



**HAL**  
open science

# Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques - Application à une enceinte acoustique.

Gérald Kergourlay

► **To cite this version:**

Gérald Kergourlay. Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques - Application à une enceinte acoustique.. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2004. Français. NNT : . tel-00011493

**HAL Id: tel-00011493**

**<https://theses.hal.science/tel-00011493>**

Submitted on 30 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques

Application à une enceinte acoustique

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 5 mars 2004

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Ecole Centrale Paris**

(spécialité mécanique)

par

Gérald KERGOURLAY

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Bernard PESEUX
<i>Rapporteurs :</i>	Antoine CHAIGNE Roger OHAYON
<i>Directeur de thèse :</i>	Étienne BALMÈS
<i>Examineurs :</i>	Sylvain GERMÈS Didier CLOUTEAU

n° 2004-05



*“Salud deOc’h, Flac’hIg yaouank, a lavariz dezhi  
Evel don oc’h ankeniet o kuitaat tud ho ti*

*Ho tornig flour em dornig lakit gant karantez  
Evit ma vimp eürusoc’h o ouelañ asambles*

*Ar plac’hig a lavaraz : O kloareg Gwenole  
Pedomp Doue alies an eil ’vit egile*

*Er Joa koulz En anken, dalc’hiT soñj a Vetig  
Eus a-vremañ da viken ez eo ho mestrezig”*

**Metig** (*Traditionnel breton*)



# Remerciements

Cette thèse présente les résultats des recherches réalisées de septembre 1999 à décembre 2003 au sein du Laboratoire Mécanique des Sols, Structures et Matériaux (MSSMat) de l'Ecole Centrale Paris. Je suis profondément reconnaissant envers Etienne Balmès qui m'a suivi et encadré durant mon D.E.A et ces années de thèse. En dépit des difficultés rencontrées, il a su mettre en place les conditions propices au bon déroulement et à l'aboutissement de mes travaux de recherche. J'ai apprécié les conseils qu'il m'a prodigués tant en matière d'enseignement que de recherche.

Je remercie également Didier Clouteau pour avoir suivi une partie de mes travaux, notamment en ce qui concerne l'interprétation des calculs de champ acoustique sous son logiciel MISS3d. Une grande partie des réalisations expérimentales de cette thèse doit beaucoup à Gilbert Legal, technicien aux doigts d'or et aux ressources inépuisables lorsqu'il s'agit de dispositifs mécaniques compliqués. Enfin, une partie des expériences n'auraient pas été possibles sans le concours d'Erwan Le Pocher et de la société PRAME [60] qui nous a fourni le modèle d'enceinte close.

J'exprime toute ma reconnaissance à Denis Aubry pour m'avoir accueilli dans son équipe où j'ai pu travailler sur cette thèse et sur bien d'autres sujets passionnants. L'ambiance du laboratoire lui doit beaucoup. Merci à Pascal Laurent et Hachmi Ben Dhia avec lesquels j'ai eu la chance de collaborer à l'occasion d'enseignements du tronc commun et de l'option MAE/VO et auprès desquels j'ai beaucoup appris.

Je remercie vivement Bernard Peseux pour avoir présidé mon jury de thèse, Antoine Chaigne et Roger Ohayon pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que tous les membres du jury pour m'avoir fait l'honneur de juger mes travaux de recherche.

Un merci particulier à Jean-Michel et à Arnaud V. pour avoir relu plusieurs chapitres de ma thèse avec attention, Rémi et Guillaume R. pour l'annexe, Arnaud B. pour les plans de conception du banc de mesure et Mathieu pour le grand coup de main pendant la dernière ligne droite!

Je tiens à remercier chacun des membres du laboratoire, qui d'une manière ou une autre, ont contribué à ce que ces années aient été aussi agréables qu'enrichissantes. Parmi ceux que je n'ai pas encore cités : Bing, Damien, Catherine, Malek, Adrien, Eric, Guillaume J., Nader, Lamiae, Oscar, Chokri, Auke, Tuan Anh, Maarten, Gert, Régis, Christophe, Hamid, Ramzi, et la liste est encore longue ...

Enfin, il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille et l'affection dont elle a su m'entourer depuis toujours. Pokoù deoc'h, Man, Pa, Sandra, Flo ha ma zud-kozh burzhudus!

Hag, evit echuiñ, kalz a draoù dit, Sofi garet...



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
---------------------	----------

## **Chapitre 1**

### **Modélisation de l'amortissement**

1.1	Introduction . . . . .	6
1.2	Matériaux viscoélastiques . . . . .	6
1.2.1	Module complexe . . . . .	7
1.2.2	Facteurs d'environnement . . . . .	8
1.2.3	Représentations du module . . . . .	15
1.2.4	Détermination du module . . . . .	19
1.3	Modèles de structures amorties . . . . .	27
1.3.1	Formes des équations du modèle . . . . .	27
1.3.2	Réponses fréquentielles . . . . .	30
1.3.3	Problème aux valeurs propres . . . . .	34
1.4	Conclusion . . . . .	39

## **Chapitre 2**

### **Banc de mesure de films viscoélastiques**

2.1	Introduction . . . . .	42
2.2	Banc de mesure . . . . .	42
2.2.1	Principe fonctionnel . . . . .	42
2.2.2	Mise en œuvre de la précontrainte . . . . .	47
2.3	Dimensionnement . . . . .	49
2.3.1	Modèle Éléments Finis . . . . .	49
2.3.2	Modes propres du banc . . . . .	51
2.3.3	Analyses détaillées . . . . .	53

2.4	Réalisation expérimentale . . . . .	60
2.4.1	Tôles sandwich . . . . .	60
2.4.2	Réalisation et évolutions du banc . . . . .	61
2.5	Exploitation des mesures . . . . .	64
2.5.1	Mesure de modules complexes . . . . .	64
2.5.2	Construction de nomogrammes . . . . .	66
2.5.3	Lois tabulées du matériau BI2F . . . . .	68
2.6	Conclusion . . . . .	73

<b>Chapitre 3</b>
-------------------

<b>Traitement amortissant d'une enceinte acoustique</b>
---

3.1	Introduction . . . . .	76
3.2	Enceinte acoustique . . . . .	76
3.2.1	Présentation . . . . .	77
3.2.2	Rôle du coffret . . . . .	78
3.2.3	Traitement de l'enceinte . . . . .	80
3.3	Modèle éléments finis d'une enceinte PRAME . . . . .	83
3.3.1	Propriétés de l'enceinte et objectifs du modèle . . . . .	83
3.3.2	Modèle éléments finis . . . . .	85
3.3.3	Validation expérimentale du modèle . . . . .	90
3.4	Analyse vibroacoustique . . . . .	101
3.4.1	Modèle fluide-structure . . . . .	101
3.4.2	Effet du fluide sur le comportement dynamique . . . . .	105
3.4.3	Analyse de la performance acoustique . . . . .	108
3.4.4	Conception d'un traitement amortissant . . . . .	114
3.5	Conclusion . . . . .	118

**Conclusion** **121**

**Annexe A Interaction Fluide-Structure** **125**

A.1	Équations du modèle . . . . .	126
A.1.1	Acoustique linéaire . . . . .	126
A.1.2	Élastodynamique linéaire . . . . .	128
A.2	Équations continues . . . . .	129

---

A.2.1	Équation locale fluide . . . . .	129
A.2.2	Équation locale structure . . . . .	130
A.2.3	Équilibre global de l'interface . . . . .	130
A.3	Résolution [19] . . . . .	130
A.3.1	Sous-domaine fluide . . . . .	130
A.3.2	Sous-domaine structure . . . . .	132
A.3.3	Équilibre global . . . . .	133
<b>Bibliographie</b>		<b>135</b>



# Introduction

La maîtrise des phénomènes vibratoires est un point essentiel dans la conception mécanique de systèmes complexes. Les vibrations peuvent engendrer des perturbations dans l'environnement (instabilités aérodynamiques, perturbations de la visée optique, du guidage de la tête de fraisage...) et occasionner des gênes importantes (niveau de rayonnement acoustique, accélérations perçues par les passagers d'un véhicule...), sans compter les risques de rupture due à la fatigue vibratoire (aubes de moteurs d'avion, fissures dans les fuselages...). Un grand nombre de problèmes de vibration peuvent être résolus par une augmentation du niveau de dissipation dans la structure par l'ajout d'un traitement amortissant.

Dans le cadre de la vibroacoustique, le but est d'amortir les niveaux d'un maximum de résonances sur une large bande pour diminuer le bruit rayonné. Dans les cas de fatigue, on cherche à baisser le niveau d'un mode particulier pour diminuer la fatigue vibratoire due à cette résonance particulière.

On a recours à la simulation numérique pour dimensionner de telles structures, décider de l'emplacement du traitement amortissant et optimiser son utilisation. L'utilisation de matériaux viscoélastiques, en particulier sous forme de sandwich (parements d'acier ou de verre collés par une couche viscoélastique mince), est un moyen traditionnel d'augmenter l'amortissement. Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, les matériaux amortissants sont caractérisés par un module complexe dépendant de la fréquence et d'autres facteurs d'environnement tels que la température et la précontrainte. Une difficulté pour le calcul des structures est alors la prise en compte de tels modules complexes non constants.

L' **objectif** de cette thèse est de proposer un calcul prédictif vibratoire et acoustique sur un modèle d'enceinte acoustique contenant des traitements amortissants. Pour cela, la modélisation de la structure passe par la caractérisation des matériaux amortissants qui la constituent. Le **premier objectif** est de discuter de la fiabilité et de la facilité d'implémentation de différentes représentations de matériaux viscoélastiques dans la méthode des éléments finis. Le **deuxième objectif** est la mise au point d'un banc dynamique de mesure des propriétés mécaniques de films viscoélastiques de plaques sandwich prenant en compte la dépendance en température, mais également en précontrainte, afin de définir des lois tabulées du module de cisaillement complexe de tels matériaux amortissants.

Le chapitre 1 dresse le bilan de la connaissance actuelle en ce qui concerne les modèles mécaniques utilisés pour représenter l'amortissement dans les structures.

On se place dans le cadre de la viscoélasticité linéaire appliquée aux matériaux homogènes isotropes pour introduire l'approche module complexe. Les modélisations ainsi couramment utilisées sont introduites - modèles rhéologiques classiques, modèles à fractions rationnelles, à dérivées fractionnaires. On discute de leur pertinence à représenter le comportement des matériaux réels, après identification expérimentale de leurs paramètres. Plus le nombre de paramètres est important, plus l'écart entre les valeurs, calculées et mesurées, des parties réelles et imaginaires des modules sont petites mais plus les modèles sont difficiles à manipuler. On montre ainsi l'avantage d'utiliser directement les données expérimentales sous forme de lois tabulées.

Finalement, la mise en œuvre de tels modèles dans la méthode des éléments finis est discutée et on montre leur pertinence pour le calcul de réponses fréquentielles directes et le calcul de modes. Une **première contribution** de la thèse est l'adaptation de la méthode d'itération sur les résidus au calcul des réponses fréquentielles de structures amorties.

Le chapitre 2 décrit la réalisation d'un banc de mesure dynamique des propriétés mécaniques de films viscoélastiques. Le but est de mesurer le module de cisaillement complexe de matériaux amortissants souples pris en sandwich entre deux parements rigides.

La nouveauté du banc est qu'il permet non seulement d'évaluer l'influence de la température mais également de la précontrainte statique en cisaillement, ceci dans l'état "réel" du film viscoélastique (sans modification de géométrie dans l'épaisseur du sandwich). La difficulté est la mise en œuvre de la précontrainte et le dimensionnement de l'ensemble du banc pour obtenir une bande de fréquence suffisamment large non perturbée par les modes propres du banc.

On peut alors construire une courbe maîtresse du film viscoélastique en large bande en introduisant la notion de variables réduites (hypothèses de superposition). On observe la validité expérimentale de l'hypothèse de superposition fréquence-température, mais également celle de l'hypothèse de superposition fréquence-précontrainte. La réalisation du banc de mesure et la validation de l'hypothèse de superposition fréquence-précontrainte constituent la **deuxième contribution** de cette étude. L'application des hypothèses de superposition permet non seulement d'obtenir une loi tabulée sur une large bande de fréquence, mais également de déterminer l'évolution de la loi en fonction de la température et de la précontrainte.

---

Le chapitre 3 présente la modélisation éléments finis-éléments de frontière d'une enceinte close acoustique et la mise en œuvre d'un traitement amortissant pour optimiser son comportement vibroacoustique. On part d'un modèle éléments finis d'enceinte et on recale ses paramètres à partir de résultats d'essais. Les difficultés de recalage sur le modèle expérimental sont mises en avant : formes géométriques complexes du haut-parleur, variétés et complexités des matériaux utilisés, nécessité de prendre en compte la présence de fluide interne, difficulté d'interprétation des modes expérimentaux autres que le mode de piston, etc.

On étudie l'évolution du champ acoustique rayonné dans la bande de fréquence 0-2000 Hz et on évalue la contribution acoustique des différentes surfaces de l'enceinte à l'aide d'une méthode intégrale et d'une modélisation par éléments de frontière.

Le but est alors de placer un traitement amortissant interne, afin de minimiser les vibrations du coffret. Le mode de piston, qui constitue le mode utile pour le rayonnement acoustique, ne doit pas être affecté par ce traitement. Une étude paramétrique pour déterminer la raideur optimale de ce traitement est effectuée et on évalue l'efficacité du traitement amortissant sur le champ acoustique rayonné. L'ensemble des ingrédients utilisés pour ce calcul ne sont pas nouveaux, mais leur combinaison, appliquée à une enceinte acoustique, est originale et constitue la **troisième contribution** de cette thèse.



# 1

## Modélisation de l'amortissement

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Matériaux viscoélastiques</b>	<b>6</b>
1.2.1	Module complexe	7
1.2.2	Facteurs d'environnement	8
1.2.3	Représentations du module	15
1.2.4	Détermination du module	19
<b>1.3</b>	<b>Modèles de structures amorties</b>	<b>27</b>
1.3.1	Formes des équations du modèle	27
1.3.2	Réponses fréquentielles	30
1.3.3	Problème aux valeurs propres	34
<b>1.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>

---

## 1.1 Introduction

Un grand nombre de mécanismes sont susceptibles de dissiper l'énergie vibratoire d'une structure ou d'un échantillon de matériau soumis à une déformation dynamique. Certains de ces mécanismes sont associés à des reconstructions internes de la structure à l'échelle macroscopique et microscopique. Ce type d'amortissement est qualifié d'amortissement interne du matériau.

D'autres mécanismes dissipent l'énergie au niveau des liaisons ou des interfaces. Ils correspondent soit à des mécanismes de frottement (interaction structure/structure, structure/fluide, etc.), soit à l'action des supports (impacts, décollements cycliques notamment). Dans tous ces cas, l'énergie vibratoire est dissipée sous forme d'une énergie non récupérable : chaleur, rayonnement, etc.

La majorité des techniques d'estimation de l'amortissement utilisent des modèles particuliers choisis *a priori* et essayent d'en identifier les paramètres via des expériences spécifiques. Les modèles couramment utilisés pour représenter l'amortissement dans les modèles de structure sont

- l'amortissement visqueux (proportionnel à la vitesse) ;
- l'amortissement hystérétique ou structural (proportionnel au déplacement) ;

Aucun de ces modèles n'est approprié pour décrire le comportement des matériaux réels sur une large bande de fréquence [15] ; on aborde donc dans ce chapitre les difficultés liées à l'utilisation de matériaux viscoélastiques.

La section 1.2 détaille la représentation du comportement viscoélastique par des modules complexes, les mesures qui permettent d'obtenir ce module et les modèles paramétriques généralement utilisés pour leur représentation.

La section 1.3 présente les modèles effectivement mis en œuvre pour la résolution par la méthode des éléments finis de problèmes amortis, ainsi que les méthodes de réduction pour le calcul de la réponse dynamique de tels systèmes.

## 1.2 Matériaux viscoélastiques

Cette section présente une synthèse des modèles de caractérisation de matériaux viscoélastiques qui seront utilisés dans la suite de cette étude. En section 1.2.1, on rappelle que la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire se ramène à celle d'un matériau élastique linéaire à condition de considérer le module élastique comme une quantité complexe dépendant de la fréquence. Les propriétés amortissantes de tels matériaux dépendent de différents facteurs d'environnement dont on détaille l'influence en section 1.2.2.

Pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux, la section 1.2.3 présente diverses représentations paramétriques du module complexe : modèles rhéologiques simples, modèles à fractions rationnelles et à dérivées fractionnaires. En section 1.2.4, on discute des techniques d'estimation des paramètres à partir des mesures expérimentales et leur pertinence pour représenter de manière précise le comportement de matériaux réels.

### 1.2.1 Module complexe

En viscoélasticité linéaire [68], la contrainte  $\sigma$  est supposée être une fonction linéaire de l'historique de la déformation  $\varepsilon$ , ce que l'on peut traduire par l'existence d'une fonction de relaxation  $h$  telle que

$$\sigma(t) = \int_0^{+\infty} \varepsilon(t - \tau)h(\tau)d\tau. \quad (1.1)$$

Par utilisation de la transformée de Laplace, cette hypothèse est équivalente à l'existence d'un module complexe  $\Lambda$  (transformée de Laplace de la fonction de relaxation  $h$ ) tel que

$$\sigma(s) = \Lambda(s)\varepsilon(s) = [\Lambda'(s) + i\Lambda''(s)]\varepsilon(s) \quad (\Lambda', \Lambda'' \in \mathbb{R}^2), \quad (1.2)$$

où  $\Lambda'$  et  $\Lambda''$  sont respectivement les parties réelles et imaginaires du module complexe. D'un point de vue pratique, on peut donc résoudre les problèmes de viscoélasticité comme des cas particuliers de l'élasticité où les propriétés des matériaux sont complexes et dépendent de la fréquence  $s$ . Cette propriété est connue sous le nom de principe d'équivalence élastique/viscoélastique [68].

Pour les matériaux isotropes et homogènes,  $\Lambda$  est complètement décrit par un module d'Young  $E^*$  et un coefficient de Poisson  $\nu^*$  complexes. Leur mesure séparée pose cependant des problèmes expérimentaux très significatifs. La pratique est donc de mesurer le module d'Young  $E^*$ , ou le module de cisaillement  $G^*$ , et de supposer un coefficient de Poisson  $\nu^*$  constant. Très peu de données sont par ailleurs disponibles sur les variations de  $\nu^*$  avec la fréquence ; on sait principalement dire qu'il diminue lorsque la fréquence augmente [63].

Dans le domaine fréquentiel, si on considère le module d'Young dans les cas de traction compression, l'équation (1.2) s'écrit

$$\sigma(\omega) = E^*(\omega)\varepsilon(\omega) = [E'(\omega) + iE''(\omega)]\varepsilon(\omega) = E'(\omega)[1 + i\eta(\omega)]\varepsilon(\omega). \quad (1.3)$$

On appelle *module de stockage* la partie réelle  $E'(\omega) = \text{Re}(E^*(\omega))$  et *facteur de perte* le rapport partie imaginaire sur partie réelle  $\eta(\omega) = \text{Im}(E^*(\omega))/\text{Re}(E^*(\omega)) = E''/E'$ .

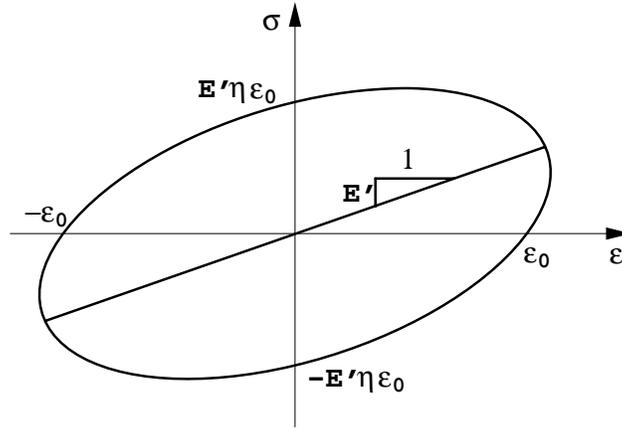


FIG. 1.1 – Cycle contrainte/déformation elliptique pour un matériau viscoélastique linéaire

À chaque fréquence, le module complexe décrit une relation contrainte/déformation elliptique

$$\sigma = \text{Re}(E^* \varepsilon_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}(E'(1 + i\eta)\varepsilon_0 e^{i\omega t}) = E'\varepsilon_0(\cos\omega t - \eta\sin\omega t), \quad (1.4)$$

montrée en figure 1.1. Le nom *facteur de perte* traduit le fait que  $\eta$  correspond au ratio de l'énergie dissipée  $E_d$  sur un cycle de déformation par  $2\pi$  fois l'énergie potentielle maximale  $E_p = E'\varepsilon_0^2/2$  :

$$E_d = \int_0^T \sigma : \dot{\varepsilon} dt = E'\eta\varepsilon_0^2\omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2\omega t dt = \pi E'\eta\varepsilon_0^2 = \eta 2\pi E_p. \quad (1.5)$$

La forme de l'ellipse qui décrit un cycle d'hystérésis change avec l'évolution du facteur de perte  $\eta$ . Plus le facteur  $\eta$  est grand, plus l'énergie dissipée  $E_d$  est grande et plus la surface de l'hystérésis est importante.

## 1.2.2 Facteurs d'environnement

On observe expérimentalement que les propriétés des matériaux amortissants dépendent non seulement de la fréquence mais également de la température  $T$ , de la prédéformation statique  $\varepsilon_0$  (ou précontrainte statique) et d'autres facteurs d'environnement. Dans les sections suivantes, on discute de la dépendance du module complexe  $\Lambda = \Lambda(s, T, \varepsilon_0)$  en fréquence, température et précontrainte et on détaille sa représentation.

### 1.2.2.1 Influence de la température

La température est le facteur d'environnement ayant le plus d'influence sur les caractéristiques des matériaux viscoélastiques [51]. En fonction de la température, les matériaux viscoélastiques peuvent se présenter dans quatre états différents montrés en figure 1.2 : l'*état vitreux* (a), l'*état de transition* (b), l'*état caoutchouteux* (c) et l'*état fluide* (d) correspondant

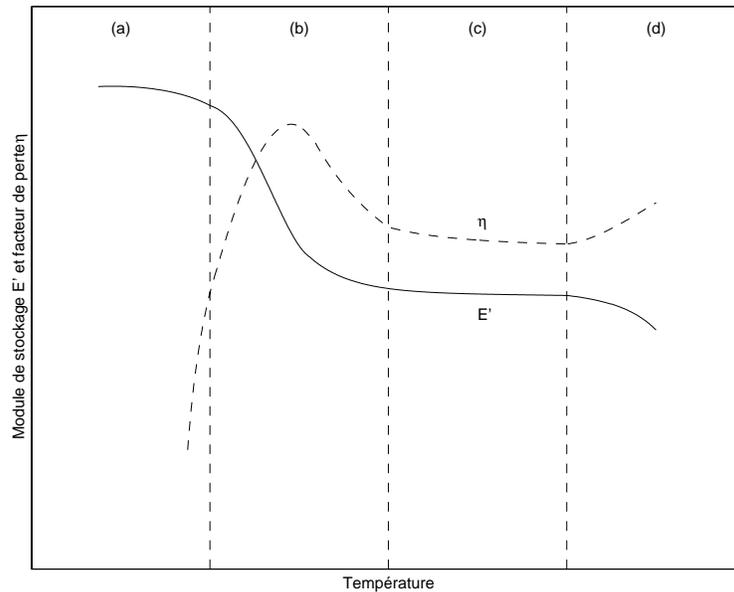


FIG. 1.2 – Variation du module de stockage  $E'$  et du facteur de perte  $\eta$  d'un matériau viscoélastique en fonction de la température à fréquence constante

chacun à une zone de température donnée. Selon le matériau considéré, la température ambiante peut se trouver dans l'une des quatre régions. Pour les mélanges de polymères, chaque polymère peut se retrouver dans une zone différente, ce qui rend l'étude de tels matériaux ardue.

Dans la première zone (a) associée aux températures les plus faibles, le matériau est dans son état vitreux caractérisé par un module de stockage atteignant sa valeur maximale et variant peu avec la température. Le facteur de perte est très faible et augmente rapidement avec la température. Les déformations du matériau sont alors très faibles.

La zone de transition (b) est caractérisée par un module décroissant fortement avec la température et un facteur de perte présentant son maximum au milieu de la zone (température de transition vitreuse  $T_g$  qui dépend de la fréquence).

Dans la région caoutchoutique (c), le module de stockage et le facteur de perte sont tous deux caractérisés par des valeurs relativement faibles variant peu avec la température.

La quatrième région (d) correspond à un état fluide du matériau. Cet état est très peu considéré dans les études de conception en raison de son instabilité. De plus, pour beaucoup de matériaux, cette région n'est pas définie.

Dans l'objectif d'amortir les vibrations, il est utile de solliciter les matériaux au voisinage de la zone de transition (b). Ce choix est motivé par les variations du facteur de perte  $\eta$  qui atteint son maximum dans cette zone, permettant ainsi une utilisation optimale des propriétés amortissantes du matériau viscoélastique.

### 1.2.2.2 Fréquence et variables réduites

La figure 1.3 présente les variations mesurées expérimentalement du module d'un film viscoélastique (âme de sandwich BI2F étudiée dans le cadre de cette thèse) dans le domaine fréquence/température. Une coupe isotherme mène à la figure 1.4 alors qu'une coupe isofréquence donne la zone de transition (b) de la figure 1.2.

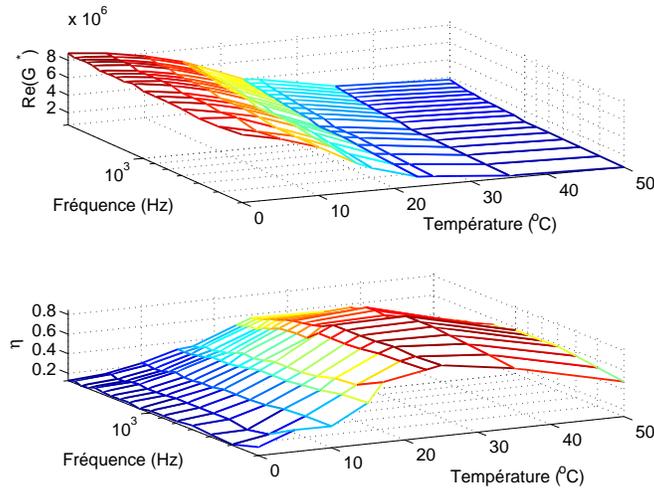


FIG. 1.3 – Variations du module du BI2F dans le domaine fréquence/température 0 – 50° C 400-2000Hz

Pour une température  $T$  proche de la température de transition vitreuse  $T_g$  (dans la zone de transition (b) de la figure 1.2), la mesure de caractéristiques viscoélastiques donne un module complexe dont la variation en fréquence ressemble généralement à celle montrée en figure 1.4.

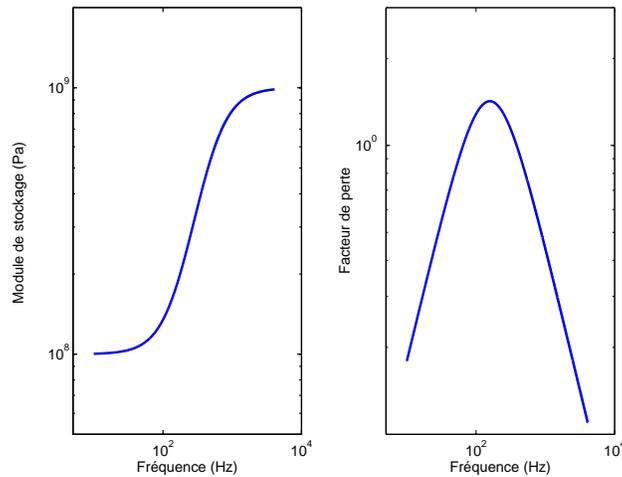


FIG. 1.4 – Variations du module complexe sur une large gamme de fréquence à température fixée

Une observation expérimentale montre qu'en décalant en fréquence les courbes donnant les propriétés du matériau en fonction de la fréquence à différentes températures, elles tendent à se superposer et à décrire une courbe continue. Cette propriété motive l'introduction de la notion de *fréquence réduite*  $\alpha(T)\omega$  associée à une description du module sous la forme

$$E^*(\omega, T) = \hat{E}(\alpha(T)\omega) = \hat{E}'(\alpha_T\omega)[1 + i\hat{\eta}(\alpha_T\omega)] \quad (1.6)$$

où les grandeurs  $\hat{E}$  et  $\alpha_T = \alpha(T)$  sont respectivement appelées *courbe maîtresse* et *facteur de décalage en température*. Il s'agit de l'*hypothèse de superposition* fréquence/température [51], qui s'applique à beaucoup de matériaux viscoélastiques linéaires.

Parmi les autres facteurs influant sur le comportement amortissant, la précontrainte statique  $\varepsilon_0$  est importante. Il est là aussi possible d'introduire un facteur de décalage  $\alpha_{\varepsilon_0} = \alpha(\varepsilon_0)$  pour tenir compte de ce nouveau facteur d'environnement. La validation expérimentale de l'hypothèse de superposition fréquence/précontrainte est ainsi l'un des objectifs du chapitre 2.

Les données du module de stockage  $\hat{E}'$ , du facteur de perte  $\hat{\eta}$ , du facteur de décalage en température  $\alpha_T$  et du facteur de décalage en précontrainte  $\alpha_{\varepsilon_0}$  rendent donc possible une représentation complète du module complexe en fonction de la fréquence, de la température et de la précontrainte.

Dans le cas de la figure 1.5 (voir plus de détails en section 2.5.2), le décalage en température a été évalué pour garantir le recollement des courbes de module de stockage et de facteur de perte pour chaque petite bande de fréquence à différentes températures du BI2F.

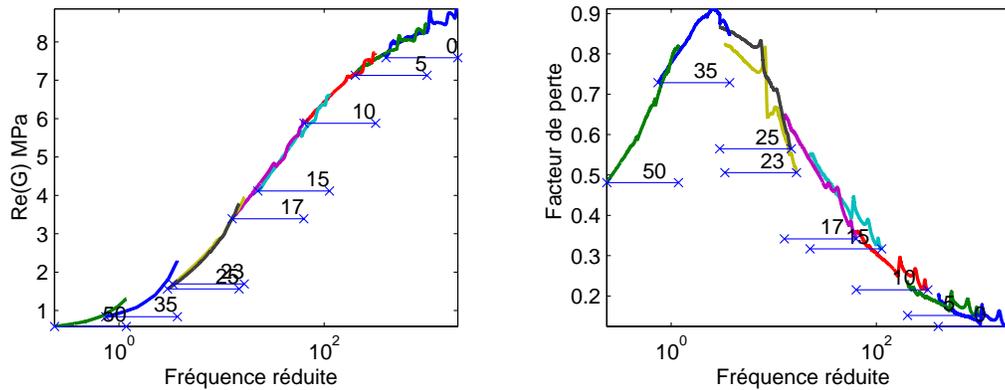


FIG. 1.5 – Module de stockage et facteur de perte du BI2F en fréquence réduite -  $T \in 0 - 50^\circ C$

L'hypothèse de superposition fréquence/température n'est pas générale, en particulier pour les mélanges de polymères. Dans le cas de matériaux non homogènes, l'hypothèse ne s'applique pas forcément, même dans la zone de transition [77]. Ceci est le cas des copolymères (assemblage de deux polymères au niveau des liaisons chimiques, ceci crée un nouveau polymère au motif alterné) et des polymères chargés (les charges sont des éléments organiques et

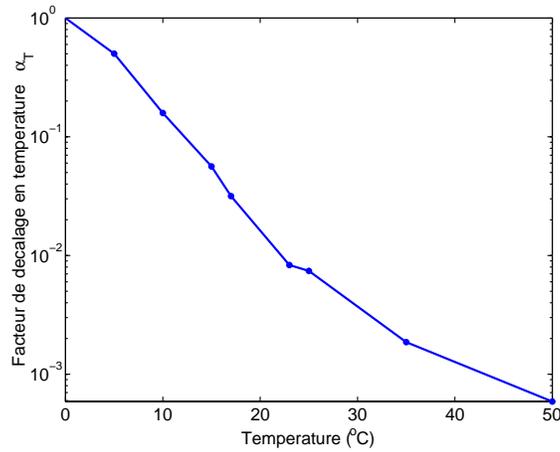


FIG. 1.6 – Facteur de décalage en température  $\alpha_T$  du BI2F

inorganiques d'environ 10 microns qui sont ajoutés au polymère). À une température donnée, les deux polymères peuvent se trouver dans deux états différents. La méthode des variables réduites ne peut pas s'appliquer lorsque deux transitions de nature différente (par exemple une transition secondaire et la transition vitreuse) se chevauchent, à la fréquence considérée, sur une même plage de température. Dans ce cas, les deux types de processus moléculaires mis en jeu ne présentent pas la même dépendance en fréquence.

L'allure du facteur de décalage utilisé pour construire les courbes de la figure 1.5 est donnée par la figure 1.6. La représentation de  $\hat{E}'$  et  $\hat{\eta}$  en fréquence réduite  $\alpha_T\omega$  ou  $\alpha_{\varepsilon_0}\omega$  donnée par l'abaque de la figure 1.7 s'appelle donc courbe maîtresse ou encore *nomogramme*.

Le nomogramme simplifie l'obtention des données des propriétés du matériau en fonction de la température  $T$  (ou de la précontrainte  $\varepsilon_0$ ) et de la fréquence  $\omega$ . À chaque température correspond un facteur de décalage  $\alpha_T$  qui définit une droite isotherme dans le plan  $(\omega\alpha_T, \omega)$ . On définit donc les fréquences réelles sur l'axe vertical droit et des droites isothermes permettant de relever graphiquement la fréquence réduite sur l'axe horizontal. Pour une fréquence  $\omega_j$  et une température  $T_k$  quelconques, la lecture de l'abaque se fait en trois étapes apparaissant sur la figure 1.7 :

- (1) repérage du point d'intersection P de la droite horizontale  $\omega_j$  et de l'isotherme oblique  $T_k$  ;
- (2) lecture de l'abscisse du point P qui fournit la valeur de  $\omega_j\alpha_T(T_k)$  ;
- (3) lecture de valeurs de  $E'$  et  $\eta$  sur les courbes maîtresses en fonction de  $\omega_j\alpha_T(T_k)$ .

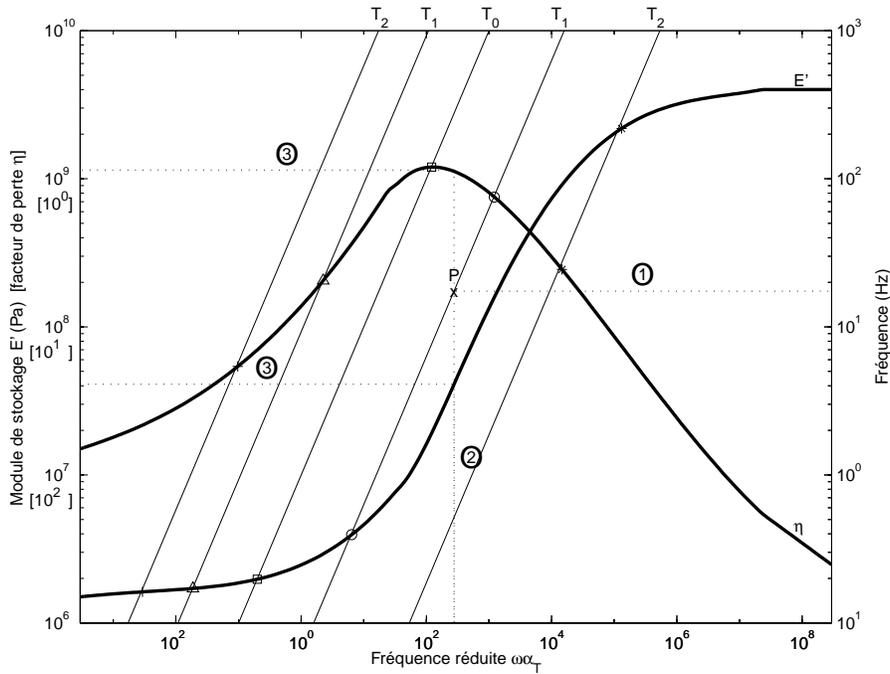


FIG. 1.7 – Nomogramme en fréquence réduite

### 1.2.2.3 Formes paramétriques de la fréquence réduite en température

La section précédente a montré qu'on peut utiliser une loi tabulée pour décrire le comportement viscoélastique du matériau. On stocke dans un tableau les parties réelles et imaginaires du module complexe en fonction de la fréquence réduite. On donne dans cette section les principales représentations paramétriques du facteur de décalage qui permettent de faire la conversion de la fréquence réduite  $\alpha_T \omega$  en fréquence physique  $\omega$ , ceci pour des températures autres que celles mesurées expérimentalement.

Dans la zone de transition, à des températures supérieures à la transition vitreuse  $T_g$  et sur une gamme de température d'environ  $50^\circ\text{C}$ , *i.e.* de  $T_g$  à  $T_g + 50^\circ\text{C}$ , l'équation WLF (Williams-Landel-Ferry) [81] décrit de façon satisfaisante le facteur de décalage en température  $\alpha_T$

$$\log \alpha_T = -\frac{C_1^o(T - T_0)}{C_2^o + T - T_0}. \quad (1.7)$$

Les coefficients viscoélastiques  $C_1^o$  et  $C_2^o$  (donnés en  $^\circ\text{C}$ ) sont des caractéristiques du matériau, mais leurs valeurs sont fonctions du choix de la température de référence  $T_0$ .

On peut montrer, pour un polymère, que la quantité  $T_0 - C_2^o$  est une constante, homogène à une température et que le produit  $C_1^o C_2^o$  est aussi une constante, indépendante du choix de la température de référence  $T_0$ . De ce fait, les valeurs  $C_1^g$  et  $C_2^g$  des coefficients viscoélastiques

à  $T_g$  se déduisent facilement des valeurs  $C_1^o$  et  $C_2^o$  à  $T_0$ . Initialement, il avait été envisagé que  $C_1^g$  et  $C_2^g$  puissent prendre des valeurs "universelles", indépendantes du matériau considéré :  $C_1^g = 17,4$  et  $C_2^g = 51,6^\circ\text{C}$ . En fait, il est rapidement apparu que d'un polymère à l'autre, les constantes  $C_1^g$  et  $C_2^g$  peuvent prendre des valeurs sur des plages de températures très larges, typiquement [34]

$$5 \leq C_1^g \leq 30 \quad \text{et} \quad 25^\circ\text{C} \leq C_2^g \leq 100^\circ\text{C}. \quad (1.8)$$

Halary [34] propose une justification précise de la forme de l'équation WLF à l'aide d'équations simples basées sur les modèles de volume libre pour un polymère solide homogène dans la zone de transition.

Des lois arrhéniennes sont observées aussi bien dans la région des transitions secondaires à basse température ( $T < T_g$ ), que dans la région d'écoulement ( $T > T_g$ ). L'équation d'Arrhenius est utilisée en thermodynamique pour quantifier la relation entre le taux auquel une réaction intervient et sa température

$$\log \alpha_T = \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (1.9)$$

où  $T$  est la température en degrés Kelvin,  $R = 8.314 \times 10^{-3} \text{kJmol}^{-1} \text{K}^{-1}$  est la constante des gaz parfaits et  $E_a$  correspond à l'énergie d'activation de la réaction [34].

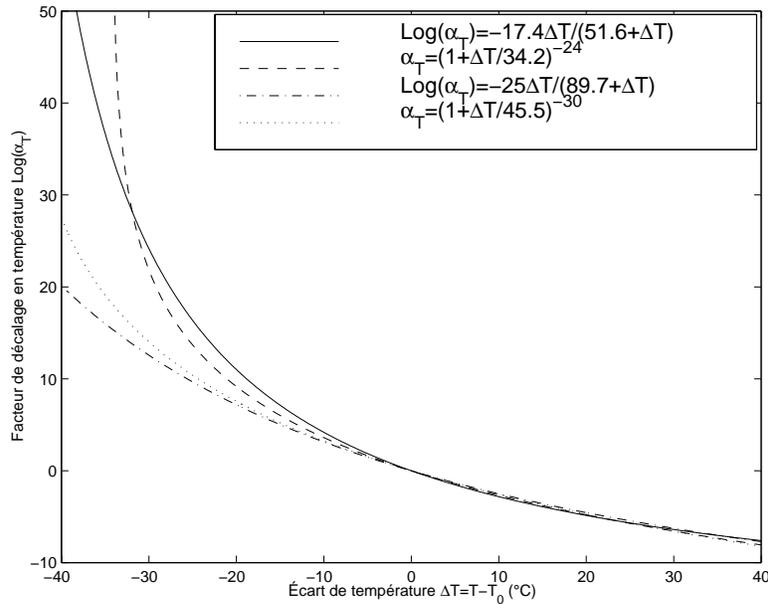


FIG. 1.8 – Facteur de décalage en température  $\alpha_T$

Des fonctions de type Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) rendent compte du comportement à  $T < T_g$  [80]. Pellinen *et al.* [56] proposent une comparaison de cinq fonctions (WLF, Arrhenius, log-linear, expérimental et VTS -Viscosity Temperature Suceptibility) qui décrivent le facteur de décalage en température  $\alpha_T$ , appliquées aux asphaltes.

La figure 1.8 qui présente des courbes typiques de  $\alpha_T$  et leur expression en fonction de l'écart en température  $\Delta T = T - T_0$  montre que leurs différences sont essentiellement liées au comportement à basse température.

### 1.2.3 Représentations du module

Cette section expose les différentes représentations du module complexe. On peut utiliser directement les lois tabulées issues des mesures (section 1.2.3.1). On peut également choisir une loi paramétrique dont on identifie les paramètres à l'aide des mesures expérimentales (section 1.2.3.2). Finalement, on discute de la pertinence de ces représentations dans le domaine fréquentiel, par comparaison avec les modèles temporels proposés dans la littérature (section 1.2.3.3).

#### 1.2.3.1 Formes tabulées

Un certain nombre d'essais dynamiques (cf. mesures directes explicitées en section 1.2.4.1) permettent de mesurer le module de stockage  $E'(\omega)$  et le facteur de perte  $\eta(\omega)$  d'un matériau en un certain nombre de points de fréquence  $\omega$  sur une bande étroite. Si on mesure ces quantités à plusieurs températures ou plusieurs précontrainte différentes, on peut envisager d'utiliser l'hypothèse de superposition explicitée en section 1.2.2.2 pour obtenir un nomogramme en fréquence réduite (cf. figure 1.7). L'objectif principal du chapitre 2 est la mise au point d'un banc de mesure pour construire des nomogrammes fréquence-température et fréquence-précontrainte de tôles sandwich.

On dispose alors d'une représentation sous forme de table (loi tabulée) du module complexe en fréquence réduite  $\alpha_T \omega$  ou  $\alpha_{\varepsilon_0} \omega$ , mais également du facteur de décalage en température  $\alpha_T$  et en précontrainte  $\alpha_{\varepsilon_0}$  aux températures  $T$  et aux précontraintes  $\varepsilon_0$ . Pour connaître le module en un point de fonctionnement arbitraire  $(\omega, T, \varepsilon_0)$ , on interpole ou extrapole les valeurs expérimentales du facteur de décalage pour trouver la fréquence réduite, puis on interpole ou extrapole le module sur la courbe maîtresse.

L'interpolation se déroule en deux étapes. On effectue d'abord une interpolation linéaire du logarithme du facteur de décalage  $\log \alpha_T$  ou  $\log \alpha_{\varepsilon_0}$  pour connaître sa valeur au point de température  $T$  ou de précontrainte  $\varepsilon_0$  désiré. On en déduit la fréquence réduite associée  $\alpha_T \omega$  ou  $\alpha_{\varepsilon_0} \omega$ . On réalise alors une interpolation du logarithme des parties réelles et imaginaires du module complexe  $\log E'(\omega)$  et  $\log E''(\omega)$  en ces nouvelles valeurs de fréquence réduite. L'extrapolation peut se faire directement sur le nomogramme. Dans les zones haute et basse

fréquence non mesurées, on prolonge par des asymptotes. La section 1.2.4.3 évoque la prolongation par des asymptotes du module complexe dans le domaine des fréquences physiques.

L'avantage d'une représentation non-paramétrique de la loi de comportement est de permettre la représentation de comportements généraux fortement dépendants de la fréquence et de la température/précontrainte sur une large gamme. De plus, l'utilisation directe des données permet de contourner des étapes de choix de représentation et d'identification des paramètres. Dans la mesure où l'ensemble des calculs de conception peuvent être réalisés en utilisant des interpolations numériques, la représentation tabulée est la plus générale.

### 1.2.3.2 Formes paramétriques

- Modèles simples

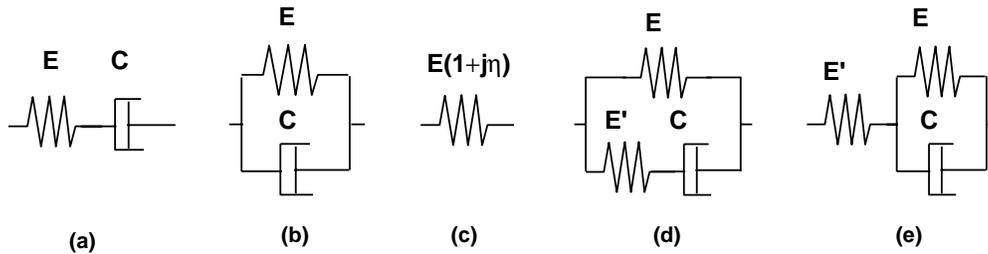


FIG. 1.9 – Modèle d'amortissement à deux ou trois paramètres : (a) Modèle de Maxwell; (b) Modèle de Kelvin-Voigt; (c) Amortissement hystérétique (Structural); (d) Modèle de Zener; (e) Modèle de Poynting.

On cherche à approcher le comportement de matériaux amortissants par un modèle analytique simple (*i.e.* qui possède peu de paramètres). La première idée consiste à utiliser des modèles rhéologiques (association de masse, ressort et amortisseur visqueux élémentaires qui décrivent la relation entre contrainte et déformation).

Le modèle à trois paramètres exposé en figure 1.9 (d) (Modèle de Zener, encore appelé solide viscoélastique standard) reprend les caractéristiques principales trouvées sur les matériaux réels : asymptotes haute et basse fréquence, maximum de dissipation à la fréquence de plus grande pente de variation du module. Le module complexe de ce modèle qui comprend un élément élastique de module  $E$  en parallèle avec deux autres éléments - un élément élastique  $E'$  et un élément visqueux  $C$  s'écrit

$$E^*(s) = E_\infty + \frac{E_0 - E_\infty}{1 + s/\omega_j} \quad (1.10)$$

où  $E_0 = E$  représente l'asymptote basse fréquence, l'asymptote haute fréquence  $E_\infty$  est égale à  $E + E'$  et la fréquence où le maximum de dissipation est atteint  $\omega_j \sqrt{E_0/E_\infty}$  est reliée au

temps de relaxation  $\tau = 1/\omega_j = C/E'$ .

On peut améliorer la précision du modèle en utilisant des formulations plus élaborées. Les modèles à dérivées fractionnaires proposent l'utilisation de puissances non entières de  $s = i\omega$ , ce qui permet une représentation fréquentielle dont la pente est arbitraire. Un modèle à quatre paramètres qui "colle" mieux aux mesures expérimentales du module de stockage et du facteur de perte est ainsi proposé en [62]

$$E^*(s) = E_\infty + \frac{E_0 - E_\infty}{1 + (s/\omega_j)^\alpha}, \quad (1.11)$$

où les modules haute et basse fréquences, respectivement  $E_\infty$  et  $E_0$ , sont déterminés facilement. Les coefficients  $\alpha$  et  $\omega_j$  permettent d'ajuster la fréquence du maximum de dissipation et les pentes du module de stockage et du facteur de perte.

- Modèles d'ordre élevé

La généralisation la plus classique des modèles précédents est le recours à une fraction rationnelle

$$E^*(s) = E_0 \frac{1 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{n_n} s^{n_n}}{1 + \beta_1 s + \dots + \beta_{n_d} s^{n_d}}, \quad \text{avec } n_d, n_n \in \mathbb{N}, \quad (1.12)$$

ou encore une fraction de polynômes à dérivées fractionnaires

$$E^*(s) = E_0 \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s)^{\beta_n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)^{\alpha_n}}, \quad \text{avec } 0 < \alpha_n, \beta_n < 1. \quad (1.13)$$

La fraction rationnelle (1.12), lorsque  $n_d > n_n$  et quand tous ses pôles sont distincts, peut être décomposée en une somme de fractions rationnelles du premier ordre

$$E^*(s) = E_\infty - \sum_{j=1}^n \frac{E_j}{1 + (s/\omega_j)}. \quad (1.14)$$

Pour des pôles  $\omega_j$  réels, cette série est appelée série de Prony et est souvent considérée dans le domaine temporel. Dans le cas  $n = 1$  ( $n_d = 1$  et  $n_n = 0$ ), on retrouve le modèle de Zener de la figure 1.9 (d) avec  $E_1 = E' = E_\infty - E_0$  et  $\omega_1 = E'/C$ .

Le modèle de Maxwell généralisé et la chaîne de Kelvin, basés sur la combinaison multiple des modèles rhéologiques présentés en figure 1.10, sont deux représentations classiques de modèles de la forme (1.12). Il s'agit respectivement de mettre en parallèle le modèle de Maxwell qui est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série, et en série le modèle d'amortissement visqueux (dit Kelvin-Voigt), constitué lui d'un ressort et d'un amortisseur en série.

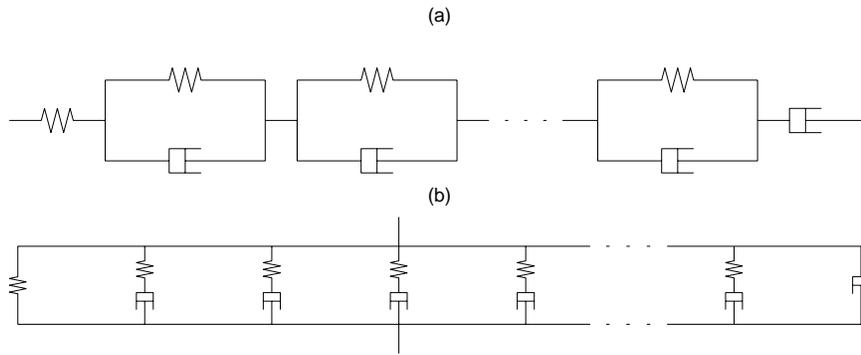


FIG. 1.10 – Modèles généralisés : (a) Chaîne de Kelvin, (b) Chaîne de Maxwell

Le module de cisaillement du matériau viscoélastique *Golla-Hugues-MacTavish* (GHM) [33] développé par Golla *et al.* s'exprime de la manière suivante dans le domaine de Laplace

$$G^*(s) = G_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right). \quad (1.15)$$

Du fait de la similitude entre chaque terme de la série apparaissant dans (1.15) et la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté amorti, le module peut être interprété comme une série de  $n$  mini-oscillateurs masse-raideur-amortisseur représentés par les trois paramètres positifs  $(\alpha_i, \omega_i, \zeta_i)$ .

Le modèle *Anelastic Displacement Field* (ADF) [43] [44] [42] développé par Lesieutre et Bianchini représente quant à lui le module de cisaillement complexe du matériau viscoélastique par une série de la forme

$$G^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^n \Delta_i \frac{\omega^2 + j\omega\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right), \quad (1.16)$$

où  $\Delta_i$  et  $\Omega_i$  sont déterminés par identification au module de cisaillement mesuré du matériau. Cette méthode se base sur la séparation des déformations du matériau viscoélastique en une partie élastique, instantanément proportionnelle à la contrainte, et une partie anélastique représentant la relaxation du matériau.

