



**HAL**  
open science

# Analyse de quelques problèmes mathématiques de la mécanique des fluides et des structures

Fabien Flori

► **To cite this version:**

Fabien Flori. Analyse de quelques problèmes mathématiques de la mécanique des fluides et des structures. Mathématiques [math]. Université Pascal Paoli, 2004. tel-00011492

**HAL Id: tel-00011492**

**<https://theses.hal.science/tel-00011492>**

Submitted on 30 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

UMR 6134 - UNIVERSITÉ DE CORSE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

FABIEN FLORI

SUJET

---

## Analyse de Quelques Problèmes Mathématiques de la Mécanique des Fluides et des Structures

---

SOUTENUE LE MARDI 14 DÉCEMBRE 2004 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE

MM.	Jacques-Henri BALBI,	Examineur
	Nicola BELLOMO,	Rapporteur
	Tomas CHACON REBOLLO,	Examineur
	Benoît DESJARDINS,	Rapporteur
	Khalid LATRACH,	Examineur
	Pierre-Louis LIONS,	Rapporteur
	Pierre ORENGA,	Coordinateur
	Carlos PARES,	Examineur



# Remerciements

---

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus vifs remerciements à Pierre Orenge, qui a dirigé ces travaux d'habilitation. Son expérience et ses conseils ont été déterminants pour mener à bien ces recherches.

J'adresse ma plus profonde reconnaissance aux rapporteurs de mon habilitation, Nicola Bellomo, pour son soutien constant, Benoît Desjardins, pour sa disponibilité et son écoute, Pierre-Louis Lions, dont les travaux ont inspiré ces recherches et qui a toujours porté un soutien actif à l'équipe de Pierre Orenge.

Je remercie Tomas Chacon, Khalid Latrach et Carlos Pares qui, malgré leurs obligations, ont accepté de participer au jury de cette habilitation.

J'ai eu la chance au cours de ces dernières années de travailler avec Bernard Di Martino. J'ai beaucoup appris à son contact et j'espère continuer cette collaboration.

Enfin, ces recherches n'auraient pas été possibles sans l'environnement scientifique de l'unité mixte de recherche "CNRS-Université de Corse" 6134. J'exprime donc toute ma reconnaissance à Jacques-Henri Balbi, à qui je dois d'y avoir travaillé.



# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Travaux Présentés</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Analyse de quelques problèmes de couplage fluide-structure</b>	<b>11</b>
1.1 Un modèle simplifié sur un domaine fixe [54][55][57][49] . . . . .	16
1.1.1 Le modèle . . . . .	17
1.1.2 Approche numérique . . . . .	18
1.2 Un modèle de couplage à frontière variable [56][58][59] . . . . .	20
1.2.1 Equations du problème . . . . .	21
1.2.2 Un résultat d'existence . . . . .	24
1.3 Etude d'un problème de flux artériel [51] [52] . . . . .	25
1.3.1 Les équations du problème . . . . .	26
1.3.2 Un résultat d'existence . . . . .	28
1.4 Un schéma numérique Lagrangien [53] . . . . .	31
1.4.1 Discrétisation du domaine . . . . .	33
1.4.2 Problème approché . . . . .	34
1.4.3 Quelques propriétés . . . . .	35
<b>2 Analyse de problèmes d'écoulements peu profonds à surface libre</b>	<b>37</b>
2.1 Sur la notion de régularité [50] [60] . . . . .	39
2.1.1 Une estimation sur le terme d'advection . . . . .	41

2.1.2	Application : borne $L^2$ sur la hauteur d'eau . . . . .	42
2.1.3	Remarque : une autre preuve pour la borne $L^2$ . . . . .	44
2.2	Un schéma de résolution mixte "Lagrange-Galerkin" [50] . . . . .	44
2.2.1	Le problème discret : résultats de convergence . . . . .	45
2.2.2	Application : le lac de retenue de Calacuccia . . . . .	48
2.3	Sur le contrôle des équations de shallow water [17] . . . . .	51
2.3.1	Expression de la fonction coût . . . . .	51
2.3.2	Problème adjoint . . . . .	52
2.3.3	Quelques résultats numériques . . . . .	54
2.4	Analyse d'un modèle de tsunami [103] [104] [105] . . . . .	55
2.4.1	Le modèle . . . . .	56
2.4.2	Des résultats d'existence, régularité et unicité . . . . .	57
2.4.3	Construction des solutions approchées . . . . .	58
2.4.4	Simulations numériques . . . . .	60
 <b>Conclusion et Perspectives</b>		 <b>63</b>
 <b>Bibliographie</b>		 <b>67</b>

# Travaux Présentés

---

## ARTICLES DE REVUES

[50] F. Flori - C. Giacomoni - P. Orenca, "Convergence of a Characteristics-Galerkin scheme for a shallow water problem." **Revue** : à paraître dans Mathematical and Computer Modelling. Ed. Elsevier Science Ltd, 2004.

[51] F. Flori - B. Giudicelli, "Bornes sur la densité pour un problème de Navier-Stokes compressible à frontière variable avec conditions aux limites de Dirichlet." **Revue** : Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I, Vol. 339, p. 251-256. Ed. Elsevier Science Ltd, 2004.

[105] B. Dimartino - F. Flori - C. Giacomoni - P. Orenca, "Mathematical and numerical analysis of a tsunami problem." **Revue** : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 13, p. 1489-1514. Ed. World Scientific, 2003.

[103] B. Dimartino - F. Flori - C. Giacomoni - P. Orenca, "Analysis of a tsunami problem." **Revue** : Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I, Vol. 334, p. 551-556. Ed. Elsevier Science Ltd, 2002.

[17] F. Bosseur - F. Flori - P. Orenca, "Identification of boundary conditions in a nonlinear shallow water flow." **Revue** : Computers and Mathematics with Applications. Vol. 43, p. 1559-1573. Ed. Pergamon, 2002.

[58] F. Flori - P. Orenca, "Fluid-structure interaction: Analysis of a 3-D compressible model." **Revue** : Annales de l'Institut Henri Poincaré - Non linear Analysis. Vol. 17, p. 753-777. Ed. Gauthier-Villars, 2000.

[57] F. Flori - P. Orenca, "Analysis of the Von Kármán equations coupled with the viscous wave equation." **Revue** : Differential and Integral Equations. Vol. 13, p. 813-826. Ed. Khayyam Publishing Co, 2000.

[56] F. Flori - P. Orenca, "On a nonlinear fluid-structure interaction problem defined on a domain depending on time." **Revue** : Nonlinear Analysis TMA. Vol. 38, p. 549-569. Ed. Elsevier Science Ltd, 1999.



[55] F. Flori - P. Orenca, "Analysis of a nonlinear fluid-structure interaction problem in velocity-displacement formulation." **Revue : Nonlinear Analysis TMA.** Vol. 35, p. 561-587. Ed. Elsevier Science Ltd, 1999.

[54] F. Flori - P. Orenca, "On a fluid-structure interaction problem in velocity-displacement formulation." **Revue : Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.** Vol. 8, p. 543-572. Ed. World Scientific, 1998.

#### **PARTICIPATION A DES OUVRAGES COLLECTIFS**

[104] B. Dimartino - F. Flori - C. Giacomoni - P. Orenca, "Sur la construction des solutions approchées d'un problème de tsunami." **Titre de l'ouvrage : "Mathématiques et calcul scientifique pour l'océanographie". Série : Annales Mathématiques Blaise Pascal.** Vol. 9, p. 269-281. Publications Académiques de l'Université de Grenoble, 2002.

[59] F. Flori - P. Orenca, "On a fluid-structure interaction problem." **Titre de l'ouvrage : "Trends in application of mathematics to mechanic". Série : Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.** Vol. 106, p. 293-305. Ed. Chapman & CRC Press, 2000.

#### **PREPRINTS**

[53] F. Flori - C. Morelli - P. Orenca, "Convergence of a Lagrangian scheme for a compressible Navier-Stokes model defined on a domain depending on time", preprint, 2004.

[52] F. Flori - B. Giudicelli - P. Orenca, "An existence result for a blood flow pattern in vascular system," preprint, 2004.

[60] F. Flori - P. Orenca, "Bornes sur l'advection et la hauteur d'eau dans les équations de shallow water," preprint, 2004.

[61] F. Flori - P. Orenca - M. Peybernes, "On a bilayer shallow water problem with Dirichlet boundary conditions," preprint, 2004.

#### **DIVERS**

[49] F. Flori, "Analyse d'un problème de couplage fluide-structure." Thèse de Doctorat, Université de Corse, janvier 1998.

# Introduction

---

Les lignes qui suivent abordent des questions liées à l'étude de quelques aspects de la modélisation mathématique en mécanique des fluides et des structures. Elles s'articulent principalement autour de deux thèmes : le couplage fluide-structure, l'analyse de problèmes d'écoulements peu profonds à surface libre.

Ce document présente les principaux résultats obtenus en les replaçant dans leur cadre bibliographique.

La première partie concerne l'interaction fluide-structure dont on essaie de mettre en évidence le rôle fondamental dans des domaines applicatifs comme l'aérodynamique ou la médecine. On évoque la modélisation mathématique de ces phénomènes et, lorsque cela est possible, on établit des résultats d'existence, de régularité et d'unicité. On aborde enfin la question de la résolution numérique de ces problèmes à travers l'étude de divers schémas.

La seconde partie porte sur les écoulements en eau peu profonde et leurs applications en océanographie. On étudie la question de la détermination des conditions aux limites en mer pour les équations de shallow water, on aborde le problème de la régularité des solutions, on s'intéresse à l'approche numérique de ces équations, enfin, on donne un résultat d'existence, de régularité et d'unicité pour un modèle de tsunami.



# Chapitre 1

## Analyse de quelques problèmes de couplage fluide-structure

---

Prévoir et contrôler le comportement des fluides est une question primordiale dans de nombreux domaines : aérodynamique, médecine, acoustique. Dans la plupart des cas, le fluide entoure ou est entouré par un corps rigide ou élastique interagissant avec lui. On doit alors introduire la notion de couplage fluide-structure qui conduit à l'étude de systèmes complexes dont la modélisation mathématique est relativement délicate et demeure un champ d'investigation important.

Dans l'histoire de la physique, le premier exemple de ce type de couplage est donné par la poussée d'Archimède qui relie la force à laquelle est soumis un solide non déformable plongé dans un fluide à l'équilibre avec le poids de fluide déplacé. Ce principe est valable tant que le fluide reste à l'équilibre, or dans la plupart des applications cette condition n'est pas satisfaite ce qui génère des interactions bien plus complexes entre le fluide et le solide. En particulier, il faut tenir compte des forces de portance, de traînée, de poussée ou encore du fait que la pression peut déplacer ou déformer le corps avec lequel le fluide interagit. On voit donc la nécessité d'introduire des modèles mathématiques beaucoup plus complexes.

La modélisation de l'écoulement du sang dans les artères est un bon exemple pour montrer que la modélisation isolée du fluide est insuffisante pour appréhender certains phénomènes. En effet, le flux artériel fait apparaître

---

au moins deux phénomènes de couplage fluide-structure distincts. Tout d'abord, sous l'action de la pression sanguine, la paroi élastique de l'artère se déforme. Ensuite, le sang transporte de petits solides tels que les globules avec lesquels il interagit. Ces deux formes d'interaction sont à l'origine des deux grands problèmes du couplage fluide-structure : le mouvement d'un ou de plusieurs solides rigides ou élastiques dans un fluide visqueux compressible ou incompressible et le mouvement d'un fluide compressible ou incompressible entouré par une paroi en mouvement. La variation du domaine fluide n'étant pas connue a priori, il s'agit de problèmes à frontière libre.

L'étude mathématique du mouvement de solides dans des fluides visqueux a donné lieu à de nombreux travaux. Pour ce qui concerne le cas d'un corps rigide interagissant avec un fluide visqueux incompressible bidimensionnel, l'existence locale de solutions fortes a été obtenue par C. Grandmont et Y. Maday dans [77]. Ce travail est à rapprocher d'un travail antérieur de D. Errate, M.J. Esteban et Y. Maday [46]. Dans le cas d'un solide indéformable dans  $\mathbb{R}^3$  soumis à l'action de la gravité, l'existence a été obtenue par D. Serre dans [131]. Auparavant, un résultat d'existence avait été démontré par H. Weinberger [143] [142] lorsque la masse relative du solide est petite devant la viscosité du fluide. Sur un sujet voisin, notons aussi le travail de G.P. Galdi, J.G. Heywood et Y. Shibata [66]. L'existence de solutions faibles globales en temps dans un borné de  $\mathbb{R}^2$  a été obtenue par K.H. Hoffmann et V.N. Starovoitov dans [82] puis dans un borné de  $\mathbb{R}^3$  par C. Conca, J. San Martin H. et M. Tucsnak [34] [33] qui considèrent le mouvement d'un solide sphérique. Notons que l'ensemble de ces résultats a été démontré en l'absence de collision avec le bord du domaine fluide.

Lorsque plusieurs solides interagissent dans un fluide incompressible et toujours en l'absence de collision, l'existence de solutions fortes locales en temps en dimension deux et trois est montrée par C. Grandmont et Y. Maday dans [78]. Pour contourner les difficultés liées à la variation du domaine, les équations sont réécrites dans [78] en coordonnées Lagrangiennes. Le problème

---

ainsi formulé admet une solution locale en temps pour une vitesse du solide donnée ce qui permet de déterminer la contrainte du fluide et de résoudre l'équation de la structure. On obtient ainsi une nouvelle vitesse pour l'interface et le problème est recouplé grâce à un argument de point fixe. Cette démonstration nécessite certaines hypothèses sur la masse et le moment d'inertie du solide mais permet néanmoins de montrer l'unicité de la solution. La question de l'unicité de la solution a aussi été abordée par T. Takahashi [138] qui montre l'unicité de solutions fortes globales dans le cas d'un solide rigide évoluant dans un fluide incompressible bidimensionnel. L'approche Lagrangienne introduite dans [78] a déjà été utilisée par G. Allain [5], J.T. Beale [10] [9], V.A. Solonnikov [134] [133], I.S. Ciuperca [30] qui s'intéressent aux équations de Navier-Stokes à frontières variables. Toujours en l'absence de collision, l'existence de solutions pour tout  $T > 0$  a été obtenue par B. Desjardins et M.J. Esteban dans [37] pour une vitesse initiale dans  $H_0^1(\Omega)$  dans le cas bidimensionnel et pour des données petites dans le cas tridimensionnel. Dans [38], les mêmes auteurs montrent l'existence de solutions faibles globales avec des hypothèses moins restrictives sur les données pour un fluide compressible ou incompressible. La construction des solutions approchées passe par la linéarisation du problème original via un opérateur de régularisation. Ce problème est résolu avec une méthode de type Lagrange-Galerkin. Les auteurs utilisent ensuite un point fixe de Schauder pour recoupler les équations. Dans le cas bidimensionnel incompressible, K.H. Hoffmann et V.N. Starovoitov [82] obtiennent un résultat similaire à B. Desjardins et M.J. Esteban en approchant les solides par des fluides très visqueux. Citons aussi le résultat de M. Gunzburger, H. Lee et G. Seregin sur l'existence globale de solutions en dimension trois [80]. Plus récemment, dans le cas d'un fluide incompressible bidimensionnel, une avancée significative a été faite par J. Alonso San Martin, V. Starovoitov et M. Tucsnak [102] qui établissent l'existence de solutions faibles globales sans hypothèse d'absence de collision entre les corps rigides ou entre un corps rigide et la frontière du domaine. En

---

particulier, les auteurs donnent des estimations sur la vitesse des solides quand leur distance au bord ou leur distance mutuelle tend vers 0.

Concernant le fait que deux solides plongés dans un fluide incompressible visqueux peuvent avoir des chocs, une expérience numérique intéressante a été menée par J. San Martin H. de l'Université du Chili. Cette expérience montre que deux boules rigides identiques sur lesquelles on applique deux forces constantes, de même intensité et de sens opposé s'approchent mais n'entrent pas en collision. Ce phénomène est connu par les expérimentateurs sous le nom de *kiss and go* et semble aller dans le sens des résultats d'existence globale obtenus ci-dessus. Notons que si l'énergie initiale des deux boules est grande, les deux solides finiront par se rencontrer, toutefois cela n'est pas contradictoire avec les résultats obtenus car nous sortirions alors du cadre de l'hypothèse d'incompressibilité. En effet, lorsque les boules se rapprochent, la pression et la vitesse augmentent considérablement ce qui est incompatible avec cette hypothèse.

Lorsque le solide est élastique, de nombreuses questions restent ouvertes. La principale difficulté est liée à l'absence de régularité de la frontière du domaine fluide. Dans le cas tridimensionnel stationnaire, citons toutefois un premier résultat d'existence obtenu par C. Grandmont [76]. Dans le cas instationnaire, peu de résultats existent, néanmoins B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec donnent un résultat d'existence de solutions faibles pour une structure élastique plongée dans un fluide visqueux incompressible [39]. La difficulté liée à la faible régularité de la frontière est contournée en approchant les déformations du solide par une décomposition du déplacement sur les premiers modes élastiques. Toujours dans le cas instationnaire, il convient de mentionner le résultat de C. Grandmont, Y. Maday et P. Métier [79] qui utilisent aussi une approche modale.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, l'autre grande famille de problèmes de couplage fluide-structure concerne l'étude du mouvement d'un fluide compressible ou incompressible entouré par une structure en mouvement. Sur

---

la question des équations de Navier-Stokes incompressibles sur un domaine à frontière libre nous renvoyons à G. Allain [5], J.T. Beale [10] [9], V.A. Solonnikov [134] [133]. Plus récemment, A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban et C. Grandmont ont montré un résultat d'existence de solutions faibles pour un fluide incompressible tridimensionnel couplé à une plaque [22]. Il convient aussi de citer le résultat de H. Beirao da Veiga [36] qui montre l'existence pour des données petites de solutions fortes locales en temps pour un problème de flux artériel.

Pour notre part, et malgré quelques travaux sur des modèles de couplage simplifiés [54] [55] [57], c'est sur le thème de l'étude d'un fluide compressible entouré par une structure en déplacement que nous avons essayé d'apporter quelques avancées. Dans [51], on donne un résultat d'existence de solutions faibles pour un modèle de Navier-Stokes compressible isentropique non linéaire bidimensionnel sur un domaine à frontière variable sous une hypothèse de données petites. Dans [56] ou [57], l'existence et l'unicité de solutions régulières sont montrées pour un modèle linéaire de fluide compressible bidimensionnel. Dans [58], l'existence de solutions faibles est obtenue dans le cas tridimensionnel. Plus récemment nous avons montré l'existence de solutions pour un modèle bidimensionnel non linéaire de fluide compressible couplé à un opérateur de coque de type Donnell dont le déplacement est décomposé sur les premiers modes élastiques [52].

