



HAL
open science

INSTABILITES DES INTERFACES ECOULEMENT / FOND ERODABLE : APPROCHES ASYMPTOTIQUES

Jacques Kouamé Kan Kouakou

► **To cite this version:**

Jacques Kouamé Kan Kouakou. INSTABILITES DES INTERFACES ECOULEMENT / FOND ERODABLE : APPROCHES ASYMPTOTIQUES. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT: . tel-00011485

HAL Id: tel-00011485

<https://theses.hal.science/tel-00011485>

Submitted on 28 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE-CURIE (PARIS 6)

ÉCOLE DOCTORALE : SCIENCES MÉCANIQUE, ACOUSTIQUE ET ÉLECTRONIQUE DE PARIS

THÈSE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

DISCIPLINE : MÉCANIQUE

PRÉSENTÉE PAR :

Kouamé Kan Jacques KOUAKOU

SUR LE SUJET :

**INSTABILITÉS DES INTERFACES ÉCOULEMENT/FOND
ÉRODABLE : APPROCHES ASYMPTOTIQUES**

SOUTENUE LE 27 SEPTEMBRE 2005

DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

François CHARRU	Rapporteur
Emile DANHO	Examineur
Piere-Yves LAGRÉE	Directeur de thèse
Michèle LARCHEVÊQUE	Directeur de thèse
Adil RIDHA	Examineur
Alexandre VALANCE	Rapporteur
Stéphane ZALESKI	Président

Résumé

Les dunes de sable dans le désert ou les rides sur les plages sont issues de problématiques d'interaction entre un écoulement (d'eau et/ou de vent) et un tas de sable. Sous l'hypothèse que les perturbations dues à l'hydrodynamique de l'interaction restent confinées dans une fine couche visqueuse près du fond de l'écoulement, nous obtenons des résultats analytiques et numériques de la stabilité des rides sur un fond érodable à long terme. Ces résultats sont comparés favorablement à certaines études expérimentales. Dans le cas d'un tas de sable posé sur un fond non érodable, nous montrons qu'avec la seule longueur de saturation ou le seuil de mise en mouvement des grains, il est possible de relier des configurations finales de dunes de tailles différentes, sous des cisaillements différents, à partir de transformations auto-similaires.

Mots clés

Hydrodynamique, Couche limite, Frottement, Stabilité, Granulaire, Dune

Abstract

The sand dunes in the desert and the ripples on the beach are problems of interaction between a flow (of water and/or wind) and a sand heap. We make the assumption that the disturbances remain confined in a thin viscous layer close to the bottom of the flow. Then we obtain analytical and numerical results of the stability of the long-term ripples on an erodable soil. These results are compared favourably with some experimental studies. Finally, we study the evolution of a single bump on a non erodable soil. In this case, we show that with the only length of saturation or the threshold of Shield number, it is possible to connect final configurations of dunes of different sizes, under different shearing, using self-similar transformations.

key words :

Hydrodynamics, Boundary layer, Friction, Stability, granular Matter, Dune

REMERCIEMENTS

Ce travail a pu se faire avec l'aide d'un certain nombre de personnes que je tiens à saluer et à leur dire grand merci pour leurs contributions.

Côté organisation :

Ce rapport est l'aboutissement d'une collaboration qui a existé entre mon Laboratoire d'origine à l'Université de Cocody en Côte d'Ivoire et le Laboratoire LMM UMR 7607 CNRS - Université Paris 6. Elle a permis le déplacement de certains chercheurs et enseignants du LMM à Abidjan afin de faire partager leur domaine de compétences: Pierre-Yves Lagrée et Pierre Carlès lors de mon cursus de DEA.

C'est pourquoi je commence d'abord par exprimer ma gratitude à l'ensemble des personnes qui ont oeuvré, en son temps, à la concrétisation des échanges entre ces deux Laboratoires, articulièrement à Pierre-Yves Lagrée et à Emile Danho.

Côté séjour au LMM :

En premier lieu, je dirais que sans l'aide et la générosité des personnes suivantes, je n'aurais jamais pu éprouver le plaisir de ce séjour au LMM et je ne serais sûrement pas allé au bout de cette thèse.

Ces personnes seront identifiées dans aucun ordre particulier d'autant plus que chaque personne mentionnée ci-dessous a contribué immensément à cette expérience éducative et scientifique.

Je voudrais remercier Madame Larchevêque et Monsieur Adil Ridha de leur patience et de leurs conseils. Surtout les nombreux déplacements effectués de Caen par Adil Ridha pour suivre mon travail. Merci pour tout le temps que vous m'avez consacré.

A Pierre-Yves Lagrée qui a accepté de me prendre en tant que thésard, je lui dis merci de sa patience et de sa tolérance vis à vis de mes nombreux manques de ponctualité. Tous les efforts fournis depuis mon obtention du Visa, mon hébergement à la Cité Internationale Universitaire de Paris (qui ont facilité mon intégration). Je ne sais pas si on peut avoir meilleur encadreur de thèse?

En dehors de l'encadrement de la thèse proprement dit, il y a les facilitateurs dans ma vie quotidienne au travers de leur compréhension de mes horaires, surtout en fin de thèse, horaires qui n'étaient pas évidents pour les proches amis. Leurs encouragements, leur patience leurs soutiens moraux et souvent financiers. Ils se reconnaîtront.

Spécialement, Je dis merci à Cécile Lacroix, François Coulouvat et Martine Rousseau, Serge Niango. Je n'oublie surtout pas l'ensemble des thésards du LMM.

Un grand merci aux Rapporteurs et aux Examineurs qui ont sacrifié une partie de leur été à la lecture du manuscrit de la thèse.

Il faut que je m'arrête là, sinon la liste est encore longue, vu les nombreuses rencontres enrichissantes que j'ai eues ces dernières années, que ce soit sur le plan humain ou scientifique.

Table des matières

1.1	Lit érodable	2
1.2	Structures sur le fond sableux d'un écoulement	4
1.2.1	Nomenclature des motifs	5
1.2.2	Quelques motifs éoliens sur terre et sur mars	5
1.2.3	Quelques motifs aquatiques	5
1.2.4	Formes expérimentales	7
1.2.4.1	Motifs issus d'études expérimentales de fluide oscillant	7
1.2.4.2	Motifs issus d'études expérimentales de fluide continu	8
1.2.4.3	Motifs issus d'études expérimentales de fluide freiné	9
1.2.5	Motifs issus d'études théoriques	9
1.3	Paramètres adimensionnels du système	10
1.4	Forces d'interaction : fluide-particules	11
1.4.1	Forces dues au poids des particules	11
1.4.2	Forces dues au fluide	11
1.4.3	Vitesses caractéristiques	13
1.5	Critères de mise en mouvement des grains	14
1.5.1	Angle de repos : critère de du Boys	14
1.5.2	Critère de Shields	15
1.5.3	Seuil de mise en mouvement	15
1.5.4	Effet de la pente sur le seuil de mise en mouvement	16
1.6	Conclusion	17
2.1	Introduction	19
2.2	Paramètre de l'écoulement pertinent dans l'estimation du flux	19
2.3	Flux venant de matières transportées en suspension	21
2.4	Flux venant de la matières transportées par charriage	21
2.5	Flux total de matières transportées	23
2.5.1	Approches liées à la vitesse	23
2.5.2	Approches liées du frottement	24
2.6	Notion de flux total saturé	26
2.6.1	Définition	26
2.6.2	Cas de la saltation	27
2.7	Vers une équation de conservation	28
2.7.1	Equations locales	28

2.7.1.1	Première équation intégrale simplifiée	29
2.7.1.2	Autres équations intégrales simplifiées	30
2.8	Conclusion	31
3.1	Introduction	45
3.2	Equations de l'écoulement du fluide	45
3.2.1	Adimensionnement des équations	46
3.2.2	Solutions linéaires	47
3.3	Equation d'évolution du fond	48
3.3.1	Flux de matières entraînées	49
3.4	Couplage écoulement/évolution du fond	49
3.4.1	Développement associé à l'échelle temporelle hydrodynamique	49
3.4.2	Développement associé à l'échelle temporelle du fond	50
3.4.3	Résolution	50
3.4.4	Analyse de stabilité linéaire	51
3.5	Conclusion	51
4.1	Introduction	53
4.2	Passage du problème complet au problème simplifié	53
4.2.1	Écoulement de cisaillement uniforme	54
4.2.2	Écoulement brusquement freiné	54
4.2.3	Écoulement oscillant	54
4.3	Première forme d'adimensionnement des équations	54
4.3.1	Echelles	54
4.3.2	Equations	55
4.4	Equations de Navier-Stokes stationnaires	56
4.4.1	Conditions aux limites associées	57
4.5	Utilisation de CASTEM2000	57
4.5.1	Choix de la taille du domaine et du maillage utilisé	58
4.6	Nombres de Reynolds 'élevés'	60
4.7	Faibles nombres de Reynolds	62
4.7.1	Comparaison des calculs Stokes / Navier-Stokes	63
4.8	Hauteur de séparation	63
4.9	Conclusion	65
5.1	Introduction	67
5.2	Calcul du cisaillement de l'écoulement	67
5.3	Validation de la solution	68
5.4	Analyse de stabilité d'un fond érodable.	69
5.4.1	Cas d'un écoulement uniforme	71
5.4.2	Cas d'un écoulement freiné	71
5.4.3	Cas d'un écoulement oscillant	73
5.5	Evolution d'une bosse sur un fond érodable sous un cisaillement uniforme	73
5.5.1	Comportement asymptotique	74
5.5.2	Discussion	75
5.6	Evolution du fond sous un écoulement brusquement freiné	76
5.7	Evolution du fond sous un écoulement oscillant	76
5.8	Conclusion	77

6.1	Introduction	79
6.2	Rappel sur les théorie de double et triple couche	79
6.2.1	Exemple d'échelles dans le cas oscillant	80
6.3	Etablissement des Equations de Double Couche (DD)	82
6.3.1	Hypothèse des études précédentes	82
6.3.2	Redimensionnement	82
6.3.3	Termes négligés	83
6.3.4	Remarque: la longueur visqueuse	83
6.3.5	Classification des études	84
6.4	Résolution directe par un Code de calcul de DD	85
6.4.1	Résolution du problème DD linéarisé	86
6.5	Comparaison des résultats	86
6.6	Application à un écoulement freiné	87
6.7	Application à un écoulement oscillant	88
6.8	Conclusion	89
7.1	Résumé	91
7.2	Introduction	91
7.3	The coupled problem	93
7.3.1	The flow	93
7.3.2	The erodible bed	93
7.4	Basic flow	94
7.4.1	Steady basic flow	94
7.4.2	Oscillating basic flow	94
7.4.3	Decelerated Basic flow	95
7.5	Perturbation of the basic flow	95
7.5.1	Notes on the scalings	95
7.5.2	Equations	96
7.5.3	Linearisation: law between the topography and the skin friction.	96
7.6	Linear stability of the bed	97
7.6.1	steady case	97
7.6.2	Oscillating case	98
7.6.2.1	Averaging the flux relation	98
7.6.2.2	stability	99
7.6.3	Decelerated case	100
7.6.4	Conclusion for stability analysis	100
7.7	Examples of large time evolution	101
7.7.1	numerical method	101
7.7.2	Steady case	101
7.7.3	Oscillating case	102
7.7.4	Decelerated case	103
7.7.5	Some experimental crude comparisons	103
7.8	Conclusion	105
8.1	Résumé	107
8.2	Introduction	107
8.3	Basic equations	108
8.3.1	The erodable bed: relations between q and the flow	108
8.3.2	The fluid	109
8.3.2.1	Equations and linear solution	109
8.3.2.2	Comparing solutions for a given fixed soil	110
8.4	The adimensionalised coupled problem	111
8.5	Displacement of a model dune, linear and non-linear Double Deck	112
8.5.1	The dune over a non erodible soil	112

8.5.2	Example of time evolution: linear and non-linear Double Deck	112
8.5.3	Self Similarity: linearized Double Deck	113
8.6	Further possible developments	115
8.7	Conclusion	116
9.1	Introduction	119
9.1.1	Rappels	119
9.1.2	Rappels des équations BCRE et DAD	120
9.2	Equations de conservation de la masse et de quantité de mouvement	123
9.2.1	Conservation de la masse	123
9.2.1.1	Conditions aux limites	124
9.2.2	Conservation de la quantité de mouvement	124
9.2.2.1	Conditions aux limites	124
9.3	Extension au cas d'une couche mobile sur une couche immobile	125
9.3.1	Conservation de la masse	125
9.3.2	Conservation de de la quantité de mouvement	125
9.3.2.1	Conditions aux limites	126
9.4	Loi de Mohr-Coulomb	127
9.5	Application au cas d'un milieu granulaire: Avalanche simple	128
9.6	Modélisation du flux, de l'énergie et du coefficient de friction	129
9.6.1	Equations de DAD	129
9.6.2	Modélisation proposée	129
9.6.3	Correspondances entre modèles DAD, BCRE saturé et hydrodynamiques	130
9.7	Résolution numérique des équations	131
9.8	Application au cas d'un tambour tournant	134
9.9	Conclusion	135
A.0.1	Cas d'un cisaillement uniforme	143
A.0.2	Cas d'un écoulement freiné brusquement	144
A.0.3	Cas d'un écoulement oscillant au dessus d'un fond meuble	144
B.1	Schéma numérique	147
B.2	Test du schéma numérique utilisé	148
C.1	Cas d'un fluide très visqueux	151
C.2	Cas d'un fluide peu visqueux	152
D.1	rappel sur les transformations de Fourier	153
D.1.1	Définition	153
D.1.2	Transformation de Fourier et dérivation	153
D.2	Application à la forme du fond	153
E.1	Grandeurs caractéristiques	155
E.1.1	Frottement	155
E.1.2	Flux de matières	156
E.2	Exemple de comparaison : cas oscillant	157

LISTE DES SYMBOLES

En général les variables sont surmontées d'une barre lorsqu'elles sont sans dimension et affectées d'une étoile sinon.

a_0	[L]	Amplitude des rides
A	[L]	Amplitude du mouvement du fluide dans le cas oscillant
\mathcal{D}	[L ² T ⁻¹]	Coefficient de diffusion des particules
d	[L]	Diamètre des grains
f	[L]	Forme du lit de l'écoulement
F_0	[-]	Nombre de Froude
F_D	[M L T ⁻²]	Force de traînée
F_G	[M L T ⁻²]	Force de gravité relative
F_L	[M L T ⁻²]	Force de portance du fluide
F_P	[M L T ⁻²]	Force de masse ajoutée
g	[L T ⁻¹]	Accélération de la gravité $g = 9.81\text{m/s}$
\mathcal{H}	[-]	Transformée de Hilbert
\mathcal{H}_d	[-]	Fonction de Heaviside
h	[L]	Hauteur instantanée de l'écoulement (c.f. chap.3 et chap.1)
H_0	[L]	Hauteur de base de l'écoulement (c.f. chap.3)
k	[L ⁻¹] ou [-]	Nombre d'onde
l_{salt}	[L]	Longueur de saltation (c.f. chap.1)
l_{sat}	[L]	Longueur de saturation
M	[M]	Masse d'un sédiment
p	[M L ⁻¹ T ⁻²]	Pression dans l'écoulement du fluide
q	[L ² T ⁻¹]	Flux instatné de sédiments
q_{sat}	[L ² T ⁻¹]	Flux saturé de sédiments
q_0	[L ² T ⁻¹]	Ordre de grandeur du flux sédiments
Re	[-]	Nombre de Reynolds de l'écoulement
Re_p	[-]	Nombre de Reynolds des sédiments
Re_δ	[-]	Nombre de Reynolds de Stokes
s	[-]	densité relative des sédiments
S	[degrés]	pente du fond de l'écoulement
t	[T]	temps
T	[M L ⁻² T ⁻¹]	Contrainte tangentielle (c.f. chap.1)
T	[T]	Période d'oscillation pour l'écoulement oscillant
u	[L T ⁻¹]	Vitesse horizontale instantanée
u_p	[L T ⁻¹]	Vitesse horizontale instantanée des sédiments
U	[L T ⁻¹]	Vitesse horizontale moyennée sur la hauteur
U_∞	[L T ⁻¹]	Vitesse typique de l'écoulement loin au dessus du fond
U_0	[L T ⁻¹]	Vitesse vitesse typique de l'écoulement lorsqu'il n'est pas perturbé
\bar{U}'_S	[-]	taux de cisaillement adimensionné dépendant du temps adimensionné \bar{t}
v	[L T ⁻¹]	Vitesse verticale instantanée
V_s	[L T ⁻¹]	Vitesse de sédimentation

α	$[M^{-3/2} L^{7/2} T^2]$	coefficient du flux de sédiments
β	$[-]$	coefficient de frottement dans le cas Saint-venant
γ	$[T^{-1}]$	Taux de cisaillement
δ	$[L]$	Epaisseur de la couche limite de l'écoulement
η	$[L]$	Forme de la surface libre de l'écoulement du fluide (c.f. chap. 3)
Θ	$[-]$	Coefficient de Shields
Θ_s	$[-]$	Seuil du coefficient de Shields pour la mise en mouvement des sédiments
Λ	$[M L^{-1} T^{-2}]$	coefficient de pente (dans l'expression du flux de sédiments)
λ	$[L]$	Longueur d'onde des rides
μ	$[-]$	Coefficient de de friction
φ	[degrés]	Angle de friction
ν	$[L^2 T^{-1}]$	Coefficient de viscosité cinématique
ρ	$[M L^{-3}]$	Densité du fluide
ρ_p	$[M L^{-3}]$	Densité des sédiments
σ	$[M L^{-2} T^{-1}]$	Contrainte normale (c.f. chap.1)
σ	$[T^{-1}]$	Taux d'amplification des rides
τ	$[M L^{-1} T^{-2}]$	Cisaillement de l'écoulement sur le fond (frottement pariétal)
τ_s	$[M L^{-1} T^{-2}]$	Seuil de frottement de mise en mouvement des sédiments
Υ	$[M L^{-1} T^{-2}]$	Ordre de grandeur du frottement pariétal
ϖ	$[-]$	$\varpi(x) = x\mathcal{H}_d(x)$ Fonction qui vaut zéro pour $x < 0$ et sinon x
φ_s	[degrés]	Angle de repos statique
φ_d	[degrés]	Angle de repos dynamique
ω	$[T^{-1}]$	Pulsation des rides
Ω	$[T^{-1}]$	Pulsation de l'écoulement oscillant

Introduction

Cette étude entre dans le cadre de la compréhension des mécanismes permettant la formation de structures sableuses par un écoulement de fluide, que ce soit de l'eau ou de l'air.

Les pionniers sont : du Boys [52] pour comprendre la déformation du lit des rivières, Shields et Bagnold [14]–[15]–[16]–[17]–[18] pour comprendre l'initiation du mouvement des grains de sable induit par le fluide au dessus. Ce dernier a une place déterminante dans la compréhension de la formation des motifs de sable. Ses expériences ont permis entre autre la classification de ces motifs.

Certains auteurs comme Blondeaux [28], Vittori et Blondeaux [148], Komarova et Hulscher [77], Andersen, [3], Roos et Blondeaux [116], ... par une étude théorique de stabilité linéaire, ont pu analyser les conditions d'amplification d'une perturbation du fond.

Ils ont ainsi établi que le nombre de Reynolds du fluide dans la couche limite, les nombres de Froude et de Reynolds des sédiments sont des facteurs déterminants de l'instabilité des rides à grains roulant. Ils établissent aussi l'existence d'une zone de stabilité de ces rides à grains roulants qui a néanmoins été mise en cause par des expérimentateurs, dont récemment Rousseaux (2003) [118].

Ils arrivent à la conclusion, comme Bagnold [15], d'un état stable pour les rides à grains roulants.

Ceci montre à quel point le débat sur l'existence de rides à grains roulants stables reste ouvert. C'est ce problème que traite dans une certaine mesure notre étude.

Nous nous focalisons sur ce qui se produit dans la couche limite afin de calculer le fluide (cf Smith [134], Lagrée [86], ...). Le modèle de couche limite fondé sur la théorie de la "triple couche" est ainsi retenu.

Comme Charru et Mouilleron-Arnould [41], Valence et Langlois [144], les équations du fluide sont simplifiées dès le départ en faisant une hypothèse sur les petites dimensions des structures du fond. La différence entre notre étude et ces dernières est que nous simplifions les équations en gardant en tête l'idée de la possibilité de séparation de couche limite; nous partons ainsi d'équations simplifiées non linéaires que nous linéarisons. Ensuite le modèle de flux de matière en fonction du frottement pariétal choisi parmi ceux existant dans la littérature est lui aussi simplifié. Nous obtenons une analyse de stabilité d'un fond érodable.

Premièrement, dans le chapitre 1, nous faisons un inventaire des structures observées dans la nature ou en laboratoire, et nous présentons le critère d'initiation du mouvement des grains.

Puis, pour faire un choix judicieux de la relation liant la quantité de matières transportées à la vitesse de l'écoulement du fluide, nous passons en revue les formulations de flux de la quantité de matière transportée par l'écoulement dans le chapitre 2. Nous en retenons que la quasi-totalité de ces formulations fait intervenir le frottement pariétal.

A travers le chapitre 3, nous simplifions fortement les équations du fluide pour obtenir les équations de Saint Venant que nous couplons à un fond érodable. Cela nous permet de poser un premier problème de stabilité linéaire du fond. Nous montrons que cette simplification est trop forte et qu'il nous faut une meilleure estimation du frottement.

Dans le chapitre 4, nous nous focalisons sur ce qui se passe près du fond, là où le profil de vitesse est linéaire. Nous calculons le frottement sur une petite bosse en utilisant les équations complètes de Navier-Stokes dans un écoulement cisailé pur (correspondant à ce qui passe près du fond). La résolution est faite par un code de Calcul (CASTEM2000) pour différents nombres de Reynolds.

Ensuite, dans les chapitres 5 et 6, sont exposés des modèles simplifiés d'analyse de stabilité linéaire d'une bosse sur son fond érodable sous un écoulement 2D, laminaire, "très visqueux" et "peu visqueux", fondé sur des théories asymptotiques à petit et grand nombre de Reynolds. Trois cas d'écoulements sont traités : l'écoulement s'effectue avec

- un cisaillement constant,
- un cisaillement correspondant à celui d'un liquide freiné,
- un cisaillement correspondant à celui d'un fluide oscillant.

Dans chaque cas, après l'analyse de stabilité du fond érodable, des configurations d'évolutions de ce fond au cours du temps sur la base de la loi d'Exner sont données.

Au chapitre 7, nous présentons la stabilité linéaire d'un fond érodable dans les mêmes configurations et nous présentons le phénomène de murissement ("coarsening") aux temps longs.

Le chapitre 8 montre l'évolution d'une bosse dans un écoulement cisailé sur un fond non érodable.

Lorsqu'un lit de forte pente est cisailé par un contre-écoulement, le transport granulaire est dominé par des avalanches (Loiseleux et Doppler [90]). Pour permettre au modèle de formation des structures d'en tenir compte, nous terminons cette étude par une formulation des avalanches par une approche milieux continus de type Saint-Venant (chapitre 9).

La dernière partie est consacrée aux conclusions et perspectives ainsi qu'à cinq annexes donnant le détail de certains calculs analytiques ou numériques effectués.

Démarche générale de l'étude

Le processus d'interaction fluide/fond peut être décrit en quatre étapes de la manière suivante :

0. Donnée de la morphologie du fond. Au départ de l'étude, nous prenons un fond plat avec un bruit (sur toute la surface du fond) ou une bosse de très faible amplitude.
1. La morphologie du fond étant connue, nous calculons le mouvement du fluide au dessus afin de déterminer le facteur qui influence ce fond : frottement τ sur ce fond (chapitres 3, 4, 5, 6).
2. Lorsque le critère $\tau > \tau_s$ est satisfait (§1.5), le flux q de matières entraînées est couplé au mouvement du fluide à travers une relation du type (chapitre 2):

$$q = q(\tau). \tag{1}$$

3. La loi de conservation des matières initialement au fond, et de celles entraînées, loi due à Exner (2), permet d'obtenir l'évolution du fond. Cette loi s'écrit en une dimension (§2.7) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} q(\tau(x)) \tag{2}$$

où q est le flux instantané de matières transportées par l'écoulement. On pourrait introduire une avalanche très rapide à ce niveau (chapitre 9).

4. Et nous bouclons à l'étape 1 par une nouvelle détermination de la morphologie (chapitres 5, 7, 8). L'ensemble constitue la boucle Fig.1.

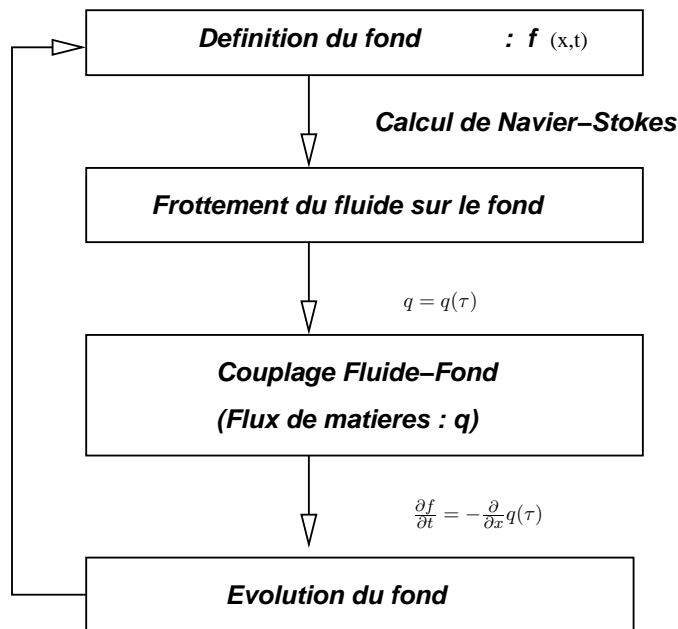


FIG. 1 – La boucle du processus d'interaction : morphologie du fond-Ecoulement de fluide au dessus.

Contexte général

En examinant les embouchures (Fig.1) des grands fleuves de Côte d'Ivoire, on peut s'apercevoir du résultat de l'interaction qui existe entre les écoulements des fleuves et de la mer, et leur fond et/ou leurs berges sableuses. Ceci est particulièrement clair pour l'embouchure du fleuve Comoé à Grand-Bassam qui se trouve obstruée par un lit de sable.

La création d'une deuxième ouverture au système lagunaire à Vridi (Fig.1.1), a entraîné un affaiblissement des courants dans la lagune à l'embouchure au profit du canal. Comme une quantité assez importante de sable est transportée par les courants marins d'ouest en est le long de la côte ivoirienne (Varlet [146], Ibe Chidi [43]), la baisse du pouvoir de compétition du flux sortant de l'embouchure a permis au sable marin, d'une part d'entrer (Abdoul [1], Moulod [98]) dans l'estuaire et d'autre part de constituer une barrière (PNUE [110], Moulod [98]) pour les sédiments entraînés par le fleuve Comoé jusqu'à la lagune.



FIG. 1.1 – Système lagunaire dans la région d'Abidjan en Côte d'Ivoire, débouchant sur l'océan atlantique dans le Golfe de Guinée avec les courants transport des sables marins d'ouest en est (source : <http://aochycos.ird.ne/>).

Ce problème environnemental est un parmi tant d'autres, chacun ayant sa particularité, le long des 600 km environ de côte du pays. Celui entraîné par la réalisation du canal de Vridi, hormis la fermeture de l'embouchure à Bassam, pose de sérieux problèmes d'érosion de la côte à Port-Bouët, commune d'Abidjan (Fig.1 en bas à droite).

A travers cette thèse, nous souhaiterions apporter une contribution à l'étude de ces divers problèmes, en améliorant la compréhension du phénomène hydrodynamique posé.



FIG. 1.2 – Quelques images des embouchures (a): du fleuve Comoé de Grand-Bassam dans la région d'Abidjan (fermée depuis 1993), (b): du fleuve Bandama à Grand-Lahou au centre de la Côte d'Ivoire et (c): de la lagune Aby à l'est de la Côte d'Ivoire; (d) image d'érosion cotière à Port bouët commune d'Abidjan, érosion dont l'avancée est estimée [110][43] à environ 1m/an (Image du Centre de Recherche océanologique d'Abidjan (CRO)[48])

Ainsi, dans ce contexte, nous avons cherché à simplifier très fortement le problème, afin d'exhiber un modèle simplifié d'écoulement de fluide interagissant avec un fond érodable.

Commençons par définir le lit érodable.

1.1 Lit érodable

Ce travail n'a pas pour but de résoudre le problème d'interaction fluide-fond érodable dans sa globalité, mais est focalisé sur la stabilité de l'interface fluide-fond érodable. Ceci exclut la prise en compte de l'érosion des berges : en effet, hormis les modifications du fond, les interactions avec les berges influencent la forme des rivières.¹ Nous supposons que l'écoulement et l'évolution du fond sont invariants dans le sens de la largeur du domaine. Une coupe suivant la longueur du domaine est donnée sur la figure Fig.1.3.

Dans toute la couche comprise entre 0 et f qui définit la hauteur du lit, le milieu est dit granulaire. La nature des forces dans un milieu granulaire ainsi que l'état même du granulaire dépendent de la fraction volumique occupée par les grains (ϕ_p) dont la maximale est ϕ_p^M . Les milieux granulaires présentent en général un comportement assez variable qui les rendent inclassables parmi les trois états habituels de la matière, à savoir solide, liquide et gazeux.

Nous nous plaçons dans le cas où les particules sont non cohésives, indéformables² et non colloïdales de tailles $d > 10^{-5} m$. Les forces browniennes (agitation due à l'effet de la température) et électrostatiques entre particules sont négligées devant les forces hydrodynamiques. Avec de telles particules, le transport lessiviel est exclu (wash load, décrit par Fredsoe et Deigaard [57]). Du fond d'un écoulement à sa surface libre il y a successivement, une suspension très concentrée en particules (milieu granulaire) qui devient une suspension diluée lorsque l'on s'éloigne du fond de l'écoulement. Les particules constituant le fond sont considérées comme étant non-flottantes car plus denses que le fluide. Nous noterons ρ_p la densité

1. Nous pouvons citer entre autre les formes d'embouchure (delta, estuaire), les formes des rivières (tresse, méandre) qui sont traités dans Balmforth et Provenzale [20]

2. Pour des particules déformable la viscosité effective dépend du cisaillement et des différences de contraintes normales, deux caractéristiques des fluides non-newtoniens

des particules et ρ celle du fluide ($\rho_p \gg \rho$). Le rapport ρ_p/ρ est appelé densité relative et vaut 2.65 dans le cas où les grains sont des quartz et le fluide est de l'eau.

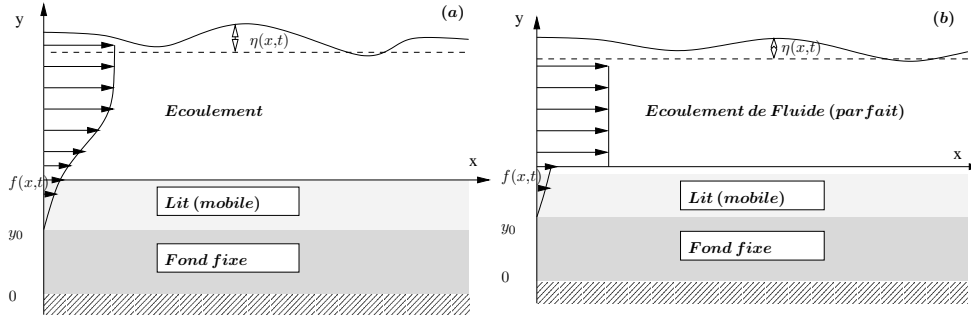


FIG. 1.3 – Coupe transversale schématique du domaine étudié grainulaire/écoulement Dans les deux cas il y a un écoulement interstitiel qui ne sera par considéré dans le cadre de cette étude; nous imposons une condition d'adhérence entre le fluide et le lit mobile; (a) : Écoulement avec une couche limite près du fond; au dessus du lit mobile nous avons un fluide visqueux contenant éventuellement une suspension. (b) : Écoulement au dessus est un fluide parfait (approche simplifiée de Saint-Venant).

Dans la couche délimitée par $0 \leq y \leq y_0$, il y a un empilement compact de sédiments ($\phi_p^m \leq \phi_p \leq \phi_p^M$). La valeur maximale ϕ_p^M correspond à la concentration maximum que peut attendre d'un empilement aléatoire de grains (lorsque les grains sont quasi-sphériques, $\phi_p^M = 0.55$ et peut atteindre la valeur 0.65 lorsque l'ensemble est secoué). Le milieu granulaire a dans ce cas un comportement de solide élastique lorsque les contraintes extérieures sont relativement faibles, ou plastique lorsque les contraintes extérieures sont en mesure de faire glisser les grains les uns sur les autres. Dans un tel domaine il faut faire appel aux lois de la mécanique des solides pour décrire son comportement.

Dans la couche délimitée par $y_0 \leq y \leq f$, il y a des sédiments en suspension dont la fraction volumique est comprise entre zéro et une valeur maximale $\phi_p^m \simeq 0.3$. Il n'y a plus de contacts permanents mais sporadiques entraînant des collisions entre grains. La présence de contraintes extérieures provoquera ici, des écoulements présentant le comportement du granulaire comme un véritable fluide.

Dans la couche délimitée par $f \leq y \leq \eta$, il y a un un fluide pur : $\phi_p = 0$.

Les études du cisaillement d'un tel milieu par un fluide, tel que sur les figures (Fig.1.3) obéissent jusqu'à présent à deux démarches différentes :

- Première démarche : étudier les mouvements couplés du fluide et des grains dans les différentes couches. Cette procédure est très compliquée, car elle suppose la détermination des lois de comportement du mélange, mais elle a l'avantage de ne pas émettre des hypothèses très simplificatrices.
- Deuxième démarche : étudier le mouvement du seul fluide sur une surface $f(x,t)$ donnée à la position x et à l'instant t . Puis, utiliser une relation empirique entre le mouvement du fluide et le flux q de grains pour déduire les modifications de f en résolvant une équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{1.1}$$

Tout le danger de cette approche simplifiée est dans la pertinence du lien entre le flux de grains et le mouvement du fluide. Ici tout le fond est considéré comme une "boîte noire" (Fig.1.4)

Il existe un écoulement dans la partie mobile du lit granulaire (écoulement interstitiel, voir figure Fig.1.3) qui devrait être pris en compte. Cet écoulement correspond à une infiltration de type Darcy. Par un suivi de particules marquées dans le lit rendu transparent par une adaptation des indices optiques, Charru et Mouilleron-Arnould [41] ont réalisé des mesures de profil de vitesse de l'écoulement interstitiel. Pour eux, ces profils de vitesse mesurés sont paraboliques, et ne correspondent à aucun des (rares) modèles existants.

Nous nous limiterons au calcul de l'écoulement au dessus de la couche mobile. Dans la même étude, Charru et Mouilleron-Arnould [41] montrent que le profil des vitesses des particules à l'interface fluide/particules est exponentiel. L'ordre de grandeur de ces vitesses étant typiquement de l'ordre du dixième de la vitesse du fluide à un diamètre de grain au dessus.

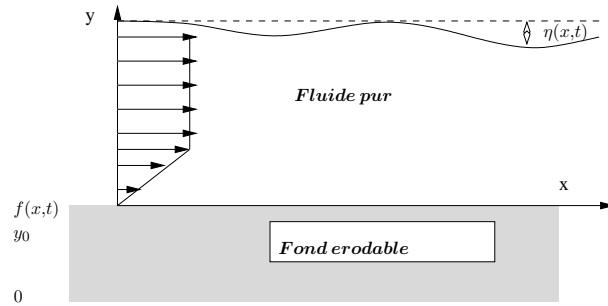


FIG. 1.4 – *Domaine représentant la configuration de la deuxième démarche. Tout le fond est pris comme une "boîte noire" ($y_0 = f(x,t)$).*

Toute la suite de cette étude utilise la deuxième démarche. Ayant simplifié le milieu granulaire, deux approches sont alors souvent utilisées.

La première approche consiste à considérer un fluide parfait au dessus du lit mobile. Une vitesse moyenne $U(x,t)$ sur toute la hauteur de l'écoulement du fluide parfait est considérée :

$$U = \frac{1}{h} \int_f^{H_0+\eta} u(x,y,t) dy, \quad (1.2)$$

où u désigne la vitesse locale dans le fluide, $f(x,t)$ la forme du fond (en fait la limite du lit mobile et du fond Fig.1.3), $\eta(x,t)$, la forme de la surface libre, $h = H_0 + \eta - f$ la hauteur totale du fluide, et H_0 est la hauteur de l'écoulement lorsque le fond et la surface libre sont plats ($f = \eta = 0$). Cette approche est résolue par les équations communément connues sous le nom des équations de Saint-Venant. Elle est utilisée pour calculer les hauteurs (ondes de surface), les courants (dans une eau peu profonde) et aussi pour décrire (Reynolds [112], Baines [19], Balmforth et Provenzale [20]) l'interaction d'une rivière avec son fond. Il faut néanmoins signaler à ce niveau que cette approche ne permet pas d'avoir une bonne estimation de la vitesse de friction : en effet puisque par cette étude la vitesse est uniforme (Fig.1.3–(a)) sur toute la hauteur du fluide, la vitesse de friction et par conséquent le frottement pariétal sont donnés de manière phénoménologique (coefficients de Manning, Strickler, Chézy, ...).

Nous faisons une analyse rapide au chapitre 3 pour montrer les limites du modèle de Saint-Venant.

Lorsque la viscosité n'est pas négligée, l'hypothèse d'un profil de vitesse uniforme n'est plus adaptée à la compréhension des processus près du fond : tout le mécanisme de transport de sable débute dans la couche limite.

Commençons par une brève présentation des différents motifs résultants de l'interaction de l'écoulement d'un fluide sur un milieu granulaire.³

1.2 Structures sur le fond sableux d'un écoulement

Bien qu'il existe une différence d'approche⁴ pour les études de rides éoliennes et aquatiques, qualitativement les structures observées à l'interface entre un tas de sable et un fluide au-dessus, qu'il soit l'eau ou le vent sur Terre ou sur Mars, sont les mêmes (Fig.1.5). La différence provient du fait que le vent ayant une densité très inférieure à celle des grains de sables, le régime considéré est en général turbulent. Les figures Fig.1.5 illustrent des structures naturelles de dunes éoliennes, tandis que les figures Fig.1.6 montrent des structures naturelles engendrées par le contact mer/sable. Toutefois sur les plages les structures formées sont dues à la fois au vent et à l'eau.

3. Pour des détails sur les milieux granulaires consulter les références suivantes : Clift et coll. [44], Guyon et Troadec [68], Duran [53], ...

4. En aquatique les flux de matières est proportionnel au cube de la vitesse de cisaillement alors qu'en éolien, c'est le carré de la vitesse de cisaillement. En éolien l'écoulement est toujours turbulent à cause du rapport de densité entre le vent et les grains de sable.

Une des méthodes utilisées pour rechercher des preuves de l'existence de l'eau sur la planète Mars consiste justement à répertorier les rides et à essayer de distinguer celles qui auraient pu être faites par de l'eau de celles qui sont engendrées par le vent.

1.2.1 Nomenclature des motifs

Les critères de classification (Bagnold [16] est l'un des précurseurs de cette nomenclature) sont : l'amplitude (la hauteur des ondulations du fond) et la longueur d'onde (distance entre les sommets de deux ondulations consécutives). La table 1 page 286 de l'article de Komarova et Newell [78] donnent une classification par nom des motifs, type d'écoulements, taille des grains, et par auteur. Nous distinguons en général :

- les rides qui ont des longueurs d'onde allant du centimètre à des dizaines de centimètres; les plus petites, qui sont les premières observables (dans un processus fluide/sable), sont appelées rides à grains roulants; lorsqu'elles grossissent par un processus dit de coalescence, elles se muent en rides à tourbillons quand la hauteur est telle qu'il se forme un tourbillon au pied des ondulations.
- les dunes qui ont des longueurs d'onde allant du mètre à des centaines de mètres voir des kilomètres (dune du Pyla, Barkhanes);

1.2.2 Quelques motifs éoliens sur terre et sur mars

On consultera l'article de Tsoar [143] pour une revue plus complète.

Les formes des motifs sont : allongée, étoilée ou en forme de croissant (Barkhanes) comme le montre les figures Fig.1.5.

Dans l'article de Tsoar [143] sont présentées des photos aériennes de dunes éoliennes dont les formes se retrouvent dans Fig.1.5. Ce sont des dunes obtenues avec des cisaillements venant tantôt d'un coté tantôt de l'autre de la crête et de façon obliques par rapport à la dune. Dans le cas de cisaillements bidirectionnels avec des directions opposées, les formes sont

Les dunes sont lorsqu'il n'existe pas de direction fixe pour les vents.

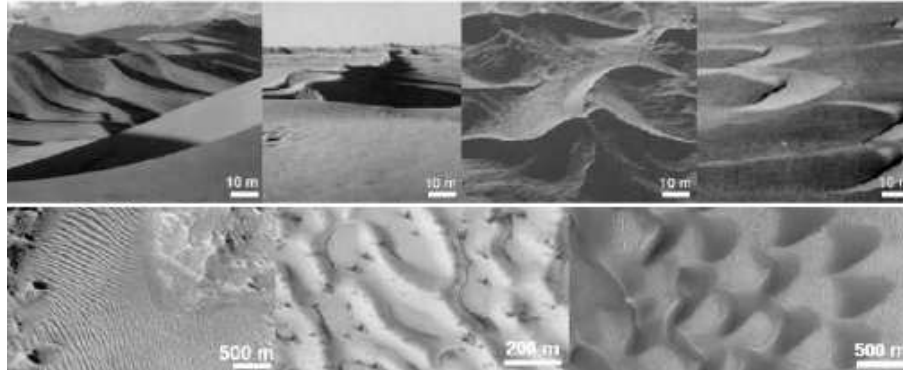


FIG. 1.5 – D'autres photos de structures fluide/sable (Caps [36] p. 19). En haut : dunes transversales, dunes longitudinales, dunes étoilées, et barkhanes sur terre. En bas : Images satellite d'une région couverte de dune transversales, vue de petite rides transversales sur les grandes, images de barkhanes sur mars (photos issues de la page web : <http://www.space.com/imageoftheday/>)

1.2.3 Quelques motifs aquatiques

Les motifs se développent avec des courants relativement faibles et n'apparaissent que si les particules ont un diamètre inférieur à 0.6 mm . Il semble (d'après Bonnefille [29]) que des motifs ne peuvent se former que lorsque la sous-couche visqueuse⁵ n'est pas entièrement détruite. Comme la sous-couche visqueuse s'amincit lorsque la vitesse du courant augmente, il est peu probable que les rides apparaissent avec des

5. L'ordre de grandeur de la couche visqueuse, l'échelle visqueuse est donnée par la relation (6.22) page 83, qui est l'échelle typique des motifs du fond (en considérant l'amplitude et la longueur d'onde du même ordre de grandeur)



FIG. 1.6 – Types de structures de plage (voir Bensahri and C. Coppens [23]) : (a) Apparition de rides puis de dunes (à partir d’une certaine vitesse des courants). Elles peuvent avoir des hauteurs de l’ordre du mètre ou plus et les longueurs d’onde peuvent être de plusieurs mètres voir des dizaines de mètres. L’écoulement est en général perturbé jusqu’à la surface. Lorsque le courant est encore plus fort, les dunes et rides disparaissent pour un cisaillement unidirectionnel sur un fond plat. (b) A des vitesses encore plus grandes, apparaissent les antidunes. Les antidunes remontent le courant bien que le transport physique se fasse dans le sens de l’écoulement. D’après le schéma de Van Rijn [115] sur les modes de migration des dunes et des antidunes, l’on peut voir qu’il y a, par rapport au sens de l’écoulement, érosion sur la face amont de la dune et sédimentation sur la face aval de la même dune. Par contre pour les antidunes, l’érosion a lieu sur la face avale d’une antidune avec des sédiments qui se déposent sur la face amont de l’antidune suivante. Nous verrons l’explication de ce phénomène au paragraphe 3.4.4. Des images (cf. Fig.3.4.4) et des films d’antidunes peuvent être visionnés sur le site : <http://www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/SEDIM/DUNES/antidunes.html>.

courants rapides ou avec des sédiments à grands diamètres.

Le temps mis pour obtenir les motifs est de quelques minutes pour les rides à grains roulants. Il atteint des milliers d’années par exemple pour les dunes observées près de la “mer moire” (figure 1.7-B), dunes obtenues par l’action conjointe du vent et des vagues.

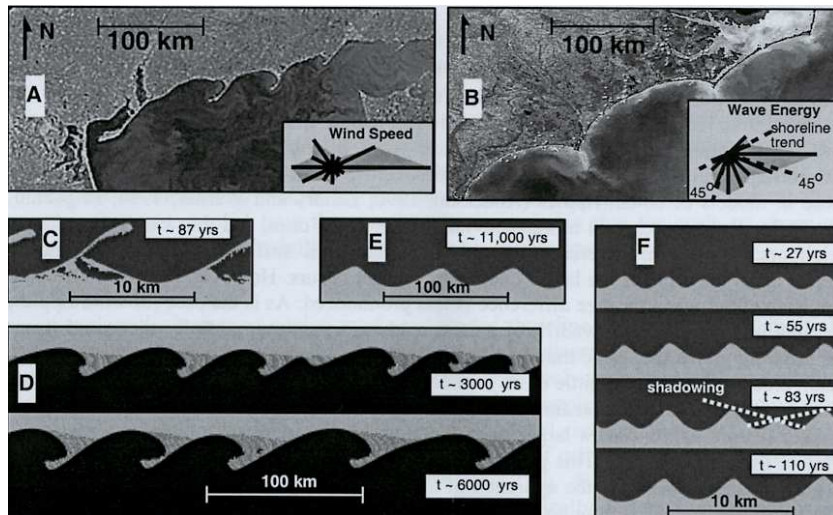


FIG. 1.7 – A, le littoral de la mer d’Azov partie de la “mer noire”. B, les caps de la Caroline, USA. C et D, motifs offshore avec des houles de gauche plus importantes (en fréquences) que celles venant de droite. E et F, la fréquence des houles est la même de la gauche comme de la droite. Images issues de Murray et Ashton [99]; les figures C, D, E, et F sont des résultats de simulations numériques du modèle de Murray et Ashton [99].

A l’intérieur des deux grandes familles (rides et dunes), il y a aussi l’orientation par rapport à la direc-

tion de l'écoulement qui permet le regroupement des rides et des dunes en des sous-familles. L'orientation des motifs est le fait de l'intensité et de la direction des écoulements (Tsoar [143]). On cite par exemple pour les rides, les rides d'oscillation, dues au mouvement des vagues à l'approche des côtes et qui sont parallèles à la plage. On cite également les rides de courant qui sont quant à elles dues au effet combinés des variations de marées ainsi que du mouvement du vent; dans les rivières, elles sont générées par des écoulement unidirectionnels.

1.2.4 Formes expérimentales

Pour comprendre le processus de leur formation, les motifs du fond d'un écoulement ont été reproduits par des études expérimentales dont les premières sont celles d'Ayrton [12] en canal plan et Bagnold [15] en canal incurvé (figure Fig.1.8).

Bagnold [15] observe déjà en 1946 deux classes (paragraphe 1.2, page 4) de structures formées au fond: les premières plus petites en tailles sont dénommées rides à grains roulant; lorsque ces dernières deviennent grandes au point de faire apparaître un courant de retour, elles sont appelées rides à vortex.

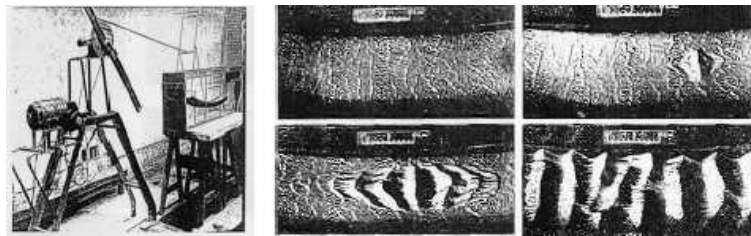


FIG. 1.8 – *Expériences des Bagnold [15] qui ont permis de faire les premières classifications des motifs. Un plateau recouvert de sable est placé dans de l'eau de façon inclinée et est oscillé. A gauche, vue du système expérimental; à droite, résultats expérimentaux: les rides dites à grains roulants (en haut), sont progressivement remplacées par des rides à vortex (en bas).*

D'autres études expérimentales ont été effectuées et certaines d'entre elles vont être présentées en les regroupant selon le type de l'écoulement: écoulement continu (correspondant dans la nature aux canaux, rivières) et écoulement oscillant (vagues de surface).

Stegner et Wesfreid [135], Scherer et coll. [127], (Fig.1.9–à gauche) étudient la formation des rides et leur stabilité. Les rides à grains roulants atteignent un état stationnaire de rides à vortex. Les facteurs qui gouvernent la longueur d'onde et la forme des rides finales sont l'amplitude de déplacement du fluide et l'angle de repos statique du lit granulaire.

Par mesures PIV, Rousseaux [118]-[120] a pu décrire la structure de l'écoulement associée à l'étape de transition entre les deux types de rides. Il conclut à la non existence de rides à grains roulant stables: il n'observe de rides à grains roulant qu'au seuil de mise en mouvement.

Mouilleron-Arnould [97] s'intéresse à la situation où les effets visqueux dominent les effets inertiels. Des mesures du profil des vitesses sont effectuées dans l'épaisseur de la couche mobile grâce à un suivi des particules marquées dans le lit rendu transparent par une adaptation des indices optiques. Cette expérience a permis de définir un modèle d'érosion et de sédimentation (Charru et Mouilleron-Arnould [42]). La vitesse du fluide entre les grains a été également mesurée, ce qui permet d'en déduire le transfert de quantité de mouvement du fluide aux grains.

Pour un fond cisailé par un fluide visqueux, Charru et Mouilleron-Arnould [41] ont montré que pour de grandes épaisseurs de couche limite, les grandes longueurs d'onde (des motifs du fond) sont déstabilisées dès que les grains commencent à bouger; alors que les petites longueurs d'onde restent stables grâce à la gravité. Cependant pour de petites épaisseurs de couche limite, les effets déstabilisants de l'inertie du fluide s'avèrent réduits à tel point qu'une interface (fluide/fond) initialement plate reste stable pour des petits cisaillement et devient instable lorsque le cisaillement s'accroît. Lorsque la viscosité du fluide augmente, les rides persistent sous un écoulement oscillant, mais disparaissent sous un écoulement continu.

Dans les travaux de Thomas [141] qui ont été poursuivis par Zoueshtiagh et Thomas [157][158], l'effet de la force de Coriolis est mis en jeu. Le dispositif expérimental est constitué de cuve circulaire de rayon

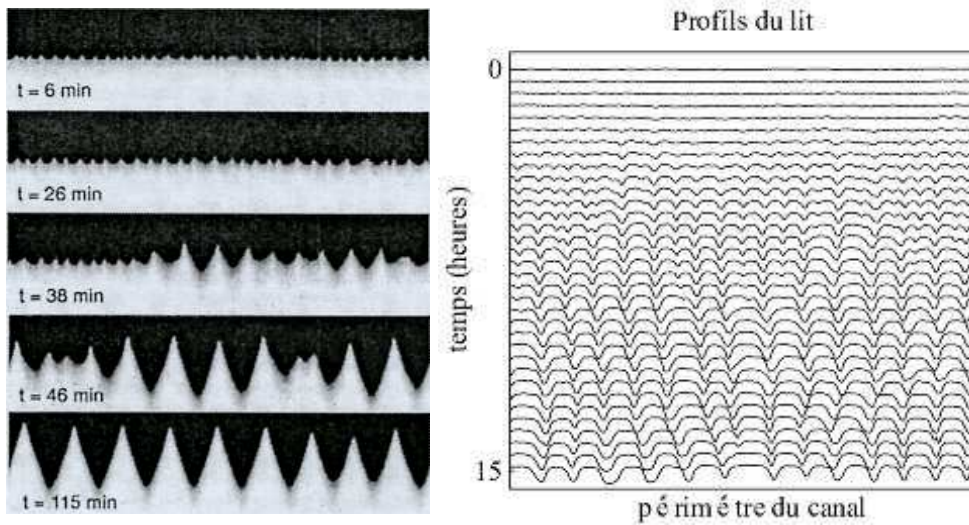


FIG. 1.9 – Evolution de l'amplitude et de la longueur d'onde des rides mesurées expérimentalement sous un écoulement oscillant. A gauche, Stegner et Wesfreid [135]: cas d'un fluide peu visqueux; à droite, fluide visqueux (Mouilleron-Arnould [97])

$2A = 1\text{m}$, dans lequel sont disposés des grains de diamètres $0.110 < d < 3.17\text{mm}$ uniformément dans la cuve. Les grains sont recouverts d'un fluide et l'ensemble est mis en rotation. L'expérience consiste à préparer l'ensemble fluide/fond érodable en faisant tourner la cuve à un taux de rotation initial Ω_0 pour lequel le fond reste stabilisé. Puis une accélération de $\Delta\Omega$ ramène le taux de rotation à Ω_1 . Sous l'effet de d'instabilité laminaire de la couche limite d'Ekman, des motifs en spirale se créent. r_0 est le rayon à partir duquel les structures sont formées (Fig.1.10). Les motifs proches du centre, ont une longueur d'onde $\lambda_0 = 2\pi r_0/n$, le nombre total de spirales n est $7 < n < 110$. La longueur d'onde initiale des motifs loin du centre est corrélée au forçage du système, $\lambda \propto U = \Delta\Omega A$, contrairement au cas uniforme unidirectionnel et oscillant où la longueur est estimée (Bagnold [15]) proportionnelle à la racine carrée du diamètre typique des grains, \sqrt{d} .

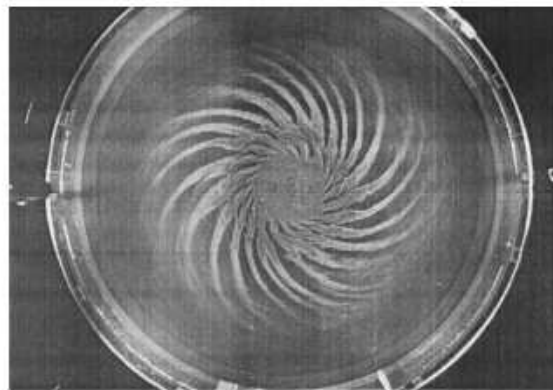


FIG. 1.10 – Motifs en spirale issus de l'expérience de Zoueshtiagh et Thomas [158]. $\Delta\Omega = 2.15\text{rads}^{-1}$, $\Omega = 3.16\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, les grains de diamètre $0.110 < d < 3.17\text{mm}$ ont pour densité $1.28 < \rho_p < 7.9\text{gcm}^{-3}$.

Loiseleux et coll. [90], dans un cas de cisaillement continu sur des grains dans un canal incliné, se sont intéressés à la formations de rides en tenant compte des avalanches qui se produisent de part et

d'autre de chaque dune. Pour divers diamètres de grains et pour divers angles d'inclinaison du lit, le seuil d'érosion du fond est établi. Aucun régime saturé n'est atteint pour les caractéristiques (longueur d'onde, amplitude, vitesse de phase) des motifs du fond : aux temps courts il y a une croissance algébrique de la longueur d'onde des motifs, et aux temps longs la croissance est logarithmique.

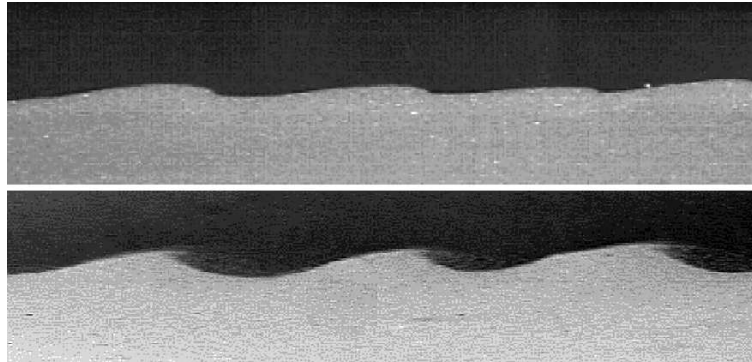


FIG. 1.11 – *Rides triangulaires (lit peu incliné) en haut et rides à tourbillon (en configuration très inclinée) en dessous (Doppler [50]).*

Caps [36], a repris récemment les expériences de Thomas [141], et de Zoueshtiagh et Thomas [157]–[158]. Il les a adaptées à des configurations d'accélération ou de décélération brusque des granulés. L'interaction entre la couche d'Ekman et les caractéristiques des motifs est analysée.

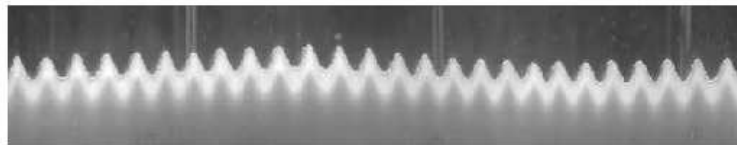


FIG. 1.12 – *Interface stationnaire fluide/granulaire réalisée par Caps [36]. L'écoulement initial est dirigée de la droite vers la gauche, puis freiné brusquement.*

1.2.5 Motifs issus d'études théoriques

Des modèles analytiques et numériques ont été élaborés afin d'essayer de comprendre les résultats expérimentaux qui sont allés dans bien des cas au delà des hypothèses déjà difficiles à mettre en oeuvre expérimentalement.

Nous pouvons classer les études théoriques et numériques en trois grands groupes selon l'échelle à laquelle le problème est considéré (cf. page 3):

- les modèles dits *continus* sont les noms donnés aux études qui considèrent le problème à l'échelle de la particule (Zoueshtiagh et Thomas [157]–[158], Sauermann et coll. [123], Kroy [83]). Dans le cas éolien, Nishimoro et Ouchi [104] établissent un modèle simplifié de transport en saltation et en reptation. Ce modèle est un *modèle continu* au sens où il s'agit d'"automates cellulaires" dont les cellules sont des champs de variables continues. Le temps et l'espace sont discrétisés (modèle CML: Coupled Map Lattice). Les images (Fig.1.2.5) obtenues par Caps [36] avec ce modèle sont semblables à celles de dunes naturelles des figures Fig.1.5.
- Les *modèles discrets* sont consacrés à l'empilement des grains (Terzidis et coll. [140]).
- Les *modèles hybrides* reposent sur les équations de Navier Stokes pour le fluide et sur des formules empiriques pour le fond. Nous citons entre autres les auteurs: Lyne [93], Sleath [128],

Kaneko [73], Blondeaux [28], Komarova et Hulscher [77] Komarova et Newell [78], Charru et Hinch [38], Balmforth et Provenzale [20], Charru et Mouilleron-Arnould [41]–[42] Valance et Langlois [144]–[89]...

Notre approche se situe dans ce dernier contexte, mais elle utilise l'échelle des particules dans l'étude asymptotique des équations du fluide.

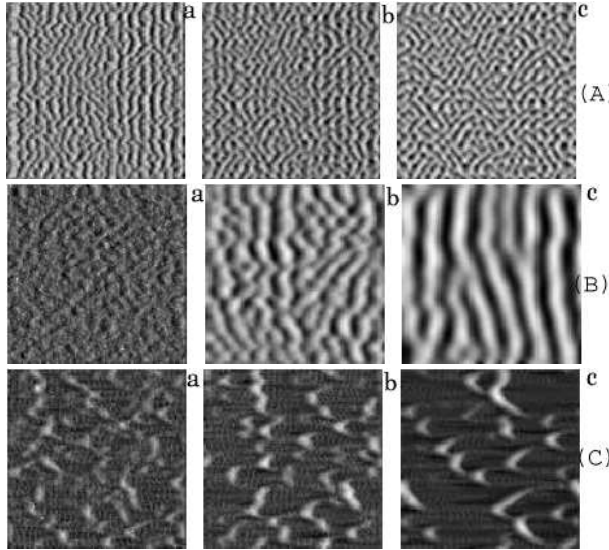


FIG. 1.13 – *Reproduction de motifs à partir du modèle de Nishimoro et Ouchi [104] par Caps [36]. Pour (A), le fluide est dirigé de la gauche vers la droite pour $t < 3 \cdot 10^6$ puis du bas vers le haut : les rides sont en labyrinthe : (a), $t = 2.5 \cdot 10^6$ itérations; (b), $t = 3.9 \cdot 10^6$ itérations; (c), $t = 6 \cdot 10^6$ itérations. Pour (B), le fluide est dirigé de la gauche vers la droite; les rides sont transversales : (a), $t = 10^6$ itérations; (b), $t = 10^7$ itérations; (c), $t = 2.5 \cdot 10^7$ itérations. Pour (C), le fluide est dirigé de la gauche vers la droite; les rides ont des formes de croissants (Barkhanes) : (a), $t = 10^6$ itérations; (b), $t = 2 \cdot 10^6$ itérations; (c), $t = 5 \cdot 10^6$ itérations.*

1.3 Paramètres adimensionnels du système

Ayant fait cet inventaire de formes, examinons de manière simple, les forces qui s'exercent sur les grains.

Les différentes variables du système qui permettent de mettre un grain en mouvement sont : la taille d'un grain d , la contrainte de cisaillement du fluide au lit granulaire $\tau(0)$, la force F exercée par le fluide sur les grains, la force de cohésion F_G exercée par les grains entre eux, la viscosité cinématique du fluide ν et les densités ρ, ρ_p du fluide et des grains respectivement.

Dans les écoulements laminaires que nous allons considérer uniquement par la suite, la contrainte de cisaillement du fluide sur le lit granulaire $\tau(0)$ au fond (en $y = 0$) :

$$\tau(0) = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(y = 0). \quad (1.3)$$

Pour un écoulement turbulent (que nous ne considérerons pas) sur une surface rugueuse de rugosité y_0 , le cisaillement du fluide au lit granulaire $\tau(0)$ est relié à la vitesse de friction u_f par des lois empiriques (Schlichting [126], Tritton [142]) de la forme :

$$\tau(0) \propto \rho u_f^2 \quad (1.4)$$

La vitesse du fluide, à une hauteur y_0 du fond⁶, dans le cas d'un écoulement stationnaire uniforme et turbulent (approche Kz) avec une distribution hydrostatique de la pression, est :

$$\mathbf{u}(y) = \frac{u_f}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right). \quad (1.5)$$

où κ est la constante de Kármán. La loi (1.4) est mise en cause dans certains cas, notamment par l'analyse de stabilité du fond érodable dans l'approche Saint venant (*cf.* conclusion de chapitre 3).

6. dans le cas éolien y_0 est de l'ordre de $d/30$ (Nielsen [103] p. 66)

Nous noterons dans la suite dans un soucis de simplicité τ pour $\tau(0)$.

Une étude des paramètres de similitude permet de définir quatre paramètres sans dimension associés à l'état du système fluide/granulaire :

- le rapport de densité $s = \rho_p/\rho$, ou densité relative des grains,
- le rapport d/L de forme entre le grain (ou l'épaisseur de la perturbation du fond) et la longueur caractéristique de l'écoulement (la hauteur $L = H_0$ de l'écoulement au chapitre 3 ou l'épaisseur de la couche limite $L = \delta$ à partir du chapitre 4),
- le nombre de Reynolds des particules :

$$Re_p = \frac{u_p d}{\nu} \quad (1.6)$$

Si H est la hauteur typique du fluide qui sera prise égale à δ , la hauteur de couche limite dans la théorie asymptotique et U la vitesse typique du fluide dans la direction de l'écoulement à la hauteur H au dessus du fond, la pente de vitesse près du fond (taux de cisaillement) est $\gamma = U/H$. La vitesse du fluide à une hauteur y du fond s'écrit $u(y) = \gamma y$, celle à la surface supérieure d'un grain du lit est $u_p = \gamma d$. Le nombre de Reynolds des particules Re_p est lié au nombre de Reynolds du fluide :

$$Re = \frac{\gamma H^2}{\nu} \quad (1.7)$$

par le rapport de forme d/H à travers la relation : la relation :

$$Re_p = \left(\frac{d}{H}\right)^2 Re \quad (1.8)$$

- le rapport, entre les forces dites "destabilisantes" et les forces dites "stabilisatrices" de la cohésion du granulaire, plus connu sous l'appellation de nombre de Shields (*cf.* relation (1.26), page 15). Ce facteur est déterminant pour la mise en mouvement des grains. Nous allons l'introduire dans la section suivante.

Pour comprendre la signification de ce rapport de force à l'interface fluide/grains, nous effectuons un bref rappel des forces.

1.4 Forces d'interaction : fluide-particules

Cette partie est une synthèse rapide des articles de du Boys [52], Nielsen [103], Fredsoe et Deigaard [57], Loiseleux et coll. [90].

1.4.1 Forces dues au poids des particules

Les forces exercées sur les particules sont une conjonction de plusieurs effets : l'effet de leur poids et la réaction des autres grains due aux contacts contre-balançant les forces exercées par le fluide. Ces forces de contact permettent de maintenir la cohésion du lit. La résultante des forces inter-particules, contrebalance le poids apparent que nous notons F_G (figure Fig.1.14).

$$\mathbf{F}_G = M g = C_p \frac{\pi d^3}{6} (\rho_p - \rho) g. \quad (1.9)$$

où M est la masse de la particule sur laquelle s'établit le bilan des forces et C_p est un coefficient corrigeant les défauts éventuels d'homogénéité et de sphéricité (C_p vaut 1 pour un grain homogène et sphérique).

Lorsque le fluide est en mouvement, l'effet de l'inertie du fluide (frottement) s'ajoute à la gravité et à la poussée d'Archimède.

1.4.2 Forces dues au fluide

L'ensemble des forces dues au fluide a tendance à arracher les grains de leur lit granulaire (effet destabilisant). Ces forces sont de deux types :

- Lorsque les cisaillements du fluide sur le lit du fond sont négligeables (cas des fluides parfaits), la contribution est essentiellement liée au gradient de pression, entre la surface supérieure et inférieure d'un grain, et à la courbure des lignes de courant.

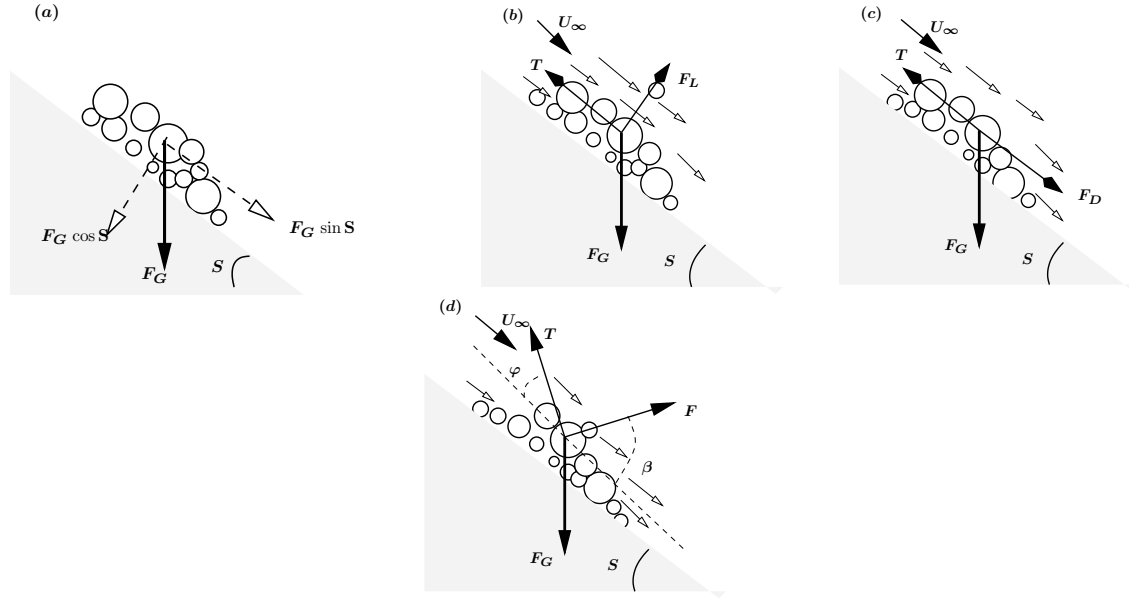


FIG. 1.14 – Forces exercées sur un lit (constitué d'un ensemble de particules) de forme f incliné d'un angle S avec l'horizontale ($\tan S = -\partial f/\partial x$); (a), dans le cas statique; (b), dans le cas dynamique avec un fluide parfait (pas de traînée); (c), dans le cas dynamique avec un fluide très visqueux (la traînée se substitue à la portance); (d), dans le cas dynamique avec un écoulement turbulent (coexistence de traînée et de portance)

Les forces de pression hydrostatiques dérivent de la relation de quantité de mouvement en négligeant les contraintes de cisaillement :

$$\rho \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) = - \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (1.10)$$

La composante verticale de cette force est la poussée d'Archimède dont on tient en général compte dans la poids apparent (1.9). Sa composante horizontale est la force de masse ajoutée notée ici

$$F_P = \rho (s + C_M) \frac{du_p}{dt} \quad (1.11)$$

avec C_M coefficient de masse ajoutée (masse virtuelle du grain immergé), et du_p/dt étant la composante horizontale de l'accélération des grains (Nielsen [103]).

Pour un fluide "idéal" non visqueux, en plus des forces de pression, le fluide exerce une force verticale de portance (F_L , figure Fig.1.14–(b)) sur les grains du lit. Cette force est due à la courbure des lignes de courant et à la séparation de la couche limite qui peut éventuellement avoir lieu. Les forces F_L sont proportionnelles (Nielsen [103]) au carré de la vitesse caractéristique du fluide à l'endroit considéré, soit :

$$F_L = \frac{\rho \pi}{8} C_L d^2 (\gamma d)^2, \quad (1.12)$$

où C_L est le coefficient de portance est égal à 11/16.

- Dans le cas d'un écoulement de fluide visqueux ou turbulent, une contribution des forces du fluide a pour effet d'entraîner les grains dans le mouvement du fluide (traînée, proportionnelle à la force de portance F_L). Du fait de la rugosité du fond une force de friction opposée au mouvement du fluide est produite.