Ces modèles sont des cas particuliers de sommes de fractions rationnelles particulièrement intéressantes puisque le solveur de valeurs propres associé existe. Malheureusement, ces modèles nécessitent l'introduction de nombreux pôles pour approcher correctement les mesures expérimentales, ce qui les rend beaucoup plus coûteux que les modèles simples présentés précédemment. Associés à une discrétisation par éléments finis, ils conduisent à des systèmes de grandes tailles, comme cela sera explicité en section 1.3.1.3.

### 1.2.3.3 Dualité temps/fréquence - Causalité

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, on est parti du domaine temporel, puis passé au domaine fréquentiel pour obtenir la relation contrainte-déformation et définir ainsi le module complexe (1.2). On peut alors directement utiliser les lois tabulées issues des mesures expérimentales ou encore effectuer une identification paramétrique des modèles exposés en section 1.2.3.2. Certaines études, tel que les phénomènes transitoires, nécessitent un calcul temporel. Dans cette section, à travers la littérature disponible sur ce sujet, on se pose la question de la bonne représentation des propriétés de fluage et relaxation de telles représentations après passage dans le domaine temporel par transformée de Fourier inverse.

Barkanov [12] a vérifié la causalité de modèles tabulés fréquentiels issus de tests dynamiques. Il évalue numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis la réponse transitoire de poutres sandwich (tricouche avec un cœur viscoélastique) à un impact. La représentation des propriétés amortissantes du cœur est donnée par une loi tabulée. Après transformation à l'aide de la transformée de Fourier inverse discrète pour se placer dans le domaine temporel, il observe que la réponse est bien obtenue après application de l'excitation.

Les modèles décrivant le module complexe par des fractions rationnelles peuvent être décrits à l'aide de variables internes et ont donc une représentation temporelle directe. L'utilisation de leurs expressions fréquentielles pour le calcul des structures est abordée en section 1.3.1.3.

Bon nombre de modèles d'amortissements hystérétiques ont été proposés dans le domaine temporel, mais il s'est avéré que ces formulations posent divers problèmes comme la violation du principe de causalité ou la non-équivalence entre les expressions fréquentielle et temporelle [26].

Christensen [22] a développé un modèle temporel reposant sur une fonction de relaxation qui peut être transformée dans le domaine fréquentiel en un module complexe. Il est très difficile d'obtenir dans ce cas un modèle fréquentiel qui colle bien aux données expérimentales. Son point de vue reste théorique puisqu'il ne donne pas d'expression analytique de fonction de relaxation qui convienne.

Les problèmes de causalité et de non-équivalence fréquentiel/temporel sont et restent encore un large champ d'investigations qui n'a pas trouvé de réponses définitives à l'heure actuelle.

### 1.2.4 Détermination du module

Dans cette section, on présente les techniques d'identification à partir des principales mesures expérimentales qui conduisent à la détermination des paramètres des fonctions re-

présentant le module de matériaux viscoélastiques citées précédemment.

On présente les différents dispositifs expérimentaux en section 1.2.4.1. En section 1.2.4.2, on cite les travaux réalisés dans les domaines temporel et fréquentiel pour minimiser l'écart lois tabulées expérimentales - lois paramétriques par une méthode de moindre carré (appelés *identification* ou encore *lissage*). Finalement, on discute des propriétés asymptotiques de lissage en section 1.2.4.3.

### 1.2.4.1 Mesures expérimentales

Pour la caractérisation des matériaux viscoélastiques, on peut distinguer les techniques *indirectes* par utilisation des taux d'amortissement de modes sur des éprouvettes [52] et les techniques *directes* par sollicitation dynamique en traction/compression, torsion [20] et cisaillement (poutre sandwich, banc d'essai de cisaillement [3]) où on mesure *directement* le module complexe sur l'ensemble des fréquences du signal d'excitation.

- Mesures indirectes

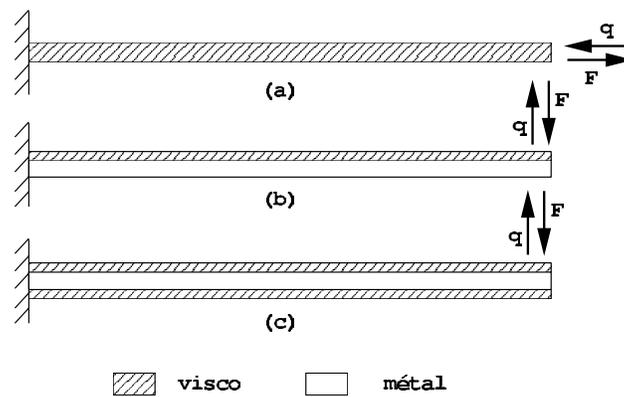


FIG. 1.11 – Différentes combinaisons d'éprouvettes pour essais de traction/compression : (a) Poutre homogène, (b) Poutre d'Oberst, (c) Poutre d'Oberst modifiée ;  $F$  : effort appliqué,  $q$  : déplacement induit

Les principales combinaisons d'éprouvettes, modélisées par des poutres, sont présentées sur la figure 1.11 : la *poutre homogène* (a) qui permet de mesurer les propriétés de matériaux suffisamment raides ne nécessitant pas l'utilisation combinée avec du métal, la *poutre d'Oberst* (b) composée d'une couche de matériau viscoélastique collée sur une face d'une éprouvette de métal, la *poutre d'Oberst modifiée* (c), composée de deux couches de matériau viscoélastique collées sur chaque face d'une éprouvette de métal ; cette dernière permet de simplifier les équations par rapport à la poutre d'Oberst classique ainsi que de contourner des difficultés expérimentales.

L'ensemble de ces techniques font travailler en traction-compression les matériaux viscoélastiques raides. L'analyse vibratoire de ces poutres fournit des fréquences de résonance et

les amortissements associés. Par analyse inverse de solutions analytiques ou numériques, on détermine le module complexe au niveau des résonances sous l'hypothèse d'amortissement modal (section 1.3.3.1).

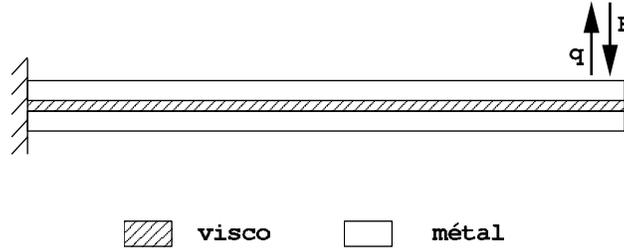


FIG. 1.12 – Essai de cisaillement indirect : poutre sandwich

Parmi les méthodes analytiques, la méthode de Ross-Kerwin-Ungar [65] reste celle la plus couramment utilisée : développée pour des structures à trois couches, elle peut être adaptée aussi bien à des structures sous déformations en traction-compression qu'en cisaillement (figure 1.12). En faisant varier les dimensions de poutre et les températures, on peut déterminer un nombre significatif de points.

À partir des mesures sur les éprouvettes, on évalue une ou plusieurs des quantités suivantes [51] :

- $\Delta$  : *décrément logarithmique* ;  
le décrétement logarithmique est mesuré sur la réponse temporelle en déplacement du système (*free-vibration decay method* [54]). En notant  $A_i$  l'amplitude de la réponse, et  $n$  le nombre de cycles, on a  $\Delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_m}{A_{m+n}}$  ;
- $\zeta$  : *taux d'amortissement modal*  
le taux d'amortissement est relié à la largeur de bande autour de la résonance (*half-power bandwidth*) ;
- $\frac{dW}{W}$  : *ratio énergie dissipée / énergie stockée* ;  
ce ratio est égal à la surface de l'hystérésis dans le quart de plan positif  $(\sigma, \varepsilon)$  (*resonance energy loss per cycle method*) (cf. figure 1.1 section 1.2.1) ;
- $\tan \delta$  : *tangente de la phase* ;  
la tangente de la phase (*Phase shift* ou encore déviation de la phase) mesure, en régime harmonique, l'écart de phase entre l'accélération de l'excitation et la réponse.

Pour une vibration harmonique à la résonance d'un oscillateur à un degré de liberté dans le cas d'un amortissement faible, la relation entre ces différentes mesures est donnée par l'équation

$$\eta = \frac{\Delta}{2\pi} = 2\zeta = \frac{1}{2\pi} \frac{dW}{W} = \tan \delta \quad (1.17)$$

où  $\eta$  est le facteur de perte défini en section 1.2.1. Il convient cependant de rester très prudent quant à l'interprétation de cette égalité puisqu'il s'agit d'estimateurs globaux de l'amortissement issus de tests différents. Pour comparer l'effet d'un traitement par amortissement sur une structure, il faut rester dans un seul de ces cadres.

- Mesures directes

Les essais de traction/compression sous excitation sinusoïdale sont utilisés pour mesurer les propriétés de matériaux suffisamment raides pour ne pas nécessiter l'utilisation combinée avec du métal [78]. Avec des précautions expérimentales très significatives, cette technique a aussi été appliquée à des films. Selon le dispositif expérimental (balayage en fréquence, tests en chambre isotherme), on déterminera directement le module complexe sur des isofréquences ou des isothermes.

L'essai de cisaillement illustré en figure 1.13 permet de déterminer directement le module de cisaillement complexe d'un film joignant deux surfaces rigides. La poutre sandwich (la couche viscoélastique est prise en sandwich entre deux épaisseurs de métal) fait travailler en cisaillement les matériaux mous. Cet essai est le plus représentatif pour caractériser ces matériaux puisque le polymère est dans son état fonctionnel, c'est-à-dire sous forme de film, un échantillon épais du même polymère ayant souvent des propriétés différentes.

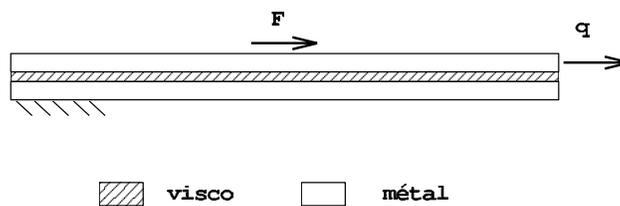


FIG. 1.13 – Essai de cisaillement direct : poutre sandwich

Cet essai est le seul à même de permettre la caractérisation de l'effet de précontrainte statique en cisaillement (contraintes résiduelles) présente dans les sandwich mis en forme. Il nécessite cependant quelques modifications qui ont été l'objet d'un travail de mise en œuvre au cours de cette thèse : la conception et l'étude d'un banc de mesure adapté font l'objet du chapitre 2. La réalisation d'un banc d'essai ne présentant pas de résonances dans la bande fréquentielle d'intérêt étant très difficile, la caractérisation du module est réalisée sur des bandes relativement étroites à différentes températures et/ou précontraintes. L'hypothèse de superposition fréquence-température ou fréquence-précontrainte (section 1.2.2.2) peut alors

être utilisée pour créer une courbe maîtresse en large bande.

Il existe d'autres exemples de mesure directe :

- le rhéomètre cône-plan donne la réponse d'un fluide visqueux sous cisaillement dynamique sur une petite bande de fréquence, en général [0,1-100] Hz ;
- le test de barres d'Hopkinson, effectué dans le domaine temporel, dans une barre de matériau peut donner des résultats entre [100-10000] Hz [55].

#### 1.2.4.2 Identifications temporelle et fréquentielle

Après le choix d'une loi analytique *a priori*, il importe d'en déterminer les paramètres pour coller au mieux aux courbes maîtresses du matériau. Dans le domaine temporel, de nombreux algorithmes pour approcher le module de relaxation et de fluage sont proposés par Baumgaerel [14]. Liu [46] en fait une synthèse et présente un cadre mathématique rigoureux pour l'identification à l'aide de séries de Prony. Il propose un algorithme basé sur la méthode des moindres carrés non négatifs.

Dans le domaine fréquentiel, de nombreux travaux ont été effectués sur les polymères, les colles et les rubans adhésifs à partir des courbes maîtresses délivrées par les constructeurs. Les modèles analytiques sont choisis *a priori* et les paramètres sont obtenus par la méthode des moindres carrés ; en général la fonction objectif est choisie "linéaire" mais des différences de logarithmes sont également considérées. Le matériau viscoélastique ISD112 (3M Company, Kraton - Shell Chemical) a été l'objet d'un certain nombre de caractérisations. On présente dans les paragraphes suivants les identifications réalisées par divers auteurs sur ce matériau.

Lesieutre et Bianchini [43] ont présenté le lissage du matériau ISD112, à une température de 27°C, entre 8 et 8000 Hz en introduisant leurs modèles ADF (cf. équation (1.16)). Ils concluent que cinq ADFs (avec deux paramètres par ADF, soient onze paramètres au total) représentent fidèlement le comportement du module élastique et du facteur de perte du matériau en fonction de la fréquence. Friswell *et al.* [31] ont présenté la même analyse pour le modèle GHM (cf. équation (1.15)), avec trois ou quatre paramètres par modèle pour l'ISD112 à 20°C entre 2 et 4800 Hz. Ces modèles lissent généralement bien les courbes maîtresses des matériaux dont la dépendance en fréquence est forte.

Lin [45] propose pour le matériau ISD112 les lois suivantes

$$\begin{aligned} G' &= e^{-2.6962 f^{0.6937}} \text{ N/mm}^2, \\ \eta &= e^{0.60503 f^{-0.08807}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $f$  représente la fréquence physique. Ces lois, obtenues à partir des courbes expérimentales issues de [51], ressemblent au modèle à dérivées fractionnaires (1.11) avec des exposants distincts pour  $G'$  et  $\eta$ .

Plus récemment, Galucio [32] a identifié le matériau viscoélastique ISD112 à 27°C à l'aide de deux modèles fractionnaires dont l'expression est donnée par l'équation (1.11). Les courbes de la figure 1.14 montrent que le choix du coefficient  $\alpha$  a une grande importance : lorsque  $\alpha = 1$ , on retrouve le modèle classique à trois paramètres (modèle de Zener donné par l'équation (1.10)) qui ne permet pas de suivre les 12 points expérimentaux du module de stockage et du facteur de perte. Un ajustement du paramètre  $\alpha$  à l'aide d'une méthode de moindre carré permet de minimiser l'écart avec les données expérimentales : pour  $\alpha = 0.7915$ , la pente du module de stockage et le maximum de dissipation du facteur de perte sont beaucoup mieux ajustés. Ceci illustre bien l'utilité du coefficient supplémentaire  $\alpha$  pour reproduire fidèlement les mesures.

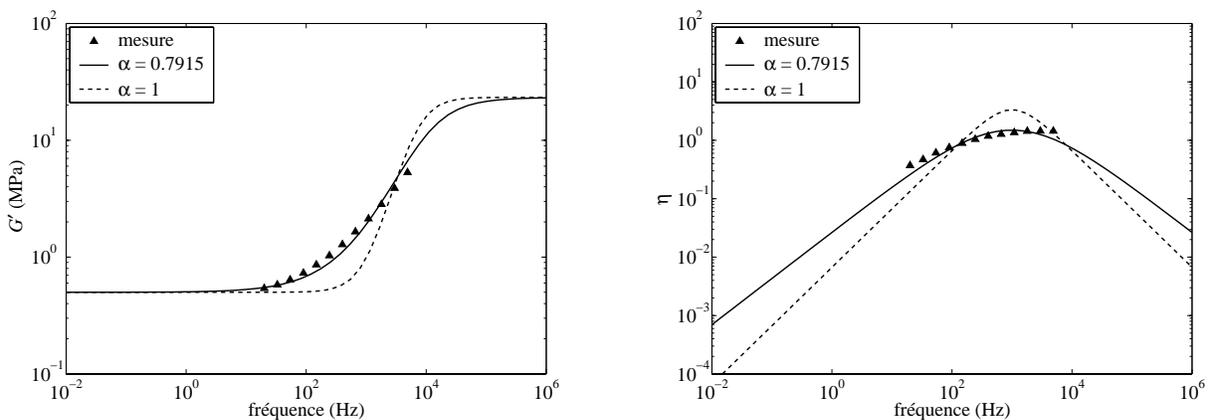


FIG. 1.14 – Module de stockage et facteur de perte de l'ISD112 à 27°C :  $\alpha < 1$  (modèle fractionnaire),  $\alpha = 1$  (modèle de Zener) [32]

Trindade [75] a comparé les modèles ADF et GHM identifiés à partir des mêmes données expérimentales. Il a proposé le lissage des paramètres des modèles à l'aide de la boîte à outils d'optimisation (Optimization Toolbox) de Matlab, plus particulièrement la fonction *lsqnonlin*, qui utilise un algorithme non-linéaire (Non Linear Least Squares) pour mesurer l'écart entre les valeurs, calculées et mesurées, des parties réelles et imaginaires des modules de cisaillement. Il précise qu'il faut utiliser pour le lissage une bande de fréquence plus large que celle considérée dans l'analyse du système de manière à minimiser l'effet des erreurs aux bords de la bande. Trois séries de paramètres (*i.e.* sept paramètres pour ADF et dix pour GHM) sont nécessaires pour la convergence de la méthode avec une erreur minimale de 5% dans le cas du lissage des courbes maîtresses de l'ISD112 à 27°C.

Dans le domaine du génie civil, des efforts significatifs ont été fournis pour caractériser les propriétés thermoélastoplastiques de mélanges butimineux et de l'asphalte mesurés à haute et basse température [27]. Il est primordial de bien modéliser analytiquement le comportement de l'asphalte pour tenir compte des grandes variétés de climat, ce qui a amené les chercheurs

à identifier des modèles adéquats. Witczak *et al.* [56] proposent d'identifier les paramètres du modèle suivant

$$\log(|E^*|) = \delta + \frac{\alpha}{1 + e^{\beta - \gamma \log(\alpha_T \omega)}} \quad (1.19)$$

en appliquant une méthode des moindres carrés non-linéaire Marquadt-Levensburg modifiée [67]. Ce modèle dépendant de la fréquence réduite  $\alpha_T \omega$  qui est à rapprocher du modèle à dérivées fractionnaires (1.11) porte la dénomination de sigmoïdal (*Sigmoidal Fitting Function*).  $\delta$  représente l'asymptote basse-fréquence du module,  $\delta + \alpha$  l'asymptote haute-fréquence du module,  $\beta$  précise la position horizontale du point d'inflexion et  $\gamma$  la pente de la courbe autour de ce point. Il est à remarquer qu'il ne décrit que le module de stockage  $E' = |E^*|$  et non le facteur de perte. D'après les auteurs, ce modèle reproduit bien le comportement physique des mélanges d'asphalte et garantit de bonnes propriétés asymptotiques.

### 1.2.4.3 Propriétés asymptotiques du lissage

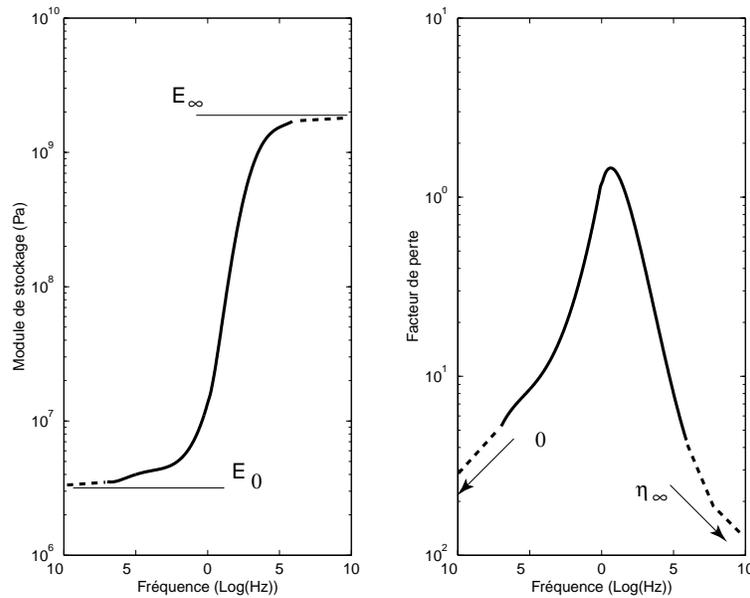


FIG. 1.15 – Mesure expérimentale directe - Module de stockage et facteur de perte d'une résine viscoélastique

Les valeurs des paramètres identifiés ne sont souvent valables que dans la bande de fréquence utilisée pour le lissage. Or, dans des simulations, des modes situés hors de cette bande peuvent être excités, il est donc impératif de vérifier le caractère raisonnable du comportement asymptotique du modèle. La mesure brute de caractéristiques viscoélastiques à une température et une précontrainte fixées donne le module complexe dont la variation en fréquence ressemble généralement à celle montrée en figure 1.15. Dans les zones haute et basse fréquence non mesurées, on prolonge par des asymptotes.

Crandall [26] montre que pour représenter un mécanisme de dissipation physiquement réalisable, la fonction qui représente le facteur de perte doit être positive et paire de la fréquence  $\omega$ . Pour l'extrapolation en basse fréquence, on se donnera une asymptote réelle  $E_0$  et  $\eta_0 = 0$  car la fonction de relaxation étant réelle, sa transformée de Fourier est paire et réelle en 0. Pour les hautes fréquences, on définira une asymptote complexe  $E_\infty, \eta_\infty$ .

La figure 1.16 illustre le fait qu'avec des fractions rationnelles on peut assez facilement satisfaire le premier objectif de reconstruire un module complexe sur une bande étroite (en gras). Mais les extrapolations en dehors de la bande (traits fins) sont ici de qualité très moyenne.

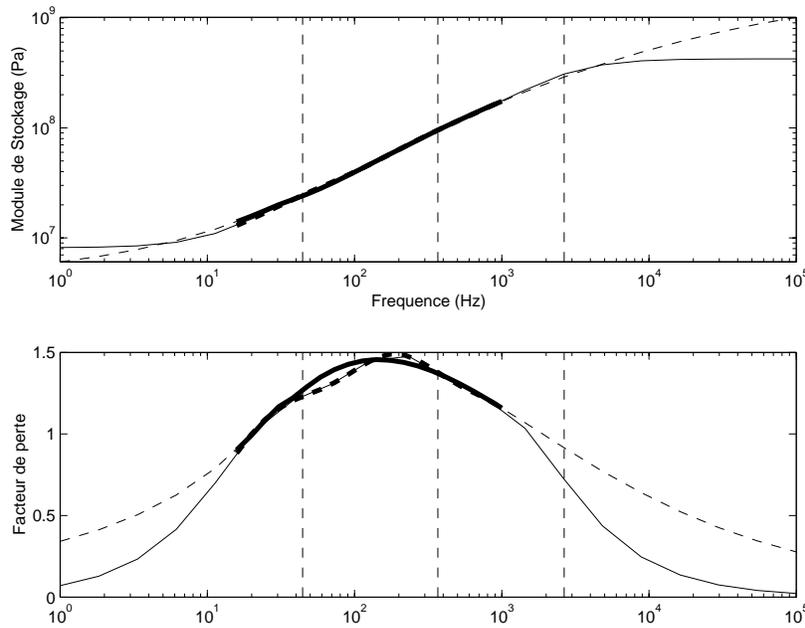


FIG. 1.16 – *Module complexe de la résine TA (—) et reconstruction par une fraction rationnelle à trois pôles (---) dont les fréquences sont indiquées par les lignes verticales*

Trindade [75] discute de la validité de ses modèles hors de la bande concernée par l'optimisation. En analysant le comportement des courbes maîtresses, représentées analytiquement par les modèles ADF et GHM, en dehors de la bande utilisée pour le lissage, il a observé des irrégularités concernant l'identification du matériau viscoélastique DYAD-606 à 38°C, qui présente des courbes de module de stockage et de facteur de perte plus plates que celles de l'ISD112. Il lui a été nécessaire d'augmenter le nombre de paramètres pour diminuer l'erreur d'identification. Cinq séries de paramètres (cf. onze paramètres pour ADF et seize pour GHM au total) sont alors nécessaires pour représenter assez bien les propriétés de ce matériau avec une erreur maximale de 25% dans la bande de fréquence 2-6300 Hz.

## 1.3 Modèles de structures amorties

Maintenant qu'on dispose de modèles précis pour la représentation de la dépendance en fréquence, température et précontrainte des propriétés de matériaux viscoélastiques, cette section aborde les difficultés de mise en œuvre de ces représentations pour le calcul des structures.

La section 1.3.1 précise le modèle général de structures amorties. On explicite la construction de la rigidité dynamique complexe comme somme pondérée de matrices constantes associées aux divers matériaux. On présente ensuite les modèles d'état permettant la prise en compte en temporel ou pour le calcul des valeurs propres d'une représentation précise du comportement viscoélastique dans la structure à l'aide des diverses représentations du module complexe. On traite ensuite de la résolution des problèmes vibratoires de structures amorties, à savoir le calcul de la réponse fréquentielle directe en section 1.3.2 et le calcul des valeurs propres en section 1.3.3.

### 1.3.1 Formes des équations du modèle

Cette section débute par la présentation d'un formalisme bien adapté à l'ensemble des représentations de matériaux viscoélastiques pour le calcul de réponses fréquentielles ou de valeurs propres. Les modèles simplifiés qui en découlent sont ensuite évoqués en section 1.3.1.2. Dans les cas où on effectue une identification à l'aide d'une loi paramétrique qui introduit des variables internes (fractions rationnelles et dérivées fractionnaires), on peut passer par une étape supplémentaire (section 1.3.1.3).

#### 1.3.1.1 Forme générale

Les différentes représentations du module complexe abordées en section 1.2.3 permettent de représenter correctement le comportement du matériau. Elles sont donc toutes valides et c'est la facilité à implémenter ces lois de comportement dans les solveurs éléments finis qui rendra l'une ou l'autre de ces méthodes plus avantageuse.

On a vu que la dépendance aux facteurs d'environnement (température, précontrainte) agit seulement comme un décalage sur la fréquence, le module est alors décrit à partir de la courbe maîtresse  $\hat{E}$  par

$$E^*(s, T, \varepsilon_0) = \hat{E}(\alpha(T, \varepsilon_0)s). \quad (1.20)$$

L'énergie de déformation se déduit directement du module complexe grâce à la formulation variationnelle classique

$$q^T K q = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(s, q(s)) : \varepsilon(q(s)) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\hat{E}(\alpha_{TS}) \varepsilon(q(s)) \varepsilon(q(s))) d\Omega. \quad (1.21)$$

Les opérateurs trace  $\text{Tr}$  et intégrale  $\int$  étant linéaires, l'énergie de déformation (1.21) dépend linéairement de  $\hat{E}(\alpha_T s)$ . On peut donc représenter la raideur dynamique comme une combinaison linéaire de matrices constantes

$$[Z(E_i^*, s)] = \left[ Ms^2 + K_e + \sum_i \hat{E}_i(\alpha_T s) \frac{K_{v,i}(E_{i0})}{E_{i0}} \right], \quad (1.22)$$

où  $K_e$  est la matrice de raideur élastique,  $K_{v,i}$  la matrice de raideur associée au matériau viscoélastique de module complexe  $E_i^*(s, T, \varepsilon_0)$  et  $E_{i0}$  la valeur élastique nominale du module pour lequel on assemble  $K_{v,i}$  (on prend couramment  $E_{i0} = \text{Re}(\hat{E}_i(0))$ ).

Le comportement global d'une structure est donc donné dans le domaine fréquentiel par le modèle mécanique du second ordre

$$\begin{aligned} [Ms^2 + K^*(s)]\{q(s)\} &= [Z(s)]\{q(s)\} = [b]\{u(s)\}, \\ \{y(s)\} &= [c]\{q(s)\} \end{aligned} \quad (1.23)$$

où  $[M]$  est la matrice de masse,  $[K^*]$  la matrice de raideur complexe;  $[M]$  est supposée constante tandis que  $[K^*(s)]$  dépend de la fréquence comme précisé dans (1.22). Les charges physiques sont décrites par le vecteur des efforts extérieurs  $\{F\} = [b]\{u\}$  et le vecteur  $\{y\}$  représente les sorties. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, les degrés de liberté (DDL)  $\{q\}$  sont associés à des déplacements nodaux.  $[M]$  et  $[K^*(s)]$  sont symétriques.

### 1.3.1.2 Cas simplifiés

D'après l'équation (1.21), pour un module complexe  $E^* = E' + iE''$ , on peut écrire la matrice de raideur complexe dépendante de la fréquence comme somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire  $K^*(s) = K'(s) + iK''(s)$ .

Les modèles simplifiés traditionnels considèrent

- un amortissement visqueux  $K''(\omega) = C\omega$  où  $C$  est une matrice constante et réelle. Ce modèle est loin de représenter le comportement de tous les matériaux réels;
- un amortissement hystérétique ou structural  $K^*(\omega) = K_e + iB$  avec  $K_e$  et  $B$  des matrices constantes réelles. Ce modèle n'est utilisable que dans le domaine fréquentiel, compte-tenu de sa non-causalité. Son défaut est d'imposer des modules complexes constants. Ses avantages sont une facilité de mise en œuvre, une assez large disponibilité dans les codes éléments finis et la possibilité d'être exact à une fréquence donnée.

Si l'on considère une structure avec ces deux types d'amortissement, la réponse fréquentielle est définie par

$$Z(s)\{q\} = [Ms^2 + Cs + K_e + iB]\{q\} = \{F\}. \quad (1.24)$$

### 1.3.1.3 Modèles à états internes

- Fractions rationnelles

Quand le module complexe  $E^*(s)$  est représenté par la fraction rationnelle (1.12), avec  $nd > nn$  et tous ses pôles distincts, on peut décomposer la fraction rationnelle en une somme de fractions rationnelles du premier ordre (1.14).

Dans ce cas on utilise une transformation canonique de (1.23) en un problème linéaire d'ordre supérieur, par l'introduction d'un champ de relaxation interne  $q_{vj} = -\frac{E_j}{(1+\alpha_T s/\omega_j)}q$  et du champ vitesse  $sq$  [18] [9]. Si l'on considère que  $E(s)$  peut être approché avec un seul  $q_{vj}$ , alors (1.23) peut s'écrire

$$\left[ \begin{array}{ccc} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{array} \right] s + \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -M & 0 \\ K_e + E_\infty K_v & 0 & K_v \\ \omega_j/\alpha_T E_j M & 0 & \omega_j/\alpha_T M \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q \\ sq \\ q_{vj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.25)$$

La deuxième ligne de (1.25) donne la relation (1.23), la première ligne donne la relation entre le champs principal  $q$  et le champ vitesse  $sq$  :  $sMq = Msq$  et la dernière ligne donne la relation entre  $q$  et le champ de relaxation interne  $q_{vj}$  :  $M(s + \omega_j/\alpha_T)q_{vj} = -\omega_j/\alpha_T E_j Mq$ . On remarque que les relations entre les champs sont écrites de manière à avoir une matrice de masse diagonale par blocs, ce qui permet certaines simplifications lors de l'implémentation.

Le problème (1.25) est particulièrement coûteux à résoudre. En effet, on obtient bien un problème linéaire, mais la taille du système a été multipliée au minimum par trois dans le cas d'un seul pôle. Or il est généralement nécessaire d'utiliser au moins cinq pôles dans (1.14) pour avoir une représentation précise de la loi de comportement observée expérimentalement. De plus, la matrice de raideur n'est ni à diagonale dominante, ni symétrique. C'est pourquoi l'application à ce type de problème de la méthode d'itération sur les résidus est particulièrement intéressante (voir section 1.3.2).

Des transformations similaires ont été proposées pour les modèles GHM et ADF présentés en section 1.2.3.2 qui sont des cas particuliers de fractions rationnelles [48].

- Dérivées fractionnaires

Pour la prise en compte de modèles à dérivées fractionnaires, le formalisme des états internes est aussi applicable dans la mesure où l'on se restreint à des dérivées non entières mais rationnelles. Pour un dénominateur commun  $p$ , on prendra un module de la forme

$$E(s) = E_{max} - \sum_{k=1}^p \frac{E_k}{s^{k/p} + \omega_k} \quad (1.26)$$

et on construira un modèle d'état de la forme

$$x(s)s^{1/p} = [A]x(s) + [B]u(s) \quad (1.27)$$

où le vecteur d'état fera intervenir les dérivées fractionnaires du déplacement  $s^{k/p}q$  avec  $k = 1 : 2p - 1$  et celles des états internes  $q_{vk} = -\frac{E_k}{s^{k/p+\omega_k}}q$  (voir [6]).

Le nombre de blocs dans le vecteur d'état étant proportionnel à  $p$ , les représentations à matrices constantes sont donc en pratique limitées à des valeurs très faibles de  $p$  [69].

### 1.3.2 Réponses fréquentielles

Après avoir précisé la forme de la raideur dynamique complexe de structures amorties en fonction des divers modèles viscoélastiques disponibles dans les sections précédentes, on détaille la résolution des problèmes vibratoires de telles structures. Cette section précise le calcul de réponses fréquentielles directes. On montre que le calcul s'applique aux matériaux viscoélastiques quelque soit la forme du modèle. Les techniques d'approximation et de calcul itératif avec contrôle de l'erreur pour accélérer le calcul de structures de grande taille sont évoquées. Ces techniques sont directement applicables au calcul de réponses fréquentielles.

Pour une structure constituée de divers matériaux élastiques et viscoélastiques, les calculs fréquentiels ne demandent que la connaissance pour chaque matériau viscoélastique du module complexe  $E_i^*(s, T, \varepsilon_0)$ . D'après (1.22), on peut représenter la rigidité dynamique d'un modèle viscoélastique comme combinaison linéaire de matrices constantes. Pour les calculs de réponse fréquentielle du modèle complet

$$[Z(E_i^*, s)] \{q\} = \{F\}, \quad (1.28)$$

on stocke les matrices  $M$  (masse),  $K_e$  (raideur élastique),  $K_{vi}$  (raideur viscoélastique du matériau  $i$ ) et on évalue la somme en chaque point de calcul avec les coefficients de pondération associés 1, 1,  $E_i^*(s, T, \varepsilon_0)$ .

Pour la résolution, il n'est pas utile et rarement possible (d'un point de vue du coût numérique) d'utiliser directement le modèle complet (1.28). On utilise presque toujours des approximations en cherchant la solution dans un sous-espace ; c'est le principe des méthodes de réduction.

- Réduction de modèle

Le principe de la réduction de modèle est de projeter le modèle sur une base  $[T]$ , avec l'hypothèse que les réponses exactes peuvent être approchées par des solutions de la forme

$$\{q\}_{N \times 1} = [T]_{N \times NR} \{q_r\}_{NR \times 1}, \quad (1.29)$$

où la dimension de  $\{q_r\}$  est inférieure à celle de  $\{q\}$ , c'est-à-dire  $NR < N$ . La projection du modèle (1.23) sur la base  $[T]$  conduit à un modèle de taille inférieure comportant autant de DDL généralisés que de colonnes indépendantes dans la matrice  $T$

$$\begin{aligned} [T^T Z(s)T]\{q_r(s)\} &= [T^T b]\{u(s)\} \\ \{y(s)\} &= [cT]\{q_r(s)\} \end{aligned} \quad (1.30)$$

avec  $[T^T Z(s)T] = [T^T M T s^2 + T^T K_e T + \sum_i E_i^*(s, T, \varepsilon_0) T^T K_{vi}(E_{i0}) T / E_{i0}]$ .

Les fonctions de transfert sont donc approchées par

$$[H(s)] = [c][Z(s)]^{-1}[b] \approx [cT][T^T Z(s)T]^{-1}[T^T b]. \quad (1.31)$$

Pour une base fixe, on peut calculer les matrices réduites constantes une seule fois puis approcher la réponse en un grand nombre de points de fréquence.

Les bases classiques en analyse modale ou sous-structuration contiennent des modes libres et des termes statiques associés à des chargements imposés  $[b]$  (correction statique  $[K]^{-1}[b]$ ), qu'on peut compléter par une correction pour la partie imaginaire de la rigidité dynamique [57]

$$[K]^{-1}[K_v][\Phi_{1:NM}] = [K]^{-1}[\text{Im}(Z(\omega_{1:NM}, E_{i0}))][\Phi_{1:NM}]. \quad (1.32)$$

Il s'agit donc d'une base réelle modale augmentée par une base de correction pour tenir compte des efforts et des effets amortissants. La base finale considérée s'écrit

$$[T] = [[\Phi_1 \dots \Phi_{NM}] \quad [K]^{-1}[b] \quad [K]^{-1}[K_v][\Phi_{1:NM}]]. \quad (1.33)$$

• Itération sur les résidus

La méthodologie d'itérations sur les résidus a été ici retenue car elle permet à la fois des calculs exacts et approchés, en garantissant un faible stockage mémoire et un gain de temps de calcul [40].

Dans le sous-espace engendré par  $T^n$ , l'approximation de Ritz de (1.28) est donnée par

$$\{q^n(s)\} = [T^n][T^{nT} Z(E_i^*, s)T^n]^{-1}[T^{nT} b]\{u(s)\}. \quad (1.34)$$

En une fréquence  $s$ , un estimateur d'erreur en énergie est alors donné par

$$\{R_d^n(s)\} = [K_0]^{-1} \{Z(E_i^*, s)\{q^n(s)\} - \{F(s)\}\}. \quad (1.35)$$

Ce résidu étant un déplacement, on peut calculer son énergie de déformation  $\|\{R_d^n\}\|_{K_0} = \sqrt{\{R_d^n\}^T [K_0] \{R_d^n\}}$  et vérifier la convergence à l'aide du critère

$$\varepsilon^n = \frac{\|\{R_d^n\}\|_{K_0}}{\|\{q^n\}\|_{K_0}}. \quad (1.36)$$

Tant que la tolérance choisie n'est pas atteinte (*i.e.*  $\varepsilon^n \geq \text{tol}$ ), on enrichit le sous-espace en posant

$$[T^{n+1}] = [T^n \quad \{R_d^n\}] \quad (1.37)$$

En particulier, une procédure de réorthogonalisation est souvent indispensable pour éviter que le résidu  $\{R_d^n\}$  ne soit colinéaire à la base  $[T^n]$ .

La factorisation étant une étape beaucoup plus lente qu'une substitution directe/inverse, on utilise une factorisation unique de la matrice élastique "tangente"

$$[K_0] = \text{Re}[Z(E_i^*, 0)]. \quad (1.38)$$

• Application

On analyse les résultats obtenus avec la méthode itérative basée sur les principes explicités aux paragraphes précédents. Le cas étudié est le calcul de la fonction de transfert déplacement relatif/force du modèle de banc viscoélastique présenté au chapitre 2 (voir figure 2.15 de la section 2.3). La particularité de ce modèle est qu'il possède une petite zone viscoélastique où l'amortissement est très fort ; le reste de la structure est considéré élastique.

Pour un facteur de perte  $\eta$  du matériau amortissant de la zone d'essai viscoélastique et une raideur  $E_0 = 50$  MPa, on compare plusieurs calculs réduits de la fonction de transfert déplacement relatif/force  $(809-1292)y/10287y$  avec son calcul exact. Pour cela, on considère trois bases de réduction :

- $[T1] = [[\Phi_1 \dots \Phi_{NM}]]$  ;
- $[T2] = [[\Phi_1 \dots \Phi_{NM}] \quad [K]^{-1}[b]]$  ;
- $[T3] = [[\Phi_1 \dots \Phi_{NM}] \quad [K]^{-1}[b] \quad [K]^{-1}[K_v][\Phi_{1:NM}]]$ .

On voit en figure 1.17 que la base  $[T2]$ , grâce à la correction statique  $[K^{-1}b]$ , procure une meilleure approximation de l'asymptote HF du transfert et en figure 1.18 que la base  $[T3]$ , du fait de la correction  $[K]^{-1}[K_v][\Phi_{1:NM}]$ , permet d'améliorer sensiblement les résultats sur l'ensemble de la bande fréquentielle de calcul.

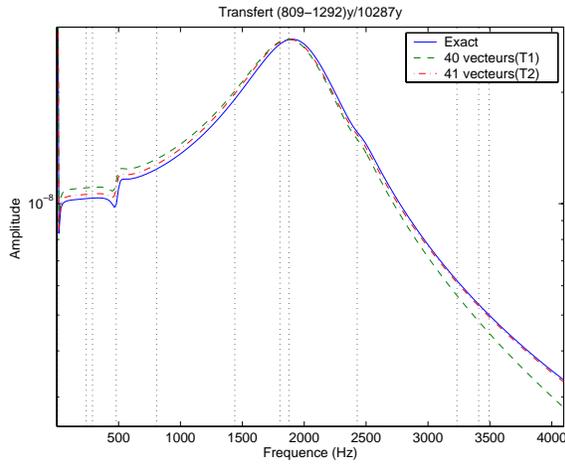


FIG. 1.17 – *Transfert 1-4096 Hz -  $\eta = .5$*

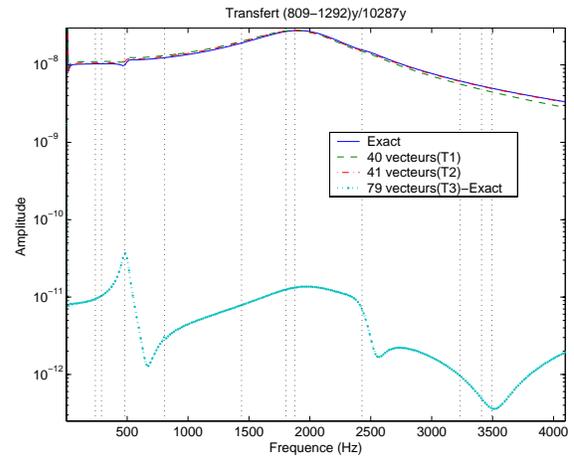


FIG. 1.18 – *Transfert 1-4096 Hz -  $\eta = .5$*

Les figures 1.19 et 1.20 qui présentent les erreurs relatives entre solutions approchées et calcul exact pour un taux de perte  $\eta = .5$  et  $\eta = .1$  pour les trois bases  $T1$ ,  $T2$  et  $T3$  et la base  $T3$  enrichie montrent l'intérêt de la méthodologie d'itérations sur les résidus pour se rapprocher encore davantage du calcul exact.

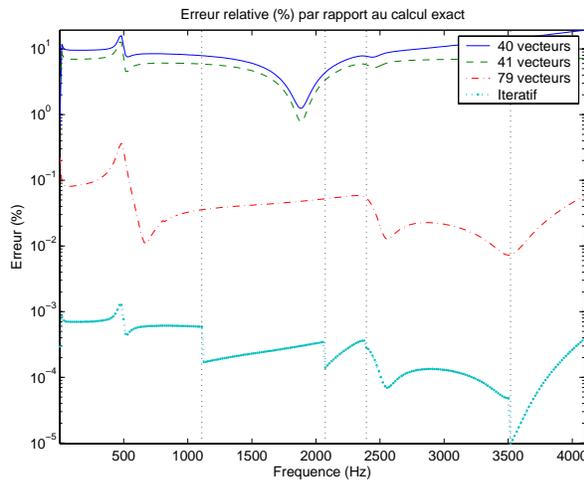


FIG. 1.19 – *Erreur relative par rapport au calcul du transfert exact -  $\eta = .5$*

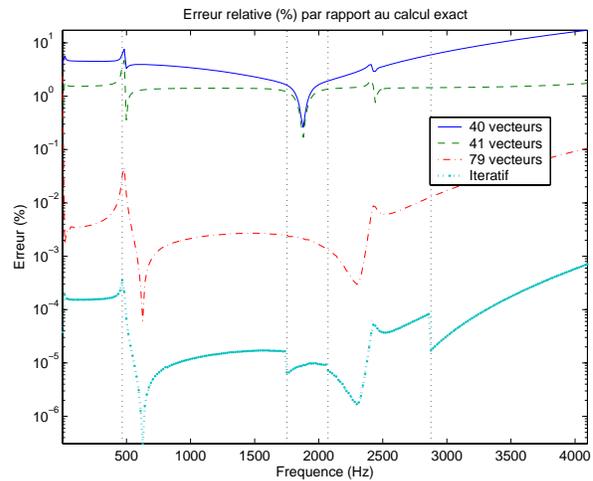


FIG. 1.20 – *Erreur relative par rapport au calcul du transfert exact -  $\eta = .1$*

La base de réduction  $[T_i]$  est initialisée en prenant comme base de départ la base  $[T3]$ , qui donne comme on l'a déjà vu en figure 1.18 une erreur relative déjà très faible (0.1% en moyenne sur l'ensemble de la bande pour  $\eta = .5$ ). Pour enrichir la base, on choisit une valeur de  $10^{-3}$  comme tolérance sur l'erreur en énergie de déformation (équation (1.36)) ; la base est complétée itérativement avec les parties réelle et imaginaire du résidu en déplacement jusqu'à atteindre la tolérance. Avec une base itérative de taille 95 vecteurs au final (un enrichissement de 8 vecteurs s'avère nécessaire à la première fréquence puis les traits verticaux représentent

les fréquences où la base est enrichie), on gagne un facteur temps de 40 sur le calcul complet tout en garantissant une bonne précision. D'autres applications de la méthode sont détaillées en [40] et [18].

### 1.3.3 Problème aux valeurs propres

Dans cette section, on précise le calcul des modes propres réels et complexes pour les modèles à matrices constantes et non constantes.

#### 1.3.3.1 Amortissement modal et non proportionnel

- Amortissement modal

Les *modes normaux* sont solutions du problème aux valeurs propres du modèle élastique

$$- [M] \{\phi_j\} \omega_j^2 + [K_0]_{N \times N} \{\phi_j\}_{N \times 1} = \{0\}_{N \times 1} \quad (1.39)$$

et vérifient deux conditions d'orthogonalité en masse

$$\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_k\} = [\mu_j \delta_{jk}] , \quad (1.40)$$

et en rigidité

$$\{\phi_j\}^T [K_0] \{\phi_k\} = [\mu_j \omega_j^2 \delta_{jk}] , \quad (1.41)$$

où on normalise les modes avec  $\mu_j = 1$ , ce qui allègera considérablement les écritures par la suite.

La base de projection définie par  $T = [\phi_1 \dots \phi_N]$  permet de construire les modèles réduits par transformation congruente (1.31). Dans les coordonnées résultant de cette transformation, dites coordonnées principales, les matrices de masse et de rigidité sont diagonales (conditions (1.40) et (1.41)). Mais ce n'est généralement pas le cas des matrices d'amortissement  $T^T C T$  et  $T^T B T$  (voir paragraphe *amortissement non proportionnel*).

L'hypothèse d'*amortissement modal*, encore appelée *hypothèse de Basile*, consiste à approcher la réponse par un modèle d'amortissement diagonal en coordonnées principales. Soit

$$\left[ s^2 [1] + s [2\zeta_j \omega_j] + [\omega_j^2] \right] \{p(s)\} = \{T^T F\} , \quad (1.42)$$

avec  $\{p\}$  le vecteur de coordonnées principales,  $\zeta_j$  le coefficient d'amortissement modal associé au  $j^{eme}$  mode. Pour un modèle à amortissement visqueux et hystérétique (1.24), on obtient

$$\zeta_j = \frac{1}{2\omega_j} \left( \{\phi_j\}^T [C] \{\phi_j\} + \frac{1}{\omega_j} \{\phi_j\}^T [B] \{\phi_j\} \right). \quad (1.43)$$

L'approche traditionnelle consiste à utiliser des coefficients d'amortissement modaux déterminés expérimentalement. L'analyse modale expérimentale [30] permet en effet l'estimation

de coefficients d'amortissement associés aux différents modes identifiés. Pour les modes corrélés (dont la correspondance calcul/essai est établie), on utilise donc un taux d'amortissement  $\zeta_{jTest}$  en conservant généralement la fréquence propre analytique.

- MSE

La méthode de l'énergie de déformation modale (MSE pour *Modal Strain Energy Method* [64]) est une approximation basée sur le choix d'un coefficient d'amortissement visqueux équivalent en un point particulier qui est celui du maximum de réponse.

On a vu dans le paragraphe précédent que l'amortissement modal conduit à des modèles où la réponse peut être décomposée en une somme de réponses d'oscillateurs indépendants. Pour les amortissements visqueux, structuraux et viscoélastiques de la rigidité dynamique d'un système masse-ressort (1 DDL), un calcul montre que les flexibilités dynamiques se superposent presque exactement à la fréquence de résonance. Ce principe d'équivalence est la base de la MSE.

L'approche générale consiste à calculer le facteur de perte rapport de l'énergie dissipée  $E_d$  de l'équation (1.5) sur un cycle de déformation par  $2\pi$  fois l'énergie élastique maximale associée à la déformation imposée  $q(t) = \{\phi_j\} \cos(\omega t)$

$$\eta_j(\omega) = \frac{\int_0^{2\pi/\omega} \sigma(q) : \dot{\epsilon}(q) dt}{\pi \{\phi_j\}^T [K] \{\phi_j\}}, \quad (1.44)$$

et à imposer, à chaque fréquence de résonance  $\omega_j$  du problème élastique, l'égalité du facteur de perte et de celui associé à un modèle à amortissement modal (1.42)

$$\zeta_j = \frac{\eta_j(\omega_j)}{2}. \quad (1.45)$$

L'approximation (1.43) est donc une application directe de la méthode MSE.

Pour des modèles d'amortissement viscoélastiques généraux, il est toujours possible de définir des pseudo-modes normaux [57] solutions de

$$[-\tilde{\omega}_j^2 [M] + \text{Re}(K(\tilde{\omega}_j))] \{\tilde{\phi}_j\} = \{0\}, \quad (1.46)$$

les normer et définir un taux d'amortissement équivalent à la résonance  $\tilde{\omega}_j$  par

$$\zeta_j(\tilde{\omega}_j) = \frac{1}{2} \frac{\{\tilde{\phi}_j\}^T [\text{Im}(K(\tilde{\omega}_j))] \{\tilde{\phi}_j\}}{\{\tilde{\phi}_j\}^T [\text{Re}(K(\tilde{\omega}_j))] \{\tilde{\phi}_j\}}. \quad (1.47)$$

• Amortissement non proportionnel

On considère le modèle à amortissements visqueux et hystérétique donné par l'équation (1.24). On identifie les matrices d'amortissement  $[C]$  et  $[B]$  par des mesures sur la structure complète. On projette (1.24) dans  $[\phi] = [\phi_1 \dots \phi_{NM}]$  base des modes propres normaux. Le problème se réécrit sous la forme

$$\left[ s^2 [\mathbb{1}] + s\phi^T C \phi + [\omega_j^2] + i\phi^T B \phi \right] \{ \phi^T q \} = \{ \phi^T F \} , \quad (1.48)$$

qui peut être exploitée directement (Solutions 110 et 111 de NASTRAN [41] par exemple). Dans ce cas, il n'y a aucune raison pour que les matrices d'amortissement soient diagonales : les termes hors diagonaux de  $\phi^T C \phi$  et  $\phi^T B \phi$  sont interprétés comme des coefficients de couplage entre les modes propres [8]. L'amortissement est qualifié de non-proportionnel. La diagonalisation du modèle d'ordre un du problème complexe est possible dans l'espace des "modes propres complexes" (voir section 1.3.3.2).

Pour des amortissements faibles et pour des modes séparés, il est possible de supposer que les coefficients non diagonaux de  $\phi^T C \phi$  et  $\phi^T B \phi$  sont négligeables afin de se ramener à un modèle d'amortissement proportionnel (cf. équation (1.42)). Pour quantifier, on considère le critère de Hasselman [35]

$$\frac{2\zeta_j \omega_j}{|\omega_j - \omega_k|} \ll 1 \quad (1.49)$$

qui signifie que la largeur de bande du  $j^{eme}$  mode  $2\zeta_j \omega_j$  est très petite devant la séparation en fréquence avec le  $k^{eme}$  mode. Les termes de couplage entre les modes  $j$  et  $k$  sont alors négligeables car il n'y a pas de recouvrement de bande passante.