Dans ce qui suit, nous commençons par présenter quelques résultats sur des modèles simplifiés de couplage fluide-structure pouvant être utilisés en acoustique (section 1). Nous donnons ensuite les résultats obtenus en dimension deux et trois pour le cas d'un fluide compressible couplé à une plaque (section 2). A la section 3, nous présentons les résultats d'existence obtenus lorsqu'un fluide compressible est couplé à une coque modélisée par l'opérateur de Donnell. Enfin, nous décrivons à la section 4 quelques méthodes de construction de solutions approchées pour ces problèmes.



## 1.1 Un modèle simplifié sur un domaine fixe [54][55][57][49]

Dans [96], P.L. Lions établit rigoureusement des passages à la limite pour des modèles de fluides visqueux, compressibles et isentropiques. En particulier en utilisant des résultats d'existence et de compacité obtenus dans [94] et [95], il montre qu'asymptotiquement on peut déduire le système linéarisé autour d'un écoulement constant :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} u = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla p = 0. \quad (1.2)$$

Sans difficulté, on vérifie que ce système est équivalent à :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \mu \Delta \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = 0, \quad (1.3)$$

qui correspond à l'équation d'onde visqueuse. Lorsque  $\mu = 0$ , ce type de modèle est classiquement utilisé en acoustique et a déjà fait l'objet d'une étude par R. Papi dans le cadre d'un couplage dynamique avec un opérateur de plaque mince [120]. En particulier, P. Orenca et R. Papi montrent dans [118] un résultat d'existence et d'unicité pour ce problème et proposent une construction des solutions approchées basée sur une méthode de point fixe et une régularisation de la condition de couplage liant les deux systèmes d'équations.

Ce type de modèle ne nécessite pas de prendre en compte les variations du domaine et n'est donc utilisable que dans le cadre de faibles perturbations comme c'est le cas en acoustique. Dans [54] et [55] nous avons étudié des problèmes voisins de celui-ci et donné des résultats d'existence, de régularité et d'unicité. Les problèmes du fluide et de la structure  $y$  sont résolus avec une base spéciale à l'aide de la méthode de Galerkin puis recouplés à l'aide d'un point fixe.

Les lignes qui suivent traitent d'un problème proche de celui étudié par P. Orenca et R. Papi mais dans lequel nous considérons l'équation d'onde visqueuse couplée à une plaque dont les déplacements sont décrits par le modèle non linéaire de Von Karman [29]. Sous une hypothèse de données petites, nous donnons un résultat d'existence. Numériquement, ce problème est résolu avec la méthode de Galerkin en utilisant une base spéciale bien adaptée au problème et sans utiliser de point fixe. Les résultats numériques permettent de montrer le rôle joué par la viscosité sur la stabilité des solutions [57].

### 1.1.1 Le modèle

On note  $\Gamma_2$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\Gamma_2$  et  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^3$  simplement connexe de frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Physiquement,  $\Gamma_2$  et  $\Omega$  correspondent respectivement aux domaines occupés par la plaque et le fluide. On suppose que  $\Gamma_1$  est une partie fixe de  $\Gamma$ . On note  $n$  la normale extérieure à  $\Omega$ . La plaque est excitée par une force  $f$ .

Sur  $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T)$ , on munit l'équation (1.3) de la condition au bord :

$$p = 0 \quad \text{sur } \Sigma_1, \quad (1.4)$$

qui consiste à négliger la pénétration de l'onde acoustique dans la frontière. Si on note  $d$  la flèche de la plaque, le couplage à l'interface plaque-fluide s'exprime à travers l'hypothèse de continuité de la vitesse normale qui ici s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 p}{\partial n \partial t} + \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.5)$$

et à travers la contrainte normale  $\sigma = p + \mu \frac{\partial p}{\partial t}$  appliquée par le fluide sur la plaque. Ainsi, les forces exercées sur la plaque sont :

$$F = f - p - \mu \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{sur } \Sigma_2. \quad (1.6)$$

Le mouvement  $d$  de la plaque est gouverné par les équations de Von Karman [29] [92] :

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + \Delta^2 d - [d, b] = F \quad \text{sur } \Sigma_2, \quad (1.7)$$

$$\Delta^2 b + [d, d] = 0 \quad \text{sur } \Sigma_2, \quad (1.8)$$

$$[d, b] = \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}, \quad (1.9)$$

munies des conditions aux limites :

$$d = \frac{\partial d}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Sigma_2, \quad (1.10)$$

$$b = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Sigma_2. \quad (1.11)$$

Sous les hypothèses données dans [57] (données initiales petites), on montre que le problème (1.3)-(1.11) est bien posé. En particulier, si on pose  $V = \{\Phi \in H^1(\Omega) ; \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ , on a le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** *Le problème (1.3)-(1.11) admet une solution telle que  $d \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^2(\Gamma_2)) \cap W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2))$ ,  $p \in W^{1,\infty}(0, T; V) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\sigma \in L^2(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_2))$  et  $b \in W^{1,\infty}(0, T; H_0^2(\Gamma_2))$ .*

La preuve s'inspire d'arguments utilisés dans [118] et [92]. Toutefois, pour contourner les difficultés liées aux non linéarités de Von Karman, on introduit un espace de stabilité qui induit une condition de données petites. Cette hypothèse n'est pas incompatible avec la physique du problème car ce type de modèle n'a de sens que si les déplacements et les variations de pression ne sont pas "trop grands".

### 1.1.2 Approche numérique

Dans [118], P. Orenge et R. Papi utilisent une méthode de point fixe pour résoudre le problème couplé lorsque l'équation de plaque est linéaire et  $\mu = 0$ . Pour cela, ils pénalisent la condition de couplage qui se réécrit :

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \epsilon \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial p}{\partial n} \quad \text{sur } \Sigma_2$$

pour tout  $\epsilon > 0$ . Cette pénalisation permet d'obtenir un critère de convergence pour la méthode itérative liant le pas de temps et le paramètre  $\epsilon$ . Chacune des équations est résolue par éléments finis.

Dans [57], nous proposons de résoudre ce problème par la méthode de Galerkin en utilisant une base spéciale. Soit  $\{\Psi_i\}$  une base de  $H_0^2(\Gamma_2)$  on cherche  $d$  et  $b$  sous la forme  $d = \sum_i d_i(t)\Psi_i$  et  $b = \sum_i b_i(t)\Psi_i$ . Pour exprimer la pression  $p$ , on construit une base de  $V = H_0^1(\Omega) \oplus H$  où  $H$  est défini par  $H = \{h \in H^1(\Omega) ; \Delta h = h ; h = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ . Soient  $\{p_i\}$  une base de  $H_0^1(\Omega)$  et  $\{h_i\}$  une base de  $H$  définie par  $\Delta h_i = h_i$  dans  $\Omega$ ,  $h_i = 0$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\frac{\partial h_i}{\partial n} = \Psi_i$  sur  $\Gamma_2$ , on cherche  $p$  sous la forme  $p = \sum_i a_i(t)p_i + \sum_j c_j(t)h_j$ . La projection des équations sur ces bases nous conduit à la résolution d'un système différentiel du second ordre en temps :

$$[M] \frac{d^2 I}{dt^2} + [K] \frac{dI}{dt} + [C(t)]I = F \quad (1.12)$$

dans lequel les coefficients

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_2} \Delta \Psi_i \Delta \Psi_j + \sum_{k=1}^n b_k \int_{\Gamma_2} [\Psi_i, \Psi_k] \Psi_j \quad (1.13)$$

de la matrice  $[C(t)]$  dépendent des valeurs  $b_k$  et sont recalculés à chaque pas de temps en résolvant le système obtenu en projetant l'équation (1.8) sur la base  $\{\Psi_i\}$  de  $H_0^2(\Gamma_2)$  :

$$[A]\{b_k\} = \sum_{i=1}^n d_i \sum_{j=1}^n d_j \int_{\Gamma_2} [\Psi_i, \Psi_j] \Psi_k. \quad (1.14)$$

Plus précisément, les  $d_i(0)$  étant connus, on peut résoudre le système (1.14) à  $t = 0$  et obtenir les  $b_k(0)$ . Avec (1.13), on calcule alors les coefficients  $c_{ij}(0)$  de la matrice  $[C(t = 0)]$  et on résout le système (1.12) à l'aide d'un schéma de type Neumark ou  $\Theta$ -Wilson [40]. Le processus est répété à chaque pas de temps. Une série de tests numériques a été effectuée dans le cas où  $\Omega$  est un cube et  $\Gamma_2$  une face de ce cube. Lorsque  $\mu = 0$  et dans le cas linéaire,

nous disposons d'une solution analytique. Sur la figure 1.1, nous comparons l'évolution du premier coefficient de Galerkin  $d_1$  de notre solution numérique à cette solution analytique. Sur l'image de gauche, le problème est résolu avec  $\mu = 0$  ce qui revient à annuler la matrice  $[K]$ . Le schéma de Neumark perd alors sa stabilité et les solutions explosent. Le rôle joué par le terme de viscosité semble donc équivalent à celui joué par le terme pénalisant introduit par R. Papi et P. Orenga.

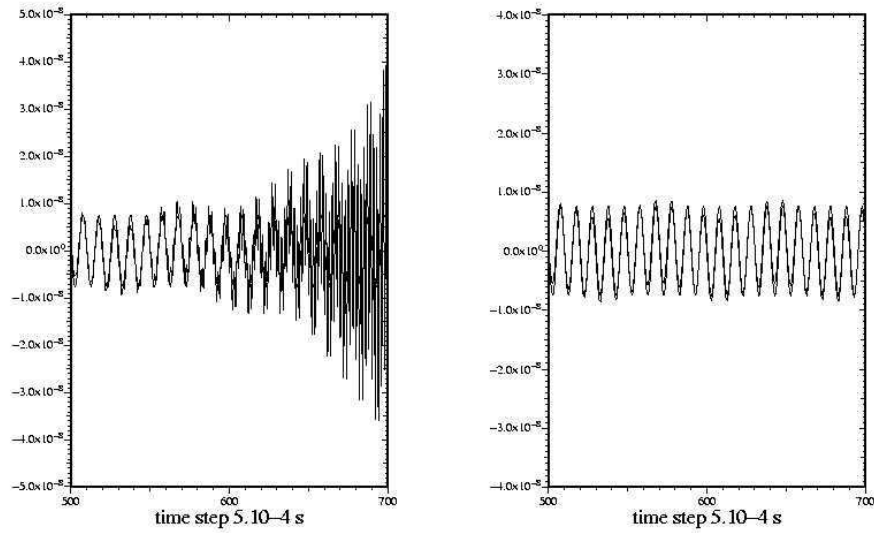


FIG. 1.1 – *comparaison analytique - numérique*

## 1.2 Un modèle de couplage à frontière variable [56][58][59]

Les travaux présentés dans cette section portent sur l'analyse d'un problème de couplage entre un fluide compressible et une plaque mince. On

suppose que le fluide est gouverné par un modèle de Navier-Stokes linéaire compressible. On montre l'existence et l'unicité de solutions régulières pour un modèle bidimensionnel et l'existence de solutions faibles lorsque le fluide occupe un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ . Ces résultats ont fait l'objet des publications [56], [58] et [59]. Contrairement à ce qui a été fait dans [57], on ne peut négliger les mouvements de la frontière si l'on veut obtenir des estimations d'énergie et montrer que le problème est bien posé. Ce type de problème est donc à frontière libre et peut être considéré comme une première approche pour modéliser le flux artériel. Dans le cas incompressible, un résultat d'existence de solutions fortes locales en temps a été obtenu par H. Beirao da Veiga dans le cas bidimensionnel [36]. Dans le cas tridimensionnel, A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban et C. Grandmont [22] obtiennent un résultat d'existence de solutions faibles. Dans [22], les auteurs annoncent que le résultat reste vrai dans le cas bidimensionnel lorsque la frontière est une membrane. Enfin, si les données sont suffisamment petites, l'existence et l'unicité d'une solution sont montrées dans le cas stationnaire par C. Grandmont [75].

### 1.2.1 Equations du problème

On note  $Q^p = \Omega^p \times (0, T)$  où  $\Omega^p$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) représentant physiquement la plaque au repos,  $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T)$  où  $\Gamma_1$  est une partie de la frontière fluide supposée fixe,  $\Sigma_2 = \cup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Gamma_2(t)$  où  $\Gamma_2(t)$  est la déformée de la plaque à l'instant  $t$ . On suppose que  $\Gamma_1$  et  $\Omega^p$  sont suffisamment réguliers. Dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ , on définit  $Q = \cup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_t$  avec  $\Omega_t = \cup_{x \in \Omega^p} (d(x, t), 1)$  le domaine occupé par le fluide à l'instant  $t$  et  $d(x, t)$  la flèche de la plaque. Si  $d(x, t)$  est une fonction continue de  $x$  et  $t$ , alors  $\Omega_s = Q \cap \{t = s\} \neq \emptyset$ .

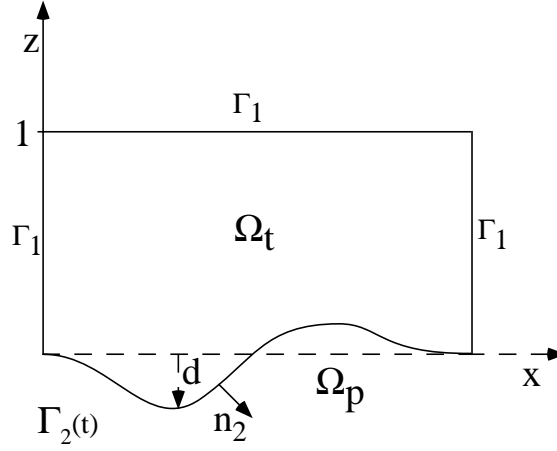


FIG. 1.2 – *domaine 2D*

On se place dans le cas d'un fluide isentropique où l'on suppose que la pression  $p$  ne dépend que de la densité  $\rho$  :

$$p(\rho) = a\rho^\gamma, \quad a > 0, \quad \gamma \geq 1.$$

Les équations du fluide sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + a \nabla \rho^\gamma = 0, \quad \text{dans } Q, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad \text{dans } Q, \quad (1.16)$$

$$\operatorname{rot} u \wedge n = 0, \quad \text{sur } \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad (1.17)$$

$$u \cdot n = 0, \quad \text{sur } \Sigma_1, \quad (1.18)$$

$$u(t=0) = u_0, \quad \rho(t=0) = \rho_0 \geq 0, \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (1.19)$$

Le mouvement de la structure est gouverné par l'opérateur biharmonique des plaques minces. Un terme supplémentaire correspondant à l'inertie de rotation de la plaque [67] [139] peut être introduit dans ce modèle. Ce terme  $\left(-\Delta \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}\right)$  joue un rôle important puisqu'il permet de montrer que  $d(x,t) \in C(\overline{Q^p})$  ce qui assure que  $\Omega_t$  n'est jamais vide. Dans [22], un terme "visqueux"  $\left(\nu \Delta^2 \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}, \nu > 0\right)$  jouant un rôle similaire est introduit.

Si on note  $\sigma$  la contrainte appliquée par le fluide à la plaque, les équations décrivant l'évolution de  $d(x,t)$  sont :

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + \Delta^2 d - \Delta \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = f + \sigma \quad \text{dans } Q^p, \quad (1.20)$$

$$d = \frac{\partial d}{\partial n^p} = 0 \quad \text{sur } \partial Q^p, \quad (1.21)$$

$$d(t=0) = \frac{\partial d}{\partial t}(t=0) = d_1 \quad \text{sur } \Omega^p. \quad (1.22)$$

La normale extérieure à  $\Omega_t$  sur  $\Gamma_2(t)$  est définie par ses coordonnées  $\cos(\omega_i)$  avec  $i \leq N$  :

$$\cos(\omega_i) = \frac{\frac{\partial d}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial d}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial x_2}\right)^2}} \quad \text{si } i < N, \quad (1.23)$$

$$\cos(\omega_i) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial d}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial x_2}\right)^2}} \quad \text{si } i = N. \quad (1.24)$$

On suppose que la vitesse normale à l'interface plaque-fluide correspond à la projection de la vitesse du déplacement sur la normale à  $\Omega^p$  :

$$u \cdot n = \frac{\partial d}{\partial t} \cos(\omega_N) \quad \text{sur } \Sigma_2. \quad (1.25)$$

La force appliquée par le fluide à la structure est :

$$\sigma = -a\rho^\gamma + \mu \operatorname{div} u. \quad (1.26)$$

Pout tout  $\Theta$  suffisamment régulier, on vérifie que la condition de couplage (1.25) entraîne :

$$\int_{\Gamma_2} \Theta u \cdot n \, d\Gamma_2 = - \int_{\Omega^p} \Theta \frac{\partial d}{\partial t} \, dx. \quad (1.27)$$

La propriété (1.27) est utilisée pour montrer que l'on a conservation de la masse et s'avère déterminante pour l'obtention d'estimations d'énergie.



### 1.2.2 Un résultat d'existence

Lorsque  $N = 2$  ou  $3$  et  $\gamma = 1$ , on montre un résultat d'existence de solutions faibles pour le problème (1.15)-(1.27) [58]. Lorsque  $N = 2$  et  $\gamma = 1$ , on donne un résultat d'unicité pour des solutions régulières [56] [59].

Soient  $K$  une constante positive ne dépendant que des données,  $\epsilon \in (0,1)$ ,  $f \in L^1(0,T; H^{-1}(\Omega^p))$ ,  $d_0 \in H_0^2(\Omega^p)$ ,  $d_1 \in H_0^1(\Omega^p)$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega_0)$  et  $\rho_0 \log \rho_0 \in L^1(\Omega_0)$  vérifiant :

$$2\text{mes}(\Omega_t) + (1 - \epsilon) \|d_1\|_{H_0^1(\Omega^p)}^2 + \|d_0\|_{H_0^2(\Omega^p)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + 2 \int_{\Omega_0} \rho_0 \log \rho_0 + \frac{2}{\epsilon} \|f\|_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega^p))}^2 < K(1 - \epsilon)\mu^2, \quad (1.28)$$

alors  $\|u(t)\|_{L^2(\Omega_t)}^2 < K(1 - \epsilon)\mu^2$  et on a le résultat suivant :

**Théorème 1.2.** *Si  $N = 3$  et  $\gamma = 1$ , le problème (1.15)-(1.27) admet une solution  $(u, \rho, d)$  telle que  $u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_t)) \cap L^2(0,T; H^1(\Omega_t))$ ,  $\rho \log \rho \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega_t))$ ,  $\rho \in L^{\frac{3}{2}}(Q)$ ,  $d \in W^{1,\infty}(0,T; H_0^1(\Omega^p)) \cap L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega^p))$ ,  $\sigma \in H^{-1}(0,T; H^{-2}(\Omega^p))$ .*

L'existence est montrée à l'aide d'un point fixe de Schauder [144]. On se donne  $d$  et on étudie ainsi les équations du fluide pour une géométrie donnée. Pour surmonter la difficulté de travailler dans un domaine non cylindrique, on procède à une régularisation elliptique de l'équation des moments. Cet outil a été introduit par J.L. Lions dans [90] et [93] pour des équations d'évolution non linéaires puis utilisé par R. Salvi dans [129] pour montrer l'existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes incompressibles dans un domaine non cylindrique de  $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ . La structure est alors résolue pour une contrainte donnée provenant des équations du fluide régularisées. Le problème est recouplé grâce à une procédure de point fixe.

