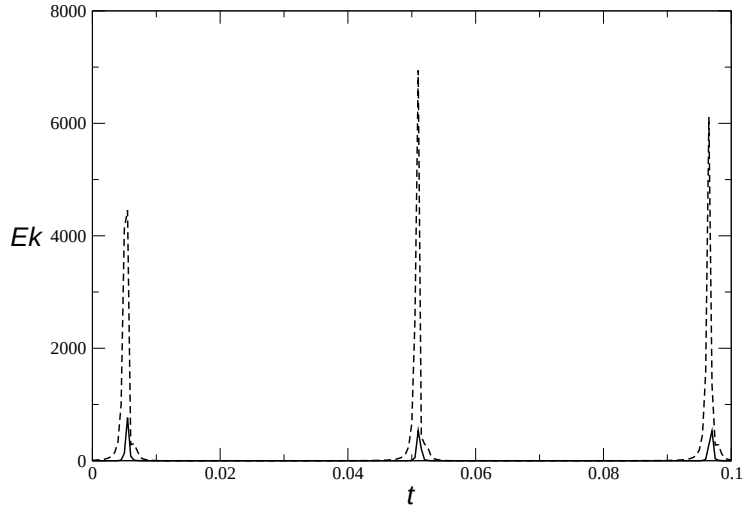

FIG. 2.20: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-7}$, $Pr = 1$, $Ra = 1.01 \times Ra_c$, *avec des conditions aux limites de non-glissement, en couplage de modes et en incluant le pompage d'Ekman sur le vent zonal. La somme des énergies des modes non-axisymétriques est représentée par une ligne pointillée, l'énergie du mode* $m = 0$ *(vent zonal) par une ligne continue. L'unité de temps est celle du temps visqueux.*

2.4.4 Effet du pompage d'Ekman sur la structure du vent zonal

Nous allons étudier plus en détail le rôle du mécanisme de dissipation sur la structure de la convection faiblement non-linéaire. Dans notre problème, il existe deux processus dissipatifs : la viscosité de volume et le pompage d'Ekman. D'un point de vue formel, ces deux processus affectent la convection de deux façons différentes.

La viscosité de volume d'abord, celle-ci n'est significative qu'aux petites échelles à cause des petites valeurs du nombre d'Ekman utilisées. L'analyse dimensionnel révèle que ces échelles sont de l'ordre de $E^{1/3}$ pour la convection au seuil ou pour les couches limites verticales de Stewartson [60, 52, 10].

Mais la viscosité est aussi essentielle près des bords où les couches d'Ekman d'une épaisseur de l'ordre $E^{1/2}$ se développent. Ces couches affectent de façon active l'ensemble de l'écoulement à travers le pompage d'Ekman. Cela entraîne un terme de dissipation supplémentaire dans l'équation du vent zonal. Ce terme affecte de façon égale toutes les échelles et son amplitude n'est contrôlée que par le nombre d'Ekman et l'amplitude de la vitesse.

Le pompage d'Ekman est donc le processus dissipatif dominant pour les grandes échelles pour lesquelles les effets de la viscosité de volume sont de plus en plus faibles à mesure que le nombre d'Ekman est diminué.

Pour l'équation de la fonction de courant ψ du système (2.52), nous n'avons gardé que la viscosité de volume comme processus dissipatif. Ceci peut se justifier par le fait que la convection se développe au seuil de convection à une échelle tant radiale qu'azimutale de

l'ordre de $E^{1/3}$. A de telles échelles le terme de viscosité de volume agissant sur la vitesse non-axisymétrique est d'ordre $E^{1/3}$ alors que le pompage d'Ekman est d'ordre $E^{1/2}$. A de si petite échelle le terme de pompage d'Ekman devient donc asymptotiquement négligeable en comparaison de la viscosité de volume. Notons que le pompage d'Ekman n'entraîne qu'une correction de l'ordre de $E^{1/6}$ sur les paramètres critiques au seuil [27].

Pour le vent zonal, nous maintenons les deux termes de dissipation, la viscosité de volume comme le pompage d'Ekman. Afin de déterminer le rôle de ces deux processus dissipatifs, nous allons garder dans l'équation du vent zonal soit la viscosité de volume soit le pompage d'Ekman, soit les deux. Le vent zonal est évidemment de grande échelle dans la direction φ, mais son échelle dans la direction radiale n'est pas déterminée. On ne peut donc pas exclure un processus dissipatif sur de simples arguments dimensionnels.

Signalons que le rapport d'aspect r_i/r_e est maintenant égal à 0.2. Nous avons élargi le volume occupé par le fluide afin de laisser davantage de place pour que les bandes se développent. Notons que ce rapport d'aspect correspond, par exemple, à la taille estimée du noyau solide à la fois pour Jupiter et Saturne (voir par exemple [23]).

Considérons dans un premier temps les résultats obtenus en fixant le nombre d'Ekman, ici à E=10^{-6}, et en augmentant le nombre de Rayleigh (de 1.1 à 5 fois critique). Les résultats correspondant sont indiqués sur la figure 2.21. Notons que pour cette figure, comme pour les figures suivantes 2.22 et 2.23, les profils radiaux présentés sont dépendants du temps, mais reflètent de manière significative le profil typique.

Lorsque seule la viscosité de volume est retenue, le vent zonal adopte près du seuil un profil radial en forme de "S" (voir le premier graphique de la colonne de gauche) avec 2 bandes tournant en sens contraire. Nous pouvons aussi remarquer que l'augmentation du nombre de bandes avec le nombre de Rayleigh est faible (de 2 à 3 bandes). Par contre, si seul le pompage d'Ekman est retenu comme terme dissipatif, alors le nombre de bandes est bien plus important et augmente significativement avec le nombre de Rayleigh. Nous avons ainsi obtenu jusqu'à 7 bandes pour un nombre de Rayleigh $Ra = 5 \times Ra_c$.

Il est cependant important de s'interroger à ce stade sur la taille des structures radiales du vent zonal ainsi produites. L'équation du vent zonal sans viscosité de volume ne comporte plus de terme pour réguler l'échelle radiale des structures. Celle-ci sera donc directement calquée sur celle du terme source, c'est-à-dire sur celle de ψ. Il vient qu'au seuil, l'échelle radiale du vent zonal sera celle de ψ en $E^{1/3}$. Ceci rend caduque l'hypothèse d'une viscosité de volume négligeable dans l'équation du vent zonal. A de telles échelles, la viscosité de volume est en effet dominante.

Nous avons donc effectué d'autres calculs pour lesquels les deux termes dissipatifs (viscosité de volume et de pompage d'Ekman) sont retenus dans l'équation du vent zonal. L'ajout de la viscosité de volume élargit de façon évidente l'échelle radiale des bandes (voir la colonne de droite de la figure 2.21). La viscosité de volume agit en fait pour élargir les structures jusqu'à ce qu'elle soit elle même négligeable devant le pompage d'Ekman.

L'échelle de transition, au-dessus de laquelle le pompage d'Ekman domine et en-dessous de laquelle la viscosité de volume domine, peut facilement être estimée. En comparant la viscosité de volume à une échelle ℓ estimée par $E\,\ell^{-2}\,U$ (où U est une mesure de la vitesse du fluide) au pompage d'Ekman estimé par $E^{1/2}\,U$, on peut alors estimer l'échelle de transition

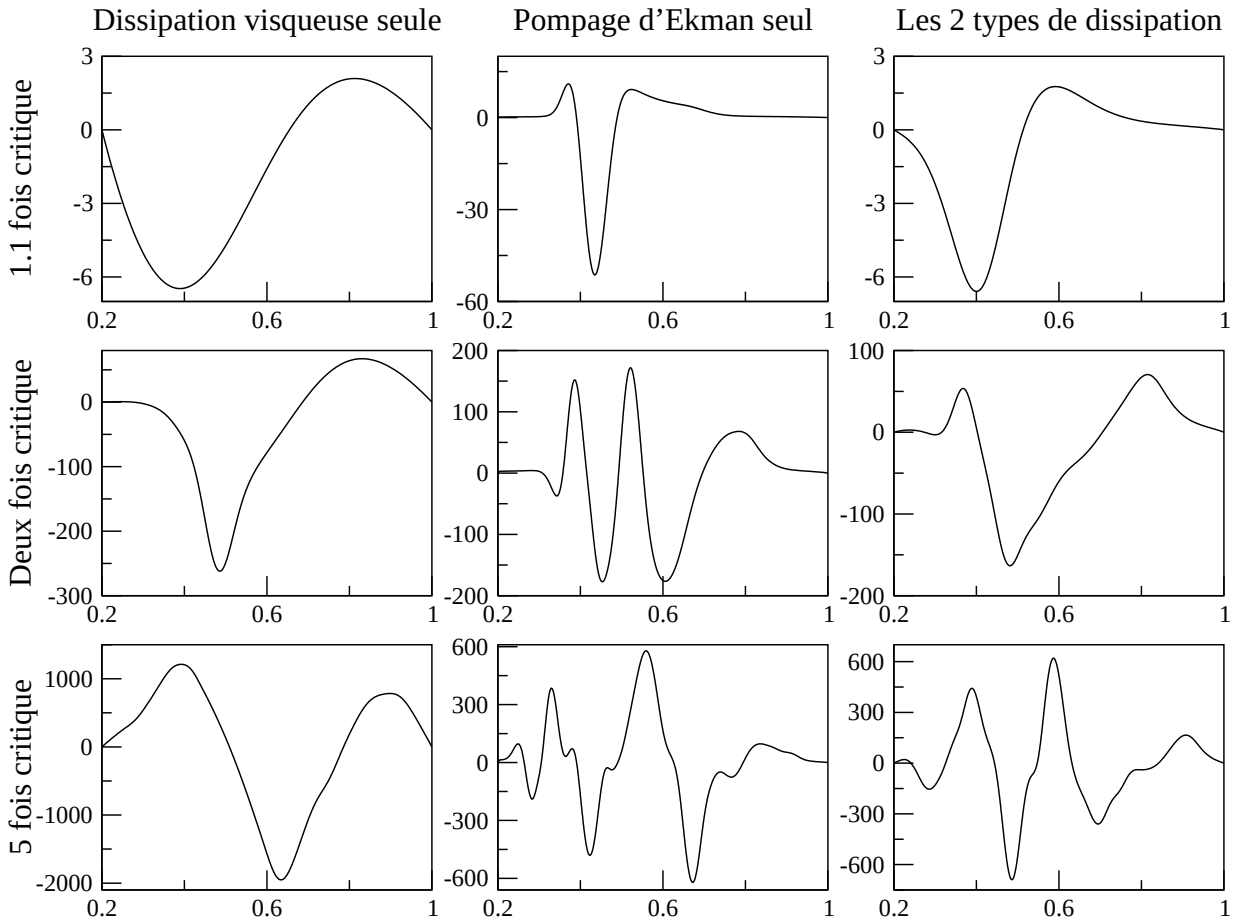

FIG. 2.21: *Profils radiaux du vent zonal pour* $E = 10^{-6}$, $Pr = 1$ *et de haut en bas* $Ra = 1.1 \times Ra_c$, $Ra = 2 \times Ra_c$ *et* $Ra = 5 \times Ra_c$. *La colonne de gauche montre les calculs pour lesquels seule la diffusion a été conservée pour le vent zonal, la colonne du milieu ceux pour lesquels seul le pompage d'Ekman a été conservé et la colonne de droite ceux pour lesquels les deux processus dissipatifs ont été retenus.*

à $\ell \sim \mathcal{O}E^{1/4}$.

Pour illustrer la dépendance de nos résultats vis-à-vis du nombre d'Ekman, nous présentons maintenant les résultats obtenus pour un nombre de Rayleigh de deux fois critique et des nombres d'Ekman décroissants de 10^{-5} à 10^{-7}. La figure 2.22 montre clairement que pour un nombre d'Ekman décroissant le nombre de bandes augmente plus vite dans le cas où seul le pompage d'Ekman est conservé que dans le cas ou les deux processus dissipatifs sont présents. La distinction entre une échelle radiale en $E^{1/3}$ et en $E^{1/4}$ est cependant difficile (ces échelles ne diffèrent que d'un coefficient $E^{1/12}$). Une validation directe des ces échelles à partir des calculs numériques nécessiterait des calculs pour des valeurs du nombres d'Ekman encore plus faibles.

Nous avons pu constater dans les sections précédentes que le vent zonal prend un rôle de plus en plus important à proximité du seuil de convection lorsque le nombre d'Ekman

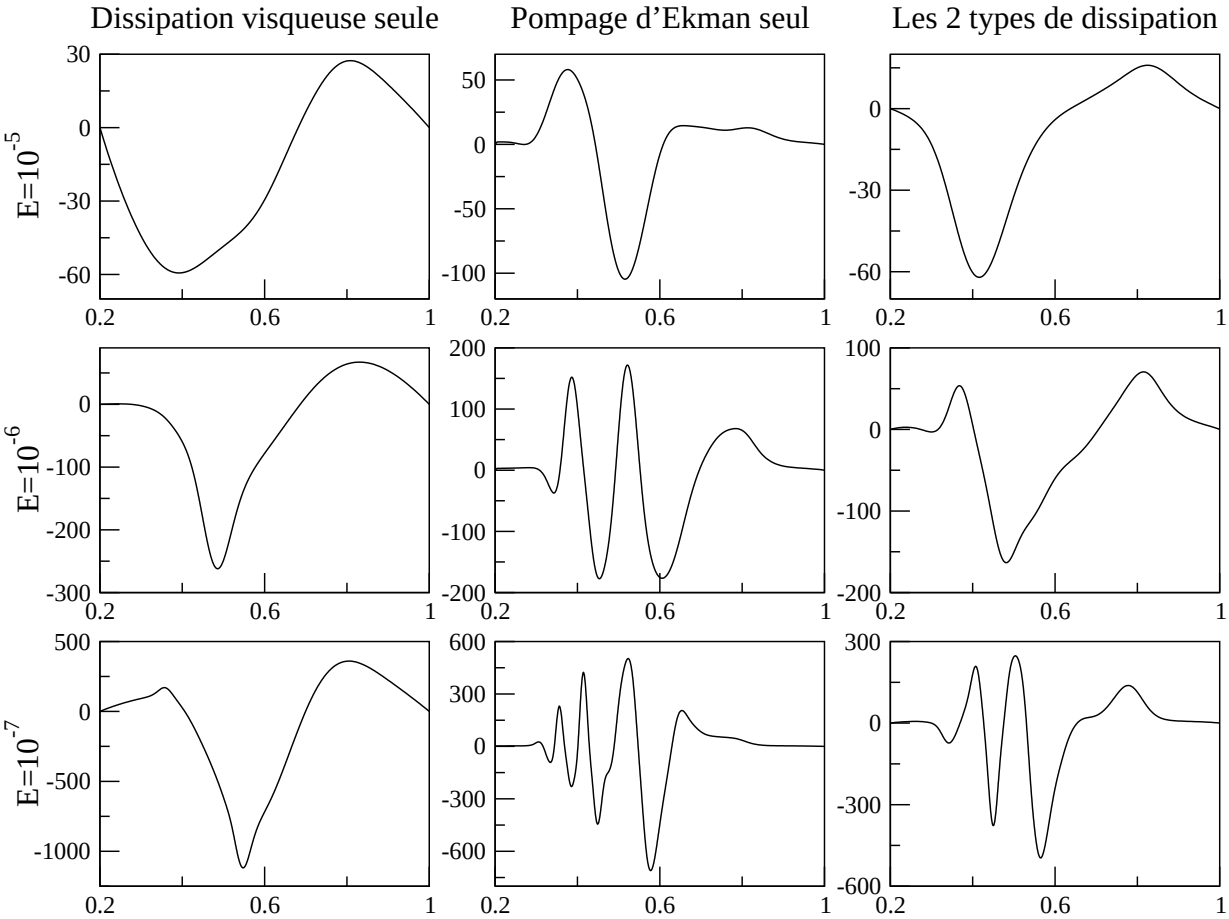

FIG. 2.22: *Profils radiaux du vent zonal pour* $Ra = 2 \times Ra_c$, $Pr = 1$ *et de haut en bas* $E = 10^{-5}$, $E = 10^{-6}$ *et* $E = 10^{-7}$. *La colonne de gauche montre les calculs pour lesquels seule la diffusion a été conservée pour le vent zonal, la colonne du milieu ceux pour lesquels seul le pompage d'Ekman a été conservé et la colonne de droite ceux pour lesquels les 2 processus dissipatifs ont été retenus.*

est diminué. Ceci nous a mené à étudier la variation du nombre de bandes dans la structure radiale pour des nombres de Rayleigh plus proche du seuil et toujours pour des nombres d'Ekman décroissants.

Comme le révèle la figure 2.23, le nombre de bandes augmente pour des nombres d'Ekman décroissants et ce même à proximité du seuil (nous sommes ici à un nombre de Rayleigh seulement supérieur de 10% au nombre de Rayleigh critique). En raison des nombres d'Ekman modérés auxquels nos calculs ont été effectués, seuls les résultats obtenus en ne gardant que le terme de pompage d'Ekman sont présentés sur cette figure. L'effet est alors plus visible grâce à l'échelle en $E^{1/3}$. Le fait, qu'une structure en bande existe pour un nombre de Rayleigh très proche du seuil convectif, valide notre approche faiblement non-linéaire.

Les structures en bandes que nous avons obtenues dans nos résultats rappellent les bandes observées dans les planètes géantes (pour visualiser l'aspect de nos profils radiaux $u_0(s)$ à la surface d'une sphère ils peuvent être convertis en introduisant la latitude λ et en rappelant que $s = r_e \cos\lambda$).

De nombreuses observations de Jupiter et Saturne (par Galileo et Cassini pour les plus récentes) ont permis de montrer que ces deux planètes possèdent une atmosphère qui au premier ordre présente des mouvements de convections sous forme de bandes longitudinales (voir figure 2.24). Des mesures des vitesses zonales ont été effectuées (voir par exemple Porco *et al.* [49], pour Jupiter). Dans le cas de Jupiter il y a environ neuf bandes par hémisphère, celles-ci ayant des vitesses différentes, voir opposées (figure 2.25).

De nombreuses études (tant théoriques que numériques) ont tenté d'expliquer ce phénomène des bandes dans les planètes géantes (voir [64] pour un échantillon significatif). Le problème reste mal compris et il est à noter que des points essentiels, comme la question d'une convection d'origine profonde ou atmosphérique à l'origine des bandes observées, ne sont toujours pas résolus [64]. Citons pour l'exemple quelques unes de ses études.

Busse [11] par exemple, a proposé que ces bandes soient dues à plusieurs couronnes de colonnes convectives, chacune de ces couronnes engendrant un vent zonal sous forme de cylindres géostrophiques. Ces cylindres concentriques tourneraient à des vitesses différentes, et même dans des sens différents. L'intersection des cylindres géostrophiques avec une sphère produirait les bandes observées.

Récemment, Jones *et al.* [39] ont étudié le rôle de la dissipation dans les couches visqueuses sur le vent zonal. Ils ont utilisé un modèle de convection non-linéaire avec un plan β. En introduisant l'effet du pompage d'Ekman aux bords des colonnes convectives, ils ont été capables d'obtenir un nombre important de bandes (jusqu'à six dans le plan β).

L'étude d'une turbulence décroissante (pas de forçage) par Yano [70] a aussi révélé la présence de bandes. Ce modèle a obtenu plus de bandes que les précédentes études mais toujours moins que le nombre de bandes révélé par l'observation de Jupiter par exemple.

Les modèles existants [64, 20, 21, 43] reposent pour la plupart sur une approche très non-linéaire pour produire une structure en bandes. Bien que la turbulence soit présente dans les planètes géantes, celle-ci n'apparaît pas comme un ingrédient indispensable à la compréhension de la présence de structures en bandes.

Notre modèle faiblement non-linéaire a montré que la présence de pompage d'Ekman

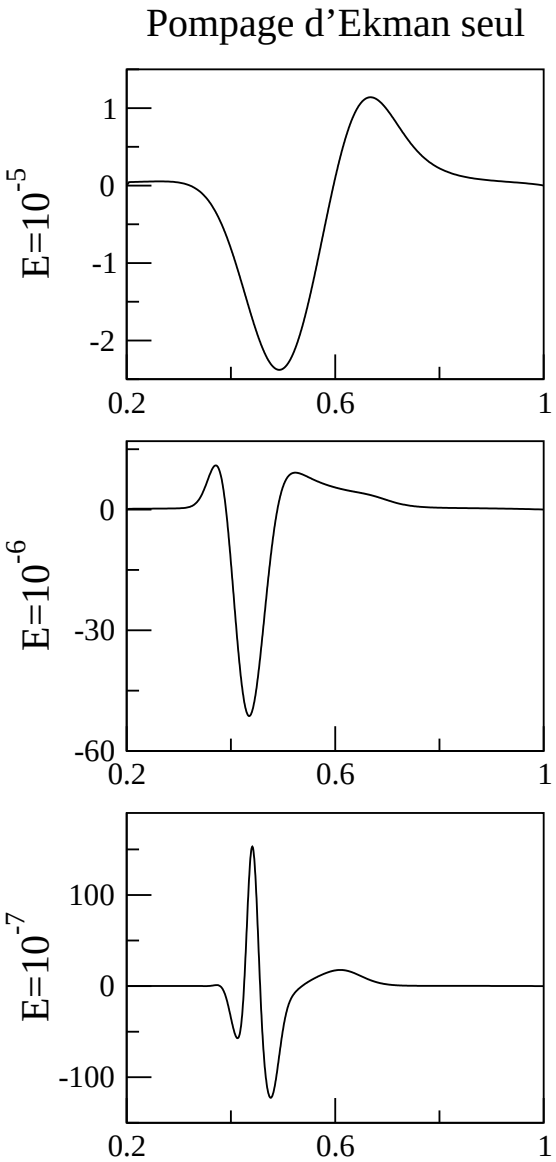

FIG. 2.23: *Profils radiaux du vent zonal pour* $Ra = 1.1 \times Ra_c$, $Pr = 1$ *et de haut en bas* $E = 10^{-5}$, $E = 10^{-6}$ *et* $E = 10^{-7}$. *Seul le pompage d'Ekman a été conservé comme processus dissipatif pour le vent zonal.*

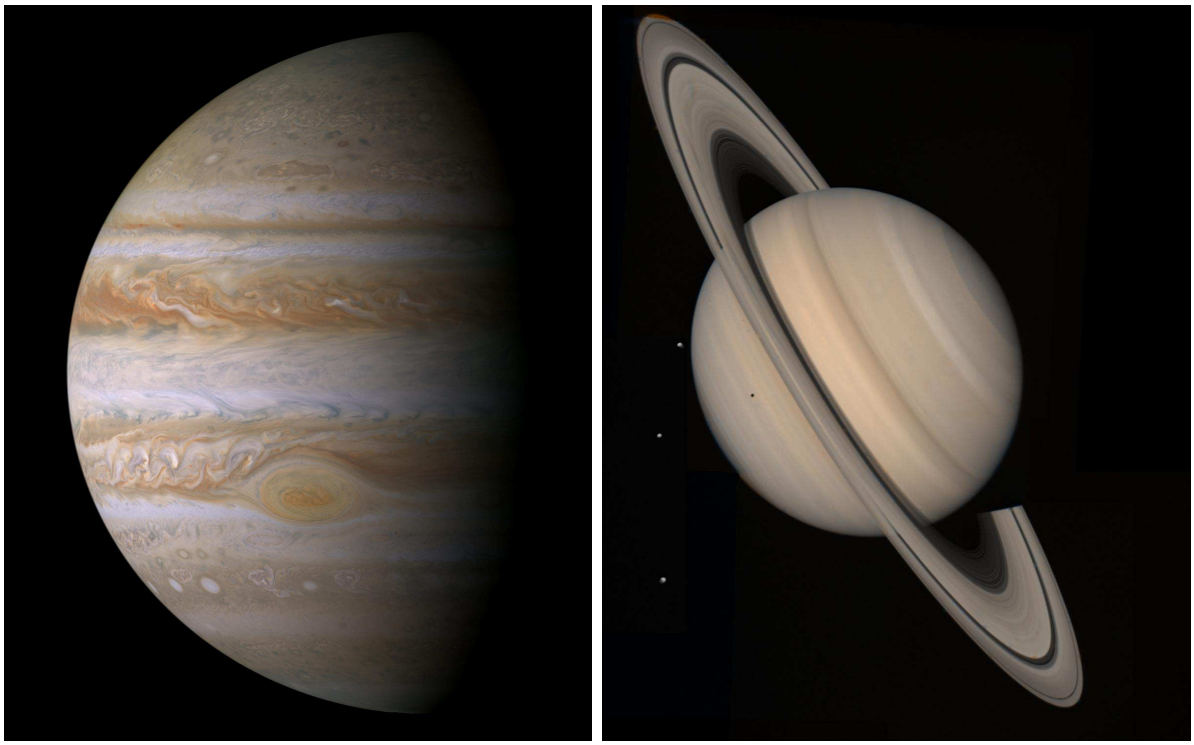

FIG. 2.24: *Images de Jupiter (á gauche, NASA image PIA04866) et de Saturne (à droite, NASA image PIA01364).*

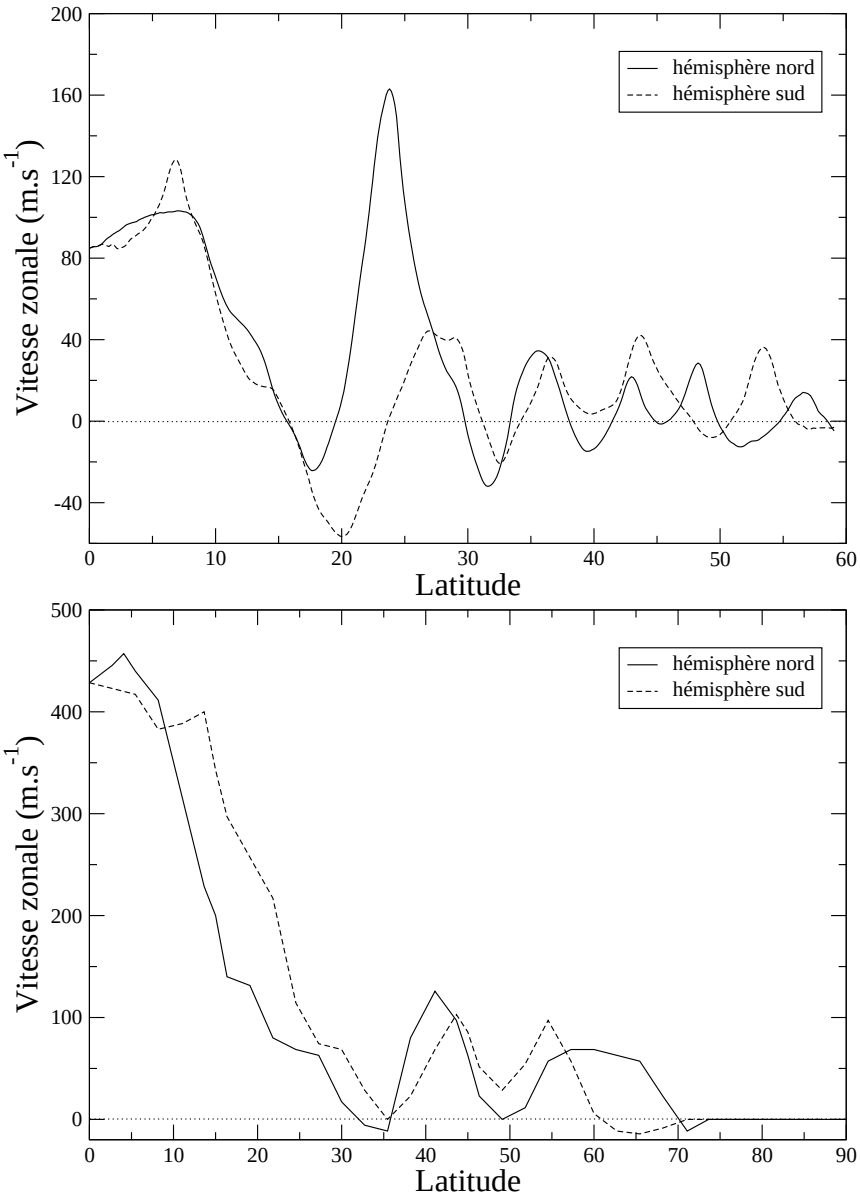

FIG. 2.25: *Vitesses zonales en fonction de la latitude issues des observations de Jupiter et Saturne. L'hémisphère nord est en trait plein, l'hémisphère sud en traits pointillés. D'après Cho et Polvani [17] et Porco et al. [49].*

est suffisante pour produire des bandes immédiatement au-dessus du seuil dans la limite des petits nombres d'Ekman pertinente pour ces objets.

Supposons un instant que la convection sous forme de colonnes soit bien présente dans les planètes géantes. En se basant sur des valeurs de viscosité turbulente (bien plus grande que les valeurs moléculaires) les nombres d'Ekman de Jupiter et de Saturne peuvent être respectivement estimées par $7.7\,.\,10^{-10}$ et $3.5\,.\,10^{-9}$ [59].

De telles valeurs peuvent permettre de discriminer entre une échelle de bande de l'ordre de $E^{1/3}$, qui suppose que seul le pompage d'Ekman est important, et une échelle de bande de l'ordre de $E^{1/4}$, qui suppose que la viscosité de volume et le pompage d'Ekman sont importants. Les préfacteurs de ces deux lois d'échelle restent cependant inconnus.

En supposant ces préfacteurs d'ordre 1, une loi d'échelle en $E^{1/3}$ mènerait à un nombre de bandes de l'ordre de 1000 pour Jupiter et de 600 pour Saturne, alors qu'une loi d'échelle en $E^{1/4}$ mènerait à un nombre de bandes de l'ordre de 180 pour Jupiter et de 130 pour Saturne. Les nombres de bandes ainsi obtenus restent bien plus grand que ceux observés (de l'ordre de 10 bandes entre des latitudes de 0 et 60 degrés pour Jupiter).

Un préfacteur de l'ordre de 0.1 pourrait rendre l'échelle en $E^{1/4}$ compatible avec les observations. Une largeur de bandes de l'ordre de $E^{1/4}$ semble bien plus compatible avec les observations que l'échelle plus petite de l'ordre de $E^{1/3}$. Ceci indique que si le pompage d'Ekman est important dans la détermination de l'échelle des bandes alors celui-ci devrait être comparable avec la viscosité de volume.

2.5 Interprétation géophysique

Dans la limite des petits nombres d'Ekman, qui est pertinente pour la Terre, nous avons vu dans ce chapitre que le vent zonal devient important très près du seuil convectif. En effet, celui-ci devient suffisamment efficace pour cisailler les colonnes de convection et les détruire de façon quasi-périodique (oscillations de relaxation). Lorsque l'on augmente le nombre de Rayleigh pour un nombre d'Ekman fixé, nous avons vu que cette période a tendance à diminuer et que les oscillations de relaxation perdent leur régularité. Il est donc intéressant de constater que nous avons là un phénomène qui supprime la convection de façon plus ou moins régulière, avec une pseudo-période faisant intervenir une fraction du temps visqueux. Ce temps n'est pas un temps naturel du système (voir tableau 3.1). En supposant que les oscillations de relaxations existent dans le noyau terrestre, la période de ces oscillations pourrait être reliée au temps caractéristique des inversions de l'ordre de 100 000 ans (en utilisant une viscosité turbulente). Ce rapprochement est cependant à modérer en signalant qu'il conviendrait d'étudier le devenir de ces oscillations de relaxations pour un mode de chauffage différentiel (plus réaliste pour la Terre) et surtout en présence de champ magnétique.

Nous avons aussi pu constater au cours de ce chapitre, qu'en présence de pompage d'Ekman le vent zonal adopte une structure radiale sous forme de bandes tournant à des vitesses différentes et opposées. Ces structures devenant de plus en plus marquées et apparaissant de plus en plus près du seuil dans la limite des petits nombres d'Ekman. La

rotation rapide de la Terre amène que le pompage d'Ekman doit être important dans le cas de la Terre et donc mener à une structure en bande du vent zonal. Cependant, comme pour le raisonnement précédent, il convient de s'interroger la pertinence de ces résultats en présence de champ magnétique qui va réduire de façon significative le rôle du vent zonal.

Chapitre 3

Bifurcation dynamo

Nous avons étudié dans le chapitre précédent la convection dans une sphère en rotation rapide à l'aide d'un modèle à deux dimensions. Nous avons pu constater que dans le cas de chauffage interne, si on s'éloigne du seuil convectif en augmentant le nombre de Rayleigh, l'écoulement peut, à travers une série de bifurcations, adopter différents comportements pour lesquels l'énergie cinétique est dépendante du temps. Ce comportement a été constaté aussi bien en 2D avec nos calculs qu'en 3D avec ceux de Busse et Grote (2001) et est reproduit avec d'autres modes de chauffage. Par exemple avec une température imposée aux deux bords (chauffage différentiel), on observe aussi une solution dont l'énergie cinétique dépend du temps. Nous présentons par exemple sur la figure 3.1 des « vacillating oscillations » que nous avons obtenues avec un modèle 3D utilisant ce type de chauffage.

Ce type de comportement a aussi été observé en présence de champ magnétique. Ainsi, pour ce même mode de chauffage, mais avec champ magnétique, J. Wicht (2002) a également observé des oscillations de l'énergie magnétique (voir figure 3.2)

L'addition du champ magnétique, au cas de la convection dans une sphère en rotation rapide, ajoute une difficulté à un problème déjà complexe. Nous allons ici étudier le cas de la bifurcation dynamo en cherchant à caractériser la nature de la bifurcation en fonction des paramètres. Il est en effet important de bien comprendre la dynamique du système dans le domaine faiblement non-linéaire, là où elle est la plus accessible, avant de s'attacher à comprendre son comportement dans le domaine fortement non-linéaire.

3.1 Modélisation

3.1.1 Système d'équations

Pour étudier la bifurcation dynamo, nous allons utiliser un nouvel adimensionnement, différent de celui que nous avons adopté dans la partie traitant de la convection et mieux adapté à ce problème. Cet adimensionnement est celui utilisé par les auteurs du cas test (ou benchmark) dynamo organisé par Christensen (2001).

Nous allons adimensionner les équations avec la différence entre le rayon interne et le

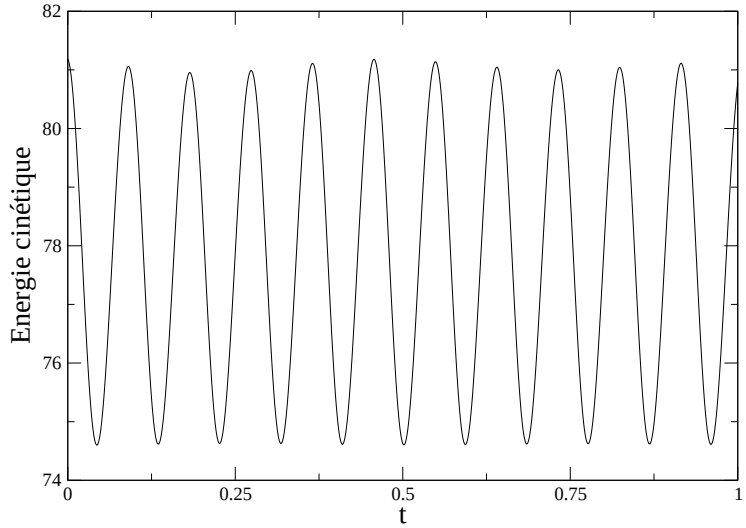

FIG. 3.1: *Oscillations de l'énergie cinétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-3}$, $Pr = 1$ *et* $Ra = 2.4 \times Ra_c$, *avec des conditions aux limites de non-glissement. Ce calcul correspond à un mode de chauffage différent de celui utilisé au chapitre* 2 *: on utilise ici une différence de température imposée aux deux bords.*

rayon externe de la sphère $D = r_e - r_i$, comme échelle de longueur. L'unité de temps devient donc D^2/ν. Notons que pour toutes nos simulations le rapport r_i/r_e est fixé à 0.35 pour son intérêt géophysique.

Dans le chapitre précédent nous avons utilisé le mode de chauffage uniforme. Celui-ci a été historiquement adopté dans les cas de convection dans une sphère pleine (sans graine) et il nous a permis de comparer nos résultats aux différentes prédictions théoriques. Nous allons maintenant adopter le mode de chauffage différentiel pour nos calculs avec champ magnétique. Celui-ci est en effet plus réaliste pour l'étude de la géodynamo. Par conséquent la température sera maintenant adimensionnée par ΔT, l'écart de température entre l'ICB et la CMB. Nous utilisons, de plus, un nombre de Rayleigh modifié $\widetilde{Ra}$ égal à RaE/Pr.

Nous utiliserons par la suite trois nombres sans dimension

$$E = \frac{\nu}{\Omega D^2}\,, \quad \widetilde{Ra} = \frac{\alpha g \Delta T D}{\nu \Omega}\,, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \tag{3.1}$$

Pour ne pas surcharger les équations, le nombre de Rayleigh modifié $\widetilde{Ra}$ sera noté Ra par la suite.