### 1.3.3.2 Modes complexes

Le problème aux valeurs propres

$$Z(\lambda_k) \psi_k = [M \lambda_k^2 + K^*(\lambda_k)] \psi_k = 0 \quad (1.50)$$

se traite en spécifiant  $K^*(\lambda_k)$  comme la somme d'une raideur élastique constante  $K_e$  et d'une raideur viscoélastique  $K_v$  décomposée par matériau viscoélastique homogène de module complexe  $E_i^*$ , comme cela a été exposé en section 1.3.1.1. La dépendance en fréquence  $\lambda_k$  se retrouve complètement dans le module complexe  $E_i^*$  du  $i^{eme}$  matériau viscoélastique.

Le problème aux valeurs propres (1.50) peut s'écrire à l'aide de matrices constantes pour certaines représentations de  $E_i^*(\lambda_k, T, \varepsilon_0)$ .

• Modèle à matrices constantes

- Pour le modèle à amortissement visqueux et hystérétique (1.24), on résout le problème aux valeurs propres généralisé (modèle du premier ordre équivalent de dimension  $2N$ ), soit

$$\left[ \begin{array}{cc} C & M \\ M & 0 \end{array} \right] \lambda_k + \left[ \begin{array}{cc} K + iB & 0 \\ 0 & -M \end{array} \right] \{\theta_k\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.51)$$

où on montre facilement que  $\{\theta_k\} = \begin{Bmatrix} \psi_k \\ \psi_k \lambda_k \end{Bmatrix}$ . On donne le nom de *mode complexe* à la fois à  $\theta_k$  et  $\psi_k$ . L'existence de  $2N$  vecteurs diagonalisant les matrices de (1.51) est équivalente à la vérification de deux conditions de normalisation

$$\begin{aligned} [\theta]^T \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} [\theta] &= \psi^T C \psi + \Lambda \psi^T M \psi + \psi^T C \psi \Lambda = [\backslash 1 \backslash]_{2N} \\ [\theta]^T \begin{bmatrix} K + iB & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} [\theta] &= \psi^T (K + iB) \psi - \Lambda \psi^T M \psi \Lambda = -[\backslash \Lambda \backslash]_{2N} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Les modes complexes mènent à une décomposition spectrale du système d'équations : le modèle du premier ordre équivalent de (1.23) se réécrit comme

$$[[\backslash 1 \backslash] s - [\backslash \Lambda \backslash]] \{\eta\} = [\theta]^T \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \{u\} \quad (1.53)$$

où le vecteur d'état  $\eta$  est défini par  $q = \theta \eta$ .

- Dans le cas particulier où  $E_i^*$  est représenté sous la forme d'une somme de fractions rationnelles du premier ordre, le problème aux valeurs propres se réécrit

$$Z(\lambda_k) \psi_k = \left[ M \lambda_k^2 + K_e + \sum_i \left( E_\infty - \sum_j \frac{E_j}{1 + \alpha_T \lambda_k / \omega_j} \right) \frac{K_{v,i}(E_{i0})}{E_{i0}} \right] \psi_k = \{0\}. \quad (1.54)$$

Dans ce cas, on utilise une transformation canonique de (1.54) en un problème linéaire d'ordre supérieur : le modèle initial du second ordre est transformé en un modèle du premier ordre équivalent de dimension  $3N$  au minimum, par l'introduction d'un champ de relaxation interne  $\psi_{k,vj} = -\frac{E_j}{(1 + \alpha_T \lambda_k / \omega_j)} \psi_k$  et du champ vitesse  $\lambda_k \psi_k$ . Dans le cas d'un seul matériau viscoélastique ( $i = 1$ ) et où un seul pôle est utilisé pour approcher le module complexe de ce matériau  $E_1^*(\lambda_k)$  ( $j = 1$ ), le problème aux valeurs propres s'écrit

$$\left[ \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \lambda_k + \begin{bmatrix} 0 & -M & 0 \\ K_e + E_\infty K_v & 0 & K_v \\ \omega_1 / \alpha_T E_1 M & 0 & \omega_1 / \alpha_T M \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \psi_k \\ \lambda_k \psi_k \\ \psi_{k,v1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.55)$$

On retrouve une représentation du premier ordre dont la résolution est un problème classique de modes complexes présenté au paragraphe précédent

$$[A_1 \lambda_k + A_2] \{\theta_k\} = \{0\}, \quad (1.56)$$

où la matrice  $[A_1] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}$  est diagonale par bloc et symétrique du fait de la symétrie de la matrice de masse  $M$ , ce qui permet certaines simplifications lors de l'implémentation. En revanche,  $[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & -M & 0 \\ K_e + E_\infty K_v & 0 & K_v \\ \omega_1 / \alpha_T E_1 M & 0 & \omega_1 / \alpha_T M \end{bmatrix}$  est non symétrique et non diagonale dominante. La taille de ce problème peut vite devenir rédhibitoire, les techniques classiques ne permettant pas sa résolution en des temps raisonnables. Ce problème est traité en [17] par une technique d'itération sur les résidus proche de celle présentée en section 1.3.2 pour la recherche des modes complexes et le calcul de sensibilités, ce qui permet une résolution peu coûteuse.

- Modèle à matrices non constantes

La résolution du problème aux valeurs propres non linéaire (1.50) est difficile et reste un problème ouvert. Deux techniques semblent applicables pour les problèmes de grande taille.

Les techniques d'identification expérimentale peuvent être utilisées pour chercher des solutions approchées. En supposant que les modes complexes sont assez proches des modes réels, l'effort  $[M] \{\phi_j(K_0)\}$  excite essentiellement le mode  $j$ . On calcule donc les fonctions de transfert  $\{\phi_{j=1, NM}(K_0)\}^T [M] [Z(s)]^{-1} [M] \{\phi_{j=1, NM}(K_0)\}$  et on utilise une technique d'identification pour estimer les valeurs propres  $\lambda_j$  [7].

Dans la mesure où  $\{\phi_{j=1, NM}\}$  est une approximation raisonnable du schéma modal du problème amorti, la technique d'identification peut être utilisée de façon automatique. Une fois les pôles estimés, on peut calculer les déformées en faisant des identifications au voisinage des résonances de  $[Z(s)]^{-1} [M] \{\phi_{j=1, NM}(K_0)\}$ . Cette procédure en deux étapes est nécessaire car le stockage de transferts sur l'ensemble des DDL n'est acceptable que pour un petit nombre de fréquences. Cette résolution basée sur des techniques d'identification a été mise en œuvre en [59], mais son extensibilité reste une problématique largement ouverte. L'avantage unique de cette approche est la possibilité d'estimer les modes complexes sans posséder un relèvement du module complexe dans l'ensemble du plan complexe (pour toutes les valeurs de  $s$ ).

Les Méthodes Asymptotiques Numériques (MAN) reposent le problème (1.50) sous la forme

$$\left[ M \lambda_k^2 + K_0 + \epsilon \hat{K}(\lambda_k) \right] \{\phi_{kD}\} = \{0\} \quad (1.57)$$

et utilisent un développement en série de  $\lambda_j$  et  $\phi_{kD}$  en puissances de  $\epsilon$  pour estimer la solution exacte. Différentes variantes de cette stratégie sont discutées en [28].

## 1.4 Conclusion

Ce chapitre s'est proposé de présenter les outils de mesure et de calcul permettant de caractériser le comportement vibratoire de structures amorties.

On s'est d'abord intéressé à l'amortissement d'un point de vue matériau. On s'est placé dans le cadre de la viscoélasticité linéaire appliquée aux matériaux homogènes isotropes pour introduire l'approche module complexe. La dépendance à la fréquence et aux facteurs d'environnement tels que la température et la précontrainte des matériaux viscoélastiques a été évoquée et les hypothèses de superposition fréquence-température et fréquence-précontrainte ont été précisées. Ces hypothèses permettent de construire des nomogrammes en fréquence réduite sur une large bande. Les principales représentations paramétriques du module complexe ont été données -modèles rhéologiques, modèles à fractions rationnelles et à dérivées fractionnaires. On a discuté de la pertinence de ces modèles à représenter le comportement des matériaux réels, après identification expérimentale de leurs paramètres. On a ainsi montré l'avantage d'utiliser directement les données expérimentales sous forme de lois tabulées lorsque les modèles paramétriques sont de grande taille ou peu précis.

La mise en œuvre de tels modèles pour le calcul des structures et leur implémentation dans la méthode des éléments finis ont alors été introduites. On a explicité la construction de la rigidité dynamique complexe comme somme pondérée de matrices constantes associées aux divers matériaux. On a ensuite détaillé les modèles d'état permettant la prise en compte en temporel ou pour le calcul des valeurs propres d'une représentation précise du comportement viscoélastique dans la structure ; ces modèles d'état sont basés sur les diverses représentations du module complexe évoquées au cours de ce chapitre. On a finalement analysé les principes des méthodes numériques mises en œuvre pour le calcul de réponses fréquentielles directes et le calcul de modes propres. Les méthodes de réduction de modèles et la méthodologie d'itération sur les résidus sont ainsi explicitées pour le calcul de réponses fréquentielles directes. La résolution de problèmes aux valeurs propres à matrices constantes et non constantes a finalement été discutée.

On dispose maintenant d'un formalisme pour le calcul de structures amorties, avec la possibilité d'une prise en compte précise du comportement amortissant des parties viscoélastiques. Avant d'aborder le problème final de la mise en œuvre de traitements amortissants dans une enceinte acoustique, le chapitre suivant décrit la réalisation d'un banc de mesure dynamique du module de cisaillement complexe de films viscoélastiques. La nouveauté du banc est de permettre de mesurer la dépendance de tels films non seulement en fréquence et température, mais également en précontrainte.



# 2

## Banc de mesure de films viscoélastiques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>42</b>
<b>2.2</b>	<b>Banc de mesure</b>	<b>42</b>
2.2.1	Principe fonctionnel	42
2.2.2	Mise en œuvre de la précontrainte	47
<b>2.3</b>	<b>Dimensionnement</b>	<b>49</b>
2.3.1	Modèle Éléments Finis	49
2.3.2	Modes propres du banc	51
2.3.3	Analyses détaillées	53
<b>2.4</b>	<b>Réalisation expérimentale</b>	<b>60</b>
2.4.1	Tôles sandwich	60
2.4.2	Réalisation et évolutions du banc	61
<b>2.5</b>	<b>Exploitation des mesures</b>	<b>64</b>
2.5.1	Mesure de modules complexes	64
2.5.2	Construction de nomogrammes	66
2.5.3	Lois tabulées du matériau BI2F	68
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>73</b>

---

## 2.1 Introduction

Les principaux outils de mesure et de calcul pour caractériser le comportement vibratoire de structures contenant des matériaux viscoélastiques ont été introduits au chapitre précédent. Ce chapitre présente le banc de mesure élaboré au cours de cette thèse. L'objectif du banc est d'obtenir une loi expérimentale tabulée du module de cisaillement complexe de films viscoélastiques sur une large gamme de fréquence en tenant compte de la température et de la précontrainte statique. L'originalité et la qualité de ce banc sont de pouvoir mesurer des échantillons de tôles standard. La nouveauté est de permettre l'étude de la précontrainte.

Le banc de mesure doit donc répondre aux exigences suivantes :

- caractériser le module de cisaillement du film polymère, le banc présentant donc un mode principal qui sollicite la couche viscoélastique en cisaillement ;
- utiliser des échantillons de tôles sandwich standard avec un minimum de préparation ; ces échantillons sont faciles à se procurer et le polymère est dans son état réel, c'est-à-dire sous forme de film (un échantillon épais de même composition chimique n'a souvent pas les mêmes propriétés mécaniques) ;
- permettre l'ajout d'une précontrainte en cisaillement dans le film ; de telles précontraintes ont une influence importante sur le comportement et leur caractérisation est une étape primordiale pour la prédiction de l'effet de la mise en forme de sandwiches initialement plats ;
- ne pas présenter de modes propres perturbants dans la gamme de fréquence d'intérêt, c'est-à-dire celle où on cherche à caractériser le module de cisaillement complexe.

## 2.2 Banc de mesure

On présente ici le principe de fonctionnement du banc (section 2.2.1) et la mise en œuvre de la précontrainte (section 2.2.2).

### 2.2.1 Principe fonctionnel

Pour obtenir un état de cisaillement uniforme dans le film polymère de tôle sandwich, le principe retenu est celui d'une découpe sélective des parements raides pour isoler une zone d'essai viscoélastique, comme l'illustre la figure 2.1. Cette découpe permet d'induire au niveau de la zone d'essai une translation du parement supérieur (*Par Sup*) alors que le parement inférieur (*Par Inf*) est maintenu fixe.

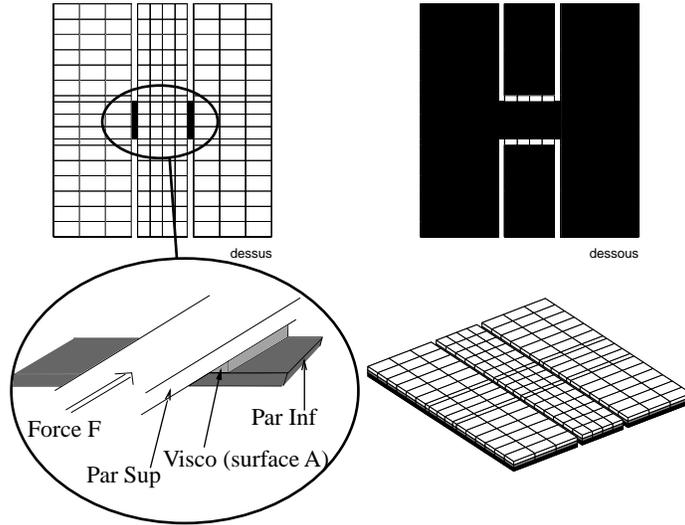


FIG. 2.1 – Sandwich tricouche acier/polymère/acier usiné - Zoom sur la zone d'essai

On commence par définir une formule approchée du module de cisaillement compte tenu de l'hypothèse de cisaillement uniforme. Le module de cisaillement complexe est défini par

$$G^*(s, T, \varepsilon_0) = G'(s, T, \varepsilon_0)[1 + i\eta(s, T, \varepsilon_0)], \quad (2.1)$$

où le module de stockage  $G'$  et le facteur de perte  $\eta$  dépendent de la fréquence  $s$ , de la température  $T$  et de la précontrainte statique  $\varepsilon_0$ .

Sous l'hypothèse de cisaillement uniforme, d'après la relation (1.2), les contraintes  $\sigma_{13}$  sont linéairement reliées aux déformations  $\varepsilon_{13}$  par

$$\sigma_{13} = 2G^* \varepsilon_{13}. \quad (2.2)$$

Pour une zone d'essai de surface  $A$  et une résultante  $F$  des efforts de cisaillement, la contrainte est donnée par  $\sigma_{13} = F/A$ . La déformation  $\varepsilon_{13}$  est approchée par

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \simeq \frac{1}{2} \frac{d(s, T, \varepsilon_0)}{h}, \quad (2.3)$$

puisque  $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \approx 0$  (le film viscoélastique étant mince, on suppose qu'il n'y a pas de variation dans son épaisseur).  $d$  est le déplacement en cisaillement et  $h$  l'épaisseur de film viscoélastique. Après substitution de (2.3) dans (2.2), le module estimé  $G^*$  s'écrit

$$G^*(s, T, \varepsilon_0) = \frac{h}{A} \frac{F(s)}{d(s, T, \varepsilon_0)}. \quad (2.4)$$

On reconnaît l'inverse de la fonction de transfert déplacement/force  $F(s)/d(s, T, \varepsilon_0)$  où  $d(s, T, \varepsilon_0)$  est le déplacement induit par la force dynamique  $F(s)$  pour une précontrainte  $\varepsilon_0$  et une température  $T$  données.

Plus généralement,  $G^*$  dépend du système de suspension et des structures additionnelles nécessaires à la mise en œuvre expérimentale du cisaillement (masses  $M_i$  et raideurs  $K_j$  additionnelles), on obtient finalement

$$G^*(s, T, \varepsilon_0) = \mathcal{F}\left(h, A, \frac{F(s)}{d(s, T, \varepsilon_0)}, M_i, K_j\right). \quad (2.5)$$

Le modèle fonctionnel présenté ici a pour objectif de donner une caractérisation analytique de  $\mathcal{F}$  qui prend une certaine forme selon le protocole expérimental retenu.

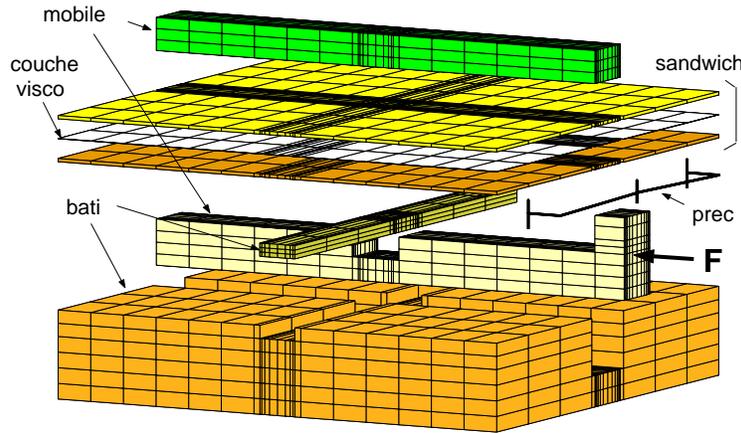


FIG. 2.2 – Modèle partiel éclaté du banc avec poutre de précontrainte (*prec*)

Dans le cas de cette étude, les parements sont renforcés par l'ajout d'éléments extérieurs pour permettre leur translation rigide. Le parement supérieur est ainsi solidarisé à un mobile de masse  $m$ , le parement inférieur à un bâti de masse  $M$  (figure 2.2).

Pour étudier l'effet de la précontrainte sur le comportement dynamique du film de polymère, on rajoute une poutre de précontrainte (*prec* sur la figure 2.2) représentée par un ressort de raideur connue  $K_p$  entre les deux masses tandis que la zone viscoélastique se comporte comme un ressort de raideur variable  $K_v = G^* A/h$ .

L'ensemble de ces structures additionnelles, y compris la suspension du bâti, conduit au modèle équivalent du banc de la figure 2.3 ;  $K_s$  correspond au ressort qui modélise la suspension du bâti,  $F$  est la force d'excitation dynamique injectée en entrée du mobile et  $d_1$  et  $d_2$  sont respectivement les déplacements du mobile et du bâti induits par l'excitation.

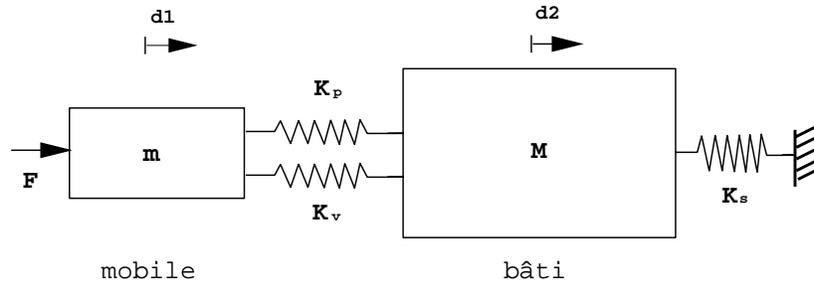


FIG. 2.3 – Modèle équivalent du banc

Le modèle équivalent de la figure 2.3 se traduit par la relation matricielle suivante

$$\left( \left( K_p + K_v \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} s^2 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La connaissance de l'accélération du mobile  $d_1 s^2$  et du déplacement relatif du mobile par rapport au bâti  $d_r = d_1 - d_2$  et plus généralement de la fonction de transfert accélération/force ou déplacement relatif/force du mobile permet de calculer la raideur  $K_v$  et par conséquent le module complexe  $G^*$ . On réalise deux types de mesures : une mesure d'accélération à l'aide d'un accéléromètre fixé en sortie du mobile dans l'axe de la force et une mesure de déplacement relatif à l'aide d'un capteur de déplacement fixé sur un flasque solidaire du bâti en vis-à-vis de la sortie du mobile.

Dans la pratique, on choisit une suspension assez souple ( $K_s$  faible) pour que les modes de suspension interviennent à très basses fréquences et sur un petit intervalle de fréquence. On peut donc supposer que  $K_s = 0$ . Dans ce qui suit, on présente les deux formes obtenues pour la fonction  $\mathcal{F}$  (équation (2.5)) en fonction du protocole expérimental retenu.

- Transfert accélération/force

L'élimination de  $d_2$  par substitution dans le système (2.6) permet d'obtenir la fonction de transfert accélération/force  $H = d_1 s^2 / F$  du mobile

$$H = \frac{(Ms^2 + \mathcal{K})s^2}{(Ms^2 + \mathcal{K})(ms^2 + \mathcal{K}) - \mathcal{K}^2}, \quad (2.7)$$

avec  $\mathcal{K} = K_v + K_p$  la raideur totale complexe, somme de  $K_v = G^* A / h$ , la raideur du film viscoélastique, et de  $K_p$ , la raideur de précontrainte. Cette expression peut être directement utilisée pour étudier l'influence de la température  $T$  sur le module de cisaillement complexe

$G^*$  à partir de la mesure de la fonction de transfert accélération/force  $H$ . Le protocole expérimental nécessite alors en plus des capteurs de force et d'accélération une chambre isotherme pour imposer et contrôler la température de l'échantillon de film viscoélastique.

Par inversion de la relation (2.7), on obtient la raideur totale complexe  $\mathcal{K}$  à la fréquence  $s$  et à la température  $T$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(s, T) &= K_v(s, T) + K_p \\ &= G^*(s, T) \frac{A}{h} + K_p = -Ms^2 \frac{H(s, T)^{-1} - m}{H(s, T)^{-1} - (M + m)}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

• Transfert déplacement/force

Un capteur de déplacement fixé à l'arrière du bâti mesure le déplacement statique relatif  $d_0$  du mobile par rapport au bâti dû à l'application de la poutre de précontrainte et nous renseigne sur la valeur de la précontrainte statique  $\varepsilon_0 = d_0/h$  du film. Le même capteur nous donne le déplacement dynamique relatif  $d_r = d_1 - d_2$  autour de la nouvelle position d'équilibre  $d_0$ .

La fonction de transfert déplacement/force  $H_r = d_r/F = (d_1 - d_2)/F$  s'écrit directement à partir de l'équation (2.6)

$$H_r = \frac{M}{Mms^2 + (M + m)\mathcal{K}},\tag{2.9}$$

avec la raideur totale  $\mathcal{K} = K_v + K_p$ , la masse du mobile  $m$  et la masse du bâti  $M$ .

Par inversion de cette relation, on obtient la raideur totale complexe  $\mathcal{K}$  de la zone d'essai viscoélastique travaillant en cisaillement et du ressort de précontrainte, ceci pour différentes précontraintes  $\varepsilon_0$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(s, \varepsilon_0) &= K_v(s, \varepsilon_0) + K_p \\ &= G^*(s, \varepsilon_0) \frac{A}{h} + K_p = \frac{M}{M + m} (H_r^{-1}(s, \varepsilon_0) - ms^2).\end{aligned}\tag{2.10}$$

On a donc deux protocoles (et deux expressions correspondantes) permettant de déterminer le module à partir de la mesure de fonctions de transferts. Le premier protocole, qui permet d'atteindre la mesure du module complexe en fréquence-température, repose sur la mesure du transfert accélération/force; le second qui nous fournit l'évolution du module complexe en fréquence-précontrainte est obtenu par la mesure du transfert déplacement relatif/force.

### 2.2.2 Mise en œuvre de la précontrainte

Le nouveau banc doit permettre d'introduire une précontrainte en cisaillement sur le cœur viscoélastique de tôles sandwich. Cette section présente la mise en œuvre de la poutre de précontrainte évoquée précédemment.

Pour créer une précontrainte initiale  $\varepsilon_0$  dans le film viscoélastique, il faut introduire un cisaillement statique qui s'ajoute au cisaillement dynamique à mesurer. La réponse dynamique de la couche viscoélastique peut alors être évaluée autour de cette nouvelle position d'équilibre.



FIG. 2.4 – Poutre de précontrainte montée sur le banc

Pour cela, on s'est inspiré des rondelles Belleville (ressorts tronconiques) où la surface du métal travaille en flexion-compression : on peut obtenir une force importante pour une course réduite ce qui est approprié à notre cas puisqu'on cherche à faire cisailier la couche viscoélastique sur des petits échelons de déplacement en contrôlant un effort important. Vu la configuration du banc, la réalisation d'une poutre de précontrainte de section rectangulaire travaillant en flexion est plus appropriée pour notre montage et plus simple à mettre en œuvre (cf. figure 2.4).

La poutre est placée de manière à exercer un effort statique initial sur le mobile, afin de faire cisailier la zone d'essai viscoélastique. Elle est en appui plan au milieu du mobile et ses extrémités sont encastrées au bâti par vissage. La modification du serrage des vis latérales rend possible le réglage de la déflexion de la poutre. Dans cette application, on cherche la force suffisante pour faire cisailier le film viscoélastique d'au moins quatre fois son épaisseur, tout près de ce que l'on suppose sa limite de délaminage.

Dans le cas d'une poutre de longueur  $l$  encastrée en ses extrémités et soumise à une force  $F$  en son centre  $C$ , la déflexion en  $C$  est donnée par  $y_C = Fl^3/192EI_{Cy}$  avec  $E$  le module

d'Young du métal utilisé et  $I_{Gy} = b_z e_y^3 / 12$  le moment d'inertie de la section. La déflexion  $y_C$  au centre de la poutre de longueur  $l$ , de section  $b_z e_y$  et de module d'Young  $E$  encastree en ses extrémités dépend linéairement de la force que l'on applique en son centre par  $F_1 = K_p y_C = (16 E b_z e_y^3 / l^3) y_C$ .

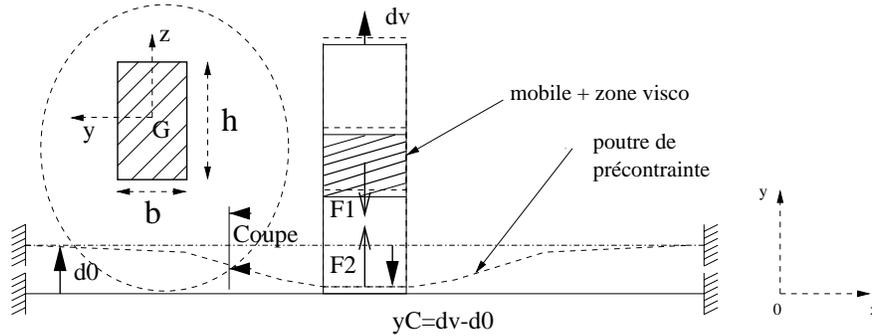


FIG. 2.5 – Cisaillement  $d_v$  induit par la déflexion  $y_C$  de la poutre de précontrainte

Pour le mobile isolé de la figure 2.5, l'équilibre des efforts se traduit par

$$F_1 = K_v d_v = F_2 = K_p y_C = K_p (d_v - d_0), \quad (2.11)$$

où  $d_0$ ,  $d_v$  et  $y_C$  sont respectivement le déplacement des extrémités de la poutre, le cisaillement de la couche viscoélastique et la déflexion de la poutre. On en déduit l'expression de  $K_p$  en fonction de  $K_v = G^* A / h$

$$K_p = K_v \frac{d_v}{d_0 - d_v} = \frac{G^* A}{h} \frac{d_v}{d_0 - d_v}. \quad (2.12)$$

On cherche la force suffisante pour faire cisailier la zone viscoélastique d'au moins quatre fois son épaisseur  $h$ , soit  $d_{vmax} = 4h$ , avec une précision de  $d_v = d_{vmax} / 10 = 2h / 5$  par tour de vis, c'est-à-dire pour  $d_0 = p$ , avec  $p$  le pas de vis. Le choix de la raideur  $K_p$  est piloté par l'épaisseur de poutre  $b_z$  suivant l'expression

$$K_p = K_v \frac{d_v}{d_0 - d_v} = \frac{G^* A}{h} \frac{2h/5}{p - 2h/5} = \frac{G^* A}{5p/2 - h} = 16E \frac{b_z e_y^3}{l^3}, \quad (2.13)$$

$$\text{d'où} \quad b_z = \frac{G^* A}{5p/2 - h} \frac{l^3}{16E e_y^3}. \quad (2.14)$$

L'acier présente un module d'Young élevé,  $E = 210 \text{ GPa}$  et a donc été retenu de façon à présenter l'encombrement minimal. Pour une longueur de tige  $l = 134 \text{ mm}$  et de hauteur  $e_y = 26 \text{ mm}$  (dimensions maximales compte tenu de l'encombrement du banc), un pas de vis  $p = 1 \text{ mm}$ , on obtient les épaisseurs de poutre  $b_z$  données par le tableau 2.1 pour deux

Descr.	$Re(G^*)$ (Pa)	$h$ ( $\mu m$ )	$A$ ( $m^2$ )	$K_v$ ( $N.m^{-1}$ )	$K_p$ ( $N.m^{-1}$ )	$b_z$ (m)
Souple	$10^6$	40	$192.10^{-6}$	$4.810^6$	$0,158.10^6$	$3,2.10^{-6}$
Raide	$10^9$	950	$192.10^{-6}$	$202.10^6$	$6,38.10^6$	$5.10^{-3}$

TAB. 2.1 – Dimensionnement de la poutre de précontrainte en fonction de deux modules et épaisseurs extrêmes de cœurs viscoélastiques de tôle sandwich

valeurs extrêmes de modules de cisaillement (polymère souple et raide).

On décide d'utiliser une poutre d'épaisseur standard 2 mm réalisée en acier rapide HSS-DMo5 (lame trempée sous vide,  $64 \pm 1$  HRC, 5% molybdène, 4% de chrome, 6% de tungstène + vanadium). Les vissages choisis permettent par ailleurs de reprendre les charges statiques et assurent bien la résistance de l'ensemble : des vis et écrous de diamètre 12 mm et de pas standard  $p = 1$  mm ont été retenus.

## 2.3 Dimensionnement

Pour concevoir le banc, on a recours à un modèle éléments finis qui va nous permettre d'étudier le comportement vibratoire du banc et valider les choix de dimensionnement.

On présente le modèle éléments finis du banc en section 2.3.1. Les modes propres calculés en présence et en absence de la poutre de précontrainte sont précisés en section 2.3.2. On effectue en section 2.3.3 une analyse de la gamme de validité du banc en fonction de la valeur du module de cisaillement de la zone viscoélastique et de la fréquence.

### 2.3.1 Modèle Éléments Finis

Le banc est réalisé en acier d'usage courant, matériau de bonne rigidité et facilement usinable. La tôle sandwich de dimension 140 mm  $\times$  150 mm est collée et vissée sur un bâti. Elle est constituée d'un matériau tricouche acier-polymère-acier. Pour l'essai réalisé, les épaisseurs respectives des couches sont 0.5 mm, 0.04 mm et 0.5 mm (échantillon BI2F, voir section 2.4.1). Une zone d'essai a été usinée conformément à la figure 2.1.

Le mobile est réalisé à l'aide de deux pièces assemblées autour de la zone d'essai et est solidaire du parement supérieur. Une lumière permet le passage d'une poutre transverse fixée au parement inférieur de la plaque sandwich dans le bâti (voir également figure 2.2). Un pot vibrant permet d'exciter le mobile via une tige d'excitation et on mesure la force dynamique injectée en entrée du mobile à l'aide d'une cellule de force. Le mouvement différentiel des parements, qui correspond au déplacement relatif du mobile par rapport au bâti, permet de faire cisailer la zone d'essai. Ce déplacement relatif est mesuré par un capteur de déplacement placé sur le flasque à l'arrière du bâti.

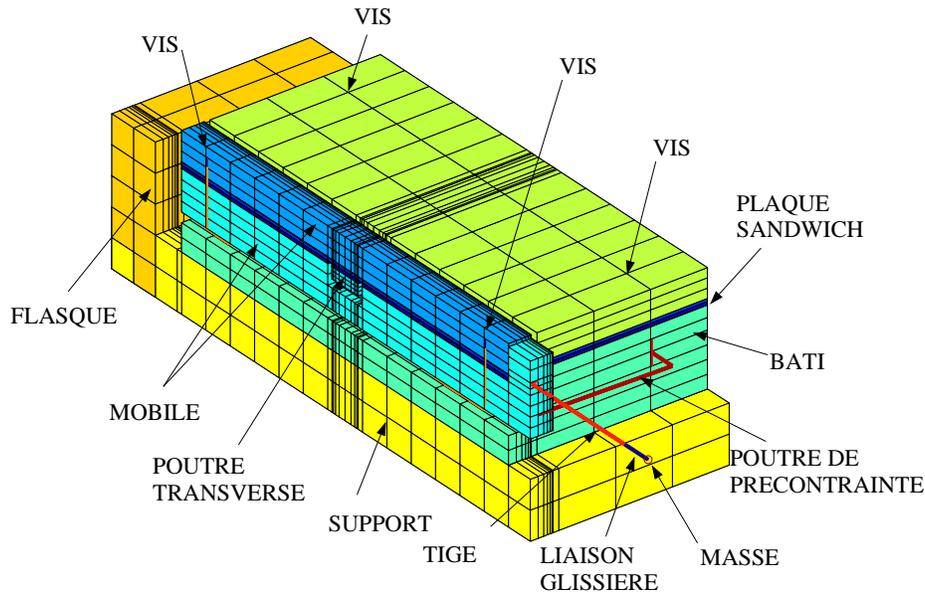


FIG. 2.6 – *Modèle numérique du banc de mesure - Demi-coupe*

La figure 2.6 présente le modèle éléments finis du banc développé pour la validation. Il possède 28557 degrés de liberté et contient 7024 éléments volumiques (bâti, mobile, support, flasque, colle, parements et film viscoélastique), 116 éléments poutre (vis, tige d'excitation et poutre de précontrainte) et un élément masse pour représenter le pot vibrant. Une liaison glissière est modélisée sur la tige d'excitation en sortie du pot vibrant.

Les propriétés mécaniques nominales retenues sont présentées dans le tableau 2.2.

Acier :	$E = 210 \text{ GPa}$	$\nu = 0.29$	$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
Colle :	$E = 1 \text{ GPa}$	$\nu = 0.49$	$\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$
Polymère (cœur) :	$E_0 = 50 \text{ MPa}$	$\nu = 0.49$	$\rho = 500 \text{ kg/m}^3$
Vis :	$\phi = 7 \text{ mm}$	Acier	
Poutre de précontrainte :	$A = 2 \text{ mm} \times 26 \text{ mm}$	Acier	
Tige du pot vibrant :	$\phi = 1 \text{ mm}$	Acier	
Pot vibrant :	$m = 0.6 \text{ kg}$		

TAB. 2.2 – *Propriétés mécaniques nominales du banc de mesure ; E : module d'Young,  $\nu$  : coefficient de Poisson,  $\rho$  : masse volumique,  $\phi$  : diamètre, A : surface, m : masse*

Pour le polymère,  $E_0$  désigne la valeur initiale du module d'Young choisie pour l'assemblage.

### 2.3.2 Modes propres du banc

Cette section est consacrée à l'analyse modale du modèle éléments finis du banc. On présente les résultats obtenus pour les configurations avec et sans précontrainte évoquées à la section 2.2.1.

Le banc est posé sur des suspensions de raideur  $K_0 = 10^6$  N/m en ses quatre coins et on fait varier la raideur de la couche viscoélastique autour de la valeur initiale  $E_0 = 50$  MPa.

- Sans précontrainte

La figure 2.7 présente quatre déformées modales du banc pour un module d'Young de la couche viscoélastique égal à  $E_0$  : les basculements du mobile (ici modes 8 et 10), la première flexion horizontale du mobile (mode 12) et le mode de translation axiale du mobile (mode 14). C'est ce dernier mode qui correspond au principe fonctionnel du banc, les trois premiers étant des modes perturbants.

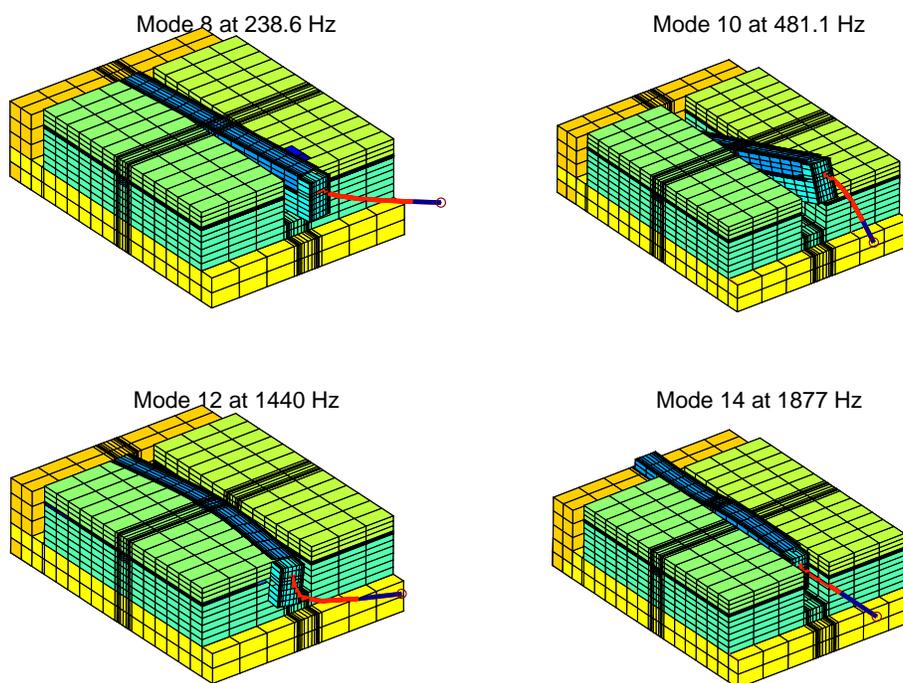


FIG. 2.7 – Modes propres du banc -  $Re(G^*)/G_0 = 1$

Le tableau 2.3 reprend ces fréquences propres pour diverses valeurs du module élastique  $G^* = \mathcal{C} G_0(1 + i\eta)$  avec  $G_0 = E_0/2(1 + \nu)$ ,  $\eta = .1$  et  $\mathcal{C} \in \{.02, .05, .2, 1, 2\}$ . La dernière ligne permet de voir la différence entre le mode de cisaillement axial réel et celui prédit par le modèle fonctionnel (figure 2.3 avec  $K_p = 0$ ). Cette différence s'explique par la flexibilité du mobile qui est illustrée par la figure 2.8. Pour un module faible ( $\mathcal{C} = .02$ ), le mobile bascule mais reste essentiellement rigide. Pour un module plus élevé (module nominal,  $\mathcal{C} = 1$ ), on a

une flexion significative du mobile, ce qui induit une fréquence de résonance plus faible que pour le modèle fonctionnel.

$Re(G^*)/G_0$	0.02	0.05	0.2	1	2
Basculement mobile (Oz)	35 (8)	55 (8)	110 (8)	239 (8)	328 (8)
Basculement mobile (Ox)	144 (10)	215 (10)	350 (10)	481 (10)	518 (10)
Flexion mobile	287 (12)	445 (12)	832 (12)	1441 (12)	1644 (12)
Cisaillement axial (Oy)	292 (14)	459 (14)	902 (14)	1877 (14)	2479 (14)
Cis. axial fonctionnel	292	461	923	2063	2918

TAB. 2.3 – Fréquences propres -  $f_0$  ( $n^{\circ}$  mode) en Hz

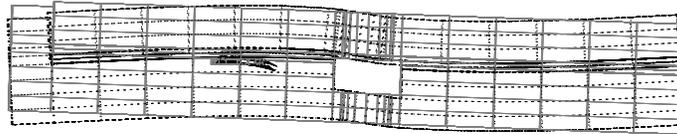


FIG. 2.8 – Déformation du mobile en cisaillement axial. (· ·)  $Re(G^*)/G_0 = .02$  (- -)  $Re(G^*)/G_0 = 1$

• Avec précontrainte

On tient compte de la poutre de précontrainte additionnelle dimensionnée à l'aide de (2.14). On a intentionnellement décalé cette poutre de l'axe d'excitation, car la poutre réelle est désaxée. La figure 2.9 donne les modes obtenus pour la raideur réelle  $Re(G^*)$  correspondante de la couche viscoélastique BI2F à 10°C et 1024 Hz ( $Re(G^*)/G_0 \simeq 0,41$ ), que l'on peut comparer avec le même calcul sans précontrainte (figure 2.10).

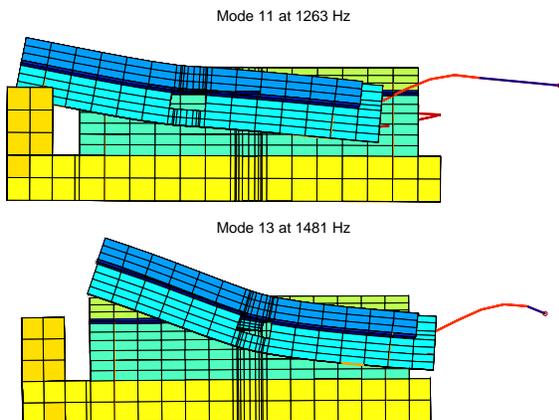


FIG. 2.9 – Modes avec précontrainte - Demi-coupe

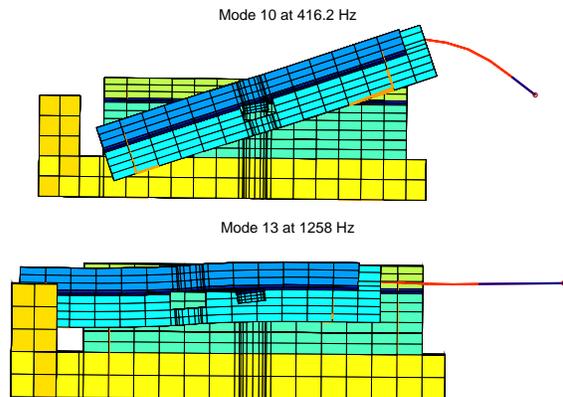


FIG. 2.10 – Modes sans précontrainte - Demi-coupe

On observe que le mode de basculement (mode 10 de la figure 2.10) est rejeté à plus haute fréquence par la présence de la poutre de précontrainte (mode 13 de la figure 2.9), tandis que le mode de cisaillement n'est décalé que de 5 Hz (le mode 13 de la figure 2.10 correspond au mode 11 de la figure 2.9 en présence de la poutre de précontrainte).

### 2.3.3 Analyses détaillées

Le modèle éléments finis permet d'évaluer les imprécisions sur l'estimation du module de cisaillement en fonction de la raideur nominale de la couche viscoélastique. Le module de cisaillement nominal du polymère peut s'écrire  $G^* = \mathcal{C} G_0 (1 + i \mathcal{D})$  avec  $G_0 = E_0 / 2(1 + \nu)$ . Les paramètres  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont variables de manière à balayer un ensemble de valeurs de module de stockage et de facteur de perte. On évalue, à l'aide de l'expression (2.5) et de la fonction de transfert éléments finis déplacement relatif/force, la valeur du module estimé  $G_e$ . Les rapports  $\text{Re}(G_e)/\text{Re}(G^*)$  et  $\text{Im}(G_e)/\text{Im}(G^*)$  renseignent alors sur la gamme de modules viscoélastiques mesurables par un tel banc.

Pour justifier du bien fondé de l'expression (2.5), il faut préalablement vérifier qu'on est dans le cadre de l'uniformité des déformations et contraintes de la zone d'essai viscoélastique, ce qui est fait par un calcul statique en section 2.3.3.1. Des calculs dynamiques sont alors possibles (section 2.3.3.2). La section 2.3.3.3 précise finalement la gamme de validité du banc en module (parties réelle et imaginaire) et en fréquence pour deux types de plaques sandwich.

#### 2.3.3.1 Uniformité contraintes-déformations

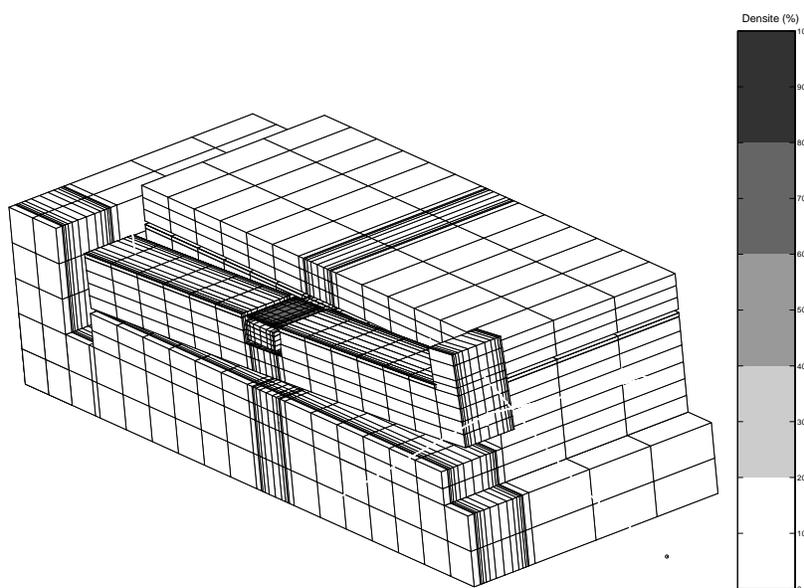


FIG. 2.11 – Densité d'énergie de déformation - Demi-coupe + mobile et parement supérieurs enlevés pour la visualisation

On choisit une valeur de raideur nominale telle que  $\text{Re}(G^*) = G_0$ . La zone d'essai viscoélastique est usinée au centre d'un échantillon de plaque sandwich avec des zones fraisées de 2 mm de large imposées par la largeur de tête de fraise (cf. figure 2.1). Les dimensions de la zone d'essai sont de 16 mm  $\times$  12 mm  $\times$  0.04 mm, 16 mm pour la largeur, 12 mm pour la profondeur et 0.04 mm pour la hauteur. On calcule la réponse statique du banc à un effort unitaire appliqué sur la tige de pot vibrant.

La répartition de densité d'énergie de déformation est calculée pour chaque élément sur l'ensemble du modèle. La figure 2.11 montre que l'énergie de déformation est principalement située dans la couche viscoélastique. La force injectée sert donc à faire cisailier la zone d'essai.

La figure 2.12 présente la répartition de densité d'énergie de déformation dans la bande centrale de la couche viscoélastique. On voit que l'énergie est majoritairement située dans la zone d'essai.

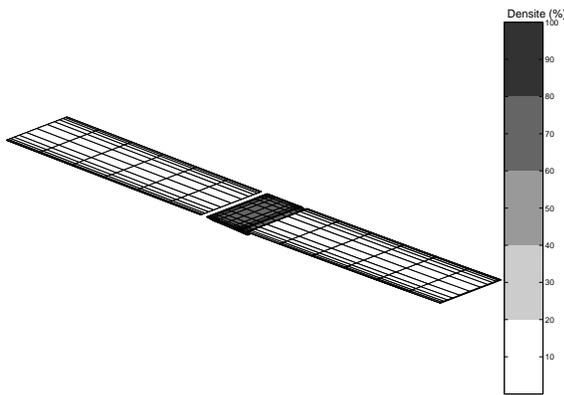


FIG. 2.12 – Densité d'énergie de déformation - Zone centrale

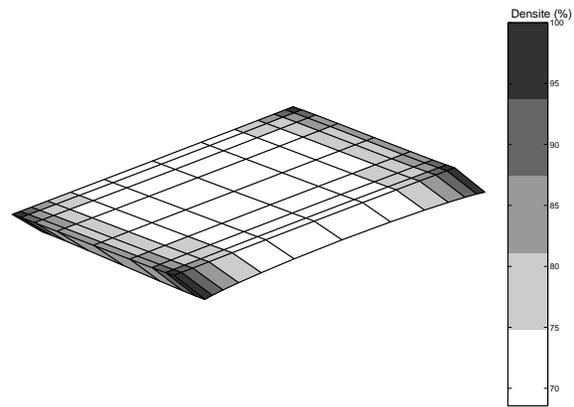


FIG. 2.13 – Densité d'énergie de déformation - Zone d'essai

La figure 2.13 présente la densité d'énergie de déformation dans la zone d'essai. Il y apparaît une répartition non uniforme des déformations, avec des symétries axiales, la densité d'énergie étant maximale sur les bords. On voit que la différence est localisée sur une bande étroite sur les bords (30% de variation). Plus on raffine la zone d'essai, plus la surface de déformation uniforme est large et la variation d'énergie centre/bords importante et localisée sur les bords, ce qui montre que l'on a bien affaire à des effets de bord comme présenté dans [16].

On peut donc considérer que hormis les effets de bord, la zone d'essai viscoélastique se déforme uniformément et on peut donc appliquer la relation (2.5) aux résultats de la simulation.

### 2.3.3.2 Transferts éléments finis et fonctionnels

Les fonctions de transfert éléments finis accélération/force sont évaluées par résolution itérative de réponse fréquentielle directe (section 1.3.2) pour tenir compte de la variation en fréquence du module de cisaillement. Cette méthode permet d'effectuer le calcul sur base de réduction (gain de temps et d'espace mémoire) et de contrôler l'erreur, avec possibilité d'enrichir la base.

L'erreur sur la fréquence de résonance axiale observée entre le modèle fonctionnel et le modèle éléments finis est ainsi illustrée par les figures 2.14 et 2.15 qui montrent les fonctions de transfert prédites par les deux modèles. Le transfert éléments finis permet de tenir compte du comportement dynamique du banc de mesure dans la zone fréquentielle d'étude : on observe ainsi l'influence des modes propres autres que le mode de cisaillement fonctionnel sur la prédiction des transferts. Il en ressort que les autres modes sont assez peu perturbants.

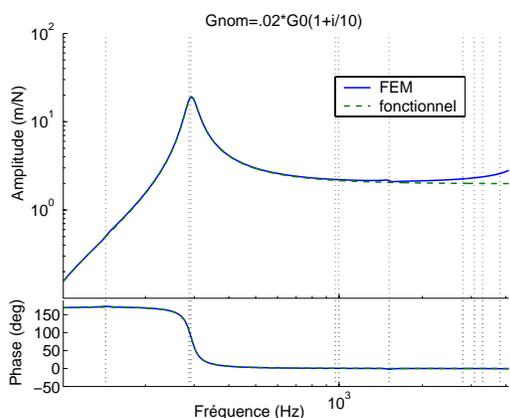


FIG. 2.14 – *EF vs fonctionnel* -  $G^* = .02 G_0(1 + i/10)$  - *Transfert 100-2048 Hz sans précontrainte*

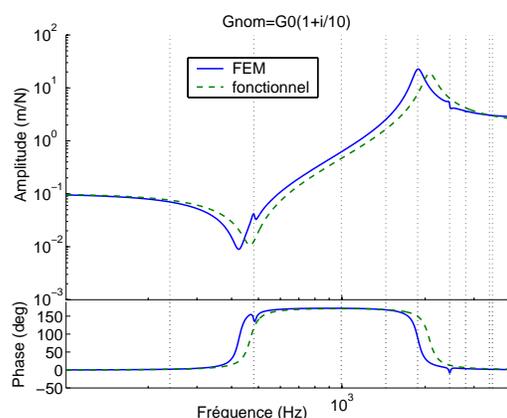


FIG. 2.15 – *EF vs fonctionnel* -  $G^* = G_0(1 + i/10)$  - *Transfert 100-2048 Hz sans précontrainte*

Les fonctions de transfert éléments finis déplacement/force du mobile de la figure 2.16 sont évaluées en considérant la loi tabulée BI2F à différentes températures (section 2.5.2). On observe une diminution avec la température de la fréquence de résonance de cisaillement du mobile (mode 11 de la figure 2.9) et l'évolution du facteur de perte. La perturbation visible à 1480 Hz est due au mode de flexion du mobile (mode 13 de la figure 2.9). La relative stabilité fréquentielle de cette résonance quelle que soit la température s'explique par le fait que la zone viscoélastique travaille peu dans ce mode et donc ses propriétés mécaniques variables avec la température n'interviennent pas.