Ce résultat est vrai pour  $N = 2$  ou  $3$ . En dimension 2, l'estimation sur  $\rho \log \rho$  dans  $L^\infty(0,T; L^1(\Omega_t))$  est suffisante pour passer à la limite dans l'équation de continuité [116]. En dimension 3, on introduit une estimation

supplémentaire sur  $\rho$  dans  $L^{\frac{3}{2}}(Q)$  qui permet de passer à la limite dans  $\rho u$ . L'obtention de cette estimation passe par une renormalisation de l'équation de continuité. Pour justifier cette renormalisation, on pénalise l'équation de continuité avec  $\delta\rho^2$ ,  $\delta > 0$ . Pour plus de détails sur ce type de techniques on consultera [97] [98] [42].

Dans le cas bidimensionnel on peut montrer le résultat suivant [56] [59] :

**Théorème 1.3.** *Si  $N = 2$ ,  $\gamma = 1$  et  $\rho_0 \in W^{1,4}(\Omega_0)$ , le problème (1.15)-(1.27) admet une solution unique vérifiant les estimations du Théorème 1.2 et telle que  $u \in L^4(0,T; W^{2,4}(\Omega_t))$ ,  $\rho \in L^\infty(0,T; W^{1,4}(\Omega_t))$ ,  $\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} \in L^4(0,T; W^{2,4}(\Omega^p))$ ,  $\Delta^2 d \in L^4(Q^p)$ .*

Ce résultat utilise des techniques introduites par A.V. Kazhikhov et V.A. Weigant dans le cas d'un problème de Navier-Stokes compressible linéaire pour un écoulement irrotationnel lorsque le domaine est fixe [86] [141] et s'inspire des travaux de F.J. Chatelon et P. Orenge qui obtiennent des résultats d'existence et d'unicité pour un problème de shallow water avec des conditions aux limites du type  $u.n = \text{rot } u = 0$  [26]. Evidemment, dans le cas du problème à frontière libre (1.15)-(1.27), chercher la régularité des solutions du fluide n'a de sens que si l'on obtient suffisamment de régularité sur le déplacement  $d$  de la structure. En particulier, pour que la borne en espace sur  $u$  dans  $W^{2,4}$  ait un sens il faut s'assurer que  $d$  ait suffisamment de régularité pour que le domaine soit  $C^{1,1}$  [3] [12] [113].

### 1.3 Etude d'un problème de flux artériel [51] [52]

Nous consacrons cette section à l'étude d'un modèle de flux sanguin permettant de simuler numériquement avec un coût raisonnable le flux artériel. Cette question a fait l'objet de nombreux travaux de la part de L. Formaggia, J.F. Gerbeau, F. Nobile et A. Quarteroni [63] [62] ou L. Formaggia et A. Veneziani [64] qui consacrent de longs développements à la modélisation et

au traitement numérique de ce type de problème. Concernant la question plus théorique de l'existence de solutions, il convient de citer le travail de H. Beirao da Veiga qui donne un théorème d'existence de solutions fortes locales en temps [36] ou le travail de A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban et C. Grandmont [22] qui montrent un résultat d'existence de solutions faibles. Dans l'ensemble de ces travaux le flux sanguin est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles. Dans [52], nous nous plaçons dans un cas plus général en supposant que l'écoulement est donné par un modèle de Navier-Stokes compressible isentropique. Pour la structure, on utilise un opérateur de coque cylindrique de type Donnell et à l'image de ce qui est fait par B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont et P. Le Tallec dans [39], on utilise une approche modale pour décrire le déplacement de la structure. Nous donnons un résultat d'existence de solutions faibles utilisant un résultat local de compacité sur la densité que nous avons démontré dans [51].

### 1.3.1 Les équations du problème

On introduit un modèle qui peut s'avérer utile pour étudier les effets du raidissement local d'un vaisseau sur le flux dans lequel on néglige l'effet des globules. Le modèle décrit les effets du mouvement de la paroi de l'artère sur l'écoulement. Les équations sont établies pour une artère cylindrique souple sans bifurcation notée  $\Omega^p$  dont la déformation est  $\Gamma_2(t)$ . On note  $\Omega_t$  le domaine occupé par le sang,  $\Gamma^-$  la zone de la frontière où le flux est entrant,  $\Gamma^+$  la zone de la frontière où le flux est sortant. On suppose que  $\Omega^p$  est de longueur  $L$  ( $x \in (0, L)$ ) et que c'est un cylindre rectiligne.

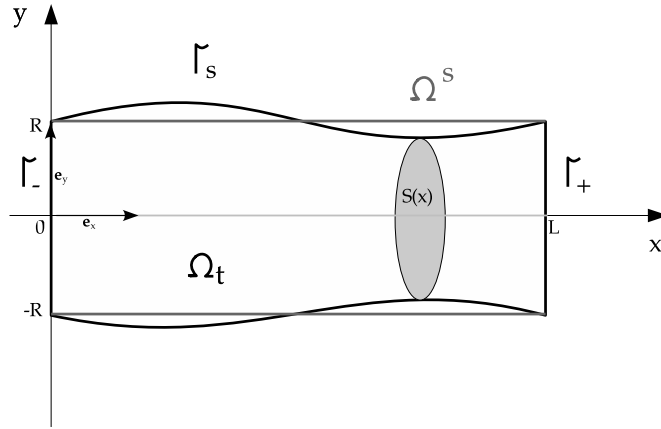


FIG. 1.3 – *domaine 2D*

Le modèle est obtenu en faisant l'hypothèse que les variables sont indépendantes de la coordonnée angulaire et qu'ainsi toute section de l'artère reste circulaire au cours du mouvement. On suppose en outre que l'axe du cylindre reste fixe au cours du temps (ce qui est en accord avec l'hypothèse précédente). Enfin pour des raisons techniques, on ne prend pas en compte les forces extérieures. Le mouvement  $d = (d_x, d_y)^T$  de l'artère est donné par l'opérateur de Donnell [108] auquel on ajoute un terme d'amortissement du type Kelvin-Voight [8] [127]:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + A(d) + A\left(\frac{\partial d}{\partial t}\right) = F \quad \text{sur } Q^p = \Omega^p \times (0, T), \quad (1.29)$$

où  $F$  est la contrainte appliquée par le fluide à l'artère et

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d^4}{dx^4} + 1 \end{pmatrix}$$

avec pour simplifier :  $d_x = d_y = \frac{dd_y}{dx} = 0$  en  $x = 0$  et  $x = L$ . Comme dans [39], on approche  $d$  par sa décomposition sur les  $N_p$  premiers modes propres  $\phi_i$  de  $A$ . Si les  $\phi_i$  sont suffisamment réguliers, on peut définir la normale extérieure

$n$  à  $\Omega_t$ . Le sang est décrit par les équations (1.15)-(1.16) (dans lesquelles on a conservé le terme d'advection) munies des conditions aux limites :

$$u \cdot n = G^+ \geq 0, \text{ rot } u = 0, \text{ sur } \Sigma^+ = \Gamma^+ \times (0, T), \quad (1.30)$$

$$u \cdot n = G^- \leq 0, \text{ rot } u = 0, \text{ sur } \Sigma^- = \Gamma^- \times (0, T), \quad (1.31)$$

$$u = \frac{\partial d}{\partial t}, \text{ sur } Q^p = \Omega^p \times (0, T), \quad (1.32)$$

$$\rho = P_i, \text{ sur } \Sigma^- = \Gamma^- \times (0, T). \quad (1.33)$$

La condition (1.33) est naturelle, a un sens (cf. lemme 1.6) et permet d'obtenir des estimations d'énergie. La contrainte appliquée au vaisseau est :

$$F = -\sigma \cdot n \det J, \text{ sur } Q^p = \Omega^p \times (0, T) \quad (1.34)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes du sang et  $\det J$  le déterminant de la matrice Jacobienne permettant de passer de  $\Omega^p$  à  $\Gamma_2(t)$ .

### 1.3.2 Un résultat d'existence

Dans [52], sous des hypothèses de données petites, on montre que le déterminant de  $J$  est non nul. Cela donne un sens à l'application permettant de passer de  $\Omega^p$  à  $\Gamma_2(t)$ . En outre, on a le résultat suivant :

**Lemme 1.4.** *Si  $\gamma = 1$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega_0)$ ,  $\rho_0 \log \rho_0 \in L^1(\Omega_0)$  et si  $P_i \log P_i - P_i \in (H^1(0, T; H^p(\Gamma^-)))'$  avec  $p > \frac{3}{2}$ , alors  $\rho \log \rho \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_t))$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t))$ ,  $d_x \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega^p)) \cap H^1(0, T; H_0^1(\Omega^p))$ ,  $d_y \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega^p)) \cap H^1(0, T; H_0^2(\Omega^p))$ .*

Toujours pour des données petites, dans le cas  $\gamma > 1$ , ce résultat est complété par :

**Lemme 1.5.** *Si  $\gamma > 1$ ,  $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega_0)$  et si  $P_i^\gamma \in (H^1(0, T; H^p(\Gamma^-)))'$  avec  $p > \frac{3}{2}$ , alors  $\rho \in L^\infty(0, T; L^\gamma(\Omega_t))$ .*

Ces estimations conduisent à un résultat donnant un sens aux conditions (1.33) et (1.34) :

**Lemme 1.6.** *Sous les hypothèses des lemmes 1.3 et 1.4 on a*

$$\rho_{\Sigma^-} \in (W^{1, \infty}(\Sigma^-))'$$

et

$$F \in H^{-2}(Q^p).$$

**Remarque 1.7.** Sur la question du sens à donner à la trace de  $\rho$  sur le bord, on pourra consulter ce qui est fait par F.J. Chatelon et P. Orenge dans [24] et [25] pour un problème de shallow water.

Dans le cas  $\gamma = 1$ , les estimations obtenues aux lemmes 1.4 et 1.6 sont suffisantes pour montrer l'existence d'une solution. Lorsque  $\gamma > 1$ , on introduit un résultat de régularité local sur  $\rho$  à la manière de ce qui est fait dans [51]. Cette compacité supplémentaire est utile pour passer à la limite dans le terme de pression  $\nabla \rho^\gamma$  comme le fait par P.L. Lions dans [98] et montrer l'existence d'une solution. En particulier, la démonstration de P.L. Lions utilise le lemme "crucial" suivant :

**Lemme 1.8.** *Soient  $p_1, p_2 \in C([0, \infty))$  deux fonctions croissantes. On suppose que  $p_1(\rho), p_2(\rho)$  et  $p_1(\rho)p_2(\rho)$  sont relativement compacts dans  $L^1(K \times (0, T))$  pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ . Alors  $\overline{p_1(\rho)p_2(\rho)} \geq \overline{p_1(\rho)} \overline{p_2(\rho)}$  où  $\overline{p_1(\rho)}, \overline{p_2(\rho)}$  et  $\overline{p_1(\rho)p_2(\rho)}$  désignent les limites faibles dans  $L^1(K \times (0, T))$ .*

Dans sa preuve, P.L. Lions pose  $p_1(\rho) = \rho^\theta$  avec  $\theta > 0$  et  $p_2(\rho) = \rho^\gamma$ . On voit que la compacité induite par le lemme 1.5 est insuffisante pour appliquer le lemme 1.7, c'est pourquoi on montre le résultat suivant [52] [51] :

**Lemme 1.9.** *Si  $1 \leq \theta < \gamma$  et si les hypothèses des lemmes 1.4 et 1.5 sont satisfaites, on a  $\rho$  borné dans  $L^{\gamma+\theta}(0, T; L^{\gamma+\theta}(K_t))$ .*

Pour démontrer ce lemme on utilise l'argument suivant. Si le déplacement de la frontière est suffisamment régulier (ce qui est le cas), on peut définir  $K \subset \cup_{t \in [0, T]} \Omega_t$  tel que  $K_t = K \cap \Omega_t$  soit compact pour tout  $t$ . On introduit une fonction  $\phi \in C^\infty([0, T]; C_0^\infty(\Omega_t))$  telle  $\phi \equiv 1$  sur  $K$  et  $0 \leq \phi \leq 1$  sur  $\cup_{t \in [0, T]} \Omega_t$ . Ainsi  $\phi u$  vérifie les conditions aux limites suivantes :  $\text{rot}(\phi u) = (\phi u).n = 0$  sur  $\Sigma$ . En conséquence, il existe (voir par exemple [117] [115] [70] ou ce qui est fait dans [26])  $u_p = \nabla p$  et  $u_q = \text{Rot} q$  où  $p$  et  $q$  vérifient :

$$-\Delta p = \text{div}(\phi u) \text{ sur } \Omega_t, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma,$$

et

$$-\Delta q = \operatorname{rot}(\phi u) \text{ sur } \Omega_t, \quad q = 0 \text{ sur } \Sigma$$

tels que  $\phi u = u_p + u_q$ . Ainsi, en multipliant l'équation des moments par  $\phi$ , on parvient à :

$$\phi \rho^\gamma = -\frac{\partial p}{\partial t} + \mu \Delta p + \xi \tag{1.35}$$

où  $\xi$  est issu de la projection de différents termes de l'équation et dépend du mouvement de la frontière. A ce stade, on pose  $\phi = \psi^\gamma$  et on multiplie (1.35) par  $(\psi \rho)^\theta$ . On montre alors que  $\xi$  a suffisamment de régularité pour que  $\psi \rho$  soit borné dans  $L^{\gamma+\theta}(0, T; L^{\gamma+\theta}(K_t))$ .

On propose une construction des solutions approchées basée sur une pénalisation de l'équation des moments permettant de se ramener à un domaine fixe (ou domaine fictif). Cette méthode a été introduite par J.L. Lions dans [89] pour des équations d'évolution sur des ouverts non cylindriques. Ce type de méthode a été utilisé par H. Fujita et N. Sauer [65] pour montrer l'existence de solutions faibles pour le problème de Navier-Stokes incompressible sur un domaine à frontière variable.

L'idée de formuler globalement le problème sur un domaine fictif est aussi utilisée par B. Desjardins et M.J. Esteban [37] [38] pour des résultats d'existence relatifs à l'étude du mouvement de particules dans un fluide. D'un point de vue numérique, R. Glowinski, T.W. Pan et J. Périaux utilisent cette approche [73] [72] [74] [119] qui permet d'employer un maillage fixe. Enfin, on peut citer P. Angot, C.H. Bruneau et P. Fabrie qui utilisent une méthode de pénalisation pour simuler l'écoulement autour d'obstacles [7].

Dans notre cas, la frontière du domaine étant suffisamment régulière, on peut prolonger le problème à un domaine fixe en pénalisant les équations à l'aide d'un terme en vitesse dépendant d'un paramètre  $\epsilon > 0$ . On montre que l'on recouvre les solutions du problème initial lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. L'autre particularité de cette approche est de permettre la modification des conditions aux limites sur la frontière fictive. En particulier, on remplace la condition de Dirichlet par une condition du type  $u \cdot n = \operatorname{rot} u = 0$  ce qui

permet d'utiliser la méthode de Galerkin avec une base spéciale bien adaptée à ce type de problème [117]. Le domaine étant fixe, on peut utiliser un schéma Lagrangien sans risquer de voir dégénérer le maillage. A la section suivante, nous proposons un schéma Lagrangien dont nous étudions la convergence.

## 1.4 Un schéma numérique Lagrangien [53]

On a vu que les problèmes de couplage peuvent être traités en adoptant soit une formulation globale du problème d'interaction soit en résolvant séparément les équations du fluide et de la structure que l'on recouple avec un point fixe. La difficulté de la dépendance en temps du domaine peut être contournée en utilisant des techniques de pénalisation [65] [82] [52], de régularisation elliptique [129] [56] [58] ou en écrivant les équations en coordonnées Lagrangiennes [37] [38]. Numériquement, cette dépendance en temps du domaine requiert aussi de faire appel à des techniques particulières. Deux grandes stratégies peuvent être proposées. La première consiste à se ramener à un domaine fixe. Cette approche présente l'indéniable avantage de travailler avec un maillage fixe. Toutefois, elle nécessite le développement de techniques numériques pour suivre l'interface dont la reconstitution des déplacements n'est pas aisée. La deuxième grande stratégie consiste à utiliser la formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Cette formulation consiste à travailler sur un maillage évolutif dont les mouvements sont donnés par une loi arbitraire et dont la seule contrainte est d'égaliser la vitesse du maillage et la vitesse du fluide à l'interface. Sur cette question on consultera les travaux de T.J.R. Hughes, W. Liu et T.K. Zimmerman [84], J. Donea [43], J. Donea, A. Huerta et J. Sarrate [45] ou J. Donea, A. Heurta, J-ph Ponthot et A. Rodriguez-Ferran [44].

Dans [53], on propose un schéma Lagrangien pour résoudre le système ( $\mathcal{F}$ ) ((1.15)-(1.16) avec le terme d'advection) dans le cas bidimensionnel lorsque  $\gamma > 1$  et pour des données petites. La description Lagrangienne



permet de suivre chaque particule dans son mouvement et ainsi de prendre naturellement en compte les déplacements de la frontière. Dans [11], M. Bercovier, O. Pironneau and V. Sastri présentent des tests numériques sur des problèmes paraboliques/hyperboliques pour évaluer qualitativement certaines procédures basées sur des schémas du type "éléments finis-caractéristiques". On peut aussi se référer à la méthode "caractéristiques-Galerkin" proposée par O. Pironneau et S. Huberson [125] et à l'algorithme "transport-diffusion" introduit par O. Pironneau [123] pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Sur l'étude des schémas mixtes "caractéristiques-Galerkin", on mentionne aussi le travail de E. Süli [136]. Plus récemment, on peut citer le papier de Y. Achdou et J.-L. Guermond [2] sur l'analyse de la convergence du schéma "Lagrange-Galerkin" pour les équations incompressibles de Navier-Stokes. Tous ces travaux concernent des problèmes définis sur des domaines indépendants du temps ce qui n'est pas le cas de  $(\mathcal{F})$ .