Nous allons tout d'abord établir l'équation d'évolution du champ magnétique $\mathbf{B}$. Les

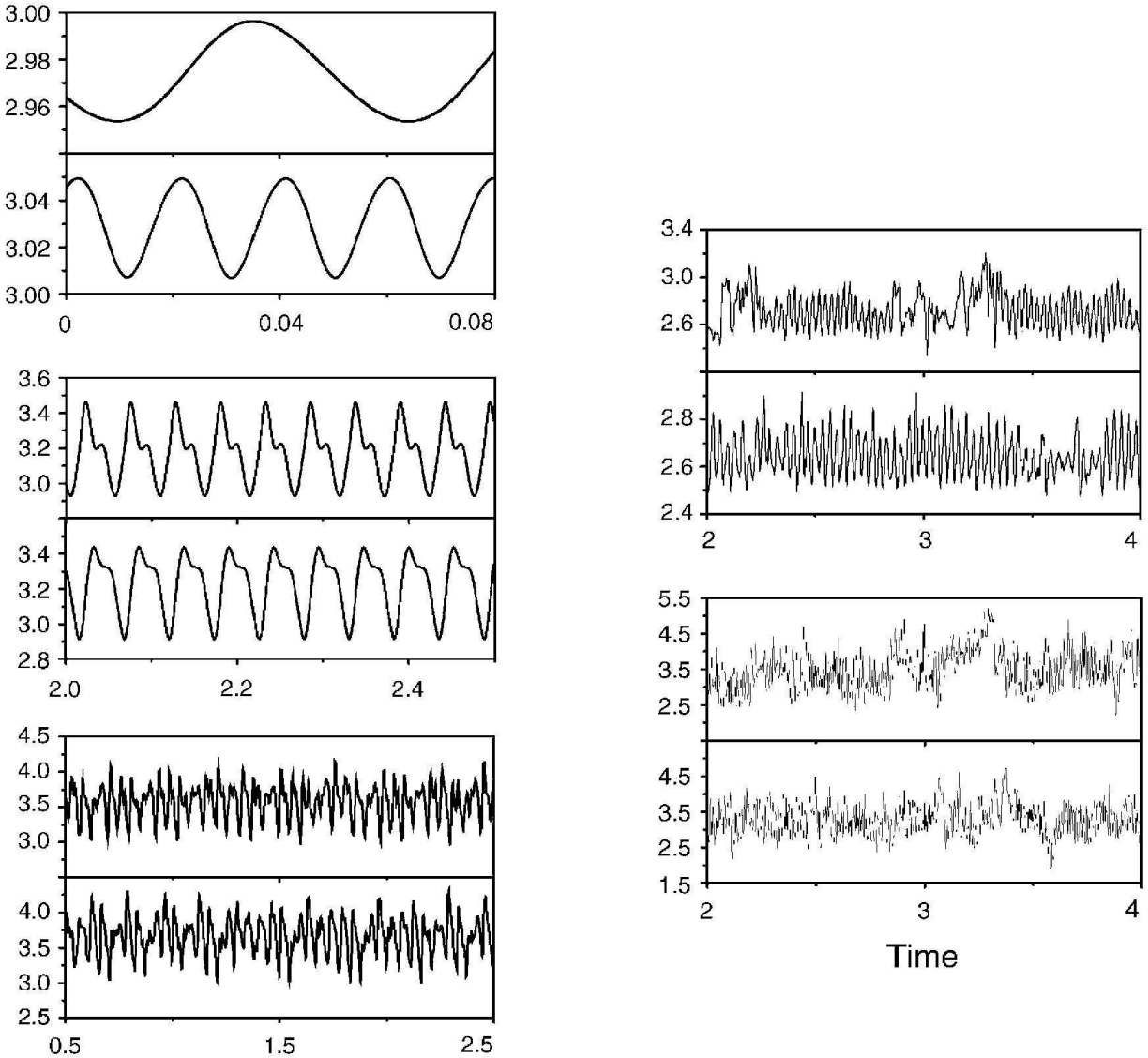

FIG. 3.2: *Energie magnétique en fonction du temps pour* $E = 10^{-3}$, $Pm = 5$ *et de haut en bas* $Ra = 207.5$, $Ra = 225$, $Ra = 260$, $Ra = 300$ *et* $Ra = 400$. *La partie supérieure (inférieure) de chaque couple de graphiques montre les solutions obtenues pour un cas avec graine conductrice (isolante). Les énergies ont été divisées par* 10^4. *Une séquence de bifurcation comparable à celle du chapitre* 2 *est ici reproduite dans un régime dynamo (d'après Wicht, 2002).*

équations de Maxwell dans la matière s'écrivent

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_q && \text{(Maxwell-Gauss)}, && (3.2)\\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Conservation du flux)}, && (3.3)\\
\nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Maxwell-Faraday)}, && (3.4)\\
\nabla \wedge \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{(Maxwell-Ampère)}. && (3.5)
\end{aligned}$$

L'équation de Maxwell-Gauss est une version locale de la conservation du flux d'induction électrique créé par une densité de charge ρ_q. La deuxième équation de ce système, équivalent magnétique de la première, exprime le fait qu'il n'existe pas de monopole magnétique.

La troisième équation (Maxwell-Faraday) traduit la création d'induction électrique par la variation d'induction magnétique. Tandis que la dernière équation (Maxwell-Ampère) exprime l'induction de champ magnétique par un courant.

A ce système s'ajoutent les équations constitutives liant $\mathbf{H}$ à $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{j}$ à $\mathbf{E}$. Nous considérons un milieu linéaire, homogène et isotrope. De plus, les phénomènes d'aimantation sont négligés, car la température du noyau terrestre est largement supérieure à la température de Curie du fer. On a alors $\mu = \mu_0$ la perméabilité magnétique du vide. D'après ces hypothèses nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}\,, && (3.6)\\
\mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}\,, && (3.7)\\
\mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B})\,. && (3.8)
\end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ étant équivalent à une constante multiplicative près, on parlera indifféremment d'induction magnétique ou de champ magnétique.

Les échelles caractéristiques de vitesse que l'on considère étant bien plus petites que celles de la lumière nous pouvons négliger le terme $\partial \mathbf{D}/\partial t = 0$.

En combinant la loi d'Ampère (3.5) et les deux dernières équations du système ci-dessus (3.8) et (3.8) on obtient

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}). \tag{3.9}$$

Prenons le rotationnel de cette équation et combinons le résultat avec l'équation Maxwell-Faraday, nous obtenons l'équation d'évolution du champ magnétique ou équation d'induction (sous sa forme adimensionnée)

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) + Pm^{-1} \Delta \mathbf{B}, \tag{3.10}$$

où $Pm = \nu/\eta$ est le nombre de Prandtl magnétique. Ce nombre traduit l'importance relative de diffusion visqueuse par rapport à la diffusion magnétique ($\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$). Le

champ magnétique est mis à l'échelle par $(\rho_0\mu_0\eta\,\Omega)^{1/2}$. L'équation de température conserve la même expression d'advection-diffusion que dans le chapitre précédent

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = Pr^{-1}\Delta T\,. \tag{3.11}$$

Le terme de source S volumique est nul dans ce cas, puisque nous considèrons le mode de chauffage différentiel.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit ici

$$E\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla\Pi - 2(\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{u}) + E\Delta\mathbf{u} + Ra\,\mathbf{r}T\,. \tag{3.12}$$

Cependant, nous considérons à présent l'instabilité dynamo, le fluide étant conducteur et parcouru par des courants, il va subir une force en présence de champ magnétique, dite force de Laplace (ou Lorentz). Celle-ci a pour expression $\mathbf{j}\wedge\mathbf{B}$, où $\mathbf{j}$ est la densité de courant et $\mathbf{B}$ le champ magnétique.

En utilisant la loi d'Ampère (voir équations de Maxwell (3.5)) sous la forme $\mathbf{j} = 1/\mu_0(\nabla\wedge\mathbf{B})$, on obtient l'expression suivante pour la force de Laplace

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{B}\,.$$

L'équation (3.12) devient alors

$$E\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla\Pi - 2(\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{u}) + E\Delta\mathbf{u} + Ra\,\mathbf{r}T + \frac{1}{Pm}(\nabla\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{B}\,. \tag{3.13}$$

Nous avons donc à résoudre le système suivant

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}\right) &= -\nabla\Pi - 2(\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{u}) + Ra\,\mathbf{r}T + \frac{1}{Pm}(\nabla\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{B},\\
\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{B}) + Pm^{-1}\Delta\mathbf{B},\\
\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T &= Pr^{-1}\Delta T,\\
\nabla\cdot\mathbf{u} = 0\ , \qquad & \nabla\cdot\mathbf{B} = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.1.2 Décomposition Poloïdale-Toroïdale

Nous pouvons remarquer que nos deux champs vectoriels $\mathbf{u}$ et $\mathbf{B}$ sont à divergence nulle. Nous allons tirer partie de cette propriété en appliquant une décomposition de Mie ou décomposition « Poloïdale-Toroïdale », celle-ci va nous permettre de gagner un temps de calcul considérable en réduisant chaque grandeur vectorielle (3 composantes) à un couple

de scalaires. Selon cette décomposition toute grandeur vectorielle à divergence nulle peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{V} = \underbrace{\nabla \wedge \nabla \wedge (\mathbf{r}\, V_p)}_{\text{composante poloïdale}} + \underbrace{\nabla \wedge (\mathbf{r}\, V_t)}_{\text{composante toroïdale}}, \tag{3.15}$$

avec $\mathbf{r}$ le rayon vecteur (nous sommes maintenant dans un système de coordonnées sphériques (r,θ,φ)).

Cette décomposition s'écrit plus explicitement avec la formule suivante

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \dfrac{1}{r} L_2(V_p), \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rV_p)\right) + \dfrac{1}{\sin\,\theta}\dfrac{\partial V_t}{\partial\varphi}, \\ \dfrac{1}{\sin\,\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rV_p)\right) - \dfrac{\partial V_t}{\partial\theta}. \end{cases} \tag{3.16}$$

où L_2 est la partie angulaire du Laplacien,

$$L_2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,. \tag{3.17}$$

Cette décomposition peut être étendue à un champ de vecteur à divergence non nulle, c'est par exemple le cas du terme $\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$ dans l'équation d'induction. Pour ce faire un troisième scalaire appelé sphéroïdal est introduit. Il est noté V_s. Nous obtenons alors

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \dfrac{1}{r} L_2(V_p)\,, \\ \dfrac{\partial V_s}{\partial\theta} + \dfrac{1}{\sin\,\theta}\dfrac{\partial V_t}{\partial\varphi}\,, \\ \dfrac{1}{\sin\,\theta}\dfrac{\partial V_s}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial V_t}{\partial\theta}\,. \end{cases} \tag{3.18}$$

Si la divergence de $\mathbf{V}$ est nulle il existe une relation simple entre V_s et V_p

$$V_s = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_p), \tag{3.19}$$

qui ramène cette écriture à la décomposition précédemment introduite pour les champs à divergence nulle.

3.1.3 Harmoniques sphériques

Les calculs s'effectuant dans une sphère, il est tout naturel d'adopter une décomposition en harmoniques sphériques, une telle décomposition est l'équivalent dans la géométrie sphérique de la transformée de Fourier dans le cas plan.

Ces fonctions complexes sont définies sur la sphère par

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = C_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}\,, \tag{3.20}$$

où $l \in \mathbb{N}$ est le degré et $m \leq l$ l'ordre du polynôme P_l^m de Legendre associé, C_l^m est une constante de normalisation. Les harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur L_2

$$L_2\, Y_l^m = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial\varphi^2} = l(l+1)\, Y_l^m\,. \tag{3.21}$$

Toute fonction F continue sur la sphère s'écrit sur la base des harmoniques sphériques comme

$$F(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{l} f_l^m Y_l^m(\theta,\varphi)\,, \tag{3.22}$$

où les coefficients f_l^m sont donnés par

$$f_l^m = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} Y_l^{m^*}(\theta,\varphi) F(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,. \tag{3.23}$$

Le système (3.14) est complété de conditions aux limites. Les conditions aux limites thermiques correspondent à une température imposée aux deux bords (chauffage différentiel). En ce qui concerne la vitesse, nous avons adopté des conditions aux limites de non-glissement aux deux bords. Compte tenu de notre décomposition poloïdale/toroïdale ces conditions aux limites ont pour expression

$$u_p = \frac{\partial u_p}{\partial r} = u_t = 0\,. \tag{3.24}$$

Pour le champ magnétique, nous avons opté pour des conditions aux limites de type isolant à la sphère interne et externe (respectivement graine et manteau isolant). Ce choix a été guidé par un souci de simplification du problème en ne considérant que le modèle le plus simple physiquement. En effet, dans ce cas il n'y a pas de couple visqueux ni de couple magnétique à considérer pour la graine. Ces conditions aux limites isolantes permettent aussi de comparer nos résultats aux études de Christensen *et al.* (2001), Kutzner et Christensen (2002) et de Wicht (2002). Elles présentent de plus l'avantage d'être facilement implémentables numériquement.

Dans l'isolant, les courants étant par définition nuls, l'équation de Maxwell-Ampère nous donne $\nabla\wedge\mathbf{B} = 0$. Le champ $\mathbf{B}$ y dérive donc d'un potentiel Φ, $\mathbf{B} = -\nabla\Phi$, qui vérifie $\Delta\Phi = 0$ (potentiel harmonique). Le champ magnétique est continu à la frontière interne et externe, la composante radiale de $\nabla\wedge\mathbf{B}$ l'est aussi, on obtient donc par continuité

$$(\nabla\wedge\mathbf{B})\cdot\mathbf{e_r} = -\frac{1}{r}L_2 B_t = 0 \;\text{ d'où } B_t = 0 \text{ en } r_i \text{ et } r_e\,. \tag{3.25}$$

Déterminons maintenant de même les conditions aux bords pour la partie poloïdale du champ. B_p et sa dérivée radiale sont aussi continues à la frontière. On pose $\Phi = r^\alpha$, ce

qui amène $\alpha(\alpha+1) = l(l+1)$. Afin d'éviter une divergence en 0 on aura pour la frontière interne $\alpha = l$, et pour éviter une divergence à l'infini on aura pour la frontière externe $\alpha = -(l+1)$, et la composante radiale du champ B_r vérifie $B_r = \partial_r \Phi$ et $B_r = 1/r\, L_2\, B_p$ d'où on tire les relations suivantes pour les conditions aux limites pour la composante poloïdale du champ magnétique

$$\frac{\partial B_p}{\partial r} = -\frac{(l+1)}{r} B_p \qquad \text{pour la frontière, externe} \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial B_p}{\partial r} = \frac{l}{r} B_p \qquad \text{pour la frontière interne.} \tag{3.27}$$

Nous pouvons ici noter un avantage lié à l'utilisation de la décomposition en harmoniques sphériques qui permet de ne pas avoir à modéliser le champ dans l'isolant pour clore le système.

3.2 Méthodes numériques

Nous avons utilisé pour nos calculs deux programmes différents PARODY et MAGIC. Nous avons développé, Emmanuel Dormy, Julien Aubert et moi-même, le programme PARODY à partir d'un code de E. Dormy, P. Cardin et J. Aubert. Le programme MAGIC a, quant à lui été développé par U. Christensen, J. Wicht et G. Glatzmaier.

Ces deux programmes ont en commun d'utiliser la décomposition en harmoniques sphériques pour toutes les grandeurs ainsi que la décomposition Poloïdale-Toroïdale pour les champs vectoriels. Ils emploient aussi tous les deux le schéma de Crank-Nicholson pour discrétiser en temps les termes diffusifs et le schéma d'Adams-Bashford pour les termes de force de Coriolis, poussée d'Archimède et les termes non-linéaires (voir la section 2.3 pour une définition).

Cependant ces deux programmes diffèrent sur plusieurs points. Ils ne traitent pas les mêmes équations pour les composantes poloïdales et toroïdales de la vitesse. Dans PARODY, nous prenons au préalable le double rotationnel et le rotationnel de l'équation (3.13) afin de supprimer le terme de pression, nous obtenons respectivement l'équation pour la composante poloïdale et la composante toroïdale de la vitesse. Ce n'est pas le cas dans MAGIC qui doit donc résoudre une équation supplémentaire pour la pression. De plus, PARODY utilise les différences finies pour la discrétisation radiale alors que MAGIC emploie les polynômes de Chebychev. Pour finir, MAGIC possède un pas de temps adaptatif. Ce pas de temps doit satisfaire un critère de courant, celui-ci est fonction des paramètres et de la valeur des champs. Cette condition garantit que les différentes ondes existantes dans le système ne se déplacent pas plus vite que la limite de résolution permise par le pas de temps et les paramètres de grille.

Les deux codes numériques utilisés ont passé avec succès le benchmark numérique initié par U. Christensen [19]. Ce benchmark a consisté à tester sur quelques cas simples la convergence des calculs produits par les programmes de différentes équipes. Le cas 0 de ce benchmark est un cas purement hydrodynamique avec des conditions aux limites de

non-glissement pour la vitesse et une température imposée aux deux bords. Le cas un et le cas deux sont deux cas avec champ magnétique. Le premier (cas 1) utilise des conditions aux limites isolantes aux deux bords pour le champ magnétique et le second (cas 2), plus complexe puisqu'il faut calculer les couples visqueux et magnétique sur la graine, utilise une graine conductrice libre de tourner par rapport à la frontière extérieure. Les paramètres utilisés sont les suivants $E = 10^{-3}$, $Ra = 100$ (110 pour le cas 2), $Pr = 1$ et $Pm = 5$ (zéro pour le cas zéro non magnétique). Ces paramètres sont fort éloignés de ceux de la Terre, cependant d'après Christensen (voir la figure 1.2 de l'introduction) le champ produit pour des paramètres proches présente des similitudes avec le champ magnétique terrestre.

En pratique, les paramètres de ce benchmark ont été choisis de sorte que les dynamos obtenues aient en régime permanent une énergie constante (sans fluctuation). Outre ces deux cas, nous avons étudié d'autres conditions aux limites (plus adaptées à des dynamos expérimentales). Les résultats de cette étude sont présentés dans l'annexe C.

Notons que les énergies cinétique et magnétique, présentées dans notre étude de la bifurcation dynamo, sont calculées respectivement par les formules

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{u}^2 \, dV \qquad \text{et} \qquad E_{\text{mag}} = \frac{1}{2EPm}\int_V \mathbf{B}^2 \, dV \,, \tag{3.28}$$

où V désigne le volume de la coquille fluide.

3.3 Description théorique

Rappelons brièvement le principe de l'effet dynamo. Le fluide est le siège de mouvements de convection, dus dans notre cas à un forçage thermique. Le fluide étant conducteur ces mouvements vont (en présence d'un champ magnétique initial) engendrer des courants qui vont produire un champ magnétique. Le champ magnétique va lui même agir sur l'écoulement par l'intermédiaire de la force de Laplace, cette rétroaction va interrompre la croissance du champ magnétique et saturer sa valeur. Ce processus, dit de dynamo auto-entretenue, a pour effet de maintenir un champ magnétique non nul contre la diffusion ohmique.

La force de Laplace, qui va permettre la saturation de l'énergie magnétique, s'écrit $(\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}) - \nabla(\mathbf{B}^2/2)$. Ce dernier terme, en $\mathbf{B}^2$ est appelé pression magnétique et peut être intégré au gradient de pression. Il n'influence donc pas la dynamique d'un fluide incompressible. L'autre terme du membre de droite est lui appelé tension magnétique et traduit le fait que les lignes de champ résistent à l'étirement dû à la convection. Le champ seul (sans force de Coriolis) a donc pour effet d'inhiber la convection.

Roberts (1978) a proposé l'existence de deux régimes de saturation du champ magnétique. Le premier régime de saturation, dit de champ faible, est un régime où la force de Laplace va s'équilibrer, dans l'équation de vitesse, avec le terme de diffusion visqueuse. Le second régime, dit de champ fort, est un régime valable dans la limite des très petits nombres d'Ekman. Dans ce régime la force de Laplace va s'équilibrer avec la force de Coriolis, les effets visqueux ne jouent plus aucun rôle. Dans le régime de champ fort, le champ magnétique

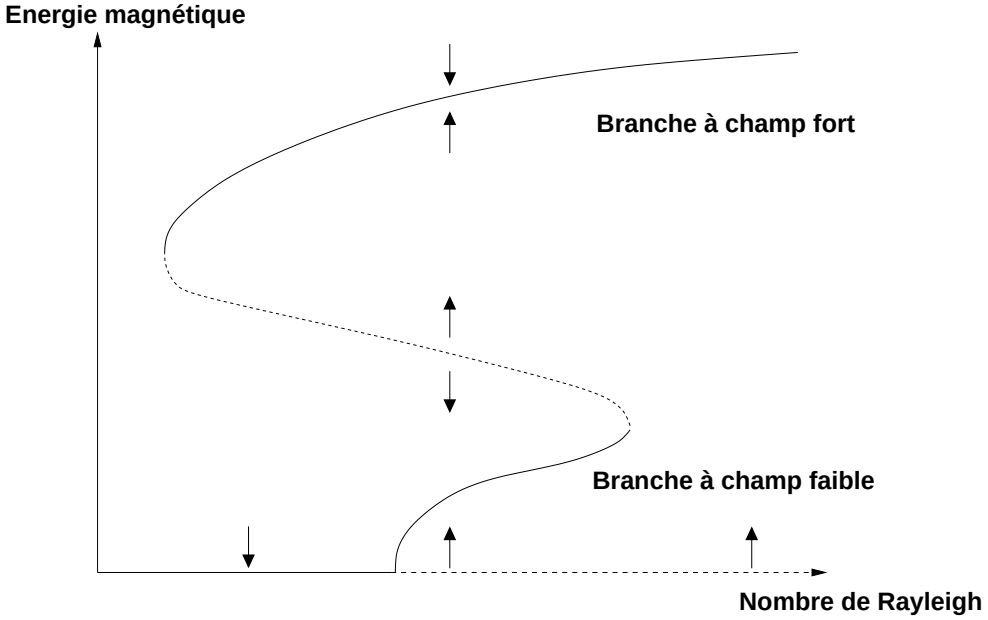

FIG. 3.3: *Diagramme de bifurcation dynamo proposé par Roberts (1978) pour la limite asymptotique des petits nombres d'Ekman. Partons d'une perturbation de champ magnétique. Au-dessus du seuil dynamo, cette pertubation est instable et en augmentant le nombre de Rayleigh la branche à champ faible est décrite à travers une bifurcation supercritique. A partir d'un certain nombre de Rayleigh, le système saute brutalement sur la branche à champ fort. Une fois sur cette branche à champ fort, le nombre de Rayleigh peut être diminué en-dessous du seuil dynamo sans la perdre. Dans ce régime de champ fort, le champ magnétique est en effet favorable à la convection, celle-ci y est donc plus efficace pour maintenir l'action dynamo.*

va avoir pour effet de relaxer la contrainte de la force de Coriolis et donc de favoriser la convection, une fois cette branche de champ fort atteinte, il sera possible de maintenir la dynamo en-dessous de son seuil (voir figure 3.3).

La dissipation visqueuse n'étant pas négligeable dans nos modèles numériques nous ne sommes pas dans le régime asymptotique où le régime champ fort s'applique.

Pour mieux comprendre la dynamique de nos modèles, il est utile de rappeler les divers temps caractéristiques qui apparaissent naturellement dans les équations qui gouvernent ce problème. Ils sont énumérés dans le tableau 3.1. Ces temps sont évalués ici en unité de temps visqueux.

Définissons maintenant deux nombres sans dimension, le nombre d'Elsasser et le nombre de Reynolds magnétique. Ces nombres sans dimension ne figurent pas dans nos équations, ils ne sont pas fixés à priori, mais sont en fait des paramètres de sortie de nos modèles numériques.

Le nombre d'Elsasser caractérise le rapport entre la force de Laplace et celle de Coriolis.

temps	symbole	formule	valeur
visqueux	τ_ν	D^2/ν	1
rotation	τ_Ω	Ω^{-1}	E
retournement	τ_u	D/u	$1/Re$
thermique	τ_κ	D^2/κ	Pr
magnétique	τ_η	R^2/η	$R^2/D^2\ Pm$
dipôle	τ_d	$R^2/\pi^2\eta$	$R^2/D^2\ Pm/\pi^2$

TAB. 3.1: *Temps caractéristiques d'évolution des différentes grandeurs du système.*

Sous l'hypothèse d'un équilibre statistique entre induction et diffusion, il est défini par

$$\Lambda = \frac{B^2}{\rho_0 \mu_0 \eta\, \Omega}\,. \tag{3.29}$$

Dans notre adimensionnement le nombre d'Elsasser est mesuré par $\|\mathbf{B}\|^2$. Nous utiliserons la norme L_2 (intégrée sur le volume) d'où

$$\Lambda = \frac{2E\, Pm\, E_{mag}}{V}. \tag{3.30}$$

Le nombre de Reynolds magnétique Rm traduit le rapport, dans l'équation d'induction, entre le terme qui va permettre l'amplification du champ magnétique et la diffusion ohmique qui le fait disparaître.

$$Rm = \frac{\{\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})\}}{\{\Delta \mathbf{B}\}} = \frac{UD}{\eta}\,, \tag{3.31}$$

où U est une vitesse moyenne.

Il peut aussi s'écrire $Rm = RePm$ où Re est le nombre de Reynolds, celui-ci traduit l'importance relative du terme non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ par rapport au terme de diffusion visqueuse. Notons que ce nombre de Reynolds est construit sur l'échelle de longueur D (nombre de Reynolds de grande échelle).

Dans notre adimensionnement le nombre de Reynolds équivaut à $\|u\|^{1/2}$ et en prenant la même convention que précédemment on a donc

$$Rm = \sqrt{\frac{2E_{\text{cin}}}{V}}\, Pm\,. \tag{3.32}$$

Une dynamo auto-entretenue n'est pas obtenue dès l'apparition de la convection. En effet dans un premier temps la diffusion ohmique l'emporte sur le forçage mécanique qui créé le champ magnétique. Une dynamo stable n'est pas pour autant obtenue dès que $Rm > 1$. Pour une géométrie sphérique, une condition nécessaire pour l'apparition de l'effet dynamo est $Rm_c \geqslant \pi^2$ (e.g. Backus 1957). Avec leur modèle numérique, Christensen *et al.* (1999) ont obtenu des dynamos pour un nombre de Reynolds magnétique de l'ordre

de 50. Le seuil dynamo est nécessairement au-dessus, et souvent éloigné, du seuil convectif (en terme de nombre de Rayleigh), car il faut des mouvements convectifs suffisamment vigoureux et ayant la bonne géométrie pour pouvoir entretenir l'effet dynamo.

Comme nous avons pu le constater dans le chapitre précédent l'énergie des mouvements convectifs devient dépendante du temps lorsque que l'on s'éloigne du seuil. La bifurcation dynamo va donc s'opérer sur un écoulement dont l'énergie cinétique peut dépendre du temps.

Alors que les variations de la température et du champ magnétique agissent comme un bruit additif pour la vitesse (voir l'équation de la vitesse du système (3.14)), les variations de la vitesse agissent comme un bruit multiplicatif sur le champ magnétique via le terme $\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})$ de l'équation d'induction.

Dans le cas simplifié de l'évolution en fonction du temps d'un scalaire, évoqué dans l'introduction, la présence de bruit multiplicatif ne change pas le seuil de la bifurcation mais introduit des effets intéressants. Reprenons le formalisme présenté dans l'introduction. L'évolution d'un système dynamique conservatif peut s'écrire

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{dG}{dX}\,. \tag{3.33}$$

La présence de bruit additif va faire fluctuer la valeur de X dans ce potentiel G fixe (à part la pente à l'origine) alors qu'un bruit multiplicatif va changer directement la forme du potentiel.

Prenons, par exemple, le cas d'une bifurcation stationnaire sous-critique en présence de bruit multiplicatif, sa forme normale s'écrit (en supposant l'invariance $X \mapsto -X$)

$$\frac{dX}{dt} = (\mu + \xi(t))X + \alpha X^3 - X^5. \tag{3.34}$$

Le potentiel G correspondant à 3.34 s'écrit

$$-\frac{(\mu + \xi(t))}{2}X^2 - \frac{\alpha}{4}X^4 + \frac{1}{6}X^6. \tag{3.35}$$

En l'absence de bruit ($\xi(t) = 0$), les solutions de (3.34) sont les suivantes : la solution triviale $X = 0$, stable pour $\mu < 0$ et instable sinon, et les racines de $\mu + \alpha X^2 - X^4$, au nombre de quatre pour $-\alpha^2/4 \leqslant \mu < 0$. Deux d'entre elles sont instables, les deux autres sont stables (branche sous-critique) et se prolonge pour $\mu \geqslant 0$.

Plaçons nous sur la branche sous-critique de la bifurcation associée au système bruité (3.34). Etant en-dessous du seuil, le paramètre μ est négatif. Nous avons représenté sur la figure 3.4 le potentiel $G(X)$ pour différentes valeurs du bruit $\xi(t)$ et donc du coefficient du terme en X^2. Pour une valeur suffisamment basse de celui-ci, il existe un minimum du potentiel plus bas que zéro (courbe en trait plein). Ce minimum va constituer l'état préférentiel du système, et X va donc être non nul. Si le bruit $\xi(t)$ est suffisamment important, il peut faire fluctuer ce potentiel jusqu'à ce que les deux minima du potentiel soient à la même hauteur (courbe en pointillé), ceci correspond pour un système non bruité au

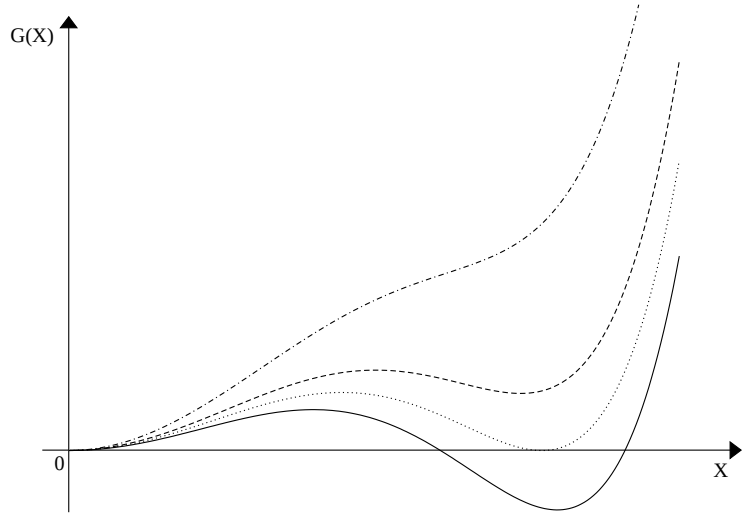

FIG. 3.4: *Potentiel $G(X)$ en fonction du paramètre d'ordre X. Le potentiel représenté ici est de la forme $-\frac{(\mu+\xi(t))}{2}X^2 - \frac{\alpha}{4}X^4 + \frac{1}{6}X^6$ où le coefficient α a été fixé à 5 et le coefficient du terme en X^2 vaut 2 (trait plein), 2.3435 (pointillé), 2.7 (tiret) et 3.7 (tiret pointillé).*

palier de Maxwell, les deux états zéro et X non nul sont alors de mêmes énergies. Si le coefficient du terme en X^2 devient supérieur à la valeur correspondante au palier de Maxwell, le minimum du potentiel associé à X non nul va devenir local et l'état préférentiel du système sera alors $X = 0$. Une fois en $X = 0$, le système va y rester. En effet le bruit étant multiplicatif, il n'y aura plus d'effet. On dit que la solution $X = 0$ est absorbante. Si les fluctuations du bruit sont suffisamment importantes, les solutions non-triviales d'un système sous-critique bruité sont alors potentiellement instables pour des valeurs du paramètre de contrôle inférieures au seuil. A tout instant ces fluctuations du bruit $\xi(t)$ peuvent entraîner la perte de la solution non-triviale au profit de la solution triviale qui, étant stable, va devenir permanente.

La présence de bruit multiplicatif a une autre conséquence évidente. Alors que dans un cas non bruité les variables du système sont bien déterminées à l'équilibre, dans un cas bruité ces variables n'ont plus qu'une probabilité d'avoir une valeur donnée. Considérons un cas super-critique de forme normale

$$\frac{dX}{dt} = (\mu + \xi(t))X - X^3 \,. \tag{3.36}$$

En faisant l'hypothèse que $\xi(t)$ est un bruit blanc gaussien de variance D, on peut montrer que l'équation régissant l'évolution de la probabilité P de X d'avoir une valeur donnée s'écrit

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X}\left((\mu X - X^3)P\right) + \frac{D}{2}\frac{\partial}{\partial X}\left(X\frac{\partial}{\partial X}XP\right). \tag{3.37}$$

Nous cherchons une probabilité stationnaire, le membre de gauche est donc nul. En

intègrant cette expression selon X, on obtient

$$J = (-\mu X + X^3)P + \frac{D}{2}\left(X\frac{\partial}{\partial X}XP\right). \tag{3.38}$$

En $X = 0$, le membre de droite est nul, cela implique que la constante $J = 0$. En faisant alors le changement de variable $q = XP$, on obtient

$$\frac{\partial q}{\partial X} = \frac{2}{D}\left(\frac{\mu}{X} - X\right)q\,. \tag{3.39}$$

De cette expression, on déduit

$$P = C\,|X|^{2(\mu/D)-1}\,e^{-X^2/D}\,. \tag{3.40}$$

Il s'agit de la loi du chi2. Notons qu'à partir d'un bruit blanc gaussien et multiplicatif, et donc de distribution de probabilité symétrique, on obtient une distribution de probabilité pour la variable X qui est non symétrique.

Il est possible de montrer de manière analogue que dans le cas d'une bifurcation sous-critique de forme normale identique à l'équation 3.34, la probabilité P de X d'avoir une valeur donnée s'écrit

$$P = C\,|X|^{2(\mu/D)-1}\,e^{X^2/D - X^4/2D}\,. \tag{3.41}$$

3.4 Etude numérique

Rappelons que pour tous nos calculs le nombre de Prandtl est égal à 1 et les conditions aux limites sont de non-glissement pour la vitesse, isolantes aux deux bords pour le champ magnétique et de différence de température imposée. Pour les différents nombres d'Ekman que nous avons utilisés dans nos calculs, les seuils convectifs sont donnés dans le tableau 3.2.

	$E = 10^{-3}$	$E = 3.10^{-4}$	$E = 10^{-4}$
Ra_c	55.9	60.8	69.7

TAB. 3.2: *Nombre de Rayleigh critique pour la convection pour des nombres d'Ekman de $E = 10^{-3}$, $E = 3.10^{-4}$ et $E = 10^{-4}$ (Kutzner et Christensen, 2002).*

Kutzner et Christensen (2002) ont exploré l'espace des paramètres dans une configuration identique à la nôtre (mêmes nombres sans dimension, mêmes conditions aux limites). Cette exploration s'est faite en terme de nombre d'Ekman, de nombre de Roberts q ($q = Pm/Pr$) et de nombre de Rayleigh. Leurs résultats sont présentés sous forme de diagrammes de phase dans la figure 3.5 (extraite de la thèse Carsten Kutzner (2003) et correspondent à une version étendue des résultats de l'article de Kutzner et Christensen (2002)).

Chacun de ces diagrammes correspond à un nombre d'Ekman fixé, entre 2.10^{-2} et 10^{-4}, pour lequel la valeur RMS du champ magnétique à la CMB est indiqué pour différentes valeurs du couple $(q, Ra/Ra_c)$. La valeur RMS du champ magnétique correspond à $< \mathbf{B}^2 >^{1/2}$ (intégrale sur le volume), le cercle intérieur correspond à la fraction représentée par le dipôle.

Ces diagrammes ont permis aux auteurs d'identifier les portions de l'espace des paramètres où une dynamo est obtenue, celle-ci pouvant être de polarité fixe ou s'inverser. Ils ont pu constater que plus le nombre de Roberts est petit (et donc plus la diffusion ohmique est importante), plus le nombre de Rayleigh minimum, nécessaire à l'obtention d'une dynamo auto-entretenue est grand. L'écoulement doit en effet être de plus en plus vigoureux pour combattre une diffusion ohmique de plus en plus efficace. Cependant il existe un nombre de Roberts minimum en-dessous duquel la dynamo n'est pas obtenue pour un nombre d'Ekman fixé. Ils ont aussi pu constater, qu'en terme de nombre de Roberts, cette limite inférieure pour laquelle une dynamo peut être obtenue est d'autant plus basse que le nombre d'Ekman est petit.

Une partie des calculs exposés dans la figure 3.5 ont également été publiés dans l'étude de Christensen *et al.* (1999). Dans cette étude antérieure, les auteurs ont proposé que pour $E = 10^{-3}$ l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est toujours stable. Les bifurcations correspondantes sont qualifiées de sous-critique par les auteurs. De même pour $E = 10^{-4}$, ils qualifient les bifurcations dynamo de super-critiques, car l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est instable. Une perturbation de champ magnétique va donc croître avec le temps. Les auteurs n'ont toutefois pas réalisé une étude systématique pour chercher à caractériser la bifurcation dynamo et étudier son évolution en fonction des paramètres. Cette étude est l'objet de ce chapitre.