On compare les fonctions de transferts avec celles évaluées en absence de poutre de précontrainte de la figure 2.17 : le mode perturbant de flexion du mobile (mode 10 de la figure 2.10) est translaté à plus basse fréquence (perturbation à 420 Hz).

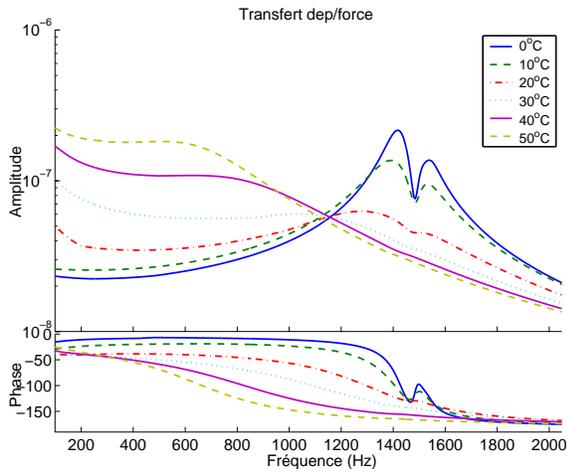


FIG. 2.16 – Transfert EF 100-2048 Hz avec pré-contrainte

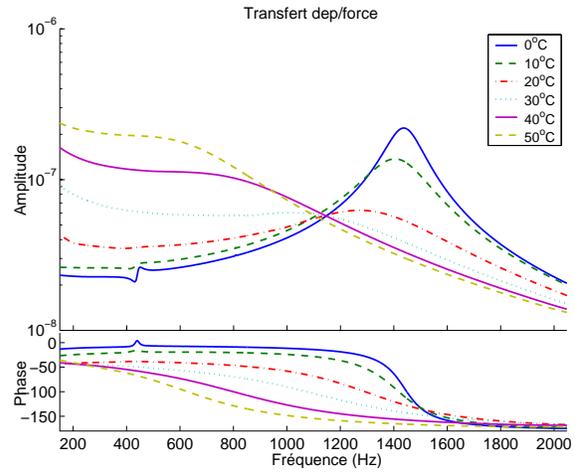


FIG. 2.17 – Transfert EF 150-2048 Hz sans pré-contrainte

### 2.3.3.3 Zone de validité

On étudie le domaine de validité du banc pour deux types de tôles sandwich d'épaisseur de cœur différente : les tôles sandwich fines BI2F et épaisses CVF10 (voir section 2.4.1 pour plus de détails sur leurs dimensions et leur utilisation). Les paramètres investigués sont les suivants : parties réelle et imaginaire du module, fenêtre fréquentielle d'utilisation.

- Tôle sandwich BI2F

On s'intéresse à l'estimation du module de cisaillement d'une tôle sandwich de mêmes dimensions que la tôle sandwich BI2F. Les figures 2.18 à 2.21 donnent les taux d'erreur sur le module de stockage et sur le facteur de perte estimés pour plusieurs valeurs nominales de module de cisaillement complexe  $G^* = \mathcal{C} G_0 (1 + i\mathcal{D})$ . Les paramètres  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  prennent un certain nombre de valeurs de façon à ce que le module de stockage  $\text{Re}(G^*)$  varie entre  $10^{5.7}$  et  $10^{7.7}$  Pa (figures 2.18 et 2.19) et que le facteur de perte varie entre 0.01 et 1 (figures 2.20 et 2.21). Les valeurs estimées sont évaluées à l'aide de l'équation (2.5) à partir des fonctions de transfert éléments finis. On s'est intéressé à la bande de fréquence 580-1412 Hz, car en dehors de cette bande, les erreurs sont trop importantes (supérieures à 10%).

On observe sur la figure 2.18 que pour la bande de fréquence considérée, pour un facteur de perte  $\eta = 0.01$ , l'erreur n'excède pas 10 % pour des échantillons souples et qu'elle est principalement due aux forces d'inertie (lorsqu'on monte en fréquence); pour des valeurs de module de stockage plus élevées, l'erreur est négative et approche les -15 % à basses fréquences. Pour un facteur de perte  $\eta = 0.7$  (figure 2.19), on observe le même genre d'évolution, sauf pour des valeurs élevées du module à BF, et de faibles valeurs à HF, le module est surestimé au lieu d'être sous-estimé.

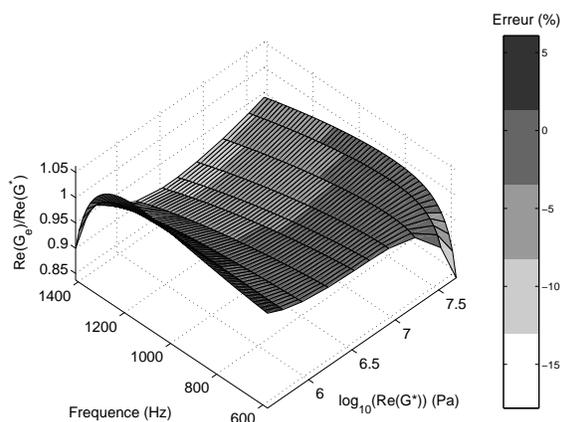


FIG. 2.18 – Module de stockage estimé  $G_e$  pour différents  $G^*$  avec  $\eta = 0.01$  - 580-1412 Hz - Sans précontrainte

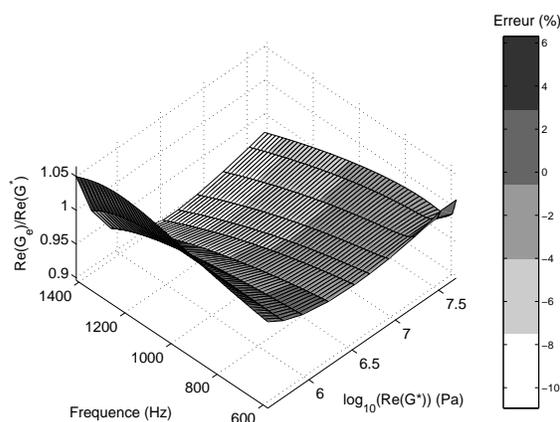


FIG. 2.19 – Module de stockage estimé  $G_e$  pour différents  $G^*$  avec  $\eta = 0.7$  - 580-1412 Hz - Sans précontrainte

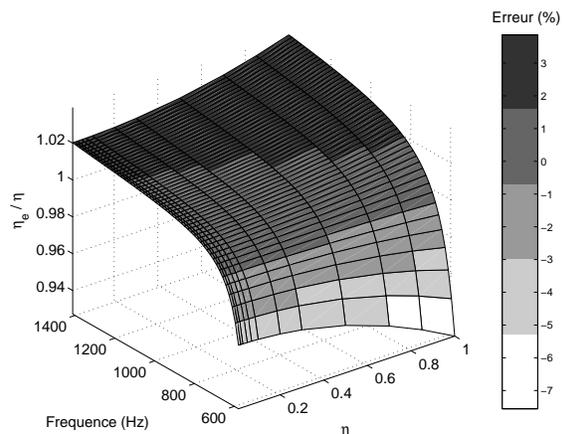


FIG. 2.20 – Facteur de perte estimé  $\eta_e$  pour différents  $\eta$  avec  $G = G_0$  - 580-1412 Hz - Sans précontrainte

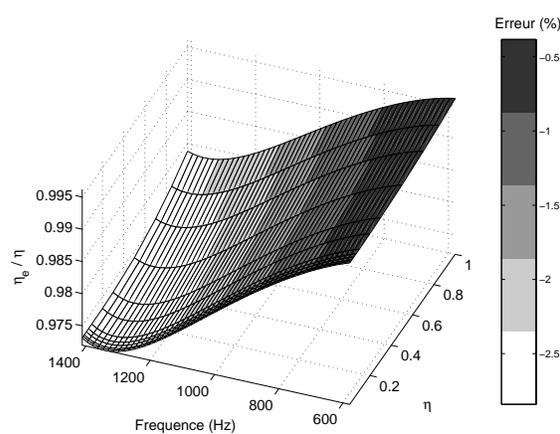


FIG. 2.21 – Facteur de perte estimé  $\eta_e$  pour différents  $\eta$  avec  $G = G_0/10$  - 580-1412 Hz - Sans précontrainte

En ce qui concerne l'évaluation de l'amortissement (cf. figures 2.20 et 2.21), les erreurs sont très faibles sur 580-1412 Hz ; elles n'excèdent pas  $-7\%$ . Pour un module donné, l'évolution est monotone en fonction de la fréquence : croissante pour le module de stockage  $G = G_0$  et décroissante pour  $G = G_0/10$ . On observe que l'erreur est très peu dépendante de la valeur du facteur de perte et dépend essentiellement de la fréquence.

Les figures 2.22 et 2.23 précisent les gammes de polymères mesurables par un tel banc en module de stockage et en facteur de perte à 800 Hz. Les erreurs sont inférieures à  $5\%$ . À travers les analyses précédentes, cette fréquence est apparue comme intéressante car relativement isolée des modes propres du banc. On voit là encore que la valeur nominale du facteur de perte a très peu d'importance alors que celle du module de stockage a une grande répercussion. Pour un sandwich tel que le BI2F, on peut donc couvrir une gamme de mesure

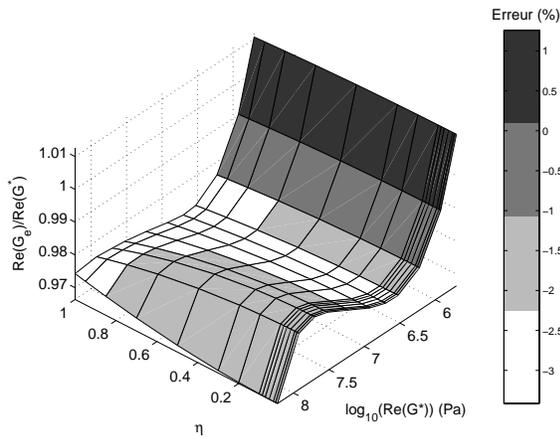


FIG. 2.22 – Module de stockage estimé  $G_e$  pour différents  $G^*$  et  $\eta$  -  $f = 800$  Hz - Sans précontrainte

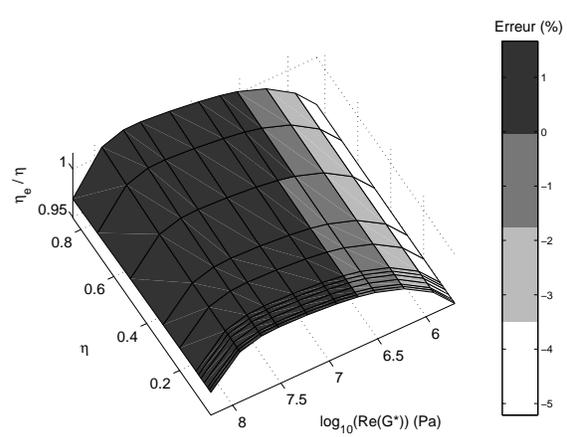


FIG. 2.23 – Facteur de perte estimé  $\eta_e$  pour différents  $G^*$  et  $\eta$  -  $f = 800$  Hz - Sans précontrainte

relativement large en module.

Ces erreurs peuvent s'expliquer par la déformation du mobile déjà illustrée par les calculs de modes (voir figure 2.8), de plus en plus prononcée lorsque la raideur de la zone viscoélastique augmente. La valeur du facteur de perte est par contre bien estimée qu'elle que soit la valeur de l'amortissement. Ceci s'explique par le fait que le banc, en dehors de la couche viscoélastique, ne dissipe pas d'énergie. La plus grande partie de l'énergie dissipée se trouve dans la zone d'essai viscoélastique qui travaille en cisaillement, comme on l'a vu pour le comportement statique évalué en section 2.3.3.1.

- Tôle sandwich CVF10

On donne les mêmes résultats pour la tôle CVF10 dont les dimensions sont précisées en section 2.4.1. On observe une bonne estimation du module, cette fois-ci pour des valeurs nominales du module de stockage plus importantes comprises entre  $10^{7.5}$  et  $10^{8.5}$  (figures 2.24 et 2.25). L'erreur sur l'estimation est inférieure à 8 % sur le domaine de fréquence 480-1100 Hz. Le facteur de perte est bien estimé quelque soit sa valeur nominale (figures 2.26 et 2.27). Ceci confirme que le banc est également bien adapté à la mesure de polymère épais plus raide.

Les figures 2.28 et 2.29 précisent la gamme de polymères mesurables par un tel banc en module de stockage et en facteur de perte à 600 Hz. À cette fréquence, les erreurs sont inférieures à 3 % en module et à 5 % en facteur de perte.

La comparaison des modèles fonctionnels et éléments finis a permis de valider la gamme d'utilisation d'un tel banc, dans sa version sans poutre de précontrainte. On a vérifié l'uniformité des déformations et contraintes dans la zone d'essai viscoélastique pour les dimensions usinées suivantes : 16mm  $\times$  12mm.

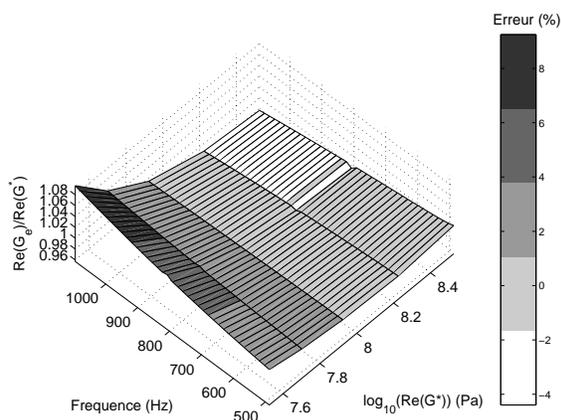


FIG. 2.24 – Module de stockage estimé  $G_e$  pour différents  $G^*$  avec  $\eta = 0.01$  - 480-1100 Hz - Sans précontrainte

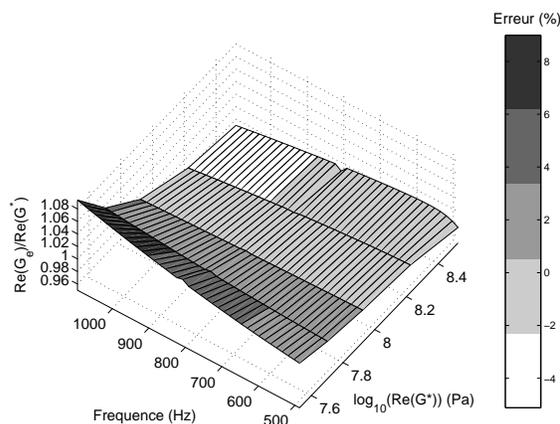


FIG. 2.25 – Module de stockage estimé  $G_e$  pour différents  $G^*$  avec  $\eta = 0.7$  - 480-1100 Hz - Sans précontrainte

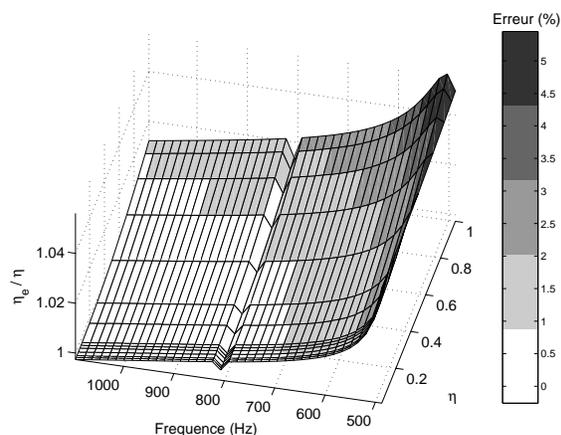


FIG. 2.26 – Facteur de perte estimé  $\eta_e$  pour différents  $\eta$  avec  $G = 20 * G_0$  - 480-1100 Hz - Sans précontrainte

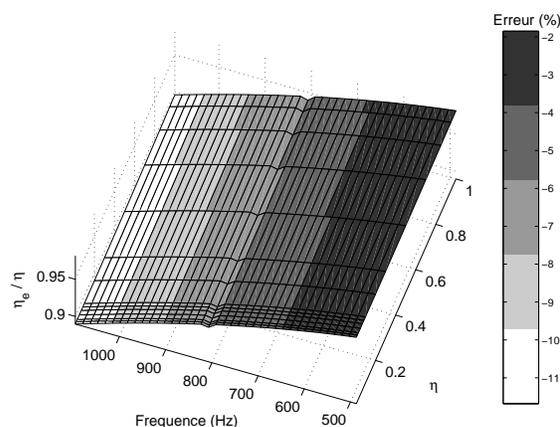


FIG. 2.27 – Facteur de perte estimé  $\eta_e$  pour différents  $\eta$  avec  $G = 3 * G_0$  - 480-1100 Hz - Sans précontrainte

On est capable de mesurer des modules de cisaillement complexe de plaques sandwich sur un domaine relativement large qui garantissent un niveau d'erreur acceptable :  $f \in 580-1416$  Hz  $\times$   $\text{Re}(G^*) \in 10^{5.7}-10^{7.7}$  Pa  $\times$   $\eta \in 0-1$  pour la tôle fine BI2F et  $f \in 480-1100$  Hz  $\times$   $\text{Re}(G^*) \in 10^{7.5}-10^{8.5}$  Pa  $\times$   $\eta \in 0-1$  pour la tôle épaisse CVF10.

La section suivante présente la réalisation du banc rendue possible grâce à son dimensionnement numérique et l'exploitation des fonctions de transfert qui mènent à une caractérisation expérimentale des tôles sandwich BI2F.

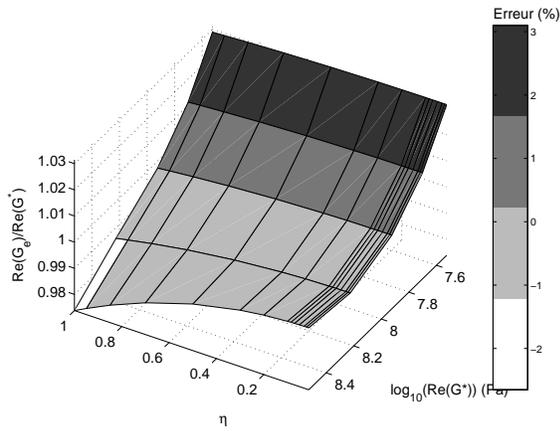


FIG. 2.28 – Module de stockage estimé  $G_e$  pour différents  $G^*$  et  $\eta$  -  $f = 600$  Hz - Sans précontrainte

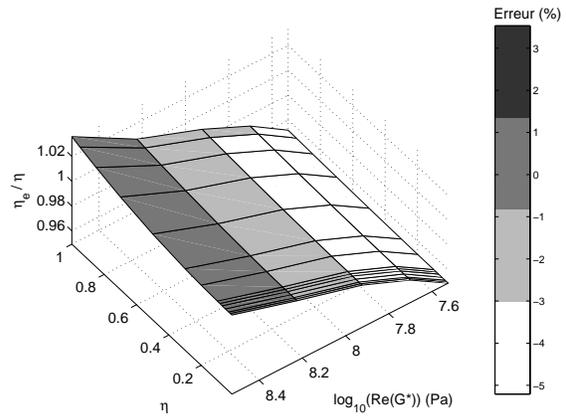


FIG. 2.29 – Facteur de perte estimé  $\eta_e$  pour différents  $G^*$  et  $\eta$  -  $f = 600$  Hz - Sans précontrainte

## 2.4 Réalisation expérimentale

On présente dans cette section la réalisation expérimentale du banc en commençant par décrire les tôles sandwich que l'on veut caractériser (section 2.4.1). On détaille ensuite le protocole expérimental et la mesure de fonctions de transfert pour différentes évolutions du banc (section 2.4.2).

### 2.4.1 Tôles sandwich

Un échantillon de tôle sandwich BI2F (Solconfort, Usinor [76]) est représenté en figure 2.30. A titre indicatif, on donne entre parenthèse les épaisseurs de cœur et parements équivalents pour la tôle CVF10.

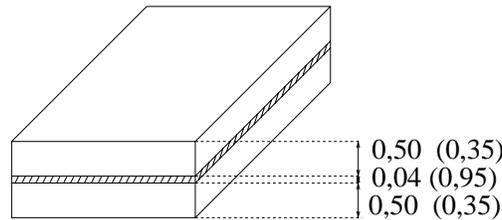


FIG. 2.30 – Échantillons de tôle sandwich acier-polymère-acier BI2F2 (CVF10). Epaisseurs en mm

Ces deux plaques sont conçues pour des objectifs bien différents. L'échantillon BI2F2 a pour fonction de dissiper l'énergie de vibrations des parements en chaleur, le polymère utilisé étant une résine souple sous forme de film polymère très fin par rapport à l'épaisseur des parements. Le modèle CVF10, constitué d'un polymère plus raide et sous forme de film épais, a pour but de conserver la rigidité d'une plaque d'acier aux mêmes dimensions tout en diminuant considérablement sa masse. L'écartement des deux parements obtenu par la

présence de la couche épaisse de polymère augmente en effet le moment d'inertie de la plaque.

Dans les deux cas, les films utilisés permettent une dissipation importante de l'énergie vibratoire du fait du travail en cisaillement de la couche polymère induit par le glissement différentiel des parements raides en acier.

L'étude s'est concentrée sur l'obtention d'une loi tabulée du film viscoélastique de l'échantillon BI2F2.

### 2.4.2 Réalisation et évolutions du banc

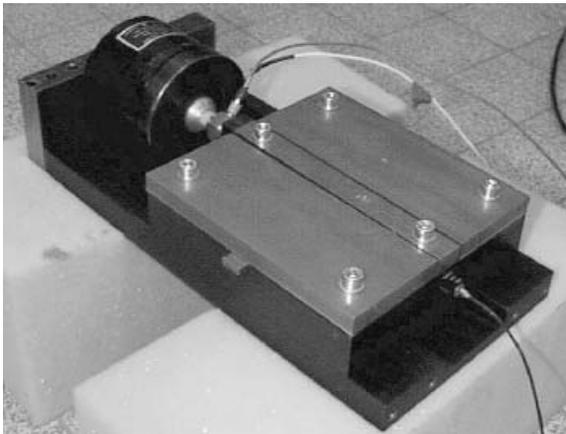


FIG. 2.31 – *Config. 1*

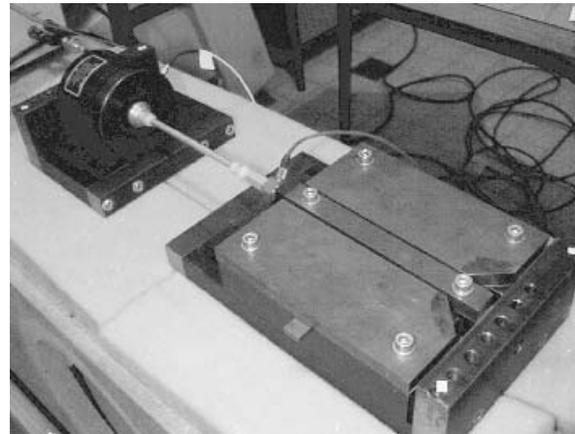


FIG. 2.32 – *Config. 2*

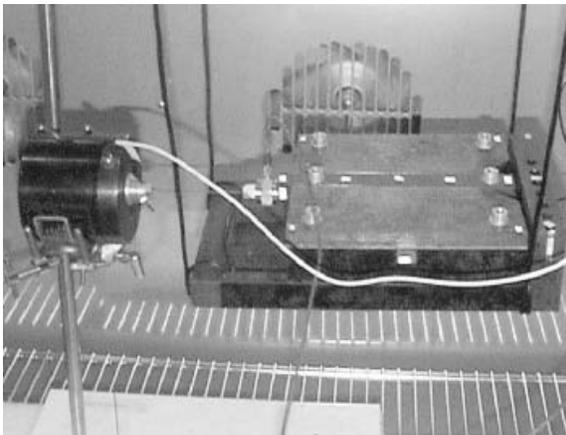


FIG. 2.33 – *Config. 3*

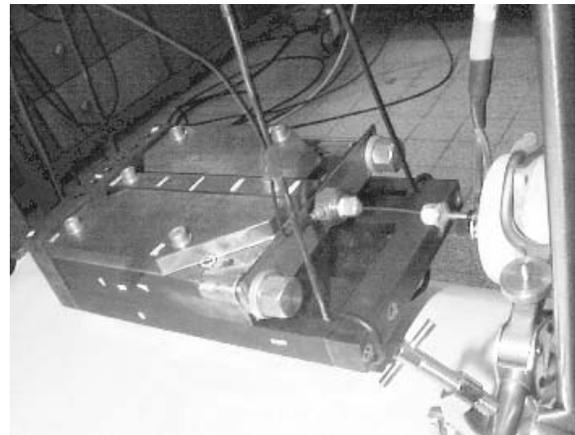


FIG. 2.34 – *Config. 4*

Les figures 2.31 à 2.34 présentent les différentes évolutions du banc réalisé :

- Config. 1 : bâti et pot vibrant sur un support unique, tige d'excitation nylon, accéléromètre;

- Config. 2 : bâti et pot vibrant séparés posés sur un bloc de mousse ; tige d’excitation en nylon gainé, cellule de déplacement ;
- Config. 3 : pot vibrant et bâti suspendu en chambre isotherme ; tige d’excitation corde à piano ;
- Config. 4 : ensemble séparé et suspendu ; tige d’excitation corde à piano raccourcie et changement de pot vibrant ; poutre de précontrainte mise en place.

Dans les configurations finales retenues (Config. 3 et Config. 4), un pot vibrant LDS V101 excite en cisaillement la zone d’essai viscoélastique avec un bruit blanc aléatoire sur la bande 1-2048 Hz. La force injectée est mesurée par une cellule de force BK 8200 en entrée du mobile.

Dans la Config. 3, un accéléromètre est fixé en bout de mobile et mesure l’accélération du mobile. Dans la Config. 4, un capteur de déplacement dynamique KD 2300 qui mesure le déplacement relatif du mobile par rapport au bâti est fixé sur le flasque à l’arrière du bâti.

Dans l’hypothèse d’un mobile et d’un bâti parfaitement rigides, ces mesures correspondent au cisaillement de la zone d’essai. L’ensemble est suspendu dans une étuve isotherme Binder KB720 à température contrôlée (Config. 3). La température dans une telle étuve peut atteindre des valeurs de 0 à 100°C. On fait varier le taux de cisaillement statique de la zone d’essai viscoélastique grâce à la poutre de précontrainte (Config. 4). Les mesures sont réalisées avec un système LMS [1] et exploitées sous Matlab/SDT [11].

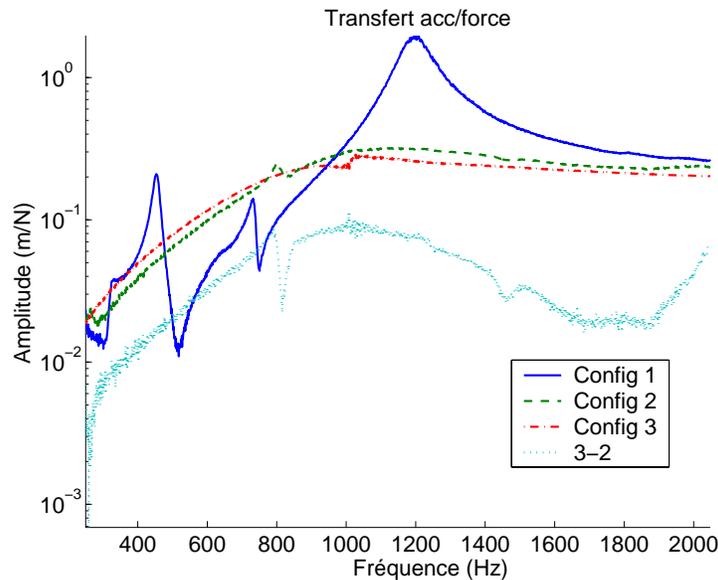


FIG. 2.35 – *Transfert accélération/force du mobile dans son axe 250-2048 Hz. Différentes configurations, température ambiante*

La figure 2.35 présente la superposition de la même fonction de transfert accélération/force pour les trois premières configurations du banc de mesure. La courbe de la Config. 1 présente

de nombreuses résonances. La solidarisation du pot vibrant et du bâti, retenue initialement, a l'avantage théorique de permettre une mesure directe du module, puisque l'on construit une machine de traction. On observe cependant de nombreuses perturbations à basses fréquences avant le pic de résonance principal vers 1300Hz.

Devant la difficulté d'éliminer efficacement les résonances parasites de ce montage, le concept résonant exposé en section 2.2.1 a donc été retenu : il consiste à désolidariser exciteur et zone d'essai.

Dans les configurations désolidarisées, on ne retrouve qu'une grosse perturbation (non linéarité due au couplage mobile-pot vibrant-tige, la valeur de la fréquence dépendant de la longueur de tige) qui est largement atténuée dans la Config. 3. On s'est affranchi de cette non-linéarité dans la Config. 4 (l'ensemble des mesures qui suivent sont réalisées dans cette configuration) en raccourcissant la longueur de tige.

Divers essais de validation ont été réalisés sur la Config. 4. La figure 2.36 illustre un niveau de non-linéarité assez faible et la figure 2.37 une très bonne reproductibilité du montage.

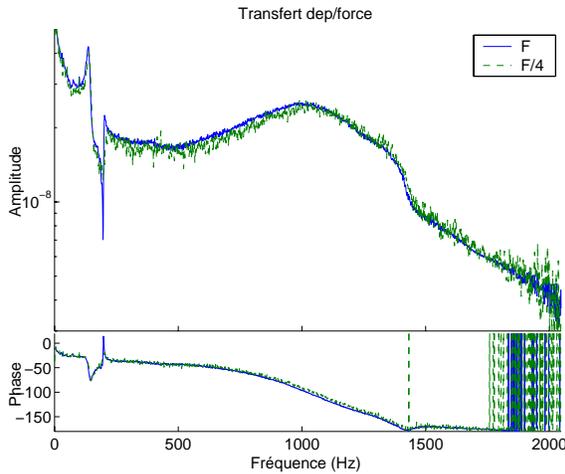


FIG. 2.36 – Essai de non-linéarité - Transfert dep/force du mobile dans son axe pour deux amplitudes de force d'excitation 1-2048 Hz Temp=23°C - Avec précontrainte

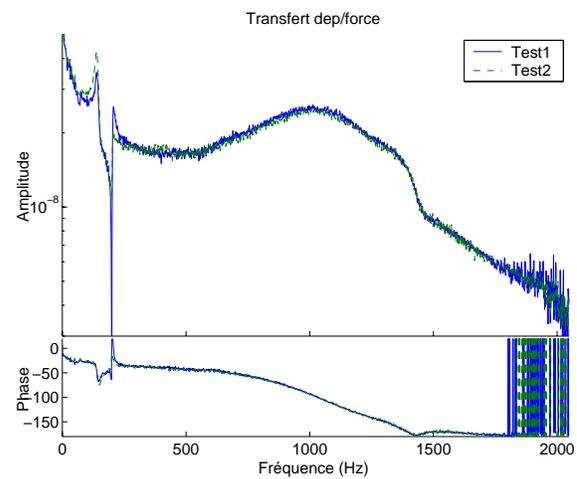


FIG. 2.37 – Essai de reproductibilité - Transfert dep/force du mobile dans son axe avant et après démontage 1-2048 Hz Temp=23°C - Avec précontrainte

On dispose maintenant d'une évolution acceptable du banc de mesure (Config.4) et d'un choix et d'un placement fiables des capteurs de mesure autour du banc. La section suivante détaille l'obtention du module complexe  $G^*$  à partir des mesures de fonctions de transfert à température et à précontrainte contrôlées.

## 2.5 Exploitation des mesures

Les mesures des transferts présentés à la section précédente permettent de connaître directement le module complexe après quelques ajustements (section 2.5.1), ce qui mène directement à la construction de nomogrammes (section 2.5.2). Ces nomogrammes sont à la base de lois tabulées viscoélastiques qui sont validées en section 2.5.3.

### 2.5.1 Mesure de modules complexes

Le but de ce montage expérimental (banc + capteurs) est de permettre la mesure directe du module complexe (par opposition aux mesures indirectes précisées en section 1.2.4.1). Les sections précédentes ont montré qu'on pouvait estimer le module de cisaillement complexe  $G^*$  à partir des mesures de fonctions de transfert accélération/force  $H$  et déplacement relatif/force  $H_r$ . Les relations entre le module  $G^*$ , les transferts  $H$  et  $H_r$  sont données par la section 2.2.1. La vérification numérique de l'uniformité des contraintes-déformations effectuée en section 2.3.3.1 a validé leur utilisation.

L'utilisation des relations (2.8) et (2.10) nécessite la connaissance de la raideur réelle de la poutre de précontrainte  $K_p$ , de la masse du bâti  $M$  et de la masse du mobile  $m$ . Pour connaître plus précisément leur valeur, on les évalue expérimentalement. La pesée du mobile ne prend pas en compte une partie de la masse ajoutée par la présence de la tôle sandwich ; on cherche donc à l'évaluer la masse mobile lorsque la zone viscoélastique est excitée par le pot vibrant sur la gamme de fréquence 0-2048 Hz.

Pour les mesures à différentes températures, la masse mobile  $m$  correspond à l'inverse de l'asymptote haute fréquence du transfert accélération/force (cf. figure 2.35). Pour les mesures à précontrainte contrôlée, on transforme le transfert déplacement relatif/force en transfert accélération/force et on traite l'asymptote haute fréquence de la même manière. Dans ce dernier cas, on observe une masse plus importante du fait de la présence de la poutre de précontrainte.

La raideur réelle de la poutre de précontrainte  $K_p$  est donnée par la fréquence de résonance de cisaillement du banc correspondant au cas d'une zone viscoélastique endommagée ou d'un essai à vide -sans tôle sandwich (dans ce cas, le mode de cisaillement du banc correspond au premier mode de flexion de la poutre de précontrainte). L'absence de couche de polymère assure en effet que les capteurs mesurent seulement la raideur  $K_p$  du fait de la raideur viscoélastique  $K_v$  nulle. En ce qui concerne la masse du bâti  $M$ , cette dernière est obtenue par pesée et soustraction de la masse mobile  $m$  de la masse totale du banc.

Dans ce qui suit, un lissage réalisé par moyenne glissante a été effectué sur l'ensemble des mesures de transfert. Pour une gamme de température, on obtient le faisceau de fonctions de transfert de la figure 2.38 et par utilisation de (2.8) le module estimé correspondant représenté en figure 2.39. Ces courbes montrent la diminution du module de stockage et l'évolution

du facteur de perte avec la température et la fréquence tout à fait conformes avec les formes habituelles discutées au chapitre 1.

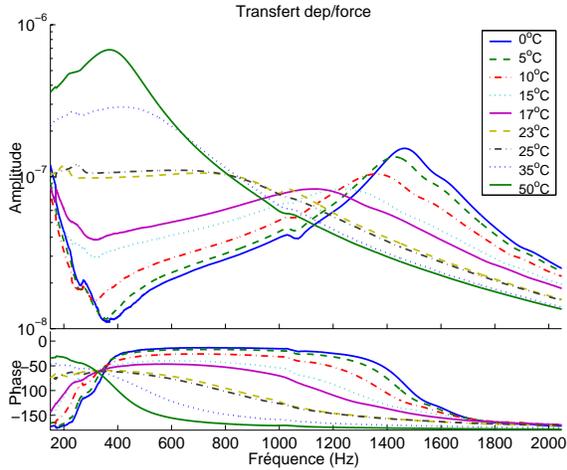


FIG. 2.38 – Transfert dep/force 150-2048 Hz sans précontrainte

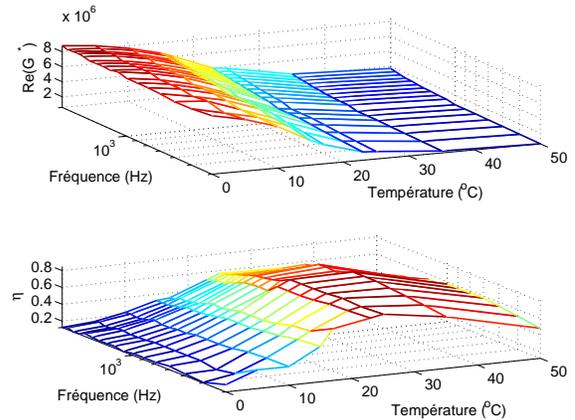


FIG. 2.39 – Module BI2F 400-2000 Hz /  $T \in 0 - 50^\circ C$

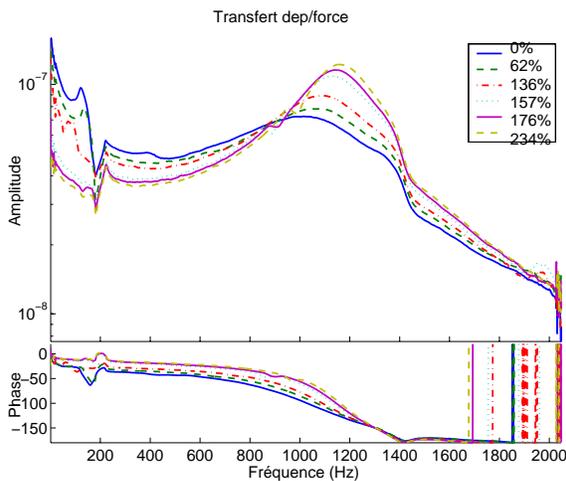


FIG. 2.40 – Transfert dep/force 1-2048 Hz Temp=23°C avec précontrainte

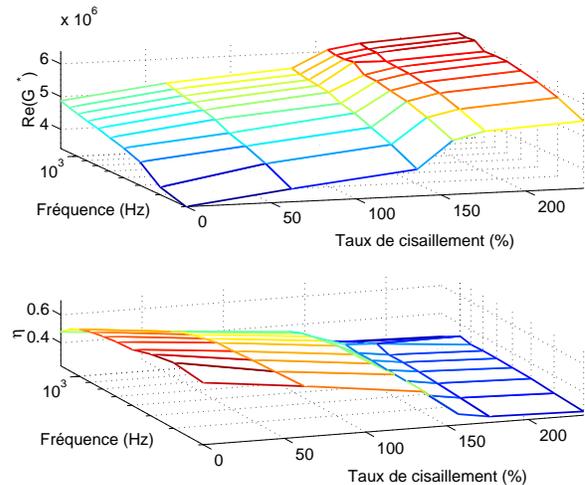


FIG. 2.41 – Module BI2F 150-1700 Hz /  $\varepsilon_0 \in 0-234\%$

Le même travail présenté sur la figure 2.40 a été réalisé pour différents taux de cisaillement statique (rapport du déplacement statique axial du film viscoélastique et de son épaisseur, le film se délaminant pour un taux d'environ 300%) à température ambiante. A chaque nouvelle mesure de précontrainte, un démontage, un revissage des écrous et contre-écrous et une attente de la période de fluage du viscoélastique sont nécessaires. La bonne reproductibilité du montage assure que les différences mesurées ne sont pas un effet du remontage mais bien une variation intrinsèque des propriétés du matériau.

Le faisceau de courbes de la figure 2.41 obtenu par application de (2.10) sur les fonctions de transfert mesurées montre l'augmentation du module et la diminution du facteur de perte avec la précontrainte, variations qui sont en accord avec les observations décrites dans [51].

Le module complexe du BI2F a été obtenu sur une largeur de bande fréquentielle à différentes température et pour différents taux de précontrainte, on peut à présent construire les nomogrammes associés.

## 2.5.2 Construction de nomogrammes

On rappelle que l'hypothèse de superposition fréquence/température, qui s'applique aux matériaux viscoélastiques linéaires consiste à supposer la dépendance suivante du module  $G^*(\omega, T, \varepsilon_0) = G^*(\alpha(T, \varepsilon_0)\omega)$ . En échelle logarithmique, on translate en fréquence les courbes isotempératures de la nappe montrée en figure 2.39 pour vérifier si leurs recouvrements partiels sont bien situés sur une seule courbe dite maîtresse.

$\alpha(T, \varepsilon_0)\omega$  est appelée fréquence réduite et  $\alpha$  facteur de décalage (section 1.2.2.2). L'hypothèse de superposition fréquence/température permet d'obtenir des nomogrammes tels que celui de la figure 1.7 qui rendent possible la reconstruction de  $G^*$  sur une très grande gamme de fréquence et de température.

Pour valider l'hypothèse d'équivalence, on a traduit manuellement les courbes de module de la figure 2.39 de manière à assurer la continuité du module de stockage (cf. figure 2.42). La bonne concordance de la courbe de facteur de perte montre que l'hypothèse d'équivalence est raisonnable.

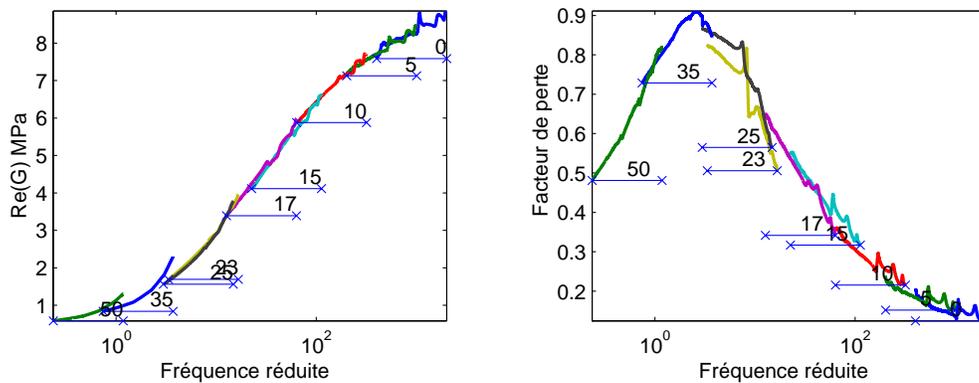


FIG. 2.42 – Module de stockage et facteur de perte en fréquence réduite  $\alpha_T\omega$  -  $T \in 0 - 50^\circ C$  -  $\varepsilon_0 = 0\%$

Par analogie, à partir des mesures de précontrainte de la figure 2.41, on définit un facteur de décalage  $\alpha_{\varepsilon_0}$  qui donne le nomogramme fréquence/précontrainte de la figure 2.43 à température ambiante. Les facteurs de décalage sont déterminés de manière à assurer la continuité des courbes de module de stockage.

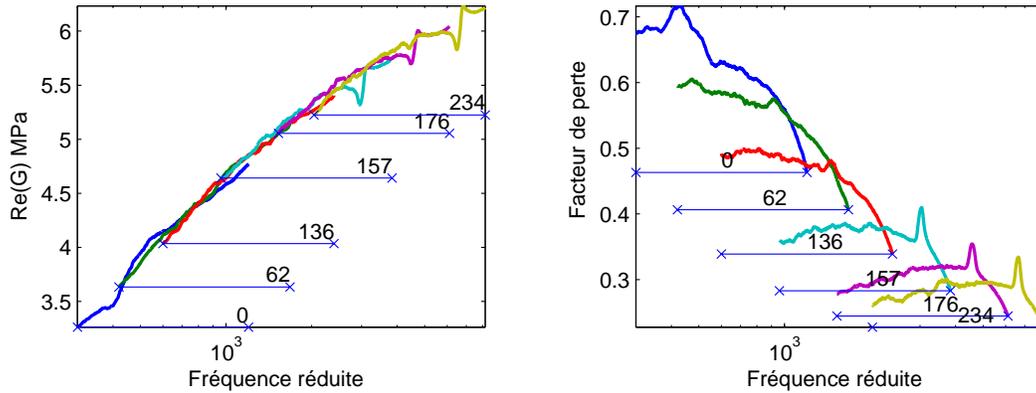


FIG. 2.43 – Module de stockage et facteur de perte en fréquence réduite  $\alpha_{\varepsilon_0}\omega - \varepsilon_0 \in 0 - 234\%$  -  $T = 23^\circ C$

La concordance de la courbe de facteur de perte est ici plus discutable que pour l'essai de température. On observe néanmoins une certaine continuité de cette courbe et une évolution importante des propriétés amortissantes : le facteur de perte passe de 0.7 à 0.3 environ. Ceci montre que l'hypothèse d'équivalence fréquence/précontrainte est tout à fait exploitable.

Les figures 2.44 et 2.45 donnent respectivement les nomogrammes expérimentaux fréquence/précontrainte du BI2F aux températures  $T = 35^\circ C$  et  $T = 15^\circ C$ . Le nombre d'essai a été minimisé pour des raisons expérimentales : il devient difficile de régler la poutre de précontrainte dans une chambre isotherme à température contrôlée autre que la température ambiante. À chaque changement de précontrainte, il faut non seulement attendre le fluage de la zone d'essai viscoélastique, mais également la stabilité en température de la zone viscoélastique.

Là encore, on observe que le choix des facteurs de décalage pour assurer la continuité du module de stockage entraîne une relative continuité de la courbe de facteur de perte, ce qui valide l'hypothèse d'équivalence fréquence/précontrainte. Les propriétés élastiques et amortissantes évoluent beaucoup à ces températures lorsqu'on passe d'un taux de précontrainte nul à une situation proche du délaminage. On a une augmentation de 70% et 33% du module de stockage respectivement à  $T = 35^\circ C$  et  $T = 15^\circ C$  tandis que le facteur de perte diminue de 0.8 à 0.4 (50% de diminution) et de 0.45 à 0.3 (33% de réduction).

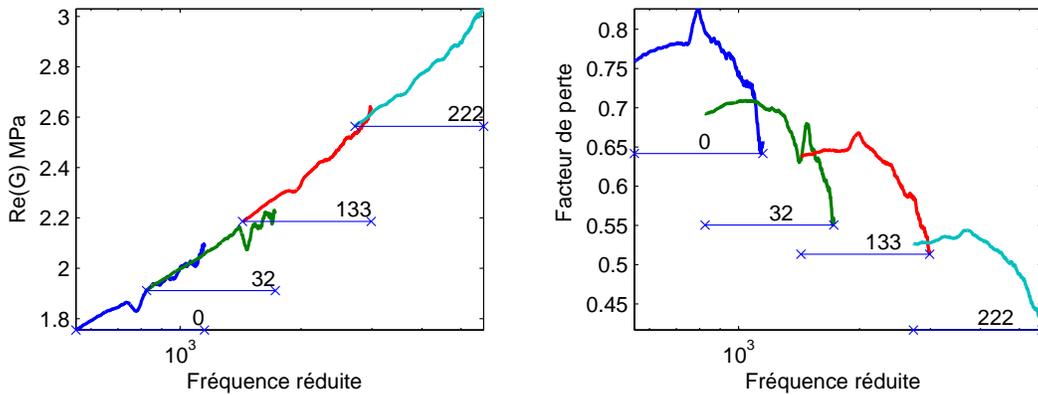


FIG. 2.44 – Module de stockage et facteur de perte en fréquence réduite  $\alpha_{\varepsilon_0}\omega - \varepsilon_0 \in 0 - 222\%$  -  $T = 35^\circ C$

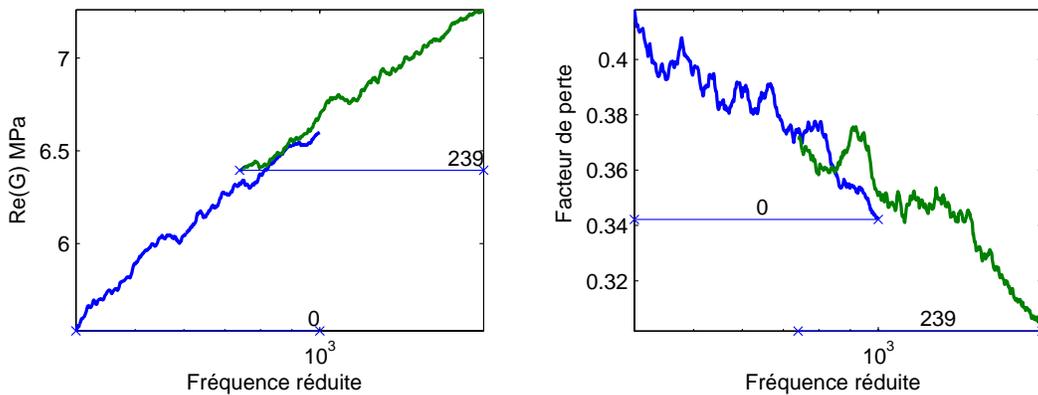


FIG. 2.45 – Module de stockage et facteur de perte en fréquence réduite  $\alpha_{\varepsilon_0}\omega - \varepsilon_0 \in 0 - 238\%$  -  $T = 15^\circ C$

### 2.5.3 Lois tabulées du matériau BI2F

L'ensemble des mesures effectuées précédemment et l'utilisation de l'hypothèse de superposition a permis de définir des nomogrammes expérimentaux qui délivrent les propriétés du cœur viscoélastique de tôle sandwich BI2F en fréquence réduite.

Afin de rendre ces nomogrammes plus utilisables, on va les lisser et les stocker dans des tableaux, ce qui définit les lois tabulées (section 2.5.3.1). Pour valider la loi tabulée en température, on évalue par le calcul et par la mesure les transferts du banc de mesure à plusieurs températures (section 2.5.3.2) et les réponses fréquentielles par un essai vibratoire sur un échantillon de tôle sandwich BI2F (section 2.5.3.3).

#### 2.5.3.1 Nomogrammes tabulés fréquence/température/précontrainte

On réalise un sous-échantillonnage des courbes expérimentales de la section 2.5.2 : on stocke dans un tableau les valeurs des extrémités de chaque segment mesuré expérimentale-

ment ; on conserve la valeur inférieure de chaque segment et les deux valeurs (inférieure et supérieure) pour le dernier segment. Étant donné que les facteurs de décalage ont été évalués de manière à assurer la continuité du module de stockage  $E'(\omega)$  et du facteur de perte  $\eta(\omega)$  en fréquence réduite, on obtient une loi tabulée qui délivre un nomogramme continu par morceaux. La figure 2.46 est la version sous-échantillonnée du nomogramme expérimental en température de la figure 2.42.

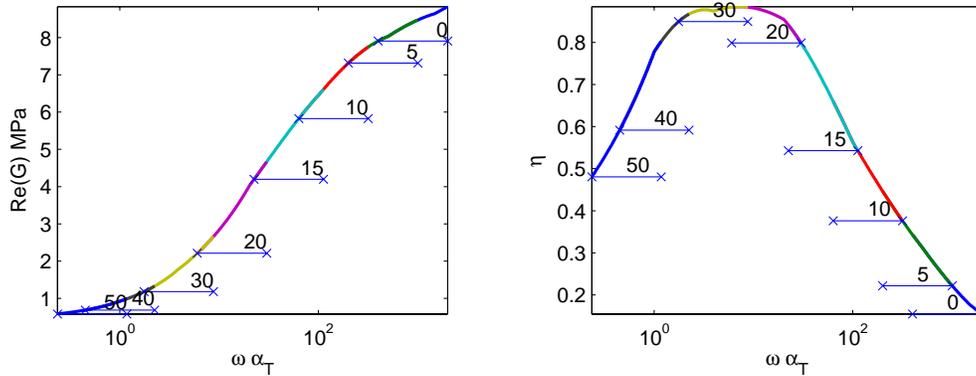


FIG. 2.46 – Module de stockage et facteur de perte en fonction de  $\alpha_T \omega$ .  $T \in 0 - 50^\circ C$ .