La force de traînée est notée F_D (figure Fig.1.14–(c)); elle est dirigée dans le sens du mouvement du fluide.

$$F_D = 3 A \rho \nu \pi \gamma d^2 F(Re_p), \quad (1.13)$$

où A est un coefficient qui tient compte de la forme des grains. Pour des particules de forme sphérique, lisse ou rugueuse, sur un lit plan soumis à un cisaillement uniforme, $A \simeq 1.70$ (King et leighton [76]). $F(Re_p)$ est une fonction du nombre de Reynolds des particules du lit (Re_p)

corrigeant la force de Stokes⁷ lorsque $Re_p < 1$. Pour des valeurs du nombre de Reynolds comprises entre 0 et 1000, une bonne approximation est (Clift et coll. [44]) :

$$F(Re_p) = 1 + 0.15 Re_p^{0.69}. \quad (1.14)$$

Cependant, quand Re_p est assez grand $F(Re_p)$ tend vers $C_D Re_p/24$, le coefficient de traînée C_D vaut alors 0.4. La vitesse du fluide près du fond est approximée par (γd) et correspond à u_f de la relation (1.5) dans le cas turbulent.

La force de friction T due à la contrainte exercée par le fluide sur le lit (voir figure Fig.1.14) et dont le sens est opposé à celui du mouvement du fluide. Cette force fait en général un angle φ avec le plan de l'écoulement. Le maximum de la friction peut être modélisé par la force de friction de Coulomb (résultante des contraintes tangentielles), et dans ce cas son module est proportionnel à la résultante des contraintes normales ($\sigma = M g \cos(S)$ en statique).

$$|T|_{max} = \mu \sigma, \quad \text{vaut en statique} \quad |T|_{max} = \mu M g \cos(S) \quad (1.15)$$

où le coefficient de friction est noté μ .

En dehors du régime complètement visqueux, les forces de traînée et de portance coexistent. La résultante (F) de ces deux forces est une force faisant un certain angle β avec le lit du fond.

Lorsque l'écoulement est oscillant, le nombre de Keulegan Carpenter est défini comme étant le rapport entre les amplitudes maximales des forces de pression (la force de masse ajoutée) et des forces de traînée :

$$|F_P|_{max}/|F_D|_{max} = d/A, \quad (1.16)$$

si A est l'amplitude du mouvement du fluide oscillant. Le nombre de Keulegan Carpenter d/A est très petit, pour des valeurs de tailles de grains de l'ordre 0.2 mm et des amplitudes du mouvement du fluide de l'ordre de 0.1 à 2 m. Dans ce cas, les forces de masse ajoutée peuvent être négligées au profit des forces de traînée.

1.4.3 Vitesses caractéristiques

On remarque que la mise à l'équilibre d'une particule soumise à la force de gravité (force d'Archimède) et à la force de frottement due au fluide (force de frottement totale de Stokes) mène à l'équation de la dynamique :

$$(1/6\pi d^3)\rho_p dv/dt = (1/6\pi d^3)(\rho_p - \rho)g - 6\pi\mu v d/2 \quad (1.17)$$

et fait apparaître un temps caractéristique et une vitesse caractéristique (vitesse de Stokes):

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{V_s - v}{T_{Stokes}} \quad \text{avec} \quad T_{Stokes} = \frac{\rho_p d^2}{\rho \nu}, \quad \text{et} \quad V_s = \frac{d^2}{18\rho\nu}(\rho_p - \rho)g. \quad (1.18)$$

On a ainsi déterminé la vitesse de sédimentation, dans le cas très visqueux pour un grain sphérique de diamètre d . Le temps caractéristique de déposition, dans le cas visqueux est d/V_s (cf. Charru et Mouilleron-Arnould [42]).

De même, l'autre cas limite correspondant à un mouvement turbulent du fluide autour de la particule, nous permet d'écrire une équation de mise à l'équilibre:

$$(1/6\pi d^3)\rho_p dv/dt = (1/6\pi d^3)(\rho_p - \rho)g - C_D \pi d^2/4v^2 \quad (1.19)$$

Cette fois comme noté par Andreotti [7], c'est une longueur caractéristique qui apparaît naturellement :

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{V_s^2 - v^2}{l_{sat}} \quad \text{avec} \quad l_{sat} = \frac{\rho_p}{\rho} d = s d. \quad \text{et} \quad V_s = \sqrt{\frac{(\rho_p - \rho)gd}{\rho C_D}}. \quad (1.20)$$

Cette longueur est fondamentale, nous la retrouverons dans la suite.

Ces vitesses, longueur et temps sont ensuite systématiquement utilisées pour dimensionner les phénomènes. Il s'agit d'une résolution hyper simplifiée des équations de la mécanique pour les grains qui traduit notre ignorance des équations exactes.

7. Dans la force de traînée se trouve la force de Stokes, $3\rho\nu\pi\gamma d^2$ sur une particule sphérique dans un écoulement de fluide homogène et infini (lorsque Re_p tend vers 0 ou pour $F(Re_p)$ valant 1).

1.5 Critères de mise en mouvement des grains

Les paramètres du fluide qui sont pertinents dans la définition d'un critère de mise en mouvement des grains sont différents selon les études, mais vont mettre en jeu les quantités précédentes.

Les lois d'entraînement de M. Scipion Gras sur les torrents des Alpes (Annales des ponts et Chaussées, 1857, 2^e semestre) résumées par du Boys 1879 [52] dans les formulations "*un caillou posé au fond d'un courant liquide, peut être déplacé par l'impulsion des filets qui le rencontrent : le mouvement aura lieu si la vitesse est supérieure à une certaine limite qu'il (S. Gras) nomme vitesse d'entraînement. Cette vitesse limite dépend de la densité, du volume et de la forme du caillou; elle dépend aussi de la densité du liquide et de la profondeur du courant.*"

L'effet d'entraînement de l'eau sur les cailloux a été ensuite analysé par de nombreux auteurs après du Boys. L'entraînement est croissant avec le débit et la pente du lit et il est proportionnel au carré des dimensions des cailloux.

L'idée de du Boys était de rapporter les efforts d'entraînement à des données susceptibles de mesures exactes : la pente du lit et la profondeur de l'écoulement, plutôt que le cisaillement. Ses analyses, et celles (dont Shields) qui ont suivi, sont fondées sur le rapport entre les forces d'entraînement du courant et les forces résistantes du fond.

1.5.1 Angle de repos : critère de du Boys

Initialement stable, il existe une direction et un point pour lequel la résultante des contraintes tangentielle T atteint une valeur seuil T_c permettant de destabiliser l'équilibre du lit. L'angle de repos, est le rapport entre la contrainte tangentielle critique T_c et la contrainte normale σ exercée sur le lit. Lorsque le lit ne subit pas de cisaillement (le fluide supérieur est au repos), l'angle de repos est dit statique et il est noté φ_s . Dans le cas où le lit subit un cisaillement au dessus, l'angle de repos est dit dynamique φ_d . L'angle de repos statique est fonction du vieillissement du lit granulaire et de l'humidité (dans ce cas, il s'agit en fait d'une boue, et le granulaire s'écoule en bloc). Les deux angles sont du même ordre de grandeur (Nielsen [103] p. 95): compris entre 10 et 30 degrés pour des grains de mêmes tailles de formes sphériques avec des surfaces lisses; par contre pour des grains de tailles différentes de formes irrégulières avec des surfaces rugueuses, les angles sont compris entre 26 et 34 degrés. Les valeurs élevées des angles de repos sont obtenues dans les régimes de faible nombre de Bagnold). Bien entendu dans le cas aquatique, du fait de la tension de surface, les valeurs sont supérieures au cas d'un granulaire sec.

Pour un écoulement de fluide sur le lit nous pouvons définir les contraintes normales (σ) et tangentielles (T) effectives au fond, conformément aux figures Fig.1.14 :

$$\sigma = -F_L + F_G \cos S, \quad T = -(F_D + F_G \sin S) \quad (1.21)$$

En statique (pas de mouvement de fluide sur les grains), le rapport $\mu_s = |T|/|\sigma|$ donne le coefficient de friction statique $\tan \varphi_s = \mu_s$ qui est le maximum de friction entre un grain et les autres grains environnants. Si le fluide est cisailé par un fluide au dessus, l'angle de repos est dit dynamique (φ_d). Ceci se retrouve à travers la loi d'équilibre dynamique de Mohr-Coulomb $|T| = \mu_d |\sigma|$, le coefficient de frottement dynamique μ_d défini localement en chaque point étant :

$$\mu_d = \frac{|F_D + F_G \sin S|}{|F_G \cos S - F_L|} = \tan \varphi_d. \quad (1.22)$$

La condition du mouvement des grains est :

$$\frac{|F_D + F_G \sin S|}{|F_G \cos S - F_L|} = \tan \varphi_d > \tan \varphi_s \quad (1.23)$$

Du Boys dans son analyse de 1879 avait déjà fait une analyse similaire. Il avait négligé $F_G \sin(S)$ par rapport à F_D , divisée par la section de la particule, cela donne ce qu'il nomme "force d'entraînement du courant par unité de surface", et qui est en fait le frottement pariétal τ :

$$F_D = F_e d^2. \quad (1.24)$$

Il a aussi négligé F_L et pris la pente S faible, et par définition, $F_G \propto \rho(s-1)d^3$. Un écoulement donné, sera donc en mesure de mettre en mouvement une couche de grains de hauteur d , si

$$\frac{F_e}{K(s-1)d} \geq \tan \varphi_d \quad (1.25)$$

L'angle de repos peut être défini (du Boys) comme étant : “l'angle suivant lequel l'on pourrait relever le fond dans un fluide au repos, sans que les grains qui le tapissent descendent le long de la paroi inclinée, soit en glissant, soit en roulant les uns sur les autres.”

Néanmoins, jusqu'à maintenant, le critère de mise en mouvement des grains reste un débat assez ouvert que ce soit dans l'étude des avalanches des grains ou dans le transport de grains par un écoulement. Le critère le plus connu et le plus utilisé pour le transport des sédiments est celui dû à Shields.

1.5.2 Critère de Shields

Shields (1936) définit un coefficient Θ qui porte son nom et dont la valeur critique Θ_s détermine la mise en mouvement des grains. Ce coefficient tient compte des conditions hydrodynamiques près du fond et des propriétés des grains.

Si τ est le frottement pariétal défini localement sur le lit, alors :

$$\Theta = \frac{\tau}{\rho g (s - 1) d} \quad (1.26)$$

C'est donc le rapport entre l'ordre de grandeur de la contrainte tangentielle exercée par le fluide divisée par le poids apparent. On retrouve en fait l'analyse de du Boys précédente mais avec des notations différentes.

Le seuil de ce coefficient permet de déterminer la condition de mise en mouvement des grains. Le calcul de τ est donc une étape majeure dans l'étude des transports de sédiment.

1.5.3 Seuil de mise en mouvement

Le seuil Θ_s est difficile à établir théoriquement, et lorsque ceci est possible, il reste néanmoins difficile à utiliser à cause de certains coefficients à déterminer. La définition d'une expression analytique (Loiseleur et coll. [90], Andreotti [7]) consiste à déterminer ces coefficients pour un grain en tenant compte de sa position par rapport aux autres grains voisins, et ensuite à effectuer une généralisation à l'ensemble des grains. Nous présentons deux manières de déterminer le seuil :

- Dans la configuration des figures Fig.1.15–(a) et Fig.1.15–(b), décrite par Andreotti [7] le grain, au dessus des autres sur lequel est décrit l'ensemble des forces, restera au repos (équilibre du lit) tant que les forces de contacts \vec{N}_1 et \vec{N}_2 seront non nulles. Cet équilibre sera rompu dès que $N_1 = 0$. La condition de mise en mouvement ($N_1 = 0$) entraîne, en faisant l'inventaire des forces

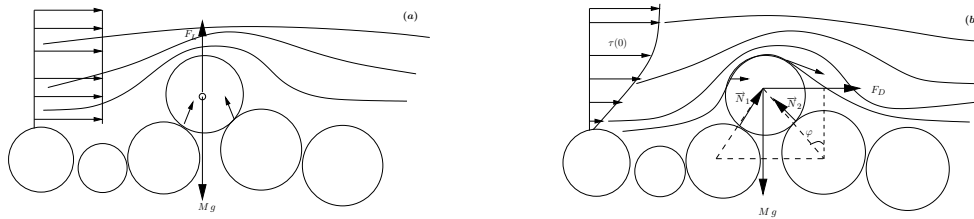


FIG. 1.15 – Forces au lit d'un écoulement (Andreotti [7]): (a), dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de contrainte (traînée) exercée par le fluide sur les grains. (b), dans le cas d'un fluide visqueux, les contraintes sont essentiellement des traînées visqueuses

dans le sens de l'écoulement, $F = N_2 \sin \varphi$, $M g = N_2 \cos \varphi$. L'effort d'entraînement du fluide au seuil :

$$F = \tan \varphi M g = C_p \frac{\pi d^3}{6} (\rho_p - \rho) g \tan \varphi \quad (1.27)$$

permet de définir la contrainte de cisaillement seuil de mise en mouvement pour un grain sur un lit horizontal :

$$\tau_s = \frac{4 \tan \varphi}{9} \rho (\rho_p - \rho) g d \quad (1.28)$$

En utilisant la relation (1.26), le seuil du coefficient de Shields pour un grain sur un lit horizontal est :

$$\Theta_s \simeq \frac{\tan \varphi}{9} \quad (1.29)$$

- L'équilibre des forces agissant sur un grain posé sur le lit d'un fond incliné (figure Fig.1.14-(c)), à la limite du mouvement a été proposé par Loiseleux et coll. [90]. L'équilibre des trois forces est projeté tangentiellement. Il s'agit de la projection du poids, de la contrainte de cisaillement donnée par la loi de Coulomb (eq. (1.15): $T = \mu \sigma = \tan(\varphi) F_G \cos S$) et de la force de traînée de Stokes modifiée :

$$-C_p \frac{\pi d^3}{6} (\rho_p - \rho) g \sin S - \tan(\varphi) C_p \frac{\pi d^3}{6} (\rho_p - \rho) g \cos S + 3A\rho\nu\pi\gamma d^2 F(Re_p) = 0. \quad (1.30)$$

Puisque par définition $\tau = \mu\gamma$, la relation (1.26) permet alors d'écrire à la limite du mouvement du grain :

$$\Theta_s = \frac{1}{9AF(Re_p)} \frac{\sin(S + \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (1.31)$$

L'équilibre est rompu quand Θ devient supérieur à cette valeur seuil Θ_s .

Ceci revient à prendre pour seuil de frottement :

$$\tau_s = \frac{\rho g (s - 1) d}{9AF(Re_p)} \frac{\sin(S + \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (1.32)$$

Le seuil, que ce soit τ_s ou Θ_s , est fonction de l'écoulement (viscosité et densité du fluide) et des propriétés des grains (taille, densité). Il est important de noter que les valeurs seuil Θ_s et τ_s , liées entre elles par la relation (1.26), ne sont pas constantes lors de l'interaction. La détermination de la fonction $F(Re_p)$, dont la formule (1.14) est donnée dans des condition particulières, rend les formulation du seuil (1.31 et 1.32), difficilement utilisables dans certaines situations ($Re > 1000$).

La valeur du nombre de Shields critique couramment utilisée est de 0.047. Les valeurs de Θ_s sont données souvent par le "diagramme de Shields" présentant les valeurs de Θ_s en fonction du nombre de Reynolds dont une illustration est à la page 107 de Nielsen [103], on constate que la valeur est d'environ 0.06. La formule 1.29 donne une valeur de 0.06 pour $\varphi = 30^\circ$.

Pour le sable sous un écoulement d'eau, $\Theta_s \sim 0.05$ et dans le cas éolien, $0.01 < \Theta_s < 0.02$. Charru et Mouilleron-Arnould [41] [42], Andreotti [7], dans le cas d'un fluide très visqueux donnent $0.04 \leq \Theta_s \leq 0.12$. Les faibles valeurs de Θ_s correspondent à la mise en mouvement de quelques grains de la surface du lit. Lorsque Θ_s augmente, les déplacements se font par couche des grains. En somme pour le sable sous l'eau, $0.04 \leq \Theta_s \leq 0.05$.

Prenant $\Theta_{s0} = 0.047$, un seuil de frottement pour un fond plat peut être défini, compte tenu de (1.26), en prenant $s = 2.65$, $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et des diamètres de grains d compris entre $100 \mu\text{m}$ et 2 mm , dont la valeur $\tau_{s0} = 760.77 d$ est comprise entre 0.076 et 1.52 pour un fond plat (ou pas trop accidenté).

1.5.4 Effet de la pente sur le seuil de mise en mouvement

Comme nous venons de l'évoquer avec la formule 1.31, il y a un effet de la pente. Dans le cas d'un lit incliné de pente S sous un écoulement, suivant l'orientation de la pente du lit du fond par rapport au sens de l'écoulement du fluide, la mise en mouvement des grains est plus ou moins rapide, c'est ce que du Boys ("*... une pente dans le sens du courant favorise le mouvement des galets, une contre-pente tend à s'y opposer; cela est du reste assez évident ...*") avait déjà observé, et il avait corrigé sa formule (1.33) en :

$$\frac{1}{\cos S} \frac{F_e}{K(s-1)d} + \tan S \geq \tan \varphi_d \quad (1.33)$$

Ceci traduit l'effet qui est dû à la gravité : le fait d'être sur une pente ascendante est un facteur limitant pour arracher de la matière alors qu'être une pente descendante permet d'arracher plus facilement de la matière.

Une autre expression du seuil dépendant uniquement de la pente du lit et de l'angle de repos est formulée par Fredsoe et Deigaard [57] p. 205 : pour un fond de pente S dans la direction de l'écoulement telle que $\tan S = -\partial f / \partial x$, la valeur de Θ_s est donnée par :

$$\Theta_s = \frac{\Theta_{s0}}{\sqrt{1 + (\partial f / \partial x)^2}} \left(1 + \frac{\partial f / \partial x}{\tan \varphi_d}\right), \quad \text{on notera } \Lambda = \frac{\Theta_{s0} \rho g (s - 1) d}{\tan \varphi} \quad (1.34)$$

Aux critères de seuil de mise en mouvement, (du Boys (1.23), Shields)), il faut donc ajouter un effet dû à la pente (Komarova, 2000 (2.44), Blondeaux, 1990 (2.38), ...) dans les quantifications des flux de matières entraînées, car dans la nature, les lits ne sont pas souvent plats. Ainsi aux expressions :

$$\tau_s < \tau, \quad \Theta_s < \Theta, \quad u_s < u \quad (1.35)$$

lorsque la gravité est prise en compte à travers la pente, il faut alors substituer à (1.35) :

$$\tau_s + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x} < \tau, \quad \Theta_s + \Lambda_\Theta \frac{\partial f}{\partial x} < \Theta, \quad u_s + \Lambda_u \frac{\partial f}{\partial x} < u \quad (1.36)$$

où les coefficients de pente Λ , Λ_Θ et Λ_u dépendent des propriétés des grains et de l'écoulement. Ils sont de même dimension que τ , u , pour Λ et Λ_u , respectivement, Λ_Θ étant des constantes.

1.6 Conclusion

En règle générale (ce que nous appliquerons dans le cadre de cette étude), τ est la composante tangentielle de la contrainte normale. Sa valeur au ras du lit est proportionnelle au frottement pariétal dont le calcul aux chapitres 4, 5 et 6, fait l'objet et l'intérêt de ce travail. Mais cette formule, avec une viscosité constante utilisée le long de cette étude, n'est plus applicable pour un écoulement turbulent où le frottement est beaucoup plus important. Or les écoulements naturels (océans, fleuves, vent dans le desert) sont turbulents. Comme dans les cas de turbulence, le frottement est également modélisé comme (1.3) avec la viscosité turbulente μ_t en lieu et place de μ ([77]–[78]). Dans certains modèles énergétiques, le frottement sera proportionnel au carré de la vitesse moyenne U ou de la vitesse de friction (u_f).

En conclusion de ce chapitre, il existe vraisemblablement un seuil de cisaillement à partir duquel les particules sont mises en mouvement. Cette valeur doit être corrigée de la pente du profil (elle est diminuée, *resp.* augmentée, si la pente du profil est négative, *resp.* positive).

Modèles de flux de matières transportées

2.1 Introduction

Lorsqu'un lit de particules est cisailé par un écoulement, que ce soit dans les rivières, sur la plage ou dans le désert, les particules, immobiles lorsque le cisaillement est faible, se mettent en mouvement à partir d'un cisaillement critique. Au-delà de ce seuil, le débit (le nombre de particules mobiles par unité de surface) $q(x,t)$ de particules croît avec le cisaillement. Différentes approches existent dans la littérature pour estimer ce débit. Elles restent toutefois très dispersées, et les lois sont essentiellement empiriques.

Nous présentons dans ce chapitre différentes estimations de $q(x,t)$ issues de la littérature.

La morphologie du lit granulaire est liée d'une part aux sédiments érodés du lit, et d'autre part aux sédiments qui se déposent sur le lit à partir de la phase en suspension. Le flux $q(x,t)$ de matières transportées tient donc compte de celui dû au charriage noté q_r et de la quantité qui est transportée en suspension, de flux q_s .

Il existe deux approches pour déterminer $q(x,t)$: l'une consiste à estimer séparément les flux q_r et q_s et à en faire la somme pour obtenir le flux total $q(x,t)$:

$$q = q_s + q_r \tag{2.1}$$

Toutefois dans certains cas d'écoulements visqueux, les suspensions sont négligeables, et la connaissance de q_r suffit à elle seule pour connaître $q(x,t)$.

La seconde est d'estimer directement en un seul bloc le flux total q . Nous adopterons cette démarche.

Avant la présentation du modèle de flux de transport (voir la conclusion de ce chapitre, page 2.8) que nous utiliserons dans la suite, nous faisons une synthèse des modèles (indifféremment des approches ci-dessus énumérées) rencontrés dans la littérature.

2.2 Paramètre de l'écoulement pertinent dans l'estimation du flux

D'après l'analyse bibliographique des précurseurs des études sur le transport des sédiments, on peut faire la remarque suivante : à l'exception de l'approche probabiliste, les formules d'estimation du flux sont fondées sur des hypothèses idéalisées et simplifiées selon lesquelles le flux de matières peut être déterminé par un ou deux paramètres dominants, tels que le débit, la vitesse moyenne, la contrainte de cisaillement et l'énergie du fluide.

Pour connaître le facteur dominant dans un écoulement turbulent responsable de la mobilité des particules donc le facteur de modification de la morphologie du fond, Yang (1972) [152] a passé en revue les

approches ci-dessus énumérées.

Cette étude pour connaître le facteur dominant responsable de la mobilité des particule a été poursuivie (Yang [154]) en s'intéressant particulièrement à six paramètres : le flux de l'écoulement Q , la vitesse moyenne de l'écoulement U , la pente S du lit de l'écoulement, le frottement du fluide sur le fond τ , les puissances de l'écoulement τU selon Bagnold [18] et SU selon Yang [153] en ces termes :

$$q = A_1 (Q - Q_s)^{B_1} \quad (2.2)$$

$$q = A_2 (U - U_s)^{B_2} \quad (2.3)$$

$$q = A_3 (S - S_s)^{B_3} \quad (2.4)$$

$$q = A_4 (\tau - \tau_s)^{B_4} \quad (2.5)$$

$$q = A_5 (\tau U - \tau_s U_s)^{B_5} \quad (2.6)$$

$$q = A_6 (SU - S_s U_s)^{B_6} \quad (2.7)$$

A_i et B_i , $i = 1, \dots, 6$ sont des constantes qui dépendent du fluide et des propriétés des sédiments.

Différentes études comparatives ont été effectuées pour déterminer le paramètre de contrôle (ce qui revient au type d'équation du flux (2.2–2.7)) qui est déterminant pour quantifier le flux q .

- effectuées par des auteurs divers pour différentes structures de fond dans un écoulement d'eau dans un canal, Yang [154] fait l'analyse suivante : le paramètre qui permet une meilleure corrélation est la puissance de l'écoulement τU selon Bagnold [18] ou SU selon Yang [153]. La conclusion est qu'il y a ni corrélations entre le flux de matières entraînées et la concentration en sédiments dans le fluide, ni variable suffisamment dominante pour caractériser le transport des sédiments. Ceci peut expliquer les écarts entre les calculs et les mesures.
- (en équilibrant les exposants des paramètres dans les équations de flux (2.2–2.7) utilisées par différents auteurs), la conclusion de Yang [154] est que, les résultats établis pour des fond rigides ne sont pas transférables aux rivières, où le fond est souvent meuble.
- montre que les comportements des équations de flux (2.2–2.7), sont très différents, si l'un des paramètres est légèrement modifié. Les formules sont très sensibles à la vitesse, à la période d'oscillation du fluide, à la taille des grains et au flux de l'eau. La plupart des formules de transport ont été calibrées avec des expériences qui ont un champ d'application restreint. Néanmoins, ces formules sont souvent employées au delà de leur limites de validité. C'est pourquoi Yang [154] fait quelques recommandations dans leur utilisation.

La conclusion de Yang [154] est que le facteur dominant pour quantifier le flux de sédiments est la dissipation d'énergie à travers la puissance d'entraînement du fluide. Les expressions qui permettent de mieux expliciter cet état de fait sont, selon lui, celles de Bagnold [18], .. Engelund [60], Ackers et White [2], ..., résumée sous la forme des équations (2.6) et (2.7).

Cependant, les équations assez récentes que nous avons pu rencontrer sont plus favorables à l'approche prenant en compte le taux de cisaillement¹. Le frottement (ou sa valeur adimensionnée, le nombre de Shields Θ) est retenu pour les études qui calculent directement les équations de Navier-Stokes. La vitesse moyenne du fluide (U cf. eq. (1.2)) ou la vitesse de cisaillement du fluide (u_f , cf. eq. (1.5), vitesse juste au dessus du fond) est prise en compte pour les études fondées sur l'approche Saint-Venant. Ces deux paramètres sont souvent couplées à la pente du fond (Blondeaux, [28], Komarova et Hulscher [77], Ger-kema [67]) pour traduire l'effet qui est dû à la gravité (cf. paragraphe 1.5.4).

Ainsi, les expressions du flux total que nous avons repertorié se regroupent suivant la vitesse près du fond ou suivant le frottement pariétal τ (ou sa valeur adimensionnée, le nombre de Shields Θ). Pour des cisaillements constants d'un écoulement sur un fond, passons en revue les différentes expressions que nous avons pu rencontrer dans le cadre de cette étude.

1. Dans les transports en rivière seul le flux charrié est compté de tel sorte que la formule de Meyer-Peter et Müller [96], eq. (2.24) est souvent rencontrée : Balmforth et Provenzale [20], Fowler [63], ...

2.3 Flux venant de matières transportées en suspension

La mise en suspension étant occasionnée et entretenue par la turbulence, pour un écoulement laminaire cet apport sera négligeable. Lorsque l'écoulement est turbulent, le flux venant de matières transportées en suspension q_s , est exprimé en $m^2 \cdot s^{-1}$ par :

$$q_s = \int_{y_0}^{\eta} u_p(x,y,t) \phi(x,y,t) dy, \quad (2.8)$$

ou en expression massique exprimé en $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ par :

$$q_s = \rho_p \int_{y_0}^{\eta} u_p(x,y,t) \phi(x,y,t) dy, \quad (2.9)$$

si η est la surface libre du fluide, y_0 l'épaisseur de la couche mobile du fond, $u_p(x,y,t)$ la vitesse des grains (prise égale à celle du fluide près du fond) et $\phi(x,y,t)$ la concentration (fraction) des sédiments. Cependant l'expression la plus utilisée de la distribution des sédiments (à travers la concentration $\phi(y)$) pour finaliser le calcul de q_s est celle obtenue à partir de l'intégration de l'équation d'équilibre entre les particules qui sédimentent sous l'effet de la vitesse de sédimentation V_s (cf. eq. (1.17)) d'une part, et celles diffusées par la turbulence du fluide d'autre part. Cette équation d'équilibre est :

$$V_s \phi(y) + \mathcal{D} \frac{\partial \phi(y)}{\partial y} = 0. \quad (2.10)$$

$\phi(y)$ est la concentration de sédimentation, et \mathcal{D} est le coefficient de diffusion des sédiments qui est relié au coefficient de viscosité cinématique turbulente ν_t par :

$$\mathcal{D} = \beta \nu_t \quad \beta : \text{facteur de proportionnalité.} \quad (2.11)$$

Nous reviendrons sur ce type d'approche au paragraphe 2.7.1.

Les modèles de concentration de sédiments en suspension (Rouse [117], Einstein [58], ...) sont établis à partir d'un modèle de profil de distribution de la vitesse turbulente (cf. eq. (1.5)). Ces modèles procèdent à l'estimation de ν_t . Celui relatif à Rouse [117] (cf. Yang [154], Fredsoe et Deigaard [57]), et plus utilisé, est :

$$\phi = \phi_{y_0} \left(\frac{(h-y)y_0}{y(h-y_0)} \right)^{m_R}, \quad (2.12)$$

où ϕ_{y_0} est la concentration, y_0 la rugosité du lit, h la hauteur moyenne de l'écoulement et m_R le nombre de Rouse défini par :

$$m_R = \frac{V_s}{\kappa u_f} \quad (2.13)$$

dans laquelle V_s est la vitesse de sédimentation, u_f la vitesse de cisaillement et κ la constante de Kármán ($\kappa \sim 0.4$).

Dans le cas d'un transport aquatique, Engelund (1982) (cf. Nielsen [103]p. 112) estime l'apport en suspension à environ 20 % du flux total.

2.4 Flux venant de la matières transportées par charriage

L'approche est liée à un excès de taux de cisaillement qui permet d'arracher des particules du lit. Cette approche "excès de taux de cisaillement" est donc liée au frottement :

- Approche pionnière de τ_c : Pour une seule couche mobile, d'épaisseur d (cf. figure 1.3), au lit d'un fond, la contrainte tangentielle (définie au paragraphe 1.5.1) du fluide sur les grains de cette couche est notée F_0 (qui est la force limite qu'il faut exercer sur le lit pour mettre en mouvement une couche d'épaisseur maximum d) et vaut :

$$F_0 = d(s-1) \tan \varphi_s \quad (2.14)$$

On considère une superposition de n couches mobiles au fond, chacune d'épaisseur d . La couche d'indice 1 est celle du fond et la couche d'indice n est celle située à l'interface avec le fluide

pur. La couche 1 est de vitesse nulle et la différence de vitesse entre deux couches successives est constante et égale à v . Cette approche stipule que le lit de grains avance par couches successives à une vitesse qui décroît par saut de v lorsqu'on s'enfonce dans le lit. Toute la couche mobile est d'épaisseur nd , et est soumise à contrainte tangentielle F_e (cf. relation (1.24), page 14). La vitesse dans toute la couche mobile est répartie comme suit :

la	1 ^{ère}	couche a pour vitesse	0
la	2 ^{ème}	couche a pour vitesse	v
la	3 ^{ème}	couche a pour vitesse	$2v$
...
la	$(n-1)$ ^{ème}	couche a pour vitesse	$(n-2)v$
la	n ^{ème}	couche a pour vitesse	$(n-1)v$

Le flux de matières (débit par unité de largeur du profil du fond) est :

$$q_r = \sum_{i=1}^{i=n} (i-1) v d = \frac{dv}{2} n(n-1) = nd \frac{n-1}{2} v, \quad (2.15)$$

flux qui est écrit en fonction de la contrainte tangentielle F_e :

$$q_r = C_B F_e (F_e - F_0) \quad (2.16)$$

C_B est une coefficient caractéristique du flux, à déterminer ainsi que F_0 pour chaque valeur de d .

- reformule (2.14), dans la configuration où la couche mobile est constitué de n couches chacune d'épaisseur d . A l'équilibre le frottement pariétal est donné :

$$\tau = \rho g h S = \tan \varphi n d \rho (s-1) \quad (2.17)$$

$\mu = \tan \varphi$ étant un coefficient de friction. Lorsque $n = 1$ (2.17) permet d'obtenir la valeur critique du frottement τ_s , et par conséquent, le nombre de couches en fonction des frottements.

$$\tau_s = \tan \varphi d \rho (s-1) \quad \text{donc} \quad n = \frac{\tau}{\tau_s}. \quad (2.18)$$

Le flux de du Boys (2.16) devient alors :

$$q_r = C' \tau (\tau - \tau_s). \quad (2.19)$$

Le coefficient $C' = \frac{dv}{2\tau_s^2}$ est estimé par Straub (1935) (cf. Yang [154]) par $K = \frac{0.173}{d^{3/4}}$.

- (cf Yang [154] page 99) réécrit (2.19) en approche vitesse de cisaillement en se fondant sur le fait que la fermeture de Chézy ($\tau \approx U^2$) pour le frottement pariétal, est valable pour chacune des couches :

$$q_r = \frac{K}{C^4} \rho g U^2 (U^2 - U_s^2) \quad (2.20)$$

K est donné dans (2.16), C étant le coefficient de Chézy. U et U_s sont respectivement la vitesse moyenne et la vitesse moyenne seuil de l'écoulement.

- On peut aussi noter l'approche de q_r à travers sa relation semi-empirique :

$$\frac{\rho_p g q_r}{\rho g S Q} = 10 \frac{\tau - \tau_s}{g(\rho_p - \rho) d} \quad (2.21)$$

où S est la pente du fond, en général prise égale à $(-\partial f/\partial x)$, et Q le flux du fluide pris par la même unité de section que q .

Il existe également d'autres approches assez similaire à celle de du Boy, dont des formulations assez récentes, englobant le flux total sur lesquelles nous reviendrons au paragraphe 2.5.

- L'approche "taux de transport". Pour mesurer le flux de matériaux, il est judicieux d'utiliser comme ordre de grandeur une vitesse caractéristique multipliée par un hauteur. On choisit souvent comme vitesse la vitesse de chute turbulente (1.20) et comme hauteur la taille du grain. Le flux se mesure donc avec $(\sqrt{g(s-1)} d^3)$. On pose donc que le flux est dimensionné par cette valeur multipliée par une fonction "taux de transport" Φ_B (nombre sans dimension, cf. Fredsoe et Deigaard [57] p. 206 et 214) :

$$q \propto \Phi_B \sqrt{g(s-1)} d^3. \quad (2.22)$$

Reste donc à trouver cette fonction. Une bonne approximation est:

$$\Phi_B \propto (\Theta - \Theta_s)^{3/2} \quad (2.23)$$

où g est la gravité, s la densité relative des grains, d la taille typique des grains, Θ le nombre de Shields et Θ_s , sa valeur seuil. Il s'agit de la formule de flux transporté par charriage de

. Elle est mieux connue sous l'appellation de "loi de charriage de Meyer–Peter et Müller" :

$$q_r = \frac{8}{(s-1)gd} (\rho(\tau - \tau_s))^{3/2}, \quad (2.24)$$

soit dans cette formulation du flux, le seuil du nombre de Shields défini par $\Theta_s = \frac{\rho\tau_s}{(s-1)gd} \approx 0.047$. Lorsque le cisaillement, en plus d'être constant, n'est pas trop élevé ($\Theta < 1$), Nielsen [103] P. 112, estime le coefficient 8 dans la relation (2.24) faible et suggère :

$$\Phi_B = 12 \sqrt{\Theta} (\Theta - \Theta_s) \quad (2.25)$$

On note aussi les travaux de Bagnold [17]–[18], Engelund [60], Fredsoe [55] fondés sur des concepts énergétiques mais traitant la totalité du flux.

2.5 Flux total de matières transportées

Dans bien des cas, le flux total (2.1) est directement estimé selon des considérations expérimentales ou numériques consolidées souvent par des études théoriques. Il faut remarquer que pour la plupart des formules, on tient compte d'un frottement seuil ou critique τ_s (nombre de Shields Θ_s) à partir duquel le fluide est capable d'entraîner des grains.

Einstein [58], [59], à partir de son expression² de l'apport en suspension fait une généralisation pour la charge totale à travers une fonction dite fonction flux d'Einstein. Cette fonction, qui sur le plan théorique est fondamentale, se trouve d'un usage très sophistiqué. Ce qui fait qu'elle est en général simplifiée dans les calculs.

Les autres approches d'estimation du flux sont similaires à celles citées dans le transport par charriage (taux cisaillement, énergétique, ...). Celle de Bagnold [18], liée à la puissance de l'écoulement à entraîner les grains, se formule en utilisant les vitesses moyenne du fluide U et de sédimentation V_s , le rapport $\tan \varphi$ des contraintes de cisaillements tangentiel et normal, et un facteur d'efficacité e_b :

$$q = \frac{\tau U}{s-1} \left(\frac{e_b}{\tan \varphi} + 0.01 \frac{U}{V_s} \right). \quad (2.26)$$

τU est la puissance de l'écoulement ou la puissance s'exerçant sur le fond, nécessaire par unité d'aire, pour transporter les particules. Cette puissance est considérée par Yang[153] comme la puissance nécessaire par unité de poids du fluide (US , si S est la pente du fond) nécessaire pour le transport des particules. Ce concept de puissance de l'écoulement est repris par Ackers et White [2].

2.5.1 Approches liées à la vitesse

Ces études reposent dans la plupart des cas sur des concepts des équations de Saint-Venant. Sinon les auteurs procèdent au calcul direct des équations de Navier-Stokes, mais en fait on finit toujours par les simplifier.

- Sous les conditions d'écoulement peu profond, Capart [35], notant H_b^{eq} le volume des sédiments par unité de surface sous les conditions d'un équilibre stationnaire et uniforme de l'ensemble et u_p la vitesse caractéristique des grains, donne le taux de transport des sédiments (*cf.* Einstein [59]) :

$$\Phi_B = \frac{q^{eq} u_p}{(g(s-1)d^3)^{1/2}} \quad (2.27)$$

Pour lui, le flux de matière échangé entre le fond et le fluide (q est la somme des érosions et des sédimentation) est proportionnel à la valeur du flux instantané et à celle du flux q^{eq} . Il montre, ce qui est confirmé par d'autres auteurs, que ce taux est linéairement proportionnel à la puissance $3/2$ du nombre de Shields (1.26). Connaissant donc Φ_M , on peut calculer q^{eq} et par la suite q par la relation de proportionnalité. Le flux instantané et la vitesse u_p prise égale celle du fluide moyenné sur la haut de l'écoulement sont résolus par un système de quatre équations (de Saint-Venant, dont deux pour le fluide et deux pour le fond).

2. voir Yang [154], 1996 pp. 130-142

- Pour Vittori et coll., q adimensionné par $\sqrt{g d^3}$ (si q^* est le flux dimensionnel par unité de section dans les direction (x,y) , $q = q^*/\sqrt{g d^3}$), possède deux composantes $q = (q_x, q_y)$. Dans le cas des écoulements côtiers, l'analyse des ondes internes dans le transport des particules est décrite dans un cycle de marée, et deux contributions entrent dans la quantification du flux des sédiments : l'un est proportionnel au produit de la vitesse horizontale (courants) et de la concentration moyenne des particules sur un cycle de marée; le second terme est induit par la moyenne temporelle du produit de la concentration des particules, et de la part des vitesses du fluide, due aux oscillations. Dans le modèle de Vittori et coll.[149] correspondant au cas des ondes uniformes de marée, le flux est lié au courant uniforme de la marée et à l'agitation des vagues à travers un coefficient d'agitation $|u_w|^{b-1}$ qui est la moyenne sur une période d'oscillation de la vitesse u_w des ondes, $b > 1$ étant un coefficient compris entre 2 et 6.

Cette idée émise au départ par Blondeaux [28] correspond au fait que le flux est proportionnel à une certaine puissance b , aux forces d'agitation (traînée et gravité) :

$$q = \tilde{Q} \mathbf{V} |\mathbf{u}_w|^{b-1} \quad (2.28)$$

où \tilde{Q} est un paramètre adimensionnel dépendant des des propriétés des sédiments, et $\mathbf{V} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est la projection horizontale du vecteur vitesse évalué à un diamètre de grain au dessus du lit ($y = f + d/2$).

Il arrive ainsi à la conclusion que l'instabilité des interfaces des plages est due au mouvement oscillant des vagues, et l'amplification des structures formées est liée quant à elle à la présence des courants uniforme de marée.

- Gerkema [67], dans son étude de la stabilité linéaire d'un fond sableux, utilise un modèle de flux :

$$q = \alpha |u|^3 \frac{u}{|u|} - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.29)$$

dans lequel f est la forme du fond, α , proportionnel au coefficient de traînée est pris égal à $10^{-4} m^{-1} s^2$, et $1 < \Lambda < 3$ est constant. Cette expression tient compte uniquement du flux charrié. Le premier terme du flux est lié à l'effet du forcing des grains sur le lit granulaire sous l'effet du fluide; le second terme est l'atténuation du forcing par la gravité : les grains sont transportés plus facilement sur une pente descendante que sur une pente ascendante (cf. paragraphe 1.5.4).

- L'expression de Vittori est écrite un peu différemment par Roos et Blondeaux [116] sous la forme :

$$q = 1.23 \frac{s-1}{s} \Psi^{3.36} Re_p^{1.83} \left| \frac{2\mathbf{V}}{Re_p} - \frac{\mu}{\Psi} \nabla f \right|^{b-1} \left(\frac{2\mathbf{V}}{Re_p} - \frac{\mu}{\Psi} \nabla f \right), \quad (2.30)$$

avec $\mathbf{V} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, et Ψ facteur de mobilité du grain défini pour un écoulement oscillant d'amplitude A et de fréquence $f = \Omega/2\pi$ (Ω sa pulsation) au dessus du lit de grains. (cf. Nielsen [103], Capart et Young [35]) :

$$\Psi = \frac{(A\Omega)^2}{(s-1)gd} \approx \frac{u_f^2}{(s-1)gd}. \quad (2.31)$$

L'équation de conservation de Exner est écrite ici :

$$\frac{2\Psi^{1/2}}{Re_d} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-1}{1-n} \nabla \cdot q \quad (2.32)$$

où b est alors pris égal à 4.28, μ à 0.15, s à 2.65 et n à 0.45.

- Pour des considérations numériques, statistiques, on retient qu'il est difficile d'établir une expression analytique analytique du flux. Cependant, dans certains cas particuliers on peut utiliser l'expression simplifiée due à Van Rijn [114] :

$$q_r \propto U^{2.4}, \quad U \text{ est la vitesse moyenne du fluide} \quad (2.33)$$

Il faut remarquer que, pour des vitesses et des diamètres de grains donnés, lorsque la viscosité du fluide est élevée, le transport se fait³ en bloc au lit du fond (par charriage). Donc dans certains cas de transports aquatiques, le flux charrié est quasiment égal au flux total transporté.

2.5.2 Approches liées du frottement

- Bagnold [17] définit le flux total q comme étant la somme des flux transport en suspension q_s et par charriage q_r

$$q_s \propto B_1 q_r \quad \text{et} \quad q_r \propto B_2 (\tau - \tau_s) \tau^{1/2} \quad (2.34)$$

3. le nombre de Bagnold est inversement proportionnel à la viscosité du fluide. Voir les pages 96-98 du livre de Nielsen [103]

B_1 et B_2 sont des coefficients, fonction de s , g , ν , d .

- Engelung [60] donne une formule similaire à celle de Meyer-Peter et Müller :

$$q \propto (\Theta - 0.047)^{3/2} \quad (2.35)$$

dans laquelle le seuil $\Theta_s = \Theta_{s0} = 0.047$ est constant.

- Pour Richards [113], en régime turbulent et pour des cisaillements importants, le transport aquatique en suspension peut être négligé. Le flux total est alors réduit à celui transporté par charriage :

$$q = C_R \tau^b, \quad (2.36)$$

avec C_R est une constante dépendant des propriétés du fluide et des grains, et $b = 3/2$ comme dans le modèle de Meyer-Peter et Müller (*cf.* relation 2.24) ou Bagnold (*cf.* relation 2.34).

- Sumer et Bakioglu, 1984 [137] font une extension de l'étude de Richards, 1980 [113]. Ils s'intéressent à l'impact de la viscosité sur la formation des rides et partent de l'hypothèse que la formation des rides de sable au fond ne dépend pas de la hauteur du fluide. L'effet de la gravité est inclus dans l'inclinaison du fond de pente S . Le flux considéré est uniquement celui du charriage de Bagnold (*cf.* relation 2.34) :

$$q = q_r = \frac{0.1 B_s}{(s-1) g \rho^{3/2}} \frac{(\tau - \tau_s) \tau^{1/2}}{(c \tan \varphi + \tan S) \cos S} \quad (2.37)$$

où B_s est un coefficient fonction du nombre de Reynolds des grains Re_p dont la valeur tend vers 8.5 lorsque Re_p devient élevé, $Re_p \approx 70$ (Yalin [151] p. 119), $0 < c < 1$ et φ l'angle de friction définit au paragraphe 1.5.1.

- Pour Blondeaux [28], Vittori et Blondeaux [148], le flux est dû au courant et à l'agitation des vagues :

$$q \propto |\tau - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}|^b \text{sign}(\tau - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}) \quad \text{avec } b = 4.28 \quad (2.38)$$

- Sleath [129] dans le cas d'un écoulement oscillant, sur un fond horizontal, estiment q en fonction de sa valeur moyenne Q' , établie sur un demi-cycle d'oscillation (de pulsation ω) selon :

$$q = \frac{8}{3} Q' \cos(\omega t + \delta\varphi) \text{sgn}(\cos(\omega t + \delta\varphi)) \quad (2.39)$$

Q' est exprimé aussi bien par Sleath que Nielsen [103] par :

$$\frac{Q'}{\sqrt{(s-1)d^3}} = \begin{cases} C_s (\Theta - \Theta_s)^{3/2}, & \Theta > \Theta_s \\ 0, & \Theta < \Theta_s. \end{cases} \quad (2.40)$$

où C_s est une constante empirique avec $C_s = 1.95$ pour Sleath et $C_s = 3$ pour Nielsen. $\delta\varphi$ est la phase entre le transport et la vitesse du fluide juste au dessus de la couche limite du fond (10 degré $< \delta\varphi < 20$ degré), et Θ est le coefficient de Shields.

- Yalin [151] décompose le flux total en :

$$q = q_s + q_r. \quad (2.41)$$

avec q_r le flux venant du charriage et q_s celui de la suspension. Dans chacun des cas, il établit les valeurs pour un fond plat et fait une correction lorsque le fond devient ondulé à travers un facteur $\lambda_c = \frac{u_*}{u_*^*}$ qui est une forme adimensionnée de la friction, par celle du fond plat ($\lambda_c = 1$ pour un fond plat et $\lambda_c < 1$ pour un fond ondulé). En considérant le nombre de sédiments entraînés $\zeta^3 = \frac{Re_p^2}{\Theta} = \frac{g(s-1)d^3}{\nu^2}$, et l'intensité relative de l'écoulement $\beta = \frac{\Theta}{\Theta_s}$ (rapport du nombre de Shields et de sa valeur seuil), il obtient la formule du flux en suspension (q_s) pour un fond plat :

$$q_s = 0.05 \phi_1 u_b y_0 \zeta^{-1} (\beta - 1) \quad \text{et} \quad q_r = \phi_1 \frac{u_b}{\rho_p g} (\tau - \tau_s). \quad (2.42)$$

ϕ_1 est une fonction de ζ et β à déterminer, et la vitesse du fluide au lit de l'écoulement $u_b = B_s u_* \propto B_s \tau^{1/2}$ permet d'avoir une expression de q_r similaire à celle de Bagnold (2.34), B_s est défini par la relation (2.37). Pour un fond ondulé on obtient ainsi :

$$q_s = 0.015 \phi_1 u_b d \frac{(\beta \lambda_c^2 - 1)^{3/2}}{\zeta^{0.3}} \quad \text{et} \quad q_r = \phi_1 \frac{\lambda_c u_b}{\rho_p g} (\tau \lambda_c^2 - \tau_s) \quad (2.43)$$

- Komarova et coll. [77] [78] considèrent que compte tenu de la condition de vitesse nulle au lit du fond, la vitesse du fluide au lit du fond n'est le paramètre qui met en mouvement les grains mais plutôt le frottement pariétal. τ étant le frottement physique divisé par la densité du fluide, ils obtiennent :

$$q = \alpha |\tau|^b (\tau - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}), \quad b = 1/2. \quad (2.44)$$

Les valeurs de Λ sont discutées dans [78] suivant les auteurs et correspondent à des valeurs comprises entre $1/2$ et 6 . b est un paramètre qui traduit les nonlinéarités et α est un coefficient de proportionnalité.

- Yue et Mei [156], dans le cas d'un écoulement oscillant sur un fond incliné procèdent comme Sleath [129], mais, à cause de l'inclinaison du fond, ils redéfinissent le coefficient de Shields par :

$$\Theta = \frac{1}{\rho g (s-1) d} \left(\tau - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \Lambda = \frac{\rho g (s-1) d \Theta_s}{\tan \varphi_s} \quad (2.45)$$

où φ_s est l'angle de repos (paragraphe 1.5.1), et Θ_s est le seuil du coefficient de Shields.

Partant des expressions similaires à (2.39) et (2.40), Yu et Mei, estiment le flux q par :

$$q \sim \mathcal{O}(\sqrt{(s-1) d^3 \Theta^{3/2}}) \quad (2.46)$$

- Charru et Mouilleron-Arnould [41], en calculant dans la couche mobile du lit dans le cas d'un cisaillement continu de fluide visqueux, obtiennent une expression en fonction du nombre de Shields qui est similaire à celle de Bagnolds (2.34).

$$q = V_s d C (\Theta - \Theta_s)^3, \quad C = 7.5, \quad \Theta_s = 0.2 \quad (2.47)$$

- Fraccarollo et Capart [65] à travers une relation de saut de la conservation de la masse aux interfaces $y = 0$ et $y = y_0$, définissent la quantité de matières érodées $e_b = \nabla \cdot q$, valable dans le cas des ruptures de barrage (fluide brusquement accéléré). Le domaine granulaire est décomposé en deux sous-domaines, l'un mobile, et l'autre fixe, voir figure Fig.2.1.

$$e_b = \frac{(\tau_{y_0} - \tau_0)}{\rho(1+r) u_{y_0}}. \quad (2.48)$$

Les grandeurs indicées par y_0 sont celles définies à l'interface de la zone mobile du

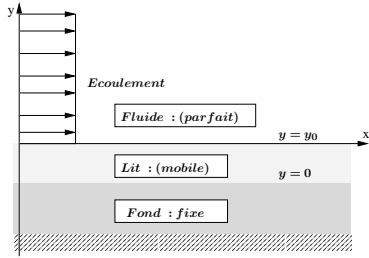


FIG. 2.1 – Interfaces du lit

granulaire avec le fluide. Celles indicées par 0 sont à l'interface entre la partie fixe et la partie immobile du granulaire. A l'interface de la zone mobile du granulaire avec le fluide, r vaut $(s-1) \phi_p$. L'intégrale de ce flux sur la longueur (suivant l'axe des x) est analogue au flux en mouvement lors d'une avalanche; nous y reviendrons au chapitre 9 sur les avalanches.

- Charru et coll. [42] s'intéressent à un fond cisailé par un écoulement visqueux. Dans un modèle érosion-déposition ils définissent la quantité totale de matières en mouvement N_p par unité de section, comme le quotient entre le flux de matières q et la vitesse typique du fluide U_p près du fond. Si γ est le taux de cisaillement et d le diamètre des particules, $U_p = 0.1 \gamma d$. Conformément aux études précédentes, la valeur du flux est donnée lorsque le système a atteint un état de saturation. Dans ce cas, $q_{sat} = N_{p,sat} U_p$ et

$$q_{sat} = \left(\frac{V_s}{d^2} \right) 0.85 \Theta (\Theta - \Theta_s) \quad \text{avec} \quad \Theta_s = 0.12 \quad (2.49)$$

2.6 Notion de flux total saturé

2.6.1 Définition

Bien que dans la majeure partie des lois énumérées jusque là, la notion de flux saturé n'apparaisse pas explicitement, force est de constater qu'il s'agit du flux saturé dont il est question. Pour soutenir cette idée explicitons cette notion de saturation de flux de matières entraînées, et résumons quelques expressions de ce flux utilisées (malheureusement dans le cas éolien) ces dernières années.

On remonte encore une fois à l'étude de du Boys, 1879 [52]; commentant la vitesse limite d'entraînement évoquée par ses prédécesseurs (paragraphe 1.5, page 14), il évoque la notion de saturation de flux en ces termes "*une fois une certaine quantité de matières en mouvement sur le fond du lit, la vitesse des filets liquides devient trop faible pour entraîner davantage : le cours d'eau est alors saturé. Un cours*

d'eau non saturé tend à le devenir en entraînant une partie des matériaux qui composent son lit, et en choisissant de préférence les plus petits."

2.6.2 Cas de la saltation

Récemment certains auteurs, utilisant l'excès du cisaillement au fond, soutiennent que ce flux est en fait un flux saturé $q_{sat}(x,t)$ au sens où, le fluide apporte une puissance finie aux grains pour les déplacer. Il existe ainsi, une quantité maximum de grains (à travers le flux $q(x,t)$) par unité de temps et de section. L'idée est qu'il existe une distance l_{sat} au bout de laquelle le flux q atteint une valeur limite (voir Fig.2.2) dite de saturation (Sauermann et coll. [123], Kroy et coll. [83], Andreotti et coll. [8] [9], ...). Après avoir résolu les équations de conservation de masse et de quantité de mouvement en présence des interactions avec le lit du fond, avec les hypothèses de stationnarité ($\partial/\partial t$), d'uniformité du fond $\partial/\partial x$ et de cisaillement constant Sauermann et coll. [123] calculent analytiquement en fonction de la vitesse de cisaillement, les valeurs dites de saturation de densité $\rho_{sat}(u_*)$ et de vitesse de cisaillement (pour un profil logarithmique près du fond) $u_{sat}(u_*)$. Le flux saturé $q_{sat}(u_*)$, pour une vitesse de cisaillement au dessus du seuil u_{*s} (*cf.* Shields critique), est :

$$q_{sat}(u_*) = \rho_{sat}(u_*) u_{sat}(u_*) \quad (2.50)$$

Pour obtenir une relation entre le flux et sa valeur dite saturée donnée en terme du frottement, on exprime de manière *ad hoc* :

$$l_{sat} = \frac{l_{salt} \tau_s}{\tau - \tau_s}, \quad (2.51)$$

où l_{salt} est une autre longueur caractéristique des distances moyennes parcourues lors des saltations des grains :

$$l_{salt} \approx 2\alpha u_{sat}^2 / (g \gamma_r). \quad (2.52)$$

Pour établir cette dernière relation, ils font les hypothèses suivantes (que nous simplifions encore plus) : un grain qui retombe sur le lit en fait sauter d'autres. soit αu_{sat} la vitesse d'un grain éjecté, son temps de vol est à peu près $\alpha u_{sat}/g$ (pour arriver à culmination). La distance parcourue pendant ce temps est $\sim u_{sat} u_{sat}/g$. C'est donc l_{sat} . Les coefficients α de restitution pour la collision des grains au lit du fond, et de relaxation γ_r de la densité des grains en saltation par rapport à leur valeur saturée, sont approximés Sauermann et coll. [123] numériquement par 0.35 et 0.2 respectivement. La densité de saturation est définie par $\rho_{sat} = 2\alpha(\tau - \tau_s)/g$, et la vitesse de saturation $u_{sat} = u_{eff} - \delta u$ est décomposée en une vitesse effective $u_{eff} \propto \sqrt{\tau - \tau_s}$ qui accélère les grains et une variation δu :

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} = q \left(1 - \frac{q}{q_{sat}}\right), \text{ avec } q_{sat} = q_0 \mathcal{H}_d((\Theta - \Theta_s)) (\Theta - \Theta_s)^b, \\ \text{et } l_{sat} = \frac{2\alpha u_{sat}^2}{g \gamma_r} \frac{\tau_s}{\tau - \tau_s}, \quad (2.53)$$

où \mathcal{H}_d est la fonction de Heaviside, q_0 et b sont des constantes, b est compris entre 1 et 3 . En règle générale, q_{sat} est pris proportionnel à $\tau^{3/2}$. Andreotti et coll. [9] simplifient la relation (2.53) comme suit :

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat}, \text{ avec } q_{sat} = q_0 (\Theta - \Theta_s) \mathcal{H}_d(\Theta - \Theta_s), \text{ et } l_{sat} = \text{constante} \quad (2.54)$$

Dans la thèse de Hersen [69], le flux saturé pour les particules en saltation et ceux en reptation (charriage) est défini pour un transport éolien. Le flux des particules en reptation est proportionnel au flux de particules en saltation. La longueur de saturation dépend du rapport des densités des grains et du fluide et de la taille des grains :

$$q_s = B(d) \frac{\rho}{g} u_*^3 \quad (2.55)$$

$$q_r \propto q_s \quad (2.56)$$

$$l_{sat} \propto s d \quad (2.57)$$

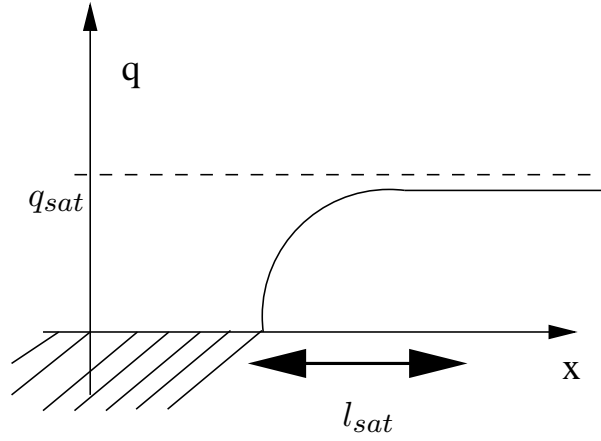


FIG. 2.2 – Figure issue de Andreotti et coll. [9]: Quand un granulaire est cisailé (par un cisaillement constant) par un écoulement, le flux des grains transportés atteint une valeur limite au bout d'une longueur l_{sat} , qu'Andreotti et coll.[8] suppose indépendante de u_*

Du fait que le grain ressent des vitesses de plus en plus importantes lorsqu'il s'éloigne du fond et compte tenu du profil des vitesses du fluide l_{sat} est multiplié par un facteur ξ , et alors :

$$l_{sat}\xi \propto sd \quad (2.58)$$

facteur qui, dans le cas d'un écoulement turbulent (profil de vitesse logarithmique), vaut $\xi \simeq 10 - 15$. Lorsque $\rho_p \simeq 2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho \simeq 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, et $d \simeq 200 \mu\text{m}$, la longueur de saturation est d'ordre :

$$l_{sat} \simeq 5 - 7.5 \text{ m}. \quad (2.59)$$

Cette longueur est la longueur fondamentale pour la formation des dunes, elle a été extrapolée au cas des dunes sur Mars par Andreotti [7]. Notons que les rides de sable dans l'air semblent gouvernées par des mécanismes complètement différents de saltation et de reptation (déjà évoqués plus haut, Hersen [69], Andreotti [6]). Ces mécanismes ne mettent pas forcément en jeu la mécanique des fluides (Valance et Rioual [145], Balmforth et Provenzale [20]), contrairement aux dunes (Kroy et coll. [83], Sauermann et coll. [123], Andreotti et coll.[9], [9]).

2.7 Vers une équation de conservation

2.7.1 Equations locales

Il nous faut maintenant assembler les différents éléments et écrire une loi de conservation pour les sédiments. Il faudrait écrire des équations complètes du mouvement du fluide et des sédiments (Noh et Fernando [106]). On va en écrire ici une version très simplifiée en supposant que la concentration en suspension est très faible et que l'on peut découpler les équations. Soit c la concentration en mouvement, l'expression générale est que la variation est égale au flux et à la création intérieure :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi dV = \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot d\vec{S} + \text{terme source}.$$

Il modéliser cette conservation, par exemple, si on suppose (Noh et Fernando [106], Lagrée [84], [86], Dearnaley et coll. [49]), que la vitesse des sédiments en mouvement est la vitesse du fluide plus une vitesse de sédimentation dans le sens de la gravité : $u, v - V_s$, et que l'on admet l'existence d'un courant de diffusion satisfaisant à une loi de type Fick, l'équation de conservation de la masse peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + u \frac{\partial}{\partial x} \phi + (v - V_f) \frac{\partial}{\partial y} \phi = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2.60)$$

où $\mathcal{D}(\phi)$ et $V_s(\phi)$ sont données. On y reconnaît l'équilibre entre la diffusion et la sédimentation évoqué dans formule (2.10). Cette relation a plus de sens en turbulent qu'en laminaire (*cf.* Noh et Fernando

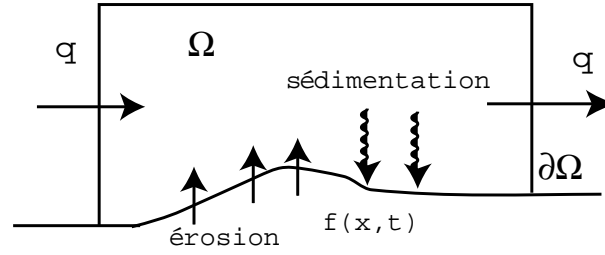


FIG. 2.3 – La quantité de matériaux en mouvement varie par le flux entrant/sortant l'érosion et la sédimentation.

[106]). Bien entendu, le terme $(\partial_x \mathcal{D} \partial_x \phi)$ est négligeable par rapport aux autres. Le flux à la paroi donne la variation du sol $f(x,t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_0 + V_f \phi \Big|_0. \quad (2.61)$$

sous l'action de la déposition $V_f \phi \Big|_0$ et de l'érosion $\mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_0$. Il faut enfin se donner une loi d'érosion liant le flux transverse de matériaux emporté à la valeur de la densité dans le fluide juste à la paroi, à la densité dans le solide et au frottement pariétal liant le flux transverse de matériaux emporté à la valeur de la densité dans le fluide juste à la paroi, à la densité dans le solide et au frottement pariétal. On se la donne sous la forme :

$$-\mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_0 = Q_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_M}\right) \left(\varpi \left(\frac{\tau - \tau_s}{(\rho_s - \rho) g d}\right)\right)^\beta, \quad \beta = 3/2. \quad \text{avec } \varpi(\theta) = \theta \mathcal{H}_d(\theta) \quad (2.62)$$

C'est ce système (2.60, 2.61, 2.62) couplé avec Naviers Stokes qu'il faudrait résoudre.

Notons que c'est Brivois [34] qui a proposé cette écriture pour la dernière équation (qui est identique à la formulation de Lagrée [84], [86], lorsque $\phi \ll \phi_M$, où ϕ_M représente la densité dans le solide).

On peut considérer une version intégrale ou globale de la loi de conservation (2.60). Si n représente $\int_0^\infty \phi dy$, q représente le flux total en mouvement $\int_0^\infty \phi u dy$, on identifie la déposition à $\dot{n}_d = V_f \phi \Big|_0$ et l'érosion à $\dot{n}_e = -\mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_0$, d'où l'équation intégrale :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\dot{n}_d + \dot{n}_e - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{n}_d - \dot{n}_e \quad (2.63)$$

Cette équation sert de base à d'autres simplifications (Lagrée [86]). Manifestement, on peut en première approximation dire que n est à peu près proportionnel à la concentration au fond : $n = h\phi(x,0)$, h constante. De même, $q = \int_0^\infty \phi u dy$ est à peu près proportionnel à la concentration au fond et donc à n : $q = \gamma h n$, où γ est une constante proportionnelle au cisaillement. La déposition est ainsi proportionnelle à la concentration moyenne en solution, et donc au flux $\dot{n}_d = V_f q / (h^2 \gamma)$. L'érosion est choisie en supposant que l'érosion est proportionnelle à l'écart du frottement au seuil. Ce choix est tel qu'à l'équilibre stationnaire et invariant par translation (lorsque l'érosion est exactement compensée par la déposition $\dot{n}_d - \dot{n}_e = 0$) on obtienne que le flux qui circule est exactement le flux saturé, $q_s = q_0 (\Theta - \Theta_s) (\mathcal{H}_d(\Theta - \Theta_s))^\beta$, où \mathcal{H}_d est la fonction de Heaviside. Donc on prend ($Q_0 = (V_s / \gamma h^2) q_0$) :

$$\dot{n}_e = \left(\frac{V_s}{\gamma h^2}\right) q_0 (\Theta - \Theta_s) (\mathcal{H}_d(\Theta - \Theta_s))^\beta,$$

L'équation de q est alors

$$\left(\frac{h}{V_s}\right) \frac{\partial q}{\partial t} + \left(\frac{\gamma h^2}{V_s}\right) \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_0 (\varpi(\Theta - \Theta_s))^\beta \quad (2.64)$$

En général, le temps mis en jeu est très lent, et l'équation s'écrit :

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_0 \varpi(\Theta - \Theta_s)^\beta, \quad \text{où } \varpi(\theta) = \theta \mathcal{H}_d(\theta)$$

L'interprétation de cette équation est qu'il faut une certaine distance $l_{sat} = \frac{\gamma h^2}{V_s}$ avant que le flux saturé ne soit atteint. Bijsterbosch et coll. [27] proposent une équation intégrale qui peut s'écrire sous cette forme (après quelques transformations mineures, dont le fait que pour eux $\dot{n}_d = pV_f\phi|_0$, où p est la fraction qui devient effectivement le sol).

Dans le cas où le temps d'érosion est très lent, on remarque incidemment que l'équation de l'évolution du fond (2.63 en négligeant $\partial_t n$) s'écrit aussi (équation d'Exner, eq. (2)) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Charru et Hinch [40] partent directement d'un bilan global de billes en mouvement dans un écoulement cisaillé ($u = \gamma y$) écrit sous la forme (2.63). A partir d'expériences, ils en déduisent les ordres de grandeur pertinents (Charru et Hinch [40], [39], Charru et coll. [42]).

Ils notent ainsi que c'est la sédimentation qui provoque la perte des grains n en mouvement. La vitesse de sédimentation joue un rôle fondamental dans leur analyse, ainsi que la taille du grain d . Ils proposent d'utiliser comme temps caractéristique d/V_s , où $V_s = d^2(s-1)g/\nu$ (cf. §1.4.3). Ils se placent près de la limite du mouvement ($\Theta \simeq 1$, donc $\rho\nu\gamma \simeq \rho(s-1)gd$ et donc $\Theta_s = 1$).

L'estimation de la perte de grain par déposition est alors proportionnelle au nombre de grains en mouvement divisé par le temps caractéristique :

$$\dot{n}_d = -n/(d/V_s).$$

Le flux emporté est par définition proportionnel à n et à la vitesse du fluide : $q = n(\gamma d)$ mais par définition du Shields; $\Theta = (\gamma d)/((s-1)gd) = \gamma(d/V_s)$ donc $q = n(\Theta V_s)$. L'érosion ne dépend pas de la quantité n en mouvement, mais est liée à l'écart au seuil du Shields ($\Theta - 1$). Le coefficient de proportionalité est encore construit avec le temps caractéristique (d/V_s) :

$$\dot{n}_e = (d/(d/V_s))\varpi(\Theta - 1)$$

L'équation (2.63) devient avec les hypothèses et les expériences de Charru et coll. (donc compte tenu de coefficients mesurés que nous n'avons pas introduit jusqu'à présent : 0.0055 et 3.3) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{V_s} \frac{\partial n}{\partial t} &= -n + d(0.0055)\varpi(\Theta - 1) - (3.3)d \frac{\partial(n\Theta)}{\partial x}, \\ \text{et } \frac{\partial f}{\partial t} &= (n/d)V_s - (0.0055)(V_s)\varpi(\Theta - 1). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Cette équation pourrait s'écrire en ne considérant plus n , on retrouverait alors une équation portant sur q en tous points similaire à l'équation (2.64) si on y identifie la longueur intégrale h à d . On retrouve aussi la longueur de saturation que l'on avait introduite $\gamma h^2/V_s$, puisqu'ici h est d donc cette longueur est bien d'ordre $d\Theta$. La longueur de saturation a donc pour ordre de grandeur :

$$l_{sat} = d\Theta.$$

Une autre manière d'obtenir (2.64) ou (2.65) a été faite par Langlois et Valance [89]. Ils utilisent les notations BCRE (voir chapitre 9) et notent R la quantité intégrale de grains roulants, donc $n = R$ et $\Gamma = -\dot{n}_d + \dot{n}_e$, ils notent h la hauteur totale visible de grains, elle s'identifie à f . Avec leurs notations, l'équation intégrale de départ qu'il utilisent est bien entendu exactement (2.63) (en fait nous avons multiplié par d^3 les notations de Charru et coll. [42] pour réconcilier les trois démarches). En revanche, ils préfèrent faire des choix de vitesse plus en accord avec une description turbulente de l'écoulement, leur flux est donc jaugé avec la vitesse V_s turbulente (cf. §1.4.3) et d , donc il vaut $\sqrt{(s-1)gd^3}$ (comme dans les lois de type Meyer-Peter Müller).

Leur estimation des grandeurs caractéristiques vient de l'analyse de la distance de mise à l'équilibre d'un grain. Deux cas limites de leur formule sont, premièrement celui issu du cas turbulent et donc $l_{sat} = sd$ (cf. équation (1.18) et (1.20)); et deuxièmement, dans le cas laminaire, (cf. équation (1.17) et (1.18)), le temps $\frac{\rho_p d^2}{\rho \nu}$ multiplié par la vitesse caractéristique du fluide γd donne la longueur de saturation :

$$l_{sat} = s \frac{\gamma d^3}{\nu} = d\Theta(s(s-1)gd^3/\nu^2).$$

L'expression est différente, mais on note toujours la proportionalité au cisaillement du fluide. La loi de conservation de la masse s'écrit encore :

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_0 \varpi (\Theta - \Theta_s)^\beta$$

Pour conclure sur ce point, nous remarquons que nous n'utilisons qu'une équation de conservation: celle de la masse. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est sursimplifiée dans ces approches, comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe §1.4.3. Il y a donc besoin d'un gros effort de modélisation pour poser et résoudre cette équation.

2.8 Conclusion

Il revient, après cette longue énumération des différents flux, que l'on peut effectuer la synthèse suivante.