Pour toute l'étude de la bifurcation dynamo qui va suivre les calculs ont été réalisés avec le code MAGIC, celui-ci était en effet plus rapide que notre propre code PARODY au moment où nous avons effectué ces calculs. Seuls les calculs présentés dans l'annexe C et concernant les conditions aux limites ont été réalisés avec PARODY (qui est plus flexible car construit sur une grille en rayon).

3.4.1 Influence du nombre de Roberts sur la bifurcation

Nous allons commencer notre étude de la bifurcation dynamo par la comparaison des différents cas obtenus en fixant le nombre d'Ekman et en faisant varier le nombre de Roberts (ou de façon équivalente le nombre de Prandtl magnétique, car le nombre de Prandtl hydrodynamique est fixé à l'unité). Etudions tout d'abord le cas d'un nombre d'Ekman de $E = 3.10^{-4}$.

Pour une valeur du nombre de Roberts de $q = 6$, le résultat est présenté sous forme de diagrammes de bifurcation dans la figure 3.6. Pour cette figure, comme pour tous les diagrammes de bifurcation qui vont suivre, les conventions sont les suivantes. Les points correspondant à des états stables sont indiqués en noir, et ceux correspondant à des états instables en blanc. Pour l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, une flèche vers le bas (haut) indique, de façon redondante à la couleur, que l'état est stable (instable). Le diagramme présente, pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh normalisé par sa valeur critique convective, la

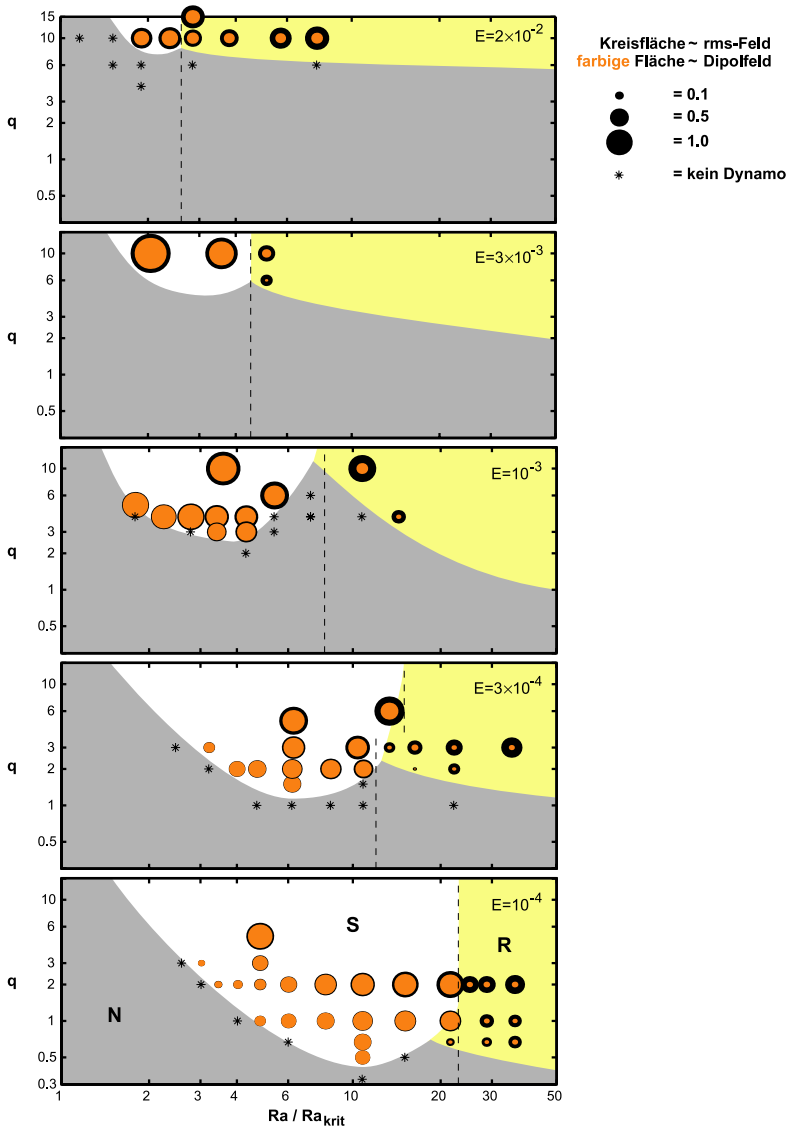

FIG. 3.5: *Valeur RMS du champ magnétique à la surface du modèle (CMB), en fonction du nombre de Roberts q et du nombre de Rayleigh normalisé par sa valeur critique convective. Les diagrammes correspondent à* $E = 2.10^{-2}$, $E = 3.10^{-3}$, $E = 10^{-3}$, $E = 3.10^{-4}$ *et* $E = 10^{-4}$. *Chaque disque indique la valeur totale du champ magnétique. Les disques intérieurs correspondent, quant à eux, à la valeur du dipôle. Les calculs correspondant à des cas non dynamo sont indiqués par des étoiles. La zone désignée par un* **N** *correspond à une zone où la dynamo n'est pas obtenue. Celle désignée par un* **S** *correspond à une zone où elle est obtenue. Celle désignée par un* **R** *correspond à une zone où la dynamo obtenue s'inverse (Carsten Kutzner, « Untersuchung von Feldumkehrungen an einem numerischen Modell des Geodynamos »,Thèse Université de Göttingen, 2003).*

valeur moyennée en temps de l'énergie magnétique. Les traits en pointillés représentent l'écart-type des variations de l'énergie magnétique autour de sa valeur moyenne. En pratique, tous nos calculs ont été initialisés avec une perturbation infinitésimale de température (aléatoire), une vitesse nulle et une perturbation infinitésimale de champ magnétique. Pour un état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ stable, cette perturbation infinitésimale de champ magnétique décroît, alors que pour un état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ instable, elle croît exponentiellement jusqu'à la saturation de l'énergie du champ magnétique.

Sur la figure 3.6, on peut constater que le premier point pour lequel l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est instable, est atteint pour $Ra = 2.57 \times Ra_c$. Pour le point précédent, $Ra = 2.42 \times Ra_c$, l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est stable. Le seuil de la bifurcation dynamo se situe donc entre ces deux points. Le point fixe $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, stable avant le seuil, devient instable après celui-ci au profit d'une solution d'énergie finie stable. Nous avons vérifié qu'il n'est pas possible de maintenir une dynamo en-dessous du seuil à partir de cette solution. Cette bifurcation est donc super-critique.

Il est à noter que pour ce cas, le seuil dynamo est relativement proche du seuil convectif. Au seuil dynamo et après un régime transitoire, l'énergie cinétique et magnétique de la solution est constante.

Chacun des points de nos diagrammes de bifurcation correspond à des calculs de plusieurs centaines d'heures sur 8 processeurs. Il est en effet nécessaire d'effectuer les calculs sur un nombre assez grand de temps adimensionné pour obtenir une valeur moyenne convergée. La longueur de ces calculs nous a empêché d'être plus précis dans la détermination du seuil de la bifurcation dynamo.

Décrivons à présent les résultats obtenus pour un nombre de Roberts $q = 3$ (voir figure 3.7). Le seuil de la bifurcation est ici situé entre $Ra = 3.85 \times Ra_c$ et $Ra = 4 \times Ra_c$. Il est assez éloigné du seuil convectif. L'énergie cinétique de l'écoulement dépend du temps pour tous les nombres de Rayleigh que nous avons considérés dans ce régime de paramètres. Contrairement au cas précédent, nous avons pu maintenir, à partir d'une solution obtenue au-dessus du seuil dynamo, une solution d'énergie non nulle en-dessous du seuil dynamo. L'énergie magnétique au seuil est relativement importante et ne tend pas vers zéro comme dans le cas précédent. Ceci est la signature d'une bifurcation sous-critique. Celle que nous avons obtenue ici présente quelques particularités.

Le point de la branche sous-critique le plus en-dessous du seuil dynamo, correspondant à $Ra = 3.16 \times Ra_c$, est ici un point métastable (cet état métastable est indiqué par des hachures sur la figure 3.7). Par métastable nous entendons que l'on peut obtenir une dynamo d'énergie non nulle pendant un temps long devant les temps caractéristiques de diffusion (visqueux et ohmique) et être cependant mené à l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ par la présence de bruit multiplicatif (via une fluctuation particulièrement importante). Une fois cet état atteint, le système y restera, tout comme le système dynamique présenté dans la description théorique de la section 3.3. Ce point métastable correspond à une dynamo qui est retournée à l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ après avoir maintenu une énergie non nulle pendant 40 temps visqueux environ, soit 13 temps magnétiques.

Le comportement métastable est lié au caractère multiplicatif du bruit. Il est similaire à celui que nous avons obtenu précédemment dans l'étude de l'évolution d'un scalaire en présence de bruit multiplicatif. Nous verrons plus loin que nous avons rencontré ce

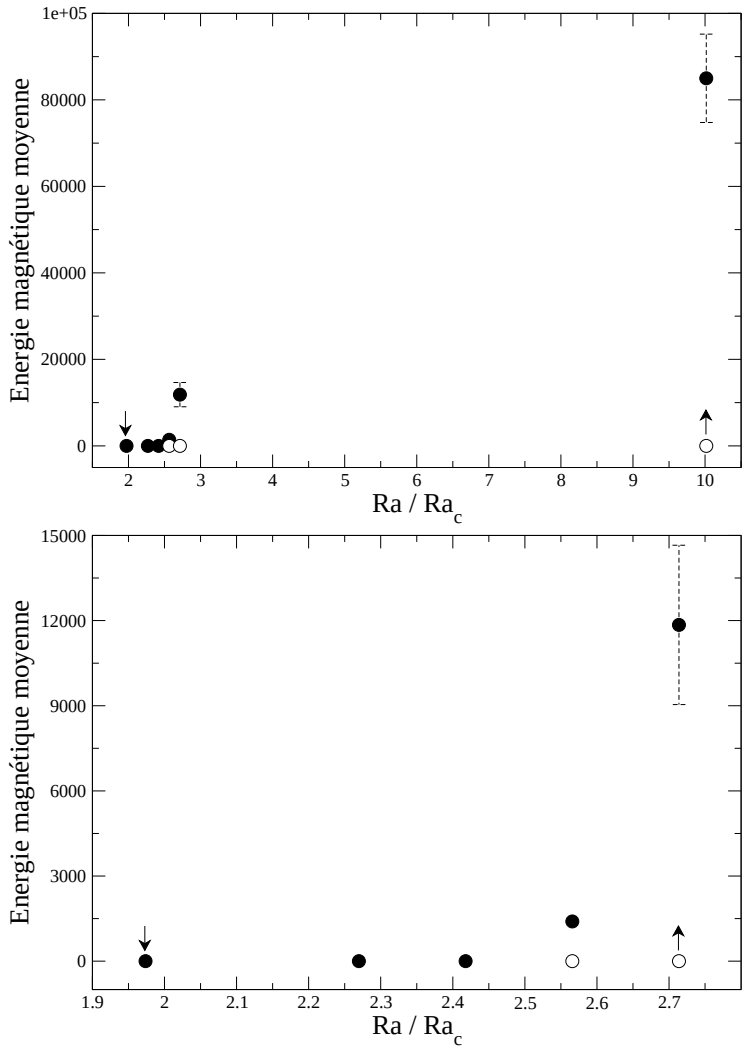

FIG. 3.6: *Energie magnétique moyenne en fonction du nombre de Rayleigh. Cette bifurcation super-critique est obtenue pour* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 6$. *Les traits en pointillés représentent l'écart-type des variations de l'énergie magnétique autour de sa valeur moyenne. Le graphique du bas est un sous-ensemble de celui du haut, centré sur le seuil de la bifurcation dynamo.*

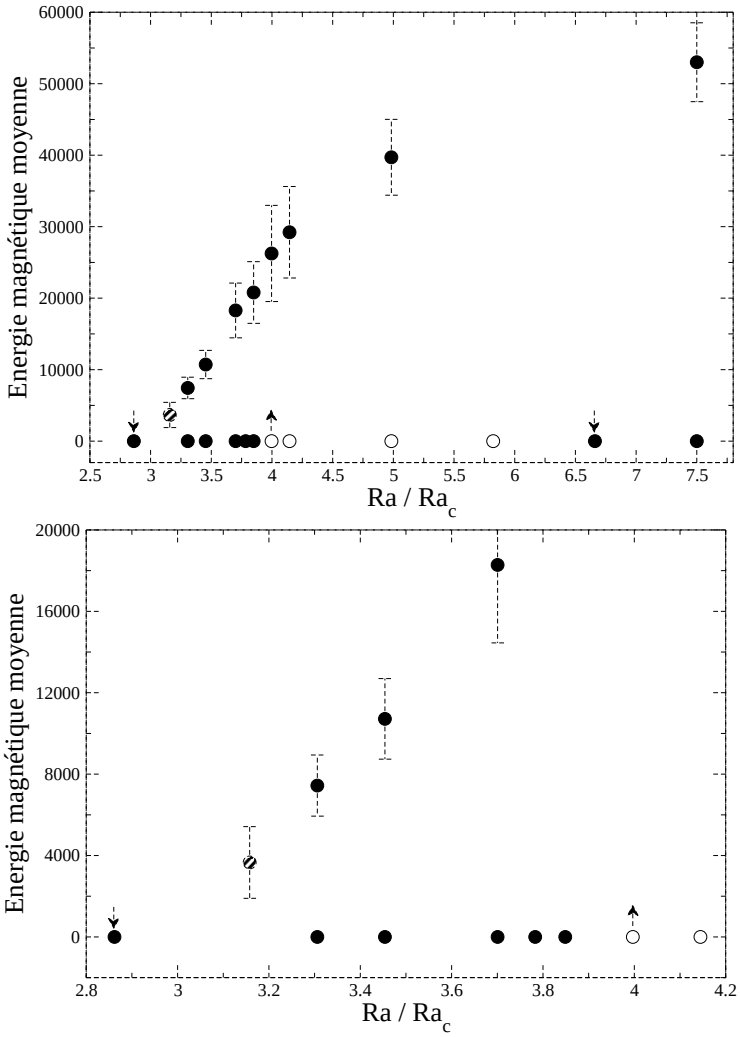

FIG. 3.7: *Energie magnétique moyenne en fonction du nombre de Rayleigh. Cette bifurcation sous-critique est obtenue pour* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 3$. *Les traits en pointillés représentent l'écart-type des variations de l'énergie magnétique autour de sa valeur moyenne. Le graphique du bas est un sous-ensemble de celui du haut centré sur le seuil de la bifurcation dynamo.*

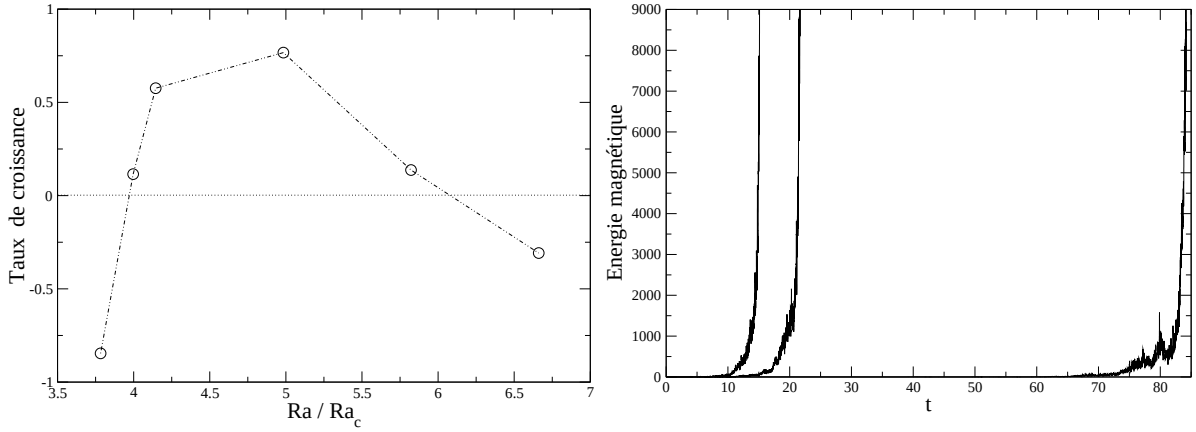

FIG. 3.8: *Taux de croissance de l'énergie magnétique d'une perturbation en fonction du nombre de Rayleigh normalisé (à gauche) et énergie magnétique (à droite) en fonction du temps (en uiniités de temps visqueux) pour* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 3$. *A droite, le nombre de Rayleigh vaut respectivement* $Ra = 4 \times Ra_c$, $4.15 \times Ra_c$ *et* $4.98 \times Ra_c$ *de droite à gauche. Le taux de croissance est de plus en plus fort à mesure que l'on s'éloigne du seuil dynamo. Après un maximum, le taux de croissance diminue pour finalement redevenir négatif. L'état* $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ *redevient stable au delà d'une certaine valeur du nombre de Rayleigh, ici* $6.66 \times Ra_c$.

comportement dans d'autres régimes de paramètres, lorsque les fluctuations du champ magnétique deviennent comparables à l'intensité du champ et que la solution à champ nul est stable.

L'autre particularité de cette bifurcation est que l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ redevient stable pour des valeurs suffisamment grandes du nombre de Rayleigh au-dessus du seuil dynamo. Avant d'arriver à saturation, l'énergie magnétique de la solution croît, durant une phase transitoire, exponentiellement. Le taux de croissance correspondant augmente à mesure que l'on augmente le nombre de Rayleigh et donc que l'on s'éloigne du seuil dynamo (voir figure 3.8). Passée une certaine valeur du nombre de Rayleigh, cette croissance s'arrête. Le taux de croissance de la solution cesse alors d'augmenter avec le nombre de Rayleigh. Il décroît jusqu'à redevenir négatif. L'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ redevient alors stable. Cette stabilité est obtenue, dans nos simulations, à partir de $Ra = 6.66 \times Ra_c$.

Nous avons obtenu un troisième type de bifurcation pour un nombre de Roberts $q = 1.5$ (voir figure 3.9). Cette bifurcation, un peu atypique est dite « en îlot ». Pour une telle bifurcation, l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est stable, quelle que soit la valeur du nombre de Rayleigh.

Elle ne possède donc pas de seuil au sens où nous l'entendions pour les autres types de bifurcation. Il est nécessaire de perturber le système avec un champ magnétique initial suffisamment fort pour accrocher la branche dynamo. Ceci fait, une dynamo est obtenue pour une plage limitée de nombres de Rayleigh. Il existe une borne inférieure et supérieure en-dessous et au-dessus de laquelle une dynamo n'est pas obtenue. Pour ce régime de paramètres la borne inférieure correspond à $Ra = 4.44 \times Ra_c$ et la borne supérieure à

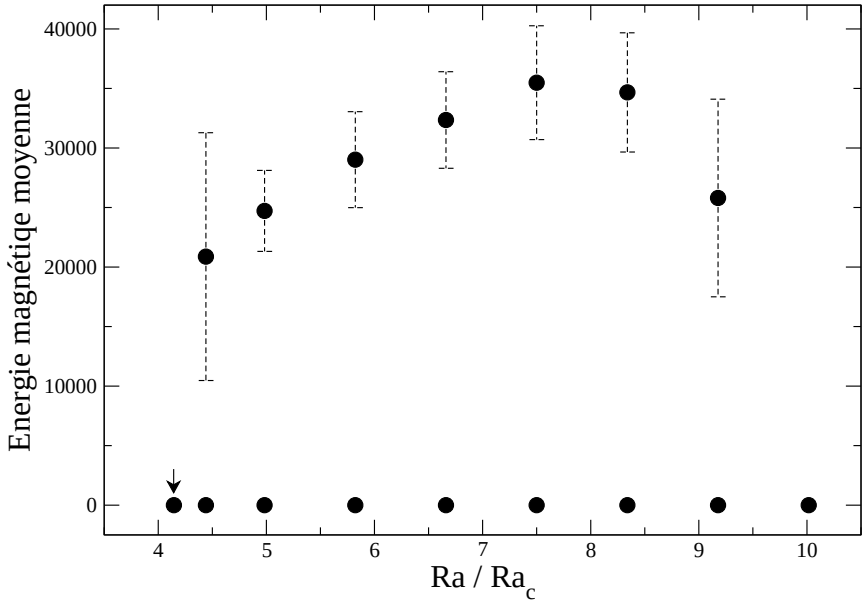

FIG. 3.9: *Energie magnétique moyenne en fonction du nombre de Rayleigh. Cette bifurcation en îlot est obtenue pour* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 1.5$. *Les traits en pointillés représentent l'écart-type des variations de l'énergie magnétique autour de sa valeur moyenne. La solution* $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ *est ici toujours stable.*

$Ra = 9.18 \times Ra_c$. En partant de cette borne inférieure et en augmentant le nombre de Rayleigh l'énergie magnétique moyenne va croître jusqu'à un maximum à partir duquel elle va décroître vers sa valeur en la borne supérieure.

En diminuant le nombre de Roberts de $q = 6$ à $q = 3$ puis à $q = 1.5$, nous sommes passés d'une bifurcation super-critique à une bifurcation sous-critique puis à une bifurcation en îlot. Constatons qu'il nous a fallu nous éloigner de plus en plus du seuil convectif pour rencontrer le seuil dynamo à mesure que nous avons diminué le nombre de Roberts. La diffusion ohmique est en effet plus efficace pour les petits nombres de Roberts (on rappelle que le nombre de Prandtl est constant). Pour une nouvelle diminution du nombre de Roberts (à par exemple $q = 1$) la figure 3.5 (Kutzner et Christensen, 2002) suggère qu'il n'existe pas de dynamo stable.

3.4.2 Influence du nombre d'Ekman sur la bifurcation

Après avoir étudié différentes valeurs du nombre de Roberts à nombre d'Ekman fixé, nous allons maintenant faire varier le nombre d'Ekman pour un nombre de Roberts fixé de $q = 3$.

Pour un nombre d'Ekman $E = 10^{-3}$ et $q = 3$, les résultats sont présentés sur la figure 3.10. Pour ce régime de paramètres, si l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est toujours stable comme pour la précédente bifurcation en îlot, les états d'énergie magnétique non nulle sont eux

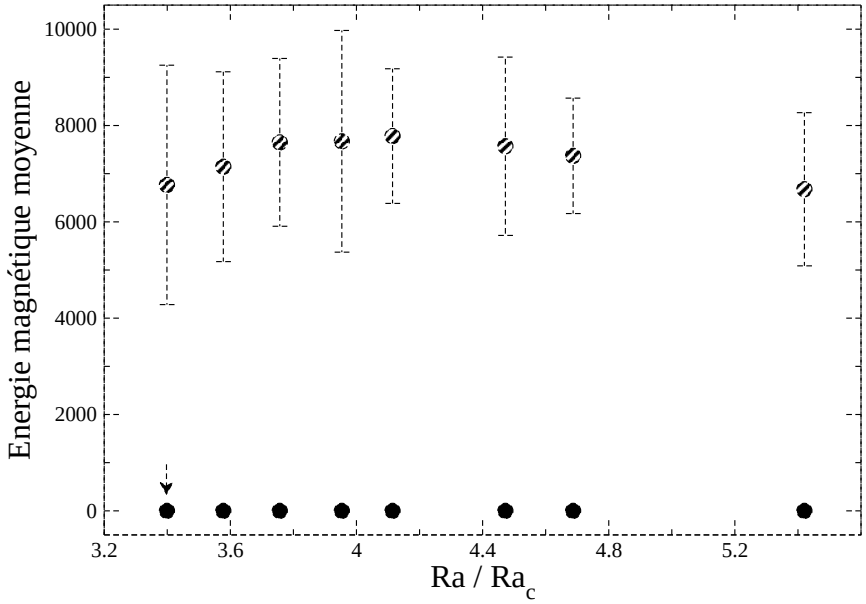

FIG. 3.10: *Energie magnétique moyenne en fonction du nombre de Rayleigh. Cette bifurcation, dite en îlot, est obtenue pour* $E = 10^{-3}$ *et* $q = 3$. *Les points indiquent la valeur moyennée en temps de l'énergie magnétique. Les traits pointillés indiquent l'écart-type. Les points stables sont en noir (ainsi que l'indique la flèche). Les points hachurés sont métastables, c'est à dire qu'ils sont instable vis à vis d'une perturbation suffisamment importante de* $\mathbf{u}$. *Une telle perturbation a une probabilité non nulle de se produire.*

métastables.

Tous les points représentés sur la figure 3.10 correspondent à des dynamos qui ont maintenu un champ magnétique non nul pendant des temps adimensionnés allant de 6 temps visqueux pour les points extrêmes (ou deux temps magnétiques) à 140 temps visqueux environ (ou 47 temps magnétiques) pour le point correspondant à un nombre de Rayleigh $Ra = 3.76 \times Ra_c$. La métastabilité des points présentés ici rend plus délicate la recherche de la limite (en terme de nombre de Rayleigh) pour laquelle on peut dire qu'une dynamo n'est plus obtenue.

Pour un nombre d'Ekman $E = 3.10^{-4}$ et un nombre de Roberts $q = 3$ nous avons vu précédemment que la bifurcation obtenue est sous-critique. Considérons maintenant un nombre de d'Ekman $E = 10^{-4}$, toujours pour un nombre de Roberts $q = 3$. La bifurcation obtenue est présentée sur la figure 3.11 accompagnée du graphique des taux de croissance des solutions en fonction du nombre de Rayleigh normalisé. Cette bifurcation est une bifurcation super-critique, en effet l'énergie magnétique des solutions décroît vers zéro à mesure que l'on s'approche du seuil et nous avons vérifié qu'il n'est pas possible de maintenir une solution dynamo d'énergie non nulle dans la zone de nombre de Rayleigh où l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est stable. Le seuil de cette bifurcation super-critique est situé entre $Ra = 2.73 \times Ra_c$ et $Ra = 2.80 \times Ra_c$. L'écoulement, comme dans la plupart des bifurcations que nous avons

étudiées, possède ici une énergie cinétique dépendante du temps pour tous les nombres de Rayleigh considérés. L'énergie magnétique des cas correspondant aux premiers points après le seuil est dépendante du temps, mais leurs variations sont relativement faibles et de l'ordre de l'épaisseur des points sur la figure 3.11 (en haut).

En augmentant le nombre d'Ekman et pour un nombre Roberts fixé, nous sommes passés successivement d'une bifurcation super-critique à une bifurcation sous-critique puis à une bifurcation en îlot.

Afin de compléter notre étude des bifurcations dynamo pour le régime de paramètres que nous avons choisi, nous avons ajouté le cas $E = 10^{-4}$ et $q = 0.67$. Pour ces paramètres la bifurcation obtenue est présentée sur la figure 3.12. Le seuil linéaire de cette bifurcation se situe entre $Ra = 7.17 \times Ra_c$ et $Ra = 7.46 \times Ra_c$. L'énergie de la solution ne tend pas vers zéro au seuil et une dynamo a pu être maintenue, en-dessous du seuil dynamo, à partir d'une solution au-dessus du seuil. Cette bifurcation est donc sous-critique.

Bien que nous n'ayons pas eu le temps d'effectuer les calculs pour montrer l'existence d'une bifurcation en îlot pour un nombre d'Ekman $E = 10^{-4}$, la figure 3.5 laisse à penser qu'une bifurcation de ce type existe pour ce régime de paramètres. Le passage d'une bifurcation super-critique à une bifurcation sous-critique puis à une bifurcation en îlot avec la diminution du nombre de Roberts semble reproductible à ce nombre d'Ekman.

3.4.3 Interprétation

Nous avons analysé les différentes bifurcations obtenues pour le régime de paramètres compris entre 10^{-3} et 10^{-4} pour le nombre d'Ekman, entre 0.67 et 6 pour le nombre de Roberts, allant de $Ra \simeq 2 \times Ra_c$ à $Ra \simeq 10 \times Ra_c$ pour les différentes bifurcations. Pour ce régime de paramètres nous proposons une interprétation résumée dans la figure 3.13. Pour un nombre d'Ekman donné, une bifurcation super-critique (graphique du haut) est obtenue pour un nombre de Roberts suffisamment grand. En diminuant le nombre de Roberts, on passe à une bifurcation sous-critique (graphique du milieu). Celle-ci présente une particularité, l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est stable avant le seuil de la bifurcation dynamo, il se déstabilise après le seuil mais redevient stable pour un nombre de Rayleigh suffisamment grand. Pour la bifurcation sous-critique correspondant au couple de paramètres $E = 10^{-4}$ et $q = 0.67$ ce point reste à préciser. Au-dessus de ce nombre de Rayleigh, il existe donc une branche instable, qui se raccorde à la branche stable correspondant à des solutions d'énergie non nulle.

Si l'on diminue à nouveau le nombre de Roberts, la plage de nombre de Rayleigh, pour laquelle l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est instable dans la bifurcation sous-critique, diminue jusqu'à disparaître. On obtient alors une bifurcation en îlot (graphique du bas) où l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est stable quel que soit le nombre de Rayleigh.

3.4.4 Choix du paramètre de contrôle

Pour tous les diagrammes de bifurcation présentés, nous avons adopté le nombre de Rayleigh (normalisé) comme paramètre de contrôle. Ce choix est tout naturel puisque

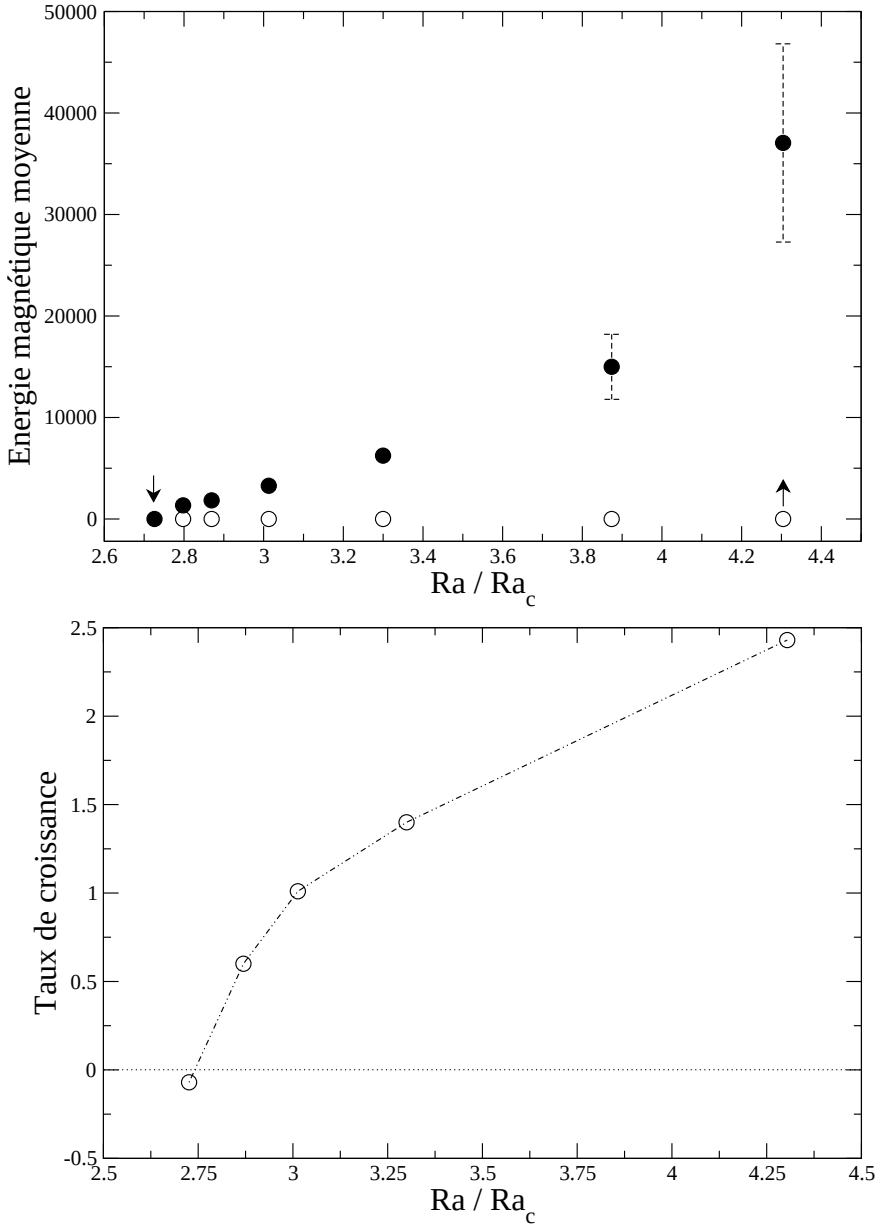

FIG. 3.11: *Energie magnétique moyenne (en haut) et taux de croissance de la solution (en bas) en fonction du nombre de Rayleigh. Cette bifurcation super-critique est obtenue pour* $E = 1.10^{-4}$ *et* $q = 3$. *Les traits en pointillés représentent l'écart-type des variations de l'énergie magnétique autour de sa valeur moyenne.*

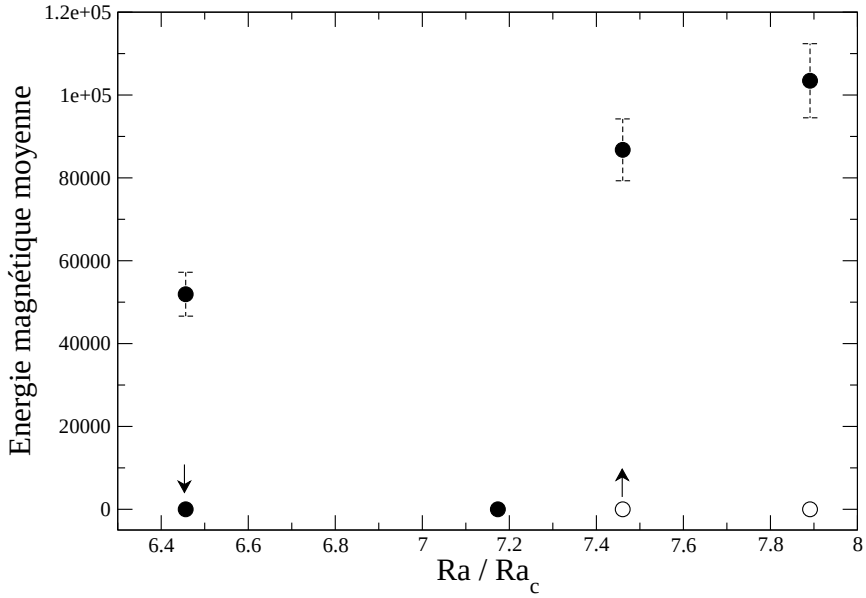

FIG. 3.12: *Energie magnétique moyenne en fonction du nombre de Rayleigh. Cette bifurcation sous-critique est obtenue pour* $E = 10^{-4}$ *et* $q = 0.67$. *Les traits en pointillés représentent l'écart-type des variations de l'énergie magnétique autour de sa valeur moyenne.*

nous nous intéressons au problème de la géodynamo où le forçage est d'origine thermique (la convection solutale est formellement équivalente à la convection thermique). De tels modèles de dynamo, alliant la convection à l'instabilité dynamo, sont très complexes et on peut se demander si l'interprétation de nos résultats ne serait pas plus aisée si elle était menée en terme de vigueur des mouvements de convection plutôt qu'en terme de forçage thermique. Ceci reviendrait à exprimer nos résultats en fonction du nombre de Reynolds, ce qui est par exemple le cas dans les études expérimentales où l'écoulement est forcé mécaniquement.

Dans un adimensionnement différent de celui que nous avons retenu, qui utilise D, D/u,u et $\sqrt{\mu_0\rho}\,u$ comme échelle de longueur, temps, vitesse et champ magnétique respectivement, le nombre de Reynolds apparaît comme un paramètre de contrôle pour la bifurcation dynamo, à côté du nombre de Reynolds magnétique. Dans le tableau 3.3 nous avons indiqué le nombre de Reynolds Re en fonction du nombre de Roberts q et du nombre de Rayleigh normalisé par sa valeur critique convective (Ra/Ra_c) pour un nombre d'Ekman de 3.10^{-4}. Ces résultats sont cohérents avec ceux de Christensen *et al.* (1999). Constatons que pour chaque nombre de Roberts le nombre de Reynolds varie de façon monotone avec le nombre de Rayleigh. Représenter les diagrammes de bifurcations en fonction du nombre de Reynolds n'apporterait donc pas de changement qualitatif dans nos interprétations.