Dans cette section et à l'image de ce qui est fait dans [53], on analyse les équations de Navier-Stokes en supposant le mouvement de la frontière connu. Pour fixer les idées et respecter la régularité du déplacement de la plaque (par exemple), on suppose que  $d = d^* \in W^{1,\infty}(0,T; H_0^1(\Omega^p)) \cap L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega^p))$ . Puisque le mouvement de la structure est donné, le principe d'action-réaction exprimé avec la contrainte devient :

$$[\mu Du - \rho^\gamma I] \cdot n(y(t),t) = \sigma(d^*) \cdot n(y(t),t), \forall y(t) \in \Gamma_2(t),$$

où  $\sigma(d^*)$  est la réaction de la plaque à la force appliquée par le fluide. La régularité de  $d^*$  permet de définir la normale extérieure à  $\Omega_t$  sur  $\Gamma_2(t)$  puisque  $d^* \in C^{0,1}(\Omega^p)$  pour presque tout  $t \in [0,T]$ .

Notre propos est de construire des solutions de  $(\mathcal{F})$  comme des limites des solutions d'un problème  $(\mathcal{F}^\epsilon)$  ( $\mathcal{F}^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}$ ) dans lequel l'équation de continuité est pénalisée avec le terme  $\epsilon \rho^{\gamma+1}$ . Pour approcher la dérivée Lagrangienne, on propose un schéma de différences finis auquel on ajoute un opérateur régularisant dépendant du pas de discrétisation et tendant vers 0 lorsque le pas tend vers 0. Le terme de pénalisation  $\epsilon \rho^{\gamma+1}$  permet notamment de

passer à la limite dans  $\nabla\rho^\gamma$  dans le problème discret. On montre que l'opérateur régularisant introduit dans le schéma Lagrangien donne la compacité nécessaire pour justifier la discrétisation et pour passer à la limite dans les équations.

### 1.4.1 Discrétisation du domaine

On considère les courbes caractéristiques données par l'équation  $\frac{dx(t)}{dt} = u(x(t),t)$  qui est discrétisée sous la forme

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t u_k, \quad k \in \{0, \dots, M-1\}, \quad \Delta t = \frac{T}{M},$$

où  $u_k$  est définie plus loin. On commence par la discrétisation du bord  $\Sigma_2$ . On note avec un astérisque les points appartenant aux courbes approchées. On suppose que les frontières réelles et approchées sont confondues à  $t = 0$ . Les  $M$  frontières  $\Gamma_2(t = k\Delta t)$  sont approchées par les  $M$  frontières  $\Gamma_2^*(t = k\Delta t) = \Gamma_{2k}$  en utilisant la relation

$$y_k^* = y_{k-1}^* + \Delta t \frac{\partial d^*}{\partial t}(y_{k-1}, t = (k-1)\Delta t),$$

où  $y_i^* = y^*(t = i\Delta t)$  et  $y_i = y(t = i\Delta t)$ . On pose  $n_{2k}$  la normale extérieure sur  $\Gamma_{2k}$ . On construit par récurrence  $M$  domaines approchés

$$\Omega_k = \{x_k \in \mathbb{R}^2 / x_k = x_{k-1} + \Delta t u_{k-1}, x_{k-1} \in \Omega_{k-1}\}$$

avec  $k \in \{1, \dots, M\}$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \partial Q_{\Delta t} = & \left\{ (y^*, t) \in \mathbb{R}^2 \times ]\Delta t, T[ \right. / \\ & y^*(t) = y_k^* + (t - k\Delta t) \frac{\partial d^*}{\partial t}(y_k, t = (k-1)\Delta t), \\ & \left. t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[, y_i \in \Gamma_i, k \in \{0, \dots, M-1\} \right\}, \\ Q_{\Delta t} = & \left\{ (x^*, t) \in \mathbb{R}^2 \times ]\Delta t, T[ \right. / x^*(t) = x_k + (t - k\Delta t) \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} \right), \\ & \left. t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[, x_i \in \Omega_i, k \in \{0, \dots, M-1\} \right\}. \end{aligned}$$

Classiquement, si  $d^*$  est choisi suffisamment régulier, alors  $Q_{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} Q$ .

### 1.4.2 Problème approché

Notons  $\tilde{x}_k = x_{k-1}$  la position dans  $\Omega_{k-1}$  de la particule située en  $x_k$  au temps  $t = k\Delta t$ . On approche la dérivée Lagrangienne dans l'équation des moments par  $\frac{u_k - \tilde{u}_{k-1}}{\Delta t} + \Delta t^\alpha A u_k$  où  $t_k = k\Delta t$ ,  $u_k = u(x_k, t_k)$ ,  $\tilde{u}_{k-1} = u(\tilde{x}_k, t_{k-1}) = u(x_k + \Delta t \tilde{u}_{k-1, t_{k-1}})$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $A$  est un opérateur tel que  $D(A) \equiv H_0^3(\Omega_k)$  et  $\Delta t^\alpha A u_k \rightarrow 0$  au sens des distributions quand  $\Delta t \rightarrow 0^+$ .

**Remarque 1.10.** La contrainte normale appliquée par le fluide est "perturbée" par l'opérateur régularisant  $A$ . Ainsi, le principe d'action réaction devient :

$$\sigma(d^*).n(y(t), t) = [\mu D u - \rho^\gamma I] . n + \Delta t^\alpha \text{Tr}(A u) \quad \forall t, \forall y(t) \in \Gamma(t).$$

Dans l'équation de continuité, on approche la dérivée Lagrangienne par  $\frac{\rho_k - \tilde{\rho}_{k-1}}{\Delta t} + \Delta t^\alpha B(\rho_k)$  où  $B$  est un opérateur tel que  $D(B) \equiv H^1(\Omega_k)$ ,  $\Delta t^\alpha B(\rho_k) \rightarrow 0$  au sens des distributions quand  $\Delta t \rightarrow 0^+$ . On obtient finalement le problème approché :

$$u_k - \mu \Delta t \Delta u_k + \Delta t^{1+\alpha} A u_k + \Delta t \nabla \rho_k^\gamma = \tilde{u}_{k-1} \quad \text{dans } \Omega_k,$$

$$\rho_k + \Delta t \rho_k \text{div } u_k + \Delta t^{1+\alpha} B(\rho_k) + \epsilon \Delta t \rho_k^{\gamma+1} = \tilde{\rho}_{k-1} \quad \text{dans } \Omega_k,$$

$$u_k = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

$$u_k = \frac{\partial d^*}{\partial t}(t = k\Delta t) \det J(\Gamma_k) \quad \text{sur } \Gamma_{2k},$$

$$[\mu D(u_k) - \rho_k^\gamma I] . n_k + \Delta t^\alpha \text{Tr}(A u_k) = \sigma(d^*).n(t = k\Delta t) \det J(\Gamma_{2k}) \quad \text{sur } \Gamma_{2k},$$

$$+ \text{conditions aux limites pour } \Delta t^\alpha A u_k \quad \text{sur } \Gamma_k,$$

$$+ \text{conditions aux limites pour } \Delta t^\alpha B \rho_k \quad \text{sur } \Gamma_k,$$

$$u(k=0) = u_0; \rho(k=0) = \rho_0 \geq 0 \text{ p.p.} \quad \text{dans } \Omega_0,$$

où  $J(\Gamma_{2k})$  est la matrice Jacobienne permettant de passer de la frontière réelle  $\Gamma_2(t = k\Delta t)$  à la frontière approchée  $\Gamma_{2k}$ . Le déterminant de  $J(\Gamma_{2k})$  est non nul si  $d^*$  est suffisamment régulier.

### 1.4.3 Quelques propriétés

L'existence d'une solution pour le problème discret peut être obtenue en utilisant le théorème de point fixe de Leray-Schauder [144] à la manière de ce qui est fait dans ([98], p.86), [68] ou [69] pour des problèmes semblables. Dans [53], on met en évidence certaines propriétés de cette discrétisation. La compacité introduite par l'opérateur  $A$  joue un rôle essentiel dans les démonstrations. En effet, elle permet de montrer que l'application  $x_{k+1} = x_k + \Delta t u_k$ , définissant le passage de  $\Omega_k$  à  $\Omega_{k+1}$ , a un sens. Plus précisément, cette compacité permet de prouver que l'on peut toujours trouver un  $\Delta t$  suffisamment petit pour que le déterminant de la matrice Jacobienne

$$J(\Omega_k) = \begin{pmatrix} 1 + \Delta t \frac{\partial u_{k1}}{\partial x_{k1}} & \Delta t \frac{\partial u_{k1}}{\partial x_{k2}} \\ \Delta t \frac{\partial u_{k2}}{\partial x_{k1}} & 1 + \Delta t \frac{\partial u_{k2}}{\partial x_{k2}} \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

soit non nul (et même strictement positif). L'autre résultat dû à  $\Delta t^\alpha A$  est de montrer, en utilisant les propriétés des espaces Sobolev, qu'un point ne peut sortir du domaine d'un pas de temps à l'autre. Enfin, on établit que  $\Delta t u_k \rightarrow 0$  quand  $\Delta t \rightarrow 0$ , ce qui permet de passer à la limite dans les équations discrètes et en particulier de retrouver les termes d'advection.



# Chapitre 2

## Analyse de problèmes d'écoulements peu profonds à surface libre

---

Les premiers modèles mathématiques du mouvement des fluides ne sont en fait qu'une forme adaptée des relations fondamentales de la dynamique reliant la force et l'accélération établies par I. Newton (1642-1727) en 1687. Plus précisément, L. Euler (1707-1783) et L. Lagrange (1736-1813) développent dès le XVIIIème siècle des modèles décrivant le mouvement de fluides sans viscosité que nous appelons aujourd'hui parfaits. Ce type de modélisations a permis d'importantes applications dues à D. Bernoulli (1700-1782) ou à G.B. Venturi (1746-1822) mais a aussi montré ses limites, notamment en ce qui concerne l'analyse des phénomènes de couplage fluide-structure. Il faut attendre le XIXème siècle pour voir l'écriture des équations de Navier-Stokes ou équations fondamentales de l'hydrodynamique qui honorent les noms de l'ingénieur Français H. Navier (1785-1836) [112] et de Sir G. Stokes (1819-1903) [135]. Leur écriture n'a été rendue possible que grâce aux progrès réalisés sur la théorie de l'élasticité et le calcul tensoriel. Leur forme très complexe rendait leur étude très difficile et il fallut attendre J. Leray en 1933 [87] pour obtenir les premiers résultats d'existence et d'unicité de solutions faibles. De nombreux résultats furent ensuite obtenus parmi lesquels il convient de souligner ceux de P.L. Lions et ses contributions fondamentales sur les fluides compressibles [98]. Toutefois, des questions restent encore

---

ouvertes, en particulier l'unicité de la solution en dimension trois n'a jamais été démontrée. Dans les lignes qui suivent, on s'intéresse à des formes simplifiées des équations de Navier-Stokes en insistant sur les écoulements à surface libre en eau peu profonde.

Les équations qui régissent les écoulements en eau peu profonde furent publiées par J.C.A Barré, Comte de Saint-Venant (1797-1886), en 1871 [128]. La principale opération donnant les équations de Saint-Venant (ou de "shallow water" en anglais) à partir des équations de Navier-Stokes est une moyenne sur la verticale. Toutefois l'existence de termes non linéaires oblige à quelques hypothèses et approximations qui conditionnent le domaine de validité. Ces équations sont employées dans des domaines aussi divers que l'océanographie, la sédimentologie, l'étude des crues, la simulation des tsunamis. Les équations de Saint-Venant jouent donc un rôle fondamental dans la protection de l'environnement.

L'étude mathématique de ces équations a fait l'objet de nombreuses publications. D'un point de vue théorique, on citera les travaux de B.A. Ton [140], C. Bernardi et O. Pironneau [14], V.I. Agoshkov, D. Ambrosi, D. Pennati, A. Quarteroni et F. Saleri [4], P. Oregna [116], F.J. Chatelon et P. Oregna [25] [26], S. Chippada, C.N. Dawson, M.L. Martinez-Canales et M.F. Wheeler [27] [28], L. Sundbye [137] ou D. Bresch et B. Desjardins [20]. Concernant l'analyse numérique, de multiples schémas ont été proposés. Pour une approche reposant sur les différences finies on citera notamment P. Glaister [71], pour les éléments finis on renvoie en particulier à V.I. Agoshkov, D. Ambrosi, D. Pennati, A. Quarteroni et F. Saleri [4], pour les volumes finis on consultera par exemple K. Anastosiou et C.T. Chan [6] ou A. Bermudez, A. Dervieux, J.A. Desideri et M.E. Vazquez [13], enfin pour les méthodes spectrales on se penchera sur les travaux de B. Di Martino, F.J. Chatelon et P. Oregna [104] qui appliquent la méthode de Galerkin non linéaire développée par M. Marion et R. Temam [101].

Les lignes qui suivent sont consacrées à l'étude de diverses questions

rencontrées dans l'étude des équations de Saint-Venant, que ce soit d'un point de vue théorique ou numérique. A la section 1, on présente une série de résultats de régularité obtenue pour le terme d'advection et la hauteur d'eau dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet lorsque le terme de diffusion est de la forme  $-\mu\Delta u$  [60]. A la section 2, on s'intéresse avec F. Bosseur [17] à la question de la détermination de conditions aux limites par une méthode de contrôle optimal. A la section 3, avec B. Di Martino, C. Giacomoni et P. Orenge [107] [105] [106], on introduit un modèle de tsunami simulant l'élévation de la surface de l'eau lors d'un mouvement de la lithosphère. On donne des résultats d'existence, de régularité et d'unicité ainsi que quelques simulations numériques qui permettent de retrouver certains phénomènes observés physiquement. Enfin, à la section 4, on introduit un schéma de résolution mixte "Lagrange-Galerkin" [50] permettant de conserver la positivité de la hauteur d'eau et pour lequel on étudie la convergence.

## 2.1 Sur la notion de régularité [50] [60]

Les modèles de shallow water sont constitués d'une loi de conservation pour la hauteur d'eau  $h \geq 0$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) = 0, \text{ dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

et d'une équation pour la vitesse de la forme :

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \operatorname{div}(hu \otimes u) + D(h, u) + \frac{a}{2} \nabla h^2 = 0, \text{ dans } Q = \Omega \times (0, T), \quad (2.2)$$

où  $D(h, u)$  est un opérateur de diffusion,  $a > 0$ ,  $T > 0$  et  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Plusieurs modélisations de la diffusion sont possibles, citons en particulier [98] [88]:



$$D(h,u) = -\mu h \Delta u \quad (2.3)$$

$$D(h,u) = -\mu \Delta(hu) \quad (2.4)$$

$$D(h,u) = -\mu \operatorname{div}(h \nabla u). \quad (2.5)$$

On se donne des conditions initiales pour  $h$  et  $hu$  et on munit ces équations de conditions aux limites périodiques, de Dirichlet ou de la forme  $u.n = \operatorname{rot} u = 0$ . Le problème (2.1)-(2.2) semble ouvert si la diffusion est modélisée par (2.4). Si  $D(h,u)$  est décrit par (2.5), un résultat d'existence locale de solutions régulières a été démontré par L. Sundbye [137]. Lorsque l'on tient compte de la friction au fond [121] et de la tension de surface, D. Bresch et B. Desjardins montrent l'existence d'une solution faible globale [20]. Notons que le modèle de D. Bresch et B. Desjardins est clairement physique puisque les termes de friction et de tension de surface proviennent des équations de Navier-Stokes à surface libre. La régularité introduite par ce modèle permet de dériver les équations quasi-géostrophiques utilisées en océanographie.

Pour ce qui nous concerne, on s'intéresse au cas (2.3). Si  $h > 0$ , le système (2.1)-(2.2) peut être remplacé par :

$$(\mathcal{F}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + a \nabla h = 0, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) = 0, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.6)$$

On pose  $u_0 \in L^2(\Omega_0)$ ,  $h_0$  et  $h_0 \log h_0 \in L^1(\Omega)$ , de plus, comme P.-L. Lions dans [98] (p. 252) ou P. Orenge in [116], on suppose que :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx + a \int_{\Omega} h_0 \log h_0 dx < \frac{\mu^2}{2C_0^2} + a \int_{\Omega} h_0 \log \bar{h}_0 dx$$

où  $\bar{h}_0 = \frac{1}{\operatorname{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} h_0 dx$  et  $C_0$  est la meilleure constante de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1/2}.$$

La notion de solutions faibles utilisée est :  $h \geq 0$ ,  $h \log h \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega))$ ,  $u \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$  et les équations sont vérifiées au sens des distributions.

La question de la régularité et de l'unicité de la solution a été traitée pour des conditions aux limites du type  $u \cdot n = \text{rot } u = 0$  par F.J. Chatelon et P. Orenca [26] pour des données petites. Dans le cas d'un écoulement potentiel sans advection, des résultats similaires ont été obtenus par A.V. Kazhikhov [86](voir aussi V.A. Weigant et A.V. Kazhikhov [141]). Notre objectif est d'étendre au cas (2.6) une borne sur  $h$  dans  $L^2(Q)$  obtenue par P.L. Lions [99] pour des conditions de Dirichlet lorsque le nombre de Reynolds est faible. Nous donnons deux démonstrations dont une utilise des résultats de régularité sur le terme d'advection.

### 2.1.1 Une estimation sur le terme d'advection

Soit  $B_\eta^x$  la boule de centre  $x$  et de rayon  $\eta$ . Dans la suite, on note  $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$  l'espace des fonctions  $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$  dont la dérivée au sens des distributions  $Df$  est encore dans  $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$  l'espace de Hardy défini par :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^2) / \sup_{\eta \geq 0} |h_\eta * f| \in L^1(\mathbb{R}^2) \right\}$$

où  $h_\eta(x) = \eta^{-2} h(\frac{x}{\eta}) \geq 0$ , appartient à  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  et vérifie :  $\text{supp } h_\eta(x) \subset B_\eta^x$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} h_\eta(x) dx = 1$  (C. Fefferman and E. Stein [48], R. Coifman and G. Weiss [32]). Notons que  $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$  est un sous espace de l'espace de Sobolev  $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ . D.C. Chang, S.G. Krantz et E.M. Stein [23] puis J. Hogan, C. Li, A. McIntosh et K. Zhang [83] introduisent des espaces de Hardy définis sur des domaines bornés. Un de ces espaces est :

$$\mathcal{H}_z^1(\Omega) = \{ f \in L^1(\Omega) / f_z \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \}$$

où  $f_z$  est le prolongement par 0 de  $f$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Toute fonction  $f$  de  $\mathcal{H}_z^1(\Omega)$  vérifie  $\int_{\Omega} f \, dx = 0$ . On réécrit le terme d'advection sous la forme :

$$u \nabla u_i = \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + (-1)^i u_j \text{rot } u = T_0 + T_1$$

avec  $i \neq j$ . On montre alors le résultat suivant [60]:

**Lemme 2.1.** *Sous les hypothèses précédentes,  $T_0 \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $T_1 \in L^2(0,T; \mathcal{H}_z^1(\Omega)) + L^1(0,T; W^{1,1}(\Omega))$ .*

Ce résultat semble compléter la régularité obtenue sur le terme d'advection dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles par R. Coifman, P.L. Lions et S. Semmes dans [31] où les auteurs mettent en évidence les relations existantes entre la théorie de la compacité par compensation (voir par exemple F. Murat [110] [111]) et des outils d'analyse réelle comme les espaces de Hardy.