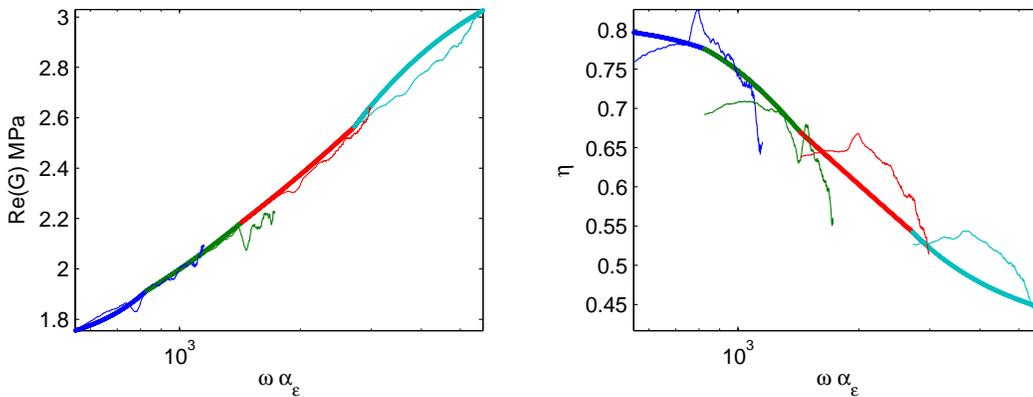


FIG. 2.47 – Module de stockage et facteur de perte en fonction de  $\alpha_{\epsilon_0} \omega$ .  $\epsilon_0 \in [0, 32, 133, 222]\%$ .  $T = 35^\circ C$ .

Le sous-échantillonnage des nomogrammes expérimentaux en précontrainte est plus délicat compte-tenu de la moins bonne qualité du facteur de perte. Une forte interprétation est nécessaire pour identifier de tels résultats expérimentaux, pourtant facilitée par le passage en fréquence réduite.

La figure 2.47 montre la superposition des mesures expérimentales à  $35^\circ C$  et de leur version sous-échantillonnée en fréquence réduite. La version sous-échantillonnée a été corrigée pour obtenir un facteur de perte décroissant en fréquence réduite et représentant le caractère

moyen des données expérimentales. Ceci montre qu'une identification de mesures de facteur de perte délivrées par la version actuelle du banc n'est pas souhaitable en fréquence physique, c'est-à-dire sans utiliser l'hypothèse de superposition.

La figure 2.48 présente la version sous-échantillonnée du module complexe expérimental en précontrainte à  $23^{\circ}C$ , courbe à comparer avec le nomogramme expérimental de la figure 2.43. Une forte interprétation de la courbe du facteur de perte a de nouveau été effectuée.

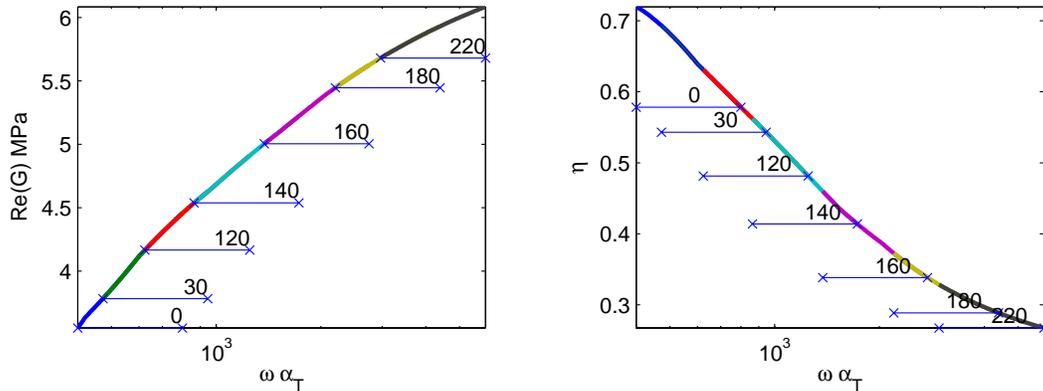


FIG. 2.48 – Module de stockage et facteur de perte en fonction de  $\alpha_{\varepsilon_0} \omega$ .  $\varepsilon_0 \in 0 - 230\%$ .  $T = 23^{\circ}C$ .

On souhaite étudier la concordance des essais effectués avec deux configurations du banc de mesure : on rappelle que la Config. 3 a permis l'essai à température contrôlée et la Config. 4 les essais à précontrainte contrôlée à trois températures ( $15, 23$  et  $35^{\circ}C$ ). La superposition des essais pour trois températures en absence et en présence de poutre de précontrainte (pour un taux de cisaillement de  $0\%$ ) permet d'observer l'influence de la poutre de précontrainte sur les mesures. On utilise pour cela les versions sous-échantillonnées des mesures de températures et de précontraintes sur la même bande de fréquence  $550-1000$  Hz qui correspond à la plus grande bande de fréquence commune aux quatre essais.

La superposition, illustrée par la figure 2.49, montre la difficulté de comparer les essais issus de deux configurations du banc. Le module de stockage est surévalué tandis que le facteur de perte est sous-évalué par le traitement des mesures de la Config. 4. On a réévalué le facteur de décalage en température pour les essais avec poutre de précontrainte pour avoir superposition des modules de stockage pour les deux types d'essai et on observe une certaine continuité du facteur de perte correspondant, mais qui ne suit pas du tout la courbe en cloche de l'essai sans précontrainte.

La différence dans l'évaluation des modules, en particulier du facteur de perte, ne peut pas s'expliquer uniquement par l'identification difficile des facteurs de perte dont les nomogrammes expérimentaux sont très chahutés. La différence peut s'expliquer par une mauvaise

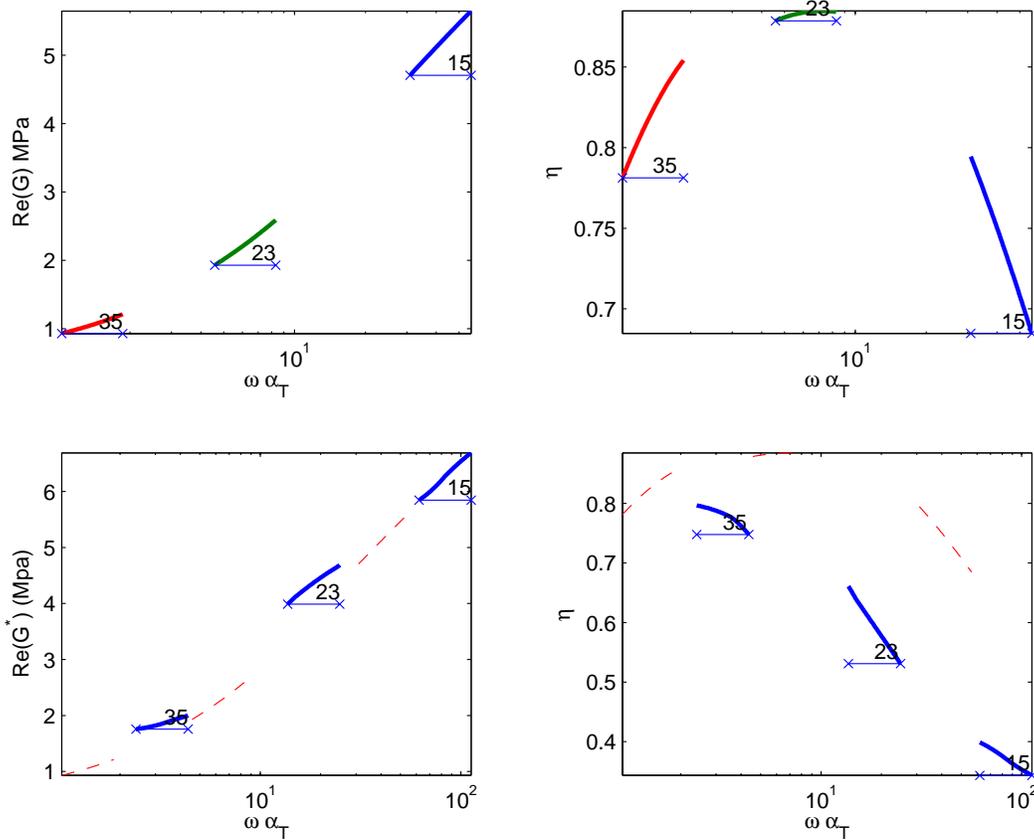


FIG. 2.49 – Modules de stockage et facteurs de perte en fonction de  $\alpha_T \omega$ .  $T \in 15, 23, 35^\circ C$ .  $\varepsilon_0 = 0\%$ . Haut : sans précontrainte, Bas : avec précontrainte

évaluation des mesures issues de la Config. 4 bien que des précautions importantes aient été prises dans le traitement des données : une sous-évaluation expérimentale de la raideur additionnelle de la poutre de précontrainte peut en effet expliquer une surévaluation du module de stockage et une sous-évaluation du facteur de perte.

Pour obtenir la valeur du module complexe en des points fréquentiels, de température ou de précontrainte autres que ceux mesurés, on effectue une interpolation du module complexe en variables réduites, comme cela est présenté en section 1.2.3.1. On observe sur la figure 2.46 que l'interpolation du nomogramme a permis d'atteindre des températures  $20^\circ C$  et  $40^\circ C$  non mesurées expérimentalement. De la même manière, la figure 2.48 a montré l'interpolation de nouvelles valeurs de précontrainte non données par la figure 2.43.

### 2.5.3.2 Transferts réels/fonctionnels du banc

On cherche à comparer les fonctions de transfert réelles du banc de mesure suivant plusieurs températures avec les fonctions de transfert éléments finis du banc en utilisant la loi tabulée BI2F de la figure 2.46.

La figure 2.50 (gauche) représente l'essai de cisaillement réalisé à plusieurs températures sur la tôle sandwich BI2F grâce au banc de mesure. Le protocole expérimental est le même que celui précisé en section 2.4.2. Un lissage par moyenne glissante a été réalisé pour obtenir le faisceau de fonctions de transfert accélération/force sur 60-2048 Hz. La figure de droite donne la forme de la fonction de transfert accélération/force obtenue  $d_1 s^2 / F$  à partir de la relation fonctionnelle (2.7) et de la loi tabulée du BI2F pour différentes températures.

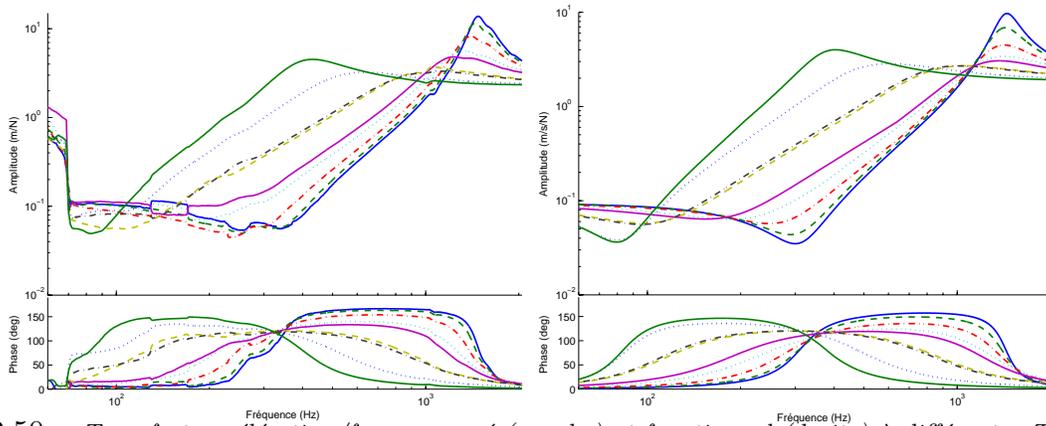


FIG. 2.50 – Transfert accélération/force mesuré (gauche) et fonctionnel (droite) à différentes  $T$ . 60-2048 Hz. Sans précontrainte

Hormis les imprécisions à basses fréquences et à faibles niveaux de la courbe expérimentale, on observe une très bonne concordance de l'allure générale des deux figures température par température, ce qui nous rassure sur la validité de la loi tabulée en température et de l'interpolation utilisée.

### 2.5.3.3 Calcul/Essai sur une plaque BI2F

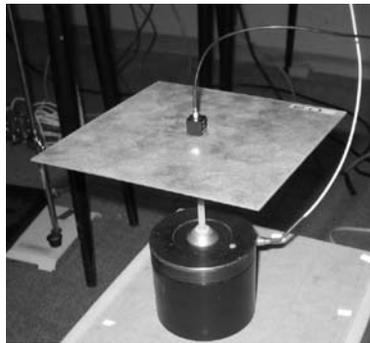


FIG. 2.51 – Analyse modale d'une plaque sandwich BI2F en chambre isotherme

Pour montrer la pertinence de l'utilisation de la loi tabulée BI2F en température dans un modèle éléments finis autre que le banc de mesure, on effectue la mesure expérimentale et la prédiction éléments finis des fonctions de transfert d'une plaque sandwich BI2F à différentes températures. Les points de mesure sont pris au centre de la plaque, l'excitation étant appliquée sur la face inférieure et la réponse étant mesurée sur la face supérieure. La figure 2.51 présente le montage expérimental.

La plaque sandwich est modélisée par éléments finis de la même manière que [58], c'est-à-dire en utilisant des éléments volumiques pour le cœur viscoélastique et des éléments surfaciques décalés pour les parements en acier ; la couche viscoélastique utilise la loi tabulée BI2F. La figure 2.52 montre que les fonctions de transfert accélération/force ainsi obtenues se superposent relativement bien avec celles mesurées sur la bande 1-1024 Hz.

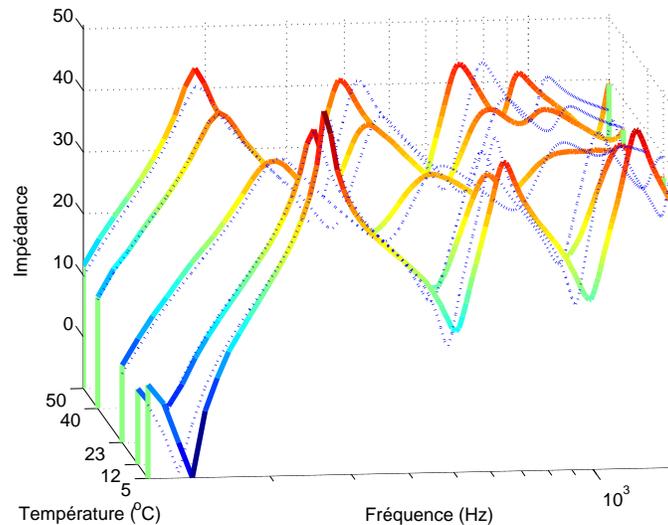


FIG. 2.52 – Plaque sandwich BI2F - Calcul/Essai avec loi viscoélastique tabulée. (··) calcul EF, (–) essai

## 2.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, on a exposé la réalisation d'un nouveau banc de mesure de tôles sandwich à cœur viscoélastique qui permet des mesures directes de leur module complexe sur une large bande de fréquence. On a montré d'un point de vue fonctionnel et par un calcul éléments finis la pertinence d'utiliser comme mode de fonctionnement principal le mode de cisaillement du cœur, qui rend possible l'étude de l'influence de la précontrainte statique sur le module (précisaillement statique avant appliqué avant le cisaillement dynamique). On a donné la relation entre les fonctions de transfert expérimentales et le module complexe que l'on cherche à caractériser. La configuration choisie du banc rend possible l'étude en fréquence-température et précontrainte d'un grand nombre de tôles sandwich dont nous

avons précisé la gamme d'utilisation en terme de raideur/facteur de perte/épaisseur.

L'étude expérimentale s'est consacrée à l'étude de la tôle sandwich BI2F. Le banc de mesure permet d'obtenir des mesures de module complexe exploitables sur la bande de fréquence 400-2000 Hz pour les essais de température et 300-1200 Hz pour les essais de précontrainte à température ambiante (respectivement 550-1150 Hz et 400-1000 Hz pour les essais de précontrainte à  $T = 35^{\circ}\text{C}$  et  $T = 15^{\circ}\text{C}$ ). Les essais ont eu lieu sur la gamme de température 0-50°C et de taux de cisaillement statique de 0-234%, ce qui permet d'obtenir les nomogrammes en température et précontrainte des figures 2.42 et 2.45 [39]. La construction de ces nomogrammes est basée sur l'hypothèse de superposition exposée au chapitre 1.

On a ensuite sous-échantillonné les nomogrammes expérimentaux afin d'obtenir des courbes maîtresses continues. Pour décrire la courbe maîtresse sur une large bande, on effectue une interpolation de ses données en fréquence réduite, ce qui permet d'atteindre des valeurs de fréquence et facteurs d'environnement non mesurés expérimentalement. La description en fréquence réduite facilite également l'extrapolation des zones haute et basse fréquences non mesurées. L'avantage d'une description de la loi de comportement sous forme de nomogrammes tabulés apparaît donc clairement : il permet la représentation de comportements généraux fortement dépendants de la fréquence et de facteurs d'environnement sur une large gamme tout en contournant les étapes de choix de représentation a priori et d'identification des paramètres.

Le résultat majeur de ce chapitre est l'étude de l'effet de la précontrainte statique sur les tôles sandwich, l'obtention d'un nomogramme fréquence-précontrainte et une première validation de l'hypothèse de superposition fréquence-précontrainte. Pour valider l'utilisation dans un modèle éléments finis de la loi tabulée expérimentale fréquence/précontrainte à l'instar de ce qui a été fait pour la température en sections 2.5.3.2 et 2.5.3.3, il faudrait quantifier l'effet de la mise en forme de la structure en terme de précontrainte. Il faut remarquer que des corrections importantes des niveaux des facteurs de perte des essais en précontrainte ont été nécessaires et qu'un manque de concordance avec les essais de température a été observé. Davantage d'efforts pour mieux caractériser la raideur réelle de la poutre de précontrainte additionnelle en fonction du taux de précontrainte reste à être mis en œuvre.

On présente dans le chapitre suivant l'utilisation de matériaux viscoélastiques dans une enceinte acoustique dans le but d'améliorer son comportement vibroacoustique.

# 3

## Traitement amortissant d'une enceinte acoustique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>76</b>
<b>3.2</b>	<b>Enceinte acoustique</b>	<b>76</b>
3.2.1	Présentation	77
3.2.2	Rôle du coffret	78
3.2.3	Traitement de l'enceinte	80
<b>3.3</b>	<b>Modèle éléments finis d'une enceinte PRAME</b>	<b>83</b>
3.3.1	Propriétés de l'enceinte et objectifs du modèle	83
3.3.2	Modèle éléments finis	85
3.3.3	Validation expérimentale du modèle	90
<b>3.4</b>	<b>Analyse vibroacoustique</b>	<b>101</b>
3.4.1	Modèle fluide-structure	101
3.4.2	Effet du fluide sur le comportement dynamique	105
3.4.3	Analyse de la performance acoustique	108
3.4.4	Conception d'un traitement amortissant	114
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>118</b>

---

## 3.1 Introduction

Ce chapitre présente la définition et la mise en œuvre d'un traitement amortissant au sein d'une enceinte acoustique qui est l'application finale ayant motivé les développements réalisés dans cette thèse. En dynamique des structures, un certain nombre d'outils existent pour choisir le matériau amortissant et décider de son emplacement dans la structure afin de corriger un certain nombre de vibrations parasites [9] [10]. On cherche à effectuer le même genre d'analyse appliquée au calcul du champ sonore rayonné sur la plage fréquentielle 0-2000 Hz d'une enceinte acoustique contenant des matériaux viscoélastiques.

Contrairement au corps sonore d'un instrument de musique, le coffret d'une enceinte acoustique doit présenter un caractère vibratoire neutre dans la bande fréquentielle de restitution du signal. Tout le signal sonore utile doit provenir du déplacement vibratoire du seul diaphragme. Ceci permet de reproduire fidèlement le signal acoustique original, sans ajout de traînages et de colorations. Le coffret n'étant jamais infiniment rigide, cette situation n'est malheureusement jamais rencontrée.

On cherche donc à minimiser les vibrations du coffret à l'aide d'un traitement amortissant interne à la structure. Ceci revient à traiter le transfert solidien, c'est-à-dire à dissiper l'énergie vibratoire du moteur électromagnétique transmise aux panneaux *via* les bras du saladier (cf. figure 3.1). Diverses alternatives ont été considérées par PRAME [60] : rajout de bandes de plomb sur les bras de saladier, plots viscoélastiques au niveau des fixations du saladier sur le coffret, ajustement des propriétés et de l'épaisseur du collage des bords biseautés des panneaux, panneaux en tôles sandwich MDF-polymère-MDF [5], etc. Notre étude propose une solution originale à base de tirants amortis.

On présente tout d'abord l'enceinte acoustique de façon générale en section 3.2, puis on détaille le modèle numérique d'une enceinte PRAME. Le modèle qui fait appel à la méthode des éléments finis est recalé sur un modèle expérimental (section 3.3). On présente en section 3.4 une analyse vibroacoustique du modèle en prenant en compte la présence de fluides interne et externe. Finalement, la section 3.5 dresse un bilan de l'étude.

## 3.2 Enceinte acoustique

La section 3.2.1 présente le fonctionnement d'une enceinte acoustique et précise les éléments qui entrent en jeu pour sa conception. On rappelle en section 3.2.2 le rôle du coffret. Des phénomènes parasites apparaissent lors du montage du haut-parleur dans le coffret. On présente un ensemble de traitements habituellement mis en œuvre pour corriger le caractère vibratoire non neutre du coffret (section 3.2.3).

### 3.2.1 Présentation

Dans le langage courant, une confusion est faite entre haut-parleur (HP), enceinte acoustique et baffle. Le *HP* est le transducteur électro-mécano-acoustique. Une *enceinte acoustique* désigne l'ensemble HP/coffret montré en figure 3.1. De façon plus précise, l'enceinte acoustique est formée d'un ou plusieurs haut-parleurs montés dans un coffret et elle peut contenir des filtres de traitement du signal. Quant au *baffle*, ce mot désigne le ou les panneaux de l'enceinte sur lesquels sont montés les haut-parleurs constitutifs de celle-ci. Le rôle de l'enceinte acoustique est de convertir avec le moins de distorsions possibles les ondes électriques issues d'un amplificateur en ondes acoustiques.

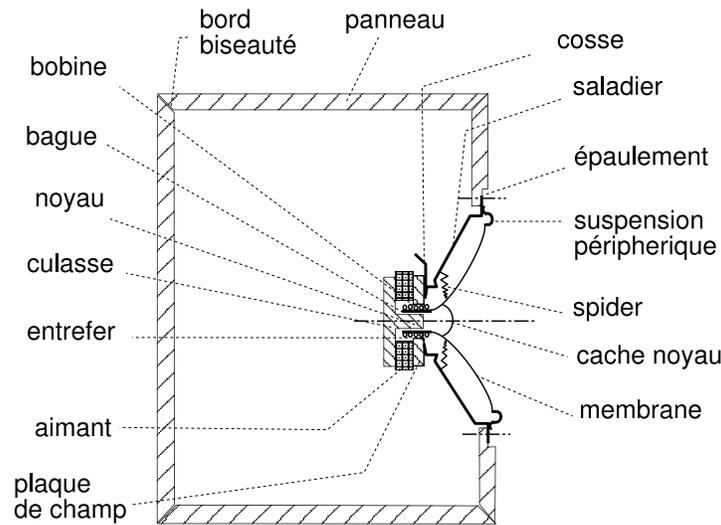


FIG. 3.1 – Enceinte acoustique - Coupe longitudinale axiale

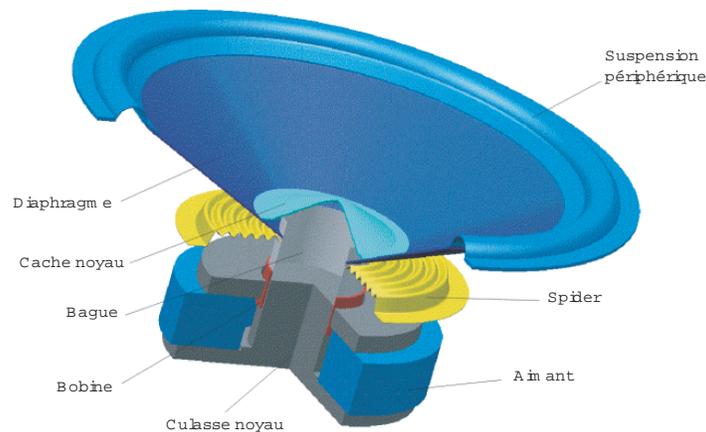


FIG. 3.2 – Haut-parleur électrodynamique classique (sans saladier)

Le HP électrodynamique classique présenté en figure 3.2 est composé d'un ensemble mobile (bobine électromagnétique, bague, diaphragme et cache noyau) plongé dans un champ élec-

tromagnétique constant (créé par l'aimant, la culasse, le noyau et la plaque de champ au niveau de l'entrefer) ; le tout est fixé au coffret par l'intermédiaire d'un saladier et centré par des suspensions (spider et suspension périphérique). Le saladier est vissé sur l'épaulement réalisé autour de l'alésage en général décentré d'un des panneaux verticaux du coffret. De forme conique, il dispose d'importantes ouvertures afin de permettre le couplage acoustique entre le diaphragme et le volume arrière. Le diaphragme encore appelé membrane a une structure pseudo-conique (la génératrice n'est pas nécessairement une droite) ; par couplage avec l'air environnant, le déplacement vibratoire du diaphragme permet de transformer l'énergie électrique en énergie acoustique dans la gamme des fréquences audibles.

Les six panneaux sont assemblés par collage de leurs bords biseautés pour former le coffret. L'enceinte close est idéalement hermétique et l'air ainsi emprisonné crée une raideur de suspension pour le diaphragme, encore appelée charge acoustique dont le rôle sera mis en évidence en section 3.4.2.1. Le volume du coffret est ajusté pour s'accorder avec les dimensions du HP (accord de charge) [47].

Le moteur magnétique du HP électrodynamique classique se compose d'un aimant en ferrite et de trois éléments en alliage ferro-magnétique : la culasse, la plaque de champ et le noyau solidaire de la culasse. La bobine est un enroulement de fils de cuivre ou d'aluminium ; la bobine est enroulée autour d'une bague, généralement réalisée dans le même matériau que le diaphragme.

Le diaphragme est constitué de papier, de fibre de carbone, de kevlar ou de polypropylène. Des modèles existent également en titane et aluminium. La suspension périphérique à bord roulé est réalisée en mousse, tissu ou caoutchouc tandis que la suspension inférieure (*spider*) est en tissu traité à plis concentriques. Le saladier est en acier embouti pour les bas de gamme, et moulé pour les autres.

### 3.2.2 Rôle du coffret

Dans le cas d'un HP seul suspendu dans l'air, l'onde arrière est en opposition de phase avec l'onde avant quelle que soit la fréquence (lorsque le diaphragme pousse l'air en avant, il aspire l'air à l'arrière). Après réflexion sur un mur, l'onde arrière peut être en retard d'une fraction de longueur d'onde avec l'onde avant, ce qui entraîne un déphasage (figure 3.3). Dans les basses fréquences (les BF sont définies là où la longueur d'onde est beaucoup plus grande que le diamètre du haut-parleur), on appelle ce phénomène *court-circuit acoustique* puisqu'il produit une chute de niveau sonore très importante : la différence de phase est proche de  $180^\circ$  (figure 3.4). À plus hautes fréquences (HF), la situation est plus complexe. Les ondes sonores peuvent s'additionner, s'annuler ou conduire à une situation entre les deux.

Une méthode pour supprimer l'onde arrière est de monter le HP dans un mur, ainsi l'onde arrière et l'onde avant peuvent rayonner librement dans des directions opposées dans deux espaces ouverts distincts, ou au moins de larges espaces, et ne jamais se rencontrer. Ceci est

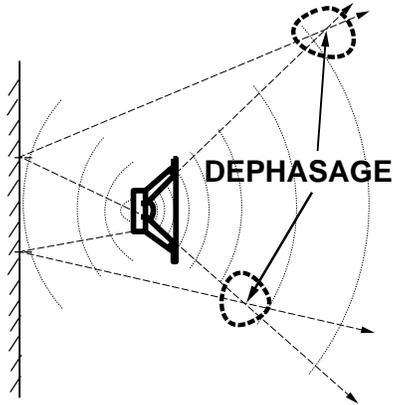


FIG. 3.3 – Réflexions parasites autour du HP seul

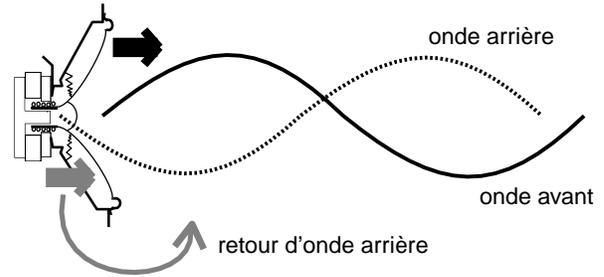


FIG. 3.4 – Court-circuit acoustique à BF

désigné sous le nom de *baffle infini* (voir figure 3.5).

Un coffret fermé qui essaie d'approcher cette situation est appelé un *coffret baffle infini*. Ce coffret, qui présente généralement un grand volume interne, tente d'approcher la configuration donnée par le cahier des charges suivant :

- le coffret doit être hermétique ;
- l'amplitude de vibration de ses panneaux doit être la plus petite possible ;
- il ne doit pas présenter de fortes résonances internes ni entretenir d'ondes stationnaires ;
- les HP doivent être isolés les uns des autres.

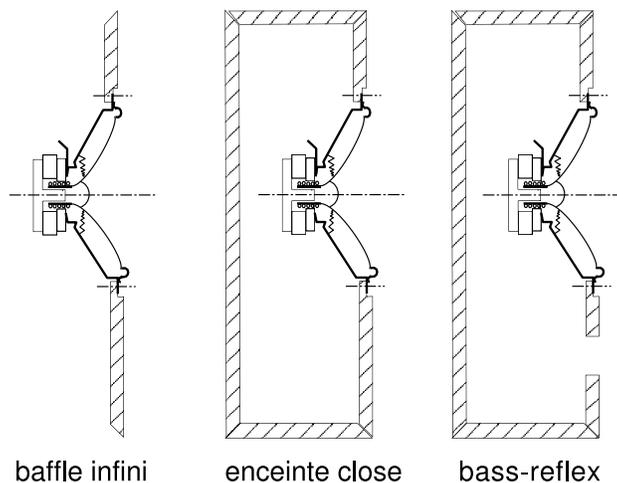


FIG. 3.5 – Différents modèles de coffret

Nous avons choisi d'utiliser une *enceinte close*, encore appelée suspension acoustique (figure 3.5). Elle est le système le moins efficace d'un point de vue énergétique puisque la

moitié du rayonnement du HP est perdue. Elle reste néanmoins très populaire parce qu'elle est plus simple à réaliser que les autres types d'enceintes. L'autre type d'enceinte usuellement rencontré est l'*enceinte bass-reflex*; la charge acoustique est modifiée par ajout d'un évent qui permet le rayonnement de l'onde arrière après traitement de sa phase : elle s'additionne ainsi avec l'onde avant dans les BF [70].

### 3.2.3 Traitement de l'enceinte

Deux phénomènes parasites créent de l'énergie mécano-acoustique à l'intérieur de l'enceinte : le transfert aérien dû au couplage onde arrière/coffret et le transfert solidien. Ils sont à la source d'ondes sonores qui risquent de rayonner hors de l'enceinte et de perturber l'onde avant.

Un certain nombre de publications [13] [25] concernent la forme et le traitement du coffret et du diaphragme : rajout de raidisseurs pour modifier l'allure des déformées modales du coffret, collage des panneaux (méthode et type de colle), absorption acoustique de l'onde arrière par remplissage du coffret de matériau acoustique, modification du matériau du diaphragme et/ou du coffret. L'ensemble de ces traitements visent à corriger voire supprimer soit le transfert aérien, soit le transfert solidien.

- Transfert aérien

Le transfert aérien se traduit en général par la réflexion de l'onde arrière sur le coffret à l'intérieur de l'enceinte, puis sa transmission directe à travers le diaphragme vers l'extérieur. Les constructeurs, pour absorber l'onde acoustique interne, adoptent un certain nombre de techniques relativement faciles à mettre en œuvre qui ne modifient en rien l'ébénisterie de l'enceinte. Les parois sont tapissées de feutre, le volume de charge est rempli de laine naturelle brute, dont la quantité et la densité sont contrôlées. Du feutre tendu sur l'ouverture permet également d'optimiser l'absorption de l'onde arrière. Ces traitements sont rarement suffisants pour supprimer toute l'onde arrière et des modifications plus importantes sont alors effectuées pour isoler davantage l'onde arrière de l'onde avant.

PRAME [60] développe des coquilles d'escargots absorbantes (remplies de laine de roche) couplées aux HP pour traiter directement l'onde arrière (voir figure 3.6). Une grande partie de l'onde arrière est ainsi absorbée dans la coquille, sans pour autant que le volume d'air arrière, important pour la respiration du diaphragme due au couplage avec l'air arrière, ne soit supprimé.

L'ajout d'un évent (cf. ouverture basse du panneau avant de l'enceinte bass-reflex de la figure 3.5) permet de modifier la charge acoustique (volume d'air emprisonné dans l'enceinte) et de traiter avantageusement le transfert aérien [71] [73] [74]. Dans le cas de l'enceinte close où le volume d'air déplacé par le diaphragme lors du mode de piston n'est pas négligeable par rapport au volume du coffret, le phénomène de transfert aérien est accentué, d'autant plus

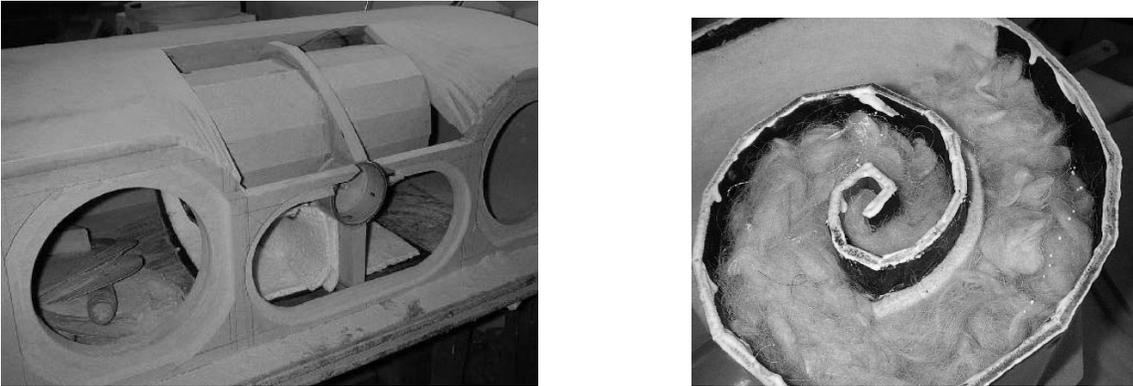


FIG. 3.6 – Coquilles d'escargots absorbantes couplées aux HP pour le traitement de l'onde arrière - Réalisation PRAME [60]

que les mouvements du diaphragme sont importants à B. La figure 3.7 présente la réponse fréquentielle (niveau de pression acoustique SPL) dans l'axe de l'enceinte pour les trois types d'enceinte de la figure 3.5. L'enceinte close permet d'éliminer le court-circuit acoustique mais décale la courbe de sortie vers les HF comparé au baffle infini. Une enceinte bass-reflex peut étendre la réponse dans les BF de façon significative en dessous de la résonance du HP.

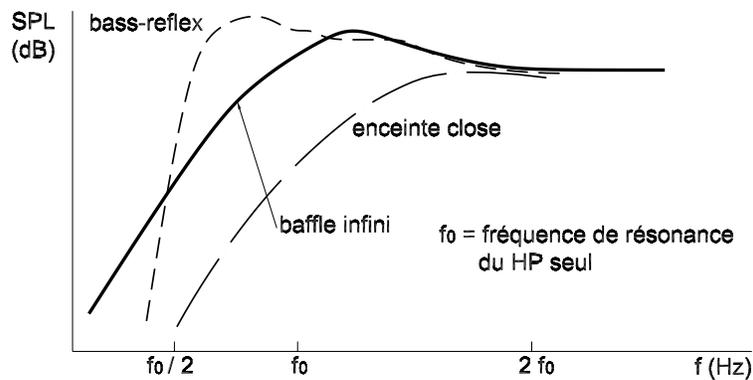


FIG. 3.7 – Comparaison bass-reflex, baffle infini, enceinte close sur la réponse fréquentielle acoustique du même haut-parleur [66] [24]

Le *contrôle actif* considère le traitement des ondes sonores par addition ou soustraction active des pressions acoustiques. Les enceintes actives possèdent un amplificateur intégré et parfois aussi un capteur d'accélération permettant de corriger toute distorsion éventuelle par rétroaction. Un module de traitement du signal (DSP) et un filtre électronique sont intégrés à l'amplificateur pour rendre le système plus efficace et opérationnel [61].

- Transfert solidien

Le transfert solidien correspond au transfert des vibrations du moteur magnétique via les bras de saladier jusqu'aux panneaux. Le coffret n'étant jamais infiniment rigide, les panneaux vibrent et viennent perturber l'onde avant par rayonnement dans l'air extérieur. Pour éviter la perturbation de l'onde avant dans la gamme de fréquence qui nous intéresse, c'est-à-dire pour les BF, on peut chercher à rejeter les vibrations parasites à plus hautes fréquences. Une autre idée est de guider le transfert solidien vers des zones où le couplage avec l'air extérieur est faible. L'énergie vibratoire parasite peut encore être dissipée sous forme de chaleur en utilisant des traitements absorbants ou amortissants.

Lors du déplacement du diaphragme dans l'air, le couplage avec l'air doit être réalisé bien en dessous des fréquences de résonance du diaphragme, pour éviter que ses propres modes de vibration entraînent une distorsion du signal. Pour cela, les constructeurs essaient de rejeter les fréquences de résonance le plus haut possible. Jouhaneau [38] et Barlow [13] préconisent l'utilisation de matériaux dont le rapport  $\sqrt{E/\rho^3}$  est élevé où  $E$  est le module d'Young et  $\rho$  la masse volumique. La figure 3.8 présente une réalisation efficace de ce point de vue.

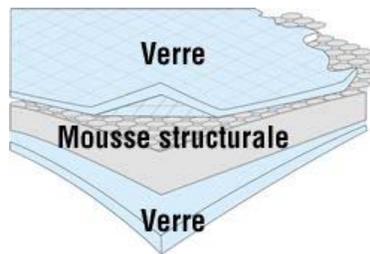


FIG. 3.8 – La structure "W" du diaphragme : le corps central en mousse structurale est recouvert sur ses deux faces par une feuille de verre - Réalisation JMLab [37]

Le collage des panneaux influe beaucoup sur le comportement global de l'enceinte acoustique et varie beaucoup d'un constructeur à l'autre. Dans [50], Nakamura décrit le comportement du piano et l'étude du collage des tasseaux qui accueillent la table d'harmonie. Il étudie le comportement des colles en adoptant un modèle d'appui simple (plan contre plan) à BF et d'encastrement pour les HF. Dans notre cas, l'enceinte étant montée sous forte pression, on considère que les six panneaux font corps. D'un point de vue vibratoire le type d'assemblage des panneaux (sur bords biseautés ou non) a donc peu d'importance. Le montage est en effet généralement guidé par la facilité et l'assurance que toutes les surfaces de collage sont effectivement utilisées.

Des raidisseurs (encore appelés renforts internes ou tasseaux) sur l'intérieur des panneaux sont rajoutés pour modifier l'allure des déformées modales du coffret [72] [36] et rendre ainsi l'enceinte la plus raide possible dans sa gamme de fréquence d'utilisation (figure 3.9).

Le transfert aérien est de loin le phénomène parasite le plus perturbant mais c'est le

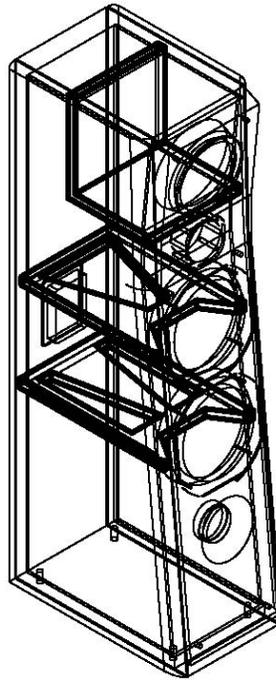


FIG. 3.9 – Renforts internes renforçant la rigidité du coffret - Réalisation JMLab [37]

transfert solide qui nous a le plus intéressé dans cette étude. La plupart du temps, une fois l'enceinte acoustique réalisée à l'aide des précautions citées précédemment, les constructeurs d'enceinte s'attachent à améliorer le rendu sonore de l'enceinte en optimisant encore davantage le transfert aérien. Le traitement du transfert solide est alors laissé de côté. Les solutions à apporter à ce dernier traitement ne sont en effet pas triviales et ont motivé une étude plus poussée, que nous présentons dans le cadre de ce chapitre.

### 3.3 Modèle éléments finis d'une enceinte PRAME

On présente en section 3.3.1 les propriétés de l'enceinte et les objectifs du modèle éléments finis. Le modèle éléments finis de l'enceinte est précisé en section 3.3.2. La méconnaissance d'un certain nombre de matériaux et de la géométrie précise de certaines parties de l'enceinte a nécessité une validation des propriétés matériaux. On procède à l'analyse modale expérimentale d'un échantillon de matériau du coffret et de l'enceinte complète et une première corrélation calcul-essai est effectuée (section 3.3.3).

#### 3.3.1 Propriétés de l'enceinte et objectifs du modèle

La figure 3.10 présente l'enceinte PRAME [60] de référence utilisée dans le cadre de cette étude. Il s'agit d'une enceinte close avec un seul HP mid-woofer. Le HP est un Samy Speaker de diamètre 17 cm, importé d'Asie par DAVIS acoustics (Troyes, France) [2]. Le diamètre

est donné par celui du châssis même si fonctionnellement, c'est le diamètre du diaphragme qui se mesure au milieu de la suspension périphérique qui importe.

Le coffret est en MDF (Medium Density Fiberboard), commercialisé sous les appellations MDF MEDITE ou MDF MEDILAND par le fabricant Willamette Europe [29]. Il s'agit d'un matériau lourd non poreux à base de poudre de bois que l'on suppose isotrope. Les panneaux du coffret sont collés à l'aide d'une colle vinylique à prise rapide. La quantité de colle une fois "tirée" est infime puisque l'enceinte est montée sous forte pression et on peut considérer que les six panneaux sont fixés entre eux par des liaisons parfaites.

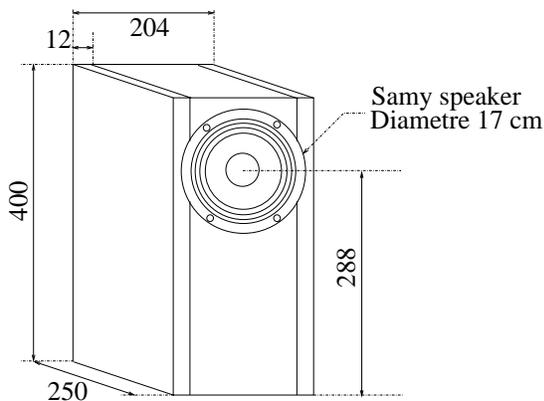


FIG. 3.10 – Modèle d'enceinte PRAME 400×250×204 (épaisseur des panneaux 12mm)



FIG. 3.11 – Enceinte PRAME

Compte tenu de la difficulté d'estimer précisément la nature et les propriétés des matériaux utilisés, l'objectif principal est de corréliser au mieux le comportement dynamique calculé (modèle éléments finis) et mesuré (analyse modale expérimentale) de l'enceinte sur la bande fréquentielle 0 – 2000 Hz. Ceci va guider la construction du modèle éléments finis (raffinement, choix des éléments finis) et l'affinage des propriétés matériaux.

On cherche à étudier le comportement vibratoire sur la gamme 0 – 2000 Hz pour plusieurs raisons :

- La limite BF/HF est donnée par le diamètre utile du haut-parleur, là où les longueurs d'onde acoustique deviennent plus petites que le diamètre du HP. Pour un HP de diamètre  $\phi = 17$  cm, la limite est

$$f_m = \frac{c_f}{\lambda_m} = \frac{c_f}{\phi} = \frac{340 \text{ (m/s)}}{17 \cdot 10^{-2} \text{ (m)}} = 2000 \text{ Hz} \quad (3.1)$$

- Le phénomène de couplage panneaux/air est plus important à BF. Les modes HF divisent en effet les panneaux en de plus petites surfaces d'amplitudes moins importantes, ce qui entraîne un couplage avec l'air moins important. D'autre part, ces parties ne

vibrent pas en phase, d'où une auto-annulation de la pression en certains points. De plus, les modes d'ordre élevé sont plus facilement amortis.

### 3.3.2 Modèle éléments finis

La figure 3.12 présente le modèle éléments finis de l'enceinte acoustique. Il possède 26760 degrés de liberté, 8432 éléments volumiques (coffret, aimant, entrefer, plaque de champ) et 2464 éléments surfaciques (suspension périphérique, diaphragme, cache-noyau, spider, saladier).

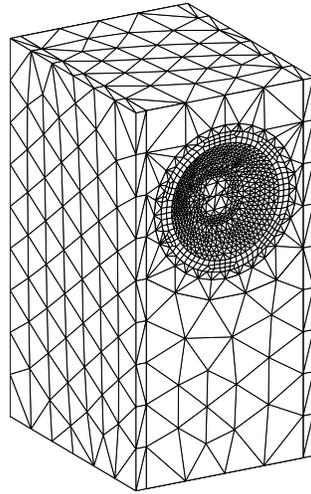


FIG. 3.12 – *Modèle éléments finis complet*

La fréquence maximale d'étude souhaitée a déterminé la taille des éléments finis ; en effet, la précision de calcul des modes d'enceinte, des impédances fluide et des pressions sonores générées dépend du raffinement de maillage. Si on s'intéresse au coffret, étant donné la vitesse des ondes de compression du matériau MDF  $c_s = 3000$  m/s et celle du son dans l'air  $c_f = 340$  m/s et la fréquence maximale d'étude  $f_m = 2000$  Hz donnée par la relation (3.2), la taille maximale des éléments (si on veut quatre éléments par demi-période de la plus petite onde) est donnée par

$$\lambda = \frac{1}{4} \frac{\min(c_s, c_f)}{f_m} = \frac{1}{4} \frac{340 \text{ m/s}}{2000 \text{ Hz}} = 42,5 \text{ mm} \quad (3.2)$$

La figure 3.13 présente le modèle éléments finis du haut-parleur. Étant donné la complexité des courbures et des détails géométriques, le pas de maillage automatiquement ajusté par le mailleur est plus fin que la limite donnée par (3.2). Les éléments sont principalement surfaciques (quad4) ; seule la partie aimant-entrefer-plaque de champ est en éléments volumiques

(tetra4). La géométrie des suspensions a en particulier été simplifiée puisqu'elles ont été modélisées par des anneaux plats.

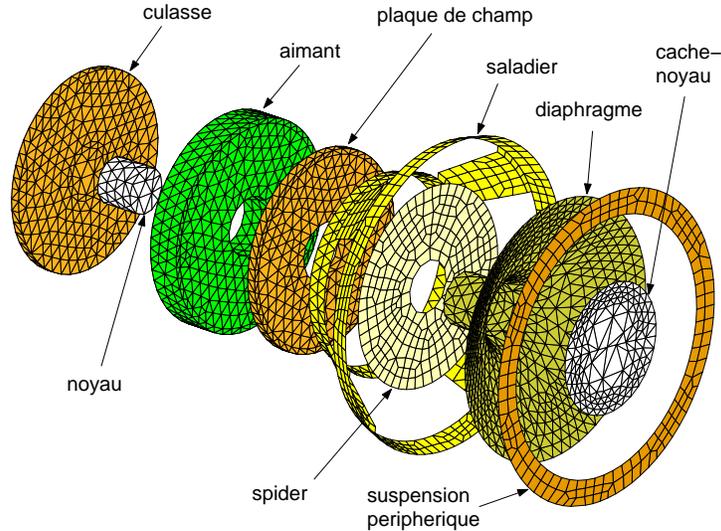


FIG. 3.13 – Modèle éléments finis éclaté du haut-parleur

La figure 3.14 montre les plis concentriques du spider et la forme torique de la suspension périphérique qui n'ont pas été pris en compte dans le modèle éléments finis.



FIG. 3.14 – Diaphragme + suspension périphérique + spider + bobine électromagnétique - Modèle Samy Speaker

La figure 3.15 détaille le maillage des panneaux constituant le coffret. On retrouve quatre panneaux à bords biseautés centraux dont le panneau avant présente un alésage pour le montage du HP et deux panneaux latéraux identiques non biseautés. La taille des éléments volumiques est en accord avec (3.2) et on gagne encore en précision en utilisant des éléments quadratiques (tetra10 et penta15). L'épaisseur du coffret étant de 12 mm, une couche d'éléments est suffisante pour représenter l'épaisseur. Les éléments penta15 décrivent l'épaulement

du coffret sur lequel est fixé le HP au niveau de son saladier et correspond donc physiquement à la superposition du matériau MDF et d'un anneau d'acier appartenant au saladier (matériau correspondant : MDF modifié). Son maillage, de plus en plus raffiné lorsqu'on se rapproche du centre, permet d'assurer la continuité des maillages du coffret et du HP et de définir un maillage de frontière fermé et continu.

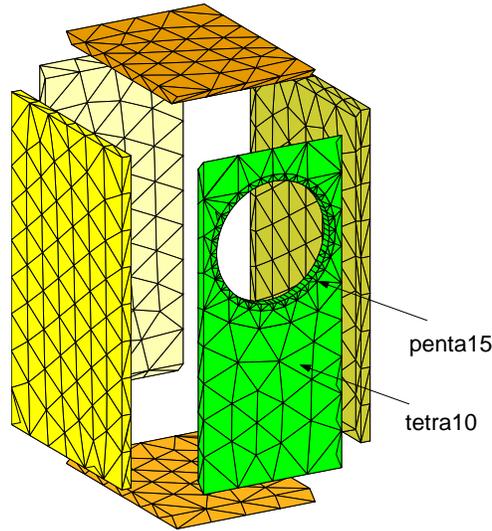


FIG. 3.15 – *Détail des panneaux*

Le tableau suivant présente les propriétés matériau finales utilisées dans le modèle éléments finis de l'enceinte. Dans un premier temps, les valeurs du module d'Young ( $E$ ), du module de Poisson ( $\nu$ ) et de la masse volumique ( $\rho$ ) ont été choisies d'après les données précisées par la littérature pour des matériaux proches [4]. Des pesées nous ont permis d'ajuster les masses volumiques des matériaux. Dans un deuxième temps, les propriétés des matériaux du modèle éléments finis ont été recalées (voir section 3.3.3.2 pour le recalage du MDF, section 3.3.3.3 pour le recalage des suspensions et section 3.4.2.1 pour la prise en compte de la raideur acoustique de l'air interne).

	$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$e$ (mm)
MDF (coffret) :	8.8	0.29	732	
Acier (saladier) :	210	0.29	7800	0.9
Composite (diaphragme) :	60	0.34	750	0.6
Polymère (suspension) :	0.022	0.34	10 <sup>-2</sup>	0.5
Tissu Gaufré (spider) :	0.5	0.34	10 <sup>-2</sup>	0.16
MDF modifiée (épaulement) :	14.4	0.34	930	
Acier modifié (aimant) :	210	0.29	6000	

Les figures 3.16 et 3.17 représentent une partie des modes propres de l'enceinte acoustique, encastrée en sa base. Pour davantage de clarté, on ne visualise pas le côté latéral gauche et le haut du coffret.