Notons que les nombres de Reynolds correspondants aux écoulements que nous avons calculés ne sont pas très élevés. Cependant il faut rappeler que dans notre cas, les difficultés

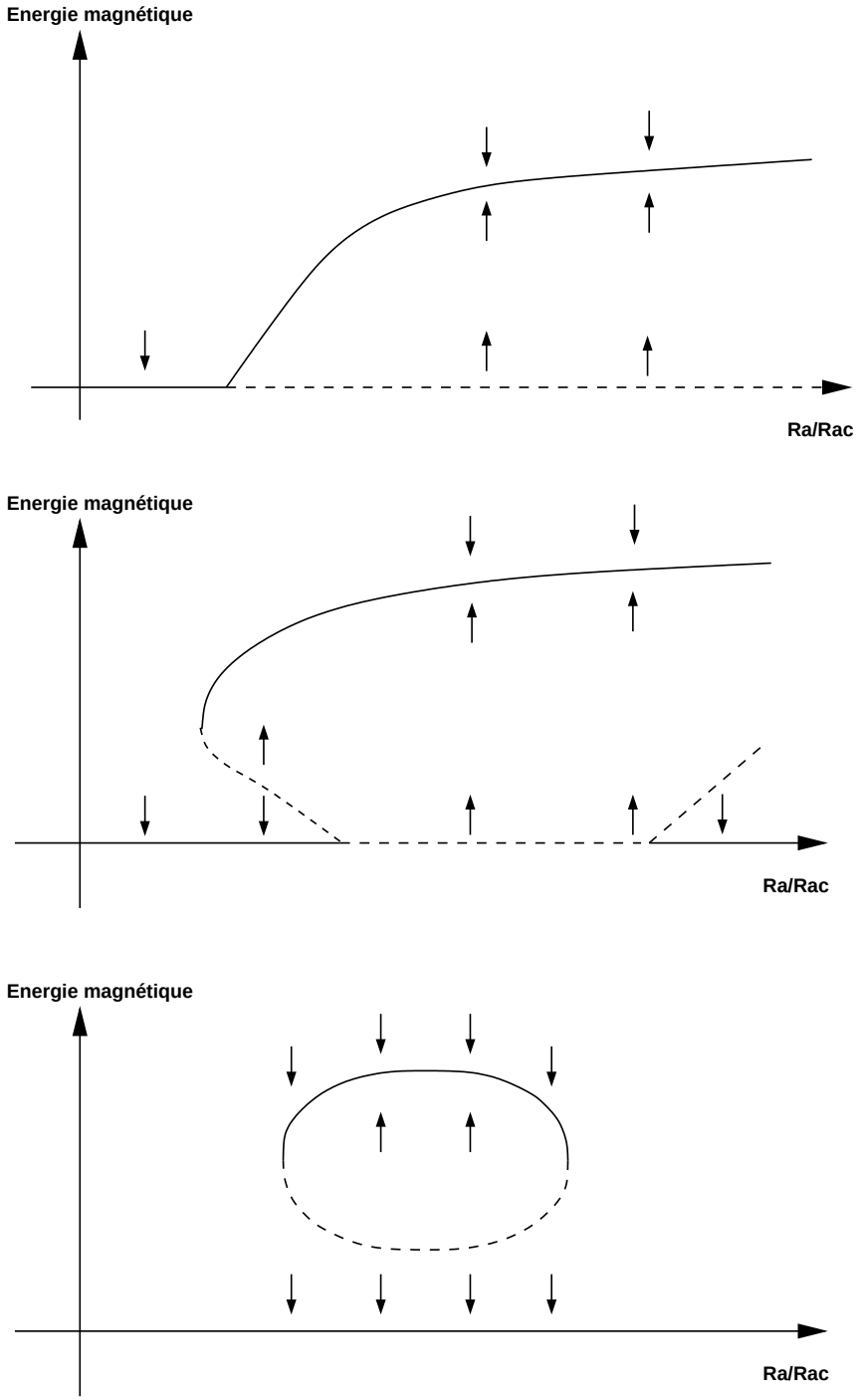

FIG. 3.13: *Interprétation des bifurcations obtenues à l'aide de nos calculs numériques. Cette série de graphiques représente, de haut en bas, une bifurcation super-critique, une bifurcation sous-critique et une bifurcation en îlot. Nous proposons d'interpréter les résultats numériques obtenus à l'aide de ces différentes bifurcations. La transition d'une bifurcation super-critique à une bifurcation sous-critique puis à un îlot est obtenue en faisant décroître le nombre de Roberts q. Les traits continus représentent des états stables et les traits pointillés des états instables.*

				$E = 3.10^{-4}$ $q = 6$						
Ra/Ra_c	2.57	2.71	10.00							
Re	17.34	21.44	61.31							
				$E = 3.10^{-4}$ $q = 3$						
Ra/Ra_c	3.16	3.31	3.45	3.70	3.85	4.00	4.15	4.98	5.82	7.50
Re	21.95	23.21	24.30	25.77	26.46	27.01	27.54	31.37	36.68	47.51
				$E = 3.10^{-4}$ $q = 1.5$						
Ra/Ra_c	4.44	4.98	5.82	6.66	7.50	8.34	9.18			
Re	30.98	34.24	39.33	44.59	49.83	56.21	64.72			

TAB. 3.3: *Nombre de Reynolds (Re) en fonction du nombre de Roberts (q) et du nombre de Rayleigh normalisé par sa valeur critique convective (Ra/Ra_c) pour un nombre d'Ekman de* 3.10^{-4}.

numériques ne sont pas uniquement liées aux non-linéarités intrinsèques de l'équation de Navier-Stokes, mais aussi à la présence de la force de Coriolis qui impose des contraintes sévères sur le schéma numérique (tant en espace qu'en temps). En ce sens, le paramètre E^{-1} joue un rôle comparable à Re en tant que mesure de la difficulté à modéliser l'écoulement.

Toujours dans un souci de simplification de nos résultats, il peut aussi être intéressant de chercher à les exprimer en terme de nombre de Reynolds magnétique. Ce paramètre, comme on l'a vu exprime le rapport entre le terme d'induction de champ magnétique et le terme de diffusion ohmique. C'est le paramètre de contrôle naturel pour les dynamos cinématiques. Exprimer les résultats en terme de nombre de Reynolds magnétique revient à essayer de voir si ils peuvent être compris du seul point de vue de l'équation d'induction.

Nous avons résumé dans le tableau 3.4 les différents nombres de Reynolds magnétique obtenus pour le régime de paramètres que nous avons utilisé. Ce tableau indique le nombre de Reynolds magnétique critique Rm_d. Celui-ci correspond au seuil de la bifurcation dynamo pour une bifurcation super-critique et sous-critique. Une bifurcation en îlot ne possède pas de seuil linéaire au sens strict mais il existe une valeur minimum (maximum) du nombre de Rayleigh en-dessous (au-dessus) de laquelle la dynamo n'existe pas. Pour ces deux nombres de Rayleigh, nous avons indiqué le nombre de Reynolds magnétique obtenu, sous la dénomination Rm_{d2} (Rm_{d3} respectivement). Dans le cas d'une bifurcation sous-critique, il existe un nombre de Rayleigh minimum correspondant au point de la branche sous-critique le plus en-dessous du seuil de la bifurcation dynamo. Le nombre de Reynolds magnétique obtenu pour ce nombre de Rayleigh est indiqué dans la colonne Rm_{d2} du tableau 3.4.

Le nombre de Reynolds magnétique est à priori fonction de tous les nombres sans dimension présents dans nos équations (Ra, E, Pr, Pm). Or, pour des valeurs différentes de ces nombres sans dimension, l'écoulement va posséder une géométrie différente. Cette

E	q	bifurcation	Rm_d (Ra/Ra_c)	Rm_{d2} (Ra/Ra_c)	Rm_{d3} (Ra/Ra_c)
10^{-3}	3	îlot	–	62 (3.40)	96 (5.42)
3.10^{-4}	6	super-critique	94 (2.57)	–	–
3.10^{-4}	3	sous-critique	88 (4.00)	68 (3.16)	–
3.10^{-4}	1.5	îlot	–	50 (4.44)	111 (9.18)
10^{-4}	3	super-critique	72 (2.80)	–	–
10^{-4}	0.67	sous-critique	52 (7.46)	46 (6.46)	–

TAB. 3.4: *Nombre de Reynolds magnétique en fonction du nombre d'Ekman et du nombre de Roberts. Rm_d indique dans le cas d'une bifurcation super-critique et sous-critique le nombre de Reynolds magnétique critique obtenu au seuil de la bifurcation dynamo. Pour une bifurcation en îlot, Rm_{d2} (respectivement Rm_{d3}) indique le nombre de Reynolds magnétique correspondant au nombre de Rayleigh le plus petit (grand) pour lequel une dynamo est obtenue. Dans le cas d'une bifurcation sous-critique, Rm_{d2} indique le nombre de Reynolds magnétique correspondant au nombre de Rayleigh le plus bas pour lequel une dynamo est obtenue.*

géométrie n'entraîne pas toujours la même efficacité à produire un champ magnétique par effet dynamo. Le nombre de Reynolds magnétique critique doit donc normalement dépendre des autres paramètres. En revanche si la géométrie des mouvements et leur efficacité pour l'effet dynamo varie peu, seul leur intensité devrait contrôler le seuil, qui se produirait alors à un nombre de Reynolds magnétique critique quasiment indépendant de Ra, E, Pr, Pm.

On peut constater, d'après les chiffres du tableau 3.4, que la bifurcation dynamo ne s'opère pas à nombre de Reynolds magnétique constant. Cela souligne que l'amplitude de l'écoulement ne contrôle pas seule la bifurcation dynamo, mais que la géométrie de l'écoulement a une grande importance pour ce régime de paramètres. Une autre vérification de l'importance de la géométrie de l'écoulement pour la dynamo sera fournie par la suite.

Nous pouvons aussi remarquer dans ce tableau 3.4 que lorsque l'on fixe le nombre d'Ekman et que l'on diminue le nombre de Roberts, le seuil dynamo apparaît plus loin du seuil convectif. Malgré cela, si l'on prend par exemple un nombre d'Ekman $E = 3.10^{-4}$ alors le nombre de Reynolds magnétique obtenu pour un nombre de Roberts $q = 3$ est inférieur à celui obtenu pour un nombre de Roberts $q = 6$. Nous avons pu constater dans le tableau 3.3 que $Re \propto Ra/Ra_c$ (à une fonction du nombre de Roberts près), or $Rm = PmRe$ d'où $Rm \propto PmRa/Ra_c$. Dans l'exemple que nous avons pris le nombre de Prandtl magnétique est divisé par deux mais le nombre de Rayleigh normalisé n'est pas doublé d'où un nombre de Reynolds magnétique inférieur pour un nombre de Roberts $q = 3$.

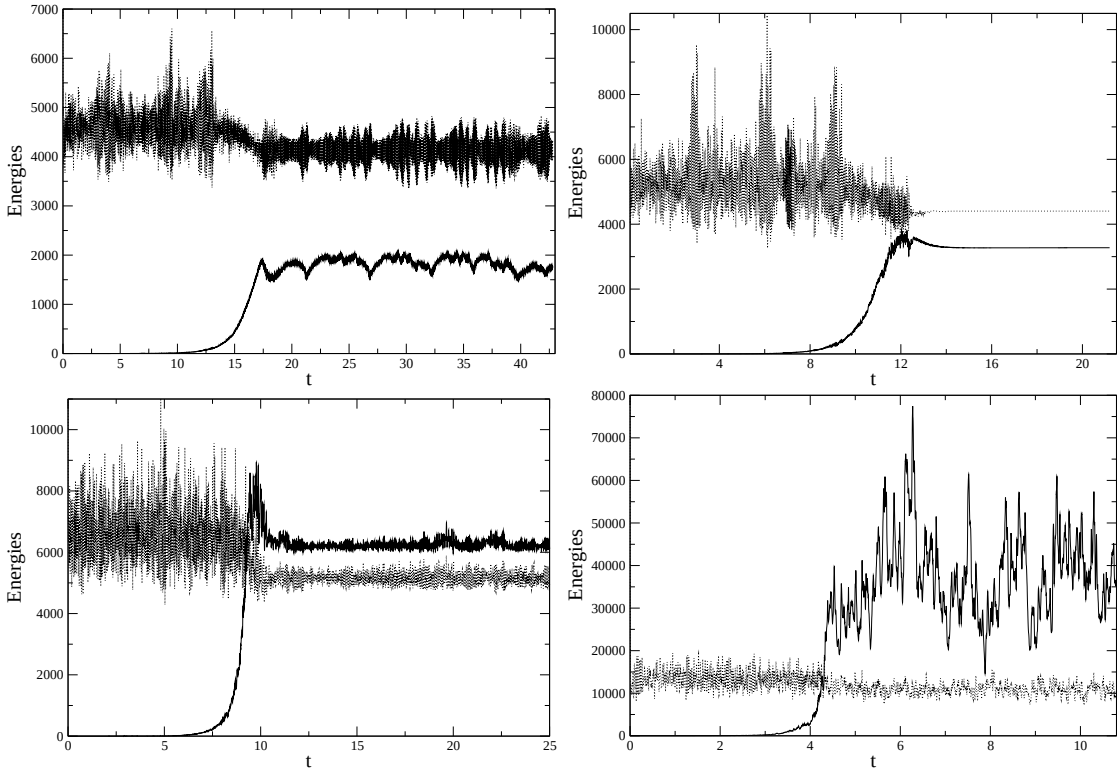

FIG. 3.14: *Energie magnétique (trait plein) et cinétique (traits pointillés) en fonction du temps pour* $E = 1.10^{-4}$ *et* $q = 3$ *et de gauche à droite et de haut en bas* $Ra = 2.87, 3.01, 3.30$ *et* $4.30 \times Ra_c$. *Lorsque l'énergie magnétique augmente, la valeur moyenne de la vitesse ainsi que l'amplitude de ses fluctuations diminuent. L'amplitude du champ magnétique augmente relativement à celle de la vitesse pour des nombres de Rayleigh croissants.*

3.4.5 Rétroactions et couplages

Dans nos calculs, la condition initiale est une perturbation de champ magnétique. Après le seuil dynamo cette perturbation va croître jusqu'à la saturation du champ magnétique. Sur la série de graphiques de la figure 3.14, réalisée pour un nombre d'Ekman $E = 1.10^{-4}$ et un nombre de Roberts $q = 3$, on peut comparer l'énergie cinétique avant la saturation du champ magnétique lorsque cette perturbation de champ magnétique n'a pas encore d'effet notable sur l'écoulement, avec l'énergie cinétique après saturation. Nous pouvons clairement constater que dans ce cas le champ magnétique inhibe la convection. La valeur moyenne de l'énergie cinétique de l'écoulement est significativement réduite en présence de champ magnétique. Il en va de même de l'amplitude de ses fluctuations qui sont également fortement réduites en présence du champ.

Cette tendance est assez générale dans le régime de paramètres que nous avons étudié. Elle comporte toutefois quelques exceptions notables que nous discuterons plus loin.

Pour les mêmes paramètres que dans le cas précédent, nous avons représenté sur les

figures 3.15 et 3.16 les iso-surfaces de vorticité axiale (à gauche) et la composante radiale du champ magnétique à la frontière externe du modèle (à droite). Les iso-surfaces de vorticité axiale nous permettent de visualiser les colonnes de convection. Nous pouvons ainsi constater une décroissance du mode azimutal dominant à mesure que le nombre de Rayleigh est augmenté.

L'écoulement et le champ magnétique sont, en effet, tous deux dominés par le mode $m = 7$ pour $Ra = 2.80 \times Ra_c$ et $Ra = 2.87 \times Ra_c$, puis par le mode $m = 6$ pour $Ra = 3.01 \times Ra_c$ et $Ra = 3.30 \times Ra_c$ et enfin par le mode $m = 5$ pour $Ra = 3.87 \times Ra_c$. Les graphiques présentés sont bien entendu des instantanés, cependant la domination d'un mode d'échelle de plus en plus grande est vérifiée de manière générale. Pour un nombre de Rayleigh $Ra = 4.30 \times Ra_c$, nous pouvons constater que l'écoulement est plus complexe et n'est plus clairement dominé par un mode particulier.

De plus on peut noter sur la dernière figure ($Ra = 4.30 \times Ra_c$) que la convection et le champ ne sont plus régulièrement répartis en azimut, mais qu'ils ont tendance à se localiser en espace. Cela pourrait être le premier signe d'un analogue magnétique de la convection hémisphérique décrite au chapitre 2 (voir la figure 2.13).

Dans le cas de la bifurcation super-critique correspondant aux paramètres $E = 3.10^{-4}$ et $q = 6$, on peut constater (voir figure 3.17) que pour un nombre de Rayleigh $Ra = 2.57 \times Ra_c$ l'énergie cinétique augmente lorsque le champ magnétique prend de l'importance. Ceci va à l'encontre de la tendance générale précédemment exposée, qui veut que la présence de champ magnétique réduise à fois la valeur moyenne de l'énergie cinétique de l'écoulement et ces fluctuations. Malgré cette croissance de l'énergie cinétique totale, on peut constater que l'énergie du vent zonal décroît lorsque le champ magnétique augmente. Le vent zonal a en effet tendance à cisailler les lignes de champ et doit lutter contre la tension magnétique qui devient plus grande lorsque le champ magnétique augmente.

Dans le cas de la bifurcation sous-critique correspondant aux paramètres $E = 3.10^{-4}$ et $q = 3$, plaçons nous sur la branche sous-critique en-dessous du seuil. Pour les valeurs les plus sous-critiques du nombre de Rayleigh $Ra = 3.16$, et $3.30 \times Ra_c$, on peut constater sur la figure 3.18 que la présence de champ magnétique semble amplifier les fluctuations du champ de vitesse.

Pour ces paramètres, les fluctuations du champ de vitesse sont en effet bien moins importantes sans champ magnétique, comme on peut le constater sur la partie droite de chacun de ces deux graphiques. Pour le nombre de Rayleigh $Ra = 3.16 \times Ra_c$, l'action dynamo est métastable. Elle a été perdue après environ 40 temps visqueux. La valeur et les fluctuations de l'énergie cinétique sont présentées sans champ magnétique (celui-ci devient négligeable) à la fin de cette simulation. Pour un nombre de Rayleigh de $Ra = 3.30 \times Ra_c$ comme pour les deux autres valeurs considérées, la dynamo n'a pas été perdue. Pour comparaison, nous avons inclus à droite de chaque graphique, l'énergie cinétique sans champ magnétique. Sur les deux graphiques correspondant à un nombre de Rayleigh $Ra = 3.70 \times Ra_c$ et $Ra = 3.85 \times Ra_c$ on retrouve le comportement plus généralement observé : le champ magnétique tend à diminuer la valeur moyenne et les fluctuations du champ de vitesse.

Pour le cas de la bifurcation en îlot avec un nombre d'Ekman $E = 10^{-3}$ et un nombre

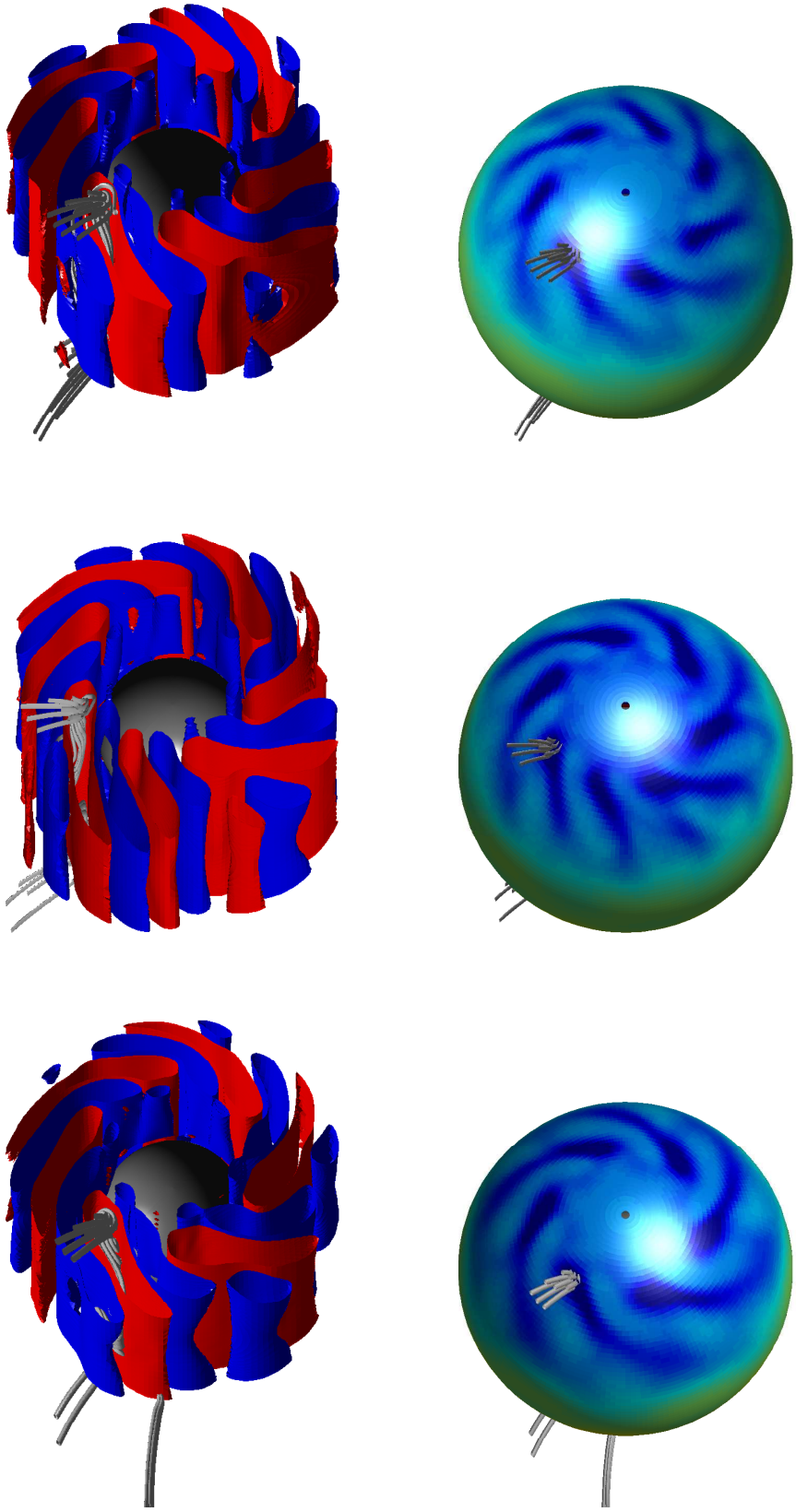

FIG. 3.15: *Iso-surfaces de vorticité axiale (gauche) et composante radiale du champ magnétique à la CMB pour* $E = 10^{-4}$ *et* $q = 3$ *et de haut en bas* $Ra = 2.80 \times Ra_c$, $Ra = 2.87 \times Ra_c$ *et* $Ra = 3.01 \times Ra_c$. *La vorticité positive (cyclone) est représentée en rouge, la vorticité négative (anticyclone) en bleu. Les zones de fort champ magnétique sont en bleu foncé.*

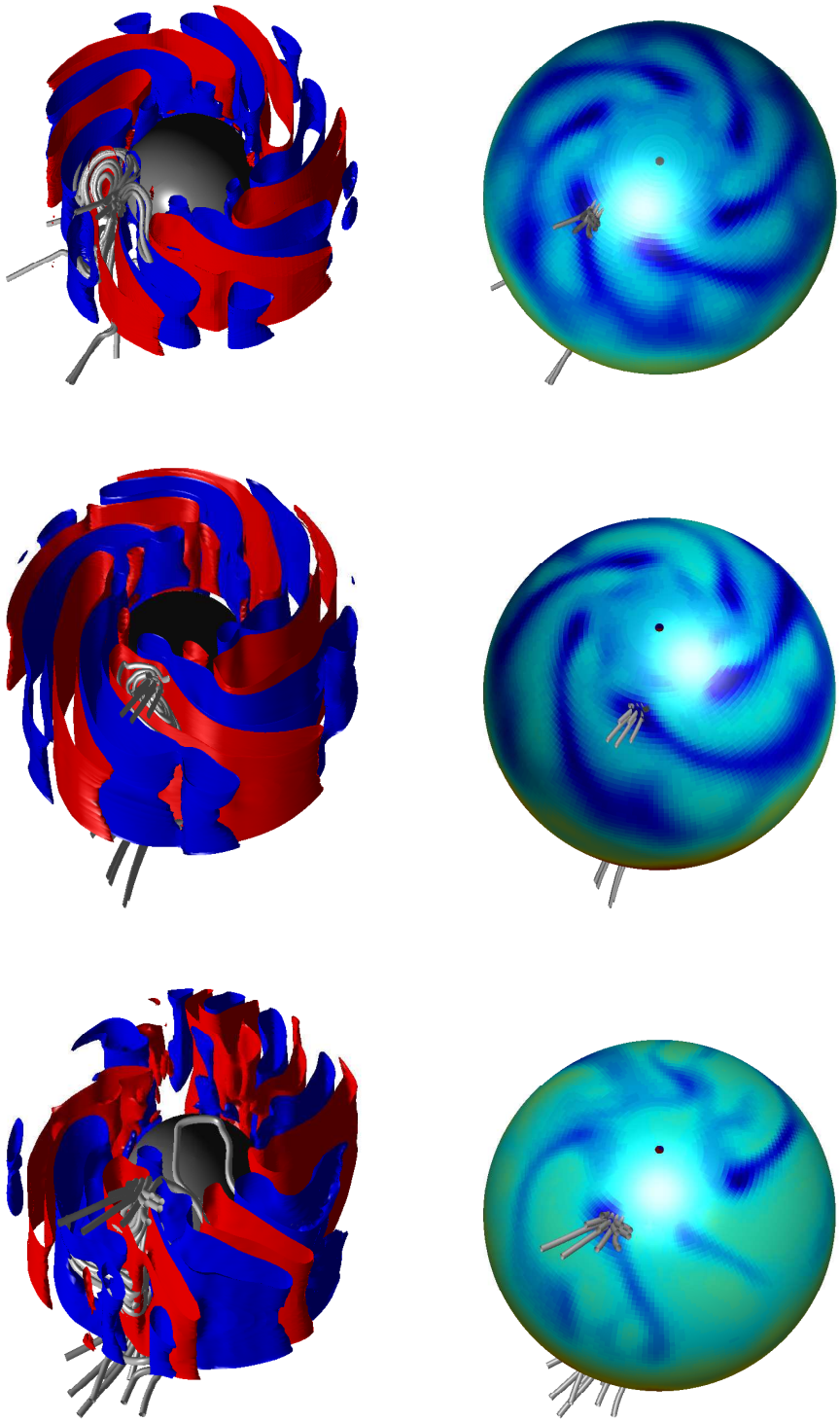

FIG. 3.16: *Iso-surfaces de vorticité axiale (gauche) et composante radiale du champ magnétique à la CMB pour* $E = 10^{-4}$ *et* $q = 3$ *et* $Ra = 3.30 \times Ra_c$, $Ra = 3.87 \times Ra_c$ *et* $Ra = 4.30 \times Ra_c$. *La vorticité positive (cyclone) est représentée en rouge, la vorticité négative (anticyclone) en bleu. Les zones de fort champ magnétique sont en bleu foncé.*

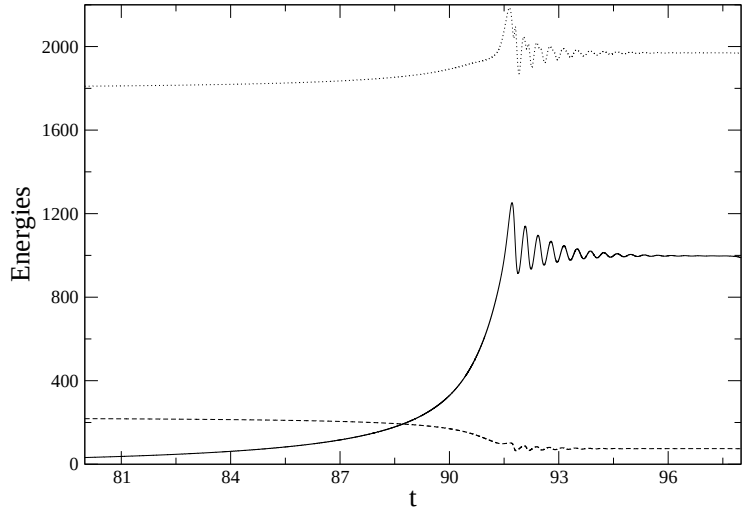

FIG. 3.17: *Energie magnétique (trait plein), cinétique (traits pointillés) et énergie du mode de Fourier $m = 0$ (traits pointillés longs) en fonction du temps pour $E = 3.10^{-4}$ et $q = 6$ et $Ra = 2.57 \times Ra_C$. L'amplitude du vent zonal décroît clairement en présence de champ magnétique malgré la croissance de l'énergie cinétique totale.*

de Roberts $q = 3$, nous avons vu que les dynamos obtenues sont métastables. Pour ce régime de paramètres les fluctuations du champ magnétique sont comparables à l'intensité du champ et la solution à champ nul est stable. Ceci mène à la perte de la dynamo au bout d'un temps qui est variable en fonction du nombre de Rayleigh et d'une réalisation à une autre si l'on utilise des conditions initiales différentes, pour un même nombre de Rayleigh. Ce comportement est lié au caractère multiplicatif du bruit et est à rapprocher de celui que nous avons obtenu précédemment dans l'étude de l'évolution d'un scalaire en présence de bruit multiplicatif.

Pour une dynamo correspondant à un nombre de Rayleigh de $Ra = 3.76 \times Ra_c$, on peut constater sur la figure 3.19 que l'action dynamo s'est maintenue pendant environ 140 temps visqueux avant de s'éteindre. Ce type de comportement est assez contre-intuitif et va à l'encontre d'une idée couramment répandue qui veut qu'il faille intégrer une dynamo pendant quelques temps diffusifs seulement pour s'assurer de sa pérennité.

Nous avons poursuivi le calcul présenté ici pendant 30 temps visqueux supplémentaires afin de vérifier que l'énergie magnétique décroît exponentiellement vers zéro. Une fois que la dynamo est perdue, elle ne peut se re-exciter, car la solution $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est stable et le bruit est multiplicatif.

Le taux de décroissance de la solution est de 2.18 (tous les autres points ont des taux similaires, $\simeq 2.2$), ce taux est inférieur au taux de décroissance du dipôle ($1/\tau_d$) qui est égal à $2D^2\pi^2/R^2Pm$ soit $\simeq 2.78$ (le facteur deux provient du fait que l'on regarde le taux de croissance de l'énergie magnétique, en B^2). Nous aurions pu penser que le taux de décroissance pouvait être supérieur au taux lié à la diffusion seule, grâce à un brassage

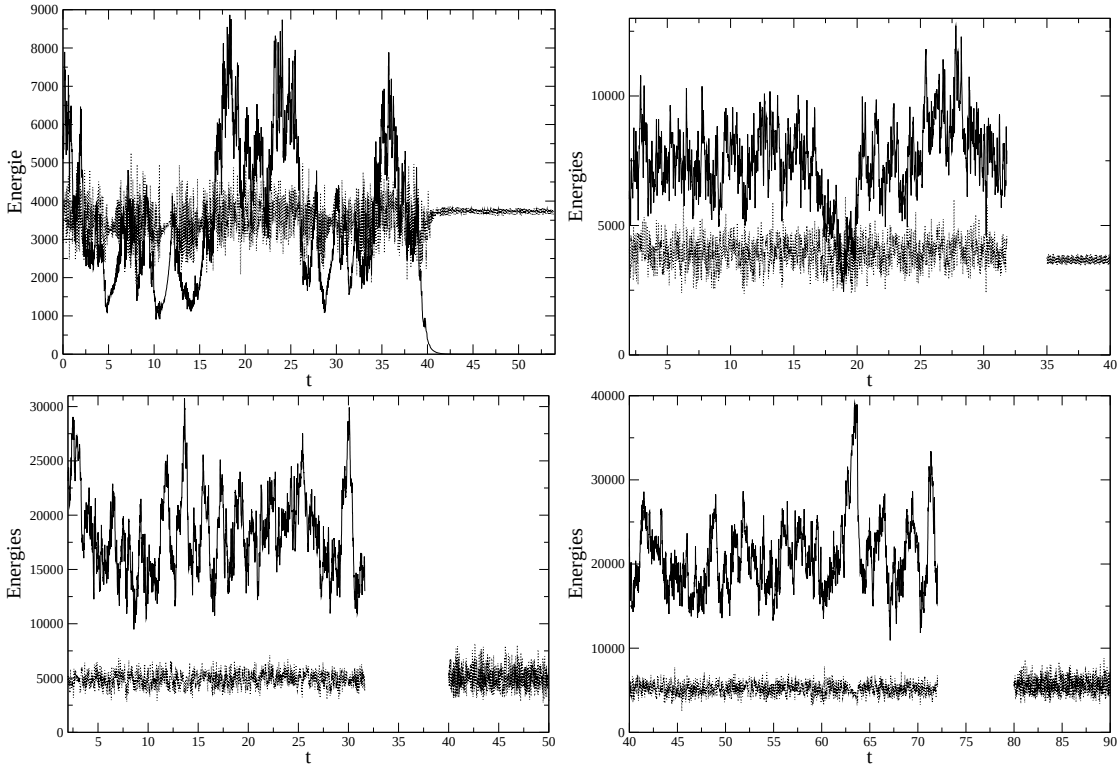

FIG. 3.18: *Energie magnétique (trait plein) et cinétique (traits pointillés) en fonction du temps pour* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 3$*. De haut en bas et de droite à gauche sont représentées les simulations correspondantes à des nombres de Rayleigh de* $Ra = 3.16, 3.30, 3.70$ *et* $3.85 \times Ra_c$*. Pour chacun des trois derniers graphiques, la courbe qui est représentée à droite après un espace correspond à l'énergie cinétique sans champ magnétique.*

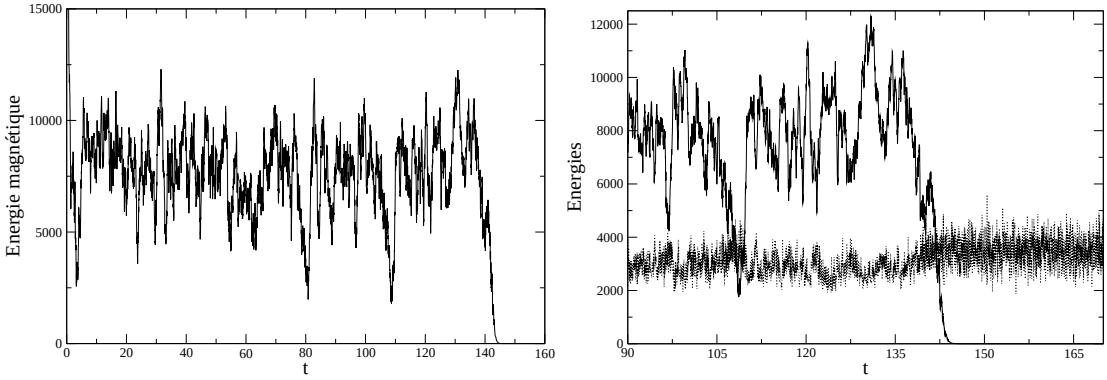

FIG. 3.19: *Energie magnétique (et cinétique pour le graphique de droite, en traits pointillés) en fonction du temps pour* $E = 10^{-3}$ *et* $q = 3$ *et* $Ra = 210$. *L'énergie magnétique s'effondre après environ* 140 *temps visqueux (ou 47 temps magnétique) pour ne plus remonter. On peut noter sur le graphique de droite que la valeur moyenne de la vitesse, ainsi que l'amplitude de ses fluctuations, augmentent lorsque le champ magnétique disparaît.*

efficace par un écoulement assez vigoureux. Bien que l'écoulement ne soit pas dynamo au sens cinématique, il est cependant assez efficace pour lutter contre la diffusion ohmique. Son effet n'est donc pas celui d'une turbulence désorganisée, qui accélérerait la décroissance du champ magnétique, mais celui d'un écoulement proche d'une dynamo qui mène à une décroissance du champ plus lente qu'en présence de la seule diffusion ohmique.

Pour un nombre d'Ekman $E = 3.10^{-4}$ et un nombre de Roberts $q = 6$ (bifurcation super-critique), on peut constater sur la figure 3.20 que pour des nombres de Rayleigh $Ra = 1.97$, 2.27 et $2.42 \times Ra_c$ la proximité d'un seuil dynamo en $Ra = 2.57 \times Ra_c$ a un effet bien plus important sur le taux de décroissance de la solution. Les taux de décroissance sont en effet de 0.84, 0.20 et 0.02 respectivement. Ceux-ci tendent vers zéro à mesure que l'on s'approche du seuil dynamo. Ce comportement correspond à une bifurcation standard (une valeur propre franchit l'axe des imaginaires). Une fois de plus, bien que l'écoulement soit « turbulent » , le taux de décroissance du champ magnétique est plus faible que celui correspondant à la seule diffusion ohmique. L'écoulement retarde la disparition du champ.

Il est intéressant d'étudier les propriétés statistiques des fluctuations de vitesse et de champ magnétique. Nous avons représenté sur les figures 3.21 et 3.22, les fonctions de densité de probabilité (PDF) des énergies cinétique et magnétique respectivement pour $E = 3.10^{-4}$, $q = 3$ et $Ra = 3.7 \times Ra_c$ (bifurcation sous-critique) et $E = 1.10^{-4}$, $q = 3$ et $Ra = 3.3 \times Ra_c$ (bifurcation super-critique). On peut remarquer sur ces deux figures que les PDF des énergies cinétiques sont plus symétriques, dans les deux cas, que celles des énergies magnétiques. Cette caractéristique semble assez robuste et a été observée pour les autres paramètres que nous avons étudiés.