### 2.1.2 Application : borne $L^2$ sur la hauteur d'eau

L'estimation obtenue sur  $(u \cdot \nabla)u$  permet de montrer le résultat suivant dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet :

**Théorème 2.2.** *Il existe une solution  $(h,u)$  de (2.6) telle que  $h \in L^2(Q)$  et  $u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ .*

Pour obtenir une borne sur  $h$  dans  $L^2(Q)$  on s'inspire des travaux de P.L. Lions dans [99]. On introduit l'opérateur de Stokes  $S(\Pi) = p$  où  $(s,p)$  est l'unique solution de  $-\Delta s + \nabla p = \Pi$  dans  $\Omega$ ,  $\text{div } s = 0$  dans  $\Omega$ ,  $s = 0$  sur  $\partial\Omega$  et  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$ . On sait que  $S$  est borné de  $W^{-1,r}(\Omega)$  dans  $L^r(\Omega)$  et de  $L^r(\Omega)$  dans  $W^{1,r}(\Omega)$  avec  $1 < r < \infty$ . On pose  $\Pi = -\mu \Delta u \in L^2(0,T; W^{-1,2}(\Omega))$ , alors  $p = S(-\mu \Delta u) \in L^2(\Omega \times (0,T))$  et l'équation des moments sur  $\Omega \times (0,T)$  s'écrit :

$$-\Delta s + \nabla(p + ah) = -\frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u.$$

Ainsi :

$$p + ah - a\bar{h} = -S\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - S((u \cdot \nabla)u) \quad (2.7)$$

où  $\bar{h} = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} h_0 \, dx$ . L'équation (2.7) conduit à :

$$a \|h\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2 \leq C_1 \left(1 + \|h\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}\right) + \int_{\Omega \times (0,T)} S((u \cdot \nabla)u)h. \quad (2.8)$$

Or, en décomposant le terme d'advection comme à la section 2, il vient :

$$\int_{\Omega \times (0,T)} S((u \cdot \nabla)u)h = \sum_{i=0}^1 \int_{\Omega \times (0,T)} S(T_i)h. \quad (2.9)$$

Or, on sait que  $T_0 \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$  et que  $T_1 = T_{11} + T_{12}$  avec  $T_{11} \in L^2(0,T; \mathcal{H}_z^1(\Omega))$  et  $T_{12} \in L^1(0,T; W^{1,1}(\Omega))$ . Comme  $\mathcal{H}_z^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$  alors  $S(T_0)$  et  $S(T_{11})$  sont bornés dans  $L^2(\Omega \times (0,T))$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 \int_{\Omega \times (0,T)} S(T_i)h &\leq \left( \|S(T_0)\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} + \|S(T_{11})\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} \right) \|h\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} \\ &\quad + \int_{\Omega \times (0,T)} S(T_{12})h. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En outre, comme  $W^{1,1}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , alors  $S(T_{12})$  est borné dans  $L^1(0,T; V)$  où  $V$  est l'ensemble des fonctions de  $H^1(\Omega)$  de moyenne nulle. On introduit les espaces de Orlicz [3]  $L_{\mathcal{A}}(\Omega)$ ,  $L_{\mathcal{A}'}$ ( $\Omega$ ) et  $L_{\tilde{\mathcal{A}'}}$ ( $\Omega$ ) où  $\mathcal{A}$  est la N-fonction définie par  $\mathcal{A}(t) = \exp(t^2) - 1$  et  $\mathcal{A}'$  est la N-fonction complémentaire à  $\mathcal{A}$ , équivalente à la N-fonction  $\tilde{\mathcal{A}'}$  définie par  $\tilde{\mathcal{A}'}(t) = t\sqrt{\log^+(t)}$ . En utilisant le fait que  $\|S(T_{12})\|_{L^1(0,T; L_{\mathcal{A}}(\Omega))} \leq k\|T_{12}\|_{L^1(0,T; L^2(\Omega))}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times (0,T)} S(T_{12})h &\leq 2 \int_0^T \|S(T_{12})\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} \|h\|_{L_{\mathcal{A}'}}(\Omega) \\ &\leq C_2 \|T_{12}\|_{L^1(0,T; L^2(\Omega))} \sup_{\tau} \left( \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}'}(h(\tau)) \, dx + 1 \right) \leq C_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Finalement, (2.8), (2.10) et (2.11) conduisent à :

$$\|h\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2 - C_4 \|h\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} - C_5 \leq 0 \quad (2.12)$$

d'où l'on déduit que  $h$  est borné dans  $L^2(Q)$ .

La borne sur  $u$  dans  $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$  est une conséquence directe du théorème des dérivées intermédiaires [100] appliqué à l'équation des moments.

### 2.1.3 Remarque : une autre preuve pour la borne $L^2$

On note  $\bar{\nabla}$  l'opérateur gradient dans  $Q$  et on pose  $W = \sum_{i=1}^4 w_i$  avec :

$$w_1 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, 0 \right), \quad w_2 = (u \nabla u_1, u \nabla u_2, 0),$$

$$w_3 = \mu \left( -\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial x_1} - \frac{\partial \operatorname{rot} u}{\partial x_2}, -\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial x_2} + \frac{\partial \operatorname{rot} u}{\partial x_1}, 0 \right), \quad w_4 = (0, 0, \operatorname{div}(hu)).$$

Avec ces notations,  $(\mathcal{F})$  peut être écrit sous la forme  $\bar{\nabla} h + W = 0$ . Or, on a  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  donc  $w_1 \in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \subset H^{-1}(Q)$  et  $w_3 \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \subset H^{-1}(Q)$ . De plus,  $w_2 \in L^{\frac{4}{3}}(Q) \subset H^{-1}(Q)$  car  $u \in L^4(Q) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Enfin, comme  $h \log h \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$  alors  $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $\operatorname{div}(hu) = -\frac{\partial h}{\partial t} \in H^{-1}(Q)$  et finalement  $w_4 \in H^{-1}(Q)$ . Ainsi

$$\bar{\nabla} h = -W \in H^{-1}(Q)$$

et par conséquent  $h \in L^2(Q)$  si  $h \in L_{loc}^2(Q)$  [70]. La borne sur  $h$  dans  $L_{loc}^2(Q)$  peut être obtenue en procédant comme P.L. Lions dans [98].

**Remarque 2.3.** En utilisant les estimations obtenues dans [51], on montre que ce résultat est encore vrai dans le cas d'un problème à frontière variable avec  $u = \frac{\partial d}{\partial t}$  sur  $\Sigma$  où  $d$  est le mouvement de la frontière. Ce type de résultat peut être appliqué à l'étude du niveau des fleuves (voir par exemple [130]) ou du transport de polluants en mer (pétrole).

## 2.2 Un schéma de résolution mixte "Lagrange-Galerkin" [50]

Dans cette section nous nous intéressons à la résolution numérique des équations de shallow water [50]. Comme nous l'avons vu, de nombreuses stratégies peuvent être proposées pour discrétiser en espace ces équations. On citera par exemple O. Pironneau [124] pour les éléments finis, A. Bermudez,

A. Dervieux, J.A. Desideri et M.E. Vazquez [13] pour les volumes finis, B. Di Martino, F.J. Chatelon et P. Orenca [104] pour la méthode de Galerkin non linéaire [101]. Ces méthodes sont souvent couplées à un schéma en temps Eulérien. Notre but est de proposer un schéma numérique basé sur une méthode mixte "Galerkin-Characteristiques" permettant de conserver la positivité de  $h$ . Pour ce schéma, qui possède une expression très simple, nous donnons un résultat de convergence du problème discret vers le problème continu. Enfin, on propose un critère numérique reliant la discrétisation Lagrangienne et le nombre de vecteurs propres lorsqu'on résout avec un point fixe les équations de conservation discrètes.

### 2.2.1 Le problème discret : résultats de convergence

On souhaite construire des solutions de  $(\mathcal{F})$  comme limites de solutions de:

$$(\mathcal{F}^\delta) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + a \nabla h = 0, & \text{dans } Q \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) + \delta h^2 = 0, \quad h \geq 0, \quad \delta > 0, & \text{dans } Q \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma \\ u(t=0) = u_0(x), \quad h(t=0) = h_0(x) \geq 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Remarque 2.4.** Grâce à l'estimation obtenue sur  $h$  dans  $L^2(Q)$  pour des conditions aux limites de Dirichlet, on peut affirmer que les solutions de  $(\mathcal{F})$  sont des limites des solutions de  $(\mathcal{F}^\delta)$  quand  $\delta$  tend vers  $0^+$ . La régularisation de l'équation de continuité permet de construire des solutions approchées et en particulier de passer à la limite dans les équations discrètes.

On renormalise l'équation de continuité comme suit :

$$\frac{\partial \log h}{\partial t} + u \nabla \log h + \operatorname{div} u + \delta h = 0, \quad \text{dans } Q. \quad (2.14)$$

Cette renormalisation se justifie car  $h$  est borné dans  $L^2(Q)$  et  $u$  est borné dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  (R.J. Di Perna et P.L. Lions [41]; P.L. Lions [97], lemme

2.3). Ainsi,  $(\mathcal{F}^\delta)$  peut être formulé sous la forme :

$$(\mathcal{F}^\delta) \begin{cases} \frac{du}{dt} - \mu\Delta u + a\nabla h = 0, & \text{dans } Q \\ \frac{d \log h}{dt} + \operatorname{div} u + \delta h = 0, & \text{dans } Q \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma \\ u(t=0) = u_0(x), h(t=0) = h_0(x) > 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \cdot \nabla\phi$  est la dérivée Lagrangienne. Dans l'équation (2.14), on approche la dérivée Lagrangienne par

$$\frac{\log h_k - \log \tilde{h}_{k-1}}{\Delta t}$$

où

$$\begin{aligned} h_k &= h(x_k, t_k), \quad \tilde{h}_{k-1} = h(x_k - \Delta t u_{k-1}, t_{k-1}), \\ t_k &= k\Delta t, \quad k \in \{0, \dots, M-1\}, \quad \Delta t = \frac{T}{M} \end{aligned}$$

et où  $x_k = x_{k-1} + \Delta t u_{k-1}$  est la forme discrète de

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(x(t), t)$$

qui définit les courbes caractéristiques. Avec les mêmes notations, on approche la dérivée Lagrangienne dans l'équation des moments par

$$\frac{u_k - \tilde{u}_{k-1}}{\Delta t} + \Delta t^\alpha A(u_k)$$

où  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  et  $A$  est un opérateur tel que

$$D(A) \equiv H_0^3(\Omega) = \left\{ \phi \in H^3(\Omega); \phi = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \Delta\phi = 0 \text{ on } \Gamma \right\}$$

et  $\Delta t^\alpha A(u_k) \rightarrow 0$  au sens des distributions quand  $\Delta t$  tend vers  $0^+$ . Finalement, on obtient  $M$  problèmes discrets

$$(\mathcal{F}_{\Delta t}^\delta) \begin{cases} u_k - \mu\Delta t\Delta u_k + \Delta t^{1+\alpha} A u_k + a\Delta t\nabla h_k = \tilde{u}_{k-1} & \text{dans } \Omega, \\ \log h_k + \Delta t\operatorname{div} u_k + \delta\Delta t h_k = \log \tilde{h}_{k-1} & \text{dans } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{sur } \Gamma \\ + \text{conditions aux limites pour } A u_k & \text{sur } \Gamma, \\ u(k=0) = u_0; h(k=0) = h_0 > 0 \text{ p.p.} & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

**Remarque 2.5.** Cette discrétisation assure la positivité de  $h_k$  qui est nécessaire pour obtenir des estimations.

Si  $\Delta t$  est suffisamment petit et si les données sont contrôlées dans un sens défini dans [50], alors on a le lemme de compacité suivant :

**Lemme 2.6.** Si  $\alpha < \frac{1}{2}$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, M\}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq l \leq k} \|u_l\|_{L^2(\Omega)} &< C \quad , \quad \sum_{i=1}^k \|u_i - \tilde{u}_{i-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \\ \sum_{i=1}^k \Delta t^{1+\alpha} \|u_i\|_{H_0^3(\Omega)}^2 &\leq C \quad , \quad \sum_{i=1}^k \Delta t \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C, \\ \sup_{1 \leq l \leq k} \|h_l\|_{L^1(\Omega)} &< C \quad , \quad \sum_{i=1}^k \Delta t \|h_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\delta) \end{aligned}$$

où les bornes sont indépendantes de  $\Delta t$ .

En outre, si on note  $J_k$  la matrice Jacobienne telle que :

$$\int_{\Omega} \tilde{\phi}_{k-1} dx_k = \int_{\Omega} \phi_{k-1} \det J_{k-1} dx_{k-1}$$

alors :

**Lemme 2.7.** Sous les hypothèses du lemme 2.6, on a  $\det J_k > 0$ .

Ces différents résultats permettent de montrer que le problème discret a un sens et fournissent la compacité nécessaire pour passer à la limite dans les équations :

**Lemme 2.8.**  $(\mathcal{F}_{\Delta t}^\delta) \rightarrow (\mathcal{F}^\delta)$  au sens des distributions quand  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Le problème  $(\mathcal{F}_{\Delta t}^\delta)$  est résolu à l'aide de la méthode de Galerkin en utilisant un point fixe pour recoupler les deux équations. On pose  $\epsilon < \mu$ ,  $C(n) = \sup_i C_i$  avec  $C_{i \in [1, n]} \|\phi_i\|_{L^2(\Omega)} = \|\phi_i\|_{H^1(\Omega)}$  et  $\phi_i$  une base de  $H_0^3(\Omega)$ . Alors :

**Lemme 2.9.** La méthode itérative converge si  $\Delta t \leq \frac{\delta \epsilon}{C^2(n)}$ .



### 2.2.2 Application : le lac de retenue de Calacuccia

Avec C. Giacomoni, nous testons la méthode dans une situation réelle : le barrage de Calacuccia (France-Corse). On considère les conditions aux limites  $u.n = \text{rot}u = 0$  pour lesquelles les résultats restent vrais. La figure 2.1 représente la bathymétrie du barrage de Calacuccia dont la profondeur principale est d'approximativement cinquante mètres. Les simulations sont réalisées avec un vent dominant caractéristique de cette région (figure 2.2). On observe une circulation dans le sens du vent près de la rive (où la hauteur d'eau est faible) et une recirculation par le centre du barrage où la profondeur est plus importante (figure 2.3). L'élévation de la surface est seulement influencée par le vent (figure 2.4). La figure 2.5 représente l'évolution de l'énergie cinétique  $E_n = \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i(t)^2$ .