L'équation du flux, contient le facteur $\tau^{3/2}$ comme un cas limite lorsque les frottements sont importants (cf. Kroy et coll. [83]). Mais pour de faibles frottements, la forme linéaire $q \propto \tau - \tau_s$ peut être préconisée :

$$q = q_{sat} \propto \tau - \tau_s \quad (2.66)$$

Pour un frottement quelconque, et si l'on linéarise le flux :

$$q = q_{sat} + \tilde{q} \quad \text{avec} \quad \frac{\tilde{q}}{q_{sat}} \ll 1, \quad (2.67)$$

la relation entre le flux et sa valeur seuil à retenir est dans le cas de l'air (Kroy):

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat}, \quad l_{sat} \simeq 1/\tau \quad (2.68)$$

Lorsque le gradient du flux q n'est pas faible, le régime de transport est dominé par l'inertie de l'écoulement. Dans ce cas la relation entre le flux et sa valeur saturée est donnée par :

$$l_{sat} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{sat}, \quad l_{sat} = s \frac{\gamma d^3}{\nu} \quad (2.69)$$

Lorsque le gradient du flux q est faible, ce qui est presque le cas des transports aquatiques lorsque la viscosité du fluide est importante⁴, le transport est dominé par les effets de la gravité. Dans ce cas, on peut supposer qu'il n'y a pas de différence entre le flux saturé est le flux instantané (cas dans le chapitre 5) :

$$q \simeq q_{sat}. \quad (2.70)$$

Quand à la forme du flux saturé, son expression est donnée en fonction du sens de l'écoulement :

1. Lorsque l'écoulement est dirigé dans un seul sens : nous constatons que le flux saturé est en général de la forme :

$$q_{sat} = \alpha (\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x})^\beta \quad (2.71)$$

où les coefficients α , Λ et β sont des coefficients qui sont fonction des propriétés des grains et de l'écoulement. Λ est un coefficient pris entre 1/2 et 6, β est pris de sorte que l'approximation $q \propto \tau^{3/2}$ de la formulation de Meyer-Peter et Müller soit respectée, ce qui implique que $\beta = 3/2$. Le coefficient Λ ainsi que α dans (2.71), sont introduits par Komarova et Newell [78], Gerkema [67], comme des coefficient dimensionnels qui, adimensionnés, sont utilisés comme des paramètres de contrôle du problème.

Cependant (Charru et coll. [42], Valance et Langlois [144]), on peut quand même envisager une loi avec longueur de saturation, mais dans ce cas, la longueur de saturation est proportionnelle au cisaillement $l_{sat} \propto \overline{U}'_S$.

4. le nombre de Bagnold est faible, donc transport des grains se fait en bloc

2. Lorsque l'écoulement est oscillant : pour tenir compte du sens de l'écoulement dans son mouvement de va et vient, la formule (2.71) peut présenter une forme plus générale. Nous procédons de la même manière le développement fait dans Komarova et Hulscher [77] pp. 243–245. Le flux est lié au taux de transport par (cf. eq. (2.22)) :

$$q_{sat} = \Phi_B \sqrt{(s-1)gd^3}. \quad (2.72)$$

Le taux de transport dans le cas d'un écoulement non oscillant est donné par Meyer-Peter et Müller (1948) [96] (cf. eq. (2.24) et (1.26)) par :

$$\Phi_B = n_\Phi (\Theta - \Theta_s)^{3/2} = \frac{n_\Phi}{(g(s-1))\sqrt{\rho^3}} (\tau - \tau_s)^{3/2} \quad (2.73)$$

où n_Φ vaut 8 ou 12 respectivement, selon que $\Theta < 1$ ou $\Theta > 1$. Pour tenir compte du sens de l'écoulement oscillant, nous introduisons le signe de la vitesse incidente, proportionnelle à \overline{U}'_S le taux de cisaillement adimensionné dans la couche limite, juste au dessus de la couche du granulaire que nous retrouverons dans la suite, à partir du chapitre 4.

Aussi, du fait qu'il y a un flux de matières quand le flux est supérieur au seuil de mise en mouvement, nous écrivons :

$$q_{sat} = \frac{n_\Phi}{g(s-1)\rho^{3/2}} \operatorname{sgn}(\overline{U}'_S) |\tau - \tau_s|^{3/2} \mathcal{H}_d(|\tau - \tau_s|). \quad (2.74)$$

Les fonctions Heaviside \mathcal{H}_d et signe sgn sont liées par $\mathcal{H}_d(x) = (1 + \operatorname{sgn}(x))/2$. Le signe de \overline{U}'_S vaut 1 lorsque l'écoulement est dirigé dans le sens des croissants et -1 lorsque l'écoulement est dans le sens contraire et s'écrit aussi lorsque la vitesse incidente est non nulle :

$$\operatorname{sgn}(\overline{U}'_S) = \frac{\overline{U}'_S}{|\overline{U}'_S|}$$

Le seuil τ_s est donné (cf. équation (1.34)) pour un fond de pente S dans la direction de l'écoulement telle que $\tan S = -\partial f/\partial x$ par (Fredsoe et Deigaard [57] p. 205) :

$$\tau_s = \frac{\tau_{s0}}{\sqrt{1 + (\partial f/\partial x)^2}} \left(1 + \frac{(\partial f/\partial x)}{\tan \varphi_s}\right) \sim \tau_{s0} \left(1 + \frac{(\partial f/\partial x)}{\tan \varphi_s}\right) \quad (2.75)$$

où φ_s est l'angle de repos statique et τ_{s0} le seuil de frottement, pour un lit plat. En général, les pentes du lit sont plus petites que l'angle de repos $|(\partial f/\partial x)| < \tan \varphi_s$, puisqu'au delà, une avalanche se déclenche ramenant l'angle en dessous de l'angle de repos. Pour de faibles pentes $(\partial f/\partial x) \ll 1$, ce qui est souvent le cas, $|(\partial f/\partial x)| \ll \tan \varphi_s$, le seuil τ_s est proche de τ_{s0} . Notant les coefficients :

$$\alpha' = \frac{n_\Phi}{g(s-1)\rho^{3/2}} \mathcal{H}_d(|\tau - \tau_s|), \quad C = \frac{\tau_{s0}}{\sqrt{1 + (\partial f/\partial x)^2}}, \quad (2.76)$$

lorsque le frottement est largement supérieur à sa valeur critique pour un lit plat τ_{s0} le flux (2.74) peut se simplifier à une forme similaire (2.25) au signe près :

$$q_{sat} = \alpha' \operatorname{sgn}(\overline{U}'_S) \sqrt{|\tau|} (|\tau| - \tau'_s - \Lambda' \frac{\partial f}{\partial x}) \quad (2.77)$$

où les coefficients τ'_s et Λ' sont définis par :

$$\tau'_s = \frac{3C}{2}, \quad \text{et} \quad \Lambda' = \frac{3C}{2 \tan \varphi_s} \quad (2.78)$$

Pour $s = 2.65$, $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et des diamètres de grains d , l'ordre de grandeur typique du frottement est $[\tau] = \Upsilon = \rho g (s-1) d \sim 16186.5 d$; le seuil de frottement dans les conditions du paragraphe 1.5.2, $\tau_{s0} = 760.77 d$, l'angle de repos φ_s dont la valeur typique est telle que $\tan \varphi_s \sim 0.3$; les valeurs adimensionnées des coefficients sont alors : $C \sim \tau_{s0} \sim 760.77 d$, le coefficient du flux $|\alpha'| = 1.56 \cdot 10^{-5}$, pour $n_\Phi = 8$; ce coefficient est souvent appelé "paramètre de charriage" et noté $[q]/(\Upsilon^{3/2})$, si $[q]$ l'ordre de grandeur typique du flux. Sa valeur de référence au seuil proposé par Parker et Klingeman (1983, cf. Meunier [95] p. 14) est $|\alpha'| = 0.002$. Par suite le coefficient de pente $\Lambda' = 3803.85 d$, et enfin le seuil pour un lit plat corrigé $\tau'_s = 1141.16 d$. En ce qui nous concerne, dans leur utilisation, les valeurs des coefficients seront adimensionnées par la valeur typique du frottement $[\tau]$:

$$\bar{\alpha} = \alpha' \Upsilon^{3/2}, \quad \bar{\tau}_s = \frac{\tau'_s}{\Upsilon}, \quad \text{et} \quad \bar{\Lambda} = \frac{\Lambda'}{\Upsilon}. \quad (2.79)$$

Regard sur l'approche Saint-Venant

3.1 Introduction

Nous venons de voir comment les matériaux sont entraînés par un fluide. Il nous faut donc maintenant examiner comment on calcule l'écoulement de fluide. Nous allons donc, dans ce chapitre, présenter une résolution très simplifiée de l'hydrodynamique. Nous allons montrer ainsi un premier exemple de rétroaction.

Que ce soit dans les écoulements côtiers ou de rivière, l'approche dite de "Saint-Venant" est diversement utilisée pour le calcul des ondes de surfaces et des vitesses. Cette approche met en jeu un fluide pur (l'eau) limité par un fond imperméable et une surface libre. Il n'y a ni particules en suspension, ni milieu granulaire traversé par le fluide. Nous rappelons les équations générales obtenues par moyenne sur la hauteur de l'écoulement, et le modèle de frottement au fond utilisé choisi empiriquement en fonction de la vitesse moyenne.

Cette approche est aussi mise en oeuvre pour comprendre le processus d'évolution du fond lorsque celui-ci est érodable (Reynolds [112], Balmforth et Provenzale [20], Fowler [63][64]). Dans ce cas, on calcule un flux de matériaux en fonction du frottement au fond, et on écrit la conservation de la masse pour le lit (*cf.* figure Fig.1). Cette approche a inspiré également la modélisation des avalanches de milieux granulaires (Savage et Hutter, [124], ..., Khakhar et coll. [75], nous y reviendrons au chapitre 9).

Une difficulté de l'étude est qu'il y a deux temps caractéristiques dans ce problème : le mouvement rapide du fluide et le mouvement lent du fond. En effet, lorsque le couplage est observé en prenant pour référence le temps hydrodynamique dit "temps court", le fond est fixe en première approximation (Balmforth et Provenzale [20]), tandis que s'il est observé en prenant pour référence le temps d'évolution du fond, dit "temps long", le fluide est stationnaire en première approximation (Fowler [63]).

Nous présentons ensuite brièvement une analyse de stabilité linéaire du fond lorsque le frottement au fond est en phase avec la vitesse moyenne (ce qui est souvent préconisé par l'approche Saint-Venant). Le résultat est que le fond érodable reste stable quelque soit la perturbation et quel que soit le régime de l'écoulement. Cet échec nous permettra de justifier notre démarche ultérieure.

3.2 Equations de l'écoulement du fluide

Nous nous restreignons à un écoulement $2D$, et nous utilisons les notations suivantes : une grandeur j , lorsqu'elle est indiquée par une étoile, j^* est une grandeur dimensionnée. Quand elle est adimensionnée, alors elle est notée \bar{j} .

Dans la suite les grandeurs :

- $f^*(x^*, t^*)$ représente la forme du fond, $f^*(x^*, t^*) = 0$ quand le fond n'est pas perturbé (plat);

- $\eta^*(x^*, t^*)$ est le forme de la surface libre, $\eta^*(x^*, t^*) = 0$ pour une surface libre non perturbée (plane);
- H_0 est la hauteur de l'écoulement lorsque le fond et la surface libre ne sont pas perturbés;
- $u^*(x^*, y^*, t^*)$ est localement, la composante horizontale de la vitesse instantanée de l'écoulement.

Ces grandeurs permettent de définir : $h^*(x^*, t^*) = H_0 + \eta^*(x^*, t^*) - f^*(x^*, t^*)$ la hauteur totale de l'écoulement, pour une perturbation du fond et de la surface libre données.

La vitesse moyenne sur la hauteur de l'écoulement est par définition :

$$U^*(x^*, t^*) = \frac{1}{h^*} \int_{f^*}^{H_0 + \eta^*} u^*(x^*, y^*, t^*) dy^*. \quad (3.1)$$

Les équations de Saint-Venant s'écrivent (Hervouet [72], Kennedy [74], Reynolds [112]) en intégrant

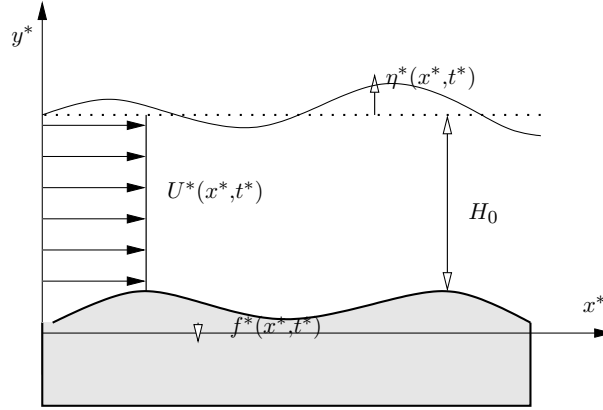


FIG. 3.1 – Domaine d'étude, sur ce dessin $S = 0$

verticalement les équations de Navier-Stokes et en supposant que la vitesse longitudinale u^* varie peu suivant y^* . Elles font apparaître le frottement au fond (τ^*):

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (h^* U^*)}{\partial x^*} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} = g \cos(S) (\tan(S) - \frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{\partial f^*}{\partial x^*}) - \frac{\tau^*}{\rho h^*} + \frac{\nu}{h^*} \frac{\partial}{\partial x^*} (h^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*}) \quad (3.3)$$

où S est la pente du lit par rapport à l'horizontale. Le terme de frottement est *a priori* inconnu, il faut fermer les équations en choisissant la dépendance de τ^* avec U^* . Par exemple, on introduit un coefficient C_f (utilisé dans les formules de traînée) tel que:

$$\tau^* = \rho C_f U^{*2}. \quad (3.4)$$

Ce coefficient est relié au coefficient de Chézy C : $C_f = g / (R_H C)$, dont les valeurs sont données de façon empirique dans la littérature (R_H est le rapport entre la section mouillée et le périmètre mouillé).

3.2.1 Adimensionnement des équations

Toutes les longueurs verticales seront adimensionnées par la hauteur H_0 , et les longueurs horizontales par l'échelle L caractéristique de la longueur de l'écoulement (en général, $H_0 \ll L$, et $\tan(S) \ll 1$, si la pente du fond est notée S , cas des perturbations sur le lit d'un fleuve en pente douce).

$$\bar{h} = \frac{h^*}{H_0}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta^*}{H_0}, \quad \bar{f} = \frac{f^*}{H_0}, \quad \bar{x} = \frac{x^*}{L}$$

La vitesse est adimensionnée par la vitesse typique U_0 de l'écoulement, lorsque celui-ci et son fond ne sont pas perturbés :

$$\bar{U} = \frac{U^*}{U_0}.$$

Suivant le cas étudié, on peut distinguer deux cas particuliers.

- Dans le cas où le fluide coule uniformément avec un fond non perturbé (exemple du fleuve sur une pente constante donnée S), la conservation de la quantité de mouvement (3.3) stipule que :

$$g \sin(S) = C_f \frac{U_0^2}{H_0}. \quad (3.5)$$

Ceci nous fixe l'échelle de la vitesse U_0 . Le temps hydrodynamique a pour échelle L/U_0 et alors nous posons :

$$\bar{t} = \frac{U_0}{L} t^*.$$

Les équations de Saint-Venant (3.2)–(3.3) se présentent sous forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{h}\bar{U})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (3.6)$$

$$F_0^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \right) = \cos(S) \left(1 - \frac{\bar{U}^2}{\bar{h}} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \right). \quad (3.7)$$

Le nombre de Froude F_0 est donné par :

$$F_0^2 = \frac{U_0^2}{g H_0}. \quad (3.8)$$

Les conditions initiales associées sont des conditions de non perturbation du fluide et du fond :

$$\bar{U} = \bar{h} = 1, \quad \text{et} \quad \bar{\eta} = \bar{f} = 0. \quad (3.9)$$

- Dans le cas où on se donne un débit de fluide et un fond complètement plat ($\sin(S) = 0$), la vitesse est donnée par ce débit et non par l'équilibre entre le frottement et la gravité qui entraîne le fluide (équation 3.5). Dans ce cas les équations de Saint Venant s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\bar{h}\bar{U})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (3.10)$$

$$F_0^2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \right) = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} - \beta \frac{\bar{U}^2}{\bar{h}}. \quad (3.11)$$

où $\beta = C_f L/H_0 > 0$ est un coefficient de friction adimensionné. On suppose dans la suite que $\beta \ll 1$.

C'est en fait ce dernier cas que nous allons étudier dans la suite.

3.2.2 Solutions linéaires

Pour fixer les idées, nous présentons tout de suite une solution linéarisée du système dans le cas où il n'y a pas de pente (3.10)–(3.11), et où β est petit. Soient les petites variations de \bar{U} et \bar{f} autour de leur valeur initiale :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= 1 + u, \quad \text{tel que} \quad |u| \ll 1, \\ \bar{\eta} &= \eta, \quad \text{tel que} \quad |\eta| \ll 1, \\ \bar{f} &= f, \quad \text{tel que} \quad |f| \ll 1, \\ \bar{h} &= 1 + \eta - f, \quad \text{tel que} \quad |\eta - f| \ll 1. \end{aligned}$$

Nous pouvons linéariser les équations (3.6)–(3.7). On trouve (*cf.* Baines [19]), pour un écoulement sub-critique ou supercritique ($F_0 \neq 1$), que la solution analytique de η est :

$$\eta(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{F_0^2}{F_0^2 - 1} f(\bar{x}, \bar{t}) + \text{ondes} \quad (3.12)$$

La solution (3.12) est composée d'une partie stationnaire, et de deux ondes qui avancent à la vitesse c_1 et c_2 telles que :

$$c_1 = 1 + \frac{1}{F_0}, \quad \text{et} \quad c_2 = 1 - \frac{1}{F_0}. \quad (3.13)$$

Au bout d'un temps assez long on a :

$$\eta = \frac{F_0^2}{F_0^2 - 1} f \quad \text{et} \quad u = \frac{-1}{F_0^2 - 1} f. \quad (3.14)$$

Par exemple, nous résolvons les équations non-linéaires (3.6)–(3.7) avec un code limiteur de flux que nous avons développé (voir annexe B). Les résultats numériques sont sur la figure Fig.3.2.2, dans le cas où $f(\bar{x},0)$, la bosse initiale, est une gaussienne. Nous identifions la présence de deux ondes qui s'éloignent de la bosse. Elles vont toutes les deux dans le même sens dans le cas supercritique, et dans deux sens opposés dans le cas subcritique. Aux temps longs, les ondes ont quitté le domaine de calcul, et dans le cas d'un écoulement supercritique, un bourrelet épouse le dessus de la bosse (figure droite), la vitesse diminue au sommet de la bosse. En revanche, dans le cas d'un écoulement subcritique, au sommet de la bosse, un creux se forme à la surface libre. La vitesse augmente au dessus de la bosse. Cette solution, ici calculée en non linéaire, est cohérente avec la relation linéarisée (3.12).

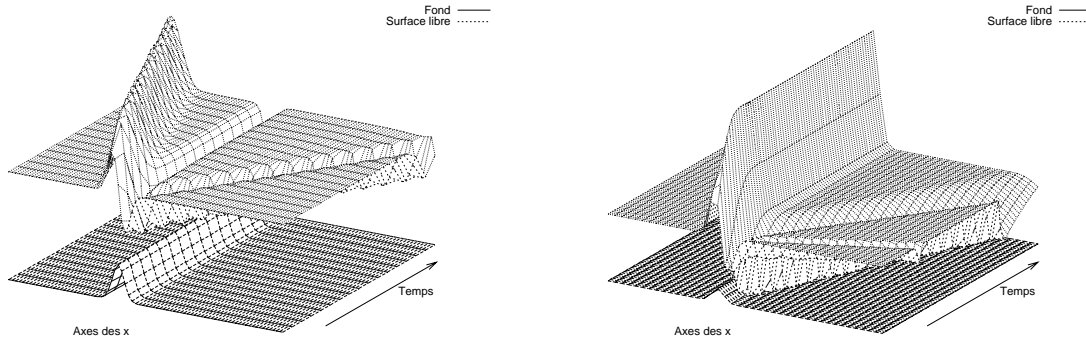


FIG. 3.2 – L'écoulement de base est dirigé de la gauche vers la droite. La surface libre présente deux ondes qui finissent par sortir. La bosse est fixe de hauteur maximale $|f(\bar{x},0)| = 0.2$. Le cas subcritique (gauche) est calculé pour $F_0 = 0.3$; les deux ondes avancent dans des sens opposés. Le cas supercritique (droite) pour $F_0 = 1.7$; les deux ondes avancent dans le même sens, mais à des vitesses différentes. Dans les deux cas $0 \leq t \leq 10$

Dans les équations stationnaires et non linéaires (3.6)–(3.7), il existe pour une hauteur de bosse donnée, un domaine (de valeurs du nombre de Froude initial) pour lequel des ressauts se créent en aval de la bosse. Dans ce domaine les solutions linéarisées ne sont pas valides. Le diagramme donnant le nombre de Froude en fonction de la hauteur de bosse a été établi par Nadiga et coll. [100] et Baines [19]. Sur les figures Fig.3.2 qui suivent nous avons choisi le nombre de Froude et la hauteur de bosse de sorte à pouvoir éviter la présence de ressauts (notre code permet cependant de les calculer sans problème).

3.3 Equation d'évolution du fond

Ayant résolu l'écoulement du fluide pour un fond fixe, nous passons à l'évolution du fond. Elle est régie par la relation (2) de conservation de matières (loi d'Exner).

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*} \quad (3.15)$$

Notant q_0 l'ordre de grandeur du flux de matières entraînées par unité de section, le flux est adimensionné par :

$$\bar{q} = \frac{q^*}{q_0}.$$

L'équilibre entre les ordres de grandeurs, permet d'évaluer l'échelle de temps caractéristique de formation des structures au fond :

$$t^* = \frac{H_0 L}{q_0} \bar{t}. \quad (3.16)$$

3.3.1 Flux de matières entraînées

Nous sommes dans le cas d'un écoulement unidirectionnel, la relation du flux saturé est donnée par (2.71). En variables dimensionnelles ce flux s'écrit :

$$q_{sat}^* = \alpha (\tau^* - \tau_s^* - \Lambda \frac{\partial f^*}{\partial x^*})^{3/2}, \quad \text{et} \quad \tau^* = \rho C_f U_*^2 \quad (3.17)$$

α et Λ étant des coefficients empiriques fonction des propriétés des grains et de l'écoulement dont des ordres de grandeur sont donnés au paragraphe 2.8. Sous la forme adimensionnelle, la relation du flux saturé s'écrit :

$$\bar{q}_{sat} = (\bar{\tau} - \bar{\tau}_s - \bar{\Lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}})^{3/2}, \quad \text{et} \quad \bar{\tau} = \bar{U}^2. \quad (3.18)$$

obtenue en posant $\tau^* = \Upsilon \bar{\tau}$, avec :

$$\Upsilon = \rho C_f U_0^2, \quad \bar{\tau}_s = \frac{\tau_s^*}{\Upsilon}, \quad \bar{\Lambda} = \frac{H_0}{L} \frac{\Lambda}{\Upsilon} \quad q_0 = \alpha \Upsilon^{3/2} \quad (3.19)$$

Le lien entre le flux et sa valeur saturée est donné par la relation (2.69) à la page 31 qui est :

$$\bar{l}_{sat} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} + \bar{q} = \bar{q}_{sat} \quad (3.20)$$

où nous avons adimensionné la longueur de saturation définie dans la relation (2.69) :

$$\bar{l}_{sat} = \frac{l_{sat}}{L}.$$

3.4 Couplage écoulement/évolution du fond

Le temps au bout duquel le fond commence à se déformer sous l'effet du fluide est en général plus long que le temps caractéristique associé à l'écoulement. Cette différence des ordres de grandeur du temps est interprétée de la manière suivante : à l'échelle des temps de formations des structures du fond, l'écoulement du fluide est "stationnaire"; à l'échelle des temps hydrodynamiques, le fond est supposé "fixe". Pour présenter cet aspect des choses, nous écrivons les équations associées respectivement à l'échelle temporelle du fond ou à celle de l'hydrodynamique.

Posons :

$$\epsilon = \frac{\text{temps de l'écoulement}}{\text{temps de déformation du fond}} = \frac{q_0}{H_0 U_0}. \quad (3.21)$$

3.4.1 Développement associé à l'échelle temporelle hydrodynamique

Lorsque le couplage écoulement/évolution du fond observé à l'échelle temporelle de l'écoulement, nous obtenons le système (3.6)–(3.7) que nous avons adimensionné pour le temps par la relation (3.15) :

$$\bar{t} = \frac{U_0}{L} t^*.$$

En gardant cette échelle de temps et les autres échelles que nous avons déjà utilisées (plus haut) pour le fond, le flux et la longueur, l'équation (3.15) s'écrit alors sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \epsilon \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (3.22)$$

où ϵ , rapport du temps hydrodynamique par le temps de déformation du fond est aussi le rapport entre le débit de matières transportées au fond et le débit d'eau (le flux de l'eau par unité de section est $Q = H_0 U_0$) :

$$\epsilon = \frac{q_0}{Q}. \quad (3.23)$$

Lorsqu'on se limite aux structures de fond comme les dunes, Fowler [63] estime que la valeur de ϵ est typiquement de l'ordre de 10^{-2} . Donc en première approximation, le fond est bien fixe pour le fluide ($\partial f / \partial t = 0$).

3.4.2 Développement associé à l'échelle temporelle du fond

Maintenant nous adimensionnons l'équation d'évolution du fond (3.15) avec l'échelle de temps 3.16 :

$$t^* = \frac{H_0 L}{q_0} \bar{t}, \quad (3.24)$$

et nous gardons identiques les échelles spatiales du fluide et du fond. Lorsque ϵ tend vers zéro les équations de Saint-Venant (3.10)–(3.11) et d'évolution du fond (3.15) en grandeurs sans dimension s'écrivent alors ($\beta = 0$, on néglige le frottement dans le fluide) :

$$\frac{\partial(\bar{h}\bar{U})}{\partial\bar{x}} = 0, \quad \text{et} \quad F_0^2 (\bar{U} \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}}) = -\frac{\partial\bar{h}}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{t}} = -\frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{x}}. \quad (3.26)$$

Les équations du fluide (3.25)–(3.26) sont stationnaires en première approximation à l'échelle temporelle du fond.

3.4.3 Résolution

Dans un premier temps nous "négligeons" l'effet du frottement ($\beta \ll 1$) sur l'écoulement, mais pas sur le flux de matières. On obtient alors une intégrale première du mouvement pour le fluide.

La résolution des équations (3.25)–(3.26) revient à :

$$\bar{\eta} = \frac{F_0^2}{2} (1 - \bar{U}^2), \quad \bar{h} = 1 + \bar{\eta} - \bar{f} \quad (3.27)$$

$$(1 - \bar{f} + \frac{F_0^2}{2} (1 - \bar{U}^2)) \bar{U} - 1 = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{t}} = -\frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{x}}, \quad \text{avec,} \quad \bar{l}_{sat} \frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{x}} + \bar{q} ((\bar{U}^2 - \bar{\tau}_s - \bar{\Lambda} \frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}})^{3/2}). \quad (3.29)$$

A titre illustratif, nous résolvons (3.28) par un algorithme de Newton, puis nous calculons le fond à partir de (3.29). Les résultats sont représentés sur la figure Fig.3.3. Dans le cas d'un régime subcritique de l'écoulement, le fond avance dans le sens de l'écoulement, et sa hauteur est atténuée. En revanche dans le cas d'un régime supercritique de l'écoulement, le fond avance dans le sens opposé, et la hauteur diminue également.

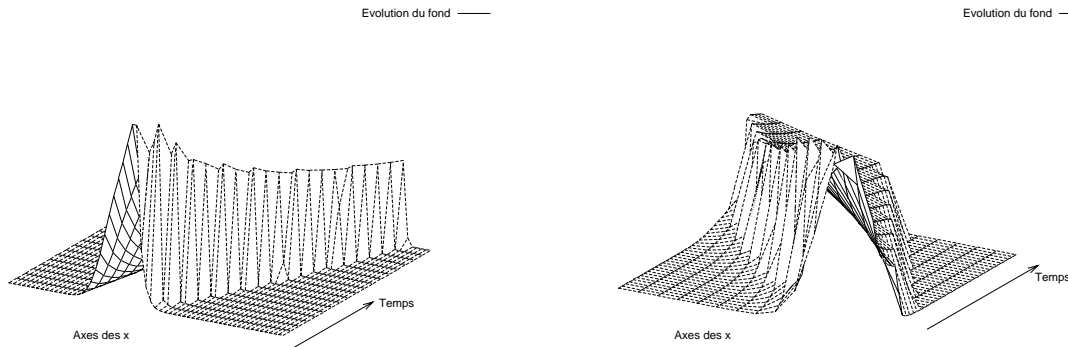


FIG. 3.3 – L'écoulement de base est dirigé de la gauche vers la droite, $\bar{\Lambda} = 0$. La bosse initiale est de hauteur $|f| = 0.2$. Le cas subcritique (gauche) est calculé pour $F_0 = 0.3$ et le cas supercritique (droite) pour $F_0 = 1.7$. Le caractère non lisse de la courbe est dû à un mauvais échantillonnage des points lors du tracé du graphe.

3.4.4 Analyse de stabilité linéaire

Nous linéarisons les variables comme au paragraphe 3.2.2. Pour $|f| \ll 1$, nous pouvons écrire, en notant q_l le flux saturé (3.18) linéarisé sous la forme :

$$q_l = (1 - \bar{\tau}_s)^{3/2} \left(1 + \frac{3f}{2(1 - F_0^2)(1 - \bar{\tau}_s)} - \frac{3\bar{\Lambda}}{2(1 - \bar{\tau}_s)} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right) + \mathcal{O}(f^2) \quad (3.30)$$

Décomposons la perturbation du fond en modes de Fourier :

$$f = f_k e^{(\sigma t + i(\omega t - k \bar{x}))}. \quad (3.31)$$

La relation de dispersion est alors :

$$\sigma + i\omega = \frac{1}{1 - i k \bar{l}_{sat}} \left(\frac{3 i k (1 - \bar{\tau}_s)^{1/2}}{1 - F_0^2} - \frac{3 \bar{\Lambda} k^2 (1 - \bar{\tau}_s)^{1/2}}{2} \right) \quad (3.32)$$

Lorsque $\bar{\Lambda} = 0$, et $\bar{l}_{sat} = 0$, on obtient un taux d'amplification nul ($\sigma = 0$) pour tous les modes k . Quand l'écoulement est subcritique, la vitesse de phase est positive: la bosse avance dans le sens de l'écoulement. Dans le cas supercritique la bosse remonte l'écoulement. Les perturbations ne sont pas amplifiées, les bosses se déplacent sans se déformer.

Lorsque $\bar{\Lambda}$ est différent de zéro, et $\bar{l}_{sat} = 0$: l'effet de la pente (terme proportionnel à $\bar{\Lambda}$) a un rôle diffusif et le fond est stable (Une bosse donnée disparaît comme on le voit sur la figure Fig.3.3).

Le fond est encore stable si $\bar{\Lambda} = 0$ et $\bar{l}_{sat} \neq 0$. De même, lorsque $\bar{\Lambda} \neq 0$ et $\bar{l}_{sat} \neq 0$, le fond est stable. Les deux effets (effet de pente et effet de saturation) sont stabilisant.

Ce changement de nature suivant le régime subcritique/ supercritique est bien connu, il s'agit du passage des dunes aux antidunes (cf. Fig.3.4.4) en eau peu profonde que nous avons déjà évoqué au paragraphe 1.2.3.

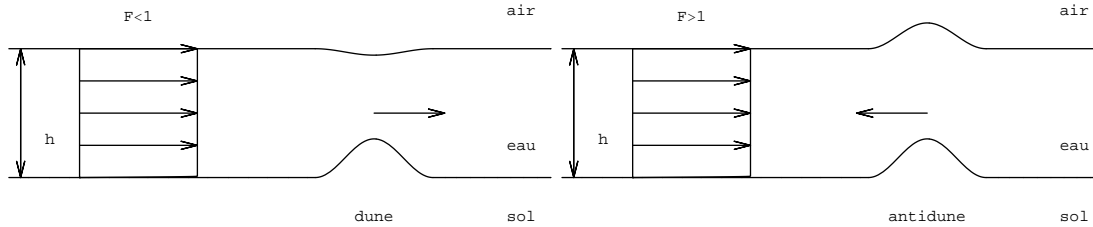


FIG. 3.4 – L'écoulement de base est dirigé de la gauche vers la droite. Suivant le régime, subcritique (ou fluvial, $F_0 < 1$, à gauche), ou super critique (ou torrentiel, $F_0 > 1$, à droite) une bosse sur un fond érodable va se déplacer dans le sens du courant ou le remonter.

3.5 Conclusion

Il ressort de cette analyse très schématique que le fond reste stable quelle que soit la perturbation et quel que soit le régime de l'écoulement. Ceci n'est pas conforme à la réalité. Cela est dû à la formulation du frottement $\tau \propto u^2$.

Quand on résout entièrement les équations de Navier-Stokes sur une bosse, ce que nous ferons au chapitre 4, page 53, nous verrons que le maximum de frottement est atteint juste en amont de la bosse.

Pour corriger le modèle $\tau \propto u^2$ et $u = u(f)$, Kennedy (1963) [74], Fowler (2001) [63] émettent donc l'idée de déphaser τ avec f , de manière à ce que τ soit en "avance" par rapport à f .

Le frottement étant déphasé d'une certaine longueur l (que l'on se donne) avec le fond, il est reformulé comme suit :

$$\tau|_{x+l} \propto u^2|_x. \quad (3.33)$$



FIG. 3.5 – Images d'antidunes, Lagée [87]

Alors, lorsque l est petit, et en posant :

$$a = \frac{3}{(1 - \bar{\tau}_s)(1 - F_0^2)}, \quad \text{et} \quad b = \frac{3\bar{\Lambda}}{2(1 - \bar{\tau}_s)} > 0,$$

l'expression du flux saturé linéarisé (3.30), devient :

$$q_l = 1 + a f(x+l) - b \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (3.34)$$

$$= 1 + a f(x) - (al + b) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + bl \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \dots \quad (3.35)$$

La relation de dispersion peut alors s'écrire :

$$\sigma + i\omega = \frac{-k^2 ((al - b) + \bar{l}_{sat}(a - bk^2)) - ik(a - bk^2 + \bar{l}_{sat}(al - b)k^2)}{1 + (k\bar{l}_{sat})^2} \quad (3.36)$$

Dans ce cas, si $\bar{l}_{sat} = 0$, il y a stabilité du fond pour $al > b$. Sinon on peut obtenir une région de nombres d'ondes ($0 < k < k_c$) où la configuration est instable. Cette idée est intuitive et vise à corriger la formulation du frottement. Rigoureusement, le frottement doit être calculé avec des équations complètes, ce que nous ferons dans une configuration simplifiée.

Retenons dès à présent que le frottement doit être en "avance" sur la forme du fond pour qu'il y ait instabilité.

Résolution complète des équations de Navier-Stokes

4.1 Introduction

L'intérêt de ce chapitre est de valider les modèles de frottement, que nous établirons dans les chapitres suivants par les théories asymptotiques (linéaires et non-linéaires), de l'évolution de rides dans la couche près du fond, dans trois cas d'exemples d'écoulements cisailés.

Nous utilisons un code de calcul CASTEM2000, qui résout numériquement les équations de la Mécanique.

La résolution numérique directe des équations de Navier-Stokes n'est pas la solution la plus optimale pour des configurations particulières d'écoulement réels. Ses limites sont liées aux échelles de temps et d'espace. En effet le temps de calcul et la taille de mémoire nécessaire pour une simulation numérique des équations est telle que même le progrès de l'informatique n'autorise raisonnablement le calcul que pour des domaines assez simples. C'est pourquoi dans cette partie nous nous limitons à une seule bosse de faible hauteur, qui est une configuration assez élémentaire de couplage fluide/fond. Pour cette configuration simple, nous étudierons les paramètres du fluide près du voisinage de la bosse (frottement pariétal) qui serviront à valider dans la suite l'approche de calcul analytique dans l'espace de Fourier des équations linéarisées.

Ce chapitre permet de calculer le frottement pariétal sur une forme de fond donnée, par la résolution complète des équations de Navier-Stokes. Les conditions aux limites sont imposées de telle sorte que nous soyons dans la zone de vitesse linéaire de la couche limite laminaire de l'écoulement près du fond. Nous étudions la perturbation de frottement pariétal dans la configuration d'un écoulement cisailé.

Auparavant, nous écrivons les équations de Navier-Stokes complètes sous forme adimensionnée, lorsque l'écoulement de base est un écoulement cisailé.

4.2 Passage du problème complet au problème simplifié

Nous allons étudier trois types d'écoulements dans la suite :

Le premier cas d'écoulement présente un cisaillement uniforme qui est un cas classique d'étude de formation de rides (Charru et Mouilleron-Arnould [41] [42], Loiseleux et Doppler, 2004 [90], ...). Dans ce cas, nous nous intéressons aussi à la configuration du fluide visqueux.

Le deuxième cas est destiné à décrire les expériences de Caps [36] (réalisées au GRASP, Institut de Physique, Université de Liège, Belgique) par une approche théorique. Ses expériences correspondent à un écoulement sur un fond granulaire qui est brusquement freiné.

Le troisième cas est relatif à un fluide oscillant sur un fond sableux.

Nous calculons la vitesse incidente dans la couche limite laminaire de l'écoulement, dans les trois cas d'écoulement décrits. Cette vitesse est linéaire par rapport à la coordonnée verticale, et a pour coefficient de pente adimensionné par l'épaisseur de la couche limite de l'écoulement \overline{U}'_S , qui dans la littérature est souvent désignée par $\overline{\gamma}$. Le coefficient de pente de vitesse joue un rôle important par la suite dans la stabilité du fond. Nous donnons les solutions de la vitesse dans la couche limite et l'épaisseur de cette couche δ dans les trois configurations lorsque la paroi n'est pas perturbée. Les détails de calculs de la vitesse dans la couche limite sont en annexe A. Les vitesses sont développées suivant y^* pour mettre en exergue le fait que près du fond le profil des vitesses est linéaire en y^* , la coordonnée verticale liée à la hauteur de l'écoulement. Nous nous intéressons au coefficient de la pente qui sera déterminant dans le calcul du frottement pariétal.

4.2.1 Ecoulement de cisaillement uniforme

La solution de la vitesse dans la couche limite d'un écoulement stationnaire présentant un cisaillement uniforme est due à Blasius (*cf.* Schlichting [126]), et elle s'écrit près de la paroi pour de petites valeurs de y^*/δ :

$$u^* = 0.332 U_0 \frac{y^*}{\delta} + \mathcal{O}(y^{*2}). \quad (4.1)$$

L'épaisseur de la couche limite est $\delta = L/\sqrt{Re}$. Les calculs sont détaillés en annexe A.

4.2.2 Ecoulement brusquement freiné

La vitesse, dans la couche limite d'un écoulement sur un fond non perturbé freiné brusquement, est (calculs en annexe A) très près de la paroi :

$$u^* = \frac{U_0 y^*}{\sqrt{\pi \nu t^*}} + \mathcal{O}(y^{*2}). \quad (4.2)$$

L'épaisseur de la couche limite est : $\delta = \sqrt{\pi \nu T}$ si $\mathcal{O}(t^*) = T = L^2/\nu$.

4.2.3 Ecoulement oscillant

Pour un fluide oscillant à la fréquence $2\pi/\Omega$ sur fond non perturbé, la solution de vitesse dans la couche limite devient (calculs en annexe A) très près de la paroi :

$$u^* = U_0 \cos(\Omega t^* + \frac{\pi}{4}) \frac{y^*}{\delta} + \mathcal{O}(y^{*2}). \quad (4.3)$$

L'épaisseur de la couche limite à chaque instant est : $\delta = \sqrt{\nu/\Omega}$.

4.3 Première forme d'adimensionnement des équations

4.3.1 Echelles

On choisit comme échelle pour u^* , sa valeur U_0 , pour l'écoulement non perturbé loin du fond.

$$\overline{u} = \frac{u^*}{U_0}$$

Dans les cas d'un cisaillement uniforme et d'un écoulement freiné U_0 est constant. Par contre pour un écoulement oscillant, $U_0 = A\Omega = 2A\pi f$.

Les longueurs sont adimensionnées par δ , épaisseur de la couche de Stokes dans chaque cas :

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{\delta} (x^*, y^*).$$

Les temps hydrodynamiques, dans chaque cas sont adimensionnés de la façon suivante :

$$\overline{t} = \frac{t^*}{(\delta/U_0)}, \quad \text{pour un cisaillement uniforme;}$$

$$\bar{t} = \frac{t^*}{(\delta^2/\nu)}, \quad \text{pour le cas freiné;}$$

$$2\pi\bar{t} - \frac{\pi}{2} = \Omega t^* + \frac{\pi}{4}, \quad \text{pour le cas oscillant.}$$

Utilisant les échelles ainsi définies, nous notons :

$$Re_\delta = U_0\delta/\nu, \quad (4.4)$$

nombre de Reynolds de Stokes (qui, dans le cas oscillant peut se mettre sous la forme :

$$Re_\delta = \frac{A}{\delta} \quad (4.5)$$

où A est l'amplitude d'oscillation du fluide. Nous notons également par :

$$Fr_\delta = \frac{U_0}{\sqrt{g}\delta}, \quad (4.6)$$

le nombre de Froude dans la couche de Stokes.

La pression (dans laquelle nous mettons l'effet de gravité) est adimensionnée ainsi :

$$\bar{p} = \frac{p^*}{\rho U_0^2} + \frac{y^*}{\delta Fr_\delta^2}.$$

Dans le cas du régime d'écoulement visqueux, adimensionnons la pression par :

$$\bar{p} = \frac{Re_\delta p^*}{\rho U_0^2} + \frac{y^*}{\delta Fr^2}$$

Soit $f^*(x^*, t^*)$, la forme du fond à chaque instant t^* et à la position donnée x^* . Nous l'adimensionnons par δ . Par une analyse dimensionnelle de l'équation de transport (2), page iii, dite équation d'évolution du fond, le temps de formations des rides du fond est $(Q_0/q_0) (\delta/U_0)$ (*cf.* relation (3.16), chapitre 3), si le flux de l'écoulement caractérisée par Q_0 , et que le flux des matières entraînées au fond est caractérisé par q_0 . Cet temps correspond à la période au bout de laquelle des structures se forment au fond d'un écoulement.

4.3.2 Equations

Les équations de continuité et de Navier-Stokes sans dimension, dans la couche limite s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial t} + Re_\delta ([(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \nabla](\bar{u}, \bar{v}) + \nabla \bar{p}) = \nabla^2(\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.8)$$

Le profil initial de vitesse étant $\bar{U}_{\text{Base}}(\bar{y}, \bar{t})$. Cette vitesse devenant pour \bar{y} tendant vers zéro (4.1)–(4.2)–(4.3) respectivement en variables sans dimension :

$$\bar{u} = 0.332\bar{y} + \mathcal{O}(\bar{y}^2) \quad \text{pour un cisaillement uniforme,} \quad (4.9)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{\bar{t}}}\bar{y} + \mathcal{O}(\bar{y}^2) \quad \text{pour un écoulement freiné,} \quad (4.10)$$

$$\bar{u} = \cos(2\pi\bar{t})\bar{y} + \mathcal{O}(\bar{y}^2) \quad \text{pour un écoulement oscillant.} \quad (4.11)$$

où le coefficient \bar{U}'_S est le taux de cisaillement qui vaut 0.332 dans le cas uniforme, $1/\sqrt{\bar{t}}$ dans le cas freiné, et $\cos(2\pi\bar{t})$ dans le cas oscillant, c'est une fonction de la seule variable \bar{t} , temps hydrodynamique.

Nous avons dans les trois cas à chaque instant \bar{t} , le profil des vitesses \bar{u} linéaire en \bar{y} près de la paroi.

Nous retrouvons le système d'équations (7.1–7.2) étudié par Lyne [93], Sleath [128], Kaneko [73], Cuevas [46], Rousseaux [120].

Ces équations sont écrites avec les échelles temporelles hydrodynamique prises comme référence. Dans ces échelle de temps, tout comme au chapitre 3, l'équation d'évolution du fond s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \epsilon \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} = 0. \quad (4.12)$$

où $\epsilon = q_0/Q_0$ est un petit paramètre. Ce qui montre qu'en première approximation, le fond est fixe. Dans ces conditions il est possible de calculer les structures de l'écoulement sur une forme de fond donnée. L'étude des vortex qui se développent en aval des sommets des perturbations, supposées fixes au fond d'un écoulement a fait l'objet des études de Lyne [93], Sleath [128], Kaneko [73], Cuevas [46].

Notre but est d'étudier l'évolution du fond. Nous adoptons, comme temps de référence, le temps de formation des rides. Le temps est adimensionné ainsi :

$$\bar{t} = \frac{t^*}{(\delta^2 q_0)}.$$

Les équations de Navier-Stokes et d'évolution du fond s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.14)$$

$$\epsilon \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{t}} + Re_\delta ([(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \nabla](\bar{u}, \bar{v}) + \nabla \bar{p}) = \nabla^2(\bar{u}, \bar{v}). \quad (4.15)$$

Les relations (4.9–4.11) peuvent se mettre sous la forme “générique” suivante :

$$\bar{u} = \bar{U}'_S \bar{y} + \mathcal{O}(\bar{y}^2), \quad (4.16)$$

où le coefficient \bar{U}'_S de pente de vitesse vaut 0.332 dans le cas uniforme, $1/\sqrt{\bar{t}}$ dans le cas freiné, et $\cos(2\pi \bar{t})$ dans le cas oscillant; il est fonction de la seule variable \bar{t} , temps hydrodynamique.

L'équation (5.3) sert de condition aux limites à l'entrée $\bar{x} = -\infty$, et loin au dessus du fond $\bar{y} = \infty$ pour les équations du fluide (4.13)–(4.14).

La résolution du système écoulement/fond érodable (4.13)–(4.15) se fait dans la couche limite pour chacune des trois types d'écoulement. La solution obtenue est une relation 'générique' (comme (5.3)) du frottement pariétal en Fourier dans les cas asymptotiques : nombre de Reynolds faible et nombre de Reynolds élevé. Ces régimes sont désignés par Charru et Hinch [38], “deep viscous regime” et “boundary layer regime” respectivement. Dans leur étude, Charru et Hinch, se sont intéressés aux solutions linéaires d'un écoulement de Couette sur un fond ondulé et fixe.

4.4 Equations de Navier-Stokes stationnaires

Dans la suite, nous allons étudier l'écoulement cisailé (de taux de cisaillement $\gamma = U_0/\delta$) sur une bosse (fixe, dont la forme est une gaussienne durant ce chapitre) de faible hauteur, comparée à sa longueur et comparée à l'épaisseur de couche limite. L'écoulement est supposé laminaire et stationnaire. Dans tout ce chapitre, l'écoulement est dirigé de la gauche vers la droite.

Les équations de continuité et de Navier-Stokes 2D dans les coordonnées cartésiennes (x^*, y^*) seront considérées. Elles ont été adimensionnées avec U_0 et δ .

Posons (u^*, v^*) le vecteur vitesse, et (p^*) la pression dans l'écoulement, et adimensionnons les équations de la façon suivante :

- les longueurs sont adimensionnées par la largeur L de la bosse :

$$\bar{x} = \frac{x^*}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y^*}{L}, \quad \bar{f} = \frac{f^*}{L} = a_0 e^{-8\pi(\bar{x}-\bar{x}_c)^2},$$

où f est la forme du fond (expression de la bosse au fond); a_0 est la hauteur relative de la bosse, \bar{x}_c est la position du centre de la bosse, en général 10/3 (voir figure Fig.4.5).

- les vitesses sont adimensionnées par la vitesse γL :

$$\bar{u} = \frac{u^*}{\gamma L}, \quad \bar{v} = \frac{v^*}{\gamma L},$$

- la pression est adimensionnée par :

$$\bar{p} = \frac{p^*}{\rho(\gamma L)^2}$$

où ρ est la densité du fluide. Il est d'usage d'utiliser la dimension de la pression :

$$[p^*] \equiv \rho(\gamma L)^2,$$

mais l'on peut aussi avoir :

$$[p^*] \equiv (\rho(\gamma L)^2)/Re,$$

ce qui est fait pour les fluides à faible nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds dans la couche limite du fluide :

$$Re = \frac{\gamma L^2}{\nu},$$

la viscosité cinématique du fluide étant ν .

Les équations adimensionnées de Navier-Stokes sont alors :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{4.17}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u} \tag{4.18}$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{v}. \tag{4.19}$$

À partir de \bar{u} , nous calculons le frottement pariétal $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=\bar{f}(\bar{x})}. \tag{4.20}$$

En fait c'est la dérivée normale qui est calculée lorsque la bosse est petite, et dans ce cas, la normale est assimilable au vecteur (0,1).

4.4.1 Conditions aux limites associées

En dehors des conditions aux limites d'adhérence à la paroi de la bosse (au fond), les conditions d'entrée ($\bar{x} = \bar{x}_e$) et loin au dessus de la paroi de la bosse ($\bar{y} = y_h$) sont données par le raccord de la solution de couche limite (laminaire) :

▷ à l'entrée $\bar{x} = \bar{x}_e$ nous avons un cisaillement uniforme $\bar{u} = \bar{y}$ et $\bar{v} = 0$

▷ au fond ($\bar{y} = a_0 e^{-8\pi(\bar{x}-\bar{x}_e)^2}$), la condition d'adhérence $\bar{u} = \bar{v} = 0$

▷ à la sortie $\bar{x} = \bar{x}_s$, $\bar{p} = 0$.

4.5 Utilisation de CASTEM2000

Nous résolvons un problème équivalent au système constitué par les équations (4.17)-(4.18)-(4.19) par une formulation de type vitesse-pression. En effet, la divergence de (4.18)-(4.19) permet d'écrire :

$$\nabla^2 \bar{p} = 0 \tag{4.21}$$

Les conditions aux limites du paragraphe (4.4.1) sont exprimées sur la figure Fig.4.5. Mais la particularité ici est que le code définit des contraintes par défaut sur les bords où aucune condition n'est imposée. Par défaut sur le 'bord' supérieur et à la sortie, (4.21) et (4.25) sont résolues localement, avec la donnée d'une contrainte de surface visqueuse ($(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = ((\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n})_t, (\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n})_n)$), où $\bar{\sigma}$ est la contrainte visqueuse et \mathbf{n} la normale locale au bord du domaine :

$$(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n})_t = \mu \frac{\partial \bar{u}_t}{\partial \bar{n}} \quad (\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n})_n = \mu \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \bar{n}} - \bar{p}. \tag{4.22}$$

En $\bar{x} = x_s$, et par défaut en $\bar{y} = y_h$, on a $(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = (0,0)$ qui, adimensionné sur ces bords, donne :

$$\text{en } \bar{y} = y_h, \quad \bar{u} = \bar{u}(\bar{x}), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = Re \bar{p} \quad (4.23)$$

$$\text{en } \bar{x} = x_s, \quad \bar{u} = \bar{u}(\bar{y}), \quad \text{et} \quad \bar{v} = \bar{v}(\bar{y}) = \bar{v}(\bar{x} = x_s, \bar{y} = H) = 0. \quad (4.24)$$

Ceci permet de dire que la perturbation de pression “négative”, qui peut éventuellement être obtenue, est liée au gradient normal de la vitesse normale sur le bord du domaine considéré. Nous pouvons mettre des valeurs qui permettent de ne pas avoir une pression négative. Ce qu’il faut retenir c’est qu’au sommet de la bosse, du fait que le haut du domaine n’est pas fermé (écoulement ouvert), il y a dépression.

L’équation (4.21) est résolue par inversion grâce à un algorithme implicite (algorithme de Choleski), de façon itérative, à partir de la donnée : $\bar{p} = 0$, à la sortie ($\bar{x} = x_s$) du domaine.

Connaissant la pression, le calcul de la vitesse est fait par une discrétisation en élément finis (EF) des termes de diffusion, de convection et (éventuellement le terme source) de l’équation de Navier-Stokes ((4.18) et (4.19))

$$((\bar{u}, \bar{v}) \cdot \nabla) \cdot (\bar{u}, \bar{v}) = -\nabla \bar{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\bar{u}, \bar{v}) \quad (4.25)$$

avec un schéma semi-implicite décentré ‘Streamline Upwind Petrov Galerkin’ (SUPG).

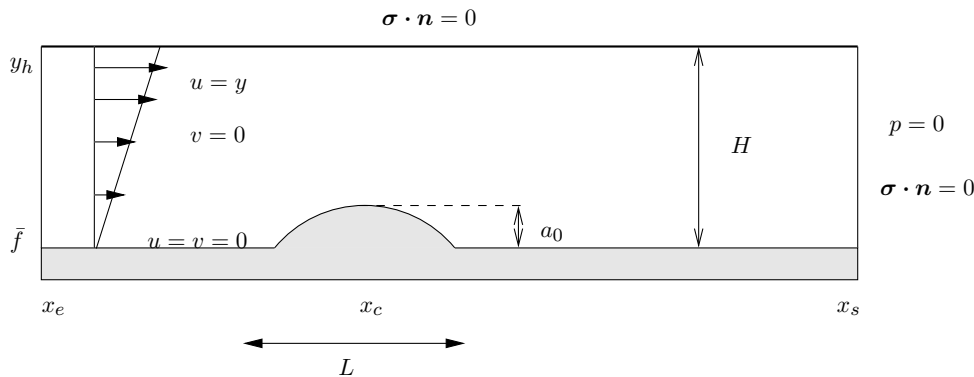
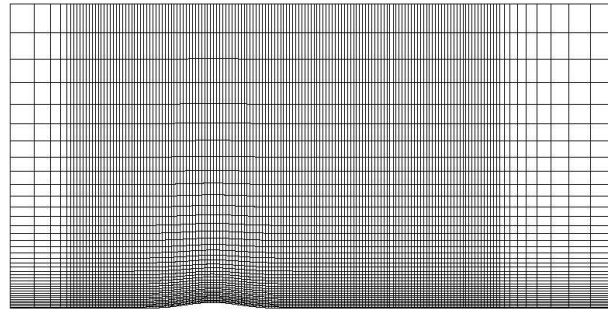


FIG. 4.1 – Configuration du domaine (écoulement sur une bosse) par CASTEM2000. Le domaine a pour longueur $D = x_e - x_s$, et pour hauteur $H = y_h - \bar{f}$

4.5.1 Choix de la taille du domaine et du maillage utilisé

Le domaine étant assez simple il correspond à un maillage en éléments finis constitué de quadrangles de pas constant en \bar{x} et de pas progressif assez resserré le long du fond de l’écoulement. Les ordres de convergences sont en $(\Delta h)^3$ pour la vitesse et en $(\Delta h)^2$ pour la pression si Δh est la taille de l’élément choisi. Le choix du pas de maillage “convenable” pour cette étude a été fait de la façon suivante :

- la taille du domaine (Fig.4.5) doit être telle qu’une condition de surface libre soit vérifiée par le bord supérieur, et ce, conformément aux conditions aux limites par défaut de CASTEM2000. La condition de “tension” surfacique, prise par défaut sur le bord supérieur du domaine, est renforcée à cet effet par une grande hauteur du domaine. La longueur est prise de telle sorte que la condition imposée à la sortie ne perturbe pas l’écoulement juste en aval du sommet de la bosse;
- à partir de quelle taille de maille les résultats ne varient plus assez pour un nombre assez important d’itérations? Ici pour tenir compte de la recirculation éventuelle en aval du sommet de la bosse, il faut pouvoir effectuer des calculs d’écoulement au pied de la bosse. Pour ce faire, le maillage a été pris au moins 5 fois plus petit que la hauteur faible a_0 de la bosse. Le point de rattachement de l’écoulement est situé à environ 6 longueurs après la bosse; aussi il faut prendre la longueur du domaine suffisamment grande pour qu’à la sortie le profil cisailé non perturbé soit retrouvé.
- en enfin, pour un maillage convenablement choisi, à partir de combien d’itérations y-t-il convergence des résultats? En d’autres termes, si u^n est la solution à l’itération n , $\log \| u^{n+1} - u^n \|_{L^\infty}$ donne l’ordre de grandeur du résidu (voir Fig.4.5).



Cast3m2001 Education Recherche : Maillage

FIG. 4.2 – *Domaine maillé sur une gaussienne de hauteur $a_0 = 0.1$ sur un domaine de longueur $D = 10$ et de hauteur $H = 5$. le maillage le long du fond est resserré: en y de pas 0.01 puis et progressivement atteint le pas de 0.5 en haut du domaine et en x resserré autour de la bosse. le nombre d'éléments et de noeuds générés sont respectivement de 5890 et 18057*

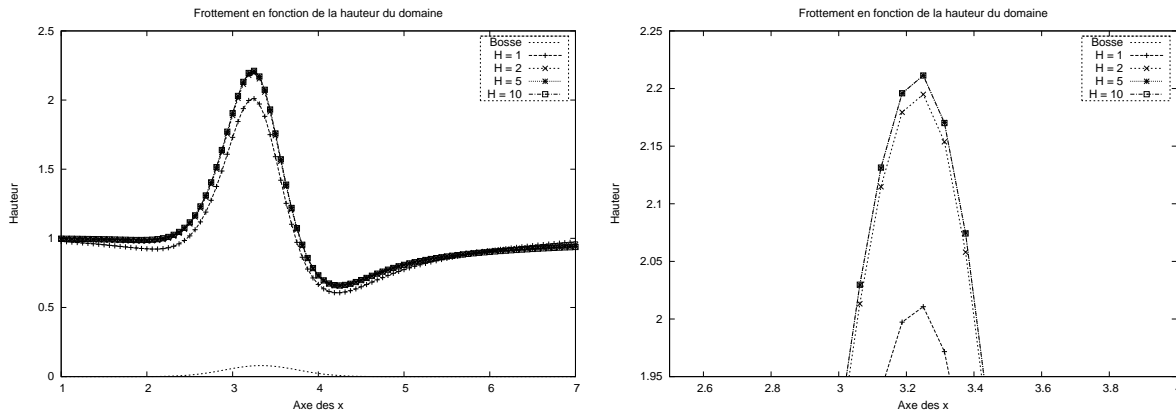


FIG. 4.3 – *Frottement pariétal calculé sur une gaussienne de hauteur $a_0 = 0.08$ en fonction de la hauteur du domaine. Pour une longueur fixée ($D = 10$), à gauche: nous prenons des hauteurs de 1 à 10; et à droite: valeur du frottement au sommet pour des hauteurs 2, 5, et 10. La bosse est centrée en $10/3$ ($x_c = 10/3$).*

Les réponses à ces préoccupations se trouvent dans l'interprétation des résultats suivants de perturbation de frottement ($\bar{\tau} - 1$) et de pression (\bar{p}).

Les résultats pour un domaine semblent converger à partir d'une erreur de l'ordre 10^{-6} (Fig. 4.4-droite). A partir de ce résidu, pour une hauteur donnée ($H = 5$), les longueurs 7, 10, 15 et 20 sont comparées favorablement (Fig. 4.4-gauche) dans le cas de grands nombres de Reynolds ($Re = 1000$). Pour une longueur choisie ($D = 10$) à $Re = 1000$, nous montrons qu'à partir de $H = 5$ les résultats de frottement convergent (Fig. 4.3). Cependant ces données restent vraies pour les Reynolds faibles.

L'environnement de CASTEM2000 utilisé peut être résumé dans un tableau (Tab.4.1). L'option 'SUPG' (schéma semi-implicite décentré 'Streamline Upwind Petrov Galerkin') est choisie car elle est moins diffusive (cf. Paillère et Dabbene [108]) que l'option par défaut. Pour la convergence, le nombre

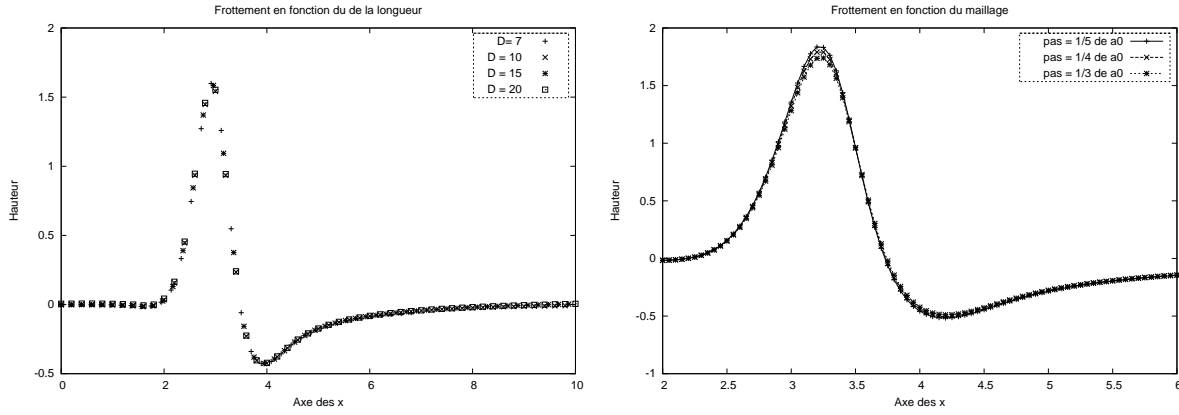


FIG. 4.4 – Frottement pariétal en fonction de la longueur et du raffinement du maillage. La hauteur d'écoulement est égale à 5. La bosse est centrée en $10/3$ ($x_c = 10/3$).

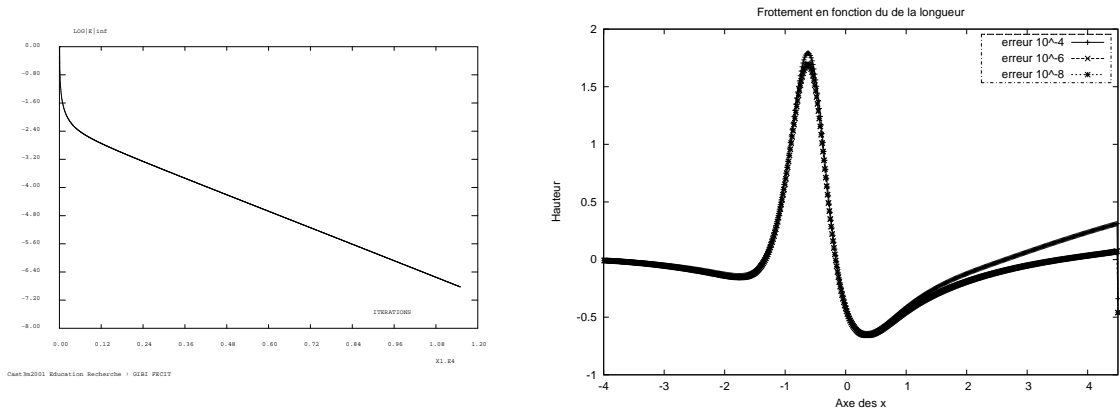


FIG. 4.5 – A gauche : logarithme décimal de l'erreur maximale (résidu) en fonction du nombre d'itérations; et à droite : test de convergence; pour le frottement pariétal calculé sur une gaussienne de hauteur a_0 en fonction du nombre d'itération (donc du résidu)

Opérateurs utilisés	NS, PRESSION, TOIM
Méthodes numériques	EF, approximation Q1 – P0, schéma SUPG
Nature du problème	écoulement laminaire et stationnaire sur une bosse
Classification	2D plan, incompressible, laminaire, stationnaire
Données	R_e varie, $H = 5, 10 \leq D \leq 20$, erreur entre 2 itérations : 10^{-6}

TAB. 4.1 – Environnement de CASTEM2000

d'itérations (environ 10^4) est choisi de façon à ce que l'ordre de grandeur du résidu soit inférieur à 10^{-6} (écart maximum entre deux itérations successives) pour considérer qu'il y a convergence (voir Fig.4.5).

4.6 Nombres de Reynolds 'élevés'

Sur la figure des isovalues de vitesse (figure 4.6), la zone la plus éclairée représente le région du maximum de frottement. La zone la plus foncée est la région de recirculation de l'écoulement.

Nous faisons varier la hauteur de la bosse ($a_0 = 0.4, a_0 = 0.3, a_0 = 0.2, a_0 = 0.1, a_0 = 0.05, a_0 = 0.01$), pour un nombre de Reynolds fixé, et nous présentons les résultats concernant le frottement pariétal (figure 8.8). Ensuite, fixant la hauteur de la bosse, nous faisons varier le nombre de Reynolds ($R_e = 25, R_e = 50, R_e = 75, R_e = 80, R_e = 90, R_e = 100$). La présence de la bosse provoque une

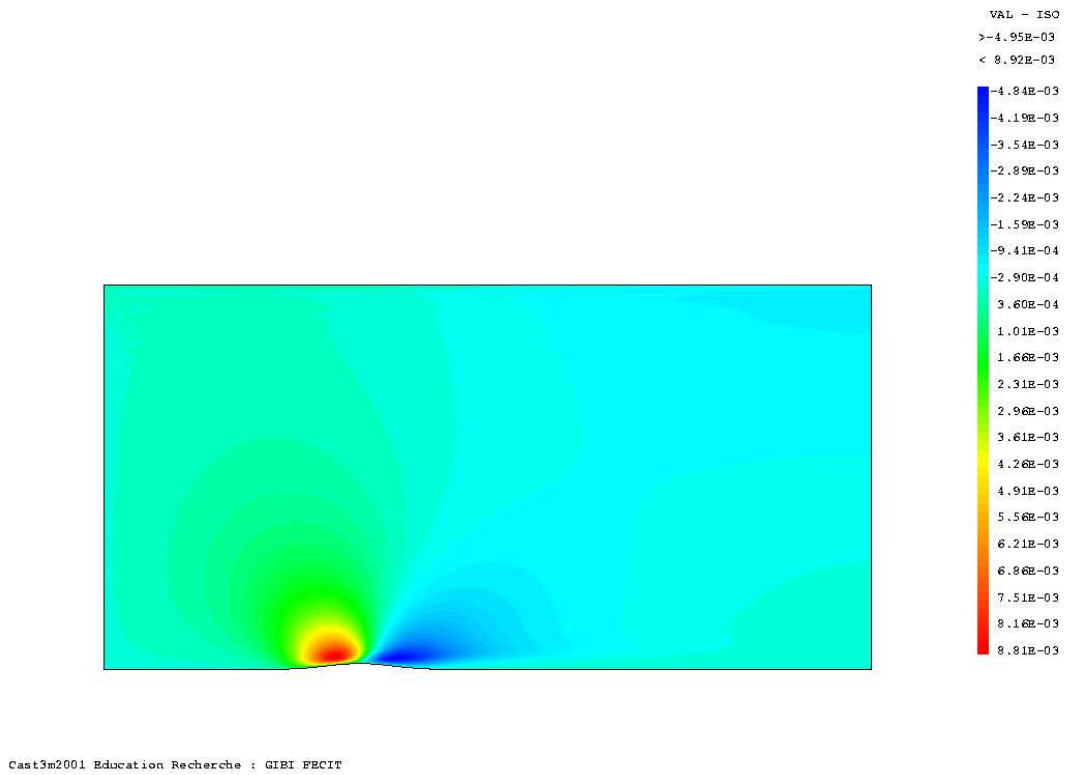


FIG. 4.6 – Isovaleurs de la composante de vitesse \bar{u} pour $Re = 100$ et $a_0 = 0.08$

accélération du fluide au dessus de la bosse; nous observons une chute de pression sur la bosse, ainsi qu'un pic de frottement pariétal situé en amont du sommet de la bosse, dont la position dépend du nombre de Reynolds.

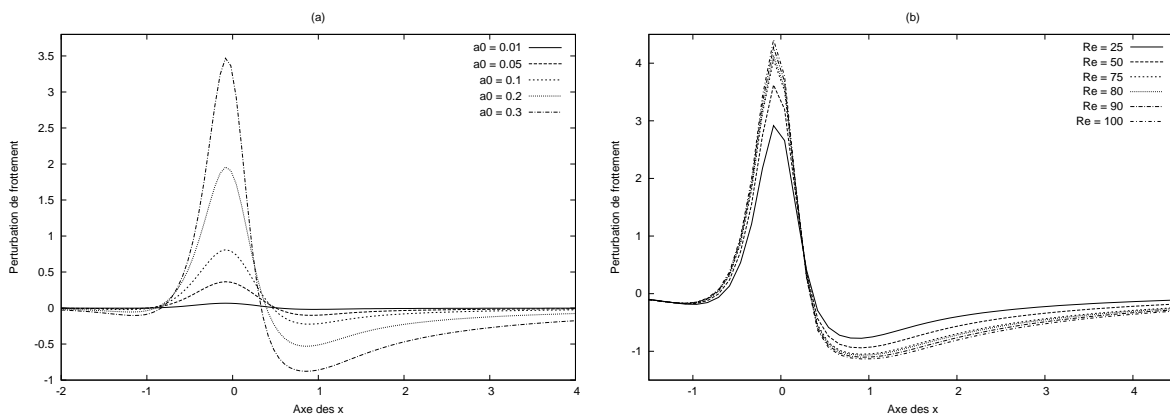


FIG. 4.7 – La perturbation de frottement $(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - 1)$ est une fonction croissante de a_0 et de Re . (a), la hauteur de la bosse varie et $Re = 100$. (b), le nombre de Reynolds varie et $a_0 = 0.4$, fixé. La bosse (non représentée) est centrée en zéro ($x_c = 0$) et s'étend de -1 à 1 .

4.7 Faibles nombres de Reynolds

Sur la figure des isovaleurs de frottement (figure 4.8), la zone la plus éclairée représente le région du maximum de frottement. Elle est centrée au sommet de la bosse.

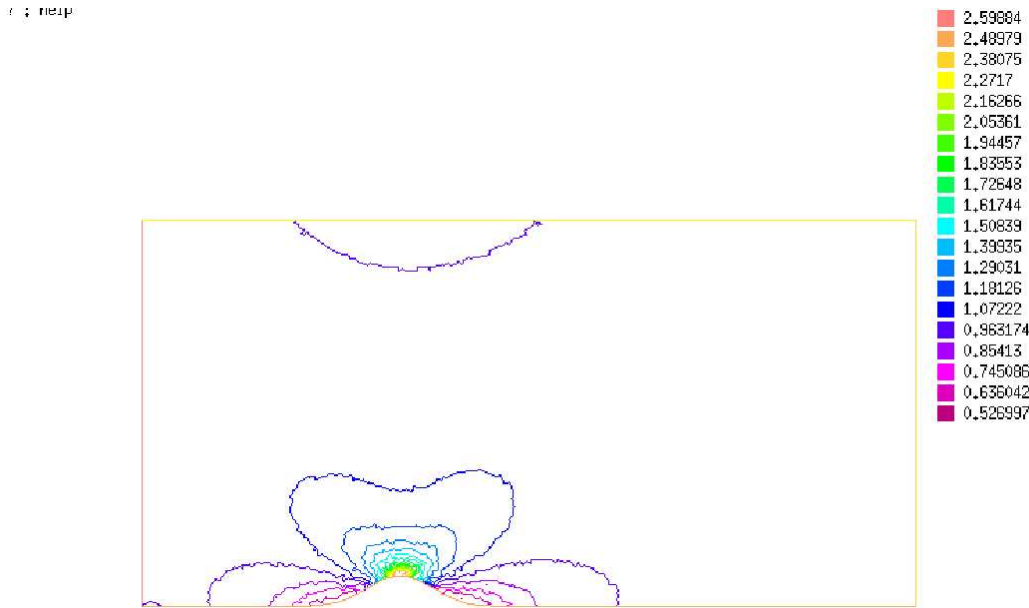


FIG. 4.8 – Isovaleurs du frottement pariétal obtenues par la résolution de l'équation de Stokes pour $a_0 = 0.4$

Comme dans le cas précédent, nous présentons les résultats du frottement en faisant varier la hauteur ($a_0 = 0.4, a_0 = 0.3, a_0 = 0.2, a_0 = 0.1, a_0 = 0.05, a_0 = 0.01$), pour un nombre de Reynolds fixé (figure 4.9). Ensuite, fixant la hauteur de la bosse et nous faisons varier le nombre de Reynolds ($Re = 0.0001, Re = 0.001, Re = 0.01, Re = 0.1, Re = 1, Re = 10$).