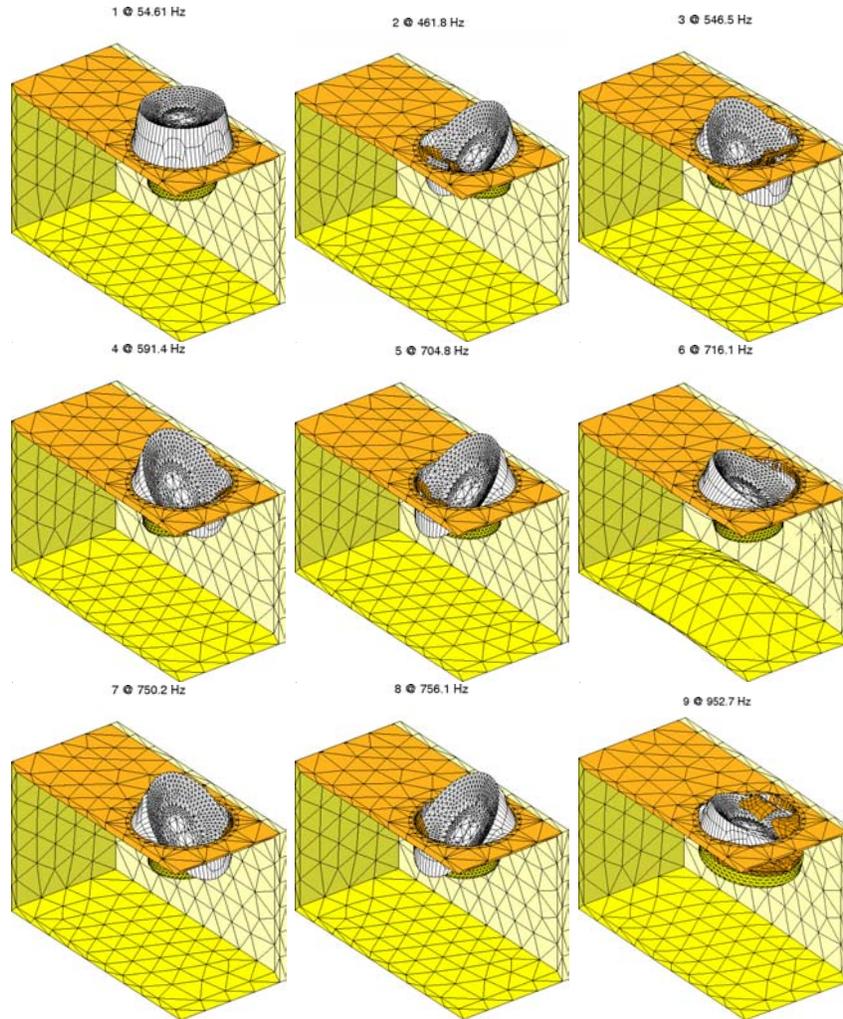


FIG. 3.16 – Modes propres 1 à 9

Le mode 1 correspond au mode de piston de la masse diaphragme autour de ses suspensions (évalué en absence d'air interne, d'où une fréquence propre de 54.61 Hz), les modes 2 et 3 sont les modes de flexion de l'ensemble du coffret par rapport à sa base (basculement gauche-droite pour le mode 2 et d'avant en arrière pour le mode 3). Le comportement de l'enceinte acoustique pour les modes 2 et 3 peut se ramener à celui d'une poutre encastrée en sa base et une masse fixée en son haut pour représenter la masse du HP. On observe qu'il y a un couplage avec des modes de basculement de la masse du HP sur le saladier accompagnés d'un basculement du diaphragme.

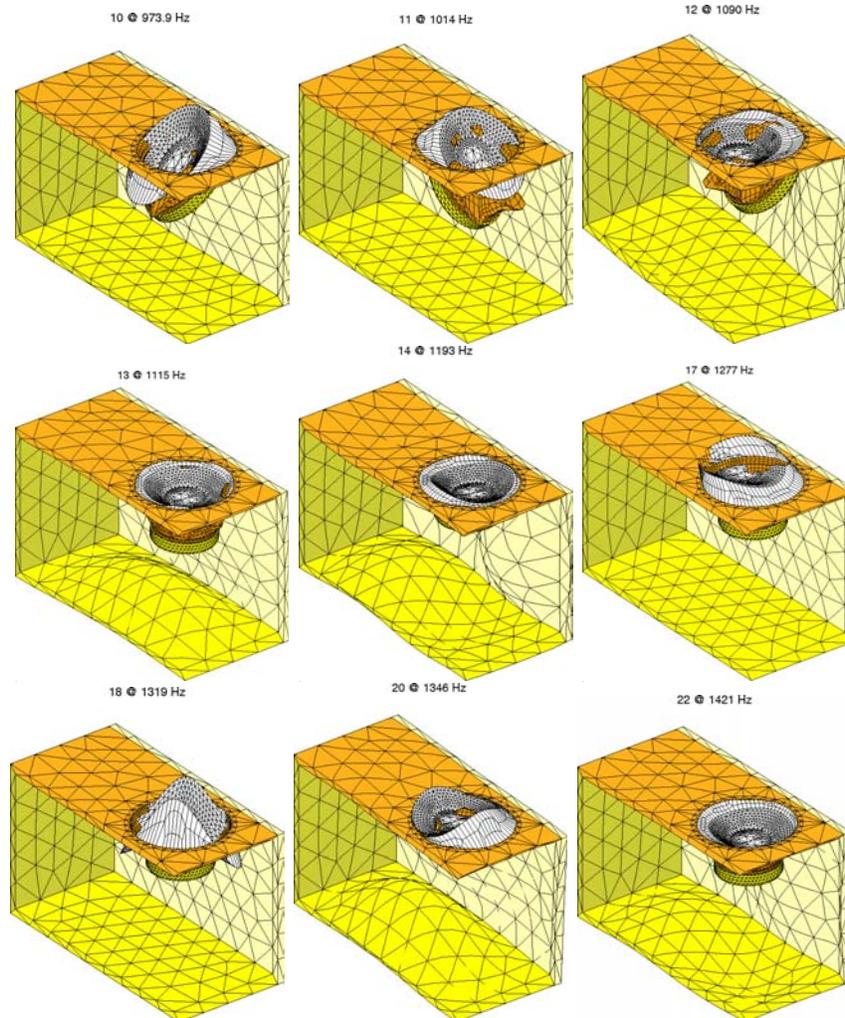


FIG. 3.17 – Modes propres 10 à 14, 17, 18, 20 et 22

À plus haute fréquence, les panneaux commencent à travailler. Les modes 6, 9, 10 et 11 sont des modes de flexion d'ordre un des panneaux latéral et facial, toujours couplés à des modes de basculement de la masse du HP sur le saladier. Les modes 12, 14 et 22 sont des modes de flexion d'ordre deux des panneaux. Le mode 22 est couplé à un mouvement de translation de haut en bas de la masse du HP. On observe à partir du mode 14 (1193 Hz) des déformations du diaphragme, couplées aux flexions du coffret ; le mode 18 ne fait en particulier travailler que le diaphragme.

L'ensemble de ces modes met en avant le rôle important joué par la masse du HP constitué de l'aimant, la culasse, le noyau et la plaque de champ. Après avoir fait fléchir l'ensemble du coffret (modes 2 et 3), la masse du HP fait travailler les panneaux du fait de sa position de masse déportée par rapport au panneau avant.

### 3.3.3 Validation expérimentale du modèle

Le but de cette section est d'effectuer une étude expérimentale du modèle d'enceinte PRAME, afin d'améliorer le modèle éléments finis. Une analyse modale expérimentale permet ainsi de connaître le comportement dynamique réel de l'enceinte et de corriger le modèle éléments finis pour s'en approcher.

On présente les moyens expérimentaux et les critères de corrélation calcul-essai utilisés en section 3.3.3.1. Une corrélation calcul-essai effectuée sur un échantillon de plaque MDF a rendu possible le recalage de son module d'Young (section 3.3.3.2). L'analyse modale de l'enceinte acoustique PRAME nous permet d'approcher les modules d'Young des suspensions (suspension périphérique et spider, section 3.3.3.3). On présente en section 3.3.3.4 une première corrélation calcul-essai de l'enceinte rendue possible par l'ensemble de cette étude.

#### 3.3.3.1 Moyens expérimentaux

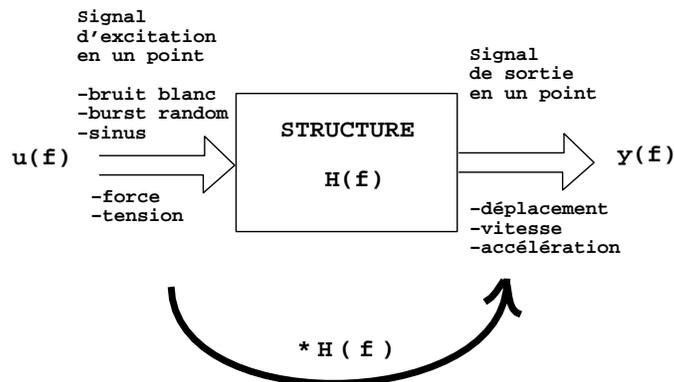


FIG. 3.18 – Fonction de transfert  $y(\omega) = H(\omega)u(\omega)$

Comme le montre la figure 3.18, on approche le comportement vibratoire d'une structure par un système dynamique linéaire. Ce dernier peut être caractérisé par la donnée d'un jeu de fonctions de transfert donnant le rapport déplacement/effort dans une certaine gamme de fréquence et de conditions aux limites particulières.

La figure 3.19 présente le dispositif de mesure complet utilisé pour effectuer des analyses modales expérimentales. On évalue le transfert entre deux points, rapport des signaux d'entrée et de sortie au cours de la phase d'acquisition. Le signal d'entrée est donné par une mesure de force en Newton (on place une cellule de force au point d'excitation) ou sa tension en Volt et le signal de sortie par une mesure de déplacement ( $m$ ), vitesse ( $m.s^{-1}$ ) ou d'accélération ( $m.s^{-2}$ ) obtenue à l'aide de capteurs placés aux points de mesure. Dans le cas de nos mesures, on utilise un capteur de déplacement à effet Hall dans le cadre de pièces magnétiquement conductrices (cf. les mesures effectuées sur le banc viscoélastique au chapitre 2), un vibromètre laser pour balayer plusieurs points et un accéléromètre pour avoir la mesure d'un point de référence.

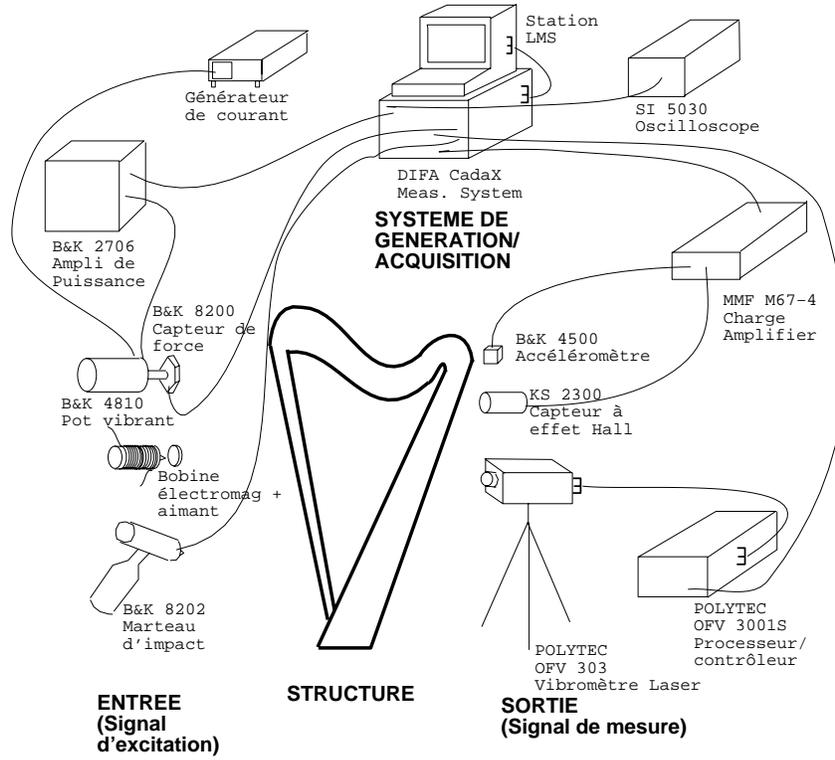


FIG. 3.19 – Dispositif de mesure de vibrations - Laboratoire MSSMat

Une phase d'identification des fonctions de transfert expérimentales permet alors de construire les déformées modales aux nœuds mesurés. Pour comparer modes expérimentaux  $\{y_{Test,j}\}$  et modes éléments finis  $\{\phi_{EF,i}\}$  sur les capteurs, on utilise le critère *MAC* (*Modal Assurance Criterion*) [30] défini par

$$MAC_{Q'_j,i,j} = \frac{(\{y_{Test,j}\}^T [Q'_j] \{c\phi_{EF,i}\})^2}{(\{y_{Test,j}\}^T [Q'_j] \{y_{Test,j}\})(\{c\phi_{EF,i}\}^T [Q'_j] \{c\phi_{EF,i}\})}, \quad (3.3)$$

où  $c$  est la matrice d'observation ou de projection et  $Q'_j$  est une matrice de pondération des corrélations sur les différents capteurs. Le terme  $Q'_j = T^T M T$  correspond à un calcul de masse réduite sur les capteurs et le critère correspond alors à l'orthogonalité en masse sur les capteurs (*MAC* pondéré en masse). Le critère *MAC* vaut 1 (ou 100 selon la convention utilisée) pour une corrélation parfaite et 0 pour des modes totalement décorrélés.

L'erreur relative en fréquence entre la fréquence propre éléments finis  $f_{EF,i}$  et la fréquence de résonance identifiée  $f_{Test,j}$  est définie de la façon suivante

$$\Delta f_{i,j} = \frac{f_{EF,i} - f_{Test,j}}{f_{Test,j}} \quad (3.4)$$

L'ensemble de ces moyens expérimentaux et critères de corrélation peuvent maintenant être mis en œuvre et appliqués au cas de l'enceinte acoustique étudiée. Dans un premier temps, on détermine expérimentalement les propriétés mécaniques du matériau constituant les panneaux de l'enceinte. Dans un second temps, on effectue une analyse modale de l'enceinte acoustique. On verra que la présence du moteur électromagnétique au sein de la structure soulève des difficultés expérimentales.

### 3.3.3.2 Détermination des propriétés élastiques des panneaux

On cherche à recalculer les propriétés mécaniques du matériau constituant le coffret de l'enceinte PRAME. Nous disposons d'une plaque de matériau MDF identique à celui du coffret. La pesée de la plaque nous donne la masse volumique du matériau  $\rho = 732 \text{ kg/m}^3$ .

Un essai de traction classique peut nous renseigner sur le module d'Young d'un tel matériau, mais il faut pour cela préparer une éprouvette à partir de l'échantillon de plaque. Pour des raisons de commodité, nous avons préféré un essai dynamique pour identifier les premiers modes de flexion de la plaque et les comparer avec ceux délivrés par un calcul éléments finis.

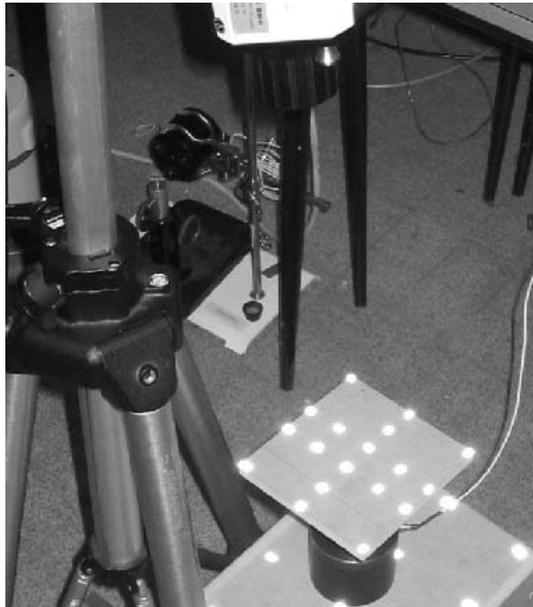


FIG. 3.20 – Montage expérimental

Un pot vibrant LDS V101 excite par l'intermédiaire d'une tige d'excitation le centre de la plaque avec un bruit blanc aléatoire généré sur la bande 2-4098 Hz. La force injectée est mesurée par une cellule de force BK 8200 placée après la tige et vissée sur la plaque. En sortie, on mesure la vitesse de vibration en 18 points normalement à la plaque à l'aide du vibromètre laser Polytech OFV 3001 (figure 3.20).

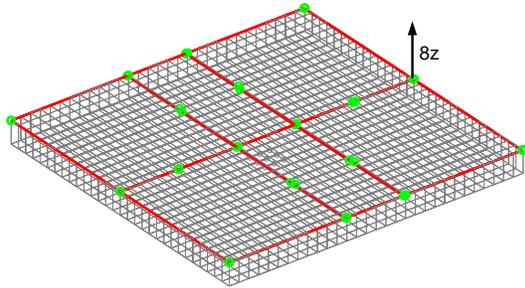


FIG. 3.21 – Projection du maillage expérimental sur le maillage éléments finis

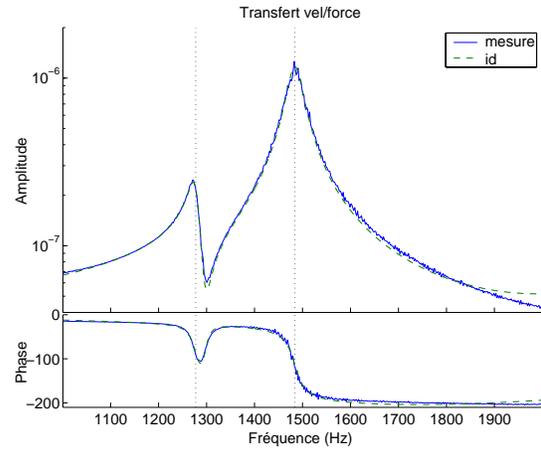


FIG. 3.22 – Transferts mesuré et identifié 1000-2000 Hz - Point 8z

On obtient un ensemble de fonctions de transfert exploitables pour les 18 points (leur position est précisée par la figure 3.21). La figure 3.22 donne la fonction de transfert du point mesuré 8z (nœud 8 dans la direction  $z$ ), ainsi que la courbe paramétrique obtenue par identification des deux premiers modes sur 1000-2000 Hz (tableau 3.1). Les mesures sont réalisées avec un système LMS et exploitées avec le logiciel Matlab/SDT [11].

Mode (No)	Fréquence EF (Hz)	Fréquence Id. (Hz)	$\zeta$ (%)	MAC (%)	$\Delta f$ (%)
1	1271	1277	0.92	98	-2
2	1486	1484	1.10	97.5	-0.5

TAB. 3.1 – Fréquence éléments finis (EF). Paramètres modaux estimés (Fréquences et amortissements identifiés). Critères de corrélation (MAC et erreur relative en fréquence)

Parallèlement, on développe un modèle éléments finis de la plaque. Les masse et raideur additionnelles créées par la présence de l'excitateur sont prises en compte par rajout au centre de la surface inférieure de la plaque de masses ponctuelles et modification de la matrice de raideur aux degrés de liberté concernés. Un calcul libre-libre est effectué.

On ajuste le module d'Young du matériau MDF de manière à avoir coïncidence des valeurs des fréquences propres calculées avec celles mesurées. Le calcul du critère  $MAC$  (3.3) nous assure qu'on compare des déformées modales équivalentes. Les faibles valeurs d'erreur relative en fréquence (3.4) nous garantissent qu'on a bien recalé le module d'Young du matériau, pour les deux premiers modes (modes de flexion). Les propriétés mécaniques qui assurent une bonne corrélation sont  $E=8.8$  GPa,  $\nu=.29$ ,  $\rho=732$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta=2\%$ .

La figure 3.23 présente la superposition des déformées modales calculées projetées sur le maillage expérimental avec les déformées modales identifiées des mesures expérimentales des deux premiers modes.

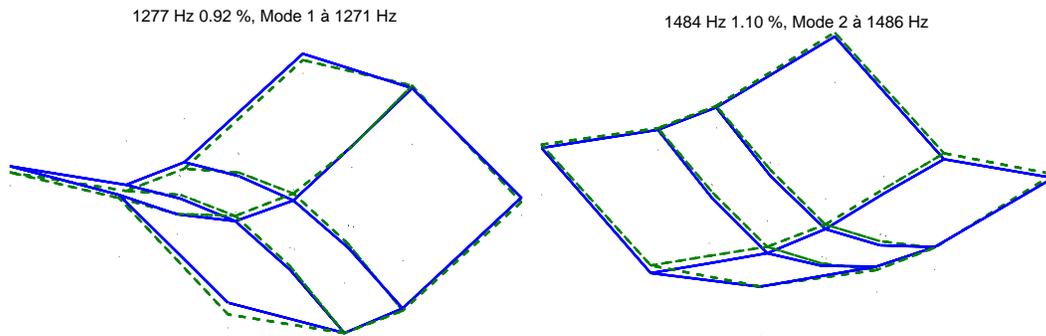


FIG. 3.23 – Modes 1 et 2

### 3.3.3.3 Analyse modale de l'enceinte

Le premier mode attendu pour l'enceinte acoustique est le mode de piston du diaphragme, qui correspond à l'accélération de la masse du diaphragme autour de ses suspensions ; la suspension périphérique en polymère et le spider en tissu gaufré ont été représentés sur la figure 3.14. Un travail de recalage effectué sur ce mode peut donc permettre d'ajuster les valeurs des raideurs des suspensions du haut-parleur, connaissant la masse du diaphragme. Les propriétés mécaniques de tels matériaux (polymère et tissus gaufrés) varient énormément en fonction de leur forme et de leur environnement et un essai dynamique effectué sur l'enceinte complète est la méthode la plus simple pour les estimer.

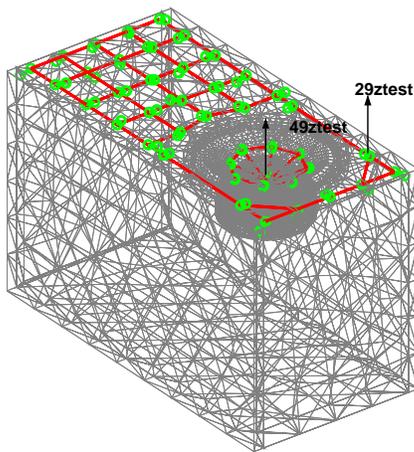


FIG. 3.24 – Projection du maillage expérimental sur le maillage éléments finis

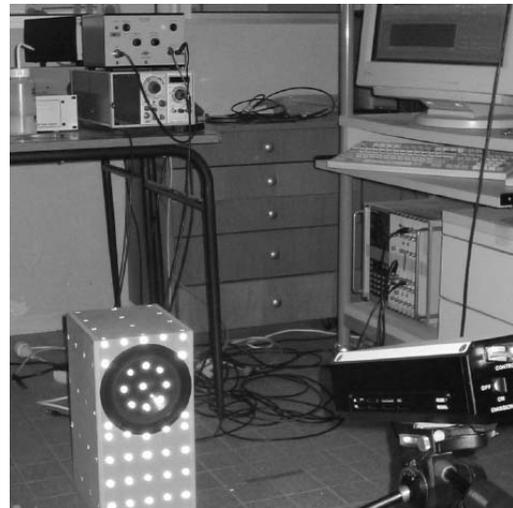


FIG. 3.25 – Montage expérimental

Trois excitations différentes sont considérées : on excite le haut-parleur de l'enceinte en tension puis courant (puissance électrique injectée dans la bobine du moteur électromagnétique du haut-parleur, cf. section 3.2.1) puis le coffret à l'aide d'un pot vibrant dont on contrôle la force injectée. Le signal d'excitation est un bruit blanc aléatoire sur la bande 1-2048 Hz. En sortie, on mesure la vitesse de 43 points du panneau avant (le diaphragme y compris) à l'aide

du vibromètre laser Polytech OFV 3001 (voir la position des 43 points sur la figure 3.24). L'enceinte est posée à même le sol pour se rapprocher des conditions normales d'utilisation (modélisées par un encastrement de la base). On stocke le rapport vitesse point  $i$  / excitation. Le montage expérimental est précisé par la figure 3.25.

La figure 3.26 représente la fonction de transfert vitesse/courant mesurée au centre du diaphragme (point 49ztest). La figure 3.27 précise les déformées modales identifiées à partir des mesures de transfert effectuées sur le diaphragme. On reconnaît le mode de piston aux alentours de 73 Hz ; il correspond au premier pic qui précise l'allure générale de la fonction de transfert sur 1-2048 Hz. Les perturbations observées sur la descente du pic correspondent aux modes de basculement du diaphragme à 457 Hz, 885 Hz et 908 Hz. On observe d'autres modes de piston de plus faible amplitude à 764 Hz et 1254 Hz, ce dernier mode très amorti étant difficile à identifier et interpréter (voir section 3.3.3.4 pour une discussion sur ce dernier mode).

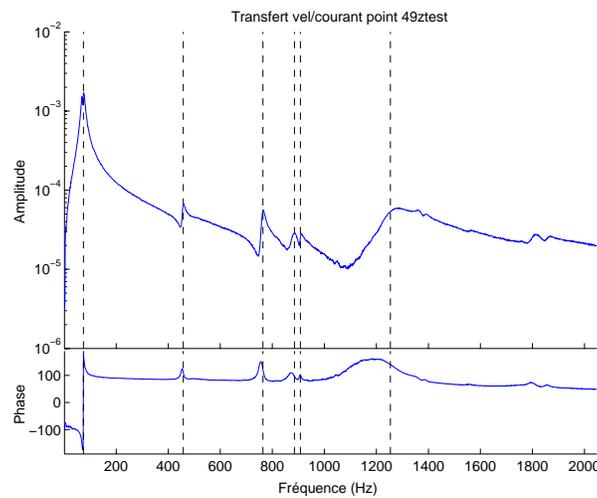


FIG. 3.26 – *Transfert mesuré 1-2048 Hz - Point 49ztest*

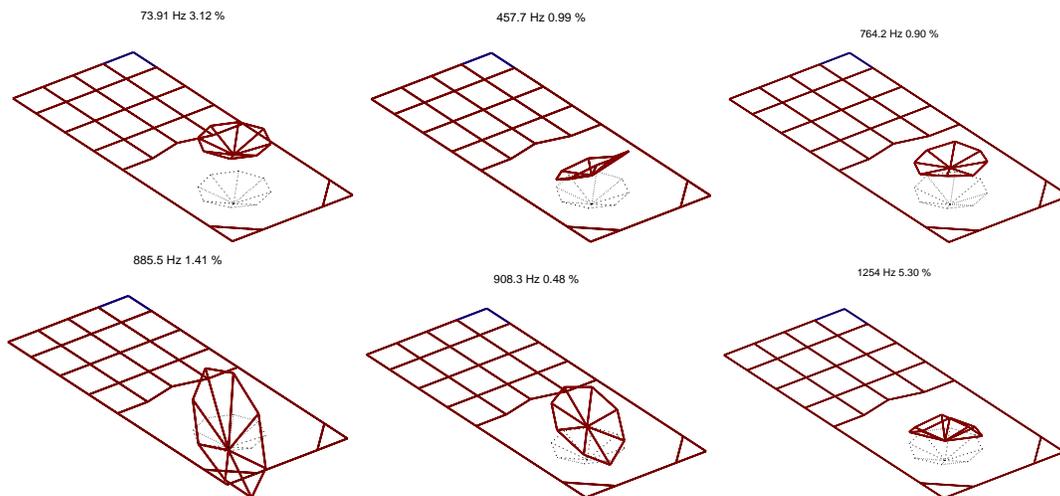


FIG. 3.27 – *Déformées modales identifiées du diaphragme*

La figure 3.28 montre deux fonctions de transfert, ramenées à un même niveau d'amplitude, mesurées au centre du diaphragme (point 49ztest) à l'aide de deux types d'excitation : en tension et en courant.

Hormis le premier mode (mode de piston), l'allure générale de la fonction de transfert est la même. L'erreur au voisinage du mode de piston avec une excitation en tension s'explique : à cette fréquence, l'impédance électromagnétique du haut-parleur, qui relie tension et courant, présente une antirésonance (il faut peu d'énergie électrique pour faire translater le diaphragme à la fréquence correspondante au mode de piston).

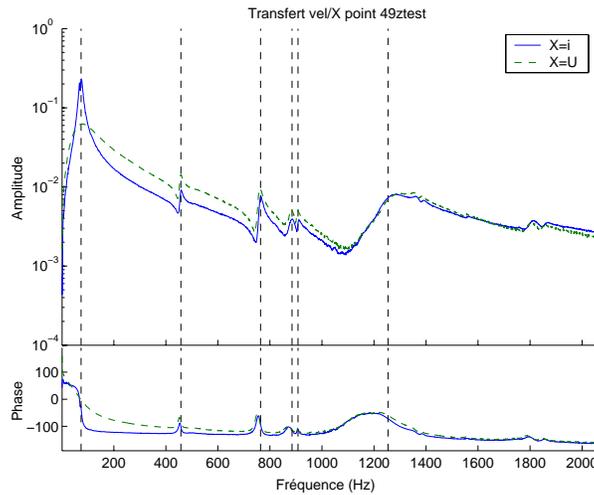


FIG. 3.28 – Transferts mesurés 1-2048 Hz à l'aide de deux excitations : courant ( $i$ ) et tension ( $U$ ) - Point 49ztest - Les courbes ont été ramenées au même niveau pour une meilleure visualisation

L'ensemble des mesures effectuées sur l'enceinte nous conduit à privilégier l'excitation en courant pour les points du diaphragme et l'excitation en tension pour les 43 points du coffret. Le courant délivré par le petit montage électronique réalisé pour l'expérience n'est en effet pas suffisamment puissant pour obtenir des transferts de bonne qualité pour les points du coffret.

Compte tenu du relatif découplage du mode de piston et des modes de saladier et de coffret qui interviennent à plus hautes fréquences (cf. les déformées modales de la section 3.3.2) et de la bonne superposition des deux types de transfert en dehors du mode de piston pour les points du diaphragme, on peut supposer que les deux types d'excitation sollicitent de la même façon les modes d'ordre plus élevés du coffret.

La figure 3.29 représente la fonction de transfert vitesse/tension mesurée en un point du panneau avant du coffret (point 29ztest, cf. figure 3.24). On présente en figure 3.30 les déformées modales identifiées à partir des mesures de transfert vitesse/tension effectuées sur le coffret. Les deux premiers modes identifiés sont des modes de basculement du coffret autour de sa base. Les modes suivants correspondent à des modes de flexion du panneau avant.

Les deux derniers modes peuvent en particulier être associés aux modes de basculement du diaphragme mesurés approximativement aux mêmes fréquences (450 Hz et 880 Hz).

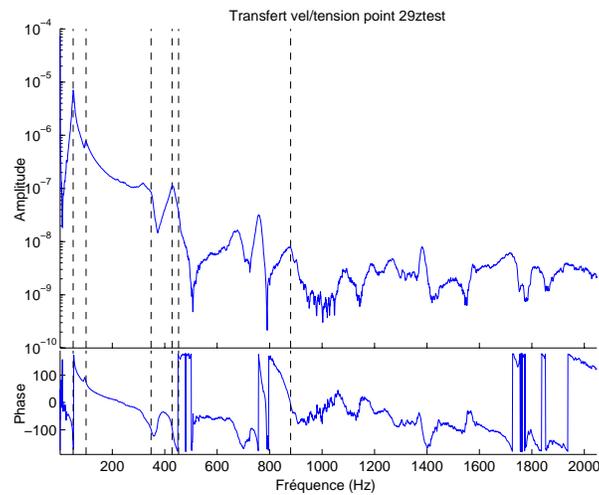


FIG. 3.29 – Transfert mesuré 1-2048 Hz - Point 29ztest

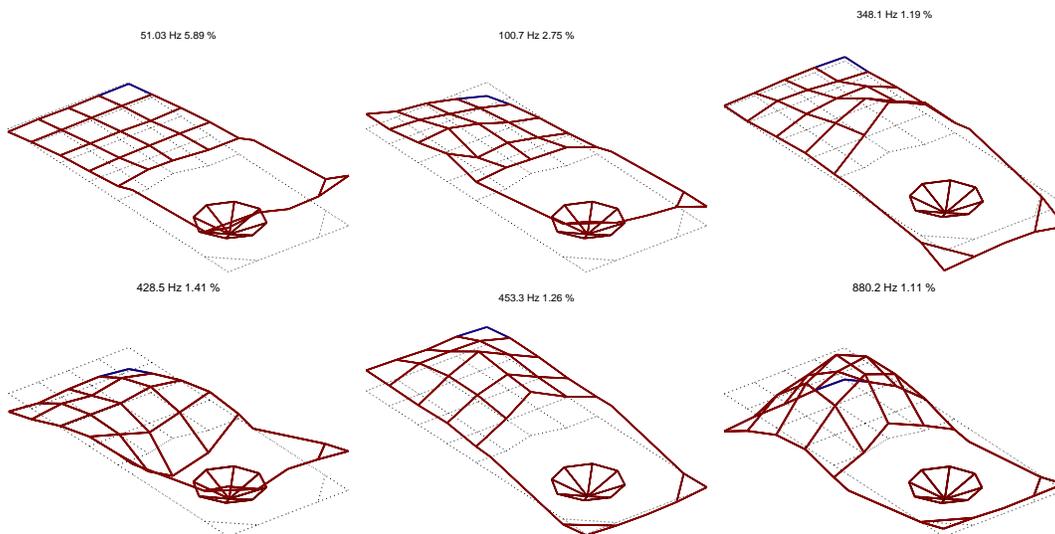


FIG. 3.30 – Déformées modales identifiées du coffret

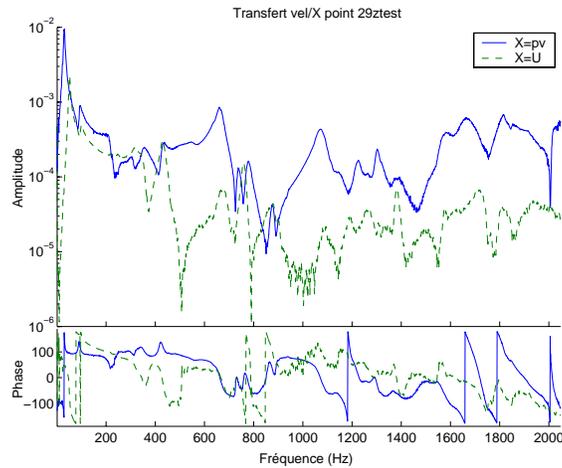


FIG. 3.31 – Transferts mesurés 1-2048 Hz - Excitations pot vibrant ( $pv$ ) et tension ( $U$ )- Point 29ztest - Les courbes ont été ramenées au même niveau pour une meilleure visualisation

On superpose en figure 3.31 deux fonctions de transfert mesurées au point 29ztest sur 1-2048 Hz à l'aide de deux excitations différentes : dans un premier temps, on excite le panneau arrière à l'aide d'un pot vibrant dans la direction de mesure, dans un deuxième temps, on excite le haut-parleur en tension. Les fonctions de transfert, qui ont été ramenées à un même niveau d'amplitude, ont néanmoins des allures très différentes et ne sont pas du tout comparables, ce qui montre l'importance du choix de l'excitation. On observe de plus un nombre important de modes sur cette bande de fréquence qui n'apparaissaient pas dans la fonction de transfert du diaphragme (cf. figure 3.26).

### 3.3.3.4 Première corrélation calcul-essai

Connaissant par la littérature les masses volumiques des principaux éléments du HP (aimant, culasse, plaque de champ et saladier), nous pouvons approximativement déduire celles des autres éléments (suspension périphérique, spider et diaphragme) après pesée du HP. De plus, la valeur de la fréquence propre associée au mode de piston du diaphragme nous renseigne sur les raideurs des suspensions puisque ce sont essentiellement elles qui travaillent.

Pour une très faible valeur des masses volumiques du polymère et du tissu gaufré ( $10^{-2}$  kg/m<sup>3</sup>), nous ajustons leurs modules d'Young pour prédire le mode de piston à la bonne fréquence (54 Hz, ce qui correspond à la fréquence de 73 Hz en présence d'air interne, voir section 3.4). Les propriétés mécaniques qui assurent une bonne corrélation sont

	$E$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$e$ (mm)
Polymère (suspension) :	0.022	0.34	$10^{-2}$	0.5
Tissu Gaufré (spider) :	0.5	0.34	$10^{-2}$	0.16

La figure 3.32 présente le transfert éléments finis vitesse/force calculé en absence d'air interne en trois nœuds du diaphragme donnés par la figure 3.34 : le point central 19z, un point légèrement désaxé 117z du cache-noyau et un point fortement désaxé 853z. Le tout est évalué pour l'excitation centrée (voir figure 3.35) : on pousse sur l'ensemble des nœuds de la base du diaphragme et une force de réaction est définie sur la surface supérieure du noyau. On observe le mode de piston principal aux alentours de 54 Hz puis quelques perturbations de faible amplitude au delà de 500 Hz.

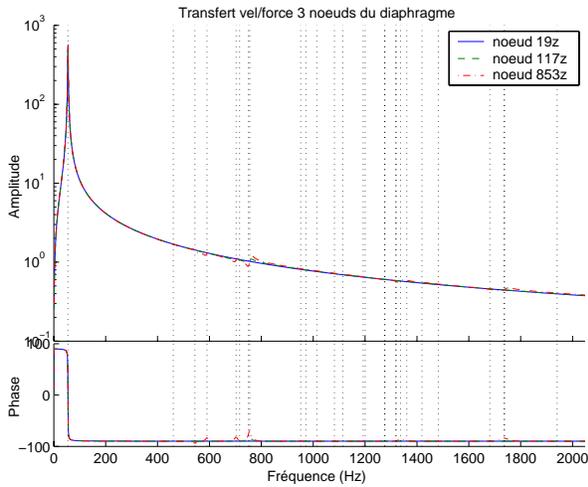


FIG. 3.32 – Transferts calculés 1-2048 Hz aux points 19z, 117z et 853z du diaphragme en absence d'air interne - Excitation centrée

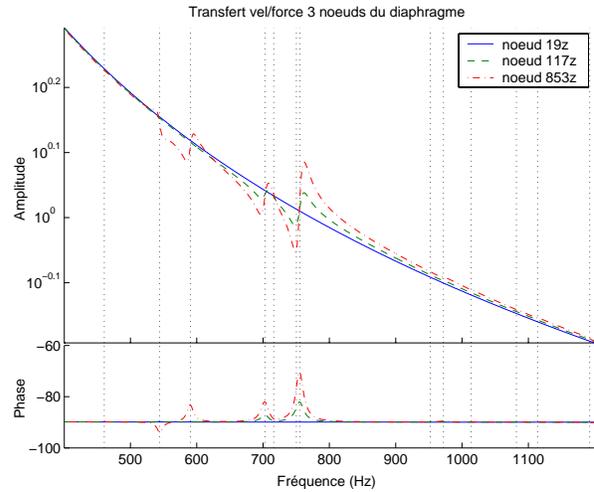


FIG. 3.33 – Transferts calculés 400-1200 Hz aux points 19z, 117z et 853z du diaphragme en absence d'air interne - Excitation centrée

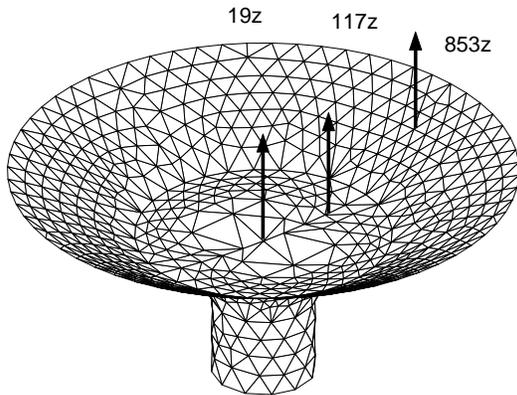


FIG. 3.34 – Position des points 19z, 117z et 853z du diaphragme

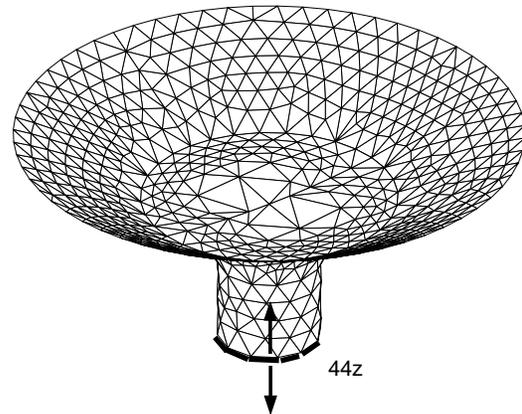


FIG. 3.35 – Excitation à la base du diaphragme

Un zoom dans la bande de fréquence 400-1200 Hz (figure 3.33) permet d'observer les mouvements de basculement du diaphragme autour de son centre (modes 6 à 716 Hz et 8 à 756 Hz du modèle éléments finis, voir figures 3.16 et 3.17). Ceci n'est observé que sur les

fonctions de transfert 117z et 853z, le transfert au nœud 19z n'exhibant que le mode de piston.

Le même calcul est effectué pour une force décentrée : on pousse en un seul nœud de la base du diaphragme et la force de réaction est définie en un nœud de la surface supérieure du noyau. La figure 3.36 montre qu'on obtient les mêmes perturbations mais à des niveaux plus élevés, le transfert calculé au centre du diaphragme (nœud 19z) ne permettant pas d'observer davantage les perturbations. La perturbation associée au mode de déformation du diaphragme (mode 18 à 1319 Hz) apparaît sur le transfert 853z/44z.

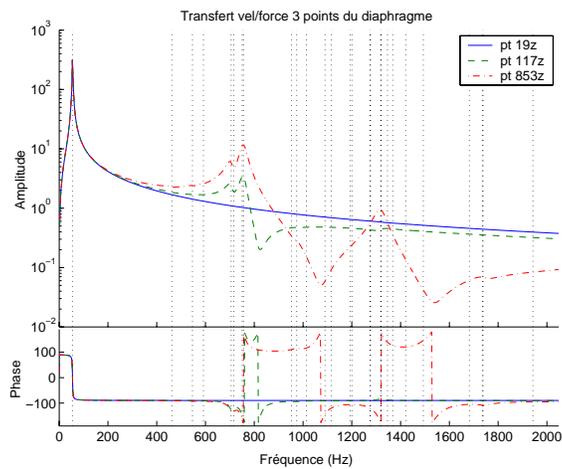


FIG. 3.36 – Transferts calculés 1-2048 Hz aux points 19z, 117z et 853z du diaphragme en absence d'air interne - Excitation décentrée

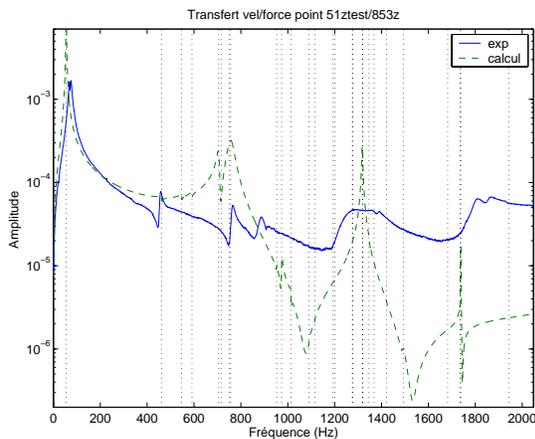


FIG. 3.37 – Transferts mesuré et calculé 1-2048 Hz au point 51ztest (nœud éléments finis 853z) en absence d'amortissement de la suspension périphérique

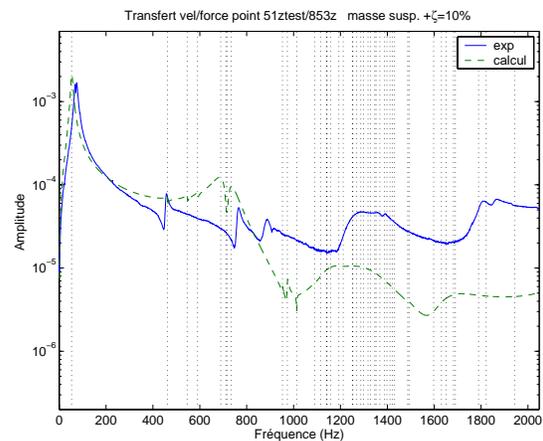


FIG. 3.38 – Transferts mesuré et calculé 1-2048 Hz au point 51ztest (nœud éléments finis 853z) en augmentant la masse de la suspension périphérique

Les figures 3.37 et 3.38 présentent la superposition des transferts vitesse/force mesuré et calculé en un point décentré du diaphragme (point expérimental 51ztest et nœud éléments

finis 853z) pour une excitation décentrée. Le calcul de la figure 3.38 a été effectué en augmentant la masse de la suspension périphérique (masse volumique  $\rho = 400 \text{ kg/m}^3$  soit un facteur  $4.10^4$  par rapport à la valeur initiale) et en lui affectant un taux d'amortissement de 10% (amortissement hystérétique correspondant au facteur de perte  $\eta = .2$ ). On retrouve ainsi une densité importante de modes locaux de la suspension autour de 1300 Hz ; leur présence, ainsi que leur fort amortissement, modifie l'allure du pic à 1319 Hz : on observe maintenant une résonance très amortie autour de 1300 Hz que l'on retrouve également dans la mesure. Cette résonance n'est pas retrouvée par le calcul au centre du diaphragme, alors que la mesure expérimentale fait apparaître un mode très amorti vers 1300 Hz (figure 3.26). Le phénomène physique produisant cette résonance n'a pu être expliqué. Des essais sur HP seul aideraient certainement à comprendre ce comportement. Le décalage observé sur le premier mode par rapport à l'expérience s'explique par la non prise en compte de la raideur additionnelle de l'air interne dans le calcul. La section suivante présente la modification réalisée sur le modèle éléments finis pour en tenir compte.

## 3.4 Analyse vibroacoustique

On analyse ici les effets de la présence de fluide interne avant d'aborder la résolution du problème extérieur. Un calcul d'interaction fluide-structure, basé sur une modélisation par éléments finis à la fois de la structure et du volume d'air interne, est effectué pour prendre en compte la masse et la raideur ajoutées par le fluide interne. Pour évaluer le champ de pression sonore entourant l'enceinte acoustique, un calcul d'interaction fluide-structure, basé sur une méthode intégrale - éléments de frontière, peut alors être effectué. L'ensemble des calculs d'impédances et de pressions fluide externe sont réalisés à l'aide du logiciel MISS3d [23].

La section 3.4.1 présente le modèle associé au problème d'interaction fluide-structure, ainsi que les méthodes de résolution pour prendre en compte le couplage avec le fluide interne (méthode éléments finis) et le fluide externe (équations intégrales). Les résultats de cette étude font l'objet de la section 3.4.2. La section 3.4.3 présente les prédictions acoustiques obtenues pour le modèle d'enceinte PRAME recalé avec un taux de perte par groupe de matériaux. On propose en section 3.4.4 un premier modèle d'enceinte modifié par un traitement amortissant, afin d'améliorer le rayonnement acoustique.

### 3.4.1 Modèle fluide-structure

On décompose le milieu d'étude en trois sous-domaines contenant chacun un milieu homogène et isotrope : un premier sous-domaine correspond à l'air interne, un deuxième à l'enceinte acoustique, tandis que le troisième s'identifie à l'air extérieur. Ces sous-domaines sont associés aux ouvertés bornés à la frontière suffisamment régulière  $\Omega_{fi}$  contenant le milieu fluide interne,  $\Omega_s$  contenant le milieu élastique et à l'ouvert non-borné  $\Omega_{fe}$  contenant le milieu fluide externe. L'air est supposé se comporter comme un fluide parfait, c'est-à-dire non visqueux.

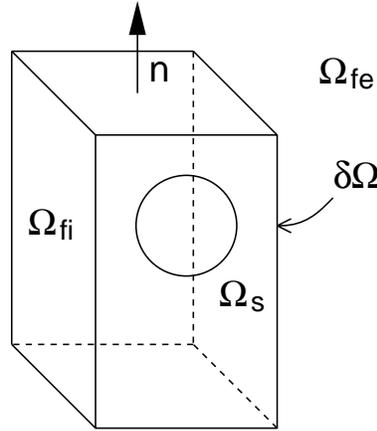


FIG. 3.39 – Définition des sous-domaines, interface et normale

La frontière du sous-domaine  $\Omega_s$  dénommée *interface* est notée  $\partial\Omega$  : cette surface est orientée selon une *normale* unitaire  $n$  extérieure à  $\Omega_s$ . On suppose que la pression dans le sous-domaine  $\Omega_{fe}$  constitué d'air est négligeable, la frontière  $\partial\Omega$  est dite libre.

- Fluide interne

On part des équations présentées dans l'annexe A. On considère la formulation variationnelle fluide (A.20). En tenant compte de la condition aux limites (A.16), la formulation se réécrit

$$-\int_{\Omega_{fi}} \text{grad } p \text{ grad } v d\Omega + \rho_f \omega^2 \int_{\partial\Omega} \phi \cdot n v dS + \frac{\omega^2}{c_f^2} \int_{\Omega_{fi}} p v d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

En combinant cette écriture variationnelle avec celle de la structure (A.37) et en les écrivant d'un point de vue matriciel, ce type de problème résulte, comme cela est détaillé en référence [49], au problème suivant

$$\left[ \begin{bmatrix} K & -C \\ 0 & F \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ C^T & K_p \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} = [Z_{str-fl}] \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

avec  $q$  les déplacements généralisés de la structure,  $p$  les variations de pression dans le fluide,  $b$  la force extérieure appliquée à la structure et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \sigma_{ij}(q) \epsilon_{ij}(\delta q) dx &\Rightarrow \delta q^T K q \\ \int_{\Omega_S} \rho_S q \cdot \delta q dx &\Rightarrow \delta q^T M q \\ \frac{1}{\rho_F} \int_{\Omega_F} \nabla p \nabla \delta p dx &\Rightarrow \delta p^T F p \\ \frac{1}{\rho_F c^2} \int_{\Omega_F} p \delta p dx &\Rightarrow \delta p^T K_p p \\ \int_{\Sigma} p \delta q \cdot n dx &\Rightarrow \delta q^T C p. \end{aligned}$$

Les termes propres au solide ( $K$  et  $M$ ) et au fluide ( $F$  et  $K_p$ ) sont calculés de manière classique sur les maillages respectifs. Le calcul du terme de couplage  $C$  a été réalisé dans la

SDT [11], sur des éléments de couplage à un point d'intégration situé au centre de gravité de l'élément. Lorsque les maillages de la structure et du fluide ne sont pas compatibles, il est nécessaire de procéder à un appariement. Pour chaque élément de fluide  $F_i$ , on cherche alors l'élément solide  $S_i$  qui fait face au centre de gravité  $G_{f,i}$ , dans la direction de la normale à  $F_i$ . La projection de  $G_{f,i}$  sur l'élément solide,  $P_i$ , appartient à  $S_i$ ; ce qui permet de calculer les coordonnées de référence  $r$  et  $s$  de  $P_i$  dans  $S_i$ . Ainsi on détermine les poids qui doivent être associés à chaque noeud de  $S_i$ . Le terme de couplage associe ainsi les DDLs de  $F_i$  aux DDLs de  $S_i$ , avec les poids correspondants.

- Fluide externe

Les équations qui régissent le problème physique de couplage fluide externe-structure appliqué au cas d'une structure élastique plongée dans un fluide acoustique sont précisées en annexe A. L'approche élastique proposée pour sa résolution est basée sur l'étude de la propagation des ondes dans le cadre linéaire et s'appuie sur le formalisme de [19]. Cette approche peut se décomposer en deux étapes principales. La méthode des éléments finis va permettre de résoudre le problème aux valeurs propres de la structure élastique encastrée en sa base. La méthode d'équations intégrales basée sur le relèvement dynamique à la frontière (modèle éléments de frontière) des champs de déplacements et de contraintes de la structure entourée d'air extérieur va délivrer l'impédance de l'air et le champ de pression.