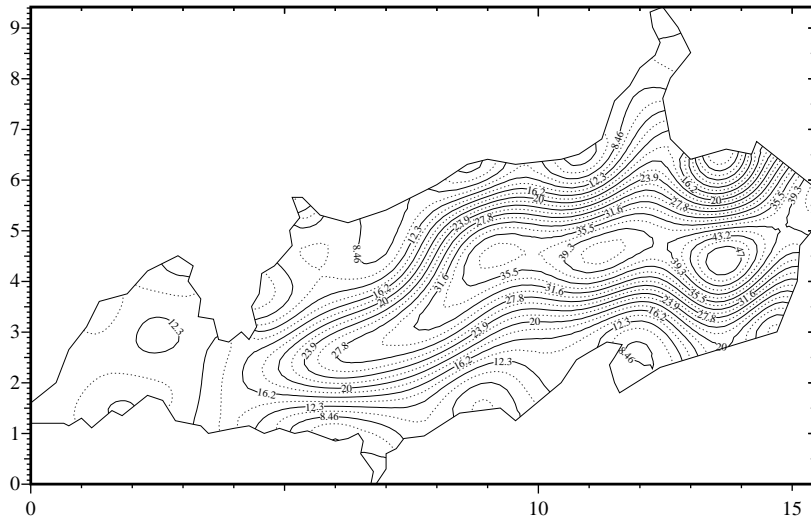


FIG. 2.1 – bathymétrie du barrage de Calacuccia

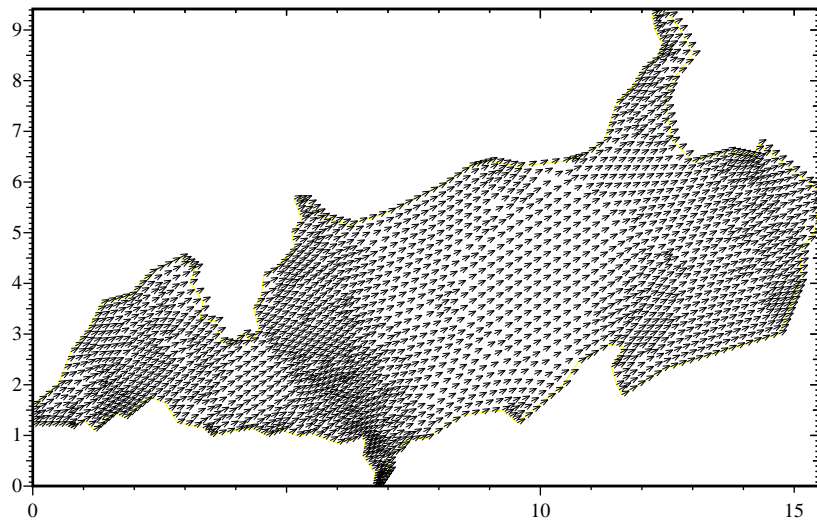


FIG. 2.2 – *vent dominant*

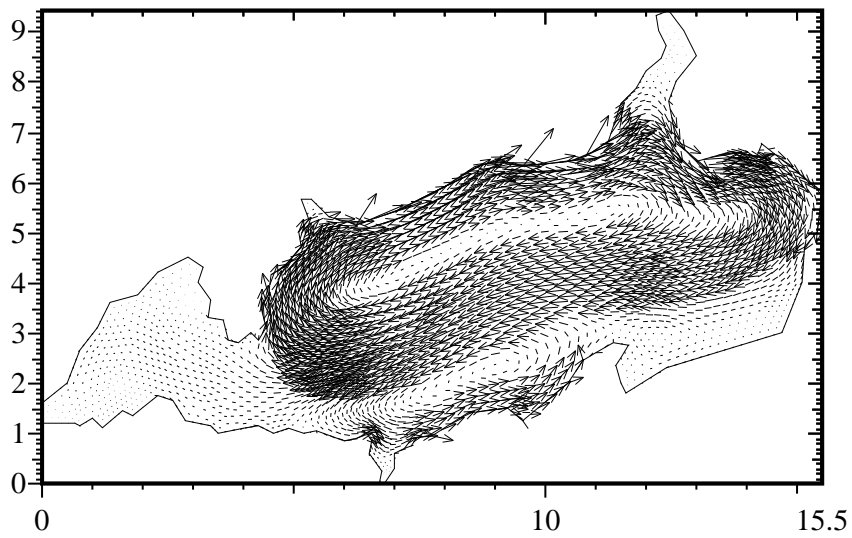


FIG. 2.3 – *allure du champ de vitesse*

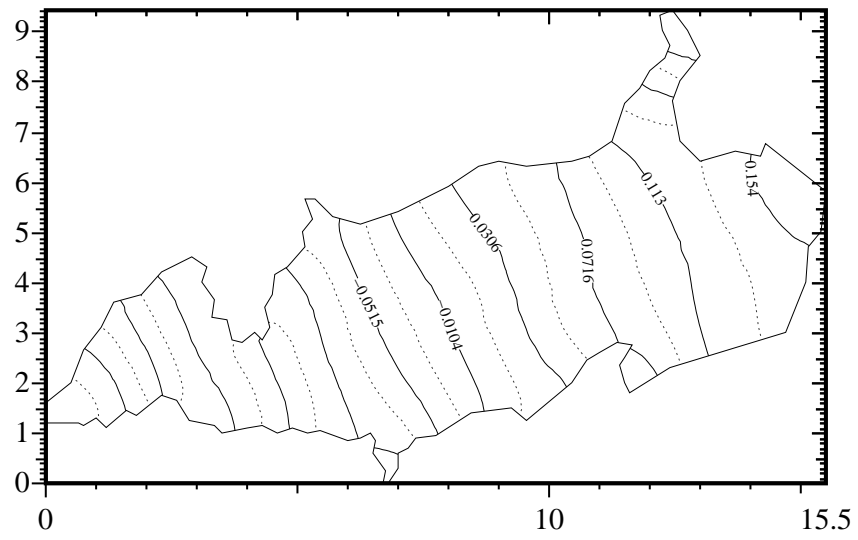


FIG. 2.4 – élévation

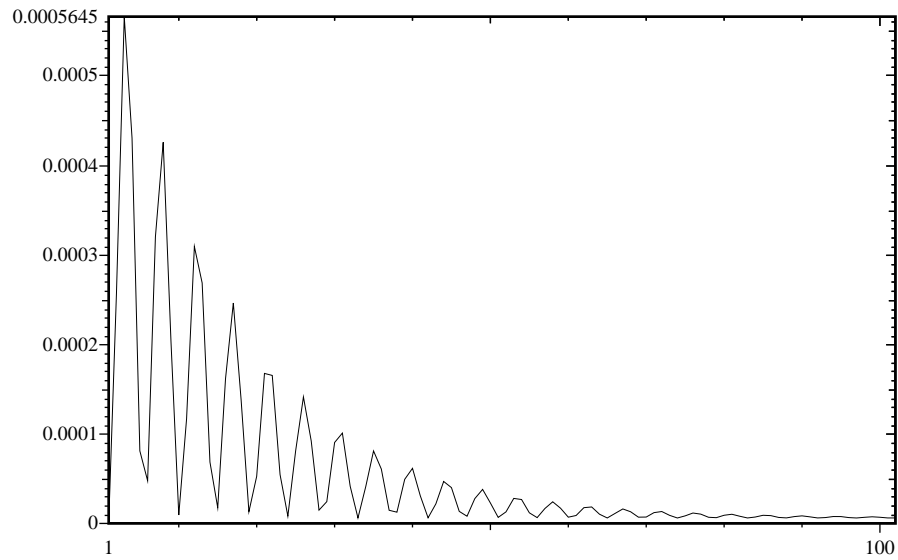


FIG. 2.5 – énergie cinétique

## 2.3 Sur le contrôle des équations de shallow water [17]

Losqu'on cherche à simuler la courantologie en mer ouverte, la détermination de conditions aux limites à adjoindre au système différentiel est une difficulté majeure. En effet, dans la plupart des cas, les champs de mesures dont on dispose sont issus de campagnes de mesures à grande échelle ce qui ne nous donne que peu de renseignements sur les phénomènes locaux que nous désirons étudier. Ainsi, le problème est de déterminer les "meilleures" conditions aux limites pour que la solution calculée approche au mieux les valeurs mesurées à l'intérieur du domaine. Pour répondre à cette question nous utilisons dans [17] des méthodes classiques d'optimisation dont les aspects mathématiques sont largement détaillés dans [91] et dont des applications aux fluides géophysiques sont présentées dans [35]. Les travaux publiés dans [17] portent sur le contrôle des équations de shallow water et complètent une étude de F. Bosseur et P. Orenge sur un problème d'écoulement linéaire [19] (voir aussi [16] [18]). Sur les problèmes de contrôle en mécanique des fluides on pourra consulter [1] [15].

### 2.3.1 Expression de la fonction coût

On décompose la frontière du domaine en trois parties  $\Gamma^0$ ,  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ . On munit (2.6) (sans advection) des conditions aux limites suivantes :

$$u.n = 0, \text{ rot } u = 0, \text{ sur } \Sigma^0 = \Gamma^0 \times (0, T), \quad (2.16)$$

$$u.n = G \geq 0, \text{ rot } u = 0, \text{ sur } \Sigma^+ = \Gamma^+ \times (0, T), \quad (2.17)$$

$$u.n = G \leq 0, \text{ rot } u = 0, \text{ sur } \Sigma^- = \Gamma^- \times (0, T), \quad (2.18)$$

$$h = P, \text{ sur } \Sigma^- = \Gamma^- \times (0, T). \quad (2.19)$$

Dans [17], on pose  $v = u - w$  où  $w$  est défini à l'aide d'un problème de relèvement  $w = R(G) \in W^{1,4}(0, T; W^{2,4}(\Omega))$  avec  $w.n = G$  et  $\text{rot } w = 0$  sur le bord ( $G$  est suffisamment régulier). Alors si  $h_0 \in W^{1,4}(\Omega)$  et  $u_0 \in H^2(\Omega)$  on

montre que le problème de shallow water admet une solution unique telle que  $u \in L^4(0, T; W^{2,4}(\Omega))$  et  $h \in L^\infty(0, T; W^{1,4}(\Omega))$  [26]. On note  $x^1, \dots, x^m$  les  $m$  points de  $\Omega$  pour lesquels nous disposons de mesures. Comme en dimension deux  $u \in L^4(0, T; W^{2,4}(\Omega)) \subset L^4(0, T; C^0(\overline{\Omega}))$ , on peut donner un sens à  $u(x^1), \dots, u(x^m)$ . Si on note  $u_d = (u_{d1}, \dots, u_{dm}) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^{2m})$  le champ désiré (ou mesuré) aux points  $x^1, \dots, x^m$  alors la fonction coût  $J(G)$  est définie par :

$$J(G) = \sum_{i=1}^m \int_0^T |u(x^i, t; G) - u_{d,i}|^2 \quad (2.20)$$

où  $u(x^i, t; G)$  représente la valeur au point  $x^i$  à l'instant  $t$  de la solution  $u$  du problème de Saint-Venant pour un  $G$  donné. L'objectif de ce travail est de trouver une valeur de  $G$  qui minimise  $J(G)$ .

### 2.3.2 Problème adjoint

A la manière de ce qui est fait dans [16] (annexe A), on écrit le problème adjoint  $\mathcal{F}^*$  associé au problème de shallow water.

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} - \mu \Delta u^* - h \nabla h^* = \sum_{i=1}^m (u(x^i, t; G) - u_{d,i}) \otimes \delta(x - x^i), \text{ dans } Q, \quad (2.21)$$

$$u^* \cdot n = 0, \text{ sur } \Sigma, \quad (2.22)$$

$$\text{rot } u^* = 0, \text{ sur } \Sigma, \quad (2.23)$$

$$u^*(t = T) = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (2.24)$$

$$-\frac{\partial h^*}{\partial t} - u \cdot \nabla h^* - a \text{div } u^* = 0, \text{ dans } Q, \quad (2.25)$$

$$h^* = 0, \text{ sur } \Sigma^+, \quad (2.26)$$

$$h^*(t = T) = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (2.27)$$

où  $(u(x^i, t; G) - u_{d,i}) \otimes \delta(x - x^i)$  est la distribution définie par

$$\psi \rightarrow \int_0^T (u(x^i, t; G) - u_{d,i}) \psi(x^i, t) dt, \quad \psi \in \mathcal{D}(Q).$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur adjoint, on peut établir que l'équation vérifiée par le minimum local de la fonctionnelle  $J$  s'écrit :

$$\operatorname{div} u^* + hh^* = 0 \text{ sur } \Sigma. \quad (2.28)$$

Dans [17], nous montrons l'existence d'une solution au problème adjoint telle que  $u^* \in L^{\frac{4}{3}}(Q)$  et  $h^* \in L^{\frac{4}{3}}(Q)$ . Il est clair que cette régularité n'est pas suffisante pour donner un sens à la trace de  $\operatorname{div} u^* + hh^*$  et donc montrer que la solution du problème adjoint vérifie (2.28). La condition (2.28) n'a donc qu'un intérêt numérique.

Pour montrer l'existence d'une solution au problème adjoint on procède par transposition [100] en introduisant le problème transposé  $\mathcal{F}_T^*$  associé à  $\mathcal{F}^*$ .

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu \Delta \psi - a \nabla \phi = \Phi, \text{ dans } Q, \quad (2.29)$$

$$\psi \cdot n = 0, \text{ sur } \Sigma, \quad (2.30)$$

$$\operatorname{rot} \psi = 0, \text{ sur } \Sigma, \quad (2.31)$$

$$\psi(t = T) = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi h) + \operatorname{div}(u \phi) = 0, \text{ dans } Q, \quad (2.33)$$

$$\phi = 0, \text{ sur } \Sigma^-, \quad (2.34)$$

$$\phi(t = 0) = 0, \text{ dans } \Omega. \quad (2.35)$$

On montre que si  $\Phi \in L^4(Q)$ , alors  $\mathcal{F}_T^*$  admet une unique solution  $(\psi, \phi) \in V_\psi \times V_\phi$  avec :

$$V_\psi = \left\{ \psi \in L^4(0, T; W^{2,4}(\Omega)) ; \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^4(Q) ; \begin{pmatrix} \psi \cdot n = 0 \\ \operatorname{rot} \psi = 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Sigma ; \psi(0) = 0 \right\}$$

et

$$V_\phi = \left\{ \psi \in L^\infty(0, T; W^{1,4}(\Omega)) ; \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^4(Q) ; \phi = 0 \text{ sur } \Sigma^- ; \phi(0) = 0 \right\}.$$

Ainsi  $\mathcal{F}_T^*$  définit un isomorphisme de  $V_\psi \times V_\phi$  dans  $L^4(Q) \times L^4(Q)$  et par transposition on en déduit qu'il existe un unique  $u^* \in L^{\frac{4}{3}}(Q)$  et  $h^* \in L^{\frac{4}{3}}(Q)$  solution du problème adjoint.

### 2.3.3 Quelques résultats numériques

Les simulations présentées ci-dessous ont été obtenues par F. Bosseur sur la baie de Calvi (France-Corse) [17]. A la figure 2.6, nous montrons l'évolution de l'erreur lors d'un contrôle sur  $G$  et à la figure 2.7, le champ de vitesse correspondant obtenu après convergence. L'allure de ce champ est tout à fait comparable à celle obtenue par B. Di Martino [103].

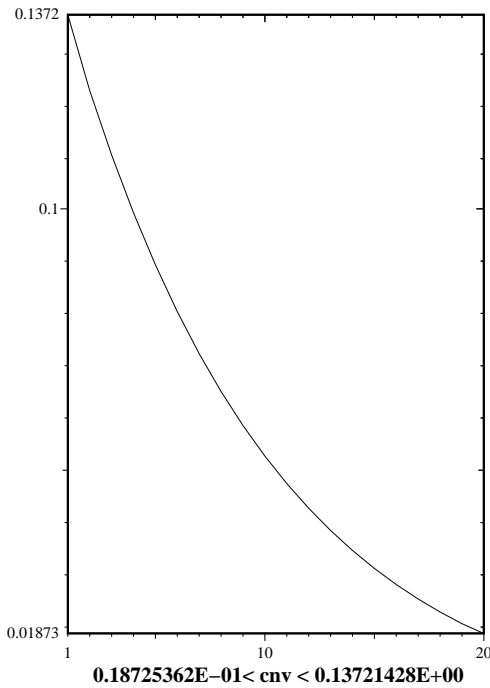


FIG. 2.6 – Variation de l'erreur

$$\frac{\|u(x^i) - u_{d,i}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}^2}{\|u_{d,i}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}^2}$$

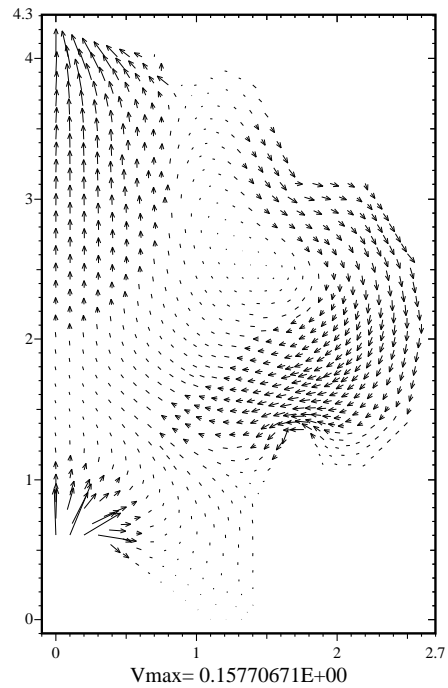


FIG. 2.7 – Champ de vitesse dans la baie de Calvi.

## 2.4 Analyse d'un modèle de tsunami [103] [104] [105]

Les tsunamis peuvent avoir des origines très variées. Ils sont souvent provoqués par des séismes localisés en mer, des glissements de terrains sous-marins ou par la proximité d'un volcan actif. Dans ce dernier cas, c'est l'arrivée brutale en mer d'une quantité plus ou moins importante de débris volcaniques dévalant les pentes de l'édifice qui déplace la masse d'eau et provoque une onde de très grande énergie se propageant à la surface [81].

Lorsqu'un phénomène de ce type se produit, on sait qu'une vague importante va être générée et se déplacer. Le problème est de savoir quelles seront ses dimensions, sa vitesse, et quelle sera sa puissance quand elle déferlera sur les côtes? C'est à ces questions que la modélisation mathématique essaie de répondre.

Concernant les tsunamis prenant leur origine dans un glissement de terrain ou une avalanche de débris volcaniques, on notera que le modèle de Saint-Venant est déjà largement employé [85] [126]. Nous proposons dans cette section d'introduire le modèle de Saint-Venant pour simuler un tsunami dû à un séisme sous-marin. Les tremblements de terre tectoniques sont provoqués par un mouvement de la lithosphère, lorsqu'il y a collision entre des plaques mobiles de la croûte terrestre. Les vagues issues de ce type de séismes ont des longueurs d'ondes toujours bien supérieures à la profondeur des océans où elles évoluent. Ces longueurs sont souvent de l'ordre de la centaine de kilomètres et la vitesse de ces ondes dépend uniquement de la profondeur. Au large des côtes, par 5000 mètres de fond, les tsunamis d'origine tectonique ne sont jamais ressentis par les navires car leur hauteur n'excède pas la dizaine de centimètres et leur vitesse est de 800 km/h. Lorsque le raz de marée se rapproche du littoral, par 10 mètres de fond, la vitesse de la partie avant des vagues chute à 40 km/h tandis que la partie arrière continue d'évoluer rapidement. La longueur d'onde décroît donc considérablement à l'approche



des côtes et comme l'énergie se conserve, la hauteur des vagues augmente [47]. Les vagues formées à plusieurs milliers de kilomètres du rivage peuvent atteindre une quinzaine de mètres et celles nées à proximité des côtes peuvent dépasser les trentes mètres. Selon la nature du littoral les dégats peuvent alors être considérables.

### 2.4.1 Le modèle

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , simplement connexe pour simplifier, de frontière  $\gamma$  régulière. Physiquement,  $\Omega$  correspond au domaine horizontal occupé par le fluide et soit  $Q$  le cylindre  $\Omega \times ]0, T[$  et  $\Sigma = \gamma \times ]0, T[$ .

On note par  $n$  la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  sur  $\gamma$  et par  $x = (x_1, x_2)$  un point de  $\Omega$ .  $u(x, t)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  correspondant à la vitesse du fluide et  $h(x, t)$  est une fonction positive qui correspond à la hauteur totale de la colonne d'eau.  $d(x, t)$  représente le déplacement de la lithosphère et on a  $h(x, t) = H + \zeta(x, t) - d(x, t)$  où  $H$  représente la profondeur du domaine et  $\zeta(x, t)$  l'élévation de la surface. Le modèle du fluide est un modèle de Saint-Venant obtenu par intégration sur la hauteur d'eau totale (i.e. entre  $-H + d$  et  $\zeta$ ) des équations primitives tridimensionnelles des fluides géophysiques, lorsque la densité du fluide est considérée constante [114]. En conservant les notations des sections précédentes, il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \omega_c \alpha(u) - \mu \Delta u + g \nabla \zeta + C_d |u|u = f_1 \text{ dans } Q, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(uh) = 0 \text{ dans } Q, \quad h \geq 0, \quad (2.37)$$

$$u \cdot n = 0, \quad \operatorname{rot} u = 0 \text{ on } \Sigma, \quad (2.38)$$

$$u(t = 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \quad (2.39)$$

$$h(t = 0) = h_0(x) \text{ dans } \Omega, \quad h_0 \geq 0. \quad (2.40)$$

où  $\omega_c$ ,  $g$  et  $C_d$  sont des coefficients correspondant respectivement à la force de Coriolis, à l'accélération de la pesanteur et au frottement au fond [122].

Nous avons choisi de modéliser les mouvements de la lithosphère à l'aide d'un opérateur de plaque :

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + \Delta^2 d - \Delta \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = \sigma + f_2 \text{ dans } Q, \quad (2.41)$$

$$d = g_1, \quad \frac{\partial d}{\partial n} = g_2 \text{ sur } \Sigma, \quad (2.42)$$

$$d(t=0) = d_0(x), \quad \frac{\partial d}{\partial t}(t=0) = d_1(x) \text{ dans } \Omega \quad (2.43)$$

où  $\sigma = -p = -\rho_0 g h$  est la contrainte du fluide sur la plaque. Afin de simplifier la présentation, nous posons  $g_1 = g_2 = 0$ .