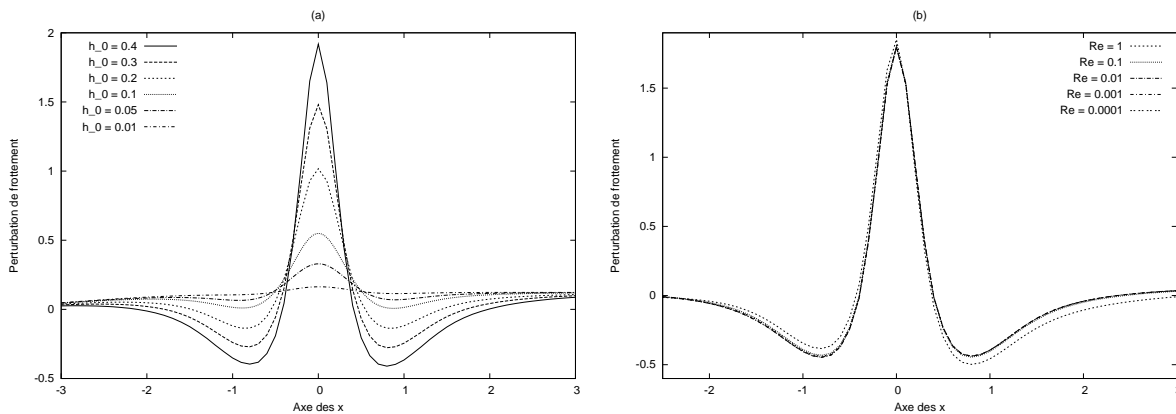


FIG. 4.9 – La perturbation de frottement ($\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - 1$) est une fonction croissante de a_0 et de Re . (a), la hauteur de la bosse varie et $Re = 0.1$. (b), le nombre de Reynolds varie et $a_0 = 0.4$, fixé. La bosse est centrée en zéro ($x_c = 0$).

4.7.1 Comparaison des calculs Stokes / Navier-Stokes

Pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds, les équations (4.18)-(4.19) à résoudre deviennent les équations de Stokes. A la différence du cas Re élevé, nous adimensionnons la pression par :

$$p^* = \frac{\rho(\gamma L)^2}{Re} \bar{p}$$

plutôt que par :

$$p^* = \frac{\rho(\gamma L)^2}{1} \bar{p}.$$

Les équations de Stokes sont les suivantes :

$$\nabla \cdot (\bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{Re} \nabla^2 ((\bar{u}, \bar{v}) + \nabla \bar{p}) = 0 \quad (4.27)$$

Ces équations de Stokes sont résolues numériquement, avec le code d'élément finis FreeFem+ (Lucquin et Pironneau [92]). La démarche de résolution est analogue à celle utilisée par CASTEM2000 : la pression \bar{p} est d'abord calculée de façon itérative dans tout le domaine à partir des conditions aux limites. Puis, la vitesse (\bar{u}, \bar{v}) est recherchée telle que $\nabla \cdot (\bar{u}(\bar{p}), \bar{v}(\bar{p})) = 0$.

Les résultats ci-dessous (figure Fig.4.10) sont obtenus pour un domaine est tel que $D = 10$ et $H = 5$ et le maillage comporte 200 éléments.

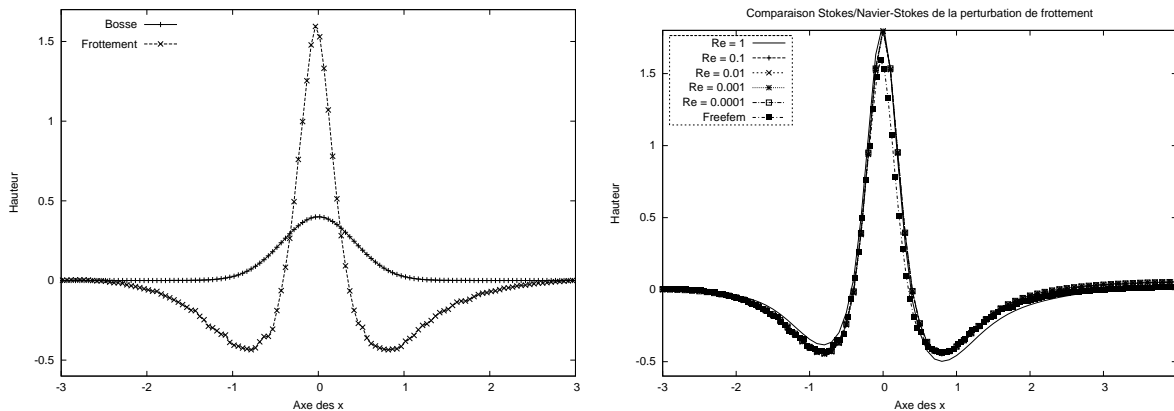


FIG. 4.10 – Perturbation de frottement $(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - 1)$, cas $Re \simeq 0$; Gauche : résultat de Stokes (FreeFem+). Droite : Comparaison FreeFem+/CASTEM2000 sur une bosse $a_0 = 0.4$ avec $Re = 0.0001$ pour CASTEM2000. La bosse est centrée en zéro ($x_c = 0$).

Les résultats de la figure Fig.4.10 montrent un bon accord, à partir des valeurs de Reynolds de l'ordre de 0.1, entre les résultats obtenus en traitant le problème de Stokes et celui de Navier-Stokes pour calculer le frottement à la paroi sur une bosse. Le maximum de frottement obtenu par les résultats de Navier-Stokes (CASTEM2000), a tendance à être décalé légèrement vers l'avant (figure Fig.4.11) par rapport à celui obtenu par Stokes (FreeFem+). Nous interprétons cet écart comme étant un problème de maillage : nous avons plus de point avec (FreeFem+) qu'avec CASTEM2000. Nous sommes limités à des contraintes de mémoires avec CASTEM200.

4.8 Hauteur de séparation

A $Re = 100$ fixé, le frottement est négatif pour $h \geq 0.35$: il y a un courant de retour (le phénomène est observé en aval du sommet de la bosse). De même pour $a_0 = 0.2$ fixée il y a séparation pour $Re \geq 1300$. La figure Fig.4.8 illustre les hauteurs de séparation en fonction du nombre de Reynolds. Il y a une corrélation entre ces hauteurs de séparation et une loi de type $Re^{-1/3}$.

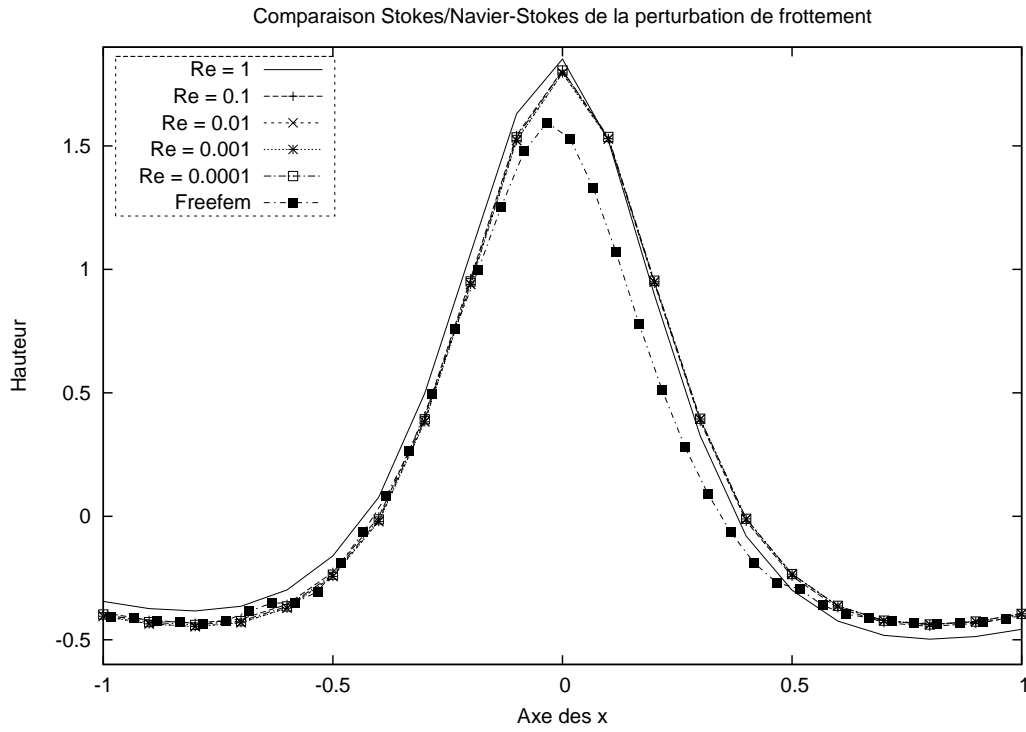


FIG. 4.11 – Léger décalage des courbes obtenues par la résolution de Navier-Stokes (CASTEM2000), et celle de Stokes (Freefem+)

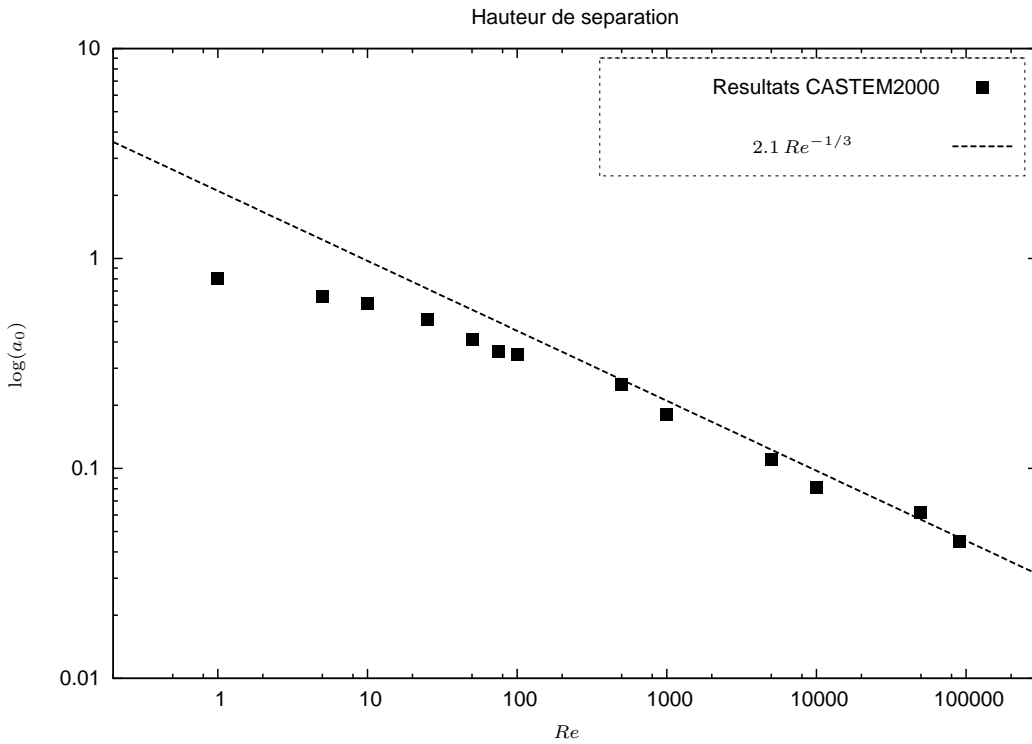


FIG. 4.12 – Hauteurs de séparation en fonction du nombre de Reynolds, les échelles sont logarithmiques. Il y a une dépendance en $Re^{-1/3}$ de la hauteur de séparation.

4.9 Conclusion

Nous avons étudié l'évolution du frottement maximal en fonction du nombre de Reynolds et de la hauteur de la bosse. L'abscisse pour laquelle ce maximum de frottement est atteint a été également examinée en fonction du nombre de Reynolds.

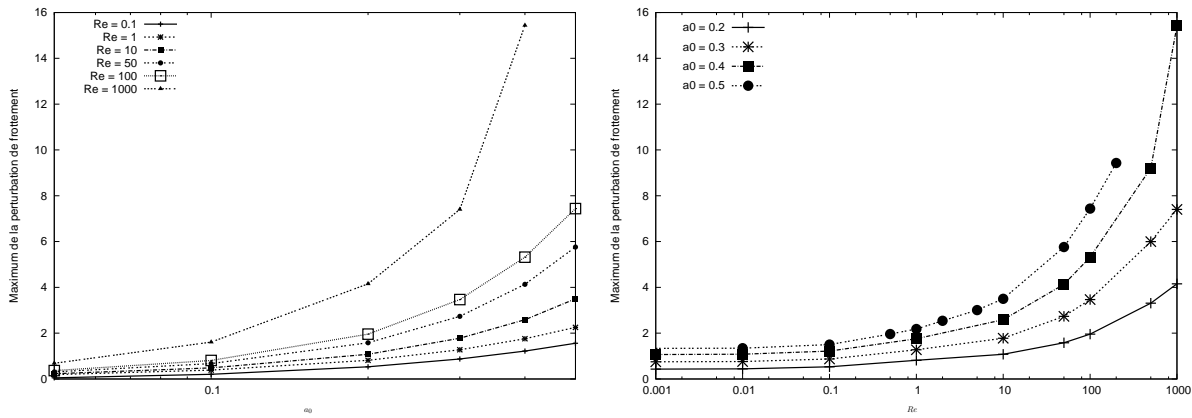


FIG. 4.13 – *Frottement Maximum en fonction du logarithme de la hauteur de la bosse (à gauche) pour différents du nombre de Reynolds; à droite: en fonction du logarithme du nombre de Reynolds pour différentes de valeurs hauteur de la bosse.*

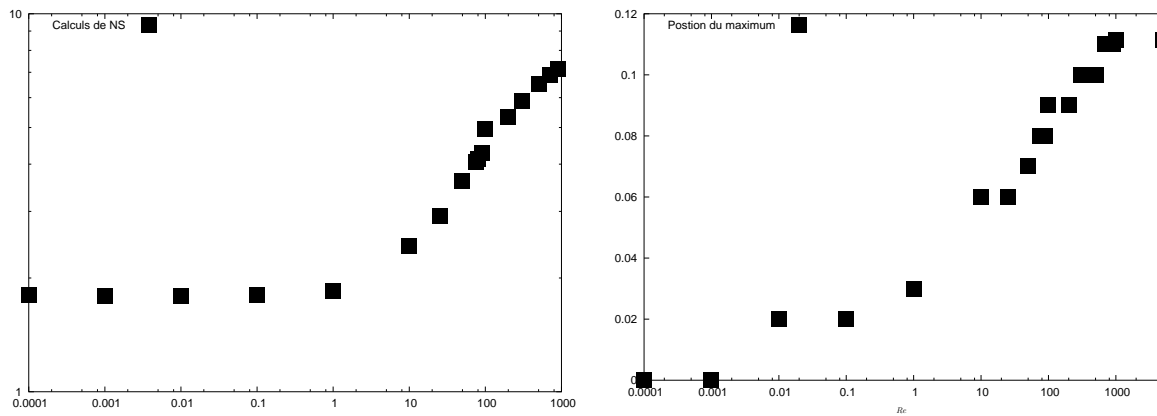


FIG. 4.14 – *Pour une hauteur de bosse fixée ($a_0 = 0.4$), Nous montrons la variations du maximum de frottement (à gauche) et de sa position (à droite) par rapport au sommet de la bosse centré en zéro en fonction du nombre de Reynolds.*

Les figures (Fig.4.13, Fig.4.14 et Fig.4.9) fournissent une synthèse des phénomènes observés par la résolution des équations de Navier-Stokes près du fond sur une bosse de faible hauteur. Les paramètres qui influencent la perturbation de frottement due à la présence de la bosse sont : le nombre de Reynolds du fluide et la hauteur de la bosse. Ici dans les graphiques nous avons gardé la même largeur des bosses (3).

Pour des nombres de Reynolds faibles, le frottement est symétrique par rapport au sommet de la bosse, le maximum de frottement est atteint au sommet de la bosse. La figure Fig.4.9 montre que pour un nombre Reynolds faible fixé, l'écart entre le maximum et le sommet est d'autant plus élevé que la hauteur de bosse est grande.

Cet dernier résultat reste vérifié pour les nombres de Reynolds élevés. Mais pour une hauteur de bosse donnée, lorsque le nombre de Reynolds augmente, le maximum est atteint en amont du sommet (par rapport au sens de l'écoulement). Il y a un décalage du frottement maximal vers l'amont.

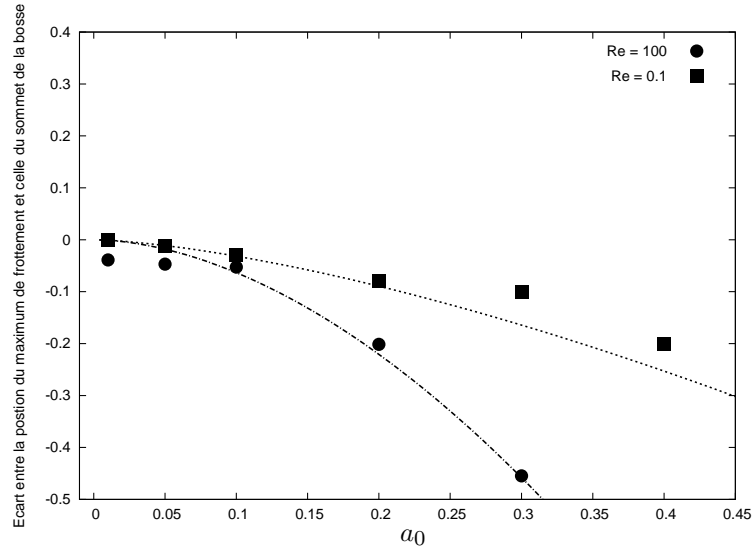


FIG. 4.15 – Position du maximum de frottement par rapport au sommet pour différentes valeurs de la hauteur de bosse.

Pour le calcul de l'écoulement sur les bosses de faible amplitude, nous rencontrons des difficultés de taille de mémoire de la machine d'une part, et d'autre part le temps de convergence des calculs est très long (environ deux heures sur Xeon 3 GHz).

Vue la dynamique très lente de formation des structures (*cf.* figure Fig.1.7), une résolution complète des équations de Navier-Stokes s'avèrerait être très contraignante pour l'étude de l'interaction écoulement/fond érodable.

Nous proposons dans les chapitres suivants, un modèle simplifié de résolution de l'écoulement. Les modèles obtenus seront validés par les résultats obtenus ici, par les équations complètes de Navier-Stokes.

Cas d'un régime d'écoulement très visqueux

5.1 Introduction

Dans le cas asymptotique où le régime d'écoulement infiniment visqueux, un modèle simplifié de frottement est établi. Cet modèle tient uniquement compte de la correction de Stokes due à la perturbation du lit de l'écoulement par des bosses de petites amplitudes. Nous négligeons tout simplement les termes inertiels liés à la convection du fait de l'hypothèse très forte $Re \sim 0$ (équation de Stokes). Nous montrons que le fond reste globalement stable : dans le cas où le fond est cisailé par un écoulement unidirectionnel, les perturbations se dispersent dans le sens du mouvement du fluide; par ailleurs, les perturbations sur le fond restent inchangées lorsqu'elles sont cisillées par un écoulement oscillant.

Ces résultats sont publiés dans Lagrée Kouakou et Danho [88].

5.2 Calcul du cisaillement de l'écoulement

Le régime de l'écoulement est supposé très visqueux, de sorte que le nombre de Reynolds $Re_\delta \ll 1$. Le système écoulement/fond érodable à résoudre est réduit à l'équation de Stokes pour l'écoulement couplée à l'équation de conservation du fond :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (5.1)$$

$$-\nabla \bar{p} + \nabla^2(\bar{u}, \bar{v}) = 0. \quad (5.2)$$

Les conditions aux limites sont :

- à l'entrée $\bar{x} = -\infty$, et loin au dessus du fond $\bar{y} = \infty$ nous gardons les solution sont celles de la couche limite laminaire :

$$\bar{u} = \bar{U}'_S \bar{y} + \mathcal{O}(\bar{y}^2), \quad (5.3)$$

où $\bar{U}'_S = 0.332$ dans le cas uniforme, $\bar{U}'_S = \sqrt{\bar{t}}$ dans le cas freiné et $\bar{U}'_S = \cos(2\pi \bar{t})$ dans le cas oscillant, est une fonction de la seule variable \bar{t} , temps hydrodynamique;

- à la paroi du fond, il y a adhérence du fluide : $\bar{u} = \bar{v} = 0$;
- à la sortie : $\bar{p} = 0$.

Dans la suite nous écrivons les grandeurs adimensionnées simplement sans le "barre".

Les équations (5.1)-(5.2) étant déjà linéaires, nous procédons directement à leur résolution en modes de Fourier, lorsque la perturbation du fond, pour chaque mode k , est (en variable sans dimension) de la forme :

$$f(x,t) = a f_1(x,t) = a e^{\sigma t} \cos(k(x - \frac{\omega}{k}t)) \quad (5.4)$$

Les hypothèses sur les paramètres du fond sont : $a \ll 1$, $ka \ll 1$, $k\delta \ll 1$.

Lorsque le fond est plat $f(x,t) = 0$, le triplet $(u,v,p) = (\overline{U}'_S y, 0, 0)$ est solution de (5.1)-(5.2). Nous recherchons la perturbation (u_1, v_1, p_1) de la solution de l'écoulement au premier ordre en a :

$$u = \overline{U}'_S (y + a u_1), \quad v = a \overline{U}'_S v_1, \quad p = a \overline{U}'_S p_1. \quad (5.5)$$

La traduction des conditions aux limites pour les perturbations est :

- à la paroi, $u = \overline{U}'_S (y + a u_1) = 0$, ce qui se traduit par :

$$a f_1(x,t) + a u_1(y = a f_1(x,t)) = 0$$

$$a u_1(y = a f_1(x,t)) = -a f_1(x,t)$$

$$= a \{u_1(y=0) + a f_1(x,t) \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_{y=0} + \dots\}$$

soit

$$u_1(y=0) = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)_{y=0} = -1; \quad (5.6)$$

de même $v_1(y=0) = 0$;

- "loin" au-dessus de la bosse : $u_1(y \rightarrow \infty) = v_1(y \rightarrow \infty) = 0$;
- à la sortie $p_1 = 0$

Le frottement linéarisé est (voir annexe C.1, relation (C.10)) :

$$\tau = \overline{U}'_S (1 + \tau_1) \quad \text{avec} \quad \tau_1 = 2 FT^{-1}(|k| FT(f(x,t))) \quad (5.7)$$

où $FT(f(x,t))$ est la transformée de Fourier de f par rapport à la variable x . Dans la suite on la notera indifféremment $FT(f(x,t)) = \widehat{f(x,t)} = \widehat{f}(k) = f_k$.

5.3 Validation de la solution

En prenant pour coefficient de pente de la vitesse $\overline{U}'_S = 1$, et pour forme du fond une gaussienne ($f(x,t) = e^{-\frac{8\pi x^2}{l_B^2}}$) centrée en $x = 0$, de hauteur unité et de largeur l_B , nous obtenons les expressions suivantes pour la pression et le frottement :

$$p_1(x, y=0) = -\frac{32}{l_B^2} \pi x e^{-\frac{8\pi x^2}{l_B^2}} \quad (5.8)$$

$$\tau_1(x, y=0) = \frac{8}{l_B^2} (l_B \sqrt{2} - 4\pi x \operatorname{Erfi}\left(\frac{2x\sqrt{2}\pi}{l_B}\right) e^{-\frac{8\pi x^2}{l_B^2}}). \quad (5.9)$$

Ainsi, le maximum de la perturbation de frottement maximum a lieu au sommet de la bosse ($x = 0$), et il est donné par :

$$\tau_{1 \text{ Max}}(x, y=0) = \frac{8\sqrt{2}}{l_B}. \quad (5.10)$$

Nous traçons le frottement à la paroi pour différentes valeurs du nombre de Reynolds ($Re = 0.0001$, $Re = 0.001$, $Re = 0.01$, $Re = 0.1$, $Re = 1$, $Re = 10$) et pour différentes hauteurs de la bosse. La solution analytique (5.9) est comparée (figures Fig.5.1) aux résultats de Navier-Stokes obtenus par le code de calcul CASTEM200 (cf. chapitre 4).

Puis nous comparons la valeur du frottement maximum (5.10) pour une largeur de bosse $l_B = 3$ (figure Fig.6.6).

La comparaison entre les résultats théoriques (solution analytique de Stokes) et les résultats de NS à nombre de Reynolds faible montre un léger décalage. Les résultats théoriques sont de plus faible amplitude, mais plus étalés le long de la largeur de la bosse.

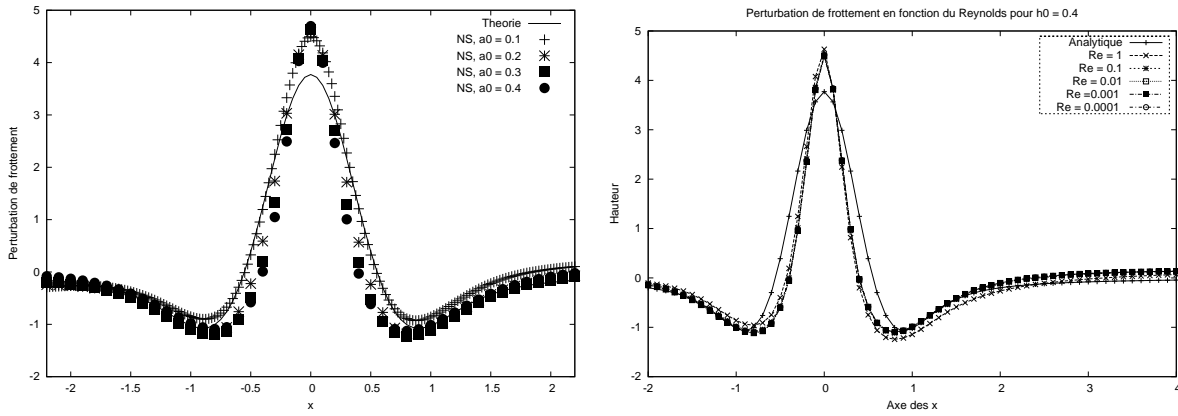


FIG. 5.1 – Perturbation de frottement $(\frac{\partial u}{\partial y} - 1)$, en fonction de la hauteur de la bosse pour un nombre de Reynolds $Re = 0.1$ fixé (à gauche), et en fonction du nombre de Reynolds, pour une amplitude de la perturbation du fond $a_0 = 0.4$ fixée (à droite).

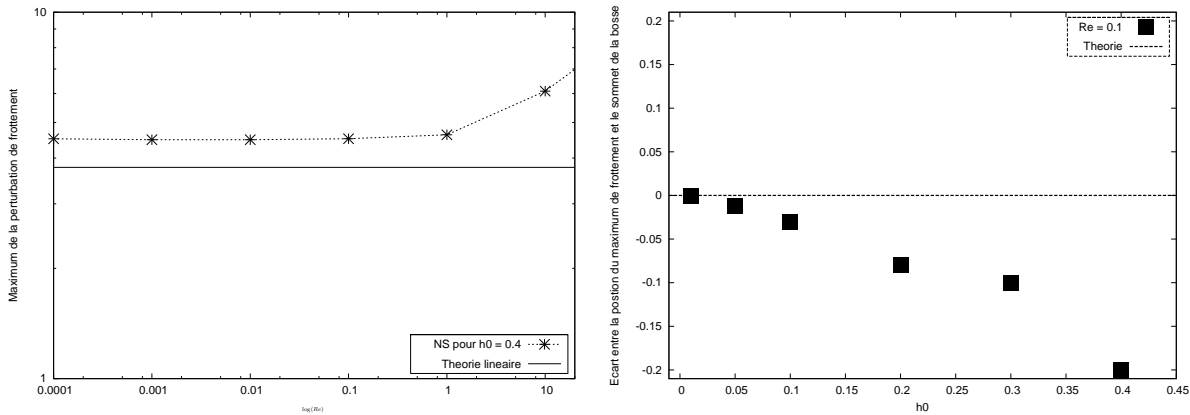


FIG. 5.2 – Maximum de la perturbation du frottement en fonction du nombre de Reynolds (à gauche). Position du maximum de frottement par rapport au sommet pour différentes valeurs de la hauteur de bosse (à droite).

Les résultats ci-dessus permettent d'affirmer que pour un nombre de Reynolds donné (petit), le résultat du frottement du problème de Stokes est d'autant proche de celui de Navier-Stokes que la hauteur de bosse est faible. Pour une hauteur fixée de bosse, plus la largeur est petite, plus étroit est le frottement (cf. figure Fig.5.3).

Le maximum de la perturbation de frottement est une fonction décroissante de sa largeur (en $1/l_B$ si l_B est la largeur typique de la bosse). Cependant le maximum de frottement croît avec la hauteur tout comme avec le nombre de Reynolds (cf. figure Fig.6.6).

5.4 Analyse de stabilité d'un fond érodable.

La relation de dispersion est obtenue, comme au chapitre 3, par la relation d'évolution du fond (4.13) avec le flux (qui est un flux saturé) $q_{sat} = q_{sat}^*/q_0$; la différence réside dans l'expression du frottement. Nous rappelons la formule (les grandeur notées "étoile" sont les grandeurs dimensionnelles) du flux, conformément à la relation (2.77) du paragraphe (2.8). Nous supposons dans la suite que le gradient horizontal de la perturbation du fond est faible $((\partial f^*/\partial x^*)^2 \ll 1)$ de sorte que le seuil (1.34) soit réduit à :

$$\tau_s = \tau_{s0} \left(1 + \frac{1}{\tan \varphi_s} \frac{\partial f^*}{\partial x^*} \right). \tag{5.11}$$

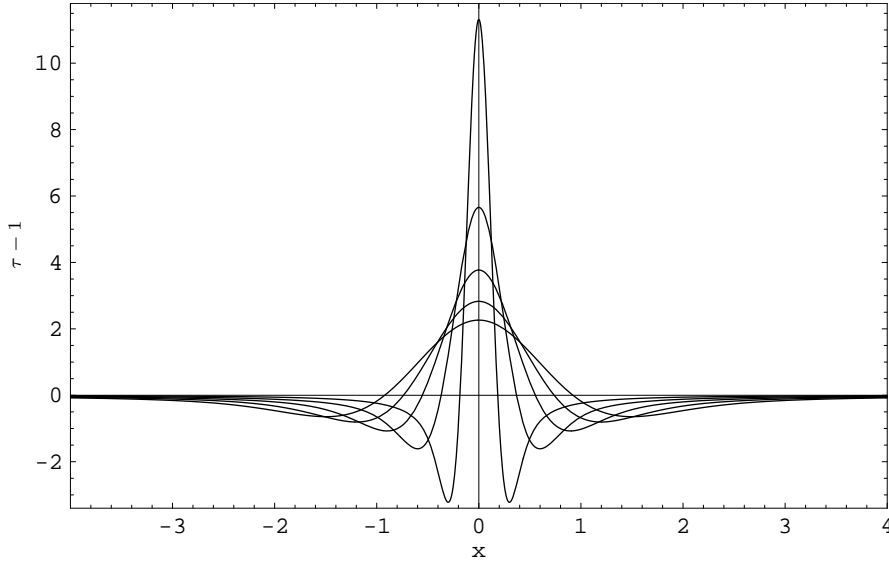


FIG. 5.3 – Perturbation du frottement, pour une amplitude de perturbation donnée, en fonction de la largeur. Pour des largeurs de plus en plus élevées, la perturbation de frottement devient de plus en plus aplatie.

avec φ_s l'angle de repos. Dans ce cas, le flux (2.73) s'écrit :

$$q_{\text{sat}}^* = \alpha' \operatorname{sgn}(\overline{U}'_S) \left(|\tau^*| - \tau_{s0} \left(1 + \frac{1}{\tan \varphi_s} \left| \frac{\partial f^*}{\partial x^*} \right|^{3/2} \right) \right), \quad \text{et} \quad \tau^* = \Upsilon \tau \quad (5.12)$$

où le frottement adimensionné est donné par (5.7) et le coefficient α' est donné au chapitre 2 par :

$$\alpha' = \frac{n_{\Phi}}{\rho g (s-1)} \varpi(|\tau| - \tau_s) \quad (5.13)$$

Lorsque la perturbation de frottement est faible ($\tau_1 \ll 1$), nous écrivons la forme adimensionnée (les échelles sont celles du paragraphe 4.3 page 54) et linéarisée du flux qui sera utilisée dans toute la suite de ce chapitre :

$$q_{\text{sat}} = \operatorname{sgn}(\overline{U}'_S) |\overline{U}'_S|^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \tau_1 - \frac{1}{|\overline{U}'_S|} (\overline{\tau}_s + \overline{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial x}) \right), \quad (5.14)$$

où $\tau_1 = 2FT^{-1}(|k|FT(f(x,t)))$, l'ordre de grandeur du flux $q_0 = \alpha' \Upsilon^{3/2}$, les coefficients $\overline{\tau}_s$ et $\overline{\Lambda}$ sont définis comme au chapitre 2 par :

$$\overline{\tau}_s = \frac{3\tau_{s0}}{2\Upsilon}, \quad \overline{\Lambda} = \frac{3\tau_{s0}}{2\Upsilon \tan \varphi_s} \quad (5.15)$$

Ici, le fluide étant visqueux, pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de ces paramètres, nous prenons les données relatives à l'expérience de Charru et coll. [42] p. 57 : la densité des grains est de $\rho_p = 1180 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, celle du fluide $\rho = 950 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, ce qui permet d'avoir la densité relative des grains $s \sim 1.24$; la taille des grains est $d \sim 0.58 \cdot 10^{-3} \text{ m}$; la viscosité dynamique du fluide est $\mu = 19.5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ à une température de 20° C et le seuil de mise en mouvement de Shields $\Theta_{s0} \sim 0.04$. Nous prenons un angle de repos tel que $\tan \varphi_s \sim 0.3$. Avec ces données, le frottement seuil est $\tau_{s0} \sim 0.05$, et l'ordre de grandeur typique du frottement est $\Upsilon = \rho g (s-1) d \sim 1.3$. Comme $\Upsilon > 1$, nous prenons $n_{\Phi} = 12$ dans la relation (2.74), et dans ce cas l'ordre de grandeur typique du flux est $q_0 \sim 0.0079$, le seuil est $\overline{\tau}_s \sim 0.06$ et le coefficient de pente est $\overline{\Lambda} \sim 0.2$.

La relation entre le flux saturé et le flux instantané est régi par (2.69) que nous rappelons :

$$l_{\text{sat}} \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_{\text{sat}}, \quad l_{\text{sat}} \propto \frac{1}{|\overline{U}'_S|}. \quad (5.16)$$

Le gradient du flux q est faible, et dans ce cas, la longueur de saturation est prise $l_{sat} \sim 0$, le régime du transport est alors dit "gravitaire" (cf. Valance et Langlois [144]). La relation (5.16) devient :

$$q = q_{sat} = \text{sgn}(\overline{U}'_S) |\overline{U}'_S|^{3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \tau_1 - \frac{3}{2 |\overline{U}'_S|} (\overline{\tau}_s + \overline{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial x})\right). \quad (5.17)$$

Nous précédons comme Komarova et Hulscher [77], en écrivant les perturbations :

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ f \end{pmatrix} = e^{\sigma t + i(\omega t - kx)} \begin{pmatrix} 2|k| f_k \\ f_k \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

La relation de dispersion que nous pouvons *a priori* écrire compte tenu de la loi d'évolution du fond (4.13) et de la relation (5.17), est :

$$\sigma + i\omega = 3k \text{sgn}(\overline{U}'_S) |\overline{U}'_S|^{1/2} \left(i|k| - \frac{\tau_{s0}}{2\rho g(s-1)d \tan \varphi_s} \frac{k}{|\overline{U}'_S|} \right). \quad (5.19)$$

Elle montre que, la stabilisation du fond dépend de la valeur du coefficient de pente de vitesse (notamment du signe de \overline{U}'_S).

5.4.1 Cas d'un écoulement uniforme

Dans le cas d'un écoulement uniforme ($\overline{U}'_S = 1$). La relation de dispersion (5.19) est alors :

$$\sigma + i\omega = 3k \left(i|k| - \frac{\tau_{s0}}{2\rho g(s-1)d \tan \varphi_s} \frac{k}{\overline{U}'_S} \right). \quad (5.20)$$

Un fond est stable (voir figure Fig.6.6) au sens où les perturbations sont dispersées.

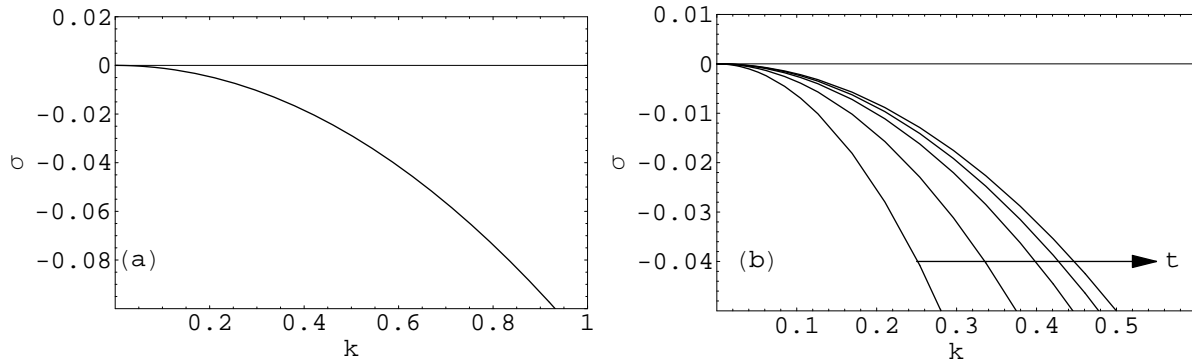


FIG. 5.4 – Taux d'amplification (σ) dans le cas d'un écoulement unidirectionnel en fonction de la perturbation du nombre d'onde (k): le fond est stable. (a), cas d'un cisaillement uniforme. (b), cas d'un fluide brusquement freiné. $\overline{\Lambda} = 0.2$.

5.4.2 Cas d'un écoulement freiné

Le cisaillement sur le fond s'affaiblit avec le temps lorsqu'on arrête un écoulement. Si on se place dans le contexte général où les temps hydrodynamiques sont courts par rapport au temps d'apparition des structures sur le fond, alors celles-ci n'ont pas le temps d'être formées avant que le frottement ne soit inférieur au seuil d'arrachement des particules (figures Fig.5.5–Fig.5.6). Par conséquent, la possibilité de déformation d'un fond initial par un écoulement freiné reste très discutable. Cependant, dans ses travaux de thèse, Caps [36] a pu observer la formation de structures (figure 1.12). Nous rappelons brièvement le protocole de son expérience :

Le dispositif expérimental est constitué d'un plateau horizontal de diamètre $2R = 33$ cm pouvant être mis en rotation à une vitesse déterminée ($8 < \Omega < 100$ rpm), pendant un temps déterminé. Le lit de billes de verre est initialement plan et mesure 3cm d'épaisseur. La hauteur d'eau H érodant ce lit est un paramètre expérimental ($H > 1$ cm). L'ensemble est mis en rotation solide (à la vitesse Ω), puis arrêté brusquement. Le fluide continue alors son écoulement par inertie tandis que le matériau granulaire reste

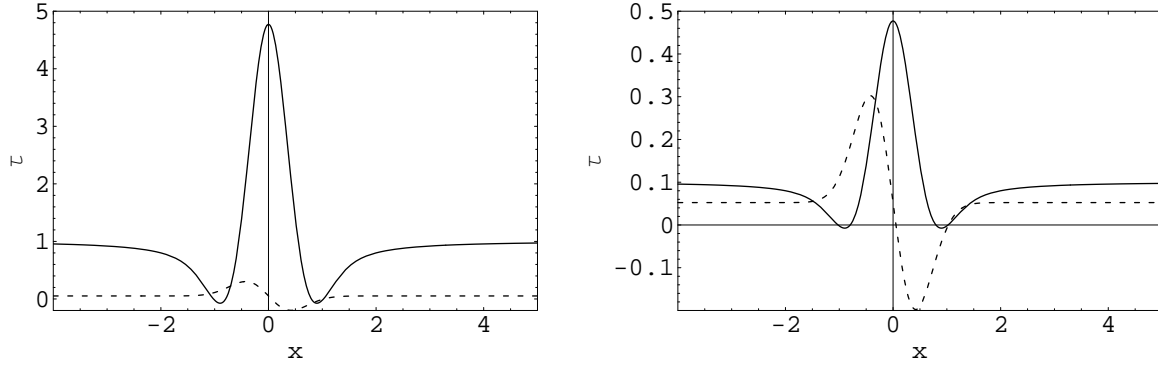


FIG. 5.5 – *Le frottement* (cf. relation (5.7)) en trait plein est comparé à sa valeur seuil (cf. relation (5.11)) en pointillés; à gauche $t = 1$, et à droite $t = 100$.

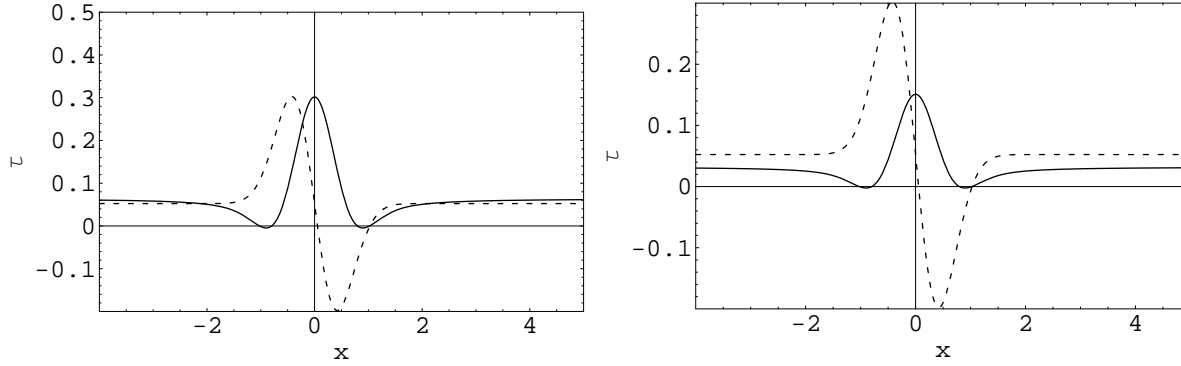


FIG. 5.6 – *Le frottement* (cf. relation (5.7)) en trait plein est comparé à sa valeur seuil (cf. relation (5.11)) en pointillés; à gauche $t = 250$, et à droite $t = 1000$.

globalement fixe. L'érosion produite par le fluide conduit à la formation de rides de courant. Des images de ces rides le long de la circonférence du récipient sont enregistrées à l'aide d'une caméra CCD située sur le côté du plateau. Le profil est décomposé en une série de 20 images de 160×120 pixels qui sont ensuite recombinaées. Une seconde caméra CCD est située au-dessus du récipient et enregistre des images globales de la surface granulaire. Dans ce cas, les profils des rides sont enregistrés sur des cercles concentriques de rayons différents. Grâce à un éclairage homogène, la luminance permet de déterminer l'élévation de la surface granulaire, i.e. le relief. Il est à noter que pour des raisons de convergence numérique, les profils expérimentaux sont "adoucis" par le biais d'une séquence décomposition/recomposition en série de Fourier. En substituant les modes de plus hautes valeurs, les irrégularités dues à la nature granulaire de la surface sont ainsi éliminées, sans perte d'information sur la morphologie des structures (longueur d'onde, amplitude : voir figure 1.12).

Son expérience n'a pas été réalisée dans le cas d'un fluide visqueux. Nous y reviendrons au chapitre 6 suivant (cas d'un nombre de Reynolds élevé). La hauteur d'eau H au dessus des grains est prise comme le paramètre expérimental et la viscosité cinématique de l'eau est fixée à $\nu = 10^{-6}$. Les valeurs du nombre de Reynolds $Re_H = R\Omega/\nu$ sont les suivantes :

- Pour $\Omega = 0.133 \text{ rad s}^{-1}$, le nombre de Reynolds varie de $Re_H \sim 0$ au centre du plateau, à $Re_H > 2200$ au bord du plateau.
- Pour $\Omega = 1.67 \text{ rad s}^{-1}$, le nombre de Reynolds varie de $Re_H \sim 0$ au centre du plateau, à $Re_H > 2750$ au bord du plateau.

Dans le cas d'un écoulement brusquement freiné ($\bar{U}'_S = 1/\sqrt{t}$), il faut intégrer (4.13) et (5.17) :

$$\frac{\partial}{\partial t} FT(f(x,t)) = -t^{-3/4} \left[3(i k)|k| + \frac{\tau_{s0}}{2\rho g(s-1)d \tan \varphi_s} \frac{k^2}{U'_S} \right] \quad (5.21)$$

La relation de dispersion dépend du temps et on a en fait :

$$\sigma(t) + i\omega(t) = 3\frac{4}{7}t^{-3/4}k(i|k|) - 2\frac{\tau_{s0}}{2\rho g(s-1)d\tan\varphi_s}k^2t^{-1/4}. \quad (5.22)$$

Cette "relation de dispersion" est représentée sur la figure Fig.6.6.

5.4.3 Cas d'un écoulement oscillant

Dans le cas de l'écoulement oscillant, $\text{sgn}(\overline{U}'_S) = \text{sgn}(\cos(2\pi t)) = \pm 1$; il dépend du temps rapide de l'hydrodynamique. Le mouvement d'oscillation du fluide, se décompose en un mouvement d'aller (lorsque $\overline{U}'_S > 0$) et de retour (lorsque $\overline{U}'_S < 0$). Dans chaque mouvement, les perturbations sont dispersées dans le sens du mouvement. Mais globalement, comme les mouvements sont en sens inverse, les deux effets ont tendance à s'annuler. Pour mettre en évidence cette notion de globalité, le "somme" des deux effets est faite sur un cycle d'oscillation, avec l'hypothèse selon laquelle le fond ne subit pas de transformation sur un cycle d'oscillation est émise (cf. Komarova et Hulscher [77]). Le flux est alors moyenné sur un cycle d'oscillation par l'opération de moyenne que nous noterons dans la suite, pour toute fonction g dépendant du temps :

$$\langle g(t) \rangle = \int_0^{1/2} g(t) dt + \int_{1/2}^1 g(t) dt. \quad (5.23)$$

La moyenne du flux (relation (5.14)) sur un cycle d'oscillation est :

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \left(1 + \frac{3}{2}\tau_1\right) \langle \text{sgn}(\sin(2\pi t)) |\sin(2\pi t)|^{3/2} \rangle \\ &\quad - \frac{3}{2}(\overline{\tau}_s + \overline{\Lambda}) \langle \text{sgn}(\sin(2\pi t)) (\sin(2\pi t))^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x} \rangle \end{aligned} \quad (5.24)$$

La moyenne du gradient horizontal du flux permet d'écrire la relation de dispersion :

$$\sigma + i\omega = \left\langle \frac{3}{2} \text{sgn}(\sin(2\pi t)) |\sin(2\pi t)|^{3/2} (2ik|k| - \frac{\overline{\Lambda}}{|\sin(2\pi t)|} k^2) \right\rangle. \quad (5.25)$$

Comme tout le terme de droite dans la relation de dispersion (5.25) vaut zéro, les perturbations ne sont ni amplifiées, ni dispersées, elles demeurent inchangées.

5.5 Evolution d'une bosse sur un fond érodable sous un cisaillement uniforme

La loi d'évolution du fond (4.13) couplée avec la relation (5.17) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\text{sgn}(\overline{U}'_S) |\overline{U}'_S|^{3/2} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} - \overline{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) \right) \quad (5.26)$$

La propriété de la dérivation et de la transformation de Fourier, rappelée en annexe D, permet d'écrire, en prenant la transformée de Fourier de (5.26), par rapport à la variable x :

$$\frac{\partial}{\partial t} FT(f(x,t)) = -\text{sgn}(\overline{U}'_S) |\overline{U}'_S|^{3/2} [3(i k)|k| + \overline{\Lambda} k^2] FT(f(x,t)) \quad (5.27)$$

La résolution numérique de l'équation (5.27) est ensuite faite en utilisant un code FFT (Fast Fourier Transforms, Press et coll. [111]), calculant la transformation de Fourier inverse pour revenir dans l'espace réel. Nous nous intéressons à l'évolution d'une bosse (gaussienne) sur un fond meuble.

Dans la relation de d'évolution du fond (5.27) écrite dans l'espace de Fourier, le coefficient de pente de vitesse est constant $\overline{U}'_S = 0.332$. En utilisant la transformée de Fourier (au sens de la distribution) de la fonction $1/x$, nous pouvons réécrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{f(x,t)} = -\frac{A_1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \widehat{f'(x,t)} \otimes \frac{1}{x} + A_2 \widehat{f''(x,t)} \quad (5.28)$$

où les constantes A_1 et A_2 sont respectivement égales à $A_1 = 3 \sqrt{2\pi \overline{U}_S^3} \sim 4.33$ et $A_2 = \overline{U}_S^{1/2} \overline{\Lambda}$, et la dérivée de f par rapport à la variable x est $f' = (\partial f)/(\partial x)$.

La solution de (5.27) dans l'espace Fourier est :

$$FT(f(x,t)) = FT(f)(k,t=0) e^{-k t (0.11 k - 0.57 i |k|)}. \quad (5.29)$$

La condition initiale du fond permet de trouver $FT(f)(k,t=0)$.

Dans le cas où le fond initial est la gaussienne de hauteur unité, centrée en zéro et de largeur $\lambda = 3$ nous avons les configurations de la figure Fig.5.5. La bosse est dispersée dans le sens de l'écoulement.

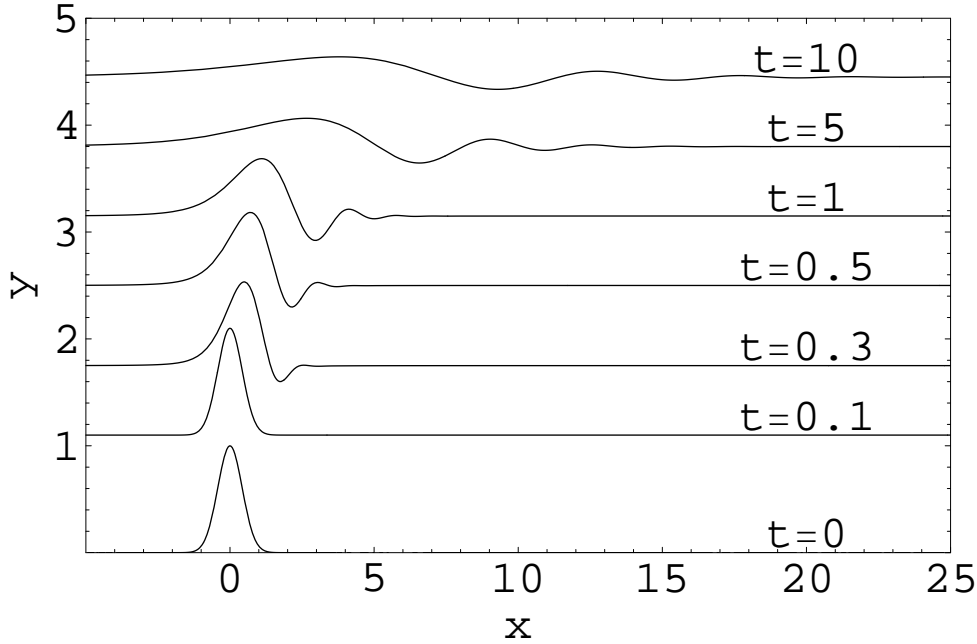


FIG. 5.7 – Evolution probable d'une dune sous l'action de l'écoulement (dirigé de la gauche vers la droite) ayant un cisaillement uniforme. Le temps évolue du bas $t = 0$, en haut $t = 10$.

Nous pouvons utiliser les relations de l'annexe D et présenter la relation d'évolution du fond (5.28) dans l'espace réel :

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -A_1 \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(f'(x,t)) + A_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t), \quad (5.30)$$

où \mathcal{H} est la transformée de Hilbert définie pour une fonction g par :

$$\mathcal{H}(g(x)) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad (5.31)$$

avec P représentant une valeur principale liée au fait que l'intégrale est prise en partie finie; dans la suite nous prenons P égal à un. A des coefficients multiplicatifs près, nous remarquons une similitude entre la relation d'évolution du fond, sans le terme de droite (qui tient compte des effets de pente) et l'équation de Benjamin-Ono linéaire. Cette similitude est beaucoup plus détaillée dans l'article Lagrée et coll. [88], dans lequel nous montrons qu'une bosse se disperse dans le sens de l'écoulement lorsqu'elle est cisailée par un écoulement uniforme.

5.5.1 Comportement asymptotique

Une première remarque simple est que la variable $\eta = xt^{-1/2}$ est une variable de similitude et que la solution autosemblable d'intégrale constante donnée (ce qui revient à fixer la masse) est de la forme:

$$f(x,t) = t^{-1/2} \phi(xt^{-1/2}). \quad (5.32)$$

En nous inspirant de la solution numérique qui présente des oscillations et en sachant que la dérivée de l'intégrale (5.31) pour un mode de Fourier $\exp(-ikx)$ est dans l'espace de Fourier $-i|k|k \exp(-ikx)$, nous pouvons approximer le membre de droite de la relation (5.30) (en négligeant l'effet de pente: $A_2 = 0$) par une dérivée seconde multipliée par i . L'équation (5.30) pour les variables de similitude est donc à peu près (à un facteur $t^{-3/2}$ multiplicatif près):

$$\frac{-1}{2}(\phi(\eta) + \eta\phi'(\eta)) \simeq i\phi''(\eta). \tag{5.33}$$

Cette équation a une solution exacte $\phi(\eta) = \exp(i(\eta/2)^2)$ (elle est le pendant de la solution dispersive d'Airy de KdV dont la variable de similitude est $xt^{-1/3}$). Sur la figure Fig.5.5.1 on trace donc la solution numérique $t^{1/2}f(x,t)$ en fonction de $xt^{-1/2}$, on constate que pour des temps suffisamment longs les courbes collapsent sur une même courbe (différentes dunes initiales mènent effectivement à cette même courbe finale, modulo une remise à l'échelle pour ajuster l'amplitude). La solution approchée est aussi tracée (elle est déphasée de e^1 pour faire coïncider les courbes: $\cos(1 + (\eta/2)^2)$).

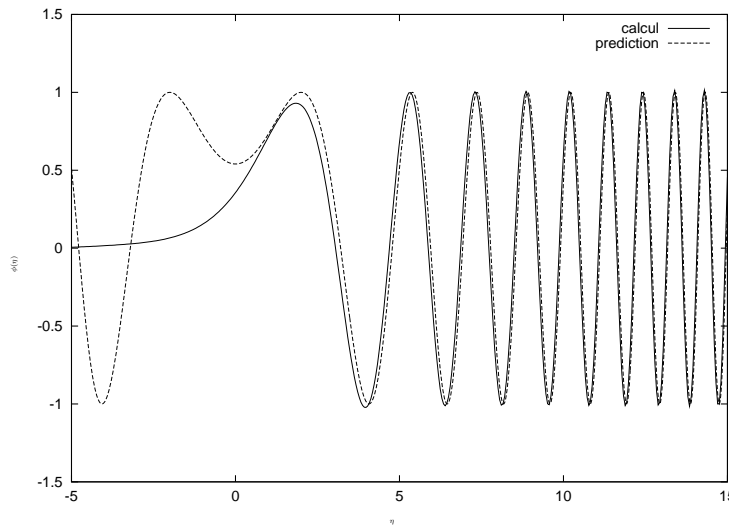


FIG. 5.8 – Tracé de la solution autosemblable calculée ("calcul": superposition de plusieurs $t^{1/2}f(x,t)$ en fonction de $xt^{-1/2}$ pour différents t grands) et de la solution autosemblable approchée ("prédiction" $\cos(1 + (\eta/2)^2)$); le domaine de calcul est plus important pour éviter les effets de bord et de propagation du front.

5.5.2 Discussion

Il existe une littérature récente sur ces phénomènes et notamment sur l'écoulement sur des dunes éoliennes impliquant l'intégrale de Hilbert (5.31) (Sauermann et coll. [123], Andreotti et coll. [9]). De manière très étonnante (dans le cas d'un très grand nombre de Reynolds), si on néglige l'effet de la couche limite et que l'on suppose que le flux de matériaux est proportionnel à la vitesse de glissement on obtient exactement le même problème que celui que l'on vient de voir:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi\right). \tag{5.34}$$

C'est exactement ce problème qu'a posé sans le résoudre Exner en 1925 (cité par Yang [154] page 64). Sur la figure Fig.5.5.2 (à gauche), on observe comment une dune pourrait évoluer d'après lui dans un vent constant.

En fait, partant d'une dune initiale quelconque il se crée donc un train d'ondes évanescents. Nous avons calculé une solution autosemblable de l'équation de Benjamin-Ono linéaire décrivant ce phénomène et trouvé une approximation pour les temps longs et les $\frac{x}{\sqrt{t}}$ grands de cette solution sous la forme de $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(1 + ((\frac{x}{\sqrt{t}}))^2)$.

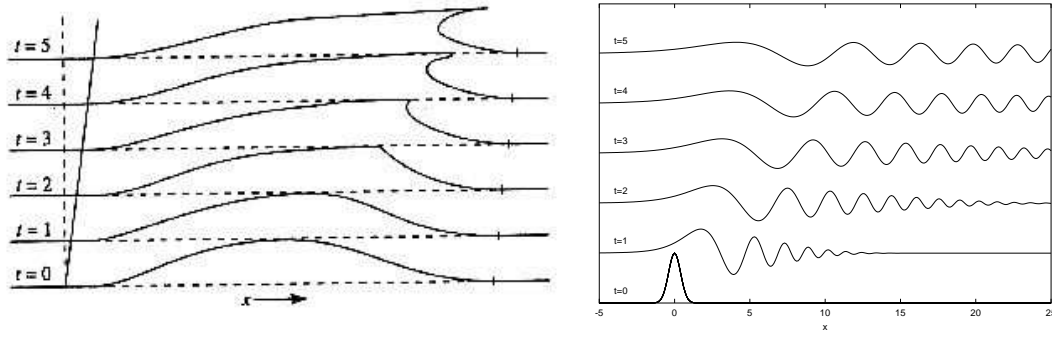


FIG. 5.9 – *A gauche : Evolution probable d'une dune sous l'action de l'écoulement d'un fluide dessin reproduit d'Exner par Yang [154] page 64. A droite : Exemple calculé numériquement à partir de l'équation de Benjamin-Ono linéaire d'évolution en fonction du temps d'une dune initiale en un train d'ondes, le domaine de calcul est supérieur à celui représenté ($x = 25$).*

5.6 Evolution du fond sous un écoulement brusquement freiné

Dans le cas d'un écoulement freiné, et dans les limites des conditions expérimentales, le frottement est supérieur au seuil (défini par la nature du fond) dans les premiers instants. Pour des temps longs, l'écoulement ralentit, et son frottement sur le fond s'affaiblit au point de devenir inférieur au seuil (figures Fig.5.5 et Fig.5.6). Mais dans les exemples présentés ici, nous nous limitons aux temps courts, de sorte que, les configurations sont celles de la figure Fig.5.5.

L'hypothèse selon laquelle le temps t de formation des structures au fond (temps lent) doit être égal au temps t lié à l'hydrodynamique du fluide (temps rapide) est faite. Cette hypothèse est nécessaire, et dans ces conditions, en prenant $\overline{U}_S = t^{-1/2}$, nous pouvons réécrire (5.27) ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} FT(f(x,t)) = \frac{-3 i k |k|}{t^{3/4}} FT(f(x,t)) + \frac{3 \overline{\Lambda} k^2}{2 t^{1/4}} FT(f(x,t)) \quad (5.35)$$

Cette équation est une équation différentielle ordinaire dans l'espace de Fourier. La solution du fond à chaque instant t est donnée par :

$$FT(f(x,t)) = FT(f)(k,t=0) e^{-k(0.267 k t^{3/4} - 12 i |k| t^{1/4})}. \quad (5.36)$$

La condition initiale du fond permet de trouver $FT(f)(k,t=0)$. En prenant le fond de départ avec une perturbation se limitant à une seule bosse, une gaussienne de hauteur unité, centrée en zéro et de largeur $\lambda = 3$, nous avons :

$$f(x,0) = e^{-8\pi \frac{x^2}{9}} \quad \text{et donc} \quad FT(f)(k) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{9k^2}{32\pi}} \quad (5.37)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de (5.36), nous présentons des configurations du fond pour des temps courts (figure Fig.5.6) :

5.7 Evolution du fond sous un écoulement oscillant

Nous supposons, ce qui est le cas dans les études d'interaction fond/écoulement oscillant, que le fond reste inchangé sur une période d'oscillation. La variation du flux le long de l'écoulement est alors moyennée sur la période d'oscillation. La transformation de Fourier étant faite sur la variable x et la moyenne sur t , nous pouvons intervertir les opérations de moyenne par rapport à t , de transformation de Fourier par rapport à x et de dérivation par rapport à t . La relation d'évolution du fond dans l'espace de Fourier donne, en remplaçant \overline{U}_S par $\sin(2\pi t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} FT(f(x,t)) = (-3 i k |k| \left[\int_0^{1/2} (\sin(2\pi t))^{3/2} dt - \int_{1/2}^1 (-\sin(2\pi t))^{3/2} dt \right] FT(f(x,t))$$

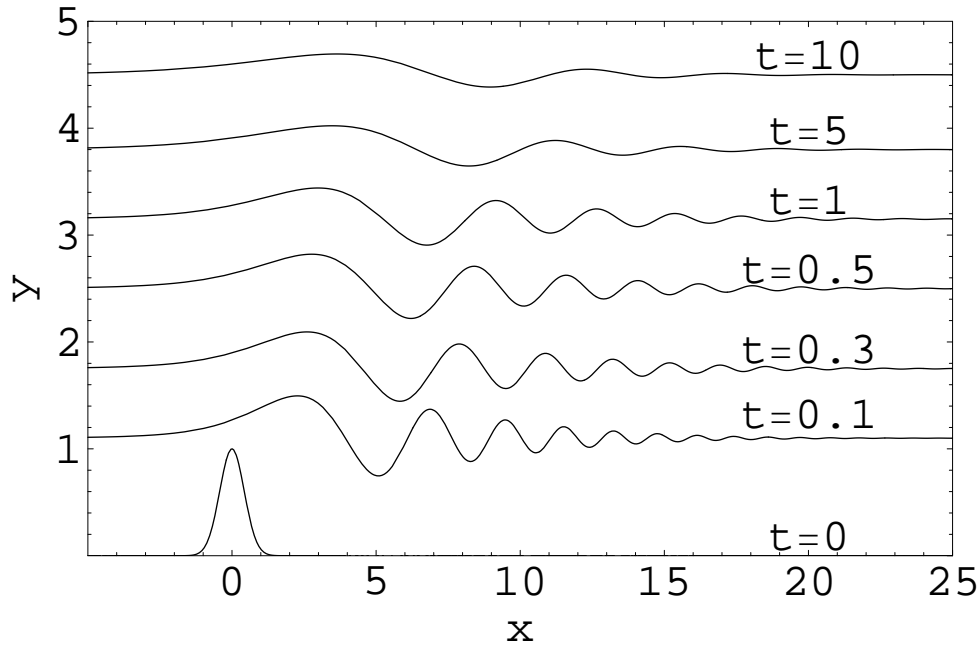


FIG. 5.10 – Evolution probable d'une dune sous l'action de l'écoulement (dirigé de la gauche vers la droite) d'un fluide freiné brusquement. Dans chaque cas, le temps évolue du bas $t = 0$, en haut $t = 10$.

$$+ \frac{3\bar{\Lambda}k^2}{2} \left[\int_0^{1/2} (\sin(2\pi t))^{1/2} dt - \int_{1/2}^1 (-\sin(2\pi t))^{1/2} dt \right] FT(f(x,t)). \quad (5.38)$$

Tous les termes de droite représentent la moyenne sur une période d'oscillation de la variation horizontale du flux. L'intégration de ce système est fait avec le code de calcul Mathematica. Nous prenons par la suite la transformée de Fourier inverse de la solution par le même code de calcul. Nous présentons (figure Fig.5.7) un exemple où la perturbation initiale est une gaussienne de hauteur unité, centrée en zéro et de largeur $\lambda = 3$. Le fond initial ne change pas.

5.8 Conclusion

Dans le cas asymptotique, où le nombre de Reynolds tend vers zéro, un modèle simplifié de frottement a été établi. Ce modèle tient uniquement compte de la correction de Stokes due à la perturbation du lit de l'écoulement par des bosses de petites amplitudes. Nous avons négligé tout simplement les termes inertiels liés à la convection du fait de l'hypothèse très forte $Re \sim 0$ (équation de Stokes).

Ce frottement simplifié est alors comparé avec celui obtenu des équations de Navier-Stokes (*cf.* chapitre 4). Les comparaisons sont faites avec des amplitudes de perturbation du fond comprises entre 0.1 et 0.4. Les équations de Stokes semblent être une meilleure approximation de celles de Navier-Stokes (superposition des deux résultats, figure Fig.5.1), lorsque, les perturbations du fond sont faibles $a_0 \leq 0.2$, et que le nombre de Reynolds est inférieur ou égal à 0.1. Toutefois, des écarts existent entre les deux résultats, lorsque l'amplitude des perturbations du fond est très faible ($a_0 \leq 0.1$), et que les nombres de Reynolds sont très petits devant zéro. Ces écarts sont liés à des problèmes de convergence du code que nous avons utilisé. Mais en gros, le frottement présente une symétrie verticale rapport au sommet de la bosse. Le maximum de frottement, pour une bosse du fond donnée, est atteint au sommet de la bosse. L'évolution du maximum frottement est croissante avec le nombre de Reynolds et l'amplitude des perturbations du fond (figure Fig.6.6).

Le flux de matières entraînées par l'écoulement est relié au frottement par une relation qui tient compte seulement du mode de transport par charriage (loi de type Meyer-Peter et Müller). L'effet de la gravité est contenu dans le seuil défini par Fredsoe et Deigaard [57]. Pour tenir compte du sens de l'écoulement (pour le cas oscillant), nous avons retenu une expression du flux du genre Komarova et Hulscher [77].

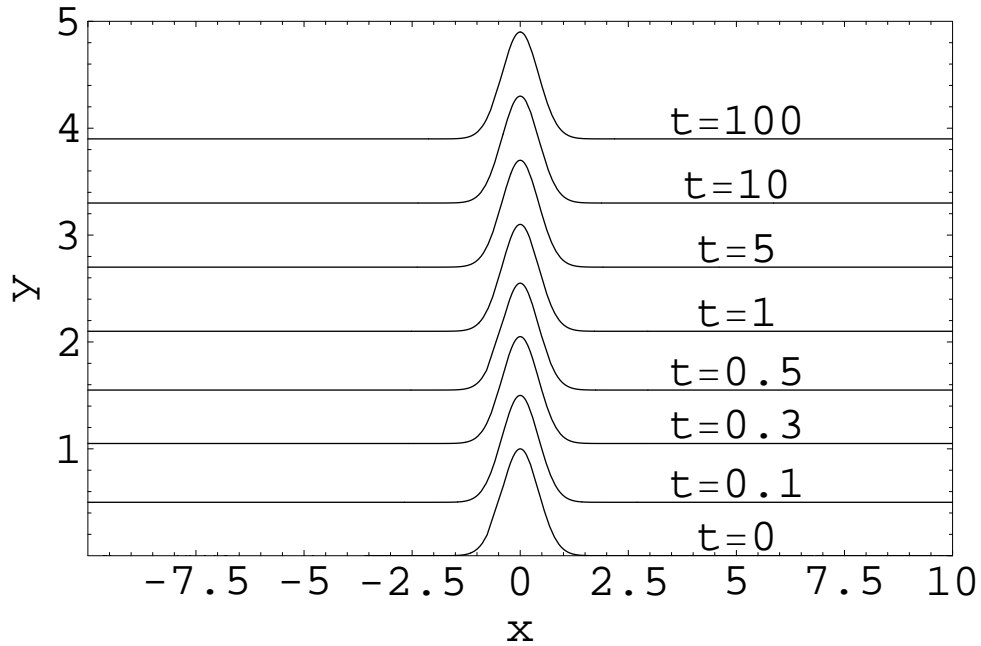


FIG. 5.11 – Evolution probable d'une dune sous l'action de l'écoulement oscillant. Dans chaque cas, le temps évolue du bas $t = 0$, en haut $t = 100$.

L'analyse de stabilité effectuée dans trois cas d'écoulements permet de conclure que :

- un fond érodable, initialement plat, reste stable dans le cas d'un cisaillement constant, (toute perturbation du fond est dispersée par l'écoulement).
- dans le cas d'un écoulement oscillant, toute perturbation de son fond reste stable.
- avec l'hypothèse émise dans le cas freiné, selon laquelle les structures de fond apparaissent très rapidement, nous pouvons affirmer que le fond est stable comme sous un cisaillement constant.

Cas d'un régime d'écoulement à nombre de Reynolds élevé

6.1 Introduction

Pour la compréhension des phénomènes initiaux de formation de structures de fond (les rides à grains roulants, de petites tailles), nous nous plaçons près de la paroi du fond. Le domaine d'étude a alors pour dimension (ε_b), qui est typiquement de l'ordre de grandeur de l'amplitude (a) des rides à grains roulants (voir Fig.6.2.1–(b)). Toute l'analyse repose sur le concept dit de “double ou triple couche”, dont nous faisons un rappel au paragraphe suivant (voir le paragraphe 6.2 de ce chapitre pour un rappel de la théorie, issu de Cousteix [45] page 164–172).