On considère les déplacements unitaires  $q_i$  et  $q_j$  aux noeuds  $i$  et  $j$ . D'après l'annexe A, le terme  $[Z_f]_{ij}$  de l'impédance du milieu fluide, ramenée au niveau de l'interface fluide-structure, s'exprime à la fréquence  $\omega$  par

$$[Z_f]_{ij}(\omega) = q_i^T Z_f q_j = \int_{\partial\Omega} p(q_i) n \cdot q_j dS \quad (3.7)$$

ce qui permet d'exprimer la réponse  $q(\omega)$  à la force  $b$  du système couplé à l'interface de la façon suivante

$$\left[ \begin{bmatrix} Z_f + K_{II} & K_{IN} \\ K_{NI} & K_{NN} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{II} & M_{IN} \\ M_{NI} & M_{NN} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} q_I \\ q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b_N \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

avec  $q_I$  les déplacements de l'interface,  $q_N$  et  $b_N$  respectivement les déplacements et la force appliquée des degrés de liberté internes de la structure.

Une technique de réduction modale est appliquée pour diminuer la taille du problème en respectant la représentation dynamique de la structure. On calcule ainsi les  $N$  modes normaux  $\phi_j$  de l'enceinte qui définissent une base modale de projection  $T = [\phi_1 \dots \phi_N]$  à l'aide de l'équation (1.39).

L'impédance réduite  $Z_r$  de l'enceinte est ainsi définie à la fréquence  $\omega$  par

$$Z_r(\omega) = T^T Z(\omega) T = K_r^* - \omega^2 M_r = T^T K^* T - \omega^2 T^T M T \quad (3.9)$$

et l'impédance fluide réduite à la fréquence  $\omega$  par

$$[Z_{fr}]_{ij}(\omega) = \int_{\partial\Omega} p(\phi_i) n \cdot \phi_j dS \quad (3.10)$$

Ceci permet de définir la raideur dynamique réduite totale à la fréquence  $\omega$

$$Z_{tr}(\omega) = T^T Z_t(\omega) T = Z_r(\omega) + Z_{fr}(\omega) = K_r^* - \omega^2 M_r + Z_{fr}(\omega) \quad (3.11)$$

On précise la force réduite  $F_r = T^T F$  (ici force unitaire  $F$  imposée sur les nœuds de la bobine à la base du diaphragme et sa réaction sur le noyau de l'aimant, voir force centrée de la figure 3.35) et on en déduit la réponse réduite modale  $q_r$  (encore appelée facteurs de participation ou degrés de liberté généralisés) pour l'ensemble des fréquences  $\omega$

$$\{q_r(\omega)\} = [Z_{fr}(\omega) + Z_r(\omega)]^{-1} \{F_r\} \quad (3.12)$$

La réponse couplée de l'enceinte à la fréquence  $\omega$  est obtenue par restitution de  $q_r$

$$\{q(\omega)\} = [T] \{q_r(\omega)\} = \Sigma_j \phi_j q_r(\phi_j, \omega) \quad (3.13)$$

qui peut être également vue comme somme pondérée des modes  $\phi_j$  par les facteurs de participation  $q_r$ .

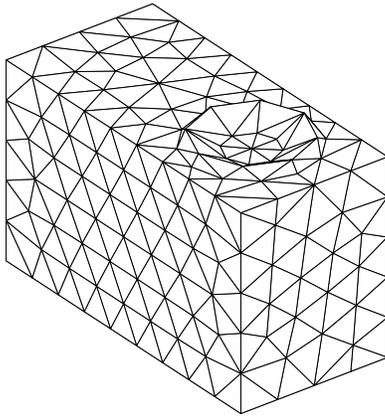


FIG. 3.40 – Maillage du volume d'air interne

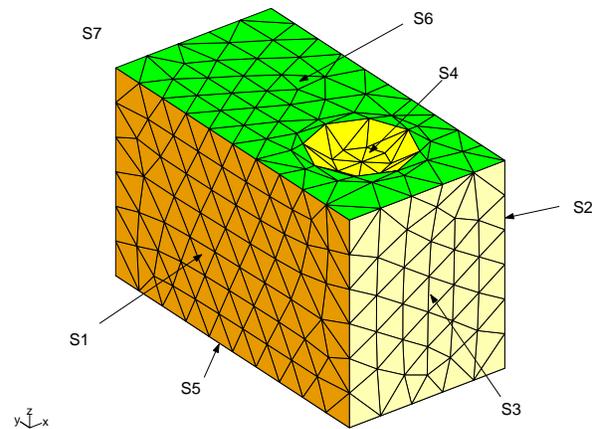


FIG. 3.41 – Modèle éléments de frontière de l'enceinte - Partition de l'interface en 7 surfaces vibrantes - S1 : surf. gauche, S2 : surf. droite, S3 : surf. haute, S4 : diaphragme, S5 : surf. arrière, S6 : surf. avant, S7 : reste

La figure 3.40 présente le modèle éléments finis de l'air interne à rajouter au modèle de l'enceinte pour tenir compte du couplage. Il possède 1260 degrés de liberté et contient 1647 éléments volumiques (tetra4). La figure 3.41 présente le modèle éléments de frontière de l'enceinte partitionné en sept surfaces vibrantes. Il possède 323 degrés de liberté et contient 642 éléments surfaciques (tria3).

### 3.4.2 Effet du fluide sur le comportement dynamique

On présente dans cette section les résultats du couplage de l'enceinte acoustique avec l'air. D'une part, on évalue le couplage avec le fluide interne en section 3.4.2.1 et d'autre part avec le fluide externe en section 3.4.2.2.

#### 3.4.2.1 Fluide interne

L'objectif de cette section est de montrer l'importance du fluide interne à basse fréquence et son influence sur la prédiction des modes de diaphragme. Le calcul en absence d'air interne ne présentant pas les couplages constatés expérimentalement (voir section 3.3.3.4), on cherche à évaluer l'importance de la charge acoustique sur le déplacement du diaphragme.

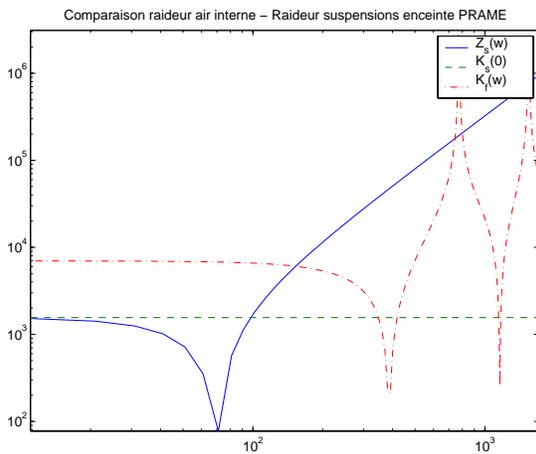


FIG. 3.42 – Comparaison impédance du haut-parleur  $Z_s$  avec la raideur de suspension statique  $K_s$  et la raideur d'une colonne d'air  $K_f$

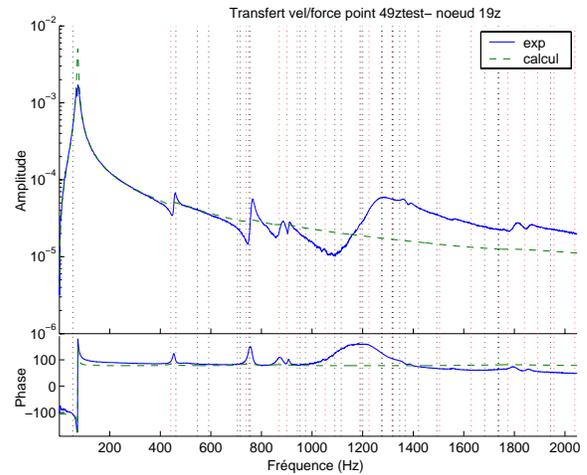


FIG. 3.43 – Transferts mesuré et calculé 1-2048 Hz au point 49ztest et nœud 19z en présence d'air interne - Excitation centrée

La figure 3.42 montre que la raideur de la colonne d'air enfermée dans l'enceinte derrière le diaphragme n'est pas du tout négligeable par rapport aux raideur et impédance du haut-parleur au niveau du diaphragme (il s'agit de la raideur des suspensions) : entre 0 et 100 Hz, la colonne d'air est plus de quatre fois plus raide que la raideur de suspension statique du haut-parleur, les anti-résonances ensuite observées correspondant aux modes acoustiques de la cavité. Cette observation incite à tenir compte de la présence d'air interne, en particulier à BF.

On superpose en figure 3.43 le transfert vitesse/intensité expérimental (point expérimental 49ztest qui correspond au nœud 19z du modèle éléments finis) avec le transfert éléments finis vitesse/force calculé au point central du diaphragme (nœud 19z) avec une excitation centrée en tenant compte de l'air interne. On observe une très bonne superposition des deux courbes à basse fréquence autour du mode de piston (remarquer le décalage en fréquence de 19 Hz dû à la raideur de l'air interne), mais les perturbations observées lorsqu'on monte en

fréquence sont beaucoup plus faibles et on manque complètement le(s) mode(s) très amorti(s) autour de 1300 Hz. Dans la section 3.3.3.4, l'explication de ce(s) mode(s) comme des modes locaux très amortis de la suspension périphérique n'est pas plus satisfaisante.

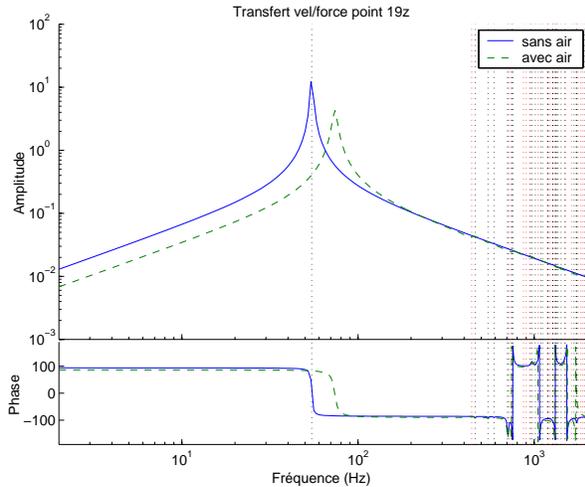


FIG. 3.44 – Transferts calculés 1-2048 Hz au point 19z en absence et présence d'air interne - Excitation décentrée

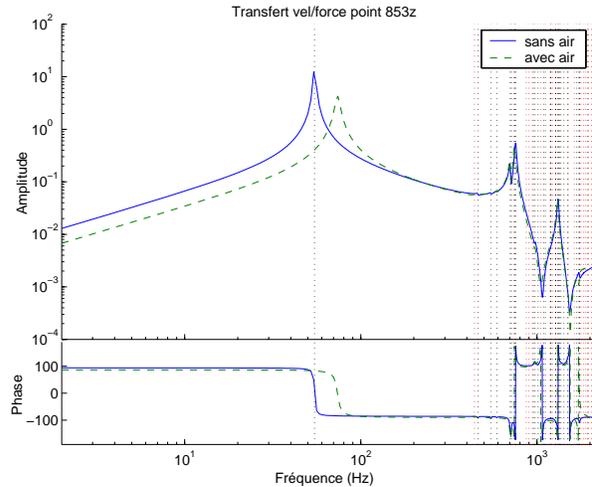


FIG. 3.45 – Transferts calculés 1-2048 Hz au point 853z en absence et présence d'air interne - Excitation décentrée

On superpose en figures 3.44 et 3.45 les transferts éléments finis vitesse/force calculés avec une excitation décentrée en absence et en présence d'air interne au centre (nœud 19z) et en un point décentré (nœud 853z) du diaphragme. On retrouve l'effet de raideur ajoutée sur le mode de piston (shift de 19 Hz en fréquence) et un léger effet sur l'amplitude des pics de perturbation suivants mais qui ne suffisent pas à expliquer les fortes perturbations observées sur le transfert expérimental mesuré au centre du diaphragme.

La présence de fluide interne joue un rôle non négligeable, principalement sur le mode de piston; il faut en tenir compte dans le modèle d'enceinte acoustique pour le calcul de pression aux points de contrôle dans le fluide externe. Son influence étant peu observable en dehors du premier mode, l'air interne peut être modélisé par une raideur additionnelle agissant uniquement sur le diaphragme dans sa direction normale pour retrouver le shift en fréquence de 19 Hz sur le mode de piston (charge acoustique).

### 3.4.2.2 Étude de l'influence de l'impédance fluide externe

La méthode éléments finis utilisée à la section précédente pour tenir compte de l'air interne est ici remplacée par un calcul éléments de frontière (où seule la frontière est à définir) pour évaluer l'impédance supplémentaire créée par l'air extérieur, ce dernier occupant en effet un milieu semi-infini. On verra en section 3.4.3 que la méthode des éléments de frontière permet également de calculer les pressions aux points de contrôle.

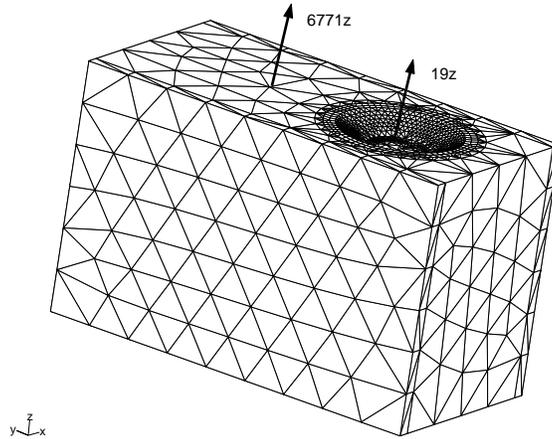


FIG. 3.46 – 19z : nœud milieu du diaphragme, 6771z : nœud milieu du panneau avant

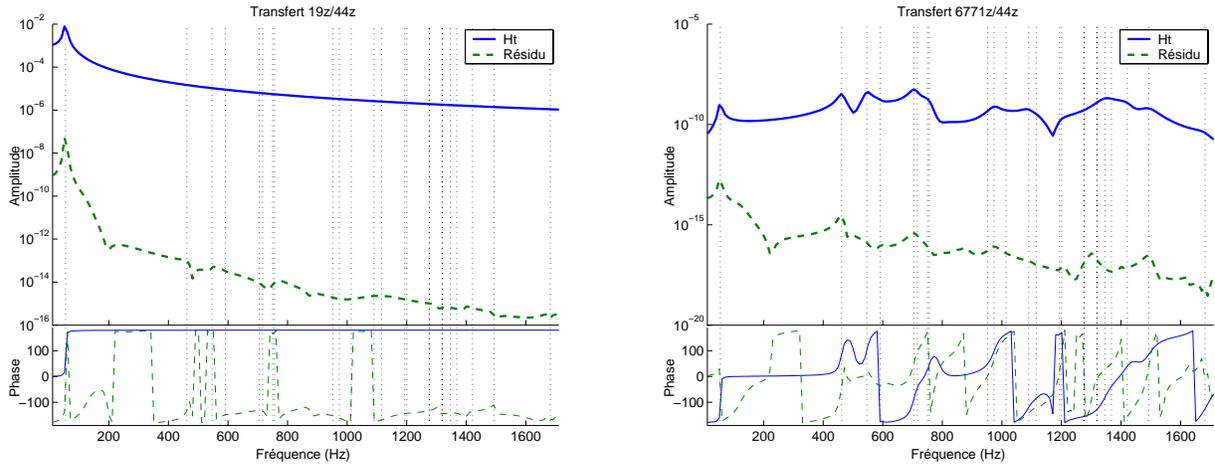


FIG. 3.47 – Fonctions de transfert - Gauche : point 19z, droite : point 6771z

On évalue la participation de l'impédance fluide externe dans la raideur dynamique totale aux nœuds de l'interface précisés par la figure 3.46. Pour cela, on évalue la flexibilité dynamique totale  $H_t = [c] [Z_t]^{-1} [b]$  et le résidu  $H_t - H = [c] [Z_t]^{-1} [b] - [c] [Z]^{-1} [b]$  où  $[c]$  et  $[b]$  sont respectivement les matrices d'observabilité et de commandabilité,  $[Z_t]$  et  $[Z]$  les matrices d'impédance totale et de la structure. Les fonctions de transfert aux nœuds 19z et 6771z calculées pour une force centrée 44z (voir figure 3.35) sont précisées par la figure 3.47. La faible valeur du résidu montre que l'air externe agit comme une masse ajoutée et/ou une raideur ajoutée très faibles, contrairement à l'air interne. En conclusion, on peut négliger le terme d'impédance fluide externe  $[Z_{fr}]$  pour évaluer les facteurs de participation  $q_r$  de l'équation (3.12).

### 3.4.3 Analyse de la performance acoustique

Les champs de pression sont évalués aux points de contrôle à partir des champs rayonnés sur la frontière (cf. annexe A). Pour un point  $\zeta$  appartenant au domaine fluide externe  $\Omega_{fe}$ , le théorème de représentation s'applique et le champ de pression  $p(\phi_i, \zeta, \omega)$  créé par le mode d'interface  $\phi_i$  s'écrit

$$[p(\phi_i, \zeta, \omega)] = \int_{\partial\Omega(x)} \partial_n p(\phi_i(x)) P_G^\zeta(x) dS(x) - \int_{\partial\Omega(x)} \partial_n P_G^\zeta(x) p(\phi_i(x)) dS(x) \quad (3.14)$$

où les grandeurs  $\partial_n p(\phi_i(x)) = \rho\omega^2 \phi_i(x) \cdot n$  et  $p(\phi_i(x)) = \rho\omega^2 [P_G] [\partial_n P_G]^{-1} \phi_i(x) \cdot n$  sont connues sur l'interface  $\partial\Omega$  (voir annexe A).

On peut décomposer l'équation (3.14) en une somme de contributions de surfaces vibrantes  $S_k$  données par la figure 3.41 :  $\int_{\partial\Omega} = \int_{S_1 \cup \dots \cup S_7} = \sum_{S_k} \int_{S_k}$ , d'où

$$\begin{aligned} [p(\phi_i, \zeta, \omega)] &= \sum_{S_k} \left\{ \int_{S_k(x)} \partial_n p(\phi_i(x)) P_G^\zeta(x) dS(x) - \int_{S_k(x)} \partial_n P_G^\zeta(x) p(\phi_i(x)) dS(x) \right\} \quad (3.15) \\ &= \sum_{S_k} [p(\phi_i|_{S_k}, \zeta, \omega)] \end{aligned}$$

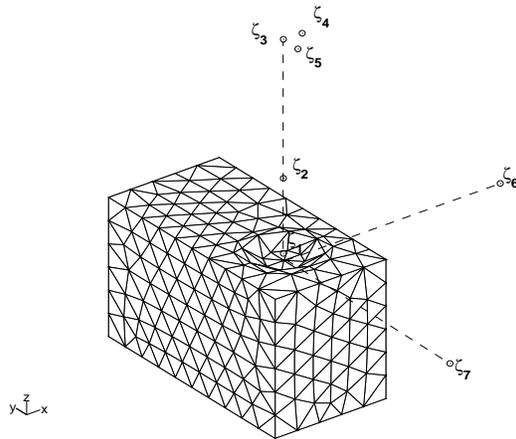
où le mode d'interface  $\phi_i|_{S_k}$  correspond à la trace du mode  $\phi_i$  sur la partition  $S_k$  de l'interface. C'est-à-dire qu'on impose le déplacement  $\phi_i$  sur cette surface tandis que les autres surfaces sont laissées libres.

Les pressions aux points de contrôle sont données pour chaque fréquence  $\omega$  comme somme des pressions modales  $[p(\phi_i, \zeta, \omega)]$  pondérées par les facteurs de participation  $\{q_r(\phi_i, \omega)\}$  soit

$$\begin{aligned} \{p(\zeta, \omega)\} &= \sum_i [p(\phi_i, \zeta, \omega)] \{q_r(\phi_i, \omega)\} \quad (3.16) \\ &= \sum_{S_k} \sum_i [p(\phi_i|_{S_k}, \zeta, \omega)] \{q_r(\phi_i, \omega)\} \\ &= \sum_{S_k} [p|_{S_k}(\zeta, \omega)] \end{aligned}$$

où les facteurs de participation  $q_r$  sont calculés pour l'ensemble des surfaces vibrantes de façon classique par l'équation (3.12).

La figure 3.48 précise la position des points de contrôle dans le fluide externe. Les points  $\zeta_1, \zeta_2$  et  $\zeta_3$  ont été choisis dans l'axe du HP à respectivement 15, 150 et 400 mm du centre du HP,  $\zeta_6$  et  $\zeta_7$  se trouvent à 400 mm du centre du HP dans le plan du panneau avant à  $90^\circ$  de l'axe du HP, les points  $\zeta_4$  et  $\zeta_5$  sont également à 400 mm du centre du HP légèrement désaxés ( $5^\circ$  de l'axe) et appartiennent respectivement aux plans (xOz) et (xOy). Leur position relative par rapport au centre du diaphragme sont précisées par le tableau 3.2.



	x	y	z
$\zeta_1$	0	0	15
$\zeta_2$	0	0	150
$\zeta_3$	0	0	400
$\zeta_4$	35	0	398.5
$\zeta_5$	0	-35	398.5
$\zeta_6$	400	0	0
$\zeta_7$	0	-400	0

FIG. 3.48 – Position des points de contrôle  $\zeta_i$  autour du modèle BEM de l'enceinte

TAB. 3.2 – Position relative par rapport au centre du diaphragme (mm)

On évalue le champ de pression externe  $p(\phi_i|_{S_k}, \zeta, \omega)$  créé par les modes 1 et 2 aux trois points de contrôle  $\zeta_1, \zeta_2$  et  $\zeta_3$ . La figure 3.49 présente une comparaison du champ de pression créé par le diaphragme uniquement (surface  $S_4$  de la figure 3.41), en comparaison avec la pression générée par le reste des surfaces vibrantes pour le mode 1 sur la bande de fréquence 11-1711 Hz. On observe une décroissance avec la distance et on retrouve l'allure croissante avec la fréquence habituellement observée pour un piston plan encastré dans un baffle infini en ce qui concerne le diaphragme, mais également les panneaux en mode de flexion d'ordre 1. L'essentiel de l'énergie acoustique provient du diaphragme. En ce qui concerne le mode 2, la figure 3.50 montre que l'énergie acoustique provient autant des autres surfaces vibrantes que du diaphragme.

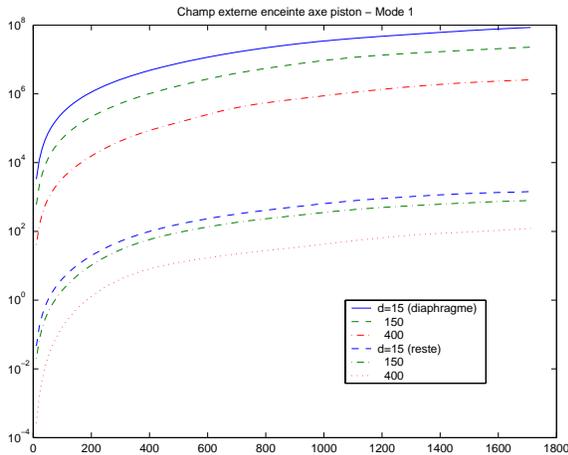


FIG. 3.49 – Champ de pression externe à trois distances rayonné par le diaphragme et le reste des surfaces vibrantes - Mode 1

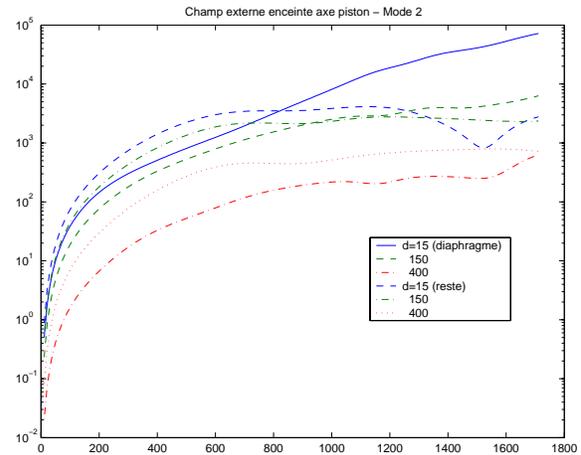


FIG. 3.50 – Champ de pression externe à trois distances rayonné par le diaphragme et le reste des surfaces vibrantes - Mode 2

Les figures 3.51 et 3.52 détaillent les analyses de contribution au point de contrôle  $\zeta_3$  des différentes surfaces vibrantes pour les modes 1, 2, 3 et 22.

La figure 3.51 montre que le champ acoustique rayonné (on affiche la grandeur  $p/\omega^2$ ) vient comme on l'a déjà vu essentiellement du diaphragme pour le mode 1, mais d'autres surfaces vibrantes pour les modes suivants : des panneaux gauche et droite pour le mode 2, du panneau avant pour le mode 3, des panneaux haut et avant pour le mode 22. Pour le mode 3, le diaphragme ne rayonne quasiment pas et on observe un creux dans sa réponse vers 320 Hz ; le diaphragme est animé d'un mouvement de basculement, ce qui entraîne des déphasages et une chute de pression à cette fréquence. Le mode 22 présente également un creux à 1050 Hz dans la réponse acoustique du diaphragme : le diaphragme se déforme pour ce mode (voir figure 3.17) et l'ensemble de sa surface ne se déplace plus en phase.

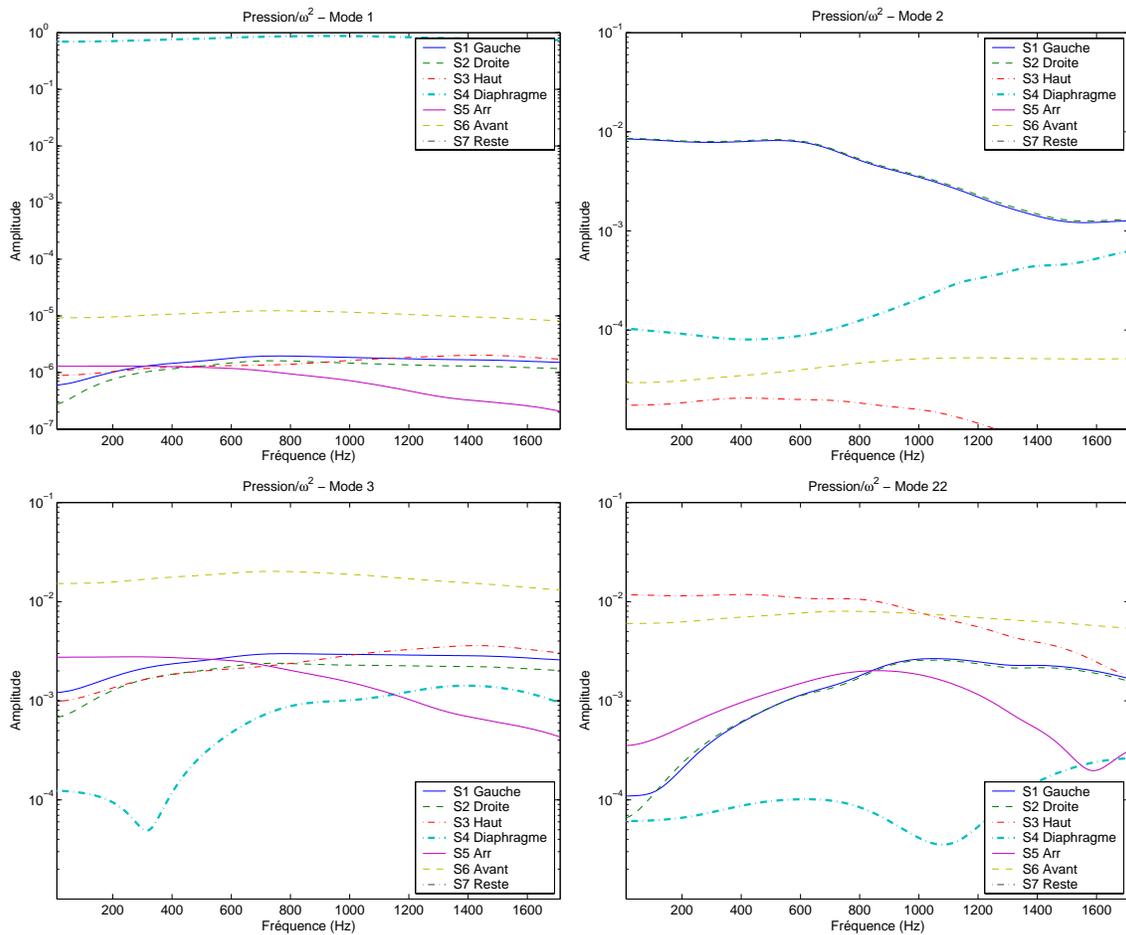


FIG. 3.51 – Champ de pression externe modal divisé par  $\omega^2$  - Modes 1,2,3 et 22

La figure 3.52 montre les contributions cumulées de chaque surface vibrante sur le champ acoustique rayonné pour les mêmes modes (1, 2, 3 et 22). L'intérêt de cette représentation est qu'elle permet d'ordonner pour chaque mode les surfaces vibrantes par ordre d'importance.

Le fait que l'on observe aucune courbe sur la première figure (mode 1) s'explique par ce que toute la contribution provient du diaphragme et que la courbe est totalement centrée autour de la valeur 1. On observe que les panneaux latéraux contribuent chacun à presque 50% au rayonnement acoustique du mode 2, avec une chute de 10% à partir de 800 Hz; les 20% manquants sont alors apportés par le diaphragme. Le panneau avant contribue à la majorité de l'énergie acoustique (60%-70%) rayonnée par le mode 3 sur l'ensemble de la bande fréquentielle. En ce qui concerne le mode 22, les panneaux haut et avant rayonnent énormément avec une participation du panneau haut qui chute avec la fréquence (chute de plus de 40% sur la bande de fréquence de calcul); les panneaux latéraux comblent l'énergie manquante.

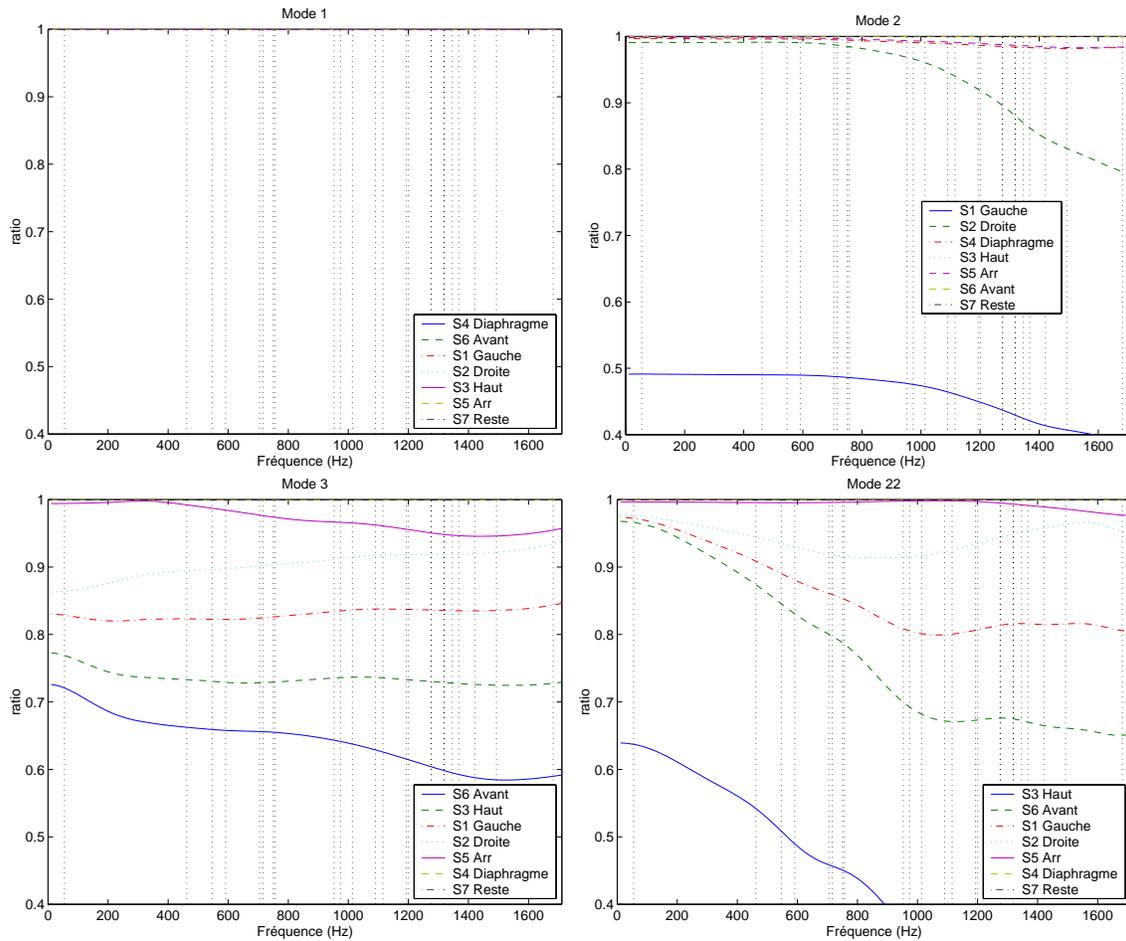


FIG. 3.52 – Contribution des surfaces vibrantes sur le champ de pression externe- Modes 1,2,3 et 22

On s'intéresse maintenant au rayonnement global de l'enceinte (on tient compte de l'ensemble des modes pondérés par les facteurs de participation) en comparant la contribution des surfaces vibrantes avec ou sans diaphragme (surface  $S_4$ ) en 171 fréquences (bande de fréquence 11-1711 Hz).

Comme on l'a vu en section 3.2, tout le signal utile doit provenir du diaphragme et être le moins possible perturbé par les autres surfaces vibrantes. On va donc veiller à diminuer au maximum la contribution des surfaces vibrantes autres que le diaphragme dans cette bande de fréquence. L'analyse de la contribution au rayonnement acoustique par mode nous a montré que pour certains modes les panneaux contribuent énormément à l'énergie acoustique rayonnée; ceci nous incite à les traiter tout en privilégiant le mode de piston où le rayonnement du diaphragme est important.

Les calculs sont effectués pour l'ensemble des modes présents dans cette bande de fréquence en plusieurs points de contrôle  $\zeta_i$  de la figure 3.48. L'amortissement apporté par les différents matériaux -on affecte un facteur de perte par groupe de matériaux (amortissement hystérétique)- est pris en compte dans le calcul des facteurs de participation  $q_r$ .

La pression sonore aux points de contrôle est évaluée à l'aide de l'équation (3.16) avec les facteurs de participation  $q_r$  correspondant au vecteur complexe

$$\begin{aligned} \{q_r(\omega)\} &= [Z_r]^{-1} \{F_r\} \\ &= [-\omega^2 [M_r] + (1 + i\eta_1) [K_{r1}] + \dots + (1 + i\eta_4) [K_{r4}]]^{-1} \{F_r\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

où les facteurs de perte  $\eta_i$  sont définis comme des valeurs constantes (amortissement hystérétique) par le tableau suivant

	Groupes	Facteur de perte
Suspension périphérique :	1	$\eta_1 = 0.2$
Acier :	2 :5 7 :10	$\eta_2 = 0.001$
Spider :	6	$\eta_3 = 0.1$
MDF :	11 :18	$\eta_4 = 0.01$

On peut ensuite imaginer utiliser une loi analytique ou tabulée des modules complexes décrivant les dépendances des matériaux viscoélastiques en fréquence, température et précontrainte (section 1.3.1).

La base de réduction utilisée est la base T3 précisée en section 1.3.2, mais on peut contrôler l'erreur sur le calcul des fonctions de transfert en utilisant la méthodologie d'itération sur les résidus (section 1.3.2).

La figure 3.53 montre le champ de pression calculé aux points de contrôle  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$ ,  $\zeta_6$  et  $\zeta_7$  créé par la force décentrée : on voit que les modes 3 (546 Hz), 4 (590 Hz) et 13 (1114 Hz) sont particulièrement perturbants. Le mode 3 correspond à de la flexion d'avant en arrière du coffret par rapport à la base encastrée et on conçoit bien qu'il contribue au rayonnement acoustique dans l'axe du HP. Le mouvement de basculement important du diaphragme dans le mode 4 apporte beaucoup d'énergie acoustique. Le mode 13 qui correspond à une translation de haut en bas de la masse du HP fait travailler en flexion la plupart des panneaux qui rayonnent beaucoup dans l'axe du HP.

Le point de contrôle  $\zeta_6$ , placé sur le côté droit à  $90^\circ$  du centre du diaphragme dans le plan du panneau avant, permet d'observer la perturbation créée par le mode 2 (460 Hz), qui est un mode de flexion latéral -de gauche à droite- du coffret. La pression au point de contrôle  $\zeta_7$  est perturbée par les modes 11, 13, 14 qui sont des modes où les panneaux travaillent beaucoup (en particulier le panneau haut pour le mode 14) et le mode 18 qui est le premier mode de déformation importante du diaphragme.

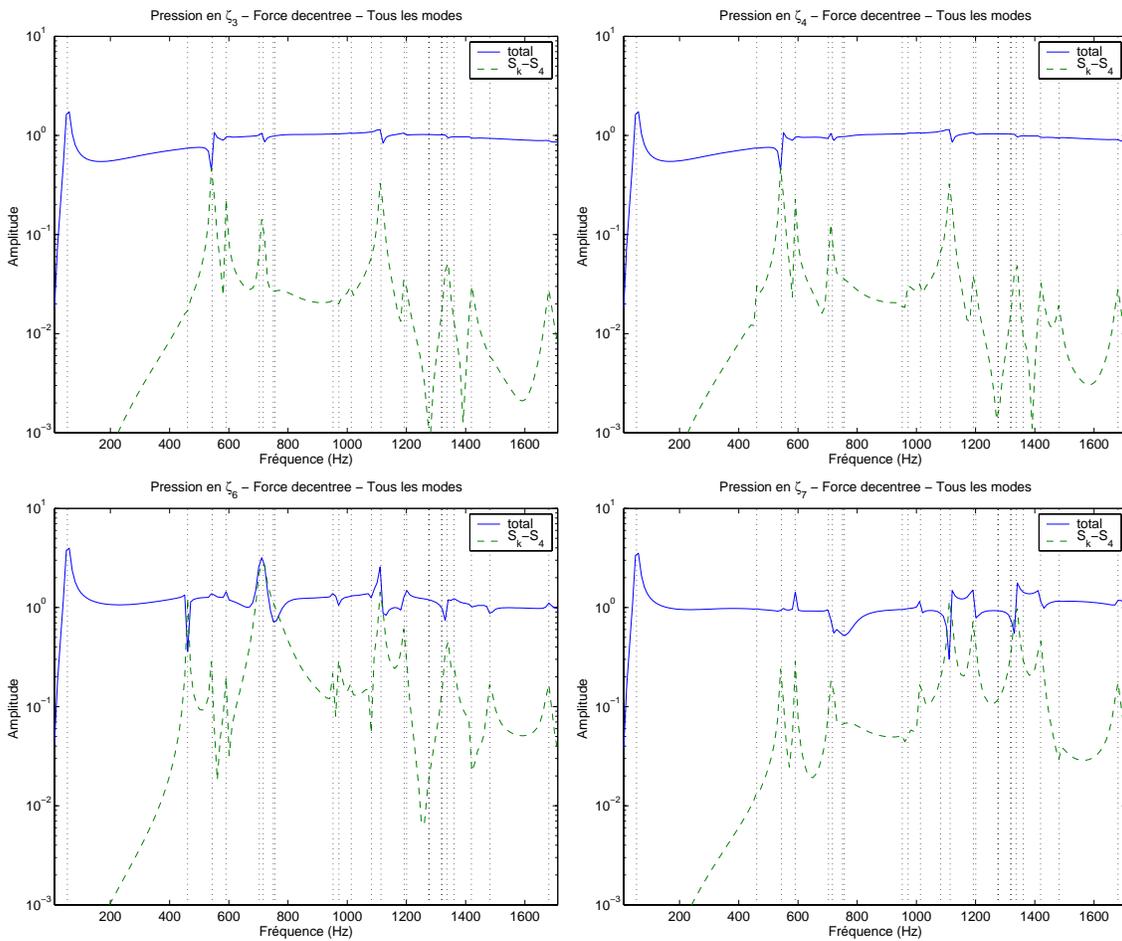


FIG. 3.53 – Pression en  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$ ,  $\zeta_6$  et  $\zeta_7$  - Force unitaire décentrée

### 3.4.4 Conception d'un traitement amortissant

L'analyse des modes propres de l'enceinte (section 3.3.2) met en effet en avant le rôle important joué par la masse du HP dans les modes perturbant le champ sonore rayonné (modes 3, 4 et 13). Suite à l'analyse de performance réalisée dans la section précédente, il semble particulièrement utile d'amortir les modes liés aux translations et rotations de la masse de l'aimant. Ces modes font travailler le coffret en flexion et sont source de perturbations importantes dans la réponse acoustique. La figure 3.54 présente le traitement proposé pour modifier l'allure des modes perturbants : huit tirants amortis sont fixés entre les huit sommets du coffret et quatre nœuds de la surface inférieure de l'aimant du HP.

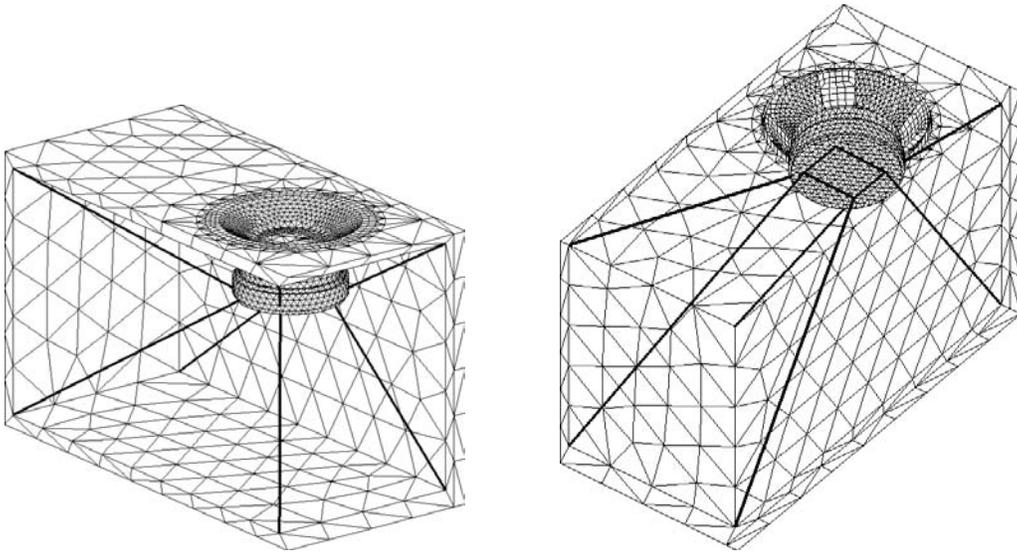


FIG. 3.54 – Position des tirants amortis - Deux vues

L'efficacité de l'amortissement au sein de la structure est très sensible aux valeurs paramétriques du traitement amortissant (module, coefficient d'amortissement, épaisseur, etc...) choisies dans le modèle. Si une solution trop raide est retenue, l'énergie de déformation ne s'y localisera pas ; si le traitement est trop souple, il ne reprendra pas suffisamment les efforts. Ces deux cas extrêmes où la dissipation est faible incitent à optimiser les valeurs paramétriques pour se trouver dans une zone efficace.

La figure 3.55 illustre ce phénomène en montrant l'évolution des résonances du transfert vitesse/force  $6771z/44z$  (point central du panneau avant/force décentrée) en fonction de la raideur des tirants amortis pour un facteur de perte  $\eta = 1$ . La raideur optimale pour laquelle le pouvoir amortissant des tirants s'exprime au mieux pour les modes 3 et 4 correspond à des poutres amorties en acier de diamètre 5 mm.

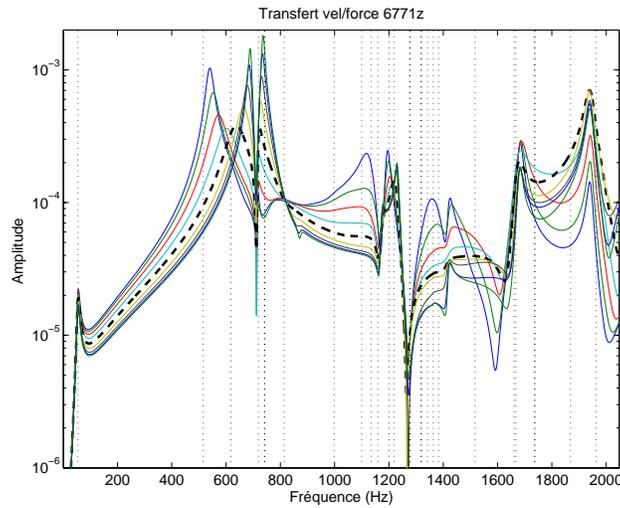


FIG. 3.55 – Transfert 6771z/44z - Optimisation de la raideur des tirants amortis pour  $\eta = 1$  - Traitillés gras : raideur optimale

La figure 3.56 compare les transferts calculés 6771z/44z pour l'enceinte initiale et pour l'enceinte équipée de tirants amortis dimensionnés avec la raideur optimale évaluée précédemment. On observe bien que tout en ayant préservé le mode de piston (mode 1), on a décalé la position des résonances, mais surtout bien réussi à réduire les niveaux des modes 3 et 4 et d'un certain nombre de modes suivants.

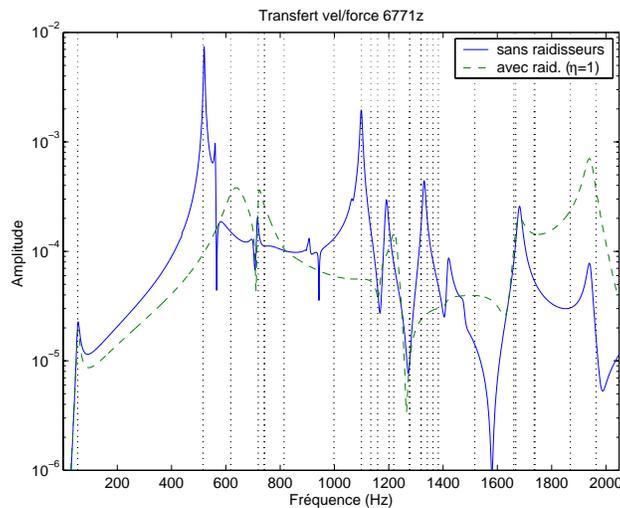


FIG. 3.56 – Transfert 6771z/44z sans et avec tirants amortis (raideur optimale)

La figure 3.57 présente le transfert calculé 6771z/44z pour différents niveaux d'amortissement des tirants. On voit que l'augmentation d'amortissement corrige principalement le niveau du mode 3, l'amplitude du mode 4 n'étant pas modifiée. Des atténuations de niveau intéressantes sont obtenues pour l'ensemble des modes suivants. La figure 3.58 présente le

mode 4 : c'est un mode de coffret qui fait travailler en flexion l'ensemble des panneaux, sans faire intervenir la masse du HP. Il est donc normal que ce mode qui ne fait donc pas travailler les tirants amortis n'est pas sensible à leur amortissement.

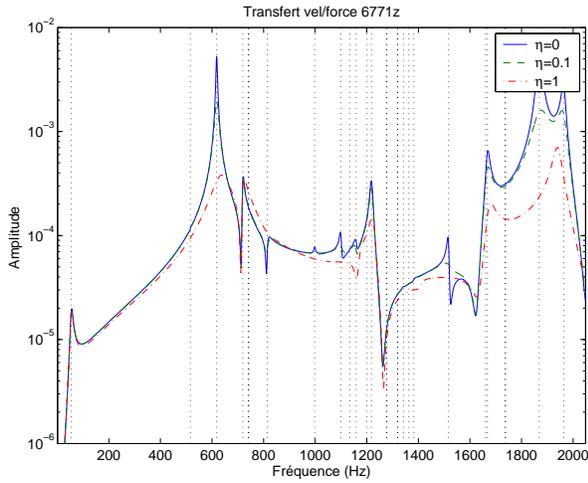


FIG. 3.57 – Transfert 6771z/44z - Influence du facteur de perte  $\eta$  des tirants amortis

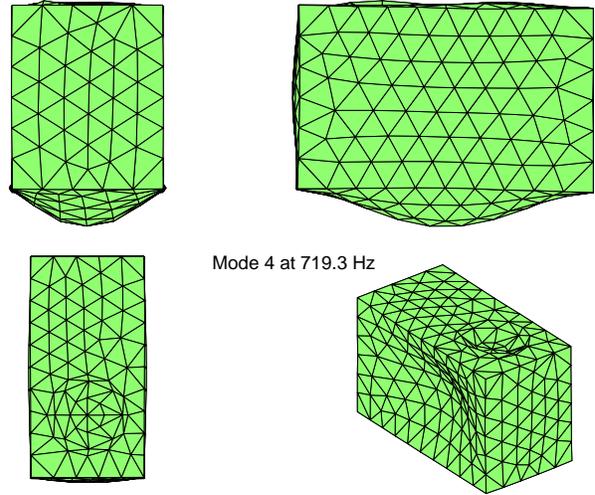


FIG. 3.58 – Mode 4 projeté sur le modèle éléments de frontière

La figure 3.59 qui présente la pression rayonnée au point de contrôle  $\zeta_3$  pour différents facteurs de perte des tirants mène à la même conclusion. L'augmentation du facteur de perte permet de lisser la pression totale et de diminuer les contributions des surfaces du coffret sauf pour le mode 4.

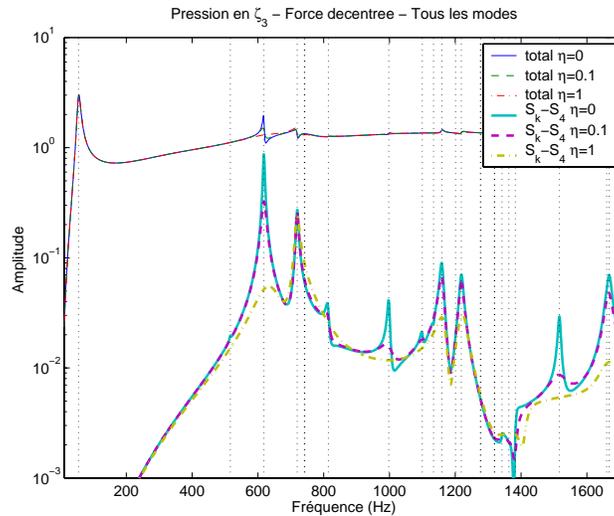


FIG. 3.59 – Pression en  $\zeta_3$  - Force unitaire décentrée - Influence du facteur de perte  $\eta$  des tirants amortis

La figure 3.60 montre la pression obtenue aux points de contrôle  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$ ,  $\zeta_6$  et  $\zeta_7$  : une comparaison avec les champs de pression calculés sur l'enceinte initiale (figure 3.53) rend compte du lissage intéressant obtenu pour la pression totale dû à l'atténuation d'un grand nombre de pics. Il reste néanmoins à corriger le mode 4. Dans des directions extrêmes (à  $90^\circ$  de l'axe du HP, points  $\zeta_6$  et  $\zeta_7$ ), les modes 10 et 12 deviennent également perturbants.