### 2.4.2 Des résultats d'existence, régularité et unicité

Dans [107] [105] et [106], nous donnons un résultat d'existence pour ce problème sous une hypothèse de données petites et pour un temps  $T$  fini. En particulier, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.10.** *Soit  $u_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $h_0 \geq 0$ ,  $h_0 \log h_0 \in L^1(\Omega)$ ,  $d_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $d_0 \in H_0^2(\Omega)$  et  $\mathcal{V} = \{\phi \in H^1(\Omega) ; \phi.n = 0\}$ , alors le problème admet une solution :*

$$u \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (2.44)$$

$$h \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^2(Q), \quad h \ln h \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad h \geq 0 \quad (2.45)$$

$$d \in W^{1, \infty}(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)). \quad (2.46)$$

Ces estimations sont obtenues en introduisant un espace de stabilité sur la vitesse du fluide. Plus précisément, on montre qu'il existe un temps  $T$  et une constante  $C_1$  ne dépendant que des données telle que :

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \quad \forall t \in [0, T].$$

En fait la borne sur  $h$  dans  $L^2(Q)$  n'est pas nécessaire pour passer à la limite dans les équations (l'estimation sur  $h \log h$  dans  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$  est suffisante [116]) mais revêt un intérêt particulier pour la démonstration. Sans

l'introduction de cette borne sur  $h$ , nous devrions construire deux espaces de stabilité, l'un pour la vitesse du fluide, l'autre pour la vitesse du déplacement [68]:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} < C_2 \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial d}{\partial t}(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} < C_2 \quad \forall t \in [0, T]$$

avec  $C_2 = \min\left(\frac{2\mu}{C_{GN}}, \frac{1}{T}\right)$  où  $C_{GN}$  est une constante de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg [21]. Bien que cette approche permette de construire une solution plus faible, elle est plus contraignante car le rayon des boules de stabilité dépend du temps.

Pour montrer l'unicité de la solution du problème, la principale difficulté est liée aux équations de shallow water. En effet, pour obtenir l'unicité, on doit tout d'abord montrer des résultats de régularité sur  $u$  et  $h$  (i.e.  $u \in L^4(0, T; W^{1,4}(\Omega))$  et  $h \in L^\infty(Q)$ ).

Ces résultats ont été démontrés par F.J. Chatelon et P. Orenca [26] en s'inspirant d'une méthode introduite par A.V. Kazhikhov et V.A. Weigant [86], [141] dans le cas d'un écoulement potentiel compressible linéaire.

Nous proposons une démonstration plus courte de ce résultat en utilisant des techniques présentées par P.L. Lions [98]. En particulier, nous montrons la borne sur  $h$  dans  $L^{1+p}(Q)$ , ( $1+p < \infty$ ) et sur  $u$  dans  $L^{1+p}(0, T; W^{1,1+p}(\Omega))$ . La borne sur  $h$  dans  $L^\infty(Q)$  et l'unicité du problème de shallow water sont alors obtenues en suivant ce qui est fait dans [26]. Une fois les résultats de régularité établis, la démonstration de l'unicité de la solution du problème couplé est évidente.

**Lemme 2.11.** *Sous les hypothèses du théorème 2.10 et si  $h_0 \in L^p(\Omega)$ ,  $u_0 \in L^{1+p}(\Omega)^2$ , alors  $h \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^{1+p}(Q)$  et  $u \in L^\infty(0, T; L^{1+p}(\Omega)) \cap L^{1+p}(0, T; W^{1,1+p}(\Omega))$ ,  $1+p < \infty$ . La solution  $(u, h)$  est unique si  $p \geq 3$ .*

### 2.4.3 Construction des solutions approchées

Soit  $\mathcal{V}_n$  l'espace engendré par les  $n$  premiers éléments d'une base de  $\mathcal{V}$  et  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  une base de  $\mathcal{V}_n$  où chaque  $\varphi_n \in H^4(\Omega)^2$ . Notons que grâce

à la régularité de la base, les espaces  $L^2(0,T; \mathcal{V}_n)$  et  $L^2(0,T; \mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2)$  sont algébriquement et topologiquement égaux. La base est construite comme dans [117].

En premier lieu,  $u_n = u_n^* \in L^2(0,T; \mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty})$  est fixé dans l'équation de continuité et on résout (H)

$$(H) \begin{cases} \frac{\partial h_n}{\partial t} + \operatorname{div}(u_n^* h_n) = 0 \text{ dans } \mathcal{Q}, \\ h_n(t=0) = h_{n,0}(x) \text{ dans } \Omega, h_{n,0}(x) \geq 0, \end{cases}$$

qui donne  $h_n \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$  et on définit l'application  $\Pi_H$  suivante

$$\begin{aligned} \Pi_H : L^2(0,T; \mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2) &\longrightarrow L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \\ u_n^* &\longmapsto \Pi_H(u_n^*) = h_n. \end{aligned}$$

Ce problème est résolu par la méthode des caractéristiques, donc  $h_n = h_{0n} \exp(-\int_\Omega \operatorname{div} u_n^*)$  et  $h_n \geq 0$ . Précisons que l'on doit utiliser cette méthode afin de démontrer la positivité de  $h_n$  et ainsi donner un sens à l'estimation  $h_n \ln h_n$ .

On résout ensuite (D)

$$(D) \begin{cases} \left( \frac{\partial^2 d_n}{\partial t^2}, \Psi \right) + \left( \nabla \frac{\partial^2 d_n}{\partial t^2}, \nabla \Psi \right) + \left( \Delta d_n, \Delta \Psi \right) + g(h_n, \Psi) = 0, \\ \forall \Psi \in H_0^2(\Omega), \\ d_n(t=0) = d_{n,0}(x), \frac{\partial d_n}{\partial t}(t=0) = d_{n,1}(x) \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

qui donne  $d_n$  et on définit l'application  $\Pi_D$

$$\begin{aligned} \Pi_D : L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) &\longrightarrow L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega)) \\ h_n &\longmapsto \Pi_D(h_n) = d_n. \end{aligned}$$

Puis, on considère

$$(U) \begin{cases} \left( \frac{\partial u_n}{\partial t}, \varphi \right) - \frac{1}{2} \left( u_n^2, \operatorname{div} \varphi \right) + \left( \operatorname{rot} u_n \alpha(u_n), \varphi \right) + \omega_c \left( \alpha(u_n), \varphi \right) \\ + \mu \left( D u_n, D \varphi \right) + C_d \left( |u_n| u_n, \varphi \right) = g \left( h_n + d_n, \operatorname{div} \varphi \right), \forall \varphi \in \mathcal{V}_n \\ u_n(t=0) = u_{n,0}(x) \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

qui donne  $u_n$  et on définit l'application  $\Pi_U$  par

$$\begin{aligned} \Pi_U : L^\infty(0,T; H_0^2(\Omega)) &\longrightarrow L^2(0,T; \mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2) \\ d_n &\longmapsto \Pi_U(d_n) = u_n. \end{aligned}$$

Enfin, on définit l'application  $\Pi = \Pi_U \circ \Pi_D \circ \Pi_H$  par

$$\begin{aligned} \Pi : L^2(0,T; \mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2) &\longrightarrow L^2(0,T; \mathcal{V}_n \cap W^{1,\infty}(\Omega)^2) \\ u_n^* &\longmapsto u_n. \end{aligned}$$

Ensuite, nous montrons que  $\Pi$  vérifie les hypothèses du théorème de point fixe de Schauder [145].

#### 2.4.4 Simulations numériques

Le domaine d'étude (figure 2.8) considéré est un carré de 1000 km de côté dont le centre est aussi le centre de notre système de coordonnées cartésien. Nous avons implémenté un test dans lequel la zone du séisme est une plaque de 100 km de large située à 1000 m de fond (entre les abscisses  $x = -400$  km et  $x = -300$  km) et coupant le domaine parallèlement à la côte.

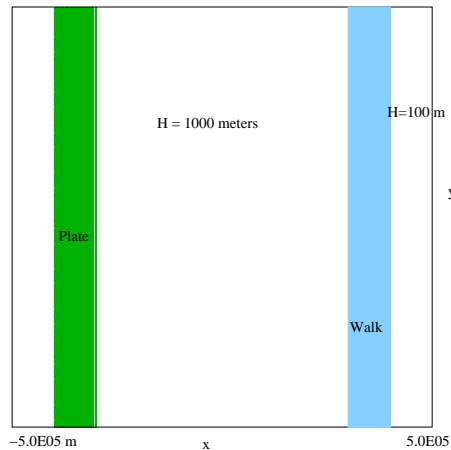


FIG. 2.8 – *domaine d'étude*

Dans ce cas, les fonctions de base permettant de résoudre l'équation de plaque avec la méthode de Galerkin sont connues analytiquement. La bathymétrie dépend seulement de  $x$  et est supposée constante selon  $y$  :

$$\begin{cases} 10^3 \text{ m} & \text{si } x \leq 3.10^5 \text{ m} \\ 10^3 - (x - 3.10^5) \times 9/10^3 \text{ m} & \text{si } 3.10^5 \leq x \leq 4.10^5 \text{ m} \\ 10^2 \text{ m} & \text{si } x \geq 4.10^5 \text{ m} \end{cases} \quad (2.47)$$

Afin d'obtenir une simulation donnant des résultats interprétables, on considère une plaque ayant les propriétés de la lithosphère. Ainsi, on prend un module de Young de  $2.6 \times 10^{10}$  Pa, un coefficient de Poisson de 0.3, une densité de  $2.8 \times 10^3$  kg.m<sup>-3</sup>, et une épaisseur de 5 km.

La figure 2.9 représente l'évolution de la vague dont l'amplitude augmente lorsqu'elle arrive sur le haut fond. En fait, la vitesse de la partie avant de la vague chute de 100 m/s à 30 m/s créant une sorte "d'embouteillage" à l'origine du tsunami.

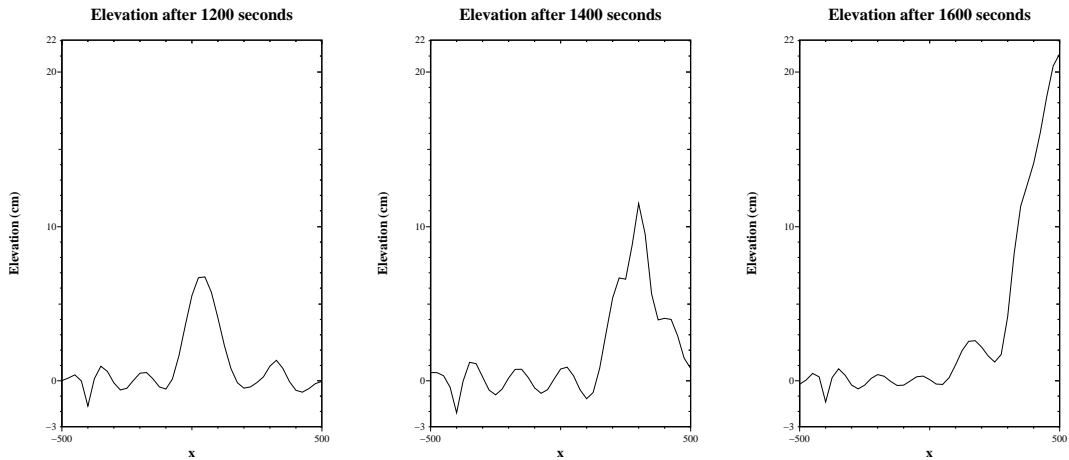


FIG. 2.9 – Représentation de l'élévation



# Conclusion et Perspectives

---

Les lignes qui précèdent résument mes activités de recherche au sein de l'UMR 6134 de l'Université de Corse. Elles mettent en évidence des travaux orientés vers l'étude mathématique de la mécanique des fluides, des structures ainsi que de leurs interactions.

L'expérience acquise en matière d'interaction fluide-structure me pousse aujourd'hui à m'intéresser de plus près à certains phénomènes de tsunamis parmi les plus destructeurs : les tsunamis liées à une éruption volcanique. Pour mesurer le pouvoir dévastateur de ce type de phénomène, rappelons le raz de marée provoqué en 1883 par l'effondrement du cône volcanique du Krakatau en Indonésie qui entraîna la mort de 30 000 personnes. Ce tsunami ravagea plusieurs centaines de kilomètres de côtes dans le détroit entre Sumatra et Java.

Les exemples de ce type de catastrophes sont nombreux et le scénario qui les régit est complexe. En effet, la modélisation mathématique d'un tel évènement est délicate car elle nécessite le traitement de trois phénomènes physiques très différents : l'écoulement d'un milieu granulaire (l'avalanche), la déformation du fluide suite à l'avalanche, la propagation d'une onde sur l'océan.

En l'absence de théorie pour modéliser l'avalanche de débris, certains modèles simulent avec un succès relatif l'écoulement pyroclastique à l'aide d'un fluide incompressible homogène s'écoulant sur un plan incliné. Pour reproduire l'impact avec la mer et la formation de la vague, les modélisateurs simulent l'interaction entre deux fluides en dimension trois ce qui d'un point de vue numérique est très coûteux. Une fois la vague formée, on peut se contenter d'un modèle bidimensionnel pour simuler sa propagation.

La modélisation mathématique de ce problème présente des difficultés



intéressantes qui pourraient faire l'objet d'études futures. J'espère que l'expérience acquise par notre équipe sur le thème du couplage fluide-structure permettra de répondre à certaines des questions posées.

Sur les écoulements peu profonds à surface libre, nous avons initié un projet recherche avec l'IFREMER dans le cadre du Contrat de Plan Etat Région 2003-2005 pour la simulation du déplacement de nappes d'hydrocarbure (Projet GILCO). Actuellement, le principal modèle utilisé en France pour décrire ce type de phénomène est développé par Météo France. Ce modèle, dénommé Mothy, est à l'origine conçu pour le suivi des containers perdus en mer. Mothy a été utilisé lors des catastrophes du "Prestige" ou de "l'Erika" mais le modèle de composition des vitesses très simplifié qu'il utilise (3% du vent et 100% du courant moyen) ainsi que l'impossibilité de traduire l'étalement de la nappe de pétrole limitent sa précision.

Actuellement, en collaboration avec P. Orenga, B. Di Martino et M. Peybernes, nous développons un modèle de nappe d'huile se déplaçant à la surface d'un modèle de fluide bidimensionnel. Ce modèle prend en compte les déformations de la nappe et son étalement. Les difficultés mathématiques posées par ce problème sont grandes car la régularité du bord de la nappe est faible. Une solution envisageable serait de régulariser ce bord avec un terme de tension de frontière comparable à celui utilisé par J.T. Beale dans [10] pour résoudre les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux avec une surface libre.

Le problème de la dépendance en temps de la nappe peut être traité en utilisant des techniques de pénalisation, de régularisation elliptique ou en écrivant les équations en coordonnées Lagrangiennes. Numériquement, cette dépendance en temps du domaine requiert aussi de faire appel à des techniques particulières. Comme nous l'avons vu, deux stratégies peuvent être développées. La première consiste à se ramener à un domaine fixe. Cette approche présente l'indéniable avantage de travailler avec un maillage fixe. Toutefois, elle nécessite le développement de techniques numériques pour

suivre l'interface dont la reconstitution des déplacements n'est pas aisée. La deuxième stratégie consiste à utiliser la formulation ALE qui consiste à travailler sur un maillage évolutif dont les mouvements sont donnés par une loi arbitraire et dont la seule contrainte est d'égaliser la vitesse du maillage et la vitesse du fluide à l'interface.

Récemment, avec M. Peybernes, nous avons étudié un problème bidimensionnel de shallow water bicouche avec des conditions aux limites de Dirichlet [61]. Ce type d'écoulement se rencontre notamment à Gibraltar où les eaux de l'Atlantique pénètrent en surface dans la Méditerranée alors que les eaux de cette dernière, plus salées, sortent par le fond. Nous avons montré l'existence d'une solution pour ce problème ce qui complète les résultats obtenus par M.L. Munoz, M.J. Castro-Diaz et C. Pares dans [109].

Depuis peu, toujours en collaboration avec P. Orenge et B. Di Martino, nous débutons un partenariat avec les membres de l'axe "feux de forêts" de l'UMR 6134 de l'Université de Corse. Les problèmes posés par les modèles d'incendies nous intéressent car ils induisent des couplages entre des systèmes d'équations non linéaires souvent définis sur des domaines dépendant du temps. En outre, les modèles de Saint-Venant peuvent être utilisés dans la modélisation de la convection dans les incendies de forêts [132]. Ainsi, le savoir faire acquis par notre équipe sur le traitement des frontières libres et sur les modèles de Saint-Venant pourrait s'avérer utile dans l'analyse numérique de ces problèmes.



# Bibliographie

---

- [1] F. Abergel and R. Temam. On some control problem in fluid mechanics. *Th. and Comput. Fluid Dynam.*, 1(303-325), 1990.
- [2] Y. Achdou and J.-L. Guermond. convergence analysis of a finite element projection/lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37:799–826, 2000.
- [3] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*, volume 65 of *Pure and applied mathematics*. Academic press, inc., 1978.
- [4] V.I. Agoshkov, D. Ambrosi, D. Pennati, A. Quarteroni, and F. Saleri. Mathematical and numerical modelling of shallow water equations. *Comp. Mech.*, 11:280–299, 1993.
- [5] G. Allain. Small-time existence for the Navier-Stokes equations with a free surface. *Appl. Math. Optim.*, 16, 1987.
- [6] K. Anastosiou and C.T. Chan. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume methods on unstructured triangular meshes. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 24:1225–1245, 1997.
- [7] P. Angot, C.H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalisation method to take into account obstacles in viscous flow. *Numer. Math*, 81:497–520, 1999.
- [8] R.L. Armentano. Respuesta en frecuencia de la pared arterial. *Revista Mexicana de Ingenieria Biomedica*, 24:45–54, 2003.
- [9] J.T. Beale. The initial-value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface. *Commun. Pure Appl. Math.*, 34:359–392, 1981.