6.2 Rappel sur les théorie de double et triple couche

La formation de singularités dans le calcul des solutions de couche limite, apparaissant au voisinage d'un point de décollement (qui peut être une bosse), remet en cause les équations de couche limite qui conduisent aux solutions (4.1)-(4.2)-(4.3). La séparation d'une couche limite se produit près de la paroi (au voisinage aval d'une bosse : voir figure Fig.6.1) à une échelle transverse δ_3 plus petite que l'épaisseur de la couche limite δ (pour la séparation de la couche de Blasius, Lagrée [85]). Au voisinage du décollement, se produisent des variations fortes de vitesses transversales sur une échelle longitudinale X_3 plus petite que L longueur caractéristique de convection. Les autres échelles sont obtenues par analyse phénoménologique. Pour des notions plus complètes, on peut consulter Cousteix [45] et Neiland [102]. La théorie de la triple couche décrit la structure de l'écoulement à l'aide de trois zones principales. Dans ce contexte, les équations de départ de la théorie ne sont plus les équations de couche limite mais les équations complètes de Navier-Stokes. Les équations de Navier-Stokes sont alors adimensionnées par la longueur de convection L pour les longueurs, et la vitesse loin de la paroi U_0 pour les vitesses. La détermination du paramètre ε_b et de l'échelle X_3 de décollement s'effectue en analysant le comportement du fluide près du fond.

Dans la couche de “pont inférieur”, la vitesse amont est dans la partie linéaire du profil de vitesse (c.f. figures Fig.A.1, annexe A), $\bar{u} \sim \delta_3/\delta = \varepsilon_b$. Comme le but de cette théorie est “d'autoriser des courants de retour”, les variations de ces vitesses $\Delta\bar{u}$ sont alors du même ordre de grandeur que la vitesse de départ $\Delta\bar{u} \sim \bar{u}$.

D'autre part, la diffusion doit être équilibrée par la convection pour s'assurer l'adhérence à la paroi :

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \sim Re^{-1} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}. \quad (6.1)$$

En prenant en compte le fait que, l'ordre de grandeur de la zone de triple couche a pour étendues longitudinale et transversale celui de X_3 , et prenant en compte les ordres de grandeur obtenus précédemment,

$$\frac{\Delta\bar{u}(\delta_3/\delta)}{X_3} \sim \frac{\Delta\bar{u}}{(\delta_3/\delta)^2}.$$

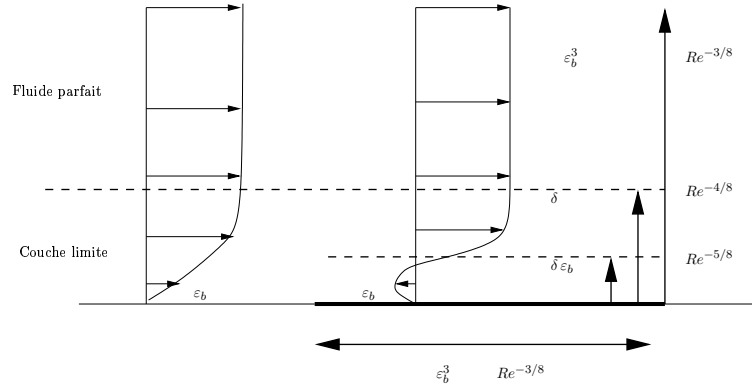


FIG. 6.1 – Structure de la triple couche au voisinage d'une bosse, c.f. Cousteix [45], Lagrée [85]. Les sous-régions sont les suivantes: 1°/ le “pont inférieur ou lower deck” dont l'épaisseur est de l'ordre de δ_3 ; 2°/ la couche “pont principal ou main deck” qui est la couche limite initiale dont la hauteur est de l'ordre de δ , longueur caractéristique de diffusion; 3°/ la couche de “pont supérieur ou upper deck” dont l'épaisseur est de l'ordre de ε_b^3 .

L'ordre de grandeur de l'échelle “rapide” (variations rapide des vitesses) s'écrit :

$$X_3 \sim (\delta_3/\delta)^3 = \varepsilon_b^3. \quad (6.2)$$

Avec cette échelle, en équilibrant le terme de pression avec les termes de diffusion et de convection, on détermine l'ordre de grandeur de la pression qui est ε_b^2 . Dans cette analyse, la pression ne varie pas en y^* et elle est encore inchangée au travers du “pont principal” (qui est la couche limite initiale). Cette perturbation de la couche limite induit une déflexion des lignes de courant de $\delta_3 = \varepsilon_b \delta$, l'angle de déflexion correspondant alors à $\varepsilon_b \delta/\varepsilon_b^3$. La perturbation de la couche limite est ressentie par le fluide parfait comme une bosse de longueur ε_b^3 et d'épaisseur $\varepsilon_b \delta$. Le fluide parfait linéarisé rétroagit donc avec ε_b^3 comme échelles transverse et longitudinale (pont supérieur) à cette bosse d'angle $\varepsilon_b \delta/\varepsilon_b^3$. Cette rétroaction se fait par l'intermédiaire de la transformée de Hilbert de la déflexion de lignes de courant. La perturbation de pression de fluide parfait est donc proportionnelle à l'angle de la bosse. Comme l'ordre de grandeur de la pression est ε_b^2 dans la couche de “pont inférieur”, pour qu'il y ait rétroaction, il faut que les deux pressions soient égales: $\varepsilon_b^2 = \varepsilon_b \delta/\varepsilon_b^3$. Le petit paramètre ε_b , essentiel dans la théorie de la triple couche, est alors :

$$\varepsilon_b = \delta^{-1/4} = Re^{-1/8}. \quad (6.3)$$

L'étendue longitudinale et transversale de la zone de triple couche est quant elle de l'ordre de $\varepsilon_b^3 = Re^{-3/8}$.

Une bosse de longueur $Re^{-3/8}$ et de hauteur $Re^{-5/8}$ peut provoquer la séparation de la couche limite. Dans le cas où la bosse est plus petite que $Re^{-3/8}$ la perturbation ne remonte pas dans le pont principal: il s'agit de la théorie de la double couche.

6.2.1 Exemple d'échelles dans le cas oscillant

Dans les études expérimentales effectuées par Rousseaux [118] dans le cas d'un écoulement laminaire oscillant, et bien d'autres auparavant, avec des diamètres de grains (d) de l'ordre du dixième de millimètre ($110 \mu\text{m}$), une fréquence d'oscillation du fluide de l'ordre d'un hertz ($2\pi/\Omega = 1 \text{ Hz}$), l'amplitude du mouvement ($2A$) de l'ordre du centimètre ($A = 1 \text{ cm}$), la constante de gravité $g = 9.8 \text{ m.s}^{-1}$, nous pouvons faire une estimation des échelles U_0 , δ , Re_δ , Fr_δ .

Pour $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, nous déduisons de ces valeurs $\delta = \sqrt{\nu/2\pi f} = 399 \mu\text{m}$, $U_0 = A 2\pi f = 0.063 \text{ m/s}$, $Re_\delta = 25$, $Fr_\delta = 1.007$.

La configuration de départ (perturbation) qui permet d'amorcer la formation des rides est un débat assez ouvert puisqu'il n'est pas possible d'observer expérimentalement le fond perturbé par un seul grain de sable. Il est difficile de visualiser (donc de mesurer) les rides au départ du processus de formation des rides à grains roulant. Dans son étude, Rousseaux [118] a pu pour la première fois observer la transition des rides à grains vers les rides à vortex par une dynamique de coalescences. Initialement, les structures

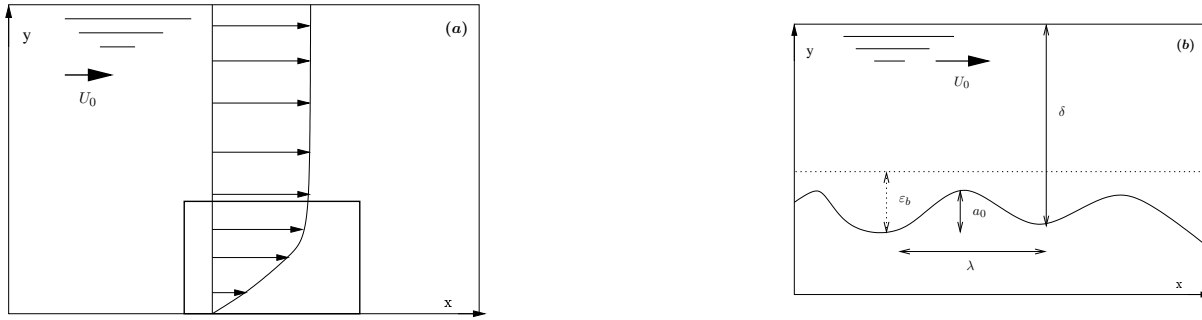


FIG. 6.2 – A gauche : profil de vitesse au dessus d'un fond plat (Blasius en 1908), près du fond le profil est linéaire. A droite : les différentes variables dimensionnelles du problème.

observées, ont une hauteur de l'ordre de 2 à 3 diamètres de grains. Pour de mêmes diamètres de sables et à basses fréquences, δ croît, et dans ce cas l'épaisseur de la couche limite est très grande comparée à l'amplitude des rides. Ainsi pour mieux percevoir les variations (fluide/fond) nous redimensionnons le domaine d'étude par les paramètres physiques du fond.

6.3 Etablissement des Equations de Double Couche (DD)

6.3.1 Hypothèse des études précédentes

L'ordre de grandeur de la hauteur des rides est plus petit que celui de leur longueur d'onde, mais la même échelle δ est utilisée longitudinalement et transversalement. Les équations sont, comme nous l'avons déjà vu :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (6.4)$$

$$\epsilon \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{t}} + Re_\delta \{[(\bar{u}, \bar{v}) \cdot \bar{\nabla}](\bar{u}, \bar{v}) + \nabla \bar{p}\} = \bar{\nabla}^2(\bar{u}, \bar{v}). \quad (6.5)$$

C'est le cas étudié par Rousseaux et coll. [120]. La vitesse de base $\bar{U}_{base}(\bar{y})$ est donnée. Il s'agit d'un écoulement dont la valeur du cisaillement à la paroi (γ) a servi pour adimensionner les vitesses qui sont donc mesurées par $\gamma\delta$.

6.3.2 Redimensionnement

Nous redimensionnons les équations précédentes. Nous restreignons le domaine d'étude aux dimensions d'une bosse de la perturbation du fond et notons simplement les grandeurs (sans 'barre' ni 'étoile') comme précédemment dans le paragraphe 4.3, $\bar{x} = (\lambda/\delta)x$ et $\bar{y} = \epsilon_b y$. Partant des variables avec dimensions, le tout revient à adimensionner la hauteur par $\delta\epsilon_b$ et la longueur par λ (figure Fig.6.2.1) :

$$y = \frac{y^*}{\delta\epsilon_b} = \frac{\bar{y}}{\epsilon_b}, \quad \text{et} \quad x = \frac{x^*}{\lambda} = \frac{\bar{x}}{\lambda/\delta}. \quad (6.6)$$

Avec ces nouvelles échelles, les solutions de base ($\bar{U}_{base}(\bar{y})$) s'écrivent :

$$u = \bar{U}'_S y + \mathcal{O}(y^2) \quad (6.7)$$

ce qui suppose que la vitesse caractéristique du fluide est $\epsilon_b \gamma \delta$:

$$u = \frac{u^*}{\epsilon_b \gamma \delta} = \bar{u} / \epsilon_b. \quad (6.8)$$

L'équation de continuité suggère pour la composante verticale de vitesse :

$$v = v^* / \left(\frac{\epsilon_b^2 \gamma \delta}{(\lambda/\delta)} \right). \quad (6.9)$$

L'équilibre des termes de convection et de pression suggère :

$$p = \frac{p^*}{\epsilon_b^2 \rho (\gamma \delta)^2}. \quad (6.10)$$

Enfin nous prenons pour le temps :

$$t = \frac{t^*}{\delta^2 / \nu}. \quad (6.11)$$

Les équations de l'écoulement sont alors (en mettant le groupement $\frac{\nu \lambda}{\delta^3 \epsilon_b^3 \gamma}$ en relief) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.12)$$

$$\epsilon \epsilon_b^2 \frac{\nu \lambda}{\delta^3 \epsilon_b^3 \gamma} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu \lambda}{\delta^3 \epsilon_b^3 \gamma} \left(\frac{\epsilon_b^2 \delta^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.13)$$

$$\epsilon \epsilon_b^4 \frac{\nu \lambda}{\delta^2 \epsilon_b^3 \gamma} \frac{\delta^2}{\lambda^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\epsilon_b^2 \delta^2}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\epsilon_b^2 \lambda^2}{\delta^2} \frac{\nu \lambda}{\delta^3 \epsilon_b^3 \gamma} \left(\frac{\epsilon_b^2 \delta^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6.14)$$

6.3.3 Termes négligés

Nous supposons les rides de faible amplitude par rapport à leur longueur d'onde: $\varepsilon_b \delta \ll \lambda$. Nous supposons les rides de faible hauteur par rapport à l'épaisseur δ .

Nous gardons le maximum de termes de (6.12-6.14) (Principe de moindre dégénérescence, Van Dyke [54]), $\lambda \sim \varepsilon_b^3 \gamma \delta^3 / \nu$. Dans ce contexte (6.12-6.14) s'écrit :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (6.15)$$

Ce qui fait que (6.14) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (6.16)$$

Finalement nous avons à résoudre dans la couche près du fond le problème qui est nommé dans la suite DD (pour "Double Deck"),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.17)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.18)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (6.19)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

Condition d'entrée: $u(x \rightarrow -\infty, y) = y, \quad v(x \rightarrow -\infty, y) = 0$.

A la paroi ($y = f(x)$), $u = v = 0$.

Loin de la paroi ($y \rightarrow \infty$ ou $\bar{y} \rightarrow 0$): $u = y$.

Avec la transformation de Prandtl:

$x \rightarrow x, y \rightarrow y - f(x), u \rightarrow u, v \rightarrow v - uf'$ les équations (9.25)-(9.26)-(9.28) sont préservées mais les conditions aux limites deviennent :

$$u(x, y = 0) = 0, \quad v(x, y = 0) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = y + f(x). \quad (6.20)$$

6.3.4 Remarque: la longueur visqueuse

Nous nous sommes placés dans l'optique de la Double Couche car nous savons qu'il s'agit du cadre pertinent pour la séparation de la couche limite (Smith [133], Saintlos et Mauss [121], Plantier [109]).

Il est cependant en général naturel d'étudier les équations en considérant que les échelles longitudinales et transverses sont les mêmes et en faisant ensuite une linéarisation pour tenir compte de la faible taille des bosses. Cela revient à prendre $\lambda = \varepsilon_b \delta$. Et on a ainsi

$$\frac{\nu \lambda}{\delta^3 \varepsilon_b^3 \gamma} = 1 \quad \text{pour} \quad \varepsilon_b = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma \delta^2}}. \quad (6.21)$$

On définit ainsi la longueur visqueuse (qui est très petite):

$$l_v = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}}. \quad (6.22)$$

Les équations deviennent à cette échelle:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.23)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\varepsilon_b^2 \delta^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.24)$$

$$\varepsilon_b^4 \frac{\nu \lambda}{\delta^2 \varepsilon_b^3 \gamma} \frac{\delta^2}{\lambda^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\varepsilon_b^2 \delta^2}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\varepsilon_b^2 \lambda^2}{\delta^2} \frac{\nu \lambda}{\delta^3 \varepsilon_b^3 \gamma} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (6.25)$$

Ici les échelles sont les mêmes transversalement et longitudinalement. Si on examine cependant ce qui se passe lorsque l'on augmente l'échelle longitudinale: ($x = X\bar{x}$), et l'échelle transverse ($y = X^{1/3}\bar{y}$), puis ($u = X^{1/3}\bar{u}$, $p = X^{2/3}\bar{p}$, et $v = X^{-1/3}\bar{v}$) l'équation devient:

$$\bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{u} = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{p} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \bar{u} + X^{-4/3} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \bar{u}. \quad (6.26)$$

Généralement ces équations sont ensuite linéarisées autour du profil de base linéaire. On retrouve l'équation (6.24) pour les échelles plus grandes que l_v . Cela implique que les analyses de Charru et Mouilleron ou Langlois et Valance, lorsqu'elles sont prises en grandes ondes, se confondent avec notre analyse.

6.3.5 Classification des études

Les hypothèses aboutissant à ce système d'équations (9.25)-(9.28)), dans le cas oscillant, nous permettent de nous situer dans les études antérieures à partir du paramètre r (notation couramment utilisée), rapport entre l'amplitude d'oscillation et la longueur d'onde des ondes du fond :

$$r = \frac{2A}{\lambda}. \quad (6.27)$$

La plupart des études (Lyne [93], Kaneko et Honji [73], Cuevas et coll.[46], Rousseaux et coll.[120], ...) sont faites dans le cas $r \ll 1$, sauf [93] qui traite aussi le cas $r \gg 1$ mais qui plus particulièrement, s'intéresse, par des transformations conformes, aux zones de recirculations. Sous l'hypothèse $\frac{A}{\delta} \ll 1$, il établit que

pour $r \ll 1$ et $\frac{\lambda}{\delta} \ll 1$, il y a une région de recirculation.

pour $r \ll 1$ et $\frac{\lambda}{\delta} \gg 1$, il y a deux zones de recirculation.

L'étude de Cuevas et coll. [46] a consisté à étendre celle Lyne [93] en calculant la solution à des ordres supérieurs pour mieux caractériser la structure des deux paires de rouleaux de recirculations lorsque $\frac{\lambda}{\delta} \gg 26$ et $\frac{\lambda}{\delta} \simeq 1$.

Pour $r \gg 1$ plusieurs zones de recirculations, confinées toutes dans la couche de Stokes (d'épaisseur $\delta = \sqrt{\nu/f}$), sont obtenues.

Nous plaçons cette étude dans le cadre $r \gg 1$. Nous nous intéressons particulièrement, à partir d'une loi simple (linéaire) de flux de matières en fonction du frottement pariétal, à l'analyse de stabilité du fond supposé meuble dans toute l'étude.

En effet (comme dans ce cas oscillant $U_0 = 2Af$):

$$\lambda \sim \varepsilon_b^3 Re_\delta \delta = 2A \varepsilon_b^3 \quad \text{entraîne} \quad r = \frac{2A}{\lambda} \simeq \frac{1}{\varepsilon_b^3}. \quad (6.28)$$

Cependant, comme notre hypothèse de base est :

$$\frac{\delta}{\varepsilon_b} \gg 1 \quad \text{et que} \quad \frac{1}{\varepsilon_b^2} \gg 1, \quad (6.29)$$

nous avons bien

$$r = \frac{2A}{\lambda} \simeq \left(\frac{1}{\varepsilon_b^3}\right) \gg 1. \quad (6.30)$$

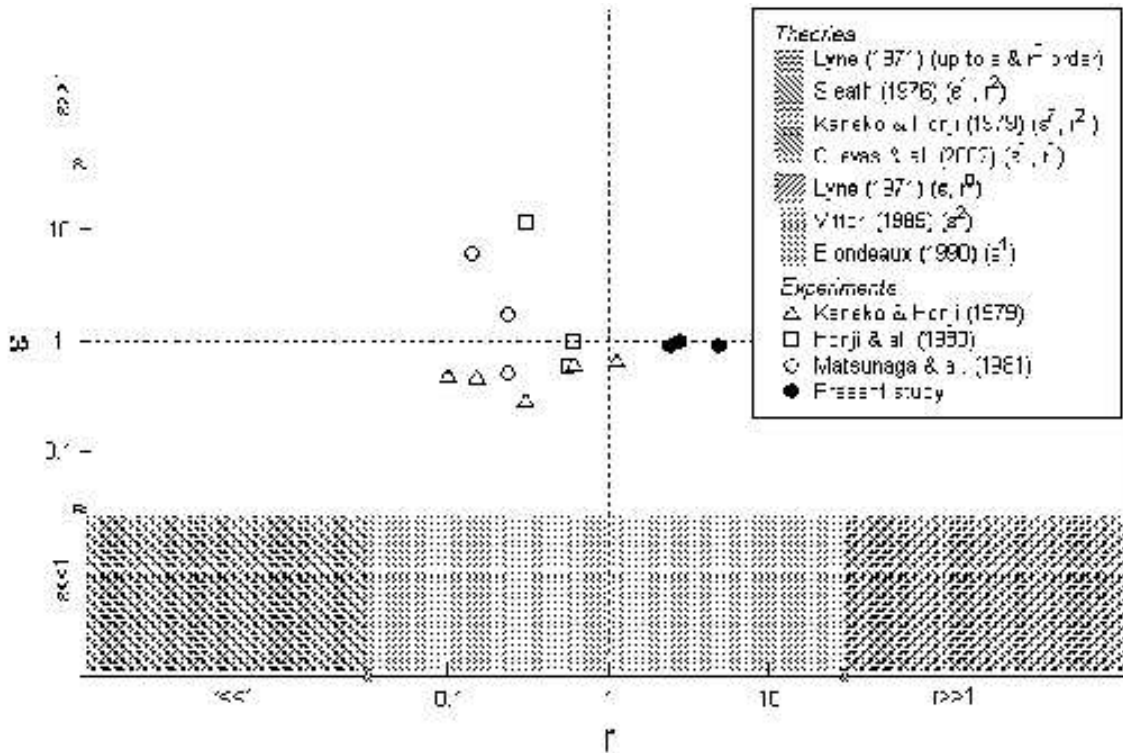


FIG. 6.3 – Diagramme de phase $r - \epsilon$ pour les théories et les expériences existantes, Rousseaux et coll. [120]. $\epsilon = a_0/\delta$

6.4 Résolution directe par un Code de calcul de DD

La forme de la bosse est prise dans dans le suite de ce paragraphe (choix arbitraire) égale à une gaussienne de hauteur a_0 , et de largeur unité $l_B = 1$:

$$f(\bar{x}) = a_0 \exp(-8\pi\bar{x}^2). \tag{6.31}$$

Avant de présenter les résultats, montrons comment passer de NS (solution de (4.14)–(4.15) pour ϵ petit) à DD (solution de (9.25)–(9.28)).

Nous savons que :

$$\bar{y} = \epsilon_b y,$$

et que le petit paramètre :

$$\epsilon_b = Re_\delta^{-1/3} \quad \text{on prend } (\lambda = \delta).$$

Pour un fond donné, son expression dans le système NS est :

$$\bar{y} = a_0 f(\bar{x}),$$

l'amplitude est notée a_0 . Dans le système DD :

$$y = \eta f(x) = \eta f(\bar{x}),$$

l'amplitude est η . Ce qui entrainent la relation entre amplitudes :

$$a_0 = \epsilon_b \eta = Re_\delta^{-1/3} \eta. \tag{6.32}$$

Le système (9.25)–(9.28) et sa version linéarisée sont codés par Lagrée [86]. Les résultats seront comparés avec CASTEM2000, mais auparavant (dans le paragraphe suivant) nous calculons la solution linéarisée en Fourier de double couche.

6.4.1 Résolution du problème DD linéarisé

La forme générique de la solution de base (6.7) et la forme de perturbation de du fond nous amènent à rechercher les solutions sous la forme :

$$u = \bar{U}'_S [y + a u_1(x,y,t) + \dots] \quad (6.33)$$

$$v = \bar{U}'_S a v_1(x,y,t) + \dots \quad (6.34)$$

$$p = \bar{U}'_S a p_1(x,y,t) + \dots \quad (6.35)$$

Les équations (9.25)-(9.28) sont alors linéarisées pour $a \ll 1$ et en gardant uniquement les termes d'ordre au plus un en a (dite équation en perturbation au premier ordre) :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (6.36)$$

$$\bar{U}'_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (6.37)$$

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial y}. \quad (6.38)$$

Lorsque l'amplitude du fond vérifie $|f| \ll 1$, le frottement est réduit à :

$$\tau^* = \mu \gamma \tau, \quad \tau = \bar{U}'_S (1 + \tau_1(x,y,t) + \dots) \quad (6.39)$$

Ces équations linéaires (6.36)-(6.38) sont résolues directement par un code nommé "lineaire DD" et analytiquement en Fourier. La résolution en Fourier se fait en décomposant chaque perturbation suivant ses modes de Fourier :

$$f_1 = f_k e^{i(\omega t - kx) + \sigma t}, \quad u_1 = u_k(y) e^{i(\omega t - kx) + \sigma t},$$

$$v_1 = v_k(y) e^{i(\omega t - kx) + \sigma t} \quad p_1 = p_k(y) e^{i(\omega t - kx) + \sigma t}$$

La solution linéarisée du frottement (voir détails en annexe C.2) en Fourier est :

$$\tau = \bar{U}'_S (1 + 3 Ai(0) FT^{-1} [(-ik) \bar{U}'_S]^{1/3} FT(f)). \quad (6.40)$$

6.5 Comparaison des résultats

Les solutions des équations DD sont résolues numériquement (notée "DD" pour les équations non-linéaires (équations (9.25)-(9.28)), et "Linéaire Num." pour les équations linéaires (équations (6.36)-(6.38))) sont comparées à la solution linéarisée faite en Fourier (c.f. relation 6.40, notée ici "Analytique").

Le cas particulier d'écoulement uniforme découle du cas général en posant $\bar{U}'_S = 1$ (plutôt que $\bar{U}'_S = 0.332$). On restreint la validation au cas d'écoulements unidirectionnels en cisaillement uniforme pour lesquels les calculs de Navier-Stokes sont effectués avec CASTEM2000.

Nous traçons pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, et pour différentes amplitudes de la bosse, le frottement à la paroi. La solution analytique obtenue par la théorie linéaire en Fourier est superposée (figure Fig.6.5) avec les résultats de NS (CASTEM200). Plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'on se rapproche de la solution analytique. ce qui justifie le domaine de validité de la théorie asymptotique aux nombres de Reynolds élevés.

La perturbation du frottement pariétal pour l'écoulement unidirectionnel simplement cisailé ont été validée par des études (Lagrée et coll.[88] et Kouakou et coll. [79]) dont sont issues des courbes de comparaison des équations de Navier-Stokes résolues avec le code CASTEM2000 [108] et la solution linéarisée dans des cas asymptotiques en Fourier.

Nous effectuons les Calculs avec le Logiciel Mathematica (Wolfram [150]) pour déterminer la position du frottement maximal en fonction de l'abscisse du sommet de la bosse. Pour une bosse de longueur transverse ($l_B = 3$), le frottement est maximal $\tau_1 = 1.17$ un peu en amont du sommet ($x = 0$) de la bosse en $x = -0.16$. Sur la figure Fig.6.6, nous remarquons l'évolution du maximum de frottement obtenu par la résolution des équations de Navier-Stokes (pour une amplitude de bosse fixée $a_0 = 0.4$) en fonction de l'évolution du nombre de Reynolds.

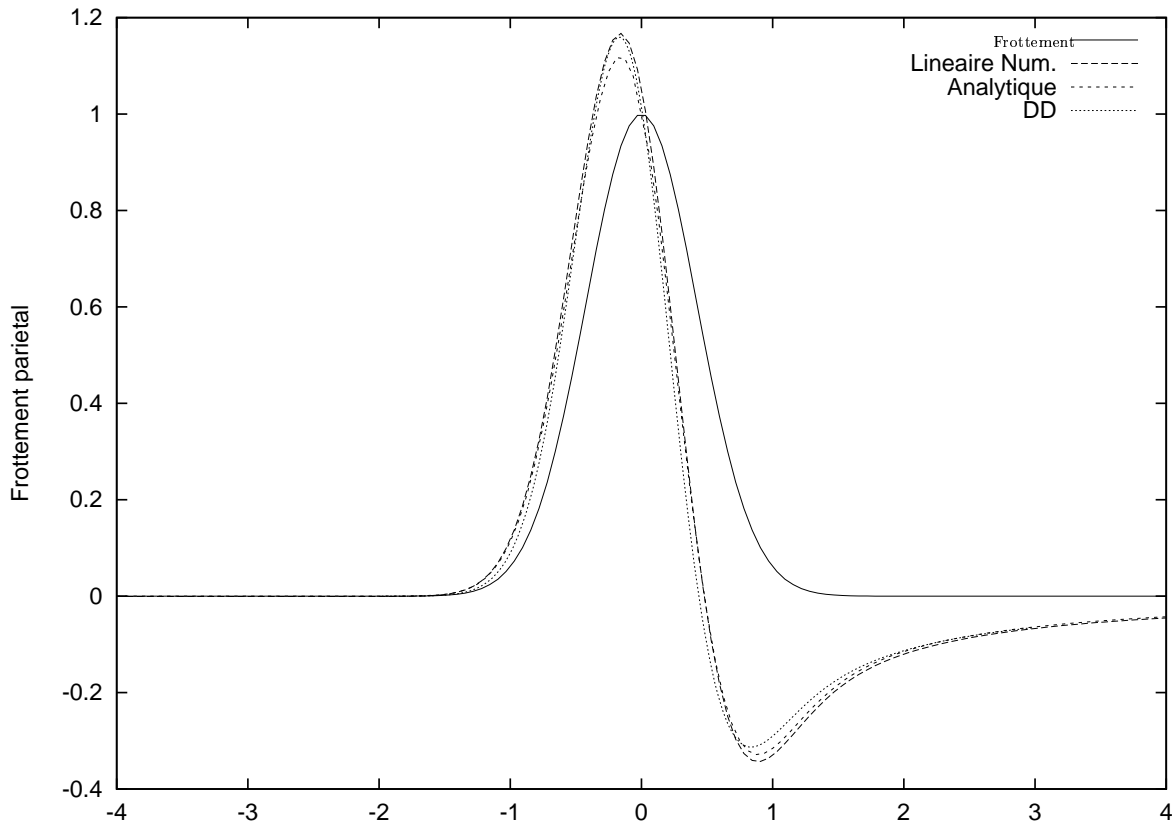


FIG. 6.4 – Comparaison des solutions de frottement obtenues par différentes méthodes pour $a_0 = 0.05$.

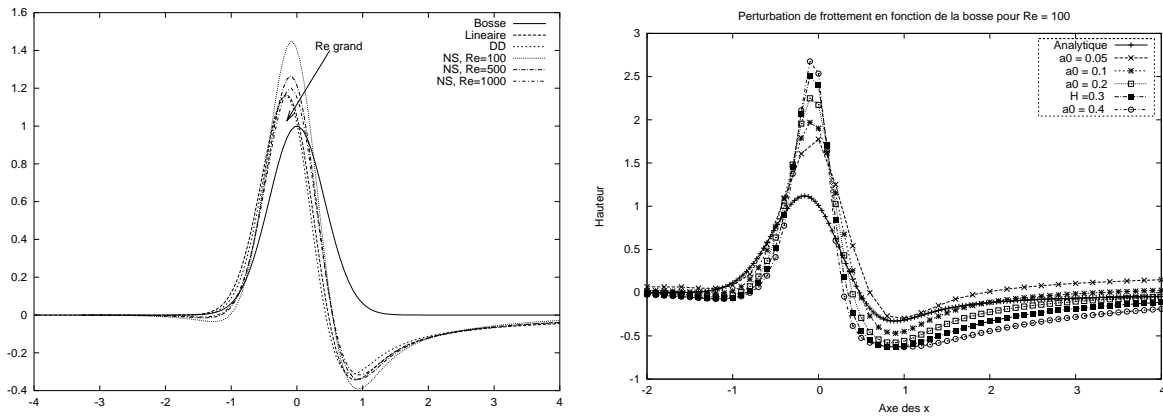


FIG. 6.5 – Perturbation de frottement $(\frac{\partial u}{\partial y} - 1)$; Gauche : en fonction de la hauteur de la bosse pour un Reynolds $Re_\delta = 100$. Droite : en fonction du Reynolds pour une bosse de hauteur $a_0 = 0.4$.

6.6 Application à un écoulement freiné

Remplaçant dans (6.40) $\bar{U}'_S = \frac{1}{\sqrt{t}}$, le frottement pariétal est :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{t}} + TF^{-1}\{3 Ai(0) (-ik)^{1/3} [t]^{-2/3} f_k e^{-ikx + \sigma t}\}(x,t) \tag{6.41}$$

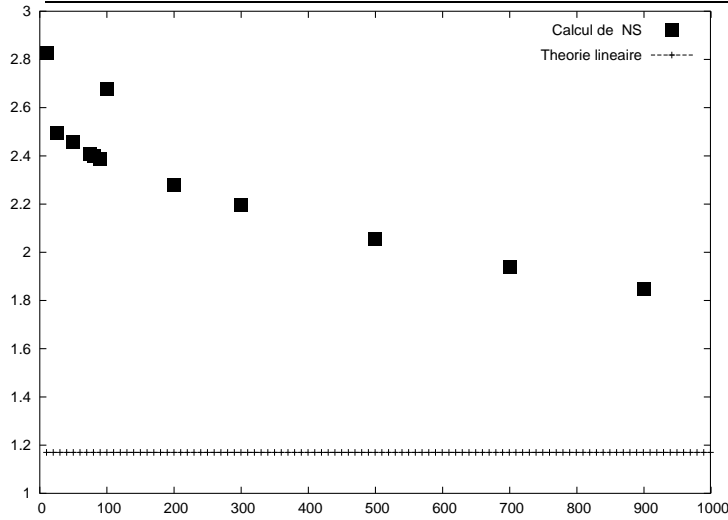


FIG. 6.6 – Maximum de la perturbation obtenu par la théorie linéarisée et celui prédit par les calculs de Navier-Stokes (NS) remise à l'échelle linéaire pour une amplitude de bosse $a_0 = 0.4$.

6.7 Application à un écoulement oscillant

Un écoulement oscillant, sur une période d'oscillation, est une succession de deux mouvements (aller - retour) du fluide, lesquels pris séparément se présentent comme des cisaillements simples sur le fond. Si l'on suppose la perturbation assez faible, de manière à ne pas perturber le fluide dans son mouvement de retour pour garantir les conditions aux limites de départ, les perturbations de l'écoulement, qui pourraient être dues aux recirculations, sont quasi inexistantes. On note $\tau^{(+)}$, le frottement lorsque l'écoulement est dans le sens des x croissants et $\tau^{(-)}$, celui du sens opposé. nous appliquons la méthode de calcul du frottement comme précédemment (Kouakou et coll. [79])

$$\tau^{(+)} = \cos(t) + TF^{-1}\{3 Ai(0) (-ik)^{1/3} \cos(t)^{4/3} f_k e^{-ikx+\sigma t}\}(x,t), \quad (6.42)$$

Lorsque l'écoulement est dans le sens des x croissants (ce qui correspond à $u > 0$, pour des valeurs de t comprises entre 0 et un certain t_p), le frottement pariétal pour ce mouvement est:

$$\langle \tau^{(+)} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{t_p} \tau^{(+)} dt \quad (6.43)$$

Par un changement de variable et pour des valeurs de t comprises entre t_p et T , on a la valeur de $t_p = \frac{\pi}{2}$, ce qui permet de définir le frottement pariétal pour cette autre partie du mouvement (de retour) comme:

$$\tau^{(-)} = -\cos(t) - TF^{-1}\{3 Ai(0) (-ik)^{1/3} \cos(t)^{4/3} f_k e^{-ikx+\sigma t}\}(x,t), \quad (6.44)$$

Le frottement total sur une période d'oscillation $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$, est la somme des deux frottements dans le mouvement d'aller et retour du fluide.

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_p} \tau^{(+)} dt + \int_{t_p}^T \tau^{(-)} dt \right] \quad (6.45)$$

Il faut remarquer que pour la moyenne il faut se souvenir de l'adimensionnement $t = \frac{1}{\omega} t^* = \frac{T}{2\pi} t^*$. Les calculs effectués avec le logiciel Mathematica [150] permettent d'obtenir:

$$\langle \tau \rangle = \frac{ik 3^{1/3} [(-ik)^{1/3} - (ik)^{1/3}] \Gamma(\frac{1}{6})}{8 \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{2}{3})^2} \quad (6.46)$$

qui est réel pour chaque mode.

6.8 Conclusion

Nous avons présenté une simplification des équations de Navier Stokes qui permet de retrouver la séparation derrière une bosse. Nous avons comparé favorablement avec la résolution numérique par CASTEM. Pour un écoulement cisailé nous avons donc la réponse du fluide à une paroi déformée.

Nous allons utiliser cette description que nous pensons pertinente pour analyser la stabilité d'un fond érodable sous les trois types d'écoulements (écoulement ayant un cisaillement unidirectionnel et uniforme, écoulement brusquement freiné, et écoulement oscillant).

Ensuite (chapitre 8), nous utiliserons cette description pour calculer l'écoulement au dessus d'une "pseudo dune".

Stability of an erodible bed in various shear flows

Article: K.K.J. Kouakou et P.-Y. Lagrée, European Physical Journal B - Condensed matter, Vol. 47, Issue 1, sep. 2005, pp 115-125

7.1 Résumé

Un écoulement 2D, quasi-stationnaire, laminaire, simplifié (asymptotiquement) et linéarisé est couplé avec le transport de sédiments sur son fond érodable dans divers écoulements de base laminaires ayant un cisaillement constant, oscillant ou décéléré.

L'équation simplifiée du transport de sédiments inclut les deux phénomènes suivants : flux d'érosion quand le frottement pariétal est supérieur à une valeur seuil, et un effet non local venant de l'inertie des sédiments (dû au cisaillement de l'écoulement) ou d'un effet de pente.

On montre que le lit est toujours instable pour de petits nombres d'ondes (grandes longueurs d'onde). Des exemples d'évolution du fond sont présentés pour des temps longs dans ces divers régimes de cisaillement. On constate que des trains de rides sont créés et fusionnent en une bosse unique par un processus dit de "coarsening".

Ce processus de coarsening est tel que la longueur d'onde maximum obéit à une loi de type puissance du temps.

7.2 Introduction

Understanding how water or air creates ripples on sand or sediments is a very important environmental problem. Widely different wave lengths are involved from small ripples on the beach (either in the wet or dry sand) to dune formation in desert or mega ripples in sea. A large literature refers to this problem since du Boys in 1879, Exner in 1925, and Bagnold in the 40's up to now, as ripples on Mars may be an evidence of water on this planet [101].

These erosion/ sedimentation problems have been solved by various techniques with various approaches. These problems may be seen from a practical point of view with direct application in costal engineering. Yang [154], Fredsøe and R. Deigaard [57], and Nielsen [103] give the state of the art for this very complex problem linking various physical aspects at different scales (from the grain diameter to the sea depth!).

Experimental setup have been constructed to study how ripples (of sand or beads) appear and grow in a flow of water. Typical experimental setups are oscillating annular cells (Sherer et al. [127], Rousseaux et al. [119], [120]), uniformly rotating cell (Charru et al. [41], [42], Kruelle et al. [25]) uniformly rotating disk ([157], [62]) or stopping a disk which was uniformly rotating (Caps [36], here the shear is due to the fact that the soil is stopped and the flow continues to rotate). The flow is characterized by the shear at the wall which makes the soil move. The observed ripples are of centimetric size. It is observed that as

time increases the wave length of the ripple increases. As the ripple increase in size and length, vortex appear in the lee side: before it was the "rolling grain régime", after it is the "vortex ripple régime". When time increases more and more, there is less and less ripples: this is the coarsening of the ripples. It takes a long time (weeks, months?) to observe this coarsening.

This is an interacting problem between the deformable soil and the flow. On the first hand, to understand the flow it self, the ripples may be fixed: the shape is given. Then, simplified (Rousseau et al. [120]) or complete Navier Stokes computations (direct numerical resolution with turbulent models) may be done over the given ripples (Barr & Slinn [22], Andersen et al. [4], Andersen & J. Fredsøe [5], [56] or Scandura et al [125]).

On the other hand, the relation between the shear and the flux of sediments is investigated (Charru et al [42], [41], Loiseleux et al. [91]). This study of the early stages is not simple. The first difficult problem is to measure the value of shear stress above which sediments are entrained. The second is to measure the sediment flux as a function of the shear stress. So, if appropriate experimental results for validation are still lacking, a lot of effort is done to measure the threshold value and the flux relation.

Coupling the flow and the soil variation allows computation of linear stability of the erodible bed. This has been done by Charru et al. [41], in the case of constant shear and slope effect in the flux relation, by Fowler [63] nearly in the laminar same case (though presented as turbulent), by Valance and Langlois [144] in the case of convective effect in the flux relation (this is similar to our analysis). From an experimental point of view, it is not simple to measure the first unstable wave length. Oscillating cases have been done by Mei & Yue [94] with a linear stability theory with $A/\lambda = 0(1)$ (A amplitude of the oscillation, λ wave length). The case of large values of A/λ has been examined by Gerkema [67] as well, our analysis is in fact similar to his analysis and makes it more general because applied to other régimes.

Previous studies where laminar. Komorova and Hulsher [77], Sumer and Bakioglu [137], and Richards [113] take into account turbulence, they have to model the turbulent viscosity.

The ripples of sand in air seem to be governed by a completely different mechanism from reptation saltation (Andreotti [6]) which does not involve fluid mechanics (Valance & Rioual [145], Balmforth et al. [21]), nevertheless fields of dunes are governed again by an interaction of the fluid and the transport of grains (Kroy, Sauerman & Herrmann [83] and Sauerman, Kroy & Herrmann [123], Andreotti et al. [9]).

Finally, we notice that some studies use simplified physical models to compute the flow and the ripples evolution (Andersen [3], Nishimori et al. [105]). Rousseaux et al. [119] suggest that a Cahn-Hilliard model (Bray [33]) may give a prediction of coarsening for ripples.

We simulate this phenomena with a simple model for both the flow and the soil. Instead of using an amplitude model equation we want to use model equations coming from mechanics. The first difficulty consists in computing the flow which is unsteady and turbulent in the nature, but which may be considered as laminar in most experiments. Our model will consider quasi steady laminar perturbations of a slowly varying basic flow. An asymptotical approach allows to obtain a linearised solution for the flow over the ripples. This approach is done in a framework which allows boundary layer separation. This is done because it has been observed that the ripples produce vortices in their lee side. So, we focus on configurations of flow which describe boundary layer separation (the so called "triple deck", which is here in fact a "double deck").

The second difficulty consists in computing the flow of sand. The sand may "creep" (bed load transport), or "fly", or may be suspended in the fluid. This modifies the viscosity and density of the flow. Our model will consider different simple relations between the flux of sand and the shear stress from the flow.

We present a stability theory valid for different cases of flow which is a generalization of other cases found in literature. The basic state is a flat erodible bed with a shear flow. Either a steady established flow, an oscillating one, or a decelerated one will be considered. The questions are about the linear stability of the configuration, and about the non linear long time evolution of the bed form. We then observe coarsening of the waves and fit a power law.

We first remind the equations of the full coupled problem (Sec. 7.3) and the first simplifications for the flow and for the granular material. We present the simple basic régimes: they reduce near the soil to a shear flow (Sec. 7.4). We focus on the small perturbations of this flow in section 7.5. The linear stability is then discussed (Sec. 7.6). Finally we present a long time evolution (Sec. 7.7) of the erodible bed leading to the coarsening of wave length.

7.3 The coupled problem

7.3.1 The flow

We consider a steady or unsteady laminar incompressible Newtonian flow. We suppose that the viscosity and density remain constant in the flow. An initial boundary layer is developing, δ is its thickness, U_0 is the velocity far from the soil. The Reynolds number $Re_\delta = \frac{U_0\delta}{\nu}$ is supposed large enough to use an asymptotical approach. In fact the slope of the velocity at the surface U_0/δ will be the pertinent parameter (we note it U_0' , this is often called $\dot{\gamma}$). The Reynolds number is in fact $Re_\delta = \frac{U_0'\delta^2}{\nu}$. We will specialise the boundary layer in section (7.4). Knowing the instantaneous soil shape the problem is to find the velocity near the soil, more exactly the skin friction $\tau = \mu\partial_y u$ from the Navier Stokes equations. Using δ as length scale, $y = \delta\bar{y}$, $x = \delta\bar{x}$, $u = U_0\bar{u}$, and $t = (\delta^2/\nu)\bar{t}$. The Navier Stokes equations are (Rousseaux et al. [120]):

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}} = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{Re_\delta} \frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{t}} + (\bar{u},\bar{v}) \cdot \bar{\nabla}(\bar{u},\bar{v}) = -\bar{\nabla}\bar{p} + \frac{1}{Re_\delta} \bar{\nabla}^2(\bar{u},\bar{v}). \quad (7.2)$$

Here we will concentrate to the case of small perturbations of the soil's surface, and we will see that asymptotic analysis allows an analytical resolution. The boundary conditions are the no slip flow at the upper surface of the soil described by $\bar{y} = \bar{f}$.

7.3.2 The erodible bed

Due to the movement of sand or sediment, the upper surface of the soil ($y = f(x,t)$) changes according to the mass conservation. To solve the mass conservation of sediments

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (7.3)$$

one has to know the relation between the flux q and the fluid flow. This depends on a lot of factors. In the literature (Yang [154], Nielsen [103], Fredsøe and Deigaard [57], ...) the final relation is mostly that q is function of the skin friction τ . The adimensionalised skin friction is denoted as the Shield number $\theta = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}$; ρ and ρ_s are fluid and particle density ($s = \rho_s/\rho$), respectively, d is average particle diameter, and g is gravity. There is a threshold value τ_s (or critical Shield θ_s) above which the sediments are entrained, a power law is often used:

$$q_s \propto (\theta)^a (\theta - \theta_s)^b, \quad \text{with } \theta > \theta_s.$$

Coefficients a, b depend on the modelling. Du Boys [52] law corresponds to $a = b = 1$; Charru & Mouilleron-Arnould [41] law, issued from resuspension theory, corresponds to $a = 0, b = 3$; Sumer & Bakioglu [137] use $a = 1/2, b = 1$; Blondeaux [28] uses $a = 0, b = 4.28$; Peter-Meyer (see Fredsøe & Deigaard [57]) use $a = 0, b = 3/2$. Those different values correspond to various specific hypotheses, in various laminar or turbulent flows, in air or in water.

In fact, we use a linearized version just above the threshold: $q_s \propto \tau - \tau_s$. Furthermore, there is a gravity effect which induces a correction in the threshold value depending on the slope of the soil. It is proportional to the inverse of the tangent of the static friction angle ϕ_s . If $\tau > \tau_s + \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}$ there is a flux, else there is no flux. Hence, we define a saturated flux as:

$$q_s = Q_0 \varpi \left(\frac{\tau - \tau_s - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}}{\rho(s-1)gd} \right), \quad (7.4)$$

where $\varpi(x) = x$ if $x > 0$, else $\varpi(x) = 0$. The expressions of τ_s , Q_0 and Λ are mainly in the literature:

$$\tau_s = \theta_s \rho g (s-1)d, \quad Q_0 = 8\sqrt{g(s-1)d^3}, \quad \text{and} \quad \Lambda = \frac{\theta_s \rho g (s-1)d}{\tan(\phi_s)}, \quad (7.5)$$

In an eolian context, Kroy et al. [83], Sauermann et al. [123] introduced an effect of inertia adding a term proportional to $\partial_x q$ (with $\Lambda = 0$), we may simplify their expression as:

$$l_K \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_s \quad (7.6)$$

with l_K proportional to $\frac{1}{U'_S}$ i.e. the inverse of the shear. With again $\Lambda = 0$, Andreotti et al. [9] simplified this expression as:

$$l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_s, \quad (7.7)$$

with a constant coefficient in front of $\partial_x q$. Assuming an equilibrium in the granular media modeled by a BCRE model, Valance & Langlois [144] proposed this same relation for water ripples.

Finally the slope of the ripple may be limited by an "avalanche" effect (at least a "slope effect"). It means that at each time step:

$$\text{if } \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| > \frac{1}{\mu}, \text{ then } \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \frac{1}{\mu} \text{ and } \int f dx = cste. \quad (7.8)$$

Mass is conserved during this process, and slope is limited. The problem is now to find τ and to test either Eq. 8.1, 7.6, or 7.7, and 7.8.

7.4 Basic flow

The basic configuration is a bidimensional flow over a flat soil. Curvature and gap effects in circular cells are neglected. The flow is laminar. Near the wall, any velocity profile reduces to a pure shear flow (Figure 7.1). The basic adimensionalised velocity is:

$$\bar{u} = \bar{U}'_S \bar{y}. \quad (7.9)$$

Typical examples are an oscillating flow, or a moving tank with an impulsively stopped bottom or a Blasius boundary layer. In the next subsections we will show that the steady case corresponds to $\bar{U}'_S = 1$, the oscillating case corresponds to $\bar{U}'_S = \cos(2\pi\bar{t})$, and the decelerated case to $\bar{U}'_S = \bar{t}^{-1/2}$. The shear itself is denoted $U'_0 = U_0/\delta$.

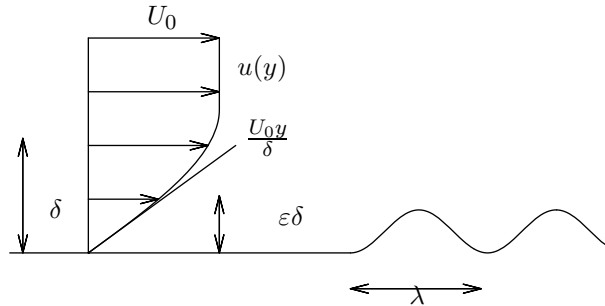


FIG. 7.1 – Any velocity profile is linear near the wall. λ is a typical length. $H = \epsilon\delta$ is the typical height.

7.4.1 Steady basic flow

If we consider a Blasius boundary layer, near the wall, the profile is linear (Schlichting [126]):

$$u \simeq 0.33U_0 \frac{y}{\delta} \quad (7.10)$$

with $\delta = (LR_L^{-1/2})$ so that we obtain (7.9) with $\bar{U}'_S = 0.33$. We may as well imagine a flow in a channel with a developed half Poiseuille profile, the parabolic velocity profile being linear near the wall. The analysis of Fowler [63] of a turbulent flow with a mean equivalent viscosity leads in fact to this analysis.

7.4.2 Oscillating basic flow

In the frame of the wall, the basic flow is solution of:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -\frac{d}{\rho dx} p + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} u. \quad (7.11)$$

The oscillating velocity $U_0 \Re[\exp(-i\Omega t)]$ is imposed at "infinity", far from the bottom where $u(y=0, t) = 0$. The solution is classical (Schlichting [126]) and after a change of phase in the time, near the wall:

$$u \simeq U_0 \frac{y}{\delta} e^{-i\Omega t} + \dots \quad (7.12)$$

so that we obtain (7.9) with $\bar{U}'_S = \cos(2\pi \bar{t})$, with time scaled with $f^{-1} = 2\pi\Omega^{-1}$. The scale of the boundary layer $\delta = (\nu/\Omega)^{1/2}$.

7.4.3 Decelerated Basic flow

In the frame of the wall, the basic flow is again the solution of Eq. (7.11) (Rayleigh problem) with U_0 the constant velocity at "infinity", far from the bottom and $u(y=0, t) = 0$:

$$u \simeq U_0 \frac{y}{\sqrt{\pi\nu t}} + \dots \quad (7.13)$$

so that we obtain (7.9) with $\bar{U}'_S = 1/\sqrt{\bar{t}}$, $\delta = (\pi\nu T^*)^{1/2}$ were $T^* = h_0^2/\nu$ is the chosen time scale (h_0 is the water depth, which is supposed larger than δ).

7.5 Perturbation of the basic flow

As mentioned in the literature, the ripples are of small aspect ratio. Let then consider a bump of thickness $H = \varepsilon\delta$ and of length $\lambda \gg \delta$ (figure 7.1). In the sublayer of relative thickness ε (compared to the uniform boundary layer thickness δ), and longitudinally stretched of a factor λ/δ we may develop (7.1-7.2) using $\tilde{y} = \varepsilon^{-1}\bar{y} = \frac{y}{\varepsilon\delta}$ and $\tilde{x} = \frac{\delta}{\lambda}\bar{x} = \frac{x}{\lambda}$. Perturbations of velocity must be of order ε , in order to reobtain far upstream of the bump: $\tilde{u} = \bar{U}'_S \tilde{y}$. The harder simplified problem to solve is the simplified problem which has the maximal number of terms in the equations. This is the "least possible degeneracy" (Van Dyke [54] p 86 or Darrozès [47]). So, to have a problem with the maximum number of terms, including pressure, convective terms and a viscous term, there should be a relation between λ and δ :

$$\lambda = \varepsilon^3 \delta R_\delta. \quad (7.14)$$

Therefore with $\tilde{u} = \varepsilon \tilde{u}$, $\tilde{v} = (\delta/\lambda)\varepsilon \tilde{v}$, and $\tilde{p} = \varepsilon^2 \tilde{p}$, and if we take the time scale to be the time scale of the oscillating flow $\bar{t} = \tilde{t}$, we have:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{u} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{u} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{u} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{p} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{u} + \varepsilon^2 \frac{\delta^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{u}. \quad (7.15)$$

and $-\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{p} = O(\varepsilon^2)$. So that, as $\varepsilon \rightarrow 0$, the problem is quasisteady, and we obtain a "boundary layer" equation for \tilde{u} which will be (Eq. 7.17).

7.5.1 Notes on the scalings

We note (as $\varepsilon \rightarrow 0$) that the second order partial longitudinal derivative is not present. It is because the transverse scale is smaller than the longitudinal one. Using the same scale in both directions $x = \lambda_v \hat{x}$ and $y = \lambda_v \hat{y}$, (i. e. $\lambda = \varepsilon\delta = \lambda_v$ in Eq. 7.15). we have $\lambda_v = \sqrt{\nu/(U_0/\delta)}$ and Eq 7.2, for \hat{u} is:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{p} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} \hat{u} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \hat{u}.$$

Again, the problem is steady. This scale is called the "viscous scale" (Charru et al. [41]), it is supposed very small. Nevertheless, looking at a large scale ($\hat{x} = X\tilde{x}$), small aspect ratio perturbation ($\hat{y} = X^{1/3}\tilde{y}$, $\hat{u} = X^{1/3}\tilde{u}$, $\hat{p} = X^{2/3}\tilde{p}$, and $\hat{v} = X^{-1/3}\tilde{v}$) of this equation gives:

$$\tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{u} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{u} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{p} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{u} + X^{-4/3} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{u}.$$

So that we will recover (Eq. 7.17) for scales larger than λ_v .

In fact we are in the Triple Deck theory (Neiland [102], Stewartson & Williams [136], Smith [130], Sychev *et al* [138]), and Gajjar & Smith [66], Bowles & Smith [32]). This set of equations is known to be

relevant to describe boundary layer separation. More precisely, we are in the framework of Double Deck Smith (1982) [130]. We focus on the case with no perturbations of the Upper Deck (no retroaction of the ideal fluid). This means that perturbations of pressure induced by the deflection of the streamlines in the Upper Deck (of order $\frac{\varepsilon\delta}{\lambda\varepsilon^3\delta}$) are smaller than the perturbation of pressure in the Lower Deck (of order ε^2) (Smith et al. [131]). In the Blasius case, this means that $\varepsilon \ll R_L^{-1/8}$.

In complete Triple Deck, time should then be scaled by ε^2 compared to the time scale of the basic flow in this lower layer. But this is not relevant here because this introduces a smaller time scale than the one coming from the flow (i.e. $1/\Omega$ in the oscillating case). Furthermore, the time of variation of the soil is itself very long compared to the oscillation period.

7.5.2 Equations

Steady and unsteady cases follow the same equations, the problem in the "Lower Deck" is simply:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{u} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{v} = 0, \quad (7.16)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{u} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{u} = -\frac{d}{d\tilde{x}} \tilde{p} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{u} \quad (7.17)$$

It means that near the wall there exist scales such that a non linear problem (with convection, diffusion and pressure gradient) has to be solved. Solving numerically this problem may lead to boundary layer separation: there is a small thin vortex in the lee side of the bump. Boundary conditions are no slip condition on the bottom:

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})) = 0, \quad \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})) = 0. \quad (7.18)$$

The matching between the top of the Lower Deck ($\tilde{y} \rightarrow \infty$) and the bottom of the boundary layer ($\tilde{y} \rightarrow 0$) gives:

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow \infty} (\varepsilon \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})) = \bar{U}'_S \tilde{y} \quad i.e. \quad \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y} \rightarrow \infty) = \bar{U}'_S \tilde{y} \quad (7.19)$$

The latter means that the incoming velocity is linear, this means that upstream we recover the boundary layer profile:

$$\tilde{u}(\tilde{x} \rightarrow -\infty, \tilde{y}) = \bar{U}'_S \tilde{y}, \quad \tilde{v}(\tilde{x} \rightarrow -\infty, \tilde{y}) = 0. \quad (7.20)$$

7.5.3 Linearisation: law between the topography and the skin friction.

The unperturbed solution of (7.16-7.17) is simply:

$$\tilde{u} = \bar{U}'_S \tilde{y}, \quad \tilde{v} = 0, \quad \tilde{p} = 0.$$

This means that at the small longitudinal scale, the boundary layer thickness does not evolve and the velocity profile remains linear near the wall. The linearised solution of (7.16-7.17) around this shear profile in Fourier space is straightforward and leads to (Ai is the Airy function):

$$\tilde{\tau} = \bar{U}'_S + \bar{U}'_S FT^{-1} [FT[\tilde{f}](3Ai(0))(-i\tilde{k}\bar{U}'_S)^{1/3}] + \dots \quad (7.21)$$

This relation (7.21) gives the final response of the fluid: it links the perturbation of the shear stress to the topography change. This final relation will be used for the linear stability analysis as well as for the numerical simulations.

Going back in physical variables gives for a bump of length of order λ and of height of order H :

$$\tau = \mu U'_0 (\bar{U}'_S (1 + (\frac{U'_0}{\nu\lambda})^{1/3} H \tilde{c})), \text{ with } \tilde{c} = FT^{-1} [FT[\tilde{f}] 3Ai(0) (-i2\pi\tilde{k}\bar{U}'_S)^{1/3}] \quad (7.22)$$

\tilde{c} is a numerical coefficient depending of the exact adimensionalised shape, the height H is supposed to be smaller than δ . The function of time \bar{U}'_S is a number of order one. If $(\frac{U'_0}{\nu\lambda})^{1/3} H$ is of order one this is equivalent to formula (7.14). Comparisons of formula (7.22) with Navier Stokes computations and full non linear equations (7.16-7.17) has been done by Kouakou & Lagrée [80] and Kouakou et al [79]. It gives good results of boundary layer separation.

7.6 Linear stability of the bed

7.6.1 steady case

The shear stress function of the topography change is now coupled to the adimensional version of (8.1),

$$\tilde{q}_s = \varpi(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_s - \tilde{\Lambda} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}). \quad (7.23)$$

Either the flux is always saturated and

$$\tilde{q} = \tilde{q}_s, \quad (7.24)$$

or the inertial effect is taken into account with a variable coefficient (7.6)

$$\frac{\tilde{l}_K}{\bar{U}'_S} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{q} = \tilde{q}_s, \quad (7.25)$$

or the inertial effect is taken into account with a constant coefficient (7.7)

$$\tilde{l}_s \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{q} = \tilde{q}_s, \quad (7.26)$$

where $\tilde{\tau}_s$, $\tilde{\Lambda}$, \tilde{l}_K , and \tilde{l}_s are constants. In practice, in the sequel, we do not mix the effect of inertia $\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}}$ and the avalanche (or slope) effect $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}$, so in (7.25 and 7.26) $\tilde{\Lambda}$ is zero in \tilde{q}_s . The bed form evolution (7.3) with a suitable adimensionalisation is:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} = -\eta \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}}, \quad (7.27)$$

where η represents the ratio of the hydrodynamic scale versus the bed evolution one. In practice this arises only when \bar{U}'_S is not constant. When \bar{U}'_S is constant, the time scale is such that $\eta = 1$. We introduce a long time $\tilde{t}_1 = \eta \tilde{t}$. This allows to compute the temporal stability of an erodible bed with \bar{U}'_S given. Looking for normal modes $\tilde{f} = e^{(\sigma+i\omega)\tilde{t}_1} e^{-ik\tilde{x}}$, we obtain the perturbation of the skin friction (Eq. 7.21) and with the suitably adimensionalised version of flux relation (Eq. 7.24 or 7.26 or 7.25), we obtain σ as a function of the mode k . We note that there exist a uniform flux:

$$\tilde{q}_0 = \bar{U}'_S - \tilde{\tau}_s.$$

With $\tilde{q}_0 > 0$, the linear stability analysis is valid as long $\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_s > 0$. The amplification factor σ is positive for small k (with Eq. 8.1):

$$\sigma + i\omega = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) k^{4/3} - \tilde{\Lambda} k^2. \quad (7.28)$$

Unstability occurs only for long waves (figure 7.2). If the slope effect is removed ($\tilde{\Lambda} = 0$ in Eq. 8.1), all waves are amplified ($\sigma = 0.53k^{4/3}$ and $\omega = 0.92k^{4/3}$). The same arises for the case with saturation effect (Eq. 7.7 or 7.6 here identical), there is unstability only for long waves (figure 7.3).

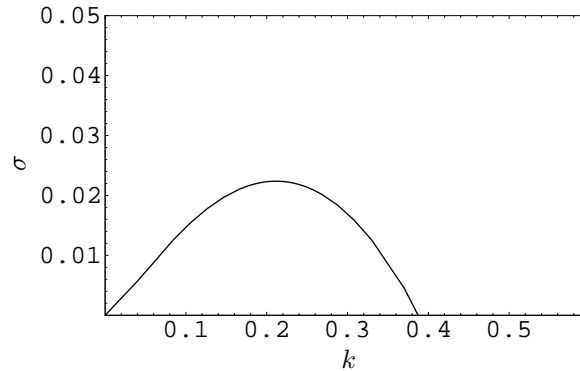


FIG. 7.2 – Constant shear, $\bar{U}'_S = 1$, amplification factor σ as function of number k , case (8.1 or 7.24, and 7.28) with $\tilde{\Lambda} = 1$ (most unstable wave $k_{max} = 0.21$, $\sigma_{max} = 0.02$), decreasing $\tilde{\Lambda}$ increases the cut off value of k .

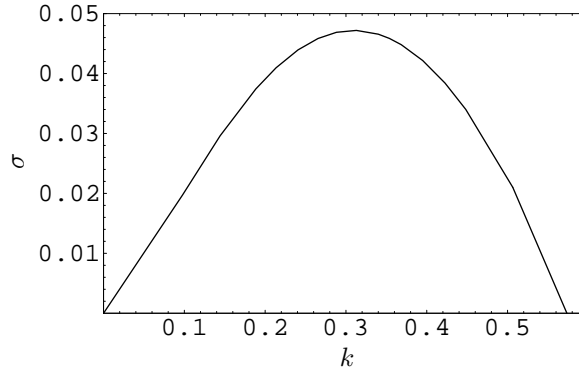


FIG. 7.3 – Constant shear, $\bar{U}'_S = 1$, amplification factor σ as function of number k , case (7.7 or 7.25 or 7.26) with $\tilde{l}_K = 1$ (most unstable wave $k_{max} = 0.31$, $\sigma_{max} = 0.047$), decreasing \tilde{l}_K increases the cut off value of k .

Figure 7.4 gives an interpretation of the instability, a wavy profile has an excess of skin friction $\tilde{\tau} - \bar{U}'_S$ that is maximal just before the crest. The flux is decomposed in a uniform flux \tilde{q}_0 plus a perturbation which is $\tilde{\tau} - \bar{U}'_S$. This latter contribution erodes the crest and displaces the matter down stream.

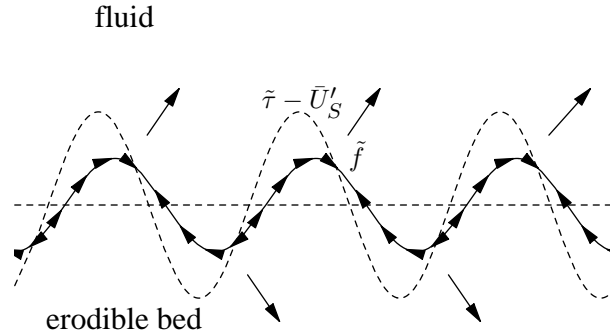


FIG. 7.4 – A wavy profile (bold line, \tilde{f}) has a perturbation of skin friction (dashed line, $\tilde{\tau} - \bar{U}'_S$) in advance of phase. When it is positive, the matter is moved down stream (small arrows on the profile), when it is negative, it is in opposite direction. The result is an increase of the wave and a displacement in the stream direction (large inclined arrows).

7.6.2 Oscillating case

The oscillating time scale is supposed smaller than the time of growth of the structures. We have again (7.27) with η ratio of the oscillating time by the bed evolution one. We define a mean value $\langle \cdot \rangle = \int_0^1 \cdot d\tilde{t}$ during an oscillating cycle. Introducing a multiscale analysis: $\bar{t}_0 = \tilde{t}$ is the short time, and $\bar{t}_1 = \eta \tilde{t}$ is the long time. Let split $\tilde{f} = \tilde{f}_0(\bar{t}_0, \bar{t}_1) + \eta \tilde{f}_1(\bar{t}_0, \bar{t}_1) + \dots$ and write $\tilde{q} = \tilde{Q} + \tilde{q}'$. \tilde{Q} is defined as the mean value during the current cycle $\tilde{Q} = \langle \tilde{q} \rangle$ and $\langle \tilde{q}' \rangle = 0$. So, as the time derivative is: $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}_0} + \eta \frac{\partial}{\partial \bar{t}_1}$, the mass conservation equation degenerates:

$$\frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial \bar{t}_0} = 0,$$

i.e. the topology is quasisteady at the short time scale. We define $\tilde{F}_0(\bar{t}_1) = \tilde{f}_0(\bar{t}_0, \bar{t}_1)$. At the long time scale:

$$\frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial \bar{t}_1} + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \bar{t}_0} = -\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \bar{x}}.$$

With the decomposition of q :

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{t}_0} = \left(-\frac{\partial \tilde{q}'}{\partial \tilde{x}}\right) + \left(-\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial \tilde{t}_1}\right).$$

In order to solve the problem at order one, the secular term: $\left(-\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial \tilde{t}_1}\right)$ must be 0:

$$\frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial \tilde{t}_1} = -\frac{\partial \langle \tilde{q} \rangle}{\partial \tilde{x}}.$$

This means that we can take the mean value of q to deal with the long time evolution of the bed.

During a cycle the ripples do not change at first order, the time of evolution of the topography is very slow compared to the oscillating time. The small short time perturbation of the soil is given by $\partial_{\tilde{t}_0} \tilde{f}_1 = -\partial_{\tilde{x}} \tilde{q}'$, where \tilde{q}' must be bounded. So we estimate the mean value of the skin friction with a "frozen" soil from Eq. 7.21 during a cycle (note $\langle \bar{U}'_S \rangle = 0$, and we use \tilde{f} which is in fact \tilde{F}_0):

$$\langle FT[\tilde{\tau}] \rangle = -3Ai(0) \frac{i\Gamma(\frac{1}{6})}{8\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{2}{3})} (k)^{1/3} FT[\tilde{f}],$$

$\langle \tilde{\tau} \rangle$ and \tilde{f} are out of phase, the skin friction will induce the sand to move to the crests and out of the hollow (figure 7.7) without displacing the ripples. The mean value of the skin friction is real:

$$\int_0^1 -(-ik)FT[\tilde{\tau}]d\tilde{t} = \frac{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{6})k^{4/3}TF[\tilde{f}]}{8\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{2}{3})^2}, \quad (7.29)$$

the numerical value is $0.3087TF[\tilde{f}]$.

Putting the slope effect (7.24), the stability analysis gives:

$$\sigma = 0.3087k^{4/3} - \tilde{\Lambda}k^2, \quad \omega = 0. \quad (7.30)$$

this dispersion relation is real, there is no phase speed. There is a cut off frequency k_c . Stability for large k : $k > k_c$ and instability for $k < k_c$. See fig 7.5 .

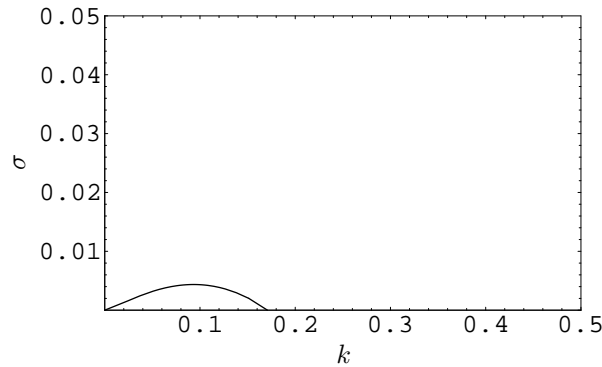


FIG. 7.5 – Amplification factor function of wave number. Averaged oscillating case, $\Lambda = 1$ (most unstable wave $k_{max} = 0.09$, $\sigma_{max} = 0.0043$), case (8.1 and 7.30).

Taking a relation with an inertial effect depending on the actual value of the shear stress (7.25) with $\tilde{q}_s = \tau$ gives:

$$\sigma + i\omega = \left\langle -(-ik) \frac{\tilde{U}'_S 3Ai(0) (-ik\bar{U}'_S)^{1/3}}{1 - \tilde{l}_K(ik(\bar{U}'_S)^{-1})} \right\rangle, \quad (7.31)$$

which is real again ($\omega = 0$), and plotted on fig. 7.6. As for the steady case, long waves are unstable, in this oscillating case there is no phase velocity. The ripples do not move.

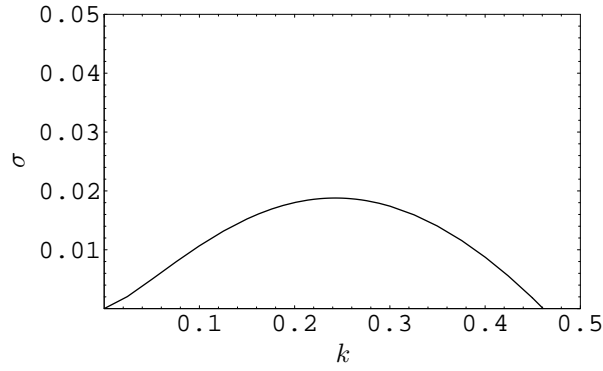


FIG. 7.6 – Amplification factor function of wave number. Averaged oscillating case, $\tilde{l}_K = 1$ (most unstable wave $k_{max} = 0.24$, $\sigma_{max} = 0.019$) case (7.7 and 7.31).

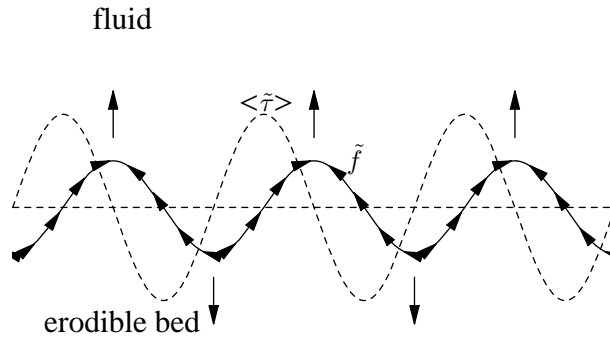


FIG. 7.7 – A wavy profile (bold line, \tilde{f}) has a mean perturbation of skin friction (dashed line, $\langle \tilde{\tau} \rangle$) out of phase. When $\langle \tilde{\tau} \rangle$ is positive, the matter is moved from left to right (small arrows on the profile), when it is negative, it is in opposite direction. The result is an increase of the wave without displacement (large vertical arrows).