Ce phénomène est très probablement lié au caractère multiplicatif du bruit exercé par la vitesse sur le champ magnétique. Ainsi, lors de l'étude de l'évolution d'un scalaire en présence de bruit multiplicatif (paragraphe 3.3), nous avons montré qu'un bruit blanc gaus-

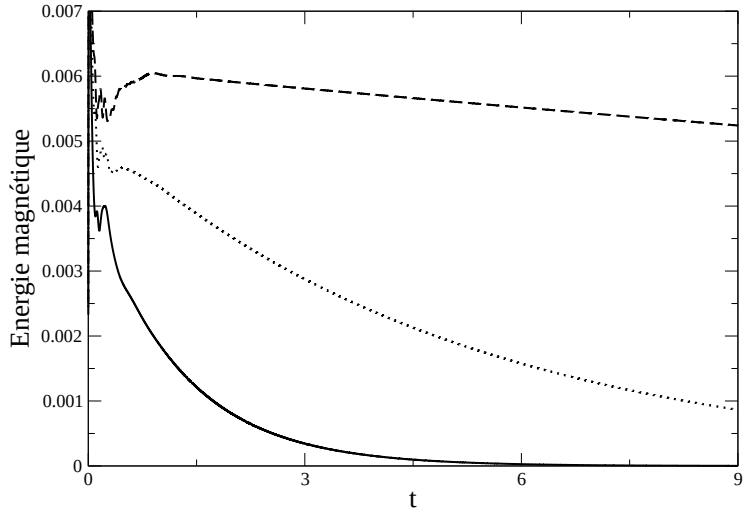

FIG. 3.20: *Energie magnétique en fonction du temps pour* $E = 3.10^{-4}$, $q = 6$ *et* $Ra = 1.97$ *(trait plein),* 2.27 *(traits pointillés) et* $2.42 \times Ra_c$ *(traits pointillés longs). On peut constater que le taux de décroissance (*0.84, 0.20 *et* 0.02 *respectivement) est de plus en plus faible à mesure que l'on s'approche du seuil dynamo (correspondant à* $Ra = 2.57 \times Ra_c$*).*

sien (PDF symétrique) amène une probabilité suivant la loi du chi2 (PDF non symétrique) pour la variable bruitée. Cette comparaison ne peut bien sûr qu'être qualitative. Le système proposé dans la section 3.3 n'est évidemment pas à même de rendre toute la complexité du cas MHD complet.

3.4.6 Solutions multiples

Dans notre étude de la bifurcation dynamo, nous avons cherché s'il pouvait exister plusieurs branches dynamo stables pour un même régime de paramètres. Nous n'en avons pas rencontré. Cependant nous avons trouvé un cas intéressant pour un nombre d'Ekman $E = 3.10^{-4}$, un nombre de Roberts $q = 6$ et un nombre de Rayleigh $Ra = 2.57 \times Ra_c$. Nous présentons sur la figure 3.23 l'énergie magnétique et l'énergie cinétique de l'écoulement pour ces paramètres. Sur cette figure sont indiquées deux réalisations différentes, les conditions initiales de ces deux calculs diffèrent d'une perturbation infinitésimale.

Ce comportement est très singulier. Après un début de calcul comparable dans les deux cas, la solution de la dynamo semble se stabiliser (oscillations amorties). Mais elle se déstabilise violemment. Dans un cas l'action dynamo est conservée, dans l'autre elle disparaît. Ce comportement est assez inattendu les paramètres étant identiques. De plus, dans les deux cas l'énergie cinétique après la période de fluctuation est supérieure à celle avant ces fluctuations, que le champ magnétique soit maintenu ou non.

Pour ce cas, nous avons diagnostiqué qu'il existe au moins deux solutions au problème hydrodynamique. Nous avons observé un changement de mode de Fourier dominant au

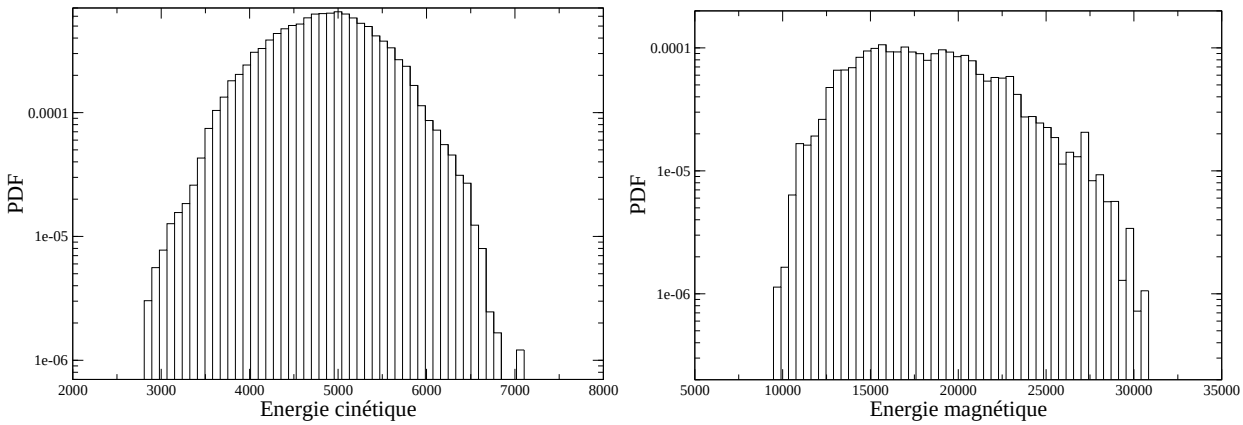

FIG. 3.21: *Fonction de densité de probabilité pour l'énergie cinétique (à gauche) et l'énergie magnétique (à droite). Les paramètres sont* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 3$ *et* $Ra = 3.7 \times Ra_c$*. Ce cas correspond à une bifurcation sous-critique.*

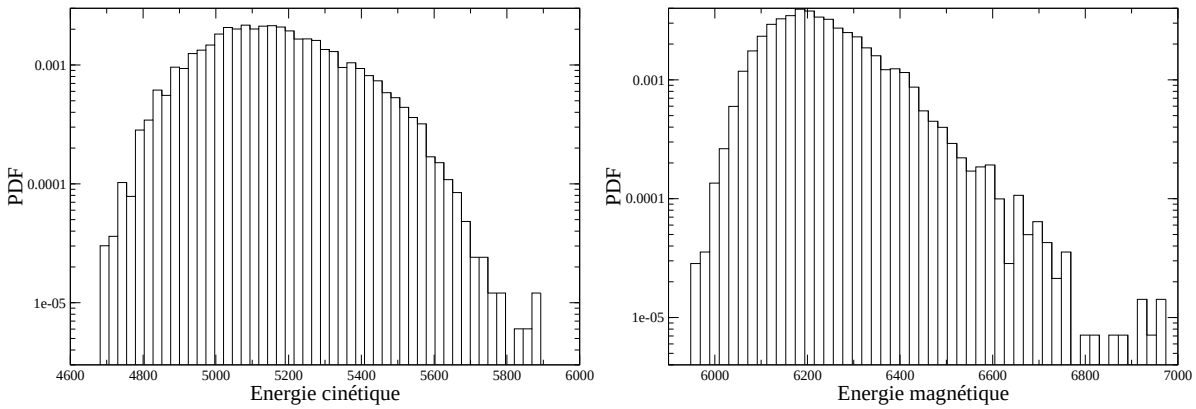

FIG. 3.22: *Fonction de densité de probabilité pour l'énergie cinétique (à gauche) et l'énergie magnétique (à droite). Les paramètres sont* $E = 1.10^{-4}$*,* $q = 3$ *et* $Ra = 3.3 \times Ra_c$*. Ce cas correspond à une bifurcation super-critique.*

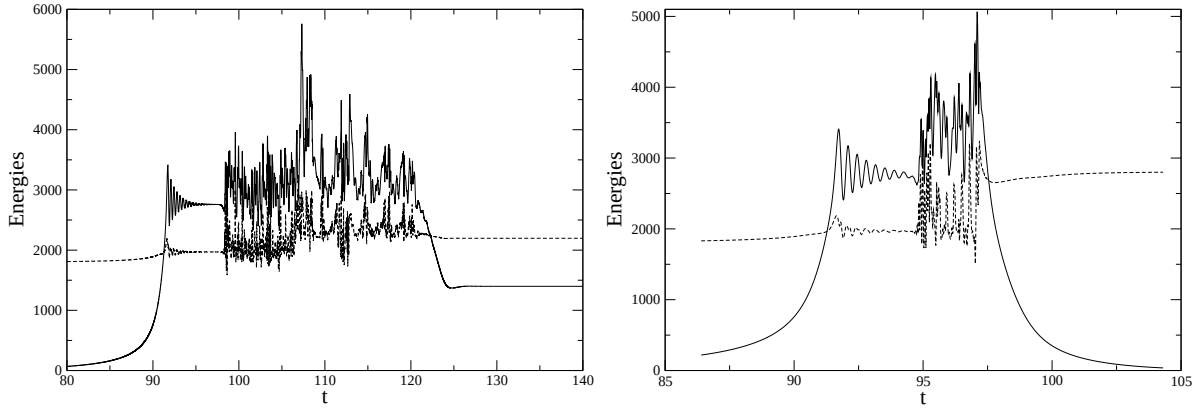

FIG. 3.23: *Energies magnétique et cinétique en fonction du temps pour* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 6$ *et* $Ra = 2.57 \times Ra_c$. *Les graphiques de gauche et de droite correspondent à deux réalisations différentes, celles-ci diffèrent par un écart infinitésimal des conditions initiales.*

cours de la simulation, aussi bien pour le champ magnétique que pour la vitesse. Ce phénomène peut être visualisé sur la figure 3.24.

Comme pour les autres simulations, nous avons démarré ce calcul avec une distribution de température aléatoire, une vitesse nulle et une perturbation de champ magnétique. Pour ces paramètres, nous sommes très proches du seuil dynamo (juste au-dessus), le taux de croissance de la perturbation de champ magnétique est donc très faible (0.058). Pendant, les quarante premiers temps visqueux (on peut remarquer qu'après 80 temps visqueux le champ magnétique a toujours une faible amplitude), la convection a pu librement se développer sans influence notable du champ magnétique. Pour ce régime de paramètres l'énergie cinétique de la solution est constante et le mode de Fourier naturellement choisi par la convection est le mode $m = 6$, ce mode et le vent zonal ($m = 0$) sont les seuls à posséder une énergie cinétique significative. Après un temps assez long l'énergie du champ magnétique finit par saturer, le champ adopte alors la même géométrie que la convection, celle correspondant au mode $m = 6$. Ce mode se déstabilise rapidement, et on peut voir sur la figure 3.24 qu'après un conflit entre les modes $m = 6, 5$ et 4, le mode dominant, aussi bien pour la convection que pour le champ magnétique, devient pour la première réalisation le mode $m = 5$. Suite à la chute de l'énergie des modes $m = 6$ et 4, le mode $m = 5$ se stabilise, nous avons alors poursuivi la simulation pendant trente temps visqueux supplémentaires et nous avons pu constater que ce mode $m = 5$ est stable et d'énergie constante.

Nous avons repris ce calcul aux environs du temps $t = 86$ en changeant de façon infinitésimale les amplitudes des solutions, ce nouveau calcul est appelé réalisation n°2 dans la figure 3.24. Constatons que pour cette nouvelle réalisation le conflit entre modes ce termine cette fois-ci au profit du mode $m = 4$. La géométrie du mode convectif $m = 4$ ne semble pas être assez efficace pour maintenir la dynamo et on peut constater que l'énergie magnétique décroît par diffusion ohmique dès que ce mode $m = 4$ devient dominant. Nous

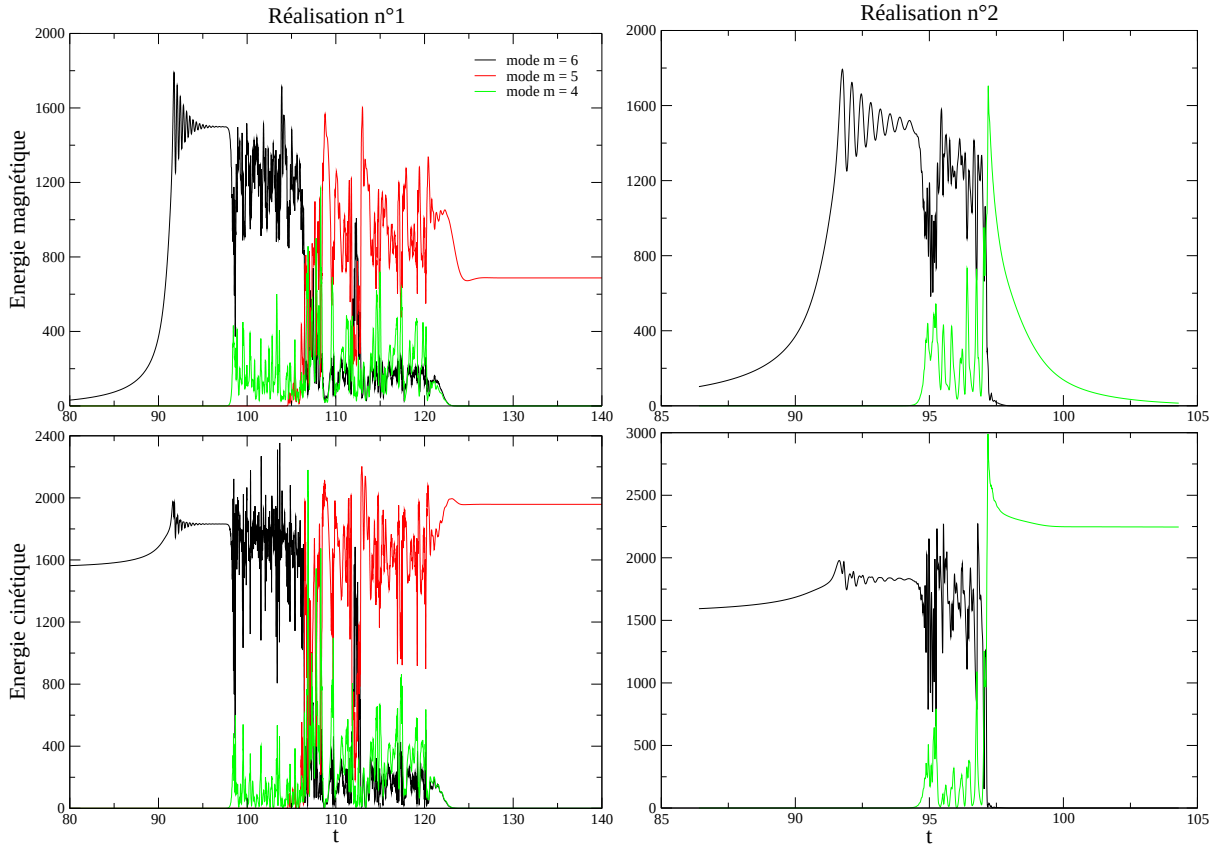

FIG. 3.24: *Energie magnétique (graphiques du haut) et cinétique (graphiques du bas) des modes de Fourier $m = 6, 5$ et 4 (en noir, rouge et vert respectivement) en fonction du temps pour $E = 3.10^{-4}$ et $q = 6$ et $Ra = 2.57 \times Ra_c$. Les graphiques de gauche et de droite correspondent à deux réalisations différentes.*

avons comme dans la réalisation précédente poursuivi la simulation pendant trente temps visqueux, le mode $m = 4$ est stable et d'énergie constante.

Ce scénario peut être vérifié sur la figure 3.25, où nous avons représenté (à gauche) les iso-surfaces de vorticité axiale et (à droite) la composante radiale du champ magnétique à la frontière externe du modèle (CMB). Les iso-surfaces de vorticité axiale nous permettent de visualiser les colonnes de convection. On peut constater sur les graphiques du haut, correspondant au temps $t = 97.2$ de la réalisation n°1, que le mode convectif et le mode champ magnétique sont bien dominés par le mode $m = 6$. Rappelons que les colonnes de convection fonctionnent par paires de colonnes contra-rotatives, les cyclones (vorticité positive, en rouge) et les anticyclones (vorticité négative, en bleu).

Les zones de fort champ magnétique à la frontière externe (en bleu foncé) sont associées aux cyclones. Les anticyclones sont eux associés aux zones de faible champ magnétique. Nous avons ajouté à chaque graphique quelques lignes de champ. Pour les graphiques du milieu, correspondant au temps $t = 137.7$ de la réalisation n°1, on constate que le

Nombre	valeur
Ekman	$E = 10^{-15}$
Prandtl	$Pr = 0.14$
Prandtl magnétique	$Pm = 10^{-6}$
Reynolds	$Re = 10^8$
Reynolds magnétique	$Rm \in [10^2, 10^3]$
Elsasser	$\Lambda \in [1, 10]$

TAB. 3.5: *Valeurs des paramètres sans dimension pour la Terre.*

mode convectif et le mode champ magnétique sont bien dominés par un mode $m = 5$. Le graphique du bas correspond, quant à lui, au temps $t = 138$ de la réalisation n°2, le mode convectif est bien dominé par un mode $m = 4$, le champ magnétique a disparu par diffusion ohmique.

Résumons les résultats obtenus pour ce cas correspondant à un nombre d'Ekman $E = 3.10^{-4}$, un nombre de Roberts $q = 6$ et un nombre de Rayleigh $Ra = 2.57 \times Ra_c$.

Il existe pour ce cas 3 modes hydrodynamiques. Le mode le plus rapidement croissant dans le cas purement hydrodynamique est le mode $m = 6$. Une fois établi, il est le seul mode non-axisymétrique à posséder une énergie significative et son énergie est constante. Ce mode est à même de produire une action dynamo, mais après la saturation de l'énergie du champ magnétique le mode $m = 6$ se déstabilise, soit au profit du mode $m = 5$, soit au profit du mode $m = 4$. Le mode $m = 5$ est également dynamo mais contrairement à son prédécesseur, il est stable. Nous n'avons pas observé de cycle hétérocline. Le mode $m = 4$ n'est, quant à lui, pas dynamo.

3.5 Interprétation géophysique

Dans ce chapitre, nous avons obtenu un certain nombre de résultats sur la bifurcation dynamo. Pour ce faire, nous avons utilisé des paramètres nécessairement éloignés de ceux de la Terre (voir tableau 3.5). Il est donc permis de se demander dans quelle mesure ces résultats peuvent apporter de nouveaux éléments à la compréhension de la géodynamo.

Pour la Terre, l'énergie du champ magnétique à la CMB est principalement concentrée dans sa composante dipolaire. Nous pouvons constater d'après le tableau 3.6 que c'est aussi le cas dans nos simulations. Ce résultat était déjà souligné par Kutzner et Christensen (2002). Notons cependant que le rôle dominant du dipôle a clairement tendance à disparaître lorsque l'on s'éloigne du seuil de la dynamo (et donc du seuil convectif).

Nous avons vu au chapitre 2 que lorsque l'on s'éloigne du seuil convectif l'écoulement a tendance à engendrer un vent zonal fort. Celui-ci sera largement contraint par la présence de champ magnétique. On peut cependant s'attendre à ce que ce vent zonal influence la

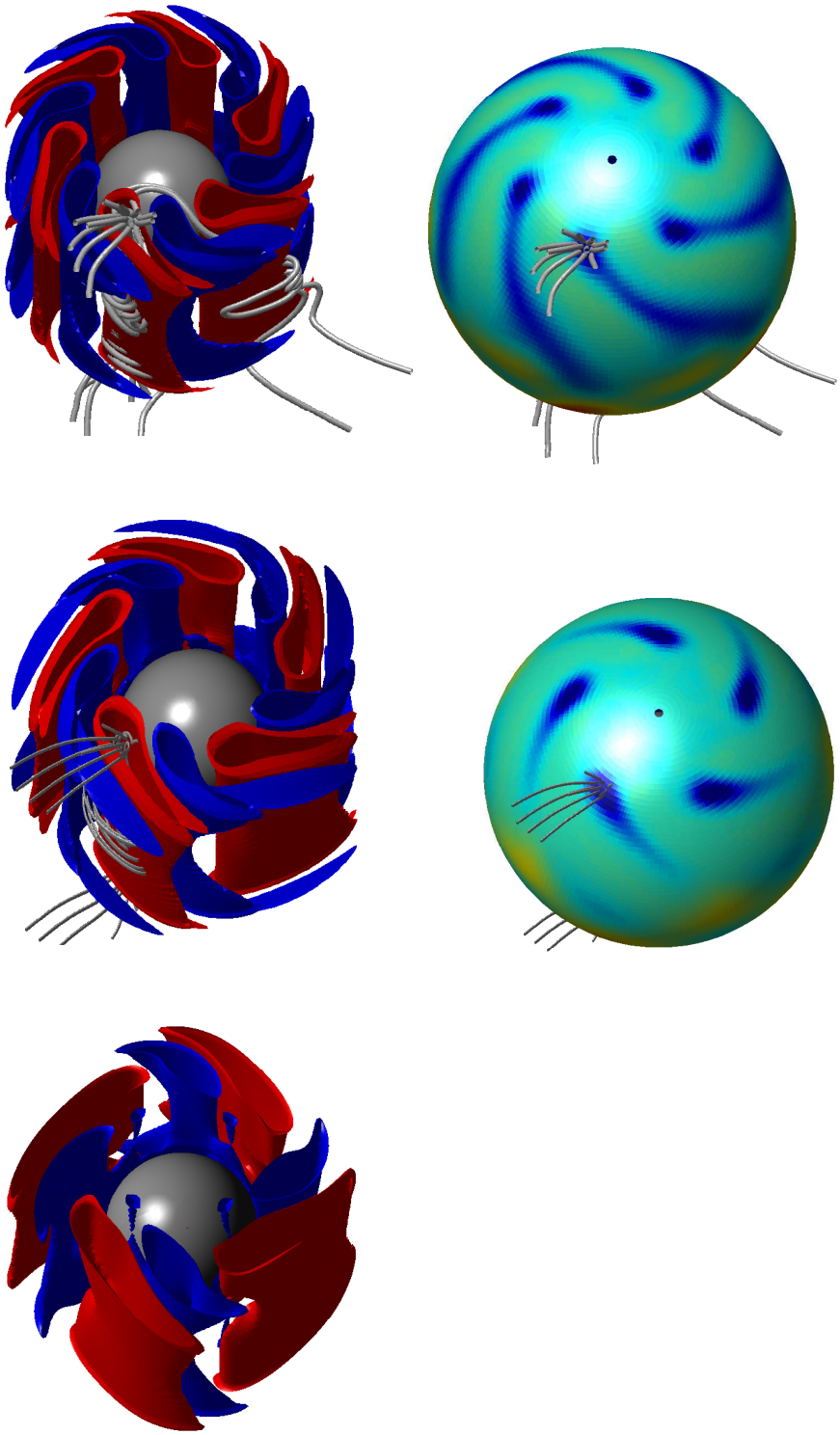

FIG. 3.25: *Iso-surfaces de vorticité axiale (gauche) et composante radiale du champ magnétique à la CMB pour* $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 6$ *et* $Ra = 2.57 \times Ra_c$. *La vorticité positive (cyclone) est représentée en rouge, la vorticité négative (anticyclone) en bleu. Les zones de fort champ magnétique sont en bleu foncé.*

E	q	bifurcation	Ra/Ra_c	$dip_{cmb}(\%)$	$r_{T/P}$
10^{-3}	3	îlot	3.76	53.8	1.15
			4.11	49.4	1.02
3.10^{-4}	6	super-critique	2.57	58.3	3.37
			10.00	19.3	1.18
3.10^{-4}	3	sous-critique	4.00	71.6	1.22
			7.50	44.7	1.09
3.10^{-4}	1.5	îlot	4.44	86	0.74
			9.18	58.9	0.79
10^{-4}	3	super-critique	2.80	91	2.12
			4.30	64.7	1.83
10^{-4}	0.67	sous-critique	7.46	91.2	0.55

TAB. 3.6: *Fraction de l'énergie magnétique représentée par le dipôle à la CMB et rapport de l'énergie magnétique toroïdale sur l'énergie magnétique poloïdale, en fonction des nombres d'Ekman, de Roberts et du nombre de Rayleigh normalisé.*

géométrie du champ magnétique en générant une composante toroïdale importante (effet Ω). Nous pouvons noter dans le tableau 3.6 que cette tendance est globalement vérifiée. En effet, le rapport de l'énergie magnétique toroïdale sur l'énergie magnétique poloïdale $r_{(T/P)}$ est en général supérieur à l'unité. Ce raisonnement n'est cependant valable qu'à l'ordre dominant (la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement a été négligée) et on peut le constater n'est pas vérifié dans tous les cas.

Dans nos modèles la prépondérance de la composante toroïdale tend à s'estomper lorsque l'on s'éloigne du seuil dynamo. Dans le cas de la Terre, la composante toroïdale du champ magnétique n'est pas observable. Certains modèles de dynamo à champ fort [75] prédisent un champ toroïdal dominant (crée par effet Ω).

Ce régime de champ fort, s'il est supposé pertinent pour la Terre, est-il applicable pour les paramètres que nous avons étudiés ? Nous pouvons constater sur la figure 3.26 que dans toutes nos simulations, le nombre d'Elsasser est d'ordre 1. La forme des courbes reflète celle des diagrammes de bifurcation (voir la définition du nombre d'Elsasser (3.29)). La force de Laplace est donc comparable à la force de Coriolis. Cependant dans notre cas, la dissipation visqueuse n'est pas négligeable. Elle est en fait du même ordre que la dissipation ohmique. Nous ne sommes donc pas dans le cadre du régime de champ fort.

Les résultats que nous avons obtenus nous ont permis de mieux comprendre la bifurcation dynamo. Nos paramètres sont cependant très éloignés de ceux de la Terre et il serait nécessaire d'effectuer des calculs supplémentaires pour des nombres d'Ekman plus petits avant d'essayer de proposer des conclusions pour la Terre.

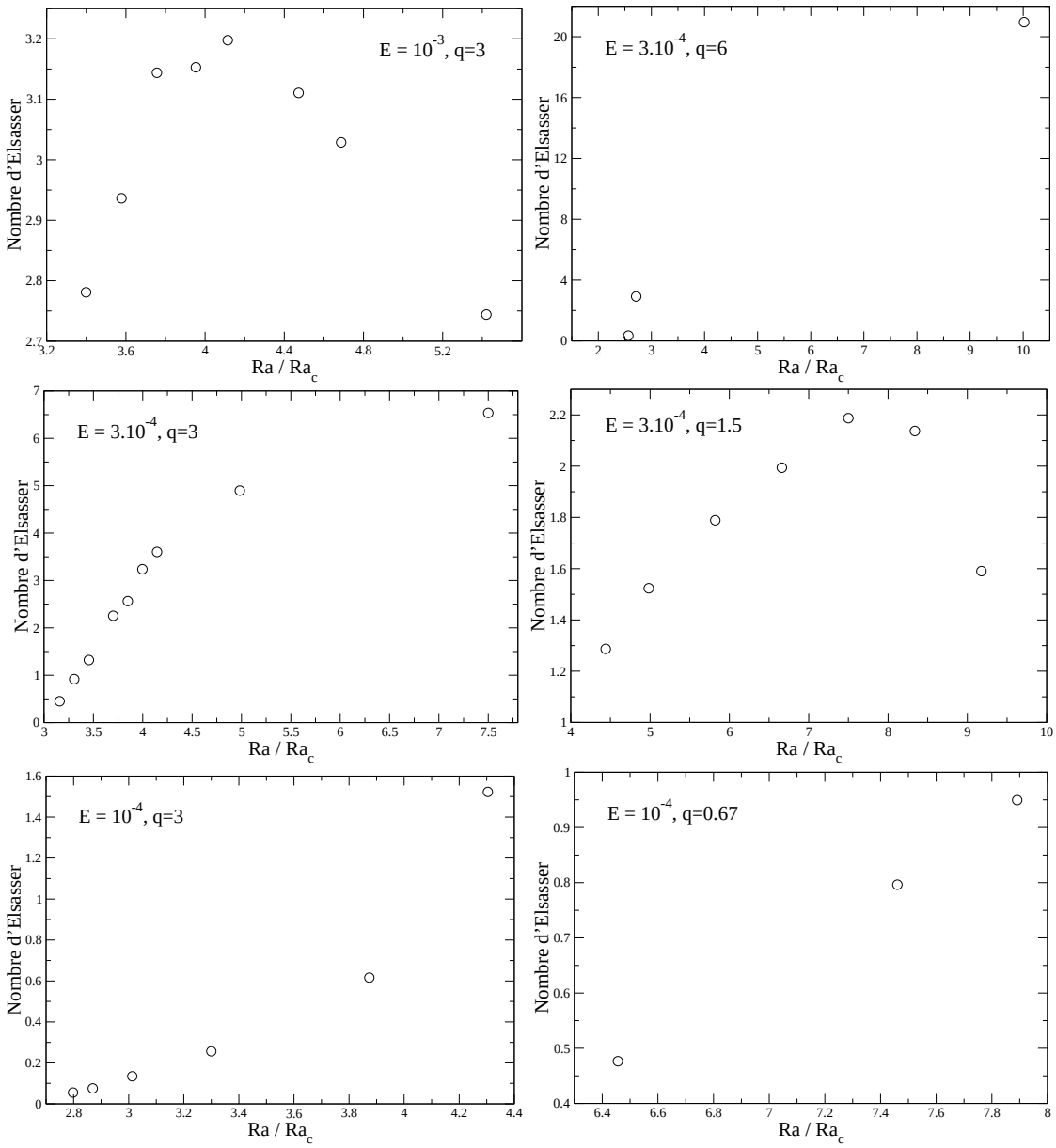

FIG. 3.26: *Nombre d'Elsasser en fonction du nombre de Rayleigh normalisé pour de gauche à droite et de haut en bas* $E = 10^{-3}$ *et* $q = 3$, $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 6$, $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 3$, $E = 3.10^{-4}$ *et* $q = 1.5$, $E = 10^{-4}$ *et* $q = 3$ *et* $E = 10^{-4}$ *et* $q = 0.67$.

Nous sommes cependant en mesure de faire une suggestion concernant la bifurcation correspondant aux paramètres terrestres. Nous l'avons vu dans l'introduction, les observations montrent que le champ magnétique terrestre a des fluctuations importantes et qu'il s'inverse (voir aussi figure 3.27).

Nous avons pu constater dans nos résultats que lorsque l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ est stable et que les fluctuations du champ magnétique sont importantes, les solutions dynamos sont métastables. C'est-à-dire que l'action dynamo finit par être perdue après un temps suffisamment long. Le champ magnétique terrestre s'étant maintenu pendant un temps très grand (plus de $100\,000 \times \tau_d$) cela indique que pour les paramètres de la Terre, l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ n'est pas stable. Cela exclut donc un diagramme en îlot pour les paramètres de la Terre.

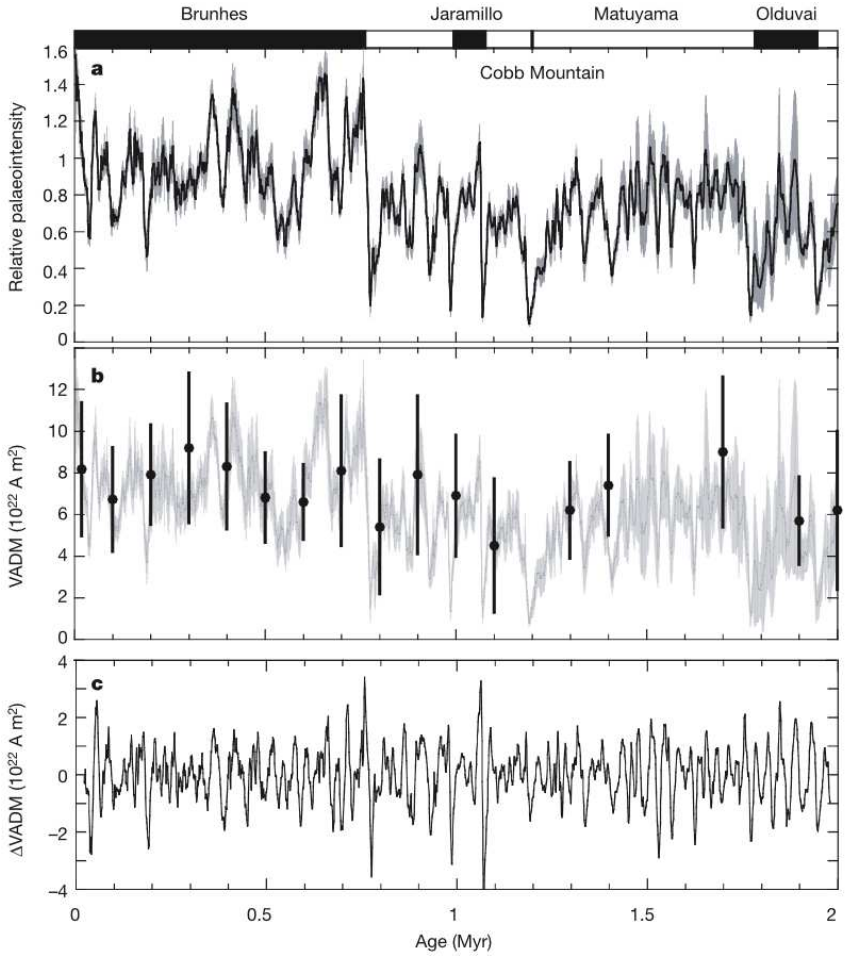

FIG. 3.27: *Enregistrements composites Sint-2000 retraçant l'évolution de l'intensité du champ magnétique pour les deux derniers millions d'années. La courbe (a) représente une intensité relative. Les intervalles de polarité sont représentés au-dessus par une barre noire (respectivement blanche) pour une polarité normale (respectivement inverse). La courbe (b) est une intensité calibrée sur des enregistrements provenant de lave et convertie en VADM (virtual axial dipole moment), et la courbe (c) représente les fluctuations du VADM autour de sa valeur moyenne (d'après Valet, Meynadier et Guyodo, 2005).*

Chapitre 4

Conclusions et perspectives

Résumons les différents résultats que nous avons obtenus aux cours de nos études. A l'aide de notre modèle quasi-géostrophique, nous avons pu étudier la bifurcation convective pour un mode de chauffage uniforme. Une prédiction théorique de Soward (1977) proposait que cette bifurcation soit sous-critique. Cette hypothèse se basait sur la capacité des non-linéarités à contrer le mélange de phase qui existe en-dessous du seuil convectif. Nous avons pu constater que les non-linéarités deviennent effectivement importantes très près du seuil, mais leur effet n'est pas celui escompté. Nous n'avons en effet obtenu que des bifurcations super-critiques pour des nombres d'Ekman compris entre $E = 10^{-4}$ et $E = 10^{-7}$. Le vent zonal important, engendré par les non-linéarités, n'a donc pas permis aux solutions convectives d'exister en-dessous du seuil. Son action est en fait, à travers le phénomène des oscillations de relaxation, de rendre l'énergie cinétique des solutions dépendante du temps. Ce comportement correspond à une bifurcation ultérieure du système. Nous avons remarqué que les oscillations de relaxation apparaissent de plus en plus près du seuil convectif lorsque le nombre d'Ekman est diminué. Dans la limite des petits nombres d'Ekman, la solution convective a donc une énergie dépendante du temps dès le seuil convectif franchi. Nos résultats lèvent donc le désaccord qui existait entre la prédiction théorique de Soward (1977) et les modèles numériques. Cette prédiction ne prenait pas en compte une solution dont l'énergie est fluctuante.

Notre modèle quasi-géostrophique nous a aussi permis d'isoler le rôle crucial du pompage d'Ekman dans la formation de structures en bandes dans la convection. Nous avons en effet déterminé que sa présence est nécessaire pour produire un nombre significatif de bandes dans le profil radial du vent zonal. Nous avons de plus déterminé, que la taille des structures radiales produites semble résulter de l'échelle à laquelle la dissipation de volume et le pompage d'Ekman sont d'égale importance. Ces bandes ont pu être produites pour des nombres de Rayleigh à peine supérieurs au nombre de Rayleigh critique, justifiant ainsi notre approche faiblement non-linéaire.

Avec notre modèle 3D, nous avons pu étudier la bifurcation dynamo. Nous avons pu montrer que malgré un régime de paramètres très simple le diagramme de bifurcation de ces dynamos numériques est déjà ardu. Nous avons déterminé que pour un nombre d'Ekman fixé, il est possible de passer d'une bifurcation super-critique à une bifurcation

sous-critique puis à un ilôt en décroissant le nombre de Roberts. Ce changement de nature de la bifucation dynamo peut également être obtenu (dans l'ordre inverse) à un nombre de Roberts en faisant décroître le nombre d'Ekman. Dans le cas d'une bifurcation sous-critique, nous avons vu que l'état $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ peut redevenir stable après le seuil dynamo. Nous avons montré que pour certains régimes de paramètres il existe des dynamos métastables. C'est-à-dire que l'action dynamo finit par être perdue après un temps long (jusqu'à environ 50 temps magnétiques). Nous avons pu constater qu'il peut exister plusieurs états convectifs pour un même régime de paramètres. Certains de ces états permettent de produire une action dynamo et d'autres non.