- [10] J.T. Beale. Large-time regularity of viscous surface waves. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 84:307–352, 1984.
- [11] M. Bercovier, O. Pironneau, and V. Sastri. Finite elements and characteristics for some parabolic-hyperbolic problems. *Appl. Math. Modelling*, 7:89–96, 1983.
- [12] M.S. Berger. *Nonlinearity and functional analysis*, volume 74 of *Pure and applied mathematics*. Academic Press Inc., 1977.
- [13] A. Bermudez, A. Dervieux, J.A. Desideri, and M.E. Vazquez. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured mesh. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 155:49–72, 1998.
- [14] C. Bernardi and O. Pironneau. On the shallow water equations at low Reynolds number. *Commun. in Partial Differential Equations*, 16(1):59–104, 1991.
- [15] T. Bewley, R. Temam, and M. Ziane. Existence and uniqueness of optimal control to the Navier-Stokes equations. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 330:1007–1011, 2000.
- [16] F. Bosseur. *Détermination de conditions aux limites en mer ouverte avec une méthode de contrôle optimal*. PhD thesis, Université de Corse, Corte, 1997.
- [17] F. Bosseur, F. Flori, and P. Orenca. Identification of boundary conditions in a nonlinear shallow water flow. *Computers and Mathematics with Applications*, 43:1559–1573, 2002.
- [18] F. Bosseur, B. Di Martino, and P. Orenca. Resolution by Galerkin method with a special basis of a geophysical flow in open sea : A Calvi's bay simulation. *Applied Mathematical Modelling*, 24:73–94, 2000.
- [19] F. Bosseur and P. Orenca. Détermination de conditions aux limites en mer ouverte avec une méthode de contrôle optimal. *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications*, XIV, 2000.
- [20] D. Bresch and B. Desjardins. Sur un modèle de Saint-Venant visqueux

- 
- et sa limite quasi-géostrophique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 335:1079–1084, 2002.
- [21] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, théorie et applications. In *Collection Mathématiques Appliquée pour la Maîtrise, sous la direction de P.G. Ciarlet et J.L. Lions*. Masson, 1983.
- [22] A. Chambolle, B. Desjardins, M.J. Esteban, and C. Grandmont. Existence of weak solutions for an unsteady fluid-plate interaction problem. *Cahier du Ceremade*, 0245:1–42, 2003.
- [23] D.C. Chang, S.G. Krantz, and E.M. Stein.  $H^p$  theory on a smooth domain in  $R^n$  and elliptic boundary value problems. *Journal of Functional Analysis*, 114:286–347, 1993.
- [24] F.J. Chatelon. *Analyse d'un problème de shallow water*. PhD thesis, Université de Corse, Corte, dec 1996.
- [25] F.J. Chatelon and P. Orenca. On a non-homogeneous shallow-water problem. *M<sup>2</sup>AN*, 31(1):27–55, 1997.
- [26] F.J. Chatelon and P. Orenca. Some smoothness and uniqueness results for a shallow water problem. *Adv.Diff.Eq*, 3, 1998.
- [27] S. Chippada, C.N. Dawson, M.L. Martinez-Canales, and M.F. Wheeler. Finite element approximations to the system of shallow water equations. I: Continuous-time a priori error estimates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35:692–711, 1998.
- [28] S. Chippada, C.N. Dawson, M.L. Martinez-Canales, and M.F. Wheeler. Finite element approximations to the system of shallow water equations. II: Discrete-time a priori error estimates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36:226–250, 1998.
- [29] P.G. Ciarlet and P. Rabier. *Les équations de Von Karman*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
- [30] I.S. Ciuperca. A Navier-Stokes problem with free boundary. *Applied Mathematics Letters*, 9:39–43, 1996.

- 
- [31] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, and S. Semmes. Compensated-compactness and Hardy spaces. *J. Math. Pures Appl.*, 72:247–286, 1993.
- [32] R. Coifman and G. Weiss. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83:569–645, 1977.
- [33] C. Conca, J. San Martin H., and M. Tucsnak. Motion of a rigid body in a viscous fluid. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 328:473–478, 1999.
- [34] C. Conca, J. San Martin H., and M. Tucsnak. Existence of weak solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid. *Commun. in Partial Differential Equations*, 25:1019–1042, 2000.
- [35] P. Courtier and O. Talagrand. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. *Theory, Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 113:1311–1328, 1987.
- [36] H. Beirao da Veiga. On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem. *J. Math. Fluid Mechanics*, 6:21–52, 2004.
- [37] B. Desjardins and M.J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 146:59–71, 1999.
- [38] B. Desjardins and M.J. Esteban. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction: compressible and incompressible models. *Commun. in Partial Differential Equations*, 25:1399–1413, 2000.
- [39] B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont, and P. Le Tallec. Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *Rev. Mat. Complut.*, 14:523–538, 2001.
- [40] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A., Paris, 1984.

- 
- [41] R.J. DiPerna and P.L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *invent. math.*, 98:511–547, 1989.
- [42] R.J. DiPerna and P.L. Lions. *Global weak solutions of kinetic equations*. Deminario Matematico, Torino, 1990.
- [43] J. Donea. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient fluid-structure interactions. *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 33, 1982.
- [44] J. Donea, A. Huerta, J ph Ponthot, and A. Rodriguez-Ferran. Arbitrary lagrangian-eulerian methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2004.
- [45] J. Donea, A. Huerta, and J. Sarrate. Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for fluid-multi rigid bodies interaction problems. *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 190:3171–3188, 2001.
- [46] D. Errate, M.J. Esteban, and Y. Maday. Couplage fluide-structure. Un modèle simplifié en dimension 1. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 318:275–281, 1994.
- [47] L. Noson *et al.* *Washington State Earthquake Hazards*. Washington Division of Geology and Earth Resources Information Circular 85, 1988.
- [48] C. Fefferman and E.M. Stein.  $H^p$  spaces of several variables. *Acta Mathematica*, 129:137–193, 1972.
- [49] F. Flori. *Analyse d'un problème de couplage fluide-structure*. PhD thesis, Université de Corse, 1998.
- [50] F. Flori, C. Giacomoni, and P. Orenca. Convergence of a characteristic-galerkin scheme for a shallow water problem. *A paraître dans Mathematical and Computer Modelling*, 2004.
- [51] F. Flori and B. Giudicelli. Bornes sur la densité pour un problème de Navier-Stokes à frontière variable avec conditions aux limites de Dirichlet. *A paraître dans C.R. Acad. Sci. Paris*, 2004.
- [52] F. Flori, B. Giudicelli, and P. Orenca. An existence result for a blood



- 
- flow pattern in the vascular system. *Soumis à Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2004.
- [53] F. Flori, C. Morelli, and P. Orenca. Convergence of a lagrangian scheme for a compressible Navier-Stokes model defined on a domain depending on time. *Preprint*, 2004.
- [54] F. Flori and P. Orenca. On a fluid-structure interaction problem in velocity-displacement formulation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 8:543–572, 1998.
- [55] F. Flori and P. Orenca. Analysis of a nonlinear fluid-structure interaction problem in velocity displacement formulation. *Nonlinear Analysis TMA*, 35:561–587, 1999.
- [56] F. Flori and P. Orenca. On a nonlinear fluid-structure interaction problem defined on a domain depending on time. *Nonlinear Analysis TMA*, 38:549–569, 1999.
- [57] F. Flori and P. Orenca. Analysis of the Von Karman equations coupled with the visquous wave equation. *Differential and Integral Equations*, 13:813–826, 2000.
- [58] F. Flori and P. Orenca. Fluid-structure interaction problem: analysis of a 3-D compressible model. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Nonlinear Analysis*, 17:753–777, 2000.
- [59] F. Flori and P. Orenca. On a fluid-structure interaction problem. *Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*, 106:293–305, 2000.
- [60] F. Flori and P. Orenca. Borne sur l’advection et la hauteur d’eau du problème de shallow-water avec conditions aux limites de Dirichlet. *Soumis aux C.R. Acad. Sci. Paris*, 2004.
- [61] F. Flori, M. Peybernes, and P. Orenca. On a bilayer shallow water problem with dirichlet boundary conditions. *Preprint*, 2004.
- [62] L. Formaggia, J.F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. On the

- coupling of 3D and 1D Navier-Stokes equations for flow problems in compliant vessels. Rapport de recherche 3862, INRIA, Janvier 2000.
- [63] L. Formaggia, J.F. Gerbeau, F. Nobile, and A. Quarteroni. Numerical treatment of defective boundary conditions for the Navier-Stokes equations. Rapport de recherche 4093, INRIA, Janvier 2001.
- [64] L. Formaggia and A. Veneziani. Reduced and multiscale models for the human cardiovascular system. Rapport de recherche, MOX, Mathematics Departement F. Brioschi, Politecnico di Milano, mai 2003.
- [65] H. Fujita and N. Sauer. On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 17:403–420, 1970.
- [66] G.J. Galdi, J.G. Heywood, and Y. Shibata. On the global existence and convergence to steady state of Navier-Stokes flow past an obstacle that is started from rest. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 138:307–318, 1997.
- [67] M.J. Ghaleb. *Vibrations d'une plaque élastique infinie couplée avec un fluide sous l'effet d'un impact ponctuel*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1987.
- [68] C. Giacomoni. *Analyses de quelques problèmes de fluides géophysiques*. PhD thesis, Université de Corse, 2001.
- [69] C. Giacomoni and P. Orenga. On the two-dimensional compressible isentropic Navier-Stokes equations. *M2AN*, 36:1091–1109, 2002.
- [70] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Elements Methods of the Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1979.
- [71] P. Glaister. On the efficient solution of the steady two-dimensional shallow-water equations. *Int. J. Comput. Math.*, 54:97–108, 1994.
- [72] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. Fictitious domain method for Dirichlet problems and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 111:283–303, 1994.

- 
- [73] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. Fictitious domain methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies. *Proceedings of MAFELAP, Brunel University, UK*, 1996.
- [74] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. A lagrange multiplier / fictitious domain method for the numerical simulation of incompressible viscous flow around moving rigid bodies : case where the rigid motions are known a priori. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 324:361–369, 1997.
- [75] C. Grandmont. Existence et unicité de solutions d’un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel stationnaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 326:651–656, 1998.
- [76] C. Grandmont. Existence for a three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem. *J. Math. Fluid Mech.*, 4:76–94, 2002.
- [77] C. Grandmont and Y. Maday. Existence de solutions d’un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 326:525–530, 1998.
- [78] C. Grandmont and Y. Maday. Existence for a 3D fluid-structure interaction problem. *M2AN*, 34:609–636, 2000.
- [79] C. Grandmont, Y. Maday, and P. Métier. Existence of a solution for a unsteady elasticity problem in large displacement and small perturbation. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 334:521–526, 2002.
- [80] M. Gunzburger, H. Lee, and G. Seregin. Global existence of weak solutions for incompressible visquous flow around a moving rigid body in three dimension. *J. Math. Fluid Mech.*, 2:219–266, 2000.
- [81] P. Heinrich, A. Mangeney, G. Boudon, and R. Roche. Modéliser un raz de marée créé par un volcan. *La Recherche*, 318:66–71, 1999.
- [82] K.H. Hoffmann and V.N. Starovoitov. On a motion of a solid body in a viscous fluid. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 9:633–648, 1999.
- [83] J. Hogan, C. Li, A. McIntosh, and K. Zhang. Global higher integrability of jacobians on bounded domains. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 17:193–217, 2000.

- 
- [84] T.J.R. Hughes, W. Liu, and T.K. Zimmerman. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 29, 1981.
- [85] K. Hutter, T. Koch, C. Pluss, and S.B. Savage. The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout, part ii. *Acta Mech.*, 109:127–165, 1995.
- [86] A.V. Kazhikhov. Some new statements for initial boundary value problems for Navier-Stokes equations of viscous gas. In *Progress in theoretical and computational fluid mechanics*, ed. G.P. Galdi, J. Malek and J. Necas, Pitman Research Notes in Mathematics Series 308, pages 33–72. Longman, 1994.
- [87] J. Leray. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que posent l'hydrodynamique. *J. Math. Pures Appl.*, 12:1–82, 1933.
- [88] R. Lewandowski. *Analyse mathématique et océanographie*. Masson, 1997.
- [89] J.L. Lions. Une remarque sur les problèmes d'évolution non linéaires dans des domaines non cylindriques. *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliquées*, 9:11–18, 1964.
- [90] J.L. Lions. Sur certaines équations paraboliques non linéaires. *Bull. Soc. Math. France*, 93:155–175, 1965.
- [91] J.L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1969.
- [92] J.L. Lions. *Quelques méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod, 1969.
- [93] J.L. Lions. Quelques remarques sur certains problèmes d'évolutions non linéaires. Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Cagliari-Sassari Octobre 1964.
- [94] P.L. Lions. Sur l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions

- d'équations différentielles. *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique*, 1989.
- [95] P.L. Lions. Compacité des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles et isentropiques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317:115–120, 1993.
- [96] P.L. Lions. Limites incompressible et acoustique pour les fluides visqueux, compressibles et isentropiques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317:1197–1202, 1993.
- [97] P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Incompressible models*, volume 1. Oxford Science Publications, 1996.
- [98] P.L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Compressible models*, volume 2. Oxford Science Publications, 1998.
- [99] P.L. Lions. Bornes sur la densité pour les équations de Navier-Stokes compressibles et isentropiques avec conditions aux limites de Dirichlet. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 328:659–662, 1999.
- [100] E. Magenes and J.L. Lions. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, 1972.
- [101] M. Marion and R. Temam. Nonlinear Galerkin methods. *SIAM J.Numer. Anal.*, 26(5):1139–1157, oct 1989.
- [102] J. Alonso San Martin, V. Starovoitov, and Marius Tucsnak. Global weak solutions for two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 161:113–147, 2002.
- [103] B. Di Martino. *Analyse par la méthode de Galerkin non linéaire de problèmes d'océanographie physique*. PhD thesis, Université de Corse, 1998.
- [104] B. Di Martino, F.J. Chatelon, and P. Orenca. The nonlinear Galerkin's method applied to the shallow water equations. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 9:825–854, 1999.

- 
- [105] B. Di Martino, F. Flori, C. Giacomoni, and P. Orenca. Analyse d'un problème de tsunami. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 334:551–556, 2002.
- [106] B. Di Martino, F. Flori, C. Giacomoni, and P. Orenca. Sur la construction des solutions approchées d'un problème de tsunami. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 9:269–281, 2002.
- [107] B. Di Martino, F. Flori, C. Giacomoni, and P. Orenca. Mathematical and numerical analysis of a tsunami problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13:1489–1514, 2003.
- [108] P.O. Mattei. *Rayonnement acoustique des structures: méthodes d'équations intégrales de frontières*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 1991.
- [109] M.L Munoz, M.J. Castro-Diaz, and Carlos Pares. On an one dimensional bilayer shallow water problem. *Nonlinear Analysis TMA*, 53:567–600, 2004.
- [110] F. Murat. Compacité par compensation. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, V:489–507, 1978.
- [111] F. Murat. Compacité par compensation. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, VIII:69–102, 1981.
- [112] C. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoire de l'Académie des Sciences*, 6:389–416, 1823.
- [113] J. Necas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, 1967.
- [114] J.C.J. Nihoul. *Modelling of Marine Systems*, volume 10 of *Elsevier oceanography series*. Elsevier Scientific Publishing Compagny, 1975.
- [115] P. Orenca. Construction d'une base spéciale pour la résolution de quelques problèmes d'océanographie physique en dimension deux. *CRAS*, 314:587–590, 1992.
- [116] P. Orenca. Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water. *Arch. Rational Mach. Anal.*, 130:183–204, 1995.

- 
- [117] P. Orenca. Construction d'une base spéciale pour la résolution de quelques problèmes non linéaires d'océanographie physique en dimension deux. In *Nonlinear partial differential equations and their applications*, D. Cioranescu and J.L. Lions, volume 13 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series 391*, pages 234–258. Longman, 1998.
- [118] P. Orenca and R. Papi. Analyse numérique d'un problème de couplage fluide-structure. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317:1087–1090, 1993.
- [119] T.W. Pan, R. Glowinski, and G.P. Galdi. Direct simulation of the motion of a settling ellipsoid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 149:71–82, 2002.
- [120] R. Papi. *Analyse d'un problème dynamique d'interaction fluide-structure*. PhD thesis, Université de Corse, 1994.
- [121] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, 1987.
- [122] J. Pedlosky. *Ocean Circulation Theory*. Springer, 1996.
- [123] O. Pironneau. On transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numer. Math*, 38:309–332, 1982.
- [124] O. Pironneau. *Finite element method for fluid*. Wiley, New-York, 1989.
- [125] O. Pironneau and S. Huberson. Characteristic-Galerkin and the particle method for the convection-diffusion equation and the Navier-Stokes equations. *Lectures in Appl. Math.*, 28:547–565, 1991.
- [126] O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids*, 11:542–548, 1999.
- [127] R.C.H. Del Rosario and R.C. Smith. Lqr control of shell vibrations via piezoceramic actuators. ICASE 97-59, NASA/CR-97-206245.
- [128] A.J.C. Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 73:147–154, 1871.
- [129] R. Salvi. On the existence of weak solution of a non linear mixed

- 
- problem for the Navier-Stokes equations in a time dependent domain. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.*, 32:213–221, 1985.
- [130] M. Schulz and G. Steinebach. Two-dimensional modelling of the river rhine. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 145:11–20, 2002.
- [131] D. Serre. Chute libre d’un solide dans un fluide visqueux incompressible. *Japan J. Appl. Math.*, 4:99–110, 1987.
- [132] J. Simon, M.I. Asensio, and L. Ferragut. Modelling of convection in forest fires. *Forest Fire Research and Wildland Fire Safety*, pages 1–15, 2002.
- [133] V.A. Solonnikov. The solvability of the problem of the motion of a viscous incompressible fluid that is bounded by a free surface. *Izv. Akad. Nauk. SSSR*, 41:1388–1424, 1977.
- [134] V.A. Solonnikov. Unsteady motion of a finite mass fluid, bounded by a free surface. *Translated from Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova AN SSSR*, 152:137–157, 1986.
- [135] G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8:287–305, 1845.
- [136] E. Suli. Stability and convergence of the Lagrange-Galerkin method with non-exact integration. *The mathematics of finite elements and its applications*, J.R. Whiteman (ed.), New York Academic Press, pages 435–442, 1988.
- [137] L. Sundbye. Global existence for the Dirichlet problem for the viscous shallow water equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 202:236–258, 1996.
- [138] T. Takahashi. Existence de solutions fortes pour le problème d’un système fluide-solide rigide. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 336:453–458, 2003.
- [139] S. Timoshenko. *Théorie des plaques et coques*. Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1961.



- [140] B.A. Ton. Existence and uniqueness of classical solution of an initial boundary value problem of the theory of shallow waters. *SIAM J. Math. Anal.*, 12:229–241, 1981.
- [141] V.A. Weigant and A.V. Kazhikhov. Global solutions to the potential flow equations for a compressible viscous fluid at small Reynolds numbers. *Journal of Differential Equations*, 30:935–947, 1994.
- [142] H. Weinberger. Variational properties of steady fall in Stokes flow. *J. Fluid Mech.*, 52:321–344, 1972.
- [143] H. Weinberger. On the steady fall of a body in a Navier-Stokes fluid. *Proc. Symposia Pure Math.*, 23, 1973.
- [144] E. Zeidler. Fixed-point theorems. In *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume 1. Springer-Verlag, 1986.
- [145] E. Zeidler. Applied Functional Analysis. In *Applications to Mathematical Physics*, volume 108 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 1995.