7.6.3 Decelerated case

In the previous section, the hydrodynamic time was smaller than the bed time evolution. If we look at a decelerated flow, generally no ripples are created. The time during which the flow exists is too short for ripples to grow. In some cases, this arises (Caps [36]). In order to describe this case, the time scale of the flow must be the same than the time scale of the bed. Taking the same scale for the flow and the topology variation we have (in the case (7.24)):

$$\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial \tilde{t}} = (-3Ai(0)(-ik)(-ik)^{1/3}\tilde{t}^{-2/3} - \tilde{\Lambda}k^2)\tilde{f}_k. \quad (7.32)$$

Which may be solved for each Fourier mode k :

$$\log(\tilde{f}_k) = -9Ai(0)(-ik)(-ik)^{1/3}\tilde{t}^{1/3} - \tilde{\Lambda}k^2\tilde{t}. \quad (7.33)$$

Stability analysis now deals with $\log(\tilde{f}_k)$. On figure 7.8 is displayed $\log(\tilde{f}_k)$ as function of k for various time. As time increases, the cut off frequency k_c decreases. Short waves are more and more stabilised.

7.6.4 Conclusion for stability analysis

As a conclusion for this section devoted to linear stability analysis, we observe that the qualitative behaviour is the same in every case: the long wave are unstable, the short wave are stabilised by the gravity or the inertia effect. In the oscillating case, there is no downstream propagation of the ripples.

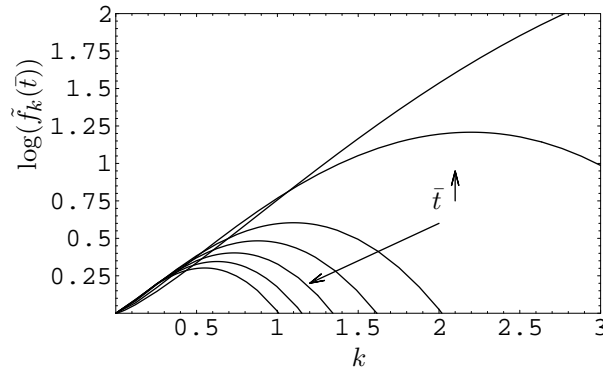


FIG. 7.8 – Decelerated case $\tilde{\Lambda} = 1$ (7.24 and 7.33), plot of $\log(\tilde{f}_k(\bar{t}))$ as function of k for various increasing times. As time increases, short waves are more and more stabilised.

The scale of the most unstable ripple is given by the flux relation itself either 8.1 or 7.7. In the "slope" case (8.1), Λ dictates the scale, in the "inertia" case (7.7), l_s dictates the scale, so, either,

$$\lambda = \left(\frac{\Lambda^3}{\rho^3 \nu^2 U_0^4} \right)^{1/2}, \quad \text{or} \quad \lambda = l_s. \quad (7.34)$$

The time scale follows from the mass conservation, $T = \lambda H / Q_0$:

$$T = \left(\frac{\nu \lambda^4}{U_0^3 Q_0^3} \right)^{1/3}. \quad (7.35)$$

7.7 Examples of large time evolution

7.7.1 numerical method

The system is solved numerically using a fast Fourier transform ([111]). The non linearity of the problem is taken in real space and consists in the fonction ϖ that is zero under the threshold. The initial profile is a random small noise. We observe (see following figures) that the time for ripples to grow and to interact is very long. Therefore we solved the oscillating case with $\eta = 1$ (taking at each time step \bar{t} the exact value of $\bar{\tau}$). This is a simple way to tackle with the problem of the non linearity induced by ϖ . We obtain a coarsening in all the configurations.

7.7.2 Steady case

Starting from a random noise, the structures predicted by the linear theory appear. As time increases, the non linear stage is induced by the threshold function ϖ . The sinusoidal shape is transformed in a non symmetrical shape (see fig. 7.9 a spatio temporal diagram). The ripples move from left to right. The ripple downstream of a larger one is eaten by it. This is due to the fact that the lee bumps experiment a smaller skin friction than the one upstream. As a result, there is less and less bumps in the computational domain: this is "coarsening". Finally there is only one bump in the "box". On figure 7.10 is plotted the number of bumps which diminishes with time, whereas the bump height increases with time. The eight of the final bump saturates. The wave length λ_{max} (which corresponds to the distance between the bumps, and is inversely proportional to the number of bumps) increases. On fig. 7.11 is plotted this wave length for several simulation with various values of domain size, values of threshold τ_s and models (either 7.24 or 7.25). The large time behaviour is the same, this is due to the fact that at small wave length k the bump is large so the exact value of threshold does not matter anymore. Furthermore, as the wave length is small, Eq. 7.24 or Eq. 7.25 are identical and reduce to

$$\tilde{q} = \tilde{\tau} + \dots$$

The wave length λ_{max} is plotted as function of t in fig 7.11. A log-log plot suggest that λ_{max} is more or less proportional to time, it seems that: $\lambda_{max} \propto \bar{t}$.

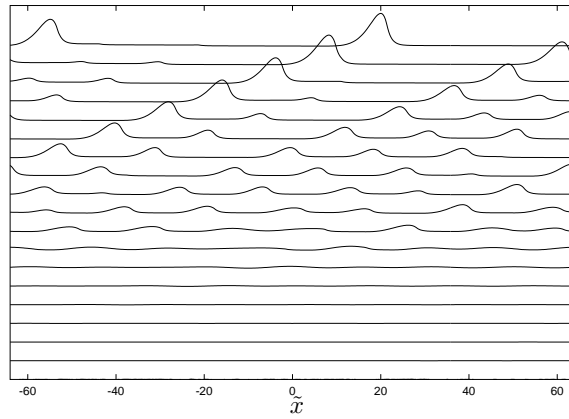


FIG. 7.9 – *Steady case, with (7.25) with $\bar{U}'_S = 1$, $\tilde{l}_s = 1$. Spatio-temporal diagram ($t = 0, 20, 40, \dots$ from bottom to top). The flow is from left to right. Starting from a random small noise, structures emerge and merge.*

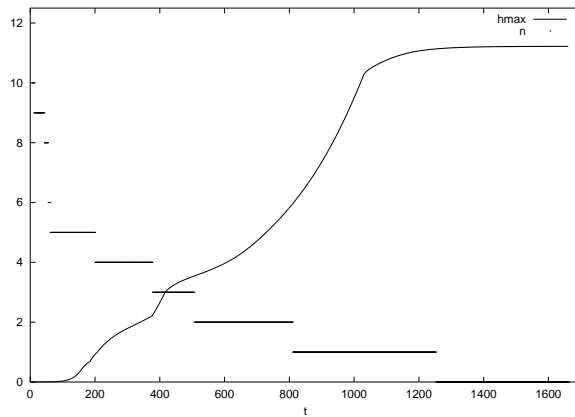


FIG. 7.10 – *Steady case $\bar{U}'_S = 1$, $\tilde{l}_s = 1$, evolution of the maximum value and of the number of bumps in the domain versus time.*

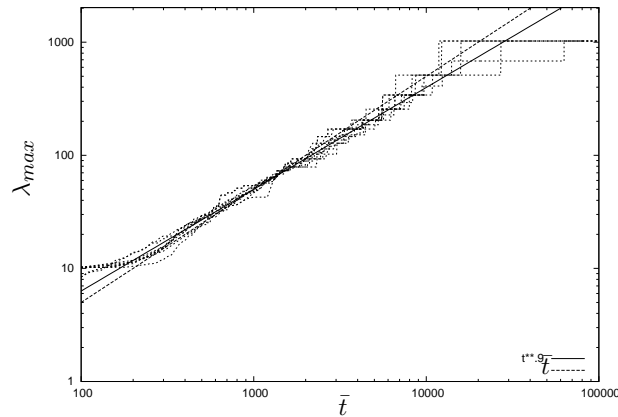


FIG. 7.11 – *Constant shear, the wave length of the structure scales with a power between $\bar{t}^{0.9}$ and \bar{t} .*

7.7.3 Oscillating case

Starting again from a random noise, the structures predicted by the linear theory appear. As time increases, the non linear stage is induced by the threshold function ϖ . The sinusoidal shape is transformed in a symmetrical shape (right/ left, see fig. 7.13) due to the symmetry of the flow. The ripples are steady

and only move from one to the other during the pairing process. Again, there is "coarsening": less and less bumps are in the computational domain. Finally there is only one bump in the "box". On figure 7.12 the same is observed in the case of slope limitation (7.8). On figure 7.14 is plotted the number of bumps which diminishes, whereas the bump height increases. The wave length λ_{max} increases. On fig. 7.15 is plotted this wave length for several simulations with various values of domain size, values of threshold τ_s and models (either 7.24 or 7.25). The large time behaviour is again the same. The wave length λ_{max} is plotted as function of t in fig 7.15. A log-log plot suggest that is near a $2/3$ power: $\lambda_{max} \propto t^{0.6}$ which is different from the steady case (fig 7.11).

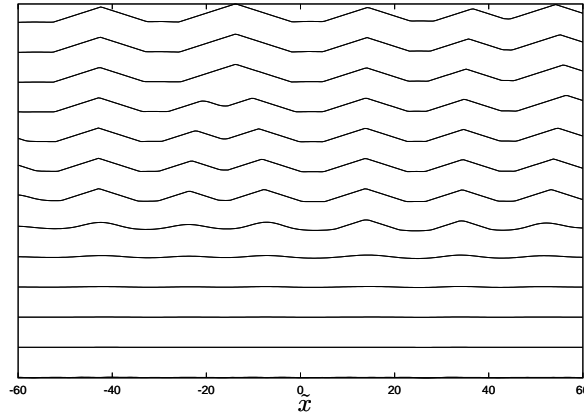


FIG. 7.12 – Oscillating régime with (7.25) and slope limitation $V = 1$, $\frac{1}{\mu} = 0.05$, spatio-temporal diagram, time increases from bottom to top

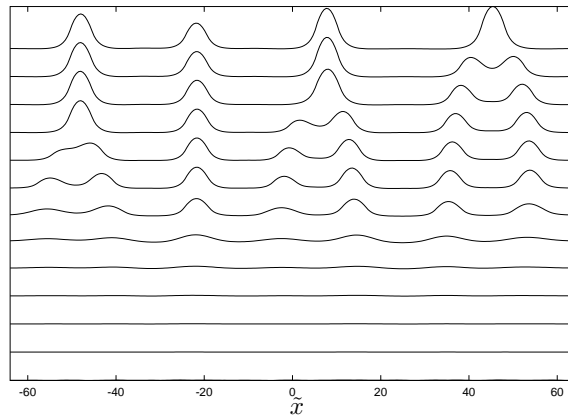


FIG. 7.13 – Oscillating régime with (7.25), spatio temporal diagram, time increases from bottom to top. Ripples growth from a random noise and merge two by two.

7.7.4 Decelerated case

As already mentioned, the time to obtain the growth of ripples is long, here the time is banded (there exist a time at which $\bar{U}'_S = \tilde{\tau}_s$). So $\tilde{\tau}_s$ must be enough small. The final time of growth is a bit larger than the time at which $\bar{U}'_S = \tilde{\tau}_s$. On figure 7.16 is a spatio-temporal diagram. As the effect of a bump is to increase the skin friction, there is an excess of $\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_s$ that is only due to the crest of the ripple.

7.7.5 Some experimental crude comparisons

First, in the case of constant shear, some orders of magnitude may be taken from Betat et al. [25] and [24], where the most unstable wave length is about $9cm$, and the order of magnitude of the wave growth

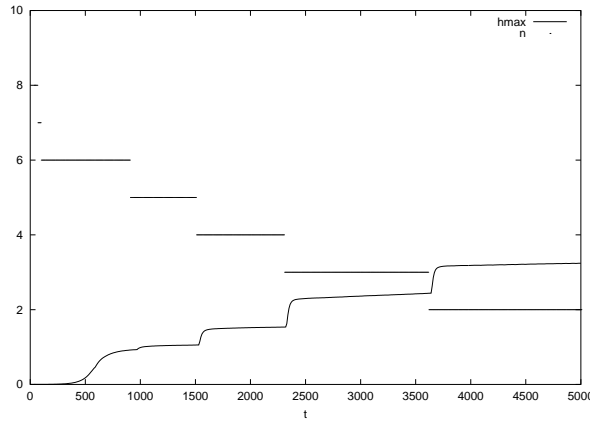


FIG. 7.14 – oscillating case $\bar{U}'_S = \cos(\bar{t})$, $\tilde{l}_K = 1$, evolution of the maximum height of the bumps, and number of bumps in the domain versus time.

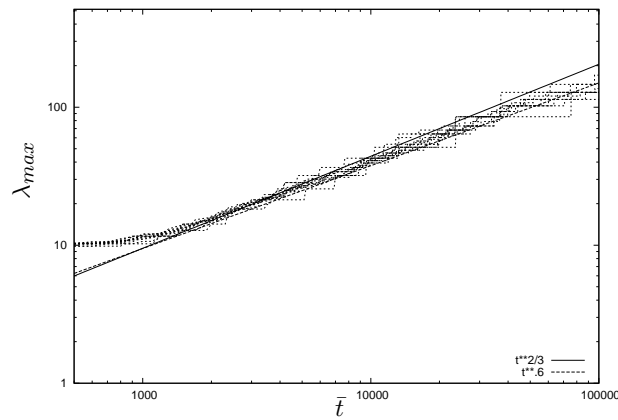


FIG. 7.15 – Oscillating shear, the wave length of the structure scales with a power law between $\bar{t}^{0.6}$ and $\bar{t}^{2/3}$.

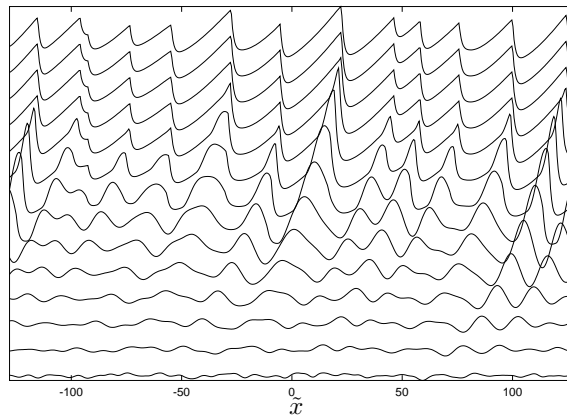


FIG. 7.16 – Decelerated case with (7.26) $\tilde{l}_s = 1$. Spatio-temporal diagram, time increases from bottom to top. There is a final steady bed because the shear stress is under the threshold.

is about $3 \cdot 10^{-3} s^{-1}$ (for a shear with $U'_0 = 69 s^{-1}$). Taking $\theta_s = 0.06$, $\phi_s = 30^\circ$, and numerical values from their experiment: $d = 95 \cdot 10^{-6} m$, $s = 2.65$ gives a value of the most unstable wave length (using eq. 7.34, 7.28 and figure 7.2):

$$\lambda^* \simeq 15 cm.$$

The order of magnitude is correct (in increasing a bit θ_s , and decreasing a bit ϕ_s , we could obtain $9cm$). The order of magnitude of the wave growth is then about

$$\sigma^* = 1.2 \cdot 10^{-3} s^{-1},$$

which is the order of magnitude of the experimental value. Our analysis predicts that σ^* increases with $(U'_0)^3$ the shear, it is observed in [25] that σ^* increases with the shear. Our analysis predicts that λ^* increases with U'_0^{-1} , this is not observed in the experiments where it seems that maximum is independent of the shear.

Second, in the oscillating case, experimentally Rousseaux et al. [119] studied ripples from the rolling ripple stage to the vortex ripple one. The amplitude of the movement is A ($0.01m < A < 0.05m$) and the frequency is f (typically $1Hz$), so that $U_0 = 2A\pi f$ and $\delta = \sqrt{\nu/(\pi f)}$. Then our theory apply for any ε such that Eq. 7.14 gives: $\lambda = \varepsilon^3(2A)$: the wave length must be smaller than the amplitude of the movement. It seems to be nearly the case in this experimental setup where the first measured wave length is $\lambda_{initial} \simeq 0.005m$.

Taking $\theta_s = 0.06$, $\phi_s = 30^\circ$, and numerical values from their experiment: $d = 100 \cdot 10^{-6}m$, $s = 2.49$ gives a value of the most unstable wave length (using eq. 7.34, 7.30 and figure 7.5):

$$\lambda^* \simeq 0.26cm.$$

The order of magnitude is correct (again we may tune the values). The formula predicts $\lambda^* \propto d^{3/2}$, $\lambda^* \propto \delta^2$, and $\lambda^* \propto \nu^{-1}$. Those are not the scalings of Rousseaux et al. [119] but they obtained that λ^* increases with d , δ and ν^{-1} with different powers. The order of magnitude of time (7.35) is then about the 0.3 second which is coherent.

At long time, the Cahn-Hillard models (Villain-Guillot, and Josserand [147], Bray [33]) predict that $\lambda_{max} \propto \text{Log}(t)$. Rousseaux et al. [119] suggest (but maybe on a too small range of time) this fit for their data. With our model, on a larger range, we instead have a power law. Even if our theory does not strictly compute the separation, the prediction of formula 7.21 is a good one even when there is flow separation (Lagrée [86]). Our theory is a good approximation of the flow with small separation bubbles. So we model the rolling ripples and the vortex ripple when they are small.

Third, in the decelerated case the observed length is of centimetric size again. There is here a problem because in Caps experiments [36], the size of the grain is not fixed. Taking nevertheless $d = 90 \cdot 10^{-6}m$, $\Omega = 0.2s^{-1}$, $R = 0.15m$, and a typical time scale of $0.05s$ (as the experiment is finished in about $2s$) will give an order of magnitude of the ripples of $2cm$ which is possible. Unfortunately the dependance in the angular velocity of the wave length is wrong and the time scale of the bed will be of $9s$, which too large.

7.8 Conclusion

A model for the growth of ripples in a laminar 2D shear flow has been presented. The proposed asymptotical framework is a reinterpretation and generalization of previous studies. It is the natural framework for boundary layer separation. A condition for application is that the height of the created ripples must be smaller than the boundary layer thickness of the basic flow in order to have a basic shear flow.

This shear flow may be steady or slowly varying in time (oscillating or decelerating). A linear solution linking the bed shape and the skin friction is obtained in Fourier space. Depending on the chosen relation linking the transport of sediments and the shear (or skin friction) we obtain a coupled problem. A linear relation with a threshold in shear has been chosen. We present a linear stability analysis of the erodible bed. In the chosen framework, in every case, the bed is unstable for long waves. The instability is due to the fact that the skin friction is in advance of phase with the soil. The short wave length are stabilised by either an "inertial" effect, either a "slope" effect. In the oscillating case, during a period, the bed does not change a lot, this allows a multiscale analysis of the instability. The stabilising effect for the short waves is the same. In the decelerated case, the classical temporal stability analysis has to be changed because the time of the deceleration and the time of growth of the structures must be the same.

Large time simulation of the model equations shows that the ripples merge and we obtain only one bump in the domain (except in the decelerated case because shear is decreasing finally under the threshold). During the coarsening process, the history is independent of the exact value of the parameters. The maximal wave length λ_{max} is proportional to a power of time.

To go further, we should do more refined comparisons between experimental works which are mainly in laminar flows. In fact we need models of transport. To distinguish between an inertia or a slope effect is not a simple task because the two mechanisms (inertia and slope effect) have same global behavior. At small time, short wave numbers are amplified. At large time the coarsening is the same. It would be interesting, but time consuming, to compute the full non linear problem as it is presented here. Finally, to be applicable to reality, instead of looking at perturbations of a linear profile we should look at the perturbations of turbulent flow (a linear and then logarithmic profile).

Evolution of a model dune in a shear flow

Article soumis par K.K.J. Kouakou et P.-Y. Lagrée, à paraître dans *European Journal of Mechanics - B/Fluids*

8.1 Résumé

Nous présentons un modèle simplifié pour le déplacement d'une "dune" au-dessus d'un sol non érodable, soumise à un cisaillement constant par un écoulement visqueux. C'est à dire que nous cherchons principalement à résoudre des équations simplifiées pour examiner l'influence des divers paramètres, sans tenter de comparer aux vraies dunes. Une loi simplifiée et linéaire avec un effet de seuil (pour le frottement) et de saturation est employée pour relier le flux de sédiments au cisaillement de l'écoulement.

Le cadre asymptotique de la théorie de la triple couche (grands nombres de Reynolds) est employé pour l'écoulement. Cette méthode permet le calcul de la séparation de la couche limite de l'écoulement. Aussi l'écoulement peut être encore simplifié en une relation analytique liant la forme de la dune au frottement pariétal.

Pour une forme donnée de dune, les solutions asymptotiques donnent une bonne concordance avec les solutions des équations complètes de Navier-Stokes résolues avec un code de calcul (ce que nous avons vu au chapitre 6). Des exemples du déplacement des "dunes" sont présentés. Nous obtenons alors un problème couplé auto-similaire, prévoyant que la vitesse de la dune est proportionnelle à $m^{-1/4}$, si m est la masse initiale de la dune.

Les calculs indiquent que la dune disparaît si sa masse initiale est trop petite, ou si la longueur de saturation est trop grande, ou si le seuil de frottement est trop petit.

8.2 Introduction

The study of ripples and dunes formation is attractive and receives a growing interest. It is a difficult problem to predict how a sand dune will emerge from the shore and move on the land, because one has to solve numerically the 3D turbulent Navier-Stokes equations for the air, where the viscosity is changed by the transported sand. Then the transport of sand in this flow has to be solved. Finally, the dune moves due to deposition and erosion and eventually avalanches may appear... All those phenomena are strongly coupled, so that it is now nearly impossible to perform such computations. First for time consuming reasons, and second, for lack of exact physical knowledge of all the phenomena involved. Of course, the same difficulties arise when we deal with submarine dunes where air is replaced with water.

Sauermann et al. [123], Kroy et al. [83], and Andreotti et al. [9] solved a simplified but realistic coupled model for the displacement of aeolian dunes. Here, on one hand, we present some severe simplifications compared to their work, which allow us to obtain a simplified model problem that we go on to solve numerically. We put neither gravity effect nor avalanche effect. But, on the other hand, the key point in

our model is that we make no approximation with respect to the re-circulation bubble (they oversimplified the separation bulb). This is possible because the asymptotic framework we used allows boundary layer separation. Of course what we then call a “dune” or a model dune, is only the result of our simplified mathematical model and is quite far from reality. To a certain extent, it may be a first step in the direction of the study of small centimetric dunes in water such as Hersen et al. [71].

In Section (8.3.1), we recall the most simple way to obtain the flux of materials over an erodible soil, hence linking the saturated flux of materials (sand, sediments, etc..) to the shear stress τ . Two ingredients are retained namely, the existence of a threshold under which no sediments are moved, and a saturation length for the flux before it attains a saturated value. In Section (8.3.2), we assume that the basic flow is laminar and steady; namely, we assume that it is a simple shear flow (the velocity increases linearly with altitude). We assume that the dune is small in height so that its slope is small (compared to one). This approximation allows us to derive asymptotic solutions of the Navier-Stokes equations in the limit of large Reynolds numbers ($Re = \infty$). This is the so-called Triple Deck theory, see Stewartson & Williams [136], Neiland [102] (more precisely the Double Deck theory: Smith [133]). We note that Fowler [63] obtained a very similar description in over-simplifying a turbulent boundary layer. We compute the flow over a given bump with a Navier Stokes solver (CASTEM), and good agreement is found with the Double Deck computations. Then we present the coupled problem in Section (8.4), and solve it in Section (8.5). Following some examples of resolutions leading to the displacement at constant velocity of a “dune” in our simplified framework (either with non linear or linear fluid solution), we propose a similar system of equations depending only on two final parameters. These parameters are the threshold value of the skin friction and a combination of the saturation length and the mass. Again, we find that there is a critical size under which no “dune” exist and that the larger the “dune” is, the slower it moves.

8.3 Basic equations

8.3.1 The erodable bed: relations between q and the flow

Du Boys [52] was one of the first to work on and to present a review of the subject. He understood that a critical value of the flow velocity must be reached in order to create a saturated flux of materials q_s . Since then (see Yang [154] who presents the other pioneering works such as: Exner (1925), Shields (1936), and Bagnold (1941), etc., as well as a comprehensive modern review), many other laws have been proposed, for which in general, the saturated flux of materials transported by the flow per unit width is an increasing function of the skin friction (or equivalently the shear stress: τ):

$$q_s = E\tau^a \varpi(\tau - \tau_s)^b, \quad (8.1)$$

where the threshold function ϖ is such that if $(\tau - \tau_s) > 0$, then $\varpi(\tau - \tau_s) = (\tau - \tau_s)$ else, $\varpi(\tau - \tau_s) = 0$. The coefficients a, b, E and τ_s depend on the modelling. The latter, when adimensionalised, is known as the threshold Shield number $\theta_s = \frac{\tau_s}{(\rho_p - \rho)gd}$; ρ and ρ_p are fluid and particle density, respectively, d is average particle diameter, and g is gravity. Flux arises when shear stress is high enough.

Du Boys [52] pioneering theoretical law corresponds to $a = b = 1$; Charru & Mouilleron- Arnould [41] used a law issued from (laminar) resuspension theory corresponding to $a = 0, b = 3$; Charru, Mouilleron- Arnould & Eiff [42] from laminar experiments in a annular channel, obtained $a = 1, b = 1$; in a turbulent water flow Sumer & Bakioglu [137] use $a = 1/2, b = 1$, Peter- Meyer (see Fredsøe & Deigaard [57]) use $a = 0, b = 3/2$; in a laminar water flow Blondeaux [28] uses $a = 0, b = 4.28$, in an eolian context Kroy et al. [83] use $a = 3/2, b = 0$. Those are the typical values.

The global scaling of the flux is a length time a velocity. In order to analyse experiments, the length used is mainly the grain diameter itself d . The velocity is mainly taken to be the settling velocity $((\rho_p - \rho)gd^2/\mu$ in laminar flows, $\sqrt{(\rho_p - \rho)gd}$ in turbulent flows). For instance, laminar experiments of [42] give:

$$q_s = 0.85 \frac{(\rho_p - \rho)gd^2}{18\mu} \left(\frac{\tau}{(\rho_p - \rho)gd} \right) \varpi \left(\frac{\tau}{(\rho_p - \rho)gd} - 0.12 \right), \quad (8.2)$$

whereas the usual Peter Meyer law ([57]) for turbulent flows reads:

$$q_s = 8 \cdot \sqrt{(\rho_p - \rho)gd^3} \varpi \left(\frac{\tau}{(\rho_p - \rho)gd} - 0.047 \right)^{3/2}. \quad (8.3)$$

Again, du Boys [52] observed among the firsts that this saturated flux is not abruptly obtained when the flow goes from a non erodable part of the bed to an erodable one. There is a settling distance. Sauermann

et al. [123], Kroy et al. [83] obtained this in solving a simplified equation for the saltating grains of sand in air. Andreotti et al. [9] simplified it and reformulated this phenomena of saturation as:

$$l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = q_s, \quad (8.4)$$

where l_s is the settling or saturation length. This relation represents the relaxation of the value of the flux toward the final admissible saturated value. This length is estimated to be of order $\rho_p/\rho d$ in water Charru & Hinch [40] or in air [9]. Equation 8.4 may be viewed as a conservation of the mass of sediments in the flow (Charru & Hinch [40] or Lagr ee [86] or Valance & Langlois [144]) when supposing that the time variation of the soil is slower than the flow time scale. With this point of view q/l_s represents deposition, and $-q_s/l_s$ erosion. As the total mass per unit width of the granular material is defined as $\int \phi \rho_p f dx$ ($\phi \simeq 0.6$ is the compaction), the balance of mass through deposition and erosion is:

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{q - q_s}{l_s}. \quad (8.5)$$

Finally, this equation is rewritten as Exner's law of conservation of mass linking the variations of the flux to the evolution of the topography according to:

$$\phi \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (8.6)$$

We will linearise any of the previous law (8.1) around the threshold value so that we will use a linear law and we obtain the following *ad hoc* expression:

$$l_s \frac{\partial}{\partial x} q + q = E\varpi(\tau - \tau_s). \quad (8.7)$$

Nevertheless, the threshold itself introduces some non linearity. Following most of the other authors, we suppose that the flux of sediments does not interact with the fluid. We wish to examine the influence of the saturation length l_s and of the threshold value τ_s on the displacement of a initial amount of material moving on a flat, non-erodible soil. So that, the model dune will be described by $f > 0$, the non erodible soil will be $f = 0$. First, we compute the flow.

8.3.2 The fluid

Navier-Stokes equations have to be solved in order to obtain the skin friction $\tau = \mu \partial u / \partial y$ at the wall. This skin friction moves the sediments. In real applications the viscosity μ changes with the suspended sediments (or flying sand) and the flow is turbulent and three-dimensional. Here we present very severe simplifications. We suppose a steady laminar bidimensional flow. The incoming flow is a pure shear flow, with U'_0 (say), the given value of the velocity slope. Furthermore, we use an asymptotic solution of the Navier-Stokes equations. Hence we place ourselves within the framework of Triple Deck theory (Stewartson & Williams [136], Neiland [102]) for "short" bumps Smith et al. [131]. More specifically, this is the Double Deck theory (Smith [133], Saintlos & Mauss [121], Plantier [109]). We note that Fowler's [63] description reduces to this description, even if his basic flow was turbulent. In this framework, there is a relation between the shear velocity of the basic flow U'_0 , the longitudinal scale of the model-dunes λ , and the transverse scale of the model-dunes $\varepsilon \lambda$ (the model dunes are supposed small). With those scales, the incoming shear flow is simply $\bar{u} = \bar{y}$. The Reynolds number is $Re = \frac{U'_0 \lambda^2}{\nu}$. The relation $\varepsilon = Re^{-1/3}$ is obtained in order to write the following non linear system:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{v} = 0, \quad \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \bar{u} = -\frac{d}{d\bar{x}} \bar{p} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \bar{u}. \quad (8.8)$$

The boundary conditions are the no-slip condition:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{f}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{f}(\bar{x}) = 0, \quad (8.9)$$

and the matching with the shear flow either far from the soil ($\bar{y} \rightarrow \infty$) or far upstream ($\bar{x} \rightarrow -\infty$):

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow -\infty} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}, \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow -\infty} \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \quad (8.10)$$

This system contains non-linear inertial effects, and viscous effects (it is the Boundary Layer equations system with different scales and boundary conditions). It is known to allow to compute boundary layer separation (Sychev et al. [138]).

As the basic flow $\bar{u} = \bar{y}$, $\bar{v} = 0$, $\bar{p} = 0$, is a solution of the system (8.8-8.10), there is a classical analytical solution for the linearized equations. It is supposed that the slope of the wall is weak in order to allow

this linearization. Looking at solutions in Fourier space, we find the expression of the skin friction at the wall as:

$$\bar{\tau} = 1 + (TF^{-1}[(3Ai(0))(-ik)^{1/3}TF[\bar{f}]]) + \dots, \quad (8.11)$$

where TF denotes the Fourier transform and Ai is the Airy function.

To settle those equations, we insist on the fact that we have supposed that the sediments do not change the flow. The viscosity remains the same, and the boundary condition on the interface, which is supposed well-defined, is always a no-slip condition. We have also supposed that the time of displacement of the model dune is so slow that a quasi steady solution for the fluid is pertinent.

Having a given fixed topography $\bar{f}(\bar{x})$ we are able to compute the steady flow. First, we solve the full Navier-Stokes (using the code CASTEM 2000 [37]). Second, using a finite difference scheme, we solve the "Inverse Boundary Layer" system (8.8-8.10), with the FLARE approximation (Cebeci & Cousteix [139]). Third, using Fast Fourier Transform algorithms (Press et al [111], and Ooura [107]) we solve (8.11). We compare the three approaches (at $Re = 1000$ for CASTEM, on Figures 8.1 and 8.2) for a bump in Double Deck scales: $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ with $\bar{f}(\bar{x}) = \alpha \exp(-\bar{x}^2)$. We see that the Double Deck under predicts the skin friction maximum. The longitudinal scale λ for the full Navier Stokes is the same as the Double Deck scale. So, if h_0 is the height of the bump, $h_0/\lambda = \alpha Re^{-1/3}$ (the aspect ratio is of order $Re^{-1/3} = 0.1$, this kind of value is the order of magnitude of slopes in ripples or dunes). On Figure 8.1 we have $\alpha = 1$

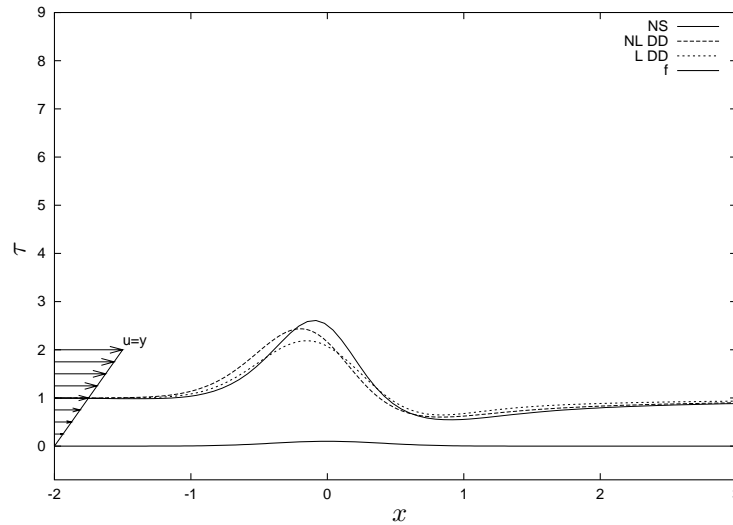


FIG. 8.1 – Comparing Navier-Stokes, non-linear full Double Deck equations, and linearised Double Deck equations, $\alpha = 1$, $Re = 1000$. The three descriptions are similar for $\alpha < 1.5$.

and $h_0/\lambda = 0.1$; on Figure 8.2, $\alpha = 2$ and $h_0/\lambda = 0.2$. We see that for small α , the three computations are nearly the same (if $\alpha < 1$ the three approaches are nearly equivalent, see Figure 8.1). The influence of non linearity appears for a reduced angle $\alpha > 1.5$. Incipient flow separation occurs at $\alpha \simeq 2.1$ for the non linear Double Deck equations, while using the linearized solutions gives a value of $\alpha \simeq 3.3$. On Figure 8.3 we plot this Double Deck asymptotic prediction ($\alpha \simeq 2.1$) and several full Navier Stokes computations. Changes in trend are due to changes in mesh which is more and more refined as Re increases and to the difficulty to find the incipient value. The Double Deck prediction of the height of separation is correct even for moderate values of Re , while the linearized Double Deck over predicts this value. This observation, and the paper by Bhattacharyya et al. [26], give us confidence in the linearized solution (8.11) for small bumps and show that even this simple linear solution gives a good enough prediction for flow separation. This means that at least the overall distribution of skin friction is good. Showing a strong increase of the skin friction before the crest, and a decrease of the skin friction which begins just before the crest. The increase of skin friction is responsible of the erosion of the bump, the decrease may lead to boundary layer separation.

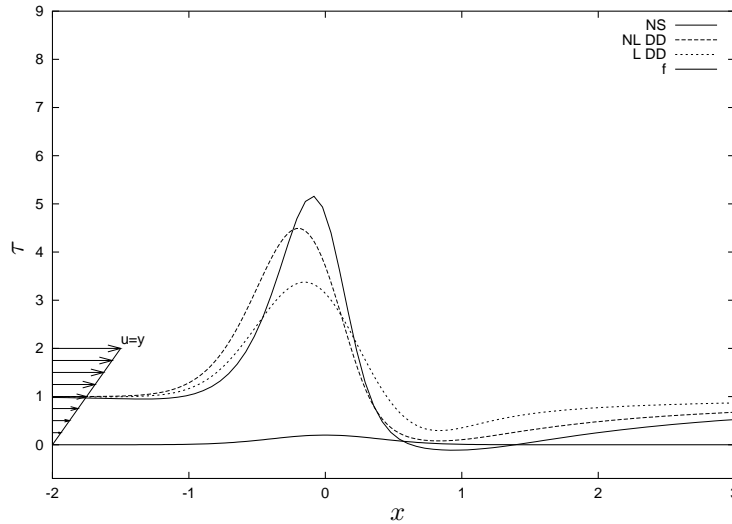


FIG. 8.2 – Comparing Navier Stokes, non linear full Double Deck equations, and linearised Double Deck equations, $\alpha = 2$, $Re = 1000$.

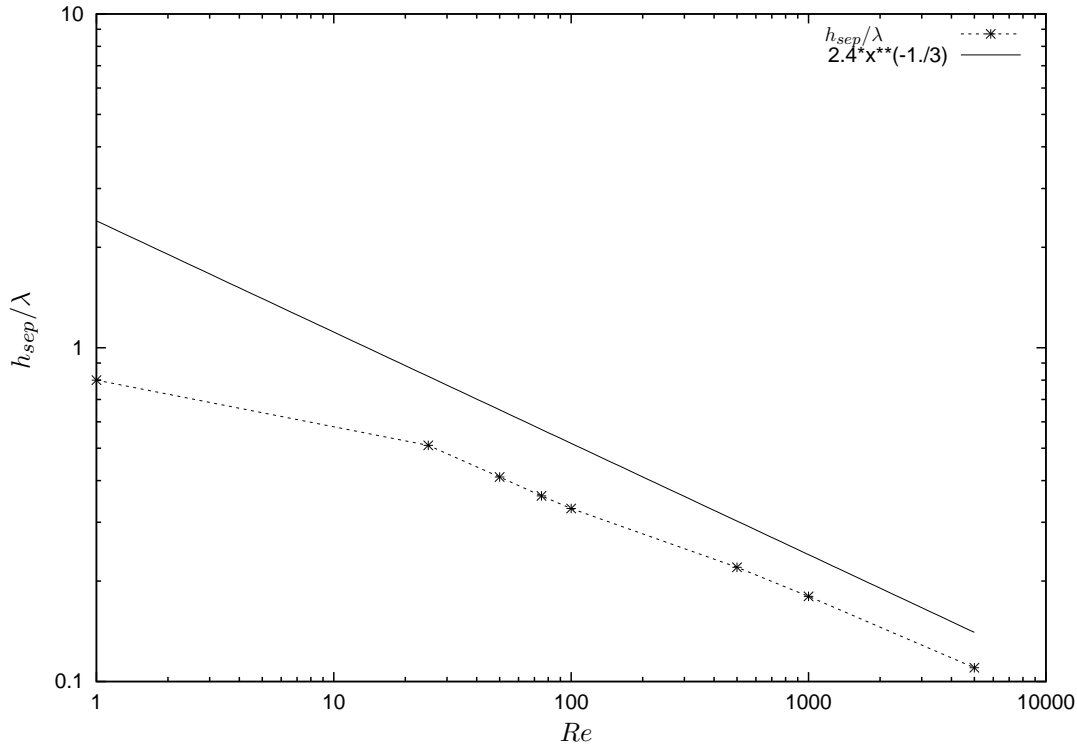


FIG. 8.3 – Value of the relative height of the gaussian bump at incipient separation. Comparing full numerical Navier-Stokes and the prediction from the non linear Double Deck equations. The asymptotic theories under predict the skin friction maximum.

8.4 The adimensionalised coupled problem

Now, we have the no-dimensional equations for the flow. For the sediments, we will write $q = Q_0 \bar{q}$ where $Q_0 = E(\mu U'_0)^{a+b}$, $\bar{\tau}_s = \theta_s(\rho_p - \rho)gd/(\mu U'_0)$ and use as time scale $T = (\frac{\nu \phi^3 \lambda^4}{U'_0 Q_0^3})$. This time scale is supposed to be slow compared to the flow time scale. Therefore, the final model problem consists in solving, for an initial given topography $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t} = 0)$, the flow (8.8-8.10) or the simplified formula (8.11) with mass conservation written without dimension, that is (8.6) (written with the scales of subsection

8.3.2.1):

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (8.12)$$

and the suitably adimensionalized version of (8.7) (with scales of subsection 8.3.2.1):

$$\bar{l}_s \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{q} + \bar{q} = \varpi(\bar{\tau} - \bar{\tau}_s), \quad (8.13)$$

where \bar{l}_s , and $\bar{\tau}_s$ are without dimensions. We suppose that all the parameters are of order one in order to have the maximum of phenomena modeled in the equations.

If no special constrain is given on \bar{f} , this means that the soil is fully erodible. It has been shown in Lagrée [86] and in Kouakou & Lagrée [81] that this system is linearly unstable (when (8.11) is used to solve the flow). It has also been shown, that if this system is solved for large time, starting with a given initial random small topography, and with a cyclic boundary condition (FFT resolution), then as time increases ripples appear. Those ripples grow and coarsen: they merge. Finally, there is only one single bump in the computational box which moves at a constant velocity without changing shape.

8.5 Displacement of a model dune, linear and non-linear Double Deck

8.5.1 The dune over a non erodible soil

In Kouakou & Lagrée [81], equations (8.11), (8.12), and (8.13) are solved starting from any initial profile, in the case of fully erodible soil, leading eventually to a single bump in the computational box. It does not "dig" under a final depth, and it seems to stay as it moves over a non-erodible soil. However, this is not equivalent to solve the movement of a single "dune" on a real non-erodible flat soil. Because the cyclic boundary condition perturbates the bump itself. This perturbation is due to the skin friction slowly going back to its non-perturbed value.

In order to solve the displacement of an initial model dune of erodible material with given "mass" (represented by $\bar{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\bar{x}, \bar{t} = 0) d\bar{x}$) over a non-erodible flat soil, we have to exclude erosion under the flat soil $\bar{y} = 0$, so that $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t})$ must always be positive. So, we have to be careful with the term $\bar{q}_s = \varpi(\bar{\tau} - \bar{\tau}_s)$ in order to avoid "digging" under $\bar{y} = 0$. In fact, as the scheme is explicit in time, at each position \bar{x} , we compute the value of \bar{q}_s (say $\bar{q}_s \text{ max}$) which gives $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t} + \Delta \bar{t}) = 0$. If $\bar{q}_s = \varpi(\bar{\tau} - \bar{\tau}_s) < \bar{q}_s \text{ max}$, the elevation is positive $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t} + \Delta \bar{t}) > 0$, which is fine. If $\bar{q}_s > \bar{q}_s \text{ max}$, then $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t} + \Delta \bar{t}) < 0$, which is excluded, and in this case we put $\bar{q}_s = \bar{q}_s \text{ max}$ so that $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t} + \Delta \bar{t}) = 0$. Physically, this means that we do not dig into the non erodible wall. Eventually, the domain must be large enough in order to prevent lee effects to influence the stoss side. We obtain the long time shape (\bar{f}_{fin}) of the dune and its velocity (\bar{c}), so that $\bar{f}(\bar{x}, \bar{t} \gg 1) = \bar{f}_{fin}(\bar{x} - \bar{c}\bar{t})$ and finally $\bar{q}_{fin} = \bar{c}\bar{f}_{fin}(\bar{x} - \bar{c}\bar{t})$. So, for a given material ($\bar{\tau}_s$, and \bar{l}_s), with a given mass, we obtain the velocity $\bar{c}(\bar{\tau}_s, \bar{l}_s, \bar{m})$ as an eigenvalue.

8.5.2 Example of time evolution: linear and non-linear Double Deck

For the initial bump, whether we choose either an arch of sine function or a gaussian function for instance is irrelevant because only the value of the "mass", defined as the integral of the function, is the pertinent parameter. As an illustrative example of the resolution of (8.8-8.10) and (8.12 - 8.13), we plot on Figure (8.4) top and middle two examples with same mass, but with different initial shape (with two different aspect ratio). The initial shape does not matter. The final shape is the same, the mass has not changed, but the history is different: one increases in height and decreases in length, the other does the opposite. Figure (8.4) bottom shows a case where no dune persists: if the mass is too small, the dune is washed and disappears.

In order to avoid that the "dune" goes out the domain, we add the term $-\bar{c} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}$ to the right hand side of (8.12) to move with the "dune". The value of the celerity \bar{c} is obtained from the value of the flux and the value of the bump at its crest: $\bar{c} = \bar{q}(\bar{x}_{max}) / \bar{f}_{max}$. The solution is now plotted in the moving frame so that every curve is centered in 0. After a while we obtain the final steady shape \bar{f}_{fin} . For example we first show a linear (8.11) example, we plot on Figure (8.5) top the final linearly solved bump obtained in a case where mass is conserved. The skin friction and the associated saturated flux are plotted, the actual flux \bar{q} is plotted too. A steady solution is obtained in the moving frame. We plot on Figure (8.5)

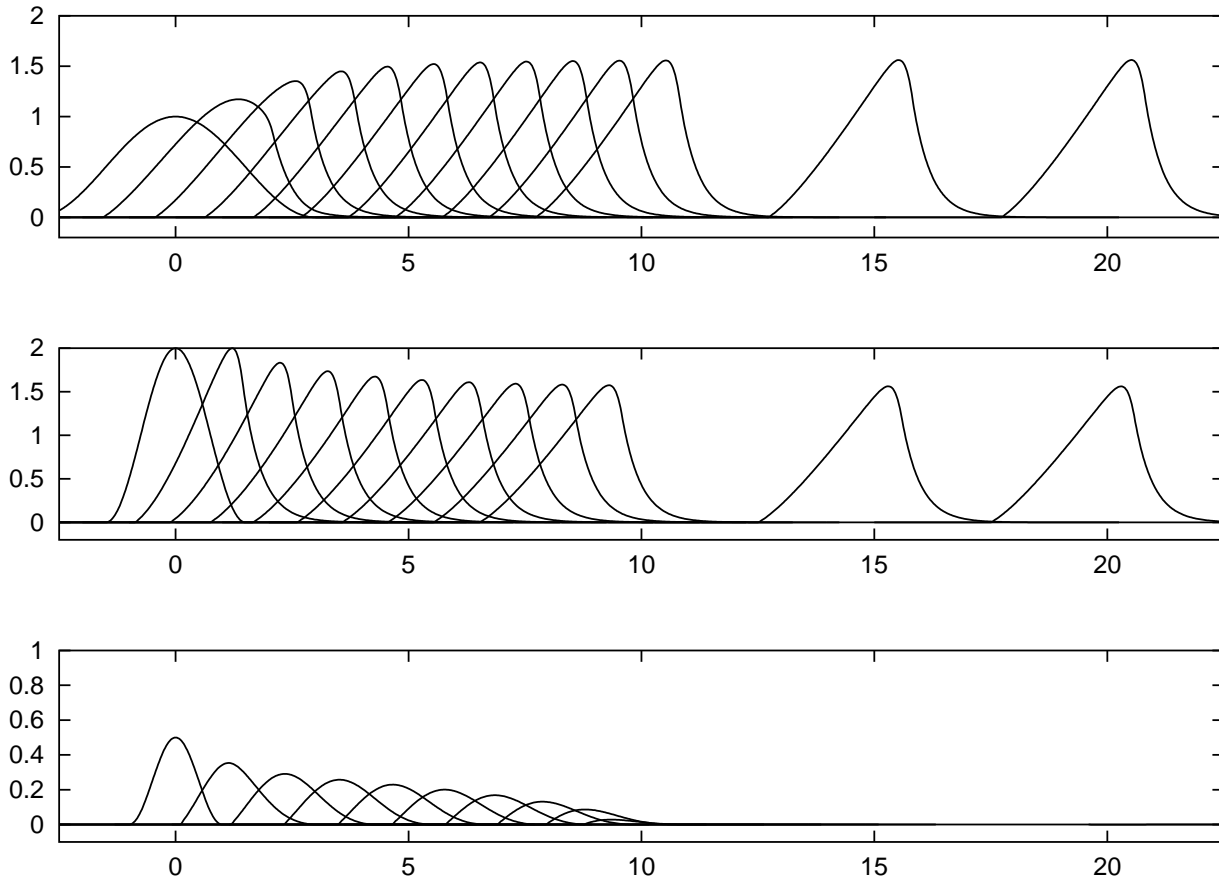


FIG. 8.4 – The non-linear Double Deck evolution of three "dunes", for $\bar{t} = 0, 1, 2, \dots, 10$, $\bar{t} = 15$, and $\bar{t} = 20$. Two upper curves: $\bar{m} = 3$ is conserved, $\bar{\tau}_s = 0.9$, and $1/\bar{l}_s = 2.5$, but two different initial shapes leading to the same final solution. Lower curve: $\bar{m} = 0.5$; when the initial mass is too small, the "dune" is washed, it loses mass.

bottom a linearly solved bump (at time $\bar{t} = 1$), in this case the mass is too small, the dune loses mass. There is no steady solution. The flux of mass is not zero at the end of the model dune.

We plot on Figure (8.6) the final bump obtained for various masses. The linear resolution and the non-linear resolution are plotted, *i.e.* we compare solution of (8.11) to the solution of (8.8-8.10) for the flow. We observe that the non linearity flattens the stoss side, while the lee-side remains nearly the same. The velocity of the dune is larger in the non linear case than in the linear case. The effect of non-linearity is the effective computation of the boundary layer separation. This separation occurs here for $\bar{m} > 4.9$ (when $\bar{\tau}_s = 0.9$, $1/\bar{l}_s = 2.5$). We plot on Figure (8.7) an example of non linear computation of a dune with $\bar{m} = 6$ with boundary layer separation: we find that there is a separation bubble in the lee side ($\bar{\tau} < 0$). The same case, but linear, is displayed as well. The size of the separation bulb is under predicted by the linearized formula.

It is then observed that possible model dunes are of rather large mass and of length larger than one. So we will try in the next section to fix the mass of the dune and find a self-similarity in the equations.

8.5.3 Self Similarity: linearized Double Deck

Given any positive values L, F, T , and Q , we rescale the variables through: $\bar{x} = Lx^*$, $\bar{f} = Ff^*$, $\bar{\tau} = \Gamma\tau^*$, $\bar{t} = Tt^*$, and $\bar{q} = Qq^*$. It is then possible to obtain a selfsimilar solution of the system (8.11), (8.12), and (8.13). This complexity of the exploration of the parameters is then reduced. We have $F = L^{1/3}$ so that the skin friction is invariant (due to the fact that the threshold is given):

$$\bar{\tau} = 1 + L^{-1/3} L^{1/3} T F^{-1} [(3Ai(0))(-ik^*)^{1/3} T F[f^*]] = \tau^*.$$

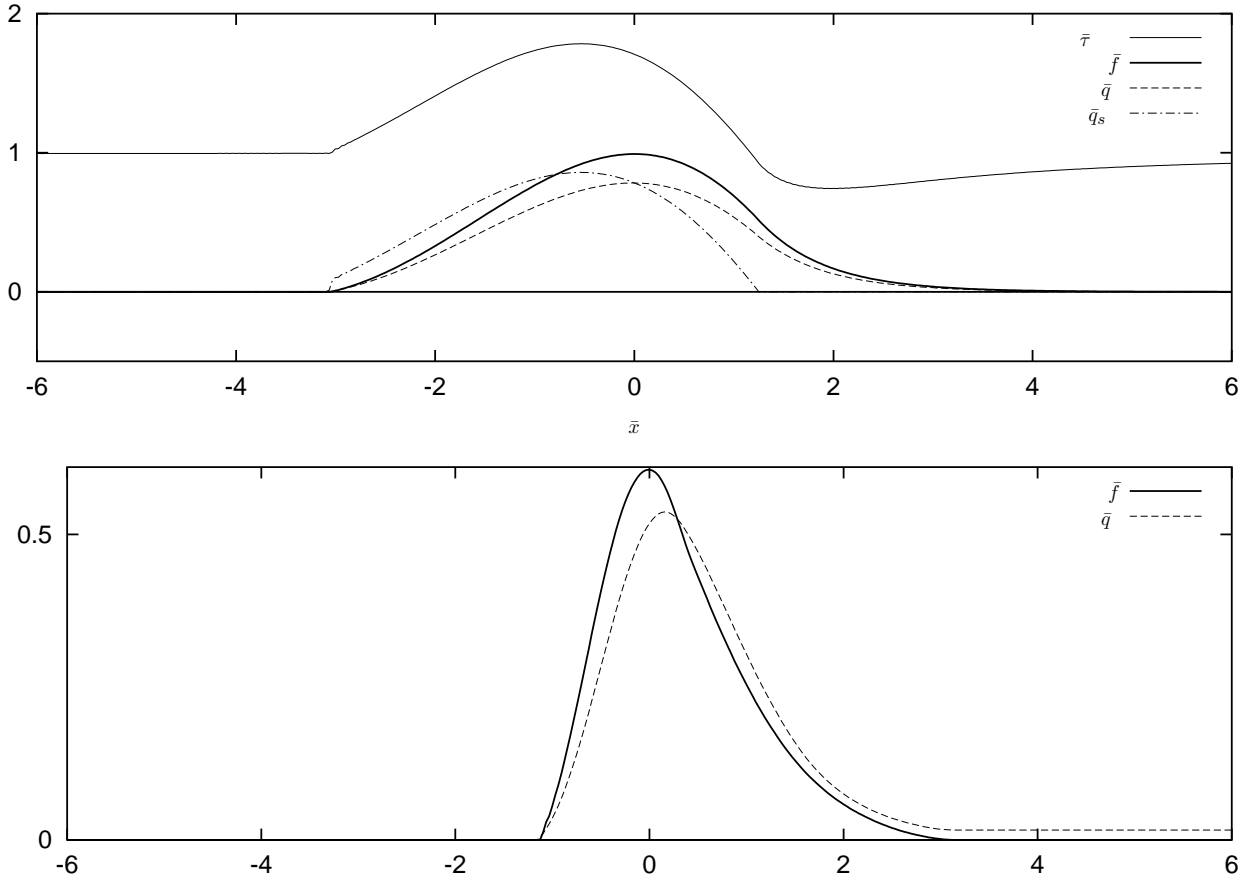


FIG. 8.5 – Two linear Double Deck examples of model dune in the moving frame, $\bar{\tau}_s = 0.9$, and $1/\bar{l}_s = 1.5$. On the upper curve $\bar{m} = 3$ is conserved, plot of the skin friction, associated saturated flux and value of the actual flux. On the lower curve, $\bar{m} = 1$, plot of the skin friction, and value of the flux \bar{q} . The non zero value of \bar{q} after the end of the model dune shows that there is loss of mass.

Upon inspection, the final rescaling: $\bar{x} = \bar{m}^{3/4}x^*$, $\bar{f} = \bar{m}^{1/4}f^*$, $\bar{\tau} = \tau^*$, $\bar{t} = \bar{m}t^*$, and $\bar{q} = q^*$ gives the final unit mass selfsimilar problem:

$$(l_s^*) \frac{\partial q^*}{\partial x^*} + q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s^*)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*}, \quad \int f^* dx^* = 1.$$

Hence the sole parameters are: $(l_s^*)^{-1} = (\bar{l}_s^{-1}\bar{m}^{3/4})$ and: τ_s^* (which is exactly $\bar{\tau}_s$). The result is the final bump shape and its velocity c^* , which is such that $c^*f^* = q^*$.

On Figure 8.8 we plotted the velocities of the "dunes" c^* for several values of l_s^* and τ_s^* . We find that the "dunes" do not always exist: if l_s^* is too large (depending on the threshold value), there is no steady solution. For example, if $(\bar{l}_s^*)^{-1} < 3.8$ for $\tau_s^* = 0.9$ (or if $(l_s^*)^{-1} < 4.9$ for $\tau_s^* = 0.8$) there is no steady solution of constant mass, and the initial given dune loses materials and disappears. If the threshold is decreased, then the minimal mass is increased.

On Figure 8.9 we plot the final unit mass model dune for several values of l_s^* (those curves are the rescaled dunes for non unit mass cases too). We see that the smaller l_s^* is, the higher and thinner the bump is. It does not seem possible to have a "dune" with $l_s^* = 0$, i.e. with $q^* = \tau^*$.

So, at fixed $\bar{\tau}_s$, for a given mass \bar{m} , and a given saturation length \bar{l}_s , the curve of Figure 8.8 gives:

$$\frac{1}{c} = \bar{m}^{1/4} c^* ((\bar{l}_s^{-1}\bar{m}^{3/4}), \bar{\tau}_s). \quad (8.14)$$

It is interesting to note that this model is different from the model proposed by Andreotti et al. [9], where the skin friction involves the Hilbert integral corresponding to the inviscid perturbation of the flow

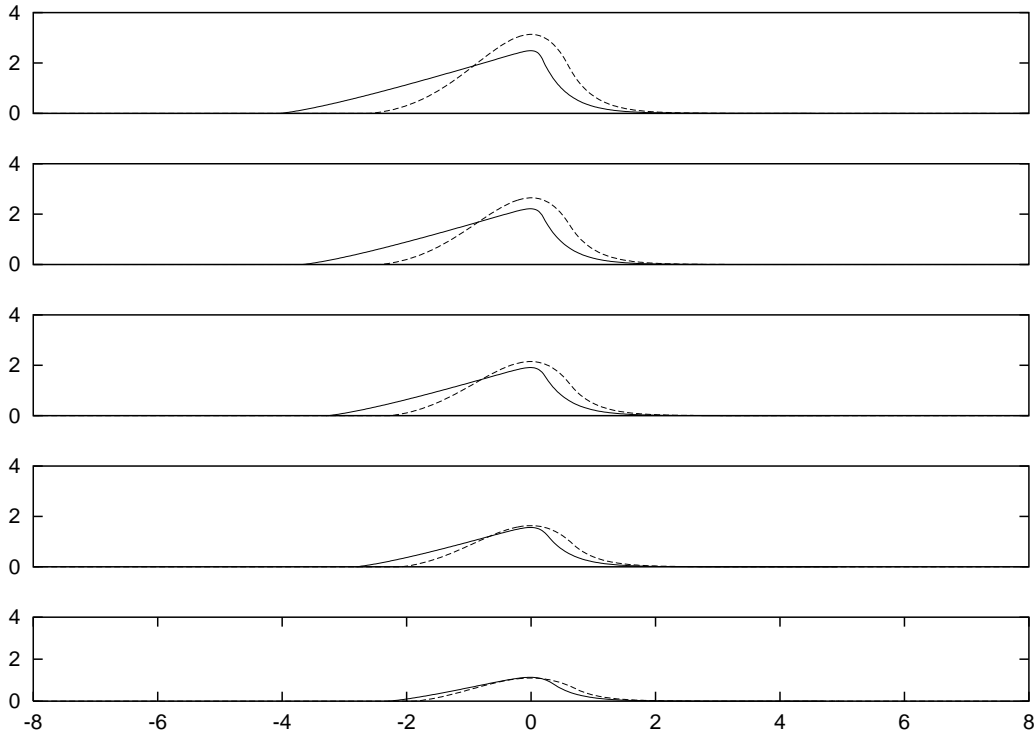


FIG. 8.6 – The non-linear final moving "dune" solution $f_{fin}(x - ct)$ is represented with solid lines, the linear solution is represented with dashed lines, and $\tau_s = 0.9$, $1/l_s = 2.5$, $m = 2, 3, 4, 5$ (bottom curve to top curve).

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'}{x-\xi} d\xi$. In this case the rescaling is $x = m^{1/2}x^*$, $f = m^{1/2}f^*$, $\tau = \tau^*$, $t = mt^*$, and $q = q^*$. So that $1/c$ is proportional to $m^{1/2}$. This relation is well supported by real dunes. This dependance is then due to the specific skin friction expression (linked here to the inviscid perturbation of the flow).

8.6 Further possible developments

A first possibility would be to explore another classical case of the $\bar{q}(\bar{\tau})$ relation. A slope correction for the threshold value (Bagnold [13]) may be introduced to take into account the fact that it is more difficult to move the sediments uphill than downhill. The adimensionalized flux is then supposed to be always saturated:

$$\bar{q} = \varpi(\bar{\tau} - \bar{\tau}_s - \bar{\Lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}), \quad (8.15)$$

where we may estimate the gravity effect as $\bar{\Lambda} = \theta_s(\rho_p - \rho)gdRe^{-1/3}/\tan(\phi_d)$, with $\tan(\phi_d)$ the static friction angle. The system (8.11), (8.12), and (8.15) also admits a selfsimilar solution. This property introduces $\bar{\Lambda}\bar{m}^{-1/2}$ as sole parameter in (8.15): $q^* = \varpi(\tau^* - \tau_s^* - \bar{\Lambda}\bar{m}^{-1/2}\frac{\partial f^*}{\partial x^*})$. We would then obtain the velocity of the "dunes" as:

$$\frac{1}{\bar{c}} = \bar{m}^{1/4}c^*((\bar{\Lambda}\bar{m}^{-1/2}), \bar{\tau}_s). \quad (8.16)$$

An other possibility is to construct the 3D counterpart of this problem. After some algebra (in the spirit of Smith & Gajjar [132]), the skin friction in the Fourier space is found to be given by:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_x &= 1 + TF^{-1}[3(-i\bar{k}_x)^{1/3}Ai(0)a(\bar{k}_x, \bar{k}_z)TF[\bar{f}]], \\ \bar{\tau}_z &= TF^{-1}[3((-i\bar{k}_x)^{1/3}Ai(0))\frac{\bar{k}_x b(\bar{k}_x, \bar{k}_z)}{\bar{k}_z}TF[\bar{f}]], \\ b(\bar{k}_x, \bar{k}_z) &= \frac{(-3Ai'(0))\bar{k}_z^2}{9Ai(0)^2(\bar{k}_x^2 + \bar{k}_z^2)} \quad a = (1 - b(\bar{k}_x, \bar{k}_z)). \end{aligned}$$

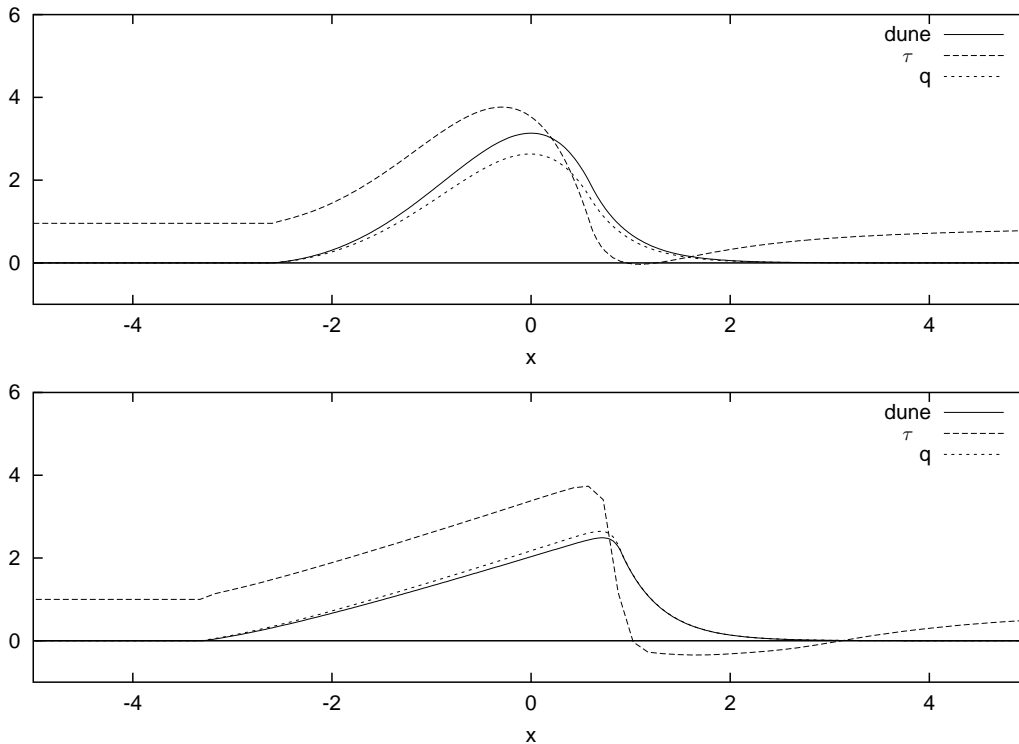


FIG. 8.7 – An example of a non-linear final moving “dune” solution ($\tau_s = 0.9$, $1/l_s = 2.5$, $m = 6$). The weather side is nearly flat. The skin friction is represented; it is negative in the lee side: there is boundary layer separation.

The problem is then to extend to 3D flows the flux/ shear relation, this has been proposed by Hersen et al. [71] and [70].

Finally, we think that a more realistic way to explore is to solve the turbulent counterpart of our problem. This is the case of a dune in a thick turbulent boundary layer. In that case, a mixing length must be introduced in the diffusive term in (8.8), so that $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{u}$ is changed in its counterpart $\frac{\partial}{\partial y} \{ (\nu + \ell^2 \|\frac{\partial u}{\partial y}\|) \frac{\partial u}{\partial y} \}$ (written with dimensions). Here ℓ is for example the Cebeci Smith algebraic viscosity (Cebeci & Cousteix [139]). The boundary condition upstream is found through the matching with a logarithmic boundary layer.

If needed, we may introduce an avalanche effect, preventing the slope of the “dune” to become larger than the avalanche angle.

8.7 Conclusion

We proposed a simplified model for the movement of a dune over a rigid soil in a pure shear flow. The flow is supposed steady and bidimensional. Perturbations remain confined in a viscous layer near the soil. Comparisons between the linearized asymptotic solution, the full asymptotic relation, and a full Navier-Stokes resolution were drawn in order to justify the flow simplifications. We presented examples of displacements of dunes with linearized asymptotic solution, and the full asymptotic relation. We computed the boundary layer separated bubble.

We also obtained a self-similar problem, predicting that the velocity of the model dune scales with the inverse the power 1/4 of the mass, while the function in the prefactor is itself a function of the mass. We observed that if the dune is too small, then it disappears; that at fixed mass, an increase in the saturation length gives the same result; and finally, that at constant mass and constant saturation length, a decrease in the threshold value has the same consequence.

These results are for our “model dune” which is a bit unrealistic. It is nevertheless a first step to explain small water dunes in experimental setups. A lot of things will change for real dunes, nevertheless, the global method and some conclusions will be the same. For model and real dune, there exists a

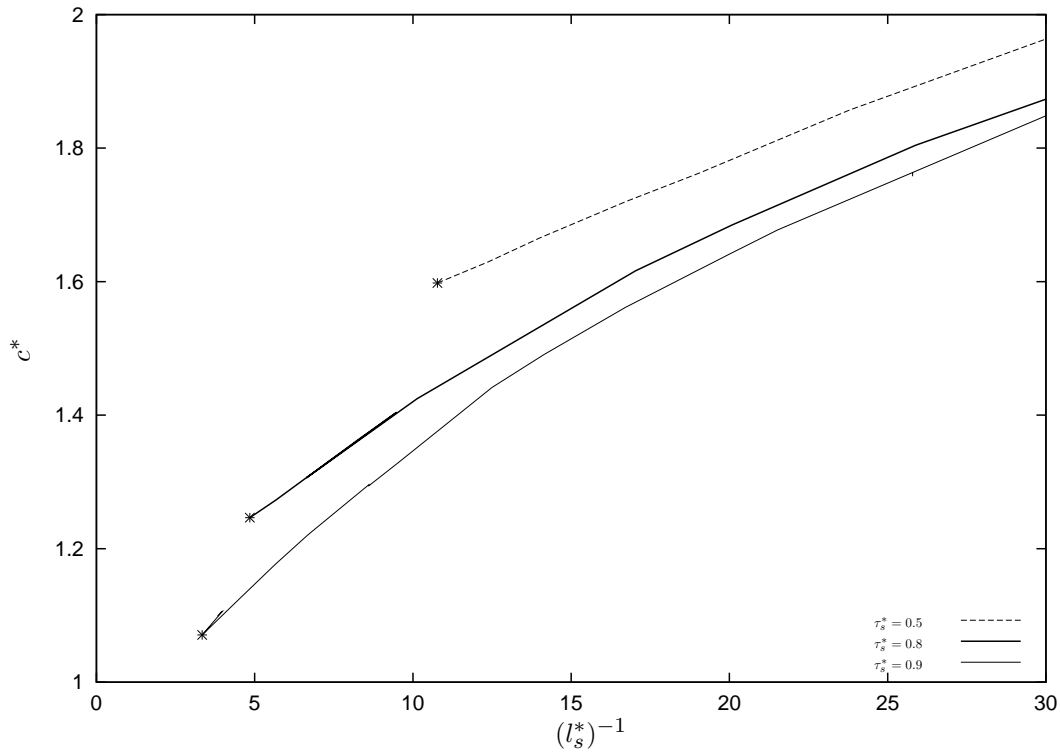


FIG. 8.8 – The selfsimilar relation between the mass \bar{m} , the inverse of the saturation length $l_s^* = \bar{l}_s \bar{m}^{-3/4}$, and the velocity $c^* = \bar{c} \bar{m}^{1/4}$ of the "dune" for three values of the threshold: $\tau_s^* = 0.9, 0.8,$ and 0.5 . For a fixed threshold, there is a maximal value of the saturation length l_s^* over which there is no solution.

minimal dune size and a special selfsimilarity. To be more realistic, first, one has to introduce turbulence as suggested, and a ideal fluid layer, this will allow to recover the velocity in the inverse square root of the mass. It is likely that for both real and model dune the flattening of the stoss side is due to non linear convective effects. Finally, we computed cases with flow separation and compared linearized and non-linearized cases which was not done before.