Après avoir approfondi l'étude de la bifurcation dynamo, il serait intéressant d'étudier les bifurcations suivantes du système. D'après la figure 3.5 extraite d'une étude de Kutzner et Christensen, il est visible que pour certaines valeurs des nombre d'Ekman et de Roberts et pour un nombre de Rayleigh suffisamment élevé la dynamo obtenue s'inverse.

Dans le cas de la Terre, les observations nous apprennent que le champ magnétique terrestre change de polarité de façon très irrégulière (en moyenne tous les $10\tau_d$) [26]. Le champ magnétique terrestre est caractérisé par deux états de polarité opposée avec des transitions rapides entre ces deux états (d'une durée comprise entre $0.1\tau_d$ et $0.5\tau_d$ environ). En dehors des inversions, le dipôle est dominant et son amplitude fluctue autour d'une valeur moyenne non nulle (estimée à environ $1.78 \cdot 10^5\, nT$ ou $7.5 \cdot 10^{22} A.m^2$ pour le moment dipolaire moyen sur les derniers 800.000 ans [63]). Il existe, en outre, des excursions qui ont environ la même durée que les inversions. Elles correspondent à une décroissance du dipôle qui reprend ensuite de l'importance tout en gardant la même polarité.

Nous avons entamé une étude des inversions du champ magnétique en commençant par un nombre d'Ekman $E = 3.10^{-4}$, un nombre de Roberts $q = 3$ et un nombre de Rayleigh $Ra = 13.32 \times Ra_c$. Ce régime de paramètre a été étudié dans un contexte géophysique par Wicht [65]. Pour ces paramètres, le calcul que nous avons effectué est d'une longueur de 67 temps visqueux, soit environ 10 temps magnétiques (ou environ $93\tau_d$). Un tel calcul représente plus de 5000 heures de simulations sur 8 processeurs. La figure 4.1 présente l'énergie du dipôle à la frontière externe de notre modèle (CMB) au cours du temps. Cette énergie est normalisée par l'énergie magnétique totale à la frontière externe. Pour ce régime de paramètres la dynamo obtenue n'est pas dominée par un dipôle. En effet, ce graphique montre que l'énergie magnétique du dipôle ne représente qu'en moyenne 5% de l'énergie magnétique totale à la frontière externe (CMB) et est au mieux égale à 24%.

Nous avons représenté sur le graphique du haut de la figure 4.2 l'amplitude du dipôle en fonction du temps visqueux. Sur la durée de nôtre simulation, nous avons obtenu 7 inversions significatives. Nous pouvons clairement constater qu'il n'y a pas deux états bien définis, mais que le dipôle oscille autour d'une valeur moyenne nulle. Ces oscillations sont entrecoupées de périodes de stagnation à de faibles amplitudes, proches de zéro. Ceci est confirmé par la fonction de densité de probabilité de l'amplitude du dipôle (graphique du bas de cette même figure). Celle-ci est en effet centrée sur zéro. Pour un cas ressemblant à la Terre, cette fonction devrait être bimodale. On peut aussi constater que cette fonction n'est pas symétrique. Ceci indique que notre simulation est un peu courte du point de vue statistique.

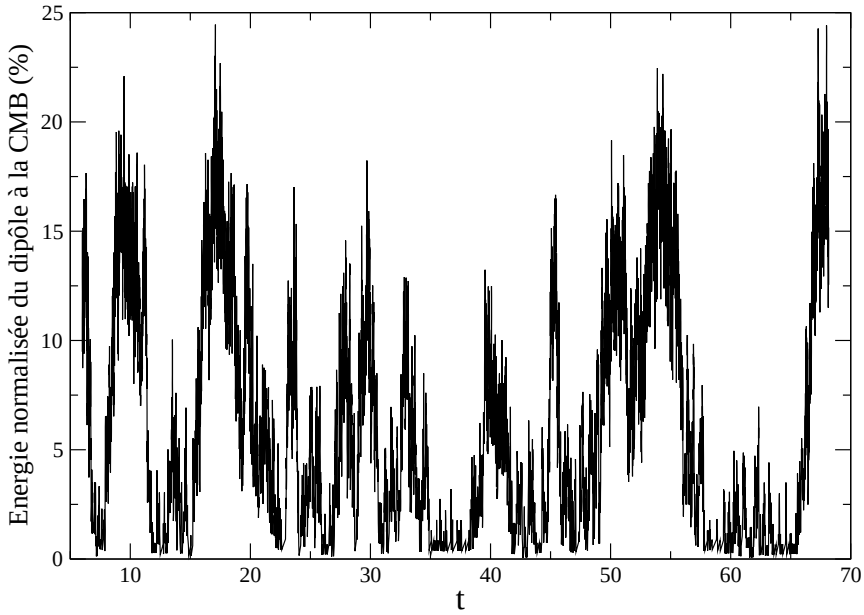

FIG. 4.1: *Energie du dipôle à la frontière externe de notre modèle ici normalisée par l'énergie magnétique totale.*

Définissons maintenant le moment dipolaire. Prenons θ_{dip} comme la co-latitude du dipôle et posons comme convention que S_{lm} désigne l'amplitude de l'harmonique sphérique de degré l et d'ordre m de la composante poloïdale. S_{10} et S_{11} vont donc désigner respectivement les amplitudes du dipôle axial et équatorial. Le moment dipolaire m_{dip} est défini comme

$$m_{dip} = \frac{S_1^0}{cos\,\theta_{dip}}, \tag{4.1}$$

où de manière équivalente par $m_{dip} = \sqrt{(S_1^0)^2 + (S_1^1)^2}$. Il représente donc l'amplitude d'un dipôle dont l'inclinaison est libre.

Les figures 3.27 et 4.3 apportent une indication supplémentaire que les inversions produites pour un nombre d'Ekman $E = 3.10^{-4}$, un nombre de Roberts $q = 3$ et un nombre de Rayleigh $Ra = 13.32 \times Ra_c$ sont très différentes de celles de la Terre. Dans le cas de la Terre, le moment dipolaire oscille autour d'une valeur moyenne et s'effondre à chaque inversion. Dans la simulation numérique, le moment dipolaire oscille autour d'une valeur moyenne proche de zéro, il ne s'en éloigne que pour de courtes durées après une inversion.

Nous pouvons étudier l'inclinaison du dipôle en fonction du temps (voir figure 4.4). Ce graphique permet de visualiser qualitativement chacune des 7 inversions. Cependant les détails de ce graphique ne sont pas significatifs car, comme nous l'avons signalé, le dipôle n'est pas dominant dans notre cas. Par exemple, sur l'intervalle de temps $t \in [35, 40]$, ce qui pourrait passer pour une série de courtes inversions n'est en fait qu'une série d'oscillations (de faibles amplitudes) du dipôle autour de zéro.

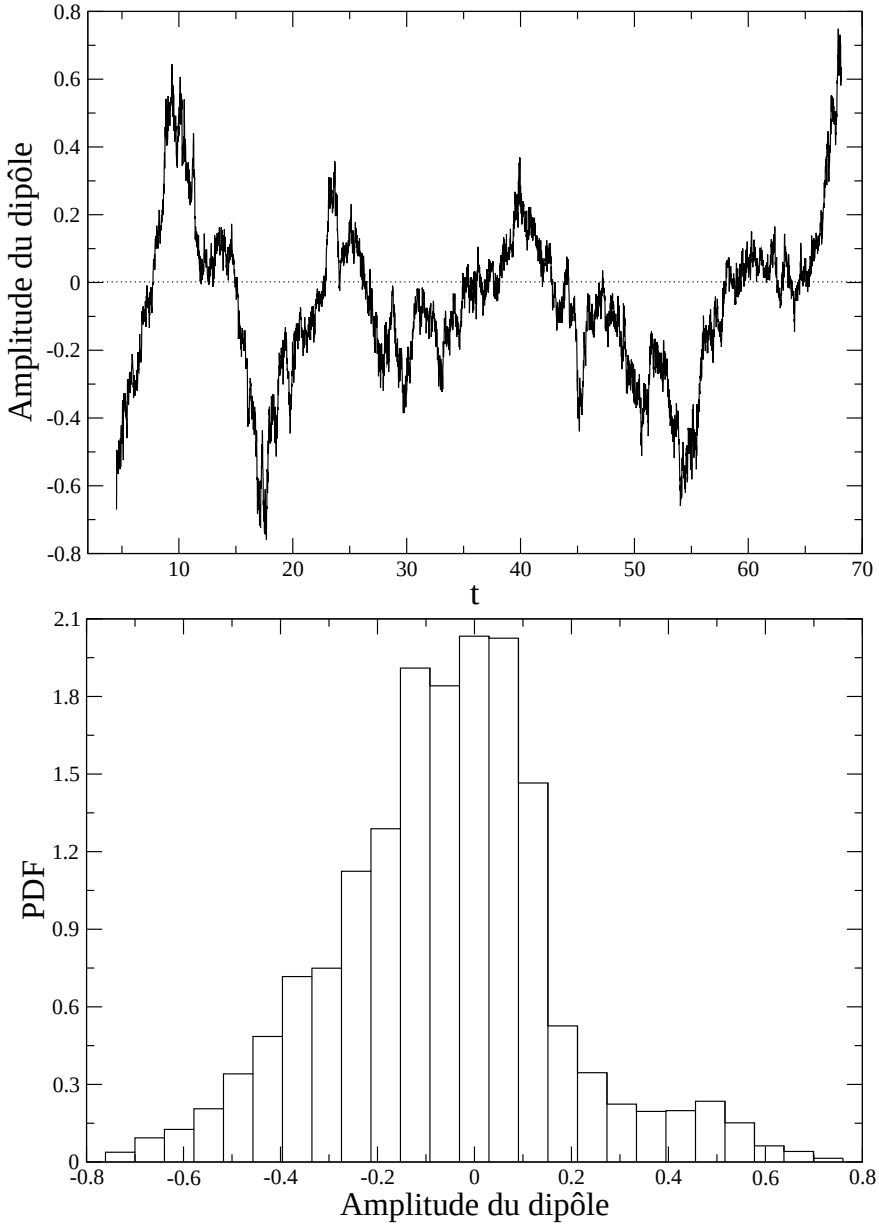

FIG. 4.2: *Amplitude du dipôle en fonction du temps, en unité de temps visqueux (graphique du haut) et fonction de densité de probabilité de l'amplitude du dipôle (graphique du bas) pour* $E = 3.10^{-4}$, $q = 3$ *et* $Ra = 13.32 \times Ra_c$.

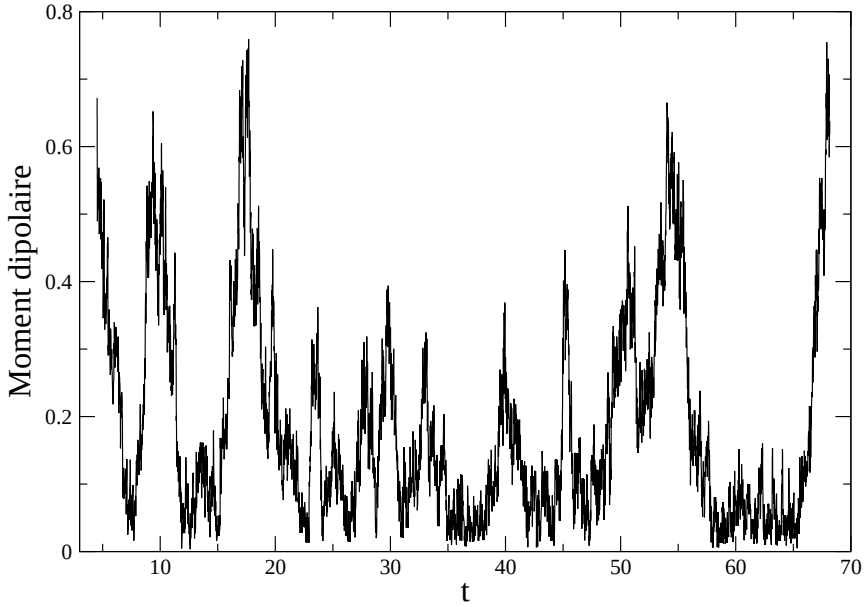

FIG. 4.3: *Moment dipolaire en fonction du temps (visqueux) pour* $E = 3.10^{-4}$, $q = 3$ *et* $Ra = 13.32 \times Ra_c$.

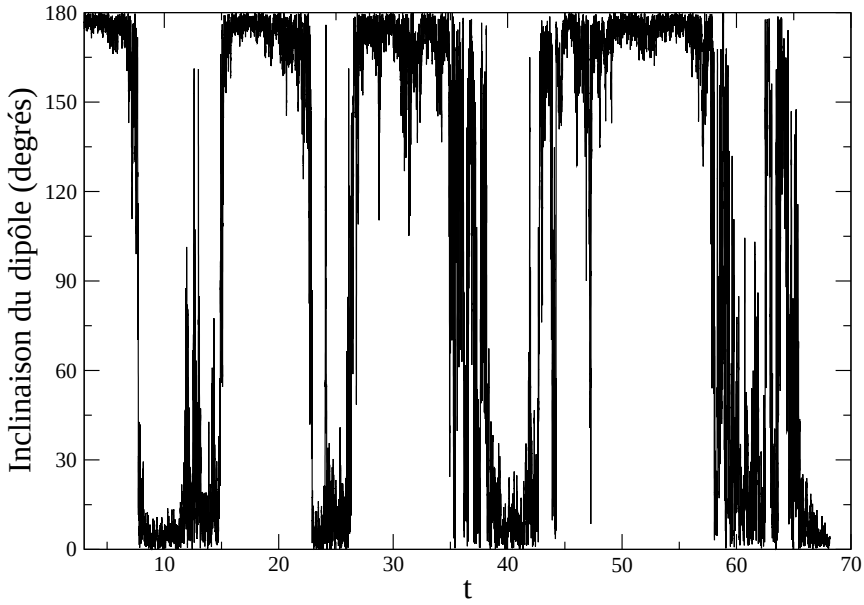

FIG. 4.4: *Inclinaison du dipôle (correspondant à la co-latitude du pôle pour un champ purement dipolaire) en fonction du temps (visqueux) pour* $E = 3.10^{-4}$, $q = 3$ *et* $Ra = 13.32 \times Ra_c$.

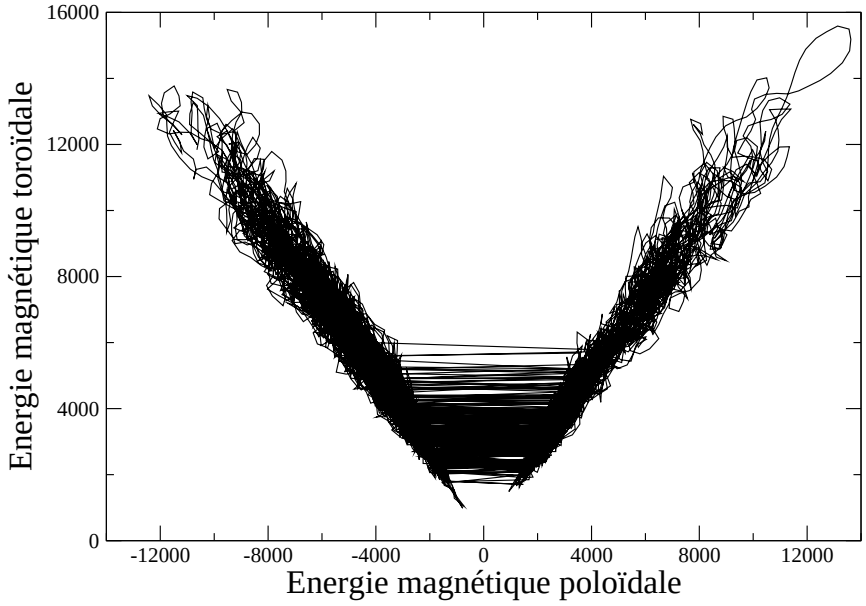

FIG. 4.5: *Energie toroïdale en fonction de l'énergie poloïdale signée pour* $E = 3.10^{-4}$, $q = 3$ *et* $Ra = 13.32 \times Ra_c$.

Bien que les inversions que nous avons obtenues pour ce régime de paramètres ne soient pas ressemblantes à celles de la Terre, celles-ci nous fournissent tout de même des renseignements sur les mécanismes des inversions. Nous avons par exemple pu constater (voir figure 4.5) que pour ces paramètres les inversions se produisent aux basses valeurs de l'énergie magnétique totale.

De plus, nous avons pu remarquer qu'à la frontière externe de notre modèle (CMB), seule l'intensité des harmoniques antisymétriques (S_{10},S_{30},S_{50}...) semble influencée par les inversions. Les harmoniques antisymétriques suivent qualitativement les mêmes fluctuations que le dipôle axial. Les harmoniques symétriques, quant à elles, oscillent autour de zéro sans subir de fluctuations d'intensité visible liées aux inversions (voir figure 4.6).

Il serait intéressant de poursuivre plus avant ces recherches et de mener une étude systématique des propriétés de ces inversions en fonction des paramètres. Ceci permettrait d'avancer dans la compréhension de ce phénomène qui reste mal compris. Etant donnée la longueur des calculs requis, une telle étude nécessiterait cependant des moyens informatiques conséquents. Elle ne serait réaliste qu'en développant des outils numériques plus performants. C'est ce que nous nous sommes efforcés de faire Julien Aubert, Emmanuel Dormy et moi-même durant ma thèse. Nous disposons maintenant d'un code dynamo parallèle (PARODY) parmi les plus rapides existant pour ce problème.

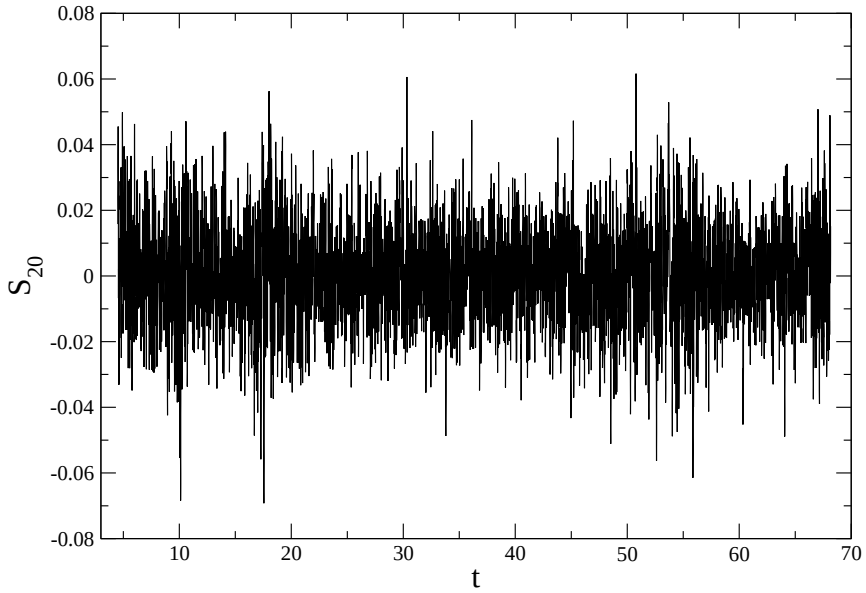

FIG. 4.6: *Amplitude de la composante poloïdale* S_{20} *(degré* 2 *et ordre* 0*) en fonction du temps (visqueux) pour* $E = 3.10^{-4}$, $q = 3$ *et* $Ra = 13.32 \times Ra_c$.

Annexe A

Couche d'Ekman et pompage : exemple du cas plan

Nous allons ici faire une étude de la couche limite visqueuse d'Ekman dans un cas plan. Ce cas permet de saisir l'essentiel des phénomènes physiques liés à cette couche et l'obtention des équations est considérablement plus simple que dans le cas de la couche d'Ekman dans la sphère. Nous allons réaliser cette étude dans un repère cartésien (x, y, z), avec un axe de rotation normal à la paroi située en $z = 0$ et aligné avec la direction verticale z. Nous adoptons de plus des conditions aux limites de non-glissement pour la vitesse. D'après ce ce choix de conditions aux limites, la vitesse du fluide doit se raccorder à zéro à la paroi. Ceci va créer une couche limite visqueuse qui de part la présence de rotation va posséder des propriétés particulières.

Considérons un cas où l'amplitude Ω de la rotation est assez importante pour que la force de Coriolis soit dominante suffisamment loin de la paroi. Loin de cette paroi située en $z = 0$, l'équilibre géostrophique est donc réalisé. La force de Coriolis équilibre le gradient de pression, ce qui se traduit en équation par (voir l'équation 2.25 pour l'adimensionnement)

$$E^{-1}(\mathbf{e_z} \wedge \mathbf{u}) = -\nabla\Pi\,. \tag{A.1}$$

En prenant le rotationnel de cette équation, on obtient la contrainte de Proudman-Taylor qui impose que l'écoulement soit indépendant de la direction verticale z. La composante verticale de la vitesse loin du bord est donc nulle à l'ordre dominant. La vitesse loin de la paroi a pour expression $\mathbf{u} = (U_x, U_y, 0)$ où U_x et U_y sont des amplitudes arbitraires. D'après l'équation précédente, nous obtenons pour les vitesses horizontales loin de la paroi

$$-E^{-1}U_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial x} \tag{A.2}$$

$$E^{-1}U_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}\,. \tag{A.3}$$

Dans la couche limite, la viscosité n'est par définition plus négligeable et l'équilibre géostrophique devient

$$E^{-1}(\mathbf{e_z} \wedge \mathbf{u}) = -\nabla\Pi' + \Delta\mathbf{u}\,. \tag{A.4}$$

D'où nous tirons les équations des composantes horizontales u_x et u_y de la vitesse dans la couche limite (la composante u_z est d'abord supposée nulle comme son homologue géostrophique)

$$-E^{-1}u_y = -\frac{\partial\Pi'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \tag{A.5}$$

$$E^{-1}u_x = -\frac{\partial\Pi'}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\,. \tag{A.6}$$

Les termes de diffusion horizontale ont été négligés car l'échelle verticale de variation de la vitesse est à priori beaucoup plus petite que l'échelle horizontale. Supposons que les gradients de pression fixés par l'écoulement loin de la paroi varient peu dans la couche limite ($\nabla\Pi \simeq \nabla\Pi'$, cette hypothèse est raisonnable pour une couche limite suffisamment fine). Il vient alors

$$-E^{-1}(u_y - U_y) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \tag{A.7}$$

$$E^{-1}(u_x - U_x) = \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\,. \tag{A.8}$$

Posons $V = (u_x - U_x) + i\,(u_y - U_y)$, le système précédent peut alors s'écrire

$$E^{-1}\,i\,V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,. \tag{A.9}$$

Les solutions de cette équation satisfaisant les conditions aux limites (raccordement aux vitesses loin de la couche dans la limite $z \to \infty$ et vitesse nulle en $z = 0$) ont pour expression

$$u_x = U_x + (-U_x\cos(z/\delta) - U_y\sin(z/\delta))e^{-z/\delta} \tag{A.10}$$

$$u_y = U_y + (U_x\sin(z/\delta) - U_y\cos(z/\delta))e^{-z/\delta}\,, \tag{A.11}$$

où la grandeur adimensionnée $\delta = E^{1/2}$ est l'épaisseur caractéristique de la couche d'Ekman. Celle-ci est d'autant plus fine que la rotation est importante (petit nombre d'Ekman). Prenons par exemple $U_y = 0$, nous pouvons constater que la couche d'Ekman crée une composante u_y orthogonale à l'écoulement imposé.

Notons cependant, que la divergence de la vitesse dans la couche limite n'est pas obligatoirement nulle. Prenons par exemple une vitesse définie par $U_y = 0$ et $U_x(y)$. La divergence de cette vitesse comporte un terme $\partial_y U_x(y)$ non nul. Il doit donc nécessairement exister une composante verticale de vitesse qui va permettre de satisfaire la conservation de la masse. Notons u_z cette composante verticale de vitesse dans la couche d'Ekman. La conservation de la masse amène

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\,, \tag{A.12}$$

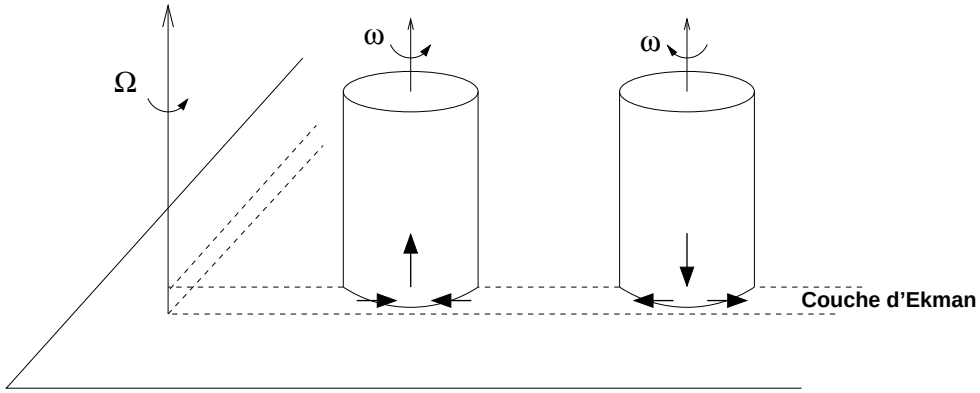

FIG. A.1: *Principe du pompage d'Ekman. L'écoulement secondaire sort (entre) de la couche d'Ekman pour un cyclone (resp. anticyclone).*

et en reportant les solutions (A.10) et (A.11) dans cette équation nous obtenons l'expression de cette composante verticale

$$u_z = \frac{1}{2}\omega\delta\left(1 - (\cos(z/\delta) + \sin(z/\delta))e^{-z/\delta}\right) , \tag{A.13}$$

$$\tag{A.14}$$

où ω est la composante verticale de la vorticité loin de la paroi ($\omega = \partial_x U_y - \partial_y U_x$).

On peut constater que la vitesse verticale ainsi déterminée est non nulle loin de la paroi (pour $z \to \infty$). La couche d'Ekman est donc une couche limite active qui introduit par le pompage d'Ekman une composante verticale d'ordre $E^{1/2}$ dans l'écoulement principal (loin de la paroi). Pour un écoulement principal à vorticité positive (cyclone), cet écoulement secondaire sort de la couche d'Ekman alors que pour un écoulement principal à vorticité négative (anticyclone) l'écoulement secondaire entre dans la couche d'Ekman (voir figure A.1).

Dans le cas sphérique, le principe est identique et il va exister aux deux extrémités des colonnes de convection une couche d'Ekman qui va injecter du fluide en haut et en bas des cyclones et en extraire en haut et en bas des anticyclones quasi-géostrophiques. On voit en intégrant le terme de pompage au système quasi-géostrophique (2.46) que dans les deux cas la couche d'Ekman sert bien à dissiper l'énergie de l'écoulement principal.

Annexe B

Calculs des dissipations visqueuses et magnétiques

Considérons les trois équations suivantes

$$E\left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt}-\Delta\mathbf{u}\right)+2\hat{z}\times\mathbf{u}+\nabla P=Ra\mathbf{r}T+\frac{1}{Pm}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}, \tag{B.1}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})+\frac{1}{Pm}\Delta\mathbf{B}, \tag{B.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\mathbf{u}\cdot\nabla T+\frac{1}{Pr}\Delta T. \tag{B.3}$$

Définissons la moyenne

$$<\cdot>=\frac{1}{V}\int_{\Omega}\cdot d\Omega. \tag{B.4}$$

En intégrant sur le domaine Ω (de volume V) le produit scalaire de (B.1) par $\mathbf{u}$, il vient

$$\underbrace{E<\frac{D\mathbf{u}}{Dt}\cdot\mathbf{u}>}_{=0}-E<\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u}>+2\underbrace{<(\hat{z}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}>}_{=0}+\underbrace{<\nabla P\cdot\mathbf{u}>}_{=0}$$

$$=Ra<\mathbf{r}T\cdot\mathbf{u}>+\frac{1}{Pm}<(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}>. \tag{B.5}$$

Nous considèrons un cas stationnaire et le terme non linéaire $<u^2\nabla\mathbf{u}>$ est égal d'après (D.32) à $<\mathbf{u}\cdot\nabla u^2>$ qui est nul d'après la formule de Green (D.33). Le premier terme de cette équation est donc nul. Le deuxième terme est nul pour une raison triviale et le troisième l'est d'après (D.33). L'équation (B.5) se simplifie donc en

$$-E<\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u}>=Ra<T\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}>+\frac{1}{Pm}<\mathbf{u}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}>. \tag{B.6}$$

De même, on intègre sur le volume le produit scalaire de B.2 par $\mathbf{B}$

$$\underbrace{< \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} >}_{=0} =< \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) > + \frac{1}{Pm} < \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{B} > \ . \tag{B.7}$$

Le terme $< \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) >$ s'écrit

$$< (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) > + \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) dS \,, \tag{B.8}$$

d'après (D.36), avec $\partial\Omega$ la surface orientée du volume Ω.

D'après la formule du produit mixte, ce dernier terme s'écrit aussi

$$\frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) d\mathbf{S} \,. \tag{B.9}$$

Ce terme est nul car dans notre cas la vitesse au bord est nulle.
D'après la formule du produit mixte on a aussi l'égalité

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \,. \tag{B.10}$$

On peut donc réécrire l'équation (B.6) comme

$$Ra < T\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} >= -E < \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} > - \frac{1}{Pm^2} < \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{B} > \,. \tag{B.11}$$

Cette équation n'est autre que l'équilibre entre l'énergie produite par la force d'Archimède (terme source) et l'énergie dissipée par effet visqueux et effet Joules (termes puits).

Annexe C

Influence des conditions aux limites magnétiques sur le Benchmark de la dynamo sphérique

Le benchmark numérique, initié par U. Christensen [19], a consisté à tester sur quelques cas simples la convergence des calculs dynamos produits par les programmes de différentes équipes. Les conditions aux limites utilisées par les auteurs sont de non-glissement pour la vitesse et une température imposée aux deux bords. Pour les conditions aux limites magnétiques, deux cas ont été testés.

Le premier (cas 1) utilise des conditions aux limites isolantes aux deux bords et le second (cas 2), plus complexe puisqu'il faut calculer les couples visqueux et magnétique sur la graine, utilise une graine conductrice libre de tourner par rapport à la frontière extérieure. Les paramètres utilisés sont les suivants $E = 10^{-3}$, $Ra = 100$ (110 pour le cas 2), $Pr = 1$ et $Pm = 5$. Pour le cas 1, un nombre de Rayleigh de 100 est très proche de la limite inférieure ($\simeq 99$) pour laquelle une action dynamo est obtenue.

Nous avons ajouté à ces deux cas (graine conductrice et isolante) le cas d'un champ magnétique purement radial à l'une ou aux deux frontières (qui pourrait correspondre à un milieu externe de perméabilité magnétique infini). Ce dernier cas n'est pas pertinent pour la Terre mais peut-être utile aux dynamos expérimentales. En effet, il a été montré dans un cas analytique simple [46] que ces conditions aux limites favorisent l'action dynamo en tendant à canaliser les lignes de champ. Ces trois cas nous permettent de tenter d'évaluer l'influence des conditions aux limites magnétiques sur le champ magnétique dans une configuration simple où l'énergie magnétique est constante. Nos résultats sont résumés dans le tableau C.1.

A des fins de comparaison avec les autres résultats du chapitre relatif à la bifurcation dynamo (exprimés en énergie non normalisée par le volume de la coquille fluide), il est à noter que le tableau C.1 présente des énergies volumiques ($\mathcal{E}$).

Les dissipations volumiques visqueuse et magnétique (cf. annexe B pour un calcul)

vérifient l'égalité suivante en régime permanent

$$Ra < T\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} >= -E < \mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{u} > -\frac{1}{Pm^2} < \mathbf{B} \cdot \Delta\mathbf{B} > , \tag{C.1}$$

où $< \cdot >$ indique une moyenne sur le volume de la coquille fluide.

Cette équation n'est autre que l'équilibre entre l'énergie produite par la force d'Archimède (terme source) et les énergies dissipées par effet visqueux et effet Joules (termes puits). Notons que cette équation n'est valable que dans un cas stationnaire, ce qui est bien le cas pour les paramètres adoptés. Pour vérifier cette égalité dans le tableau C.1, il faut diviser la dissipation volumique magnétique par $Pm = 5$.

conditions aux limites	$\mathcal{E}_{\text{mag}}$	$\mathcal{E}_{\text{cin}}$	dissipation visqueuse	dissipation magnétique	poussée d'archimède
B harmonique aux 2 bords	623.20	30.64	-6.90	-50.10	16.85
B radial à la CMB	787.61	34.41	-5.56	-47.96	15.08
B radial aux 2 bords	222.21	40.51	-7.29	-26.04	12.47

TAB. C.1: *Energie volumique magnétique et cinétique, et dissipation visqueuse, magnétique et force d'Archimède obtenues pour $E = 10^{-3}$, $Ra = 100$, $Pr = 1$ et $Pm = 5$. Les conditions aux limites adoptées sont celles d'un champ potentiel ou un champ purement radial, à l'une ou aux deux frontières. Pour vérifier l'équilibre, entre l'énergie produite par la force d'Archimède et les énergies dissipées par effet visqueux et effet Joules, il faut diviser la dissipation volumique magnétique par $Pm = 5$.*

Comme prévu par [46], l'adoption d'un champ purement radial (ici à la CMB) comme condition aux limites magnétiques semble favoriser l'action dynamo puisque l'on obtient une énergie magnétique plus importante que dans le cas isolant (B harmonique) ainsi qu'une dissipation magnétique moindre.

Il ne faut cependant pas tirer de conclusions trop rapides. En effet, si on impose maintenant un champ magnétique purement radial aux deux frontières, on obtient alors une énergie magnétique moins importante que dans les deux cas précédents. En pratique, en initialisant le calcul avec les conditions initiales prescrites par le benchmark, comme pour les deux cas précédents, nous avons tout d'abord perdu l'effet dynamo. Il nous a fallu effectuer le calcul à un nombre de Prandtl magnétique plus important (diffusion magnétique moindre) pour pouvoir maintenir un champ magnétique par effet dynamo. Une fois cette solution obtenue, nous avons pu redescendre le nombre de Prandtl magnétique à la valeur qui nous intéressait. Nous avons ainsi pu produire une dynamo avec ces conditions aux limites magnétiques. Ceci indique que la géométrie du champ obtenu dans le cas B purement radial aux deux bords doit être sensiblement différente de celle des cas précédents.

Une étude expérimentale menée à Riga (voir par exemple [30]) a permis de constater que la présence de paroi de même conductivité que le fluide peut être avantageux pour la

dynamo. Ceci ne semble pas être le cas ici puisque il a fallu, aux auteurs du benchmark, augmenter le nombre de Rayleigh dans le cas d'une graine conductrice pour compenser la diffusion dans la graine [65]. Dans ce cas de graine conductrice, l'adoption de conditions aux limites magnétiques purement radiale à la CMB mène à la perte de l'action dynamo.

Nous ne pouvons donc pas proposer de conclusion générale sur l'action de conditions aux limites magnétiques. Un champ purement radial à la CMB semble aider ou inhiber l'action dynamo selon les cas. Afin de déterminer plus précisément leur rôle, il serait nécessaire d'effectuer une étude complète de la bifurcation dynamo avec ces conditions aux limites. Nous présentons dans le chapitre sur la bifurcation dynamo une telle étude de transition dans le cas de conditions aux limites magnétiques isolantes. Il pourrait également être souhaitable de faire varier la perméablilité des frontières de manière continue comme cela a été fait dans l'étude menée par R. Avalos-Zuniga, F. Plunian et A. Gailitis sur l'influence des conditions aux limites magnétiques sur le seuil de l'action dynamo dans les expériences de Riga et Karlsruhe [5].