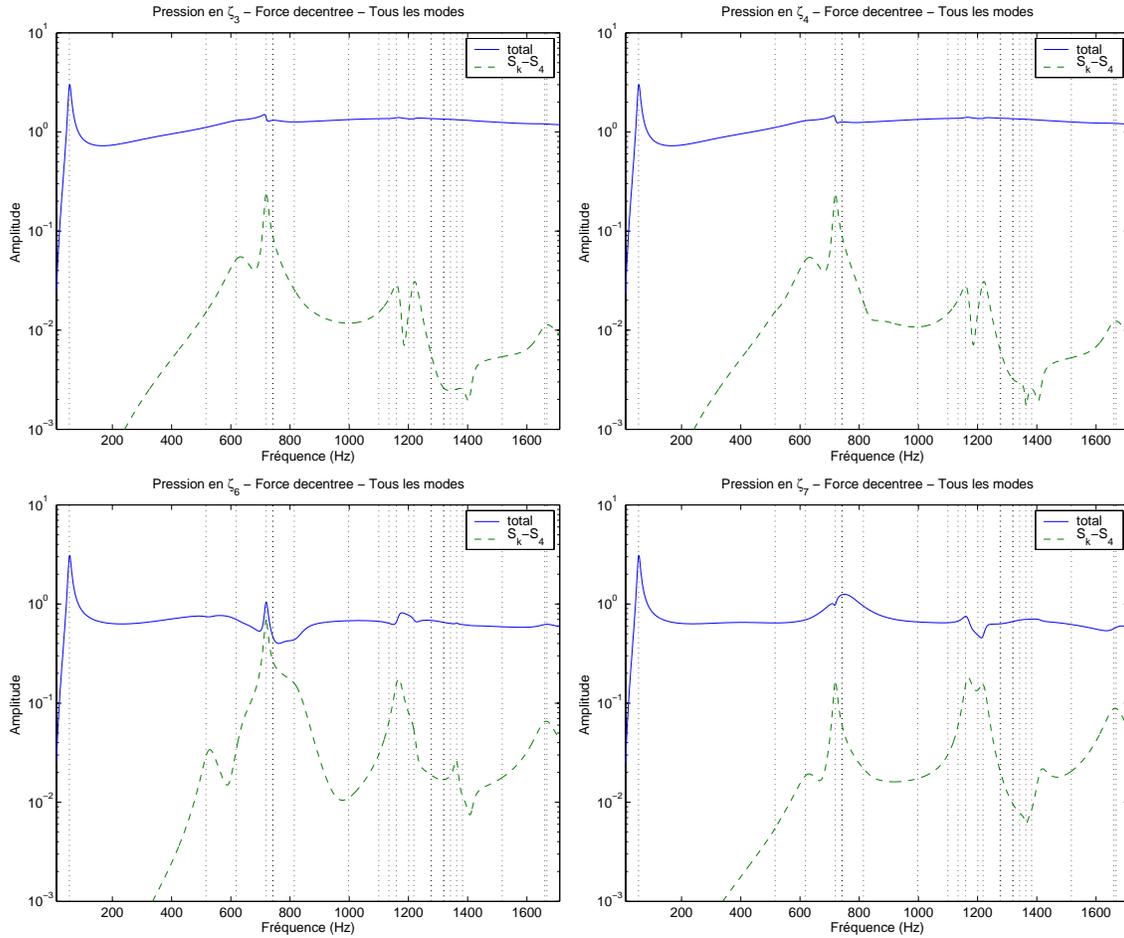


FIG. 3.60 – Pression en  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$ ,  $\zeta_6$  et  $\zeta_7$  - Force unitaire décentrée

La figure 3.61 montre l'influence sur la pression en  $\zeta_3$  des différentes surfaces vibrantes de l'enceinte. On voit une grande influence des surfaces latérales  $S_1$  et  $S_2$ , ainsi que du panneau arrière  $S_5$ . Une solution envisagée pour corriger le mode 4 pourrait être de placer une couche de matériau amortissant contraint ou des systèmes amortissants SPADD [79] sur la surface interne des panneaux  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_5$ .

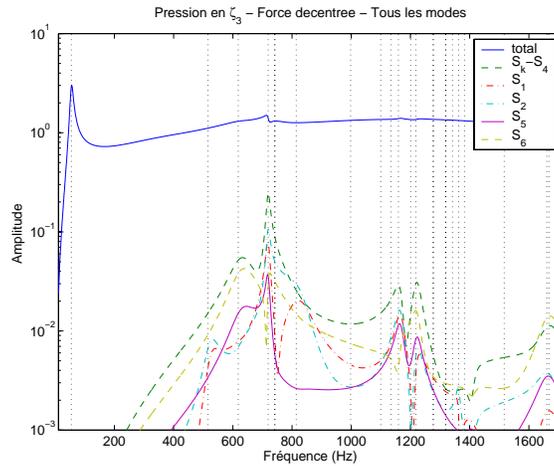


FIG. 3.61 – Participation des surfaces vibrantes à la pression en  $\zeta_3$

### 3.5 Conclusion

On a présenté au cours de ce chapitre la modélisation et la validation expérimentale du comportement vibroacoustique d'une enceinte acoustique sur la bande de fréquence 11-1711 Hz. Un recalage a été effectué sur le matériau constituant le coffret et sur les raideurs des suspensions, points critiques dans la conception de l'enceinte. On a mis en avant l'importance de prendre en compte l'air interne dans le calcul du mode de piston ; le fluide interne rajoute une raideur qui décale la fréquence associée. Une étude plus poussée devrait permettre d'expliquer la perturbation très amortie observée expérimentalement aux alentours de 1300 Hz sur la fonction de transfert vitesse/force du diaphragme.

À partir du modèle recalé, on a pu effectuer un calcul de pression dans le fluide externe par une méthode d'éléments de frontière et évaluer la participation des différents éléments vibrants de la structure sur le champ acoustique rayonné. La force électromagnétique a été modélisée comme une action/contre-réaction à la base de la bobine. On a pu observer que la majorité de l'énergie acoustique provient du diaphragme et qu'elle est principalement rayonnée par le mode de piston qui est le premier mode propre de la structure ; cette prédiction numérique rejoint le principe de fonctionnement théorique d'une enceinte. Une certaine quantité d'énergie acoustique est également rayonnée par le coffret ; une analyse modale permet

de repérer les modes propres participant à ce rayonnement perturbant. La masse du HP y joue un rôle important : du fait de sa position de porte-à-faux par rapport au panneau avant, elle participe, par ses mouvements, à faire travailler le panneau avant et par voie de conséquence l'ensemble du coffret.

On traite une partie de ces modes perturbants en mettant en place un traitement amortissant qui corrige l'amplitude des mouvements de la masse du HP : huit tirants amortis sont placés entre les coins du coffret et quatre nœuds de la surface inférieure de l'aimant du HP. On montre l'utilité d'une optimisation paramétrique qui permet de dimensionner au mieux ces tirants pour que leur pouvoir amortissant soit maximal dans la bande de fréquence considérée.



# Conclusion

## Résumé - Contributions

Les résultats de cette thèse concernent la prédiction numérique, la mise en œuvre et l'analyse expérimentale de traitements amortissants dans les structures, dont une application a visé l'amélioration du comportement vibroacoustique d'une enceinte acoustique.

Le chapitre 1 a présenté l'amortissement dans les structures par ajout de traitements viscoélastiques. Après avoir défini le module complexe dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, différents modèles paramétriques d'amortissement viscoélastique ont été présentés. Les paramètres de ces modèles sont identifiés à partir de mesures expérimentales qui mettent en évidence la dépendance du module complexe aux facteurs d'environnement fréquence, température et précontrainte. La prise en compte de cette dépendance dans les différents modèles et l'efficacité de leur implémentation dans la méthode des éléments finis ont été comparées. Une réflexion plus poussée sur la méthodologie d'itérations sur les résidus a été menée afin d'effectuer des calculs réduits de fonctions de transfert avec mesure de l'erreur *a priori*. Étant donné le gain de temps calcul, de stockage mémoire et leur simplicité d'utilisation, on a choisi d'utiliser directement les données expérimentales sous forme de lois tabulées. L'hypothèse de superposition permet d'obtenir ces lois sur une large bande de fréquence.

Au chapitre 2, un nouveau banc de mesure des propriétés mécaniques de films viscoélastiques a été conçu pour obtenir des lois tabulées en fréquence, température et précontrainte. La prise en compte de ce dernier facteur d'environnement et son étude expérimentale sont en effet primordiales si on veut connaître les effets de la mise en forme de tôles sandwich sur l'évolution de leurs propriétés mécaniques. Le banc permet de mesurer des échantillons de tôles sandwich acier-polymère-acier standard et d'induire de la précontrainte statique dans le polymère, jusqu'à un taux de cisaillement de 300 %, proche de la limite de délaminage de la tôle sandwich. La réalisation d'un banc exempt de résonances dans la bande fréquentielle d'intérêt étant très difficile, la caractérisation du module est réalisée sur des bandes relativement étroites. Un dimensionnement numérique statique et dynamique du banc a permis de comprendre et de définir un domaine fréquence-température-précontrainte adapté au matériau viscoélastique étudié. Des mesures expérimentales dynamiques à température et précontrainte contrôlées ont été effectuées sur l'échantillon BI2F fourni par Usinor [76]. Après

traitement des données mesurées, les hypothèses de superposition fréquence-température et fréquence-précontrainte ont été validées pour cet échantillon et ont permis d'obtenir une loi tabulée de ce film viscoélastique en large bande.

L'application finale présentée au chapitre 3 a été la modélisation et l'optimisation du traitement amortissant d'une enceinte acoustique afin d'améliorer son comportement vibroacoustique. Idéalement, le coffret doit avoir un caractère vibratoire neutre dans la bande fréquentielle d'écoute et tout le signal sonore utile doit provenir du déplacement vibratoire du seul diaphragme. Un modèle éléments finis d'une enceinte close PRAME [60] a été recalé sur un modèle expérimental avec prise en compte du fluide interne, ce qui a ensuite permis le calcul du champ acoustique rayonné par la structure dans le fluide externe à l'aide d'un modèle éléments de frontière. La méthode utilisée prend en compte dans le calcul acoustique l'amortissement propre à chaque matériau de l'enceinte. On a alors envisagé une solution à base de tirants amortis pour rendre plus neutre le comportement vibratoire du coffret sans affecter le mode de piston. Enfin, les paramètres définissant la raideur des tirants ont été optimisés.

### Perspectives

Dans l'objectif de poursuivre les travaux de recherche réalisés autour du banc de mesure, il serait intéressant de généraliser les mesures à d'autres types de plaques sandwich, à épaisseurs de cœur et de raideur différentes comme le modèle CVF10 présenté au chapitre 2. Il faudrait procéder à des comparaisons avec d'autres tests réalisés avec d'autres moyens de mesure sur les mêmes plaques sandwich et observer si on peut construire des nomogrammes équivalents. Ceci n'est réalisable que pour des essais en fréquence-température, aucun autre essai en fréquence-précontrainte n'ayant été relevé dans la littérature.

Une étude plus précise des temps de fluage de la plaque sandwich à des échelons de température et de précontrainte s'avère nécessaire pour garantir que la mesure dynamique a lieu aux points d'équilibre du film viscoélastique. Une automatisation des mesures permettrait d'effectuer des essais en de nombreux points de température et de précontrainte : des mesures dynamiques croisées des deux facteurs d'environnement seraient alors possible et mèneraient à l'obtention de nomogrammes à deux entrées (fréquences réduites en température et en précontrainte, simultanément).

L'utilisation dans les modèles numériques de lois tabulées en précontrainte nécessite la connaissance des contraintes résiduelles présentes dans le cœur viscoélastique de plaques sandwich lors de la mise en forme de la structure (pliage, coudage, emboutissage, etc.). Pour l'instant, la méthode des éléments finis ne permet pas de prédire le taux de cisaillement statique dans le film viscoélastique à partir de la seule donnée de la géométrie. Des recherches, basées sur la double connaissance des géométries initiale -avant mise en forme- et finale, restent à être menées.

---

En ce qui concerne l'enceinte acoustique PRAME, des difficultés pour recaler de façon satisfaisante le comportement vibroacoustique du modèle éléments finis sur le modèle expérimental ont été rencontrées. L'allure générale des modes de coffret et de diaphragme a été retrouvée mais l'interprétation du mode très amorti mesuré vers 1300 Hz sur le diaphragme se révèle complexe. En effet, l'allure très amortie de ce mode rend son identification expérimentale difficile et d'un autre côté le modèle numérique ne permet pas de retrouver une telle forme de mode dans les calculs de transferts. Des modes locaux de suspension, un couplage électromagnétique ou encore des modes acoustiques de cavité, en particulier du volume d'air présent derrière le spider, pourraient être une explication. Ces hypothèses seraient plus faciles à valider à l'aide d'un essai sur HP isolé qui n'a pas pu être réalisé.

Pour valider la proposition de traitement à base de tirants amortis, il faudrait les dimensionner à l'aide d'une modélisation éléments finis précise, faisant par exemple appel à des tubes sandwich (deux tubes de diamètres différents enfichés l'un dans l'autre et solidarisés à l'aide d'une colle polymérique définissant une zone viscoélastique torique, le mouvement différentiel des tubes faisant travailler la zone viscoélastique en cisaillement). Le calcul, effectué avec le modèle simplifié d'amortissement hystérétique, pourrait être remplacé par un calcul utilisant une représentation loi tabulée pour la zone viscoélastique, les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique étant déterminées à l'aide du banc proposé au chapitre 2. Une fois la géométrie des tirants dimensionnée (diamètre et raideur des tubes en acier, épaisseur du tore viscoélastique) et le matériau viscoélastique choisi, on pourrait alors envisager d'intégrer le traitement amortissant à l'enceinte réelle et de valider l'ensemble par des corrélations calcul-essais vibratoires et acoustiques.



# A

## Interaction Fluide-Structure

On formule le problème d'interaction fluide-structure en un problème global défini uniquement sur l'interface, associé à des problèmes locaux dans chaque sous-domaine. Ce problème, qui a pour inconnue le déplacement de l'interface  $\phi$ , est qualifié de sous-structuration dynamique.

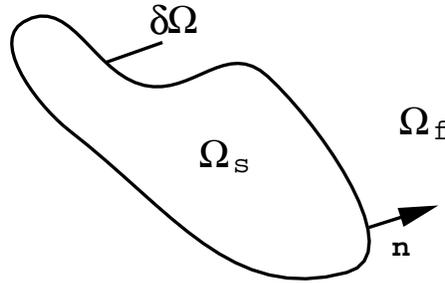


FIG. A.1 – *Interaction fluide-structure* -  $\Omega_f$  : sous-domaine fluide;  $\Omega_s$  : sous-domaine structure;  $\partial\Omega$  : interface fluide-structure;  $\mathbf{n}$  : normale extérieure

Les équations menant aux problèmes locaux pour le sous-domaine fluide  $\Omega_f$  et pour le sous-domaine structure  $\Omega_s$  sont développées en section A.1. On rappelle en section A.2 les équations locales vérifiées dans chaque sous-domaine et l'équilibre global de l'interface  $\partial\Omega$ , exprimé au sens faible.

En section A.3, on se pose le problème de la résolution de chaque sous-problème qui passe par une discrétisation en vue de sa résolution numérique; une méthode par équation intégrale et éléments de frontière est appliquée au sous-problème fluide et une méthode éléments finis au sous-problème élastodynamique. On est alors en mesure de résoudre le problème couplé à l'interface.

## A.1 Équations du modèle

### A.1.1 Acoustique linéaire

Le fluide, occupant le sous-domaine  $\Omega_f$ , est supposé au repos, homogène, irrotationnel et compressible. L'action de la pesanteur est supposée négligeable et nous désignons respectivement par  $p$ ,  $v$  et  $\rho_f$  les champs de surpression, de vitesse et la densité moyenne du fluide.

D'une part, l'équation de la dynamique linéarisée conduit, après une transformation de Fourier, à l'équation suivante :

$$i\rho_f\omega v(x, \omega) + \text{grad } p(x, \omega) = 0 \quad \forall x \in \Omega_f, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

où  $\omega$  et  $i$  désignent respectivement la pulsation et l'unité imaginaire. D'autre part, le caractère compressible combiné à l'équation de conservation de la masse [21] permet d'écrire, après linéarisation et transformation de Fourier, l'équation suivante

$$\rho_f \text{div } v(x, \omega) + i\omega\rho_f\kappa p(x, \omega) = 0 \quad (\text{A.2})$$

où  $\kappa$  désigne le coefficient de compressibilité que nous supposons homogène et indépendant de la fréquence.

La combinaison des équations (A.1) et (A.2) mène alors à l'équation de Helmholtz

$$\Delta p(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c_f^2} p(x, \omega) = 0 \quad \forall x \in \Omega_f, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

où  $c_f$  représente la célérité des ondes acoustiques et s'exprime en fonction des deux paramètres caractérisant le fluide :  $c_f = \sqrt{1/\kappa\rho_f}$ . Cette équation décrit le comportement d'un fluide non visqueux en l'absence de terme source. Nous renvoyons à [53] pour diverses extensions de l'équation (A.3), tenant compte de ces phénomènes.

Notons que le seul champ de surpression  $p$  permet de caractériser entièrement le comportement dynamique du fluide. Nous présentons par la suite les deux conditions limites auxquelles est soumis le fluide pour nos applications : les conditions limites à l'interface fluide-structure et les conditions limites de rayonnement à l'infini.

- Interface fluide-structure  $\partial\Omega$

Les conditions aux interfaces assurent le raccordement des variables du sous-domaine fluide  $\Omega_f$  avec le sous-domaine structure  $\Omega_s$  le long de l'interface fluide-structure  $\partial\Omega$ .

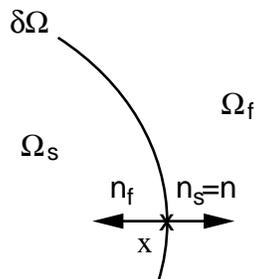


FIG. A.2 – Interface structure-fluide - Définition des normales en  $x$

En notant  $n$  la normale extérieure en  $x$  à  $\Omega_s$ , pour un fluide non visqueux, il y a égalité entre la composante normale des champs de déplacement associée au fluide et celle associée au solide au niveau de l'interface fluide-structure (figure A.2). Cette *compatibilité cinématique* se traduit par

$$\rho_f \omega^2 u(x, \omega) \cdot n(x) - \partial_n p(x, \omega) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

où  $\partial_n p = \text{grad } p \cdot n$ .

Un fluide non visqueux exerce sur le solide une force normale associée à la pression. L'équilibre des deux milieux conduit à la *compatibilité dynamique* suivante

$$t_n(u(x, \omega)) - p(x, \omega)n = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

où le vecteur contrainte  $t_n(u)$  s'appliquant sur l'interface de normale  $n$  s'écrit en fonction du tenseur des contraintes  $t_n(u) = \sigma(u) \cdot n$  (cf. équation A.10).

- Conditions de rayonnement sortant

Pour un domaine  $\Omega_f$  non borné, des conditions limites sont spécifiées à l'infini. Ces conditions imposent que les ondes s'éloignant de la source (force d'excitation) doivent s'atténuer (condition de décroissance) et assurent qu'aucune onde ne puisse provenir de l'infini (condition de radiation de Sommerfeld sortante).

Cette dernière condition, que nous détaillons, consiste à imposer à la surpression  $p$  de suivre un comportement d'onde plane à l'infini.

Pour un milieu fluide caractérisé par sa masse volumique et sa vitesse de propagation des ondes  $c_f$ , le mouvement de la composante harmonique (de pulsation  $\omega$ ) d'une onde plane se propageant selon le sens des  $x$  positifs s'écrit en fonction du temps  $t$

$$p(x, t) = p_0 e^{i\omega(t - |x|/c_f)} = p_0 e^{i(\omega t - k|x|)} \quad (\text{A.6})$$

avec  $k = \omega/c_f$  le nombre d'onde et  $p_0$  la valeur de la pression en  $x = 0$  et  $t = 0$ .

Son impédance dans la direction de propagation  $n$  s'écrit dans le domaine fréquentiel

$$\partial_n p(x, \omega) = -ikp(x, \omega). \quad (\text{A.7})$$

La condition de radiation de Sommerfeld sortante pour le champ de surpression  $p$  se traduit par l'écriture limite de l'équation (A.7)

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|} (\partial_n p(x, \omega) + ikp(x, \omega)) = 0 \quad \text{avec } n(x) = \frac{x}{\|x\|}. \quad (\text{A.8})$$

### A.1.2 Élastodynamique linéaire

Le milieu solide, occupant le sous-domaine  $\Omega_s$ , suit un comportement élastique linéaire, caractérisé par les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . En outre, sa densité est notée  $\rho_s$  et le champ de déplacement décrivant la dynamique de ce milieu est noté  $u$ .

À une fréquence donnée  $\omega$  et pour tout  $x \in \Omega_s$ , on associe à  $u(x, \omega)$  le tenseur des déformations, noté  $\varepsilon((u(x, \omega)))$ , et le tenseur des contraintes, noté  $\sigma(u(x, \omega))$ , définis pour chaque matériau par

$$\begin{cases} \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\text{grad } u + \text{grad }^T u) \\ \sigma(u) = \lambda \text{div } (u)I + 2\mu\varepsilon(u) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

où  $I$  désigne la matrice identité.

Le vecteur contrainte  $t_n(u(x, \omega))$  s'appliquant en un point  $x$  situé sur une surface (suffisamment régulière) orientée par la normale  $n$  en ce point s'écrit

$$t_n(u(x, \omega)) = \sigma(u(x, \omega)).n(x). \quad (\text{A.10})$$

Dans l'hypothèse des petits déplacements, l'équation de la dynamique pour le domaine solide déformable  $\Omega_s$  soumis à une force extérieure volumique  $f$  s'écrit dans le domaine fréquentiel

$$\text{div } (\sigma(u(x, \omega))) + f(x, \omega) = -\rho_s \omega^2 u(x, \omega) \quad \forall x \in \Omega_f, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{A.11})$$

et conduit après prise en compte de l'équation (A.9) à l'équation de Navier

$$\Delta^* u(x, \omega) + f(x, \omega) = -\rho_s \omega^2 u(x, \omega) \quad \forall x \in \Omega_f, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{A.12})$$

où l'opérateur  $\Delta^*$  s'exprime comme suit

$$\Delta^* u(x, \omega) = (\lambda + \mu) \text{grad } (\text{div } u(x, \omega)) + \mu \Delta u(x, \omega). \quad (\text{A.13})$$

Notons que l'opérateur  $\Delta^*$  dépend du milieu dans lequel il est défini par l'intermédiaire des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

Lorsque le comportement du milieu solide n'est pas parfaitement élastique, des processus dissipatifs interviennent. L'amortissement d'un tel milieu peut être pris en compte dans la loi de comportement en introduisant une composante complexe dans les coefficients de Lamé

$$\begin{cases} \lambda^* = \lambda(1 + i(\beta_\lambda + \omega\eta_\lambda)) \\ \mu^* = \mu(1 + i(\beta_\mu + \omega\eta_\mu)) \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où les coefficients  $\eta_\lambda$  et  $\eta_\mu$  déterminent la composante visqueuse de l'amortissement introduisant un déphasage croissant avec la fréquence tandis que les paramètres  $\beta_\lambda$  et  $\beta_\mu$  correspondent à l'amortissement hystérétique, indépendants de la fréquence (cf. chapitre 1).

• Conditions limites

Les conditions aux interfaces assurant le raccordement des variables du sous-domaine structure  $\Omega_s$  avec le sous-domaine fluide  $\Omega_f$  le long de l'interface fluide-structure sont évoquées au paragraphe *Interface fluide-structure* de la section A.1.1 (équations (A.4) et (A.5)).

Nous ajoutons le cas d'une interface structure-air  $\partial\Omega$  où la pression de l'air est négligée (surface libre). Dans ce cas, la *compatibilité dynamique* conduit à

$$t_{n(x)}(u(x, \omega)) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Équations continues

### A.2.1 Équation locale fluide

Le champ de pression  $p$  vérifie le système suivant, exprimé dans le domaine fréquentiel à la pulsation  $\omega$

$$\begin{cases} \Delta p + \frac{\omega^2}{c_f^2} p = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \partial_n p = \rho_f \omega^2 \phi \cdot n & \text{sur } \partial\Omega \\ + \text{CR de Sommerfeld} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

où on rappelle que  $c_f$  est la célérité des ondes dans le fluide et  $\rho_f$  la densité volumique du fluide.

On a  $\partial_n p = \text{grad } p \cdot n$  suivant la normale  $n$  extérieure au domaine structure  $\Omega_s$  (cf. figure A.1) et  $\phi \cdot n$  est la composante normale à l'interface du déplacement  $\phi$  inconnue du problème global (A.18).

## A.2.2 Équation locale structure

Le champ de déplacement  $u$  vérifie le système suivant, exprimé dans le domaine fréquentiel à la pulsation  $\omega$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(u) + f = -\rho_s \omega^2 u & \text{dans } \Omega_s \\ u = \phi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

où  $\rho_s$  est la densité volumique de la structure.  $\phi$  est le déplacement de l'interface, inconnue du problème global (A.18).

## A.2.3 Équilibre global de l'interface

On écrit au sens faible l'équilibre dynamique de l'interface  $\partial\Omega$ . L'équation (A.5) devient

$$\int_{\partial\Omega} (t_n(u(\phi)) - p(\phi)n) \cdot v dS = 0 \quad (\text{A.18})$$

où  $t_n(u) = \sigma(u) \cdot n$  et  $v$  est une fonction quelconque cinématiquement admissible.

## A.3 Résolution [19]

### A.3.1 Sous-domaine fluide

La formulation variationnelle du problème fluide (A.16) s'écrit dans  $\Omega_f$

$$\int_{\Omega_f} (\Delta p + \frac{\omega^2}{c_f^2} p) v d\Omega = 0 \quad (\text{A.19})$$

où  $v$  est une fonction quelconque cinématiquement admissible.

Une première intégration par partie au terme de gauche mène à

$$- \int_{\Omega_f} \operatorname{grad} p \operatorname{grad} v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad} p \cdot n v dS + \frac{\omega^2}{c_f^2} \int_{\Omega_f} p v d\Omega = 0. \quad (\text{A.20})$$

Si on applique une double intégration par parties au terme de gauche, on aboutit à

$$\int_{\Omega_f} \Delta p v d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad} v \cdot n p dS + \int_{\partial\Omega} \operatorname{grad} p \cdot n v dS + \int_{\Omega_f} p \Delta v d\Omega. \quad (\text{A.21})$$

En combinant les équations (A.19) et (A.21), on obtient

$$- \int_{\partial\Omega} \partial_n v p dS + \int_{\partial\Omega} \partial_n p v dS + \int_{\Omega_f} p (\Delta v + \frac{\omega^2}{c_f^2} v) d\Omega = 0 \quad (\text{A.22})$$

avec  $\partial_n v = \operatorname{grad} v \cdot n$  et  $\partial_n p = \operatorname{grad} p \cdot n$ .

Nous avons besoin de définir les fonctions de Green. La solution élémentaire de Green du problème local défini sur  $\Omega_f$  étendu à un milieu infini de même caractéristique que  $\Omega_f$ , est une solution associée à une source unidirectionnelle unitaire  $S(x) = -\delta_{x-\zeta}$  appliquée en  $\zeta$ , qui satisfait des conditions de radiation de Sommerfeld sortante à l'infini (A.8). Les solutions élémentaires en pression et en "déplacement" au point  $x$  induites par la source sont notées  $P_G^\zeta(x) = P_G(x, \zeta)$  et  $\partial_n P_G^\zeta(x) = \partial_n P_G(x, \zeta)$ .

Les fonctions de Green du milieu acoustique vérifient l'équation d'Helmholtz (A.3) en présence du terme source  $\delta_{x-\zeta}$

$$\Delta P_G^\zeta(x) + \frac{\omega^2}{c_f^2} P_G^\zeta(x) + \delta_{x-\zeta} = 0 \quad \forall \zeta \in \Omega_f, \forall x \in \partial\Omega, \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{A.23})$$

En posant  $v = P_G^\zeta$  dans l'équation (A.22) et en utilisant la relation (A.23), on obtient la formulation intégrale

$$\int_{\partial\Omega} \left[ P_G^\zeta \partial_n p - p \partial_n P_G^\zeta \right] dS = \int_{\Omega_f} p \delta_{x-\zeta} d\Omega. \quad (\text{A.24})$$

Si  $\zeta$  n'appartient pas à la frontière du domaine  $\partial\Omega$ , l'intégration du membre de droite est immédiate. On obtient la *représentation intégrale* en tout point régulier

$$\int_{\partial\Omega} \left[ P_G^\zeta \partial_n p - p \partial_n P_G^\zeta \right] dS = \begin{cases} p(\zeta) & \text{si } \zeta \in \Omega_f \\ 0 & \text{si } \zeta \notin \Omega_f \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

Si  $\zeta$  appartient à la frontière du domaine, l'intégration de la formule (A.24) se fait par passage à la limite. On obtient l'*équation intégrale* en tout point régulier

$$\int_{\partial\Omega} \left[ P_G^\zeta \partial_n p - p \partial_n P_G^\zeta \right] dS = \frac{1}{2} p(\zeta). \quad (\text{A.26})$$

La *formulation intégrale* de la solution du problème (A.16) s'écrit donc

$$\begin{cases} \text{Trouver } (p, \phi) \text{ tel que } \forall x \in \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \left[ P_G^\zeta \partial_n p - p \partial_n P_G^\zeta \right] dS = \frac{1}{2} p(\zeta) \\ \text{avec } \partial_n p = \rho_f \omega^2 \phi \cdot n \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Si ce problème est résolu, on a pour  $\zeta \in \Omega_f$

$$p(\zeta) = \int_{\partial\Omega} \left[ P_G^\zeta \partial_n p - p \partial_n P_G^\zeta \right] dS. \quad (\text{A.28})$$

Pour résoudre le problème (A.27), on approche la frontière  $\partial\Omega$  par  $N_e$  éléments de frontière et on suppose les champs  $\partial_n p$  et  $p$  constants sur chaque élément du maillage. On peut les décomposer suivant les fonctions de base de ces éléments

$$\partial_n p(x) = \sum_{E=1..N_e} p_E^{dn} \psi_E(x); \quad p(x) = \sum_{E=1..N_e} p_E \psi_E(x). \quad (\text{A.29})$$

Ce qui permet d'écrire une version discrétisée du problème (A.27)

$$\Sigma_E \partial_n p_E \int_{\partial\Omega} P_G^\zeta(x) \psi_E(x) dS - \Sigma_E p_E \int_{\partial\Omega} \psi_E(x) \partial_n P_G^\zeta(x) dS = \Sigma_E p_E \frac{1}{2} \delta_{x-\zeta} \psi_E(x). \quad (\text{A.30})$$

Les fonctions de base  $\psi_E$  sont nulles sur tout élément autre que l'élément  $E$ , les intégrales sur la frontière se réduisent à des intégrales sur l'élément  $E$ , d'où

$$\Sigma_E \partial_n p_E \int_E P_G^\zeta(x_E) \psi_E(x_E) dS = \Sigma_E p_E \left[ \int_E \partial_n P_G^\zeta(x_E) \psi_E(x_E) dS + \frac{1}{2} \delta_{x_E-\zeta} \psi_E(x_E) \right]. \quad (\text{A.31})$$

En choisissant le point  $\zeta$  qu'on note  $\zeta_F$  au centre de gravité de l'élément  $F$  et en notant  $\delta_{x_E-\zeta_F} = \delta_{EF}$ , on obtient

$$\Sigma_E \partial_n p_E \int_E P_G^\zeta(x_E) \psi_E(x_E) dS = \Sigma_E p_E \left[ \int_E \partial_n P_G^\zeta(x_E) \psi_E(x_E) dS + \frac{1}{2} \delta_{EF} \psi_E(x_E) \right] \quad (\text{A.32})$$

qui d'un point de vue matriciel s'écrit

$$[P_G] \{\partial_n p\} = [\partial_n P_G] \{p\} \quad (\text{A.33})$$

avec

$$\begin{aligned} - \{\partial_n p\} &= \{p_1^{dn} \dots p_{N_e}^{dn}\}^T; \\ - \{p\} &= \{p_1 \dots p_{N_e}\}^T; \\ - [P_G] &= \left[ \int_E P_G^{\zeta_F}(x_E) \psi_E(x_E) dS \right]; \\ - [\partial_n P_G] &= \left[ \int_E \partial_n P_G^{\zeta_F}(x_E) \psi_E(x_E) dS + \frac{1}{2} \delta_{EF} \psi_E(x_E) \right]. \end{aligned}$$

### A.3.2 Sous-domaine structure

La formulation variationnelle du problème élastodynamique (A.17) s'écrit dans  $\Omega_s$

$$\int_{\Omega_s} (\text{div } \sigma(u) + \rho_s \omega^2 u) v d\Omega + \int_{\Omega_s} f v d\Omega = 0 \quad (\text{A.34})$$

avec  $v$  une fonction test quelconque cinématiquement admissible. On applique une intégration par partie au terme de gauche

$$\int_{\Omega_s} \text{div } \sigma(u) v = - \int_{\Omega_s} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega + \int_{\partial\Omega} t_n(u) \cdot v dS \quad (\text{A.35})$$

où  $t_n(u) = \sigma(u) \cdot n$ .

En combinant les équations (A.34) et (A.35) et en contraignant la fonction  $v$  à être nulle sur l'interface  $\partial\Omega$ , l'équation (A.34) se réécrit

$$\int_{\Omega_s} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u v d\Omega = \int_{\Omega_s} f v d\Omega. \quad (\text{A.36})$$

La *formulation variationnelle* du problème (A.17) s'énonce donc comme

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \phi) \text{ tel que } \forall v \text{ vérifiant } v|_{\partial\Omega} = 0 \\ \int_{\Omega_s} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u v d\Omega - \int_{\Omega_s} f v d\Omega = 0 \\ u = \phi \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Soit  $[\Phi] = \{\Phi_i\}_{i \in 1..N}$  une base orthonormée du sous-espace vectoriel associé à  $\Omega_s$ ; on décompose  $u$  sur cette base *i.e*  $u = \sum_i u_i \Phi_i$  et on prend  $v = \Phi_j \forall j \in 1..N$ . Ceci permet d'écrire une version discrétisée du problème (A.17)

$$\sum_i u_i \left\{ \int_{\Omega_s} \sigma(\Phi_i) : \varepsilon(\Phi_j) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s \Phi_i \Phi_j d\Omega \right\} = \int_{\Omega_s} f \Phi_j d\Omega \quad \forall j \in [1..N] \quad (\text{A.38})$$

du fait de la linéarité du tenseur contrainte  $\sigma$ . Ceci mène directement à l'écriture matricielle suivante

$$([K] - \omega^2 [M]) \{u(\omega)\} = \{F\} \quad (\text{A.39})$$

avec

- $[K]$  la matrice de raideur de la structure,  $[K] = \left[ \int_{\Omega_s} \sigma(\Phi_i) : \varepsilon(\Phi_j) d\Omega \right]$ ;
- $[M]$  la matrice de masse de la structure,  $[M] = \left[ \int_{\Omega_s} \rho_s \Phi_i \Phi_j d\Omega \right]$ ;
- $\{F\} = \left\{ \int_{\Omega_s} f \Phi_j d\Omega \right\}$  les forces extérieures à la structure.

### A.3.3 Équilibre global

Le terme de gauche de la formulation variationnelle (A.18) après une intégration par parties inverse et utilisation de l'équation locale structure (A.17) devient

$$\int_{\partial\Omega} t_n(u) v dS = \int_{\Omega_s} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u v d\Omega - \int_{\Omega_s} f v d\Omega. \quad (\text{A.40})$$

L'équilibre global se réécrit alors comme

$$\int_{\Omega_s} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u v d\Omega - \int_{\Omega_s} f v d\Omega - \int_{\partial\Omega} p n \cdot v dS = 0. \quad (\text{A.41})$$

On remarque que le terme de droite qui a trait à la pression normale à l'interface est linéaire en  $u$  en utilisant la relation matricielle (A.33) et la condition limite de l'équation (A.27)

$$p = p(u) = [\partial_n P_G]^{-1} [P_G] \{\partial_n p(u)\} = [\partial_n P_G]^{-1} [P_G] \rho_f \omega^2 u \cdot n. \quad (\text{A.42})$$

En introduisant la même base orthonormée du sous-espace vectoriel associé à  $\Omega_s$  que pour la discrétisation de la formulation variationnelle (A.37), on écrit  $u = \sum_i u_i \Phi_i$  et  $p(u) = p(\sum_i u_i \Phi_i) = \sum_i u_i p(\Phi_i)$ .  $v$  prend successivement les valeurs des fonctions de base  $\phi_j : v = \Phi_j \forall j \in 1..N$ . Ceci permet d'écrire une version discrétisée de l'équation (A.41)

$$([K] - \omega^2 [M] + Z_f(\omega)) \{u(\omega)\} = \{F\} \quad (\text{A.43})$$

avec  $[Z_f] = \left[ \int_{\partial\Omega} p(\Phi_i) n \cdot \Phi_j dS \right]$  l'impédance du milieu fluide  $\Omega_f$ . Les matrices de masse et raideur de la structure  $[M]$  et  $[K]$  et le vecteur des forces extérieures  $\{F\}$  ont été définis en section A.3.2.

La résolution de l'équation intégrale du problème local dans le fluide fournit la matrice  $[Z_f]$ . La base de déformées  $[\Phi]$  de la structure et ses matrices de raideur et masse sont données par une méthode éléments finis. À une fréquence donnée  $\omega$ , la seule inconnue du problème est le vecteur des coordonnées généralisées  $\{u(\omega)\}$ . Il est déterminé par inversion du membre de gauche de l'équation (A.43).

# Bibliographie

- [1] *LMS CADA-X, the System Solution for Integrated Test Laboratory*. Leuven Measurements & Systems, Leuven, Belgium, 1990.
- [2] Davis Acoustics. Fabricant de haut-parleurs et d'enceintes. <http://www.davis-acoustics.com>.
- [3] B.R. Allen. A direct complex stiffness test system for viscoelastic material properties. *Proceedings of Smart Structures and Materials - San Diego, USA*, February 1996.
- [4] M.F. Ashby and D.R.H. Jones. *Engineering Materials : an introduction to their properties and applications*. Pergamon Press, 1982.
- [5] Juha Backman. Effect of panel damping on loudspeaker enclosure vibration. *Audio Engineering Society 101st Convention, Los Angeles, CA, USA*, November 1996.
- [6] L.R. Bagley and P.J. Torvik. Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 21(5) :741–748, 1983.
- [7] E. Balmès. Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization. *International Modal Analysis Conference*, pages 540–546, 1996.
- [8] E. Balmès. *Modèles analytiques réduits et modèles expérimentaux complets en dynamique des structures*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches soutenue à l'Université Pierre et Marie Curie le 10 juillet 1997, 1997.
- [9] E. Balmès and A. Bobillot. Analysis and design tools for structures damped by viscoelastic materials. *International Modal Analysis Conference*, February 2002.
- [10] E. Balmès and S. Germès. Tools for viscoelastic damping treatment design. application to an automotive floor panel. *International Seminar on Modal Analysis*, September 2002.
- [11] E. Balmès and J.M. Leclère. *Structural Dynamics Toolbox 5.0 (for use with MATLAB)*. SDTools, Paris, France, <http://www.sdtools.com>, July 2002.
- [12] E. Barkanov. Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :393–403, 1999.
- [13] D.A. Barlow. Rigidity for loudspeaker diaphragms. *Wireless World*, pages 564–569, December 1958.

- [14] M. Baumgaerel and Winter H.H. Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data. *Rheologica Acta*, 28 :512–519, 1989.
- [15] C.W. Bert. Material damping : An introductory review of mathematical models, measures, and experimental techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 29(2) :129–153, 1973.
- [16] J.M. Biggerstaff and J.B. Kosmatka. Shear measurements of viscoelastic damping materials embedded in composite plates. *Proceedings of SPIE Symposium on Smart Structures and Materials*, 1999.
- [17] A. Bobillot. Méthodes de réduction appliquées au recalage - applications à la md-epc ariane 5. *Rapport Contractuel Aérospatiale 544279, Juillet*, 1999.
- [18] A. Bobillot. *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d’Ariane 5*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, <http://www.mssmat.ecp.fr/structures/REFERENCE/thesebobillot.pdf>, 2002.
- [19] M. Bonnet. *Equations intégrales de frontière*. CNRS Editions / Eyrolles, 1995.
- [20] L.I. Carrascosa, J.M. Busturia, and J.G. Gimenez. Global experimental modal analysis. a comparison of different methods. *International Modal Analysis Conference*, pages 311–321, 1985.
- [21] A. Chaigne and J. Laroche. *Fondements et Applications de l’Acoustique*. Cours Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, 1996.
- [22] R.M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity : an introduction*. Academic Press, 1982.
- [23] D. Clouteau. *Miss : Manuel scientifique, rev. 6.2*. Laboratoire MSSMat, Ecole Centrale de Paris, 1999.
- [24] A.B. Cohen. *Hi-Fi Loudspeakers and Enclosures*. Hayden, London, 1968.
- [25] M. Colloms. *High performances loudspeakers*. Pentech Press, London, 1991.
- [26] S.H. Crandall. The role of damping in vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 11(1) :3–18, 1970.
- [27] H. Di Benedetto and L. Francken. *Mechanical Tests for Bituminous Materials / Essais mécaniques pour les Matériaux bitumineux*. A.A. Balkema, Rotterdam Brookfield, 1997.
- [28] L. Duigou, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry. Une méthode itérative pour calculer l’amortissement des tôles sandwich. *Colloque National en Calcul De Structure*, pages 213–220, 2001.
- [29] Villamette Europe. Fabricant et distributeur de panneaux et produits à base de bois (mdf medite, mdf mediland, panneaux de particules darbo...). *Villamette Europe Ltd - Remondstown, Clonmel - Co. Tipperary - Ireland - <http://www.willamette-europe.com>*.
- [30] D.J. Ewins. *Modal Testing : Theory and Practice*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1984.
- [31] M.I. Friswell, D.J. Inman, and M.J. Lam. On the realisation of ghm models in viscoelasticity. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 8(11) :986–993, 1997.

- 
- [32] A.C. Galucio, J.F. Deü, and R. Ohayon. Utilisation des dérivées fractionnaires pour la modélisation et de l'amortissement de structures munies de matériaux viscoélastiques. *6ème Colloque National en Calcul des Structures*, 2003.
- [33] D.F. Golla and P.C. Hughes. Dynamics of viscoelastic structures – a time domain finite element formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 52 :897–906, 1985.
- [34] J.L. Halary. *Traitement pratique des résultats des essais de viscoélasticité p169-189 in Introduction à la mécanique des polymères*. Impl-Mecamat-Gfp-Apollor-Firtech- Christian G'Sell - Jean-Marc Haudin, 1998.
- [35] T.K. Hasselman. Modal coupling in lightly damped structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 14(11) :1627–1628, 1976.
- [36] J.K. Iverson. The theory of loudspeaker cabinet resonances. *J. Audio Engineering Society*, 1 :312–315, May 1978.
- [37] JMLab. *Ligne Utopia Béryllium - Cahier technique - <http://www.focal.tm.fr/>*. 2003.
- [38] J. Jouhanneau. *Notions élémentaires d'Acoustique*. Ed. Eyrolles, 1994.
- [39] G. Kergourlay and E. Balmès. Conception d'un banc de mesure des propriétés de films viscoélastiques. *J.Phys. IV France*, pages 161–168, Décembre 2002.
- [40] G. Kergourlay, E. Balmès, and D. Clouteau. Interface model reduction for efficient fem/bem coupling. *International Seminar on Modal Analysis, Leuven*, September 2000.
- [41] Komzsik L. *MSC/NASTRAN Numerical Methods User's Guide*. MacNeal Shwendler Corp., Los Angeles, CA, December, 1990.
- [42] G.A. Lesieutre and E. Bianchini. Time domain modeling of linear viscoelasticity using augmenting thermodynamic fields. *Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA paper 93-1550-CP*, pages 2101–2109, 1993.
- [43] G.A. Lesieutre and E. Bianchini. Time domain modeling of linear viscoelasticity using augmenting thermodynamic fields. *J. Vibration and Acoustics*, 117 :424–430, 1995.
- [44] G.A. Lesieutre and D.L. Mingori. Direct time-domain, finite element modelling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields (atf). *Structural Dynamics and Materials Conference, AIAA paper 89-1380-CP*, 1989.
- [45] R.M. Lin and S.F. Ling. Identification of damping characteristics of viscoelastically damped structures using vibration test results. *Proc. Inst. mech. Engrs. Part C : J. Mech. Engng. Sci.*, 210 :111–121, 1996.
- [46] Y. Liu. Calculation of discrete relaxation modulus and creep compliance in rheology. *Numerical Analysis Report, DAMTP 1998/NA13* - <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/NApapers/NA199813.ps.gz>, 1998.
- [47] P. Loyez. *Techniques des HP et Enceintes acoustiques*. Editions fréquences, Diffusion Eyrolles. 1996.
- [48] D.J. McTavish and P.C. Hugues. Modeling of linear viscoelastic space structures. *J. Vibration and Acoustics*, 115(1) :103–113, 1993.
- [49] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluid Structure Interaction*. J. Wiley & Sons, 1995.

- [50] I. Nakamura. Vibrational and acoustic characteristics of soundboard (acoustical research on the piano, part 3). *J. Acoust. Soc. Japan*, 14(6) :429–439, 1993.
- [51] A.D. Nashif, D.I.G. Jones, and J.P. Henderson. *Vibration Damping*. John Wiley and Sons, 1985.
- [52] H. Oberst and Frankenfeld. Über die dämpfung der biegeschwingungen dünner bleche durch fest haftende beläge. *Acustica*, 2 :181–194, 1952.
- [53] R. Ohayon and C. Soize. *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, 1996.
- [54] Z. Osinski. *Damping of vibrations*. A.A. Balkema Ed. (Rotterdam/Brookfield), 1998.
- [55] R. Othman. *Extension du champ d'application du système des barres de Hopkinson aux essais à moyennes vitesses de déformation*. Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 2002.
- [56] T.K. Pellinen, M.W. Witczak, and R.F. Bonaquist. Asphalt mix master curve construction using sigmoidal fitting function with non-linear least squares optimization technique. *15th Engineering Mechanics Conference*, 2002.
- [57] A.S. Plouin and E. Balmès. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. *International Modal Analysis Conference*, pages 1440–1446, 1998.
- [58] A.S. Plouin and E. Balmès. A test validated model of plates with constrained viscoelastic materials. *International Modal Analysis Conference*, pages 194–200, 1999.
- [59] A.S. Plouin and E. Balmès. Steel/viscoelastic/steel sandwich shells - computational methods and experimental validations. *International Modal Analysis Conference*, pages 384–390, 2000.
- [60] PRAME. Société prame, constructeur d'enceinte acoustique. *Erwan Le Pocher (Société Prame - 7, route Lannien - 29510 Edern - France - prame@libertysurf.fr*.
- [61] A. Preumont. *Vibration control of active structures, an introduction*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [62] T. Pritz. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 195(1) :103–115, 1996.
- [63] T. Pritz. Frequency dependances of complex moduli and complex poisson's ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 214(1) :83–104, 1998.
- [64] L.C. Rogers, C.D. Johnson, and D.A. Keinholz. The modal strain energy finite element method and its application to damped laminated beams. *Shock and Vibration Bulletin*, 51, 1981.
- [65] D. Ross, E.E. Ungar, and E.M. Kerwin. *Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate*, volume Structural Damping, Chap 3. Pergamon Press, New-York, 1950.
- [66] T.D. Rossing. *The Science of Sound*. 2nd Ed. Addison-Wesley, 1990.
- [67] G.M. Rowe, M.J. Sharrock, M.G. Bouldin, and R.N. Dongré. Advanced techniques to develop asphalt master curves from the bending beam rheometer. *39th International Petroleum Conference - Bratislava*, January 1999.

- 
- [68] J. Salençon. *Viscoélasticité*. Presse des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [69] A. Schmidt and L. Gaul. Finite elements implementation of viscoelastic constitutive stress-strain relations involving fractionnal time derivatives. *Constitutive Models for Rubbers II*, pages 79–89, 2001.
- [70] Richard H. Small. Closed-box loudspeaker systems-part 1 : Analysis. *J. Audio Engineering Society*, 20(10) :798, December 1972.
- [71] Richard H. Small. Vented-box loudspeakers systems-part 1 : Small-signal analysis. *J. Audio Engineering Society*, 21(5) :363, 1973.
- [72] P.W. Tappan. Loudspeaker enclosure walls. *J. Audio Engineering Society*, 1 :88–95, May 1978.
- [73] A. N. Thiele. Loudspeakers in vented boxes : Part 1. *J. Audio Engineering Society*, 19(5) :382, May 1971.
- [74] A. N. Thiele. Loudspeakers in vented boxes : Part 2. *J. Audio Engineering Society*, 19(6) :471, June 1971.
- [75] M.A. Trindade. *Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes*. Thèse CNAM, 2000.
- [76] USINOR. Fabricant d’acier. <http://www.usinor.com>.
- [77] M. Van Gorp and J. Palmen. Time-temperature superposition for polymeric blends. *The Society of Rheology Newsletter*, <http://www.rheology.org/sor/publications/rheologyb/jan98/vanGorpPalmen.PDF>, 1998.
- [78] C. Van’t Hof, P. Mohanty, and D.J. Rixen. Testing a dynamic mechanical analyser : influence of the measuring column dynamics. *International Modal Analysis Conference*, 2003.
- [79] P. Verdun and E. Balmès. Prospadd : outil d’aide à l’atténuation de la réponse vibro-acoustique des structures. *Association Aéronautique et Astronautique de France Convergence*, 2003.
- [80] G. Williams and D.C. Watts. Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function. *Transactions of the Faraday Society*, 66 :80–85, January 1970.
- [81] M.L. Williams, R.F. Landel, and J.D. Ferry. The temperature dependance of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass forming liquids. *Journal of American Chemical Society*, 77 :3701–3707, 1955.



# Résumé

L'amortissement est un moyen habituel de maîtrise vibratoire des structures (vibroacoustique, fatigue vibratoire). Un amortissement passif efficace peut être obtenu par l'ajout de traitements viscoélastiques au sein de la structure. Les propriétés mécaniques de tels matériaux dépendent non seulement de la fréquence, mais également de facteurs d'environnement telles que la précontrainte et la température. Leurs représentations, la modélisation éléments finis et les méthodes de résolution numérique habituellement appliquées aux structures amorties sont précisées, ainsi que de nouvelles techniques de réduction telles que la méthode d'itérations sur les résidus.

Un banc d'essai dynamique a été dimensionné et réalisé pour mesurer directement le module complexe de films viscoélastiques de plaques sandwich standard à des températures de 0-50 °C et sur la bande de fréquence 0-2000 Hz et, ce qui est nouveau, pour des taux de précontrainte statique de 0-300 %. Les mesures montrent que l'hypothèse de superposition fréquence-température peut être étendue à la précontrainte.

Le second objectif de ce travail est d'étudier et d'améliorer le comportement vibroacoustique d'une enceinte acoustique. Une modélisation éléments finis-éléments de frontière à basse fréquence (0-2000 Hz) est réalisée et validée par des mesures. Un traitement amortissant original est proposé et ses propriétés optimisées.

**Mots-clés:** *Amortissement, Viscoélasticité, Vibroacoustique, Enceinte Acoustique, Plaques Sandwich, Analyse Modale Expérimentale, Éléments Finis, Éléments de Frontière*

## Abstract

Damping augmentation is a common approach to vibration control in structures (vibroacoustics, vibration fatigue). Viscoelastic materials can be used to design efficient damping treatments. The mechanical properties of these materials however depend on frequency, but also on prestress and temperature. Traditional representations for viscoelastic materials, finite element design and computation methods for damped structures are presented along with new reduction techniques such as the Residual Iteration process.

A dynamic test bench has been designed and built to measure directly the complex stiffness of viscoelastic films of standard sandwich plates using an electrodynamic shaker in the frequency range of 1-2000 Hz, for temperatures of 0-50 °C and what is new, for static shear rates of 0-300 %. The tests reveal how the temperature-frequency superposition hypothesis can be extended to prestress.

The second objective of this work is to investigate and improve the vibroacoustic behaviour of an audio speaker. A finite/boundary element model is built and validated through measurements for the low frequency range (0-2000 Hz). An efficient damping treatment is proposed and its properties optimized.

**Keywords:** *Damping, Viscoelasticity, Vibroacoustics, Audio Speaker, Sandwich Plates, Experimental Modal Analysis, Finite Element, Boundary Element*