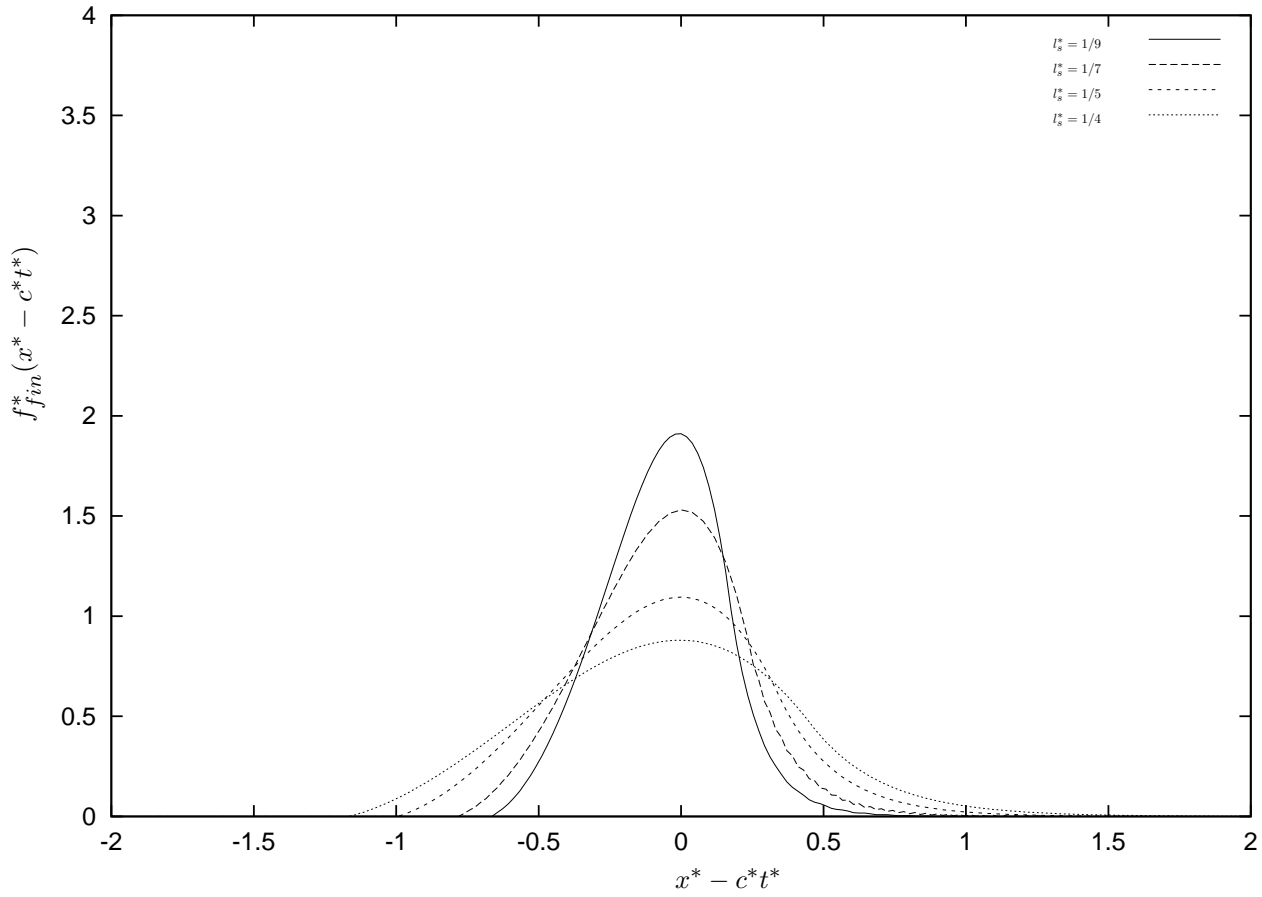


FIG. 8.9 – "Dunes" of unit mass with $l_s^* = 1/4, 1/5, 1/7, 1/9$ ($\tau_s^* = 0.9$). The smaller l_s^* is, the thinner and higher the "dune" is. For $l_s^* = 0$ (i.e. $q^* = \tau^*$), there is no dune.

Écoulements de surface : avalanches de sable

9.1 Introduction

Jusqu'à présent nous n'avons pas examiné en détail la couche de grains qui se déplace. C'est l'objet de ce chapitre, mais nous resterons au cas sec.

Dans les théories des écoulements de surface ou des empilements de grains, différents modèles existent et sont en général fondés sur les mêmes concepts de superpositions de tas : une couche mobile roulant au dessus d'une autre supposée fixe. Nous ne nous démarquerons pas ici de ce concept général. Nous rappelons ainsi le modèle de BCRE ([30]) qui part d'une vision "intuitive" ou phénoménologique de l'écoulement de la couche mobile tandis que d'autres modèles hydrodynamiques ([51]) sont fondés sur des équations moyennées dites de "Saint Venant". Nous ferons ici une présentation unifiée fondée sur les lois générales de conservation, ne faisant intervenir la modélisation qu'au dernier instant.

Partant de l'équation de transport d'une grandeur dans un volume dépendant du temps dont le contour a un mouvement propre, nous écrivons une équation générale d'un milieu continu dans une couche mobile sur un autre qui lui est supposé fixe.

Nous l'adaptions au cas d'un milieu granulaire et nous écrivons l'équation dans le cas d'une avalanche simple présentée comme une couche mince. En effet il s'est avéré dans la pratique (Caps (2002)) que la couche en mouvement lors d'une avalanche est d'environ dix diamètres de grains ayant des tailles de l'ordre du micromètre. En se plaçant dans les hypothèses de couche mince et d'avalanche simple, on utilise la modélisation simple $q = q(R)$ (où la quantité de matière dans la couche mobile est uniquement fonction de l'épaisseur de cette couche), et nous étudions l'évolution de l'épaisseur de la couche mobile (R).

Notre modèle est ensuite fermé par une modélisation "assez convenable" de l'énergie et du coefficient de frottement et nous présentons une résolution numérique montrant la succession des "actes" (à une différence près) obtenus par Bouteux *et coll.* [31] (1998).

La phase suivante, que nous ne traiterons pas, consiste à coupler tas de grains avec un écoulement d'eau pour simuler une avalanche causée par un écoulement hydrodynamique, ce qui permettrait d'affiner la compréhension de l'évolution d'un fond sous écoulement hydrodynamique.

9.1.1 Rappels

L'idée étant d'identifier les équations que nous allons établir (9.54) à celles de BRdG ([11]) dont la version initiale est celle connue sous le nom de BCRE [[30]].

Les premières avancées des travaux pour comprendre la physique des écoulements granulaires étaient expérimentales ([14]). Ces expériences étaient pour la plupart destinées à comprendre les propriétés physiques du transport du sable dans le désert puis le transport de sable dans l'eau [17]. Par la suite sous l'impulsion des applications industrielles (ciment, blé, farine, dans un silo, ou simplement leur tas) ces

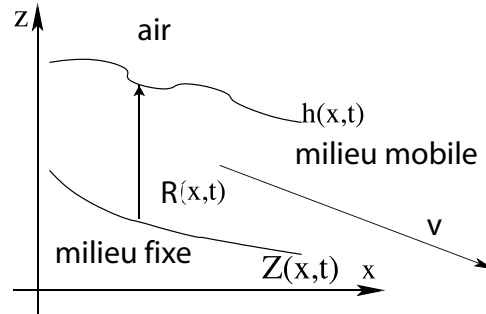


FIG. 9.1 – Par définition, h est la surface supérieure visible, Z est la surface en dessous de laquelle il n’y a pas de mouvement et R est l’épaisseur de grains roulants.

études allaient connaître un essor plus formel donc théorique, d’abord par Savage et Hutter [124], puis avec le modèle BCRE dont les insuffisances ont été corrigées par les modèles BRdG et DAD [51].

Par écoulements granulaires, il faut entendre écoulement superficiels (avalanche sur un tas de sable, ou éboulis sur un flanc de montagne) pour lesquels l’épaisseur du matériau en mouvement est faible devant ses dimensions longitudinales. A contrario, les écoulements en masse dont les dimensions sont toutes du même ordre de grandeur restent jusqu’ici mal compris.

Le modèle hydrodynamique de Savage et Hutter [124] a pour inconvénient de pré-déterminer un fond pour l’avalanche dont le matériau est distinct de celui en mouvement. Il ne tient pas compte du cas où il y aurait amplification de l’avalanche par une accrétion du matériau sous-jacent.

Le modèle BCRE est fondé sur l’hypothèse que l’avalanche est divisée en deux parties (statique et mobile) régies par deux équations d’évolution, couplées par un terme d’échange. Ce modèle phénoménologique vérifie la conservation de la matière et ne semblait pas *a priori* vérifier la conservation de la quantité de mouvement. Grâce une étude comparative de BCRE et des modèles hydrodynamiques de Douady et coll. DAD, Aradian [10] montre que sous certaines hypothèses, le modèle BCRE saturé (BRdG) conserve la quantité de mouvement.

Faisons une lecture simplifiées de cette étude d’Aradian (thèse [10], on consultera aussi le livre de Duran [53]).

9.1.2 Rappels des équations BCRE et DAD

CRE

Le modèle d’avalanche établi en 1994 par Bouchaud et coll. [30] propose, à partir d’une approche phénoménologique, une base pour décrire les écoulements de surface selon le principe que le milieu granulaire est constitué d’une partie statique dont l’interface est $Z(x,t)$ et d’une partie mobile repérée, elle par, $h(x,t)$. L’évolution du milieu granulaire (siège d’un écoulement de surface) est due :

- d’une part aux grains de la phase mobile qui roulent vers le bas sous l’effet de leur poids et
- d’autre part aux collisions entre grains roulants et grains au repos en dessous, provoquant des échanges entre les deux phases.

L’épaisseur de la couche qui roule est notée $R(x,t) = h(x,t) - Z(x,t)$, et sa variation est traduite par l’équation :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [-Rv + D \frac{\partial R}{\partial x}] + \mathcal{E}(R, \theta) \quad (9.1)$$

dans laquelle le terme $\partial(Rv)/\partial x$ décrit la convection (roulement) des grains vers le bas. La valeur de la vitesse de convection (v) est déterminée par un équilibre entre le travail des forces de gravité, et l’énergie perdue lors des collisions inélastiques et du frottement entre grains à l’interface. Dans le cas de couche mince (lorsque R ne dépasse pas quelques diamètres de grains, environs deux à quatre diamètres de grains), les variations de v en fonction de la profondeur de la couche roulante ne sont pas prises en compte par BCRE, v dépend *a priori* de la pente locale $\theta(x,t)$. Dans le modèle BCRE et la plupart des travaux afférents, θ est proche de l’angle de repos (θ_r), de sorte que cette dépendance est négligée. Ainsi v est constante et est égale à la vitesse moyenne des particules en mouvement.

Pour améliorer cette approximation et rendre compte des fluctuations de vitesse des grains en mouvement, le terme de diffusion ($\partial/\partial x(D \partial R/\partial x)$) est introduit. Il rend aussi compte des effets non-locaux dus aux faibles déplacements des chaînes de contact (du fait des collisions entre grains en mouvement et ceux dans la couche statique).

Enfin $\mathcal{E}(R, \theta)$ est le terme d'échanges entre phases. Par convention $\mathcal{E}(R, \theta) > 0$ quand les particules quittent la phase statique. La conservation du nombre de grains permet d'écrire l'équation d'évolution de la hauteur de la phase statique

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\mathcal{E}(R, \theta). \quad (9.2)$$

Les échanges entre la phase statique et la phase roulante sont de deux types:

- un phénomène d'accrétion (les grains qui roulent peuvent être capturés par la phase statique, en tombant dans un trou) lié à la probabilité d'obtenir une capture (C). L'accrétion est favorisée par de faibles pentes d'où ($C(\theta)$).

- un phénomène d'érosion (les grains immobiles dans la phase statique peuvent être délogés suite aux chocs avec les grains roulants, et devenir eux-mêmes mobiles) lié à la probabilité d'obtenir une amplification (A). L'érosion est quand elle favorisée par de fortes pentes ($A(\theta)$).

Des dépendances angulaires de A et de C , on s'aperçoit aisément qu'il existe un angle neutre θ_n , pour lequel les deux mécanismes s'annulent globalement (voir Fig.9.1.2,b). La surface d'un tas est caractérisée par deux angles, l'angle de repos θ_r et l'angle maximal θ_{max} (avec $\theta_r < \theta_{max}$). Lorsque l'angle de la surface θ est inférieur à θ_r , la surface est stable vis à vis de toute perturbation. Au delà de l'angle maximal θ_{max} , la surface devient instable et engendre spontanément une avalanche qui la ramène à l'angle θ_r . Il existe une métastabilité pour $\theta_r < \theta < \theta_{max}$. Les échanges sont proportionnels au nombre

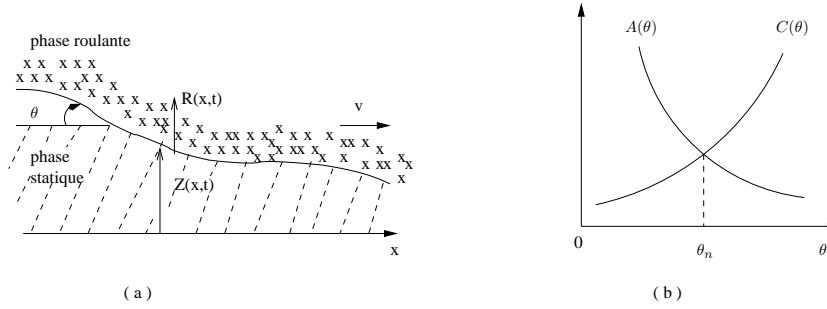


FIG. 9.2 - (a): description d'une avalanche selon BCRE. (b): Dépendances angulaires des mécanisme d'accrétion ($A(\theta)$) et d'érosion ($C(\theta)$).

de grains roulants, donc la quantité de matières mises en mouvement par érosion et/ou accrétion est proportionnelle localement à l'épaisseur de la couche roulante ($R(x,t)$):

$$\mathcal{E}(R, \theta) = R(A(\theta) - C(\theta)). \quad (9.3)$$

Dans la mesure où la pente locale $tg\theta \cong \theta(x,t) = -\partial Z/\partial x$ est proche de θ_n (angle neutre, voir figure Fig.9.1.2, b) on peut linéariser en posant $\gamma = A'(\theta_n) - C'(\theta_n)$

$$\mathcal{E}(R, \theta) = R\gamma(\theta - \theta_n) \quad (9.4)$$

γ est une fréquence caractéristique de collision des grains mobiles avec la phase statique. Le nombre de collisions dans la couche roulante d'épaisseur R est proportionnel à γR . Corrigé d'un terme de courbure de la pente locale, proportionnel à une constante κ , qui signifie que les creux se remplissent et que les bosses sont lissées, (9.4) se réécrit:

$$\mathcal{E}(R, \theta) = R\left[\gamma(\theta - \theta_n) + \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \quad (9.5)$$

Finalement les équations de BCRE se résument à :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -v \frac{\partial R}{\partial x} + D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -R\left[\gamma(\theta - \theta_n) + \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \quad (9.7)$$

v , γ , D étant des constantes.

Pour garder le sens physique de R (qui est que $R \geq 0$), lorsque $R < 0$ dans la résolution mathématique,

dans un domaine de l'espace (cela signifiant que l'écoulement de surface s'est interrompu dans ce domaine), l'équation (9.7) doit être remplacée par $\partial Z/\partial t = 0$ en chaque point où $R = 0$.

RdG

Boutreux et coll. [31] simplifient (9.6)-(9.7) en omettant le terme de diffusion et de courbure de pente locale sur la base dimensionnelle. On mesure toute les grandeurs par les dimensions caractéristiques des grains, à savoir leur diamètre d , leur masse m et de la gravité g . Notant L la dimension longitudinale (longueur du talus ou la base du tas de grains), R et Z sont mesurés par d , x par L , et le temps par d/v . La vitesse moyenne des grains en mouvement est prise constante par BCRE. Nous pouvons l'approximer par la vitesse moyenne des grains dans leur "chute libre" de la couche dont elle font partie à la couche sous-jacente (chute due aux collisions). Ainsi l'ordre de grandeur de la vitesse est

$$[v^2] \equiv g d, \text{ donc } [\gamma] \equiv \left(\frac{g}{d}\right)^{1/2} \simeq \frac{v}{d} \quad (9.8)$$

$1/\gamma \simeq d/v$ est le temps mis par un grain roulant à la vitesse v pour avancer d'une distance égale à son diamètre: γ correspond donc à la fréquence de collisions des particules en mouvement avec la structure granulaire de la phase statique comme cela a été dit précédemment. En pratique on note $\tilde{d} = v/\gamma$. Mais l'analyse dimensionnelle montre que \tilde{d} est très proche de d , diamètre des particules.

Enfin la constante de diffusion et le coefficient de courbure de la pente locale sont estimés selon :

$$[D] \equiv v d \quad [\kappa] \equiv [v] \quad (9.9)$$

On remarque que la masse n'intervient pas dans le processus. Pour Boutreux et coll. [31] le terme de diffusion (proportionnel à D) serait "non-hydrodynamique" au sens où c'est un gradient d'ordre supérieur à l'ordre le plus bas, celui du terme de convection en v .

$$D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \equiv v d \frac{R}{L^2} \text{ et } v \frac{\partial R}{\partial x} \equiv v \frac{R}{L}. \quad (9.10)$$

Le rapport entre la diffusion et la convection donnant $d/L \ll 1$, *a priori* ils proposent de négliger le terme de diffusion. De même pour la courbure, on a :

$$\kappa R \frac{\partial \theta}{\partial x} \equiv v R \frac{(\theta - \theta_n)}{L} \quad (9.11)$$

de telle sorte que le rapport entre le terme de courbure et le terme proportionnel à γ donne dimensionnellement $\frac{d}{L} \ll 1$, d'où ils établissent que :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -v_{up} (\theta - \theta_n) \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_d \frac{\partial R}{\partial x} + v_{up} (\theta - \theta_n) \quad (9.13)$$

v_d est la vitesse des grains dans leur mouvement descendant (lors du mouvement de déposition) et $v_{up} = \gamma R$, est la vitesse des grains dans leur phase d'ascendance (en général lorsqu'ils sont érodés) amplifiant R . L'idée consiste à simplifier cette vitesse en disant que si R est assez grand, v_{up} devient constant. Les équations BRdG (9.13) sont ainsi linéaires en Z et R . La solution est alors formulée comme un mouvement d'une onde ascendante et descendante.

En posant la hauteur totale égale à $h(x,t) = Z(x,t) + R(x,t)$, la quantité de matière est globalement conservée (première équation de (9.13)). Mais il en demeure moins évident de la conservation de la quantité de mouvement par la deuxième équation de (9.13).

Dans le modèle phénoménologique BCRE, v_d est supposée constant ce qui n'est pas toujours vérifié expérimentalement dans les milieux granulaires.

Aussi la donnée de v_{up} et θ_n est empirique, et n'émane pas directement des quantités fondamentales qui décrivent le système.

Pour lever ces insuffisances, Douady et coll. [51] présentent un modèle basé sur les équations hydrodynamiques de Saint-Venant.

AD

L'approche hydrodynamique utilisée par Douady et coll. [51] est différente. Elle est fondée sur des équations de conservation où toutes les quantités sont intégrées et moyennées sur l'épaisseur totale de l'écoulement (équations dites de Saint-Venant). Notre démarche doit beaucoup à leur étude. Nous retrouvons ainsi naturellement leurs équations.

Nous présentons donc maintenant la technique de moyenne suivant l'épaisseur de l'écoulement.

9.2 Equations de conservation de la masse et de quantité de mouvement

Nous écrivons dans cette partie l'équation de conservation de la masse et de quantité de mouvement d'un milieu continu contenu dans une couche supposée mobile sur un milieu continu immobile. Commençons par un rappel sur les équations de bilan et le "théorème" de transport.

Nous considérons le volume $V(t)$, représenté sur la figure Fig. 9.3, qui est une tranche d'épaisseur dx et de longueur L en y . Sa frontière, notée $S(t)$, dans le plan (x,z) , est constituée d'un ensemble de trois surfaces fixes $x, x+dx$ et $z=0$ ainsi que d'une surface mobile $h(x,t)$. Nous resterons en 2-D en disant que

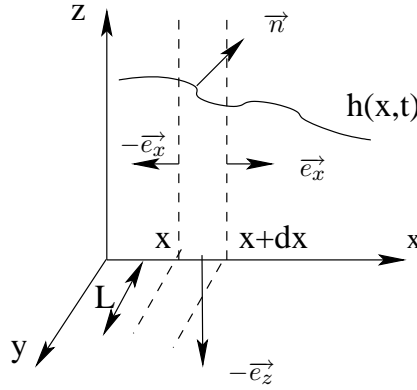


FIG. 9.3 – *Domaine volumique $V(t)$ représenté dans le plan (x,z) par la tranche d'épaisseur dx limitée par $h(x,t)$*

les champs $F(\vec{x},t)$ auxquels on s'intéresse ne dépendent pas de y et que par conséquent $F = F(x,z,t)$ (cela fait partie des hypothèses de départ).

La variation d'une quantité $F(r,t)$ dans le domaine volumique $V(t)$ de frontière $S(t)$ est (en notant $r = (x,z)$):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} F(r,t) dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial F(r,t)}{\partial t} + \nabla \cdot (F(r,t) \vec{v}) dV + \iint_{S(t)} F(r,t) (\vec{V}_s - \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

où \vec{n} est la normale extérieure à la surface $S(t)$ entourant le volume $V(t)$ et \vec{V}_s la vitesse à laquelle se déplace (se déforme) cette surface; \vec{v} est le champ de vitesse d'un milieu continu qui remplit $V(t)$. En utilisant les formes locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement nous pouvons établir la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

9.2.1 Conservation de la masse

La forme locale de la conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (9.15)$$

Nous appliquons la relation (9.15) à (9.14) et nous calculons séparément les deux membres de l'équation (9.14) en prenant $F(x,t) = \rho(x,t)$. Le premier membre devient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = L dx \frac{d}{dt} \int_0^h \rho(x,z,t) dz. \quad (9.16)$$

Le second membre de l'équation (9.14) devient :

$$\begin{aligned} \iint_{S(t)} \rho (\vec{V}_s - \vec{v}) \cdot \vec{n} dS &= L \int_0^h \rho (-\vec{v}) \cdot (-\vec{e}_x) dz + L \int_0^h \rho (-\vec{v}) \cdot \vec{e}_x dz \\ &\quad + L \rho (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} \frac{dx}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} + L \rho (\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot (-\vec{e}_z) dx \end{aligned} \quad (9.17)$$

où \vec{V}_h est la vitesse de déplacement de la surface supérieure et \vec{V}_0 la vitesse (nulle) de la surface inférieure ($z = 0$). Nous gardons \vec{V}_0 , même si elle est nulle, pour mieux faire ressortir la structure du résultat que nous exploiterons plus tard quand nous tiendrons compte, en plus de h d'une surface Z limitant la zone mobile/fixe. Le regroupement des deux membres (9.16) et (9.17), conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_x dz = \left[\frac{\rho(\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h_-} - [\rho(\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot \vec{e}_z]_{0_+}. \quad (9.18)$$

Les notations h_- et 0_- indiquent que l'on est au voisinage "interne" respectivement des surfaces $z = h(x,t)$ et $z = 0$.

Il s'agit de définir les conditions aux limites pour la conservation de la masse (9.18). Si le fond de l'écoulement ($z = 0$) est immobile, et qu'il est imperméable au matériau qui se trouve au dessus, alors en $z = 0$: $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v} \cdot \vec{e}_z = 0$.

Si la surface supérieure peut recevoir de la part du milieu extérieur un flux de matériaux $\dot{m} = \Delta m / (L \Delta t \Delta x) > 0$, alors en $z = h$: $[\rho(\vec{V}_s - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h_-} = \dot{m}$.

En tenant compte de ces conditions aux limites, l'équation (9.18) prend sa forme finale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho v_x dz = \dot{m} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \quad (9.19)$$

avec les conditions aux limites en :

$$\begin{aligned} z = 0 & : & v_z = 0 & \Leftrightarrow & (\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot \vec{e}_z = 0 \\ z = h & : & v_z = v_x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\dot{m}}{\rho_{h_-}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} & \Leftrightarrow & (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} = \frac{\dot{m}}{\rho_{h_-}} \end{aligned} \quad (9.20)$$

où nous avons utilisé les relations suivantes $\vec{e}_z \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}}$, $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\vec{V}_h \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}$ et

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\vec{e}_x \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}.$$

9.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

En partant comme précédemment de la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\tau}) = \rho \vec{g}, \quad (9.21)$$

ajoutée à $F(x,t) = \rho(x,t) \vec{v}$ dans (9.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho \vec{v} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\tau}) \cdot \vec{e}_x dz = \vec{g} \int_0^h \rho dz + \left[\frac{\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h_-} \\ - \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h_-} - [\rho \vec{v} (\vec{V}_0 - \vec{v}) \cdot \vec{e}_z]_{0_+} + [\vec{\tau} \cdot \vec{e}_z]_{0_+}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Il s'agit de définir les conditions aux limites pour la conservation de la quantité de mouvement (9.22). Les seules conditions aux limites qui sont nouvelles par rapport au paragraphe 9.2.1.1, concernent la surface supérieure. Si nous désignons par $-\dot{p} \vec{e}_z$ l'apport de la quantité de mouvement du milieu extérieur, alors : $[\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h_-} - [\vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{h_-} = -\dot{p} \vec{e}_z$ avec $\dot{p} = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t (\Delta x \times L)}$.

L'équation (9.22) prend alors sa forme finale (suivant ses deux composantes)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho v_x dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho v_x^2 + \tau_{xx}) dz = [\tau_{xz}]_{0_+} \quad (9.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho v_z dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho v_x v_z + \tau_{xz}) dz = -g \int_0^h \rho dz - \dot{p} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} + [\tau_{zz}]_{0_+}. \quad (9.24)$$

9.3 Extension au cas d'une couche mobile sur une couche immobile

Les résultats (9.19), (9.23) et (9.24) sont des équations qui sont valables quelle que soit la nature du milieu continu. Dans les avalanches, nous pouvons considérer le milieu continu global comme une superposition de deux milieux continus l'un fixe et l'autre en mouvement.

Nous sommes ainsi amenés, en plus de la surface $h(x,t)$, à considérer la surface $Z(x,t)$ (avec $Z < h$) qui sépare la zone supérieure mobile de la zone inférieure qui est immobile ($\vec{v} = 0$) et de densité constante et maximale ($\rho = \rho_M$).

Nous généralisons les équations de conservations de masse et de quantité de mouvement ainsi que les conditions aux limites au cas d'un milieu continu constitué par une couche mobile sur une couche supposée fixe.

9.3.1 Conservation de la masse

Il est évident que d'après les hypothèses ci-dessus, on obtient :

$$\int_0^h \rho dz = \rho_M Z + \int_Z^h \rho dz \quad \text{et} \quad \int_0^h \rho v_x dz = \int_Z^h \rho v_x dz.$$

Il en résulte que la conservation de la masse écrite en (9.19) entraîne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho v_x dz = -\rho_M \frac{\partial Z}{\partial t} + \dot{m} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2} \quad (9.25)$$

Il n'est pas inutile cependant de retrouver ce résultat par une approche plus longue mais qui permet de mieux cerner le problème des conditions aux limites. Dans la mesure où le "fond" $z = 0$ est remplacé par $z = Z(x,t)$, nous ne serons pas surpris de voir que (9.18) se transforme en :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_x dz = \left[\frac{\rho (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} - \left[\frac{\rho (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z+}, \quad (9.26)$$

où \vec{V}_Z désigne la vitesse de déplacement de la surface $Z(x,t)$. On trouve de même pour le matériau compris entre $z = 0$ et $z = Z(x,t)$:

$$\rho_M \left(\frac{\partial Z}{\partial t} - V_0 \right) = \rho_M \frac{\vec{V}_Z \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} - \rho_M \frac{\vec{V}_0 \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}}. \quad (9.27)$$

La relation (9.27) combinée avec les conditions aux limites (9.20) donnent sur le résultat attendu (sur le fond) :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\vec{V}_Z \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \quad (9.28)$$

9.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Il s'agit de l'équation fondamentale de la dynamique. De même que pour la conservation de la matière (9.26), nous écrivons la conservation de la quantité de mouvement sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho \vec{v} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho \vec{v} \vec{v} + \vec{\tau}) \cdot \vec{e}_x dz &= \left[\frac{\rho \vec{v} (\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} - \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{h-} \\ &\quad - \left[\frac{\rho \vec{v} (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z+} + \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z+} + \vec{g} \int_Z^h \rho dz \end{aligned} \quad (9.29)$$

Dans la couche immobile ($0 \leq z \leq Z(x,t)$) nous écrivons l'équation vérifiée par la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^Z \vec{\tau} \cdot \vec{e}_x dz = \rho_M Z \vec{g} - \left[\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \right]_{Z-} + [\vec{\tau} \cdot \vec{e}_x]_{0+} \quad (9.30)$$

avec la condition aux limites en $z = Z(x,t)$ qui s'écrit :

$$\left[\vec{\tau} \cdot \vec{e}_x \right]_{Z+} - [\rho \vec{v} (\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{Z+} = \left[\vec{\tau} \cdot \vec{e}_x \right]_{Z-} \quad (9.31)$$

Aux équations générales de conservation de la masse (9.26) et de quantité de mouvement (9.29) nous devons associer les conditions aux limites plus générales suivantes.

Dans les équations (9.26) et (9.29), les termes sources traduisent les échanges de matière et de quantité de mouvement aux frontières internes (h_- à la surface supérieure et Z_+ à la surface inférieure) du domaine mobile auquel on s'intéresse. Afin de caractériser ces échanges, nous utilisons les conditions aux limites (qui sont en fait des conditions de saut aux interfaces supérieure et inférieure du domaine fluide, qui ramènent la définition de ces termes sources aux frontières externes (Fig. 9.3.2.1: (b)). Il convient de

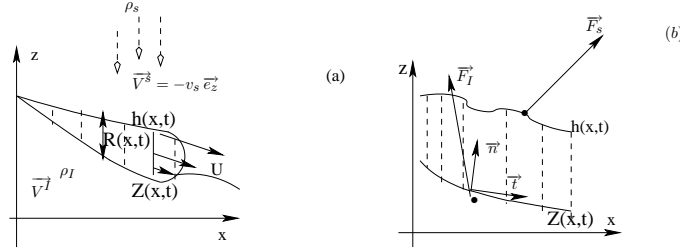


FIG. 9.4 – (a): Couche mobile (b): Coupe dans le plan (x, z) les conditions étant exprimées en des points immédiatement extérieurs au domaine de la couche mobile.

rappeler les relations permettant le changement du repère local en repère vertical-horizontale:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+Z'^2}} & \frac{-Z'}{\sqrt{1+Z'^2}} \\ \frac{Z'}{\sqrt{1+Z'^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+Z'^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{bmatrix} \quad (9.32)$$

qui relie (\vec{t}, \vec{n}) localement au repère vertical-horizontale (\vec{e}_x, \vec{e}_z) , avec $\vec{e}_x \cdot \vec{n} = -\frac{Z'}{\sqrt{1+Z'^2}}$ $\vec{e}_z \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+Z'^2}}$ $Z' = \frac{\partial Z}{\partial x}$.

Ainsi pour la masse :

$$[\rho(\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h_-} = [\rho(\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{h_+} = m_s (\vec{e}_z \cdot \vec{n}) \quad (9.33)$$

m_s est la quantité de matières reçue par la couche mobile à travers sa surface supérieure. Dans le cas d'un silo alimentant une couche mobile m_s sera traduit par le flux de $-\rho_s v_s \vec{e}_z$ à travers la surface $h(x, t)$ (Fig.9.3.2.1:(a)) :

$$[\rho(\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{Z_+} = [\rho(\vec{V}_Z - \vec{v}) \cdot \vec{n}]_{Z_-} = m_I (\vec{e}_z \cdot \vec{n}) \quad (9.34)$$

m_I est la quantité de matières reçue par la couche mobile à travers sa surface inférieure.

Si nous sommes en présence d'un tambour tournant à la vitesse $\vec{V}^I = \Omega \vec{e}_y \times \vec{r}$, le tas mobile est alimenté par la couche inférieure. Les grains qui viennent alimenter la couche mobile ont une vitesse :

$$\vec{v}_I = \Omega (x + Z \frac{\partial Z}{\partial x}) \vec{e}_z$$

et dans ce cas, nous avons :

$$m_I = \rho_I (\frac{\partial Z}{\partial t} + v_I).$$

Dans l'exemple d'une avalanche simple les matières qui viennent des interfaces supérieure et inférieure sont respectivement :

$$m_s = 0 \quad \text{et} \quad m_I = \rho_I \frac{\partial Z}{\partial t}.$$

Dans le cas d'une pluie verticale de grains qui alimentent la face supérieure à la vitesse $\vec{V}^s = -w_s \vec{e}_z$ nous avons :

$$m_s = \rho_s (\frac{\partial h}{\partial t} + w_s) \quad \text{puisque} \quad u_s = 0.$$

Pour la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} [\rho \vec{v}(\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{h-} &= [\rho \vec{v}(\vec{V}_h - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{h+} = (\vec{V}^s m_s - \vec{F}^s) (\vec{e}_z \cdot \vec{n}) \\ [\rho \vec{v}(\vec{V}_z - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{z+} &= [\rho \vec{v}(\vec{V}_z - \vec{v}) \cdot \vec{n} - \vec{\tau} \cdot \vec{n}]_{z-} = (\vec{V}^I m_I - \vec{F}^I) (\vec{e}_z \cdot \vec{n}) \end{aligned}$$

\vec{F}^s et \vec{F}^I sont les contraintes normales respectivement aux frontières supérieure et inférieure de la couche mobile.

En notant $\vec{v} = (u, w)$ les équations (9.26) et (9.29) se réécrivent ainsi selon chaque composante en utilisant les conditions aux limites :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = m_s - m_I \quad (9.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = m_s u_s - m_I u_I - F_x^s + F_x^I \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u w + \tau_{xz}) dz = -g \int_Z^h \rho dz + m_s w_s - m_I w_I - F_z^s + F_z^I \quad (9.39)$$

9.4 Loi de Mohr-Coulomb

Jusqu'ici les équations écrites sont générales. Nous allons effectuer ici une première modélisation. La condition limite en Z exprimée suivant les grandeurs en Z_- (dans un milieu immobile qui en général est rigide) nous y permet l'utilisation de la loi de Mohr-Coulomb. Pour ce faire nous sommes amenés à exprimer les composantes horizontale et verticale des contraintes normales en fonction de leurs composantes tangentielle et normale en Z_-

$$F_x^I = \tau_{xz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xx} = \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} - \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} \quad (9.40)$$

$$F_z^s = \tau_{zz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xz} = \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} \quad (9.41)$$

En Z_- , loi de Mohr-Coulomb s'écrit :

$$\vec{t} \cdot \vec{F}^I = -\mu_I \vec{n} \cdot \vec{F}^I \quad (9.42)$$

dans laquelle μ_I est le coefficient de frottement dynamique défini localement en chaque point de Z_- .

Or

$$\vec{t} \cdot \vec{F}^I = -\mu_I \vec{n} \cdot \vec{F}^I \Leftrightarrow \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = -\mu_I \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} \quad (9.43)$$

Ce qui nous amène à réécrire (9.38) et exprimer $\vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}$ par une combinaison de (9.38) et (9.39) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = m_s u_s - F_x^s - m_I u_I - (\mu_I + Z') \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} \quad (9.44)$$

$$\begin{aligned} (1 + Z'^2) \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} &= g \int_Z^h \rho dz - m_s (w_s - Z' u_s) + m_I (w_I - Z' u_I) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz + (F_z^s - Z' F_x^s) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz. \end{aligned} \quad (9.45)$$

En éliminant $\vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}$, on obtient finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = m_s u_s - F_x^s - m_I u_I - \frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T. \quad (9.46)$$

La grandeur T contient toutes les informations figurant dans la composante verticale (9.39) et s'écrit :

$$T = \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz + g \int_Z^h \rho dz - m_s (w_s - Z' u_s) + m_I (w_I - Z' u_I) + (F_z^s - Z' F_x^s) \quad (9.47)$$

Nous voyons ainsi apparaître l'importance des combinaisons $w - \frac{\partial Z}{\partial x} u$ et $\tau_{xz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xx}$ pour le calcul des intégrales du second membre.

Il faut remarquer que :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xx} &= \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} - \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2} \vec{e}_x \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \vec{e}_x \cdot \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \\ \tau_{zz} - \frac{\partial Z}{\partial x} \tau_{xz} &= \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} - \frac{\partial Z}{\partial x} \vec{t} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2} \vec{e}_z \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \vec{e}_z \cdot \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{n}}{\vec{e}_z \cdot \vec{n}} \end{aligned}$$

Les équations (9.37), (9.46) et (9.47) sont valides quelque soit la nature du milieu continu :

- granulaire (en avalanche simple) pour généraliser les équation BCRE (1994) et Douady (1999).
- liquide (hydrodynamique) pour établir les équations de Saint Venant Balmforth (2001).

Par la suite, dans un travail ultérieur, on aimerait superposer les deux milieux (avalanche sous un écoulement hydrodynamique) pour étudier la morphologie d'un fond fluvial comme dans le cas des études de rupture de barrage (Capart [35]).

9.5 Application au cas d'un milieu granulaire: Avalanche simple

On considère ici le cas particulier d'une avalanche de milieu granulaire dite simple, c'est à dire que la couche mobile ne reçoit pas de matière et n'est soumise à aucune contrainte sur sa surface supérieure, et qu'il n'y a aucune rotation contrairement au cas du tambour tournant. De plus le tas initial considéré sera en pente douce constante.

Ces hypothèses se traduisent par :

$$m_s = 0, \quad \vec{F}^s = \vec{0}, \quad \vec{V}^I = \vec{0} \quad \text{et} \quad m_I = \rho_I \frac{\partial Z}{\partial t}.$$

Les équations (9.37), (9.46) et (9.47) se restreignent alors à

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = -\rho_I \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T \end{cases} \quad (9.48)$$

$$T = g \int_Z^h \rho dz + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz}_{\text{termes d'ordre supérieur}} \quad (9.49)$$

Ceci nous amène à introduire les définitions suivantes :

$R = h(x,t) - Z(x,t)$ épaisseur de la couche mobile

q , flux de matière traversant l'épaisseur R

E , énergie développée dans la couche R .

$$R = \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} dz \quad (9.50)$$

$$q = \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} u dz \quad (9.51)$$

$$E = \int_Z^h \frac{1}{\rho_I} (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz \quad (9.52)$$

En utilisant le fait que la couche mobile est une couche mince (quelques diamètres de grains très petits), T se réduit à

$$T = g R$$

Le système final se réécrit

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial t} \quad (9.53)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} g R \quad (9.54)$$

Pour que ce problème soit soluble il faut fixer les inconnues principales (R et Z) et exprimer (modélisation) les inconnues secondaires (q , E et μ_I) en fonction de (R et Z) et de leurs dérivées.

9.6 Modélisation du flux, de l'énergie et du coefficient de friction

9.6.1 Equations de DAD

L'approche hydrodynamique utilisée par Douady et coll. [51] est similaire. Nous gardons les mêmes notations que dans les équations (9.50)-(9.54). Néanmoins, l'approche de Khakar [75] et de Douady et al [51] expriment les différentes grandeurs dans le repère local (\vec{t}, \vec{n}) en supposant que la densité reste constante :

$$\rho = \bar{\rho} = C^{ste}, \quad (9.55)$$

et en décomposant E en un terme cinétique et un terme de pression

$$E = \int_Z^h \frac{\rho}{\rho_I} u^2 dz + \bar{\tau}_{xx} \quad (9.56)$$

La variation de pression $\partial(\bar{\tau}_{xx})/\partial x$ est supposée être faible (l'ordre de grandeur de la variation de pression est estimée à R/L) devant les autres, elle est donc négligeable pour les couches minces, ou bien on tient compte dans la modélisation. En fait dans Douady et coll. [51], ce terme est mis dans le membre de droite (terme source).

$$\frac{\partial(\bar{\tau}_{xx})}{\partial x} \simeq 0. \quad (9.57)$$

Le système décrivant l'avalanche s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\rho} P \end{cases} \quad (9.58)$$

avec :

$$E = \int_Z^h u^2 dz. \quad (9.59)$$

P représente les forces s'exerçant sur la couche mobile

9.6.2 Modélisation proposée

Dans E , τ_{xx} intervient par son gradient (et non en terme source comme dans DAD). Aussi nous préférons un repère (\vec{e}_x, \vec{e}_z) vertical-horizontal, au repère local (\vec{t}, \vec{n}) qui rend les calculs plus compliqués. Utilisant pour le reste les mêmes hypothèses que DAD à savoir

(*) $q = q(R)$ et $E = E(R)$

(*) Profil de vitesse u linéaire en R , et de gradient (γ) constant : $u = \gamma R$

Nous en déduisons : $q = a \gamma R^2$, $E = b \gamma^2 R^3 + c g \frac{R^2}{2} + \tau_\nu$

τ_ν étant un terme lié à la contrainte visqueuse (à définir).

On prend $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{3}$, mais on pourrait considérer des coefficients a, b et c différents, nous affranchissant du profil linéaire. Les équations avec dimensions sont :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma R^2}{2} \right] = 0 \quad (h(x,t) = Z(x,t) + R(x,t)) \quad (9.60)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma R^2}{2} + \frac{c g}{\gamma} R + \frac{\tau_\nu}{\gamma R} \right] = - \frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} \left(\frac{g}{\gamma} \right) \quad (9.61)$$

Dans ces équations le seul terme restant à modéliser est le coefficient de frottement μ_I . Il est naturel que sa modélisation respecte les dimensions des équations (9.61). Nous proposons de prendre tout simplement $\mu_I = \mu_s$ avec μ_s coefficient de frottement statique, et de mettre $R = 0$ lorsque R commence à devenir négatif. Pour la résolution, nous adimensionnons d'abord les équations (9.61) par le choix des échelles. La hauteur maximale de la pente pour laquelle $\partial Z / \partial x = \mu_s$ est noté Z_0 .

$$\bar{h} = \frac{h}{Z_0}, \quad \bar{Z} = \frac{Z}{Z_0}, \quad \bar{R} = \frac{R}{Z_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{Z_0}$$

$$\bar{t} = \gamma t = \frac{t}{\sqrt{\frac{Z_0}{g}}}, \quad \bar{\tau}_\nu = \frac{\tau_\nu}{g Z_0^2}$$

Les équations (9.61) sont réécrites sans dimension en omettant les "barre" par commodité d'écriture.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{R^2}{2} \right] = 0 \quad (9.62)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{R^2}{2} + c R + \tau_\nu \right] = - \frac{\mu_I + Z'}{1 + Z'^2} \quad (9.63)$$

La résolution de (9.61) nous permettra de retrouver dans le cas linéaire les actes décrits par [31], et dans le cas non-linéaire les actes modifiés décrits par Aradian [10].

9.6.3 Correspondances entre modèles DAD, BCRE saturé et hydrodynamiques

Reprenons le système (9.62)-(9.63) des équations BRdG [10], écrit sous une forme différente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_d \frac{\partial}{\partial x} R = 0 \quad (9.64)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + v_d \frac{\partial}{\partial x} R = -v_{up} (\mu_I + Z') \quad (9.65)$$

Cela revient à prendre $q = v_d R$ et $E = v_d^2 R$, en maintenant constant le produit $gR / (1 + Z'^2)$ et en l'appelant v_{up} . Ces équations BRdG sont linéaires en Z et R . Elles ressemblent à DAD, sans les termes non linéaires.

Nous nous sommes intéressés dans cette partie à plusieurs types d'avalanches simples, en jouant essentiellement sur les conditions limites. Ainsi nous avons simulé des cas d'avalanches d'une pente ou d'un tas de grains avec ou sans alimentation, avec sortie libre ou avec mur. Dans les résolutions numériques, le coefficient de friction statique μ_s est noté simplement μ .

9.7 Résolution numérique des équations

Nous résolvons numériquement (9.62) et (9.63) avec un schéma limiteur de flux (Voir schéma en annexe B page 147) et par un schéma centré explicite avec diffusion additionnelle. Pour l'instant $c = 0$ et $\tau_\nu = 0$.

La figure 9.5 nous montre les trois actes dans le cas d'une sortie libre avec les équations de BRDG. Premièrement, R augmente de manière uniforme, mais, petit à petit l'information de l'existence de la sortie remonte et celle de la paroi de gauche descend. Pendant l'acte II, la remontée de l'information se poursuit. Pendant l'acte III, la perturbation R est complètement évacuée.

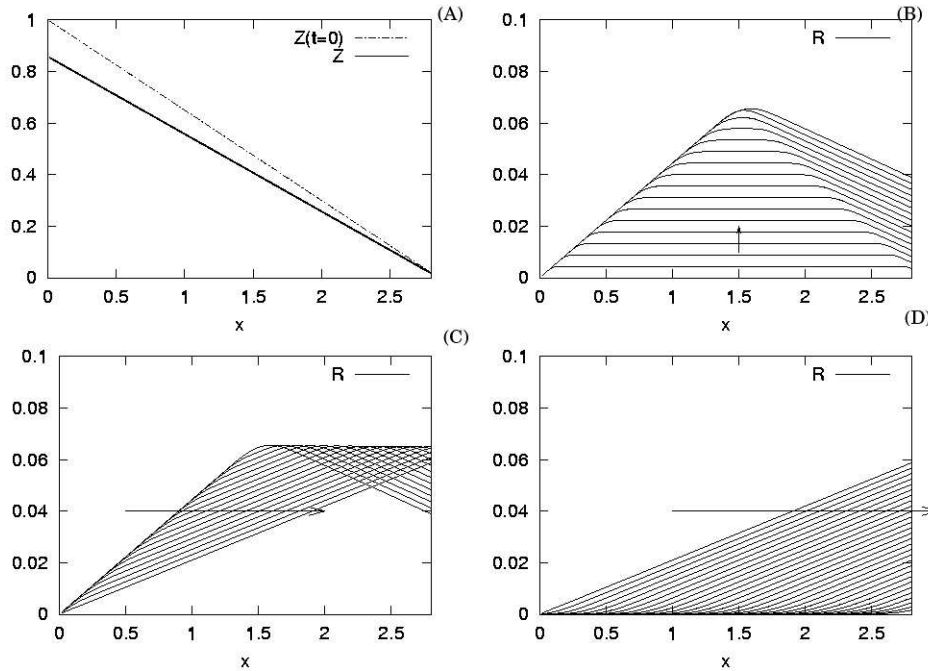


FIG. 9.5 – Eq. BRDG: cas d'une pente avec sortie libre, les trois actes ($\mu = 0.3$, angle initial constant $Z'_0 = -0.35$). (A) : tas initial et tas final. (B) : acte I, $R(x,t)$ pour $0 < t < 1.6$. (C) : acte II, $R(x,t)$ pour $1.6 < t < 3.2$. (D) : acte III, $R(x,t)$ pour $t > 3.2$.

La figure 9.6 nous montre les trois actes dans le cas d'un tas avec ensuite un sol plat (lui même érodable) avec les équations de BRDG.

Premièrement, R augmente de manière uniforme, mais, petit à petit l'information de l'existence de la sortie remonte et celle de la paroi de gauche descend. Pendant l'acte II, la remontée de l'information se poursuit, cette fois si, il s'agit d'une valeur nulle car l'avalanche est freinée fortement sur le sol plat. Pendant l'acte III, la perturbation R est complètement évacuée.

La figure 9.7 nous montre comment sont modifiés les trois actes dans le cas d'un tas avec un sol plat (lui même érodable) après la pente par l'adjonction de la non linéarité (équations de DAD).

Premièrement, R augmente de manière uniforme, mais, petit à petit l'information de l'existence de la sortie remonte et celle de la paroi de gauche descend, par ailleurs comme dans ce cas il y a un sol plat à droite, il est érodé. Pendant l'acte II, la remontée de l'information se poursuit, mais les non linéarités produisent un raidissement du signal. Un choc se forme, l'avalanche est freinée fortement sur le sol plat. Pendant l'acte III, le choc de R avance lentement et on retourne à une pente d'équilibre qui n'est pas uniforme mais dont la valeur absolue est inférieure à la pente de repos (μ_s).

La figure 9.8 nous montre un tas coincé entre deux parois verticales ($x = -2$ et $x = 0$), on verse à gauche des grains, on se donne donc: $R(x = -2, t) = R_0$. On résout les équations de DAD.

Cet excès de grains roulants se propage vers le bas sous forme d'un choc. Lorsque ce choc rencontre le

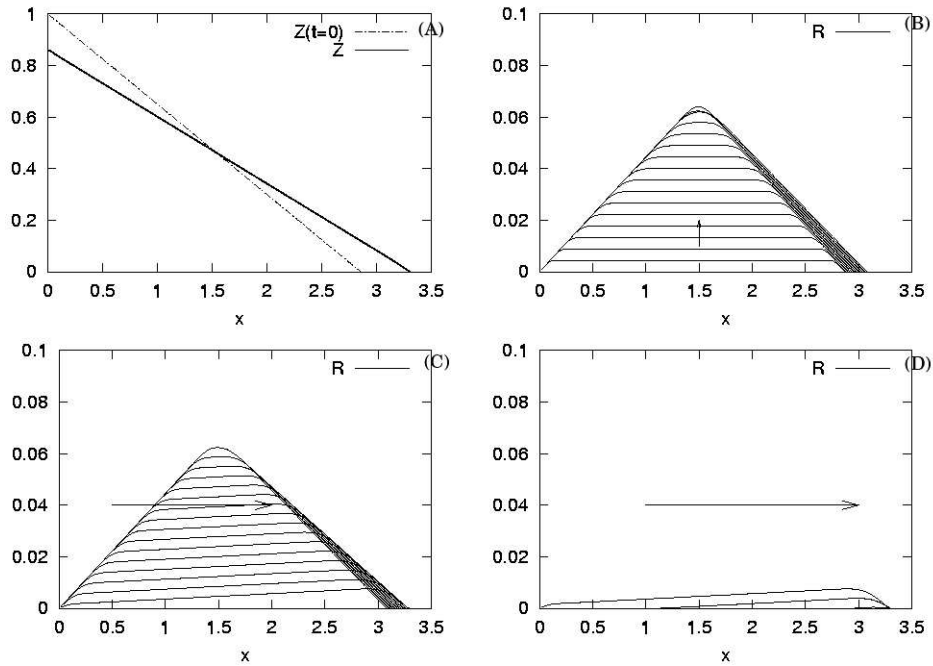


FIG. 9.6 – Eq. BRdG: cas d'un tas avec ensuite un sol plat ($\mu = 0.3$, angle initial constant $Z'_0 = -0.35$ puis 0). (A): tas initial et tas final. (B): acte I, $R(x,t)$ pour $0 < t < 1.6$. (C): acte II, $R(x,t)$ pour $1.6 < t < 3.1$. (D): acte III, $R(x,t)$ pour $t > 3.1$.

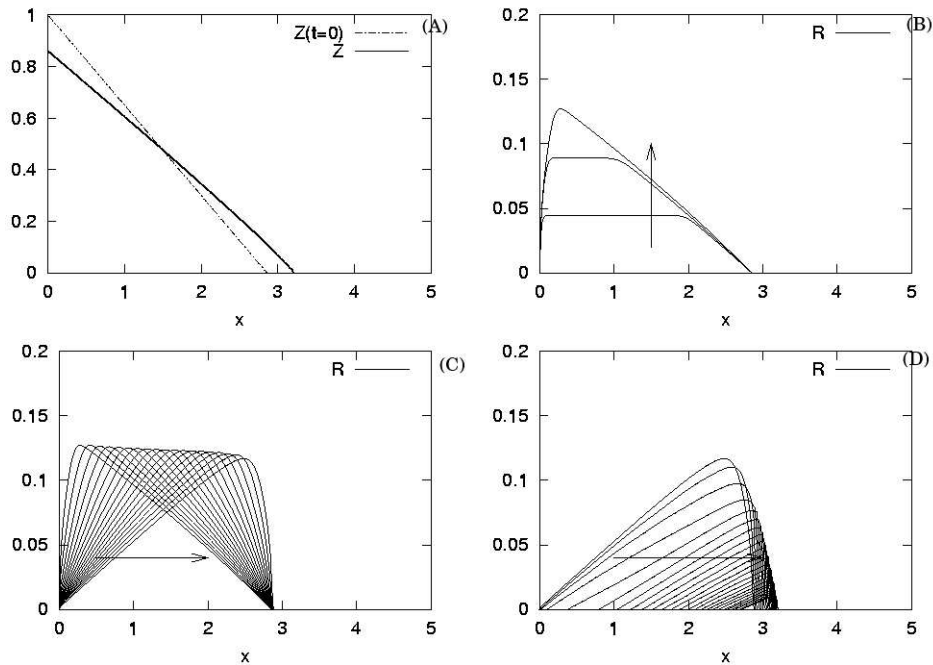


FIG. 9.7 – Eq. DAD: cas d'un tas avec sol plat à droite ($\mu = 0.3$, angle initial constant $Z'_0 = -0.35$ puis 0). (A): tas initial et tas final. (B): "acte I", $R(x,t)$ pour $0 < t < 3$. (C): "acte II", $R(x,t)$ pour $3 < t < 21$. (D): "acte III", $R(x,t)$ pour $t > 21$.

mur de droite, il y a remontée rapide de l'information, puis, redescente d'un choc, et ainsi de suite. Le niveau du tas monte graduellement. On n'arrive pas à obtenir de solution stationnaire.

La figure suivante 9.8 nous montre l'évolution d'un tas de grains roulants posés sur une pente à

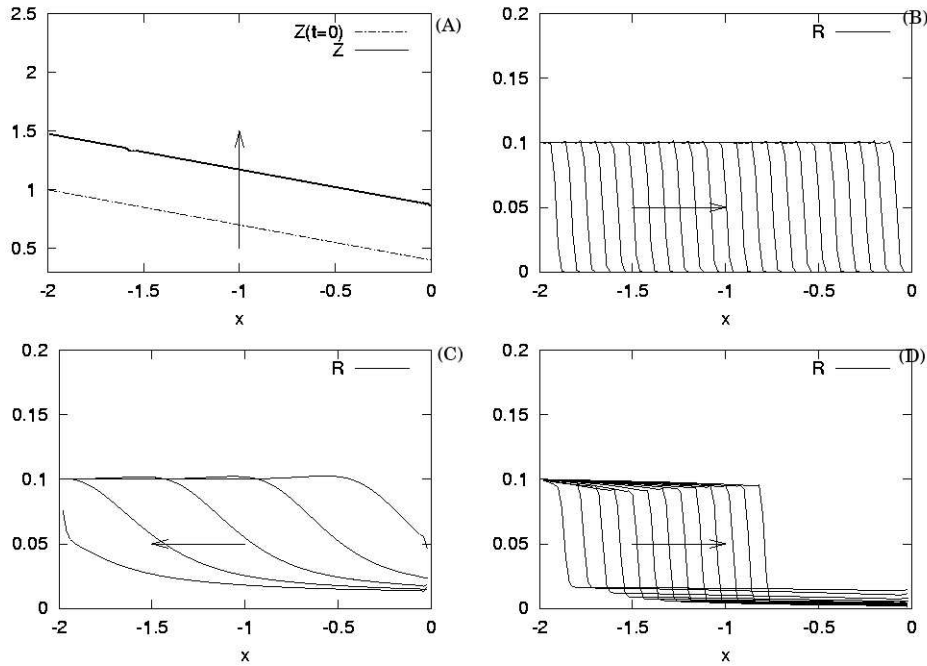


FIG. 9.8 – Eq. DAD: cas d'un tas entre deux murs, on verse continuellement à gauche ($\mu = 0.3$, angle initial constant $Z'_0 = -0.30$). (A) : tas initial et tas en cours qui monte graduellement (flèche dans le sens du temps). (B) : "acte I", $R(x,t)$ pour $0 < t < 4.75$. (C) : "acte II", $R(x,t)$ pour $4.75 < t < 5$. (D) : "acte I", une nouvelle fois...

l'équilibre. On voit la formation d'un choc pour R , la pente Z' reste inchangée et est égale à $-\mu_s$. Le choc se transforme en triangle (P. Claudin) pour le développement avant le choc.

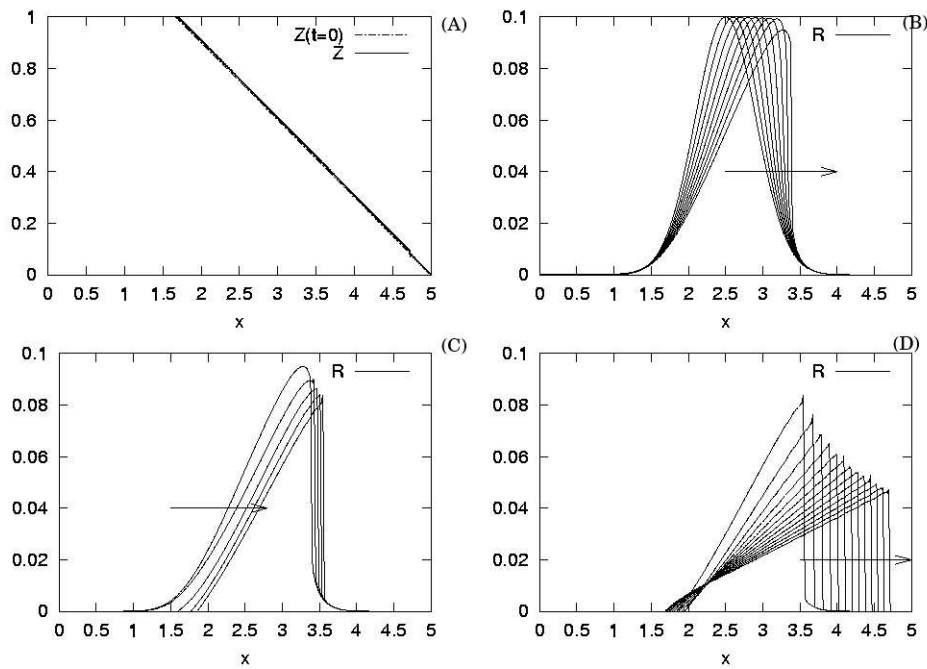


FIG. 9.9 – Eq. DAD grains roulant posés sur une pente constante ($\mu = 0.3$, $Z'_0 = -\mu$). (A) : tas initial et tas en cours : Z' reste constant. (B) : raidissement du tas de grains roulants. (C) : le choc est formé et commence à se déplacer. (D) : le tas roulant se transforme en triangle.

9.8 Application au cas d'un tambour tournant

Les équations que nous avons écrites sont très générales, elle permettent d'étudier aussi simplement ce qui se passe dans le tambour tournant. Dans les équations (9.37), (9.46) et (9.47) m_s et m_I sont les

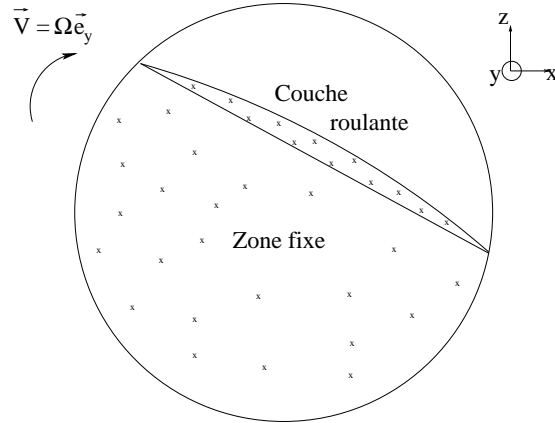


FIG. 9.10 – Schéma du tambour tournant.

flux de matières provenant respectivement des interfaces supérieure et inférieure de la couche mobile. Pour un tambour tournant à la vitesse $\vec{\omega} = \Omega \vec{e}_y$, le tas mobile est alimenté inférieurement par des grains à la vitesse \vec{V}_I :

$$\vec{V}_I = \vec{r} \times \vec{\omega} = \vec{V}^I = \Omega Z(x,t) \vec{e}_x - x \Omega \vec{e}_z. \quad (9.66)$$

La relation (9.34) nous permet d'écrire :

$$m_I = \rho_I \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + u_I Z' - w_I \right) \quad (9.67)$$

En prenant $m_s = 0$, $\vec{F}^s = \vec{0}$, et $m_I = \rho_I (\partial Z / \partial t + \Omega (x + Z Z'))$, les équations (9.37), (9.46) et (9.47) se restreignent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h \rho u dz = -\rho_I \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega (x + Z \frac{\partial Z}{\partial x}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h (\rho u^2 + \tau_{xx}) dz = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} T \end{array} \right. \quad (9.68)$$

$$T = g \int_Z^h \rho dz + \rho_I \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega (x + Z Z') \right) \Omega (x + Z Z') \quad (9.69)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_Z^h [\rho u (w - Z' u) + (\tau_{xz} - Z' \tau_{xx})] dz + \frac{\partial}{\partial t} \int_Z^h \rho (w - Z' u) dz}_{\text{termes d'ordre supérieur}} \quad (9.70)$$

Avec les mêmes définitions (9.50) et leurs modélisations simples dans le cas de couche mince, (en supposant toujours $\tau_{nu} = 0$) comme (9.60) et (9.61) nous avons :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma R^2}{2} \right] = -\Omega (x + Z Z'), \quad (h(x,t) = Z(x,t) + R(x,t)) \quad (9.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\gamma R^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma^2 R^3}{3} + \frac{c g R^2}{2} \right] = -\frac{(\mu_I + Z')}{(1 + Z'^2)} [g R + \Omega (x + Z Z')] \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega (x + Z Z') \right) \quad (9.72)$$

En utilisant les mêmes échelles que précédemment ce qui revient à prendre $\bar{\Omega} = \Omega / \sqrt{\frac{Z_0}{g}}$, nous obtenons les équations adimensionnées :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{R^2}{2} \right] = -\Omega (x + Z Z') \quad (9.73)$$

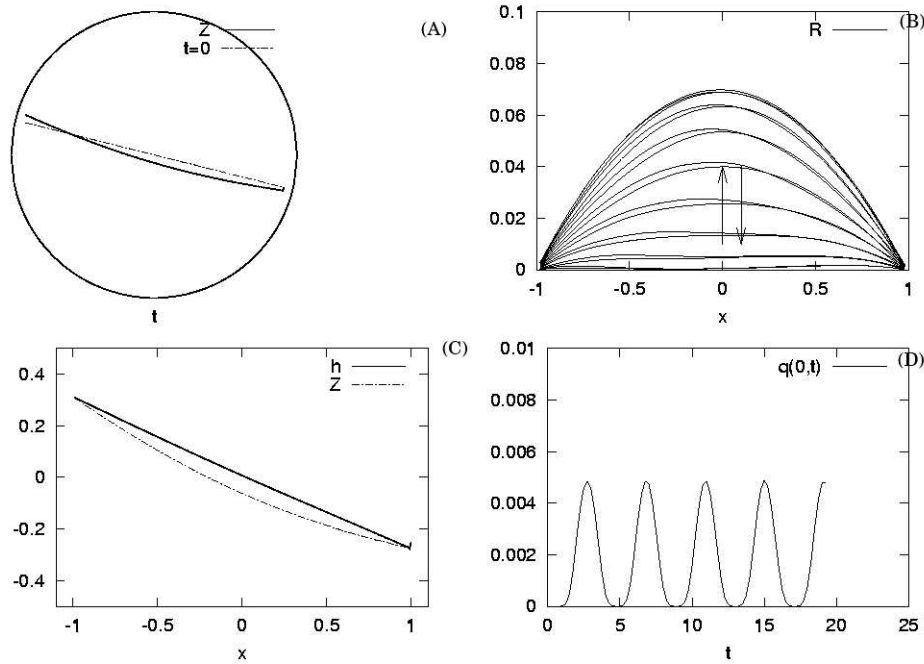


FIG. 9.11 – Eq. DAD: cas d'un tambour tournant rempli à moitié ($\mu = 0.3$, angle initial constant $Z'_0 = -0.30$). (A) : tas initial et tas en cours. (B) : $R(x,t)$ pendant une période. (C) : h hauteur de l'avalanche et $Z(x,t)$ lorsque R est maximal. (D) : flux R^2 au milieu de l'avalanche.

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{R^2}{2} + cR \right] = -\frac{\mu_I + Z'}{1 + Z'^2} \left[1 + \frac{\Omega}{R} (x + Z Z') \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \Omega (x + Z Z') \right) \right] \quad (9.74)$$

La résolution numérique avec le schéma (liniteur de flux, annexe B) conduit aux résultats résumés par la figure 9.12.

9.9 Conclusion

Nous avons retrouvé les équations "classiques" des avalanches vues du point de vue global en écrivant le mieux possible les équations de conservation. Dans une étude ultérieure, il nous faudrait affiner encore l'analyse en examinant comment un cisaillement peut entraîner les grains.

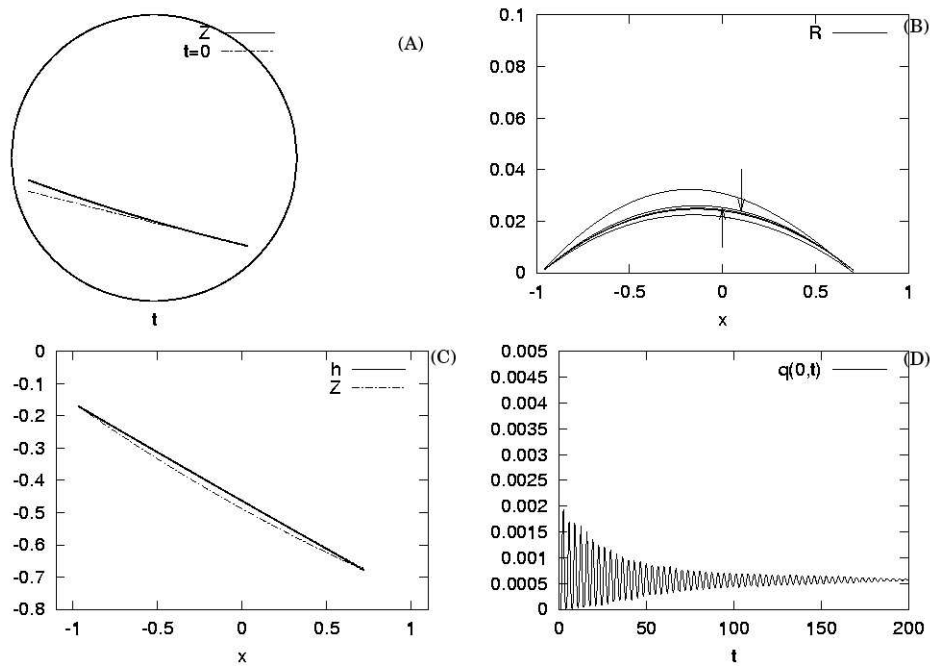


FIG. 9.12 – Eq. DAD: cas d'un tambour tournant peu rempli ($\mu = 0.3$, angle initial constant $Z'_0 = -0.30$). (A) : tas initial et tas en cours. (B) : $R(x,t)$ pendant une période. (C) : h hauteur de l'avalanche et $Z(x,t)$ lorsque R est maximal. (D) : flux R^2 au milieu de l'avalanche.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail nous avons adopté la démarche qui consiste à étudier de manière préférentielle le mouvement du fluide seul sur une forme de fond donnée. En utilisant par la suite une relation empirique entre le mouvement du fluide et le flux de sédiments, nous en avons déduit les modifications de la surface du lit de l'écoulement (*cf.* Fig. 1). Tout le danger de cette approche simplifiée réside néanmoins dans la pertinence du choix du lien entre le flux de grains et le mouvement du fluide.

Une revue (à la Prévart) des formulations de flux de la quantité de matières transportées par l'écoulement (faite dans le chapitre 2), nous a conduit à adopter une forme simplifiée mais assez réaliste : cette dernière inclut les deux phénomènes suivants : flux d'érosion quand le frottement pariétal est supérieur à une valeur seuil, et un effet non local venant de l'inertie des sédiments (effet dû au cisaillement de l'écoulement ou à un effet de pente).

Nous avons ainsi modélisé un écoulement 2D, quasi-stationnaire, et laminaire. A travers une configuration très simplifiée (asymptotiquement) et linéarisée, nous avons alors étudié le comportement du fond dans trois cas d'écoulements :

- un cisaillement constant,
- un cisaillement correspondant à celui d'un liquide freiné,
- un cisaillement correspondant à celui d'un fluide oscillant.

Nous nous sommes de plus intéressés aux différents paramètres de l'écoulement ainsi qu'aux propriétés des sédiments transportés (qui ont une influence réelle sur la stabilité (ou l'instabilité) du fond). Une analyse de stabilité linéaire est ainsi proposée pour une bosse sur son fond érodable lorsque l'écoulement est "très visqueux" et "peu visqueux".

L'importance de la relation entre le frottement pariétal et les autres paramètres de l'écoulement a pu être démontrée. Ainsi, lorsque le frottement est en phase avec la forme d'une bosse située au fond d'un écoulement, cette dernière reste stabilisée quel que soit le cisaillement subi, ce qui est le cas lorsque l'écoulement est à très faible nombre de Reynolds (*cf.* chap. 5).

Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement n'est pas trop faible, le frottement est alors d'autant plus décalé du sommet de la bosse (vers l'amont de l'écoulement au dessus) que la valeur du nombre de Reynolds est élevé (*cf.* chap. 4).

Le cadre asymptotique de la théorie de la triple couche (grands nombres de Reynolds) est appliqué à l'écoulement. Cette méthode permet de calculer la séparation de la couche limite de l'écoulement. Ainsi l'écoulement peut être encore simplifié grâce à une relation analytique liant la forme de la dune au frottement pariétal.

Pour une forme donnée de dune, les solutions asymptotiques ainsi obtenues donnent une bonne concordance avec les solutions des équations complètes de Navier-Stokes résolues avec un code de calcul (CAS-TEM2000).

Des exemples d'évolution de fond sont à cet effet présentés pour des temps longs dans divers régimes de cisaillement. On constate que des trains de rides sont créés et fusionnent en une bosse unique par un

processus dit de “coarsening”. On montre de plus que le lit est toujours instable pour de petits nombres d’ondes (grandes fréquences).

Ce processus de coarsening (murissement) est tel que la longueur d’onde maximum obéit à une loi de type puissance du temps. On montre de même que la longueur d’onde est une fonction croissante du coefficient de pente et de la taille des grains (la loi de puissance est plus faible que celle obtenue par Rousseaux et coll. [120]). Par contre elle évolue en rapport inverse du taux de cisaillement.

Quant au temps de formation des structures, il évolue en une loi de type puissance $4/3$ de la longueur d’onde, mais diminue quand le cisaillement ou le flux de sédiments augmente.

La cohérence de nos résultats est démontrée dans le paragraphe §7.7.5 et dans l’annexe E.

Dans le cas où le cisaillement est constant, l’ordre de grandeur du maximum de la longueur d’onde est assez correct. Il suffit de contrôler les paramètres que sont alors le seuil du coefficient de Shields pour un fond plat et l’angle de repos (on notera qu’en augmentant un peu le coefficient de Shields pour un fond plat et en diminuant un peu l’angle de repos, nous pourrions obtenir exactement la valeur obtenue Betat et coll. [24] [25] dans ces mêmes conditions).

Nos résultats pour le taux d’amplification des perturbations est lui aussi en accord avec celui obtenu par Betat et coll. [24] [25]. Ces derniers ont en effet observé dans leurs études que l’amplification augmente avec le cisaillement. Nous avons quant à nous pu quantifier cette augmentation : le taux d’amplification des rides augmente comme une puissance cubique du taux de cisaillement.