Annexe D

Formules d'identités vectorielles

Coordonnées cartésiennes

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{D.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{D.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} = \left[\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right] \mathbf{e}_x + \left[\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right] \mathbf{e}_y + \left[\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right] \mathbf{e}_z \tag{D.3}$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{D.4}$$

$$\Delta\mathbf{V} = [\Delta V_x]\ \mathbf{e}_x + [\Delta V_y]\ \mathbf{e}_y + [\Delta V_z]\ \mathbf{e}_z \tag{D.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{D.6}$$

Coordonnées cylindriques

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial s}\mathbf{e}_s + \frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{D.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sV_s\right) + \frac{1}{s}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{D.8}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}\right]\mathbf{e}_s \tag{D.9}$$

$$+\left[\frac{\partial V_s}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial s}\right]\mathbf{e}_\phi \tag{D.10}$$

$$+\left[\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\,V_\phi\right) - \frac{1}{s}\frac{\partial V_s}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_z \tag{D.11}$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{D.12}$$

$$\Delta\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}\right) - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V} \tag{D.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_s}{\partial s} & \frac{1}{s}\frac{\partial V_s}{\partial\phi} - \frac{V_\phi}{s} & \frac{\partial V_s}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\phi}{\partial s} & \frac{1}{s}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + \frac{V_s}{s} & \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial s} & \frac{1}{s}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{D.14}$$

Coordonnées sphériques

$$\boldsymbol{\nabla}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi \tag{D.15}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,V_r\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,V_\theta\right) + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \tag{D.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,V_\phi\right) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi}\right]\mathbf{e}_r \tag{D.17}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,V_\phi\right)\right]\mathbf{e}_\theta \tag{D.18}$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,V_\theta\right) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\phi \tag{D.19}$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \phi^2} \tag{D.20}$$

$$L_2\,\Phi = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \phi^2} \tag{D.21}$$

$$\Delta\mathbf{V} = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}\right) - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V} \tag{D.22}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} - \dfrac{V_\theta}{r} & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V_r}{\partial \phi} - \dfrac{V_\phi}{r} \\ \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{V_r}{r} & \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\left(\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \phi} - V_\phi\cos\theta\right) \\ \dfrac{\partial V_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_\phi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\left(\dfrac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + V_r\,\sin\theta + V_\theta\,\cos\theta\right) \end{bmatrix} \tag{D.23}$$

Identités vectorielles

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V})=0 \tag{D.24}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V})-\Delta\mathbf{V} \tag{D.25}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\Phi)=\Delta\,\Phi \tag{D.26}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\Phi)=\mathbf{0} \tag{D.27}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\Phi\mathbf{V})=\Phi\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi \tag{D.28}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\Phi\mathbf{V})=\Phi\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}+(\boldsymbol{\nabla}\Phi)\wedge\mathbf{V} \tag{D.29}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{V}_1\wedge\mathbf{V}_2)=\mathbf{V}_2\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}_1)-\mathbf{V}_1\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}_2) \tag{D.30}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{V}_1\wedge\mathbf{V}_2)=&\mathbf{V}_1\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}_2)-\mathbf{V}_2\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}_1)\\&+(\mathbf{V}_2\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}_1-(\mathbf{V}_1\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}_2\end{aligned} \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\,(\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2)=&\mathbf{V}_1\wedge(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}_2)+\mathbf{V}_2\wedge(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}_1)\\&+(\mathbf{V}_1\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V}_2+(\mathbf{V}_2\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V}_1\end{aligned} \tag{D.32}$$

Formules de Green

$$\int_{\mathcal{V}}((\boldsymbol{\nabla}\Phi)\cdot\mathbf{V}+\Phi(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}))\,\mathrm{dV}=\int_{\partial\mathcal{V}}\Phi(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{dS} \tag{D.33}$$

$$\int_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\nabla}\Phi_1\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi_2+\Phi_1\Delta\Phi_2)\,\mathrm{dV}=\int_{\partial\mathcal{V}}\Phi_1\boldsymbol{\nabla}\Phi_2\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{D.34}$$

$$\int_{\mathcal{V}}(\Phi_1\Delta\Phi_2-\Phi_2\Delta\Phi_1)\,\mathrm{d}V=\int_{\partial\mathcal{V}}(\Phi_1\boldsymbol{\nabla}\Phi_2-\Phi_2\boldsymbol{\nabla}\Phi_1)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{D.35}$$

$$\int_{\mathcal{V}}(\mathbf{V}_1\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}2)-(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}_1)\cdot\mathbf{V}2)\,\mathrm{dV}=\int_{\partial\mathcal{V}}(\mathbf{V}_1\wedge\mathbf{n})\cdot\mathbf{V}_2\,\mathrm{dS} \tag{D.36}$$

Annexe E

Morin & Dormy, Time dependant β-convection in rapidly rotating spherical shells Physics of Fluid, 16, 1603–1609 (2004).

PHYSICS OF FLUIDS VOLUME 16, NUMBER 5 MAY 2004

Time dependent β-convection in rapidly rotating spherical shells

V. Morin and E. Dormy[a)]
Institut de physique du globe de Paris, 75252 Paris, France

(Received 13 June 2003; accepted 17 February 2004; published online 6 April 2004)

A quasi-geostrophic, or β, model of nonlinear thermal convection in rapidly rotating spherical fluid shells is investigated. We study time dependent instabilities for a range of Rayleigh number and Ekman number with a Prandtl number set to the unity. Above the onset of convection, increasing the Rayleigh number for a given Ekman number, we reproduce the sequence of bifurcations described by Busse [Phys. Fluids **14**, 1301 (2002)] for the three-dimensional case: A first transition results in vacillating flow; a second transition gives rise to chaotic oscillations in time and localized convection in space; then a third leads to quasi-periodic relaxation oscillations. This study shows that the quasigeostrophic model encompasses the desired bifurcation sequence. It allows the investigation of a range of Ekman numbers unavailable to three-dimensional models with present computing resources. Decreasing the Ekman number, we unexpectedly found that all three transitions occur for marginally supercritical Rayleigh number. The range of Rayleigh number for which the amplitude of convection is steady vanishes in the asymptotic limit of small Ekman numbers. This effect could significantly alter the nature of the instability characterizing the onset of convection in particular whether it is a supercritical or subcritical bifurcation. © *2004 American Institute of Physics.* [DOI: 10.1063/1.1703530]

I. INTRODUCTION

Convection in rotating spherical fluid shells is an important problem when seeking to understand of magnetic field generation by self-excited dynamo action in planetary interiors. While this hydrodynamic problem is considerably simpler than the full magnetohydrodynamic scenario, the rapid rotation of these natural objects means realistic modeling is still challenging, even close to the onset. The full description of the linear instability has only been obtained recently,[1] elucidating the issue of the variation of phase velocity with the radius (phase mixing or Taylor diffusion) raised earlier[2] concerning the local treatment of the instability.[3] However, several important issues remain unresolved. In particular, the effects of nonlinearities are expected to counteract phase mixing, and yield a subcritical bifurcation,[2] while numerical simulations have always produced supercritical bifurcations.[4,5]

To study convection in rapidly rotating systems, Busse[3] introduced an annulus model. This model took into account the dominant role of rotation (Taylor–Proudmann theorem) to reduce the problem from three dimensions to two, and used the small gap approximation to further simplify the model. Or and Busse[6,7] modified this two-dimensional approach by introducing parabolic boundaries and thus phase mixing. They studied vacillating oscillations which appear when the Rayleigh number is increased for a fixed and moderate Ekman number. Chen and Zhang,[9] with a two-dimensional model similar to Refs. 6 and 7 but in a finite gap configuration, studied vacillating and chaotic oscillations varying the aspect ratio.

Yano demonstrated analytically[10] that the phase mixing issue can be resolved in a modified version of the cylindrical Busse annulus[3] taking into account the curvature of the boundaries which are essential to phase mixing. Using this configuration he resolved the linear instability problem.

In the light of this earlier work, we propose to use a simplified two-dimensionnal numerical model to study the possible existence of a subcritical bifurcation for the onset of convection. We first describe the sequence of bifurcations which occurs in the nonlinear domain and compare it with the one investigated by Busse and Grote[8] with a fully three-dimensional model in a spherical geometry. Our model is based on the quasi-geostrophic approximation and has spherical boundaries. It is used to obtain insight on the full three-dimensional problem. Since the quasi-geostrophic model is reduced to two dimensions it involves a less demanding numerical integration, and thus allows a larger parameter space survey.

After presenting the quasi-geostrophic model in Sec. II, linear results are detailed in Sec. III A and the results of nonlinear convection are presented in Sec. III B. This is followed by a discussion in Sec. IV.

II. QUASI-GEOSTROPHIC MODEL

We consider motions driven by buoyancy in a rotating spherical shell (i.e., the domain between two concentric spheres) with a uniform distribution of internal heat sources. The rotation rate is Ω, ν is the kinematic diffusivity, κ is the thermal diffusivity, and α the coefficient of thermal expansion. The gravity field is assumed to be $-g\boldsymbol{r}$ which corresponds to a self-gravitating sphere. We introduce θ as the

[a)]Present address: CNRS/UMR8550, Departement de Physique, Ecole Normale Superieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France; electronic mail: dormy@lps.ens.fr

 © 2004 American Institute of Physics

deviation from the basic temperature profile of pure conduction: $T_s = T_0 - \tilde{\beta} r^2/2$. The temperature gradient in the absence of convection is thus $-\tilde{\beta} r$.

We define the unit of time to be r_o^2/ν, the unit of length being the outer sphere radius r_o, and the unit of temperature $\tilde{\beta} r_o^2 \nu/\kappa$. We introduced the following dimensionless parameters:

$$E = \frac{\nu}{2\Omega r_o^2}, \quad Ra = \frac{\alpha\beta g r_o^6}{\nu\kappa}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \tag{1}$$

namely the Ekman number, Rayleigh number, and Prandtl number. The equations of motions (Navier–Stokes) and continuity under the Boussinesq approximation are then

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + Ra\,\theta\boldsymbol{r} - \nabla\Pi + \Delta\boldsymbol{u} - E^{-1}(\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{u}), \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0. \tag{3}$$

While the temperature perturbation equation is

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\theta + Pr^{-1}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} + \Delta\theta). \tag{4}$$

Introducing the axial component of vorticity as ζ, and taking the z-component of the curl of (2), one obtains after averaging in z and neglecting $\overline{\zeta\partial_z u_z}$

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial t} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\bar{\zeta} - Ra\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\varphi} + \Delta\bar{\zeta} + \frac{E^{-1}}{2H}[u_z]_{-H}^{H}, \tag{5}$$

where $\bar{\zeta} = (1/2H)\int_{-H}^{H}\zeta\, dz$ (H being the half height of a convection column). Following on the cylindrical model of Busse[3] and thus neglecting the z variations of the horizontal component of the velocity, the flow is now assumed to be quasi-geostrophic. Using cylindrical coordinates, this corresponds to approximating both u_s and u_φ with functions that are independent of z, and thus $\bar{\zeta} = \zeta$, while the z variation of u_z obviously cannot be neglected. This implies that the necessary dependance of u_z on z is approximated by a linear variation to satisfy the continuity equation. This approximation can clearly not be fully justified in the case of curved boundaries. It is, however, found to yield remarkably precise results in good agreements with experiments (e.g., Ref. 11). Using the nonpenetration condition at the boundaries, (5) becomes

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\zeta - Ra\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\varphi} + \Delta\zeta - E^{-1}\frac{s}{1-s^2}u_s. \tag{6}$$

Note that this equation, once linearized, is nothing more than Eq. (4.5) in Ref. 3. This includes the last term which is equivalent to the β-plane effect used in meteorology. It accounts for the effect of vortex tube stretching (and shortening) as one moves toward (away) the axis of rotation. This equation can be expressed in terms of stream function ($\boldsymbol{u} = 1/s\,\partial_\varphi\psi\boldsymbol{e}_s - \partial_s\psi\boldsymbol{e}_\varphi$), under the assumption of small vertical variations. Vanishing normal velocity implies that ψ is constant on each boundary, and because ψ is defined to an arbitrary constant, it can be set to zero in the case of a simply connected domain. This is however not the case for our shell geometry. For this reason, and to avoid driving a zonal flow by an erroneous mean pressure gradient (see Ref. 12 for discussion), we write a separate equation for the ϕ-averaged zonal velocity (henceforth denoted by a 0 subscript). All other modes are expressed in terms of the stream function ψ. Taking the z average of equation (4) and neglecting the terms $\overline{u_z\partial_z\theta}$ and $\overline{zu_z}$, one obtains the resulting system of equations:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\Delta\psi = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\Delta\psi + \frac{E^{-1}}{1-s^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + Ra\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial\varphi},$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\right)\bar{u}_0 = -(\overline{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_\varphi})_0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - Pr^{-1}\Delta\right)\bar{\theta} = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\bar{\theta} + Pr^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}. \tag{7}$$

The temperature perturbation vanishes at each boundary,

$$\theta = 0, \tag{8}$$

while the velocity satisfies either no-slip or stress-free boundary conditions, respectively,

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial s} = u_0 = 0 \tag{9}$$

and

$$\psi = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u_0}{s}\right) = 0. \tag{10}$$

The Prandtl number is here set to unity, and the aspect ratio r_o/r_i is fixed to 0.35 for geophysical relevance. This system corresponds to a modification of the one introduced by Busse[3] for a cylindrical annulus and was also used with a different heating mode, and very far from onset by Aubert *et al.*[11] A similar approach has been used by Or and Busse,[6,7] and Chen and Zhang[9] where they used the annulus model[3] with a first order Taylor expansion of the boundary, but with a finite gap for Ref. 9. They have investigated vacillating oscillations[6,7,9] and chaotic convection.[9] Chen and Zhang[9] have also studied the effect of varying the aspect ratio for a given Ekman number.

The set of equations (7) was discretized in Fourier modes in the azimuthal direction, and with a finite differences method on stretched grids in the radial direction. Diffusion terms, as well as the Coriolis term, were time stepped with a Crank–Nicholson scheme. The nonlinearity and coupling terms were computed with a second order Adams–Bashford scheme. We used two different approaches for evaluating these terms. The first approach consisted in evaluating these terms in physical space using a fast Fourier transform, the second consisted of evaluating explicit mode coupling in the spectral space, and was restricted to two modes only, the mode $m=0$ and the critical mode m_c. Our numerical code was successfully benchmarked against the independently written code of Aubert *et al.*[11]

TABLE I. Critical parameters for the onset of convection in the quasi-geostrophic model (Pr=1).

E	m_c	Ra_c	ω_c	$m_cE^{1/3}$	$Ra_cE^{4/3}$	$\omega_cE^{2/3}$
			No-Slip			
10^{-4}	7	$6.024\cdot10^5$	272.48	0.325	2.80	0.587
10^{-5}	13	$1.091\cdot10^7$	1179.2	0.280	2.35	0.547
10^{-6}	23	$2.206\cdot10^8$	4967.8	0.230	2.20	0.497
10^{-7}	56	$4.690\cdot10^9$	24571	0.260	2.18	0.529
10^{-8}	122	$9.958\cdot10^{10}$	114185	0.263	2.15	0.530
			Stress-free			
10^{-4}	7	$5.961\cdot10^5$	268.50	0.325	2.77	0.578
10^{-5}	12	$1.086\cdot10^7$	1134.4	0.258	2.34	0.526
10^{-6}	22	$2.215\cdot10^8$	4856.4	0.220	2.21	0.485
10^{-7}	56	$4.690\cdot10^9$	24573	0.260	2.18	0.529
10^{-8}	122	$9.914\cdot10^{10}$	113510	0.263	2.14	0.527

III. ONSET OF CONVECTION AND NONLINEAR REGIME

A. Linear results

To study the onset of convection, we timestep the linearized system (for which the azimuthal modes m are decoupled) until we reach an exponentially growing solution. The critical parameters are obtained through linear interpolation of the growth rate very near the onset (see Ref. 13 for further discussions of this approach). It is to be noted that our linear results are also relevant for a full sphere provided E is small enough (see Ref. 13 for a discussion of the role of the inner core on the onset of convection), this will, however, not be the case in the nonlinear regime because the zonal flow occupies the full domain and is thus affected by the inner body. The onset of convection occurs through a Hopf bifurcation.[3] The imaginary part of the eigenvalue corresponds to the drift rate of the thermal Rossby waves. The critical parameters (unstable mode m_c, Rayleigh number Ra_c, and drift rate ω_c) obtained for our model for both sets of boundary conditions (no-slip and stress-free) are reported in Table I. These results validate the classical asymptotic scalings[3,14] $m_c \propto E^{-1/3}$, $Ra_c \propto E^{-4/3}$, and $\omega_c \propto E^{-2/3}$. We have also checked that the resulting eigenfunctions qualitatively follow the theoretical description of Jones *et al.*[1] (i.e., a Gaussian envelope of scaling $E^{1/6}$ with oscillations of the real and imaginary part of the eigenfunction scaling as $E^{1/3}$), thus demonstrating that phase mixing also occurs for this reduced system, and that the linear solution discussed here is best described in terms of global instability.

B. Nonlinear behavior

1. Fully nonlinear results

Let us first describe the sequence of bifurcations obtained with our two-dimensional model using the fast Fourier transform algorithm. Busse and Grote[8,15,16] describe, with fully three-dimensional simulations and stress free boundary conditions, the consecutive transitions which occur as the Rayleigh number is increased above the onset of convection for a given Ekman number ($E=10^{-4}$ in their case). The first step in the series of transitions is referred to as vacillating oscillations (see Ref. 17 for three-dimensional problems, and Refs. 18 and 19 for two-dimensional cylindrical models). It corresponds to a sinusoidal oscillation in time of the kinetic energy. The azimuthal periodicity of the pattern is conserved, but an oscillation of the shape of the convective region develops. Busse[16] has noticed, by plotting the Nusselt number as a function of Rayleigh number, that the energy dissipation is enhanced through this bifurcation. Several modes become unstable as the Rayleigh number increases. Figure 1 presents oscillations of the kinetic energy, obtained with the quasigeostrophic model for such a parameter regime. This instability is observed with both no-slip and stress-free boundary conditions. The precise value of the control parameter for which this transition occurs depends on the boundary conditions (just as the critical parameters of Table I). The parameters used for Fig. 1 correspond to the lowest values of the Ray-

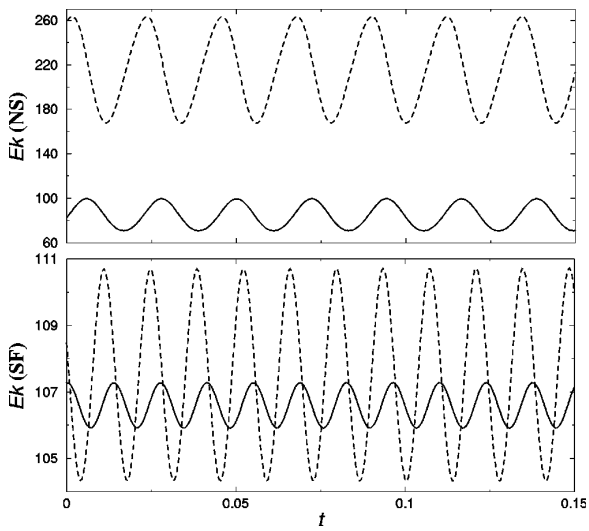

FIG. 1. Time oscillations of the kinetic energy for $E=10^{-5}$, $Pr=1$, and $Ra=1.4\times Ra_c$, with no-slip boundary conditions (top graph), and $Ra=1.34\times Ra_c$, with stress-free boundary conditions (bottom graph). This parameter regime corresponds to vacillating oscillations. The energy of the sum of all nonaxisymmetric modes (Ek') is represented by a dashed line, and the energy of mode $m=0$ (Ek_0) by a solid line. The unit of time is the viscous time scale.

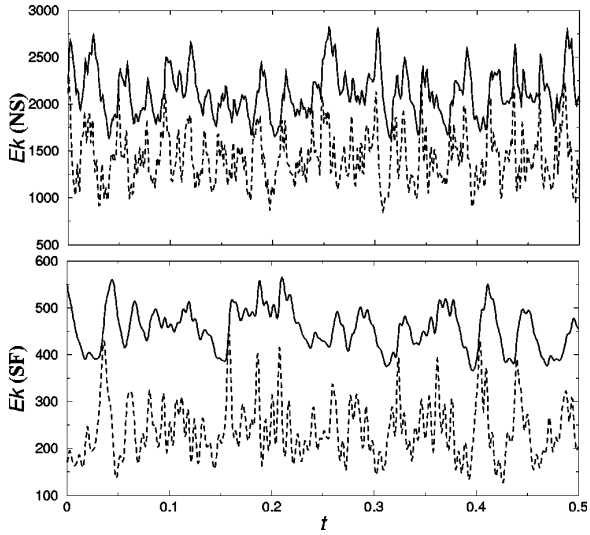

FIG. 2. Time dependent oscillations of the kinetic energy for $E=10^{-5}$, $Pr=1$, and $Ra=2\times Ra_c$, with no-slip boundary conditions (top graph), and $Ra=1.6\times Ra_c$, with stress-free boundary conditions (bottom graph). This parameter regime corresponds to a chaotic time dependence, periodicity is lost. The energy of sum of all nonaxisymmetric mode (Ek') is represented by a dashed line, and the energy of mode $m=0$ (Ek_0) by a solid line. The unit of time is the viscous time scale.

FIG. 3. Isovalues of ψ for $E=10^{-5}$, $Ra=2\times Ra_c$, $Pr=1$, with no-slip boundary conditions. This graph corresponds to chaotic oscillations, the azimuthal periodicity of the pattern is no longer preserved. Patterns of convection are localized by the shearing action of the zonal flow.

leigh number for which a time dependent amplitude was observed. The kinetic energy, Ek, of the horizontal flow has been calculated as the integral over the domain of $(u_s^2+u_\varphi^2)$, the velocity being expressed in units of ν/r_o. This can be separated in two contributions, the energy of the mean zonal flow, Ek_0, which is the integral of $\bar{u}_0$, and the nonaxisymetric energy, Ek', which is the integral of $((1/s\partial_\varphi\psi)^2+(\partial_s\psi)^2)$. The sequence of bifurcations obtained with this model compares extremely well with the earlier three-dimensional results of Busse *et al.*, although the actual values of the parameters for transitions to occur necessarily differ in this reduced model from the full three-dimensional numerical simulations.[8,15,16] When increasing the Rayleigh number, period doubling occurs, as in the three-dimensional study of Ref. 8.

Chen *et al.* have investigated the sequence of bifurcations described by[8,15,16] with their two-dimensional model using no-slip boundary conditions. They have reproduced the first two steps of this sequence, i.e., the vacillating oscillations and chaotic oscillations however they report no indication of the relaxation oscillations, which is consistent with our simulations for a comparable parameter regime. They have investigated the details of the successive transitions in between these bifurcations. They report up to nine transitions which are characterized by enlarging the spatial scale of the convection. We have obtained similar results with our largest Ekman number, but the details of the transition scenario are highly dependent of the Ekman number. A similar enlarging of the spatial scale (i.e., decrease in the dominant wavenumber m) has been observed in our simulations for large enough values of the Ekman number.

Increasing the Rayleigh number further, the azimuthal periodicity of the solution is conserved, but the zonal flow increases in magnitude and strongly shears the convective region. This tends to split the convective cells into a inner and outer ring.

As in Refs. 8, 15, and 16, with a further increase in Rayleigh number, a new bifurcation occurs which is characterized by chaotic oscillations in time of the kinetic energy of the system (see Fig. 2). The azimuthal periodicity of the pattern is no longer preserved and the shearing action of the zonal flow becomes so strong that the convection structures tend to concentrate in a reduced part of the shell. This localized convection is illustrated on Fig. 3.

At higher Rayleigh number, a new transition occurs in the form of quasi-periodic relaxation oscillations in time of the kinetic energy, as pointed out by Grote *et al.*[15] with their three-dimensional model. Spatial periodicity is, however, not recovered. This quasi-periodic relaxation (fairly similar to that observed in zero Prandtl number convection[20]) is due to the presence of a strong zonal shear.[21] As the shear becomes dominant, the convection decays. Eventually, the zonal flow is not sustained anymore, and is suppressed by viscous dissipation. Convection can then restart, and this process repeats almost periodically. The same transition is reproduced with our two dimensional model (see Fig. 4). The effect of boundary conditions is particularly important for this transition as it strongly affects the period of the relaxation oscillations. As convection is suppressed, the mean zonal flow decays by diffusion. It is well known that no-slip boundary conditions will lead to a faster decrease than stress-free (since the zonal flow then vanishes at the boudaries). This is here characterized by a much shorter period of oscillation with no-slip boundary conditions (see also Fig. 8). The period becomes less regular as the Rayleigh number is increased. The energy of the nonaxisymetric modes varies over a range of modes in a time dependent manner.

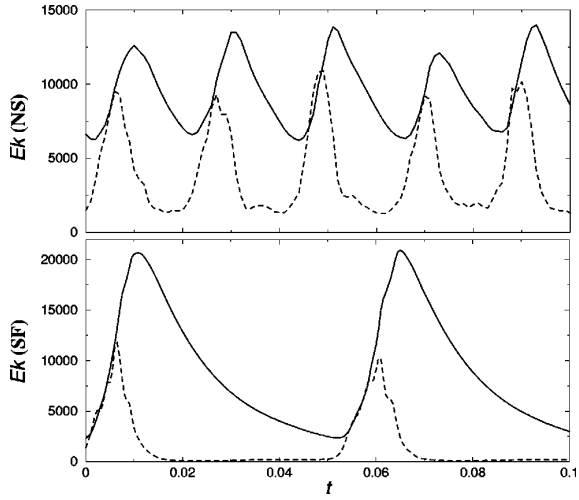

FIG. 4. Time oscillations of the kinetic energy for $E=10^{-5}$, $Pr=1$, and $Ra=3\times Ra_c$, with no-slip boundary conditions (top graph), and $Ra=2.6\times Ra_c$, with stress-free boundary conditions (bottom graph). This parameter regime corresponds to relaxation oscillations. The energy of sum of nonaxisymmetric (Ek') mode is represented by a dashed line and the energy of mode $m=0$ (scaled by 0.5 for top graph) by a solid line. The unit of time is the viscous time scale.

2. Explicit mode coupling results

We have also produced a sequence of bifurcations with a less demanding numerical approach which employs an explicit mode coupling in the spectral domain. This weakly nonlinear model was severely truncated by only computing two modes (the critical mode and the mode $m=0$). Vacillating oscillations are represented on Fig. 5 with no-slip boundary conditions, they appear for a range of Rayleigh number extremely close to that found using much higher spectral resolution and the fast Fourier transform algorithm. This approximation is classical, and well justified for the investigation of nonlinearities very close to the onset. As one applies this approximation further away from the critical value of the Rayleigh number, it becomes less strongly justified, and can only yield qualitative information on the dynamics. For example, while the time dependence is very well reproduced by this model on Fig. 5, comparison with Fig. 1 reveals that the energies differ by a factor of two. This only high-lights the limitations of this very severely truncated model in providing more quantitative informations on the full dynamics.

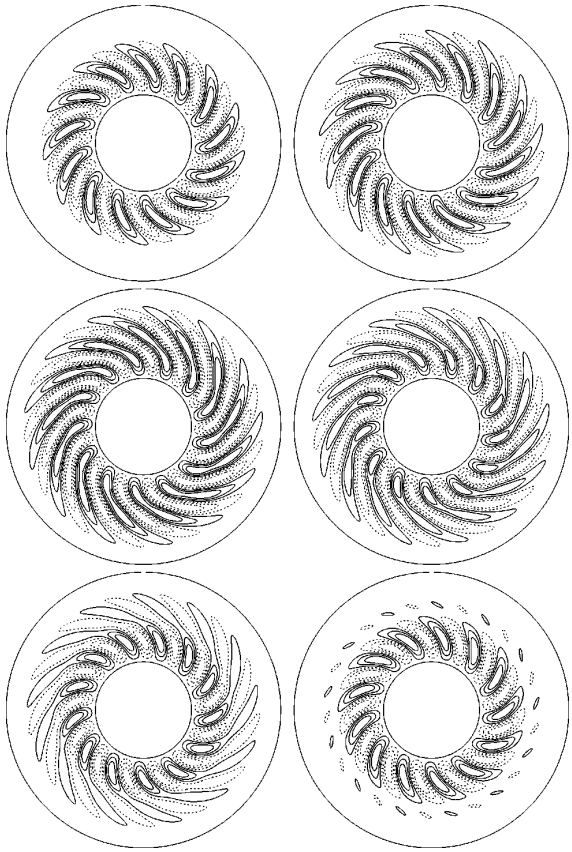

FIG. 6. Isovalues of ψ for vacillating oscillations for $E=10^{-5}$, $Ra=1.45\times Ra_c$, and $Pr=1$ (solid line for positive values of ψ, dashed for negative), with no-slip boundary conditions and explicit mode coupling. The graphs are equally spaced in time (from left to right and top to bottom). The time interval between consequetive graphs is 10^{-3} U.T. These six graphs cover a full period of the vacillation process.

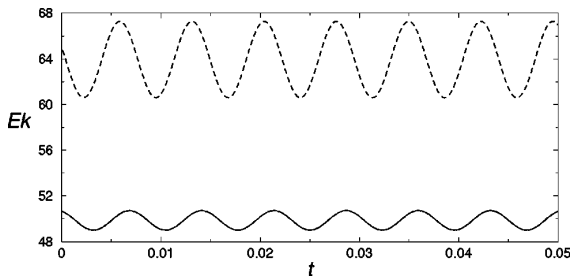

FIG. 5. Time oscillations of the kinetic energy for $E=10^{-5}$, $Ra=1.41\times Ra_c$, and $Pr=1$, with no-slip boundary conditions and explicit mode coupling. This parameter regime corresponds to vacillating oscillations. The energy of critical mode (Ek') is represented by a dashed line (it has been scaled by 0.4 for this graph), and the energy of mode $m=0$ (Ek_0) with solid line. The unit of time is the viscous time scale.

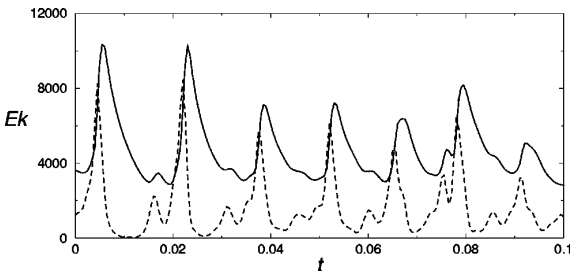

FIG. 7. Time oscillations of the kinetic energy for $E=10^{-5}$, $Ra=2.5\times Ra_c$, and $Pr=1$, with no-slip boundary conditions and explicit mode coupling. This parameter regime corresponds to relaxation oscillations. The energy of critical mode (Ek') is represented by a dashed line, and the energy of mode $m=0$ (Ek_0) by a solid line. The unit of time is the viscous time scale.

TABLE II. Critical parameters for the onset of vacillating flows (obtained with the explicit mode coupling method).

E	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
	No-Slip		
$(Ra_{c_2}/Ra_c)-1$	0.41	0.25	0.01
	Stress-free		
$(Ra_{c_2}/Ra_c)-1$	0.44	0.29	0.01

The shearing action of the zonal flow is also well captured by this mode coupling approach (see, for example, Fig. 6) showing that all relevant physical ingredients remain present.

Chaotic oscillations and localized convection cannot, however, be reproduced with this approach since they require more complicated mode interactions. Relaxation oscillations are on the other hand obtained with this two-modes approach (e.g., Fig. 7 with no-slip boundary conditions). The threshold for this instability is, however, strongly affected by the severe truncation of such models. We will rely on this less demanding approach in the following sections.

3. Low Ekman number limit

The main advantage of the two-dimensional approach is that it enables us to investigate a wider range of parameters (the computing time is considerably reduced compared to three-dimensional simulations). We have investigated the onset of these solutions with time dependant behavior of the energy for decreasing Ekman numbers within the explicit mode coupling approach, with Prandtl number still set to the unity. Unexpectedly, this onset becomes closer to the onset of convection as the Ekman number is decreased. This applies to the entire sequence of bifurcations described previously. The onset for all of these time dependent instabilities converges towards the critical parameters for the onset of convection as the Ekman number decreases. Thus the range of Rayleigh number for which the convection is steady in amplitude vanishes for asymptotically small values of the Ekman number.

The values of the Rayleigh number for which the first solutions with time dependent energies are found are presented for both no-slip and stress-free boundary conditions in Table II. While the values reported in the table correspond to the first observation of a time dependent energy, for the lowest Ekman number, we directly obtained, for both sets of boundary conditions, the relaxation oscillations at a value of the Rayleigh number only 1% above critical.

Our results are expressed in terms of Ra/Ra_c, so that they are independent of the definition used for the Rayleigh number (even modified definitions such as RaE).

IV. DISCUSSION

In the graphs of Fig. 8, we show that for a given Ekman number the period of time oscillations of the kinetic energy decreases with increasing Rayleigh number. The growth rate increases as the Rayleigh number is pushed away from its critical value thus convection can recover before the zonal shear fully vanishes, resulting in a shortening of the relaxation oscillation period (see Fig. 8). As noted in Sec. III B 1, the zonal flow being much less constrained by stress-free boundary conditions, than no-slip boundary conditions, it decreases on a longer time scale, and the frequency of the relaxation oscillations at a given Rayleigh number is thus higher with the no-slip boundary conditions (see Fig. 8).

For all the investigated values of the Ekman number, we obtained only supercritical bifurcations for the onset of convection. Soward[2] demonstrated that for the original three-

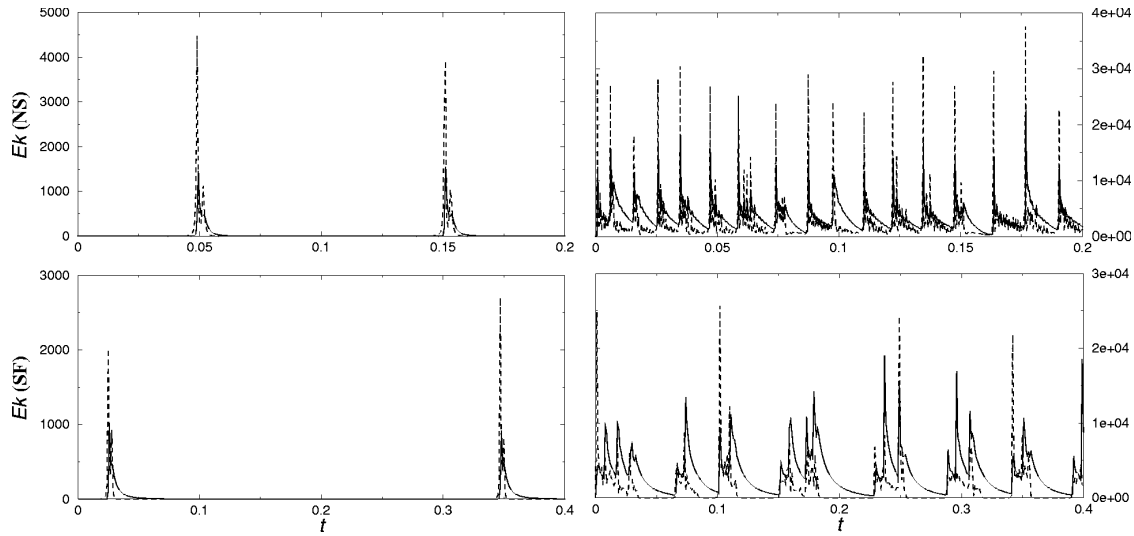

FIG. 8. Time oscillations of the kinetic energy for $E=10^{-7}$, $Pr=1$, on the left column $Ra=1.01\times Ra_c$, and on the right column $Ra=1.2\times Ra_c$. Results with no-slip boundary conditions are represented on the top graphs, and stress-free boundary conditions on the bottom graphs. This parameter regime yields relaxation oscillations. The energy of critical mode (Ek') is represented by a dashed line, and the energy of mode $m=0$ (Ek_0) by a solid line. The unit of time is the viscous time scale. Note that the range of time represented differs between both sets of boundary conditions.

dimensional (3D) problem, with rigid boundary conditions, the nonlinear effects would drive a zonal shear which could counter-act phase mixing and yield a subcritical bifurcation for the onset of convection. Like Chen *et al.*,[9] we have not observed any subcritical bifurcations despite the lower values of the Ekman number we have investigated. It is to be noted that the main nonlinearity invoked in Ref. 2 is the thermal wind, which is absent from our z-integrated simulations. The zonal flow in our simulations is driven by the Reynolds stress only. Furthermore the Ekman suction at the top and bottom of the columns was taken into account in Ref. 2, while neglected here. Despite the simplifications, the observation that the energy of convection can become time dependent extremely near the onset is an advance in our knowledge of the effects of the zonal flow of the asymptotic nature of the bifurcation associated with the onset of convection.

Relaxation oscillations in time evolve on typical time scales of fractions of the viscous diffusion time (decreasing fractions with increasing Rayleigh numbers). Similar relaxation oscillations but at much higher Rayleigh number and in a magnetohydrodynamic flow could suppress the convection in the Earth core (through the strong zonal shear) on a quasi-periodic basis. It is tempting to speculate, that relaxation oscillations modified by magnetic effects, could be related to the geomagnetic reversals occurring on Earth with a typical time scale of 100 kyr. This time scale, short compared to the viscous time scale, does not naturally appear from dimensional analysis. Relaxation oscillations are a good candidate to provide such time scales. A mechanism reducing the strength of convection would be compatible with the decrease in the geomagnetic field intensity observed between reversals.[22] Such relaxation oscillations in the magnetohydrodynamic regime, would clearly deserve further study.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Professor Andrew Soward, Professor Christopher Jones, and Steve Cole for helpful discussions in the course of this work. We are grateful to Dr. Julien Aubert for benchmarking our numerical code and to Christopher Finlay for many helpful corrections on an early version of this text. Numerical simulations were achieved on the IBM cluster at I.D.R.I.S., projects 30633, 40633.