Néanmoins notre analyse (*cf.* relation (E.15)) prévoit que le maximum augmente comme l’inverse du taux de cisaillement. Ce qui est contraire aux conclusions des auteurs précédents qui estiment que ce maximum est indépendant du cisaillement.

Dans le cas d’un cisaillement correspondant à un écoulement oscillant, nous obtenons également des résultats en accord (via un léger réajustement des paramètres tels que le coefficient de Shields pour un fond plat et l’angle de repos) avec ceux obtenus par Rousseaux et al. [119]. Le maximum de la longueur d’onde augmente avec le diamètre des grains, l’épaisseur de la couche de Stokes de l’écoulement et l’inverse de la viscosité de l’écoulement. Les puissances (*cf.* §7.7.5) de la croissance du maximum de la longueur d’onde sont cependant légèrement plus élevées dans notre cas.

Les écarts constatés peuvent être néanmoins expliqués par le fait que notre analyse impose dès le départ que les ondes aient des échelles plus grandes que l’échelle visqueuse.

Enfin pour réduire le nombre de paramètres (seuil de frottement, longueur de saturation, coefficient de pente) qui contrôlent le système écoulement/fond, nous nous sommes intéressés à une “dune” modèle : une bosse au-dessus d’un sol non érodable, soumise à un cisaillement constant occasionné par un écoulement visqueux (à nombre de Reynolds élevé). Une loi simplifiée et linéaire avec un effet de seuil (pour le frottement) et un effet de saturation est employée pour relier le flux de sédiments au cisaillement de l’écoulement.

Des exemples de déplacements de “dunes” sont présentés. Nous obtenons alors un problème couplé auto-similaire, prévoyant que la vitesse de la dune est proportionnelle à $m^{-1/4}$, si m est la masse initiale de la dune. Les calculs indiquent que la dune disparaît si sa masse initiale est trop petite, ou si la longueur de saturation est trop grande, ou encore si le seuil de frottement est trop petit.

L’avantage des résultats obtenus est qu’avec un seul paramètre (la longueur de saturation ou le seuil de mise en mouvement des grains), on peut alors relier des configurations finales de (pseudo) dunes de tailles différentes, et ce, sous des conditions de cisaillement différentes (à partir de transformations d’auto-similarité).

Des résultats assez identiques de relations auto-similaires entre la masse et la longueur de saturation de dunes Barkhanes ont été obtenus par Kroy et coll. [82] en utilisant un modèle simplifié (Kroy et coll. [83]). Nous rappelons que le modèle simplifié de Kroy et coll. [83] a été établi dans le cas d’un écoulement turbulent, et correspond aux transports éolien de dunes.

Notre modèle est réalisé pour les conditions expérimentales (fond érodable sous un écoulement laminaire). L’avantage des modèles simplifiés réside dans l’obtention des expressions analytiques des différents paramètres dans le transport des dunes, permettant aussi de comprendre qualitativement un grand nombre de paramètres et de forme de dunes.

Dans la perspective de tenir compte des phénomènes d’avalanches qui se déclenchent lorsque la pente des dunes devient importante, nous envisageons d’utiliser une loi de conservation du fond utilisant les notations BCRE (approche explorée par Langlois et Valance [89]). C’est pourquoi dans dans le chapitre

9, nous présentons une configuration de milieu continu pour les avalanches. Cette configuration a été comparée favorablement aux modèles d'avalanches existant, en nous restreignant aux hypothèses qui les ont engendrées. Enfin, pour se rapprocher de cas réels, il faudrait étudier des écoulements turbulents.

Les annexes ...

A

Solutions de couche limite

Nous adoptons dans les trois cas, les hypothèses communes d'un écoulement laminaire, et relativement visqueux (le nombre de Reynolds est grand, tout en gardant un régime laminaire pour l'écoulement). La couche limite est en équilibre de pression avec la couche de fluide au dessus, ce qui est vrai avant l'apparition de la turbulence.

Comme conditions aux limites loin en amont et au dessus de la bosse, la solution dans la couche limite sur un fond plat est considérée (on supposera que loin de la bosse l'écoulement de base n'est pas perturbé). Nous étudions les écoulements suivants : un écoulement de fluide freiné par son fond meuble, un écoulement de fluide oscillant et un écoulement de fluide ayant un cisaillement uniforme sur son fond.

En négligeant les forces volumiques, les équations de Navier–Stokes se réduisent à celles de Prandtl instationnaire :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad p^* = P_\infty(x^*) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{du^*}{dt^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\infty}{\partial x^*} + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}. \quad (\text{A.2})$$

Près du fond ($y^* = 0$ et pour toute valeur de x^*), la vitesse est nulle $u^* = 0$, (adhérence au fond), loin au dessus du fond ($y^* \rightarrow +\infty$) $u^* = U_\infty$, l'équations (A.2) se réduit à :

$$\frac{dU_\infty}{dt^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\infty}{\partial x^*}. \quad (\text{A.3})$$

U_∞ , les conditions initiales et aux limites en x^* sont déterminées par chaque type d'écoulement.

A.0.1 Cas d'un cisaillement uniforme

Pour un fluide stationnaire, dont la vitesse loin de la paroi du fond, U_∞ est uniforme et constante, les équations (A.1)–(A.3) se restreignent à :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad p^* = P_\infty(x^*) = \text{Cste} \quad (\text{A.4})$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}. \quad (\text{A.5})$$

avec la condition aux limites $u^*(y^* = 0) = v^*(y^* = 0) = 0$ $u^*(y^* = \infty) = U_\infty$. La solution a été étudiée par Blasius en 1908 (Cousteix [45] p 178) en partant du constat : pour une abscisse x^* donnée la solution de l'écoulement de couche limite (A.4)–(A.5), n'est fonction que de y^*/δ , si l'épaisseur de la couche limite

est δ . Les détails sont dans tous les livres sur la couche limite. Blasius a obtenu une solution du type $u^*(x^*, y^*) = U_\infty g(z^*)$, avec $z^* = y^*/\sqrt{U_\infty/\nu x^*}$. La fonction dite de profil g , n'admet pas d'expression analytique mais, seulement un développement en série issu de l'équation différentielle (transformation des équations (A.4)–(A.5)) de Blasius avec $g = F'(z^*)$:

$$2F''' + FF'' = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\text{avec les conditions aux limites } F(0) = F'(0) = 0 \text{ et } F(\infty) = 1. \quad (\text{A.7})$$

Pour avoir $F(\infty) = 1$, Blasius a posé $F''(0) = 0,332$. Pour chaque position x^* donné, le voisinage de la paroi $y^* = 0$ est aussi obtenu par $z^* = y^*/\sqrt{U_\infty/\nu x^*}$, de sorte qu'au voisinage de la paroi :

$$u^*(x^*, y^*) \simeq 0,332 U_\infty \frac{y^*}{\delta(x^*)}, \quad \delta(x^*) = \sqrt{\frac{\nu x^*}{U_\infty}} \quad (\text{A.8})$$

A.0.2 Cas d'un écoulement freiné brusquement

La configuration peut se décrire de la manière suivante : pour des temps ($t^* < 0$), le fluide est animé d'une vitesse $u(y^*, t^* = 0) = U_\infty$ uniforme. A partir d'un temps initial ($t^* = 0$), le mouvement est brusquement arrêté. Pour $t^* > 0$, les particules de fluide qui adhèrent à la paroi vont s'arrêter brutalement et les couches de fluide vont ralentir par frottement successif sur les couches inférieures. La vitesse de l'écoulement est calculée pour les temps ($t^* > 0$). Compte tenu de la condition initiale, (A.3) donne $\partial p^*/\partial x^* = 0$. Supposant que l'écoulement est unidirectionnel, nous avons à résoudre :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (\text{A.9})$$

qui est une équation de diffusion avec les conditions :

$$u^*(y^*, t^* < 0) = U_\infty \text{ et } u^*(0, t^* \geq 0) = 0$$

La solution est :

$$u^* = U_\infty \operatorname{Erf}\left(\frac{y^*}{2\sqrt{\nu t^*}}\right), \quad (\text{A.10})$$

Erf étant La fonction Erreur définie par l'intégrale de la distribution gaussienne $\operatorname{Erf}(y) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^y e^{-x^2} dx$. Au voisinage de la paroi, la solution (A.10) s'écrit :

$$u^* = \frac{U_\infty y^*}{\sqrt{\pi \nu t^*}} - \frac{U_\infty y^{*3}}{12(\sqrt{\pi}(\nu t^*)^{3/2})} + \dots \quad (\text{A.11})$$

L'épaisseur de la couche limite à chaque temps $t^* > 0$ est de l'ordre de :

$$\delta(t^*) \simeq \sqrt{\pi \nu t^*}$$

A.0.3 Cas d'un écoulement oscillant au dessus d'un fond meuble

L'écoulement est obtenu par un fluide oscillant à une fréquence $f = \omega/2\pi$. La vitesse loin de la paroi ($y^* = \infty$), a une amplitude A et une pulsation ω . Les équations (A.1)–(A.3) du fait que $U_\infty = U_0 \cos(\omega t^*)$, $U_0 = A\omega = 2A\pi f$ s'écrivent dans la direction de l'oscillation :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -U_0 \omega \sin(\omega t^*) + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, \quad (\text{A.12})$$

avec la condition à la paroi $u^*(y^* = 0) = 0$.

La solution est :

$$u = U_0 [\cos(\omega t^*) - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y^*} \cos(\omega t^* - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y^*)], \quad (\text{A.13})$$

Le développement en séries (pour y^* petit) de cette solution donne :

$$u = U_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{\cos(\omega t^*) - \sin(\omega t^*)}{\sqrt{2}} y^* + \mathcal{O}(y^{*2}) \quad (\text{A.14})$$

L'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de :

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}$$

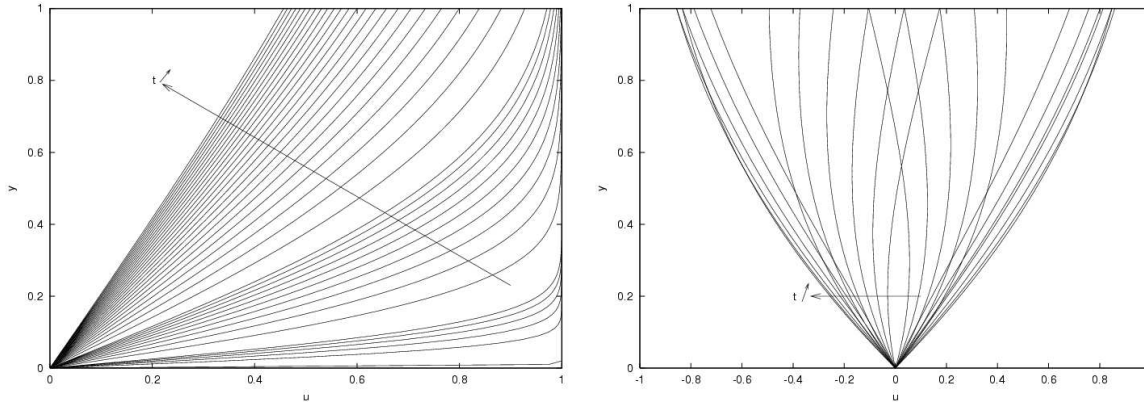


FIG. A.1 – Profil de vitesse dans la couche limite au cours du temps. A gauche : un écoulement freiné par sa paroi du fond. A droite : un écoulement oscillant à une fréquence constante.

B

Schémas numériques TVD

B.1 Schéma numérique

Ce schéma est celui utilisé pour la résolution numérique des équations de Saint-Venant pour l'évolution du fond et les avalanches.

Ce schéma est adapté aux équations de type hyperbolique, nous établissons le schéma sur la base des équations des avalanches que nous rappelons sous la forme conservative.

Les équations (9.62) et (9.63) s'écrivent sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[F(f)] = G \quad (\text{B.1})$$

$$\text{avec } f = \begin{pmatrix} h \\ R \end{pmatrix} \quad F(f) = \begin{pmatrix} \frac{R^2}{2} \\ \frac{R^2}{2} + cR + \tau_\nu \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_I + Z'}{1 + Z'^2} \end{pmatrix}$$

On remarque que le système est hyperbolique et non linéaire (termes de convection). Il va sans dire qu'il faut s'attendre à des chocs dans les zones de forts gradients ou de discontinuité. Du fait même déjà de la condition initiale (pente en demi-crêneau) il faut s'attendre donc à des phénomènes de chocs.

On utilise un schéma limiteur de flux, à variation totale décroissante (TVD) ([155] et [122]) modifié, semi-implicite ([61]) d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (voir Annexe1).

Pour chaque composante notant $f_j^n = f(j \Delta x, n \Delta t)$, $\Delta_{j+\frac{1}{2}} f = f_{j+1} - f_j$ et $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, on a le schéma

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \lambda [F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n] + \Delta t G_j^{n+1} \quad (\text{B.2})$$

Où F est le flux numérique défini par

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f_{j+1}^n + f_j^n] - \frac{1}{2} \Psi(C_{j+\frac{1}{2}}^n) \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n (1 - L_{j+\frac{1}{2}}^n) \quad (\text{B.3})$$

et

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f_j^n + f_{j-1}^n] - \frac{1}{2} \Psi(C_{j-\frac{1}{2}}^n) \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^n (1 - L_{j-\frac{1}{2}}^n) \quad (\text{B.4})$$

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \frac{F_{j+1}^n - F_j^n}{f_{j+1}^n - f_j^n} & \text{si } f_{j+1}^n \neq f_j^n \\ D(f_j^n) & \text{si } f_{j+1}^n = f_j^n \end{cases} \quad \text{avec } D(f) = \frac{d}{df} F(f)$$

$$\Psi(z) = \begin{cases} |z| & \text{si } |z| \geq \varepsilon \\ \frac{|z|^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & \text{si } |z| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon \text{ un petit réel positif. En notant}$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^{n-} = \frac{\Delta_{j-\frac{1}{2}} f^n}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n}$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^{n+} = \frac{\Delta_{j+\frac{3}{2}} f^n}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n},$$

On définit le limiteur de flux L par

$$L_{j+\frac{1}{2}}^n = L(r_{j+\frac{1}{2}}^{n-}, r_{j+\frac{1}{2}}^{n+}) \quad \text{ou simplement} \quad L_{j+\frac{1}{2}}^n = L(r^-, r^+) \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{B.6})$$

$L(r^-, r^+)$ est soit le limiteur Minmod, $Minmod(r^-, r^+) = sgn(r^-) \max[0, \min[|r^-|, r^+ sgn(r^-)]]$, soit le limiteur de Van Leer du même nom que son auteur Van-Leer défini par

$$L(r^-, r^+) = \frac{r^- + |r^-|}{1 + r^-} + \frac{r^+ + |r^+|}{1 + r^+} - 1. \text{ Il existe aussi un limiteur dû à Roe nommé Superbee défini par } L(r^-, r^+) = \max[0, \min(2r^-, 1), \min(r^-, 2)] + \max[0, \min(2r^+, 1), \min(r^+, 2)] - 1.$$

D'après une étude comparative faite par Yee, il s'avère en général que Superbee est le plus compressif des limiteurs et qu'en revanche Van-Leer est plus efficace que Minmod. Mais ici on a utilisé Minomod qui semble bien adapté d'après le test de comparaison fait en annexe 1.

Il faut en revanche noter que, le limiteur n'est pas défini lorsque l'un des rapports r^\mp au moins est nul. Pour résoudre cette difficulté on peut ajouter un petit réel à chacun des numérateur et dénominateur de r^\mp . Yee(1987) a adapté un schéma modifié de (B.3)

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f_{j+1}^n - f_{j-1}^n] - \frac{1}{2} \Psi(C_{j+\frac{1}{2}}^n) (\Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n - \hat{L}_{j+\frac{1}{2}}^n) \quad (\text{B.7})$$

dans lequel $L_{j+\frac{1}{2}}^n$ est transformé en $\hat{L}_{j+\frac{1}{2}}^n$ $\hat{L}_{j+\frac{1}{2}}^n = \hat{L}(|C_{j-\frac{1}{2}}^n| \Delta_{j-\frac{1}{2}} f^n, |C_{j+\frac{1}{2}}^n| \Delta_{j+\frac{1}{2}} f^n, |C_{j+\frac{3}{2}}^n| \Delta_{j+\frac{3}{2}} f^n)$
Et le Limiteur Minmod à trois variables défini par $Minmod(x, y, z) = Minmod(x, y) + Minmod(x, z) - x$

B.2 Test du schéma numérique utilisé

On teste le schéma (B.2)-(B.7) dans le cas simple où le système hyperbolique (B.1) écrit sous sous sa forme non conservative se réduit à l'équation de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.8})$$

avec la donnée initiale:

$$f_0(x) = 1 \text{ si } x \leq 0 \text{ ou si } x \geq 2$$

$$f_0(x) = 0 \text{ si } 0 < x < 2$$

$$f_0(x) = x - 1 \text{ si } 1 \leq x \leq 2$$

La résolution du termes de convection dans ces types d'équations de transport pose des problèmes (oscillations numériques pour des schémas d'ordre supérieurs à 2 et diffusion artificielle pour des schémas d'ordre 1) avec des schémas classiques dans les régions de forts gradients ou de discontinuité. Pour résoudre ces problèmes on utilise un schéma limiteur de flux comme ceux proposés par [122] dans sa version modifiée par [155] en utilisant la technique d'implication de [61].

Une analyse par les caractéristiques nous permet en utilisant les solutions de ce problème ([61]) de faire les comparaisons suivantes.

Un choc apparaît au point $O(x = 0, t = 0)$. Il est initialement rectiligne, d'équation $x = t/2$. Une onde simple apparaît à droite du point $A(x = 1, t = 0)$, et se développe jusqu'au point $B(x = 2, t = 0)$.

Le choc reste rectiligne jusqu'à son intersection en $C(x = 1, t = 2)$, avec la caractéristique issue de A . Ensuite u reste constant $u = \zeta - 1$ sur chaque droite caractéristique $x = (\zeta - 1)t + \zeta$. On obtient donc la solution explicite de $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \frac{x - 1}{1 + t} \tag{B.9}$$

Au delà donc du point $C(x = 1, t = 2)$, l'abscisse x du choc (fonction de t), doit vérifier

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(u_A + u_C) \tag{B.10}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x - 1}{1 + t}\right) \tag{B.11}$$

La solution de cette équation est

$$x = K\sqrt{1 + t} + t + 2 \tag{B.12}$$

le choc devant passer au point C , K doit être égal à $-\sqrt{3}$.

L'équation $x = x(t)$ du choc est donc :

$$\frac{t}{2} \text{ pour } 0 \leq t \leq 2$$

$$t + 2 - \sqrt{3(t + 1)} \text{ pour } t \geq 2$$

On montre bien que dans notre code, en prenant $q(f) = \frac{1}{2}f^2$ et utilisant ces conditions initiales, on a les mêmes résultats que [61] sur les figures suivantes:

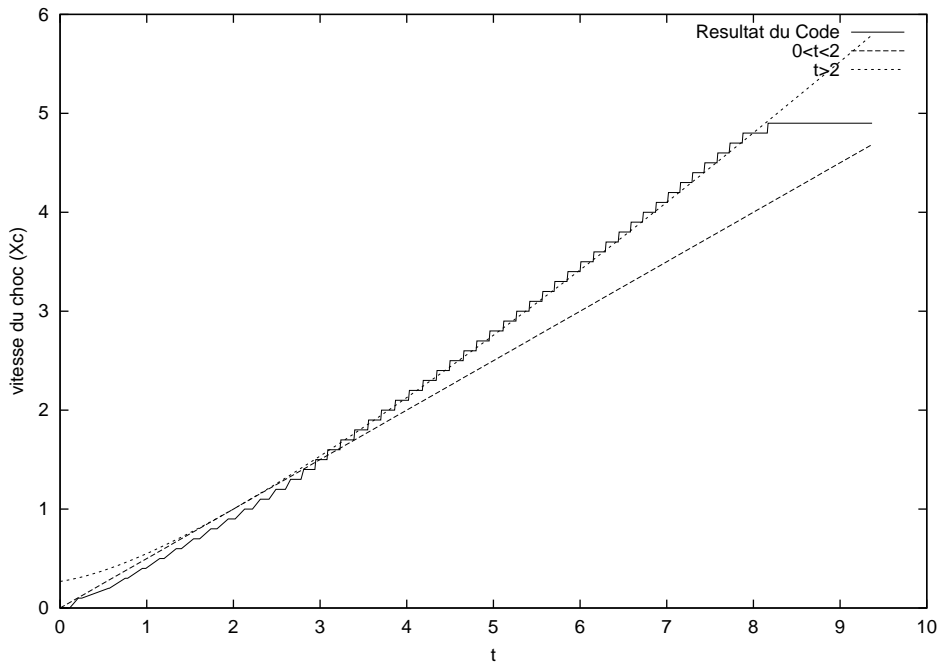


FIG. B.1 – Comparaison des vitesses de chocs

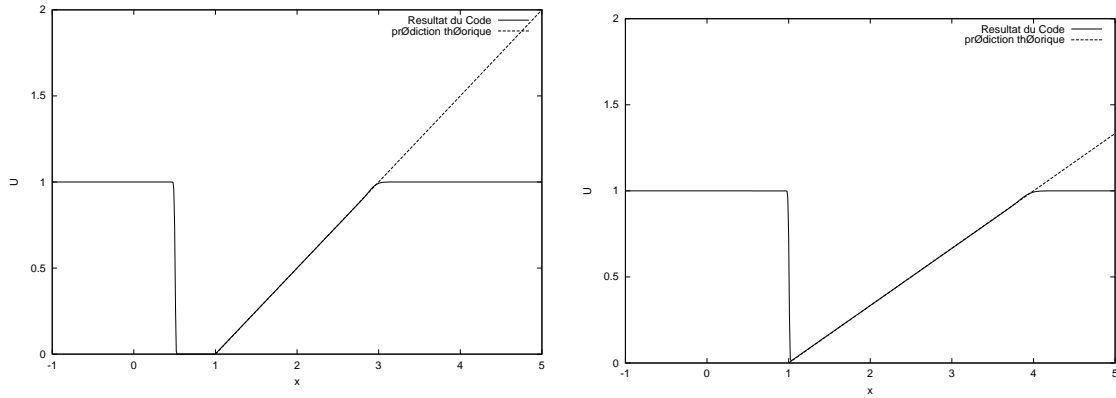


FIG. B.2 – (a) : Comparaison des vitesses à $t = 1$ (b) : Comparaison des vitesses à $t = 2$

C

Calculs en Fourier du Frottement

C.1 Cas d'un fluide très visqueux

$$u_{1k} = f_k(x,t) \varphi'(y). \quad (\text{C.1})$$

L'équation (5.1) entraîne :

$$v_{1k} = -i k f_k(x,t) \varphi(y). \quad (\text{C.2})$$

Nous posons aussi :

$$p_{1k} = f_k(x,t) \pi(y). \quad (\text{C.3})$$

Les équations (5.2) entraînent :

$$-i k \pi(y) = -k^2 \varphi'(y) + \varphi'''(y) \quad (\text{C.4})$$

$$\pi'(y) = -i k^3 \varphi(y) + i k \varphi''(y). \quad (\text{C.5})$$

Après élimination de $\pi(y)$, on a une équation différentielle d'ordre 4 en φ :

$$\varphi'''' - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi = 0. \quad (\text{C.6})$$

Les conditions aux limites deviennent pour φ :

$$\varphi'(0) = -1$$

$$\varphi'(\infty) = 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(\infty) = 0.$$

Ecrivait $\varphi = \sum_{j=1}^4 (a_j e^{\alpha_j y})$, on obtient en résolvant l'équation caractéristique :

$$\alpha^4 - 2k^2 \alpha^2 + k^4 = 0$$

$$\alpha_i = \pm k$$

$$\varphi(y) = (a_1 + a_2 y) e^{ky} + (a_3 + a_4 y) e^{-ky}. \quad (\text{C.7})$$

Utilisant les conditions aux limites en φ on obtient la solution :

$$\varphi(y) = -y e^{-|k|y}. \quad (\text{C.8})$$

Les résultats de perturbation de frottement et de pression sur la paroi sont alors: $\tau_{1k} = 2|k|f_k$ et $p_{1k} = -2ikf_k$, ce qui fait que:

$$p_1(x,y) = FT^{-1}(-2ik e^{-ky} FT(f(x))) \quad (\text{C.9})$$

$$\tau_1(x,y=0) = FT^{-1}(2|k| FT(f(x))). \quad (\text{C.10})$$

C.2 Cas d'un fluide peu visqueux

Ces calculs permettent de passer de (6.36)-(6.38) à la forme du frottement (5.7). L'équation de continuité permet L'équation de continuité (6.36) appliqué à (6.40) permet de réécrire: $u_k(y) = \phi'(y)$ et $v_k(y) = ik\phi(y)$ où ϕ est une fonction de y (fonction de courant de la perturbation), la notation 'prime', signifie la dérivation par rapport à y . L'équation (6.37) devient :

$$-ik\bar{U}'_S y \phi'(y) + ik\bar{U}'_S \phi(y) = ikp_k(y) + \phi'''(y). \quad (\text{C.11})$$

A la paroi ($y=0$), comme $\phi(0)=0$ et que $\phi'(0)=0$, la perturbation de pression est: $\phi'''(0) = -ikp_k(0)$. Mais, d'après (6.36), la perturbation de pression est constante par rapport à y (elle est seulement fonction de x et de t_1). Ainsi nous avons :

$$\phi'''(0) = -ikp_k(0) = -ikp_k(y). \quad (\text{C.12})$$

Dérivant alors (C.11) pour éliminer la pression (comme elle ne dépend pas de y) :

$$-ik y \phi''(y) = \phi''''(y). \quad (\text{C.13})$$

Posant $\alpha = y((-ik\bar{U}'_S)^{1/3})$ on a l'équation dont la solution est la fonction d'Airy (Ai)

$$Ai''(\alpha) - \alpha Ai(\alpha) = 0. \quad (\text{C.14})$$

Grâce à (C.12), le gradient vertical de la fonction de courant de la perturbation est :

$$\phi''(y) = (-ik)^{2/3} (\bar{U}'_S)^{-1/3} p_k(0) \frac{Ai(\alpha)}{Ai'(0)} \quad (\text{C.15})$$

où Ai' est la dérivée de la fonction d'Airy. Utilisant la propriété de la fonction d'Airy

$$\int_0^\infty Ai(\zeta) d\zeta = 1/3,$$

et les conditions aux limites: $\phi'(\infty) = 1$ et $\phi'(0) = 0$ nous avons :

$$p_k(0) = (3Ai'(0)) (\bar{U}'_S)^{2/3} (-ik)^{-1/3} \quad (\text{C.16})$$

$$\phi''(y) = (3Ai(\alpha)) (-ik\bar{U}'_S)^{1/3}. \quad (\text{C.17})$$

La solution dans l'espace de Fourier de la perturbation de pression est :

$$FT[p] = ((3Ai'(0)) (\bar{U}'_S)^{5/3} (-ik)^{-1/3}) FT[f] \quad (\text{C.18})$$

La forme linéarisée de la perturbation du frottement pariétal τ_1 est alors :

$$FT[\tau_1] = 3 Ai(0) \bar{U}'_S (-ik\bar{U}'_S)^{1/3} FT[f]. \quad (\text{C.19})$$

D

Passage à l'équation de Benjamin-Ono linéaire

D.1 rappel sur les transformations de Fourier

D.1.1 Définition

Toute fonction $x \mapsto f(x)$ admet¹ une transformée de Fourier $k \mapsto \widehat{f}(k) = FT(f(x))(k)$ appelé aussi spectre complexe :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (D.1)$$

La relation de transformation inverse est :

$$FT^{-1}(\widehat{f}(k))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (D.2)$$

D.1.2 Transformation de Fourier et dérivation

Les propriétés suivantes seront utilisées dans la suite :

$$\frac{d}{dx} \widehat{f}(x) = ik \widehat{f}(k), \quad \frac{d}{dk} \widehat{f}(k) = -ix f(x) \quad (D.3)$$

D.2 Application à la forme du fond

Les calculs ci-dessous permettent de passer de l'espace de Fourier à l'espace réel dans la paragraphe 5.5.

La relation en Fourier du frottement pariétal τ en fonction de la forme du fond f donnée par (cf.paragraphe 5). Comme

$$FT(\tau(x)) = FT(1 + \tau_1) \quad (D.4)$$

où τ_1 est donné par (C.10). On réécrit la relation de conservation du fond (relation d'Exner (2) : $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$), en remplaçant q par (2.66); on a pour une dimension et en Fourier

$$FT\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = -FT\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right) = -FT\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial x}\right) \quad (D.5)$$

1. pour les fonctions de carré intégrable, voir le théorème de Plancherel. Pour une fonction quelconque, voir le théorème de Fourier

Cette relation peut être reformulée en utilisant les relations :

$$\operatorname{sgn}(k) = \frac{k}{|k|}, \quad \text{la fonction sign prend les valeurs } 0, -1, 1 \quad (\text{D.6})$$

$$FT\left(\frac{1}{x}\right) = i \sqrt{\pi/2} \operatorname{sgn}(k), \quad \text{la transformée de Fourier de } \frac{1}{x} \quad (\text{D.7})$$

et la transformée de Fourier du produit de convolution $g_1 \otimes g_2$ des fonctions g_1 et g_2

$$FT(g_1 \otimes g_2) = FT(g_1) FT(g_2), \quad \text{où } g_1(x) \otimes g_2(x) = \int g_1(x - \xi) g_2(\xi) d\xi \quad (\text{D.8})$$

Dans (C.10), k , issu de () est un réel ($\frac{k}{|k|} = \frac{|k|}{k}$), donc on reformuler (C.10)

$$\begin{aligned} FT(\tau_1) &= 2|k| FT(f(x)) \\ FT(\tau_1) &= (-i)(2ik) \frac{|k|}{k} FT(f(x,t)) \\ FT(\tau_1) &= (2\sqrt{2/\pi})(i\sqrt{\pi/2}) \operatorname{sgn}(k) (-ik) FT(f(x,t)) \\ FT(\tau_1) &= 2\sqrt{2/\pi} FT\left(\frac{1}{x}\right) (-ik) FT(f(x,t)) \\ FT(\tau_1) &= 2\sqrt{2/\pi} FT\left(\frac{1}{x}\right) FT\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right) \\ FT(\tau_1) &= -(2ik) \sqrt{2/\pi} FT\left(f(x,t) \otimes \frac{1}{x}\right) \\ \\ FT(\tau_1) &= -(2ik) \sqrt{2/\pi} FT\left(\int \frac{f'(\xi)}{x-\xi} d\xi\right) \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

Remplaçant alors (D.9) dans (D.5) on a, au coefficient près l'équation ().

E

Confrontation à un cas expérimental

E.1 Grandeurs caractéristiques

Nous prenons dans cette section $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $s = 2.49$ (ce qui correspond à du quartz sous un écoulement d'eau), l'angle de friction $\varphi_d \sim 0.3$, et le diamètre des grains (on suppose le cas mono-disperse) d est compris entre $d = 2 \text{ mm}$ et $d = 110 \mu\text{m}$.

E.1.1 Frottement

Le nombre de Reynolds des particules (donnée à la page 11) :

$$Re_p = \frac{\gamma d^2}{\nu}, \quad (\text{E.1})$$

est relié au nombre de Reynolds de l'écoulement dans la couche limite (nombre de Reynolds de Stokes Re_δ) par la relation :

$$Re_p = \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 Re_\delta, \quad (\text{E.2})$$

où le nombre de Reynolds de Stokes s'exprime par :

$$Re_\delta = \frac{\gamma \delta^2}{\nu} \quad (\text{E.3})$$

L'ordre de grandeur du frottement est $\Upsilon \sim \rho \nu \overline{U}'_S$. Lorsque le fond est supposé plat ($S \sim 0$), sous un cisaillement constant ($A \sim 1.7$), et dans les limites du nombre de Reynolds $0 \leq Re \leq 1000$ (c.f. Clift et coll. [44], voir page 13), le seuil de frottement (c.f. relation (1.32)) est :

$$[\tau_s] = \frac{\rho g (s-1) d}{9 A F(Re_p)} \frac{\sin(S + \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (\text{E.4})$$

Pour un fond plat ($S \sim 0$) sous un cisaillement constant ($A \sim 1.7$), dans les limites du nombre de Reynolds : $0 \leq Re \leq 1000$ (c.f. Clift et coll. [44], voir page 13), le seuil de frottement devient :

$$\tau_s = \frac{\rho g (s-1) d}{15.3 (1 + 0.15 Re_d^{0.69})} \tan \varphi_d. \quad (\text{E.5})$$

Les valeurs typiques du seuil de frottement sont données par la figure Fig.E.1 (l'unité est exprimée en $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$). Pour un diamètre de grains donné, le seuil de frottement de mise en mouvement des grains diminue lorsque le nombre de Reynolds des particules augmente. Le seuil augmente d'autre part linéairement avec le diamètre des grains.

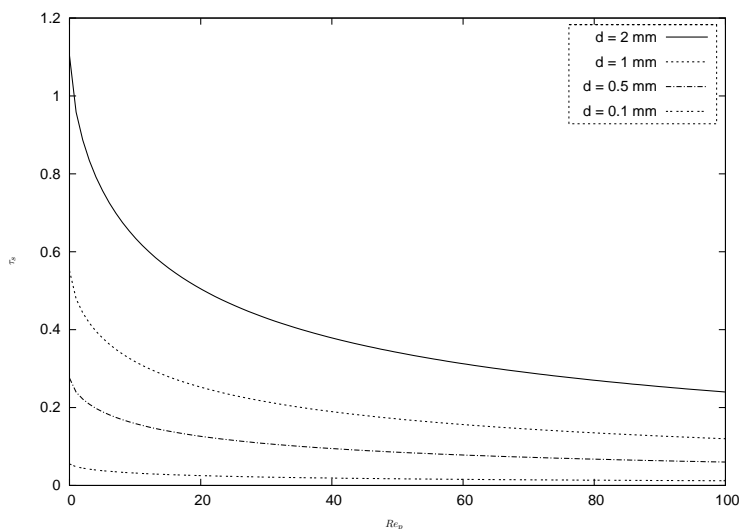


FIG. E.1 – Variation du seuil de frottement pour des nombres de Reynolds de particules inférieurs à 100, et pour des diamètres de grains fixés dans la relation (E.5)

E.1.2 Flux de matières

L'expression du flux saturé q_{sat} de matières (relations (2.72)-(2.73), page 32), permet lorsque $\Theta < 1$, d'écrire :

$$q_0 = 8(\Theta - \Theta_s)^{3/2} \sqrt{(s-1)gd^3}. \quad (E.6)$$

Son ordre de grandeur est fonction de celui du nombre de Shields et du diamètre des grains. La figure figure Fig.E.2 donne sa variation en fonction du nombre de Shields. Pour estimer le taux d'amplification,

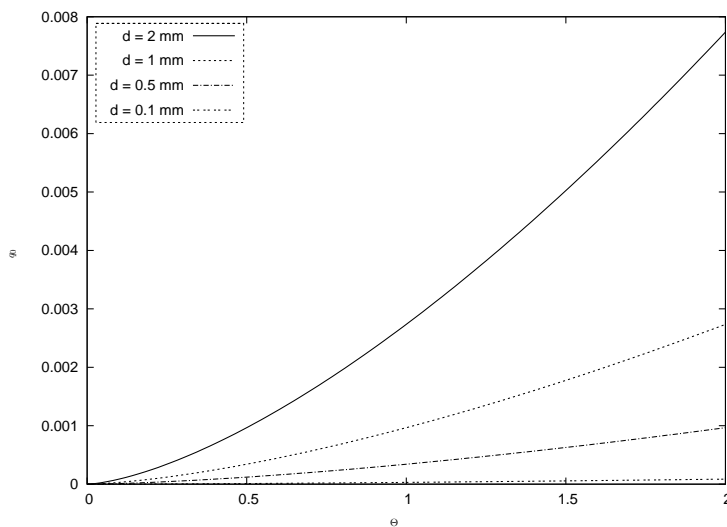


FIG. E.2 – Valeurs typiques du flux (unité $m^{-2} s^{-1}$) en fonction du nombre de Shields pour des diamètres de grains donnés.

nous utilisons la loi d'évolution du fond :

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial q^*}{\partial x^*} \quad (E.7)$$

Le flux est adimensionné par :

$$q = \frac{q^*}{q_0}.$$

Les échelles spatiales de la théorie lorsque le nombre de Reynolds est élevé sont en outre données par :

$$x = \frac{x^*}{\delta \varepsilon_b^3 Re_\delta}, \quad \text{et} \quad y = \frac{y^*}{\delta \varepsilon_b}. \quad (\text{E.8})$$

Les ordres de grandeur initiaux de l'amplitude et de la longueur d'onde des perturbations (rides initiales) sont quant à eux respectivement $a_0 = \delta \varepsilon_b$ et $\lambda_0 = \delta \varepsilon_b^3 Re_\delta$.

La relation d'évolution (E.7) permet d'évaluer l'échelle de temps caractéristique de formation des structures au fond suivante :

$$t = \frac{t^*}{\frac{a_0 \lambda_0}{q_0}}. \quad (\text{E.9})$$

E.2 Exemple de comparaison : cas oscillant

Les paramètres sont ceux issus de l'expérience de Rousseaux et coll. [120] (c.f. expérience 3, table 1). L'épaisseur de la couche limite est égale à :

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\pi f}}.$$

Pour l'eau (à la température de 20°C), la viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Dans l'expérience, la fréquence d'oscillation de l'écoulement est prise égale à un hertz, de telle sorte que l'épaisseur de la couche de Stokes soit $\delta \sim 0.56 \text{ mm}$.

Lorsque l'amplitude du mouvement de l'écoulement $2A$ vaut 4cm, la vitesse initiale prend la valeur $U_0 = 2\pi A f = 0.126 \text{ m s}^{-1}$. Le nombre de Reynolds de l'écoulement dans la couche de Stokes est par conséquent :

$$Re_\delta = \frac{2\pi A \delta}{\nu} = \frac{A}{\delta} = 70.9$$

Rousseaux [118], page 89, a montré l'influence de l'amplitude d'oscillation sur la stabilité des rides (figure Fig. E.3) pour un diamètre de grain $d = 0.11 \text{ mm}$ et une fréquence d'oscillation de 1Hz . Il observe que les faibles amplitudes d'oscillations augmentent le temps de vie des rides qui sont alors moins amplifiées. L'amplitude d'oscillation ($A = 2 \text{ cm}$) est prise de telle sorte que, d'une part, la longueur d'onde initiale des rides lui soit inférieure. Et d'autre part, que le temps de vie des rides soit réaliste (ni trop long, ni trop court).

Nous prenons comme amplitude de perturbation initiale le diamètre d'un grain : $a_0 = 0.11 \text{ mm}$. Le rapport d'aspect $\varepsilon_b = a_0/\delta \sim 0.2$ permet d'obtenir la longueur d'onde initiale $\lambda_0 = \delta \varepsilon_b^3 Re_\delta = 0.3 \text{ mm}$.

Le taux de cisaillement $\overline{U}'_S = U_0/\delta = 222.73 \text{ s}^{-1}$ permet d'évaluer l'ordre de grandeur du frottement pariétal de base $\Upsilon_0 = \rho \nu \overline{U}'_S = 0.22 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Par la suite, nous calculons le nombre de Shields de base :

$$\Theta_0 = \frac{\Upsilon}{\rho g(s-d)} = 0.17.$$

On montre alors que le seuil de frottement (E.5) vaut $\tau_{s0} = 0.105 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Le nombre de Shields seuil de mise en mouvement des grains est par conséquent typiquement de l'ordre de $\Theta_{s0} = 0.065$. Le flux de matières transportées est alors de l'ordre de :

$$q_0 = 8(\Theta - \Theta_s)^{1.5} \sqrt{g(s-1)d^3} = 1.2410^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Nous résumons toutes ces valeurs initiales dans la table (E.1). Ces conditions permettent de résoudre les équations (avec dimension) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} + V q = V q_{sat} \quad (\text{E.11})$$

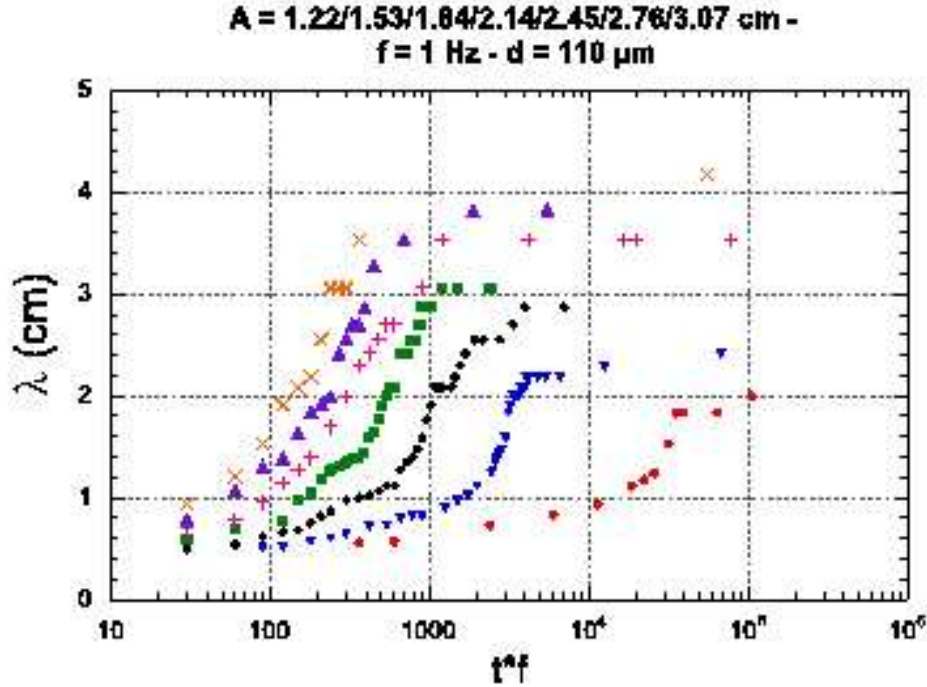


FIG. E.3 – Longueur d'onde des rides en fonction de l'amplitude d'oscillation de l'écoulement au dessus, c.f. Rousseaux [118].

Paramètres	d	δ	s	Re_δ	Θ_0	Υ_0	q_0
	(mm)	(mm)	-	-	-	(⁻² ⁻²)	(⁻² ⁻¹)
Valeurs	0.11	0.56	2.49	70.9	0.144	~ 0.22	~ 6.9910-7

TAB. E.1 – Exemples de valeurs (c.f. paramètres de l'expérience 3 de Rousseaux et coll. [120])

$$q_{sat} = \alpha (\tau - \tau_{s0} - \Lambda \frac{\partial f}{\partial x}) \beta \quad (E.12)$$

Les coefficients V , α , τ_s , Λ , et β sont définis à partir des grandeurs initiales (table E.1) par :

$$V = \frac{\lambda_0}{l_{sat}}, \quad l_{sat} = s \frac{\gamma d^3}{\nu}, \quad \alpha = \frac{8}{\rho^{3/2} g (s-1) d} \quad (E.13)$$

$$\tau_{s0} = \rho g (s-1) d \Theta_{s0}, \quad \Lambda = \frac{\rho g (s-1) d}{\tan \varphi_s} \Theta_{s0}, \quad \beta = 3/2. \quad (E.14)$$

La résolution des équations (E.10)-(E.12), adimensionnées a permis l'obtention des courbes de dispersion au chapitre 7 (pour lesquels tous les coefficients ont été fixés à 1).

Nous recherchons alors l'ordre grandeur de la longueur d'onde λ des rides, et le temps caractéristique T de formation des structures de fond :

$$\lambda = \left(\frac{\Lambda^3}{\rho^3 \gamma^2 \overline{U}_S^4} \right)^{1/2}, \quad \text{et} \quad T = \left(\frac{\gamma \lambda^4}{q_0 \overline{U}_S} \right)^{1/2} \quad (E.15)$$

On trouve avec les valeurs initiales ci-dessus que $\Lambda \sim 0.17$ ($\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-2}$), $\lambda \sim 2.6\text{mm}$ et que $T \sim 0.3\text{s}$.

On peut refaire les calculs du paragraphe §E.2 précédent dans les deux autres types d'écoulement.

Dans le cas d'un cisaillement constant nous utilisons les conditions de réalisation des expériences de Betat et coll. [24] [25].

Dans le cas d'un cisaillement correspondant à un écoulement brusquement freiné, nous utilisons les paramètres expérimentaux de Caps [36].

Dans ces dernières études, nous quantifions la longueur d'onde des rides et le temps caractéristique de formation des structures. l'ensemble de ces valeurs a fait l'objet du paragraphe §7.7.5.

Bibliographie

- [1] D. Abdoul. Problèmes de sédimentation dans les chenaux de navigation du port autonome d'abidjan (cas du canal de vridi). Géologie marine, Université de Cocody, Abidjan Côte d'Ivoire, 1997.
- [2] P. Ackers and W. R. White. Sediment transport: New approach and analysis. *J. of the Hydraulics Div.*, 99(HY11):2041–2060, 1973.
- [3] K. H. Andersen. A particle model of rolling grain ripples. *Phys. of Fluids*, 13(1):58–64, 2001.
- [4] K. H. Andersen, M.-L. Chabanol, and M.V. Hecke. Dynamical models for sand ripples beneath surface waves. *Phys. Rev. E*, 63(066308), 2001.
- [5] K. H. Andersen and J. Fredsøe. How calculate the geometry of vortex ripples. In *Conference on Coastal sediments*. Long Island, 1999.
- [6] B. Andreotti. A two species model of aeolian sand transport. *J.Fluid Mech.*, 510:47–70, 2004.
- [7] B. Andreotti. lecture on: "erosion, sand transport and geomorphology". Trimestre "Granular Materials", 05 jan. 08 April 2005.
- [8] B. Andreotti, P. Claudin, and S. Douady. Selection of dune shapes and velocities. part 1: Dynamics of sand, wind and barchans. *Eur. Phys. J. B*, 28:321–329, 2002.
- [9] B. Andreotti, P. Claudin, and S. Douady. Selection of dune shapes and velocities. part 2: A two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B*, 28:341–352, 2002.
- [10] A. Aradian. *Quelques problèmes de dynamique d'interfaces molles*. PhD thesis, Université Paris 6, france, 2001.
- [11] A. Aradian, E. Raphaël, and P.-G. de Gennes. surface flows of granular materials: a short introduction to some recent models. *C.R. Acad. Sci. Paris, Physique*, 3:187–196, 2002.
- [12] H. Ayrton. The origin and growth of ripple-marks. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 84:285, 1910.
- [13] R. A. Bagnold. *the physics of sediments and transport by wind and water*. Amer. Society of Civil Engineers, 1988.
- [14] R.A. Bagnold. The movement of desert sand. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 157:594–620, 1936.
- [15] R.A. Bagnold. Motion of waves in shallow water, inter-action between waves and sand bottoms. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 187:1–15, 1946.
- [16] R.A. Bagnold. *The Physics of Blown sand and desert Dune*. Methuen & Co., London, 1941 edition, 1954, 1960, 1971.
- [17] R.A. Bagnold. The flow of cohesionless grains in fluids. *Roy. Soc. of Lond. Philosophical Transactions*, A 249:235–279, 1956.
- [18] R.A. Bagnold. An approach of sediment transport model from general physics. *US Geol. Survey Prof. Paper*, 422, 1966.
- [19] P.G. Baines. A unified description of two-layer flow over topography. *J. Fluid Mech.*, 146:127–167, 1984.
- [20] N.J. Balmforth and A. Provenzale. Patterns of dirt. In *Geomorphological Fluid Mechanics*, volume 582 of *Lecture Notes In Physics*, chapter 15, pages 369–393. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Part IV : Dirty.

- [21] N.J. Balmforth, A. Provenzale, and J.A. Whitehead. The language of pattern and form. In *Geomorphological Fluid Mechanics*, volume 582 of *Lecture Notes In Physics*, chapter 15, pages 3–33. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Part IV : Dirty.
- [22] B.C. Barr and D.N. Slinn. Numerical simulation of turbulent, oscillatory flow over sand ripples. *J. of Geophys. Res.*, 109, 2004.
- [23] A. Bensahri and C. Coppens. Transport des sédiments marins.
www.enseeiht.fr/hmf/travaux/CD9598/travaux/optsee/hym/nome35/abdcop/hydro.htm
- [24] A. Betat, V. Frette, and I. Rehberg. Sand ripple induced by water shear flow in an annular channel. *Phys. rev. lett.*, 83(1):88–91, 1999.
- [25] A. Betat, C.A. Kruelle, A. Frette, and I. Rehberg. Long-time behavior of sand ripple induced by water shear flow. *Eur. phys. J. E*, 8:465–476, 2002.
- [26] S. Bhattacharyya, S. R. C. Dennis, and F. T. Smith. Separating flow past a surface-mounted blunt obstacle. *J. of Engineering Math.*, 3:47–62, 2001.
- [27] L.W.W. Bijsterbosch, A.A. Németh, and S.J.M.H. Hulscher. Modelling offshore sand waves: Effect of suspended sediment transport. In S.J.M.H. Hulscher, T. Garlan, and D. Idier, editors, *Marid 2004 : Marine Sandwave and River Dune Dynamics, Enschede, the Netherlands 1–2 april 2004*, pages 24–31. University of Twente, 2004.
- [28] P. Blondeaux. Sand ripples under sea waves; part. 1 : Ripple formation. *J. Fluid Mech.*, 218:1–17, 1990.
- [29] R. Bonnefille. *Cours d'hydraulique maritime*. Masson, 1992.
- [30] J.P. Bouchaud, M.E. Cates, J. Ravi-Prakash, and S.F. Edwards. A model for the dynamics of sandpile surfaces. *J. of Phys.*, 4(10):1383–1410, 1994.
- [31] T. Boutreux, E. Raphaël, and P.-G. de Gennes. Surface flows of granular materials : A modified picture for thick avalanches. *Phys. Rev. E*, 58:4692–4700, 1998.
- [32] R. I. Bowles and F. T. Smith. The standing jump: theory, computations and comparisons with experiments. *J. fluid Mech.*, 242:145–168, 1992.
- [33] A. J. Bray. *Domain growth and coarsening, in Phase Transitions and Relaxation in Systems with Competing Energy Scales*, volume 415 of *NATO ASI Series C*. Kluwer Academic, t. riste and d. sherrington edition, 1993.
- [34] O. Brivois. *Contribution à la modélisation de l'érosion de fortes pentes par un écoulement turbulent diphasique*. PhD thesis, Univerité de Marseille, Cemagref Aix-en-Provence, 2005.
- [35] H. Capart and D.L. Young. Formation of a jump by the dam-break wave over a granular bed. *J. Fluid Mech.*, 372:165–187, 1998.
- [36] H. Caps. *Instabilités des interfaces fluide/granulaire : Etudes Expérimentales*. PhD thesis, Université de Liège, 2004.
- [37] CEA. <http://www-cast3m.cea.fr>.
- [38] F. Charru and E. J. Hinch. "phase diagram" of interfacial instabilities in a two-layer couette flow and mechanism of the log-wave intability. *J. Fluid Mech.*, 414:195–223, 2000.
- [39] F. Charru and E.J. Hinch. Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. part one: oscillatory flow. not published, 2005.
- [40] F. Charru and E.J. Hinch. Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. part one: steady flow. not published, 2005.
- [41] F. Charru and H. Mouilleron-Arnould. Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 452:303–323, 2002.
- [42] F. Charru, H. Mouilleron-Arnould, and O. Eiff. Erosion and deposition of particles on a bed sheared by viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 519:55–80, 2004.
- [43] A. Ibe Chidi. Profil environnemental de la côte d'ivoire. Technical report, Projet GOG-LME, 1997.
- [44] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber. *Bubbles, drops, and particles*. Academic Press, New York, 1978.
- [45] J. Cousteix. *Aérodynamique : Couche limite laminaire*. Cepdues Editions, 1988.
- [46] S. Cuevas, F. Z. Sierra, and A. A. Avramenko. Magnetic damping of steady streaming vortices in an oscillatory viscous flow over a wavy wall. *Magneto hydrodynamics*, 38(4):345–358, 2002.

- [47] J.S. Darrozès. The method of matched asymptotic expansions applied to problems involving two singular perturbation parameters. *Fluid Dyn. Trans.*, 6:119–129, 1971.
- [48] Centre de Recherche Océanologique Abidjan. Géomorphologie côtière et lagunaire. www.refer.ci/ivoir_ct/rec/cdr/cro/denv/phygem.htm
- [49] M.P. Dearnaley, W. Roberts, S. Jones, K.C. Leurer, D.G. Lintern, L.M. Merckelbach, G.C. Sills, E.A. Toorman, and J.C. Winterwerp. Measurement and modelling of the properties of cohesive sediment deposits. In J.C. Winterwerp and C. Kranenburg, editors, *Fine Sediment Dynamics in the Marine Environment*, volume 5 of *Proceedings in Marine Science*, pages 57–73. Elsevier Science, Amsterdam, 2002.
- [50] D. Doppler. Structures d'érosion à la surface d'un lit granulaire incliné, cisailé par un écoulement continu. FAST, Université Paris Sud, november 2004.
- [51] S. Douady, B. Andreotti, and A. Daerr. A granular surface flow equations. *Eur. Phys. J. B*, 11:131–142, 1999.
- [52] M.P. du Boys. *Etudes du régime et de l'action exercée par les eaux sur les eaux sur un lit à fond de graviers indéfiniment affouillable*, volume XVIII. 10 of 5, chapter Le Rhône et les rivières à lit affouillable, pages 141–195. Les Annales des Ponts et Chaussées, No. 49, 9^e ann., 9^e cah. mem. edition, 1879.
- [53] J. Duran. *Sable, Poudre et Grain: Introduction aux milieux granulaires*. Eyrolles Sciences, 1997.
- [54] Van Dyke. *Perturbation Methods in fluid Mechanics*. Parabolic Press, 1975.
- [55] J. Fredsøe. On development of dunes in erodible channels. *J. Fluid Mech.*, 64:1–16, 1974.
- [56] J. Fredsøe, K. H. Andersen, and B. M. Sumer. Wave plus current over a ripple-covered bed. *Coastal Eng.*, 38:177–221, 1999.
- [57] J. Fredsøe and R. Deigaard. *Mechanics of Coastal sediment transport*, volume 3 of *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., world scientific edition, 1992.
- [58] H.A. Einstein. Formula for the transportation of bed-load. *Transactions of the ASCE*, 107(N 2140):561–573, 1942.
- [59] H.A. Einstein. The bed-load function for sediment transportation in open channel flows. Techn. Bull. 1026, U.S. Dept. of Agriculture, Soil conservation service, 1950.
- [60] F. Engelund. Instability of erodible beds. *J. Fluid Mech.*, 42:225–244, 1970.
- [61] D. Euvrard. *Résolution Numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, 1987.
- [62] M. Fermigier and P. Jenffer. Sand ripples in a rotating disk. *Phys. Fluids*, 14:59, 2002.
- [63] A.C. Fowler. Dunes and drumlins. In *Types of aeolian sand dunes and their formation*, volume 582 of *Lecture Notes In Physics*, chapter 18, pages 430–454. Springer-Verlag, 2001. Part IV : Dirty.
- [64] A.C. Fowler. *Mathematics and environment*. Mathematical institute, Oxford University, september 2004.
- [65] L. Fraccarollo and H. Capart. riemann wave description of erosional dam-break flows. *J. Fluid Mech.*, 461:183–228, 2001.
- [66] J. Gajjar and F. T. Smith. On hypersonic self induced separation, hydraulic jumps and boundary layer with algebraic growth. *Mathematika*, 30:77–93, 1983.
- [67] T. Gerkema. A linear stability analysis of tidally generated sand waves. *J. Fluid Mech.*, 417:303–322, 2000.
- [68] E. Guyon and J.P. Trodec. *Du sac de billes au tas de sable*. Odile Jacob, Paris, 1994.
- [69] P. Hersen. *Morphogenèse et dynamique des barchanes*. PhD thesis, Université Paris 7, France, 2004.
- [70] P. Hersen, K. H. Andersen, H. Elbelrhiti, B. Andreotti, P. Claudin, and S. Douady. Corridors of barchan dunes: Stability and size selection. *Phys. Rev. E*, 69(011304), 2004.
- [71] P. Hersen, S. Douady, and B. Andreotti. Relevant length scale of barchan dunes. *Phys. Rev. Lett.*, 89(26), 2002.
- [72] J.-M. Hervouet. *Une présentation des équations de Saint Venant*. EDF, 1991. HE-43/91-20.
- [73] A. Kaneko and H. Honji. Double structures of steady streaming in an oscillatory viscous flow over a wavy wall. *J. Fluid Mech.*, 93:727–736, 1979.
- [74] J.F. Kennedy. The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels. *J. Fluid Mech.*, 16:521–544, 1963.

- [75] D.V. Khakhar, A.V. Orpe, P. Andresén, and J.M. Ottino. Surface flow of granular materials : Model and experiments in heap formation. *J. Fluid Mech.*, 441:255, 2001.
- [76] M. R. King and D. T. Leighton. Measurement of the inertial lift on a moving sphere in contact with a plane wall in shear flow. *Phys. of Fluids*, 9:1248–1255, 1997.
- [77] N.L. Komarova and S.J.M.H. Hulscher. Linear mechanisms for sand wave formation. *J. Fluid Mech.*, 413:219–246, 2000.
- [78] N.L. Komarova and A.C. Newell. Nonlinear dynamics of sand banks and sand waves. *J. Fluid Mech.*, 415:285–321, 2000.
- [79] K.K.J. Kouakou, H. Caps, and P.-Y. Lagrée. Comparaisons numériques, analytiques et asymptotiques pour l'écoulement sur une dune sous marine. In *cfm 2003. 16^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 2003. Nice, 1–5 septembre.
- [80] K.K.J. Kouakou and P.-Y. Lagrée. Evolution of a model dune in a shear flow. submitted, 2005.
- [81] K.K.J. Kouakou and P.-Y. Lagrée. Stability of an erodible bed in various shear flows. to appear in *Eur. Phys. J. B*, sect. Hydrodynamics, 2005.
- [82] K. Kroy, S. Fischer, and B. Obermayer. The shape of barchan dunes. *J. Phys.: Condens. Matter*, 17:1229–1235, 2005.
- [83] K. Kroy, G. Sauerman, and J. Hermann. Minimal model for sand dunes. *Phys. Rev. Lett.*, 88(054301), 2002.
- [84] P.-Y. Lagrée. Erosion and sedimentation of a bump in fluvial flow. *C.R. Acad. Sci. Paris, Mécanique*, 328(II b):869–874, 2000.
- [85] P.-Y. Lagrée. Triple/double couche dans un écoulement de poiseuille: application à la marche descendante à $re = \infty$. Séminaire/ Groupe de travail ESPCI, 30 oct., 2002.
- [86] P.-Y. Lagrée. A triple deck model of ripple formation and evolution. *Phys. of Fluids*, 15(8):2355–2368, 2003.
- [87] P.-Y. Lagrée. Images et films d'antidunes filmées à belle ile, port andro, dans le morbihan, en bretagne, france. www.lmm.jussieu.fr/~lagree/TEXTES/SEDIM/DUNES/antidunes.html, 2005.
- [88] P.-Y. Lagrée, K.K.J. Kouakou, and E. Danho. Effet dispersif de la loi d'exner menant à l'équation de benjamin-ono : formation de rides sur un sol meuble. *C.R. Acad. Sci. Paris, Mécanique*, 331(3):231–235, 2003.
- [89] V. Langlois and A. Valance. Formation of two-dimensional sand ripples under laminar shear flow. unpublished, 2004.
- [90] T. Loiseleux, D. Doppler, P. Gondret, and M. Rabaud. Incipient grain transport and pattern formation at a sand surface sheared by a continuous laminar flow. part i : Weak bed slope - erosion dominated regimes. In S.J.M.H. Hulscher, T. Garlan, and D. Idier, editors, *Marid 2004 : Marine Sandwave and River Dune Dynamics, Enschede, the Netherlands 1–2 april 2004*, pages 200–207. University of Twente, 2004.
- [91] T. Loiseleux, P. Gondret, M. Rabaud, and D. Doppler. Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed submitted to a continuous laminar flow. submitted.
- [92] B. Lucquin and O. Pironneau. *Introductions aux calculs scientifiques*. Masson, paris, 1996.
- [93] W. H. Lyne. Unsteady viscous flow over a wavy wall. *J. Fluid Mech.*, 50:33–48, 1971.
- [94] C.C. Mei and J. Yue. The instability of sand ripples under partially standing surface waves. *Phys. Fluids*, 9(6):1606–1620, 1997.
- [95] P. Meunier. *Dynamique des rivières en tresse*. PhD thesis, Institut de Physique du Globe de Paris, 2004.
- [96] E. Meyer-Peter and R. Müller. Formula for the bed-load transport. In *Proceedings of the 3rd Meeting of the International Association of the Hydraulic research, Stockholm*, pages 39–64, 1948.
- [97] H. Mouilleron-Arnould. *Instabilités d'un milieu granulaire cisailé par un fluide visqueux*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 2002.
- [98] J.M. Moulod. Embouchure de grand-bassam: Impact socio-économique et environnemental. Technical report, Port Autonome Abidjan, 1995.
- [99] A.B. Murray and A. Ashton. Sandy-coastline evolution as an example of pattern formation involving emergent structures and interactions.

www.nicholas.duke.edu/people/faculty/murray/CSpaper.pdf

- [100] B.T. Nadiga, L.G. Margolin, and P.K. Smolarkiewicz. Different approximations of shallow fluid flow over an obstacle. *Phys. of Fluids*, 8(8), 1996.
- [101] NASA. Jet propulsion laboratory. www.jpl.nasa.gov/releases/2004/90.cfm.
- [102] V. Ya Neiland. Propagation of perturbation upstream with interaction between a hypersonic flow and a boundary layer. *Mekh. Zhid. Gaz.*, 4:53–57, 1969.
- [103] P. Nielsen. *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*, volume 4 of *Advanced Series on Ocean Engineering*. Advanced Series on Ocean Engineering Co. Pte. Ltd., world scientific edition, 1992.
- [104] H. Nishimori and N. Ouchi. Formation of ripple patterns and dunes by wind-blown sand. *Phys. Rev. Lett.*, 71:197–200, 1993.
- [105] H. Nishimori, M. Yamasaki, and K.H. Andersen. A simple model for the various pattern dynamics of dunes. *Int. J. Modern Phys. B*, 12(3):257–272, 1998.
- [106] Y. Noh and H.J.S. Fernando. Dispersion of suspended particules in turbulent flow. *Phys. Fluids A*, 3(7):1730–1740, 1991.
- [107] T. Ooura. <http://momonga.t.u-tokyo.ac.jp/ooura/>. site web.
- [108] H. Paillère and F. Dabbene. *Initiation à la Simulation Numérique en Mécanique des fluides à l'aide de CASTEM2000: Recueil d'exemples commentés*. CEA Saclay, Département de Mécanique et de Technologie, service d'études mécaniques et de thermiques edition. CEA- DEN/DM2S/SEMT, <http://www-cast3m.cea.fr>
- [109] L. Plantier. *Le problème de la couche interne des écoulements asymptotiques de type triple couche: modèle, analyse et simulations*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1997.
- [110] PNUE. Rapport et études sur les mers régionales. UNEP 171, PNUE/Bureau de coordination du GPA et Unité de coordination Régionale du plan d'Action de l'Afrique de l'Ouest et du Centre, 1999. p.171.
- [111] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [112] A.J. Reynolds. Waves on the erodible bed of an open channel. *J. Fluid Mech.*, 22 part 1:113–133, 1965.
- [113] K.J. Richards. The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *J. Fluid Mech.*, 99:597–618, 1980.
- [114] L. C. Van Rijn. Sediment transport. *J. Hydraul. Eng.*, 110:1431–1754, 1984.
- [115] L. C. Van Rijn. *Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas*. Aqua Publications, Amsterdam, 1993.
- [116] P.C. Roos and P. Blondeaux. Sand ripples under sea waves. part 4: Tile ripple formation. *J. Fluid Mech.*, 447:227–246, 2001.
- [117] H. Rouse. Modern conceptions of the mechanics of the turbulence. *Transactions of the ASCE*, 102:463–543, 1937.
- [118] G. Rousseaux. *Etude de l'instabilité d'une interface fluide-granulaire: application à la morphodynamique des rides de plage*. PhD thesis, Université Paris 6, France, 2003.
- [119] G. Rousseaux, A. Stegner, and J. E. Wesfreid. Wavelength selection of rolling grain ripples in laboratory. *Phys. Rev. E*, 69(031307), 2004.
- [120] G. Rousseaux, H. Yoshikawa, A. Stegner, and J. E. Wesfreid. Dynamics of transient eddy above rolling-grain ripples. *Phys. of Fluids*, 16:1049–1058, 2004.
- [121] S. Saintlos and J. Mauss. Asymptotic modelling for separating boundary layers in a channel. *Intern. J. of Engineering Science*, 34:201–211, 1996.
- [122] C. SART, A. Ouahsine, Mohamed Louaked, and P.-A. Bois. Résolution des equations de dispersion-diffusion en présence de forts gradient. *C. R. Acad. Sci. Paris, Mécanique*, 330:159–165, 2002.
- [123] G. Sauermaun, K. Kroy, and H.J. Hermann. Continuum saltation model for sand dunes. *Phys. Rev. E*, 64(031305), 2001.
- [124] S. B. Savage and K. Hutter. The motion of a finite mass granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.*, 199:177–215, 1989.
- [125] P. Scandura, G. Vittori, and P. Blondeaux. Three-dimensional oscillatory flow over steep ripples. *J. Fluid Mech.*, 412:355–378, 2000.

- [126] H. Schlichting. *Boundary layer Theory*. Serie in Mechanical engineering. Mc Graw-hill, New-York, 1960.
- [127] M. A. Sherer, F. Melo, and M. Marder. Sand ripples in oscillating sand-water cell. *Phys. of Fluids*, 11(1):58–67, 1999.
- [128] J.F.A. Sleath. On rolling grain ripples. *J. Hydraul. Res.*, 14:69, 1976.
- [129] J.F.A. Sleath. Velocities and shear stresses in wave-current flows. *J. Geophys. Res.*, 96(C8):14244–15237, 1991.
- [130] F. T. Smith. On the high reynolds number theory of laminar flows. *IMA J. Appl.Math.*, 28:207–281, 1982.
- [131] F. T Smith, P. W. M. Brighton, P. S. Jackson, and J. C. R. Hunt. On boundary layer flow past a two-dimensional obstacles. *J. fluid Mech.*, 113:123–152, 1981.
- [132] F. T. Smith and J. Gajjar. Flow past wing-body junctions. *J. fluid Mech.*, 84:191–215, 1984.
- [133] F.T. Smith. Flow through constricted or dilated pipes and channels: part 1 and 2. *Q. J. Mech. Appl.Math.*, 29 part 3:343–376, 1976.
- [134] F.T. Smith. On physical mechanisms in 2 and 3 dimensional separation. *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 358:3091, 2000.
- [135] A. Stegner and J. E. Wesfreid. Dynamical evolution of sand ripple under water. *Phys. Rev. E*, 60(4):3487–3490, 1999.
- [136] K. Stewartson and P.G. Williams. Self-induced separation. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 312:181–206, 1969.
- [137] B. M. Sumer and M. Bakioglu. On formation of ripples on an erodible bed. *J. Fluid Mech*, 144:177–190, 1984.
- [138] V. V. Sychev, A. I. Ruban, , and G. L. Korolev. *Asymptotic theory of separated flows*. Cambridge Univ. Press, 1998.
- [139] Cebeci T. and J. Cousteix. *Modeling and computation of boundary layer flows*. Springer Verlag, 1999.
- [140] O. Terzidis, P. Claudin, and J.-P. Bouchaud. A model for ripple instabilities in granular media. *Eur. Phys. J.*, 5:245, 1998.
- [141] P. J. Thomas. Pattern formation of granules on the bottom of a differentially rotating tank. *J. Fluid Mech.*, 274:23–41, 1994.
- [142] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. Oxford Science Publications, second edition edition, 1988.
- [143] H. Tsoar. Types of aeolian sand dunes and their formation. In *Geomorphological Fluid Mechanics*, volume 582 of *Lecture Notes In Physics*, chapter 17, pages 403–429. Springer-Verlag, 2001. Part IV : Dirty.
- [144] A. Valance and V. Langlois. Ripples formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *Eur Phys J. B, sect. Hydrodynamics*, 43:283–294, 2005.
- [145] A. Valance and F. Rioual. A nonlinear model for aeolian sand ripples. *Eur. Phys. J.*, 10:543–548, 1999.
- [146] F. Varlet. Le régime de la lagune ebrïé : traits physiques essentiels. Technical Report 83, ORSTOM, Paris, 1978.
- [147] S. Villain-Guillot and C. Josserand. Non-linear growth of periodic interface. *Phys. Rev. E*, 66(036308), 2002.
- [148] G. Vittori and P. Blondeaux. Sand ripples under sea waves; part. 2 : Finite-amplitude development. *J. Fluid Mech.*, 218:19–39, 1990.
- [149] G. Vittori, De Swart, and P. Blondeaux. Crescentic bedforms in nearshore region. *J. Fluid Mech.*, 381:271–303, 1999.
- [150] S. Wolfram. *Mathematica : A system for doing mathematics by computer*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1991.
- [151] M.S. Yalin. *River Mechanics*. Pergamon Press, 1992.
- [152] C.T. Yang. Unit stream power and sediment transport. In *J. of the Hydraulics Division, ASCE, HY 10*, volume 18, pages 1805–1826, 1972.
- [153] C.T. Yang. Incipient motion and sediment transport. In *J. of the Hydraulics Division, ASCE, HY 10*, volume 99, pages 1679–1704, 1973.

- [154] C.T. Yang. *Sediment transport, theory and practice*. in Water resources and Environmental Engineering. Mc Graw Hill, Education Europe, 1996.
- [155] H. C. Yee. Construction of explicit and implicit symmetric tvd schemes and their applications. *J. Comp. Phys.*, 67:151–179, 1987.
- [156] J. Yue and C.C. Mei. Formation of sand bars under surface waves. *J. Fluid Mech*, 416:315–348, 2000.
- [157] F. Zoueshtiagh and P. J. Thomas. Wavelength scaling of spiral patterns formed by granular media underneath a rotating fluid. *Phys. Rev. E*, 61(5):5587–5593, 2000.
- [158] F. Zoueshtiagh and P. J. Thomas. Universal scaling for ripple formation in granular media. *Phys. Rev. E*, 67(5), 2003.