[1]C. A. Jones, A. M. Soward, and A. I. Mussa, "The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere," J. Fluid Mech. **405**, 157 (2000).
[2]A. M. Soward, "On the finite amplitude thermal instability in a rapidly rotating fluid sphere," Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **9**, 19 (1977).
[3]F. H. Busse, "Thermal instabilities in rapidly rotating systems," J. Fluid Mech. **44**, 441 (1970).
[4]K. Zhang, "Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells," J. Fluid Mech. **236**, 535 (1992).
[5]M. R. E. Proctor, "Convection and magnetoconvection in a rapidly rotating sphere," *Lectures on Solar and Planetary dynamo* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994), p. 97.
[6]F. H. Busse and A. C. Or, "Convection in a rotating cylindrical annulus: Thermal Rossby waves," J. Fluid Mech. **166**, 173 (1986).
[7]A. C. Or and F. H. Busse, "Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 2. Transition to asymmetric and vacillating flow," J. Fluid Mech. **174**, 313 (1987).
[8]E. Grote, F. H. Busse, and R. Simitev, "Buoyancy Driven Convection in Rotating Spherical Shells and Its Dynamo Action," *High Performance Computing in Science and Engineering*, edited by E. Krause and W. Jäger (Springer-Verlag, New York, 2001).
[9]C. X. Chen and K. Zhang, "Nonlinear convection in a rotating annulus with a finite gap," Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **96**, 499 (2002).
[10]J.-I. Yano, "Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems," J. Fluid Mech. **243**, 103 (1992).
[11]J. Aubert, N. Gillet, and P. Cardin, "Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells," Geochem. Geophys. Geosyst. **4**, 1052 (2003).
[12]E. Plaut and F. H. Busse, "Low-Prandtl-number convection in a rotating cylindrical annulus," J. Fluid Mech. **464**, 345 (2002).
[13]E. Dormy, A. M. Soward, C. A. Jones, D. Jault, and P. Cardin, "The onset of thermal convection in rotating spherical shells," J. Fluid Mech. **501**, 43 (2004).
[14]P. H. Roberts, "On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources," Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **263**, 93 (1968).
[15]E. Grote and F. H. Busse, "Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells," Fluid Dyn. Res. **28**, 349 (2001).
[16]F. H. Busse, "Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamos action," Phys. Fluids **14**, 1301 (2002).
[17]K. Zhang, "Convection in a rapidly rotating spherical shell at infinite Prandtl number: Transition to vacillating flows," Phys. Earth Planet. Inter. **72**, 236 (1992).
[18]M. Schnaubelt and F. H. Busse, "Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 3. Vacillating and spatially modulated flows," J. Fluid Mech. **245**, 155 (1992).
[19]A. Abdulrahman, C. A. Jones, M. R. E. Proctor, and K. Julien, "Large wavenumber convection in the rotating annulus," Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **93**, 227 (2000).
[20]K. Kumar, S. Fauve, and O. Thual, "Critical self-tuning: The example of zero Prandtl number convection," J. Phys. II **6**, 945 (1996).
[21]N. Brummell and J. Hart, "High Rayleigh number β-convection," Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **68**, 85 (1993).
[22]J.-P. Valet and L. Meynadier, "Geomagnetic field intensity and reversals during the last four million years," Nature (London) **366**, 234 (1993).

Annexe F

Morin & Dormy, Dissipation mechanisms for convection in rapidly rotating spheres and the formation of banded structures. Soumis à Physics of Fluid.

Dissipation mechanisms for convection in rapidly rotating spheres and the formation of banded structures.

Vincent Morin[1] and Emmanuel Dormy[1,2]

(1) Institut de Physique du Globe de Paris, 75252 Paris, France, and

(2) L.P.S., Département de Physique, Ecole Normale Supérieure,

75231 Paris, France & C.N.R.S. France.

(Dated: October 12, 2005)

We report banded zonal structures in numerical simulations of weakly non-linear rapidly rotating convection. A quasi-geostrophic model of convection is used to demonstrate how, in the presence of Ekman pumping, banded structures can develop immediately above the onset of convection, and in the absence of developed turbulence. We show that these bands necessarily correspond to a regime in which both Ekman pumping and bulk viscosity equally affect the zonal flow and that their width scales with the Ekman number E as $E^{1/4}$.

PACS numbers: 47.27.Te, 47.20.Bp

We investigate the respective role of two dissipation mechanisms, bulk viscosity and Ekman friction, acting on weakly non-linear rapidly rotating convection. To make the problem tractable in a parameter regime of small Ekman numbers (low viscosity), we use a simplified approach relying on a z-integrated set of equations (known as quasi-geostrophic convection, or β-convection [1]). In a previous investigation using a similar approach [2], we have shown in the presence of bulk viscosity only, that as the Ekman number is decreased toward realistic values (which are presently out of reach of fully three dimensional modeling), the zonal flow gets increasingly important near the onset of convection. We have shown that from an asymptotic point of view, the zonal flow is strong enough to suppress convective motions on a quasi-periodic basis and to yield relaxation oscillations immediately above the onset [2].

In all studies of quasigeostrophic or fully three-dimensional convection, when only bulk viscosity is retained, the zonal flow near onset takes the form of a large "S" structure in radius, with two counter rotating bands (retrograde near the axis and prograde near the

equator). As the Rayleigh number is further increased above critical, the number of bands slowly increases [3].

Recently, Jones *et al.* [4] investigated the effect of dissipation in the viscous boundary layers. They used a fully nonlinear β-plan model. Introducing the effect of Ekman pumping, they were able to achieve a significantly higher number of bands (up to six on the β-plan) for a given Rayleigh number. The role of Ekman pumping in producing these jets still needs to be clarified, as well as the resulting balance between dissipation mechanisms

We consider motions driven by buoyancy in a rotating spherical shell with a uniform distribution of internal heat sources. The rotation rate is Ω, ν is the kinematic diffusivity of the fluid, κ is its thermal diffusivity, and α its coefficient of thermal expansion. The gravity field is assumed to be purely radial and corresponds to a self gravitating fluid: $-g\boldsymbol{r}$. We further introduce θ, the deviation from the basic temperature profile of pure conduction ($T_s = T_0 - \widetilde{\beta} r^2/2$), and $-\widetilde{\beta} r$ the temperature gradient in the absence of convection. Setting the unit of time to r_o^2/ν, the unit of length $\mathcal{L}$ to the outer sphere radius r_o, and the unit of temperature to $\widetilde{\beta} r_o^2 \nu/\kappa$, we introduce the following dimensionless parameters

$$E = \frac{\nu}{2\Omega r_o^2}\,, \qquad Ra = \frac{\alpha \widetilde{\beta} g r_o^6}{\nu\kappa}\,, \qquad Pr = \frac{\nu}{\kappa}\,,$$

namely the Ekman number, the Rayleigh number, and the Prandtl number. The Prandtl number is set to unity for all simulations reported here. The aspect ratio r_i/r_o is fixed to 0.2. This small inner core leaves enough room for bands to develop outside the tangent cylinder.

Dissipative mechanisms in a rapidly rotating flow constitute a subtle issue. From a formal point of view, viscous dissipation affects the flow in two ways. First comes the bulk effects of viscous dissipation. Because of the very low Ekman number values associated with rapid rotation, this term only becomes significant at small scale. Dimensional analysis reveals scales such as $\mathcal{O}(\mathcal{L}\, E^{1/3})$ for z-aligned structures, such as vertical shear layers or convection near the onset [1, 5, 6]. But viscosity is also essential near boundaries, where very sharp $\mathcal{O}(\mathcal{L}\, E^{1/2})$ layers develop. These layers actively affect the mainstream flow through Ekman pumping. This yields an additional dissipative term on the mainstream equations, known as Ekman friction or Ekman pumping [7]. This term will equally affect all scales of the mainstream flow. Its amplitude is only controlled by the Ekman number and the flow velocity. As a result, Ekman pumping will provide the dominant dissipation mechanism on the large scale mainstream flow, for which the effects of bulk viscosity are vanishingly small.

We will investigate convection very close to the onset, and adopt (as in [2]) a z-integrated weakly non-linear formalism. Due to the computing domain geometry (which is not simply connected), we consider separately the mean zonal flow u_0 and all the non-axisymmetric modes (see [8] for a discussion of this issue). In the weakly non-linear approach, only one of the non-axisymmetric modes is retained and expressed in the form of a streamfunction $\psi = \psi(s)e^{im\varphi}, m \in \mathbb{R}$ (see [2] for more details). The mode m is set to its critical value at the onset of convection, computed for each particular value of the Ekman number. The vorticity of the flow is then given by $\omega = -\Delta\psi + \nabla \wedge (u_0\, \boldsymbol{e}_\phi) \cdot \boldsymbol{e}_z$. The resulting system of equation is

$$Pr\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\theta\right) = \Delta\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,, \tag{1a}$$

$$E\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\omega\right) = E\,\Delta^2\psi + \frac{1}{1-s^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + Ra\,E\,\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\,, \tag{1b}$$

$$E\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})u_\varphi|_0\right) = \underbrace{E\left(\Delta - \frac{1}{s^2}\right)u_0}_{B-V} - \underbrace{\frac{E^{1/2}}{2(1-s^2)^{3/4}}\,u_0}_{E-P}\,. \tag{1c}$$

The linear theory for the onset of convection in a rotating sphere indicates that convection develops at the onset on a horizontal length-scale $\mathcal{O}(E^{1/3})$, both in the radial (s) and azimuthal (ϕ) direction [9]. On such length-scale, the bulk viscosity acting on the non-axisymmetric velocity can be estimated to scale as $E \times E^{-2/3} = E^{1/3}$, whereas the Ekman pumping will scale as $E^{1/2}$. For this reason, an asymptotically valid approximation is to retain only bulk viscosity as dissipating term in (1b), here in the form of a bi-laplacian on ψ. On such small length-scale, the Ekman pumping term is asymptotically negligible compared to bulk viscosity. Indeed Ekman pumping only provides an $\mathcal{O}(E^{1/6})$ correction term on the critical parameters for the onset [10].

Two dissipation terms are retained instead for the axisymmetric flow described by equation (1c): the bulk viscosity (marked "*B-V*") and the Ekman pumping term (marked "*E-P*"). The axisymmetric flow is obviously large scale in the ϕ-direction: $\mathcal{O}(\mathcal{L})$. Its scaling in the radial s direction however remains to be determined. None of these dissipating terms can therefore be ruled out on the basis of a simple scaling argument. Note that we follow here an approach introduced by Jones *et al.* [4], although our model is simplified by coupling two modes only and dropping the effect of pumping on the small scales ψ. System (1) can be solved using explicit mode coupling in the spectral domain. This weakly non-linear ap-

allows a much wider variation in parameters than the full modeling.

We will present results of numerical simulations retaining either the B-V-term, or the E-P-term, or both, in order to assess the role of the various dissipating processes (bulk viscosity or Ekman pumping, respectively). We may stress at this stage that despite these simplifications, integrating an equation of the form of (1c) retaining only Ekman friction, and dropping bulk-viscosity is not a trivial numerical task. It requires a careful numerical implementation: one then relies only on laplacians in (1a,b) to damp high-frequency modes. Ekman pumping dissipates energy in (1c), but it does not act to specifically damp high frequency instabilities.

We first verified that the introduction of Ekman pumping did not affect the qualitative result reported in [2], i.e. relaxation oscillations occur increasingly close to the onset of convection as E is decreased. Indeed most of the flows we will investigate here are time dependent. We will now focus our attention on the effect of Ekman pumping on the zonal flow structure. Let us first consider the zonal flow at fixed Ekman number (here $E = 10^{-6}$) and with increasing Rayleigh numbers (from 1.1 to 5 times critical). The corresponding results are displayed on figure 1.

First, in the presence of bulk viscosity only (the B-V-term), the expected behavior ("S" shaped zonal flow and slow increase in the number of bands with the Rayleigh number) is reproduced with this simplified model (see the left column of figure 1). When, on the other hand, Ekman pumping provides the only dissipating term on the zonal flow (corresponding to a large scale assumption on this flow), a large number of bands is produced in the system. The bands become more numerous as the Rayleigh number is increased. Here reaching up to seven bands for $Ra = 5 \times Ra_c$. It is however important to ponder at this stage on the radial scaling of the bands produced with this model. Equation (1c) now involves no regularizing term in radius. As a results, the radial scale of u_0 will be directly provided by the energy input term, i.e. by ψ. It follows that near the onset u_0 will then scale radially as ψ, i.e. $\mathcal{O}(E^{1/3}\mathcal{L})$.

The $\mathcal{O}(E^{1/3}\mathcal{L})$ radial length-scale appearing in the zonal flow u_0 invalidates the large scale assumption made by neglecting bulk viscosity in (1c). At such small length-scales, bulk viscosity becomes dominant. We have therefore performed a third simulation retaining both the B-V and the E-P-terms in (1c). The effect of bulk viscosity in increasing the radial length-scale is evident of figure 1. Bulk viscosity will enlarge the width of zonal bands, as

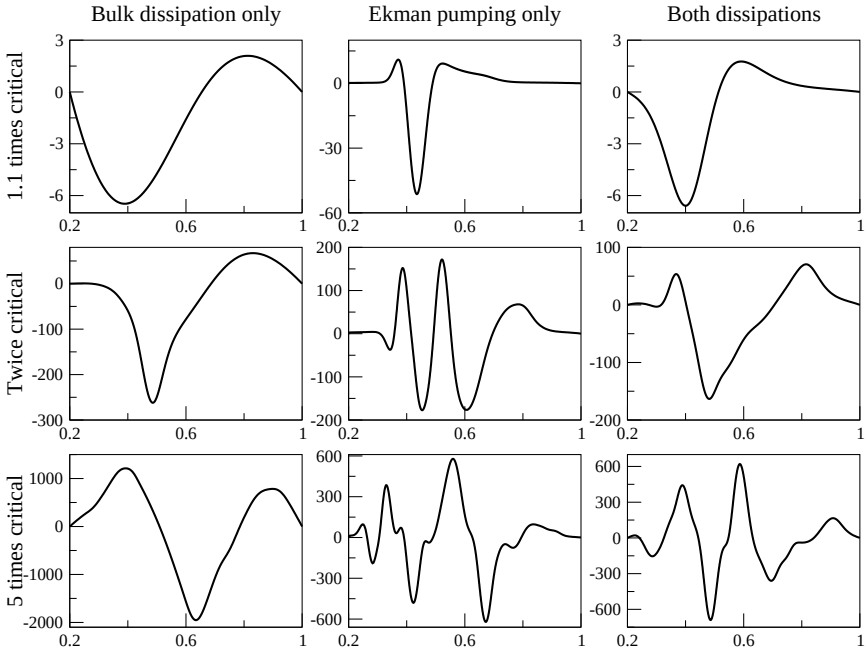

FIG. 1: Zonal wind profiles for $E = 10^{-6}$, and increasing Rayleigh numbers, from top to bottom: $Ra = 1.1 \times Ra_c$, $Ra = 2 \times Ra_c$ et $Ra = 5 \times Ra_c$. The column on the left corresponds to simulations with bulk viscosity only, the middle column to simulations retaining Ekman pumping only and the right figure to simulations combining both effects.

it did in the first case (retaining its effect only). In this case, however, it will only act to enlarge these structures until it becomes comparable to the Ekman pumping. One can easily estimate the transition scale above which Ekman pumping dominates and below which bulk dissipation takes over. Comparing the bulk dissipation at a scale ℓ estimated by $E\,\ell^{-2}\,U$ (where U is a measure of the zonal flow velocity) to the Ekman pumping estimated by $E^{1/2}\,U$ reveals that the transition scale is $\ell \sim \mathcal{O}(\mathcal{L}\,E^{1/4})$. Any smaller scale will be predominantly affected by bulk viscosity, any larger scale predominantly senses Ekman friction.

To illustrate the Ekman dependence in our simulations, we now present results obtained for a Rayleigh number twice critical, varying the Ekman number from 10^{-5} to 10^{-7} (see figure 2). This wide amplitude of variation is only made possible by the model simplicity.

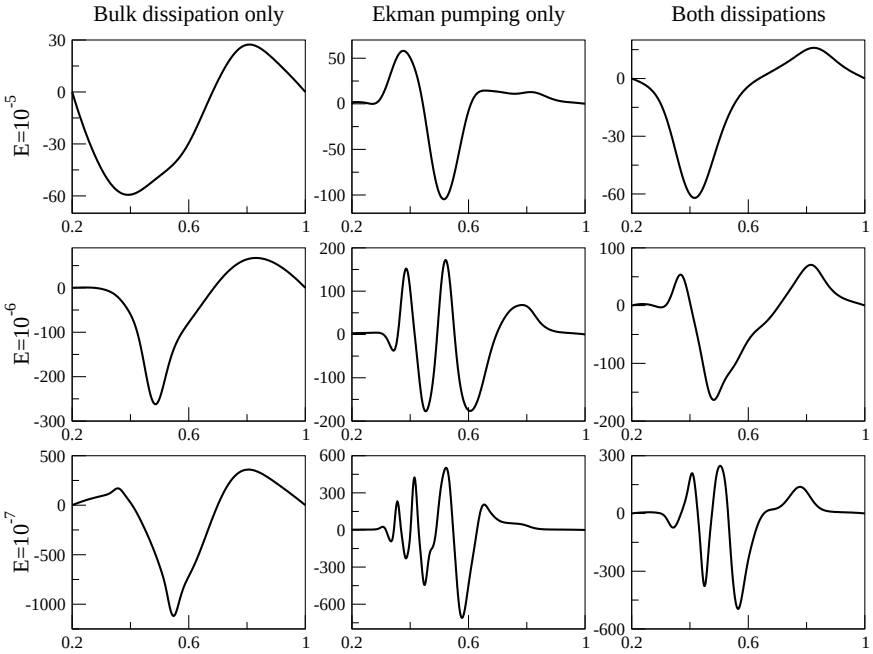

FIG. 2: Zonal wind profiles at Rayleigh number twice critical ($Ra = 2 \times Ra_c$), for decreasing Ekman numbers, from top to bottom: $E = 10^{-5}$, $E = 10^{-6}$ et $E = 10^{-7}$ (columns arrangement follows that of figure 1).

Despite the use of intensive computing, smaller values of E are at present not attainable.

Figure 2 clearly demonstrates the faster increase in the number of bands, when the E-P-term only is retained, than in the presence of both the E-P and B-V terms. The distinction between the $E^{1/3}$ and the $E^{1/4}$ scaling is however difficult to establish at these values of E. A rigorous distinction between these scalings would require the computation of even smaller values of the Ekman number (these scalings only differ by a factor $E^{1/12}$).

The increasingly important role given to the zonal flow near the onset as the Ekman number is decreased (as identified in [2]) led us to investigate the variation in the banded structure near the onset with decreasing Ekman number. Indeed, the number of bands increases with decreasing Ekman numbers even very near the onset. This effect is highlighted by figure 3 at a Rayleigh number 10% above critical. Because of the moderate values of

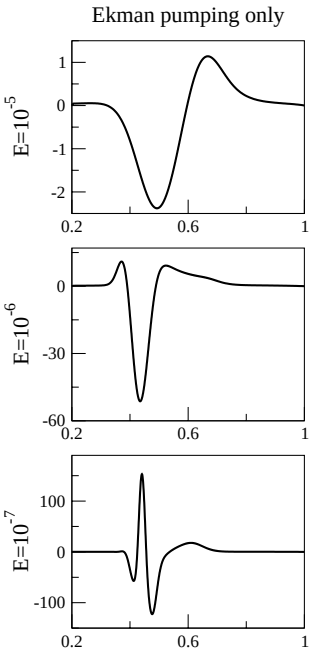

FIG. 3: Zonal wind profiles for Ekman numbers: $E = 10^{-5}$, $E = 10^{-6}$ et $E = 10^{-7}$. The Rayleigh number is only 10% above critical ($Ra = 1.1 \times Ra_c$). These simulations retain the Ekman pumping term (E-P) as only dissipation term on the zonal flow, in order to highlight the increase in the number of bands observed just above the onset with decreasing Ekman numbers.

E that can be achieved (although significantly lower than can be achieved with full 3D modeling), we represent here the simulation with the E-P-term only (for which bands are narrower). The effect is then more visible near the onset because of the steep $E^{1/3}$ scaling. The number of bands as well as the zonal flow amplitude increase with decreasing Ekman numbers. Direct comparison of figure 2 with figure 3 suggests that the Ekman number controls the jets width whereas the Rayleigh number determines the width of the region influenced by the zonal shear (i.e. the envelope of the banded structure). This property of convergence toward the onset validates the weakly non-linear approach.

The banded structure obtained in the above convection problem suggests an interpretation with applications to the zonal flows observed in giant planets (such as Jupiter & Saturn).

Deep convection models producing bands in the sphere remain so far limited to less than three bands per hemisphere [3, 11–15]. Investigation of decaying turbulence in a full sphere [16] (not convectively driven) has allowed to give more importance to non-linearities and also revealed the presence of a banded structure. The possible deep origin of bands in giant planet therefore remains a much debated topic. Our model could be interpreted in this context. Indeed the aspect ratio of 0.2 corresponds to the estimated size of the rock core both in Saturn and in Jupiter (e.g [17]).

We shall first start with a word of caution. The model we investigate is very simplified and well justified only near the onset of convection. Besides, it cannot capture the complicated structure of these planets (such as the molecular-metallic transition of hydrogen, the vigorous turbulence or dynamo action in the metallic phase). Keeping these shortcomings in mind a first comparison can be attempted.

First, the small Ekman number limit we have tried to approach by a mixed asymptotic and numerical model is relevant to giant planets. Relying on a turbulent kinematic diffusivity (much larger than molecular values) the Ekman numbers for Jupiter and Saturn can respectively be estimated to $7.7 \,.\, 10^{-10}$ and $3.5 \,.\, 10^{-9}$ [18]. Such values are still much smaller than can be achieved numerically, even with simplified modeling. Such extreme values may however offer a chance to distinguish between an $E^{1/3}$ and an $E^{1/4}$ scaling of the banded structure. The prefactors to these scalings remain unknown (and are clearly functions of the Rayleigh number, see figure 1). Assuming an order one prefactor, $E^{1/3}$ would yield 1000 bands and 600 bands per hemisphere for Jupiter and Saturn respectively. This is much larger that observations (typically 11 bands between 0 and 60 degrees latitude on Jupiter). The $E^{1/4}$ scaling would yield under the same assumption 180 and 130 bands respectively. These numbers could therefore be compatible with observations assuming a prefactor close to 0.1. Such prefactors would stem from an estimation based on our lowest Ekman number simulation at a Rayleigh number twice critical (figure 2, displays six bands at $E = 10^{-7}$). An $E^{1/4}$ extension of bands therefore appears compatible with observational facts.

While turbulence is clearly present in giant planets, it does not appear to be a necessary ingredient to understand the presence of a banded structure. Our simple weakly non-linear model, retaining the interactions between two modes only, shows that provided Ekman pumping is included, bands can be obtained in rapidly rotating convection (i.e. in the limit of small Ekman numbers) immediately above the onset of convection.

Acknowledgments

We wish to thank Pr. Andrew Soward for fruitful discussions. Numerical simulations were performed on the IBM cluster at I.D.R.I.S., projects 40633, 50633.

---

[1] F. H. Busse, "Thermal instabilities in rapidly rotating systems," J. Fluid Mech. **44**, 441–460 (1970).

[2] V. Morin and E. Dormy, "Time dependent β–convection in Rapidly Rotating Spherical Shells," Physics of Fluids **16**, 1603 (2004).

[3] U. R. Christensen, "Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells," J. Fluid Mech., **470**, 115–133 (2002).

[4] C. A. Jones, J. Rotvig, A. Abdulrahman, "Multiple jets and zonal flow on Jupiter," Geophys. Res. Let., **30** 14, 1-4 (2003).

[5] K. Stewartson, "On almost rigid rotation. Part 2," J. Fluid Mech. **26**, 131–144 (1966).

[6] P. H. Roberts, "On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources," Phil. Trans. A **263**, 93–117 (1968).

[7] H. P. Greenspan, "The Theory of Rotating Fluids," Cambridge University Press (1968).

[8] E. Plaut, F.H. Busse, "Low-Prandtl-number convection in a rotating cylindrical annulus," J. Fluid Mech. **464**, 345–363 (2002).

[9] C.A. Jones, A.M. Soward, A.I. Mussa, "The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere," J. Fluid Mech. **405**, 157 (2000).

[10] E. Dormy, A. M. Soward, C. A. Jones, D. Jault, and P. Cardin, "The onset of thermal convection in rotating spherical shells," J. Fluid Mech. **501**, 43 (2004).

[11] A. Vasavada and A. Showman, "Jovian atmospheric dynamics: an update after Galileo and Cassini," Rep. Prog. Phys. **68** 1935–1996 (2005).

[12] J.-I. Yano, "A critical review on the dynamics of Jovian atmospheres," Chaos, **4**-2, 287–297 (1994).

[13] U. R. Christensen, "Zonal flow driven by deep convection in the major planets," Geophys. Res. Let., **28** 13, 2553–2556 (2001).

[14] J. B. Manneville and P. Olson, "Banded Convection in Rotating Fluid Spheres and the Circulation of the Jovian Atmosphere," Icarus **122**, 242–250 (1996).

[15] J. Aurnou, P. Olson, "Strong zonal winds from thermal convection in a rotating spherical shell," Geophys. Res. Let. **28**, 2557–2559 (2001).

[16] J.-I. Yano, O. Talagrand, and P. Drossart, "Deep two-dimensional turbulence: An idealized model for atmospheric jets of the giant outer planets," Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **99**, 2, 137–150 (2005).

[17] J. Connerney, "Magnetic fields of the outer planets," J. Geophys. Res., **98** E10, 18659–18679 (1993).

[18] S.V. Starchenko and C.A. Jones, "Typical Velocities and Magnetic Field Strengths in Planetary Interiors," *Icarus*, **157**, 426–435 (2002).

Bibliographie

[1] A. Abdulrahman, C.A. Jones, M.R.E. Proctor, and K. Julien, *Large wave-number convection in the rotating annulus*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., **93**, 227 (2000).

[2] J. Aubert, Modèles expérimentaux et numériques de la convection dans le noyau de la Terre, Thèse de doctorat, LGIT, 2001.

[3] J.Aubert, N. Gillet, P. Cardin, *Quasigeostrophic models of convection in rotating spherical shells*, Geochem. Geophys. Geosyst., **4**(7), 1052 (2003).

[4] J. Aurnou, P. Olson, *Strong zonal winds from thermal convection in a rotating spherical shell*, Geophys. Res. Let. **28**, 2557–2559 (2001).

[5] R. Avalos-Zuniga, F. Plunian and A. Gailitis, *Influence of electromagnetic boundary conditions onto the onset of dynamo action in laboratory experiments*, Phys. Rev. E, **68**, 066307 (2003).

[6] Backus G., *The Axisymmetric Self-Exicited Fluid Dynamo*, Astrophysical Journal **125**, 500 (1957)

[7] S.I. Braginsky, *Structure of the F layer and reasons for convection in the Earth's core*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR Engl. Trans., **149**, 1311 (1963).

[8] N. Brummell, and J. Hart, *High Rayleigh number β-convection*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., **68**, 85 (1993).

[9] E.C. Bullard, The magnetic field within the Earth, Proc. R. Soc London, Ser. A **197**, 433-453 (1949)

[10] F.H. Busse, *Thermal instabilities in rapidly rotating systems*, J. Fluid Mech. **44**, 441 (1970).

[11] F.H. Busse, *Simple model of convection in the Jovian atmosphere* Icarus, **29**, 255–60 (1976).

[12] F.H. Busse, and A.C. Or, *Convection in a rotating cylindrical annulus : Thermal Rossby waves*, J. Fluid Mech. **166**, 173 (1986).

[13] F.H. Busse, *Convection driven zonal flows and vortices in the major planets*, Chaos **4**-2, 123–134 (1994).

[14] F.H. Busse, *Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamos action*, Phys. Fluids **14**, No.4, 1301 (2002).

[15] Cardin P. and P. Olson, *Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell : consequences for flow in the outer core*, Phys. Earth Planet. Inter. **82**, 235 (1994).

[16] C.X. Chen and K. Zhang, *Nonlinear convection in a rotating annulus with a finite gap*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **96**, 499 (2002).

[17] J.Y.-K. Cho and L.M. Polvani, *The morphogenesis of bands and zonal winds in the atmospheres on the giant outer planets* Science, **273**, 335 (1996).

[18] U.R. Christensen, P. Olson, G.A. Glatzmaier, *Numerical modelling of the geodynamo : a systematic parameter study*, Geophys. J. Int. **138**, 393 (1999).

[19] U.R. Christensen, J. Aubert, P. Cardin, E. Dormy, S. Gibbons, G.A. Glatzmaier, E. Grote, Y. Honkura, C. Jones, M. Kono, M. Matsushima, A. Sakuraba, F. Takahashi, A. Tilgner, J. Wicht, K. Zhang, *A numerical dynamo benchmark*, Phys. Earth Planet. Inter. **128**, 25 (2001).

[20] U.R. Christensen, *Zonal flow driven by deep convection in the major planets*, Geophys. Res. Let., **28** 13, 2553–2556 (2001).

[21] U.R. Christensen, *Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells*, J. Fluid Mech., **470**, 115–133 (2002).

[22] S. J. Cole, Nonlinear rapidly rotating spherical convection, PhD thesis, University of Exeter, 2004.

[23] J.E.P. Connerney, *Magnetic Fields of the Outer Planets*, J. Geophys. Res., **98**, 18,659–18,679 (1993).

[24] T.G. Cowling, *The magnetic field of sunspots*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **94**, 39 (1934).

[25] E. Dormy, Modélisation numérique de la dynamo terrestre, Thèse de doctorat, IPGP, 1997.

[26] E. Dormy, J.P. Valet and V. Courtillot, *Numerical models of the geodynamo and observational constraints*, Geochem. Geophys. Geosyst., **1**, (2000).

[27] E. Dormy, A.M. Soward, C.A. Jones, D. Jault, and P. Cardin, *The onset of thermal convection in rotating spherical shells*, J. Fluid Mech. **501**, 43 (2004).

[28] E. Dormy, H.-C. Nataf, J.-F. Pinton, *L'effet dynamo, un casse-tête non linéaire*, Images de la Physique (2005).

[29] D.R. Fearn, *Hydromagnetic flow in planetary cores*, Rep. Prog. Phys. **61**, 175 (1998).

[30] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platacis, S. Dementev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, G. Will, *Magnetic Field Saturation in the Riga Dynamo Experiment*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3024 (2001).

[31] R. Garcia and A. Souriau, Amplitude of the core-mantle boundary topography estimated by stochastic analysis of core phases. Phys. Earth and Planet. Interiors **117** (1/4), 345–359 (2000).

[32] N. Gillet, Magnéto-convection dans une sphère en rotation rapide : approche numérique et expérimentale de la convection dans les noyaux planétaires, Thèse de doctorat, LGIT, 2004.

[33] G.A. Glatzmaier and P.H. Roberts, *A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal*, Nature, **377**, 203 (1995).

[34] H.P. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press (1968).

[35] E. Grote, F.H. Busse, and R. Simitev, *Buoyancy Driven Convection in Rotating Spherical Shells and Its Dynamo Action*, High Performance Computing in Science and Engineering, Ed. Krause and Jäger (2001).

[36] E. Grote, and F.H. Busse, *Dynamics of convection and dynamos in rotating spherical fluid shells* , Fluid Dyn. Res. **28**, 349 (2001).

[37] L. Guillou and C. Jaupart, On the effect of continents on mantle convection, J. Geophys. Res. **100**, 24,217–24,238 (1995).

[38] C.A. Jones, A.M. Soward, A.I. Mussa, *The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere*, J. Fluid Mech. **405**, 157 (2000).

[39] C.A. Jones, J. Rotvig, A. Abdulrahman, *Multiple jets and zonal flow on Jupiter*, Geophys. Res. Let., **30** 14, 1-4 (2003)

[40] K. Kumar, S. Fauve, and O. Thual, *Critical self-tuning : the example of zero Prandtl number convection*, J. Phys. II France, **6**, 945 (1996).

[41] C. Kutzner, U.R. Christensen, *From stable dipolar towards reversing numerical dynamos*, Phys. Earth Planet. Inter. **131**, 29 (2002).

[42] W.V.R. Malkus, Energy sources for Planetary Dynamos, Lectures on Solar and Planetary Dynamos, ed. M.R.E. Proctor and A.D. Gilbert (Cambridge : Cambridge University Press), 161-179 (1994).

[43] J.B. Manneville and P. Olson, *Banded Convection in Rotating Fluid Spheres and the Circulation of the Jovian Atmosphere*, Icarus **122**, 242–250 (1996).

[44] L. Meynadier, JP. Valet, F. C. Bassinot, N. J., Shackleton and Yohan Guyodo, *Asymmetrical saw-tooth pattern of the geomagnetic field intensity from equatorial sediments in the Pacific and Indian Oceans*, Earth Planet. Sci. Lett., **126-1-3**, 109 (1994).

[45] A.C. Or, and F.H. Busse, *Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 2. Transition to asymmetric and vacillating flow*, J. Fluid Mech. **174**, 313 (1987).

[46] F. Petrelis, Effet dynamo : Etudes des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique, Thèse de doctorat, LPS, 2002.

[47] E. Plaut and F.H. Busse, *Low-Prandtl-number convection in a rotating cylindrical annulus*, J. Fluid Mech. **464**, 345 (2002).

[48] Poirier J-P., *Physical properties of the Earth's core*, C. R. Acad. Sci. Paris **318**, 341 (1994)

[49] C.C. Porco *et al.*, *Cassini Imaging of Jupiter's Atmosphere, Satellites, and rings* Science, **299**, 1541 (2003).

[50] M.R.E. Proctor, *Convection and magnetoconvection in a rapidly rotating sphere*, Lectures on Solar and Planetary dynamo, Cambridge University Press, 97 (1994).

[51] P.H. Roberts, *On the Thermal instability of a highly rotating fluid sphere*, Astrophysical Journal **141**, 240 (1965).

[52] P.H. Roberts, *On the Thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources*, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A **263**, 93 (1968).

[53] P.H. Roberts, *Magnetoconvection in a rapidly rotating fluid*, Rotating fluids in geophysics, édité par P.H. Roberts et A.M. Soward, p.421, Academic, San diego, Calif., (1978).

[54] P.H. Roberts and A.M. Soward, *Dynamo theory*, Annu. Rev. Fluid Mech. **24**, 459 (1992).

[55] P.H. Roberts and G.A. Glatzmaier, *Geodynamo theory and simulations*, Rev. Mod. Phys. **72**, 1081 (2000).

[56] N. Schaeffer and P. Cardin, *Quasigeostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer in flat and depth-varying containers*, Phys. Fluids **17**, 104111 (2005).

[57] M. Schnaubelt and F.H. Busse, *Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 3. Vacillating and spatially modulated flows*, J. Fluid Mech. **245**, 155 (1992).

[58] A.M. Soward, *On the finite amplitude thermal instability in a rapidly rotating fluid sphere*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **9**, 19 (1977).

[59] S.V. Starchenko and C.A. Jones, *Typical Velocities and Magnetic Field Strengths in Planetary Interiors*, *Icarus*, **157**, 426–435 (2002).

[60] K. Stewartson, *On almost rigid rotation. Part 2*, J. Fluid Mech. **26**, 131–144 (1966).

[61] S. Takehiro, J.R. Lister, *Surface zonal flows induced by thermal convection trapped below a stably stratified layer in a rapidly rotating spherical shell*, Geophys. Res. Let. **29**, 50 1–4 (2002).

[62] J.-P. Valet, and L. Meynadier, *Geomagnetic field intensity and reversals during the last four million years*, Nature, **366**, 234 (1993).

[63] J.-P. Valet, L. Meynadier and Y. Guyodo, *Geomagnetic dipole strengh and reversal rate over the past two million years*, Nature, **435**, 802 (2005).

[64] Vasavada A. and Showman A., *Jovian atmospheric dynamics : an update after Galileo and Cassini*, Rep. Prog. Phys. **68** 1935–1996 (2005).

[65] J. Wicht, *Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations*, Phys. Earth Planet. Inter. **132**, 281 (2002).

[66] J. Wicht, C. Jones and K. Zhang, *Instability of Zonal Flows in Rotating Spherical Shells : An Application to Jupiter* Icarus, **155**, 425–435 (2002).

[67] J.-I. Yano, *Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems*, J. Fluid Mech. **243**, 103 (1992).

[68] J.-I. Yano, *A critical review on the dynamics of Jovian atmospheres*, Chaos, **4**-2, 287–297 (1994).

[69] J.-I. Yano, O. Talagrand, P. Drossart, *Origins of atmospheric zonal winds*, Nature, **421**, 36 (2003).

[70] J.-I. Yano, O. Talagrand, P. Drossart, *Deep two-dimensional turbulence : An idealized model for atmospheric jets of the giant outer planets* Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **99**, 2, 137–150 (2005).

[71] Zhang, C.Z., Xia, Y.F., 1994, Remarks on dynamical ellipticity at the Earth's core-mantle boundary. Earth, Moon, and Planets **65**, 269–276.

[72] K. Zhang, *Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells*, J. Fluid Mech. **236**, 535 (1992).

[73] K. Zhang, *Convection in a rapidly rotating spherical shell at infinite Prandtl number : Transition to vacillating flows*, Phys. Earth Planet. Inter. **72**, 236 (1992).

[74] K. Zhang and C.A. Jones, *The influence of Ekman boundary layers on rotating convection*, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **71**, 145 (1993).

[75] Zhang, K. and Fearn, D.R., *How strong is the invisible component of the magnetic field in the Earth's core*, Geophys. Res. Lett., **20**, 2083 (1993).

[76] K. Zhang and G. Schubert, *Teleconvection : Remotly Driven Thermal Convection in Rotating Stratified Spherical Layers* Science, **290**, 1944–1947 (2000).